তৃতীয় অধ্যায়

সরলরেখা

Straight Lines

Euclid

জ্যামিতি গণিতের একটি অতি পুরাতন শাখা। আভিধানিক অর্থে 'জ্যা' অর্থ ভূমি বা স্থান এবং 'মিতি' অর্থ পরিমাপ। সুতরাং জ্যামিতি অর্থ ভূমি বা স্থানের পরিমাপ। বস্তুত স্থানের পরিমাপের ধারণা থেকেই গণিতের এই শাখার উৎপত্তি।

খ্রিস্টপূর্ব ৩০০০ অব্দ থেকে Mesopotamia (বর্তমান ইরাক), Egypt (বর্তমান মিশর) এবং সিন্ধু উপত্যকায় জ্যামিতির ব্যবহার হতো বলে প্রমাণ পাওয়া যায়। প্রাচীন মিশরীয়রা তাদের কৃষি ভূমির সীমানা সংক্রান্ত জরিপের কাজের মধ্য দিয়ে সর্বপ্রথম জ্যামিতির সূত্রপাত করেন। গ্রীক গণিতবিদ ইউক্লিড ৩০০ খ্রিস্টপূর্বে এই ধারণা বিন্যস্ত করে একটি সুবিন্যস্ত বৈজ্ঞানিক কাঠামোয় রূপান্তরিত করেন। এ কারণে **ইউক্লিডকে** জ্যামিতির জনক বলা হয়। ইউক্লিড জ্যামিতিতে রেখা একটি মৌলিক ধারণা। ইউক্লিড প্রথম রেখাকে সংজ্ঞায়িত করেন "প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য" হিসেবে। মূলত রেখা হলো অবিরত বিন্দুর সেট যা ইচ্ছামত যেকোনো দিকে বর্ধিত করা যায়। অন্যভাবে বলা যায় একটি রেখা হলো কোনো পথ যা একটি চলমান বিন্দুর সঞ্চারণের দ্বারা সৃষ্ট। সপ্তদশ শতকের প্রথমার্ধে জ্যামিতির সঙ্গে বীজগণিতের সম্পর্ক স্থাপন এবং বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির প্রয়োগ সফলতার সাথে সর্বপ্রথম তুলে ধরেন বিখ্যাত দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes) (1596-1650)। তার প্রবর্তিত জ্যামিতিকে বিশ্লেষণমূলক (Analytical) জ্যামিতি বলে। কার্তেসীয় সমতলে দুই চলকবিশিষ্ট একমাত্রিক সমীকরণের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা। যদি কোনো সমতলে চলমান একটি বিন্দু তার চলার পথে দিক পরিবর্তন না করে তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে **সরলরেখা** বলে। সরলরেখার বক্রতা শূন্য। দুইটি বিন্দুর মধ্যে সরলরেখার দূরত্বই ক্ষুদ্রতম। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং, অর্থনীতি, ব্যবসায় গণিত, প্রকৌশলবিদ্যা ইত্যাদি ক্ষেত্রে সরলরেখার সমীকরণ ব্যাপকভাবে ব্যবহার হয়ে থাকে।

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে—

- সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সঞ্চারপথ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং দূরত্ব সূত্র প্রয়োগ করে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- সরলরেখার ঢাল ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখার ঢাল নির্ণয় করতে পারবে।
- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- বিভিন্ন আকারের সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- দুই চলকের একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, প্রমাণ করতে পারবে।
- লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন করতে পারবে।
- দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে পারবে।
- সমান্তরাল নয় এমন দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করতে পারবে।
- দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে পারবে।
- বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে। দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবে।
- নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ : সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক, কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক, দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব, উদাহরণমালা, অনুশীলনী-3(A)
- পাঠ-২ : রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক, উদাহরণমালা, অনুশীলনী-3(B)
- পাঠ-৩ : ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, উদাহরণমালা, অনুশীলনী-3(C)
- পাঠ-৪ : সঞ্চারপথ, উদাহরণমালা, অনুশীলনী-3(D)
- পাঠ-৫ : সরলরেখা, সরলরেখার ঢাল, দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল, অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, সরলরেখার সমীকরণ
- পাঠ-৬ : সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ, উদাহরণমালা
- পাঠ-৭ : অনুশীলনী-3(E)
- পাঠ-৮ : লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন, দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু
- পাঠ-৯ : দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ, দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল এবং লম্ব হওয়ার শর্ত, বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ, উদাহরণমালা
- পাঠ-১০ : অনুশীলনী-3(F)
- পাঠ-১১ : সরলরেখার একই পার্শ্ব অথবা বিপরীত পার্শ্বের বিন্দুসমূহ অথবা সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্ব এবং ঋণাত্মক পার্শ্বের বিন্দুসমূহ, কোনো বিন্দু হতে সরলরেখার দূরত্ব
- পাঠ-১২ : উদাহরণমালা
- পাঠ-১৩ ও ১৪: অনুশীলনী-3(G)
- পাঠ-১৫ ও ১৬ : ব্যবহারিক

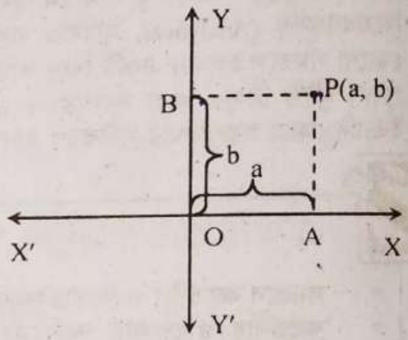
পাঠ-১

3.1 সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক (Cartesian and polar co-ordinates on plane)

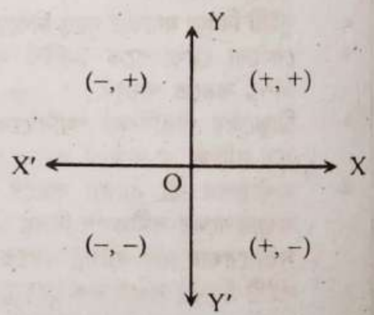
3.1.1 আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক: বস্তুর পৃষ্ঠকে তল বলে। কোনো তলের ওপরে অবস্থিত যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি সম্পূর্ণভাবে ঐ তলে থাকে তবে ঐ তলকে **সমতল** (Plane) বলা হয়।

কোনো সমতলে লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরছেদী দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে **আয়ত অক্ষ** (Rectangular axes) এবং ছেদবিন্দুকে **মূলবিন্দু** (Origin) বলা হয়। উক্ত রেখাদ্বয়ের অনুভূমিক রেখাটিকে **x-অক্ষ,** উল্লম্ব রেখাটিকে **y-অক্ষ** এবং এই সমতলকে **কার্তেসীয় সমতল** (Cartesian Plane) বলা হয়। রেনে দেকার্তের নামানুসারে এ সমতলের নামকরণ করা হয়েছে।

সমতলে x-অক্ষ থেকে b দূরত্বে এবং y-অক্ষ থেকে a দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুকে (a, b) ক্রমজোড়ের সাহায্যে সূচিত করা হয় এবং একে উক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলে।



চিত্রে, XOX′ কে x-অক্ষ, YOY′ কে y-অক্ষ এবং O কে মূলবিন্দু বিবেচনা করি। সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু P হতে x-অক্ষের ওপর PA এবং y-অক্ষের ওপর PB লম্ব হলে, OA = BP (y-অক্ষ হতে বিন্দুটির দূরত্ব) কে P বিন্দুর **ভুজ** (abscissa) এবং OB = PA (x-অক্ষ হতে বিন্দুটির দূরত্ব) কে P বিন্দুর **কোটি** (ordinate) বলা হয়। যদি OA = BP = a এবং OB = AP = b হয়, তবে (a, b) কে P বিন্দুর আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বা সংক্ষেপে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়, যাকে P(a, b) দ্বারা সূচিত করা হয়।



XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমগ্র সমতলটি চারটি ভাগে বিভক্ত হয়। ভাগগুলো যথাক্রমে XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX এই ভাগগুলোর প্রত্যেককে একটি চতুর্ভাগ (Quadrant) বলা হয়। XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয়।

