বিন্যাস ও সমাবেশ

প্রশ্নমালা V A

1. সমাধান :

(a) দেওয়া আছে, ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5:12 \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = 5:12$ [রা.'০৫]

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-2).(n-3).(n-4)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-2).(n-3)}{(n+1)n} = \frac{5}{12} \Rightarrow 12(n^2-5n+6) = 5(n^2+n) \Rightarrow 12n^2 - 5n^2 - 60n - 5n + 72 = 0$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 65n + 72 = 0 \Rightarrow 7n^2 - 56n - 9n + 72 = 0 \Rightarrow 7n(n-8) - 9(n-8) = 0$$

$\Rightarrow (n-8)(7n-9) = 0 \Rightarrow n = 8, \frac{9}{7}$. কিন্তু n ভগ্নাংশ হতে পারেনা। $\therefore n = 8$

(b) দেওয়া আছে, $4 \times {}^{n}P_3 = 5 \times {}^{n-1}P_3 \Rightarrow 4.\frac{n!}{(n-3)!} = 5\frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$ [কু.'০৫]

$$\Rightarrow 4.\frac{n.(n-1)!}{(n-3).(n-4)!} = 5\frac{(n-1)!}{(n-4)!} \Rightarrow 4.\frac{n}{n-3} = 5 \Rightarrow 5n - 15 = 4n \quad \therefore n = 15 \text{ (Ans.)}$$

(c) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে n- সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে প্রত্যেকবার যেকোন 3টিকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে 3টি শূন্যস্থান যত রকম ভাবে পূরণ করা যায় তাই হবে n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যার সমান ।

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন একটিকে বসিয়ে প্রথম শূন্যস্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। প্রথম শূন্যস্থানটি n প্রকারের যেকোন এক উপায়ে পূরণ করার পর দ্বিতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস দ্বারা $(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায় । যেহেতু প্রথম শূন্য স্থানটি পূরণকরার প্রত্যেক উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় স্থান পূরণের $(n-1)$ সংখ্যক সংযোগ করা যায়, সুতরাং প্রথম দুইটি শূন্য স্থান একত্রে $n(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে। অর্থাৎ ${}^{n}P_2 = n(n-1)$.

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন দুইটি দ্বারা প্রথম ও দ্বিতীয় শূন্য স্থান পূরণ করার পর তৃতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস দ্বারা $(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রথম তিনটি স্থান একত্রে মোট $n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায় । অর্থাৎ ${}^{n}P_3 = n(n-1)(n-2)$.

2 **'COURAGE' শব্দটির বর্ণগুলো নিয়ে কতগুলো বিন্যাস তৈরি করা করা যায়, যাদের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকবে?**

সমাধান ঃ 'COURAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বিভিন্ন অক্ষর আছে যাদের 4টি স্বরবর্ণ । প্রথম স্থানটি এই 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণে যেকোনো একটি দ্বারা ${}^{4}P_1 = 4$ প্রকারে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(7-1)$ অর্থাৎ , 6টি স্থান বাকি 6টি ভিন্ন অক্ষর দ্বারা $6! = 720$ প্রকারে পূরণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 720 = 2880$

3. **(a) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে (p + q) সংখ্যক জিনিসের p সংখ্যক জিনিস এক জাতীয় এবং বাকীগুলো সব ভিন্ন হলে, এদের সবগুলোকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ মনে করি , নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x । এই x সংখ্যক বিন্যাসের যেকোন একটির অন্তর্গত p সংখ্যক এক জাতীয় জিনিসের স্থলে p সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস বসানো হলে অন্যদের স্থান পরিবর্তন না করে কেবল তাদের

পাঁচ স্থানের যেকোনো একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপাযে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা অযুত) 4! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে। (১)

$\therefore$ পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 4! \times (1+3+5+7+9)$
$= 24 \times 25 = 600$ (১)

$\therefore$ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 600\times1 + 600\times10 + 600\times100 + 600\times1000 + 600\times10000$ (১)
$= 600(1+10+100+1000+10000) = 600 \times 11111 = 6666600$ (Ans.)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (5-1)! \times (1+3+5+7+9) \times 11111 = 24 \times 25 \times 11111 = 6666600$]

(b) কোনো অঙ্ক কোনো সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1 , 3 , 5 , 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 1+3+5+7+9 = 25$ (১)

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি $^4P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে $^4P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়। (১)

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি $= {^4P_1}(1+3+5+7+9)$
$= 25 \times {^4P_1} = 100$ (১)

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {^4P_1} \times 10 + 25 \times {^4P_1} \times 1$ [যেমন $26 = 2 \times 10 + 6 \times 1$]
$= 25 \times {^4P_1}\ (10+1) = 25 \times {^4P_1} \times 11 = 1100$ (১)

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {^4P_2} \times 111 = 25 \times 12 \times 111 = 33300$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {^4P_3} \times 1111 = 25 \times 24 \times 1111 = 666600$

পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {^4P_4} \times 11111 = 25 \times 24 \times 11111 = 6666600$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 25 + 1100 + 33300 + 666600 + 6666600 = 7367625$ (১)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (1+3+5+7+9)(1 + 11 \times {^4P_1} + 111 \times {^4P_2} + 1111 \times {^4P_3} + 11111 \times {^4P_4})$]

প্রশ্নমালা VI B

1. (a) দেওয়া আছে, $^{2n}C_r = {^{2n}C_{r+2}} \Rightarrow r + r + 2 = 2n$ [$\because$ $^nC_x = {^nC_y}$ হলে, $x + y = n$]
$\Rightarrow 2r = 2(n-1) \quad \therefore r = n-1$ (Ans.)

(b) দেওয়া আছে, $^nC_r : {^nC_{r+1}} : {^nC_{r+2}} = 1 : 2 : 3$

১ম এবং ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই, $^nC_r : {^nC_{r+1}} = 1 : 2 \Rightarrow \frac{^nC_r}{^nC_{r+1}}\ \frac{1}{2} \Rightarrow 2\ {^nC_r} = {^nC_{r+1}}$

$$\Rightarrow 2\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}\Rightarrow 2\frac{1}{r!(n-r)(n-r-1)!}=\frac{1}{(r+1).r!(n-r-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n-r}=\frac{1}{r+1}\Rightarrow n-r=2r+2\Rightarrow n=3r+2 \cdots\cdots\cdots(1)$$

২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই , ${}^{n}C_{r+1}:{}^{n}C_{r+2}=2:3\Rightarrow 3.{}^{n}C_{r+1}=2.{}^{n}C_{r+2}$

$$\Rightarrow 3.\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=2.\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$$

$$\Rightarrow 3.\frac{1}{(r+1)!(n-r-1).(n-r-2)!}=2.\frac{1}{(r+2).(r+1)!(n-r-2)!}\Rightarrow\frac{3}{n-r-1}=\frac{2}{r+2}$$

$\Rightarrow 2n-2r-2=3r+6\Rightarrow 2n=5r+8\Rightarrow 2(3r+2)=5r+8$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6r+4=5r+8\Rightarrow r=4$

(1) হতে আমরা পাই , $n=3.4+2=14$ $\therefore r=4$, $n=14$ (Ans.)

(c) দেখাও যে, ${}^{n}C_{r}={}^{n-2}C_{r}+2\,{}^{n-2}C_{r-1}+{}^{n-2}C_{r-2}$,যখন $n>r>2$.

প্রমাণ : ${}^{n-2}C_{r}+2\,{}^{n-2}C_{r-1}+{}^{n-2}C_{r-2}=({}^{n-2}C_{r}+{}^{n-2}C_{r-1})+({}^{n-2}C_{r-1}+{}^{n-2}C_{r-2})$

$={}^{n-2+1}C_{r}+{}^{n-2+1}C_{r-1}={}^{n-1}C_{r}+{}^{n-1}C_{r-1}$ $[\because {}^{n}C_{r}+{}^{n}C_{r-1}={}^{n+1}C_{r}]$

$={}^{n-1+1}C_{r}={}^{n}C_{r}$

$\therefore {}^{n}C_{r}={}^{n-2}C_{r}+2\,{}^{n-2}C_{r-1}+{}^{n-2}C_{r-2}$

(d) দেখাও যে, ${}^{n+2}C_{r}={}^{n}C_{r}+2\,{}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_{r-2}$,যখন $n>r>2$.

প্রমাণ : ${}^{n}C_{r}+2\,{}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_{r-2}=({}^{n}C_{r}+{}^{n}C_{r-1})+({}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_{r-2})$

$={}^{n+1}C_{r}+{}^{n+1}C_{r-1}={}^{n+1+1}C_{r}$ $[\because {}^{n}C_{r}+{}^{n}C_{r-1}={}^{n+1}C_{r}]$

$\therefore {}^{n+2}C_{r}={}^{n}C_{r}+2\,{}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_{r-2}$

2. **(a) 'LOGARITHMS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ কত প্রকারে বাছাই করা যায় ?**

সমাধান : 'LOGARITHMS' শব্দটিতে মোট 10টি বিভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ।

7টি ব্যঞ্জনবর্ণ থেকে প্রতিবারে 3টি ${}^{7}C_{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ উপায়ে এবং 3টি স্বরবর্ণ থেকে প্রতিবারে 2টি ${}^{3}C_{2}$ $=3$ উপায়ে বাছাই করা যায়। অতএব, প্রতিবারে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ বাছাই সংখ্যা $=35\times3=105$

(b) 'DEGREE' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 4টি বর্ণ নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে ? [য.'০৭,'১৩; রা.'১১]

সমাধান : ' DEGREE ' শব্দটিতে 3টি E সহ মোট 6টি বর্ণ আছে ।

সবগুলোই বর্ণ ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $={}^{4}C_{4}=1$ [∵ ভিন্ন বর্ণ 4টি]

2 টি E এবং অন্য 2টি ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $={}^{3}C_{2}={}^{3}C_{1}=3$ [∵ E ব্যতীত ভিন্ন বর্ণ 3টি]

3টি E এবং আরেকটি অন্য বর্ণ এরূপ বাছাই সংখ্যা $={}^{3}C_{1}=3$

∴ নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $=1+3+3=7$ (Ans.)

3. **(a) 4 জন ভদ্র মহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনের একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যেতে পারে, যাতে অন্ততঃ একজন ভদ্র মহিলা থাকবে?** [য.'০২; মা.বো.'১৩]

সমাধান ঃ 5 জনের কমিটি নিম্নরূপে গঠন করা যায় –

ভদ্র মহিলা (4)	অন্যান্য (6)	কমিটি গঠনের উপায়
1	4	$^4C_1 \times {}^6C_4 = 4 \times 15 = 60$
2	3	$^4C_2 \times {}^6C_3 = 6 \times 20 = 120$
3	2	$^4C_3 \times {}^6C_2 = 4 \times 15 = 60$
4	1	$^4C_4 \times {}^6C_1 = 1 \times 6 = 6$

$\therefore$ কমিটি গঠনের মোট উপায় = $60 + 120 + 60 + 6 = 246$

[বি. দ্র. কমিটি গঠনের মোট উপায় = $\sum_{i=1}^{4} {}^4C_i \times {}^6C_{5-i} = {}^4C_1 \times {}^6C_4 + {}^4C_2 \times {}^6C_3 + {}^4C_3 \times {}^6C_2$
$+ {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 246$]

3. **(b) 6 জন বিজ্ঞান ও 4 জন কলা বিভাগের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। বিজ্ঞানের ছাত্রদেরকে সংখ্যা গরিষ্ঠতা দিয়ে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে ?** **[য.'০৬,'১২; কু.'০৯; ব.,চ.'১৩]**

সমাধান ঃ নিম্নরূপে 6 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (6)	কলা বিভাগের ছাত্র (4)	কমিটি গঠনের উপায়
6	0	$^6C_6 = 1$
5	1	$^6C_5 \times {}^4C_1 = 6 \times 4 = 24$
4	2	$^6C_4 \times {}^4C_2 = 15 \times 6 = 90$

$\therefore$ $(1 + 24 + 90)$ অর্থাৎ, 115 প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে ।

(c) 5 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলা বিভাগের ছাত্রের মধ্য থেকে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। যদি প্রত্যেক কমিটিতে (i) অন্ততঃ একজন বিজ্ঞানের ছাত্র থাকে, (ii) অন্ততঃ একজন বিজ্ঞান ও একজন কলা বিভাগের ছাত্র থাকে, তাহলে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ **(i)** নিম্নরূপে 4 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (5)	কলা বিভাগের ছাত্র (3)	কমিটি গঠনের উপায়
1	3	$^5C_1 \times {}^3C_3 = 5 \times 1 = 15$
2	2	$^5C_2 \times {}^3C_2 = 10 \times 3 = 30$
3	1	$^5C_3 \times {}^3C_1 = 10 \times 3 = 30$
4	0	$^5C_4 \times {}^3C_0 = 5 \times 1 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $5 + 30 + 30 + 5 = 70$

(ii) নিম্নরূপে 4 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (5)	কলা বিভাগের ছাত্র (3)	কমিটি গঠনের উপায়
1	3	$^5C_1 \times {}^3C_3 = 5 \times 1 = 15$
2	2	$^5C_2 \times {}^3C_2 = 10 \times 3 = 30$
3	1	$^5C_3 \times {}^3C_1 = 10 \times 3 = 30$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $5 + 30 + 30 = 65$

(d) 15 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বোলার এবং 3 জন উইকেট রক্ষক । এদের মধ্য হতে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল কত প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে যাতে অন্ততঃ 4 জন বোলার ও 2 জন উইকেট রক্ষক থাকে? [রা.'১৪]

সমাধান ঃ 11 জনের একটি দল নিম্নরূপে বাছাই করা যায় –

বোলার (5)	উইকেট রক্ষক (3)	অন্যান্য (7)	দল বাছাই করার উপায় সংখ্যা
4	2	5	${}^5C_4 \times {}^3C_2 \times {}^7C_5 = 5 \times 3 \times 21 = 315$
4	3	4	${}^5C_4 \times {}^3C_3 \times {}^7C_4 = 5 \times 1 \times 35 = 175$
5	2	4	${}^5C_5 \times {}^3C_2 \times {}^7C_4 = 1 \times 3 \times 35 = 105$
5	3	3	${}^5C_5 \times {}^3C_3 \times {}^7C_3 = 1 \times 1 \times 35 = 35$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 315 + 175 + 105 + 35 = 630$

4. **(a) প্রতি গ্রুপে 5টি প্রশ্ন আছে এমন দুইটি গ্রুপে বিভক্ত 10 টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থীকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে এবং তাকে কোন গ্রুপ থেকে 4 টির বেশি উত্তর দিতে দেয়া হবে না । সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে?** [য.'০৩]

সমাধান ঃ একজন পরীক্ষার্থী 6টি প্রশ্ন নিম্নরূপে বাছাই করতে পারবে :

১ম গ্রুপ (5)	২য় গ্রুপ (5)	প্রশ্ন বাছাই করার উপায়
2	4	${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50$
3	3	${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10 \times 10 = 100$
4	2	${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 5 \times 10 = 50$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 50 + 100 + 50 = 200$

(b) একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন থেকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। তাকে প্রথম 5 টি থেকে ঠিক 4 টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে? [ব.'০২, '০৬, '০৭]

সমাধান ঃ সে প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি ${}^5C_4 = 5$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 7টি প্রশ্ন থেকে 2টি ${}^7C_2 = 21$ উপায়ে বাছাই করতে পারবে ।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 5 \times 21 = 105$ (Ans.)

5. **(a) সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি. । দেখাও যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32.**

[রা. '০৪,'১০; চ.'০৬, '০৮,'১২; সি.'০৮,'১২; দি.'০৯; ব.'০৮,'১০; য.'০৯]

সমাধান ঃ 7টি সরল রেখা হতে 4টি সরল রেখা বাছাই করার উপায় $= {}^7C_4 = 35$

কিন্তু বাছাই করা 4টি সরল রেখার দৈর্ঘ্যের সেট $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 7\}$ এবং $\{1, 2, 4, 7\}$ হলে, তাদের ক্ষুদ্রতম সরল রেখা তিনটির দৈর্ঘ্যের যোগফল ৪র্থ সরল রেখার দৈর্ঘ্যের বৃহত্তম নয় বলে তাদের দ্বারা কোন চতুর্ভুজ গঠন করা সম্ভব নয় । $\therefore$ নির্ণেয় চতুর্ভুর সংখ্যা $= 35 - 3 = 32$

(b) দেখাও যে, n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n-3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে। আরও দেখা যে, এর কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখা দ্বার $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে। [ঢা.'০৫]

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের nটি কৌণিক বিন্দু আছে এবং দুই বিন্দুর সংযোগে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়। $\therefore$ n টি কৌণিক বিন্দু দ্বারা গঠিত সরল রেখার সংখ্যা $= {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

কিন্তু এদের মধ্যে , বহুভুজের nটি সীমান্ত বাহু কর্ণ নয়।

$\therefore$ কর্ণের সংখ্যা $= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-1-2) = \frac{1}{2}n(n-3)$

দ্বিতীয় অংশ ঃ অসমরেখ তিনটি বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয় ।

$\therefore$ nটি কৌণিক বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{1}{6}\, n(n-1)(n-2)$

$\therefore$ n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n-3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে এবং $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক সংখ্যক ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে।

6. **(a) 10 খানা ও 12 খানা বই এর দুইজন মালিক কতভাবে দুইখানার পরিবর্তে দুইখানা বই পরস্পরের মধ্যে বিনিময় করতে পারবে?**

সমাধান : 10 খানা বই এর মালিক দুইখানা বই ${}^{10}C_2$ উপায়ে 12 খানা বই এর মালিককে দিতে পারবে এবং 12 খানা বই এর মালিক দুইখানা বই ${}^{12}C_2$ উপায়ে 10 খানা বই এর মালিককে দিতে পারবে ।

$\therefore$ তারা ${}^{10}C_2 \times {}^{12}C_2 = 2970$ উপায়ে দুইখানার পরিবর্তে দুইখানা বই পরস্পরের মধ্যে বিনিময় করতে পারবে।

(b) 12 খানা পুস্তকের মধ্যে 5 খানা কত প্রকারে বাছাই করা যায় (i) যাতে দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই থাকবে এবং (ii) যাতে দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই বাদ থাকবে?

সমাধান : (i) দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত রেখে অবশিষ্ট $(12-2)$ অর্থাৎ, 10 খানা পুস্তক হতে বাকি $(5-2)$ অর্থাৎ, 3 খানা পুস্তক বাছাই করা যাবে ${}^{10}C_3 = 120$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 120$

(ii) দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই বাদ দিয়ে অবশিষ্ট $(12-2)$ অর্থাৎ, 10 খানা পুস্তক হতে 5 খানা পুস্তক বাছাই করা যাবে ${}^{10}C_5 = 252$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 252$

(c) দুইজনকে কখনও একত্রে না নিয়ে, 9 জন ব্যক্তি হতে 5 জনকে একত্রে কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : বিশেষ দুইজনের কাউকে না নিয়ে 5 জনকে একত্রে বাছাই করার উপায় $= {}^{9-2}C_5 = {}^7C_5 = 21$

বিশেষ দুইজনের এক জন এবং অন্য 7 জনের 4 জনকে নিয়ে বাছাই করার উপায় $= {}^2C_1 \times {}^7C_4 = 2 \times 35 = 70$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 21 + 70 = 91$

7. **(a) 1 হতে 30 সংখ্যাগুলোর যে তিনটির সমষ্টি জোড় তাদেরকে কত ভাবে বাছাই করা যায়?**

সমাধান ঃ 1 হতে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর 15টি জোড় এবং 15টি বিজোড় । তিনটি জোড় সংখ্যার যোগফল একটি জোড় সংখ্যা এবং দুইটি বিজোড় ও একটি জোড় সংখ্যার যোগফল একটি জোড় সংখ্যা ।

$\therefore$ 15টি জোড় সংখ্যা হতে 3টি জোড় সংখ্যা ${}^{15}C_3 = 455$ উপায়ে বাছাই করা যায় যাদের সমষ্টি একটি জোড় সংখ্যা ।

আবার , 15টি বিজোড় সংখ্যা হতে 2টি বিজোড় সংখ্যা ${}^{15}C_2 = 105$ উপায়ে এবং 15টি জোড় সংখ্যা হতে 1টি জোড় সংখ্যা ${}^{15}C_1 = 15$ উপায়ে বাছাই করা যায়

$\therefore$ 1 হতে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর দুইটি বিজোড় ও একটি জোড় সংখ্যা $105 \times 15 = 1575$ উপায়ে বাছাই করা যায় যাদের সমষ্টি একটি জোড় সংখ্যা ।

$\therefore$ $(455 + 1575)$ বা , 2030 উপায়ে বাছাই করা যায় ।

(b) 3টি শূন্য পদের জন্য 10 জন প্রার্থী আছে। একজন নির্বাচক তিন বা তিনের কম প্রর্থীকে কতভাবে নির্বাচন করতে পারেন? [ঢা.'০৯]

সমাধান ঃ একজন নির্বাচক নিম্নরূপে নির্বাচন করতে পারেন –

তিনি 3 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_3$ বা, 120 উপায়ে ।
তিনি 2 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_2$ বা, 45 উপায়ে ।
তিনি 1 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_1$ বা, 10 উপায়ে ।
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 120 + 45 + 10 = 175$ (Ans)

(c) কোন নির্বাচনে 5 জন পদপ্রার্থী আছেন, তার মধ্যে 3 জনকে নির্বাচন করতে হবে । একজন ভোটার যত ইচ্ছা ভোট দিতে পারেন, কিন্তু যতজন নির্বাচিত হবেন তার চেয়ে বেশি ভোট দিতে পারবেন না । তিনি মোট কতভাবে ভোট দিতে পারবেন ?

সমাধান ঃ একজন ভোটার নিম্নরূপে ভোট দিতে পারেন–
তিনি 1 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন $^5C_1$ বা, 5 উপায়ে ।
তিনি 2 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন $^5C_2$ বা, 10 উপায়ে ।
তিনি 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন $^5C_3$ বা, 10 উপায়ে ।
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 5 + 10 + 10 = 25$ (Ans)

8. (a) 277200 সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $277200 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1$
$\therefore$ 277200 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (4+1)(2+1)(2+1)2^2 - 1 = 179$ (Ans.)

