অন্তরীকরণ

POLIIN

<u>সীমা (Limit)</u>

ফিরে দেখা অংশ ঃ গাণিতিক বিশ্লেষণের ক্রমবিকাশের ক্ষেত্রে সীমা-সম্পর্কিত ধারণা গণিতে একটি মূল ধারণা এবং ইহাকে অন্তরকলনবিদ্যার ভিত্তি হিসাবে গণ্য করা হয়। গণিত শাস্ত্রের বিকাশে তথা বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার (যথা পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, ইত্যাদি) তত্ত্বগত আলোচনায় এবং অর্থনীতির বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে সীমা ধারণার প্রয়োগ বর্তমানে সর্বজন স্বীকৃত। এই অধ্যায়ে চলকরাশির এবং ফাংশনের সীমা সম্বন্ধে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হইবে। যেহেতু শূন্য দ্বারা ভাগ গণিতে অসংজ্ঞায়িত কাজেই, $x = 1$বিন্দুতে $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনের মান অনির্ণেয় হয়, কারণ $x = 1$বিন্দুতে $f(1) = \frac{x^2-1}{x-1}$ অসংজ্ঞায়িত। অন্য কথায় বলা যায়, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান বিদ্যমান নাই। কিন্তু x এর মান 1 এর খুব নিকটবর্তী নেওয়া হয় (যথা $x = 0.999$ অথবা $x = 1.0001$ ইত্যাদি) তবে $f(x)$ এর মান একটি সসীম সংখ্যা হয়, উদাহরণস্বরূপ $x = 0.999$ হইলে, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1 = 0.9999 + 1 = 1.999$ হয়। আবার, $x = 1.0001$ হইলে, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1 = 1.001 + 1 = 2.0001$ হয়।

x এর মান 1 এর খুব নিকটবর্তী ধরিয়া $f(x)$ এর মানও 2 এর খুব নিকটবর্তী পাওয়া যায়। অতএব $x = 1$ মানের জন্য $f(x)$ অনির্ণেয় হইলেও 1 এর নিকটবর্তী মানগুলিতে $f(x)$ এর মানগুলি সসীম সংখ্যার নিকটবর্তী হয়। বাস্তবে $x = 1$ মান এবং $x = 1.0001$ মানের (1 এর খুব নিকটবর্তী মানগুলি 1.0001, 1.00001.......অথবা 0.999, 0.9999....... ইত্যাদি) পার্থক্য ক্ষুদ্র হইতে থাকিবে । অনুরূপভাবে $f(x)$ এর মানগুলির সহিত 2 এর পার্থক্য ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে যদি x এর মান 1 এর খুব নিকটবর্তী ধরা হয়। সাধারণভাবে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ অনির্ণেয় হইলেও একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা b এর অস্তিত্ব থাকিতে পারে যাহাতে x এর মান ক্রমশঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে $f(x)$ ফাংশনের মান ক্রমশঃ b নিকটবর্তী হইবে (নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা b এর অস্তিত্ব সর্বদাই থাকিবে এইরূপ নয়)। এই পর্যবেক্ষণ হইতে গণিতবিদগণ সীমার ধারণার উদ্ভাবন করেন। বস্তুতঃ সীমা নির্ধারণ এইরূপ একটি প্রক্রিয়া যাহার সাহায্যে কোন ফাংশনের অসংজ্ঞায়িত বিন্দুর নিকটতর আধারে বা অঞ্চলে (Domain) উহার মানের অস্তিত্ব সম্বন্ধে মূল্যায়ন করা হয়।

<u>চলকরাশির সীমা (Limit of a variable)</u> :

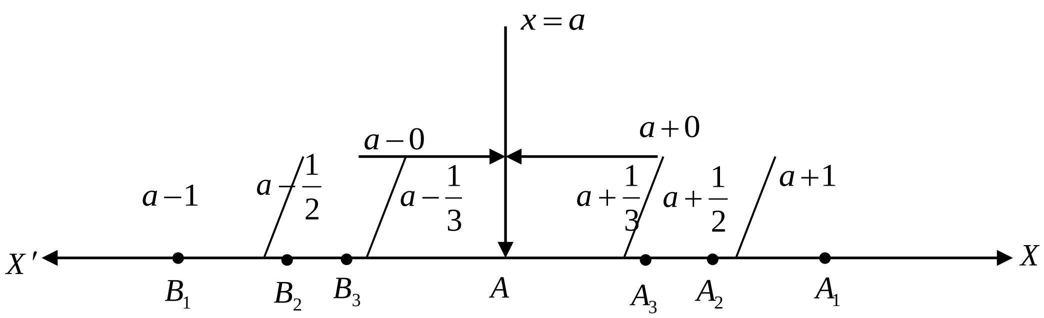
একটি নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে একটি চলকরাশি, কতকগুলি মান গ্রহণকালে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার অভিমুখী হইলে ঐ সংখ্যাটিকে চলকরাশির সীমা বলা হয়। মনে করি x একটি চলকরাশি, a একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যার জন্য $a + 1, a + {}^{1}/_{2}, \dots \dots ....$ একটি অসীম ক্রম । এখন যদি x চলকরাশি এই মানগুলি প্রদত্ত ক্রমে পরপর গ্রহণ করে এবং x এর গৃহীত মান ও এর অন্তরের সংখ্যামান অর্থাৎ $|x - a|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায়, তবে ইহা বলা যায় যে x সর্বদাই a অপেক্ষা বৃহত্তর থাকিয়া ক্রমশ ঃ a- এর নিকটবর্তী হইতেছে। প্রতীকের সাহায্যে ইহা $x \to a + 0,\ x \to a^+$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। আবার,

মনেকরি, x চলকরাশি, a ধ্রুবক এবং $a-1, a-{}^{1}/_{2}, a{}^{1}/_{3} \ldots\ldots\ldots\ldots$ অসীম ক্রম। যদি x চলকরাশি গৃহীত মান ও a এর অন্তরের সংখ্যামান অর্থ্যাৎ $|x-a|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত অতিক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায়, তবে ইহা বলা যায় যে, x চলকরাশি সর্বদা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর থাকিয়া ক্রমশ ঃ a এর নিকটবর্তী হইতেছে। প্রতীকের সাহায্যে, ইহা $x \to a-0$ বা $x \to a^{-}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অতএব অবশেষে বলা যায় x একদিকে সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর এবং অপরদিকে সর্বদা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর থাকিয়া ক্রমশ a এর নিকটবর্তী হইতেছে। এইরূপ ক্ষেত্রে a কে x চলকরাশির সীমা বলা হয় এবং ইহাকে প্রতীকের সাহায্যে $x \to a$ বা $\lim x = a$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

চলকরাশির সীমার জ্যামিতিক ধারণা

<u>Geometrical idea of the limit of a variable</u>



আলোচিত চলকরাশির সীমা উপরোক্ত লেখচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল। এই লেখচিত্র হতে প্রাপ্ত জ্যামিতিক ধারণাগুলি নিম্নরূপঃ

- $x \to a-0$ বা $x \to a^{-}$ হইলে (১) x এর গৃহীত মানসমূহ সর্বদাই a অপেক্ষা বৃহত্তর হয় এবং (২) x এর গৃহীত মান ও a এর অন্তরের সাংখ্যমান অর্থাৎ $|x-a|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত অতিক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়।
- $x \to a-0$ বা $x \to a^{-}$ হইলে (১) x এর গৃহীত মানসমূহ সর্বদাই a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় এবং (২) x এর গৃহীত মান ও a এর অন্তরের সাংখ্যমান অর্থাৎ $|x-a|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত অতিক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়।
- $x \to a-0$ বা $\lim = a$ হইলে x এর গৃহীত মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর হইবে কিন্তু x এর মান সাধারণতঃ a হইবে না ।
- $x \to a$ প্রতীকটিকে x, a এর দিকে অগ্রসর হয় (x tands to a বা x approaches a) এইরূপভাবে পড়িতে হয়।
- $x \to a-0$ বা $x \to a^{+}$ প্রতীকটিকে x ডানদিকে হইতে a এর দিকে অগ্রসর হয় (x tends to a from the right side) এইরূপভাবে পড়িতে হয়।
- $x \to a-0$ বা $x \to a^{-}$ প্রতীকটিকে x বামদিকে হইতে a এর দিকে অগ্রসর হয় x tends to a from the Left side) এইরূপভাবে পড়িতে হয়।

ফাংশনের সীমা (Limiting value of a function) : x চলকরাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা a অপেক্ষা বৃহত্তর মানগুলি গ্রহণ করিয়া ক্রম a এর দিকে অগ্রসর হইলে যদি প্রতিটি x এর মানের অনুরূপ $f(x)$ এর মান পাওয়া যায় এবং $f(x)$ এর প্রাপ্ত মানগুলি ক্রমশ: একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l এর দিকে অগ্রসর হয় অথবা সর্বদাই নির্দিষ্ট ধ্রুবক l হয়, তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমাস্থ মান বলা হয়। অন্য কথায় বলা যায় যখন $x \to a$ তখন যদি এইরূপ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l পাওয়া যায় যাহাতে $f(x)$ এর গৃহীত মান ও l এর অন্তরের সাংখ্যমান অর্থাৎ $|f(x) - 1|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায়, তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমাস্থ মান বলা হয় এবং উহা প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\lim_{x\to a} f(x) = l$

ডানপক্ষ সীমার মান (Right hand limit of a function) :

x চলকরাশি সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর মানগুলি গ্রহণ করিয়া ক্রমশ : a এর দিকে অগ্রসর হইলে যদি প্রতিটি x এর মানের অনুরূপ $f(x)$ এর মান পাওয়া যায় এবং $f(x)$ এর মানগুলি ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_1 এর দিকে অগ্রসর হয় অথবা সর্বদাই নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_1 হয়, তবে l_1 কে $f(x)$ ফাংশনের ডানদিকের সীমাস্থ মান বলা হয়। অন্যকথায় বলা যায়, যখন $x \to a^+$, তখন যদি এইরূপ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_1 পাওয়া যায়, যাহাতে এর গৃহীত মানও l_1 এর অন্তরের সাংখ্যমান অর্থাৎ $|f(x) - l_1|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায় তবে l_1কে $f(x)$ ফাংশনের ডানদিকের সীমাস্থ মান বলা হয় এবং উহা $\lim_{h\to 0^+} f(a+h) = l_1$ বা, $\lim_{x\to a+0} f(x) = l_1$

বা, $\lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

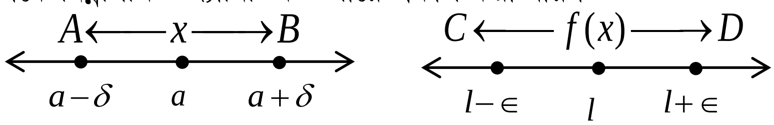
বামপক্ষ সীমার মান (Left hand limit of a function) :

x চলকরাশি সর্বদা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানগুলি গ্রহণ করিয়া ক্রমশ : a এর দিকে অগ্রসর হইলে যদি প্রতিটি x এর মানের অনুরূপ $f(x)$ এর মান পাওয়া যায় এবং $f(x)$ এর মানগুলি ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_2 এর দিকে অগ্রসর হয় অথবা সর্বদাই নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_2 হয়, তবে l_2 কে $f(x)$ ফাংশসের ডানদিকের সীমাস্থ মান বলা হয়। অন্যকথায় বলা যায়, যখন $x \to a^-$, তখন যদি এইরূপ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_2 পাওয়া যায়, যাহাতে এর গৃহীত মানও l_2 এর অন্তরের সাংখ্যমান অর্থাৎ $|f(x) - l_2|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায় তবে l_1কে $f(x)$ ফাংশনের ডানদিকের সীমাস্থ মান বলা হয় এবং উহা $\lim_{x\to a^+} f(x) = l_2$ বা, $\lim_{h\to 0^+} f(a+h) = l_2$