কোনো বিন্দু (a, b) –

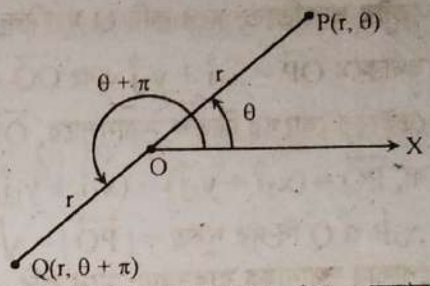
(i) প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে, যদি a ও b উভয়েই ধনাত্মক হয়।
(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে, যদি a ঋণাত্মক ও b ধনাত্মক হয়।
(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে, যদি a ও b উভয়েই ঋণাত্মক হয়।
(iv) চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে, যদি a ধনাত্মক ও b ঋণাত্মক হয়।

3.1.2 ক্রমজোড়ের মাধ্যমে ধারণা: কোনো সমতলের প্রতিটি বিন্দুই দুইটি বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড়। সুতরাং কার্তেসীয় সমতলে যে কোনো বিন্দু $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ দ্বারা সকল বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ দ্বারা গুণজ সেট সূচিত করা হলো)। অর্থাৎ গুণজ সেট $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ কে কার্তেসীয় সমতলও বলা যায়।

দ্রষ্টব্য: (i) মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0); (ii) x-অক্ষ রেখার ওপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর কোটি শূন্য (0); (iii) y-অক্ষ রেখার ওপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর ভুজ শূন্য (0)

3.1.3 পোলার স্থানাঙ্ক: সমতলের যেকোনো বিন্দুর অবস্থান জানার জন্য কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যতীত অপর এক প্রকার স্থানাঙ্ক ব্যবহার করা হয়, যা পোলার স্থানাঙ্ক নামে পরিচিত।

মনে করি, কোনো সমতলের ওপর অবস্থিত O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং OX একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এখানে নির্দিষ্ট বিন্দু O কে **মূলবিন্দু** (Origin) বা **পোল** (Pole) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা OX কে **আদি রেখা** (Initial line) বলা হয়। যদি ঐ সমতলে P যে কোনো বিন্দুর জন্য OP = r এবং $\angle XOP = \theta$ হয় তবে (r, θ) দ্বারা P এর অবস্থান নির্দিষ্টভাবে জানা যায়।



এই (r, θ) কে P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক বলা হয়। একে $P(r, \theta)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $r = OP$ কে **ব্যাসার্ধ ভেক্টর** (Radius vector) এবং $\angle XOP = \theta$ কে **ভেক্টর কোণ** (Vectorial angle) বলা হয়।

ভেক্টর কোণটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (Anti-clock-wise) পরিমাপ করলে ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clock-wise) পরিমাপ করলে ঋণাত্মক ধরা হয়।

এই পদ্ধতিতে কোনো বিন্দু $P(r, \theta)$ এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে ভেক্টর কোণ θ অঙ্কন করে, পরে r সমান ব্যাসার্ধ কেটে নেওয়া হয়। PO কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $OP = OQ$ হয়।

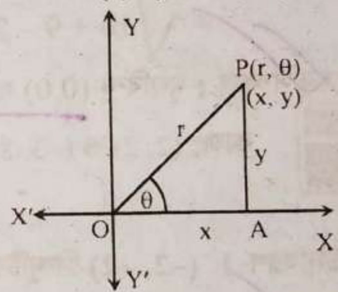
তাহলে $(r, \theta + \pi)$ কে Q এর পোলার স্থানাঙ্ক বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: এখানে সর্বদা $r > 0$

3.2 কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক

(Relation between polar and cartesian co-ordinates)

ধরা যাক, কার্তেসীয় সমতলে যেকোনো একটি বিন্দু P এর পোলার ও কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r, θ) এবং (x, y)।



OP যোগ করি এবং OX এর ওপর PA লম্ব আঁকি।

তাহলে, $OP = r, \angle POA = \theta, OA = x$ এবং $PA = y$

ΔOAP-হতে পাই, $\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r} \quad \therefore x = r\cos\theta \cdots\cdots$ (i)

$\sin\theta = \frac{PA}{OP} = \frac{y}{r} \quad \therefore y = r\sin\theta \qquad \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) বর্গ করে যোগ করে পাই, $r^2 = x^2 + y^2 \quad \therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} \cdots\cdots$ (iii)

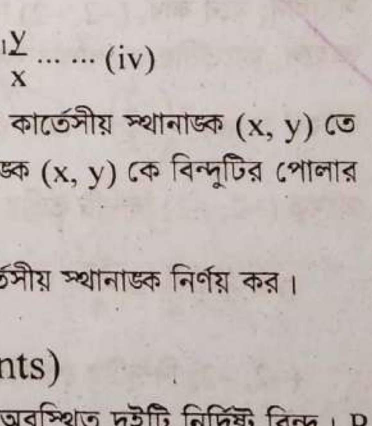
আবার (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করলে পাই, $\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$ বা, $\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \cdots\cdots$ (iv)

সুতরাং সমীকরণ (i) ও (ii) দ্বারা কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) কে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) তে প্রকাশ করা যায়। আবার, সমীকরণ (iii) ও (iv) দ্বারা কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) কে বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) তে প্রকাশ করা যায়।

কাজ: 1. $(3, -3)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **2.** $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3.3 দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points)

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়: মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ একই সমতলে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P ও Q বিন্দু হতে x অক্ষের ওপর যথাক্রমে PA ও QB লম্ব আঁকি। আবার P হতে QB রেখার ওপর PR লম্ব আঁকি।



তাহলে, $OA = x_1$, $OB = x_2$, $PA = y_1$ এবং $QB = y_2$

$\therefore PR = AB = OB - OA = x_2 - x_1$

এবং $QR = QB - RB = QB - PA = y_2 - y_1$

এখন PRQ সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

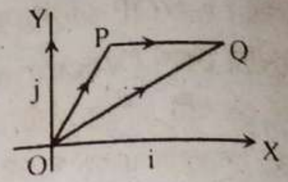
$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

যা $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব প্রকাশ করে।

সুতরাং, দুইটি বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

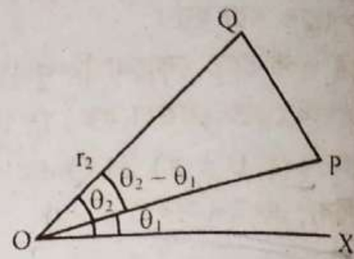
ভেক্টর পদ্ধতিতে: মনে করি O মূলবিন্দু। তাহলে O এর সাপেক্ষে $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$



ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ বা, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j}) = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$

$\therefore$ P ও Q বিন্দুর দূরত্ব $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়: মনে করি, O মূলবিন্দু ও OX আদি রেখা সাপেক্ষে দুইটি বিন্দু $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$.

তাহলে $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ \cos POQ = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$

$\therefore PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$

উদাহরণ: $P\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$ ও $Q\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$PQ = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2.4.3 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{16 + 9 - 24 \cos\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{16 + 9 - 24 \cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{25 - 24.0} = \sqrt{25} = 5$$

অনুসিদ্ধান্ত : মূলবিন্দু (0,0) হতে সমতলস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর দূরত্ব, $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

কাজ: (2, 2) ও (−3, 3) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

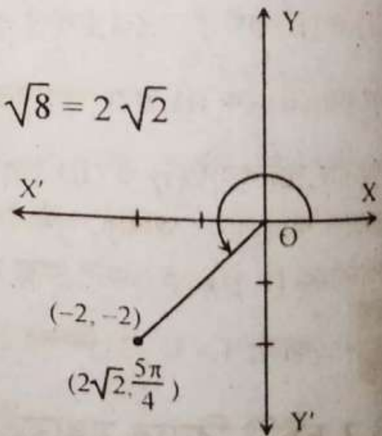
উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. (−2, −2) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, (−2, −2) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)

তাহলে, কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক হতে পাই, $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2}\right) = \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$



যেহেতু (−2, −2) বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, সেহেতু $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

