দশম অধ্যায়

যোগজীকরণ (Integration)

10.1. নির্দিষ্ট যোগজ (ক্ষেত্রফল হিসাবে নির্দিষ্ট যোগজ)

ধরি, $y = f(x)$ সমীকরণটি একটি বক্ররেখা নির্দেশ করে এবং $f(x)$ ফাংশনটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন। a ও b নির্দিষ্ট এবং $b > a$.

$x = a, x = b$ বিন্দুতে দুইটি কোটি যথাক্রমে AC ও BE অঙ্কন করি। তাহলে $OA = a$ এবং $OB = b$, যখন O মূলবিন্দু। সুতরাং $AB = b - a$.

আমরা AB কে $x = a + h, a + 2h$...বিন্দুতে h দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করি যেন $nh = b - a$ বা, $b = a + nh$ হয়।

এখন $x = a + h, a + 2h$...... বিন্দুতে A_1D_1, A_2D_2..... কোটি অঙ্কন করি। তাহলে $[a, b]$ ব্যবধির মধ্যে ক্ষেত্রটি কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রে বিভক্ত হলো।

মনে করি, $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং x- অক্ষ ও $x = a, x = b$ দুইটি কোটি দ্বারা আবন্ধ ক্ষেত্র S দ্বারা সূচিত হলো।

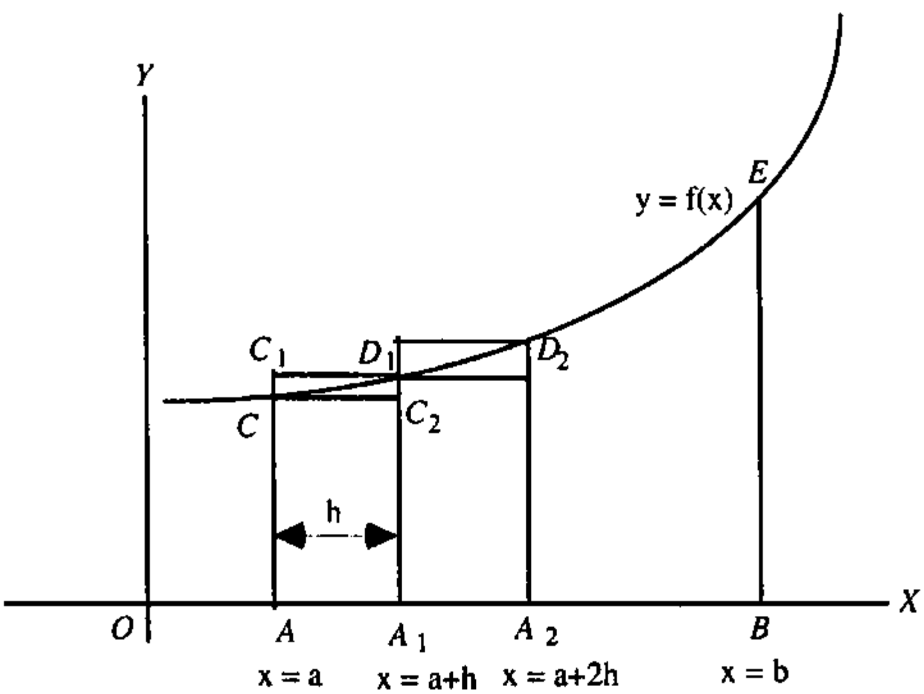
আবার, নিচের ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রগুলির (যথা : ACC_2A_1.....) ক্ষেত্রফলের সমষ্টি S_1 এবং উপরিভাগের ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রগুলির (যথা : $AC_1D_1A_1$....) ক্ষেত্রফলের সমষ্টি S_2 দ্বারা সূচিত হলে স্পষ্টত: $S_2 > S > S_1$. যেখানে,

$$S_1 = hf(a) + hf(a+h) + ... + h(a + \overline{n-1}.h) = h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) \text{ ..... (i)}$$

এবং $$S_2 = hf(a+h) + hf(a+2h) + ... + h(a+nh) = h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

$$= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) + ... + h(a + \overline{n-1}.h) + hf(b) - hf(a) \quad [\because b = a + nh]$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) + hf(b) - hf(a) \text{ ..... (ii)}$$



এখন n এর মান খুব বেশি বৃদ্ধি করলে অর্থাৎ $n \to \infty$ হলে $h \to 0$ হবে এবং (i) থেকে আমরা পাই,

$$S_1 = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) = \int_a^b f(x)\, dx$$

আবার (ii) থেকে পাই,

$$S_2 = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) = \int_a^b f(x)\, dx \text{ যেহেতু } \lim_{h \to 0} hf(a) = 0 \text{ এবং } \lim_{h \to 0} hf(b) = 0$$

$\Rightarrow S_1 = S_2 = S.$

সুতরাং $S = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx$

জ্যামিতিকভাবে, নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)\, dx$ কে $y = f(x)$, x-অক্ষ, $x = a$ এবং $x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে। এখানে a কে নিম্নপ্রান্ত এবং b কে উর্ধ্বপ্রান্ত বলা হয়।

10.2. প্রতিঅন্তরজ হিসাবে যোগজ

যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণের বিপরীত বা প্রতিঅন্তরজ প্রক্রিয়া (Integration is the inverse process of differentiation). যদি $\frac{d}{dx} \phi(x) = \phi'(x) = f(x)$ হয়, তবে $f(x)$ এর যোজিত ফল হবে $\phi(x)$. এ বিবৃতিটি আমরা $\int f(x)\, dx = \phi(x)$ সংকেতে লিখি। এখানে $\int$ প্রতীকটি লম্বা S বুঝায়। কারণ এটি Summation শব্দটির প্রথম অক্ষর যা যোগজ প্রক্রিয়ার অন্যদিক। কাজেই এ প্রতীকটি যোগজীকরণের জন্য ব্যবহার করা হয়। ফাংশন $f(x)$-এর পরে dx দ্বারা x-এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ বুঝায়। ফাংশন $f(x)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand) বলা হয়।

যেমন, $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, কাজেই $\cos x$ এর যোজিত ফল $\sin x$. অর্থাৎ, $\int \cos x\, dx = \sin x$.

10.3. নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য

মনে করি, x একটি স্বাধীন চলক এবং ফাংশন $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $F(x)$. চলক x এর মান a থেকে b-তে পরিবর্তনের ফলে $F(x)$ এর মানের যে পরিবর্তন হয় তাকে অর্থাৎ $F(b) - F(a)$ কে a এবং b সীমার মধ্যে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং একে $\int_a^b f(x)\, dx$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

$G(x)$ যদি $f(x)$ এর যেকোনো প্রতিঅন্তরজ হয় তবে, $\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$ এ ফলটি নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য নামে পরিচিত। অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\, dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$; এখানে a কে নিম্নপ্রান্ত এবং b কে উর্ধ্বপ্রান্ত বলে।

দ্রষ্টব্য : $\int_a^b f(x)\, dx$ এর মান নির্ণয়ের জন্য নিচের তিনটি ধাপে সমস্যাটি সমাধান করতে হবে ।

(i) অনির্দিষ্ট যোগজ $\int f(x)\, dx = F(x)$ নির্ণয় করতে হবে।

(ii) $F(x)$ কে তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে লিখে দক্ষিণ পার্শ্বে উপরে উর্ধ্বপ্রান্ত b এবং নিচে নিম্নপ্রান্ত a লিখতে হবে।

(iii) $F(x)$-এ $x = b$ এবং $x = a$ বসিয়ে $F(b) - F(a)$ নির্ণয় করতে হবে। এই মানটি নির্ণেয় নির্দিষ্ট যোগজ।

10.4. নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল

অনুচ্ছেদ 10.1 থেকে আমরা পেয়েছি, $y = f(x)$ বক্ররেখা, $x = a$, $x = b$ এবং x–অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\, \mathrm{d}x.$

10.4.1. দুইটি বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

মনে করি, $y_1 = f_1(x)$ ও $y_2 = f_2(x)$ দুইটি বক্ররেখা এবং $OM = a$, $ON = b$, $x = a$, $x = b$ বিন্দুতে x-অক্ষের উপর PM ও QN দুইটি লম্ব অংকন করি, যা বক্ররেখা দুইটিকে যথাক্রমে P, R এবং Q, S বিন্দুতে ছেদ করে।

$y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ বক্ররেখা এবং $x = a$, $x = b$ বিন্দুতে অংকিত দুইটি কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র PRSQ-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

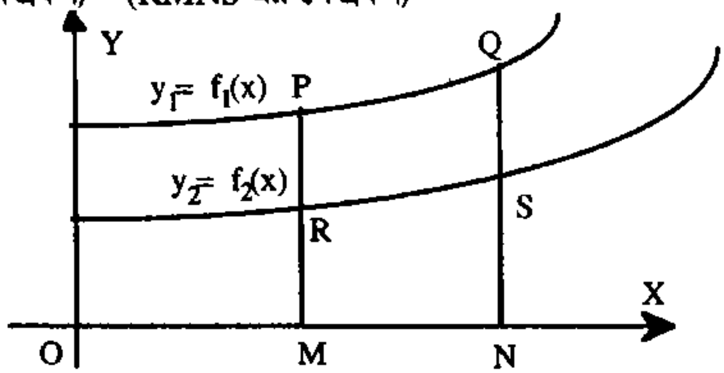
এখন PRSQ-এর ক্ষেত্রফল = (PMNQ এর ক্ষেত্রফল) – (RMNS এর ক্ষেত্রফল)

$$= \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b (y_1 - y_2)\,\mathrm{d}x,$$

যেখানে $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$



মন্তব্য : নির্দিষ্ট যোগজ এবং নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উদাহরণ ও অনুশীলনীর জন্য অনুচ্ছেদ 10.7.1 ও 10.7.2 দ্রষ্টব্য।

10.5. অনির্দিষ্ট যোগজ

$F(x)$ ফাংশনটির অন্তরজ $F'(x) = f(x)$ অর্থাৎ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x)$ হলে, $F(x)$ ফাংশনটিকে $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ বলে।

অনির্দিষ্ট যোগজ অনন্য নয়। কারণ x^3, $x^3 + 4$, $x^3 + 7$ এ তিনটি ফাংশনের প্রতিটির অন্তরজ $3x^2$. উপরে উল্লিখিত তিনটি ফাংশনই হলো $3x^2$ এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ।

$f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ প্রকাশ করার জন্য $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। সুতরাং $\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + c$, যেখানে c এর মান যথাক্রমে 0, 4, 7. এজন্য অনির্দিষ্ট যোগজীকরণের ক্ষেত্রে সর্বদাই একটি ধ্রুবক c অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

যোগজীকরণ ধ্রুবক (Constant of integration)

আমরা জানি, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) = \phi'(x) = f(x)$ (ধরি) এবং যে–কোন ধ্রুবক c এর জন্য

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\phi(x) + c\} = f(x). \text{ কাজেই } \int f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(x) + c$$

c কে যোগজীকরণের ধ্রুবক ($c$onstant of integration) বলা হয়।

লক্ষণীয় : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\phi(x) + c] = \phi'(x) + 0 = f(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)$

দ্রষ্টব্য : অনির্দিষ্ট যোগজের ক্ষেত্রে যোগজীকরণ ধ্রুবক c অবশ্যই লিখতে হবে। সুবিধার জন্য উত্তরমালাতে ধ্রুবক বাদ দেয়া হয়েছে।

10.5.1. যোগজের ধর্ম ঃ

(1) যে কোন ধ্রুবক a এর জন্য $\int a\,\phi(x)\,dx = a\int \phi(x)\,dx$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\frac{d}{dx}\left[a\int \phi(x)\,dx\right] = a\frac{d}{dx}\left[\int \phi(x)\,dx\right] = a\,\phi(x)$

