চতুর্থ অধ্যায়

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

Polynomials and Polynomial Equations

আলোচনার শুরুতে আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণের প্রয়োজনীয়তা তুলে ধরছি:

"যদি কোনো সামান্তরিকের ভূমি, উচ্চতা অপেক্ষা 6 মিটার বেশি হয় এবং ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 616 বর্গমিটার হয়, তবে ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা কত হবে?"

উপরিউক্ত সমস্যাটিকে গাণিতিক রূপ দিলে তা নিম্নরূপ:

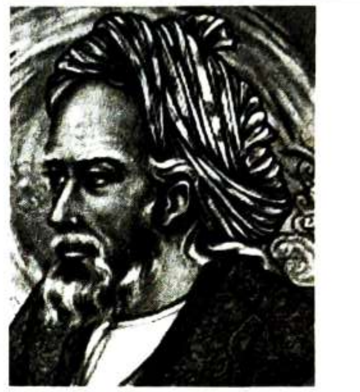
ধরি, ক্ষেত্রটির উচ্চতা $= x$ মিটার এবং ভূমি $= (x + 6)$ মিটার। সুতরাং ক্ষেত্রফল $= x(x + 6)$ বর্গমিটার।

প্রশ্নমতে, $x(x + 6) = 616$ বা, $x^2 + 6x - 616 = 0$

এ সমীকরণটি একটি বহুপদী সমীকরণ। অর্থাৎ x এর মান নির্ণয়ের জন্য এ সমীকরণের সমাধান করা প্রয়োজন।

বহুপদীর মূল নির্ণয় বা "বীজগাণিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয়", গণিতের অতি পুরাতন একটি সমস্যা। যদিও পনের শতক থেকে এই বিষয়ে ব্যবহারিক প্রতীকের প্রয়োগ, সুচারুভাবে উন্নতি সাধন শুরু হয়েছে। এর পূর্বে সমীকরণকে কথায় (In words) লেখা হতো।

খ্রিষ্টপূর্ব 2000-এ ব্যাবিলনের অধিবাসীরা সর্বপ্রথম দ্বিঘাত সমীকরণের মৌলিক সমাধান দেন। খ্রিষ্টপূর্ব 300-এ ইউক্লিড দ্বিঘাত সমীকরণকে জ্যামিতিকভাবে সমাধান করেন। বিখ্যাত গণিতবিদ আল-খোয়ারিজমি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের "বর্গ সম্পূর্ণকরণ" পদ্ধতির অবতারণা করেন। 1000 খ্রিষ্টাব্দে আরব গণিতবিদগণ দ্বিঘাত সমীকরণকে $ux^{2p} + vx^p = w$ আকারে রূপান্তর করেন।



নাম	: ওমর খৈয়াম (Omar Khayyam)
জন্ম	: ১৮ মে, ১০৪৮
জন্মস্থান	: নিশাপুর, খোরাসান (বর্তমান ইরান)
নাগরিকত্ব	: পার্সিয়ান
অবদান	: গণিত, জ্যোতির্বিজ্ঞান, ইসলামি দর্শন, ফার্সি সাহিত্য
উদ্ভাবন	: ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান; দ্বিপদী উপপাদ্য আবিষ্কার; ইসলামি বর্ষপঞ্জি সংস্কার।
মৃত্যু	: ৪ ডিসেম্বর, ১১৩১

1079 খ্রিষ্টাব্দে আরব গণিতবিদ ওমর খৈয়াম ত্রিঘাত সমীকরণকে জ্যামিতিকভাবে সমাধান করেন। 1079 খ্রিষ্টাব্দে "Treatise on Demonstration of Problems of Algebra" গ্রন্থে জ্যামিতিকভাবে পরাবৃত্ত ও বৃত্তের ছেদের মাধ্যমে ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান করেন। 1400 খ্রিষ্টাব্দে আলকাশি ত্রিঘাত সমীকরণকে পুনরুক্তি পদ্ধতিতে সমাধান করেন। এ ছাড়া আরও যে সকল গণিতবিদ এই বিষয়ে উন্নতি সাধনে বিশেষ অবদান রেখেছেন তাদের মধ্যে রেনে দেকার্ত (1596–1650), আইজ্যাক নিউটন (1642–1727), মাইকেল রোল (1652–1719), লিওনার্দো অয়লার (1707–1787) ও গাউস উল্লেখযোগ্য। আধুনিককালে বহুপদী সমীকরণের সাহায্যে অর্থনীতির ব্যয় বিশ্লেষণ, শেয়ার বাজারের পরিবর্তন, বাজেট বিশ্লেষণ, দ্রব্যমূল্য হ্রাস-বৃদ্ধির পরিমাপ, মিসাইলের গতিপথ, ভোল্টেজের উঠানামা, বস্তুর জড়তা ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়।

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূল-সহগ সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- পৃথায়ক (discriminant) কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করতে পারবে।
- মূল দেওয়া থাকলে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করতে পারবে।
- দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে পারবে।
- বহুপদী কী তার ব্যাখ্যা ও তার ঘাত নির্ণয় করতে পারবে।
- ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- লেখের সাহায্যে সমীকরণের সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবে

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১, ২ ও ৩: বহুপদী, উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান
- পাঠ-৪, ৫ ও ৬: দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান, দ্বিঘাত সমীকরণের মূল-সহগ সম্পর্ক, পৃথায়ক, দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়, দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন
- পাঠ-৭: দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান, ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক
- পাঠ-৮ ও ৯: উদাহরণমালা
- পাঠ-১০, ১১ ও ১২: অনুশীলনী-৪
- পাঠ-১৩ ও ১৪: ব্যবহারিক

পাঠ-১, ২ ও ৩

4.1 বহুপদী (Polynomials)

বহুপদী একটি বীজগাণিতিক রাশি যা এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট এবং এক বা একাধিক চলকবিশিষ্ট হতে পারে। এ রাশিতে চলকের ঘাত শূন্য বা স্বাভাবিক সংখ্যা হতে হবে।

বহুপদী রাশিতে বিদ্যমান পদগুলিতে চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে ঐ **রাশির ঘাত** বলা হয়।

একটি বহুপদী রাশিতে একটি মাত্র চলক বিদ্যমান থাকলে রাশিটিকে **এক চলকের বহুপদী**, দুইটি চলক বিদ্যমান থাকলে রাশিটিকে **দুই চলকের বহুপদী**, তিনটি চলক বিদ্যমান থাকলে রাশিটিকে **তিন চলকের বহুপদী** বলা হয়। এভাবে বহুপদী রাশিতে যে কয়টি চলক বিদ্যমান থাকে রাশিটিকে তত চলকের বহুপদী বলা হয়।

যদি কোনো বীজগাণিতিক রাশিতে কোনো চলক না থাকে অর্থাৎ, রাশিটি শুধুমাত্র একটি ধ্রুবকের রাশি হয় তবে ঐ রাশিকে **শূন্য ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী** বলা হয়।

এক চলকের বহুপদী রাশির উদাহরণ:

(i) a_0 একটি শূন্য ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী।

(ii) $a_0x + a_1$ একটি এক ঘাতবিশিষ্ট এক চলকের বহুপদী।

(iii) $10x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ একটি তিন ঘাতবিশিষ্ট এক চলকের বহুপদী।

(iv) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots \dots + a_n$ একটি n ঘাতবিশিষ্ট এক চলকের বহুপদী।

এখানে $a_0, a_1, a_2, \dots \dots, a_n$ ধ্রুবক এবং $a_0 \neq 0$

এক চলকের বীজগাণিতিক রাশি যা বহুপদী নয় এরূপ রাশির উদাহরণ:

(i) $4x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1$ রাশিটি বহুপদী নয় কেননা, দ্বিতীয় পদে x এর ঘাত $\frac{1}{2}$ যা স্বাভাবিক সংখ্যা নয়।

(ii) $5x^3 + 4x^2 - 3x^{-1} + 2$ রাশিটি বহুপদী নয় কেননা, রাশিটির তৃতীয় পদে x এর ঘাত -1, যা স্বাভাবিক সংখ্যা নয়।

একাধিক চলকের বহুপদী রাশির উদাহরণ:

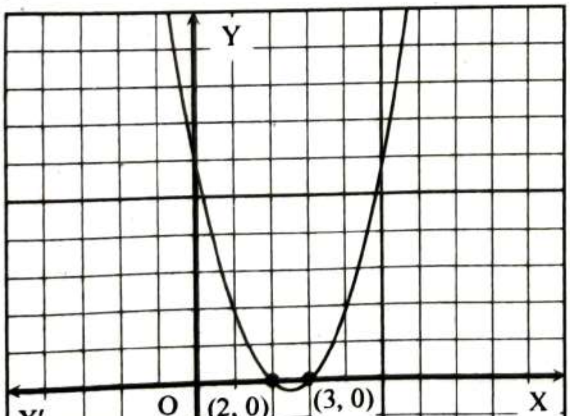
(i) $ax + by + c$ একটি এক ঘাত বিশিষ্ট দুই চলকের বহুপদী।

(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ একটি দুই ঘাতবিশিষ্ট দুই চলকের বহুপদী।

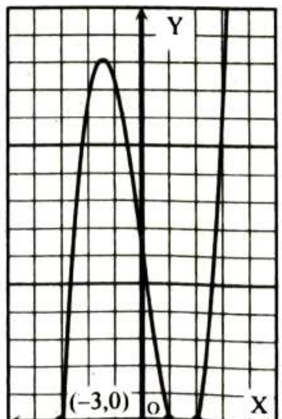
(iii) $6x^3 + 5x^2y + 4xy^2 + 3x^2 + 2y + 1$ একটি তিন ঘাতবিশিষ্ট দুই চলকের বহুপদী।

(iv) $ax^2yz + bxy^3 + cz^4$ একটি চার ঘাতবিশিষ্ট তিন চলকের বহুপদী। এখানে, a, b, c, f, g ও h ধ্রুবক।

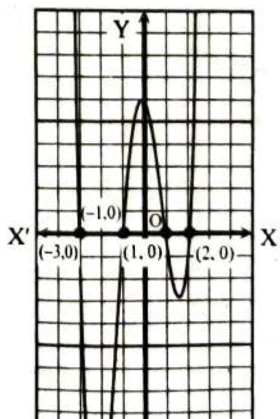
দুই, তিন ও চার ঘাত বিশিষ্ট এক চলকের বহুপদীর চিত্র নিম্নরূপ:



$f(x) = x^2 - 5x + 6$



$f(x) = x^3 - 7x + 6$



$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

4.1.1 সমমাত্রিক ও অসমমাত্রিক বহুপদী (Homogeneous and Non-homogeneous polynomials)

কোনো বহুপদীর সকল পদের ঘাত সমান হলে ঐ বহুপদীকে **সমমাত্রিক বহুপদী** এবং সমান না হলে তাকে **অসমমাত্রিক বহুপদী** বলা হয়। $ax^2 + 2hxy + by^2$ একটি x ও y চলকের দুই ঘাতবিশিষ্ট সমমাত্রিক বহুপদী।

$ax^2 + bx + c$ একটি x চলকের দুই ঘাতবিশিষ্ট অসমমাত্রিক বহুপদী কেননা, বহুপদীটিতে প্রথম পদের ঘাত দুই, দ্বিতীয় পদের ঘাত এক এবং তৃতীয় পদের ঘাত শূন্য। অর্থাৎ, সকল পদের ঘাত সমান নয়।

4.1.2 বহুপদী সমীকরণ (Polynomial equations)

ধরি, চলক x এর $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots \cdots + a_n$ একটি n ঘাতের বহুপদী। যদি বহুপদীটি শূন্য (0) এর সমান হয়, অর্থাৎ, $f(x) = 0$ বা $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots \cdots + a_n = 0$ হয় এবং $a_0 \neq 0$, তবে এই সমীকরণকে x এর n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ বা সংক্ষেপে x এর n ঘাতের সমীকরণ বলা হয়। $a_0, a_1, \cdots \cdots, a_n$ ইত্যাদিকে সমীকরণটির সহগ বলা হয়।

উদাহরণ: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ একটি দুই ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ বা সংক্ষেপে দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। একইভাবে, $5x^3 + 4x^2 - 11x + 1 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

4.1.3 বহুপদী সমীকরণের মূল (Roots of a polynomial equations)

ধরি, $f(x) = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে $x = a$ কে বহুপদী সমীকরণটির একটি মূল বলা হয়।

উদাহরণ: $x^2 - 3x + 2 = 0$ বা, $f(x) = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল $x = 1$ এবং $x = 2$,

কেননা $f(x) = x^2 - 3x + 2$ এর জন্য $f(1) = 0$ ও $f(2) = 0$

4.1.4 বহুপদী সমীকরণের উৎপাদক উপপাদ্য (Factor theorem of polynomial equations)

বর্ণনা: যদি $f(x)$ একটি বহুপদী হয় এবং $f(a) = 0$ হয়, তবে বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - a$ হবে।

প্রমাণ: ধরি, $f(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $q(x)$ এবং ভাগশেষ r পাওয়া যায়।

তাহলে সংজ্ঞানুসারে, $f(x) = (x - a)\, q(x) + r$ ……………… (i)

ভাগশেষ উপপাদ্য হতে পাই, $r = f(a)$

সেক্ষেত্রে (i) নং হতে পাই, $f(x) = (x - a)\, q(x) + f(a)$ ……… (ii)

যদি $f(x) = 0$ এর একটি মূল a হয়, তবে $f(a) = 0$ হবে।

সুতরাং এ শর্তে (ii) নং হতে পাওয়া যায় $f(x) = (x - a)\, q(x)$ যা প্রকাশ করে $f(x)$ বহুপদী, $x - a$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

অতএব, বহুপদী $f(x)$ এর $x - a$ একটি উৎপাদক।

উদাহরণ: ধরি, $f(x) = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40$

এখানে, $f(-1) = 1 + 2 - 21 - 22 + 40 = 0$

অর্থাৎ, বহুপদী $f(x)$ এর $x - (-1) = x + 1$ একটি উৎপাদক।

তাহলে, $x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40 = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 18x + 40)$

কাজ: $x^2 - x - 30$ সমীকরণকে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে সমাধান কর।

4.1.5 বহুপদীর ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder theorem of polynomials)

যদি a যেকোনো একটি ধ্রুবক হয় এবং $f(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ $f(a)$ হবে।

প্রমাণ: ধরি $f(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগফল $q(x)$ এবং ভাগশেষ r (ধ্রুবক) পাওয়া যায়।

আমরা জানি, ভাজ্য = (ভাজক × ভাগফল) + ভাগশেষ

তাহলে, $f(x) = (x - a)\, q(x) + r$ …… (i)

4.1.8 মূলদ সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণের অমূলদ মূলগুলি যুগলে থাকে

(In a polynomial equation with rational coefficients, irrational roots occur in pairs)

প্রমাণ: মনে করি, $f(x) = 0$ একটি মূলদ সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ এবং $x = p + \sqrt{q}$ এর একটি মূল,
যেখানে $p \in \mathbb{Q}$ এবং $\sqrt{q} \in \mathbb{Q}'$. তাহলে, $f(p + \sqrt{q}) = 0 \cdots \cdots$ (i)
আবার, যেহেতু বহুপদী $f(x)$ এর সহগগুলি মূলদ।
সুতরাং $f(p + \sqrt{q}) = A + \sqrt{B} \cdots \cdots$ (ii) এবং $f(p - \sqrt{q}) = A - \sqrt{B} \cdots \cdots$ (iii)
যেখানে $A \in \mathbb{Q}$ এবং $\sqrt{B} \in \mathbb{Q}'$.
এখন (i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $0 = A + \sqrt{B}$
বা, $A = 0, B = 0$ [কারণ একটি মূলদ ও একটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল শূন্য হতে পারে না।]
তাহলে (iii) নং হতে পাওয়া যায় $f(p - \sqrt{q}) = 0$.
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল $p + \sqrt{q}$ হলে অপর একটি মূল $p - \sqrt{q}$ পাওয়া যায় এবং বিপরীতক্রমে $p - \sqrt{q}$ একটি মূল হলে $p + \sqrt{q}$ অপর একটি মূল পাওয়া যাবে।
অতএব মূলদ সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণের অমূলদ মূলগুলি যুগলে থাকে।

উদাহরণ: $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$ একটি মূলদ সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ।
এর অমূলদ যুগল মূল $2 + \sqrt{3}$ এবং $2 - \sqrt{3}$ বিদ্যমান।