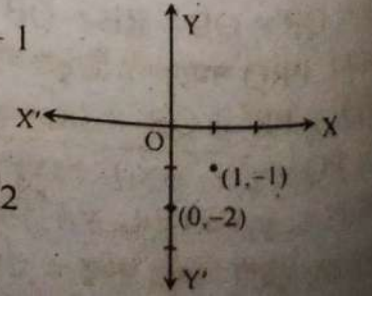
$\therefore \quad$ (−2, −2) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

উদাহরণ-2. $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ এবং (2, 270°) বিন্দুদ্বয়ের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y), তাহলে, $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুর জন্য;

$x = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ এবং $y = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$\therefore \left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (1, −1)



আবার, $(2, 270^0)$ বিন্দুর জন্য; $x = 2\cos(270^0) = 0$ এবং $y = 2\sin(270^0) = -2$

$\therefore (2, 270^0)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (0, −2)

উদাহরণ-3. নিম্নলিখিত কার্তেসীয় আকারের সমীকরণটিকে পোলার আকারে এবং পোলার আকারের সমীকরণটিকে কার্তেসীয় আকারে প্রকাশ কর : (i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ii) $r\cos(\theta-\alpha)=K$

সমাধান: কোনো বিন্দুর কার্তেসীর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে, স্থানাঙ্কের সম্পর্ক অনুসারে $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ এবং $r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বা, $\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1 \quad \therefore r^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)=a^2b^2$

(ii) $r\cos(\theta-\alpha)=K$ বা, $r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=K$
বা, $(r\cos\theta)\cos\alpha+(r\sin\theta)\sin\alpha=K;\ \therefore x\cos\alpha+y\sin\alpha=K$

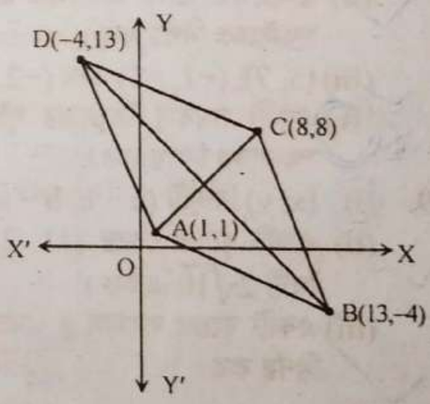
উদাহরণ-4. $(h, k), (h_1, k_1)$ এবং মূলবিন্দু সমরেখ হলে, দেখাও যে, $hk_1=h_1k$.

সমাধান: (h, k) এবং মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\sqrt{h^2+k^2}$
(h_1, k_1) এবং মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\sqrt{h_1^2+k_1^2}$
(h, k) এবং (h_1, k_1) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\sqrt{(h-h_1)^2+(k-k_1)^2}$
বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, $\sqrt{h^2+k^2}\pm\sqrt{h_1^2+k_1^2}=\sqrt{(h-h_1)^2+(k-k_1)^2}$
বা, $h^2+k^2+h_1^2+k_1^2\pm2\sqrt{(h^2+k^2)(h_1^2+k_1^2)}=h^2+h_1^2+k^2+k_1^2-2hh_1-2kk_1$
বা, $\pm\sqrt{(h^2+k^2)(h_1^2+k_1^2)}=-(hh_1+kk_1)$
বা, $h^2h_1^2+h^2k_1^2+h_1^2k^2+k^2k_1^2-h^2h_1^2-k^2k_1^2-2hh_1kk_1=0$
বা, $(hk_1-h_1k)^2=0\ \therefore hk_1=h_1k$

উদাহরণ-5. দেখাও যে $(1, 1), (13, -4), (8, 8)$ এবং $(-4, 13)$ বিন্দুগুলো একটি রম্বসের শীর্ষ বিন্দু। [দি: বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, বিন্দু চারটি $A(1, 1), B(13, -4), C(8, 8)$ এবং $D(-4, 13)$

তাহলে, $AB=\sqrt{(1-13)^2+(1+4)^2}=\sqrt{169}=13$
$BC=\sqrt{(13-8)^2+(-4-8)^2}=\sqrt{169}=13$
$CD=\sqrt{(8+4)^2+(8-13)^2}=\sqrt{169}=13$
$DA=\sqrt{(-4-1)^2+(13-1)^2}=\sqrt{169}=13$
$\therefore AB=BC=CD=DA$
সুতরাং ABCD একটি বর্গক্ষেত্র অথবা রম্বস হতে পারে।
এখানে $AC=\sqrt{(1-8)^2+(1-8)^2}=\sqrt{98}$
এবং $BD=\sqrt{(13+4)^2+(-4-13)^2}=\sqrt{578}$
অর্থাৎ কর্ণ $AC\neq$ কর্ণ BD. সুতরাং ABCD একটি রম্বস।



অনুশীলনী-3(A)

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

(i) $(1, 0)$ (ii) $(1, -\sqrt{3})$ (iii) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ (iv) $(-2, 2)$

2. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

(i) $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$ (ii) $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$ (iii) $(4, 30°)$ (iv) $(2, 225°)$

3. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর:

(i) $y=mx+c$ (ii) $x^2+y^2=a^2$ (iii) $xy=c^2$ (iv) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

4. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে কার্তেসীয় আকারে প্রকাশ কর:
(i) $r\cos(\theta-\alpha)=k$ (ii) $r=2a\cos\theta$ (iii) $r^2\cos2\theta=0$ (iv) $r(1+\cos\theta)=2$ [কু: বো: ০৮]

5. প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর:
(i) $(3, 4)$ ও $(-1, 1)$ (ii) $(6, 4)$ ও $(0, -4)$ (iii) $(a, -a)$ ও $(b, -b)$, যেখানে $a > b$
[য: বো: ১০, ০৬; রা: বো: ১০, ০৪]

6. (i) y-অক্ষ ও $(7, 2)$ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ১৩; চ: বো: ১০; কু: বো: ০৭; সি: বো: ০৩]
(ii) x-অক্ষ ও $(-5, -7)$ থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দুরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৩]
(iii) কোনো বিন্দুর ভুজ 2 এবং $(2, 4)$ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব 3 একক হলে কোটি নির্ণয় কর।
(iv) $(5, 3)$ বিন্দু হতে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর কোটি 3 হলে তার ভুজ নির্ণয় কর।[কু: বো: ১১; ব: বো: ০৩]
(v) একটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং তার একটি প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, -2)$, অপর প্রান্ত বিন্দুর ভুজ 5 হলে তার কোটি নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, (i) $(1, -2)$, $(2, 0)$ এবং $(4, 4)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।
(ii) $(1, 2)$, $(3, 4)$ এবং $(5, 6)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।
(iii) $(1, 2)$, $(-4, 2)$ এবং $(-4, 7)$ বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 12.5 বর্গ একক।
(iv) $(2, 4)$, $(2, 6)$ এবং $(2+\sqrt{3}, 5)$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
(v) $(-2, -1)$, $(3, -1)$, $(3, 2)$ এবং $(-2, 2)$ বিন্দু চারটি একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।
(vi) $(-3, -2)$, $(4, -3)$, $(5, 4)$ এবং $(-2, 5)$ বিন্দু চারটি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।
(vii) $(6, 1)$, $(10, -1)$, $(12, 1)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।
(viii) $A(-10, -3)$, $B(-6, -5)$, $C(-10, -7)$ এবং $D(-14, -5)$ বিন্দু চারটি ABCD রম্বসের শীর্ষবিন্দু।

8. (i) একটি বিন্দুর কোটি এর ভুজের দ্বিগুণ। যদি এর দূরত্ব $(4, 3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৭; দি: বো: ১৩; মাদ্রাসা বো: ১১, ১০]
(ii) x-অক্ষের ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু P হতে $(1, 2)$ ও $(4, 5)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব সমান হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
(iii) $(5, 7)$, $(-1, -1)$ এবং $(-2, 6)$ বিন্দু তিনটি হতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু P হলে, P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
(iv) একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -4)$ এবং $(0, 4)$ হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[রা: বো: ০৫; সি: বো: ১৩, ০৯]

9. (i) (x, y) বিন্দুটি $(a+b, b-a)$ এবং $(a-b, a+b)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, $bx = ay$.
(ii) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(11, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ 10, ঐ বৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(2, -1)$ দেখাও যে, তার দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$ একক।
[ব: বো: ১১]
(iii) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
[চ: বো: ১৩; কু: বো: ১৬, ১০]