সুতরাং $\int a\,\phi(x)\,dx = a\int \phi(x)\,dx$

(2) $\int [\phi(x) + \psi(x) + f(x) + \dots]\,dx = \int \phi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \dots$

প্রমাণ ঃ $\frac{d}{dx}\left[\int \phi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \dots\right]$

$= \frac{d}{dx}\int \phi(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int \psi(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \dots = \phi(x) + \psi(x) + f(x) + \dots$

অতএব, $\int [\phi(x) + \psi(x) + f(x) + \dots]\,dx = \int \phi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx + \int f(x)\,dx + \dots\dots$

$\int x^n\,dx$ নির্ণয় কর ঃ

আমরা জানি, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n \quad \therefore \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. [যখন $n \neq -1$]

কতিপয় ফাংশনের অন্তরজ ও প্রতিঅন্তরজ নিচে প্রদত্ত হলো :

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\Rightarrow \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ [যখন $n \neq -1$]
$\frac{d}{dx}(x) = 1, \frac{d}{dx}(c) = 0.$	$\Rightarrow \int dx = x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0)$	$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
$\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$	$\Rightarrow \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \ln a$	$\Rightarrow \int a^x dx = a^x/\ln a + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\Rightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\Rightarrow \int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$	$\Rightarrow \int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$
$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx$	$\Rightarrow \int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\Rightarrow \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$	$\Rightarrow \int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\Rightarrow \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x, \Rightarrow \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + c$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + c$

$\boxed{\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c}$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. $\int 5x^7 dx$ **নির্ণয় কর**

সমাধান ঃ $\int 5x^7 \, dx = \frac{5x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{5}{8}x^8 + c$, যেখানে c যোগজীকরণ ধ্রুবক।

উদাহরণ 2. $\int (ax^3 + bx^2 + cx)\, dx$ **নির্ণয় কর**

সমাধান ঃ $\int ax^3 dx + \int bx^2 \, dx + \int cx dx \quad = a\int x^3 \, dx + b\int x^2 \, dx + c\int x \, dx$

$= \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + c_1$

উদাহরণ 3. $\int (3\cos x - 5\sec^2 x)\, dx$ **নির্ণয় কর**

সমাধান ঃ $\int (3\cos x - 5\sec^2 x)\, dx$

$= \int 3\cos x \, dx - \int 5\sec^2 x \, dx = 3\int \cos x \, dx - 5\int \sec^2 x \, dx = 3\sin x - 5\tan x + c.$

উদাহরণ 4. $\int \frac{t^2 + 3t + 1}{\sqrt{t}} dt$ **নির্ণয় কর**

সমাধান ঃ $\int \frac{t^2 + 3t + 1}{\sqrt{t}} dt = \int (t^{3/2} + 3t^{1/2} + t^{-1/2})\, dt$

$= \frac{t^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3\frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{-1/2+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c = \frac{2}{5} t^{5/2} + 2t^{3/2} + 2\sqrt{t} + c$

প্রশ্নমালা 10.1

অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $\int 5x^9 dx.$ **2.** $\int \frac{dx}{6}.$ **3.** $\int dt.$

4. $\int (4\sin x + 3\cos x)\,dx.$ **5.** $\int \frac{dx}{x^4}.$ **6.** $\int (1 + x^{-1} + x^{-2})\,dx.$ [রা. '০৯]

7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx.$ **8.** $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1}\,dx.$ **9.** $\int \frac{x^3 + 4}{x^2}\,dx.$

10. $\int \frac{3 + 4x^2 + 5x^4}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ **11.** $\int (x^3 - 5e^x + 8)\,dx.$ **12.** $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$

13. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx.$ **14.** $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}\,dx.$ **15.** $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ [কু. '০৮]

16. $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx.$ [চ. '১২] **17.** $\int (\sec x \tan x - 3\,\mathrm{cosec}^2 x)\,dx.$

18. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\,dx.$ **19.** $\int \tan^2 x\,dx.$ [ঢা. '০৫] **20.** $\int \sec x(\sec x + \tan x)\,dx.$

21. $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx.$ **22.** $\int \sec^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx.$ [সি. '১০; কু. দি. '১১; ঢা. '১২; কু. '১৩]

23. $\int \frac{\sin x - \mathrm{cosec}\,x}{\tan x}\,dx.$ **24.** $\int \mathrm{cosec}\,x\,(\mathrm{cosec}\,x - \cot x + \sin x)\,dx.$

25. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$ **26.** $\int \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{1 - \cos\theta}\,d\theta.$ **27.** $\int \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$ [ঢা. '০৫]

28. $\int \cos^2 x\,dx.$ [ঢা. '০৮] **29.** $\int \frac{d\theta}{5\tan^2\theta}.$ **30.** $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta.$

31. $\int 3\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta.$ **32.** $\int \sin x^\circ\,dx$ [চ. '০৪] **33.** $\int \frac{\tan x}{\cot x}\,dx.$

34. $\int (x - 2)^3 dx.$ **35.** $\int \sqrt{x}(x - 3)\,dx.$ **36.** $\int x(1 + \sqrt{x})\,dx.$ [ব. '০৪]

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{2}x^{10}$. **2.** $\frac{1}{6}x$. **3.** t. **4.** $3\sin x - 4\cos x$. **5.** $-\frac{1}{3x^3}$. **6.** $x + \ln x - \frac{1}{x}$. **7.** $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3x^3} + 2x$.
8. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$. **9.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}$. **10.** $\frac{9}{2}x^{2/3} + \frac{3}{2}x^{8/3} + \frac{15}{14}x^{14/3}$. **11.** $\frac{1}{4}x^4 - 5e^x + 8x$. **12.** $-\frac{1}{2}\cot x$.
13. $\sin x + \cos x$. **14.** x **15.** $\frac{1}{2}\tan x$. **16.** $-\sqrt{2}\cos x$. **17.** $\sec x + 3\cot x$. **18.** $\tan x - x$.
19. $\tan x - x$. **20.** $\tan x + \sec x$. **21.** $\tan x - \cot x$. **22.** $\tan x - \cot x$. **23.** $\sin x + \mathrm{cosec}\,x$.
24. $-\cot x + \mathrm{cosec}\,x + x$ **25.** $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3}$. **26.** $\theta + 2\sin\theta$. **27.** $x - \frac{1}{x}$.
28. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$. **29.** $\frac{-1}{5}(\cot\theta + \theta)$ **30.** $-\mathrm{cosec}\,\theta$ **31.** $\frac{3}{2}(\theta - \sin\theta)$ **32.** $\frac{-180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180}$
33. $\tan x - x$ **34.** $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x$ **35.** $\frac{2}{5}x^{5/2} - 2x^{3/2}$ **36.** $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}x^{5/2}$.

10.6. অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়

[প্রতিস্থাপন, আংশিক ভগ্নাংশে, অংশায়ন Integration by parts সূত্রের সাহায্যে]

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে (Method of substitution) যোগজ নির্ণয় :

প্রমাণ কর : 1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\,|(f(x))|.$ 2. $\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c.$

3. $\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + c.$ 4. $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c.$

প্রমাণ :

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dz}{z} = ln\, z = ln\,|f(x)|.$ | ধরি, $f(x) = z$ বা, $f'(x)\, dx = dz$

2. $\int \sin mx\, dx$ | ধরি, $mx = z \Rightarrow m\, dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$

$= \frac{1}{m}\int \sin z\, dz = \frac{1}{m}(-\cos z) + c = -\frac{1}{m}\cos mx + c.$

3. $\int \cos mx\, dx$ | ধরি, $mx = z \Rightarrow m\, dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$

$= \frac{1}{m}\int \cos z\, dz = \frac{1}{m}\sin z + c = \frac{1}{m}\sin mx + c.$

4. $\int e^{mx} dx$ | ধরি, $mx = z \Rightarrow m\, dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{m} dz$

$= \frac{1}{m}\int e^{z} dz = \frac{1}{m}e^{z} + c = \frac{1}{m}e^{mx} + c.$

লক্ষণীয় : অন্তরীকরণে x এর সহগ m দ্বারা গুণ এবং যোগজীকরণে m দ্বারা ভাগ করতে হয়।

যেমন : $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = m\, e^{mx} \Rightarrow \int e^{mx} dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c.$

উদাহরণ 1. $\int (1-2x)^4 dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $1 - 2x = z$ বা, $-2dx = dz$ বা, $dx = -\frac{dz}{2}$

$\therefore \int (1-2x)^4 dx = -\frac{1}{2}\int (z)^4 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5} + c = -\frac{1}{10}(1-2x)^5 + c.$

উদাহরণ 2. $\int \sin^3 2x\, dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int \sin^3 2x\, dx = \frac{1}{4}\int (3\sin 2x - \sin 6x)dx$ [$\sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)$ প্রয়োগ করে]

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-3\cos 2x}{2} + \frac{\cos 6x}{6}\right) + c = -\frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x + c$$

উদাহরণ 3. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪; কু. '০৬; দি. সি. '১২]

সমাধান : $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\cos 5x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \{\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)\}dx$

$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + c = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$

উদাহরণ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ নির্ণয় কর। [দি. '১০]

সমাধান : $\int \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} = \int \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx}{(x+1)-(x-1)}$

$= \frac{1}{2}\int \{(x+1)^{1/2}-(x-1)^{1/2}\}\,dx = \frac{1}{2}\ \{\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\}+c$

$= \frac{1}{3}\{(x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}\}+c$

প্রশ্নমালা 10.2

নিম্নলিখিত অনির্দিষ্ট যোগজগুলো নির্ণয় কর :

1. $\int (5x+2)^3\,dx$ 2. $\int (2-7x)^4\,dx$ 3. $\int \sqrt{1-x}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$ 5. $\int \frac{dx}{(1-x)^2}$ 6. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

7. (i) $\int \cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)dx$ (ii) $\int \sin 5x\,dx$ 8. (i) $\int \sec^2(ax+b)\,dx$

(ii) $\int \sec^2 x\tan^2 x\,dx$. 9. $\int \cos^2 2x\,dx$ 10. $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$

11. $\int \frac{(x^2-1)^2}{\sqrt{x}}dx$. 12. (i) $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}}dx$. (ii) $\int \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x}}dx$

13. (i) $\int 3\sin^2 x\,dx$. (ii) $\int 4\sin^3 x\,dx$. 14. (i) $\int \sin^4 x\,dx$. [কু. '০৯]

(ii) $\int \cos^4 x\,dx$. [সি. '০৮] 15. (i) $\int 4\sin x\cos x\,dx$.

(ii) $\int 5\sin 3x\cos 2x\,dx$. (iii) $\int \cos ax\cos bx\,dx$, $(a>b)$ (iv) $\int \sin 2x\sin 4x\,dx$.[ঢা. '১১]

(v) $\int \sin 5x\sin 3x\,dx$.[ব. চ. '১২] 16. (i) $\int \sin^2 x\cos 2x\,dx$. [কু. '১০; সি. '১১; রা. '১২] (ii) $\int (2\cos x+\sin x)\cos x\,dx$ [ঢা. '০৫]

17. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$. [চ. '০৬; ঢা. রা. '১৩] 18. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

19. $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$ [চ. '১০; ব. '১৩] 20. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. [ব. '১১; রা. '১০; কু. '১৩] 21. $\int \frac{dx}{1-\cos 3x}$.

22. $\int 5\cos 4x\sin 3x\,dx$ [ব. '১০; চ. '১১; ব. '১২] 23. $\int \sin^2 3\theta\,d\theta$.

24. $\int \frac{1+e^{5x}}{\sqrt{e^{3x}}}dx$. 25. $\int \frac{2x+1}{2x+3}dx$. 26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}}$ 28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{20}(5x+2)^4$ 2. $-\frac{1}{35}(2-7x)^5$ 3. $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 4. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$ 5. $\frac{1}{1-x}$ 6. $-\sqrt{1-\sin 2x}$

7. $\frac{1}{5}\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$. 8. (i) $\frac{1}{a}\tan(ax+b)$ (ii) $\frac{1}{3}\tan^3 x$ 9. $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)$ 10. $\frac{1}{4}e^{4x}$.