আবার, $x^3 - (7 + \sqrt{2})x^2 + (12 + 7\sqrt{2})x - 12\sqrt{2} = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। সমীকরণের $x = \sqrt{2}$ একটি মূল কিন্তু $x = -\sqrt{2}$ মূল নয়। এ সমীকরণটি মূলদ সহগবিশিষ্ট নয়। মূলদ সহগবিশিষ্ট সমীকরণ হলে, এর একটি মূল $x = -\sqrt{2}$ পাওয়া যেত।

4.1.9 বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণের কাল্পনিক (অবাস্তব) মূলগুলি অনুবন্ধী যুগলে থাকে (In a polynomial equation with real coefficients, imaginary roots occur in conjugate pairs)

প্রমাণ: মনে করি, $f(x) = 0$ একটি বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ এবং $x = p + iq$ এর একটি মূল, যেখানে
$p, q \in \mathbb{R}$ এবং $i = \sqrt{-1}$. তাহলে, $f(p + iq) = 0 \cdots \cdots$ (i)
আবার, যেহেতু বহুপদী $f(x)$ এর সহগগুলি বাস্তব।
সুতরাং $f(p + iq) = A + iB \cdots \cdots$ (ii) এবং $f(p - iq) = A - iB \cdots \cdots$ (iii)
যেখানে $A, B \in \mathbb{R}$ এবং $i = \sqrt{-1}$
এখন (i) ও (ii) নং হতে পাই, $0 = A + iB$
বা, $A = 0, B = 0$ [কারণ $A = 0$ ও $B = 0$ না হলে $A + iB = 0$ হতে পারে না।]
$A = 0$ ও $B = 0$ বসিয়ে (iii) নং হতে পাওয়া যায়, $f(p - iq) = 0$
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল $p + iq$ হলে অপর একটি মূল $p - iq$ পাওয়া যায়।
আবার বিপরীত ক্রমে একটি মূল $p - iq$ হলে অপর একটি মূল $p + iq$ পাওয়া যাবে।
অতএব বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণের কাল্পনিক (অবাস্তব) মূলগুলি অনুবন্ধী যুগলে থাকে।

উদাহরণ: বাস্তব সহগবিশিষ্ট একটি বহুপদী সমীকরণ $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর কাল্পনিক অনুবন্ধী যুগল মূল $2 + i$ এবং $2 - i$ বিদ্যমান।

আবার $x^3 + (5 - i)x^2 + (6 + 5i)x - 6i = 0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। সমীকরণের $x = i$ একটি মূল কিন্তু $x = -i$ মূল নয়। এ সমীকরণটি বাস্তব সহগবিশিষ্ট নয়। বাস্তব সহগবিশিষ্ট সমীকরণ এ একটি মূল $x = i$ হলে অপর একটি মূল $x = -i$ পাওয়া যেত।

কাজ: মূলদ সহগ বিশিষ্ট এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\frac{1}{1 + \sqrt{-5}}$

4.2 উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

(Solution of quadratic equation by factorization)

$ax^2 + bx + c = 0$ [যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$] আকারের সমীকরণকে এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষে একটি দ্বিমাত্রিক রাশি এবং ডানপক্ষে শূন্য ধরা হয়।

আমরা মাধ্যমিক শ্রেণিতে $x^2 + px + q$ এবং $ax^2 + bx + c$ আকারের এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি এবং $x^2 + px + q = 0$ ও $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান এবং এর বাস্তব প্রয়োগ সম্পর্কে শিখেছি। এখানে আমরা এরূপ সমীকরণের সমাধান সংক্রান্ত উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতিসহ আরও কিছু পদ্ধতি সম্পর্কে ধারণা লাভ করব।

4.2.1 দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয়ের পদ্ধতি

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের প্রমাণ আকার বা আদর্শ আকার বলে। একাধিক উপায়ে এ সমীকরণের সমাধান করা যায়।

প্রথম পদ্ধতি (উৎপাদকের সাহায্যে): যদি সমীকরণের বামপক্ষ $ax^2 + bx + c$ কে দুইটি সরল একঘাতি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় তবে উৎপাদকদ্বয় পৃথকভাবে শূন্য (0) এর সমান ধরে দুইটি সমাধান পাওয়া যায়।

দ্বিতীয় পদ্ধতি: প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ [উভয় পক্ষকে 4a দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2ax)^2 + 2(2ax).\,b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

বা, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ বা, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

বা, $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ সুতরাং, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

বহুলভাবে ব্যবহৃত এ পদ্ধতিটি বিখ্যাত ভারতীয় গণিতবিদ শ্রীধর আচার্য্যের [Sridhar Acharga (870-930)] পদ্ধতি নামে পরিচিত।

4.2.2 দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের সংখ্যা দুই এর অধিক হতে পারে না

(A quadratic equation can not have more than two roots)

প্রমাণ: দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ এর সমাধান করে আমরা দুইটি মূল $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ পেয়েছি (অনুচ্ছেদ-4.2.1)। প্রমাণ করতে হবে যে, সমীকরণটির মূল দুইটির বেশি হতে পারে না।

মনে করি, দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ এর তিনটি ভিন্ন ভিন্ন মূল বিদ্যমান এবং মূলগুলি যথাক্রমে α, β ও γ. তাহলে সমীকরণটি α, β ও γ দ্বারা সিদ্ধ হবে।

অতএব, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots\cdots$ (i), $a\beta^2 + b\beta + c = 0 \cdots\cdots$ (ii) এবং $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \cdots\cdots$ (iii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0$

বা, $(\alpha - \beta)\,\{a(\alpha + \beta) + b\} = 0$ যেহেতু $\alpha \neq \beta$ $\therefore a(\alpha + \beta) + b = 0 \cdots\cdots$ (iv)

অনুরূপে, (ii) ও (iii) নং হতে পাই, $a(\beta + \gamma) + b = 0 \quad \cdots\cdots$ (v)

আবার (iv) নং থেকে (v) নং বিয়োগ করে পাই, $a(\alpha - \gamma) = 0$, যা অসম্ভব কারণ $a \neq 0$ এবং $\alpha - \gamma \neq 0$.

অতএব, দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের সংখ্যা দুই এর অধিক হতে পারে না।

কাজ: $5x^2 - 7x + 4 = 0$ সমীকরণের সর্বোচ্চ কয়টি মূল থাকতে পারে? প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।

পাঠ-৪, ৫ ও ৬

4.3 দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান (General solution of quadratic equations)

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান বলতে দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধান বোঝায়। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল বিদ্যমান, সুতরাং দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ মূলের শর্ত দুই প্রকারের হতে পারে।

(i) দুইটি সমীকরণের কেবল একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত।

(ii) দুইটি সমীকরণের দুইটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত।

(i) যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল বিদ্যমান তা নির্ণয় করতে হবে। [মাদ্রাসা বো: ০৯]

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α; তাহলে α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হবে,

$\therefore a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$ ⋯ ⋯ (i)

এবং $a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$ ⋯ ⋯ (ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন সূত্রের মাধ্যমে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\therefore \alpha^2 = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [১ম ও ৩য় সম্পর্ক হতে], $\alpha = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ [২য় ও ৩য় সম্পর্ক হতে]

সুতরাং $\left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) = \left(\dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2$

অর্থাৎ, $(b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$ যা নির্ণেয় শর্ত।

বি:দ্র: দুইটি সমীকরণের সাধারণ মূল সম্পর্কিত সমীকরণদ্বয় নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে সহজে সমাধান করা যায়,

$(b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

[প্রথম রাশির হর × শেষ রাশির হর = (মধ্যরাশির হর)^2]

(ii) যে শর্ত সাপেক্ষে $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের উভয় মূলই (দুইটি মূলই) সাধারণ তা নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলদ্বয় α ও β; তাহলে মূল ও সহগের সম্পর্ক অনুসারে,

প্রথম সমীকরণ $(a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0)$ হতে পাই, $\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b_1}{a_1} \\ \text{এবং } \alpha\beta &= \frac{c_1}{a_1} \end{aligned}\right\}$ ⋯ ⋯ (i)

দ্বিতীয় সমীকরণ $(a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0)$ হতে পাই, $\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b_2}{a_2} \\ \text{এবং } \alpha\beta &= \frac{c_2}{a_2} \end{aligned}\right\}$ ⋯ ⋯ (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $-\dfrac{b_1}{a_1} = -\dfrac{b_2}{a_2}$ এবং $\dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{c_2}{a_2}$ বা, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ এবং $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

সুতরাং, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ যা নির্ণেয় শর্ত।

কাজ: যদি $px^2 + 2x + 1 = 0$ এবং $x^2 + 2x + p = 0$, $(p \neq 1)$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল থাকে তবে সাধারণ মূল ও p এর মান নির্ণয় কর।

4.4 দ্বিঘাত সমীকরণের মূল-সহগ সম্পর্ক

(Relation between roots and coefficients of quadratic equations)

ধরি, $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \cdots$ (i) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। উক্ত সমীকরণের দুইটি মূল α, β হলে $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ (i) নং সমীকরণের সমতুল্য দুইটি উৎপাদক।

শর্তমতে, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

উভয় পক্ষ হতে x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই, $-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a}$

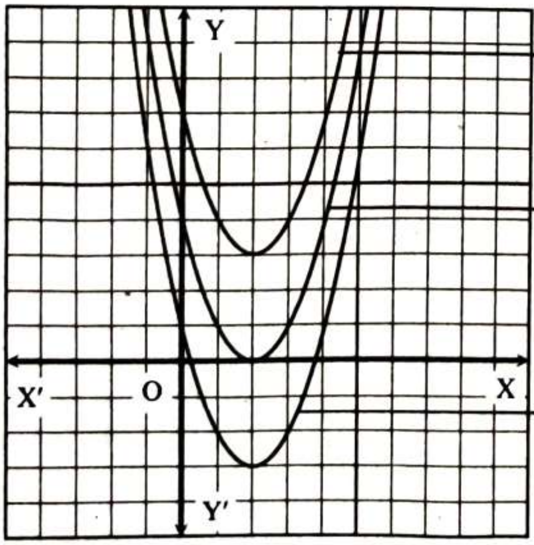
বা, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = (-1)^1 \frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a} = (-1)^2 \frac{c}{a}$

সুতরাং দ্বিঘাত সমীকরণে মূল এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক $\alpha + \beta = (-1)^1 \frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = (-1)^2 \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$

কাজ : $3x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ মান কত?

4.5 পৃথায়ক (Discriminant)

পূর্বেই পেয়েছি $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা।



$x^2 - 4x + 7 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক ঋণাত্মক
$D = (-4)^2 - 4.1.7 = -12$
বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে না।

$x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক শূন্য
$D = (-4)^2 - 4.1.4 = 0$
বক্ররেখাটি x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$x^2 - 4x + 1 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক ধনাত্মক
$D = (-4)^2 - 4.1.1 = 12$
বক্ররেখাটি x-অক্ষকে দুইটি বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে লক্ষণীয় যে, উভয় মূলেই একটি রাশি $\sqrt{b^2 - 4ac}$ বিদ্যমান। সুতরাং '$\sqrt{\ }$' এর মধ্যের রাশি $(b^2 - 4ac)$ এর বিভিন্ন মানের জন্য মূলদ্বয়ের প্রকৃতিও পরিবর্তিত হবে। অর্থাৎ, $b^2 - 4ac$ এর মান পর্যালোচনা করে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নিশ্চিত ভাবে নিরূপণ করা যায় বা বিভিন্ন প্রকারে মূলকে পৃথক করা যায়। এ কারণেই $(b^2 - 4ac)$ কে প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের **পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক** (Discriminant) বলা হয়।

কাজ: নিচের সমীকরণগুলির পৃথায়ক নির্ণয় কর: **(i)** $x^2 + 1 = 0$ **(ii)** $2x^2 + 3x = 0$ **(iii)** $x^2 + 5x + 8 = 0$

4.5.1 দ্বিঘাত সমীকরণের মূলগুলির বিভিন্ন শর্ত

$ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেখানে $a \neq 0$

(i) সমীকরণটি একটি মূল শূন্য হলে c এর মান শূন্য হবে।

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\frac{c}{a} = 0 \therefore c = 0 \ [\because a \neq 0]$

(ii) সমীকরণটির দুইটি মূল শূন্য হলে b ও c উভয়েই শূন্য হবে।

মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a} = 0 \ \therefore b = 0$ এবং গুণফল $= \frac{c}{a} = 0 \ \therefore c = 0 \quad [\because a \neq 0]$

(iii) সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান কিন্তু চিহ্ন বিপরীত অর্থাৎ মূলদ্বয়ের যোগফল $= 0$ হলে b এর মান শূন্য হবে।

মূলদ্বয়ের যোগফল $-\frac{b}{a} = 0$ বা $b = 0 \quad [\because a \neq 0]$

(iv) সমীকরণটির একটি মূল অপরটির উল্টা অর্থাৎ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 1$ হলে a ও c সমান হবে।

মূলদ্বয়ের গুণফল $\frac{c}{a} = 1$ বা, $c = a$

(v) দুইটি মূলই ঋণাত্মক হলে a, b, c একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

এক্ষেত্রে মূলদ্বয়ের যোগফল ঋণাত্মক অর্থাৎ $-\frac{b}{a} < 0$ এবং গুণফল ধনাত্মক অর্থাৎ $\frac{c}{a} > 0$

সুতরাং a ও b একই চিহ্ন বিশিষ্ট এবং c ও a একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

$\therefore$ a, b, c একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

(vi) সমীকরণটির মূলদ্বয় বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হলে মূলদ্বয়ের গুণফল ঋণাত্মক হবে।

এক্ষেত্রে $\frac{c}{a} < 0$, c ও a বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে। মূলদ্বয়ের যোগফল ঋণাত্মক অথবা ধনাত্মক হতে পারে।

(a) যখন যোগফল ধনাত্মক তখন $-\frac{b}{a} > 0 \ \therefore$ a ও b বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট।

$\therefore$ b ও c, a এর বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

(b) যখন যোগফল ঋণাত্মক তখন $-\frac{b}{a} < 0$

$\therefore$ a ও b একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে। $\therefore$ a ও b, c এর বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

4.6 দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়

(Determination of the nature of roots of quadratic equations)

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(i) যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয়, তবে মূলদ্বয় $x = -\frac{b}{2a}$ এবং $-\frac{b}{2a}$ হয়, অর্থাৎ মূলদ্বয় **বাস্তব ও সমান** হবে।

(ii) যদি $b^2 - 4ac$ ধনাত্মক অর্থাৎ, $b^2 - 4ac > 0$ হয়, তবে মূলদ্বয় **বাস্তব ও অসমান** হবে।

(iii) যদি $b^2 - 4ac$ ঋণাত্মক অর্থাৎ, $b^2 - 4ac < 0$ হয়, তবে মূলদ্বয় **জটিল ও অসমান** হবে। জটিল মূলদ্বয় একটি অপরটির অনুবন্ধী হবে।

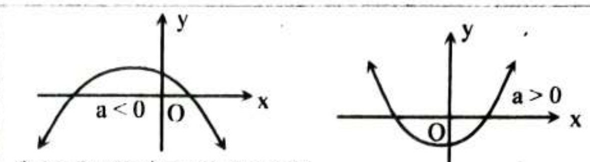
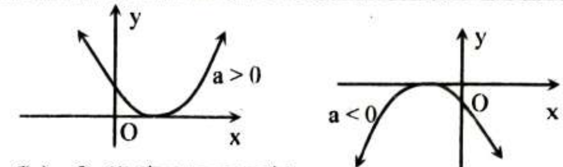
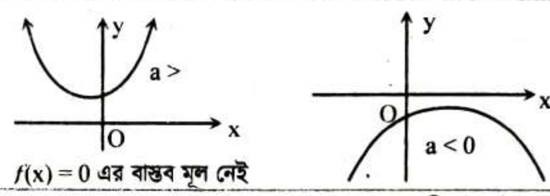
(iv) যদি $b^2 - 4ac$ ধনাত্মক অর্থাৎ, $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং a, b, c মূলদ সংখ্যা হয়, তবে মূলদ্বয় **মূলদ ও অসমান** হবে।

বি:দ্র: $x^2 + px + q = 0$ হলে $x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q}$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ হলে, $x = -\left(\frac{-6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8} = 3 \pm 1 = 4, 2$

4.6.1 লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয়

$ax^2 + bx + c = 0$ হলে $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এখানে, পৃথায়ক $= b^2 - 4ac$