উত্তরমালা

1. (i) $(1, 0)$ (ii) $\left(2, \frac{-\pi}{3}\right)$ অথবা $(2, \frac{5\pi}{3})$ (iii) $(5, -\frac{\pi}{4})$ অথবা $\left(5, \frac{7\pi}{4}\right)$ (iv) $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

2. (i) $(\sqrt{3}, -1)$ (ii) $(2\sqrt{3}, -2)$ (iii) $(2\sqrt{3}, 2)$ (iv) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

3. (i) $r(\tan\theta - m) = c\sec\theta$ (ii) $r^2 = a^2$ (iii) $r^2\sin2\theta = 2c^2$ (iv) $r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$

4. (i) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k$ (ii) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ (iii) $x^2 - y^2 = 0$ (iv) $y^2 = -4(x-1)$

5. (i) 5 (ii) 10 (iii) $(a-b)\sqrt{2}$

6. (i) $\frac{29}{7}$ (ii) $-\frac{65}{7}$ (iii) 1 অথবা 7 (iv) 1 অথবা 9 (v) -6 অথবা 2

8. (i) $(3, 6)$ বা $(1, 2)$ (ii) $(6, 0)$ (iii) $(2, 3)$ (iv) $(4\sqrt{3}, 0)$ অথবা $(-4\sqrt{3}, 0)$ 9. (iii) $4\sqrt{5}$

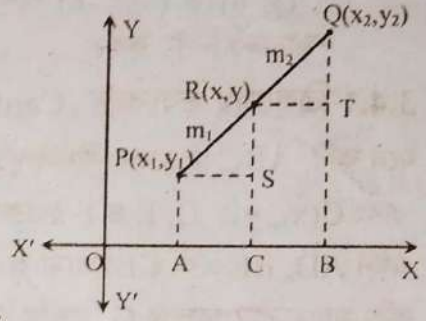
পাঠ-২

3.4 রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Coordinates of a line divisor point)

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ কোনো বিন্দুতে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হলে, বিভক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, অক্ষ সমতলে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ $R(x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে। এখানে রেখাংশটি দুই প্রকারে বিভক্ত হতে পারে। যথা— (i) **অন্তর্বিভক্ত** এবং (ii) **বহির্বিভক্ত।**

(i) **অন্তর্বিভক্তির ক্ষেত্রে:** মনে করি, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ R বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।



অর্থাৎ $PR : RQ = m_1 : m_2$ বা, $\frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$

P, Q এবং R বিন্দু হতে OX এর ওপর যথাক্রমে PA, QB এবং RC লম্ব আঁকি। আবার P বিন্দু হতে RC এর ওপর PS এবং R বিন্দু হতে QB এর ওপর RT লম্ব আঁকি।

তাহলে, $OA = x_1, OB = x_2, OC = x$ এবং $PA = y_1, QB = y_2, RC = y$

$\therefore PS = AC = OC - OA = x - x_1$ এবং $RS = RC - SC = RC - PA = y - y_1$

আবার, $RT = CB = OB - OC = x_2 - x$ এবং $QT = QB - TB = QB - RC = y_2 - y$

এখানে, PRS এবং QRT ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{PS}{RT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT}$ বা, $\frac{PS}{RT} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{RS}{QT}$ …… (i)

এখন (i) নং থেকে পাই, $\frac{PS}{RT} = \frac{m_1}{m_2}$

বা, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $(m_1 + m_2)x = m_1x_2 + m_2x_1$ | $\therefore x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

আবার, $\frac{RS}{QT} = \frac{m_1}{m_2}$ [(i) নং হতে]

বা, $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $(m_1 + m_2)y = m_1y_2 + m_2y_1$ | $\therefore y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

সুতরাং অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত 1 : যদি R, PQ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m_1 = m_2$ সেক্ষেত্রে $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ এবং $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ অর্থাৎ বিভক্ত বিন্দু বা মধ্যবিন্দু R এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ হয়।

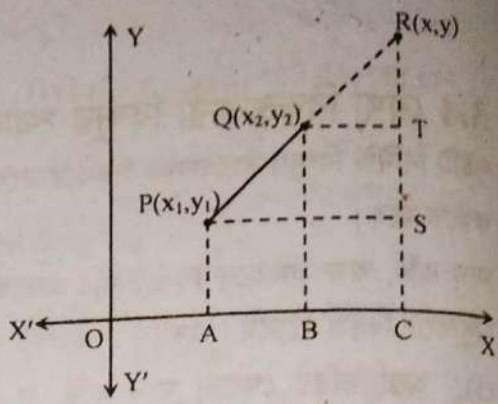
অনুসিদ্ধান্ত 2 : যদি R, PQ রেখাংশকে $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে, $x = \frac{kx_2 + x_1}{k + 1}$ এবং $y = \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}$ অর্থাৎ বিভক্ত বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right)$ হয়।

(ii) বহির্বিভক্তির ক্ষেত্রে: মনে করি, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ R বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।

অর্থাৎ $PR : QR = m_1 : m_2$ বা, $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{m_1}{m_2}$

সুতরাং বহির্বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক

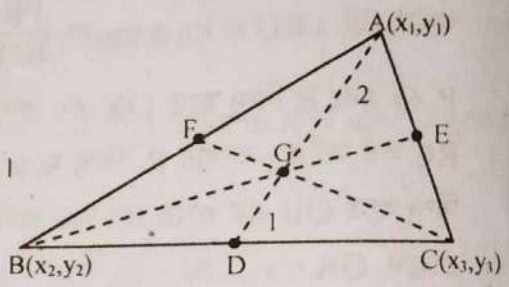
$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$



কাজ: 1. (2, –5) ও (–5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি 4 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. (3, 6) ও (–5, –6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি 4 ঃ 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3.4.1 ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (Centroid of Triangle) [ঢা: বো: ০৪]



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$; D, E ও F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু।

এখন AD, BE এবং CF মধ্যমা অঙ্কন করি।

ধরি, মধ্যমাত্রয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, G বিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয় এবং বিন্দুটি প্রত্যেক মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। তাহলে, $AG : GD = 2 : 1$

যেহেতু, BC বাহুর মধ্যবিন্দু D, সুতরাং D এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$

ধরি, G এর স্থানাঙ্ক (x, y)

$$\therefore x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1.x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ এবং } y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1.y_1}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$\therefore \text{G এর স্থানাঙ্ক } \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

সুতরাং ত্রিভুজ ABC এর ভরকেন্দ্র $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

কাজ: A(3, 5), B(–5, –3) ও C(7, –4) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

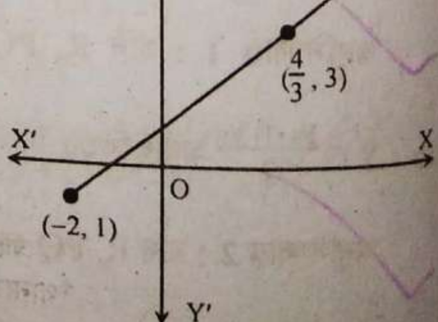
উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. (3, 5) এবং (–2, –1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি 2 ঃ 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বিন্দুটি (x, y)। তাহলে,

$$x = \frac{2\times(-2) + 4\times3}{2 + 4} = \frac{4}{3} \text{ এবং } y = \frac{2\times(-1) + 4\times5}{2 + 4} = 3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বিন্দু } \left(\frac{4}{3}, 3\right)$$



উদাহরণ-2. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, 7) ও (6, 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6, 4); তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব: বো: ১০, ১২; সি: বো: ০৪, ১২; মাদ্রাসা বো: ১১]

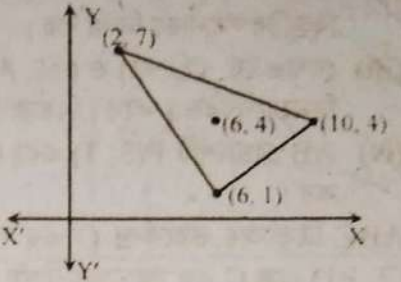
সমাধান: মনে করি, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটি (x, y); তাহলে,

$$6 = \frac{2+6+x}{3} \qquad \text{এবং } 4 = \frac{7+1+y}{3}$$

বা, $x + 8 = 18$ বা, $y + 8 = 12$

$\therefore x = 10$ $\therefore y = 4$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষবিন্দু (10, 4)