11. $\frac{2}{9}x^{9/2}-\frac{4}{5}x^{5/2}+2\sqrt{x}$. 12. (i) $\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}+4e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-\frac{1}{2}x}$. (ii) $2e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-\frac{1}{2}x}$

13. (i) $\frac{3}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)$ (ii) $\frac{\cos 3x}{3}-3\cos x$. 14. (i) $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$

(ii) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$ 15. (i) $-\cos 2x$ (ii) $-\frac{5}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5}+\cos x\right)$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b}+\frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right]$ (iv) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 6x}{6}\right)$. (v) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 8x}{8}\right)$

16. (i) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}\sin 4x$. (ii) $x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x$

17. $\frac{1}{32}(4x-\sin 4x)$ 18. $-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}$ 19. $\tan x-\sec x$ 20. $\tan\frac{x}{2}$ 21. $\frac{-1}{3}\cot\frac{3x}{2}$

22. $\frac{-5}{14}\cos 7x+\frac{5}{2}\cos x$. 23. $\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)$ 24. $\frac{-2}{3}e^{-3x/2}+\frac{2}{7}e^{7x/2}$. 25. $x-ln|(2x+3)|$.

26. $\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$. 27. $\frac{1}{24}[(2x+5)^{3/2}+(2x-3)^{3/2}]$ 28. $\frac{1}{3}[(x+2)^{3/2}+x^{3/2}]$

10.7. অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের বিভিন্ন কৌশল

1. $\int \tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{dz}{z}$ | ধরি, $z = \cos x \Rightarrow dz = -\sin x\,dx$

$$= -ln|z| + c = -ln|\cos x| + c = ln\left|\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right| + c = ln|\sec x| + c.$$

2. তদ্রূপ $\int \cot x\,dx = ln|\sin x| + c = -ln|\operatorname{cosec} x| + c$.

3. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\tan\frac{x}{2}}$$ [লব ও হরকে $\sec^2\frac{x}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \int\frac{dz}{z}$; [$\tan\frac{x}{2} = z$ ধরলে $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$] $= ln|z| + c = ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

4. ১ম পদ্ধতি ঃ $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \quad [\because \sin 2A = 2\sin A\cos A]$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} \quad \left[\text{হর ও লবকে } \sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$$

ধরি, $z = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dz = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx$

$\therefore \int \sec x\, dx = \int \frac{dz}{z} = ln\ |z| + c = ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

২য় পদ্ধতি ঃ $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx}{\sec x + \tan x}$ [হর ও লবকে $(\sec x+\tan x)$ দ্বারা গুণ করে]

ধরি, $z = \sec x + \tan x \Rightarrow dz = (\sec x\ \tan x + \sec^2 x)\,dx = \sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx$

$\therefore \int \sec x\, dx = \int \frac{dz}{z} = ln\ |z| + c = ln\ |(\sec x + \tan x)| + c$

সুতরাং $\int \sec x\, dx = ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c = ln\ |(\sec x + \tan x)| + c$

5. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ | ধরি, $x = a\tan\theta$. $\Rightarrow dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

6. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right\}dx = \frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{a+x}+\int\frac{dx}{a-x}\right\}$ [আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে]

$$= \frac{1}{2a}\{ln\ |(a+x)| - ln\ |(a-x)|\} + c = \frac{1}{2a}\, ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$$ এখানে $a > x$.

7. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\, ln\, \frac{x-a}{x+a}$ $(x > a > 0)$ [7 এর প্রমাণ 6-এর অনুরূপ]

8. $\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta}$ ধরি, $x = a \sin\theta$;

$= \int d\theta = \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ | $\Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c.$

> **সহজ কৌশল ঃ লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয়ের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটিতে $f(x)$ এবং এর অন্তরজ সহগ $f'(x)$ একত্রে বিদ্যমান থাকে। এক্ষেত্রে $f(x)$-কে z ধরে সহজেই যোগজ নির্ণয় করা যায়।**
>
> **যদি ফাংশনটিতে $f(x)$ এবং $f'(x)$ একত্রে বিদ্যমান না থাকে, তাহলে সরাসরি সূত্র প্রয়োগ করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।**

উদাহরণ । অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (ii) $\int \frac{\cos x\, dx}{9+\sin^2 x}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ [চ. '১৩]

সমাধান ঃ (i) মনে করি, $I = \int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ [এখানে $f(x) = \sin^{-1}x$ এবং $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]

ধরি, $z = \sin^{-1}x \quad \therefore dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \therefore I = \int z\, dz = \frac{1}{2}z^2 + c = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 + c$

(ii) মনে করি, $I = \int \frac{\cos x\, dx}{9+\sin^2 x}\cdot$ [এখানে $f(x) = \sin x$ এবং $f'(x) = \cos x$ বিদ্যমান]

ধরি, $z = \sin x \quad \therefore dz = \cos x\, dx$

$\therefore I = \int \frac{dz}{9+z^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{z}{3} + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{3}\right) + c$

(iii) মনে করি, $I = \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}\cdot$ [এখানে $f(x)$ এবং $f'(x)$ একত্রে বিদ্যমান নাই]

$\therefore$ ধরি, $x = 5\sin\theta \Rightarrow dx = 5\cos\theta d\theta$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{5\cos\theta d\theta}{\sqrt{25(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{5} + c.$$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. $\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx$ নির্ণয় কর। [চ. '০৮; সি. '১২]

সমাধান : মনে করি, $z = x^3 \quad \therefore dz = 3x^2\, dx$

$\therefore \int \frac{3x^2\, dx}{1+x^6} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}z + c = \tan^{-1}(x^3) + c$

উদাহরণ 2. $\int \frac{e^{a \sin^{-1} x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{e^{a \sin^{-1} x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{a}\int e^y \, dy = \frac{1}{a} e^y + c$

$$= \frac{1}{a} e^{a \sin^{-1} x} + c.$$

ধরি, $y = a \sin^{-1} x$

$\therefore \; dy = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

বা, $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

উদাহরণ 3. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ নির্ণয় কর। [য. '১০]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x^2+6x+9)+16}$

$$= \int \frac{dx}{(x+3)^2+(4)^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+3}{4} + c$$

উদাহরণ 4. $\int \sin^5 x \, dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $I = \int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \, . \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx$

ধরি, $y = \cos x \Rightarrow \sin x \, dx = -dy$

$\therefore \quad I = -\int (1-y^2)^2 \, dy, = -\int (1-2y^2+y^4) \, dy = -y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + c$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

উদাহরণ 5. $\int \frac{2x \tan^{-1} x^2}{1+x^4} dx$ নির্ণয় কর। [রা. '১১]

সমাধান ঃ ধরি, $z = \tan^{-1} x^2 \quad \therefore \quad dz = \frac{2x \, dx}{1+x^4}$

$\therefore \int \frac{2x \tan^{-1} x^2}{1+x^4} dx = \int z \, dz = \frac{1}{2} z^2 + c = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x^2\right)^2 + c$

উদাহরণ 6. $\int \frac{dx}{9-16x^2}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{9-16x^2} = \int \frac{dx}{16\left(\frac{9}{16}-x^2\right)} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}$

$$= \frac{1}{16} \times \frac{4}{2.3}\left| ln \frac{\frac{3}{4}+x}{\frac{3}{4}-x} \right| + c = \frac{1}{24} ln \left| \frac{3+4x}{3-4x} \right| + c$$

উদাহরণ 7. নিচের অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর।

(i) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$ [দি. চ. '১২] (ii) $\int e^x \tan e^x \sec^2 e^x\, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{24+6x-9x^2}}$

সমাধান ঃ (i) ধরি, $I = \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$ মনে করি, $z = 1 + e^x \therefore dz = e^x\,dx$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{z} = ln\, z + c = ln(1+e^x) + c.$$

(ii) মনে করি, $I = \int e^x \tan e^x \sec^2 e^x\,dx.$

ধরি, $z = \tan e^x \therefore dz = e^x \sec^2 e^x\,dx$

$I = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + c = \frac{1}{2}(\tan e^x)^2 + c$

(iii) ধরি, $I = \int \frac{dx}{\sqrt{24+6x-9x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{25-(1-6x+9x^2)}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2-(3x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{(5)^2-z^2}}$ মনে করি, $z = 3x - 1$

$\therefore dz = 3\,dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{3}$

$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{z}{5} + c = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x-1}{5} + c$

উদাহরণ 8. $\int \frac{dx}{4x^2+25}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $I = \int \frac{dx}{4x^2+25} = \int \frac{dx}{4\left(x^2+\frac{25}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{2x}{5} + c$

প্রশ্নমালা 10.3

1. $\int xe^{x^2}\,dx.$ 2. $\int \cos x \cos(\sin x)\,dx.$ 3. $\int \sin^2 x \cos x\,dx.$ [ঢা. '০২]

4. $\int x \sin x^2\,dx.$ 5. $\int e^x \tan e^x\,dx.$ 6. $\int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx.$

7. (i) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$ [ঢা. '০৪] (ii) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ (iii) $\int \frac{x^2dx.}{1-x^6}$ [রা. '১২]

8. (i) $\int \tan^4 x \sec^2 x\,dx.$ (ii) $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx.$ (iii) $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ [কু. '১২; আ. '১১; ঢা. ব. '১৩]

9. (i) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ [কু. '০৩] (ii) $\int \frac{ln\,(x)}{x}dx$ (iii) $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx.$ [ঢা. '১১]

(iv) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ [য '০৪] 10. (i) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}dx.$ (ii) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ [ঢা. '১০]

11. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

12. (i) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ [য. '১০]

(ii) $\int \frac{dx}{1 + e^{-x}}$

(iii) $\int \frac{dx}{x\{1 + \ln(x)\}^3}$.

13. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$ [ব. '০৭]

14. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}$.

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$. [ঢা. ব. '১২]

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$. [চ. য. '১১; কু.'১২]

16. $\int \frac{dx}{16 - 4x^2}$

17. (i) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x}}$ [চ. '০২]

(ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$ [রা. '১১]

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3 + 4}}$

18. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. [সি. '১০; কু. য. '১২]

19. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{3 - 4e^{2x}}}$

20. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\tan^{-1} x}$ [সি. '১১]

21. (i) $\int \frac{\sin x}{a + b\cos x} dx$.

(ii) $\int \frac{\sin 2x}{3 + 5\cos x} dx$.

22. (i) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$.

(ii) $\int \frac{\tan^2(\ln x)}{x} dx$

23. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx$. [ব. '০৪]

24. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1 - \sin x)^2}$. [ব. '১১]

25. $\int \frac{e^x(1 + x)\,dx}{\cos^2(xe^x)}$

26. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\tan^{-1} x + 3}}$

27. $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1 + x^6} dx$. [কু. '০৮]

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{(\sin^{-1} x)}\sqrt{1 - x^2}}$

29. $\int (1 + \cos x)^5 \sin x\,dx$.

30. $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$. [ব. চ. '০৬]

31. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx$. [চ. '১১]

32. $\int \frac{\sin x\,dx}{a^2 + b^2\cos^2 x}$

33. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$. [য. '০২]

34. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - 2x^4}}$ [চ. '০১]

35. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 4x - 4x^2}}$

37. $\int \frac{2x\sin^{-1} x^2}{\sqrt{1 - x^4}} dx$.

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2}}$

39. (i) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{16 - \tan^2 x}}$

(ii) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{3 - 5\tan x}}$

40. $\int \frac{d\theta}{4 - 5\sin^2\theta}$

41. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ [ঢা. '১২; চ. '১৩]

42. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ [চ. '০৩]

43. $\int \frac{dx}{1 + \tan x}$. [সি. '১১; রা. য. ব. '১২]

44. (i) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{5 - \cos^2 x}}$ [কু. '০৪]

(ii) $\int \frac{\cos x\,dx}{3 + \cos^2 x}$

(iii) $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

45. $\int \sqrt{1 + \sec x}\,dx$.