(i) যখন $b^2 - 4ac > 0$, তখন মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান। এক্ষেত্রে, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখা x-অক্ষকে দুইটি বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে।	 $f(x) = 0$ এর বাস্তব মূলদ্বয় অসমান
(ii) যখন $b^2 - 4ac = 0$, তখন মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান। এক্ষেত্রে $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।	 $f(x) = 0$ এর বাস্তব মূলদ্বয় সমান
(iii) যখন $b^2 - 4ac < 0$, তখন মূলদ্বয় অবাস্তব ও অসমান। এক্ষেত্রে, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে না।	 $f(x) = 0$ এর বাস্তব মূল নেই

কাজ: 1. নিচের সমীকরণগুলির মধ্যে কোনগুলির মূল সমান, মূলদ, অমূলদ ও অবাস্তব তা নির্ণয় কর (সমাধান না করে পৃথায়ক এবং লেখের সাহায্যে নির্ণয় করে সিদ্ধান্ত নাও)

(i) $ax^2 = 0$ (ii) $x^2 + x + 1 = 0$ (iii) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (iv) $x^2 + 17x - 16 = 0$ (v) $x^2 - 17x + 16 = 0$

2. a, b ও c বাস্তব হলে, দেখাও যে $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে এবং $a = b = c$ না হলে মূলদ্বয় সমান হতে পারে না।

4.7 দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন (Formation of quadratic equations)

মনে করি, কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β; তাহলে $(x - \alpha)$ ও $(x - \beta)$ উক্ত সমীকরণের বামপক্ষের দুইটি উৎপাদক হবে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের কেবলমাত্র দুইটি মূল বিদ্যমান;

সুতরাং α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ বা, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\therefore$ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় জানা থাকলে, সমীকরণটি **x^2 − (মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল = 0** হবে।

উদাহরণ-1. $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β হলে $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \dfrac{1}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ০৮; রা: বো: ১০, ০৮; সি: বো: ১৪, ০৬; চ: বো: ০৭; কু: বো: ১৩, ১১, ০৬; ব: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১০]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই, $\alpha + \beta = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}$

নির্ণেয় সমীকরণটি, $x^2 - \left\{\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right)\right\}x + \left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$ ...... (i)

এখানে, $\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{2} + 6 = \dfrac{15}{2}$

এবং $\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + \dfrac{1}{\alpha\beta} + 2 = \dfrac{1}{4} + 4 + 2 = \dfrac{1}{4} + 6 = \dfrac{25}{4}$

(i) নং হতে পাই, $x^2 - \dfrac{15}{2}x + \dfrac{25}{4} = 0$ $\therefore 4x^2 - 30x + 25 = 0$ যা নির্ণেয় সমীকরণ।

কাজ: 1. (i) −1, 6 (ii) 3, 7 মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

পাঠ-৭

4.8 দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের প্রতিসম রাশির মান (The value of symmetric expressions of roots of quadratic and cubic equations)

দুই বা ততোধিক চলকযুক্ত কোনো রাশির যেকোনো দুইটি চলকের পরস্পর স্থান বিনিময়ের ফলে যদি রাশিটি একই থাকে তবে ঐ রাশিটিকে **প্রতিসম রাশি** বলে।

উদাহরণ: x, y, z চলকে $xy + yz + zx$, $x^2 + y^2 + z^2$ ও $(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2$ প্রতিসম রাশি। কিন্তু $x^2y + y^2z + z^2x$ প্রতিসম রাশি নয়।

আবার, $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ একটি প্রতিসম রাশি এবং $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূল α, β ও γ হলে $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ একটি প্রতিসম রাশি।

মান নির্ণয়: প্রতিসম রাশির মান নির্ণয়ের জন্য রাশিটিকে, মূল ও সহগের সম্পর্ক অনুযায়ী মূলের বিভিন্ন আকারে (যেমন: তিনটি মূল α, β ও γ হলে একটি আকার, $(\alpha + \beta + \gamma)$ প্রকাশ করে মান বসাতে হয়।

উদাহরণ: $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β ও γ হলে $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$ প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় কর।

সমাধান: মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই, $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ এবং $\alpha\beta\gamma = -q$

এখন, $\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 = (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta\gamma^2)$

$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = p^2 - 0 = p^2$

অতএব প্রদত্ত প্রতিসম রাশির মান $= p^2$

প্রতিসম রাশিতে $\sum$ এর ব্যবহার: প্রতিসম রাশি একই আকৃতির যে সকল পদের যোগফলে গঠিত তার যেকোনো একটি রাশির বামপাশে $\sum$ ব্যবহার করে প্রতিসম রাশিটিকে সংক্ষিপ্ত আকারে লিখা যায়।

উদাহরণ: (i) $xy + yz + zx = \sum xy$ (বা $\sum yz$ বা $\sum zx$) (ii) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \sum x^2 + \sum xy$
(iii) $(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2 = \sum(y + z)^2$ (iv) $x^2 + y^2 + z^2 = \Sigma x^2$ বা Σy^2 বা Σz^2
(v) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \Sigma x^2y^2$ (vi) $x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 = \Sigma x^2y$

দ্রষ্টব্য: ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে:

(i) মূলগুলি সমান্তর প্রগমনে থাকলে, মূলত্রয়ের সাধারণ আকার হবে, $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$

(ii) মূলগুলি গুণোত্তর প্রগমনে থাকলে, মূলত্রয়ের সাধারণ আকার হবে, $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$

(iii) মূলগুলি ভাজিত (Harmonic) প্রগমনে থাকলে, মূলত্রয়ের সাধারণ আকার হবে, $\frac{1}{\alpha - \beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha + \beta}$

অর্থাৎ, সমান্তর প্রগমনে থাকলে যা হয় তার বিপরীত।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: পাঠ ৪, ৫, ৬ ও ৭ এর আলোকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সমাধানের জন্য কিছু বিশেষ কৌশল নিম্নে দেয়া হলো:

1. $ax^2 + bx + c$ রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান এর ক্ষেত্রে $x = -\frac{b}{2a}$ এবং গরিষ্ঠ/সর্বোচ্চ মান অথবা লঘিষ্ঠ/সর্বনিম্ন মান $= c - \frac{b^2}{4a}$.
2. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হলে, $a = c$
3. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে, $a = -c$
4. $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল অপরটির n গুণ হলে, $nb^2 = ac(1 + n)^2$
5. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হবে: $cx^2 + bx + a = 0$
6. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $cx^2 - bx + a = 0$
7. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $-\alpha$ ও $-\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $ax^2 - bx + c = 0$

8. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $a^2x^2 + a(b - c)\,x - bc = 0$
9. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে α^2, β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$
10. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$
11. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha - m$ ও $\beta - m$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $a(x + m)^2 + b(x + m) + c = 0$
12. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + m, \beta + m$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $a(x - m)^2 + b(x - m) + c = 0$

কাজ: **1.** $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর।
(i) $\alpha\beta^{-1} + \beta\alpha^{-1}$ **(ii)** $(p\alpha + q)^{-1} + (p\beta^{-1} + q)^{-1}$ **(iii)** $\alpha^3 + \beta^3$

2. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:
(i) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ **(ii)** $\alpha^4 + \beta^4$ **(iii)** $\alpha^{-2} + \beta^{-2}$

3. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূল α, β, γ হলে $\sum(\alpha - \beta)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

4.9 ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক ও ত্রিঘাত সমীকরণ গঠন
(Relation between roots and coefficients and formation of cubic equations)

মনে করি, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

তাহলে, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

বা, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = (-1)^1\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = (-1)^2.\frac{c}{a}$

এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = (-1)^3\frac{d}{a}$ [x^3, x^2, x ও ধ্রুবকপদগুলি সমীকৃত করে]

কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি মূল α, β, γ হলে সমীকরণটি
$\mathbf{x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0}$ **বা,** $\mathbf{x^3 - (\Sigma\alpha)x^2 + \Sigma(\alpha\beta)x - \alpha\beta\gamma = 0}$ হবে।

উদাহরণ-2. $\mathbf{2x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = 0}$ সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{-(-2)}{2} = 1,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-3}{2} \text{ এবং } \alpha\beta\gamma = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: চতুর্ঘাত সমীকরণ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ এর মূল চারটি α, β, γ ও δ হলে, মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই,

$$\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}, \sum\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$$

$$\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a} \text{ এবং } \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$$

উদাহরণ-3. $\mathbf{5x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x + 4 = 0}$ সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\therefore \Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{-(-8)}{5} = \frac{8}{5},\ \Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{1}{5}$$

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{2}{5} \text{ এবং } \alpha\beta\gamma\delta = \frac{4}{5}$$

n ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: মনে করি, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \cdots + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$ একটি n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ এবং এর মূলগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \cdots, \alpha_n$.

তাহলে $a_0 x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \cdots + a_n = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots \cdots (x - \alpha_n)$

$$= a_0\{x^n - (\sum\alpha_1)x^{n-1} + (\sum\alpha_1\alpha_2)x^{n-2} - (\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x^{n-3} + \cdots \cdots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n\}$$

যেহেতু এটি একটি অভেদ, সুতরাং উভয় পক্ষের সমান ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগ পরস্পর সমান।

এখন উভয় পক্ষ হতে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$-a_0 \sum\alpha_1 = a_1,\ a_0 \sum\alpha_1\alpha_2 = a_2,\ -a_0 \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = a_3, \cdots \cdots,\ (-1)^n a_0\, \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = a_n$$

বা, $\sum\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$, $\sum\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_2}{a_0}$, $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_3}{a_0}, \cdots,\ \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = \dfrac{1}{(-1)^n}\cdot\dfrac{a_n}{a_0} = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}$

এটিই প্রদত্ত সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক।

কাজ: $rx^3 + pqx^2 + mx + n = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β ও γ হলে $\sum\alpha$, $\sum\alpha\beta$ ও $\alpha\beta\gamma$ এর মান কত?

পাঠ-৮ ও ৯

উদাহরণমালা

উদাহরণ-4. উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের সমাধান কর।

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^2 - 7x + 12$ এখানে 12 এর সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$\therefore$ সম্ভাব্য মূলসমূহ: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$\therefore$ $f(1) = 1 - 7 + 12 \neq 0$

$f(-1) = 1 + 7 + 12 \neq 0$

… … … … … … … …

… … … … … … … …

$f(3) = 9 - 7.3 + 12 = 21 - 21 = 0$

$\therefore$ $x = 3$ বা, $x - 3 = 0$; সুতরাং $(x - 3)$, $f(x)$ ফাংশনের উৎপাদক।

এখন, $x^2 - 7x + 12 = 0$ বা, $x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$ বা, $x(x - 3) - 4(x - 3) = 0$ বা, $(x - 3)(x - 4) = 0$

$\therefore x = 3, 4$ $\therefore$ নির্ণেয় মূলগুলি 3, 4.

উদাহরণ-5. দেখাও যে, $a = b$ না হলে, $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

[কু: বো: ১৪; য: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ …… (i)

(i) নং সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হবে যদি পৃথায়কের মান শূন্য অথবা ধনাত্মক হয়।

$\therefore$ (i) নং এর পৃথায়ক $= \{-2(a + b)\}^2 - 4.2(a^2 + b^2) = 4(a + b)^2 - 8(a^2 + b^2)$

$$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2) = 4(-a^2 - b^2 + 2ab) = -4(a - b)^2 \leq 0$$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হবে যদি পৃথায়কের মান শূন্য অর্থাৎ $(a - b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0$ $\Rightarrow a = b$ হয়।

সুতরাং $a = b$ না হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

উদাহরণ-6. যদি a, b, c মূলদ এবং $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b + c - a)x^2 + (c + a - b)x + (a + b - c) = 0$ সমীকরণের মূলগুলি মূলদ হবে। [ঢা: বো: ১৪, ১২; কু: বো: ১৩]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণটির পৃথায়ক $= (c + a - b)^2 - 4(b + c - a)(a + b - c)$

$$= (a + b + c - 2b)^2 - 4(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)$$

$$= (-2b)^2 - 4(-2a)(-2c) \quad [\because a + b + c = 0]$$

$= 4b^2 - 16ac = 4(b^2 - 4ac) = 4\{(-a-c)^2 - 4ac\}$ [$\because b = -a - c$]
$= 4(a^2 - 2ac + c^2) = 4(a-c)^2 = \{2(a-c)\}^2$ যা একটি পূর্ণবর্গ।
আবার a, b, c মূলদ বলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি মূলদ।
$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে।

উদাহরণ-7. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে $\sum\alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। [য: বো: ০৫; রা: বো: ১৫]

সমাধান: $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই,

$$\alpha + \beta + \gamma = \sum\alpha = \frac{2}{3},\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \sum\alpha\beta = 0 \text{ এবং } \alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$$

এখন $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta$
$= \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 - 3\alpha\beta\gamma$
$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma$
$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma = \left(\frac{2}{3}\right)(0) - 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \ \therefore\ \sum\alpha^2\beta = 1$

উদাহরণ-8. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গ হলে p এর মান নির্ণয় কর।
[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৯ এর সৃজনশীল ২(গ);চুয়েট ০৮-০৯; রা: বো:, কু: বো: ০৫; য: বো: ১৩, ০৯; ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ১২; ব: বো: ১৪, ০৯; চ: বো: ১৯, ১২, ০৭; সি: বো: ১৫, ১১]

সমাধান: মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও α^2

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27}$ এবং $\alpha.\alpha^2 = \alpha^3 = \frac{-(p+2)}{27}$ ……… (i)

$\therefore \alpha + \alpha^2 = \frac{-2}{9}$ বা, $9\alpha + 9\alpha^2 = -2$ বা, $9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$

বা, $9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$ বা, $3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$

বা, $(3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0 \ \therefore\ \alpha = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

(i) নং এ $\alpha = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\frac{-8}{27} = -\frac{(p+2)}{27}$ বা, $p + 2 = 8$ বা, $p = 6$

আবার, (i) নং এ $\alpha = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\frac{-1}{27} = -\frac{(p+2)}{27}$ বা, $p + 2 = 1$ বা, $p = -1$

$\therefore p = 6, -1$

উদাহরণ-9. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে, $c + a = \pm b$ [ব: বো: ১৩; দি: বো: ১৩; চ: বো: ০৮]

সমাধান: মনে করি, সাধারণ মূলটি α. তাহলে, $x = \alpha$ দ্বারা উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$\therefore a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ……(i)
এবং $c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ ……(ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন সূত্রানুসারে পাই, $\frac{\alpha^2}{ab - bc} = \frac{\alpha}{c^2 - a^2} = \frac{1}{ab - bc}$

$\therefore \frac{\alpha^2}{b(a-c)} = \frac{\alpha}{(c-a)(c+a)}$ [১ম ও ২য় সম্পর্ক হতে] বা, $\alpha = -\frac{b}{c+a}$

এবং $\frac{\alpha}{(c-a)(c+a)} = \frac{1}{b(a-c)}$ [২য় ও ৩য় সম্পর্ক হতে] বা, $\alpha = -\frac{c+a}{b}$

অর্থাৎ $-\frac{b}{c+a} = -\frac{c+a}{b}$ বা, $(c+a)^2 = b^2$ সুতরাং $c + a = \pm b$

উদাহরণ-10. প্রদত্ত শর্তাধীনে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় কর :

(a) $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ এর দুইটি মূলের অনুপাত 3 ঃ 4 । [রা: বো: ০৭; চ: বো: ১৩; সি: বো: ১০, ০৭; দি: বো; ১১]

(b) $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ এর মূলগুলি গুণোত্তর প্রগমনে আছে।

সমাধান : (a) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$

মনে করি, মূলত্রয়, 3α, 4α এবং β.