(b) "Daddy did a deadly deed" বাক্যটির বর্ণগুলো হতে যতগুলো সমাবেশ গঠন করা যাবে তার সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ "Daddy did a deadly deed" এ আছে 9 টি d , 3 টি a , 3 টি e , 2 টি y, 1 টি *l* এবং 1 টি *i*
$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $= (9 + 1)(3 + 1)(3 + 1)(2 + 1)2^2 - 1 = 1920 - 1 = 1919$

(c) কোনো পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে হলে 6টি বিষয়ের প্রতিটিতে ন্যূনতম নম্বর পেতে হয়। একজন ছাত্র কত রকমে অকৃতকার্য হতে পারে ?

সমাধান ঃ একজন ছাত্র এক, দুই, তিন , চার, পাঁচ বা ছয় বিষয়ে অকৃতকার্য হতে পারে ।
$\therefore$ ছাত্রটির মোট অকৃতকার্য হওয়ার উপায় $= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$
$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

(d) দেখাও যে, প্রতিটি বিকল্পসহ 8টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থী একটি অথবা একাধিক প্রশ্ন $3^8 - 1$ উপায়ে বাছাই করতে পারে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু প্রতিটি প্রশ্নের বিকল্প প্রশ্ন দেওয়া আছে, প্রতিটি প্রশ্নকে তিন উপায়ে নিষ্পত্তি করা যায়– প্রশ্নটিকে গ্রহণ করে, এর বিকল্প প্রশ্নকে গ্রহণ করে অথবা উভয় প্রশ্নকে গ্রহণ না করে। অতএব, প্রদত্ত 8টি প্রশ্ন নিষ্পত্তি করা যায় 3^8 উপায়ে। কিন্তু এর ভিতর বিকল্পসহ 8টি প্রশ্নের একটিও না নেয়ার উপায়ও অন্তর্ভুক্ত ।
$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 3^8 - 1$

9. একটি OMR সীটের একটি সারিতে 20টি ছোট বৃত্ত আছে। পেন্সিল দ্বারা কমপক্ষে একটি বৃত্ত কতভাবে ভরাট করা যায় ?

সমাধান ঃ 20টি ছোট বৃত্তের কমপক্ষে একটি বৃত্ত ভরাট করার উপায় $= 2^{20} - 1 = 1048575$,[$2^n - 1$ সূত্রের সাহায্যে]

10. (a) 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার কমপক্ষে 1টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং কমপক্ষে 2টি স্বরবর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে কমপক্ষে 1টি বাছাই করা যায় $(2^{21} - 1) = 2097151$ উপায়ে।

5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে কমপক্ষে 2টি বাছাই করা যায় $\sum_{r=2}^{5} {}^5C_r = {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 26$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা = $2097151 \times 26 = 54525926$

(b) 3টি নারিকেল, 4টি আপেল, 2টি কমলা লেবু হতে প্রত্যেক প্রকার ফলের কমপক্ষে একটি করে ফল কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : 3টি নারিকেলের কমপক্ষে একটি $(2^3 - 1)$ উপায়ে, 4টি আপেলের কমপক্ষে একটি $(2^4 - 1)$ উপায়ে এবং 2টি কমলা লেবুর কমপক্ষে একটি $(2^2 - 1)$ উপায়ে বাছাই করা যায়।

$\therefore$ তিন প্রকারের কমপক্ষে একটি করে ফল বাছাই করার উপায় = $(2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^2 - 1) = 315$

11. (a) 9 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে, যার একটিতে সাত জনের বেশি এবং অন্যটিতে চার জনের বেশি ধরে না। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

[চ.'০৯; ঢা.'১১,'১৪; রা.'০৭; সি.'১০,'১৪; ব.'০৯;কু.'১০; য.'১১; দি.'১৪]

সমাধান : নিম্নরূপে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে –

১ম যানবাহন	২য় যানবাহন	ভ্রমণ করার উপায়
7	2	${}^9C_7 \times {}^2C_2 = 36 \times 1 = 36$
6	3	${}^9C_6 \times {}^3C_3 = 6 \times 1 = 84$
5	4	${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 15 \times 1 = 126$

$\therefore$ $(36 + 84 + 126)$ বা, 246 উপায়ে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে।

[বি. দ্র.: ভ্রমণ করার উপায় সংখ্যা $({}^9C_7 + {}^9C_6 + {}^9C_5)$ বা, $({}^9C_4 + {}^9C_3 + {}^9C_2)$]

(b) 20 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে। প্রতিটি যানবাহনের ধারণ ক্ষমতা 20। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

সমাধান : দলটির দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করার উপায় = $\sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \times {}^{20-r}C_{20-r}$ $[\because {}^nC_n = 1]$

$$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r = 2^{20} = 1048576$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রতিজন দুইটি যানবাহনের যেকোন একটিতে ভ্রমণ করতে পারবে।

$\therefore$ প্রতিজনের ভ্রমণ করার উপায় = 2

$\therefore$ 20 ব্যক্তির দলটি দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করতে পারবে 2^{20} বা, 1048576 উপায়ে।

(c) 10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে কত রকমভাবে রাত্রি যাপন করতে পারবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রতিজন লোক দুইটি শয়ন কক্ষের যেকোন একটিতে রাত্রি যাপন করতে পারবে।

$\therefore$ প্রতিজনের রাত্রি যাপনের উপায় = 2

$\therefore$ 10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে রাত্রি যাপন করতে পারবে 2^{10} বা, 1024 উপায়ে।

(d) A, B ও C কে কতভাবে 12 খানা বই দেয়া যাবে যেন A ও B একত্রে C এর দ্বিগুণ পায়?

সমাধান : মনে করি, C বই পায় x টি। তাহলে, A ও B একত্রে বই পায় $2x$ টি

$\therefore$ $x + 2x = 12 \Rightarrow x = 4$

$\therefore$ 4 খানা বই C পাবে এবং অবশিষ্ট $(12 - 4)$ বা, 8 খানা বই A ও B পাবে।

12 খানা বই হতে 4 খানা C কে দেওয়া যায় ${}^{12}C_4 = 495$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 8 খানা বই A ও B কে দেওয়া

যায় $\sum_{r=0}^{8} {}^8C_r \times {}^{8-r}C_{8-r} = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r = 2^8 = 256$ উপায়ে, $[\because {}^nC_n = 1]$ ।

$\therefore$ A , B ও C কে 12 খানা বই দেয়া যাবে 495×256 বা 126720 উপায়ে।

12. (a) 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে মোট 3টি কমিটি গঠন করতে হবে। কত উপায়ে কমিটিগুলো গঠন করা যাবে? [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে 3টি কমিটি গঠন করা যায় $\frac{15!}{3!(5!)^3}$ উপায়ে।

(b) কত প্রকারে 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যায় $\frac{52!}{(13!)^4}$ উপায়ে । [সূত্র প্রয়োগ করে।]

(c) 23 জন খেলোয়াড় দ্বারা 11 সদস্যের দুইটি ক্রিকেট দল কতভাবে গঠন করা যায় ? 23 জনের মধ্যে দু'জন উইকেট কিপিং করতে পারে এবং তাদেরকে দুইটি দলে রেখে কতভাবে দুইটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 23 জন খেলোয়াড় হতে 22 জনকে ${}^{23}C_{22}$ উপায়ে বাছাই করা যায় । আবার 22 জনকে 11 জন করে সমান দুইটি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{22!}{2!(11!)^2}$ উপায়ে ।

$\therefore$ দুইটি ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায় = ${}^{23}C_{22} \times \frac{22!}{2!(11!)^2} = 23 \times \frac{22!}{2!(11!)^2} = \frac{23!}{2!(11!)^2}$

২য় অংশ ঃ 21 জন হতে 20 জনকে বাছাই করা যায় ${}^{21}C_{20}$ উপায়ে । আবার, দুইজন ইউকেট রক্ষককে দুইটি টিমে নিদিস্ট করে 20 জনকে দুইটি সমান ভাগে সেই নির্দিষ্ট টিমে বিভক্ত করা যায় $\frac{20!}{(10!)^2}$ উপায়ে ।

$\therefore$ দুইটি ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায় = ${}^{21}C_{20} \times \frac{20!}{(10!)^2} = \frac{21!}{20!} \times \frac{20!}{(10!)^2} = \frac{21!}{(10!)^2}$

(d) 23 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে দুইজন উইকেট রক্ষক । তাদেরকে দুইটি দলে রেখে A ও B দল নামে দুইটি ক্রিকেট দল কতভাবে গঠন করা যায় ?

সমাধান ঃ দুইজন উইকেট রক্ষককে A ও B দলে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে $2! = 2$ উপায়ে।
অবশিষ্ট 21 জন খেলোয়াড় হতে A -দলের জন্য বাকি 10 জনকে বাছাই করা যায় ${}^{21}C_{10}$ উপায়ে। বাকি 11 জন হতে B -দলের জন্য 10 জনকে বাছাই করা যায় ${}^{11}C_{10} = 11$ উপায়ে ।

$\therefore$ A ও B দল নামে দুইটি ক্রিকেট টিম গঠন করার উপায় = $2\times {}^{21}C_{10} \times 11 = 2 \times \frac{21!}{10!11!} \times 11$

$$= 2 \times \frac{21!}{(10!)^2}$$

(e) একটি কম্পানি দুইটি ফ্যাক্টরির জন্য 15 জনকে নিয়োগ দিয়েছে । একটি ফ্যাক্টরিতে 5 জনকে ও অপরটিতে 10 জনকে কতভাবে নিয়োগ দেওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 15 জন হতে 5 জনকে নির্বাচন করা যাবে ${}^{15}C_5$ উপায়ে। নির্বাচিত এ 5 জনকে দুইটি ফ্যাক্টরির একটিতে নিয়োগ দেওয়া যাবে 2! উপায়ে। অবশিষ্ট 10 জনকে অপর ফ্যাক্টরিতে ${}^{10}C_{10}$ উপায়ে নিয়োগ দেওয়া যাবে ।

$\therefore$ নির্ণেয় উপায় সংখ্যা $= {}^{15}C_5 \times 2! \times {}^{10}C_{10} = \dfrac{15!}{5! \times 10!} \times 2! \times 1 = 2! \times \dfrac{15!}{5! \times 10!}$

(f) **একটি ক্রিকেট টুর্নামেন্ট– এ 16 টি দল অংশ নেয়। র‍্যাংকিং - এ শীর্ষ 8 টি দল থেকে দুইটি দল এবং অপর 8 টি দল থেকে দুইটি দল নিয়ে 4 দলের 4 টি গ্রুপ কতভাবে গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর ।**

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ শীর্ষ 8টি দলকে 2টি করে সমান 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\dfrac{8!}{4!(2!)^4} = 105$ উপায়ে ।

পুনরায় , অপর 8টি দলকে 2টি করে সমান 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\dfrac{8!}{4!(2!)^4} = 105$ উপায়ে ।

$\therefore$ 4 দলের 4টি গ্রুপ গঠন করার উপায় $= 105 \times 105 = 11025$

২য় অংশ ঃ শীর্ষ 8টি দলকে 2টি করে A , B , C, D নামে 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\dfrac{8!}{(2!)^4} = 2520$ উপায়ে।

অপর 8টি দলকে 2টি করে A , B, C, D নামে 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\dfrac{8!}{(2!)^4} = 2520$ উপায়ে ।

$\therefore$ A , B , C , D নামে 4 দলের 4টি গ্রুপ গঠন করার উপায় $= 2520 \times 2520 = 6350400$

(g) **এক ব্যক্তির 5টি সিম কার্ড এবং দুইটি করে সিম কার্ড ব্যবহার উপযোগী দুইটি মোবাইল সেট আছে। তিনি তাঁর মোবাইল সেট দুইটিতে কতভাবে 2 টি করে 4 টি সিম কার্ড সংরক্ষিত রাখতে পারেন এবং কতভাবে 1 টি করে 2 টি সিম কার্ড চালু রাখতে পারেন ?**

সমাধান ঃ 5 টি সিম কার্ড হতে 4 টি সিম কার্ড ${}^5C_4 = 5$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এই বেছে নেওয়া 4 টি সিম কার্ড দুইটি মোবাইল সেটে সমান দুইভাগে ভাগ করা যায় $\dfrac{4!}{(2!)^2} = \dfrac{24}{4} = 6$ উপায়ে।

$\therefore$ 4 টি সিম কার্ড মোবাইল সেট দুইটিতে সংরক্ষিত রাখা যায় $= 5 \times 6 = 30$ উপায়ে।

এখন, একটি মোবাইল সেটের সংরক্ষিত সিম কার্ড দুইটির একটি চালু রাখা যায় 2! উপায়ে এবং অপর মাবাইল সেটের সংরক্ষিত সিম কার্ড দুইটির একটি চালু রাখা যায় 2! উপায়ে।

$\therefore$ 2 টি সিম কার্ড দুইটি সেটে চালু রাখা যায় $30 \times 2! \times 2! = 120$ উপায়ে।

13. দেওয়া আছে, ${}^nP_r = 240 \cdots\cdots(1)$ এবং ${}^nC_r = 120 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ [চ.'১১]

$(1) \div (2) \Rightarrow {}^nP_r \div {}^nC_r = 240 \div 120 = 2 \Rightarrow {}^nP_r = 2.{}^nC_r$

$\Rightarrow r!.{}^nC_r = 2.{}^nC_r \Rightarrow r! = 2 \quad \therefore r = 2 \qquad [\because {}^nP_r = r!.{}^nC_r]$

এখন, ${}^nC_r = 120 \Rightarrow {}^nC_2 = 120 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{1.2} = 120 \Rightarrow n^2 - n = 420 \Rightarrow n^2 - n - 420 = 0$

$\Rightarrow (n-16)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 16 , -15 .$

কিন্তু n -এর মান ঋণাত্মক হতে পারেনা । $\therefore n = 16$ (Ans.)

14. (a) **12টি বিভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?** [চ. ১০]

সমাধান ঃ 12টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 3টি $^{12}C_3 = 220$ উপায়ে এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে 2টি $^5C_2 = 10$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায় । এ বেছে নেওয়া 5টি ভিন্ন বর্ণ (3টি ব্যঞ্জন বর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ) দ্বারা $5! = 120$টি শব্দ গঠন করা যায়। $\therefore$ $220 \times 10 \times 120 = 264000$ টি শব্দ গঠন করা যায়।

(b) 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলো একবার এবং 6 দুইবার পর্যন্ত ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ নিম্নরূপ তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়–.

6 দুইবার ব্যবহার করা হলে, অন্য 4টি অঙ্কের 1টি ব্যবহার করতে হবে এবং তা $^4C_1$ উপায়ে ব্যবহার করা যাবে।

$\therefore$ 6 দুইবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় $^4C_1 \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12$ টি

অনুরূপভাবে, 6 একবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় $^4C_2 \times 3! = 36$ টি এবং

6 ব্যবহার না করে সংখ্যা গঠন করা যায় $^4C_3 \times 3! = 24$টি

$\therefore$ সর্বমোট সংখ্যা $= 12 + 36 + 24 = 72$

15. (a) ' ALGEBRA' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবার 3টি করে নিয়ে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায়? [ব. ১০]

সমাধান ঃ ' ALGEBRA' শব্দটিতে 2টি A সহ মোট 7টি বর্ণ আছে ।

7টি বর্ণ হতে 3টি নিয়ে নিম্নরূপে শব্দ গঠন করা যায় –

6টি ভিন্ন বর্ণ A, L, G, E, B ও R হতে 3টি নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $^6P_3 = 120$ উপায়ে।

2টি A এবং অপর 5টি ভিন্ন বর্ণ L, G, E, B ও R হতে 1টি নিয়ে শব্দ গঠন করা $= {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times \frac{3!}{2!}$

$= 1 \times 5 \times 3 = 15$ উপায়ে। $\therefore$ সর্বমোট শব্দ সংখ্যা $= 120 + 15 = 135$

(b) 'EXAMINATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে এক প্রান্তে N এবং অন্য প্রান্তে A থাকবে ? [প্র.ভ.প. ৮৮]

সমাধান ঃ 'EXAMINATION ' শব্দটিতে 2টি A , 2টি I ও 2টি N সহ মোট 11টি বর্ণ আছে। এক প্রান্তে N এবং অন্য প্রান্তে A রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হলে, মধ্যের স্থান দুইটি অবশিষ্ট $(11-2) = 9$ টি বর্ণের 2টি দ্বারা পূরণ করতে হবে।

2টি I দ্বারা মধ্যের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $\frac{2!}{2!} = 1$ উপায়ে।

2টি ভিন্ন বর্ণ দ্বারা মধ্যের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $^{9-1}P_2 = {}^8P_2 = 56$ উপায়ে। [$\because 11-3 = 8$ টি ভিন্ন বর্ণ]

আবার, N ও A দ্বারা প্রান্তের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $2! = 2$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= (1+56) \times 2 = 114$

(c) ' MATHEMATICS ' শব্দটিতে 2টি M , 2টি A ও 2টি T সহ মোট 11টি বর্ণ আছে . যাদের 4টি স্বরবর্ণ ও 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ ।

সমাধান ঃ 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ A , E ও I হতে 1টি স্বরবর্ণ এবং 5টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ M , T , H , C ও S হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^5C_2 \times 3! = 3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 180$

আবার, 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ A , E ও I হতে 1টি স্বরবর্ণ এবং 2টি M বা 2টি T নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 2 \times 3 = 18$. $\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 180 + 18 = 198$

(d) 'ENGINEERING' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 3 টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে অন্তত একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে। [RU 06-07]

সমাধান ঃ ' ENGINEERING ' শব্দটিতে ব্যঞ্জন বর্ণ আছে 3টি N, 2 টি G ও 1টি R এবং স্বরবর্ণ আছে 3টি E ও 2 টি I .

যেকোন 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা = 5টি ভিন্ন বর্ণ E, N, G, I ও R হতে 3টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 2টি N বা, 2 টি G বা, 2টি E বা, 2 টি I এবং অপর 4টি ভিন্ন বর্ণ হতে 1টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 3টি N বা, 3টি E নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা $= {}^5P_3 + {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{3!}{2!} + {}^2C_1 \times \frac{3!}{3!} = 60 + 4 \times 4 \times 3 + 2 \times 1$

$$= 60 + 48 + 2 = 110$$

যেকোন 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা = 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ N, G ও R একত্রে নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 2টি N বা, 2 টি G এবং অপর 2টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 1টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 3টি N দ্বারা গঠিত শব্দ সংখ্যা

$$= 3! + {}^2C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 6 + 2 \times 2 \times 3 + 1 = 6 + 12 + 1 = 19$$

$\therefore$ অন্তত 1টি স্বরবর্ণ নিয়ে 3টি বর্ণ দ্বারা গঠিত শব্দ সংখ্যা = যেকোন 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা – কোন স্বরবর্ণ না নিয়ে অর্থাৎ যেকোন 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা $= 110 - 19 = 91$

16. (a) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r (n> r) সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা এবং যেগুলোতে উহা অন্তর্ভুক্ত থাকেনা তাদের সংখ্যা সমান হলে দেখাও যে, n = 2r.

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-1)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-1}C_{r-1}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^{n-1}C_{r-1} \times r!$

একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-1}C_r$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^{n-1}C_r \times r!$

প্রশ্নমতে , ${}^{n-1}C_{r-1} \times r! = {}^{n-1}C_r \times r! \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(r-1)!(n-r).(n-r-1)!} = \frac{1}{r.(r-1)!(n-1-r)!} \Rightarrow \frac{1}{n-r} = \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow n - r = r \Rightarrow n = 2r$ (Showed)

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। এদের কতগুলোতে বিশেষ জিনিস দুইটি পাশাপাশি থাকবে।

সমাধান ঃ **১ম অংশ ঃ** n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-2)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_{r-2}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে।

$\therefore$ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r! = \frac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} = \frac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-r)!}$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ এই দুইটি বিশেষ জিনিসকে একটি একক জিনিস বিবেচনা করলে $(r-1)$ সংখ্যক ভিন্ন জিনিস $(r-1)!$ ভাবে বিন্যস্ত হবে এবং বিশেষ জিনিস দুইটি $2!$ ভাবে বিন্যস্ত হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times (r-1)! \times 2! = \dfrac{(n-2)!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} 2.(r-1)!$

$$= \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!} 2.(r-1).(r-2)! = \frac{2(r-1).(n-2)!}{(n-r)!} \text{ (Ans.)}$$

16. (c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে উভয়েই থাকে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-2)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_{r-2}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r!$

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিসের কোনটি অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_r$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_r \times r!$

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r! + {}^{n-2}C_r \times r! = \dfrac{(n-2)!.r!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} + \dfrac{(n-2)!.r!}{r!(n-2-r)!}$

$$= \frac{(n-2)!.r(r-1).(r-2)!}{(r-2)!(n-r)!} + \frac{(n-2)!.}{(n-2-r)!} = \frac{(n-2)!.r(r-1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!} + \frac{(n-2)!.}{(n-2-r)!}$$

$$= \frac{(n-2)!\{r(r-1)+(n-r)(n-r-1)\}}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!} = \frac{(n-2)!(r^2-r+n^2-2nr+r^2-n+r)}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-r)!}(2r^2+n^2-2nr-n) \text{ (Ans.)}$$

(d) একটি সংকেত তৈরি করতে তিনটি পতাকার প্রয়োজন হয়। 6টি বিভিন্ন রং-এর প্রত্যেটির 4টি করে 24টি পতাকা দ্বারা কতগুলো সংকেত দেয়া যেতে পারে?

সমাধান ঃ সবগুলো পতাকা ভিন্ন ভিন্ন রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6P_3 = 120$

6টি বিভিন্ন রঙের পতাকা হতে এক রঙের 2টি পতাকা বাছাই করা যায় ${}^6C_1$ উপায়ে। আবার অবশিষ্ট 5টি বিভিন্ন রঙের পতাকা হতে এক রঙের 1টি পতাকা বাছাই করা যায় ${}^5C_1$ উপায়ে। এই বেছে নেয়া এক রঙের 2টি ও অন্য রঙের 1টি পতাকাকে $\dfrac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ 2টি এক রঙের এবং অপরটি অন্য এক রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6C_1 \times {}^5C_1 \times 3 = 6 \times 5 \times 3 = 90$

সবগুলো পতাকা একই রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6C_1 \times \dfrac{3!}{3!} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 120 + 90 + 6 = 216$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা

17. 10 টি জিনিসের মধ্যে 2টি এক জাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন জিনিস। ঐ জিনিসগুলো থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ সবগুলোই জিনিস ভিন্ন ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $= (10-2+1)$ অর্থাৎ 9টি বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে বাছাই সংখ্যা $= {}^9C_5 = 126$ (১)

2টি জিনিস এক জাতীয় এবং অপর 3টি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন এরূপ বাছাই সংখ্যা $= {}^2C_2 \times {}^8C_3 = 1 \times 56 = 56$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বাছাই সংখ্যা $= 126 + 56 = 182$ (১)

18. 13 জন বালকের একটি দলে 5 জন বালক সেনা আছে। কত প্রকারে 7 জন বালক বাছাই করা যায় যাতে (i) ঠিক 3 জন বালক সেনা থাকে , (ii) অন্তত 3 জন বালক সেনা থাকে?