46. (i) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$

(ii) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$ [চ. ব. '১০]

47. (i) $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

(ii) $\int \frac{1 - \cos 5x}{1 + \cos 5x} dx$. [ব. '০১]

48. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}$. [ব. '১১]

49. $\int \frac{(\sec^{-1} x)^4}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

50. $\int \frac{3\sin x\,dx}{4 + 5\cos x}$.

51. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x - 1}}$.

52. (i) $\int e^{a\sin^{-1} x} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ [দি. '১১]   53. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$. [ঢা. '০৩]   54. $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)(e^x + \ln x)\,dx$.

55. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\left(\sqrt{2+\sin 2x}\right)^3}$.   56. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}}$ [রা. '১০]   57. $\int \sqrt{1-\sin x}\cos x\,dx$

58. $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$.   59. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$. [য. '০৬]   60. (i) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. [দি. '১১]

(ii) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$ [দি. '১২]   61. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.   62. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$) [কু. '১২]

63. $\int \frac{\sin(2+3\ln x)}{x}dx$.   64. $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 65. $\int \sqrt{16-9x^2}\,dx$

66. $\int \frac{\sec x\,dx}{\ln(\sec x+\tan x)}$ 67. $\int \frac{dx}{3+4\sin x}$ 68. $\int \frac{\sqrt{\tan x}dx}{\sin x\cos x}$ [য. '০৫]

69. $\int \operatorname{cosec} x\,dx$ [কু. '০২]   70. $\int \tan x\,dx$ [সি. '০১]   71. $\int \frac{e^{a\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx$

72. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$ [কু. '১১]   73. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ [য. '০৯]

[সংকেত : $x = a\tan^2\theta$]

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{2}e^{x^2}$. 2. $\sin(\sin x)$ 3. $\frac{1}{3}\sin^3 x$. 4. $\frac{-1}{2}\cos x^2$, 5. $\ln|\sec e^x|$. 6. $e^{\tan x}$. 7. (i) $\cos\frac{1}{x}$.
(ii) $2\sin\sqrt{x}$. (iii) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|$. 8. (i) $\frac{1}{5}\tan^5 x$. (ii) $-\frac{1}{2}\ln|(1+2\cos x)|$ (iii) $\ln|\sec(\sin^{-1}x)|$.
9 (i) $2\sqrt{1+\ln x}$. (ii) $\frac{1}{2}\{\ln(x)\}^2$. (iii) $e^{\sin x}$.. (iv) $\tan^{-1}e^x$. 10. (i) $\frac{1}{3}\ln(e^{3x}-1)$. (ii) $\frac{1.}{3}$
11. $\ln|(e^x+e^{-x})|$. 12. (i) $-\ln|1+e^{-x}|$. (ii) $\ln|e^x+1|$. (iii) $\frac{-1}{2\{1+\ln(x)\}^2}$. 13. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2}$
14. (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}x$.   15. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}$ 16. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$.
17. (i) $\frac{-2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}$.   (ii) $\frac{1}{2}\sec^{-1}x^2$.   (iii) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3+4}-2}{\sqrt{x^3+4}+2}\right|$.   18. $\tan^{-1}(e^x)$.
19. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2e^x}{\sqrt{3}}\right)$ 20. $\ln(\tan^{-1}x)$.   21. (i) $-\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|$.

(ii) $\frac{2}{25}\{3\, ln\, |3+5\cos x| - (3+5\cos x)\}$. **22. (i)** $\frac{2}{3}(1+ln\, x)^{3/2}$. **(ii)** $\tan(ln\, x) - ln\, x$.

23. $ln\, |x+\sin x|$. **24.** $\frac{1}{1-\sin x}$. **25.** $\tan(xe^x)$ **26.** $2\sqrt{\tan^{-1}x+3}$.

27. $\frac{1}{6}(\tan^{-1}x^3)^2$. **28.** $2\sqrt{\sin^{-1}x}$. **29.** $-\frac{1}{6}(1+\cos x)^6$. **30.** $-ln(ln\, |\cos x|)$.

31. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(e^{2x})$. **32.** $-\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\cos x}{a}\right)$. **33.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **34.** $-\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^4}$.

35. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)$. **36.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{4}\right)$. **37.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2)^2$. **38.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x-2}{2}\right)$

39. (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\tan x}{4}\right)$. **(ii)** $-\frac{2}{5}\sqrt{3-5\tan x}$. **40.** $\frac{1}{4}ln\left|\frac{2+\tan\theta}{2-\tan\theta}\right|$. **41.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$.

42. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **43.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}ln\, |\cos x+\sin x|$. **44. (i)** $-\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{5}}\right)$

(ii) $\frac{1}{4}ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right|$. **(iii)** $\frac{2}{3}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^3$ **45.** $2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)$

46. (i) $6\left[\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}\sqrt{x} - x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1}x^{\frac{1}{6}}\right]$. **(ii)** $2\sqrt{x} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\, ln\, |x^{\frac{1}{4}} - 1|$.

47. (i) $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)$. **(ii)** $\frac{2}{5}\tan\frac{5x}{2} - x$. **48.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)$ **49.** $\frac{1}{5}(\sec^{-1}x)^5$.

50. $-\frac{3}{5}ln\, |4+5\cos x| + c$. **51.** $2\sqrt{\tan x - 1}$. **52(i)** $\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x}$ **(ii)** $\sin^{-1}\frac{x}{5}$.

53. $\frac{1}{24}ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|$. **54.** $\frac{1}{2}(e^x+ln\, x)^2$ **55.** $\frac{-1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$. **56.** $2\sqrt{\sin x}$. **57.** $-\frac{2}{3}(1-\sin x)^{3/2}$

58. $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$. **59.** $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x$. **60. (i)** $-\sqrt{1-x^2}$. **(i)** $\frac{1}{3}\sin^{-1}x^3$.

61. $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ **62.** $ln\,(1+ln\, x)$. **63.** $\frac{-1}{3}\cos(2+3ln\, x)$ **64.** $e^{\sin^{-1}x}$

65. $\frac{8}{3}\left\{\sin^{-1}\frac{3x}{4} + \frac{3x}{16}\sqrt{16-9x^2}\right\}$ **66.** $ln\,[ln\, |\sec x+\tan x|]$ **67.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$.

68. $2\sqrt{\tan x}$. **69.** $ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. **70.** $ln\, |\sec x|$. **71.** $\frac{1}{a}e^{a\tan^{-1}x}$. **72.** $(a+x)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax}$.

73. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$. **74.** $\sin^{-1}\frac{x-a}{a}$.

আংশিক ভগ্নাংশ

কোন মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে হলে প্রথমে তাকে আংশিক ভগ্নাংশে বিশ্লেষণ করে প্রত্যেক অংশের জন্য পৃথক যোজিত মান নির্ণয় করতে হবে।

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-3)(x+2)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $\frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ বা, $x + 1 \equiv A(x+2) + B(x-3)$..... (i)

$(x-3) = 0$ বা, $x = 3$ বসিয়ে আমরা পাই. $4 = 5A \Rightarrow A = 4/5$

আবার, $(x+2) = 0$ বা, $x = -2$ বসিয়ে আমরা পাই, $-1 = -5B$ বা, $B = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \equiv \frac{4/5}{x-3} + \frac{1/5}{x+2}$

$\therefore \quad \int \frac{(x+1)\,dx}{(x-3)(x+2)} = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{4}{5} ln|x-3| + \frac{1}{5} ln\,|x+2| + c.$

উদাহরণ 2. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ নির্ণয় কর। [কু. '১১; ঢা. রা. য. '১৩]

সমাধান ঃ ধরি, $I = \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ এবং $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\therefore\ x \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$ ... ... (i)

(i) এ $(x-1) = 0$ অর্থাৎ $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 = A(1+1) + 0$ বা, $2A = 1$ বা, $A = \frac{1}{2}$

আবার $x = 0$ বসিয়ে আমরা পাই, $0 = A - C$ বা, $C = A = \frac{1}{2}$

(i) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B$ বা, $B = -A = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ I = \int \left\{ \frac{1/2}{x-1} + \frac{-x/2 + 1/2}{x^2+1} \right\} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2} ln\,|x-1| - \frac{1}{4} ln\,|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c.$

উদাহরণ 3. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+x)(x^2-3)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $I = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)(x^2-3)}$ এবং $x^2 = y$

$\therefore\ \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2-3)} = \frac{y}{(y+4)(y-3)}$

মনে করি, $\frac{y}{(y+4)(y-3)} \equiv \frac{A}{y+4} + \frac{B}{y-3}$. $\therefore\ y \equiv A(y-3) + B(y+4)$ ... ... (i)

(i) এ $y = 3$ বসিয়ে, $3 = 7B$ বা, $B = \frac{3}{7}$ এবং $y = -4$ বসিয়ে, $-4 = -7A$ বা, $A = \frac{4}{7}$

$$\therefore\ I = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)(x^2-3)} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x^2-3}$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\,ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c$$

$$= \frac{2}{7}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{14}\,ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + c.$$

প্রশ্নমালা 10.4

নিচের অনির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর :

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-5)}$.   **2.** $\int \frac{dx}{x^2+x}$.   **3.** $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx$.

4. $\int \frac{(2x-1)}{x(x-1)(x-2)}\,dx$. [ঢা. '০৯]   **5.** $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ **6.** $\int \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)}\,dx$.

7. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.   **8.** $\int \frac{x+35}{x^2-25}\,dx$. [চ. '০৪]   **9.** $\int \frac{2x+3}{x^3-x}\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$. [ব. '১০]   **11.** $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-5x+6}$.   **12.** $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$

13. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$.   **14.** $\int \frac{x}{x^2-5x-6}\,dx$ **15.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-16}$.

16. $\int \frac{2x+1}{(2x+3)^2}\,dx$.   **17.** $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$.   **18.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. [রা. '১১]

19. $\int \frac{x+1}{x^2-7x+10}\,dx$ **20.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)}$.   **21.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

22. $\int \frac{(x+1)\,dx}{3x^2-x-2}$ **23.** $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$.   **24.** $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4}$. [ব. '০৪]

25. $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}\,dx$. [ঢা. '১১; দি. '১২]   **26.** $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$.   **27.** $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^2}$.

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{6}\,ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|$. **2.** $ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$. 3. $2\,ln|x-3| - ln|x-2|$. **4.** $\frac{3}{2}\,ln|x-2| - \frac{1}{2}\,ln|x| - ln|x-1|$.

5. $ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. **6.** $\frac{5}{6}\,ln|1-2x| - \frac{4}{3}\,ln|1+x|$. **7.** $ln\left|\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right|$. **8.** $4\,ln|x-5| - 3\,ln|x+5|$.

9. $\frac{1}{2}\,ln|x+1| + \frac{5}{2}\,ln|x-1| - 3\,ln|x|$. **10.** $ln\left|\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}\right|$. **11.** $4\,ln|x-3| - 3\,ln|x-2|$.

12. $\frac{1}{4} ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$. **13.** $2\, ln|x-2| - ln|x-1|$. **14.** $\frac{1}{7} ln|x+1| + \frac{6}{7} ln\ |x-6|$.

15. $x + 2\ ln\ \left|\frac{x-4}{x+4}\right|$ · **16.** $\frac{1}{2} ln\ |2x+3| + \frac{1}{2x+3}$ · **17.** $-\frac{3}{2} ln|x| + \frac{5}{3} ln\ |x-1| - \frac{1}{6} ln\ |x+2|$.

18. $ln|x| - \frac{1}{2} ln|x^2+1|$. **19.** $2\ ln|x-5 - ln|x-2|$. **20.** $\frac{1}{5} ln|x-1| - \frac{1}{10} ln|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

21. $\frac{1}{4} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x$. **22.** $\frac{2}{5} ln|x-1| - \frac{1}{15} ln|3x+2|$ **23.** $3\ ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$.