$\therefore \ 3\alpha + 4\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ বা, $7\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ $\therefore \beta = \frac{1}{2} - 7\alpha \cdots \cdots$ (i)

আবার, $12\alpha^2 + 3\alpha\beta + 4\alpha\beta = \frac{-22}{2} = -11$ $\therefore 12\alpha^2 + 7\alpha\beta = -11 \cdots \cdots$ (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $12\alpha^2 + 7\alpha\left(\frac{1}{2} - 7\alpha\right) = -11$ বা, $24\alpha^2 + 7\alpha - 98\alpha^2 = -22$

বা, $74\alpha^2 - 7\alpha - 22 = 0$ বা, $(2\alpha + 1)(37\alpha - 22) = 0$ $\therefore \alpha = -\frac{1}{2}, \frac{22}{37}$

$\therefore \beta = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4$, যখন $\alpha = -\frac{1}{2}$

আবার, $\beta = \frac{1}{2} - 7 . \frac{22}{37} = \frac{1}{2} - \frac{154}{37} = -\frac{271}{74}$, যখন $\alpha = \frac{22}{37}$

$\therefore$ মূলত্রয়, $-\frac{3}{2}, -2, 4$ বা $\frac{66}{37}, \frac{88}{37}, -\frac{271}{74}$

মূলত্রয়ের গুণফল $= 12 =$ প্রথম সেটের গুণফল $\neq$ দ্বিতীয় সেটের গুণফল

$\therefore$ **নির্ণেয় মূলত্রয়:** $-\frac{3}{2}, -2, 4$

(b) ধরি, মূলত্রয়, $\frac{a}{r}, a, ar$ $\therefore$ মূলত্রয়ের গুণফল, $\frac{a}{r}.a.ar = \frac{24}{3}$ বা, $a^3 = 8$ অর্থাৎ, $a = 2$

আবার, মূলত্রয়ের যোগফল, $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{26}{3}$

বা, $a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{26}{3}$

বা, $\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{26}{3 \times 2}$

বা, $3r^2 + 3r + 3 - 13r = 0$ বা, $3r^2 - 10r + 3 = 0$

বা, $(r - 3)(3r - 1) = 0$ $\therefore r = 3, \frac{1}{3}$

এখন, $r = 3$ হলে, মূলত্রয় $\frac{2}{3}, 2, 2.3$ বা, $\frac{2}{3}, 2, 6$

এবং $r = \frac{1}{3}$ হলে, মূলত্রয় $2.3, 2, 2.\frac{1}{3}$ বা, $6, 2, \frac{2}{3}$

$\therefore$ **নির্ণেয় মূলত্রয়:** $\frac{2}{3}, 2, 6$

উদাহরণ-11. $f(x) = (x - p)(x - q) + (x - q)(x - r) + (x - r)(x - p)$

এবং $g(x) = (k^2 - 3)x^2 + 2kx + (2k + 1)$ দুইটি ফাংশন

ক. p এর মান কত হলে $x^2 + px - 6p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

খ. $f(x)$ পূর্ণবর্গ হলে দেখাও যে $p = q = r$

গ. $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{\alpha}{\beta^2}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha^2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ বের কর যখন $k = 3$

সমাধান : ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + px - 6p = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক, $D = p^2 - 4.1.(-6p) = p^2 + 24p$

যেহেতু মূলদ্বয় বাস্তব। সুতরাং $D = 0$

বা, $p^2 + 24p = 0$ বা, $p(p + 24) = 0$ বা, $p = 0, -24$

$\therefore$ p এর মান 0 অথবা -24

খ. দেওয়া আছে,

$f(x) = (x - p)(x - q) + (x - q)(x - r) + (x - r)(x - p)$

$= x^2 - px - qx + pq + x^2 - qx - rx + qr + x^2 - rx - px + pr$

$= 3x^2 - 2(p + q + r)x + (pq + qr + pr)$

f(x) পূর্ণবর্গ হবে যদি f(x) দ্বারা গঠিত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

$\therefore 3x^2 - 2(p + q + r)x + (pq + qr + pr) = 0$ ... ... (ii)

(ii) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক

$D = \{-2(p + q + r)\}^2 - 4.3(pq + qr + rp)$

$= 4(p + q + r)^2 - 4.(3pq + 3qr + 3rp)$

$= 4(p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2qr + 2pr - 3pq - 3qr - 3rp)$

$= 4(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)$

$= 2(2p^2 + 2q^2 + 2r^2 - 2pq - 2qr - 2rp)$

$= 2\{(p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\}$

যেহেতু মূলদ্বয় সমান

$\therefore D = 0$

বা, $2\{(p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\} = 0$

অর্থাৎ $(q - r)^2 = 0$ বা, $q = r$

এবং $(r - p)^2 = 0$ বা, $r = p$

[একাধিক বর্গের যোগফল শূন্য হলে প্রতিটির মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হবে]

$\therefore p = q = r$

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = 0$

বা, $(k^2 - 3)x^2 + 2kx + (2k + 1) = 0$

$k = 3$ হলে, $6x^2 + 6x + 7 = 0$ ... ... (iii)

(iii) নং সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{6}{6} = -1$ এবং $\alpha\beta = \frac{7}{6}$

এখন, $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{(-1)^3 - 3.\frac{7}{6}(-1)}{\left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{90}{49}$

আবার,

$\frac{\alpha}{\beta^2} \times \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha\beta}$

$= \frac{1}{\frac{7}{6}}$

$= \frac{6}{7}$

$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ এবং $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - \left(\dfrac{\alpha}{\beta^2} + \dfrac{\beta}{\alpha^2}\right)x + \left(\dfrac{\alpha}{\beta^2} \cdot \dfrac{\beta}{\alpha^2}\right) = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{90}{49}x + \dfrac{6}{7} = 0$

$\therefore 49x^2 - 90x + 42 = 0$

উদাহরণ-12. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

ক. বাস্তব সহগবিশিষ্ট এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার দুইটি মূল $1 - \sqrt{2}$ ও $1 + i$

খ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূল তিনটি সমান্তর প্রগমনভুক্ত হলে দেখাও যে, $2a^3 - 9ab + 27c = 0$

গ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\beta\gamma + \dfrac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ ও $\alpha\beta + \dfrac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান : ক. বাস্তব সহগবিশিষ্ট সমীকরণের অমূলদ ও জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে। কাজেই কোন সমীকরণের দুইটি মূল $1 - \sqrt{2}$ ও $1 + i$ হলে অপর মূল দুইটি হবে $1 + \sqrt{2}$ ও $1 - i$

$\therefore$ সমীকরণটি $\{x - (1 - \sqrt{2})\}\{x - (1 + \sqrt{2})\}\{x - (1 + i)\}\{x - (1 - i)\} = 0$

$\Rightarrow \{(x - 1) + \sqrt{2}\}\{(x - 1) - \sqrt{2}\}\{(x - 1) - i\}\{(x - 1) + i\} = 0$

$\Rightarrow \{(x - 1)^2 - 2\}\{(x - 1)^2 + 1\} = 0$

$\Rightarrow \{(x - 1)^2\}^2 - 2(x - 1)^2 + (x - 1)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1)^2 - (x - 1)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 4x + 2x^2 - x^2 + 2x - 1 - 2 = 0$

$\therefore x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$

খ. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

ধরি, সমান্তর প্রগমনভুক্ত মূলত্রয় $\alpha - \beta, \alpha$ ও $\alpha + \beta$

$\therefore \alpha - \beta + \alpha + \alpha + \beta = -a$

বা, $3\alpha = -a$ বা $\alpha = -\dfrac{a}{3}$ ... ... (ii)

আবার, $(\alpha - \beta)\alpha + \alpha(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = b$

বা, $\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2 = b$

বা, $3\alpha^2 - \beta^2 = b$ ... ... (iii)

এবং $(\alpha - \beta)\alpha(\alpha + \beta) = -c$

বা, $\alpha(\alpha^2 - \beta^2) = -c$

বা, $-\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{a^2}{9} - \beta^2\right) = -c$

বা, $\dfrac{a^2}{9} - \beta^2 = \dfrac{3c}{a}$

$\therefore \beta^2 = \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{3c}{a}$ ... ... (iv)

(ii) ও (iv) নং হতে α ও β^2 এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে $3.\dfrac{a^2}{9} - \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{3c}{a} = b$

বা, $\dfrac{2a^2}{9} = \dfrac{3c}{-a} + b$ বা, $\dfrac{2a^2}{9} = \dfrac{-3c + ab}{a}$

বা, $2a^3 = -27c + 9ab$

$\therefore 2a^3 - 9ab + 27c = 0$

গ. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)
সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= b \\ \alpha\beta\gamma &= -c \end{aligned}\right\} \text{... ... ... (ii)}$$

এমন একটি সমীকরণ গঠন করতে হবে যার মূলত্রয় $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$

ধরি, $y = \beta\gamma + \frac{1}{\alpha}$

বা, $\alpha y = \alpha\beta\gamma + 1$

বা, $\alpha y = -c + 1$

বা, $\alpha = \frac{1-c}{y}$

বা, $x = \frac{1-c}{y}$ [যেহেতু (i) নং এর একটি মূল $\alpha \therefore \alpha = x$]

x-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে $\left(\frac{1-c}{y}\right)^3 + a\left(\frac{1-c}{y}\right)^2 + b\left(\frac{1-c}{y}\right) + c = 0$

বা, $(1-c)^3 + a(1-c)^2y + b(1-c)y^2 + cy^3 = 0$

$\therefore cy^3 + b(1-c)y^2 + a(1-c)^2y + (1-c)^3 = 0$

চলক বদল করে পাই, $cx^3 + b(1-c)x^2 + a(1-c)^2x + (1-c)^3 = 0$
ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

পাঠ-১০, ১১ ও ১২

? অনুশীলনী-4

Type-I

1. (i) ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে, $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2$ বহুপদীকে $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হয় তা নির্ণয় কর।

(ii) উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে, $3x^3 - (7 + 3a)x^2 + (2 + 7a)x - 2a$ এর একটি উৎপাদক $(x - a)$

(iii) উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে $x^2 + x - 6 = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।

(iv) উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে $2x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(ক)]

Type-II

2. (i) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং সমাধান করে তোমার উক্তির সত্যতা যাচাই কর :

(a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ (b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (c) $x^2 - 2x + 2 = 0$
(d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ (e) $x^2 - 6x + 7 = 0$

(ii) a ও b মূলদ হলে, দেখাও যে, $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। [ঢা: বো: ০৫; কু: বো: ১৬]

(iii) a, b ও c মূলদ হলে, দেখাও যে, $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে।

(iv) দেখাও যে, k এর সকল বাস্তব মানের জন্য $\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে।

(v) দেখাও যে, $(a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)x + (c^2 + d^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে তারা পরস্পর সমান হবে।

(vi) প্রমাণ কর যে, $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ সমীকরণটির মূলগুলি সর্বদা বাস্তব হবে এবং $a=b=c$ না হলে মূলগুলি সমান হতে পারে না। [রা: বো: ১৩; কু: বো: ১৫; ব: বো: ১৩]

(vii) যদি $(h^2-a^2)x^2-2hkx+(k^2-b^2)$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$

(viii) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

(ix) $a^2x^2+6abx+ac+8b^2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, দেখাও যে, $ac(x+1)^2=4b^2x$ সমীকরণের মূলদ্বয়ও সমান হবে। [রা: বো: ১৬; য: বো: ০৯]

Type-III

3. (i) k এর মান কত হলে, $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে ? [ঢা: বো: ১৩; দি: বো: ১৩; রা: বো: ০৮; য: বো: ১২; ব: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১২]

(ii) k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2+2(k+2)x+(k-3)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে ?

(iii) m এর মান কত হলে, $mx^2+2x+3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব অসমান, সমান ও অবাস্তব হবে ?

(iv) k এর মান কত হলে, $(3k+1)x^2+(11+k)x+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান, বাস্তব ও অসমান, জটিল হবে ?

(v) k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2+2(k+3)x+(2k+3)$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে? [বুয়েট ০৮-০৯, ১১-১২; কু: বো: ০৬]

(vi) k এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে? [বুয়েট ০৪-০৫; চুয়েট ১০-১১;কু: বি: ১০]

(vii) k এর মান কত হলে, $3x^2-kx+4=0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিনগুণ হবে? [ঢা: বি: ১৪-১৫]

(viii) m এর মান কত হলে, $(m-1)x^2-(m+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(ক)]

Type-IV

4. (i) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 4 ঃ 5 হলে, প্রমাণ কর যে, $20b^2=81ac$ [চ: বো: ১১]

(ii) $ax^2+bx+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m ঃ n হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$ [বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৪, ০৮; কু: বো: ১৪, ১০, ০৭; দি: বো: ১৫, ১২; সি: বো: ১২; রা: বো: ১২; রা: বো: ১৪, ১২; য: বো: ১৪; চ: বো: ১৫, ০৯; ব: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১১]

(iii) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$ [চুয়েট ০৫-০৬; বুয়েট ১০-১১; কু: বো: ০৮]

(iv) $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{{b_1}^2}{a_1c_1}=\frac{{b_2}^2}{a_2c_2}$

(v) যদি $x^2-bx+c=0$ এবং $x^2-cx+b=0$ সমীকরণের মূলগুলির মধ্যে কেবল একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $b+c+4=0$ [ঢা: বো: ১৬, ১০; কু: বো: ১২, ০৯; সি: বো: ১২, ০৯; য: বো: ১৩, ০৮]

(vi) $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2+4q^2=(1+2q)^2$ [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৩(গ); ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ১৩, ০৬; চ: বো: ০৫; ব: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১০]

(vii) $x^2-bx+c=0$ সমীকরণের মূল দুইটির অন্তর একক হলে, প্রমাণ কর যে, $b^2+4c^2=(1+2c)^2$

(viii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে, p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৩(খ); ঢা: বো: ০৯; রা: বো: ০৯; চ: বো: ১১; ব: বো: ১৬; য: বো: ১৪; সি: বো: ০৮; দি: বো: ১৬, ১৪, ১১]

(ix) যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$
[ঢা: বো: ১৫, ১৩; য: বো: ১১; য: বো: ১৪; ব: বো: ১০; দি: বো: ১৪, ০৯]

(x) $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ); ঢা: বো: ১৪, ১১; ব: বো: ১৫, ১১; কু: বো: ০৫; য: বো: ১১, ০৬; সি: বো: ১৬, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১১]

(xi) a ও b বাস্তব হলে দেখাও যে, $2bx^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হবে। যদি সমীকরণটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $a = 2b$ অথবা, $4a = 11b$.
[সি: বো: ১৪; চ: বো: ১৬]

(xii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, দেখাও যে, $c(a - b)^3 = a(c - b)^3$ [ব: বো: ০৭] এবং $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$. [ঢা: বো: ০৯; য: বো: ১৬]

(xiii) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^3 - 3pq + q^2 + q = 0$
[ব: বো: ০৫]

Type-V

5. (i) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
[রা: বো: ১১; য: বো: ০৭, ০৫; চ: বো: ০৬; দি: বো: ১০]

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ); চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ) অনুরূপ; বুয়েট ১২-১৩; চ: বো: ১৩, ০৯]

(iii) $2x^2 + x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 - 3x + 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 1, \beta + 1$ হলে, b এর মান নির্ণয় কর।

(iv) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ হলে, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) + (\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ এর মান p, p_1, q, q_1 এর মাধ্যমে নির্ণয় কর।

(v) $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $(\alpha + \delta)$ ও $(\beta + \delta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2 - ac}{a^2} = \frac{B^2 - AC}{A^2}$

Type-VI

6. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, নিম্নের মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণসমূহ নির্ণয় কর:

(i) $\frac{1}{\alpha + 1}$ এবং $\frac{1}{\beta + 1}$ **(ii)** $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ **(iii)** $\frac{\alpha + \beta}{2}$ এবং $\sqrt{\alpha\beta}$ **(iv)** $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ [কু: বো: ০৮]

(v) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\beta}$ **(vi)** $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$ **(vii)** $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ [বুয়েট ১১-১২; ব: বো: ১২]

(viii) $\frac{1}{\alpha - 4\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta - 4\alpha}$ **(ix)** $\alpha^2 + \beta$ এবং $\beta^2 + \alpha$ **(x)** $\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ)]

7. (i) $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $(\alpha - \beta)^2$ এবং $(\alpha + \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব: বো: ০৫]

(ii) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta$ এবং $\frac{\alpha\beta}{2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iii) $ax^2 + bx - a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $a\alpha + b$ এবং $a\beta + b$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ০৫; য: বো: ১০]

(iv) $px^2 + 8(q - p)x + 4(4p - 8q + r) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $(4 - 2\alpha), (4 - 2\beta)$ হলে α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(v) একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $17x^2 - 3x + 14 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল ও গুণফলের সমান হবে।

(vi) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে। [ঢা: বো: ১০, ০৬; কু: বো: ০৯; য: বো: ০৮; ব: বো: ১৫, ০৮]

(vii) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির সমষ্টি এবং অন্তরফলের পরমমান হবে। [রা: বো: ১৪; দি: বো: ১৪; ব: বো: ১২]

(viii) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $3x^2 - 4x - 5 = 0$ সমীকরণের প্রত্যেক মূল অপেক্ষা 1 কম।

(ix) $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রদত্ত সমীকরণ ও নির্ণেয় সমীকরণ একই কেন তা ব্যাখ্যা কর। [কুয়েট ০৬-০৭]

(x) $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\dfrac{q}{p-\alpha}$ ও $\dfrac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রদত্ত সমীকরণ ও নির্ণেয় সমীকরণের অভিন্নতার কারণ দেখাও। [কুয়েট ০৭-০৮]

(xi) $x^2 + px + \dfrac{1}{4}(p^2 - q^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $x^2 + (p \pm q)x \pm pq = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ ও $\alpha - \beta$ হবে।