(i) সমাধান : 5 জন বালক সেনা থেকে প্রতিবারে ঠিক 3 জনকে $^5C_3 = 10$ উপায়ে এবং অন্যান্য $(13-5)$ অর্থাৎ, 8 জন বলক থেকে প্রতিবারে বাকি $(7-3)$ অর্থাৎ, 4 জনকে $^8C_4 = 70$ উপায়ে বাছাই করা যায়। (১)

∴ 7 জনের দল গঠন করা যাবে $= 10 \times 70 = 700$ উপায়ে। (১)

(ii) সমাধান : নিম্নরূপে 7 জনের একটি দল গঠন করা যেতে পারে –

বালক সেনা (5)	অন্যান্য বালক (8)	দল গঠনের উপায়	
3	4	$^5C_3 \times {^8C_4} = 10 \times 70 = 700$	(১)
4	3	$^5C_4 \times {^8C_3} = 5 \times 56 = 280$	(১)
5	2	$^5C_5 \times {^8C_2} = 1 \times 28 = 28$	(১)

∴ $(700 + 280 + 28)$ অর্থাৎ, 1008 প্রকারে দল গঠন করা যাবে । (১)

19. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 চিহ্নিত আটটি কাউন্টার থেকে অন্যূন একটি বিজোড় ও একটি জোড় কাউন্টার নিয়ে চারটি কাউন্টারের কতগুলো সমাবেশ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : নিম্নরূপে 4টি কাউন্টারের সমাবেশ গঠন করা যেতে পারে –

জোড় কাউন্টার (4)	বিজোড় কাউন্টার (4)	সমাবেশ গঠনের উপায়	
1	3	$^4C_1 \times {^4C_3} = 4 \times 4 = 16$	(১)
2	2	$^4C_2 \times {^4C_2} = 6 \times 6 = 36$	(১)
3	1	$^4C_3 \times {^4C_1} = 4 \times 4 = 16$	(১)

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 16 + 36 + 16 = 68$ (১)

20. একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন হতে 7 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। এদের মধ্যে তাকে প্রথম পাঁচটি হতে ঠিক চারটি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে । সে কত প্রকারে 7 টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে? [সি.'০১]

সমাধান : পরীক্ষার্থী প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি $^5C_4 = 5$ প্রকারে এবং শেষের 7টি প্রশ্ন হতে 3টি $^7C_3 = 35$ প্রকারে বাছাই করতে পারবে । (১)

∴ সে $5 \times 35 = 175$ প্রকারে 7টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে । (১)

21. 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ নিযে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

সমাধান : 21টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি $^{21}C_2 = 210$ উপায়ে এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে 3টি $^5C_3 = 10$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায় ! (১)

এ বেছে নেওয়া 5টি ভিন্ন বর্ণ (2টি ব্যঞ্জন বর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ) দ্বারা $5! = 120$ টি শব্দ গঠন করা যায়। (১)

∴ $210 \times 10 \times 120 = 252000$ টি শব্দ গঠন করা যায়। (১)

22. 'EXPRESSION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4 টি বর্ণ নিয়ে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর ।

সমাধান : ' EXPRESSION ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি E এবং 2টি S .

10টি বর্ণ হতে 4টি বর্ণ নিয়ে নিম্নরূপে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় –

8টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, S, I ,O ও N হতে 4টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {^8C_4} = 70$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= {^8P_4} = 1680$ (১)

2টি E এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ X, P, R, S, I, O ও N হতে 2টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^2C_2 \times {}^7C_2$
$= 1 \times 21 = 21$ এবং বিন্যাস সংখ্যা = $21 \times \dfrac{4!}{2!} = 21 \times 12 = 252$ (১)

অনুরূপভাবে, 2টি S এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, I, O ও N হতে 2টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= 21$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 252$ (১)

2টি E এবং 2টি S নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^2C_2 \times {}^2C_2 = 1$ এবং বিন্যাস সংখ্যা = $1 \times \dfrac{4!}{2!2!} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $= 70 + 42 + 1 = 113$ এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 1680 + 504 + 6 = 2190$ (১)

23. (a) একটি সমতলে n- সংখ্যক সরলরেখা টানলে, যদি কোন দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল না হয়, এবং কোন তিনটিও সমবিন্দু না হয়, তবে সেখানে কতগুলো ছেদবিন্দু থাকবে?

সমাধান ঃ দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ যেকোনো দুইটি সমান্তরাল নয় এরূপ n- সংখ্যক সরলরেখা ছেদ করবে- $^nC_2 = \dfrac{1}{2}n(n-1)$ সংখ্যক বিন্দুতে। (১)

(b) শূন্যে অবস্থিত n- সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোন তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয় এবং কোন চারটি এক সমতলে নয়। n-এর কত মানের জন্য বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার দ্বারা প্রাপ্ত সরলরেখার সংখ্যা ও সমতলের সংখ্যা সমান হবে?

সমাধান ঃ একটি সরলরেখার জন্য দুটি বিন্দু এবং একটি সমতলের জন্য তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন। এখানে মোট n- সংখ্যক বিন্দু । অতএব, মোট সরলরেখার সংখ্যা $^nC_2$ এবং মোট সমতলের সংখ্যা $^nC_3$. (১)

প্রশ্নমতে, $^nC_3 = {}^nC_2 \Rightarrow \dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \dfrac{1}{2}n(n-1) \Rightarrow n-2 = 3 \quad \therefore n = 5$ (১)

(c) শূন্যে অবস্থিত n- সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোনো তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয় এবং কোনো চারটি এক সমতলে নয়, কেবল p-সংখ্যক বিন্দু এক সমতলে অবস্থিত। ঐ বিন্দুগুলো দ্বারা কতগুলো ভিন্ন সমতল গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ একটি সমতল গঠন করতে তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন।

$\therefore$ প্রদত্ত n- সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত সমতলের সংখ্যা = $^nC_3$ (১)

কিন্তু যেহেতু p- সংখ্যক বিন্দু একসমতলে অবস্থিত; সুতরাং তারা $^pC_3$ সংখ্যক সমতলের পরিবর্তে কেবল একটি সমতল গঠন করে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সমতলের সংখ্যা = $^nC_3 - {}^pC_3 + 1 = \dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \dfrac{1}{6}p(p-1)(p-2) + 1$ (১) + (১)

(d) কোন সমতলে অবস্থিত n- সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে, p- সংখ্যক বিন্দু সমরেখ, বাকিগুলোর যে কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। ঐ n- সংখ্যক বিন্দুগুলো সংযোগ করে মোট কতগুলো সরলরেখা পাওয়া যাবে? এদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের সংখ্যাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রথম অংশ ঃ দুই বিন্দুর সংযোগে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়। (১)

$\therefore$ প্রদত্ত n- সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত সরলরেখার সংখ্যা = $^nC_2$

কিন্তু যেহেতু p- সংখ্যক বিন্দু সমরেখ; সুতরাং তারা $^pC_2$ সংখ্যক রেখার পরিবর্তে কেবল একটি রেখা গঠন করে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সংখ্যা = $^nC_2 - {}^pC_2 + 1 = \dfrac{1}{2}n(n-1) - \dfrac{1}{2}p(p-1) + 1$ (১) + (১)

দ্বিতীয় অংশ ঃ অসমরেখ তিনটি বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়।

উপরের যুক্তি অনুযায়ী নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা = $^nC_3 - {}^pC_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \dfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}$ (১) + (১)

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{p(p-1)(p-2)}{6}$$

24. ক্রিকেট বিশ্বকাপ -2007 এ 4 টি গ্রুপ থেকে 2টি করে দল শীর্ষ আটে উঠে । নিজ গ্রুপের দল ব্যতীত এই 8 টি দলের প্রতিটি দল পরস্পরের মুখোমুখি হলে শীর্ষ আটে মোট কয়টি খেলা অনুষ্ঠিত হয় ।

সমাধান : 8টি দলের 2টি করে দল পরস্পরের সাথে খেললে মোট খেলার সংখ্যা হয় $^8C_2$ বা 28 টি। (১)

কিন্তু শীর্ষ আটে নিজ গ্রুপের দল দুইটি পরস্পরের সাথে খেলেনি বলে 4টি গ্রুপের 4টি খেলা অনুষ্ঠিত হয়নি ।

$\therefore$ শীর্ষ আটে মোট খেলা অনুষ্ঠিত হয় (28 – 4) বা , 24 টি (১)

25. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5, 6, 7 এবং 8 অঙ্কগুলো দ্বারা চার অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো পৃথক সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে 7টি অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 7টি অঙ্ক দ্বারা চার অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = $^7P_4 = 840$ (১)

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 3, 1, 7, 0, 9, 5 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের মধ্যে কতগুলো সংখ্যার দশকের স্থানে শূন্য থাকবে?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। (১)

$\therefore$ প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক 3, 1, 7, 9, 5 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^5P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থান বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 5! উপায়ে। (১) + (১)

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $^5P_1 \times 5! = 5 \times 120 = 600$ (১)

২য় অংশ : প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক 3, 1, 7, 9, 5 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^5P_1$ উপায়ে এবং দশকের স্থান শূন্য দ্বারা পূরণ করে অবশিষ্ট 4টি স্থান বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 4! উপায়ে। (১) + (১)

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $^5P_1 \times 4! = 5 \times 24 = 120$ (১)

(c) 3, 4, 0, 5, 6 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 10 এবং 1000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 10 এবং 1000 মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো দুই অঙ্কের ও তিন অঙ্কের হবে। এখানে শূন্যসহ মোট 5টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। (১)

দুই অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = 5টি অঙ্ক দ্বারা দুই অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা – 0 প্রথমে রেখে বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = $^5P_2 - {}^4P_1 = 20 - 4 = 16$ (১)

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = $^5P_3 - {}^4P_2 = 60 - 12 = 48$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = 16 + 48 = 64 (১)

[MCQ এর জন্য : নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $4\,({}^4P_1 + {}^4P_2) = 64$]

26. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 8টি অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 10000 এর ছোট সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ (১)

শূন্য ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^7P_1 = 7$ (১)

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 8টি অঙ্ক দ্বারা দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা – 0 প্রথমে রেখে বাকি 7টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^8P_2 - {}^7P_1 = 49$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^8P_3 - {}^7P_2 = 294$ (১)

এবং চার অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^8P_4 - {}^7P_3 = 1470$

∴ 10000 এর ছোট মোট সংখ্যা = $(7 + 49 + 294 + 1470) = 1820$

[MCQ এর জন্য : নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $^7P_1\ (1 + {}^7P_1 + {}^7P_2 + {}^7P_3) = 1820$] (১)

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 1000-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 10টি ভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 5 দ্বারা সংখ্যাগুলোর শেষে 0 বা 5 থাকতে হবে।

1000-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 1 (১)

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা

$$= {}^9P_1 + {}^8P_1 = 9 + 8 = 17$$ (১)

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা

$$= {}^9P_2 + ({}^9P_2 - {}^8P_1) = 72 + 72 - 8 = 136$$ (১)

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $1 + 17 + 136 = 154$ (১)

(c) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 0, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা তিন অঙ্কের বেশি নয় , এরূপ কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 5টি ভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। (১)

তিন অঙ্কের বেশি নয় এরূপ সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^4P_1 = 4$ (১)

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^5P_2 - {}^4P_1 = 20 - 4 = 16$ (১)

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = $^5P_3 - {}^4P_2 = 60 - 12 = 48$

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা = $4 + 16 + 48 = 68$ (১)

(d) 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ? এ সংখ্যাগুলির কয়টিতে একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে।

সমাধান ঃ প্রদত্ত পাঁচটি অঙ্ক দ্বারা চার অঙ্কবিশিষ্ট প্রত্যেক সংখ্যার প্রতিটি স্থান 5 উপায়ে পূরণ করা যায়। (১)

∴ প্রদত্ত অঙ্কগুলি যে কোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায় $5^4 = 625$ উপায়ে। (১)

আবার, প্রদত্ত অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায় $^5P_4 = 120$ উপায়ে। (১)

∴ $625 - 120 = 505$ টি সংখ্যায় একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে। (১)

27. কোনো পরীক্ষায় তিনটি বিষয়ের প্রতিটির পূর্ণমাণ-100 । একজন ছাত্র কতভাবে 200 নম্বর পেতে পারে?

সমাধান : একজন ছাত্রকে 200 নম্বর পেতে হলে প্রতিটি বিষয়ে 0 হতে 100 নম্বর পেতে হবে।

ছাত্রটি নিম্নরূপে পরীক্ষায় 200 নম্বর পেতে পারে -

১ম বিষয়ে প্রাপত নম্বর	২য় বিষয়ে প্রাপত নম্বর	৩য় বিষয়ে প্রাপত নম্বর	মোট প্রাপ্ত নম্বর
0	100	100	200
1	100	99	200
1	99	100	200
2	100	88	200
2	99	99	200
2	88	100	200
… … … …	… … … … …	… … … … …	
… … … …	… … … … …	… … … … …	

(১)

লক্ষ্যনীয় যে, ১ম বিষয়ে 0 পাওয়া যায় 1 উপায়ে, 1 পাওয়া যায় 2 উপায়ে, 2 পাওয়া যায় 3 উপায়ে।

∴ অনুরূপভাবে, ১ম বিষয়ে 3 পাওয়া যায় 4 উপায়ে, 4 পাওয়া যায় 5 উপায়ে, 5 পাওয়া যায় 6 উপায়ে … … …, 100 পাওয়া যায় 101 উপায়ে। (১)

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 101 = \frac{101(101+1)}{2} = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$ (১) + (১)

28. (a) n (A) = 4 হলে, P(A) সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : দেওয়া আছে , $n(A) = 4 \quad \therefore$ P(A) সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2^4 = 16$ (১)

∴ P(A) সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করা যায় $(2^{16} - 1)$ বা 65535 উপায়ে। (১)

(b) n (A) = 2, n (B) = 3 হলে, P (A × B) সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান ঃ দেওয়া আরছে , $n(A) = 2,\ n(B) = 3\ .\ \therefore n(A \times B) = 2 \times 3 = 6$ (১)

∴ $P(A \times B)$ সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2^6 = 64$ (১)

$P(A \times B)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করা যায় $(2^{64} - 1)$ উপায়ে। (১)

29. n(A)= 3, n(B) = 4 হলে A , B ও J_5 প্রত্যেক সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়? (১)

সমাধান ঃ $n(J_5) = 5$.

∴ প্রত্যেক সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করার উপায় $= (2^3 - 1)\ (2^4 - 1)\ (2^5 - 1) = 3255$ (১)

30. 'EQUATION' শব্দটির সবগুলো অক্ষর প্রতিবার ব্যবহার করে কত প্রকারে দুইটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যেন E, Q, U অক্ষর তিনটি এক শব্দে এবং O, N অক্ষর দুইটি অপর শব্দে সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকে?

সমাধান ঃ A, T, I অক্ষর তিনটি থেকে যেকোনো 0, 1, 2 ও 3টি অক্ষর ১ম শব্দে (E, Q, U অন্তর্ভুক্ত শব্দে) অন্তর্ভুক্ত করা হলে ২য় শব্দে (O, N অন্তর্ভুক্ত শব্দে) যথাক্রমে 3, 2, 1 ও 0টি অক্ষর অন্তর্ভুক্ত করতে হবে। (১)

এ 3টি অক্ষরকে ১ম শব্দে 1টি ও ২য় শব্দে 2টি অন্তর্ভুক্ত করা যায় $\frac{3!}{1! \times 2!}$ উপায়ে। (১)

∴ A, T, I অক্ষর তিনটি নিম্নরূপে অন্তর্ভুক্ত করে দুইটি শব্দ গঠন করা যায় –

E, Q, U অন্তর্ভুক্ত শব্দ	O, N অন্তর্ভুক্ত শব্দ	দুইটি শব্দ গঠন করার উপায়
$3 + 0 = 3$	$2 + 3 = 5$	$\frac{3!}{0! \times 3!} \times 3! \times 5! = 720$ (১)
$3 + 1 = 4$	$2 + 2 = 4$	$\frac{3!}{1! \times 2!} \times 4! \times 4! = 1728$

$3 + 2 = 5$	$2 + 1 = 3$	$\frac{3!}{2! \times 1!} \times 5! \times 3! = 2160$
$3 + 3 = 6$	$2 + 0 = 6$	$\frac{3!}{3! \times 0!} \times 6! \times 2! = 1440$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 720 + 1728 + 2160 + 1440 = 6048$ (১)

31. (a) 11 ডিজিট বিশিষ্ট গ্রামীণফোন মোবাইল নম্বরে বাম দিক হতে প্রথম চারটি 0171 দ্বারা নির্ধারিত। গ্রামীণফোন সারা দেশে সর্বাধিক কত সংখ্যক মোবাইল সংযোগ দিতে পারবে? এদের কত সংখ্যক 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে? কতগুলোর ঠিক শেষের তিনটি ডিজিট এক রকম হবে তাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 0 হতে 9 পর্যন্ত মোট 10টি অঙ্ক $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ আছে। বাম দিক হতে প্রথম চারটি ডিজিট 0171 দ্বারা নির্ধারিত করে অবশিষ্ট $(11 - 4)$ বা, 7টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$ (১)

২য় অংশ ঃ 5 দ্বারা বিভাজ্য বলে শেষের ডিজিট 0 অথবা 5 হবে এবং তা $^2C_1 = 2$ উপায়ে পূরণ করা যাবে এবং অবশিষ্ট $(14 - 4 - 1)$ বা, 6টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2 \times 10^6$ (১)

৩য় অংশ ঃ শেষের তিনটি ডিজিট 10টি অঙ্কের যেকোনো একটির তিনটি দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে। শেষের তিনটি ডিজিট 10টি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা পূরণ করার পর ডান দিক হতে ৪র্থ ডিজিট অবশিষ্ট 9টি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা 9 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অবশিষ্ট $(7 - 3 - 1)$ বা, 3টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

$\therefore$ শেষের তিনটি ডিজিট ঠিক এক রকম এমন টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 10 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10$
$= 9 \times 10^4$ (১)

(b) 11 ডিজিট বিশিষ্ট টেলিটক মোবাইল নম্বরে বাম দিক হতে প্রথম চারটি 0155 দ্বারা নির্ধারিত। বাম দিক হতে ৫ম ডিজিট জোড় সংখ্যা দ্বারা নির্ধারিত হলে, সারা দেশে কত সংখ্যক টেলিটকের মোবাইল সংযোগ দেওয়া যাবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 0 হতে 9 পর্যন্ত মোট 4টি অঙ্ক $(2, 4, 6, 8)$ জোড়। বাম দিক হতে ৫ম ডিজিট 4টি অঙ্ক দ্বারা $^4C_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট 6টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যায়। (১)

$\therefore$ মোট সংযোগ সংখ্যা $= {}^4C_1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 4 \times 10^6$ (১)

32. তিন অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার বাম দিক থেকে প্রথম দুইটি অঙ্কের সমষ্টি 4, প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে গঠিত সংখ্যার সমষ্টি 1998 এবং সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা 8 হলে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সংখ্যাটি $(100a + 10b + c)$. (১)

প্রশ্নমতে, $a + b = 4 \cdots \cdots (i)$

$(3 - 1)! \times (a + b + c) \times 111 = 1998$ (১)

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{1998}{222} = 9 \Rightarrow 4 + c = 9 \Rightarrow c = 5$$

(i) হতে পাই, $(a, b) = (4, 0), (2, 2), (3, 1)$ অথবা, $(1, 3)$.

নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে 405, 225, 315 অথবা, 135. (১)

∴ এখন, $405 = 3^4 \times 5$. ∴ 405 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (4+1)(1+1) = 10$ (১)

$225 = 3^2 \times 5^2$. ∴ 225 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (2+1)(2+1) = 9$

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$. ∴ 315 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (2+1)(1+1)(1+1) = 12$

$135 = 3^3 \times 5$. ∴ 135 এর উৎপাদকের সংখ্যা $= (3+1)(1+1) = 8$

∴ নির্ণেয় সংখ্যা 135. (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত):

1. **8 জন লোক প্রত্যেকে প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করলে করমর্দনের সংখ্যা কত হবে?** **[SU 07-08]**

Sol^n : নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^8C_2 = 28$ [∵ করমর্দনে দুইজন ব্যক্তি লাগে।]

2. **একটি টেনিস টুনামেন্টে 150 জন খেলোয়াড় আছে । এক জন খেলোয়াড় একটি ম্যাচ হারলে টুনামেন্ট থেকে বিদায় নেয়। টুনামেন্টে কতটি ম্যাচ খেলা হয়েছে?** **[SU 06-07]**

Sol^n : টুনামেন্টে একজন বিজয়ী হয় এবং অবশিষ্ট $(150 - 1) = 149$ জন খেলোয়াড় 149টি ম্যাচে পরাজিত হয়ে টুনামেন্ট থেকে বিদায় নেয়।অতএব. নির্ণেয় ম্যাচ সংখ্যা $= 149$.

3. **${}^nP_5 = 84 \times {}^{n-1}P_2$ হলে n এর মান কত?**

ALPHA) [X] SHIFT × 5 − 8 4 × ((arg) ALPHA) [X] − 1) SHIFT × 2 CALC [SOLVE=] x?