24. $x + ln\ \left|\frac{x-2}{x+2}\right|$. **25.** $x + \frac{3}{4} ln\ \left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ · **26.** $\frac{2}{9} ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} ln|x+2|$.

27. $\frac{1}{1-x} + ln|1-x|$.

অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ(Integration by parts)

অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ (Integration by parts) একটি বিশেষ পদ্ধতি যার সাহায্যে দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ নির্ণয় করা যায়। এ পদ্ধতি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ নির্ণয়ের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত।

অংশায়ন সূত্র ঃ যদি u এবং v এর উভয় x- এর ফাংশন হয়, তাহলে

$$\int uv\ dx = u\int v\ dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\ dx\right\} dx.$$

অর্থাৎ দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ = ১ম ফাংশন × (২য় ফাংশনের যোগজ) – {১ম ফাংশনের অন্তরজ × ২য় ফাংশনের যোগজ} এর যোগজ।

প্রমাণ ঃ দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ থেকে আমরা জানি, $\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$,

যখন u এবং w উভয়ে x- এর ফাংশন এবং অন্তরীকরণযোগ্য। x- এর সাপেক্ষে (with respect to x) উভয়পক্ষকে যোগজীকরণ করে পাই

$$uw = \int\left(u\frac{dw}{dx}\right) dx + \int\left(w\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$\Rightarrow \int\left(u\frac{dw}{dx}\right) dx = uw - \int\left(w\frac{du}{dx}\right) dx \text{............ (i)}$$

ধরি, $\frac{dw}{dx} = v \Rightarrow w = \int v\ dx$, এখন (i) এ w এবং $\frac{dw}{dx}$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\int uv\ dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\ dx\right\} dx.$$

দ্রষ্টব্য ঃ (1) u এবং v এর মধ্যে যে ফাংশনটি সহজে যোগজীকরণ যোগ্য নয় ঐ ফাংশনটি ১ম ফাংশন u বিবেচনা করতে হবে।

(2) যদি u এবং v এর উভয়ে যোগজীকরণ যোগ্য হয় অর্থাৎ সহজে সূত্রের সাহায্যে যোগজ নির্ণয় করা যায়, তাহলে x^n আকারের ফাংশনটিকে ১ম ফাংশন u ধরতে হবে, যেখানে n = 1, 2, ইত্যাদি।।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $\int x\, ln\, x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. রা. '১৩]

[এখানে $ln\, x$ কে সহজে Integration করা যায় না। সুতরাং $ln\, x$ কে ১ম ফাংশন বিবেচনা করতে হবে।]

সমাধান ঃ $\int x\, ln\, x\, dx = ln\, x \int x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(ln\, x) \int x\, dx \right\} dx.$

$$= ln\, x. \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} ln\, x - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} ln|x| - \frac{x^2}{4} + c.$$

উদাহরণ 2. $\int x \cos x\, dx$ নির্ণয় কর।

[এখানে x ও $\cos x$ এর উভয়কে সহজে যোগজীকরণ করা যায়। সুতরাং x কে ১ম ফাংশন অর্থাৎ $u = x$ ধরতে হবে।]

সমাধান ঃ $\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx \right\} dx.$

$$= x \sin x - \int 1. \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c.$$

উদাহরণ 3. $\int x^2 \sin x\, dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x^2 \sin x\, dx = x^2 \int \sin x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int \sin x\, dx \right\} dx.$

$$= -x^2 \cos x - \int 2x. (-\cos x)\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \left[x \int \cos x\, dx - \int 1. \sin x\, dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

উদাহরণ 4. $\int \tan^{-1} x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪; ব. '১০; দি. '১২; য. '১৩]

সমাধান ঃ $\int \tan^{-1} x\, dx = \tan^{-1} x \int 1\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \int 1\, dx \right\} dx.$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x dx}{1 + x^2} = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} ln\, (1 + x^2) + c.$$

উদাহরণ 5. $\int e^x \sin x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২; কু. '১৩]

সমাধান ঃ মনে করি, $I = \int e^x \sin x\, dx$

$$\therefore I = \sin x \int e^x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\sin x) \int e^x\, dx \right\} dx = \sin x. e^x - \int \cos x\, e^x\, dx$$

$$= e^x \sin x - \left[\cos x \int e^x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos x) \int e^x\, dx\right\} dx\right]$$

$$= e^x \sin x - \left[\cos x\, e^x - \int (-\sin x) .\ e^x\, dx \right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx + c_1$$

$$\Rightarrow I = e^x \sin x - e^x \cos x - I + c_1 \Rightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x + c_1$$

$\therefore I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$ যেখানে $c = \frac{c_1}{2}$

একটি বিশেষ সূত্র : $\int e^x \left\{f(x) + f'(x)\right\} dx = e^x f(x) + c.$

প্রমাণ : দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ নির্ণয়ের সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\{e^x f(x)\} = e^x \frac{d}{dx}\{f(x)\} + f(x)\frac{d}{dx}(e^x) = e^x f'(x) + f(x)\, e^x = e^x\{f(x) + f'(x)\}$$

এখন উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে পাই,

$$\int e^x \{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c \text{ অর্থাৎ } \int e^x \{f(x) + f(x) \text{ এর অন্তরজ }\}\, dx = e^x f(x).$$

উদাহরণ 6. $\int e^x \sec x\,(1 + \tan x)dx$ নির্ণয় কর। [চ. '১৩]

সমাধান : $I = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x)dx$ ধরি, $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x.$

$$\therefore \int e^x (\sec x + \sec x \tan x)\, dx = \int e^x \{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c = e^x \sec x + c.$$

প্রশ্নমালা 10.5

1. $\int x e^x\, dx$
2. $\int x \cos^2 x\, dx$ [সি. '০৭]
3. $\int x \sin x \cos x\, dx$
4. $\int \ln x\, dx$ [চ. ব. '০৪; কু. '০৬]
5. (i) $\int \sin^{-1}x\, dx$ [ব. '১২] (ii) $\int \cos^{-1}x\, dx$ [চ. সি. '১২]
6. $\int x \tan^{-1}x\, dx$ [কু. '১০; দি. '১১]
7. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$
8. $\int x \sec x \tan x\, dx$
9. $\int x \tan^2 x\, dx.$ [রা. সি. '০৫]
10. $\int x \sin 2x\, dx$
11. $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ [ঢা. '১০; সি. '১১]
12. $\int e^x (\tan x - \ln \cos x)\, dx$ [কু. '০১]
13. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$
14. $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx$ [য. '০৭]
15. $\int \sec^3 x\, dx$
16. (i) $\int x \sin^{-1} x^2\, dx$ [রা. '০৬, '১৩]

(ii) $\int x \sin^{-1} x\, dx.$ [ঢা. '০৭]

17. $\int \frac{\ln (\sec^{-1} x)}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$ [ঢা. '০৮]
18. $\int e^x \cos x\, dx$ [দি. '১০]
19. $\int x^2 \cos x\, dx$
20. $\int x \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$ [য. '০১]
21. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

22. $\int \text{cosec}^3 x\, dx$

23. $\int e^{2x} \sin x\, dx$ [সি. '০২]

24. $\int x^2 e^x\, dx$ [কু. '০৪]

25. $\int e^{2x} \cos e^x\, dx$

26. $\int x \cos 2x \cos 3x\, dx$

27. $\int x \sin 2x \cos 3x\, dx$

28. $\int x \tan^{-1} x^2\, dx.$

29. $\int x \cos^{-1} x\, dx.$ [আলিম '১১]

30. $\int x^2\, ln\, x\, dx.$

31. $\int (ln\, x)^2\, dx.$ [য. '০৫; চ. '০৭]

32. $\int \frac{ln(ln\, x)}{x} dx.$

33. $\int e^{5x} \left\{5\, ln\, x + \frac{1}{x}\right\} dx.$ [চ. '০৯]

34. $\int e^{-2x} \left(\frac{1}{x} - 2\, ln\, x\right) dx.$

35. $\int x \sec^2 3x\, dx.$

36. $\int x \sin x \sin 2x\, dx.$ [চ. '০২]

37. $\int e^x \sin 2x\, dx.$ [সি. '১০]

38. $\int e^x \left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right\} dx.$

39. $\int e^x \frac{(x+1)}{(x+2)^2} dx.$

40. $\int \frac{xe^x\, dx}{(1+x)^2}.$ [ঢা. কু. চ. '১১; রা. য. '১২; চ. '১৩]

উত্তরমালা

1. $e^x(x-1)$. 2. $\frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) + \frac{1}{8}\cos 2x$. 3. $\frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$. 4. $x ln x - x$.
5. (i) $x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$. (ii) $x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$. 6. $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x$.
7. $x\tan x - ln|\sec x|$. 8. $x\sec x - ln|\sec x + \tan x|$. 9. $x\tan x + ln|\cos x| - \frac{x^2}{2}$.
10. $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$. . 11. $e^x \sin x$. 12. $e^x\, ln|\sec x|$. 13. $\frac{1}{2}(1-x^2)$. 14. $e^x\, ln|x|$.
15. $\frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2} ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$. 16. (i) $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1} x$.
(ii) $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$ 17. $\sec^{-1} x[ln|\sec^{-1}x| - 1]$. 18. $\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$.
19. $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$. 20. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}\cos x$. 21. $-x\cot x + ln|\sin x|$.
22. $\frac{1}{2} ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\text{cosec}\, x\cot x$. 23. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + c$. 24. $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$.
25. $e^x \sin e^x + \cos e^x + c$. 26. $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}\cos 5x + \cos x\right)$.
27. $\frac{1}{2}(x\cos x - \sin x) + \left(\frac{1}{50}\sin 5x - \frac{x}{10}\cos 5x\right)$. 28. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1} x^2 - \frac{1}{4} ln|1+x^4|$.

29. $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{4}\sin^{-1}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$. **30.** $\frac{x^3}{3}\ln|x|-\frac{1}{9}x^3$. **31.** $x(\ln x)^2-2x\ln|x|+2x$.

32. $\ln x\,|\ln(\ln x)-1|$. **33.** $e^{5x}\ln|x|$. **34.** $e^{-2x}\ln|x|$. **35.** $\frac{x}{3}\tan 3x-\frac{1}{9}\ln|\sec 3x|$.

36. $\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x-\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{9}\cos 3x$.

37. $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)$. **38.** $\frac{e^x}{1-x}$. **39** $\frac{e^x}{x+2}$. **40.** $\frac{e^x}{x+1}$.