(xii) $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:
(a) $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^{-1} + \beta^{-1}$ **(b)** $(1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2)$

(xiii) $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে দেখাও যে,

$$(p\alpha^2 + q)^{-1} + (p\beta^2 + q)^{-1} = \frac{q^2 + 2p(q - r)}{p(q^2 + r^2) + q(q^2 - 2pr)}$$

(xiv) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, প্রমাণ করতে হবে যে,

$$(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$$

[বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৯; চ: বো: ১২, ১০, ০৮; সি: বো: ১৬, ১৩, ০৮; কু: বো: ০৭]

(xv) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, প্রমাণ করতে হবে যে,

$$(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$$

[ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ)]

(xvi) বাস্তব সহগবিশিষ্ট এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল, **(a)** $a - ib$ **(b)** $\dfrac{1}{2 + 3i}$
(c) $3 + \sqrt{-5}$ **(d)** $2 + \sqrt{3}i$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

(xvii) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \dfrac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ)]

(xviii) $x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\dfrac{3}{5 - \alpha}$ এবং $\dfrac{3}{5 - \beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

(xix) $(2 + 2\sqrt{3}i)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার সহগগুলি বাস্তব। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(ক)]

(xx) যদি α ও β অসমান হয় অথচ $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয়, তবে $\dfrac{\alpha}{\beta}$ এবং $\dfrac{\beta}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(xxi) $ax^2 + bx + a = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে এবং b, c মূলদ ও বাস্তব শর্তাধীনে $\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

(xxii) $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল এর যোগফল শূন্য হলে দেখাও যে, অপর মূলদ্বয়ের মান $\dfrac{3}{4}$ ও $\dfrac{-1}{2}$

Type-VII

8. **(i)** $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ কর যে, $p + q + 1 = 0$ [বুয়েট ১২-১৩; চুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ০৭; সি: বো: ১১, ০৫; রা: বো: ১১, ০৫; দি: বো: ১০; ব: বো: ১০, ০৬; য: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১২, ০৯]

(ii) $x^2 + bx + ac = 0$ এবং $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে, $a + b + c = 0$; আরও প্রমাণ কর যে, তাদের অপর মূলদ্বয় দ্বারা $x^2 + ax + bc = 0$ সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

(iii) $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১২; রা: বো: ১৬, ০৭; সি: বো: ১৩; ব: বো; ০৭]

(iv) $px^2 + 2x + 1 = 0$ এবং $x^2 + 2x + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে p এর মান নির্ণয় কর এবং p এর প্রত্যেক মানের জন্য সাধারণ মূল নির্ণয় কর।

(v) $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর দুইটি মূল $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে। [বুয়েটেক্স ০৯-১০; দি: বো: ১২; ব: বো: ১৫, ১১]

(vi) $x^2 + px + 10 = 0$ এবং $x^2 + qx - 10 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $p^2 - q^2 = 40$

(vii) $mx^2 + nx + l = 0$ এবং $lx^2 + nx + m = 0$ সমীকরণদ্বয়ে একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m + l = \pm n$. [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ)]

(viii) $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 6$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান $x^2 - mx + 14 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল হলে m এর মান ও অপর মূলটি নির্ণয় কর।

Type-VIII

9. প্রদত্ত শর্তাধীনে নিম্নলিখিত ত্রিঘাত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় কর :

(i) $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ যার দুইটি মূলের যোগফল শূন্য।

(ii) $3x^3 - 13x^2 - x + 6 = 0$ যার দুইটি মূলের যোগফল 5. [কু: বো: ১১]

(iii) $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ এর দুইটি মূলের সমষ্টি শূন্য। [চ: বো: ১৪]

(iv) $2x^3 + 5x^2 - 23x + 10 = 0$ যার দুইটি মূলের গুণফল 1.

(v) $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ যার একটি মূল অপর একটি মূলের দ্বিগুণ।

(vi) $3x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$ যার দুইটি মূলের অনুপাত 2 ঃ 3।

(vii) $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ যার মূলগুলি সমান্তর প্রগমনে আছে। [কু: বো: ১২]

(viii) $3x^3 - 22x^2 + 48x - 32 = 0$ যার মূলগুলি ভাজিত (Harmonic) প্রগমনে আছে।

(ix) $x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0$ যার একটি মূল $1 + \sqrt{3}$.

(x) $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ যার একটি মূল $2 + i$.

(xi) $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ যার একটি মূল 1. [য: বো: ০৭; ব: বো: ১২]

(xii) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2i$ হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(ক)]

10. **(i)** কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল $-2 - 2\sqrt{3}i$ এবং মূলগুলির গুণফল 80 হলে, সমীকরণটি নির্ণয় কর। [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ)]

(ii) $x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $5 + 2i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

(iii) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর।

Type-IX

11. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল α, β ও γ হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

(i) $\sum(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ **(ii)** $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1)$

12. (a) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল α, β ও γ হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর: [চ: বো: ১৪]

(i) $\sum \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}$ (ii) $\sum \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ (iii) $\sum \alpha^2\beta^2$

(iv) $\sum \alpha^3\beta$ (v) $\sum \dfrac{1}{\alpha^2\beta}$ (vi) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ [রা: বো: ১০, ০৬; চ: বো: ০৬; সি: বো: ০৫]

(b) $mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum \alpha^3$ নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

13. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূল তিনটি a, b, c হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

(i) $\sum \dfrac{1}{a^2}$ [দি: বো: ০৯] (ii) $\sum \dfrac{1}{a^2c^2}$ [সি: বো: ০৯; চ: বো: ১৪; য: বো: ০৬]

(iii) $\sum a^2$ (iv) $\sum \dfrac{1}{a^2b}$ (v) $(a + b)(b + c)(c + a)$

14. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

(i) $\sum(\beta - \gamma)^2$ [চ: বো: ০৫] (ii) $\sum \alpha^4$ (iii) $\sum \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$

Type-X

15. (i) যে শর্তে $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় সমান্তর প্রগমনে থাকবে তা নির্ণয় কর।
(ii) যে শর্তে $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলগুলি গুণোত্তর প্রগমনে থাকবে তা নির্ণয় কর।
(iii) যে শর্ত সাপেক্ষে $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় সমান্তর প্রগমনে থাকবে তা নির্ণয় কর।
(iv) যে শর্তে $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুইটি মূলের সমষ্টি শূন্য তা নির্ণয় কর।
(v) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ এর সমাধান নির্ণয় কর যেখানে মুলগুলি সমান্তর প্রগমনে আছে।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $ax^n + bx + c = 0$ সমীকরণের কতটি মূল থাকবে?
ক. 0 খ. 1 গ. n ঘ. n + 1

2. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি?
ক. $x^{-2} + x^{-3}$ খ. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ গ. $\dfrac{1}{x^4}$ ঘ. x

3. $x^2 - 25 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কোনটি?
ক. 0, 0 খ. +5, −5 গ. 5, 0 ঘ. −5, 0

4. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল 2i হলে অপর মূল?
ক. $\sqrt{-4}$ খ. $-\sqrt{-4}$ গ. 4i ঘ. −4i

5. $x^2 - px + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল যখন?
ক. $p > 2$ খ. $-2 < p < 2$ গ. $p < -2$ ঘ. $p \neq 2$

6. নিচের কোন শর্তানুসারে $2x^2 - mx + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে?
ক. $m < -2\sqrt{6}$ খ. $m < 2\sqrt{6}$ গ. $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$ ঘ. $m > -2\sqrt{6}$

7. $3x^2 - 5x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল কত?
ক. 5 খ. −5 গ. $\dfrac{5}{3}$ ঘ. $\dfrac{-5}{3}$

8. $3x^2 - 12x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha^2 - \beta^2)$ এর মান কত?
ক. $-8\sqrt{3}$ খ. 4 গ. $8\sqrt{3}$ ঘ. $2\sqrt{3}$

9. $x^2 - px + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় 3 এবং -2 হলে r^2 এর মান কত হবে?

ক. -36 খ. -6 গ. 6 ঘ. 36

10. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল i ও 1 হলে অপর মূলটি কত?

ক. -1 খ. 0 গ. $-i$ ঘ. i

11. $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে k এর মান কত?

ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 2

12. $3x^2 + 11x + 4 = 0$ এর মূলদ্বয় a, b হলে $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ এর মান কত হবে?

ক. $\frac{\sqrt{73}}{3}$ খ. $\frac{11\sqrt{73}}{16}$ গ. $\frac{16\sqrt{73}}{11}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

13. $x^2 + 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে এবং $a > b$ হলে $a^3 - b^3$ এর মান কত?

ক. -26 খ. -13 গ. 13 ঘ. 26

14. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c হলে $2(a^2 + b^2 + c^2)$ এর মান হবে—

ক. $p - 2q$ খ. $2p - 4q$ গ. $p + 2q$ ঘ. $2p + 4q$

15. $x^2 + 6x - 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কত?

ক. $3 + 3\sqrt{2}, 3 - 3\sqrt{2}$ খ. $3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

গ. $-3 + 3\sqrt{2}, -3 - 3\sqrt{2}$ ঘ. $3, -3$

16. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে যদি $(m - 1)b^2 = acm^2$ হয় তবে একটি মূল অপরটির কতগুণ?

ক. m খ. $1 + m$ গ. $1 - m$ ঘ. $m - 1$

17. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $5 - \sqrt{-4}$ হলে মূলদ্বয়ের গুণফল হবে?

ক. -29 খ. 21 গ. 25 ঘ. 29

18. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল ω^2 হলে অপর মূল হবে—

ক. $-\omega$ খ. ω গ. $-\omega^2$ ঘ. ω^2

19. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল i^3 হলে অপর মূল কোনটি?

ক. 0 খ. -1 গ. $-i$ ঘ. i

20. $x^n - a^n$ বহুপদীকে যদি $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে নিঃশেষে বিভাজ্য হয় তবে ভাগফলের সর্বোচ্চ ঘাত—

ক. 1 খ. $n - 1$ গ. n ঘ. $n + 1$

21. $x^3 - 1 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের জটিল মূলদ্বয়ের যোগফল কত?

ক. 1 খ. 0 গ. -1 ঘ. ω

22. n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $(a + x)^n = 0$ বহুপদী সমীকরণের—

i. সকল মূলই বাস্তব

ii. মূলের সংখ্যা n

iii. পদসংখ্যা n

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. $3x^2 - 5x + \frac{3}{4} = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়—

i. অমূলদ ii. মূলদ iii. অসমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও iii খ. i ও ii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $x^2 - kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে k এর মান হবে—
i. $k > 2$ ii. $k < -2$ iii. $-2 < k < 2$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. $5x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ যার মূলত্রয় a, b, c হলে—
i. $a + b + c = \frac{4}{5}$
ii. $ab + bc + ca = \frac{3}{5}$
iii. $abc = \frac{-2}{5}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

26. a-মূলদ সংখ্যা হলে, $(x - a)^2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় —
i. বাস্তব, সমান ii. বাস্তব, মূলদ iii. অবাস্তব, অসমান
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

27. দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক ধনাত্মক ও পূর্ণবর্গ হলে মূলগুলি হবে —
i. বাস্তব ii. অমূলদ iii. মূলদ
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

28. $x\left(x + \frac{2}{x}\right) = 0$ সমীকরণটির বৈশিষ্ট্য:
i. দ্বিঘাত ii. পৃথায়ক '0' অপেক্ষা বড় iii. পৃথায়ক '0' অপেক্ষা ছোট
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হলে পৃথায়ক হবে—
i. পূর্ণবর্গ ii. ধনাত্মক সংখ্যা iii. ঋণাত্মক সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক শূন্য হলে দুটি মূলই হবে —
i. বাস্তব, মূলদ ii. বাস্তব, সমান iii. জটিল, সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. $x^2 + kx + 2$ সমীকরণের একটি মূল 3 হলে—
i. অপর মূল $\frac{2}{3}$
ii. k এর মান $\frac{-11}{3}$
iii. মূলদ্বয়ের অন্তর $\frac{11}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

32. $x^2 - kx - \pi^2 = 0$ সমীকরণে k এর মান শূন্য হলে—
   i. মূলদ্বয় মূলদ
   ii. মূলদ্বয় অমূলদ
   iii. মূলদ্বয় বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট
   নিচের কোনটি সঠিক?
   ক. i ও ii   খ. ii ও iii   গ. i ও iii   ঘ. i, ii ও iii
33. $f(x) = x^6 - 3x^4 - 2x^3 = 0$ বহুপদী সমীকরণে—
   i. $f(-2) = 0$
   ii. একটি মূল 0
   iii. x, f(x) এর একটি উৎপাদক
   নিচের কোনটি সঠিক?
   ক. i ও ii   খ. ii ও iii   গ. i ও iii   ঘ. i, ii ও iii
34. $6x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x + 6 = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে—
   i. $\Sigma\alpha\beta = \frac{5}{6}$ ii. $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ iii. $\Sigma\alpha\beta\gamma = \frac{-1}{2}$
   নিচের কোনটি সঠিক?
   ক. i ও ii   খ. ii ও iii   গ. i ও iii   ঘ. i, ii ও iii
35. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10$ বহুপদীকে—
   i. $(x + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে f(2)
   ii. $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে -10
   iii. $(x - 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 8
   নিচের কোনটি সঠিক?
   ক. i ও ii   খ. ii ও iii   গ. i ও iii   ঘ. i, ii ও iii
36. $y = 4x^2 - 4x + 1$ বক্ররেখা —
   i. X-অক্ষকে স্পর্শ করে
   ii. Y-অক্ষকে ছেদ করে
   iii. Y-অক্ষকে স্পর্শ করে
   নিচের কোনটি সঠিক?
   ক. i ও ii   খ. i ও iii   গ. ii ও iii   ঘ. i, ii ও iii
37. $y = 5x^2 + 9x + 3$ বক্ররেখাটি—
   i. x-অক্ষকে দুইটি বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে
   ii. x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে
   iii. y-অক্ষকে একটি বিন্দুতে ছেদ করে
   নিচের কোনটি সঠিক?
   ক. i ও ii   খ. ii ও iii   গ. i ও iii   ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (38 ও 39) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - 5x + 3 + k = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যেখানে k ধ্রুবক।

38. k এর মান কত হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় পরস্পর সমান, বাস্তব ও মূলদ?
   ক. $\frac{13}{4}$ খ. $\frac{-13}{4}$ গ. 13   ঘ. -13
39. k এর মান -17 হলে ঋণাত্মক মূলটি হবে?
   ক. -7 খ. -6 গ. -4 ঘ. -2

নিচের তথ্যগুলোর আলোকে (40 ও 41) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α ও β।

40. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান—

ক. $\frac{5}{3}$ খ. $\frac{-5}{3}$ গ. 5 ঘ. -5

41. $\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}$ এর মান—

ক. 19 খ. 9 গ. -9 ঘ. -19

নিচের তথ্যের আলোকে (42 ও 43) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$7x^2 + 12x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

42. α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $49x^2 + 74x + 25 = 0$ খ. $49x^2 - 74x - 25 = 0$

গ. $49x^2 - 74x + 25 = 0$ ঘ. $-49x^2 + 74x + 25 = 0$

43. $\alpha^4 + \beta^4$ এর মান কত?

ক. $\frac{3025}{2401}$ খ. $\frac{3026}{2401}$ গ. $\frac{3000}{2401}$ ঘ. $\frac{3027}{2401}$

নিচের তথ্যের আলোকে (44 ও 45) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$cx^2 - bx - a = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার মূলদ্বয় α, β

44. $(\alpha + \beta)$ এর মান কত?

ক. $\frac{b}{c}$ খ. $\frac{-b}{c}$ গ. $\frac{a}{c}$ ঘ. $\frac{-a}{c}$

45. $\Sigma\alpha^3$ এর মান কত?

ক. $\frac{b^2 + 3abc}{c^3}$ খ. $\frac{b^3 + 3abc}{c^2}$ গ. $\frac{b^3 + 3abc}{c^3}$ ঘ. $\frac{b^3 + 3abc}{c}$

নিচের তথ্যের আলোকে (46 ও 47) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + 6x + 12 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার দুটি মূল α, β

46. সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত?

ক. 12 খ. -12 গ. 24 ঘ. -24

47. সমীকরণটির মূলদ্বয় কেমন হবে?

ক. বাস্তব খ. অবাস্তব গ. মূলদ ঘ. অমূলদ

নিচের তথ্যের আলোকে (48 ও 49) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

48. $\alpha^3 + \beta^3$ এর মান কত?

ক. 2 খ. -2 গ. 3 ঘ. -3

49. $\frac{a}{\beta^2} + \alpha + \frac{a}{\alpha^2} + \beta$ এর মান কত?