7 = 0

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. **Sol^n :** A স্থান থেকে B স্থানে যেতে পারবে $2 + 3$ বা 5 উপায়ে , পায়ে হেঁটে A স্থান থেকে C স্থানে যেতে পারবে 2×3 বা 6 উপায়ে, পায়ে হেঁটে অথবা বাসযোগে A স্থান থেকে C স্থানে যেতে পারবে $(3 \times 2 + 2 \times 4)$ বা 14 উপায়ে । ∴ Ans. (b)

2. **Sol^n :** এক ব্যক্তি ভিন্ন ভিন্ন 3টি প্যান্ট, 5টি শার্ট ও 4টি টি-শার্ট হতে একটি প্যান্ট ও একটি শার্ট অথবা একটি টি-শার্ট পছন্দ করতে পারবেন ${}^3C_1 \times ({}^5C_1 + {}^4C_1) = 3(5+4) = 27$ উপায়ে। ∴ Ans. (c)

3. **Sol^n :** 8 জন মেয়ের কাছে 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা আছে। উদ্দীপকের ক্ষেত্রে-

মেয়েরা পৃথক পৃথক ভাবে এক সারিতে দাঁড়াতে পারবে $8! = 40320$ উপায়ে, পৃথক পৃথক ভাবে বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে $(8-1)! = 5040$ উপায়ে এবং মুক্তাগুলি একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে $\frac{1}{2}(8-1)! = 2520$ উপায়ে। ∴ Ans. (d)

4. **Sol^n :** 'BANANA' শব্দটির সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যায় $\frac{6!}{2!3!} = 60$ সংখ্যক। ∴ Ans.(c)

5. **Sol^n :** প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1 , 2 , 3 , 4 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত সংখ্যার সমষ্টি $= (4-1)! \times (1+2+3+4) \times 1111 = 6 \times 10 \times 1111 = 66660$ ∴ Ans. (a)

6. **Sol^n :** ${}^nP_3 + {}^nC_3 = 70$

$\Rightarrow {}^nC_3 \times 3! + {}^nC_3 = 70 \Rightarrow 7 \times {}^nC_3 = 70$

$\Rightarrow {}^nC_3 = 10 = {}^5C_3$

$\therefore\ {}^nC_3 = 10,\ {}^nP_3 = (70 - 10) = 60,\ n = 5.$

$\therefore$ Ans. (d)

7. **Solⁿ :** 'DHAKA' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবারে 3টি বর্ণ বাছাই করা যায় –
$({}^{5-2}C_3 + {}^{5-2}C_{3-1} + {}^{5-2}C_{3-2})$
$= 1 + 3 + 3 = 7$ উপায়ে। $\therefore$ Ans. (b)

8. **Solⁿ :** . ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$
$\therefore$ Ans. (a)

9. **Solⁿ :** " PERMUTATION" শব্দটির বর্ণগুলির কোনো স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে পূর্ণবিন্যাস করা যেতে পারে $(\frac{6!}{2!} - 1)$ $= 359$ উপায়ে। $\therefore$ Ans.(b)

10. **Solⁿ :** 11 অঙ্ক বিশিষ্ট কোনো সংখ্যা 0153, 0154, 0155 বা 0156 দিয়ে শুরু হলে সংখ্যা গঠন করা যায় $4 \times 10^7 = 40000000$ সংখ্যক।
$\therefore$ Ans. (d)

11. **Solⁿ :** ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$. $\therefore$ Ans. (b)

12. **Solⁿ :** PARALLEL শব্দটিতে L আছে 3টি, A আছে 2টি এবং অপর 3টি বর্ণ ভিন্ন। সুতরাং, বর্ণগুলি থেকে অন্তত একটি বর্ণ বাছাই করা যায় $(3+1)(2+1)2^3 - 1$ উপায়ে। $\therefore$ Ans. (b)

13. **Solⁿ :** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

14. **Solⁿ :** 'ELEPHANT' শব্দটির স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে শব্দ গঠন করা যায় $6! \times \frac{3!}{2!}$ $= 2160$ সংখ্যক। $\therefore$ Ans. (b)

15. **Solⁿ :** প্রত্যেক অঙ্ককে প্রতিটি সংখ্যায় একবার ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি দ্বারা বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় ${}^2C_1 \times 3! = 12$ সংখ্যক। $\therefore$ Ans. (c)

16. **Solⁿ :** SESIP শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবার ভিন্ন ভিন্ন তিনটি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^4P_3 = 24$ $\therefore$ Ans. (c)

17. **Solⁿ :** 3 ডিজিটের একটি পাসওয়ার্ডের প্রতিটি ডিজিট 10 উপায়ে পূরণ করা যায়। সর্বাধিক চেষ্টার সংখ্যা $10^3 = 1000$. $\therefore$ Ans. (c)

18. **Solⁿ :** 5টি সাদা বল হতে একটি বল দ্বারা মাঝের স্থান ${}^5C_1 = 5$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 10 টি বল দ্বারা দুই প্রান্তের স্থান ${}^{10}P_2 = 90$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং 3টি বল এক সারিতে সাজানো যায় $5.\ 90 = 450$ উপায়ে। $\therefore$ Ans. (d)

19. **Solⁿ :** ব্যঞ্জনবর্ণের ক্রম পরিবর্তন না করে সাজানো সংখ্যা $= \frac{10!}{7! \times 2!}$ $\therefore$ Ans. (b)

20. **Solⁿ :** একটি ষড়ভুজের শীর্ষবিন্দু দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় ${}^6C_3 = 20$ সংখ্যক। $\therefore$ Ans. (b)

21. **Solⁿ :** 19টি বিন্দু দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় ${}^{19}C_3 = 696$ সংখ্যক। কিন্তু 7টি সমরেখা বিন্দু দ্বারা ${}^7C_3 = 35$ সংখ্যক ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব নয়। সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা $(696 - 35) = 934$.
$\therefore$ Ans. (b).

22. **Solⁿ :** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

23. **Solⁿ :** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

24. **Solⁿ :** বালিকাদের সর্বদা গ্রহন করে কমিটি গঠন করা যাবে ${}^8C_4 = 70$ উপায়ে। $\therefore$ Ans. (c)

25. **Solⁿ :** বালিকাদের সর্বদা বর্জন করে কমিটি গঠন করা যাবে ${}^8C_6 = 28$ উপায়ে। $\therefore$ Ans. (d)

26. **Solⁿ :** বিন্যাস সংখ্যা $= {}^2C_1 \times 3! = 12$
$\therefore$ Ans. (b)

27. **Solⁿ :** SCIENCE শব্দটির স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে সাজানো যায় $\frac{5!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 180$ উপায়ে. $\therefore$ Ans. (c)

28. **Solⁿ :** চার অঙ্কের সংখ্যা $= {}^4P_1 \times {}^6P_3 = 480$
পাঁচ অঙ্কের সংখ্যা $= {}^5P_1 \times {}^6P_4 = 1800$
মোট সংখ্যা $= 2280$ $\therefore$ Ans. (d)

29. Sol^n : SCHOOL শব্দটি হতে তিনটি অক্ষর বাছাই করা যায় $^5C_3 + ^4C_1 = 10 + 4 = 14$
$\therefore$ Ans. (c)

30. Sol^n : $^6C_1 \times ^5C_4 + ^6C_2 \times ^5C_3 + ^6C_3 \times ^5C_2 + ^6C_4 \times ^5C_1 = 6.5 + 1.10 + 20.10 + 15.5 = 30 + 150 + 200 + 75 = 455$
$\therefore$ Ans. (d)

31. Sol^n : কমিটি গঠনের উপায় সংখ্যা
$= ^3C_1 \times ^5C_4 + ^3C_0 \times ^5C_5 = 16$ $\therefore$ Ans.(b)

32. Sol^n : $^4P_1 \times 6! = 4 \times 720 = 2880$
$\therefore$ Ans. (c)

33. Sol^n : $^3P_1 \times ^4P_3 + ^4P_1 \times 4!$
$= 3 \times 24 + 4 \times 24 = 168$ $\therefore$ Ans. (c)

34. Sol^n : একটি খেলার ফলাফল তিন রকমের হতে পারে।

$\therefore$ তিনটি খেলার ফলাফল হবার উপায় সংখ্যা = $3^3 = 9$ $\therefore$ Ans. (a)

35. Sol^n : সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

36. Sol^n : দুইটি F সহ ছয়টি ব্যঞ্জন বর্ণকে বিন্যাস করা যায় $\frac{6!}{2!} = 360$ উপায়ে। সুতরাং, পুনর্বিন্যাসের সঠিক সংখ্যা $(360 - 1) = 359$.
$\therefore$ Ans. (d)

37. Sol^n : 16 ভুজবিশিষ্ট একটি সমতালিক ক্ষেত্রের কর্ণের সংখ্যা = $^{16}C_2 - 16 = 120 - 16 = 104$
$\therefore$ Ans. (d)

38. Sol^n : সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

39. Sol^n : 4 এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

40. Sol^n : $n = 10 + 6 = 16$. $\therefore$ Ans. (a)

41. Sol^n : Destination শব্দটিতে ২টি t, ২টি i ও ২টি n সহ মোট ১১টি বর্ণ রয়েছে। সুতরাং সাজানো সংখ্যা $= \frac{11!}{2!\,2!\,2!}$ $\therefore$ Ans. (b)

42. Sol^n : 6 জন বালক 4 আসনের একটি বেঞ্চে বসতে পারে $^6P_4$ উপায়ে। $\therefore$ Ans. (d)

43. Sol^n : $\frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ $\therefore$ Ans. (c)

44. Sol^n : $^nC_1 = n$ $\therefore$ Ans. (b)

45. Sol^n : "algebra" শব্দটিতে ২টি a সহ মোট ৭টি বর্ণ আছে। স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = $5! \times \frac{3!}{2!} = 360$ $\therefore$ Ans. (c)

46. Sol^n : SESIP শব্দটিতে ২টি S সহ মোট ৫টি বর্ণ আছে। সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে বিন্যাস সংখা = $\frac{5!}{2!} = 60$ $\therefore$ Ans. (b)

47. Sol^n : 7 বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখার সাহায্যে গঠিত কর্ণের সংখ্যা $= ^7C_2 - 7 = 21 - 7 = 14$ $\therefore$ Ans. (a)

48. Sol^n : 6 জন শিক্ষার্থীকে সমান সংখ্যক শিক্ষর্থীর দুইটি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{6!}{2!(3!)^2} = 10$

$\therefore$ Ans. (a)

49. Sol^n : 4 ও 6 দ্বারা যথাক্রমে দ্বিতীয় ও চতুর্থ স্থান নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট ৩টি স্থান বাকী ৩টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যায় $3! = 6$ উপায়ে।
$\therefore$ Ans. (d)

50. Sol^n : একটি ঘনকের পৃষ্ঠতলগুলোকে ছয়টি ভিন্ন ভিন্ন রং দিয়ে রং করার উপায় সংখ্যা $^6P_6 = 6!$
$\therefore$ Ans. (a)

51. Sol^n : 8টি ভিন্ন রং এর পতাকা হতে 5টি পতাকা নিয়ে ভিন্ন সিগনাল গঠনের উপায় সংখ্যা = $^8P_5$
$\therefore$ Ans. (a)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. Permutation ও Combination .

(a) $^{n+1}P_3 + ^{n+1}C_3 = 392$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $^{n+1}P_3 + ^nC_3 + ^nC_2 = 392$

$\Rightarrow {}^{n+1}P_3 + ({}^nC_3 + {}^nC_{3-1}) = 392$

$\Rightarrow {}^{n+1}C_3 \times 3! + {}^{n+1}C_3 = 392$

$\Rightarrow 7 \times {}^{n+1}C_3 = 392 \Rightarrow {}^{n+1}C_3 = 56 = {}^8C_3$

$\Rightarrow n + 1 = 8 \therefore n = 7$

(b) এক জাতীয় বর্ণ দুই প্রান্তে রেখে উদ্দীপকে উল্লেখিত ২য় শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 5 বর্ণের কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

সমাধান : Combination শব্দটিতে 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি O, 2টি N এবং 2টি I.

দুই প্রান্তের বর্ণ দুইটি একজাতীয় এবং মঝের বর্ণ তিনটি ভিন্ন ভিন্ন এরূপ ক্ষেত্রে শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_1 \times {}^7C_3 \times 3! = 3 \times 35 \times 6 = 630$ সংখ্যক।

আবার, দুই প্রান্তের বর্ণ দুইটি একজাতীয় এবং মঝের বর্ণ তিনটির দুইটি এক জাতীয় ও অন্যটি ভিন্ন এরূপ ক্ষেত্রে শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^6C_1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 2 \times 6 \times 3 = 108$ সংখ্যক।

$\therefore$ শব্দ গঠন করা যায় $(630 + 108) = 738$ সংখ্যক।

(c) ১ম শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 2টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জন বর্ণের সমন্বয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

সমাধান : Permutation শব্দটিতে 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ (ভিন্ন ভিন্ন) ও 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ। আবার 6টি ব্যঞ্জন বর্ণের 2টি t.

$\therefore$ 2টি স্বরবর্ণ ও 2টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণের সমন্বয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4!$ $= 10 \times 10 \times 24 = 2400$ টি

আবার, 2টি স্বরবর্ণ ও 2টি t এর সমন্বয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^5C_2 \times \frac{4!}{2!} = 10 \times 12 = 120$ টি

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 2400 + 120 = 2520$ (Ans.)

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(a) উদ্দীপকে উল্লেখিত সংখ্যাগুলি থেকে অন্তত একটি জোড় সংখ্যা ও অন্তত একটি বিজোড় সংখ্যা কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সংখ্যাগুলিতে তিনটি জোড় সংখ্যা ও চারটি বিজোড় সংখ্যা আছে।

$\therefore$ অন্তত একটি জোড় সংখ্যা ও অন্তত একটি বিজোড় সংখ্যা বাছাই করা যায় $(2^3 - 1)(2^4 - 1) =$ 105 উপায়ে।

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত সংখ্যাগুলি সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য নির্দেশ করলে, তাদের সাহায্যে কতগুলি চতুর্ভুজ গঠন করা যায়?

সমাধান: প্রশ্নমালা VB এর 5(a) দ্রষ্টব্য।

(c) 6 দুইবার পর্যন্ত এবং অন্য সংখ্যাগুলি একবার ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ নিম্নরূপ তিন অঙ্কের সংখ্যা গঠন করা যায়-

6 দুইবার ব্যবহার করা হলে, অন্য 6টি সংখ্যার 1টি ব্যবহার করতে হবে এবং তা ${}^6C_1$ উপায়ে ব্যবহার করা যাবে।

$\therefore$ 6 দুইবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় ${}^6C_1 \times \frac{3!}{2!} = 6 \times 3 = 18$ টি

অনুরূপভাবে, 6 একবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় ${}^6C_2 \times 3! = 90$ টি এবং

6 ব্যবহার না করে সংখ্যা গঠন করা যায় ${}^6C_3 \times 3!$ $= 120$টি

$\therefore$ সর্বমোট শব্দ সংখ্যা $= 18 + 90 + 120 = 228$

3. যেকোনো সংখ্যা গঠনে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি ব্যবহার করা হয়।

(a) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : প্রদত্ত 10টি অঙ্ক ব্যবহার করে 10! সংখ্যক সংখ্যা গঠন করা যায়। কিন্তু 0 দ্বারা শুরু 9! সংখ্যক সংখ্যা অর্থপূর্ণ সংখ্যা নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় অর্থপূর্ণ সংখ্যা $= 10! - 9! = 3265920$

(b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের কতগুলি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : সংখ্যাগুলির শেষে 0, 2, 4, 6 অথবা 8 থাকলে সংখ্যাগুলি জোড় হবে । আবার , সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

$\therefore$ 0 শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 1 ,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 বা 9 দ্বারা 9 উপায়ে পূরণ করা যায় । অবশিষ্ট মাঝের 8টি স্থান বাকী 8টি অঙ্ক দ্বারা $8! = 40320$ উপায়ে পূরণ করা যায় ।

$\therefore$ 0 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 9 \times 40320 = 362880$

আবার, 2 শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 1 , 3, 4, 5, 6, 7, 8 বা 9 দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যায় । অবশিষ্ট মাঝের 8টি স্থান বাকী 8টি অঙ্ক দ্বারা $8! = 40320$ উপায়ে পূরণ করা যায় ।

$\therefore$ 2 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 8 \times 40320 = 322560$

অনুরূপভাবে, 4, 6 অথবা 8 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা = 322560

$\therefore$ নির্ণেয় অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা $= 362880 + 4 \times 322560 = 10653120$ সংখ্যক ।

(c) প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয় বার ও 9 একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের

সংখ্যা $= \dfrac{10!}{9!} = 10$

প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক,শতক ইত্যাদি) 9 একবার ও 1 নয়বার পুনরাবৃত্ত হয়।

$\therefore$ দশ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 9 + 1 \times 9 = 18$

$\therefore$ প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি $= 18 \times 1111111111 = 19999999998$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় $= 19999999998 \div 10$
$= 1999999999{\cdot}8$

অথবা,

গঠিত সংখ্যার সমষ্টি $= 9111111111 + 1911111111 + 1191111111 + 1119111111 + 1111911111 + 1111191111 + 1111119111 + 1111111911 + 1111111191 + 1111111119 = 19999999998$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় $= 19999999998 \div 10$
$= 1999999999{\cdot}8$

4.'EQUATION'

(a) দেখাও যে, ${}^nP_r + r.{}^nP_{r-1} = {}^{n+1}P_r$.

প্রমাণ: ${}^nP_r + r.{}^nP_{r-1} = {}^nC_r.r! + r.(r-1)!\,{}^nC_{r-1}$
$= {}^nC_r.r! + r!\,{}^nC_{r-1} = ({}^nC_r + {}^nC_{r-1})r!$
$= r!\,{}^{n+1}C_r = {}^{n+1}P_r$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দের স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে না রেখে অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান : EQUATION শব্দটিতে 8টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ ও 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ।

সবগুলি অক্ষর নিয়ে 8টি অক্ষরকে 8! বা 40320 উপায়ে সাজানো যায়।

5টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ বিবেচনা করে $(3 + 1) = 4$ টি ভিন্ন বর্ণকে 4! উপায়ে এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে 5! উপায়ে বিন্যাস করা যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে অক্ষরগুলিকে সাজানো যায় $4! \times 5! = 2880$ উপায়ে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে না রেখে অক্ষরগুলিকে কতভাবে যায় $(40320 - 2880) = 37440$ উপায়ে।

(c) কমপক্ষে একটি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 4 অক্ষরের কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ?

সমাধান : একটি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 4 অক্ষরের শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_1 \times {}^5C_3 \times 4!$
$= 3 \times 10 \times 24 = 720$টি

2টি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 4 অক্ষরের শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_2 \times {}^5C_2 \times 4! = 3 \times 10 \times 24$
$= 720$টি

3টি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 4 অক্ষরের শব্দ গঠন করা যায় $^3C_3 \times {}^5C_1 \times 4! = 1 \times 5 \times 24$ $= 120$টি

$\therefore$ কমপক্ষে একটি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 4 অক্ষরের শব্দ গঠন করা যায় $(720 + 720 + 120)$ $= 1560$ টি

5. **'CONFIDENCE'** একটি ইংরেজি শব্দ।

(a) $^nP_r = 240$ ও $^nC_r = 120$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $^nP_r = 240 \Rightarrow {}^nC_r \times r! = 240$

$\Rightarrow 120 \times r! = 240 \Rightarrow r! = 2 \Rightarrow r = 2$

$\therefore\ {}^nP_2 = 240 \Rightarrow n(n-1) = 16.15$

$\Rightarrow n(n-1) = 16(16-15)\ \therefore\ n = 16$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবার চারটি বর্ণ নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : **'CONFIDENCE'** শব্দটিতে 10টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি C, 2টি N ও 2টি E.

$(10-3) = 7$টি ভিন্ন বর্ণ হতে চারটি ভিন্ন বর্ণ নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^7C_4 = 35$

2টি এক জাতীয় ও অন্য 2টি ভিন্ন বর্ণ নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^3C_1 \times {}^6C_2 = 3 \times 15 = 45$

2টি এক জাতীয় ও অন্য 2টি আরেক জাতীয় বর্ণ নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^3C_2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $= 35 + 45 + 3 = 83$

(c) 2টি C ও 2টি N অন্তর্ভুক্ত করে শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবার ছয়টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : ছয়টি বর্ণের 2টি C ও 2টি N ব্যতীত অপর 2টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

(i) অপর 2টি বর্ণ E

(ii) 2টি C ও 2টি N ব্যতীত $(10-4-1)$ $=5$টি ভিন্ন বর্ণ হতে 2টি।

(i) এর ক্ষেত্রে ভিন্ন ভিন্ন তিন জোড়া বর্ণ এক জাতীয়। সুতরাং, বিন্যাস সংখ্যা = $\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}$ $= 90$

(ii) এর ক্ষেত্রে 5টি ভিন্ন বর্ণ হতে 2টি বর্ণ $^5C_2 = 10$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ বিন্যাস সংখ্যা $= 10 \times \dfrac{6!}{2! \times 2!} = 1800$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 90 + 1800 = 1890$

6. 'TECHNOLOGY' একটি ইংরেজি শব্দ।

(a) 'COMMITTEE' শব্দটির বর্ণগুলি ব্যবহার করে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

সমাধান : 'COMMITTEE' শব্দটিতে 9টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি M, 2টি T ও 2টি E.

$\therefore$ প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলি ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যায় $\dfrac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45360$ সংখ্যক।

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দের দুইটি O কে পাশাপাশি না রেখে অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান : 'TECHNOLOGY' শব্দটিতে 10টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি O.

$\therefore$ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে প্রদত্ত শব্দটির সাজানো সংখ্যা $\dfrac{10!}{2!} = 1814400$

প্রদত্ত শব্দের 2টি O কে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 9 টি।

$\therefore$ 2টি O কে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 9! \times \dfrac{2!}{2!} = 362880$

$\therefore$ দুইটি O কে পাশাপাশি না রেখে প্রদত্ত শব্দের অক্ষরগুলিকে সাজানো সংখ্যা $= 1814400 - 362880 = 1451520$

(c) কমপক্ষে একটি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 3 অক্ষরের কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ?