বা, $\lim_{x\to a+0} f(x) = l_2$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সীমার অস্তিত্ব (Existence of a limit) :

মনে করি x একটি চলকরাশি, a একটি ধ্রুবক এবং x এর একমান বিশিষ্ট ফাংশন $f(x)$। $x \to a$ হইলে $f(x)$ ফাংশনের সীমাস্থ মান l হবে যদি যে কোন প্রদত্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) জণ্য এইরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হয়। যেখানে δ এর মান ϵ এর মানের উপর নির্ভরশীল) যাহাতে $|f(x)-l|<\epsilon$, যখন $0<|x-a|<\delta$. সীমার উপরোক্ত সংজ্ঞাকে অনেক সময় সীমাস্থ মান নির্ণয়ে (δ,ϵ) পদ্ধতি বলা হয়। আমরা জানি, $0<|x-a|<\delta \Rightarrow a-\delta<x<a+\delta,\ x\neq a$ অনুরূপভাবে $|f(x)-l|<\epsilon \Rightarrow l-\epsilon<f(x)<l+\epsilon$ কাজেই সীমার উপরোক্ত সংজ্ঞাকে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক উপায়ে প্রকাশ করা যায়।



যদি $\epsilon\ (>0)$ এর প্রত্যেক মানের জন্য $\delta\ (>0)$ এইরূপে নির্ণয় করা যায় যে AB ব্যবধিতে x এর প্রত্যেক মানের জন্য (a ব্যতীত) $f(x)$ এর মান CD ব্যবধিতে থাকে, তবে $x \to a$ হইলে $f(x)$ এর সীমা l হইবে । যদি এইরূপ কোন সংখ্যা l এর অস্তিত্ব না থাকে, তবে $\lim f(x)$ এর অস্তিত্ব থাকিবে না।

দ্রষ্টব্য ঃ (১) $x \to a$ হইলে $f(x)$ এর সীমা যদি l হয় তবে, $f(a)$ অর্থাৎ $x=a$ তে $f(x)$ এর মান l এর খুব নিকটবর্তী নাও হইতে পারে । (২) ϵ কে সাধারণত ঃ ইচ্ছাধীন খুব ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশিরূপে কল্পনা করা হয়।

➲ $x \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ এর অর্থ (Meaning of $x \to \infty$ and $x \to -\infty$ ঃ

যদি কোন চলকরাশি কেবলমাত্র ধনাত্মক মান গ্রহণ করিয়া সীমাহীনভাবে বাড়িতে থাকে এবং অবশেষে পূর্ব নির্ধারিত কোন ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত বড়ই হউক না কেন) অপেক্ষা বড় হইলে আমরা বলি যে, x চলকরাশি ধনাত্মক দিকে অসীমগামী এবং উহা $x \to \infty$ প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অনুরূপভাবে যদি কোন চলকরাশি x কেবলমাত্র ঋণাত্মক মান গ্রহণ করিয়া সীমাহীনভাবে কমিতে থাকে এবং অবশেষে পূর্ব নির্ধারিত কোন ঋণাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্র হইলে, আমরা বলি যে, x চলকরাশি ঋণাত্মক দিকে অসীমগামী এবং উহা $x \to -\infty$ প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ ∞ এবং $-\infty$ দ্বারা কোন বাস্তব সংখ্যা সূচিত করে না; ইহারা প্রতীক মাত্র।

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ এবং $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$এর অর্থ (Meaning of $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ and $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$) ঃ মনে করি x একটি ধ্রুবক এবং $f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট x এর ফাংশন । $x \to a$ হইলে অর্থাৎ x সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মান লইয়া ক্রমশ ঃ a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে যদি $f(x)$ এর অুনরূপ মানগুলি বৃহৎ হইতে ক্রমশ ঃ বৃহত্তর হইতে থাকে, তবে আমরা বলি যে, $f(x) \to -\infty$ এবং উহা $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ **এবং** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l'$**এর অর্থ (Meaning of** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ **and** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l'$ **) ঃ** x সর্বদা ধনাত্মক মানগুলি গ্রহণ করিয়া সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে যদি একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি l পাওয়া যায় যাহাতে $f(x)$ এর প্রাপ্ত মান ও l এর অন্তরের সাংখ্যমান, অর্থাৎ $|f(x) - l|$ এর মান যে কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায়, তবে আমরা বলি যে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান l যখন $x \to \infty$ এবং উহা $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

আবার, x সর্বদা ঋণাত্মক মানগুলি গ্রহণ করিয়া সাংখ্যমান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে যদি একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি l'পাওয়া যায় যাহাতে $f(x)$ এর প্রাপ্ত মান ও l' এর অন্তরের সাংখ্যমান, অর্থাৎ $|f(x) - l'|$ এর মান যে কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর করা যায়, তবে আমরা বলি যে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান l' যখন $x \to -\infty$ এবং উহা $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \mathbf{l'}$ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

সীমার মৌলিক উপপাদ্যগুলি (Fundamental theorems on limit)

01. $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_3(x) \pm \ \dots\dots..\pm \lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right]$

$= \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_3(x) \pm \ \dots\dots..\pm \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

02. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

03. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\mathbf{f(x)}}{\emptyset(\mathbf{x})}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} \emptyset(\mathbf{x})}$, যেখানে $\lim\limits_{x\to a} \emptyset(\mathbf{x}) \neq 0$

04. $\lim\limits_{x\to a}\{cf(x)\} = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, যেখানে c ধ্রুবক ।

উপরে প্রত্যেক ক্ষেত্রে ধরিয়া নেওয়া হইবে যে, প্রত্যেকটির সংশ্লিষ্ট সীমা বিদ্যমান।

05. $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1; \lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$ (রেডিয়ান মাপা হয়)

06. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$ **07.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\tan\theta}{\theta} = 0$

গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য কিছু গুরুত্বপূর্ণ টেইলর সিরিজ $(a = 0)$ এর জন্য :

x এর **সকল মানের জন্য কিছু ফাংশনের সম্প্রসারণ :**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{21} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^2}{n} +$$

$|x| < 1$এর জন্য কিছু ফাংশনের সম্প্রসারণঃ

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots..$$
$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots.$$
$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{1.4}x^2 + \frac{1.35}{2.4.x}x^3 + \ldots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{n-1} \; for(-1 \le x \le 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \ldots for(-1 \le x \le 1)$$

<u>কতকগুলি গরুত্বপূর্ণ সীমার মান নির্ণয়</u>

EXAMPLE – 01. $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$, যেখানে n যে কোন মূলদ সংখ্যা ।

প্রমাণ : ধরি, $x = a + h$, যখন $h \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{a+h-a} = \lim_{h\to 0} \frac{a^n\left[\left(1+{}^{h}/_{a}\right)^n - a^n\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^n\left[\left(1+{}^{h}/_{a}\right)^n - 1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^n}{h}\left[\left\{1 + \frac{nh}{a} + \frac{n(n-1)h^2}{2!}\,\frac{h^2}{a^2} + \ldots..\right\} - 1\right] = \lim_{h\to 0} \frac{a^n}{h}\left[\frac{nh}{a} + \frac{n(n-1)h^2}{2!}\,\frac{h^2}{a^2} + \ldots\ldots..\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} a^n\left[\frac{n}{a} + \frac{n(n-1)h}{2!}\quad \frac{h}{a^2} + \ldots\ldots...\right] = a^n\left[\frac{n}{a} + 0 + \ldots\ldots...\right] = a^n({}^{n}/_{a}) = na^{n-1}$$

EXAMPLE – 02. Show that $\lim_{x\to\infty}\left(1+{}^1/_x\right)^x = e$

প্রমাণ : $\lim_{x\to\infty}\left(1+{}^1/_x\right)^x$

$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{x}{1!}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x(x-1)1}{2!}\ \frac{1}{x^2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\ \frac{1}{x^3}+\ldots\ldots\ldots\right]$

$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1-{}^1/_x}{2!}+\frac{(1-{}^1/_x)(1-{}^2/_x)}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right]$

$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1-0}{2!}+\frac{(1-0)(1-0)}{3!}+\ldots\ldots\ldots = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots = e$

EXAMPLE – 03. Show that $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

প্রমাণ : $\lim_{x\to 0}\left({}^1/_x\right)\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\right)-1\right]$

$= \lim_{x\to 0}\left({}^1/_x\right)\left[x+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right] = \lim_{x\to 0}\left[x+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right] = 1$ **(প্রমাণিত)**

EXAMPLE – 04. Show that $\lim_{x\to 0}\left({}^1/_x\right)\log_e(1+x) = 1$

প্রমাণ : $\lim_{x\to 0}\left({}^1/_x\right)\log_e(1+x) = \lim_{x\to 0}\left({}^1/_x\right)\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\ldots\right]$

$= \lim_{x\to 0}\left[1-{}^x/_2+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\ldots\right] = 1$ **(প্রমাণিত)**

EXAMPLE – 05. Show that $\lim_{x\to a}\frac{(1+x)^n-1}{x} = n$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$ … … …(১ নং তে প্রমানিত)

এই সীমা সূত্রে x এর পরিবর্তে $1+x$ এবং $a=1$ লিখে পাই,

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x} = n$ ($\therefore 1+x\to$ হলে $x\to 0$ হয়)

EXAMPLE – 06. Show that $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log_e a\ (a>0)$

প্রমাণ ঃ ধরি, $a^x = e^z$, কাজেই, $x\log_e a = z(a>0)$ হয়। এখন $x\to 0$ হলে $z\to 0$ হয়।

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z/(\log_e a)} = \log_e a\ \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = \log_e a$ (৩ নং এর প্রদত্ত সীমার সাহায্যে)

EXAMPLE – 07. Show that $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\log_e(1+x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\log_e(1+x)^{1/x}=1$

$\Rightarrow \log_e\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]=1=\log_e e \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$ **(প্রমাণিত)**

<u>সারসংক্ষেপ (Summary) ঃ</u>

(ক) $x\to a$ বা $\lim x=a$ হলে,

(i) x চলকরাশি বা পরিবর্তনশীল রাশির মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা a অপেক্ষা বৃহত্তর হবে কিন্তু xএর মান সাধারণত ঃ a এর সমান হবে না ।

(ii) x এর গৃহীত মান ও a এর অন্তরের সাংখ্যমান অর্থাৎ $|x-a|$ এর মান পূর্ব নির্ধারিত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা (তাহা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্র হবে ।

(খ) $x\to a=0$ বা $x\to a^+$ হলে বুঝতে হবে x চলকরাশির মান সর্বদা a অপেক্ষা বৃহত্তর থেকে (অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুর ডানদিক হতে) ক্রমশঃ $x=a$ এর নিকট আরও নিকটতর হয় কিন্তু কখনও $x=a$ হয় না ।