ক. $a + 1$ খ. $a - 1$ গ. $-a + 1$ ঘ. $-a - 1$

নিচের তথ্যের আলোকে (50 ও 51) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)=0$

50. সমীকরণটি কত ঘাতের?

ক. 0　　খ. 1　　গ. 2　　ঘ. 3

51. সমীকরণটির মূলগুলো কত হবে যদি $a=b=c=1$ হয়?

ক. $+1,-1$　　খ. $1, 1+i, 1-i$　　গ. $1, -1+i, -1-i$　　ঘ. $1+i, 1-i$

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

52. যেকোনো বাস্তব সংখ্যা a, b, c, d এর জন্য $ax^3+bx^2+cx+d=0$ সমীকরণে কোনটি স্বতঃসিদ্ধ? [শা. বি. প্র. বি. ১৯-২০]

ক. তিনটি মূল অবশ্যই বাস্তব　　খ. দুইটি মূল অবশ্যই বাস্তব

গ. তিনটি মূলই অবাস্তব　　ঘ. একটি মূল অবশ্যই বাস্তব

53. $6x^2-5x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [নো. বি. প্র. বি. ১৯-২০; ঢা. বি. ০৪-০৫]

ক. $x^2-5x+6=0$　　খ. $x^2-4x+3=0$

গ. $x^2-11x+30=0$　　ঘ. $x^2-2x+1=0$

54. $(k+3)x^2+(6-2k)x+(k-1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় একটি অপরটির সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে $k=$ কত? [খু. বি. ১৯-২০]

ক. 1　　খ. 2　　গ. 3　　ঘ. 4

55. $3x^2-kx+4=0$ সমীকরণের মূল একটি অপরটির 3 গুণ হলে $k=$ কত?

ক. 8　　খ. -8　　গ. $\pm\sqrt{8}$　　ঘ. ± 8

56. $x^2+kx+1=0$ সমীকরণে k এর মান কত হলে মূলদ্বয় জটিল হবে? [কু. বি. ১৯-২০]

ক. $-4<k$　　খ. $-1<k<1$　　গ. $-2<k<2$　　ঘ. $0<k<1$

57. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে সমীকরণটি হবে— [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. $x^2-x+1=0$　　খ. $2x^2-2x+1=0$

গ. $x^2+x+1=0$　　ঘ. $2x^2+2x+1=0$

58. $6x^3-x+13=0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, $\Sigma(\alpha-\beta)^2$ এর মান কত? [কুয়েট ১৭-১৮]

ক. $\frac{-1}{6}$　　খ. $\frac{1}{6}$　　গ. 1　　ঘ. -1

59. $7x^2-bx+8=0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে b এর মান কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\sqrt{7}$　　খ. $6\sqrt{7}$　　গ. $\frac{1}{\sqrt{7}}$　　ঘ. $\frac{3}{\sqrt{7}}$

60. $5x^2-7x+10=0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β হলে, $-\alpha$ ও $-\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. $5x^2+7x+10=0$　　খ. $5x^2-7x-10=0$

গ. $x^2-7x+10=0$　　ঘ. $x^2+7x+10=0$

61. k এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2+3kx+3k+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. 4, 1 খ. 4, −1 গ. 6, 1 ঘ. 6, −1

62. $4x^3+16x^2-9x-36=0$ সমীকরণটির দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, সমীকরণটির সমাধান হবে— [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, -8$ খ. $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -4$ গ. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ঘ. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -5$

63. $2x^3+3x^2+6x-65=0$ সমীকরণের একটি মূল $\frac{5}{2}$ হলে, অপর মূলগুলি হলো— [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $2\pm3i$ খ. $4\pm3i$ গ. $3\pm2i$ ঘ. $-2\pm3i$

64. $3x^3-2x^2+1=0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ এবং $\sum\alpha^2\beta$ এর মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. 0 গ. 1 ঘ. কোনোটিই নয়

65. $x^3-4x+3=0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b, c হলে, $\sum c^3$ এর মান কত? [ই. বি. ১৭-১৮]

ক. 3 খ. −3 গ. −9 ঘ. 9

66. $(Ax-B)(x^2-9)+(Ax+B)(x^2-4)=2x(2x^2-13)+5$ একটি অভেদ হলে যথাক্রমে A এবং B এর মান হবে— [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. 1, 2 খ. 2, 1 গ. 2, 3 ঘ. −2, 3

67. x^2-4x+4 দ্বারা $f(x)=x^3-7x^2+16x-12$ বিভাজ্য, $f(x)=0$ সমীকরণের মূলগুলো হবে? [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. 2, 2, 3 খ. 2, 2, −3 গ. 2, −2, 3 ঘ. 2, −2, −3

68. $x^3+(2a-3)x^2-8ax+6a=0, a\neq0$ সমীকরণের একটি মূল 3 এবং অপর মূলদ্বয় সমান হলে, a এর মান কত? [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. 1 খ. −1 গ. 2 ঘ. −2

69. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}+\frac{b}{c}$ এর মান কত? [পা. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

70. $3x^3-1=0$ এর মূলগুলি α, β, γ হলে $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ এর মান— [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. −1 খ. 0 গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. 1

71. $x^2-2x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a এবং b হলে, $a^2+b^2=?$ [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. 10 খ. 6 গ. 8 ঘ. 2

72. $2x^2-7x+5=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2-4x+3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় β এবং γ হলে $(\gamma+\alpha):(\gamma-\alpha)=?$ [ঢা. বি. ১৫-১৬]

ক. 6 : 5 খ. 5 : 6 গ. 11 : 1 ঘ. 1 : 6

73. x^2-2x+5 এর ন্যূনতম মান কত? [বুয়েট ০৯-১০; চ. বি. ১৬-১৭]

ক. 3 খ. 4 গ. 5 ঘ. $\frac{11}{4}$

74. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান এবং $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল 4 হলে b এর মান কত? [বুয়েট ০৯-১০; জা. বি. ১৬-১৭]
ক. 4 খ. 8 গ. 9 ঘ. 12

75. k এর মান কত হলে $(k + 1) x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে? [বুয়েট ১২-১৩, ০৮-০৯; বুয়েট ১৬-১৭; কুয়েট ১৬-১৭]
ক. 2, 3 খ. −2, 3 গ. 2, − 3 ঘ. −2, −3

76. কোন দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল $\sqrt{-5} - 1$? [ঢা. বি. ১৩-১৪]
ক. $x^2 + 2x + 6 = 0$ খ. $x^2 + x + 3 = 0$ গ. $x^2 + 2x - 6 = 0$ ঘ. $x^2 + x - 3 = 0$

77. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অন্যটি কত? [বুটেক্স ০৯-১০; ঢা. বি. ০৮-০৯]
ক. −5 খ. −4 গ. 4 ঘ. 1

78. $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি কী? [ঢা. বি. ০৯-১০]
ক. $x^2 - 19x + 84 = 0$ খ. $x^2 + 14x - 144 = 0$
গ. $x^2 - 14x + 144 = 0$ ঘ. $x^2 + 19x - 84 = 0$

79. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [ঢা. বি. ০৬-০৭]
ক. $x^2 + x + 7 = 0$ খ. $x^2 - x + 7 = 0$
গ. $x^2 + x - 7 = 0$ ঘ. $x^2 - x - 7 = 0$

80. k এর মান কত হলে $(3k + 1)x^2 + (11 + k)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে? [ঢা. বি. ১২-১৩]
ক. $k > 1$ খ. $k < 85$ গ. $k \geq 85$ ঘ. $1 < k < 85$

81. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি? [কুয়েট ১৩-১৪]
ক. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ খ. $x^3 + qx^2 + rx + p = 0$
গ. $rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$ ঘ. $rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

82. $\alpha - \beta = 8, \alpha^3 - \beta^3 = 152$ হলে, α ও β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? [কুয়েট ১২-১৩]
ক. $x^2 - 8x - 2 = 0$ খ. $x^2 - 2x - 15 = 0$
গ. $x^2 + 15x + 12 = 0$ ঘ. $x^2 + 12x + 8 = 0$

83. $\alpha + \beta = 3, \alpha^3 + \beta^3 = 7$ হলে α ও β মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [কুয়েট ১১-১৩]
ক. $x^2 - 3x + 7 = 0$ খ. $9x^2 - 27x + 20 = 0$
গ. $9x^2 - 20x + 27 = 0$ ঘ. $3x^2 - 21x + 20 = 0$

84. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির মূল দুইটি সমান হবে যদি— [কুয়েট ০৫-০৬; জা. বি. ১৬-১৭]
ক. $b^2 > 4ac$ খ. $b^2 < 4ac$ গ. $b^2 = 4ac$ ঘ. $b = 0$

85. $x^2 - 11x + a = 0$ এবং $x^2 - 14x + 2a = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকলে a এর মান কোনগুলি? [বুয়েট ১১-১২, কুয়েট ০৮-০৯]
ক. 0, 24 খ. 0, −24 গ. 1, −1 ঘ. −1, 1

86. $x^4 + a^2x^2 + a^4 = 0$ এর মূলগুলি— [বুয়েট ০৯-১০]
ক. বাস্তব খ. জটিল গ. মূলদ ঘ. সমান

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $x^2 + 2mx + m = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল α ও β যেখানে $\alpha > \beta$ এবং m একটি অশূন্য ধ্রুবক।
ক. m এর মান কত হলে মূলদ্বয় পরস্পর বাস্তব ও সমান হবে?
খ. $\alpha\beta^{-2}$ ও $\beta\alpha^{-2}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করো।
গ. $x^2 + 5x + 1 = 0$ এবং উদ্দীপকের সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m - \frac{1}{5m} = \frac{13}{5}$

2. দৃশ্যকল্প-I: $2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, α ও β।
দৃশ্যকল্প-II: $ax^2 - bx + c = 0$ ও $ax^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলগুলির মধ্যে কেবল একটি ধ্রুবকের পার্থক্য বিদ্যমান, যেখানে $c \neq b$.
ক. দৃশ্যকল্প-II এ বর্ণিত ১ম সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অনুপাত 4 : 5 হলে দেখাও যে, $20b^2 = 81ac$.
খ. দৃশ্যকল্প-I এর আলোকে $\frac{1}{\alpha} - \beta$ ও $\frac{1}{\beta} - \alpha$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করো।
গ. দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $b + c + 4a = 0$.

3. একটি ত্রিঘাত সমীকরণ $3x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$ এর মূলগুলি α, β ও γ এবং অপর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ এর মূলদ্বয় p ও q।
ক. বাস্তব সহগবিশিষ্ট এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করো যার একটি মূল $3 - 2i$.
খ. $\Sigma\alpha^2\beta$ নির্ণয় করো।
গ. $cx^2 - 5bx + 25a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে p ও q এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

4. $x^2 + bx - 6b = 0$ ... ... (i)
$x^2 - 2x - b = 0$ ... ... (ii)
এবং $x^2 + 2bx + b^2 - a^2 = 0$ ... ... (iii)
ক. (i) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক – 44 হলে b এর মান নির্ণয় করো।
খ. (i) ও (ii) নং সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে b এর মান নির্ণয় করো।
গ. এমন একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করো যার মূল দুইটি যথাক্রমে (iii) নং সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের ধনাত্মক মান হবে।

5. $mx^2 + nx + l = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
ক. k এর মান কত হলে $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে?
খ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূলদ্বয় β ও γ হলে দেখাও যে, $(m\beta + n)^{-2} + (m\gamma + n)^{-2} = \frac{n^2 - 2lm}{m^2l^2}$।
গ. $l = n$ হলে উদ্দীপক হতে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{n}{m}} = 0$ যেখানে মূলদ্বয়ের অনুপাত a : b।

6. দৃশ্যকল্প-I: $\frac{1}{x} + \frac{1}{g - x} = \frac{1}{h}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর p.
দৃশ্যকল্প-II: $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ এর দুইটি মূলের অনুপাত 3 : 4.
ক. $g = h = 2$ হলে দৃশ্যকল্প-I এ বর্ণিত সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-II এ বর্ণিত সমীকরণের মূলগুলি নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-I হতে দেখাও যে, $g = 2h \pm \sqrt{p^2 + 4h^2}$.

7. দৃশ্যকল্প-I: $2cx^2 + 2(b + c)x + 3b = 2c$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ।
দৃশ্যকল্প-II: $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় u ও v.
ক. $\alpha + \beta = 3, \alpha^3 + \beta^3 = 7$ হলে α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-II এর আলোকে $u + \frac{1}{v}$ এবং $v + \frac{1}{u}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-I হতে দেখাও যে, $b = 2c$ অথবা $4b = 11c$.

8. দৃশ্যকল্প-I: $px^2 + 2x + 1 = 0$ এবং $x^2 + 2x + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α.
দৃশ্যকল্প-II: মূলদ সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি জটিল মূল $\frac{1}{2 + \sqrt{-3}}$

ক. দৃশ্যকল্প-I এ প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয় β ও γ হলে $\beta\gamma^{-1}+\gamma\beta^{-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-II হতে দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-I হতে দেখাও যে, p এর মান 1 অথবা – 3.

9. দৃশ্যকল্প-I: $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ.

দৃশ্যকল্প-II: $\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}=0$ যেখানে $p, q, r \in \mathbb{R}$.

ক. 2 ও –3 মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-I হতে দেখাও যে, $\Sigma(\alpha-\beta)^2=\frac{18(b^2-ac)}{a^2}$.

গ. প্রমাণ কর যে, দৃশ্যকল্প-II এ বর্ণিত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে।

10. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 5 মি., 4মি. এবং 3মি.। প্রতিটি মাত্রার দৈর্ঘ্য x মি. বৃদ্ধি করায় এর আয়তন দ্বিগুণ হলো। আয়তনের সম্পর্কটি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ যার মূলগুলো α, β ও γ।

ক. $x^2+2x+k=0$ সমীকরণের একটি মূল 2 হলে অপর মূল কত?

খ. আয়তাকার ঘনবস্তুর প্রতিটি মাত্রা y পরিমাণ বৃদ্ধি করলে এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 148 বর্গ মি. হয়। y এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

11. উচ্চ মাধ্যমিক গণিত দ্বিতীয় পত্র পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে $px^2+qx+1=0$ সমীকরণটি সমাধান করতে বলা হলো। কিন্তু রফিক উত্তরপত্রে ভুল করে $qx^2+px+1=0$ সমাধান করল। খাতা দেখার সময় শিক্ষক দেখলেন অঙ্কটি ভুল হলেও তার একটি মূল সঠিক।

ক. $4x(x^2-1)+2x+5=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\sum\alpha\beta$ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $p+q+1=0$.

গ. রফিক নির্ণিত ভুল সমাধানদ্বয় নির্ণয় কর।

12. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ .... (i) এবং $ax^2+bx+c=0$ .... (ii)

ক. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের মূল দুইটির অন্তর একক হলে p^2+4q^2 এর মান বের কর।

খ. (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $|\alpha+\beta|$ এবং $|\alpha-\beta|$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ বের কর।

গ. (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় p, q হলে $cx^2-2bx+4a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p, q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

13. $x^2-ax+b=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

ক. মূলদ সহগবিশিষ্ট এমন একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $1+\sqrt{2}$

খ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে দেখাও যে, $\frac{b}{a-\alpha}$ এবং $\frac{b}{a-\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $x^2-ax+b=0$

গ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $a^2-4b-1=0$

14. $px^2+qx+r=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ক. $2x^2-2(p+q)x+p^2+q^2=0$ সমীকরণের মূলগুলো কেমন হবে যদি $p \neq q$ হয়?