উদাহরণ-3. (2, −4) এবং (−3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ x-অক্ষ ও y-অক্ষ দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় কর।

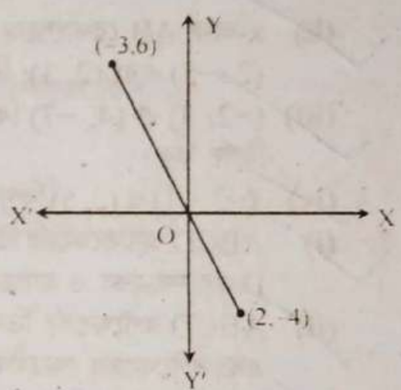
[রা: বো: ০৮, ০৪; ঢা: বো: ০৯]

সমাধান: মনে করি, (2, −4) ও (−3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা m : 1 এবং y-অক্ষ দ্বারা n : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

x-অক্ষের ওপর অবস্থিত সকল বিন্দুর কোটি শূন্য

$$\therefore 0 = \frac{m \times 6 + 1 \times (-4)}{m+1} \text{ বা, } 6m - 4 = 0$$

বা, $m = \frac{2}{3}$ $\therefore m : 1 = 2 : 3$



সুতরাং x-অক্ষ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $\frac{2}{3} : 1$ বা 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

আবার, y-অক্ষের ওপর অবস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ শূন্য

$$\therefore 0 = \frac{n \times (-3) + 1 \times 2}{n+1} \text{ বা, } -3n + 2 = 0 \text{ বা, } n = \frac{2}{3} \quad \therefore n : 1 = 2 : 3$$

সুতরাং y-অক্ষ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অনুশীলনী-3(B) 24-10-18

1. (i) (1, 2) ও (4, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি 3 : 5 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   (ii) (−6, 2) ও (−7, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   (iii) (a, 2) ও (b, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে a : b $(a \neq b)$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. (i) (a + b, b − a) ও (a − b, b + a) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   (ii) (7, 7) ও (3,5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. (i) A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−2, 4) এবং (4, −5); AB রেখাংশকে C পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হলো যেন, AB = 3BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   [ঢা: বো: ০৮; সি: বো: ১০, ১১; কু: বো: ০৯; রা: বো: ১৫, ১৩; দি: বো: ১৬, ১৫, ১০; য: বো: ০৬; চ: বো: ১১, ০৯, ০৫]

   (ii) A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−3, −1) এবং (2, 2); AB রেখাংশকে C পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হলো যেন, AB = 2BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. (i) (7, 5) ও (−2, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা: বো: ১১, ০৯; ব: বো: ০৫]

(ii) দেখাও যে, (−3, −2) এবং (6, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর একটি মূলবিন্দু। অপর বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৬; য: বো: ১৩, ০৯; চ: বো: ০৮; সি: বো: ০৮; কু: বো: ০৩]

(iii) দেখাও যে, (2, −2) ও (−1, 4) বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে অক্ষ রেখাদ্বয় (অর্থাৎ x-অক্ষ ও y-অক্ষ) সমান তিনভাগে বিভক্ত করে। বিভাজন বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৫; সি: বো: ১৩, ০৪; ব: বো: ০৭]

(iv) AB রেখাংশটি P(3, 3) এবং Q(8, 5) বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত করা হয়, A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব: বো: ১১]

5. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক (7, 2); A ও B শীর্ষ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 5) ও (7, −1) হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব: বো: ০৬]

6. (i) (7, 7) ও (−5, −10) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর এবং বিভাজন বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১২; য: বো: ০৮; সি: বো: ১১, ০৭; রা: বো: ১২, ০৬, ০৩; ব: বো: ১৩; কু: বো: ০৫; চ: বো: ০৪; মাদ্রাসা বো: ১১]

(ii) x-অক্ষ AB রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। এখানে A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, −5) এবং (2, 3); বিভক্ত বিন্দুটির স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

(iii) (−2, 3) ও (4, −7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৭]

(iv) (−3, −1) ও (2, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

7. (i) ABCD আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(3, 2), B(2, −1) এবং C(8, −3)। চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৩; চ: বো: ০৬; ব: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(ii) ABCD বর্গক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(8, 8), B(9, −5), C(−4, −6); চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৩; কু: বো: ১৩]

(iii) ABCD সামান্তরিকের A, B ও C শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−2, −1), (1, 3) এবং (1, 6) হলে, D-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(iv) কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, −4) এবং (−6, 5); এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু (−2, −1) হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৭; কু: বো: ০৬, ০৪; রা: বো: ১৪; চ: বো: ১৪; সি: বো: ১৪, ০৬, ০৩; দি: বো: ০৯; য: বো: ১১; ব: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২]

(v) যদি A(2,5), B(5,9) এবং D(6,8) বিন্দুত্রয় ABCD রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয় তবে অপর শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১০, ০৫; সি: বো: ০৯; ব: বো: ০৯]

8. (i) A(8, 10) ও B(18, 20) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে Q এবং R বিন্দু দুইটি 2 ঃ 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে। Q এবং R বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং P বিন্দু AB-এর মধ্যবিন্দু হলে, দেখাও যে, $PQ.PR = PB^2$. [কু: বো: ১৪]

(ii) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$, $(at_3^2, 2at_3)$; যদি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র x-অক্ষের ওপর অবস্থান করে তবে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$। [ঢা: বো: ১৬, ০৩; য: বো: ০৯; কু: বো: ০৬; সি: বো: ০৫; ব: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ০৯]

উত্তরমালা

1. (i) $\left(\frac{17}{8}, \frac{31}{8}\right)$ (ii) (− 4, − 4) (iii) $\left(\frac{2ab}{a+b}, 2\right)$ এবং (0, 2) 2. (i) (a, b) (ii) (5, 6) 3. (i) (6, −8) (ii) $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

4. (i) (4, 3), (1, 1) (ii) (3, 2) (iii) (1, 0), (0, 2) (iv) A(−2, 1), B(13, 7) 5. (11, 2)

6. (i) 7 ঃ 10, $\frac{35}{17}$ (ii) 5 ঃ 3; (2, 0) (iii) 3 ঃ 7 এবং 1 ঃ 2 (iv) 1 ঃ 5 এবং 3 ঃ 2

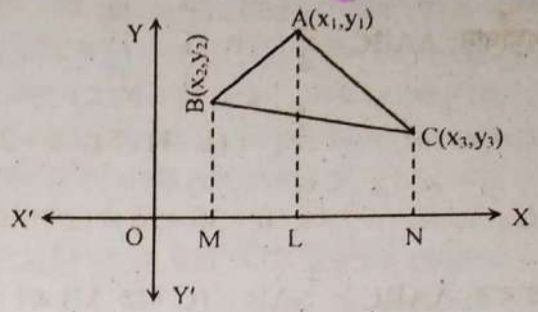
7. (i) (9, 0), 20 বর্গ একক (ii) (−5, 7), 170 বর্গ একক (iii) (−2, 2) (iv) (−1, 2) (v) (9, 12); 7 বর্গ একক

8. (i) (12, 14), (−12, −10)

পাঠ-৩

3.5 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)

মনে করি, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$. শীর্ষবিন্দু A, B ও C হতে OX-এর ওপর যথাক্রমে AL ও BM এবং CN লম্ব আঁকি।



তাহলে, $ML = OL - OM = x_1 - x_2$

$MN = ON - OM = x_3 - x_2$

এবং $LN = ON - OL = x_3 - x_1$

এখানে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল = (ট্রাপিজিয়াম ABML এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম ALNC এর ক্ষেত্রফল) – ট্রাপিজিয়াম BMNC এর ক্ষেত্রফল ……… (i)

আমরা জানি, ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি) $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব।

$\therefore$ (i) থেকে পাই,

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}(BM + AL).\ ML + \frac{1}{2}(AL + CN).\ LN - \frac{1}{2}(BM + CN).MN$$

$$= \frac{1}{2}\{(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 + y_1 - y_1 - y_3) + x_2(-y_2 - y_1 + y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের সাহায্যে কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সময় ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক অনুযায়ী শীর্ষবিন্দুগুলো নিয়ে নির্ণায়কের সারিতে পরপর বসালে ক্ষেত্রফল ধনাত্মক (+) এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে নিলে ঋণাত্মক (–) চিহ্নযুক্ত হয়। (–) চিহ্নযুক্ত ক্ষেত্রফল আসলে, (–) চিহ্ন বাদ দিয়ে ক্ষেত্রফল প্রকাশ করতে হয়। কেননা ক্ষেত্রফল সর্বদা ধনাত্মক।

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\} = \frac{1}{2}\{x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

সূত্রটি Shoelace Formula নামে পরিচিত। যার মূল ভিত্তি হলো Gauss's area formula বা Surveyor's formula.