(গ) যদি $x\to 0$ এবং $u\to 0$ এবং $\lim_{x\to 0}f(x)=l$ হয়, তবে $\lim_{u\to 0}f(u)=l$ হবে ।

(ঘ) $\lim_{x\to 0}f(x)$ এ $x-a=h$ বা $x=a+h$ বসিয়ে ইহাকে $\lim_{h\to 0}f(a+h)$ আকারে লেখা যায় অর্থাৎ $\lim_{x\to a}f(x)$ বা $\lim_{h\to 0}f(a+h)$।

(ঙ) $\lim_{x\to a^+}f(x)$ বা $\lim_{h\to 0^+}f(a+h)$ কে $f(x)$ ফাংশনের $x=a$ বিন্দুতে ডানপক্ষের সীমা এবং $\lim_{x\to a^-}f(x)$ বা $\lim_{h\to 0^+}f(a-h)$কে $f(x)$ ফাংশনের $x=a$ বামপক্ষের সীমা বলা হয়।

(চ) $\lim_{x\to a}f(x)$ এর মান বর্তমান আছে বলা হবে যদি $\lim_{x\to a^+}f(x)$ বা $\lim_{h\to 0^+}f(a+h)$ ও $\lim_{x\to a^-}f(x)$ কে $\lim_{h\to 0^+}f(a-h)$ উভয়ের মান বর্তমান থাকে এবং $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)$অর্থাৎ $\lim_{h\to 0^+}f(a+h)=\lim_{h\to 0^+}f(a-h)$ হয়।

(ছ) $(\varepsilon-\delta)$ সংজ্ঞার সাহায্যে পাই - $\lim_{x\to a} f(x) = l$ হলে $|f(x)-l| < \varepsilon$ হবে, যখন $0 <$ $|a-l| < \delta$

EXAMPLE – 01. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x} = ?$

SOLVE : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1-3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x})^2-(\sqrt{1-3x})^2}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1+3x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}} = \frac{5}{\sqrt{1+2\times 0}+\sqrt{1-3\times 0}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$

EXERCISE :

(**i**). $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x} = ?$. (**ii**). $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}} = ?$ (**iii**). $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^3+1}{6x^4+x^3-3x} = ?$

(**iv**). $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = ?$ (**v**). $\lim_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\} = ?$

(**vi**). $\lim_{x\to a}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = ?$ (**vii**). $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2} = ?$ (**viii**). $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = ?$

(**ix**). $\lim_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y} = ?$

(i) Ans: $\frac{7}{2}$.	**(ii) Ans:** 1.	**(iii) Ans:** $\frac{1}{3}$	**(iv) Ans:** 1.
(v) Ans: $\ln(2)$	**(vi)Ans:** $7a^3$.	**(vii) Ans:** $\frac{49}{6}$	**(viii) Ans:** $\frac{1}{2}$
(ix)Ans: $\cos y$			

EXAMPLE – 02. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) = ?$

SOLVE : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{x^2} = (0+1)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}$

$= 1.\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x^2}\right) = 5-0 = 0$ (**Ans**:)

EXAMPLE − 03. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta} = ?$

SOLVE : $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta\sin\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin^2\theta)\sin\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)\sin\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\sin\theta} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1+1}{(1+1)1} = \frac{3}{2}$ **(Ans:)**

EXAMPLE − 04. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = ?$

SOLVE : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}} = 0$

অথবা, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ ধরি, $x = \frac{\pi}{2} - h$ যেখানে $h \to 0$

$= \lim\limits_{h\to0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)} = \lim\limits_{h\to0} \frac{1-\cos h}{\sin h} = \lim\limits_{h\to0} \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{2\sin\frac{h}{2}.\cos\frac{h}{2}} = \lim\limits_{h\to0} \tan\frac{h}{2} = \tan 0^\circ =$
0 **(Ans:)**

EXERCISE :

(i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x = ?$ **(ii)** $\lim\limits_{x\to0} (1+2x)^{\frac{(2x+5)}{x}} = ?$ **(iii)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}}, a > 0, b > 0 = ?$

(i) Ans: 1	**(ii) Ans:** e^{10}.	**(iii) Ans:** $e^{\frac{b}{a}}$

EXAMPLE − 05. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = ?$

SOLVE : $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1+\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots 1}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \left(1+\frac{\sin x}{2!}+\frac{\sin^2 x}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right) = 1+0+0\ldots\ldots\ldots = 1$ **(Ans:)**

অন্তরীকরণ ও অন্তরক সহগ

Differentiation or Differential coefficient

সুত্রাবলী :

1. $\frac{d}{dx}(cx)=c$;2. $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$;3. $\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax}$; 4. $\frac{d}{dx}a^{cx}=ca^{cx}\ln a$;5. $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

6. $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$;7. $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$;8. $\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$;9. $\frac{d}{dx}\cot x=-\operatorname{cosec}^2 x$

10. $\frac{d}{dx}\sec x=\sec x.\tan x$;11. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}x=-\operatorname{cosec}x.\cot x$;12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=-\frac{n}{x^{n-1}}$

13. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;14. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;15. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;16. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{1+x^2}$;18. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Note : $\log_x a=\ln a.\frac{1}{\ln x}=\frac{\ln a}{\ln x}$; $\log_a x=\log a^e.\ln x=\frac{\ln x}{\ln a}$ $\left[\log x^a=\frac{1}{\log a^x}\right]$

মৌলিক তত্ত্বাবলী ঃ (সুত্রাকারে)

1. $\frac{d}{dx}(c)=0$; 2. $\frac{d}{dx}\{c\phi(x)\}=c\phi'(x)$; 3. $\frac{d}{dx}\{\phi(x)\pm\psi(x)\}=\phi'(x)\pm\psi'(x)$

4. $\frac{d}{dx}\{\phi(x).\psi(x)\}=\phi(x)\psi'(x)+\psi\phi'(x)$

5. $x=\phi(t), y=\phi(t)$ হলে, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}$ $[\frac{dx}{dt}\neq 0]$

Derivative এবং Differentiation এর অর্থ ঃ

1. $\frac{dy}{dx}=\tan\phi$ যেখানে ϕ হল একটি কোন যার $\tan gent\, y=d(x)$ কার্ভের কোন বিন্দুতে x অক্ষের সাথে তৈরী করেছে। $\frac{dy}{dx}=x-$ এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার।

$dy=f'(x).dx$ যেখানে, $y=f(x)$,

TYPE – 01 : মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01. x^n এর অন্তরজ নির্ণয় কর ।

SOLVE : মনে করি, $f(x) = x^n$, তাহলে $f(x+h) = (x+h)^n$

অন্তরজের সজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[x^n\left(1+\frac{1}{h}\right)^n - x^n = \lim_{h\to 0}\frac{x^n}{h}\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - \mathbf{1}\right]$$

$h \to 0$ বলে, h কে x অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বিবেচনা করা যায় এবং ফলে $\frac{h}{x}$ এর সাংখ্যিক মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর । অতএব, $\left(1+\frac{h}{x}\right)^n$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃত করা যায়।

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = x^n \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left\{1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{h}{x^2} + \ldots\ldots.\right\} - 1\right]$$

$$= x^n \lim_{h\to 0}\left[n.\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{h}{x^2} + h - \text{এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ}\right]$$

$$= x^n\left[n.\frac{1}{x} + 0 + \ldots\ldots\ldots\right] = nx^{n-1} \quad \therefore \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি $f(x) = x^n$। অন্তরজের সজ্ঞা হতে পাই,

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1} \ \therefore \frac{d}{dx}(x^n) = f'(x) = na^{n-1}$$

উদাহরণস্বরূপ ঃ $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5\,x^4, \frac{d}{dx}\left(4\,x^{\frac{3}{2}}\right) = 4\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = 6\,x^{\frac{1}{2}}$

EXAMPLE – 02 . $\log_a x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, $f(x) = \log_a x = \log_a e . \log_e x = \frac{\ln x}{\ln a}$

সজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}\ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln a}.\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln a}.\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln a}.\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln a}\ .\frac{\left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\ \frac{h^3}{x^3} - \ldots\ldots\ldots\infty\right)}{h}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\ .\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ \frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3} - \ldots\ldots\ldots\infty\right)}{h}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\ .\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ .\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\ \frac{h^2}{x^3} - \ldots\ldots\ldots\ldots\infty\right) = \frac{1}{x\ln a}\ \therefore \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{1}{x\ln a}.$$

EXERCISE :

(i) $\sec x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর ।

(ii) মূল নিয়মে $\ln x, e^x, a^x, \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \operatorname{cosec} x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

TYPE – 02 : x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01. x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর ঃ $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

SOLVE : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$\left[\text{Note: সূত্র : } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{du}{dx}}{v^2}\right] = \frac{\cos x-\sin x.\cos x+\cos x+\sin x.\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$

EXERCISE :

(i) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = ?$ (ii) $\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} = ?$ (iii) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = ?$

(i) Ans: $\frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$	**(ii) Ans:** $-2\sin x$	**(iii) Ans: 0**

EXAMPLE – 02. $\ln\left[x-\sqrt{x^2-1}\right] = ?$

SOLVE : ধরি, $y = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

আবার ধরি, $u = x-\sqrt{x^2-1}$; $v = \sqrt{x^2-1}$ এবং $w = x^2-1$

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = 1-\frac{d}{dx}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

তাহলে, $\frac{dw}{dx} = 2x-0 = 2x, \frac{dv}{dw} = \frac{d}{dw}\sqrt{w} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$

$\therefore \frac{du}{dx} = 1-\frac{dv}{dw}.\frac{dw}{dx} = 1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}.2x = 1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\therefore y = \ln u$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}.\left(\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ (**Ans**:)

EXERCISE :

(i) $\ln\left[x-\sqrt{x^2+1}\right]=?$ **(ii)** $\ln\left[x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right]=?$

(i) Ans: $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$	**(ii) Ans:** $\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	

EXAMPLE – 03. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=?$

SOLVE : $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x+1})^2}$

$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-x-2}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right).$

EXAMPLE – 04. $e^{5x}\sin x^{\circ}=?$

SOLVE : ধরি, $y=e^{5x}\sin x^{\circ}=e^{5x}.\sin\frac{x\pi}{180}$

ধরি, $y_1=e^{5x}\ \therefore \frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_1}{du}.\frac{du}{dx}=e^{5x}.5=5e^{5x}.$

পুনরায় ধরি, $y_2=\sin\frac{\pi x}{180}\ \therefore \frac{dy_2}{dx}=\cos\frac{\pi x}{180}.\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi x}{180}$

তাহলে, $y=y_1{+}y_2, \frac{dy}{dx}=y_2\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{dy_2}{dx}=\sin\frac{\pi x}{180}.\ 5e^{5x}+e^{5x}.\frac{\pi}{180}.\cos\frac{\pi x}{180}$

$=e^{5x}\left(5\sin\frac{\pi x}{180}+\frac{\pi}{180}.\ \cos\frac{\pi x}{180}\right).$

EXAMPLE – 05. $\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\}=?$

SOLVE : ধরি, $y=\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\}$

এবং ধরি, $u=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\tan\frac{x}{2}\ \therefore\ \frac{du}{dx}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\frac{d}{dx}\left\{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$