খ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $\alpha-\beta=1$ হলে দেখাও যে, $p^2-q^2+4pr=0$

গ. উদ্দীপকের সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং α^2 হলে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{p-q}{r-q}\right)^3=\frac{p}{r}$

▶ সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্ন

15. দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 + (-1)^n px + q = 0$ ... ... (i)
$(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ ... ... (ii) *[অধ্যায়-৩ ও ৪ এর সমন্বয়ে]*
ক. $z = x + iy$ হলে $|z-5| = 3$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
খ. (ii) নং সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব ও সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর।
গ. (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর 1 হলে প্রমাণ কর যে, $p^2 + 4q^2 = (1+2q)^2$ যখন $n = 0$

16. $x^2 + ax + b = 0$ .... (i) এবং $x^2 + bx + a = 0$ .... (ii) *[অধ্যায়-৩ ও ৪ এর সমন্বয়ে]*
ক. $\frac{i}{4+i}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর।
খ. (i) এবং (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূল α হলে দেখাও যে, $a + b + 1 = 0$
গ. (i) এবং (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূল ব্যতিত অপর মুল দুইটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর।

আরও সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

17. $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$ এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৯]
ক. $(2 + 2\sqrt{3}i)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।
খ. $F(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপর মূলটির বর্গের সমান হলে, m এর মান নির্ণয় কর।
গ. $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ কর যে, $(2m-r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$

18. $f(x) = px^2 + qx + r$ এবং $g(x) = rx^2 + qx + p$. [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]
ক. m এর মান কত হলে, $(m-1)x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে?
খ. উদ্দীপক থেকে $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $rx^2 + 4qx + 16p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
গ. উদ্দীপকের $f(x) = 0$ এবং $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে p, q এবং r এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

19. $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r$. [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]
ক. $m = 0$ এবং $n = q = r = 1$ হলে, $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।
খ. $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum\alpha^3$ নির্ণয় কর।
গ. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $P(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির সমষ্টি ও অন্তরফলের পরম মান হবে, যেখানে, $m = 0, n = 2, q = 1, r = -1$.

20. উদ্দীপক : $z = -2 + 2i$ একটি জটিল সংখ্যা এবং
$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ একটি বহুপদী রাশি। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]
ক. z এর মূখ্য আর্গুমেন্ট বের কর।
খ. $f(x) = 0$ বহুপদী সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. $\overline{z} = (a^2 + 2) + ib$ সমীকরণটির মূল a এবং b এর প্রকৃতি নিরূপণ কর।

21. $x^2 + px + q = 0, p, q \neq 0$ এর মূলদ্বয় u এবং v;
$2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$. [যশোর বোর্ড-২০১৯]
ক. $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে m এর মান কত?
খ. দেখাও যে, $qx^2 + px + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$।
গ. উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

22. যদি $f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $g(x) = cx^2 + bx + a$ হয় তবে, [ঢাকা বোর্ড-২০১৭]

ক. $f(x) = 0$ এর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

খ. $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α, β হলে দেখাও যে,

$$(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}.$$

গ. $f(x) = 0$ এর একটি মূল, $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$.

23. দৃশ্যকল্প-১: $z = 2 + 4i - i^2$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]

দৃশ্যকল্প-২: $px^2 + qx + r = 0$

ক. এককের জটিল ঘনমূল ω, ω^2 হলে $(-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$ সঠিক কী না যাচাই কর। যেখানে $\bar{z}$ হচ্ছে z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লেখিত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

24. $mx^2 + nx + l = 0, lx^2 + nx + m = 0$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

ক. উৎপাদকের সাহায্যে $2x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

খ. উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m + l = \pm n$

গ. উদ্দীপকের ১ম সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β হলে $ml(x^2 + 1) - (n^2 - 2ml)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

25. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

ক. উদ্দীপকের সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত?

খ. $c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0$ এর মূল দুইটি α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$

26. $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ একটি জটিল রাশি। [সিলেট বোর্ড-২০১৭]

ক. $x + iy = \sqrt{\frac{p + iq}{r + is}}$ হলে দেখাও $(x^2 + y^2)^2 = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}$

খ. $\text{Arg}(\sqrt{z})$ নির্ণয় কর।

গ. কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল z এবং মূলগুলির গুণফল 80 হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

1. **(i)** 6; **(iii)** –3, 2 **(iv)** $\frac{-5 \pm \sqrt{97}}{4}$

2. **(i)** **(a)** সমান, বাস্তব ও মূলদ, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; **(b)** বাস্তব ও অসমান, 2, 3; **(c)** জটিল ও অসমান, $1 \pm i$;

(d) বাস্তব, মূলদ ও অসমান, $-2, \frac{1}{2}$; **(e)** বাস্তব, অমূলদ ও অসমান, $3 \pm \sqrt{2}$।

3. **(i)** 2 অথবা 10; **(ii)** $-\frac{7}{6}$; **(iii)** $m < \frac{1}{3}, m = \frac{1}{3}, m > \frac{1}{3}$;

(iv) $k = 1$ অথবা 85; $k > 85$ অথবা $k < 1, 1 < k < 85$

(v) -2 অথবা 3; **(vi)** $k = 4, -1$; **(vii)** $k = \pm 8$; **(viii)** 2 বা 10;

4. **(viii)** $p = 2q \pm \sqrt{r^2 + 4q^2}$

5. **(i)** $-\dfrac{2}{\alpha}, -\dfrac{2}{\beta}$ **(ii)** $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$ **(iii)** $b = 3$ **(iv)** $p^2 - 2(q - q_1) - pp_1$

6. **(i)** $(a - b + c)x^2 - (2a - b)x + a = 0$ **(ii)** $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$
(iii) $2a\sqrt{a}\,x^2 - (2a\sqrt{c} - b\sqrt{a})x - b\sqrt{c} = 0$ **(iv)** $ac\,x^2 + b(c + a)x + (c + a)^2 = 0$
(v) $c^2x^2 - c(a - b)x - ab = 0$ **(vi)** $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$
(vii) $c^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x + a^3 = 0$ **(viii)** $(25ac - 4b^2)x^2 - 3abx + a^2 = 0$
(ix) $a^3x^2 - a(b^2 - 2ac - ab)x + (ac^2 + a^2c - b^3 + 3abc) = 0$ **(x)** $cx^2 + 2bx + 4a = 0$

7. **(i)** $x^2 - 2(a^2 - 2b)x + a^2(a^2 - 4b) = 0$
(ii) $2x^2 + (2p - q)x - pq = 0$
(iii) $x^2 - bx - a^2 = 0$
(iv) $px^2 - 4qx + r = 0$
(v) $289x^2 - 289x + 42 = 0$
(vi) $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$
(vii) $x^2 - 2\,(a + b)\,x + 4ab = 0$
(viii) $3x^2 + 2x - 6 = 0$
(ix) $x^2 + x + 1 = 0$
(x) $x^2 - px + q = 0$
(xii) (a) $\dfrac{q^2 - 2pr}{p^2} - \dfrac{q}{r}$; **(b)** $\dfrac{1}{p^2}(p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - qr)$;
(xvi) (a) $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$ **(b)** $13x^2 - 4x + 1 = 0$ **(c)** $x^2 - 6x + 14 = 0$ **(d)** $x^2 - 4x + 7 = 0$
(xvii) $cx^2 + b(c + 1)x + (c + 1)^2 = 0$; **(xviii)** $x^2 - 5x + 3 = 0$; **(xix)** $x^2 - 4x + 16 = 0$;
(xx) $3x^2 - 19x + 3 = 0$; **(xxi)** $ax^2 + 2bx + 2a = 0$;

8. **(iii)** 0 অথবা 3 অথবা 8
(iv) $p = 1, -3$, সাধারণ মূল 1.
(viii) 9; 7;

9. **(i)** $3, \pm 4$ **(ii)** $-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$; **(iii)** $\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}, -4$; **(iv)** $2, \dfrac{1}{2}, -5$; **(v)** $\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{3}$; **(vi)** $\dfrac{2}{3}, 1, -2$;
(vii) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}$; **(viii)** $4, 2, \dfrac{4}{3}$; **(ix)** $1 \pm \sqrt{3}, 5$; **(x)** $2 \pm i, \dfrac{1}{2}$; **(xi)** $1, 2 \pm 3i$; **(xii)** $\pm 2i, -1$;

10. **(i)** $x^3 - x^2 - 4x - 80 = 0$ **(ii)** $1, 2, 5 - 2i$ **(iii)** $1 \pm i, 2, 1$

11. **(i)** $\dfrac{9(ac - b^2)}{a^2}$; **(ii)** $\dfrac{a^2 + 9b^2 + 9c^2 + d^2 - 6ac - 6bd}{a^2}$

12. **(a) (i)** $\dfrac{-2p^2q + 4pr + 2q^2}{pq - r}$; **(ii)** $\dfrac{pq - 3r}{r}$; **(iii)** $q^2 - 2pr$;
(iv) $q(p^2 - 2q) - pr$; **(v)** $\dfrac{3r - pq}{r^2}$; **(vi)** $3pq - p^3 - 3r$ **(b)** $-\dfrac{n^3}{m^3} + \dfrac{3nq}{m^2} - \dfrac{3r}{m}$;

13. **(i)** $\dfrac{1}{r^2}(q^2 - 2rp)$; **(ii)** $\dfrac{1}{r^2}(p^2 - 2q)$; **(iii)** $p^2 - 2q$; **(iv)** $\dfrac{pq - 3r}{r^2}$; **(v)** $pq - r$;

14 **(i)** $-6q$; **(ii)** $2q^2$; **(iii)** $\dfrac{3r^2 + q^3}{r^2}$

15. **(i)** $2p^3 - 9pq + 27r = 0$; **(ii)** $ac^3 = b^3d$; **(iii)** $2b^3 + a^2d - 3abc = 0$; **(iv)** $pq = r$; **(v)** 1, 3, 5

বহুনির্বাচনি

1. গ	2. ঘ	3. খ	4. খ	5. খ	6. ক	7. গ	8. গ	9. ঘ	10. গ	11. খ	12. খ	13. ঘ	14. খ
15. গ	16. ঘ	17. ঘ	18. খ	19. ঘ	20. খ	21. গ	22. ক	23. গ	24. ক	25. ঘ	26. ক	27. খ	28. গ
29. ক	30. ক	31. ক	32. খ	33. খ	34. ক	35. খ	36. ক	37. গ	38. ক	39. ঘ	40. গ	41. খ	42. গ
43. খ	44. ক	45. গ	46. খ	47. খ	48. খ	49. গ	50. ঘং	51. খ	52. ঘ	53. ক	54. গ	55. ঘ	56. গ
57. খ	58. গ	59. খ	60. ক	61. খ	62. খ	63. ঘ	64. গ	65. গ	66. খ	67. ক	68. ঘ	69. গ	70. ঘ
71. খ	72. গ	73. খ	74. গ	75. খ	76. ক	77. ঘ	78. ক	79. ঘ	80. ঘ	81. ঘ	82. খ	83. খ	84. গ
85. ক	86. খ												

সৃজনশীল

1. **ক.** $m = 1$; **খ.** $mx^2 - 2m(3 - 4m)x + 1 = 0$
2. **খ.** $2x^2 + 15x - 9 = 0$
3. **ক.** $x^2 - 6x + 13 = 0$; **খ.** $\frac{49}{9}$; **গ.** $-\frac{5}{q}, -\frac{5}{p}$
4. **ক.** $b = -22, -2$; **খ.** $b = 0, 8, 3$; **গ.** $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$
5. **ক.** $k = 3, -2$
6. **ক.** জটিল ও অসমান; **খ.** $4, \frac{-3}{2}, -2$
7. **ক.** $9x^2 - 27x + 20 = 0$; **খ.** $4x^2 - 30x + 25 = 0$
8. **ক.** $\frac{4}{p} - 2$; **খ.** $7x^2 - 4x + 1 = 0$
9. **ক.** $x^2 + x - 6 = 0$
10. **ক.** -4; **খ.** 1; **গ.** $-\frac{62}{5}$
11. **ক.** $-\frac{1}{2}$; **গ.** $1, \frac{1}{q}$
12. **ক.** $(2q + 1)^2$ **খ.** $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$; **গ.** $-\frac{2}{q}, -\frac{2}{p}$
13. **ক.** $x^2 - 2x - 1 = 0$
14. **ক.** জটিল
15. **ক.** $(x - 5)^2 + y^2 = 3^2$; **খ.** 2 বা 10;
16. **ক.** $\frac{1}{17} + i\frac{4}{17}$ **গ.** $x^2 + x + ab = 0$
17. **ক.** $x^2 - 4x + 16 = 0$; **খ.** $m = 6, -1$
18. **ক.** $m = 2$ বা 10; **খ.** মূলদ্বয় $\frac{4}{\alpha}$ এবং $\frac{4}{\beta}$; **গ.** $p + r = \pm q$
19. **ক.** সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল এবং অসমান; **খ.** $-\frac{n^3}{m^3} + \frac{3nq}{m^2} - \frac{3r}{m}$; **গ.** $4x^2 - 4x - 3 = 0$
20. **ক.** $\frac{3\pi}{4}$; **খ.** -11; **গ.** a এর মান জটিল ও b এর মান বাস্তব
21. **ক.** 3 অথবা 5; **গ.** $8x^2 - 6x + 1 = 0$

23. ক. -128; **খ.** সঠিক; **গ.** $rx^2 + 2qx + 4p = 0$;

24. ক. $x = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{4}$; **গ.** $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$;

25. ক. $b^2 - 4c$; **খ.** $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$; **গ.** $cx^2 + b(c+1)x + (c+1)^2 = 0$;

26. খ. $-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$; **গ.** $x^3 - x^2 - 4x - 80 = 0$;

পাঠ-১৩ ও ১৪

ব্যবহারিক

4.10 লেখের সাহায্যে সমীকরণ সমাধানের আসন্ন মান

পরীক্ষণ নং 4.10.1	লেখের সাহায্যে সমীকরণের সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: ... ...

সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে (Graphical Method) $2\cos x - e^{x/2} = 0$ সমীকরণটির ধনাত্মক (বা বৃহত্তম) মূল নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মনে করি, $f(x) = 2\cos x - e^{x/2}$; $x \in \mathbb{R}$

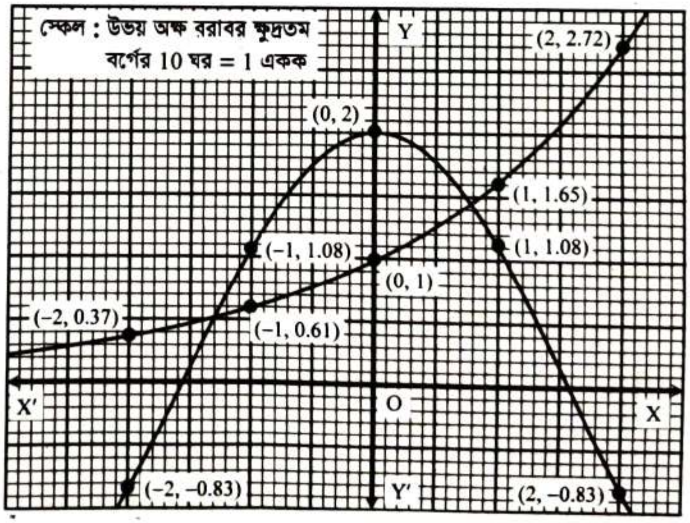
প্রদত্ত সমীকরণ, $2\cos x - e^{x/2} = 0 \Rightarrow h(x) - g(x) = 0$ যেখানে $h(x) = 2\cos x$ এবং $g(x) = e^{x/2}$

$h(x)$ ও $g(x)$ এর লেখ দুইটি যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর x স্থানাঙ্ক প্রদত্ত সমীকরণের মূল।

উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর ও (v) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

1. x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $2\cos x$ এবং $e^{x/2}$ এর প্রতিসঙ্গী মান নির্ণয় করি। [লক্ষ্য রাখতে হবে যেন ক্যালকুলেটর রেডিয়ান Mode এ থাকে]
2. XOX′ এবং YOY′ কে যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ ধরি।
3. স্কেল: ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 ঘর = 1 একক ধরে বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করি।
4. একটি সরু শীষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে ছক কাগজের বিন্দুগুলি যোগ করে দুইটি লেখ অঙ্কন করি।



5. লেখ দুইটি যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাদের ভুজ বা x স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের মূল নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

x	−2	−1	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
2cosx	−0.83	1.08	2	1.76	1.08	0.14	−0.83	−1.6	−1.98
$e^{x/2}$	0.37	0.61	1	1.28	1.65	2.12	2.72	3.49	4.48

লেখচিত্র হতে পাই, ধনাত্মক মূলের জন্য ছেদবিন্দু x-অক্ষ বরাবর মূলবিন্দুর 7·5 ঘর দূরে অবস্থিত।

কজেই ছেদবিন্দুর ভুজ $= \frac{7\cdot5}{10} = 0\cdot75$

$\therefore$ নির্ণেয় ধনাত্মক মূল $= 0\cdot75$ (প্রায়)

ফলাফল: $x = 0.75$ (প্রায়)

সীমাবদ্ধতা : $2\cos x$ ও $e^{\frac{x}{2}}$ এর লেখ সরলরেখা নয়। লেখের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী মুক্তহস্তে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়েছে।

মন্তব্য: $2\cos x$ ও $e^{\frac{x}{2}}$ এর লেখদ্বয় x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে একবার ছেদ করে। সুতরাং একটি মাত্র ধনাত্মক মূল পাওয়া যাবে।

সতর্কতা: $2\cos x$ ও $e^{\frac{x}{2}}$ এর ছেদবিন্দু সুক্ষ্মভাবে নেয়া হয়েছে।

Bisection Method (সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি): Bisection Method একটি পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি যা নিচের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত।

"যদি $f(x)$ ফাংশন a ও b এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(a).\ f(b) < 0$ অথবা $f(a)$ ও $f(b)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে অন্তত একটি মূল a ও b এর মধ্যে থাকবে।"

মনে করি, $f(a).\ f(b) < 0$ তবে প্রথম আসন্নমান $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ এক্ষেত্রে নিচের দুটি অবস্থা সম্ভব হতে পারে

(i) $f(x_0) = 0$, (ii) $f(x_0) \neq 0$

এখন যদি (i) ঘটে তবে x_0 একটি $f(x) = 0$ এর মূল হবে এবং প্রক্রিয়াটি শেষ হবে।

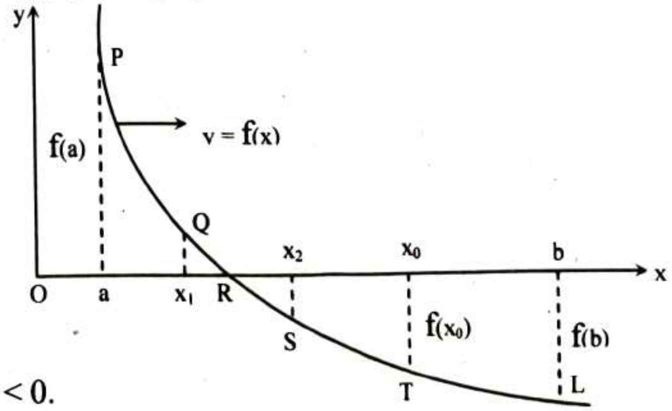
যদি (ii) ঘটে তবে মূলটি x_0 ও b অথবা x_0 ও a এর মধ্যে অবস্থিত হবে যেখানে $f(x_0).\ f(b) < 0$ অথবা $f(x_0).\ f(a) < 0$.