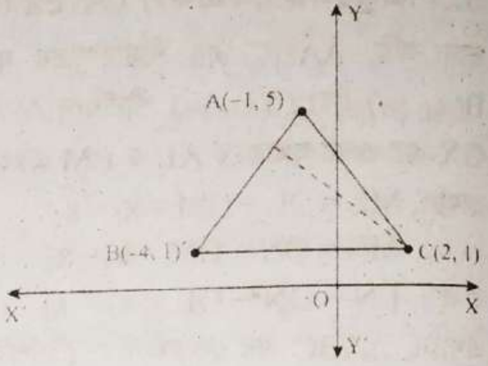
অনুসিদ্ধান্ত: A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ (একই রেখায় অবস্থিত) হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল শূন্য হবে। সুতরাং (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

কাজ: 1. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো $A(3, -1)$, $B(-2, 5)$ ও $C(-4, -3)$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. $(3, -4)$, $(5, a)$, $(6, 3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে 'a' এর মান নির্ণয় কর।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো A(−1, 5), B(−4, 1) এবং C(2, 1) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে C হতে AB বাহুর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



সমাধান: $\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{-1(1-1) - 5(-4-2) + 1(-4-2)\}$

$= \frac{1}{2}(0 + 30 - 6) = 12$ বর্গ একক

আবার, $\Delta ABC = \frac{1}{2} AB \times$ (C হতে AB এর ওপর লম্ব)

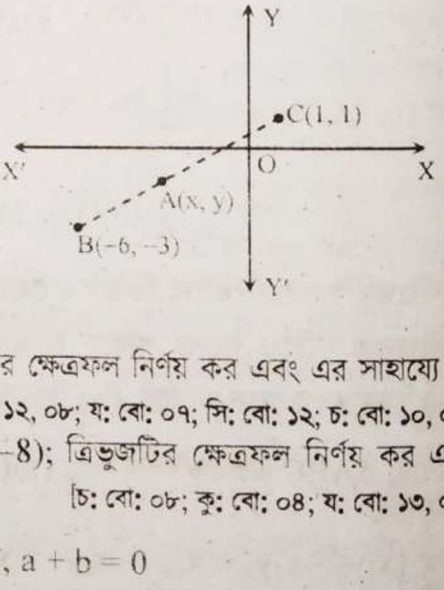
$\therefore$ C হতে AB এর ওপর লম্ব $= \frac{2\Delta ABC}{AB} = \frac{24}{\sqrt{(-1+4)^2 + (5-1)^2}}$

$= \frac{24}{\sqrt{9+16}} = \frac{24}{5}$ একক

→ (ক্ষেত্রফল সূত্র)

উদাহরণ-2. (x, y) বিন্দুটি (− 6, − 3) এবং (1, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার ওপর অবস্থিত হলে, দেখাও যে, 4x − 7y + 3 = 0

সমাধান: মনে করি, A(x, y), B(−6, −3) এবং C(1, 1); শর্তানুসারে, A বিন্দুটি BC রেখার ওপর অবস্থিত। সুতরাং বিন্দু তিনটি সমরেখ।



$\therefore \Delta ABC = 0$ বা, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

বা, $x(-3-1) - y(-6-1) + 1(-6+3) = 0$

বা, $-4x + 7y - 3 = 0$ সুতরাং $4x - 7y + 3 = 0$

অনুশীলনী-3(C)

1. (i) ΔABC এর শীর্ষত্রয় A(5, 6), B(−9, 1) ও C(−3, −1); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A হতে BC বাহুর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [দি: বো: ১০; ঢা: বো: ১২, ০৮; য: বো: ০৭; সি: বো: ১২; চ: বো: ১০, ০৫]

   (ii) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো A(−3, −2), B(−3, 9) এবং C(5, −8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৮; কু: বো: ০৪; য: বো: ১৩, ০৪]

2. (i) (a, b), (b, a) এবং $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাও যে, $a + b = 0$

   (ii) (x, 0), (5, 4) ও (−3, − 4) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

   (iii) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক (t + 1, 1), (2t + 1, 3) ও (2t + 2, 2t); তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, t = 2 অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে ঐ বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

   [কু: বো: ১০, ০৩; রা: বো: ১৬, ১০, ০৮; চ: বো: ১৬, ১৫; সি: বো: ১১, ০৭; য: বো: ১২; ব: বো: ১০, ০৭; ঢা: বো: ০৬]

   (iv) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু (2, −1), (a + 1, a − 3), (a + 2, a) হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। a এর মান কত হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে? [রা: বো: ১২; চ: বো: ০৭; দি: বো: ১৪; সি: বো: ০৬]

   (v) a এর মান কত হলে (a, 2−2a), (1−a, 2a) ও (−4−a, 6−2a) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার ওপর অবস্থিত হবে? [ঢা: বো: ১৩, ১১; কু: বো: ১৪, ১২; মাদ্রাসা বো: ১৩; সি: বো: ১৬, ১০; চ: বো: ১৪, ০৯; য: বো: ০৮; ব: বো: ১৫]

(vi) যদি A(3,4), B(2t,5), C(6, t) বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৪; ব: বো: ১৩; সি: বো: ০৪; য: বো: ১৪, ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(vii) ΔOAB এর শীর্ষত্রয় যথাক্রমে (0, 0), $(a\cos\beta, -a\sin\beta)$ এবং $(a\sin\alpha, a\cos\alpha)$ দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। [চ: বো: ১২; য: বো: ০৩; ব: বো: ০৪]

3. (i) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A(x, y), B(1, 2), C(2, 1) এবং এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক। দেখাও যে, $x + y = 15$. [রা: বো: ১৩, ১১, ০৬; য: বো: ১১; কু: বো: ১৩; সি: বো: ১৪; ব: বো: ০৯, ০৪]

(ii) A(x, y), B(2, 4), C(−3, 3) বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x - 5y = 0$. [ব: বো: ০৬]

(iii) প্রমাণ কর যে, (P, P − 2), (P + 3, P) এবং (P + 2, P + 2) বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল P বর্জিত। [কু: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১০]

(iv) A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং O মূলবিন্দু হলে, মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ [ঢা: বো: ০৯; দি: বো: ১২; য: বো: ০৫; চ: বো: ০৬, ০৩]

4. (i) ΔABC-এর A, B, C শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 5), (−3, 3), (−1, −1) এবং D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু। ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$. [ব: বো: ০৫]

(ii) ΔABC-এর A, B এবং C শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−1, 2), (2, 3) এবং (3, − 4); P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে, $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{x - 3y + 7}{22}$. [কু: বো: ০৭]

(iii) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A(4, −3), B(13, 0), C(−2, 9) এবং D, E, F বিন্দুত্রয় ত্রিভুজের বাহুগুলোর ওপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = 3 : 1$.