$=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\left\{\sec^2\frac{x}{2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sec^2\frac{x}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sec^2\frac{x}{2}$

তাহলে, $y=\tan^{-1}u\ =\frac{dy}{du}=\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{1+\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\}^2}$

$$= \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{a+b+a\tan^2\frac{x}{2}-b\tan^2\frac{x}{2}}{a+b}} = \frac{a+b}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{(a+b)/1+\tan^2\frac{x}{2}}{a\,.\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}+b\,\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{a+b}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{a+b\cos x} = \frac{a+b}{\sec^2\frac{x}{2}(a+b\cos x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,.\frac{du}{dx} = \frac{a+b}{\sec^2\frac{x}{2}(a+b\cos x)}\,.\frac{1}{2}\,.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,.\sec^2\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2\left((a+b\cos x)\right)}\,.$$

EXAMPLE – 06. $\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = ?$

SOLVE : মনে করি, $y = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\sqrt{x}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\,.\sqrt{x}} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{17}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right) = 0 - \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{1+x}\,.\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\ (\textbf{Ans}:)$$

EXERCISE : (i) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx} = ?$ **(i) Ans:** $\frac{ab}{a^2+b^2x^2}$

EXAMPLE – 07. $\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = ?$

SOLVE : $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$. ধরি, $x = \tan\theta$

$$y = \sin^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^{-1}\cos 2\theta = \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) = \frac{\pi}{2}+2\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\ \tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = 0 + 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}\ (\textbf{Ans}:)$$

EXAMPLE – 08. $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} = ?$

SOLVE : $y = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} = \tan^{-1}\frac{2.2\sqrt{x}}{1-\left(2\sqrt{x}\right)^2} = 2\tan^{-1}\left(2\sqrt{x}\right)$

ধরি, $u = 2\sqrt{x}$., $\frac{du}{dx} = 2.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = 2.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ তাহলে, $y = 2\tan^{-1}u$.

$$\frac{dy}{du} = 2.\frac{1}{1+u^2} = \frac{2}{1+\left(2\sqrt{x}\right)^2}\ \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+4x^2}.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x^2)}$$

EXAMPLE – 09. $\tan^{-1}\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = ?$

SOLVE : $y = \tan^{-1}\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = \frac{1}{1+\frac{16x^2}{1-4x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-4x^2}.4-(4x).\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}.}(-8x)}{\left(2\sqrt{1-4x^2}.\right)^2}$$

$$= \frac{(1-4x^2)}{1-4x^2+16x^2}\cdot\left\{\frac{4(1-4x^2)+\mathbf{16}x^2}{\sqrt{1-4x^2}.}\right\} = \frac{4}{1+12x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}.}\ (\mathbf{Ans}:)$$

EXERCISE :

$(\mathbf{i})\ \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = ?$ $\quad(\mathbf{ii})\ \tan(\sin^{-1}x) = ?$

(i) Ans: $-1/\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$	**(ii) Ans:** $(1-x^2)^{-3/2}$		

EXAMPLE – 10. $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ধরি, $x = \cos\theta; y = \ln\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \ln\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\{\ln(1-x)-\ln(1+x)\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-x}.(-1)-\frac{1}{1+x}\right\} = \frac{1}{(x^2-1)}\ (\mathbf{Ans}:)$$

EXERCISE :

$(\mathbf{i})\ \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = ?$ $\quad(\mathbf{ii})\ \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = ?$

(i) Ans: $\frac{1}{2}$	**(ii) Ans:** $\frac{1}{\sin 2x}$	

EXAMPLE – 11. $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, ধরি, $x = \cos\theta$

তাহলে, $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}\ (\mathbf{Ans}:)$$

EXAMPLE – 12. $y = \tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : $y = \tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x} = \tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + \mathbf{2\,sin}\,\frac{x}{2}.\mathbf{cos}\frac{x}{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)^2} = \tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$

$\therefore y = \tan^{-1}\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} = \tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{\pi}{2}} = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (**Ans**:)

TYPE – 03: x এর সূচক ফাংশন ও অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 . **x -এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর ঃ** $\mathbf{x^{x^x}}$

SOLVE : $\mathbf{y = x^{x^x}}$

$\Longrightarrow \ln y = x^x \ln x$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে] $\Longrightarrow \ln\ln y = x\ln x + \ln\ln x$ [পুনরায় ln নিয়ে]

$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(\ln\ln y) = \frac{d}{dx}(x\ln x + \ln\ln x)$

$\Longrightarrow \frac{1}{\ln y}.\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x.1 + \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}$ [**x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই]**

$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y\ln y\left(1 + \ln x + \frac{1}{x\ln x}\right)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = x^{x^x}\ln x^{x^x}\left(1 + \ln x + \frac{1}{x\ln x}\right)$ (**Ans** :)

EXERCISE : x -এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর ঃ

(**i**)$(\mathbf{x^x})^{\mathbf{x}}$ =? (**ii**)$\mathbf{x^x}$ = ? (**iii**)$\mathbf{x^{\cos^{-1}x}}$ = ? (**iv**)$e^{x^2} + x^{x^2}$ = ?
(**v**)$\left(\sqrt{\mathbf{x}}\right)^{\sqrt{\mathbf{x}}}$ = ? (**vi**)$(\mathbf{\sin x})^{\mathbf{\ln x}}$ = ?

(i) Ans: $(x^x)^x.x\{\ln(x) + 1\}$	**(ii) Ans:** $x^x(1 + \ln x)$	**(iii) Ans:** $\mathbf{x^{\cos^{-1}x}\left(\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$
(iv) Ans: $2xe^{x^2} + \mathbf{x^{x^2+1}(1 + \ln x^2)}$	**(v) Ans:** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}-1}\{\mathbf{1 + \ln}\left(\sqrt{x}\right)\}$	
(vi) Ans: $(\mathbf{\sin x})^{\mathbf{\ln x}}\left\{\frac{1}{x}\ln(\sin x) + \cot x.\ln x\right\}$		

EXAMPLE – 02 . x -এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর ঃ

SOLVE : $\ln(xy) = x^2 + y^2 \Rightarrow \ln x + \ln y = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\cdot\frac{dy}{dx}$ [অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} - 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - 2y\right) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{(2x^2-1)}{x}}{\frac{(1-2y^2)}{y}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$

EXERCISE : x -এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর ঃ

(i) $x^y = y^x$ **(ii)** $\ln(xy) = (x+y)$ **(iii)** $x^y + y^x = a^b$

(i) Ans: $\frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$	**(ii) Ans:** $\frac{y(x-1)}{x(y-1)}$	**(iii) Ans:** $-\frac{yx^{y-1} + y^x \ln y}{x^y \ln x + xy^{x-1}}$

TYPE – 04 : ত্রিকোণমিতিক বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

EXAMPLE – 01 : $y=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : $y=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

EXAMPLE – 02 : $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : ধরি , $\tan^{-1}x = \theta$

$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} =$
$\tan^{-1}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

EXAMPLE – 03 : $y = \tan^{-1}\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : $y = \tan^{-1}\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x} = \tan^{-1}\tan\left(\tan^{-1}\frac{a}{b} - x\right) = \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 1 = -1$

EXAMPLE – 04 : y= $\sin^{-1}\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ =?

Solve : y= $\sin^{-1}\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \sin^{-1}\frac{sin\theta+cos\theta}{\sqrt{2}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$=$\sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$\therefore$ y=$\frac{\pi}{4}+\theta$ =$\frac{\pi}{4}+\sin^{-1}x$ $\therefore \frac{dy}{dx}=0+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Try yourself : (i) $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}tan\frac{x}{2}\right]$ (ii) $\cos^{-1}\left[\frac{a+bcosx}{b+acosx}\right]$ (iii) $\tan^{-1}\left[\frac{x^2}{e^x}\right]+\tan^{-1}\left[\frac{e^x}{x^2}\right]$

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{b-ax}\right)$ (v) $\tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$ (vi) $sin^4\left[\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]$

(vii) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

(viii) $\tan^{-1}(secx+tanx)$ (ix) $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ (x) $\sin^{-1}\left(2ax\sqrt{1-a^2x^2}\right)$

Ans : (i) $\frac{\sqrt{a^2-a^2}}{2(b+acosx)}$ (ii) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+acosx}$ (iii) 0 (iv) $\frac{1}{1+x^2}$ (v) $\frac{ab}{1+a^2x^2}$ (vi) $\frac{x-1}{2}$ (vii) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (viii) $\frac{1}{2}$

(ix) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (x) $\frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

TYPE – 05: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরন (ফাংশনের আচরন)

EXAMPLE – 01 : $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ দেখাও যে, $2x^2 + \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$.

$\therefore x -$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরনকরেপাই, $\frac{dy}{dx} = 2px + \left(-\frac{1}{2}\right) q.x^{-\frac{1}{2}-1} = 2px - \frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}}$

পুনরায়সাপেক্ষেঅন্তরীকরনকরেপাই, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2p - \frac{1}{2}(-\frac{3}{2})qx^{-\frac{3}{2}-1} = 2p + \frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$

$\mathbf{L.H.S} = 2x^2.\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} = 2x^2\left(2p + \frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}\right) - x(2px - \frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}}$

$= 4px^2 + \frac{3}{4}qx^{-\frac{1}{2}} - 2px^2 + \frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}} = 2px^2 + 2qx^{-\frac{1}{2}}$

$= 2(px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}) = 2y = \mathbf{R.H.S}$ (**Showed**)

EXAMPLE – 02 : $\mathbf{y = Ae^{mx} + Be^{-mx}}$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - m^2y = 0$

SOLVE : দেওয়াআছে,

$y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ $\therefore x -$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই,

$y_1 = Ame^{mx} + B(-m)e^{-mx} = m(Ae^{mx} - Be^{-mx})$

পুনরায় অন্তরীকরন করে পাই,

$y_2 = m\{Ae^{mx} + B(-m)e^{-mx}\} = m^2(Ae^{mx} + Be^{-mx}) = m^2y$

$\therefore y_2 - m^2y = 0$ (**Showed**)

EXAMPLE – 03 : $y = (p + qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

SOLVE : দেওয়া আছে, $y = (p + px)e^{-2x}$ $\therefore x -$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = (p + qx)e^{-2x}(-2) + e^{-2x}(0 + q) = -2(p + qx)e^{-2x}(-2) + qe^{-2x}$

পুনরায় অন্তরীকরন করে পাই,

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\{(p + qx)e^{-2x}(-2) + e^{-2x}(0 + q)\} + qe^{-2x}(-2)$

$= 4(p + qx)e^{-2x} - 2qe^{-2x} - 2qe^{-2x} = 4(p + qx)e^{-2x} - 4qe^{-2x}$

$\mathbf{L.H.S} = \frac{d^2y}{dx^2} - 4.\frac{dy}{dx} + 4y - 4qe^{-2x}$

$= 4(p+qx)e^{-2x} - 4qe^{-2x} + 4\{-2(p+qx)e^{-2x}(-2) + qe^{-2x}\} +$
$4(p+qx)e^{-2x}$

$= 8(p+qx)e^{-2x} - 8(p+qx)e^{-1x} - 4qe^{-2x} + 4qe^{-2x} = 0 = R.H.S$

EXAMPLE – 04 : $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

SOLVE : দেওয়া আছে, $y = \sin(m\sin^{-1}x) \therefore x -$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই,