নির্দিষ্ট যোগজে ধ্রুবক c অন্তর্ভুক্ত থাকে না।

মনে করি, $\int f(x)\,dx$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $= G(x)+c$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx=[G(x)+c]_a^b$

$=\{G(b)+c\}-\{G(a)+c\}=G(b)-G(a)$. অর্থাৎ নির্দিষ্ট যোগজ এর মান c এর উপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং, নির্দিষ্ট যোগজে c অন্তর্ভুক্ত করার প্রয়োজন হয় না।

10.7.1. নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত উদাহরণ ও অনুশীলনী

উদাহরণ 1. $\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. '০২]

সমাধান ঃ মনে করি, $I=\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin^2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right]=\frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ 2. $\int_2^3\frac{2x\,dx}{1+x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. '০৩; সি. '০৬]

সমাধান ঃ ধরি, $z=1+x^2$, $\therefore 2x\,dx=dz$ সীমাঃ $x=2$ হলে $z=5$ এবং $x=3$ হলে $z=10$

$$\therefore \int_2^3\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int_5^{10}\frac{dz}{z}=[\ln z]_5^{10}=\ln 10-\ln 5=\ln\frac{10}{5}=\ln 2$$

উদাহরণ 3. $\int_0^1\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. চ. ষ. '১০; ঢা. কু. '১১; ব. '১২; চ. '১৩]

সমাধান ঃ মনে করি, $y=\tan^{-1}x$, $\therefore dy=\frac{dx}{1+x^2}$

এখন $x=0$ হলে $y=\tan^{-1}0=0$ এবং $x=1$ হলে $y=\tan^{-1}1=\tan^{-1}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_0^1\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}y^2dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\pi/4}=\left[\frac{\pi^3}{3\times 64}-\frac{0}{3}\right]=\frac{\pi^3}{192}.$$

উদাহরণ 4. $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. '০৫; চ. '১১]

সমাধান ঃ মনে করি, $z = 1 + \cos x \quad \therefore \sin x\, dx = -dz$

এখন $x = 0$ হলে $z = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$, এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 1 + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x\, dx = -\int_2^1 z^2\, dz = -\left[\frac{z^3}{3}\right]_2^1 = -\frac{1}{3}\left[1^3 - 2^3\right] = \frac{7}{3}.$$

উদাহরণ 5. $\int_{-2}^{5} \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. ২০০০]

সমাধান ঃ ধরি, $y^2 = x^2 + 3 \Rightarrow 2y\, dy = 2x\, dx \quad \therefore\ y dy = x\, dx$

প্রান্তঃ যখন $x = 5$, তখন $y = \sqrt{25+3} = 2\sqrt{7}$. যখন $x = -2$, তখন $y = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$

$$\therefore \int_{-2}^{5} \frac{7x\, dx}{\sqrt{x^2+3}} = \int_{\sqrt{7}}^{7} \frac{7y\, dy}{\sqrt{y^2}} = 7\int_{\sqrt{7}}^{2\sqrt{7}} dy = 7\left[y\right]_{\sqrt{7}}^{2\sqrt{7}} = 7\left[2\sqrt{7} - \sqrt{7}\right] = 7\sqrt{7}.$$

উদাহরণ 6. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin 2x \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 3x + \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 3x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$= -\frac{1}{6}(0-1) - \frac{1}{2}(0-1) = \frac{2}{3}.$$

উদাহরণ 7. $\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta$ এর মান নির্ণয় কর। [সি. '১২; য. '১৩]

সমাধান ঃ $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta$

ধরি, $y = \sin\theta, \quad \therefore\ dy = \cos\theta\, d\theta$

প্রান্তঃ

θ	0	$\pi/2$
y	0	1

$$\therefore\ I = \int_0^1 (1 - y^2)\, dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ ৪. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [য. '০২]

সমাধান : $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

ধরি, $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$x = 3$ হলে $\sin\theta = \frac{3}{3} = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$x = 0$ হলে $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 - 9\sin^2\theta}\; 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= 3\times 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta = 9\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{9}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - 0\right] = \frac{9\pi}{4}.$$

প্রশ্নমালা 10.6

নিচের নির্দিষ্ট যোগজগুলি নির্ণয় কর :

1. $\int_0^2 5x^4\, dx$

2. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\, dx$

3. $\int_1^4 \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

4. $\int_0^3 (3-2x+x^2)\, dx$ [ব. '০৪; কু. '০৬]

5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$ [ব. '১১]

6. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ [দি. কু. চ. '১২; ঢা. য. কু. '১৩]

7. $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta$ [চ. '০৪]

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx.$ [ঢা. সি. '১১]

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ [সি. '১১]

10. $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\, d\theta$

11. $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$

12. $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\, dy$ [ঢা. চ. '১০; ঢা. '১২; রা. '১৩]

13. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x\, dx$ [চ. '১১; ঢা. '১৩]

14. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x}$ [সি. '১০; ঢা. রা. '১৩]

15. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\, dx$

16. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin x\, dx$

17. $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$ [ঢা. ব. '০৮; ব. '০৯]

18. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\, dx$ [কু. সি. '১১; ব. '১২; কু. '১৩]

19. $\int_0^1 \frac{(\cos^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

20. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}\, dx$ [কু. '১২; ঢা. '১৩]

21. $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$ [রা. '০৬; ব. '১০]

22. $\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x) dx$ [য. '০৫; কু. '০৮]

23. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$ [দি. '১১; ঢা. '১২]

24. (i) $\int_1^4 \frac{ln x}{\sqrt{x}} dx$ [ঢা. '১২]

(ii) $\int_a^b \frac{ln\, x}{x} dx$.

25. $\int_1^{\sqrt{e}} x\, ln\, x\, dx$.

26. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{9 - \sin^2 t}}$ [চ. '০২]

27. $\int_1^3 \frac{1}{x} \cos (ln\, x) dx$ [ব. '১২; চ. '১৩]

28. (i) $\int_0^1 x\, e^{-3x}\, dx$ [দি. '১০]

(ii) $\int_0^1 x e^x\, dx$.

29. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin \theta + \cos \theta)^2\, d\theta$

30. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\, dx$

31. $\int_0^1 \frac{2x(\tan^{-1} x^2)^2}{1 + x^4} dx$. [চ. '০৫]

32. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\, d\theta$.

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin 3x\, dx$ [ব. '০৫]

34. $\int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x\, dx$. [য. '১১; দি. রা. চ. '১২]

35. (i) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ [কু. '১০; রা. '১১] (ii) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ [ঢা. '১০] (iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

36. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt[3]{\sin x}\, dx$

37. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$.

38. (i) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \sin \theta} d\theta$. [রা. দি. '১০; ঢা. ব. '১২]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

39. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta} d\theta$ [ব. '১৩]

40. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 3x^4}\, dx$. [কু. '১০; আ. '১১; সি. য. '১২]

41. (i) $\int_1^4 ln\, x\, dx$ (ii) $\int_2^4 ln\, 2x\, dx$ [ব. '০৯] (iii) $\int_0^1 ln\, (x^2 + 1) dx$ [ঢা. '০৭]

42. $\int_0^{\pi/2} \cos 3\theta \cos 2\theta\, d\theta$

43. $\int_0^1 \frac{1 + x}{1 + x^2} dx$ [ঢা. রা. '০৯; কু. সি. '১২]

44. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$

45. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x\, dx$ [য. '১১]

46. $\int_0^{\pi/4} \tan^3 x \sec^2 x \, dx$ [ঢা. ব. '১১] 47. (i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ [ঢা. '০৩] (ii) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [য. '০৭]

48. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x \, dx}{\sqrt{\sin x}}$ [ব. চ. '১০; রা. '১২] 49. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos 4x \, dx$ [রা. '০৪; কু. '০৬] 50. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x} dx$ [কু. ব. '১০]

51. $\int_0^{\pi/2} e^x (\sin x + \cos x) \, dx$ [কু. '১১] 52. $\int_0^{ln 2} \frac{e^x \, dx}{1 + e^x}$ [ব. য. চ. আ. '১১; সি. '১২; কু. '১৩]

53. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1 + ln \, x)^2}$ [দি. '১১; কু. ব. '১২; রা. চ. '১৩] 54. $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} \, dx$ [রা. '১১]

55. (i) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$ [কু. সি. '১১] (ii) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$. [য. চ. ব. দি. '১২; কু. '১৩]

56. $\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx$ 57. (i) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2} dx$ [য. '১২]

58. $\int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$. 59. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ [রা. '১২]

60. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{1 + x^4}$ [রা. '১১] 61. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta$ [ব. '১১]

62. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x \, dx$. 63. $\int_{-1}^4 \frac{dx}{(2x + 3)^2}$ [য. '০৭]

64. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$ [য. '১০; চ. '১৩] 65. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$ [য. '০৪]

66. $\int_0^1 \frac{1 - x}{1 + x} dx$. [য. '০৪] 67. (i) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ [রা. '১১]

(ii) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1 + x^2} dx$ 68. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1 + \sin x)^2}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$ [রা. '১৩] (iii) $\int_0^{\pi} 3\sqrt{(1 - \cos x)} \sin x \, dx$

69. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$ [ঢা. '০৬] 70. দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \frac{\pi}{2ab}$ [রা. '১১]

71. দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{4} (a + b) \pi$. [চ. '০৩]

উত্তরমালা

1. 32. **2.** $\frac{5}{6}$. **3.** $1\frac{11}{15}$. **4.** 9. **5.** 2. **6.** $\frac{1}{2}(e-1)$. **7.** 2. **8.** 1. **9.** $\frac{\pi}{4}$. **10.** $1-\frac{\pi}{4}$. **11.** $\frac{\pi}{2}$. **12.** $\frac{128}{15}$.

13. $\frac{1}{3}$. **14.** $\sqrt{3}+1$. **15.** $\frac{1}{6}$. **16.** $\frac{2}{3}$. **17.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **18.** $\frac{8}{21}$. **19.** $\frac{\pi^4}{64}$. **20.** 1. **21.** $\frac{1}{3}(e^8-e)$.

22. $\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{1}{162}$. **24. (i)** $8\ln 2-4$. **(ii)** $\frac{1}{2}\ln(ab).\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. **25.** $\frac{1}{4}$. **26.** $\sin^{-1}\frac{1}{3}$.

27. $\sin(\ln 3)$. **28. (i)** $\frac{1}{9}-\frac{4}{9}e^{-3}$. **(ii)** 1. **29.** π. **30.** $\frac{1}{4}$. **31.** $\frac{\pi^3}{192}$. **32.** $\frac{\pi}{4}$. **33.** $\frac{-2}{15}$.

34. $\frac{1}{12}(5\pi-6\sqrt{3}+6)$. **35.(i)** $2-\sqrt{3}$. **(ii)** $3-2\sqrt{2}$. **(iii)** $\frac{\pi}{2}$ **36.** $\frac{9}{20}$. **37.** $\frac{\pi}{12}$. **38.(i)** $(2-\sqrt{2})$.

(ii) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **39.** $(\pi+2)$. **40.** $\frac{7}{18}$. **41. (i)** $8\ln(2)-3$. **(ii)** $8\ln(2)-2$. **(iii)** $\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2$.
42. $\frac{3}{5}$. **43.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **44.** $\frac{1}{24}$. **45.** $\frac{1}{6}$. **46.** $\frac{1}{7}$. **47. (i)** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **(ii)** 1. **48.** $\frac{8}{5}$. **49. (i)** $\frac{2}{3}$. **(ii)** 0.
50. $\frac{1}{6}(\ln 2)$. **51.** $e^{\pi/2}$. **52.** $\ln\frac{3}{2}$. **53.** $\frac{2}{3}$. **54.** $\frac{25\pi}{4}$. **55. (i)** 4π. **(ii)** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **56.** 0. **57. (i)** $2(e-1)$
(ii) $\frac{\pi^3}{192}$, **58.** $\left(1-\frac{2}{e}\right)$. **59.** $\left(\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}\right)$. **60.** $\frac{\pi}{8}$. **61.** $\frac{\pi}{2}-1$. **62.** $\frac{5}{16}$. **63.** $\frac{4}{33}$. **64.** $\frac{8}{21}$. **65.** $\frac{3\pi}{16}$

66. $\ln\frac{4}{e}$. **67 (i).** $\frac{\pi^3}{24}$. **(ii).** $\frac{\pi^3}{81}$. **68.** (i) $\frac{1}{2}$. **(ii)** $\frac{\pi}{4}$. **(iii)** $4\sqrt{2}$. **69.** $\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$.