(iv) দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে (3, 0), (0, 7), (1, 1) এবং (13, 3), (2, 3), (−11, 2); দেখাও যে, ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান এবং তাদের উভয়ের ভরকেন্দ্র একই।

5. একটি চতুর্ভুজ ABCD এর কৌণিক বিন্দু A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক (1, 2), (−5, 6), (7, − 4), এবং (k, −2); তার ক্ষেত্রফল শূন্য হলে, k-এর মান নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৮]

6. (i) A, B, C ও D চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1), (1, 0), (5, 1) এবং (−10, −4); CD সরলরেখা AB সরলরেখাকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

(ii) A, B, C ও D বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, −1), (15, 2), (−1, 2) এবং (4, −5); CD কে AB রেখাংশটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৫; কু: বো: ১১; দি: বো: ১৩; ব: বো: ০৭]

উত্তরমালা

1. (i) 29 বর্গ একক, $\frac{29}{\sqrt{10}}$ একক, (ii) 44 বর্গ একক, $\frac{44}{5}$ একক

2. (ii) 1 (iii) $\frac{1}{2}(2t^2 - 3t - 2)$ বর্গ একক (iv) $\frac{1}{2}(2a - 1)$ বর্গ একক, $\frac{1}{2}$ (v) −1, অথবা, $\frac{1}{2}$

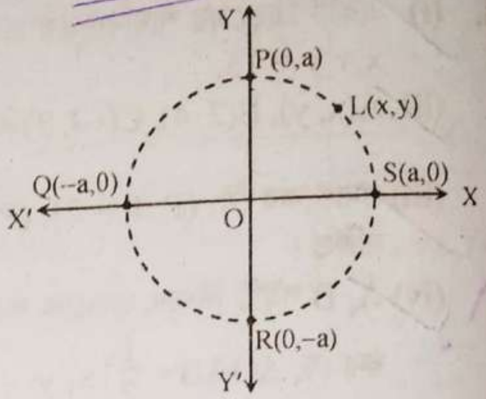
(vi) − 2, $\frac{15}{2}$ (vii) $\frac{1}{2}a^2$ বর্গ একক।

4. (i) 14 বর্গ একক, $\frac{7}{2}$ বর্গ একক (iii) 63 বর্গ একক, 21 বর্গ একক 5. k = 3 6. (i) 2 : 1 (ii) 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত।

পাঠ-৪

3.6 সঞ্চারপথ (Locus)

এক বা একাধিক শর্তানুযায়ী বিন্দুর সেট সঞ্চারপথ তৈরি করে। যেমন: মূলবিন্দুর চতুর্দিকে a (ধ্রুবক) একক দূরত্ব বজায় রেখে অবস্থিত সকল বিন্দুসমূহের সেট একটি সঞ্চারপথ তৈরি করে। এই সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ a, সমীকরণ আকারে তা $x^2 + y^2 = a^2$



এখানে লক্ষনীয় যে, সঞ্চারপথ তৈরি করার জন্য বিন্দুর এক বা একাধিক শর্তের প্রয়োজন হয়। কেননা শর্তযুক্ত না হলে তার সুনির্দিষ্ট রূপ নির্ধারণ করা যায় না।

উপরে উল্লেখিত উদাহরণটিতে দুইটি শর্ত ছিল :

(i) মূলবিন্দুর চর্তুদিকে বিন্দুসমূহ অবস্থান করবে এবং

(ii) সকল বিন্দু হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব a একক থাকবে।

এখানে, P(0, a), Q(–a, 0), R(0, –a) এবং S(a, 0) সকল বিন্দুগুলোই মূলবিন্দুর চতুর্দিকে অবস্থিত।

আবার এই সকল বিন্দুগুলো হতে মূলবিন্দু O(0, 0) এর দূরত্ব a.

সুতরাং একটি সমতলে এক বা একাধিক শর্তাধীনে বিন্দুর সেটকে ঐ সকল শর্তসাপেক্ষে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ বলা হয়।

3.6.1 সঞ্চারপথের সমীকরণ: কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথের ক্ষেত্রে কিছু শর্ত বা শর্তাবলি অবশ্যই দেওয়া থাকবে। কোনো বিন্দুর ওপর প্রযুক্ত সকল শর্তগুলো যদি তার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক (বীজগাণিতিকভাবে অর্থবহ) আকারে প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ সকল সম্পর্ককে সঞ্চারপথের সমীকরণ বলা হয়।

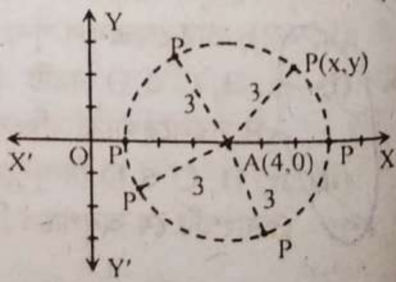
উল্লেখিত সেটের সকল বিন্দুগুলোই এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে বা বিপরীতক্রমে বলা যায় এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ সকল বিন্দুগুলোই সেটে বিদ্যমান।

সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য প্রদত্ত সকল শর্ত ব্যবহার করে বিন্দুর ভুজ (x) ও কোটি (y) এর মধ্যে বীজগাণিতিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে হয়।

কাজ: (1, 0) বিন্দু এবং y-অক্ষ থেকে কোনো চলমান বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা সমান হলে, বিন্দুটির সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. একটি সেটের বিন্দুসমূহ (4, 0) বিন্দু থেকে সর্বদা 3 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: মনে করি, P(x, y) সেটের যেকোনো একটি বিন্দু এবং A(4, 0) হলে,

শর্তানুসারে, PA = 3

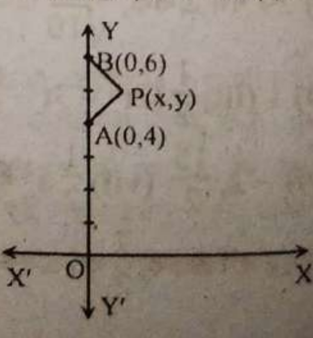
বা, $\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = 3$

বা, $(x-4)^2 + y^2 = 3^2 \quad \therefore, x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

এটিই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদাহরণ-2. A(0, 4), B(0, 6) দুইটি স্থির বিন্দু এবং P একটি চলমান বিন্দু। P বিন্দুতে সর্বদা AB সরলরেখা সমকোণ উৎপন্ন করলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১০; রা: বো: ১৪; চ: বো: ০৩]

সমাধান: ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)



যেহেতু $\angle P = 90°$, সুতরাং APB একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজ AB

$\therefore PA^2 + PB^2 = AB^2$

বা, $(x-0)^2 + (y-4)^2 + (x-0)^2 + (y-6)^2 = 0 + (4-6)^2$

বা, $x^2 + y^2 - 8y + 16 + x^2 + y^2 - 12y + 36 = 4$

বা, $2x^2 + 2y^2 - 20y + 48 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$

অনুশীলনী-3(D)

1. (i) মূলবিন্দু হতে সর্বদা a একক দূরত্বে অবস্থান করে এরূপ বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (ii) (1, 2) এবং (3, 4) বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. (i) x–অক্ষ থেকে একটি সেটের বিন্দুগুলির দূরত্বের বর্গ, y-অক্ষ থেকে বিন্দুগুলির দূরত্বের 4a গুণ। সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

   (ii) (2, 3) বিন্দু থেকে একটি সেটের বিন্দুসমুহের দূরত্ব; y = 0 (x-অক্ষ) রেখা থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ। সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

   (iii) (2, 0) বিন্দু থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব x = 0 রেখা থেকে তাদের দূরত্বের তিনগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৯]

   (iv) একটি চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (2, –1) বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। [কু: বো: ১২; রা: বো: ০৫]

3. (i) (a, 0) এবং (0, a) বিন্দুদ্বয় হতে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সর্বদা 2a; সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৭; য: বো: ০৭, ১২; ব: বো: ০৮, ০৩]

   (ii) A, B, C তিনটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a, 0), (–a, 0), (c, 0); P(x, y) একটি চলমান বিন্দু এমন যেন $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$, P বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

4. (i) একটি সেটের যে কোনো উপাদান A ও B বিন্দুর সাথে একটি সমকোণ উৎপন্ন করে। A(a, b), B(0, b) হলে, ঐ সেটের উপাদানের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ: বো: ১৩; য: বো: ১০, ০৪]

   (ii) ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC; A ও C বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a, b) ও (c, d); B বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (iii) A(x, y), B(–6, –3) এবং C(6, 3) বিন্দুগুলি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। A হতে BC এর উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক হলে, দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ [দি: বো: ০৯]

   (iv) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(x, y), B(–6, –3) এবং C(6, 3); শীর্ষ A হতে BC এর ওপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য একটি স্থির সংখ্যা 7 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 49$

   (v) O, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 0), (3, 5), (2, 6), (x, y); B ও C বিন্দু দুইটি OA রেখার এক পাশে অবস্থিত। যদি C(x, y) বিন্দুটি এরূপ সেটের সদস্য হয় যার প্রত্যেক সদস্যের জন্য $\Delta OAC = 2\Delta OAB$, তাহলে দেখাও যে, ঐ সেট দ্বারা গঠিত সঞ্চারপথের সমীকরণ $5x - 3y + 16 = 0$.