$y_1 = \cos(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$ বর্গ করে,

$y_1{}^2 = \cos^2(m\sin^{-1}x)\frac{m^2}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)y_1{}^2 = m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1{}^2 = m^2(1-y^2)$ পুনরায় অন্তরীকরন করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1{}^2(0-2x) = m^2(0-2yy_1)$

$\Rightarrow (1-x^2)\,y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ (**showed**)

EXAMPLE –05 : $y = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0.$

SOLVE : দেওয়া আছে , $y = (x+\sqrt{1+x^2})^m$ $\therefore x -$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই,

$y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)\right\} = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}.(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}})$

$\Rightarrow (\sqrt{1+x^2})y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^m = my \Rightarrow (1+x^2)y_1{}^2 = m^2y^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (1+x^2)2y_1y_2 + y_1{}^2(0+2x) = 2m^2yy_1 \Rightarrow (1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

EXAMPLE –06: $y = e^{ax}\sin bx$ হলে দেখাও যে , $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$

Solve : $y = e^{ax}\sin bx \Longrightarrow y_1 = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$ (y-কে অন্তরীকরন করে)

$y_2 = a^2e^{ax}\sin bx + abe^{ax}\cos bx + abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx$ (y_1- কে অন্তরীকরন করে)

$\therefore y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = a^2e^{ax}\sin bx + abe^{ax}\sin bx + abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx - 2a(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx) + (a^2+b^2)y = a^2e^{ax}\sin bx + abe^{ax}\sin bx + abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx - 2a^2e^{ax}\sin bx - 2abe^{ax}\cos bx + (a^2+b^2)y = (a^2+b^2)y - (a^2+b^2)y = 0$

EXAMPLE –07: $y = e^{ax} cosbx$ হলে দেখাও যে , $y_n - 2ay_{n-1} + (a^2 + b^2)y = 0$

$y_1 = ae^{ax}cosbx - be^{ax}sinbx$, $y_1 = a^2e^{ax}cosbx - abe^{ax}sinbx - b^2e^{ax}cosbx - abe^{ax}sinbx$

$a = rcos\theta \quad b = rsin\theta$ বসিয়ে, $y_1 = e^{ax}rcos\theta cosbx - e^{ax}rsin\theta \quad sinbx = re^{ax}cos(bx + \theta)$

(circular function polar form এ transfar করে) (এই type এর function এর axes rotate করে example: polarisation of light।

$y_2 = rae^{ax}cos(bx + \theta) - rbe^{ax}sin(bx + \theta)$ =$r^2cos(bx + 2\theta)$ $[a = rcos\theta \ \ b = rsin\theta]$

$y_3 = r^3cos(bx + 3\theta)$ ....$y_n = r^ncos(bx + n\theta)$ =$\left[\sqrt{a^2 + b^2}\right]^n \cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

By Leibnitz theorem : $y_n = u_nv + c_1^nu_{n-1}v_1 + c_2^nu_{n-2}v_3 + c_3^nu_{n-3}v_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots + uv_n$ ....(i)

$u = e^{ax}$, $u_1 = ae^{ax}, u_2 = a^2e^{ax}, \ldots \ldots ., u_n = a^ne^{ax}$, $u_{n-1} = a^{n-1}e^{ax}$

$v = cosbx$, $v_1 = -bsinbx = bcos\left(\frac{\pi}{2} + bx\right)$, $v_2 = -b^2sin\left(\frac{\pi}{2} + bx\right) = b^2cos\left(\frac{2\pi}{2} + bx\right)$....

$v_n = b^ncos\left(\frac{n\pi}{2} + bx\right)$ (i) নং সমীকরন হতে ,

$$y_n = a^ne^{ax}\ cosbx + na^{n-1}e^{ax}bcos\left(\frac{\pi}{2} + bx\right) + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}e^{ax}b^2cos\left(\frac{2\pi}{2} + bx\right) + \cdots \ldots + e^{ax}b^ncos\left(\frac{n\pi}{2} + bx\right).$$

NOTE : n+1 তম অন্তরজ চা্ইতে পারে সেক্ষেত্রে n এর জায়গায় n+1 বসাবে।

EXAMPLE –08: $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m}$ হলে দেখাও যে , $\left(1+x^2\right)y_2+xy_1-m^2y=0$

(BUET : 2014-2015)

$$y_1=m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+(-m)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$y_1=\frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m-\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m}\right][by\ deferentiating]$$

$$y_2=m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)-(-m)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$+\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m-\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m}\right]\left[\frac{(-1)mx}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)}\right][by\ again\ deferentiating]$$

$$\Rightarrow\left(1+x^2\right)y_2=m^2\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m}\right]-x\left[\frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m-\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-m}\right]\right]$$

$$\Rightarrow\left(1+x^2\right)y_2=m^2y-xy_1 \qquad \therefore\left(1+x^2\right)y_2+xy_1-m^2y=0$$

EXAMPLE –09: $y=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ হলে দেখাও যে , $y_n=\frac{1}{2}(-1)^n n!\,sin^{n+1}\theta[sin(n+1)\theta+(\sin\theta+\cos\theta)^{-n-1}-\cos(n+1)\theta]$ ($where\ ,\theta=\cot^{-1}x$)

Solve : ধরি , $\cot\theta=x$, $\therefore y=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right]=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1+x^2)}-\frac{x}{2(1+x^2)}$

$$y_{n1}=\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2}(1+x)^{-1}\right]=\frac{1}{2}[(-1)(-2)(-3)(-4)\ldots\ldots(-1)^n n!\,(1+x)^{-1-n}]$$

$=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{1+n}}$; $y_{n2}=\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x+i)(x-i)}\right]=\frac{1}{4i}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right]$

$=\frac{1}{4i}[(-1)^n n!\,(x-i)^{-1-n}-(-1)^n n!\,(x+i)^{-1-n}]$ x=rcosθ, 1=rsinθ

$$=\frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}4i}[cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta-cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]$$

$=\frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}4i}[2i\sin(n+1)\theta]=\frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}.2}[\sin(n+1)\theta]=\frac{(-1)^n n!}{2}[\sin(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta]$

$y_{n3}=\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{(x+i)(x-i)}\right]=\frac{1}{4}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x+i}+\frac{1}{x-i}\right]==\frac{1}{4}[(-1)^n n!\,(x+i)^{-1-n}+(-1)^n n!\,(x-i)^{-1-n}]$

$= \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}4}[cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta + cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]$

x=rcosθ, 1=rsinθ

$$= \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}.2}[\sin(n+1)\theta] = \frac{(-1)^n n!}{2}[\cos(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta]$$

$$\therefore y_n = y_{n1} + y_{n2} - y_{n3}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^{1+n}} + \sin(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta - \cos(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{\sin^{n+1}\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^{1+n}} + \sin(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta - \cos(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\sin^{n+1}\theta\,[\sin(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta - \cos(n+1)\theta.\sin^{n+1}\theta + (\sin\theta+\cos\theta)^{-1-n}]$$

EXAMPLE -10: $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হলে দেখাও যে,$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$

Solve $:= e^{a\sin^{-1}x}$, $y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \left(\sqrt{1-x^2}\right)y_1 = ay$ (y-কে অন্তরীকরন করে)

বর্গ করে , $(1-x^2)y_1^2 = a^2y^2 \Rightarrow (1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2a^2yy_1$ (y_1-কে অন্তরীকরন করে)

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y \Rightarrow (1-x^2)y_3 - 2xy_2 - xy_2 - y_1 = a^2y_1$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_3 - (2.2-1)xy_2 = (a^2+1)y_1$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_4 - 2xy_3 - 3xy_3 - 3y_2 = (a^2+1)y_2$$

$\Rightarrow (1-x^2)y_4 - (2.3-1)xy_3 = (a^2+2^2)y_2$ ....ক্রমানুসারে n= 2 , n+1= 3 , n+2 = 4 ধরে পাই ,

$$(1-x^2)y_{n+2} - \{2(n+1)-1\}xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

Try yourself : (i) $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ হলে দেখাও যে , $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$

(ii) $y=\tan(m\tan^{-1}x)$ হলে দেখাও যে , $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2(my-x)\frac{dy}{dx}=0$

(iii) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ হলে দেখাও যে , $x^2y_2+xy_1-4y=0$

(iv) $y=ax^2+\frac{b}{\sqrt{x}}$ হলে দেখাও যে, $2x^2y_2-xy_1-2y=0$

(v) $y=e^x\cos x$ হলে দেখাও যে, $y_2-2y_1+2y=0$

(vi) $y=e^{a\sin^{-1}x}$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2-xy_1-a^2y=0$

(vii) $y=acos[lnx]+\ bsin[lnx]$ হলে দেখাও যে, $x^2y_2+xy_1+y=0$

(viii) $lny=\tan^{-1}x$ হলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$

(ix) $y=ln\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right]$ হলে দেখাও যে, $(a^2+x^2)y_2+xy_1=0$

(x) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ হলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$

(xi) $y=axsinx$ হলে দেখাও যে, $x^2y_2-2xy_1+(a^2+2)y=0$

(xii) $y=px^2+qx^{\frac{-1}{2}}$ হলে দেখাও যে, $2x^2y_2-xy_1-2y=0$

(xiii) $y=\frac{1}{1+x+x^2}$ হলে দেখাও যে, $y_n=\frac{(-1)^n n!(sin)^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+2}}$ যেখানে , $\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}/2}{\left(\frac{1}{2}+x\right)}$

(xiv) $y=e^{ax}sin(bx+c)$ হলে দেখাও যে, $y_n=\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]^n\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(xv) $\mathrm{x}=\sin\sqrt{\mathrm{y}}$ হলে, দেখাও যে, $(1-\mathrm{x}^2)\mathrm{y}_1-\mathrm{x}\mathrm{y}_1-2=0$

TYPE – 06: ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলি x- এর ঊর্ধ্বক্রমিক অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর

EXAMPLE – 01 : $\tan^{-1} x, |x| \leq 1.$

SOLVE : মনেকরি, $\int(x) = \tan^{-1}x \quad \therefore \int(0) = \tan^{-1}(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \therefore f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1,\ f''(x) = (-1)(\ 1 + x^2)^{-2}(2x)$

$= \frac{-2x}{(1+x^2)^{-2}}, f''(0) = 0\ , f'''(x) = \frac{(\ 1+x^2)^{-2}(-2)-(-2x).2(\ 1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} =$

$\frac{-2(\ 1+x^2)^{-2}+8x^2(\ 1+x^2)}{(1+x^2)^4}, f'''(0) = \frac{-2+0}{(1+0)^4} = -2$

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই,

$f(s) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ \dots\dots\dots\dots\dots.\infty$

$= 0 + x.1 + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}f'(-2) + \ \dots\dots\dots\dots\dots\infty = x - \frac{x^3}{3} + \ \dots\dots\dots\dots\dots\infty$

$\therefore\ \tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \dots\dots\dots..\infty$

EXERCISE :

(i). e^{mx} **(ii).**a^x **(iii).** $\ln(1 + x), -1 < x \leq 1$ **(iv).** $\sin^{-1} x$

(v). $\ln(1 - x)$ কে x - এর ঊর্ধ্বক্রমিক ঘাত বিশিষ্ট অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর, যেখানে $-1 < x < 1$