10.7.2. নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উদাহরণ ও অনুশীলনী

উদাহরণ 1. $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. '১৩]

সমাধান : $y^2=4ax$ .... (i) $x^2=4ay$ .... (ii)

$$\text{(ii)}-\text{(i)} \Rightarrow x^2-y^2=-4a(x-y)$$
$$\Rightarrow x^2-y^2+4a(x-y)=0$$
$$\Rightarrow (x-y)(x+y+4a)=0$$
$$\therefore x-y=0 \Rightarrow x=y$$

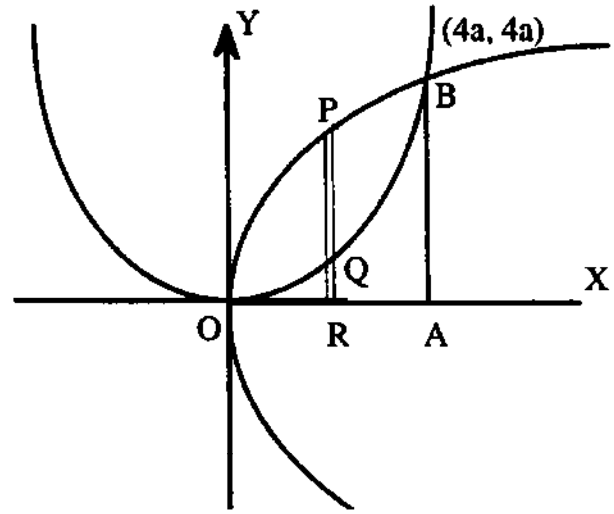
(i) থেকে, $y^2=4ax \Rightarrow x^2=4ax$, $y=x$ বসিয়ে

$$\Rightarrow x(x-4a)=0$$
$$\Rightarrow x=4a \text{ অথবা, } x=0=y$$

$\therefore$ পরাবৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু $O(0, 0)$, $B(4a, 4a)$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a} (y_1 - y_2)dx$, যখন $y_1 = PR = \sqrt{4ax}$ এবং $y_2 = QR = \frac{x^2}{4a}$.

x এর সীমা : $x = 0$ থেকে $OA = 4a$



$$= \int_0^{4a} \left(\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^{4a} \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{4a}\int_0^{4a} x^2\,dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$$

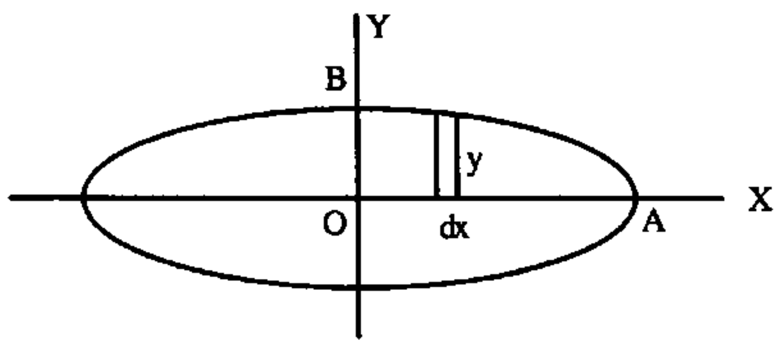
$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left\{\left(\sqrt{4a}^3\right) - 0\right\} - \frac{1}{12a}\{(4a)^3 - 0\}$$

$$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2 \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ 2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [ব. দি. '১১; ঢা. রা. য. চ. ব. '১২]

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ বা, $\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9}$ বা, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$

(+) নিয়ে , $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ [(–) বাদ দেওয়ার কারণ ক্ষেত্র OAB তে y ধনাত্মক এবং আবদ্ধ ক্ষেত্রটি OAB ক্ষেত্রের 4 গুণ]



সীমা ঃ $x = 0$ এবং $x = OA = 3$ এখানে মোট ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

ধরি, $x = 3\sin\theta$
$dx = 3\cos\theta\,d\theta$
$x = 0$ হলে, $\theta = 0$
$x = 3$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^3 y\,dx = 4\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\,dx$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \sqrt{9 - 9\sin^2\theta}\; 3\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \times 3 \times 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\;\cos\theta\,d\theta$$

$$= 24\int_0^{\pi/2} \cos\theta\;\cos\theta\,d\theta = 12\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta$$

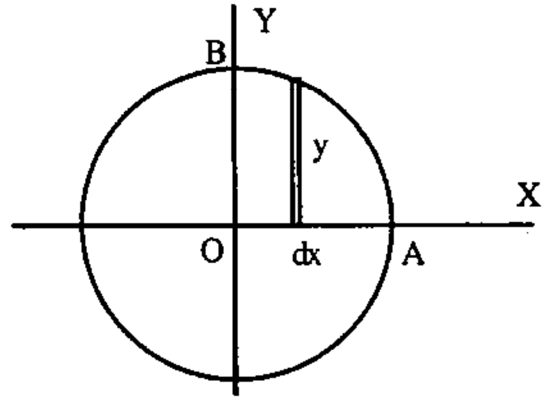
$$= 12\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta = 12\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 12\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0\right)$$

$= 6\pi$ বর্গ একক।

উদাহরণ 3. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. কু. ব. '১১; দি. '১২]

সমাধান : $x^2 + y^2 = 16$ বা, $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

(+) নিয়ে, $y = \sqrt{16 - x^2}$ [(–) বাদ দেয়ার করণ OAB ক্ষেত্রের জন্য y ধনাত্মক]



$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$= 4\int_0^4 y\,dx = 4\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\,.\,4\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4 \times 4 \times 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$$

$$= 32\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta = 32\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 32\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 32\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}$$

$= 16\pi$ বর্গ একক।

সীমা ঃ $x = 0$ থেকে, $OA = 4$
মনে করি, $x = 4\sin\theta$
$\Rightarrow dx = 4\cos\theta\,d\theta$
$x = 0$ হলে, $\theta = 0$
$x = 4$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

প্রশ্নমালা 10.7

1. $y = 0, y = x$ এবং $x = 6$ রেখাত্রয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
2. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. '১১; সি. '১২]
3. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. '০৬]
4. (i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ প্রথম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '১২]
   (ii) $x^2 + y^2 = 1$ এবং $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
5. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরল রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব. '১০; সি. '১১; ঢা. কু. চ. '১৩]
6. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরল রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. '১০]
7. (i) $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   (ii) $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. '১০]
8. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০৫]
9. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
10. $y = 2\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ থেকে এর মধ্যে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
11. $3x + 4y = 12$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
12. বক্ররেখা $y = 2x - x^2$ এবং x- অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. '০১]
13. বক্ররেখা $x^2 = 4y$, x- অক্ষ, $x = 2$ এবং $x = 4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. $y = 4x^2$ ও $y = 4$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '০১]

15. $9x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০১]

16. (i) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০২]

(ii) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯; কু. '১০; ব. '১৩]

17. $y = x^2$ বক্ররেখা x- অক্ষ এবং $x = 1, x = 7$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '০২]

18. $x - y + 2 = 0$ এবং $y = x^2$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০৩]

19. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x- অক্ষ এবং $x = a$ ও b রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি. '১০]

20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '০৪]

উত্তরমালা

1. 18 বর্গ একক 2. πr^2 বর্গ একক 3. 4π বর্গ একক 4. (i) $\frac{1}{4}\pi ab$ বর্গ একক (ii) $\frac{1}{6}(3\pi - 8)$ বর্গ একক। 5. $\frac{8}{3}$ বর্গ একক 6. $\frac{1}{3}$ বর্গ একক 7. (i) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক (ii) $\frac{1}{3}$ বর্গ একক 8. $\frac{128}{3}$ বর্গ একক 9. $\frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক 10. 4 বর্গ একক 11. 6 বর্গ একক। 12. $\frac{8}{3}$ বর্গ একক 13. $\frac{14}{3}$ বর্গ একক 4. $\frac{16}{3}$ 15. 6π 16. (i) $\frac{128}{3}$ (ii) $\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12$ 17. $\frac{342}{3}$ 18. $\frac{9}{2}$ বর্গ একক। 19. $c^2 ln\left(\frac{b}{a}\right)$. 20. $\frac{1}{6}a^2$

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. (a) নির্দিষ্ট যোগজে ধ্রুবক c থাকে না কেন?

(b) প্রমাণ কর যে, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c.$

(c) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উ: $\frac{128}{3}$ বর্গ একক।

2. (a) দেখাও যে, $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c.$

(b) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$ নির্ণয় কর। উ : $\frac{e^x}{(1+x)}$

(c) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1 + ln\, x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর। উ : $\frac{2}{3}$.

3. (a) $\int \frac{dx}{1 + 9x^2}$ নির্ণয় কর। উ : $\frac{1}{3}\tan^{-1} 3x$

(b) $\int f(x)dx = ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ হলে $f(x)$ নির্ণয় কর। উ : $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(c) $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ : 6π বর্গ একক।

বহুনির্বচনী প্রশ্ন :

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+ln\, x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\frac{2}{\sqrt{1+ln\, x}}$ (b) $2\sqrt{1+ln\, x}$

(c) $\sqrt{1+ln\, x}$ (d) $\left(\sqrt{1+ln\, x}\right)^{3/2}$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x - 1}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\sqrt{\tan x - 1}$ (b) $2\sqrt{\tan x - 1}$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{\tan x - 1}}$ (d) $(\sqrt{\tan x - 1})^{3/2}$

3. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\cos^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

(c) $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$ (d) $\cot^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

4. $\int e^x \sec x(1 + \tan x)\, dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $e^x \tan x$ (b) $e^x \sec x$

(c) $\frac{e^x}{\tan x}$ (d) কোনোটিই নয়

5. $\int \cos^{-1} x\, dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ = কত?

(a) $\cos^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $x \cos x - \sqrt{1-x^2}$

(c) $x\cos^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ (d) কোনোটিই নয়

6. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\, dx$ এর মান কত?

(a) $ln\left(\frac{2}{e}\right)$ (b) $ln\left(\frac{4}{e}\right)$

(c) $ln\left(\frac{3}{e}\right)$ (d) কোনোটিই নয়

7. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর মান কত?

(a) $\tan^{-1} e + \frac{\pi}{4}$ (b) $\tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} e$ (d) $\frac{\pi}{3} + \tan^{-1} e$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x}\, dx$ এর মান কত?

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

9. $y^2 = 4x$ এবং $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{4}{3}$ বর্গএকক (b) $\frac{8}{3}$ বর্গএকক (c) $\frac{5}{6}$ বর্গএকক (d) $\frac{4}{9}$ বর্গএকক

10. $y^2 = 16x$ এবং $y = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{1}{3}$ বর্গএকক (b) $\frac{2}{3}$ বর্গএকক (c) $\frac{4}{3}$ বর্গএকক (d) $\frac{5}{3}$ বর্গএকক

ব্যবহারিক

10.8. $y = f(x)$ **সমীকরণের লেখ ও** x**-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়**

ক্ষেত্রফলের আসন্নমান নির্ণয়ের জন্য ট্রাপিজিয়াম সূত্র (*Trapezoidal Rule*) আলোচনা করা হল।

মনে করি, $[a, b]$ ব্যবধির মধ্যে $y = f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন (Continuous) ফাংশন। অর্থাৎ a এবং b এর মধ্যে ফাংশনটির লেখে কোথায়ও ছেদ নেই।

$y = f(x)$ এর লেখ, x-অক্ষ, $x_0 = a$ এবং $x_n = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি চিত্রে দেখান হল।