সমাধান : 'TECHNOLOGY' শব্দটিতে 10টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ ও দুইটি O সহ 3টি স্বরবর্ণ।

একটি ব্যঞ্জন বর্ণ ও দুইটি ভিন্ন স্বরবর্ণ ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যায় ${}^7C_1 \times 3! = 7 \times 6 = 42$ টি

একটি ব্যঞ্জন বর্ণ ও দুইটি O ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যায় ${}^7C_1 \times \frac{3!}{2!} = 7 \times 3 = 21$ টি

দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যায় ${}^7C_2 \times {}^2C_1 \times 3! = 21 \times 2 \times 6$ $= 252$ টি।

তিনটি ব্যঞ্জন বর্ণ ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যায় ${}^7C_3 \times 3! = 210$ টি।

$\therefore$ কমপক্ষে একটি ব্যঞ্জন বর্ণ অন্তর্ভুক্ত করে 3 অক্ষরের শব্দ গঠন করা যায় $(42 + 21 + 252 + 210)$ $= 525$ টি।

7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

(a) 540 এর উৎপাদক সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

$\therefore$ 540 এর উৎপাদকের সংখ্যা

$= (2+1)(3+1)2^1 = 24$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত সংখ্যাগুলি থেকে একটি মৌলিক সংখ্যা ও কমপক্ষে একটি যৌগিক সংখ্যা কতভাবে নির্বাচন করা যায়?

সমাধান : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এর মধ্যে 2, 3, 5 ও 7 মৌলিক সংখ্যা এবং 4, 6 ও 8 যৌগিক সংখ্যা।

4টি মৌলিক সংখ্যা হতে 1টি নির্বাচন করা যায় ${}^4C_1 = 4$ উপায়ে।

3টি যৌগিক সংখ্যা হতে কমপক্ষে 1টি নির্বাচন করা যায় $(2^3 - 1) = 7$ উপায়ে।

$\therefore$ একটি মৌলিক সংখ্যা ও কমপক্ষে একটি যৌগিক সংখ্যা করার উপায় সংখ্যা $= 4 \times 7 = 28$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত বিজোড় অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেকটি কেবল একবার ব্যবহার করে যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এর মধ্যে 1, 3, 5 ও 7 বিজোড়।

চারটি স্থানের যেকোন একটি স্থান 1, 3, 5 ও 7 চারটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট তিনটি স্থান বাকী তিনটি অঙ্ক দ্বারা 3! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক বা হাজার) 3! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

$\therefore$ চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 3! \times (1 + 3 + 5 + 7)$ $= 96$

$\therefore$ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5 ও 7 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

$= 96\times1 + 96\times10 + 96\times100 + 96\times1000$
$= 96\,(1 + 10 + 100 + 1000)$
$= 96 \times 1111 = 106656$

8. ইংরেজি শব্দ 'TRAPEZIUM' এর বর্ণগুলি ব্যবহার করে একটি ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} T & R & A \\ P & E & Z \\ I & U & M \end{bmatrix}$ গঠন করা হলো।

(a) তিনটি পুরস্কারের একটি সদাচারের জন্য, একটি ক্রীড়ার জন্য এবং একটি সাধারণ উন্নতির জন্য। 10 জন বালকের মধ্যে এগুলি কত রকমে বিতরণ করা যেতে পারে?

সমাধান : প্রত্যেক পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে 10 উপায়ে বিতরণ করা যায়।

$\therefore$ তিনটি পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে বিতরণ করার মোট উপায় সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10$ $= 1000$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত ইংরেজি শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রত্যেকবার চারটি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় যেখানে প্রতিটি শব্দে Z বিজোড় স্থানে থাকবে?

সমাধান : 'TRAPEZIUM' শব্দটিতে 9টি বর্ণ আছে।

চার বর্ণ দ্বারা গঠিত শব্দে 2টি বিজোড় স্থান Z দ্বারা পূরণ করা যায় ${}^2P_1 = 2$ উপায়ে।

চারটি স্থানের অবশিষ্ট তিনটি স্থান বাকী $(9 - 1) = 8$টি বর্ণ দ্বারা পূরণ করা যায় ${}^8P_3 = 336$ উপায়ে।

$\therefore$ শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 2 \times 336 = 672$

(c) $T = 1, R = 2, A = 3, P = 4, E = 5, Z = -1, I = -2, U = -3$ এবং $M = -4$ হলে, A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $A = \begin{bmatrix} T & R & A \\ P & E & Z \\ I & U & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$

$= 1(-20-3) - 2(-16-2) + 3(-12+10)$
$= -23 + 36 - 6 = 7 \neq 0$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান।

$$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -20-3 & -(-16-2) & -12+10 \\ -(-8+9) & -4+6 & -(-3+4) \\ -2-15 & -(-1-12) & 5-8 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -23 & 18 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -17 & 13 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -23 & -1 & -17 \\ 18 & 2 & 13 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -23 & -1 & -17 \\ 18 & 2 & 13 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

9. যেকোনো সংখ্যা গঠনে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি ব্যবহার করা হয়।

(a) **'EQUATION'** শব্দটির স্বরবর্ণগুলির অন্তত একটি নিয়ে কতগুলি সমাবেশ গঠন করা যায়?

সমাধান : **'EQUATION'** শব্দটিতে স্বরবর্ণ আছে 5টি।

$\therefore$ 5টি স্বরবর্ণের অন্তত একটি নিয়ে সমাবেশ গঠন করা যায় $(2^5 - 1) = 31$ সংখ্যক।

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় যেখানে প্রতিটি সংখ্যার প্রথমে ও শেষে বিজোড় অঙ্ক থাকে?

সমাধান : 10 অঙ্ক 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এর 5টি বিজোড়।

প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি 2টি বিজোড় অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যায় ${}^5P_2 = 20$ উপায়ে।

অবশিষ্ট $(10 - 2) = 8$টি স্থান বাকী 8টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যায় $8! = 40320$ উপায়ে।

$\therefore$ সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 20 \times 40320 = 806400$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত অঙ্কগুলি যেকোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলি বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : প্রশ্নমালা VA এর 19(b) দ্রষ্টব্য।

10. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি ব্যবহার করে একটি ম্যাট্রিক্স $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ গঠন করা হলো।

(a) **'BEAUTIFUL'** শব্দটির বর্ণগুলি ব্যবহার করে কতগুলি ভিন্ন বিন্যাস গঠন করা যায় যেন স্বরবর্ণগুলি প্রতিটি বিন্যাসে বিজোড় স্থান দখল করে?

সমাধান : 'BEAUTIFUL' শব্দটিতে 9টি বর্ণ আছে যার মধ্যে স্বরবর্ণ 5টি এবং ব্যঞ্জন বর্ণ 4টি। আবার, 5টি স্বরবর্ণের মধ্যে 2টি U .

5টি বিজোড় স্থান 5টি **স্বরবর্ণ দ্বারা** $\frac{5!}{2!} = 60$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান বাকী 4টি ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $4! = 24$ উপায়ে **পূরণ করা যায়।**

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 60 \times 24 = 1440$

(b) $A^2 + 3A + I$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+8+21 & 4+20+42 & 7+32+63\\ 2+10+24 & 8+25+48 & 14+40+72\\ 3+12+27 & 12+30+54 & 21+48+81\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30 & 66 & 102\\ 36 & 81 & 126\\ 42 & 96 & 150\end{bmatrix}$$

$$3A=3\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 12 & 21\\ 6 & 15 & 28\\ 9 & 18 & 27\end{bmatrix}$$

$\therefore$ A^2+3A+I

$$=\begin{bmatrix}30 & 66 & 102\\ 36 & 81 & 126\\ 42 & 96 & 150\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 12 & 21\\ 6 & 15 & 28\\ 9 & 18 & 27\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30+3+1 & 66+12+0 & 102+21+0\\ 36+6+0 & 81+15+1 & 126+28+0\\ 42+9+0 & 96+18+0 & 150+27+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}34 & 78 & 123\\ 42 & 97 & 154\\ 51 & 114 & 178\end{bmatrix}$$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত শেষ তিনটি অঙ্ক প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : উদ্দীপকে উল্লেখিত শেষ তিনটি অঙ্ক 7, 8, 9 তিনটি স্থানের যেকোন একটি স্থান 7, 8, 9 তিনটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট দুইটি স্থান বাকী দুইটি অঙ্ক দ্বারা 2! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক বা শতক) 2! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

$\therefore$ তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 2! \times (7+8+9)$
$= 174$

$\therefore$ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 7, 8, 9 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

$= 174\times1+174\times10+174\times100$
$= 174(1+10+100)$
$= 174\times111 = 19314$

11. A(1, 6), B(2, 3) ও C(4, 5) বিন্দু তিনটির ভুজ 1, 2, 4 এবং কোটি 3, 5, 6.

(a) কোনো পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে হলে 6টি বিষয়ের প্রতিটিতে ন্যূনতম নম্বর পেতে হয়। একজন ছাত্র কত রকমে অকৃতকার্য হতে পারে?

সমাধান : প্রশ্নমালা VB এর 8 (c) দ্রষ্টব্য।

(b) ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে $\angle ABC$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{BA}=(1-2)\hat{i}+(6-3)\hat{j}=-\hat{i}+3\hat{j}$

$\overrightarrow{BC}=(4-2)\hat{i}+(5-3)\hat{j}=2\hat{i}+2\hat{j}$

$$\angle ABC=\cos^{-1}\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$

$$=\cos^{-1}\frac{(-\hat{i}+3\hat{j}).(2\hat{i}+2\hat{j})}{|-\hat{i}+3\hat{j}||2\hat{i}+2\hat{j}|}$$

$$=\cos^{-1}\frac{(-\hat{i}+3\hat{j}).(2\hat{i}+2\hat{j})}{|-\hat{i}+3\hat{j}||2\hat{i}+2\hat{j}|}$$

$$=\cos^{-1}\frac{-2+6}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+4}}=\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{80}}$$

$$=\cos^{-1}\frac{4}{4\sqrt{5}}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত কোটি তিনটির প্রত্যেকটি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 300 এর চেয়ে বড় সংখ্যাগুলির গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : 3, 5, 6 কোটি তিনটির প্রত্যেকটি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 300 এর চেয়ে বড় সংখ্যা $3! = 6$ সংখ্যক।

তিনটি স্থানের যেকোন একটি স্থান 3, 5, 6 তিনটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট দুইটি স্থান বাকী দুইটি অঙ্ক দ্বারা 2! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক বা শতক) 2! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

∴ তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 2! \times (3+5+6)$
$= 28$

∴ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 3, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

$$= 28 \times 1 + 174 \times 10 + 174 \times 100$$
$$= 28\ (1 + 10 + 100)$$
$$= 28 \times 111 = 3108$$

∴ 300 এর চেয়ে বড় সংখ্যাগুলির গড় $= \dfrac{3108}{6}$
$= 518$

12. Combination একটি ইংরেজি শব্দ।

(a) 10 টি বস্তুর 5টি একবারে নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে?

সমাধান : 10 টি বস্তুর মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত করে অবশিষ্ট 8টি বস্তুর থেকে বাকী $(5-2) = 3$টি বস্তু নির্বাচন করা যায় ${}^8C_2 = 28$ উপায়ে। এ 5টি বস্তু $5! = 120$ উপায়ে বিন্যস্ত হয়।

∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 28 \times 120 = 3360$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে বর্ণগুলি কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান : 'Combination' শব্দটিতে 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ; 2টি o, 2টি i , 2টি n.

∴ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে প্রদত্ত শব্দটির সাজানো সংখ্যা $\dfrac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = 4989600$

প্রদত্ত শব্দের 5টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(11 - 5 + 1)$ অর্থাৎ 7টি ; যার মধ্যে 2 টি n । সুতরাং, এই 7 টি বর্ণকে $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ প্রকারে সাজানো যায় । আবার, 5টি স্বরবর্ণকে (যাদের 2টি o, 2টি i) নিজেদের মধ্যে $\dfrac{5!}{2! \times 2!} = 30$ প্রকারে সাজানো যায় ।

∴ 5টি স্বরবর্ণকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 2520 \times 30 = 75600$

∴ স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে প্রদত্ত শব্দের অক্ষরগুলিকে সাজানো যায় $4989600 - 75600$
$= 4914000$ উপায়ে।

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 7টি বর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায় যেন অন্তত 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ বিদ্যমান থাকে?

সমাধান : 7টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

(i) 5টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ

(ii) 5টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি এক জাতীয় স্বরবর্ণ

(iii) 2টি n সহ 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ

(iv) 2টি n সহ 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি এক জাতীয় স্বরবর্ণ

(v) 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 1টি স্বরবর্ণ

(i) এর ক্ষেত্রে, বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_5 \times {}^3C_2$
$= 1 \times 3 = 3$

(ii) এর ক্ষেত্রে, বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_5 \times {}^2C_1$
$= 1 \times 2 = 2$

(iii) এর ক্ষেত্রে, বাছাই সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^3C_2$
$= 4 \times 3 = 12$

(iv) এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^4C_3 \times {}^2C_1$
$= 4 \times 2 = 8$

(v) এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^6C_6 \times {}^3C_1$
$= 1 \times 3 = 3$

∴ নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= 3 + 2 + 12 + 8 + 3$
$= 28$

13. একটি 'TRIANGLE' এর শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(1,\ 3,\ 2)$, $B(2, -1,\ 1)$, $C(-1,\ 2,\ 3)$

(a) $5 \times {}^nP_3 = 4 \times {}^{n+1}P_3$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $5 \times {}^nP_3 = 4 \times {}^{n+1}P_3$

$$\Rightarrow 5 \times \frac{n!}{(n-3)!} = 4 \times \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!}$$

$$\Rightarrow 5\times\frac{n!}{(n-3)!}=4\times\frac{(n+1).n!}{(n-2).(n-3)!}$$

$$\Rightarrow 5=\frac{4(n+1)}{n-2}\Rightarrow 5n-10=4n+4$$

$$\Rightarrow n=14$$

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা II B এর 15(a) দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত ইংরেজি শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় যেখানে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে না?

সমাধান : 'TRIANGLE' শব্দটিতে 8টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ।

$\therefore$ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে প্রদত্ত শব্দটির সাজানো সংখ্যা $8!=40320$

প্রদত্ত শব্দের 3টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(8-3+1)$ অর্থাৎ 6টি। সুতরাং, এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে $6!=720$ প্রকারে সাজানো যায়। আবার, 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3!=6$ প্রকারে সাজানো যায়।

$\therefore$ 3টি স্বরবর্ণকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $=720\times 6=4320$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে প্রদত্ত শব্দের অক্ষরগুলিকে সাজানো যায় $40320-4320$ $=36000$ উপায়ে।

14. দৃশ্যকল্প-১:

দৃশ্যকল্প-২: বাংলাদেশের রাজধানী DHAKA এবং মুদ্রা TAKA.

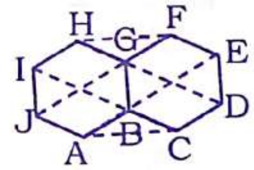
(a) Bangladesh শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

সমাধান : 'Bangladesh' শব্দটিতে 10টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি a.

$\therefore$ প্রদত্ত শব্দটিকে $\frac{10!}{2!}=$ 1814400 প্রকারে সাজানো যায়।

(b) দৃশ্যকল্প-১ থেকে কতগুলি কর্ণ পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান :



প্রদত্ত চিত্রে মোট 10টি বিন্দু রয়েছে। দুইটি বিন্দু দ্বারা একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়। সুতরাং 10টি বিন্দুর সাহায্যে $^{10}C_2=45$টি রেখাংশ পাওয়া যায় যাদের মধ্যে 10টি সীমান্ত বাহু কর্ণ নয়। আবার, J, G, F ; A, B, E; I, B, C; H, G, D; H, F এবং A, C একই সরলরেখায় অবস্থিত বলে HD, IC, JF, AE, HF, AC কর্ণ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা $=45-10-6=29$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লেখিত রাজধানীর নাম থেকে চারটি ও মুদ্রার নাম থেকে তিনটি বর্ণ একত্রে নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : DHAKA থেকে চারটি ও TAKA থেকে তিনটি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

DHAKA হতে 4টি বর্ণ	TAKA হতে 3টি বর্ণ	শব্দ গঠন করার উপায়
DHKA	TKA	$\frac{7!}{2!2!}=1260$
	AAT	$\frac{7!}{3!}=840$
	AAK	$\frac{7!}{3!2!}=420$
AADH	TKA	$\frac{7!}{3!}=840$
	AAT	$\frac{7!}{4!}=210$
	AAK	$\frac{7!}{4!}=210$
AADK	TKA	$\frac{7!}{3!2!}=420$

	AAT	$\frac{7!}{4!} = 210$
	AAK	$\frac{7!}{4!2!} = 105$
AAHK	TKA	$\frac{7!}{3!2!} = 420$
	AAT	$\frac{7!}{4!} = 210$
	AAK	$\frac{7!}{4!2!} = 105$
মোট		5250

কিন্তু AAADHKT দুইবার সংঘটিত হয়েছে।

নির্ণেয় সংখ্যা $= 5250 - 840 = 4410$

15. ALGEBRA গণিতের একটি শাখা।

(a) 13 জন বালকের একটি দলে 5 জন বালক সেনা আছে। কত প্রকারে 7 জন বালক বাছাই করা যায় যাতে ঠিক 3 জন বালক সেনা থাকে?

সমাধান : 5 জন বালক সেনা থেকে প্রতিবারে ঠিক 3 জনকে ${}^5C_3 = 10$ উপায়ে এবং $(13-5) = 8$ জন বলক থেকে প্রতিবারে বাকি $(7-3)$ অর্থাৎ, 4 জনকে ${}^8C_4 = 70$ উপায়ে বাছাই করা যায়।

$\therefore$ 7 জনের দল গঠন করা যাবে $= 10 \times 70 = 700$ উপায়ে।

(b) উদ্দীপকের শব্দটির A দুইটিকে একত্রে না রেখে কত প্রকারে সাজানো যায়?

সমাধান : ALGEBRA শব্দটিতে মোট বর্ণের সংখ্যা 7টি ; যার মধ্যে 2টি A রয়েছে।

$\therefore$ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা

$= \frac{7!}{2!} = 2520$, [$\frac{n!}{p! \times q! \times r!}$ সূত্রের সাহায্যে]

প্রদত্ত শব্দের 2টি A কে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(7-1)$ অর্থাৎ, 6টি ।

$\therefore$ 2টি A কে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$

$\therefore$ 2টি A কে একত্রে না রেখে সাজানো সংখ্যা = সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা – 2টি A কে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $2520 - 720 = 1800$

(c) উদ্দীপকের শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবারে 3টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়।

সমাধান : ' ALGEBRA' শব্দটিতে A আছে 2টি ও অন্য 5টি বর্ণ ভিন্ন ।

3টি বর্ণের সবগুলি বর্ণ ভিন্ন নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা $= {}^6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

3টি বর্ণের 2টি A নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা = ${}^5C_1 \times \frac{3!}{2!} = 5 \times 3 = 15$

$\therefore$ নির্ণেয় গঠিত শব্দের সংখ্যা $=120 + 15 = 135$

বিকল্প পদ্ধতি: ' ALGEBRA' শব্দটিতে A আছে 2টি ও অন্য 5টি বর্ণ ভিন্ন ।

প্রতিবারে 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত মোট শব্দের সংখ্যা = A অন্তর্ভুক্ত না করে গঠিত শব্দের সংখ্যা + 1টি A অন্তর্ভুক্ত করে গঠিত শব্দের সংখ্যা + 2টি A অন্তর্ভুক্ত করে গঠিত শব্দের সংখ্যা

$= {}^{7-2}C_3 \times 3! + {}^{7-2}C_{3-1} \times 3! + {}^{7-2}C_{3-2} \frac{3!}{2!}$

$= {}^5C_3 \times 6 + {}^5C_2 \times 6 + {}^5C_1 \times 3$

$= 10 \times 6 + 10 \times 6 + 5 \times 3$

$= 60 + 60 + 15 = 135$

16. GEOMETRY গণিতের একটি শাখা।

(a) একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন হতে 7 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। এদের মধ্যে তাকে প্রথম পাঁচটি হতে ঠিক চারটি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে । সে কত প্রকারে 7 টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে?

সমাধান : পরীক্ষার্থী প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি ${}^5C_4 = 5$ প্রকারে এবং শেষের 7টি প্রশ্ন হতে 3টি ${}^7C_3 = 35$ প্রকারে বাছাই করতে পারবে ।

$\therefore$ সে $5 \times 35 = 175$ প্রকারে 7টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে ।

(b) শেষ স্থানে y এবং সবগুলি স্বরবর্ণ একত্রে না রেখে উদ্দীপকে বর্ণিত শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

সমাধান: GEOMETRY শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ রয়েছে যাদের 2টি E সহ 3টি স্বরবর্ণ।
শেষ স্থানে y রেখে সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা $=\frac{7!}{2!}=2520$, [$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}$ সূত্রের সাহায্যে]
প্রদত্ত শব্দের স্বরবর্ণ 3টি কে 1টি বর্ণ ধরে এবং y ছাড়া $(8-4+1)$ অর্থাৎ, 5টি ভিন্ন শব্দকে $=5!$ $=720$ উপায়ে এবং স্বরবর্ণ 3টিকে $\frac{3!}{2!}=3$ উপায়ে সাজানো যায়।
∴ শেষ স্থানে y এবং সবগুলি স্বরবর্ণ একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $=720\times 3=2160$
∴ শেষ স্থানে y এবং সবগুলি স্বরবর্ণ একত্রে না রেখে সাজানো সংখ্যা $=2520-2160=360$

(c) উদ্দীপকে বর্ণিত শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত শব্দটির 8টি বর্ণ থেকে 5টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:
(i) সবগুলি বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন
(ii) 2টি E ও অন্য 3টি বর্ণ ভিন্ন
(i) এর ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^7P_5=2520$
(ii) এর ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6C_3\times\frac{5!}{2!}$
$=20\times 60=1200$
∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=2520+1200$
$=3720$

17. Permutations শব্দটিতে পাঁচটি স্বরবর্ণ বিদ্যমান।

(a) 10টি বস্তুর 5টি একবারে নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে?