(i) Ans: $1 + 2x\frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} +. \dots\dots..\infty$	**(ii) Ans: Not**
(iii) Ans: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} -. \dots\dots\dots\dots\infty$	**(iv) Ans:** $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ \dots\dots..\infty$
(v) Ans:$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} +. \dots\dots\dots..\infty$	

TYPE – 07: পরামিতিক সমীকরনের অন্তরজ

x=f(t) , y=f(t) or, $x_1 = \frac{dx}{dt}$; $y_1 = \frac{dy}{dt}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y_1}{x_1}$ $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1 y_2 \frac{dt}{dx} - y_1 x_2 \frac{dt}{dx}}{x_1^2} = \frac{x_1 y_2 \frac{1}{x_1} - y_1 x_2 \frac{1}{x_1}}{x_1^2} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^3}$

EXAMPLE – 01: $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

SOLVE : $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$

EXERCISE :

(i) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ **Ans :** $\mathbf{\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}}$

(ii) $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ **Ans : 1**

(iii) $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ হলে $\frac{d^2x}{dx^2} = ?$ **Ans :** $\mathbf{\frac{\sec^3\theta}{3a}}$

EXAMPLE – 02: $x\sin\theta + y cos\theta = a, x\cos\theta + y\sin\theta = b$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} sec^3\left\{\theta + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$$

Solve : সমাধান করে এবং $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$ ধরে ,

$x = s\,in\theta + bcos\theta = rsin(\theta + \alpha)$, $y = acos\theta - bsin\theta = rcos(\theta + \alpha)$

ধরি, $a = rcos\alpha$, $b = rsin\alpha$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = rcos(\theta + \alpha) = rsin\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \alpha\right),$

$$\frac{dy}{d\theta} = -rsin(\theta + \alpha) = rcos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \alpha\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \alpha\right) = -tan(\theta + \alpha)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -sec^2\theta.\frac{d\theta}{dx} = -sec^2(\theta + \alpha).\frac{1}{rcos(\theta + \alpha)}$$

$$= \frac{-sec^3(\theta+\alpha)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-sec^3\left(\theta+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

EXAMPLE – 03: $x = a(cos\theta + \theta sin\theta), y = a(sin\theta - \theta cos\theta)$ হলে $\frac{d^2x}{dx^2} = ?$

Solve : $\frac{dx}{d\theta} = a(-sin\theta + \theta cos\theta + sin\theta) = a\theta cos\theta,$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(cos\theta + \theta sin\theta - cos\theta) = a\theta sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta sin\theta}{a\theta cos\theta} = tan\theta \therefore \frac{d^2x}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{tan\theta}{a\theta cos\theta} = \frac{tan\theta sec\theta}{a\theta}$$

Try yourself : (i) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ Ans : $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

ii) $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ Ans : 1

(iii) $x = acos^3\theta$, $y = asin^3\theta$ হলে $\frac{d^2x}{dx^2} = ?$ Ans : $\frac{sec^3\theta}{3a}$

Type-08: অব্যাক্ত ফাংশনের অন্তরক সহগ

EXAMPLE – 01: y=x^{x^x}কে x এর অপেক্ষকরুপে অন্তরীকরন কর।

Solve : y=x^{x^x}উভয় পক্ষে ln নিয়ে, lny= $x^x lnx$ উভয় পক্ষে ln নিয়ে, $lnlny = xlnx + lnlnx$

x এর অপেক্ষকরুপে অন্তরীকরন করে, $\frac{1}{lny}.\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + lnx + \frac{1}{lnx}.\frac{1}{x} = 1 + lnx + \frac{1}{lnx^x}$

$\frac{dy}{dx} = x^{x^x}.x^x lnx\left(1 + lnx + \frac{1}{lnx^x}\right)$

EXAMPLE – 02: y=$x^{a^x} + (x^x)^x$ কে x এর অপেক্ষকরুপে অন্তরীকরন কর।

Solve : $y = e^{lnx^{a^x}} + e^{ln(x^x)^x} = e^{a^x lnx} + e^{x^2 lnx}$,$\frac{dy}{dx} = \left(e^{a^x lnx}\right) \times \frac{d}{dx}(a^x lnx) + \left(e^{x^2 lnx}\right) \times \frac{d}{dx}(x^2 lnx)$

=$\left(e^{a^x lnx}\right)\left[a^x lna.lnx + \frac{a^x}{x}\right]$+$\left(e^{x^2 lnx}\right)\left[2x.lnx + \frac{x^2}{x}\right]$ =$x^{a^x}\left[a^x lna.lnx + \frac{a^x}{x}\right] + (x^x)^x[2x.lnx + x]$

EXAMPLE – 03: y$\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ =0, y কে x এর অপেক্ষকরুপে অন্তরীকরন কর।

Solve : y$\sqrt{1+x} = -x\sqrt{1+y}$ বর্গ করে , $y^2(1+x) = x^2(1+y) \Rightarrow y^2 + y^2x = x^2 + x^2y$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = y^2x - x^2y \Rightarrow (x+y)(x-y) = xy(y-x) \Rightarrow x + y = -xy$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x.1 - 1 - x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Try yourself : (i) y=$(\tan x)^{cotx} + (cotx)^{tanx}$ (ii) a=$(\sin x)^{cosy} + (\cos x)^{siny}$ (iii) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

(iv) $x^y = e^{x-y}$ (v) $x^y + y^x = 1$ (vi) $x^y.y^x = 1$ (vii) $x^p y^q = (x+y)^{p+q}$ (viii) $\log(x^n y^n) = x^n + y^n$

(ix) tany=sinx (x) $x^{y^n} = y^{x^n}$ হলে দেখাও যে , $\frac{dy}{dx} = \frac{y^{n+1}(nlnx-1)}{x^{n+1}(nlny-1)}$ (xi) $x^2 + y^2 = \sin(xy)$

Ans : (i) $(\tan x)^{cotx} cosec^2x[1 - ln(tanx)]$+$(cotx)^{tanx} sec^2x[ln(cotx) - 1]$

(ii) $\frac{(\cos x)^{siny}\sin y\tan x-(\sin x)^{cosy}\cos y\cot x}{(\cos x)^{siny}\ln\cos x\cos y-(\sin x)^{cosy}\ln\sin x\sin y}$ (iii) $\frac{lnsiny+ytanx}{lncosx-xcoty}$ (iv) $\frac{x-y}{x(1-ylnx)}$ (v) $\frac{y^x lny+yx^{y-1}}{x^y lnx+xy^{x-1}}$

(vi) $-\frac{y(y+xlny)}{x(x+ylnx)}$ (vii) $\frac{y}{x}$ (viii) $\frac{y(x^n-log_{10}e)}{x(log_{10}e-y^n)}$ (ix) $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ (xi) $\frac{ycos(xy)-2x}{2y-xcos(xy)}$

TYPE – 09 : স্পর্শক(T) ও অভিলম্ব (N)

স্পর্শক এবংঅভিলম্বের সমীকরণ ঃ

(১) স্পর্শকের সমীকরণ ঃ $y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$; ২) অভিলম্বের সমীকরণ ঃ $y-y_1=-\frac{dx}{dy}(x-x_1)$

EXAMPLE - 01: $x^2-y^2=7$ বক্ররেখার $(4,3)$বিন্দুতে সম্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ র্নিণয় কর ।

SOLVE : প্রদত্ত বক্ররেখা, $x^2-y^2=7$

অন্তরীকরন করে পাই, $2x-2y.\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ এখানে স্পর্শকের ঢাল,$m=\frac{dy}{dx}$

$(4,-3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{-3}=m$, $(4,-3)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ

$y+3=m(x-4) \Rightarrow y+3=-\frac{4}{3}(x-4) \Rightarrow 3y+9=-4x+16$

$\Rightarrow 4x+3y-7=0$

আমরা জানি, স্পর্শকের উপর লম্ব রেখা অভিলম্ব, ধরি, অভিলম্বের ঢাল$=m'$ তাহলে,

শর্তানুসারে, $mm'=-1 \Rightarrow -\frac{4}{3}\times m'=-1 \Rightarrow m'=\frac{3}{4}$

তাহলে,$(4,-3)$ বিন্দুগামী অভিলম্বে সমীকরণ; $y+3=m'(x-4)$

$\Rightarrow y+3=\frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow 4y+12=3x-12 \Rightarrow 3x-4y-24=0$

অথবা, $3x-4y+k=0$ যা স্পর্শকের উপর লম্ব রেখা এবং$(4,-3)$ বিন্দুগামী,

$\therefore 3\times 4-4(-3)+k=0 \Rightarrow k=-24$

$\therefore$নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ: $3x-4y-24=0$ এবং,

স্পর্শকের সমীকরণ: $4x+3y-7=0$(Ans)

EXAMPLE – 02: দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোনো স্পর্শক দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক ।

SOLVE : প্রদত্ত বক্ররেখা,

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ অন্তরীকরন করে পাই, $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}.\frac{dy}{dx}=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

প্রদত্ত বক্ররেখার $y=0$ বসিয়ে পাই, $x=a$ এবং, $x=0$ বসিয়ে পাই, $y=a$

সুতরাং বক্ররেখাটি x অক্ষকে $(a,0)$ এবং $y-$ অক্ষকে $(0,a)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রদত্ত বক্ররেখার শীর্ষ, (x', y') হলে পাই, $x'=\frac{a}{4}y'=\frac{a}{4}$

এবং শীর্ষ স্পর্শক এর ঢাল$=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{a/4}}{\sqrt{a/4}}=-1 \therefore$ স্পর্শকের সমীকরন,

$$y-\frac{a}{4}=-1\left(x-\frac{a}{4}\right) \Longrightarrow 4y-a=-4x+a \Longrightarrow 4x+4y=2a \Longrightarrow x+y=\frac{a}{2}$$

x ও y অক্ষ থেকে $a/2$ পরিমান অংশ কর্তন করে। যাদের সমষ্টি $=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$ যা একটি ধ্রুব সংখ্যা।

EXAMPLE – 03: $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নিণয় কর ।

SOLVE : প্রদত্ত বক্ররেখা , $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$

অন্তরীকরণকরেপাই, $\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=2x-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

যেহেতু স্পর্শকx অক্ষের উপর লম্ব সুতরাং স্পর্শকে ঢাল,$\frac{dy}{dx}$অসংজ্ঞায়িতহলে। আর্থৎ, $\frac{dx}{dy}=0$ হবে,

$$\Longrightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}}=0 \Longrightarrow \frac{1}{\frac{2x\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}}=0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}-x}=0 \Longrightarrow \sqrt{1-x^2}=0$$

$$\Longrightarrow 1-x^2=0 \Longrightarrow x^2=1 \therefore x=\pm 1$$

x এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y=(\pm 1)^2+\sqrt{1-(\pm 1)^2}=1+0=1$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দু : $(\pm 1,0)$

EXAMPLE – 04: a- এর মান কত হলে, $y = ax(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x- অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে ।

SOLVE : প্রদত্ত বক্ররেখা, $y = ax(1-x)$

সমীকরনকরেপাই, $\frac{dy}{dx} = ax(-1) + (1-x).a = -ax + a - ax = a - 2ax$

শর্তানুসারে, স্পর্শকের ঢাল মুল বিন্দুতে - অক্ষের সাথে 60^0 কোণ তৈরী করে। $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan 60^0$

$\Rightarrow a - 2a \times 0 = \sqrt{3} \quad \Rightarrow a = \sqrt{3}$

EXAMPLE – 05: যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে।

SOLVE : বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \pi r^2$ অন্তরীকরণকরেপাই, $\frac{d\Delta}{dr} = 2\pi r.\frac{dr}{d\Delta}$

ব্যাসাধসমাহারেবৃদ্ধি পেলে, অর্থাৎ সর্বদা $\frac{d\Delta}{dr} \propto r$ একই থাকার শর্তে।

EXERCISE :

(i) $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীরকণ নির্ণয় কর।

(ii) একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে । 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে ?