সুতরাং দ্বিতীয় আসন্নমান হবে $x_1 = \dfrac{x_0+b}{2}$ অথবা $x_1 = \dfrac{a+x_0}{2}$

এভাবে নির্ণীত মূলটি চাহিদানুযায়ী সঠিক না হওয়া পর্যন্ত "Bisection method" প্রক্রিয়া পুনরাবৃত্ত করা হয়।

বি. দ্র. Bisection method কে অনেক সময় Binary-Search method বলা হয়।

Bisection method (সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি) এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা



ধরি $y = f(x)$ ফাংশন দ্বারা প্রকাশিত PQRSTL বক্ররেখা x-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং R বিন্দুর ভুজ অর্থাৎ OR একটি $f(x)$-এর মূল।

এখানে P এবং L বিন্দুর ভুজ যথাক্রমে a এবং b লেখচিত্র অনুযায়ী $f(a).\ f(b) < 0$

প্রথম আসন্নমান, $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ (T এর x-স্থানাঙ্ক)

আবার a ও b এর মধ্যে x_0 অবস্থিত এবং $f(a).\ f(x_0) < 0$.

দ্বিতীয় আসন্নমান $x_1 = \dfrac{a+x_0}{2}$ (Q এর x-স্থানাঙ্ক)

আবার a ও x_0 এর মধ্যে x_1 অবস্থিত এবং $f(x_1).\ f(x_0) < 0$.

তৃতীয় আসন্নমান $x_2 = \dfrac{x_1+x_0}{2}$ (S এর x-স্থানাঙ্ক)

সুতরাং পর্যায়ক্রমিক আসন্নমান $x_0, x_1, x_2, \cdots \cdots$ সীমাস্থভাবে R বিন্দুর নিকটবর্তী হবে অর্থাৎ প্রত্যাশিত মূলের দিকে সমকেন্দ্রভিমুখী।

পরীক্ষণ নং 4.10.2	Bisection method প্রয়োগ করে সমীকরণের সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: ... ...

সমস্যা: Bisection method প্রয়োগ করে $x^3 - x - 1 = 0$ এর বাস্তব মূলের আসন্ন মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $f(x) = x^3 - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

আমরা জানি, $f(x)$ ফাংশন a ও b এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(a)$ ও $f(b)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে a ও b এর মধ্যে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল বিদ্যমান। ধরি, মূলটির আসন্ন মান, $x_0 = \frac{a+b}{2}$

উপকরণ: Scientific ক্যালকুলেটর, কাগজ, কলম, পেন্সিল, ইরেজার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

1. x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর প্রতিসঙ্গী (corresponding) মান নির্ণয় করি।
2. খুবই নিকটবর্তী দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b নির্ণয় করি যেন $f(a)$ এবং $f(b)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।
3. a ও b এর গড় মান থেকে মূলের আসন্ন মান নির্ণয় করি।

x	f(x)	সিদ্ধান্ত
$a = 1$	$f(1) = -1 < 0$	1 এবং 2 এর মধ্যে অন্তত একটি বাস্তব মূল আছে।
$b = 2$	$f(2) = 5 > 0$	
$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$	$f(1.5) = 0.875 > 0$	মূলটি 1 এবং 1.5 এর মধ্যে আছে।
$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$	$f(1.25) = -0.2968 < 0$	মূলটি 1.5 এবং 1.25 এর মধ্যে আছে।
$x_2 = \frac{1.5+1.25}{2} = 1.375$	$f(1.375) = 0.2246 > 0$	মূলটি 1.25 এবং 1.375 এর মধ্যে আছে।
$x_3 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125$	$f(1.3125) = -0.05151 < 0$	মূলটি 1.375 এবং 1.3125 এর মধ্যে আছে।
$x_4 = \frac{1.375+1.3125}{2} = 1.34375$	$f(1.34375) = 0.08261 > 0$	মূলটি 1.3125 এবং 1.34375 এর মধ্যে আছে।
$x_5 = \frac{1.3125+1.34375}{2} = 1.328125$	$f(1.328125) = 0.01457 > 0$	মূলটি 1.3125 এবং 1.328125 এর মধ্যে আছে।
$x_6 = \frac{1.3125+1.328125}{2} = 1.3203125$		

ফলাফল: দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মূলের আসন্ন মান = 1.32

সীমাবদ্ধতা: কোনো সমীকরণের একাধিক বাস্তব মূল থাকলেও এই পদ্ধতিতে একটি নির্দিষ্ট ব্যবধিতে একটি বাস্তব মূল নির্ণয় করা যায়।

Newton Raphson Method: মনে করি, $f(x) = 0$ সমীকরণের $x_1 = x_0 + h$ মূলের আদি আসন্নমান x_0, যেখানে h ক্ষুদ্র সংখ্যা।

$$\therefore\ f(x_1) = f(x_0 + h) = 0$$

টেলর (Taylor) ধারায় বিস্তৃতি করে পাই, $f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots \cdots = 0$

যেহেতু h খুব ক্ষুদ্র, সুতরাং h এর দ্বিতীয় ও অধিক মাত্রার পদ উপেক্ষা করি।

$\therefore f(x_0) + hf'(x_0) = 0 \Rightarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ যখন $f'(x_0) \neq 0$

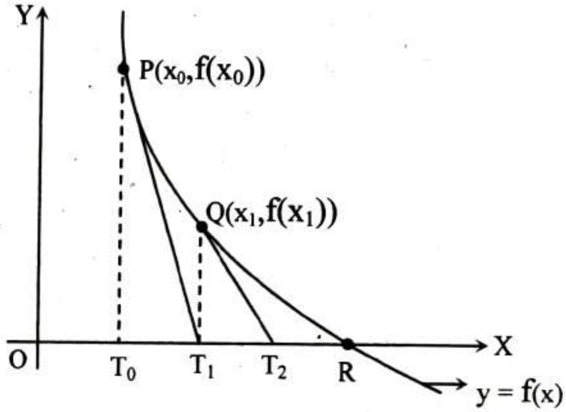
সুতরাং প্রথম আসন্নমান, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

পর্যায়ক্রমিক আসন্নমান $x_2, x_3, \cdots \cdots, x_{n+1}$ হতে পাওয়া যায়, যেখানে $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \cdots \cdots$

ইহাই Newton Raphson সূত্র।

বি. দ্র. যদি $f'(x_0) = 0$ হয় তবে Newton Raphson method প্রয়োগযোগ্য হবে না।

Newton Raphson method এর জ্যামিতিক তাৎপর্য:



ধরি $y = f(x)$ ফাংশন দ্বারা প্রকাশিত PQR বক্ররেখা x-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং R বিন্দুর ভুজ অর্থাৎ OR একটি $f(x) = 0$ এর মূল।

আবার ধরি, $OT_0 = x_0$ আদি আসন্নমান। P বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকি যা x-অক্ষকে T_1 বিন্দুতে ছেদ করে। আবার লেখের উপরস্থ T_1 এর অনুসঙ্গী বিন্দু Q তে স্পর্শক আঁকি যা x-অক্ষকে T_2 বিন্দুতে ছেদ করে। প্রক্রিয়াটি চলমান রাখি এবং মনে করি P ও Q এর মধ্যে লেখচিত্রের বক্রতার চিহ্ন পরিবর্তন হয় না।

সুতরাং $T_0, T_1, T_2, \cdots \cdots$ বিন্দুসমূহ সীমাস্থভাবে R নিকটবর্তী হবে। যেহেতু $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল OR, সেহেতু $OT_0, OT_1, OT_2, \cdots \cdots$ প্রত্যাশিত মূলের পর্যায়ক্রমিক আসন্নমান হবে।

এখন $y = f(x)$ ফাংশনের P বিন্দুতে PT_1 স্পর্শকের ঢাল

$$f'(x_0) = \tan\angle PT_1R$$
$$= \tan(\pi - \angle PT_1T_0)$$
$$= -\tan\angle PT_1T_0$$
$$= -\frac{PT_0}{T_0T_1}$$
$$= -\frac{f(x_0)}{T_0T_1}$$

$$\therefore T_0T_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

সুতরাং $OT_1 = OT_0 + T_0T_1$

$$= x_0 + T_0T_1$$
$$= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 \text{ (প্রথম আসন্নমান)}$$

আবার $y = f(x)$ ফাংশনের Q বিন্দুতে QT_2 স্পর্শকের ঢাল

$$f'(x_1) = \tan\angle QT_2R$$
$$= \tan(\pi - \angle QT_2T_1)$$
$$= -\tan\angle QT_2T_1$$
$$= \frac{QT_1}{T_1T_2} = -\frac{f(x_1)}{T_1T_2}$$

$\therefore\ T_1T_2 = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

সুতরাং $OT_2 = OT_1 + T_1T_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2$ (দ্বিতীয় আসন্নমান)

অতএব পর্যায়ক্রমিক আসন্নমানসমূহ $x_1, x_2, \cdots$ (অর্থাৎ $OT_1, OT_2, \cdots$) প্রত্যাশিত মূলের দিকে সমকেন্দ্রভিমুখী।

পরীক্ষণ নং 4.10.3	Newton-Raphson method প্রয়োগ করে সমীকরণের মূলের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: ... ...

সমস্যা: Newton-Raphson method প্রয়োগ করে $\cos x - xe^x = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূলের মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব: $y = f(x)$ যদি a, b ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং উক্ত ব্যবধিতে সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল থাকে। Newton Raphson পদ্ধতি অনুসারে মূলটির প্রারম্ভিক অনুমিত মান x_0 (যেখানে $f'(x_0) \neq 0$) হলে মূলের প্রথম আসন্ন মান, $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, দ্বিতীয় আসন্ন মান $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, ...

সাধারণভাবে $(n + 1)$ তম আসন্ন মান, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$ যখন $f'(x_n) \neq 0$

উপকরণ: Scientific ক্যালকুলেটর, কাগজ, কলম, পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

1. মনে করি, $f(x) = \cos x - xe^x$
2. $f(x)$ ফাংশনটিকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f'(x)$ নির্ণয় করি।
   এখানে $f'(x) = -\sin x - e^x - xe^x$
3. ধরি মূল সম্পর্কিত প্রারম্ভিক অনুমান, $x_0 = 0.5$ এখন $f'(0.5) = -\sin(0.5) - e^{0.5} - 0.5e^{0.5} = -2.95 \neq 0$
4. এখানে, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$= x_n - \frac{\cos x_n - x_ne^{x_n}}{-\sin x_n - e^{x_n} - x_ne^{x_n}}$$

$$= \frac{-x_n \sin x_n - x_n e^{x_n} - x_n^2 e^{x_n} - \cos x_n + x_ne^{x_n}}{-\sin x_n - e^{x_n} - x_ne^{x_n}}$$

$$= \frac{x_n \sin x_n + x_n^2 e^{x_n} + \cos x_n}{\sin x_n + e^{x_n} + x_n e^{x_n}} \qquad \cdots\cdots \text{(i)}$$

(i) নং সমীকরণে $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$ বসিয়ে ছকের মাধ্যমে $x_1, x_2, x_3, \cdots \cdots$ মূলগুলি নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

আসন্ন মান, x_{n+1}	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
১ম আসন্ন মান, x_1	$\dfrac{x_0 \sin x_0 + x_0^2 e^{x_0} + \cos x_0}{\sin x_0 + e^{x_0} + x_0e^{x_0}}$ $= \dfrac{0.5 \sin(0.5) + (0.5)^2 e^{0.5} + \cos(0.5)}{\sin(0.5) + e^{0.5} + 0.5 \times e^{0.5}} = 0.51803$

২য় আসন্ন মান, x_2	$\dfrac{x_1 \sin x_1 + x_1^2 e^{x_1} + \cos x_1}{\sin x_1 + e^{x_1} + x_1 e^{x_1}}$ $= \dfrac{0.51803 \times \sin(0.51803) + (0.51803)^2 \times e^{0.51803} + \cos(0.51803)}{\sin(0.51803) + e^{0.51803} + 0.51803 \times e^{0.51803}} = 0.51776$
৩য় আসন্ন মান, x_3	$\dfrac{x_2 \sin x_2 + x_2^2 e^{x_2} + \cos x_2}{\sin x_2 + e^{x_2} + x_2 e^{x_2}}$ $= \dfrac{0.51776 \times \sin(0.51776) + (0.51776)^2 \times e^{0.51776} + \cos(0.51776)}{\sin(0.51776) + e^{0.51776} + 0.51776 \times e^{0.51776}} = 0.51776$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলের আসন্ন মান, $x_3 = 0.5178$ (আসন্ন চার দশমিক পর্যন্ত)

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি বাস্তব মূল $= 0.5178$ (আসন্ন চার দশমিক পর্যন্ত)

সীমাবদ্ধতা : একাধিক বাস্তব মূল বিশিষ্ট সমীকরণে সবক্ষেত্রে কাঙ্খিত মূল পাওয়া যায় না।

মন্তব্য : আসন্ন মূলটি অনুমিত মূল x_0 এর চেয়ে বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম হবে তা নির্ভর করে $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ এর ওপর। $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0$ হলে আসন্ন মূল অনুমিত মূলের চেয়ে ক্ষুদ্রতম এবং $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0$ হলে আসন্নমূল অনুমিত মূলের চেয়ে বৃহত্তম হবে।

সতর্কতা : $f(x)$ ফাংশনে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বিদ্যমান থাকলে ক্যালকুলেটর রেডিয়ান Mode এ নিতে হবে।

কাজ: **1.** Bisection method প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্নমান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। (i) $x^3 - x - 4 = 0$; (ii) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$; (iii) $x^2e^x - 17 = 0$

2. পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি (Newton-Raphson method) প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূলের মান আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।
(i) $2x^3 - 11x^2 - 10x - 1 = 0$; **(ii)** $x - \sin x - 2 = 0$; **(iii)** $xe^x - 3 = 0$

3. **(i)** লৈখিক পদ্ধতিতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ সমীকরণের সমাধান।
(ii) লেখের সাহায্যে $y = 8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।
(iii) $(x-1)^2(x+3) = 0$ সমীকরণের লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর।

মৌখিক প্রশ্ন

1. বহুপদী ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।
2. একচলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের লেখের আকৃতি কীরূপ?
3. $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি অমূলদ মূল $1 + \sqrt{3}$ হলে অপরটি কত?
4. $f(a)$ ও $f(b)$ এর চিহ্ন বিপরীত হলে আমরা কি সিদ্ধান্তে আসতে পারি?
5. $f(a)$ এবং $f(b)$-এর চিহ্ন একই হলে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়?
6. নিউটন রাফসন পদ্ধতি কী?
7. নিউটন রাফসন পদ্ধতিতে প্রারম্ভিক অনুমিত মূল এর শর্ত কী?