সমাধান: 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত করে অবশিষ্ট $(10-2)$ অর্থাৎ 8টি বস্তু হতে অপর 3টি বস্তু নির্বাচন করা যায় ${}^8C_3=56$ প্রকারে। নির্বাচিত 5টি বস্তুকে $5!=120$ উপায়ে বিন্যাস করা যায়।
∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=56\times 120=6720$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে বর্ণগুলি কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান: Permutations শব্দটিতে 2টি t সহ মোট 12টি বর্ণ রয়েছে।
∴ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা $=\frac{12!}{2!}=239500800$, [$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}$ সূত্রের সাহায্যে]
প্রদত্ত শব্দের 5টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(12-5+1)$ অর্থাৎ, 8টি যাদের মধ্যে 2টি t ।
এ 8টি বর্ণকে $\frac{8!}{2!}=20160$ প্রকারে এবং 5টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $5!=120$ প্রকারে সাজানো যায়।
∴ স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা
$=20160\times 120=2419200$
∴ স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে সাজানো সংখ্যা = সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা − স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা
$=239500800-2419200=237081600$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 7টি বর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায় যেন অন্তত 3টি স্বরবর্ণ বিদ্যমান থাকে?

সমাধান: Permutations শব্দটিতে পাঁচটি স্বরবর্ণ ও 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ রয়েছে যাদের মধ্যে 2টি t।
7টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:
(i) 3টি স্বরবর্ণ ও 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ
(ii) 4টি স্বরবর্ণ ও 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ
(iii) 5টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ
(i) এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_3({}^6C_4+{}^5C_2)$
[ব্যঞ্জনবর্ণ 4টি ভিন্ন অথবা 2টি t ও 2টি অন্য ব্যঞ্জনবর্ণ]

$= 10\times(15+10) = 250$

(ii) এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_4({}^6C_3+{}^5C_1)$

$= 5\times(20+5) = 125$

(iii) এর ক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_5({}^6C_2+{}^5C_0)$

$= 1\times(15+1) = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= 250 + 125 + 16 = 391$

18. 'EXPRESSION' একটি ইংরেজি শব্দ।

(a) 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলির একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলি অবশ্যই 4 অঙ্কের হতে হবে এবং প্রথম অঙ্কটি 5 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রথম স্থানটি 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(4-1) = 3$টি স্থান বাকি $(6-1) = 5$টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে ${}^5P_3$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= {}^5P_3 = 60$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির যেকোনো সংখ্যক বর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : ' EXPRESSION ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি E এবং 2টি S .
E ও S এর প্রত্যেকটির 0টি , বা 1টি , বা 2টি বাছাই করা যায়। আবার, X, P, R, I, O, N এর প্রত্যেকটির 0টি , বা 1টি বাছাই করা যায়।
$\therefore$ $3^2 \times 2^6$ সংখ্যক উপায়ে বাছাই করা যায়। কিন্তু সকল বর্ণ বর্জন করার ঘটনাও এদের অন্তর্ভুক্ত বলে নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= 3^2 \times 2^6 - 1$

$= 9\times 64 - 1 = 575$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত শব্দটির বর্ণগুলি হতে প্রত্যেকবার 4 টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর ।

সমাধান : 'EXPRESSION' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি E এবং 2টি S .

10টি বর্ণ হতে 4টি বর্ণ নিয়ে নিম্নরূপে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় –

8টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, S, I ,O ও N হতে 4টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8P_4 = 1680$

2টি E এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ X, P, R, S, I, O ও N হতে 2টি নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা
$= {}^2C_2\times {}^7C_2 \times \frac{4!}{2!} = 1\times 21\times 12 = 252$

অনুরূপভাবে, 2টি S এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, I ,O ও N হতে 2টি নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= 252$

2টি E এবং 2টি S নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা
$= {}^2C_2\times {}^2C_2\times \frac{4!}{2!2!} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 1680 + 504 + 6$
$= 2190$

19. গণিতে ব্যবহৃত অঙ্কগুলি হচ্ছে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ।

(a) একটি প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে। কত প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে?

সমাধান ঃ প্রত্যেক ভোটার 3 জন প্রর্থীকে ভোট দিতে পারে 3 উপায়ে ।
$\therefore$ 5 জন ভোটার 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে $3\times3\times3\times3\times3 = 3^5 = 243$ উপায়ে।
$\therefore$ 243 প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে।

(b) উদ্দীপকের শূন্যসহ বিজোড় অঙ্কগুলি দ্বারা পুনরাবৃত্তি না করে ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় যাতে দশকের স্থানে শূন্য না থাকে?

সমাধান : এখানে 5টি বিজোড় অঙ্ক ও শূন্যসহ মোট 6টি ভিন্ন অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।
$\therefore$ প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক 3, 1, 7, 9, 5 এর যেকোনো একটি দ্বারা ${}^5P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থান বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 5! উপায়ে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে মোট সংখ্যা $= {}^5P_1\times 5! = 5\times 120$
$= 600$

আবার, প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক 3, 1, 7, 9, 5 এর যেকেনো একটি দ্বারা ${}^5P_1$ উপায়ে এবং দশকের স্থান শূন্য দ্বারা পূরণ করে অবশিষ্ট 4টি স্থান বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 4! উপায়ে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে মোট সংখ্যা $= {}^5P_1 \times 4! = 5 \times 24$
$= 120$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 600 - 120 = 480$

(c) উদ্দীপকের অঙ্কগুলি দ্বারা পুনরাবৃত্তি না করে 1000 এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 10টি ভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলির শেষে 0 বা 5 থাকতে হবে।

1000-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় ঃ

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 1

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা $= {}^9P_1 + {}^8P_1 = 9 + 8 = 17$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এরূপ মোট সংখ্যা $= {}^9P_2 + ({}^9P_2 - {}^8P_1) = 72 + 72 - 8 = 136$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 1 + 17 + 136 = 154$

20. কোনো পরীক্ষায় (EXAMINATION) তিনটি বিষয়ের প্রতিটির পূর্ণমাণ-100 ।

(a) 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে?

সমাধান : 1টি মুক্তা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট (8 – 1) বা, 7 টি মুক্তাকে 7! প্রকারে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে । কিন্তু হারটি একটি চক্র বিন্যাস যা উপর এবং নিচ থেকে অথবা উল্টিয়ে দেখা যায় ।

$\therefore \frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$ রকমে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে ।

(b) উদ্দীপকের ইংরেজি শব্দটির বর্ণগুলি থেকে দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ ও অন্তত একটি স্বরবর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : EXAMINATION শব্দটিতে 2টি N সহ মোট 5টি ব্যঞ্জন বর্ণ এবং 2টি A ও 2টি I সহ মোট 6টি স্বরবর্ণ আছে।

5টি ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ বাছাই সংখ্যা = A অন্তর্ভুক্ত না করে বাছাই সংখ্যা + 1টি A অন্তর্ভুক্ত করে বাছাই সংখ্যা + 2টি A অন্তর্ভুক্ত করে বাছাই সংখ্যা $= {}^{5-2}C_2 + {}^{5-2}C_{2-1} + {}^{5-2}C_{2-2}$

$= {}^3C_2 + {}^3C_1 + {}^3C_0 = 3 + 3 + 1 = 7$

আবার, অন্তত একটি স্বরবর্ণ বাছাই সংখ্যা
$= (2 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1$
$= 35$

$\therefore$ নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= 7 \times 35 = 245$

(c) একজন ছাত্র কতভাবে 200 নম্বর পেতে পারে?

সমাধান : একজন ছাত্রকে 200 নম্বর পেতে হলে প্রতিটি বিষয়ে 0 হতে 100 নম্বর পেতে হবে। ছাত্রটি নিম্নরূপে পরীক্ষায় 200 নম্বর পেতে পারে -

১ম বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর	২য় বিষয়ে প্রাপত নম্বর	৩য় বিষয়ে প্রাপত নম্বর	মোট প্রাপ্ত নম্বর
0	100	100	200
1	100	99	200
1	99	100	200
2	100	88	200
2	99	99	200
2	88	100	200
...	...	...	...
...	...	...	...

$\therefore$ লক্ষ্যনীয় যে, ১ম বিষয়ে 0 পাওয়া যায় 1 উপায়ে, 1 পাওয়া যায় 2 উপায়ে, 2 পাওয়া যায় 3 উপায়ে। অনুরূপভাবে, ১ম বিষয়ে 3 পাওয়া যায় 4 উপায়ে, 4 পাওয়া যায় 5 উপায়ে, 5 পাওয়া যায় 6 উপায়ে … … …, 100 পাওয়া যায় 101 উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 101$

$$= \frac{101(101+1)}{2} = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$$

21. একটি একদিনের ম্যাচে NEWZEALAND ক্রিকেট দলে 7 জন ব্যাটসম্যান, 6 জন বোলার এবং 2 জন উইকেট কিপার রাখা হলো।[দি.২০১৭]

(a) ${}^nP_3 = 2 \times {}^nC_4$ হলে n-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $^{n}P_3 = 2\times ^{n}C_4$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 2\times\frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n-3).(n-4)!} = \frac{2}{24(n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-3} = \frac{1}{12} \Rightarrow n-3 = 12 \Rightarrow n = 15$$

(b) উদ্দীপক হতে কতভাবে 11 জন খেলোয়াড়ের দল গঠন করা যাবে যাতে সর্বদা 5 জন বোলার এবং কমপক্ষে একজন ইউকেট কিপার থাকবে?

সমাধান : 11 জন খেলোয়াড়ের দল নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

(i) 5 জন বোলার, 1 জন ইউকেট কিপার ও 5 জন বোলার ব্যাটসম্যান

(ii) 5 জন বোলার, 2 জন ইউকেট কিপার ও 4 জন বোলার ব্যাটসম্যান

(i) এর ক্ষেত্রে দল গঠন করা যাবে $^{6}C_5\times ^{2}C_1\times ^{7}C_5 = 6\times2\times21 = 252$ উপায়ে

(ii) এর ক্ষেত্রে দল গঠন করা যাবে $^{6}C_5\times ^{2}C_2\times ^{7}C_4 = 6\times1\times35 = 210$ উপায়ে

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 252 + 210 = 462$

(c) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে NEWZEALAND শব্দের অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যাবে?

সমাধান : NEWZEALAND শব্দটিতে 10টি বর্ণ আছে যার মধ্যে দুইটি A, দুইটি E, দুইটি N।

∴ সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে প্রদত্ত শব্দটির সাজানো সংখ্যা $\frac{10!}{2!\times2!\times2!} = 453600$

প্রদত্ত শব্দের 4টি স্বরবর্ণ (যাদের দুইটি A ও দুইটি E) কে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 4 + 1)$ অর্থাৎ 7টি। সুতরাং, এই 7টি বর্ণ (যাদের দুইটি N) কে $\frac{7!}{2!} = 2520$ প্রকারে সাজানো যায়। আবার, 4টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!\times2!} = 6$ প্রকারে সাজানো যায়।

∴ 4টি স্বরবর্ণকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 2520\times6 = 15120$

∴ স্বরবর্ণগুলি স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে প্রদত্ত শব্দের অক্ষরগুলিকে সাজানো যায় $453600 - 15120 = 438480$ উপায়ে।

22. সম্প্রতি ডিজি অফিস হতে PDS ফাইল আপ-টু ডেট করার জন্য প্রতিটি কলেজে নির্দেশ দেয়। নির্দেশমত আমাদের সহকর্মী মিঃ খান তার ইউজার আইডি "COMBINATION" এবং পাসওয়ার্ড "10652" ব্যবহার করেন।

[ঢা.বো. ২০১৭]

(a) $^{n}P_r = 54$ এবং $^{n}C_r = 9$ হলে, r এর মান নির্ণয় কর। ২

সমাধান : $^{n}P_r = 54 \Rightarrow {^{n}C_r}\times r! = 54$

$$\Rightarrow 9r! = 54 \Rightarrow r! = 6 = 3! \therefore r = 3$$

(b) ইউজার আইডি এর বর্ণগুলি হতে প্রতিবার চারটি করে বর্ণ নিয়ে কত উপায়ে সাজানো যাবে? ৪

সমাধান : ইউজার আইডি "COMBINATION" এর 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে দুইটি O, দুইটি I, দুইটি N। 4টি বর্ণ নিমণরূপভাবে নির্বাচন করা যায়:

(i) সবগুলি বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন

(ii) 2টি একজাতীয় অন্য 2টি ভিন্ন

(iii) 2টি একজাতীয় অন্য 2টি আরেক জাতীয়

(i) এর ক্ষেত্রে সাজানোর উপায় সংখ্যা $= {^{8}C_4}\times 4! = 1680$

(ii) এর ক্ষেত্রে সাজানোর উপায় সংখ্যা $= {^{3}C_1}\times {^{7}C_2}\times\frac{4!}{2!} = 3\times21\times12 = 756$

(iii) এর ক্ষেত্রে সাজানোর উপায় সংখ্যা $= {^{3}C_2}\times\frac{4!}{2!\times2!} = 3\times6 = 18$

∴ সাজানোর উপায় সংখ্যা $= 1680 + 756 + 18$
$= 2454$

(c) পাসওয়ার্ডের প্রত্যেক অংককে প্রতি সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে পাঁচ অংক বিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বেজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়? ৪

সমাধান: বিজোড় সংখ্যা গঠন করতে একক স্থান 1 বা 5 দ্বারা পূরণ করতে হবে এবং ইহা $^2C_1 = 2$ উপায়ে পূরণ করা যায়। একক স্থান 1 বা 5 দ্বারা পূরণ করে বাম দিক হতে ১ম স্থান 0 ছাড়া অবশিষ্ট তিনটি অঙ্কের যেকোনো অঙ্ক দ্বারা $^3C_1 = 3$ উপায়ে পূরণ করা যায়। মধ্যবর্তী তিনটি স্থান বাকী তিনটি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যায় $3! = 6$ উপায়ে।

$\therefore$ অর্থপূর্ণ বেজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় $2\times3\times6 = 36$ সংখ্যক।

23. একটি ক্লাবের কার্যনির্বাহী কমিটির সদস্য 21 জন, যার মধ্যে 8 জন মহিলা ও 13 জন পুরুষ।

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

(a) DEPRESSION শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যাবে যাতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে? ২

সমাধান : DEPRESSION শব্দটিতে 10টি বর্ণ আছে যার মধ্যে দুইটি E , দুইটি S । দুইটি E সহ মোট 4টি স্বরবর্ণ আছে।

প্রদত্ত শব্দের 4টি স্বরবর্ণ (যাদের দুইটি E) কে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে (10 − 4 +1) অর্থাৎ 7টি । সুতরাং, এই 7টি বর্ণ (যাদের দুইটি S) কে $\frac{7!}{2!} = 2520$ প্রকারে সাজানো যায় । আবার, 4টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!} = 12$ প্রকারে সাজানো যায় ।

$\therefore$ 4টি স্বরবর্ণকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 2520\times12 = 30240$

(b) একজন মহিলা সদস্য সভাপতি হলে সভাপতিকে বাদ দিয়ে 11 সদস্যবিশিষ্ট কতগুলো উপকমিটি গঠন করা যাবে যাতে কমপক্ষে 4 জন মহিলা সদস্য অন্তর্ভূক্ত থাকবে? ৪

সমাধান : সভাপতিকে বাদ দিয়ে 11 সদস্যবিশিষ্ট উপকমিটি নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

	7 জন মহিলা	13 জন পুরুষ
(i)	4	7
(ii)	5	6
(iii)	6	5
(iv)	7	4

(i) এর ক্ষেত্রে উপকমিটি গঠন করা যাবে $^7C_4 \times ^{13}C_7 = 35\times1716 = 60060$

(ii) এর ক্ষেত্রে উপকমিটি গঠন করা যাবে $^7C_5 \times ^{13}C_6 = 21\times1716 = 36036$

(iii) এর ক্ষেত্রে উপকমিটি গঠন করা যাবে $^7C_6 \times ^{13}C_5 = 7\times1287 = 9009$

(iv) এর ক্ষেত্রে উপকমিটি গঠন করা যাবে $^7C_7 \times ^{13}C_4 = 1\times715 = 715$

$\therefore$ উপকমিটি গঠন করা যাবে $(60060 + 36036 + 9009 + 715) = 105820$

(c) কার্যনির্বাহী কমিটি হতে দুই জন পুরুষ বাদ দিয়ে অবশিষ্ট সদস্যবৃন্দকে এক সারিতে কতভাবে সাজানো যাবে যাতে দুইজন মহিলা সদস্য একত্রে না থাকে।

সমাধান : (13 − 2) = 11 জন পুরুষকে এক সারিতে সাজানো যাবে 11! প্রকারে।

11 জন পুরুষের মাঝে 10 টি স্থান এবং দুই প্রান্তে দুইটি স্থানসহ মোট 12 টি স্থানে 8 জন মহিলা সদস্যকে বসানো যাবে $^{12}P_8$

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 11!\times ^{12}P_8$

24. SYLHET থেকে BANDARBANএ 10 জন শিক্ষার্থীর একটি দল শিক্ষা সফরে আসল। তাদেরকে দুটি গাড়ীতে ভ্রমণ করতে হবে, যার একটি তে 7 জনের বেশি অন্যটিতে 4 জনের বেশি শিক্ষার্থী ধরে না। **[য .বো.'১৭]**

(a) $f(x) = 2x-5$ এবং $g(x) = x^2+6$ হলে, $(gof)(2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(gof)(2) = g(f(2)) = g(2\times2-5)$
$= g(-1) = (-1)^2+6 = 1+6 = 7$

(b) দেখাও যে, ১ম স্থানটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যা ২য় স্থানটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ।

সমাধান : SYLHET শব্দটিতে 6টি বর্ণ আছে। এ 6টি বর্ণকে বিন্যাস করা যায় $6! = 720$ প্রকারে।

BANDARBAN শব্দটিতে 9টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি B, 3টি A, 2টি N. এ 9টি বর্ণকে বিন্যাস করা যায় $\frac{9!}{2!\times 3!\times 2!} = 15120$ $= 21\times 720$

$\therefore$ SYLHET স্থানটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যা BANDARBAN স্থানটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ।

(c) দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

সমাধান : দলটি নিম্নরূপে ভ্রমণ করতে পারবে?

	১ম গাড়ী (সর্বোচ্চ 7 জন)	২য় গাড়ী (সর্বোচ্চ 4জন)
(i)	7	3
(ii)	6	4

(i) এর ক্ষেত্রে ভ্রমণ করার উপায় সংখ্যা $^{10}C_7\times{}^3C_3 = 120\times 1 = 120$

(ii) এর ক্ষেত্রে ভ্রমণ করার উপায় সংখ্যা $^{10}C_6\times{}^4C_4 = 210\times 1 = 210$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 120 + 210 = 330$

25. প্রসিদ্ধ পদার্থবিজ্ঞানী Isaac Newton ১৭৪১ সলে Englend এ অংশগ্রহন করেন। **[কু.বো.'১৭]**

(a) 1,2,3,4,5,6,7,8,9 অংকগুলো হতে 3 দ্বারা বিভাজ্য নয় এরূপ অংকগুলোর মধ্য হতে 4 টি করে অংক কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : প্রদত্ত অঙ্কগুলির মধ্যে 1, 2, 4, 5, 7, 8 - এ 6টি অঙ্ক 3 দ্বারা বিভাজ্য নয়। এ 6টি অঙ্ক হতে 4 টি করে অংক বাছাই করা যায় $^6C_4 = 15$ ভাবে।

(b) দেখাও যে, দৃশ্যকল্পের বিজ্ঞানীর নামের শেষ অংশের বিন্যাস সংখ্যV নামের প্রথম অংশের বিন্যাস সংখ্যা 12 গুণ।

সমাধান : দৃশ্যকল্পের বিজ্ঞানীর নামের শেষ অংশ Newton এর বর্ণের সংখ্যা 6 যারা ভিন্ন ভিন্ন সুতরাং, এ 6টি বিন্যাস করা যায় $6! = 720 = 12\times 60$ উপায়ে।

আবার, দৃশ্যকল্পের বিজ্ঞানীর নামের প্রথম অংশ Isaac - এর বর্ণের সংখ্যা 5 যাদের মধ্যে দুইটি a । সুতরাং, এ 5টি বর্ণকে বিন্যাস করা যায় $\frac{5!}{2!} = 60$ উপায়ে।

$\therefore$ দৃশ্যকল্পের বিজ্ঞানীর নামের শেষ অংশের বিন্যাস সংখ্যা নামের প্রথম অংশের বিন্যাস সংখ্যা 12 গুণ।

(c) দৃশ্যকল্পে বিজ্ঞানীর জন্মভুমির নামের বর্ণগুলি থেকে পাঁচটি বর্ণ নিয়ে কতগুলি বিন্যাস গঠন করা যায়?

সমাধান : দৃশ্যকল্পে বিজ্ঞানীর জন্মভুমি Englend এর বর্ণের সংখ্যা 7টি যার মধ্যে 2টি n.

এ 7টি বর্ণ হতে 5টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

(i) বর্ণ 5টি ভিন্ন ভিন্ন

(ii) ২টি n ও অপর 3টি বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন

(i) এর ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6C_5\times 5! = 720$

(ii) এর ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^5C_3\times\frac{5!}{2!} = 10\times 60$

$= 600$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 720 + 600 = 1320$

সাজানো পরিবর্তন করে মোট p! সংখ্যক নতুন বিন্যাস পাওয়া যায় । সুতরাং , x সংখ্যক বিন্যাসের জন্য মোট $x \times$ p! সংখ্যক বিন্যাস হবে।

উপর্যুক্ত প্রক্রিয়ার পর দেখা যায় জিনিসগুলো সবই এখন ভিন্ন ভিন্ন এবং (p + q) সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের সবগুলো নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা (p + q)!. $\therefore \quad x \times p! = (p+q)! \Rightarrow x = \dfrac{(p+q)!}{p!}$

(b) 10 টি বর্ণের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন । যদি তাদের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়।

সমাধান ঃ মনে করি, 10টি বর্ণের r সংখ্যক একজাতীয় ।

$\therefore$ এ 10টি বর্ণের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $\dfrac{10!}{r!}$ টি।

প্রশ্নমতে, $\dfrac{10!}{r!} = 30240 \Rightarrow r! = \dfrac{10!}{30240} = \dfrac{3628800}{30240} = 120 = 5! \quad \therefore r = 5$ (Ans.)

4 (a) প্রমাণ কর যে, 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ' CANADA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ । [চ.'০৩]

প্রমাণ ঃ 'AMERICA ' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2 টি A .

$\therefore$ 'AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520 = 21 \times 120$

' CANADA ' শব্দটিতে 3টি A সহ মোট 6টি বর্ণ আছে ।

$\therefore$ ' CANADA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{6!}{3!} = 120$

$\therefore$ 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা 'CANADA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ ।

4. (b) দেখাও যে, ' AMERICA ' শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় 'CALCUTTA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়। [ঢা.'০৪; রা.'১৩]

প্রমাণ ঃ ' AMERICA ' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A .