(iii) $3(a)y\ (x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iv) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক গুলো অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর ।

(v) c – এর মান কত হলে, $y = cx\ (1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x- অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে ।

(vi) যদি একটি সমাবহু ত্রিভূজের বাহুগুলি প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সে.মি. পরিমাণ বৃদ্ধি পায়, তাহলে সমবাহু ত্রিভূজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(i) Ans: $3x - 2y - 5 = 0$	**(ii) Ans:** 78 মিটার / সেকেন্ড
(iii) Ans: $x - 20y - 7 = 0$	**(iv) Ans:** $(1,\ 1), (-1,\ 1)$
(v) Ans: $\frac{1}{\sqrt{3}}$	**(vi) 8 cm.**

EXAMPLE – 06: দেখাও যে, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার যেকোন স্পর্শক কর্তৃক অক্ষ দুটি হতে কর্তিত অংশের বর্গের যোগফল একটি ধ্রুবক ।

Solve: $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}=0 \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-x^{\frac{-1}{3}}}{y^{\frac{-1}{3}}}$ (y=0, x=a এবং x=0 , y=a) $\therefore \frac{dy}{dx}$=-1(graph)

সমীকরনটি x- অক্ষকে (a,0) এবং y- অক্ষকে (0,a) বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গ $=a^2+a^2 \quad =2a^2$ যাএকটি পূর্ণবর্গ রাশি ।

EXAMPLE – 07: $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যেসব বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solve: x-অক্ষের উপর y=0 $\therefore$ $(x+1)(x-1)(x-3)$=0 $\therefore$x= -1, 1, 3

$\frac{dy}{dx}$ = $(x+1)(x-1)+(x+1)(x-3)+(x-1)(x-3)$

স্পর্শকের ঢাল ও সমীকরণঃ

ঢাল : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1}=0+0+(-2)(-4)=8,$ সমীকরণঃ $y=8(x+1)$

ঢাল : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=-4$ সমীকরণঃ $y=-4(x+1)$

ঢাল : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3}=8,$ সমীকরণঃ $y=8(x+1)$

Try youself : (i) $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখার উপর এমন বিন্দুগুলোর স্থানাংক নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের উপর লম্ব।Ans: (0,0) , (-2a,0)

(ii) $x^3+xy^2-3x^2+4x+5y+2=0$ বক্ররেখার (-1,1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরন নির্ণয় কর। Ans: $2x+3y+1=0$, 3x+2y-5=0

(iii) $y(x-2)(x-3)-x+7=0$ রেখাটি যেসব বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল ও সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans: $x-20y-7=0$, 20x+y-140=0(iv) $y=x^3-3x+2$ বক্ররেখাটি যেসব বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

Ans: 1±√2, 1±2/√3

TYPE – 10: ফাংশনের চরমমান নির্ণয় (গুরু বা গরিষ্ঠ বা সর্বোচ্চ বা বৃহত্তম এবং লঘু বা,লঘিষ্ঠ বা,সর্বনিম্ন মান)

$y = f(x)$থেকে $y_1 = 0$ থেকে x নির্ণয় করে y_2 তে বসাও।

$y < 0$ হলে x-তে গুরুমান থাকবে , $y > 0$ হলে x-তে গুরুমান থাকবে ।

Note: যদি উক্ত পদ্বতিতে x এর কোন মান x_n কারনে $y_2 = 0$ হয় যেখানে $x = x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$

$f'(x_1) = f''(x_1) = f'''(x_1) = \cdots = f^{n-1}(x_1) = 0$ এবং $f^n(c) = 0$ হয়

তবে ফাংশনের চরমমান নির্ণয় :

(i) যদি n জোড় হয় এবং $f^n(x_1)$ ঋনাত্বক হয় তবে হবে।

(ii) যদি n জোড় হয় এবং $f^n(x_1)$ ধনাত্বক হয় তবে সর্বনিম্ন হবে। সর্বনিম্ন

(iii) যদি n বেজোড় হয় তবে $f^n(x_1)$ এর ধনাত্বক বা ঋনাত্বক মানের জন্য সর্বনিম্ন বা সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে না।

নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান ও লঘুমান র্নিণয় কর ঃ

EXAMPLE - 01: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

SOLVE : $f(x) = y = x^3 - 3x^2 - 45x + 13 \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$

অন্তরকিরণ করে, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (ii)$ পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই,

$f''(x) = 6x - 6 \ldots \ldots \ldots \ldots . (iii)$ লঘুমান ও গুরুমানের পরীক্ষা

ধরি, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 15x + 9x - 45 = 0 \Rightarrow$
$3x(x-5) + 9(x-5) = 0 \Rightarrow (3x+9)(x-5) = 0$

হয়, $3x + 9 = 0$ অথবা, $x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow x = -3$

$x = -3$ এর জন্য (iii) নং সমীকরন হতে পাই,

$f''(-3) = 6(-3) - 6 = -24 < 0 \therefore x = -3$ তে $f(x)$এর গুরুমান আছে,

$f(-3) = -27 - 3 \times 9 - 45(-3) + 13 = 4$

আবার, $x = 5$ এর জন্য (iii) নং সমীকরন হতে পাই,

$f''(5) = 6 \times 5 - 6 = 24 > 0 \therefore \ x = 5$ তে $f(x)$ এর লঘু মান আছে।

$f(5) = 5^3 - 3 \times 5^2 - 45 \times 5 + 13 = -162$

$\therefore$ ফাংশনটি লঘুমান $= -162$, এবং গুরুমান$= 4(\text{ans})$

x এর কোন মানের জন্য নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়।

EXAMPLE – 02: $\frac{x^2-7x+6}{x-10}$

SOLVE : $y = f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x-10} = \frac{(x-6)(x-1)}{x-10}$ উভয়পক্ষে In নিয়ে পাই ,

$\text{In}y = \text{In}\frac{(x-6)(x-1)}{x-10} = \text{In}\,(x-6) + \text{In}(x-1) - \text{In}(x-10)$

অন্তরীকরনকরেপাই, $\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-10} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-10}\right)$

$= \frac{(x-6)(x-1)}{x-10}(\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-10})\ f(x) -$ এ গুরুমানঅথবালঘুমান থাকারশর্ত, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Longrightarrow \frac{(x-6)(x-1)}{x-10}\left(\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-10}\right) = 0$

$\Longrightarrow \frac{(x-6)(x-1)}{x-10}\{\frac{(x-1)(x-10)+(x-6)(x-10)-(x-6)(x-1)}{(x-6)(x-1)(x-10)}\}$

$\Longrightarrow \frac{1}{(x-10)^2}(x^2 - 11x + 10 + x^2 - 16x + 60 - x^2 + 7x - 6) = 0$

$\Longrightarrow x - 10 \neq 0 \ \therefore \ x^2 - 20x + 64 = 0 \Longrightarrow x^2 - 16x - 4x + 64 = 0$

$\Longrightarrow x(x-16) - 4(x-16) = 0 \Longrightarrow (x-16)(x-4) = 0$

হয়, $x - 16 = 0 \Longrightarrow x = 16$ আথবা, $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

$\therefore x = 16$ ও $x = 4$এরজন্য $f(x)$ এর লঘুমান অথবা গুরুমান পাওয়া যাবে।

EXAMPLE – 03: $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

SOLVE : $f(x) = 1 + 2\text{sinx} + 3\cos^2 x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $f'(x) = 0 + 2\text{cosx} - 6\text{cosx.sinx}$

পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $f''(x) = -2\text{sinx} - 6\text{cosx.cosx} + 6\text{sinx.sinx}$

$= -2\text{sinx} - 6(\text{cox}^2 x - \sin^2 x) = -2\text{sinx} - 6(1 - 2\sin^2 x)$

$= -2\text{sinx} - 6\cos 2x = -2\text{sinx} - 6 + 12\sin^2 x$

লঘুমান ও গুরুমানেরজন্য ,ধরি, $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2\text{cosx} - 6\text{cosx.sin} = 0$

$\Longrightarrow \text{cosx}(1 - 3\text{sinx}) = 0$,হয়, $\text{cosx} = 0$ অথবা, $1 - 3\text{sinx} = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$, $\Longrightarrow \text{sinx} = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$, তখন, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -2 \times 1 - 6 - 12 = -20 < 0 \therefore x = \frac{\pi}{2}$ -তে $f(x)$ এর লঘুমান আছে,

নির্ণেয় লঘূমান$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 3$

যখন, $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ তখন, $f''\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = -2 \times \frac{1}{3} - 6 + 12 \times \frac{1}{9}$

$= -\frac{2}{3} - 6 + \frac{4}{3} = \frac{-2-16+4}{3} = \frac{-14}{3} < 0 \therefore$ $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ তে $f(x)$এর গুরুমানআছে।

নির্ণয় গুরুমান$= f\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}\right) = 1 + 2 \times \frac{1}{3} + 3\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 1 + \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{9}$

$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{9} = \frac{3+2+8}{3} = \frac{13}{3}$ $\therefore$ $f(x)$ ফাংশনটির গুরুমান $\frac{13}{3}$ এবং লঘুমান 3

EXAMPLE – 04: দেখাও যে, $x+\frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণঃ $f(x)=x+\frac{1}{x}$, x- এরসাপেক্ষেঅন্তরীকরণকরেপাই $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

x- এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই $f''(x)=0-(-2).x^{-3}=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$

লঘুমান ও গুরুমানেরজন্য $f'(x)=0 \Longrightarrow 1-\frac{1}{x^2}=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$

$x=1$ এ $f''(1)=\frac{2}{1}=2>0 \therefore x=1$ বিন্দুতে$f(x)$এর লঘুমান আছে

$\therefore$ নির্ণেয় লঘুমান , $f(1)=1+\frac{1}{1}=1$

$x=-1$এ $f''(-1)=\frac{2}{-1}=-2<0, x=-1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গুরুমান আছে

নির্ণেয় গুরুমান, $f(x)=-1+\frac{1}{-1}=-1-1=-2<1 \therefore$ লঘুমান গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর

EXAMPLE – 05: দেখাও যে, $f(x)=x^3-6x^2+27x+5$ এর কোনো গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

SOLVE : $f(x)=x^3-6x^2+27x+5$

x- এর সাপেক্ষেঅন্তরীকরণকরেপাই $f'(x)=3x^2-12x+27$

লঘুমান ও গুরুমানের জন্য, ধরি$f'(x)=0 \;\; 3x^2-12x+27=0$

সমীকরণটিরনির্ণেয়ক $D=(-12)^2-4.4.27=-288(-)ve$ সুতরাং

x- এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যাবে না। $\therefore f(x)$এর কোন গুরুমান ও লঘুমান নেই

EXERCISE :

(i) দেখাও যে, $4e^x+9e^{-x}$ এর লঘুমান 12. (ii) দেখাও যে, $\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান e.