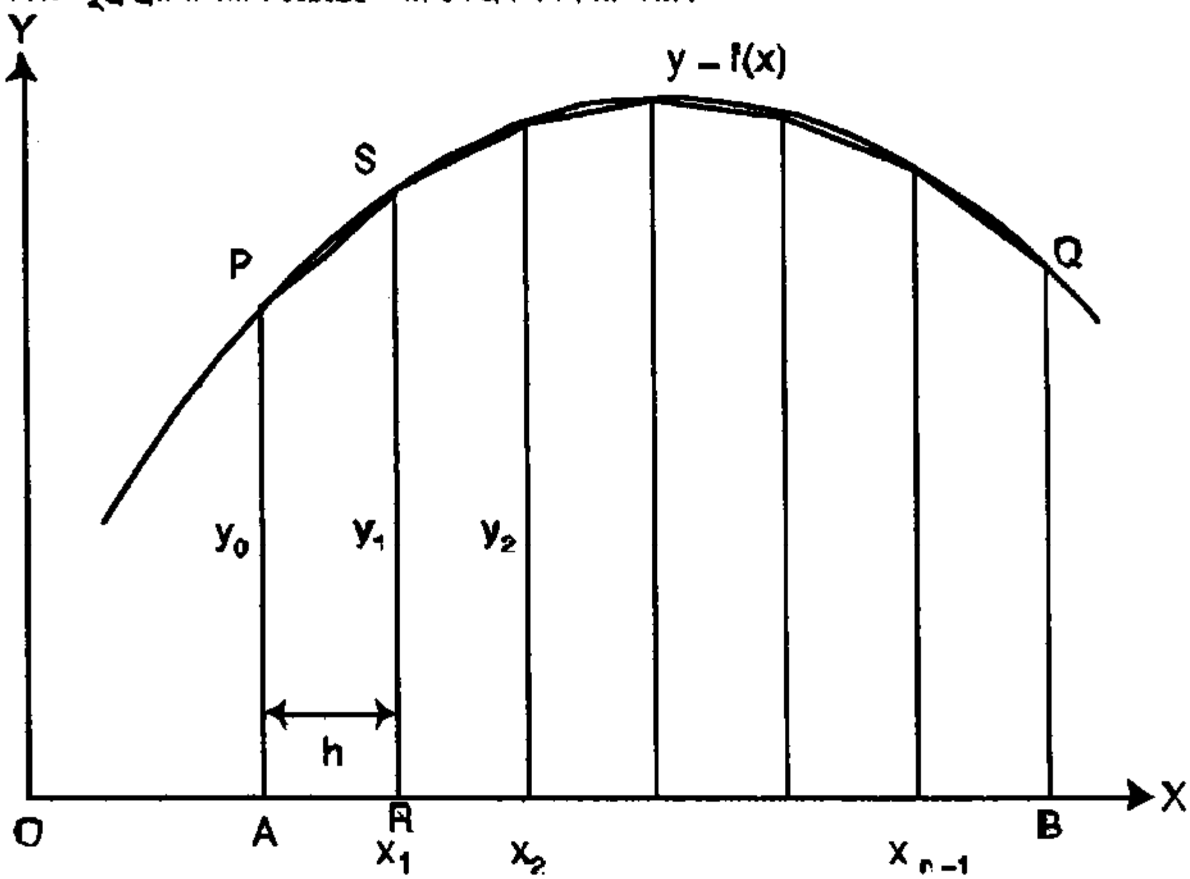
ক্ষেত্র $ABQP$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। $[a, b]$ ব্যবধিকে $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b$ বিন্দুদ্বারা n সংখ্যক ক্ষুদ্র ব্যবধিতে বিভক্ত করা হল। তাহলে, $nh = x_n - x_0$ অর্থাৎ $h = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$.

আবার ক্ষেত্রটি n সংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত করা হল। ধরি, প্রত্যেক ক্ষুদ্র ব্যবধির দৈর্ঘ্য $= h$ অর্থাৎ

$x_1 - x_0 = h, x_2 - x_1 = h$ ইত্যাদি।

$\therefore x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h \ldots.$

প্রথমে একটি ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়াম $ARSP$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।



প্রথম কোটি $y_0 = f(x_0) = AP$ এবং ২য় কোটি $y_1 = f(x_1) = RS \ldots n$ তম কোটি $y_n = f(x_n) = BQ$

এখন ট্রাপিজিয়াম $ARSP$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{y_0 + y_1}{2} \times AR$

$$= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\, h, \text{ যখন } AR = h$$

তদ্রুপ ২য় ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\ h\ (y_1 + y_2)$ ইত্যাদি।

অতএব সমগ্র $ABQP$ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= A$ হলে,

$$A = \frac{1}{2} h\ (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h\ (y_2 + y_3) + \dots + \frac{1}{2} h\ (y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{1}{2} h\ [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2\ y_{n-1} + y_n]$$

$$= h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]$$ যা ট্রাপিজিয়াম সূত্র হিসেবে পরিচিত।

সুতরাং ট্রাপিজিয়াম সূত্রটি $A = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]$

$\int_a^b f(x)\,dx$ নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালটি $y = f(x)$, x-অক্ষ, $x = a$ এবং $x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

সুতরাং $\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n\right)$

2. n এর মান যত বেশি হবে অর্থাৎ h এর মান যত ছোট হবে আসন্নীকরণ তত শুদ্ধ হবে।

সমস্যা নং 2.1	তারিখ :

সমস্যা : ছয়টি কোটি ব্যবহার করে ট্রাপিজিয়াম সূত্রের সাহায্যে $y = \sin x$, x-অক্ষ এবং $x = 0$, $x = \pi/4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান অর্থাৎ, $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : মনে করি, $y = f(x) = \sin x$ এবং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= A$.

তত্ত্ব : $A = h\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2} y_5\right)$

কার্যপদ্ধতি :

1. $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ব্যবধিকে সমদূরবর্তী 6টি কোটি $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ এর জন্য $(6 - 1) = 5$টি ক্ষুদ্র ব্যবধিতে বিভক্ত করি যার প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য h নির্ণয় করি।

2. $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র প্রয়োগ করে x_1, x_2 .... নির্ণয় করি।

$h = \frac{x_n - x_0}{n}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{20}$	0	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$

3. $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনে উপরোক্ত ছয়টি x এর মান বসিয়ে প্রতিসঙ্গী ছয়টি কোটি y নির্ণয় করি।

x	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{20}$	$x_2 = \frac{\pi}{10}$	$x_3 = \frac{3\pi}{20}$	$x_4 = \frac{\pi}{5}$	$x_5 = \frac{\pi}{4}$
$y = \sin x$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0.15643$	$y_2 = 0.30902$	$y_3 = 0.45399$	$y_4 = 0.58778$	$y_5 = 0.70711$

4. ট্রাপিজিয়াম সূত্র $A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5\right)$ প্রয়োগ করে A এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন :

ট্রাপিজিয়াম সূত্র (যখন কোটি 6 টি) : $A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5\right)$

$$\therefore A = \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{20}\left(\frac{1}{2}\times 0 + 0.15643 + 0.30902 + 0.45399 + 0.58778 + \frac{1}{2}\times 0.70711\right)$$

$$= \frac{\pi}{20}\times 1.86077 = 0.2924 = 0.30 \text{ (প্রায়)}$$

উত্তর : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 0.30$ বর্গ একক (প্রায়)।

সমস্যা নং 2.2	তারিখ :

সমস্যা : পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{0.8} e^{x^2} dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : ধরি $A = \int_0^{0.8} e^{x^2} dx.$

তত্ত্ব : $A = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right)$

কার্যপদ্ধতি :

1. $0 \le x \le 0.8$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ এর জন্য 4টি ক্ষুদ্র ব্যবধিতে বিভক্ত করে প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য h নির্ণয় করি।

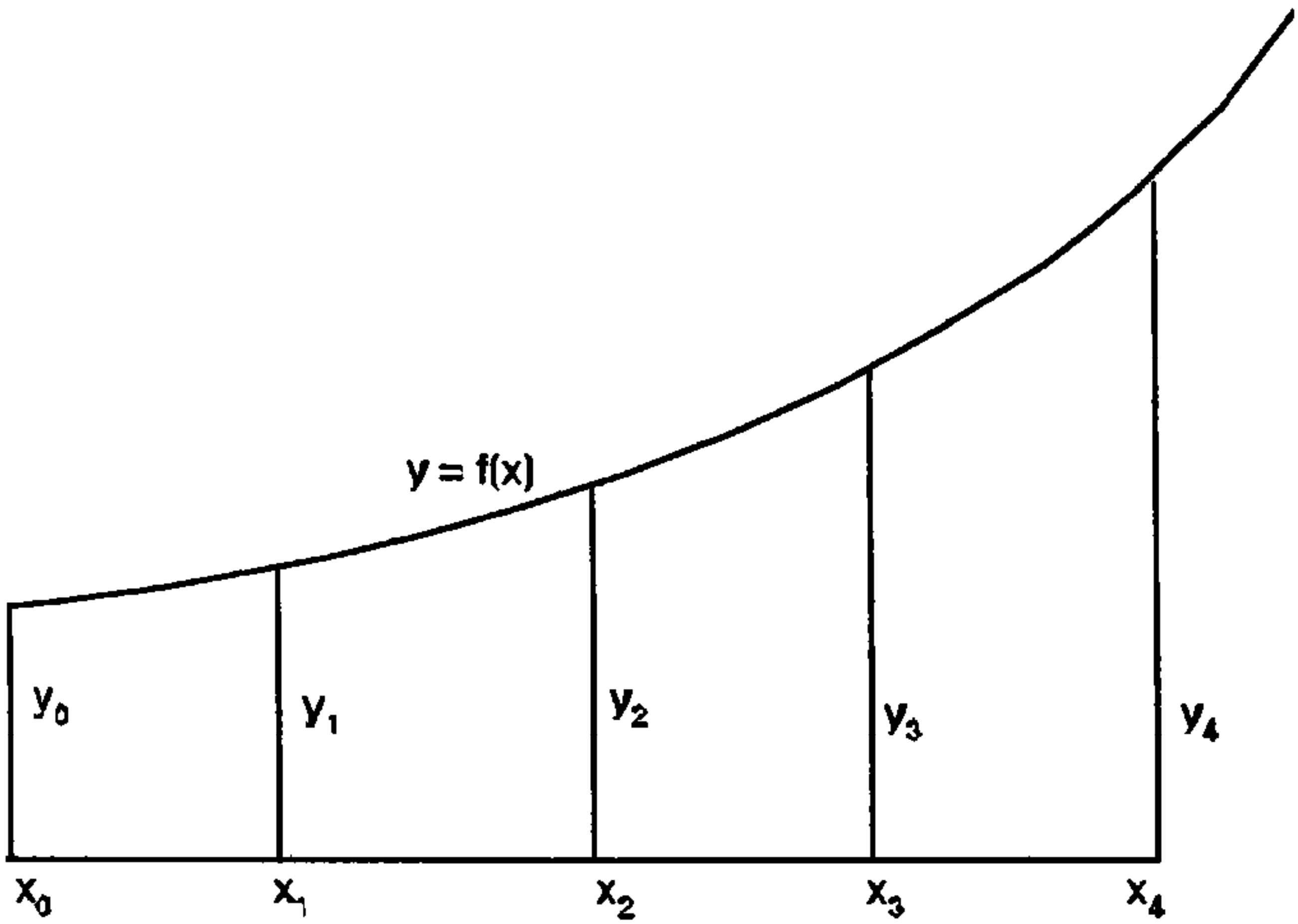
2. $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র প্রয়োগ করে $x_1, x_2, \ldots$ নির্ণয় করি।

3. $y = f(x) = e^{x^2}$ সমীকরণে উপরোক্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত $x_1, x_2 \ldots$ স্থাপন করে y এর অনুসঙ্গী মান নির্ণয় করি।

4. ট্রাপিজিয়াম সূত্র: $A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)$ ব্যবহার করে A এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন :

$h = \frac{x_n - x_0}{n}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{0.8}{4} = 0.2$	0	0.2	0.4	0.6	0.8



x	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.2$	$x_2 = 0.4$	$x_3 = 0.6$	$x_4 = 0.8$
$y = e^{x^2}$	$y_0 = 1$	$y_1 = 1.0408$	$y_2 = 1.1735$	$y_3 = 1.4333$	$y_4 = 1.8964$

ট্রাপিজিয়াম সূত্র থেকে $A = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right)$, যখন $n = 4$

$$= 0.2\left(\frac{1}{2} + 1.0408 + 1.1735 + 1.4333 + \frac{1.8964}{2}\right)$$

$$= 0.2 \times 5.0958 = 1.0192 = 1.02 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore A = 1.02$ (প্রায়)।

উত্তর : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 1.02$ বর্গ একক (প্রায়)