$\therefore$ ' AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520.$

' CALCUTTA ' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি C , 2টি A এবং 2টি T .

$\therefore$ ' CALCUTTA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{8!}{2!2!2!} = 5040 = 2 \times 2520$

$\therefore$ ' AMERICA ' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় ' CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায় ।

5 (a) ' ARRANGE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়, যাতে R দুইটি পাশাপাশি থাকবে না ?

সমাধান ঃ 'ARRANGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A এবং 2টি R .

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2! \times 2!} = 1260$

2টি R কে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে (7 – 2 + 1) অর্থাৎ, 6টি যাদের 2টি A .

$\therefore$ 2টি R কে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{6!}{2!} = 360$

$\therefore$ R দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – R দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 1260 - 360 = 900$

5 (b) 'ENGINEERING' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে তিনটি E একত্রে থাকবে এবং কতগুলোতে এরা প্রথমে থাকবে। [ব.'০২; রা.'০৩; কু.'০৩]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'ENGINEERING' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে ; যার মধ্যে 3টি E, 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

$\therefore$ সব কয়টি বর্ণকে একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{11!}{3!.3!.2!.2!} = \frac{39916800}{6.6.2.2} = 277200$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ যেহেতু E তিনটি একত্রে থাকে; অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণগুলো হবে (EEE), N, G, I, N, R, I, N, G . এই 9টি বর্ণের 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

$\therefore$ E তিনটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{3!.2!.2!} = \frac{362880}{6.2.2} = 15120$

৩য় অংশ : 3 টি E প্রথমে রেখে অবশিষ্ট বর্ণের সংখ্যা হবে $(11-3)$ অর্থাৎ, 8টি ; যাদের 3টি N, 2টি G ও 2টি I

$\therefore$ E তিনটি প্রথমে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{3!.2!.2!} = \frac{40320}{6.2.2} = 1680$ (Ans.)

6. (a) 'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলো কত প্রকারে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর।

[য.'০৬; ব.'০৭; সি.'০৮,'১১; চ.'০৮,'১২; দি.'০৯; রা.'১১; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'PARALLEL' শব্দটিতে 2টি A এবং 3টি L সহ মোট 8টি বর্ণ আছে।

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{2!.3!} = \frac{40320}{2.6} = 3360$

২য় অংশ ঃ স্বরবর্ণ 3টি পৃথক না হলে, তাদেরকে একটি একক বর্ণ ধরতে হবে এবং ফলে বর্ণগুলো হবে (AAE), P, R, L, L, L.

$\therefore$ 3টি L সহ এই 6টি বর্ণকে $\frac{6!}{3!} = 120$ উপায়ে এবং 2টি A সহ 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা $= 120 \times 3 = 360.$ (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে 'TRIANGLE' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর? [ঢা.'০৫; চ.'০৭; মা.বো.'০৯,'১৩; ব.'১০]

সমাধান ঃ 'TRIANGLE' শব্দটিতে মোট 8টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ।

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= 8! = 40320$

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (IAE), T, R, N, G এবং L . এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে 6! প্রকারে এবং 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 3! প্রকারে সাজানো যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

∴ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 4320 = 36000$

(c) স্বরবর্ণগুলোকে (i) কোন সময়ই পৃথক না রেখে এবং (ii) একত্রে না রেখে ' DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [চ.'১০]

সমাধান ঃ (i) ' DAUGHTER ' শব্দটিতে মোট 8টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

∴ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= 8! = 40320$

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (AUE), D, G, H, T এবং R . এই 6টি ভিন্ন বর্ণকে $6!$ প্রকারে এবং 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3!$ প্রকারে সাজানো যায় ।

∴ স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

(ii) স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 4320 = 36000$

(d) 'DIGITAL' শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণ গুলো একত্রে থাকবে? [য. '১০]

সমাধান ঃ ' DIGITAL ' শব্দটিতে 2টি I সহ মোট 7টি বর্ণ আছে ।

∴ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = 2520$ (Ans.)

3টি স্বরবর্ণ I, I ও A কে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (I I A), D, G, T এবং L . এই 5টি ভিন্ন বর্ণকে $5!$ প্রকারে এবং 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{3!}{2!} = 3$ প্রকারে সাজানো যায় ।

∴ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$ (Ans.)

7. 9 টি বলের 7টি বল লাল, 2টি সাদা (i) এদের উপর কোন বিধি–নিষেধ আরোপ না করে এবং (ii) সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে বলগুলোকে কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে 9 টি বলের মধ্যে 7টি লাল এবং 2টি সাদা।

(i) এদের উপর কোন বিধি–নিষেধ আরোপ না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{7! \times 2!} = 36$

(ii) সাদা বল দুইটি একটি একক বল মনে করলে মোট বলের সংখ্যা হবে $(9 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি যাদের মধ্যে 7টি লাল । অতএব, সাদা বল দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{7!!} = 8$

∴ সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 36 - 8 = 28$

8. (a) স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে ' PERMUTATION ' শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে পুনর্বিন্যাস করা যায়? [ব.'০০, ০৫ ; চ.'০০, ০৪; ঢা.'০৯; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ' PERMUTATION ' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 5টি স্বরবর্ণ।

5 টি স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(11 - 5)$ বা, 6টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ উপায়ে সাজানো যায় ।

∴ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস করার উপায় $= 360 - 1 = 359$ (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোর (i) ক্রম পরিবর্তন না করে (ii) স্থান পরিবর্তন না করে এবং (iii) স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে 'DIRECTOR' শব্দটি কত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) 'DIRECTOR' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ । ক্রম পরিবর্তন না করায় স্বরবর্ণ 3টি (I , E , O) পরস্পরের মধ্যে আগেরটি পরে ও পরেরটি আগে আসতে পারে না । তাই তারা 3টি এক জাতীয় বর্ণের ন্যায় অবস্থান করে । তাহলে, 8 টি বর্ণের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ এক জাতীয় এবং 2টি R অন্য এক জাতীয় ।

∴ স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$

'DIRECTOR' শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

∴ নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা = $3360 - 1 = 3359$

(ii) স্বরবর্ণ 3টির স্থান নির্দিষ্ট রেখে 2টি R সহ 5টি ব্যঞ্জন বর্ণকে $\frac{5!}{2!} = 60$ রকমে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা = $60 - 1 = 59$

(iii) এক্ষেত্রে , স্বরবর্ণ 3টি নির্দিষ্ট 3টি (২য় , ৪র্থ এবং ৭ম) স্থানে নিজেরা $3! = 6$ প্রকারে বিন্যস্ত হয় এবং ব্যঞ্জন বর্ণ 5টি নির্দিষ্ট 5টি (১ম , ৩য় , ৫ম , ৬ষ্ঠ এবং ৮ম) স্থানে নিজেরা $\frac{5!}{2!} = 60$ প্রকারে বিন্যস্ত হয়।

∴ স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6 \times 60 - 1 = 359$

9. (a) 'MILLENNIUM ' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে M থাকবে? [সি.,০৬, '১২; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ১ম অংশঃ 'MILLENNIUM' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M, 2টি L ও 2টি N

∴ এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $\frac{10!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 226800$ উপায়ে।

২য় অংশ ঃ প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ' L ' দ্বারা নিদিষ্ট করে 2টি M এবং 2টি N সহ অবশিষ্ট $(10-2)$ অর্থাৎ , 8টি বর্ণকে 8টি স্থানে $\frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$ উপায়ে সাজানো যায় ।

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা 226800 ও 5040.

(b) 'IMMEDIATE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে T এবং শেষে A থাকবে ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' IMMEDIATE ' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E.

∴ এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় = $\frac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45360$ উপায়ে।

২য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' T ' এবং শেষ স্থানটি ' A ' দ্বারা নিদিষ্ট করে অবশিষ্ট $(9-2)$ বা , 7টি বর্ণকে (যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E) 7টি স্থানে $\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$ উপায়ে সাজানো যায় ।

(c) 'DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো মোট কত রকমে সাজানো যাবে ? কতগুলো D দ্বারা শুরু হবে? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে? [ব.'০৩]

কতগুলোর প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না ? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে না ?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' DAUGHTER' শব্দটির 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে ।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 8! = 40320$

২য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' D ' দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ অর্থাৎ, 7টি বর্ণকে 7! উপায়ে সাজানো যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 7! = 5040$ (Ans.)

৩য় অংশ ঃ প্রথম স্থানটি ' D ' এবং শেষ স্থানটি ' R ' দ্বারা নিদিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-2)$ বা , 6টি বর্ণকে 6! উপায়ে সাজানো যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$ (Ans.)

৪র্থ অংশ ঃ প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না এমন সাজানো সংখ্যা = প্রথমে D থাকে এমন সাজানো সংখ্যা – প্রথমে D এবং শেষে R থাকে এমন সাজানো সংখ্যা $= 5040 - 720 = 4320$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ যেহেতু প্রথম স্থানটি D দ্বারা পূরণ করতে হয় এবং শেষের স্থানটি R দ্বারা পূরণ করা যায় না, অতএব শেষের স্থানটি $(8-2)$ বা, 6টি বর্ণ দ্বারা $^6P_1$ ভাবে পূরণ করা যায় ।

আবার , মাঝের $(8-2)$ বা, 6টি স্থান অবশিষ্ট 6টি বর্ণ দ্বারা 6! উপায়ে পূরণ করা যায় ।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^6P_1 \times 6! = 6 \times 720 = 4320$

৫ম অংশ ঃ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – প্রথমে ' D ' নিয়ে সাজানো সংখ্যা – শেষে ' R ' নিয়ে সাজানো সংখ্যা + প্রথমে ' D ' এবং শেষে ' R ' নিয়ে সাজানো সংখ্যা
$= 8! - 7! - 7! + 6! = 40320 - 2.5040 + 720 = 41040 - 10080 = 30960$

10. (a)' POSTAGE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে? কতগুলোতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে? **[কু.'১৪]**

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ ' POSTAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য়, ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 3! উপায়ে এবং 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

২য় অংশ ঃ 4টি ব্যঞ্জনবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ণ হবে (PSTG), O, A, E । এই 4টি বর্ণকে 4! প্রকারে এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 4! প্রকারে সাজানো যাবে ।

$\therefore$ ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= 4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে কেবল (i) জোড় স্থানে (ii) বিজোড় স্থানে রেখে 'ARTICLE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। **[ঢা. '১০]**

সমাধান ঃ (i) 'ARTICLE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য় , ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 3! উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে কেবল জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

(ii) 7টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^4P_3$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে কেবল বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 4! = 24 \times 24 = 576$

10. (c) 'ALLAHABAD' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলোতে A চারটি একত্রে থাকবে ? এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে?

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ 'ALLAHABAD' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণের মধ্যে 4টি A এবং 2টি L আছে।

$\therefore$ সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{9!}{4! \times 2!} = 7560$

২য় অংশ ঃ A চারটিকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ণ হবে (AAAA), L, L, H, B এবং D. 2টি L সহ এ 6টি বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!} = 360$ উপায়ে এবং A চারটিকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$\therefore$ A চারটি একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360 \times 1 = 360$

৩য় অংশ ঃ 4টি স্থানের মধ্যে 4টি জোড় স্থান 4টি স্বরবর্ণ অর্থাৎ 4টি A দ্বারা $\dfrac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে এবং 5টি বিজোড় স্থান 2টি L সহ 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $\dfrac{5!}{2!} = 60$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 1 \times 60 = 60$

11 (a) দেখাও যে, দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তক যত রকমে সাজানো যায় তার সংখ্যা $(n-2)(n-1)!$

সমাধান ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তকের সবগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= n!$

দুইখানা বিশেষ পুস্তককে একটি একক পুস্তক মনে করলে সাজানোর জন্য $(n-1)$ সংখ্যক পুস্তক পাই। এই $(n-1)$ সংখ্যক পুস্তক একত্রে $(n-1)!$ প্রকারে এবং বিশেষ পুস্তক দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

$\therefore$ দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে রেখে সাজানো সংখ্যা $= (n-1)! \times 2 = 2(n-1)!$

$\therefore$ দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= n! - 2(n-1)! = n.(n-1)! - 2(n-1)!$
$= (n-2).(n-1)!$

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনসকে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস সারির প্রথমে বা শেষে না থাকে?

সমাধান ঃ বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা মধ্যের $(n-2)$ সংখ্যক স্থান $(n-2)!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^{n-2}P_2 \times (n-2)! = (n-2)(n-3).(n-2)!$

(c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে কিন্তু তারা সারির প্রথমে বা শেষে থাকে না?

সমাধান ঃ বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায়। মাঝের $(r-2)$ সংখ্যক স্থান বিশেষ জিনিস দুইটি দ্বারা ${}^{r-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট $(n-4)$ বিভিন্ন জিনিস দ্বারা $(r-4)$ সংখ্যক স্থান ${}^{n-4}P_{r-4}$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^{n-2}P_2 \times {}^{r-2}P_2 \times {}^{n-4}P_{r-4} = (n-2)(n-3)(r-2)(r-3)\dfrac{(n-4)!}{(n-4-r+4)!}$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-r)!}(r-2)(r-3)$$

12. (a) 'SECOND ' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে? [ব.'০৩]

সমাধান : ' SECOND ' শব্দটিতে মোট 6টি বর্ণ আছে যাদের 2টি স্বরবর্ণ এবং 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ। মধ্যম স্থানটি দুইটি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^2P_1 = 2$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^4P_2 = 12$ উপায়ে পূরণ করা যেতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 2 \times 12 = 24$ (Ans.)

(b) 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে দুইটি ব্যঞ্জনবর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়, যাতে স্বরবর্ণটি ব্যঞ্জনবর্ণের মাঝখানে থাকবে?

সমাধান : মধ্যম স্থানটি 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^3P_1 = 3$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি, 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^7P_2 = 42$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। $\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 3 \times 42 = 126$

(c) যদি ' CAMBRIDGE ' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে কেবল 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হয় তবে কতগুলোতে প্রদত্ত শব্দটির সব কয়টি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে? [চ.'০৪; কু.'০৭]

সমাধান : 'CAMBRIDGE' শব্দটিতে মোট 9টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

5টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^5P_3 = 60$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। অবশিষ্ট $(5-3)$ অর্থাৎ, 2টি স্থান 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $^6P_2 = 30$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 60 \times 30 = 1800$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত শব্দটিতে মোট 9টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

6টি ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ $^6C_2$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। 3 টি স্বরবর্ণ এবং 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ 5! প্রকারে বিন্যস্ত হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা $= {}^6C_2 \times 5! = 15 \times 120 = 1800$ (Ans.)

12. (d) 'EQUATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে Q বর্তমান থাকবে কিন্তু N থাকবে না? [য.'০৮]

সমাধান : 'EQUATION' শব্দটিতে 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে। 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দে 4টি স্থানে Q বর্তমান থাকবে $^4P_1 = 4$ উপায়ে। অবশিষ্ট $(4-1)$ অর্থাৎ 3টি স্থান 6টি বর্ণ E, U, A, T, I এবং O দ্বারা পূরণ করা যাবে $^6P_3 = 120$ উপায়ে।

$\therefore$ Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হঠন করা যাবে $4 \times 120 = 480$ টি।

বিকল্প পদ্ধতি : Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হলে অন্য $(8-2) = 6$ টি বর্ণ হতে 3টি বর্ণ নিতে হবে এবং তা $^6C_3 = 20$ উপায়ে নেওয়া যায়। আবার, 4টি ভিন্ন বর্ণ দ্বারা শব্দ গঠন করা যায় $4! = 24$ টি।

$\therefore$ Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হঠন করা যায় $20 \times 24 = 480$ টি।

13. (a) 10 টি বস্তুর 5টি একবারে নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে? [কু.'১০]

সমাধান ঃ 5টি একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের 5টি স্থান 2টি বিশেষ বস্তু দ্বারা $^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5-2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(10-2)$ অর্থাৎ, 8টি বস্তু দ্বারা $^8P_3 = 336$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 20 \times 336 = 6720$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ 2 টি বিশেষ বস্তুকে সর্বদা অন্তর্ভুক্ত রেখে অবশিষ্ট $(10-2)$ বা, 8টি বস্তু হতে 3টি বস্তু $^8C_3$ উপায়ে বেছে নেওয়া যাবে । আবার , 5 টি বস্তুকে $5!$ উপায়ে সাজানো যাবে ।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8C_3 \times 5! = 56 \times 120 = 6720$

(b) ইংরেজি বর্ণমালার 26টি বর্ণ থেকে কতপ্রকারে 5টি বিভিন্ন বর্ণ সমন্বিত একটি শব্দ গঠন করা যায়, যাদের মধ্যে A এবং L অক্ষর দুইটি অবশ্যই থাকবে ?

সমাধান ঃ 5টি অক্ষর নিয়ে গঠিত শব্দে 5টি স্থান A এবং L অক্ষর দ্বারা $^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5-2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(26-2)$ অর্থাৎ, 24টি অক্ষর দ্বারা $^{24}P_3 = 12144$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 20 \times 12144 = 242880$

14 (a) একজন লোকের একটি সাদা, দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো চারটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [রা.'০২]

সমাধান ঃ মোট পতাকার সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 = 6$.

6টি পতাকা হতে 4টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে ঃ

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	1	$\frac{4!}{2!} = 12$
1	1	2	$\frac{4!}{2!} = 12$
1	0	3	$\frac{4!}{3!} = 4$
0	1	3	$\frac{4!}{3!} = 4$
0	2	2	$\frac{4!}{2!2!} = 6$

$\therefore$ সে সংকেত তৈরী করতে পারবে $(12 + 12 + 4 + 4 + 6)$ বা, 38 উপায়ে।

14 (b)একজন লোকের একটি সাদা , দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো পাঁচটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [কু.'০১; দি.'১০; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ মোট পতাকার সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 = 6$.

6টি পতাকা হতে 5টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে ঃ

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	2	$\frac{5!}{2!2!} = 30$
1	1	3	$\frac{5!}{3!} = 20$

0	2	3	$\frac{5!}{2!3!} = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 30 + 20 + 10 = 60$ (Ans.)

15. (a) দুইজন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 14 জন I.Sc. ক্লাসের ও 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে কত রকমে একটি লাইনে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর। **[য.'০৪]**

সমাধান ঃ 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে একটি লাইনে 14! রকমে সাজানো যায়। এই 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রের মাঝখানে $(14-1) = 13$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া লাইনের দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $(13+2) = 15$ টি ফাঁকা স্থানে 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে $^{15}P_{10}$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 14! \times {}^{15}P_{10}$

15 (b) দুইটি যোগবোধক চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন ও q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন $(p < q)$ কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন একজাতীয় এবং q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন একজাতীয়। q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নকে এক সারিতে $\frac{q!}{q!} = 1$ রকমে সাজানো যায়।এই q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নের মাঝখানে $(q-1)$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $\{(q-1)+2\} = (q+1)$ টি ফাঁকা স্থানে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্নকে $\frac{^{q+1}P_p}{p!} = \frac{(q+1)!}{p! \times (q+1-p)!}$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 1 \times \frac{(q+1)!}{p! \times (q+1-p)!} = \frac{(q+1)!}{p! \times (q-p+1)!}$

16 (a) 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? **[ব.'১৩]**

সমাধান ঃ 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো অবশ্যই 4 অঙ্কের হতে হবে এবং প্রথম অঙ্কটি 5 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রথম স্থানটি 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(4-1) = 3$টি স্থান বাকি $(6-1) = 5$টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $^5P_3$ উপায়ে। $\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= {}^5P_3 = 60$

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 5, 6, 7, 8, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ এখানে শূন্যসহ মোট 5টি অঙ্ক আছে । সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অতএব, 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 08, 60, 80, 56, 68, 76 হবে।

শেষ দুইটি স্থান 08, 60 ও 80 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^3P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5-2) = 3$টি স্থান বাকি $(5-2) = 3$টি অঙ্ক দ্বারা 3! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

আবার, শেষ দুইটি স্থান 56, 68 ও 76 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^3P_1$ উপায়ে এবং 0 ব্যতীত অপর দুইটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা প্রথম স্থানটি $^2P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5-3) = 2$টি স্থান 0 ও অপর একটি অঙ্ক দ্বারা 2! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ 4 দ্বারা বিভাজ্য মোট সংখ্যা $= {}^3P_1 \times 3! + {}^3P_1 \times {}^2P_1 \times 2! = 3 \times 6 + 3 \times 2 \times 2 = 18 + 12 = 30$

17. (a) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6 এর বিজোড় অঙ্কগুলো সবসময় বিজোড় স্থানে রেখে সাত অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ সাত অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার 4টি বিজোড় স্থান ও 3টি জোড় স্থান থাকে। 3, 5, 3 ও 5 অঙ্কগুলো দ্বারা 4টি বিজোড় স্থান $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ উপায়ে এবং 4, 4 ও 6 অঙ্কগুলো দ্বারা বাকি স্থান 3টি $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 6 \times 3 = 18$

(b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে?