(iii) দেখাও যে,$f(x)=x^3-6x^2+24x+4$ এর কোনো গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

(iv) দেখাও যে, $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$ এর কোন সর্বোচ্চ মান অথবা সর্বোনিম্ন মান নেই।

(v) প্রমাণ কর যে, $f(x)=\sqrt{3}\sin x+3\cos x\,(0\le x\le 2\pi)$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $x=\frac{\pi}{6}$ হয়।

(vi) দেখাও যে, $f(x)=1-13x+6x^2-x^3$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

EXAMPLE – 06: $f(x) = x^2 \log\left(\frac{1}{x}\right)$ এর চরম মান কত ?

Solve : $f^{'}(x) = -x + 2x\log\left(\frac{1}{x}\right)$, $f^{'}(x) = 0$ হলে $-x + 2x\log\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$x \neq 0$ কারন $x = 0$ এর জন্য ফাংশনটি অসংগায়িত হয়।

$\therefore \log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-1/2}$

$f''(x) = -1 + 2x.\frac{1}{\frac{1}{x}}.\frac{-1}{x^2} + 2log\left(\frac{1}{x}\right) = -3 + 2 \times \frac{1}{2} = -2 < 0$

$\therefore x = e^{-1/2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর বৃহওম মান আছে।

বৃহওম মান = $\left(e^{-1/2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}$

EXAMPLE – 07: $f(x) = \frac{x}{Inx}$ ফাংশনটিতে লঘু ও গুরু মান আছে কিনা পরীক্ষা কর।BUET

Solve :$f(x) = \frac{x}{Inx} \Rightarrow f(e^t) = \frac{e^t}{t}$

লঘু ও গুরু মানের জন্য পরীক্ষা

$f'(e^t) = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2}$, $f''(e^t) = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} - \frac{e^t}{t^2} - \frac{2e^t}{t^3}$

লঘু ও গুরু মানের জন্য পরীক্ষা

$f'(e^t) = 0,\ \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} = 0, \Rightarrow \frac{e^t}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 0,\ \frac{e^t}{t} = 0, 1 - \frac{1}{t} = 0\ , t = 1, lnx = 1 \Rightarrow x = e$

$t \neq 0, e^t \neq 0, t = 1(x = e)$ এর জন¨ $f''(e^t) = e + 2e + e > 0$ সুতরাং উক্ত ফাংশনটির x= e তে লঘুমান আছে।

EXAMPLE – 08: $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ফাংশনটিতে লঘু ও গুরু মান আছে কিনা পরীক্ষা কর। BUET

Solve : $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow lny = \frac{1}{x}\, lnx.$

$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x} + lnx.(-\frac{1}{x^2}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{x^2}(1 - lnx). \quad x \neq 0$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y(1 - lnx)\left(\frac{-2}{x^3}\right) + \frac{1}{x^2}(1 - lnx)\frac{dy}{dx} + y.\frac{1}{x^2}\left(\frac{-1}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{-2}{x}\right) + \frac{1}{x^2}(1 - lnx)\frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}\left(\frac{-1}{x}\right)$

ধরি, $\frac{dy}{dx} = 0$ তাহলে, $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - lnx) = 0\ x \neq 0,\ 1 - lnx = 0 \Rightarrow lnx = lne \therefore x = e.$ $\therefore (\frac{d^2y}{dx^2})_{x=e} = -1\,.\,e^{\frac{1}{e}-3}$ যা ঋনাত্বক

$\therefore x = e$ বিন্দুতে $f(x)$ এর বৃহওম মান আছে।

EXAMPLE – 09: $2y=x^2$ পরাবৃত্তের (0,3) বিন্দুর নিকটতম বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

$\left(x,\frac{x^2}{2}\right)$ ———— l ———— $(0,3) \therefore l^2 = x^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)^2$

$$\frac{d}{dx}l^2 = 2l\frac{dl}{dx} = 2x + 2x\left(\frac{x^2}{2} - 3\right) \Rightarrow \frac{dl}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + x^3 - 6x = 0$$

$\Rightarrow x^3 - 4x = 0 \therefore x = 0, 2, -2$; y=2; নিকটতম বিন্দুর স্থানাংক:(0,0),(2,2),(-2,2)

Try yourself :

(i) দেখাও যে, $(x-a)^{1/3}\ \ (2x-a)^{2/3}$ ফাংশনটির $x = \frac{1}{2}a$- তে সর্বোচ্চ মান $x = \frac{5}{6}a$ তে সর্বনিম্ন মান আছে এবং x = a তে কোন চরম মান নেই ।

(ii) $\frac{x^4}{(x-1)(x-3)}$ তে Extremum আছে কি না যাচাই কর।

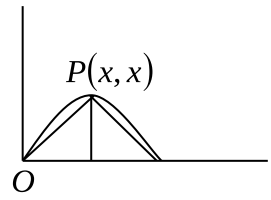
$x = \infty$ তে চরম মান আছে । $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{(x-1)(x-3)} = 1$

(iii) দেখাও যে, বৃত্তে অংকিত সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্র হল বর্গক্ষেত্র।

$x^2 + y^2 = r^2; 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ……… (i) ;

$xy = area; \frac{da}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{x}{y}\ from\ (i) \Rightarrow x = y$

direct proof : $\lim_{x\to x_1, y\to y_1 \& x=y} \frac{increasing\ y}{decreasing\ x} = \frac{dy}{dx} = \frac{r}{\sqrt{2}}$



$from\ \ pithagorous\ \&\ circular\ function\ ; its\ nothing\ but\ a\ arm\ of\ a\ square$

$hence\ the\ solution\ .$

(iv) দেখাও যে,$4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান 12

(v) দেখাও যে,$\frac{lnx}{x}$ এর লঘূমান $\frac{1}{e}$, (vi) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$) ফাংশনটির গুরু মান $e^{\frac{1}{e}}$

(vi) দেখাও যে , $f(x) = \frac{ax+b}{ax+c}$,$f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ এর কোন গুরুমান বা লঘুমান নাই।

Type-11: পরিবর্তনের হার হিসাবে অন্তরজ

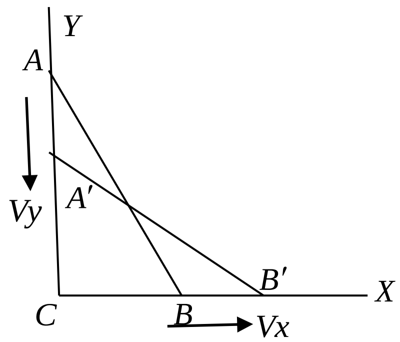
EXAMPLE – 01: 25 ft দীর্ঘ একটি মই উলম্ব দেয়ালে ঠেস দিয়ে দাড় করানো আছে।যদি মইয়ের নিম্নপ্রান্ত দেয়াল হতে 7 ft দুরে থাকে এবং প্রতি সেকেন্ডে 2 ft দুরে সরে যায় তবে মইটির মীর্ষের পতনের হার নির্ণয় কর।

Solve : AB=25ft, CB=7ft

$V_X = \frac{dx}{dt} = 2fts^{-1}, V_y = \frac{dy}{dx} = ?$

$x^2 + y^2 = 25^2 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}. V_X = -\frac{7}{\sqrt{25^2-7^2}}.2 = -\frac{7}{12}fts^{-1}$



EXAMPLE – 02: একটি সমবৃত্তভূমিক $1m^3$ আয়তনের কোনকের ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার সম্পর্ক কেমন হলে সর্বাপেক্ষা কম টেন দ্বারা কোনটি তৈরী করা যাবে ?

Solve : কোনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,A= $\pi r\left(r+\sqrt{h^2+r^2}\right)$

$\frac{dA}{dr}=\pi\left[2r+\frac{r}{2\sqrt{h^2+r^2}}\left(2h.\frac{dh}{dr}+2r\right)+\sqrt{h^2+r^2}\right]$ ....(i)

আয়তন , V=$\frac{1}{3}\pi r^2 h=1\Rightarrow r^2h=\frac{3}{\pi}\Rightarrow\frac{dh}{dr}=-\frac{2h}{r}$ ....(ii)

সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফলের জন্য , $\frac{dA}{dr}=0$

$$\pi\left[2r+\frac{r}{2\sqrt{h^2+r^2}}\left(2h.\frac{dh}{dr}+2r\right)+\sqrt{h^2+r^2}\right]=0$$

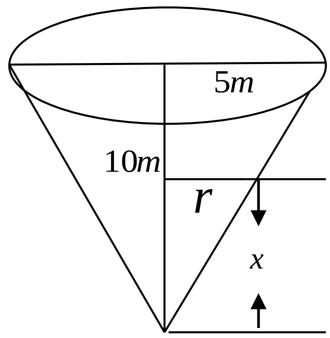
$$\Rightarrow\frac{dh}{dr}=-\frac{h^2+2r^2+2r\sqrt{h^2+r^2}}{rh}=-\frac{2h}{r}\ \Rightarrow h^2-r^2=2r\sqrt{h^2+r^2}$$

$$\Rightarrow h^4-6h^2r^2-3r^4=0\Rightarrow h^4-6h^2r^2+(3r)^2-(3r)^2-3r^2=0$$

$\Rightarrow(h^2-3r^2)^2=\left(2\sqrt{3}r^2\right)^2\Rightarrow h=\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)r\rightarrow$ যা বদ্ধ কণিকের উচ্চতা ও ব্যাসার্ধের সম্পর্ক।

EXAMPLE – 03: একটি কোনকে উল্টাকরে হারে $5\pi m^3 min^{-1}$পানি দ্বারা পূর্ণ করা হচ্ছে।কোনটির ভূমির ব্যাসার্ধ $5m$এবং উচ্চতা $10m,$ যখন উচ্চতা ঠিক $4m$ তখন পানির উপরিতলের উপরে ওঠার হার নির্ণয় কর।

Solve : t সময়ে পানি x উচ্চতায় উঠলে।



পানি দ্বারা পূর্ণ আয়তন , V=$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2x=\frac{\pi x^3}{12}$

($\frac{10}{5}=\frac{x}{r}\Rightarrow r=\frac{x}{2}$)

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{12}\pi.3x^2\frac{dx}{dt}=5\pi\ \therefore\frac{dx}{dt}=\frac{5}{4}mmin^{-1}$$

Exercise: (i) 5ft দীর্ঘ এক বালক $12\frac{1}{2}\ ft$ উঁচু একটি ল্যাম্প পোস্ট হতে ঘন্টায় 3 ম্াইল বেগে দুরে সরে যাচ্ছে।(a) তার ছায়ারশীর্ষ মেঝের ওপর দিয়ে কত বেগে যাচ্ছে ? (b) তার ছায়া কত দ্রুত দীর্ঘায়িত হচ্ছে ?Ans: (a) ঘন্টায় 5 ম্াইল (b) ঘন্টায় 2 ম্াইল

(ii) একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার সম্পর্ক কেমন হলে সর্বাপেক্ষা কম টিন দ্বারা কোনটি তৈরী করা যাবে ? Ans: উচ্চতা = 2× ব্যাসাধ