সমাধান ঃ এখানে 9টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে যাদের 4টি জোড় অঙ্ক।

প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি 4টি জোড় অঙ্কের যেকোন দুইটি দ্বারা $^4P_2$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট $(9-2) = 7$টি স্থান বাকি $(9-2) = 7$টি অঙ্ক দ্বারা 7! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক নিয়ে মোট সংখ্যা $= {}^4P_2 \times 7! = 12 \times 5040 = 60480$

18. কোন সংখ্যায় কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0, 3, 5, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 4000-এর চেয়ে বড় কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে সংখ্যাগুলো 4 অঙ্কের ও 5 অঙ্কের হবে।

4000-এর চেয়ে বড় 4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

$\therefore$ 4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^3P_1 \times {}^4P_3 = 3 \times 24 = 72$

4000-এর চেয়ে বড় 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 3, 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

$\therefore$ 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^4P_1 \times {}^4P_4 = 4 \times 24 = 96$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 72 + 96 = 168$

19(a) 1,2,3, 4 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে তিন অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে অঙ্ক 4টির প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

$\therefore$ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 4টি অঙ্ক দ্বারা 4 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $4 \times 4 = 4^2$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিন ঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4^3 উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (4 + 4^2 + 4^3) = (4 + 16 + 64) = 84$

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার শেষে 1, 3, 5 বা 7 থাকলে সংখ্যাগুলি বিজোড় হবে এবং প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা । তাই, শেষ স্থানটি (অর্থাৎ একক

স্থান) এ চারটি বিজোড় সংখ্যা দ্বারা 4 উপায়ে, বাম দিক হতে প্রথম স্থানটি 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

এক অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

∴ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 7×4 অর্থাৎ 28 উপায়ে।

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 4$ অর্থাৎ 224 উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 4$ অর্থাৎ 1792 উপায়ে।

∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (4 + 28 + 224 + 1792) = 2048$

20. (a) একটি প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে। কত প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে? [য.'০৫; কু.'০৯; রা.'১০]

সমাধান ঃ প্রত্যেক ভোটার 3 জন প্রর্থীকে ভোট দিতে পারে 3 উপায়ে ।

∴ 5 জন ভোটার 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ উপায়ে ।

∴ 243 প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে ।

(b) তিনটি পুরস্কারের একটি সদাচারের জন্য, একটি ক্রীড়ার জন্য এবং একটি সাধারণ উন্নতির জন্য। 10 জন বালকের মধ্যে এগুলো কত রকমে বিতরণ করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ প্রত্যেক পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে 10 উপায়ে বিতরণ করা যায়।

∴ তিনটি পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে বিতরণ করার মোট উপায় সংখ্যা $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$

(c) {A, B, C} সেটের প্রতিটি বর্ণকে প্রতিটি শব্দে অন্তত একবার ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : পাঁচ বর্ণের শব্দের প্রতিটি স্থান 3 উপায়ে পূরণ করা যায়।

∴ {A, B, C} সেটের বর্ণগুলি ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় 3^5 সংখ্যক।

প্রদত্ত বর্ণ তিনটির যেকোনো একটি ব্যতিত অপর বর্ণ দুইটি ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় 2^5 সংখ্যক। সুতরাং, যেকোনো দুইটি বর্ণ ব্যবহার করে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় 3×2^5 সংখ্যক। কিন্তু এদের মধ্যে AAAAA, BBBBB ও CCCCC এর প্রত্যেকটি দুইবার করে অন্তর্ভুক্ত।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 96 + 3 = 150.$

বিকল্প পদ্ধতি: পাঁচটি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়:

(i) 3টি একজাতীয় ও অন্য দুইটি ভিন্ন (যেমন- 5টি বর্ণের ৩টি A, 1টি B ও 1টি C) ।

(ii) 2টি একজাতীয়, 2টি অন্য একজাতীয় ও 1টি অপর বর্ণ (যেমন-5টি বর্ণের ২টি A, 2টি B ও 1টি C)

(i) এর ক্ষেত্রে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 60$ সংখ্যক।

(ii) এর ক্ষেত্রে পাঁচ বর্ণের শব্দ গঠন করা যায় ${}^3C_2 \times \frac{5!}{2!2!} = 90$ সংখ্যক।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 60 + 90 = 150$

21. (a) গণিতের 5 খানা, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে একটি তাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে একই বিষয়ের পুস্তকগুলি একত্রে থাকে?

সমাধান ঃ যেহেতু একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে থাকে, অতএব গণিতের 5 খানা পুস্তককে গণিতের একটি একক পুস্তক, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে পদার্থবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক এবং রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে রসায়নবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক মনে করতে হবে।

∴ এই 3 বিষয়ের পুস্তক $3! = 6$ উপায়ে এবং গণিতের 5 খানা পুস্তককে নিজেদের মধ্যে $5! = 120$ উপায়ে, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে $3! = 6$ উপায়ে ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে $2! = 2$ উপায়ে সাজানো যাবে।

∴ একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6\times 120\times 6\times 2 = 8640$

(b) একটি তালার 4টি রিং এর প্রত্যেকটিতে 5টি করে অক্ষর মুদ্রিত আছে। প্রতিটি রিং এর একটি করে 4টি অক্ষরের একমাত্র বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা গেলে কতগুলি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না ?

সমাধান ঃ প্রতিটি বিন্যাসের প্রথম স্থানটি প্রথম রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।
প্রতিটি বিন্যাসের দ্বিতীয় স্থানটি দ্বিতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।
প্রতিটি বিন্যাসের তৃতীয় স্থানটি তৃতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।
প্রতিটি বিন্যাসের চতুর্থ স্থানটি চতুর্থ রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

∴ চারটি রিং এর অক্ষরগুলি দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা $= 5\times 5\times 5\times 5 = 25$

∴ যেসব বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবেনা তাদের সংখ্যা $= 625 - 1 = 624$

22. (a) 8 জন মেয়ে বৃত্তাকারে নাচবে । কত প্রকারে পৃথক পৃথক ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াবে?

সমাধান ঃ 1 জন মেয়েকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 জন মেয়েকে $7!$ প্রকারে সাজানো যায়।

∴ $7! = 5040$ ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে ।

(b) 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 1টি মুক্তা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 টি মুক্তাকে $7!$ প্রকারে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে । কিন্তু হারটি একটি চক্র বিন্যাস যা উপর এবং নিচ থেকে অথবা উল্টিয়ে দেখা যায় ।

∴ $\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520$ রকমে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে ।

22 (c) দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র ও 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে কত রকমে একটি গোল টেবিলের চারপাশে বসানো যায়, তা নির্ণয় কর। [বা.'১১; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ 1 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ বা, 7 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে একটি গোল টেবিলের চারপাশে $7!$ রকমে বসানো যায় । 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্রের মধ্যের 8 টি আসনে 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে $^8P_7$ রকমে বসানো যায় । ∴ তাদেরকে $7! \times {}^8P_7$ রকমে বসানো যেতে পারে।

(d) 15 সদস্যের একটি কমিটিকে গোলটেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায়? প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে তাদেরকে একটি লম্বা টেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায় তাও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 15 জন সদস্যের মধ্যে একজনকে একটি আসনে নির্দিষ্ট করে বাকি 14 জনকে গোল টেবিলের 14টি আসনে $14!$ উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 14!$

আবার, একটি লম্বা টেবিলে প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে বাকি 14 টি আসনে 14 জনকে $14!$ উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $= 14!$

23 (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2, 4, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 2, 4, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

পাঁচ স্থানের যেকোন একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা ওযুত) $4!$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে।

$\therefore$ পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 4!\times(0+2+4+6+8) = 24\times20 = 480$

$\therefore$ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $0, 2, 4, 6, 8$ অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 480\times1 + 480\times10 + 480\times100 + 480\times1000 + 480\times10000$

$= 480(1+10+100+1000+10000) = 480\times11111 = 5333280$

তবে এদের মধ্যে প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা এবং এরূপ সংখ্যার সমষ্টি = প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $2, 4, 6, 8$ অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 3!\times(0+2+4+6+8)\times1111 = 6\times20\times1111 = 133320$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 5333280 - 133320 = 5199960$

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (2+4+6+8)(4!\times11111 - 3!\times1111) = 5199960$]

23. (b) কোন অঙ্ক কোন সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 1+2+3+4 = 10$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ চারটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট তিনটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি $^3P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে $^3P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি $= {^3P_1}(1+2+3+4)$

$= 10\times{^3P_1} = 30$

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{^3P_1}\times10 + 10\times{^3P_1}\times1$ [যেমন $26 = 2\times10+6\times1$]

$= 10\times{^3P_1}(10+1) = 10\times{^3P_1}\times11 = 330$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{^3P_2}\times111 = 10\times6\times111 = 6660$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 10\times{^3P_3}\times1111 = 10\times6\times1111 = 66660$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 10 + 330 + 6660 + 66660 = 73660$

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (1+2+3+4)(1 + 11\times{^3P_1} + 111\times{^3P_2} + 1111\times{^3P_3})$. যেকোন প্রতিটি অঙ্ক সর্বাধিক চারবার ব্যবহার করে $1, 2, 3, 4$ অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি $= (1+2+3+4)(1 + 11\times4^1 + 111\times4^2 + 1111\times4^3)$

$= 10(1 + 44 + 1776 + 71104) = 729250$]

23 (c) প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যার গড় নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের $\frac{9!}{5!4!} = 126$ সংখ্যক সংখ্যা গঠিত হয়। যেকোন স্থান (একক, দশক,শতক ইত্যাদি) 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 4টি 5 ও 4টি 4 দ্বারা

$\frac{8!}{4!4!} = 70$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 70 বার 5 পুনরাবৃত্ত হয় । আবার, যেকোন স্থান 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 5টি 5 ও 3টি 4 দ্বারা $\frac{8!}{5!3!} = 56$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 56 বার 4 পুনরাবৃত্ত হয় ।

∴ নয় অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 5\times 70 + 4\times 56 = 350 + 224 = 574$.

∴ প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি
$= 574 \times 111111111 = 63777777714$

∴ নির্ণেয় গড় $= 63777777714 \div 126 = 506172839$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা:

24. 'EQUATION' শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান ঃ 'EQUATION' শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে ।
এই 8টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^8P_8 = 8! = 40320$ (১)

25. 'LAUGHTER' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলো L দ্বারা শুরু হবে? (১)

সমাধান ঃ 'LAUGHTER' শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে । এই 8টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^8P_8 = 8! = 40320$

(১) + (১)

প্রথম স্থানটি L দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8-1)$ অর্থাৎ, 7টি অক্ষরকে তাদের নিজেদের মধ্যে $7! = 5040$ উপায়ে সাজানো যায়। সুতরাং L দ্বারা শুরু হয় এরূপ সাজানো সংখ্যা $= 5040$ (১) + (১)

26. (a) নিচের শব্দগুলোর সবগুলো বর্ণ একবারে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় ঃ (i) committee (ii) infinitesimal (iii) proportion ?

সমাধান : (i) **'committee'** শব্দটিতে মোট 9টি অক্ষর আছে, যাদের মধ্যে 2টি m, 2টি t এবং 2টি e (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{2!\times 2!\times 2!}$ (১)

(ii) infinitesimal শব্দটিতে মোট 13টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 4টি i, 2টি n . (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{13!}{4!\times 2!}$ (১)

(iii) proportion শব্দটিতে মোট 10টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 2টি p, 2টি r, 3টি o. (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{10!}{2!\times 2!\times 3!}$ (১)

(b) একটি লাইব্রেরীতে একখানা পুস্তকের 8 কপি , দুইখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 3 কপি , তিনখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 5 কপি এবং দশখানা পুস্তকের 1 কপি করে আছে। সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে?

সমাধান ঃ মোট পুস্তকের সংখ্যা $= 8 + 2\times 3 + 3\times 5 + 10 = 8 + 6 + 15 + 10 = 39$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{39!}{8! \times 3! \times 3! \times 5! \times 5! \times 5!} = \dfrac{39!}{8! \times (3!)^2 \times (5!)^3}$ (১)

27. স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে **'INSURANCE'** শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ 'INSURANCE' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণ । যেহেতু স্বরবর্ণ 4টি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে বর্ণগুলো হবে (IUAE), N, S, R, N, C . (১)

$\therefore$ 2টি N সহ এই 6টি বর্ণকে $\dfrac{6!}{2!} = 360$ প্রকারে সাজানো যায় । আবার, 4 টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $4! = 24$ প্রকারে সাজানো যায় । (১) + (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360 \times 24 = 8640$ (১)

28. (a) **'CHITTAGONG'** শব্দটির বর্ণগুলো কত রকম ভাবে বিন্যাস করা যায়, যখন স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে। [চ.'০১]

সমাধান ঃ ' CHITTAGONG ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।
যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি। (১)

2টি T ও 2টি G সহ এই 8টি বর্ণকে $\dfrac{8!}{2!.2!} = 10080$ প্রকারে এবং 3 টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3! = 6$ প্রকারে সাজানো যায় । (১) + (১)

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা $= 10080 \times 6 = 60480$ (১)

(b) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে **'TECHNOLOGY'** শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে বিন্যাস করা যায়? [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান ঃ 'TECHNOLOGY' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।
যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি । (১)

এই 8টি ভিন্ন বর্ণকে 8! উপায়ে এবং 2টি O সহ 3 টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\dfrac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে বিন্যাস করা যায় । (১) + (১)

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে বর্ণগুলোর মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 8! \times 3 = 120960$ (১)

29. **7টি সবুজ , 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে ? এদের কতগুলোতে লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে থাকবে?**

সমাধান: ১ম অংশ : এখানে মোট $(7+ 4+ 2)=13$টি কাউন্টারের মধ্যে 7টি সবুজ, 4টি নীল এবং 2টি লাল। (১)

$\therefore$ সবগুলো কাউন্টার একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{13!}{7! \times 4! \times 2!} = 25740$ (১)

২য় অংশ ঃ লাল কাউন্টার দুইটিকে একটি একক কাউন্টার মনে করলে মোট কাউন্টার সংখ্যা হবে $(13 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 12টি যাদের মধ্যে 7টি সবুজ এবং 4টি নীল । (১)

$\therefore$ লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \dfrac{12!}{7! \times 4!} = 3960$ (১)

30. **'IDENTITY' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে I এবং শেষে I থাকবে ? কতগুলোতে I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে থাকবে ?**

সমাধান : ১ম অংশ : 'IDENTITY' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I এবং 2টি T. (১)

∴ এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় $= \frac{8!}{2! \times 2!!} = 10080$ প্রকারে। (১)

২য় অংশ : প্রথম ও শেষ স্থান দুইট ' I ' দ্বারা নিদিষ্ট করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(8-2)$ অর্থাৎ, 6টি বর্ণকে 6টি স্থানে $\frac{6!}{2!} = 360$ প্রকারে সাজানো যায় । (১)

৩য় অংশ : I দুইটিকে একটি একক বর্ণ এবং T দুইটি একটি একক বর্ণ মনে করে মোট ভিন্ন বর্ণের সংখ্যা হবে $(8-2)$ অর্থাৎ, 6টি। সুতরাং, I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$ (১)

31. **ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে 'EQUATION' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।**

সমাধান : 'EQUATION' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। (১)

এখানে 8টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $^4P_3$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 5টি স্থান 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 5! উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১) + (১)

∴ ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 5! = 24 \times 120 = 2880$ (১)

32. (a) **6টি পরীক্ষার খাতাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে, যাতে সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না থাকে?**

সমাধান : 6টি খাতা একত্রে $6! = 720$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একটি একক খাতা মনে করে মোট খাতার সংখ্যা হবে $(6-2+1)$ অর্থাৎ 5 টি। এই 5টি খাতা একত্রে $5! = 120$ প্রকারে এবং সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

∴ সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= 120 \times 2 = 240$ (১)

∴ সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= 720 - 240 = 480$ (১)

(b) **আটটি বস্তুকে এক সারিতে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে , যাতে (i) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে থাকে এবং (ii) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না থাকে?**

সমাধান : (i) দুইটি বিশেষ বস্তুকে একটি একক বস্তু মনে করলে সাজানোর জন্য $(8-2+1)$ অর্থাৎ, 7টি বস্তু পাই। এই 7টি বস্তু একত্রে 7! প্রকারে এবং বিশেষ বস্তু দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

∴ দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 7! \times 2 = 5040 \times 2 = 10080$ (১)

(ii) 8টি বস্তুকে এক সারিতে $8! = 40320$ প্রকারে সাজানো যায়। (১)

∴ দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 40320 - 10080 = 30240$ (১)

33. (a) **'PERMUTATIONS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে?**

সমাধান : 'PERMUTATIONS' শব্দটিতে মোট 12টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 2টি T সহ 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ । মধ্যম স্থানটি 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $^5P_1 = 5$ উপায়ে পূরণ করা যাবে । (১)

প্রান্ত স্থান 2টি 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ P, R, M, T, N ও S দ্বারা $^6P_2 = 30$ উপায়ে এবং 2টি T দ্বারা $\frac{2!}{2!} = 1$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

অতএব, প্রান্ত স্থান 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $(30 + 1) = 31$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

∴ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 5 \times 31 = 155$ (Ans.) (১)

(b) **একটি বালকের 11টি বিভিন্ন বস্তু আছে, যার মধ্যে 5টি কালো এবং 6টি সাদা। একটি কালো বস্তু মাঝখানে রেখে সে তিনটি বস্তু এক সারিতে কত প্রকারে সাজাতে পারে?**

সমাধান ঃ সারির মাঝখানের স্থানটি 5টি বিভিন্ন কালো বস্তু দ্বারা $^5P_1 = 5$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি অবশিষ্ট $(11 - 1) = 10$টি বিভিন্ন বস্তু দ্বারা $^{10}P_2 = 90$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

∴ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 5 \times 90 = 450$ (১)

(c) **a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলো থেকে তিনটি অক্ষর দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর, যেখানে প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকে।**

সমাধান ঃ a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলোর মধ্যে 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ। 6টি অক্ষরের যেকোনো 3টি নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_3$. (১)

এদের মধ্যে কেবল 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_3$ (১)

∴ প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_3 - {}^4P_3 = 120 - 24 = 96$. (১)

34. **দুইজন মেয়েকে পাশাপাশি না রেখে x জন ছেলে ও y জন মেয়েকে ($x > y$) কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।** (১)

সমাধান ঃ x জন ছেলেকে এক সারিতে $x!$ প্রকারে সাজানো যায়।

এই x জন ছেলের মাঝখানে ($x - 1$) টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকাস্থান পাওয়া যায়। (১)

সুতরাং, $\{(x-1) + 2\} = (x+1)$ টি ফাঁকা স্থানে y জন মেয়েকে $^{x+1}P_y$ উপায়ে সাজানো যায়। (১)

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= x! \times {}^{x+1}P_y$ (১)

35. (a) **প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে না?**

সমাধান ঃ এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 6টি অঙ্ক দ্বারা ছয় অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^6P_6 = 6! = 720$ (১)

শেষ স্থানটি 5টি অঙ্ক 2, 3, 4, 6 ও 7 এর যেকোনো একটি দ্বারা $^5P_1$ প্রকারে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থানে বাকি 5টি অঙ্ককে 5! প্রকারে সাজানো যায়। (১) + (১)

∴ 5 দ্বারা বিভাজ্য নয় এরূপ মোট সংখ্যা $= {}^5P_1 \times 5! = 5 \times 120 = 600$ (১)

(b) **প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 2, 2, 2, 3, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 400000 অপেক্ষা বড় হবে?** (১)

সমাধান ঃ ১ম অংশ ঃ এখানে 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ মোট 6টি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= \dfrac{6!}{3! \times 2!} = 60$

২য় অংশ ঃ 400000 অপেক্ষা বড় সংখ্যাগুলোর প্রথম অঙ্কটি 4 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে।

প্রথম স্থানটি 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(6-1) = 5$টি স্থান 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূ
করা যাবে $\dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 10$

36. (a) 1, 2, 3 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান ঃ এখানে অঙ্ক 3টির প্রতিটি যে কোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

$\therefore$ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 3 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 3টি অঙ্ক দ্বারা 3 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $3 \times 3 = 3^2$ উপায়ে। (১)

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট ও চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে যথাক্রমে 3^3 ও 3^4 উপায়ে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = (3 + 9 + 27 + 81) = 120$ (১)

[দ্র. : 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন সংখ্যা গঠন করা যা
$\dfrac{5(5^4 - 1)}{5 - 1} = 780$ উপায়ে।]

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোনো সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। (১)

তাই, বাম দিক হতে সংখ্যার প্রথম স্থান 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে। (১)

$\therefore$ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7×8 অর্থাৎ 56 উপায়ে। (১)

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8$ অর্থাৎ 448 উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 8$ অর্থাৎ 3584 উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= (7 + 56 + 448 + 3584) = 4095$ (১)

37. তিনটি ফুটবল খেলার ফলাফল কত উপায়ে হতে পারে?

সমাধান ঃ প্রথম খেলার ফলাফল কোনো বিশেষ দলের জন্য জয়, পরাজয় অথবা অমীমাংসিত অর্থাৎ 3 উপায়ে হতে পারে। অনুরূপ ২য় খেলার ফলাফল 3 উপায়ে এবং ৩য় খেলার ফলাফলও 3 উপায়ে হতে পারে। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 3 \times 3 \times 3 = 27$ (১)

38. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে। (১)

পাঁচ স্থানের যেকোনো একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপাযে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা অযুত) 4! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে। (১)

$\therefore$ পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $= 4! \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9)$

$= 24 \times 25 = 600$ (১)

$\therefore$ প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 600\times1 + 600\times10 + 600\times100 + 600\times1000 + 600\times10000$ (১)

$= 600(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 600 \times 11111 = 6666600$ (Ans.)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (5 - 1)! \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 11111 = 24 \times 25 \times 11111 = 6666600$]

(b) **কোনো অঙ্ক কোনো সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ (১)

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোনো একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি ${}^4P_1$ উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে ${}^4P_1$ সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়। (১)

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি $= {}^4P_1 (1 + 3 + 5 + 7 + 9)$

$= 25 \times {}^4P_1 = 100$ (১)

$\therefore$ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_1 \times 10 + 25 \times {}^4P_1 \times 1$ [যেমন $26 = 2 \times 10 + 6 \times 1$]

$= 25 \times {}^4P_1 (10 + 1) = 25 \times {}^4P_1 \times 11 = 1100$ (১)

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25\times {}^4P_2 \times111 = 25 \times 12 \times111 = 33300$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_3 \times1111 = 25 \times 24 \times1111 = 666600$

পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি $= 25 \times {}^4P_4 \times11111 = 25 \times 24 \times11111 = 6666600$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 25 + 1100 + 33300 + 666600 + 6666600 = 7367625$ (১)

[বি.দ্র. : নির্ণেয় সমষ্টি $= (1 + 3 + 5 + 7 + 9)(1 + 11 \times {}^4P_1 + 111\times {}^4P_2 + 1111 \times {}^4P_3 + 11111\times {}^4P_4)$]

প্রশ্নমালা VI B

1. (a) দেওয়া আছে, ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2} \Rightarrow r + r + 2 = 2n$ [$\because$ ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে, $x + y = n$]

$\Rightarrow 2r = 2(n - 1) \quad \therefore r = n - 1$ (Ans.)

(b) দেওয়া আছে, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 2 : 3$

১ম এবং ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} = 1 : 2 \Rightarrow \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} \frac{1}{2} \Rightarrow 2\, {}^nC_r = {}^nC_{r+1}$