5. A(2, 3) এবং B(–1, 4) দুইটি স্থির বিন্দু। P বিন্দুটি এমনভাবে চলে যেন PA ∶ PB = 2 ∶ 3 হয়। P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো:, কু: বো:, য: বো: ১৪, ০৫; রা: বো: ০৭; চ: বো: ১১, ০৪; দি: বো: ১৫, ১১; ব: বো: ১২]

6. (i) t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$; বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (ii) t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক (acost, asint); বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (iii) t একটি পরামিতি এবং P এর স্থানাঙ্ক (t – 1, 2t + 3) হলে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (iv) t এর যে কোনো মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3t + 2, 5t – 1) হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং ঐ সঞ্চারপথ অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) $x^2 + y^2 = a^2$ (ii) $x + y - 5 = 0$
2. (i) $y^2 = 4ax$ (ii) $x^2 - 3y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ (iii) $y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$ (iv) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
3. (i) $x - y \pm 1 = 0$ (ii) $2cx = c^2 - a^2$
4. (i) $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - (a + c)x - (b + d)y + (ac + bd) = 0$
5. $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$
6. (i) $y^2 = 4ax$ (ii) $x^2 + y^2 = a^2$ (iii) $2x - y + 5 = 0$ (iv) $5x - 3y - 13 = 0; \frac{13}{5}, -\frac{13}{3}$

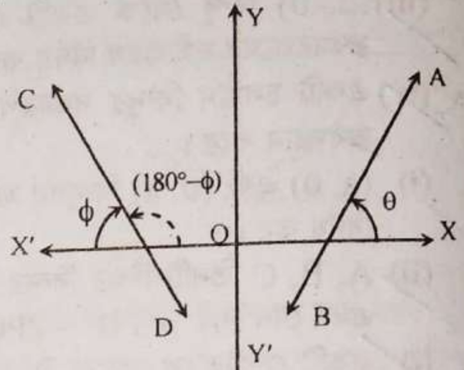
পাঠ-৫

3.7 সরলরেখা (Straight line)

কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ যদি গতির দিক পরিবর্তন না করে তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলা হয়। এক কথায় সরলরেখা বলতে সোজাসুজি রেখা বুঝায় যাতে কোনো প্রকার বক্রতা পরিলক্ষিত হয় না।

3.7.1 সরলরেখার ঢাল (Slope of a straight line)

কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট (tangent) কে সরলরেখাটির ঢাল বলা হয়। ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। একাধিক সরলরেখার ঢাল সূচিত করতে সাধারণত m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।



মনে করি, AB সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং অপর একটি সরলরেখা CD, x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করে (পাশের চিত্রে দেখানো হলো)।

তাহলে, AB সরলরেখার ঢাল $= \tan\theta$ এবং CD সরলরেখার ঢাল $= \tan(180° - \phi) = -\tan\phi$;

কারণ কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করলে, ঐ সরলরেখা ও x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের মধ্যবর্তী কোণ $(180° - \phi)$ হয়।

আমরা জানি, সূক্ষ্মকোণের ট্যানজেন্ট ধনাত্মক এবং স্থূলকোণের ট্যানজেন্ট ঋণাত্মক। সুতরাং যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল ধনাত্মক এবং যে সরলরেখা স্থূলকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল ঋণাত্মক হবে। যদি $\theta = 45°$ হয় এবং $\phi = 45°$ তবে, AB রেখার ঢাল $= \tan 45° = 1$ এবং CD রেখার ঢাল $= \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

দ্রষ্টব্য:

(i) কোনো রেখার ঢাল $m = \tan\theta$ এবং $0° \leq \theta < 90°$ হলে θ এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে m এর মানও বৃদ্ধি পায়।

(ii) $\theta = 0°$ হলে, $m = \tan 0° = 0$, তখন রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল বা x-অক্ষ হবে।

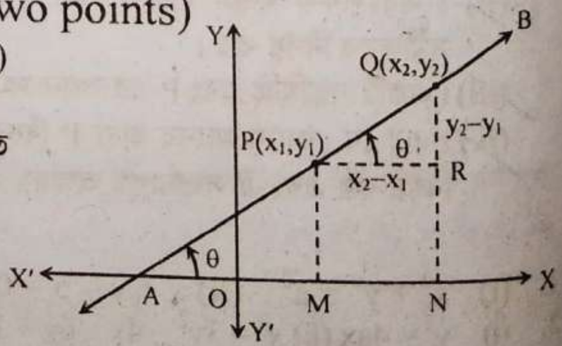
(iii) $\theta = 90°$ হলে, রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল বা y-অক্ষ হবে।

(iv) $\theta = 90°$ হলে, $m = \tan 90°$ (অসংজ্ঞায়িত) হয়। সুতরাং y-অক্ষ বা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল সংজ্ঞায়িত নয়।

সুতরাং (ii), (iii) ও (iv) এর আলোকে বলা যায়, **x-অক্ষ বা x-অক্ষের সমান্তরাল বা y-অক্ষের সাথে লম্ব** সরলরেখার ঢাল শূন্য এবং **y-অক্ষ বা y-অক্ষের সমান্তরাল বা x-অক্ষের সাথে লম্ব** সরলরেখার ঢাল অসংজ্ঞায়িত।

3.8 দুইটি বিন্দুর সংযোগরেখার ঢাল

(Slope of a straight line passes through two points)



মনে করি, AB সরলরেখা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

P ও Q বিন্দু হতে OX এর ওপর যথাক্রমে PM ও QN এবং P হতে QN ওপর PR লম্ব আঁকি।

তাহলে, $OM = x_1$, $PM = y_1$, $ON = x_2$, $QN = y_2$

এবং $\angle BAX = \angle QPR = \theta$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল m হলে, $m = \tan BAX = \tan\theta = \tan QPR$

$$= \frac{QR}{PR} = \frac{QN - RN}{MN} = \frac{QN - PM}{ON - OM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

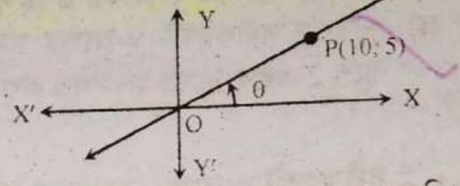
সুতরাং দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \dfrac{\text{বিন্দুদ্বয়ের কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{বিন্দুদ্বয়ের ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$, (ক্রম একই রাখতে হবে)

দ্রষ্টব্য: মূল বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার উপরস্থ (মূল বিন্দু ব্যতীত) একটি বিন্দু (x, y) হলে,

রেখাটির ঢাল $= \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$

অতএব মূল বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার ঢাল, ঐ রেখার ওপরে অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর (মূল বিন্দু ব্যতীত) কোটি ও ভুজের অনুপাতের সমান।

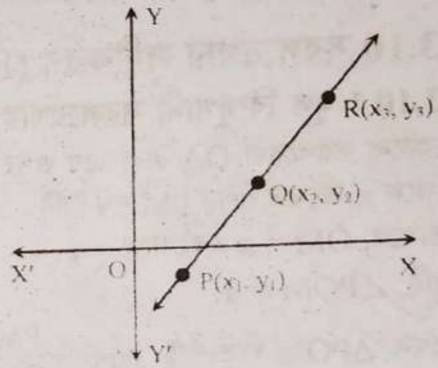
উদাহরণ: মূল বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার উপরস্থ একটি বিন্দু (10, 5) হলে রেখাটির ঢাল নির্ণয় কর।



মনে করি, রেখাটির ঢাল m. সুতরাং, $m = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

কাজ: A(1, 2) এবং B(3, 4) হলে AB সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর এবং রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাও নির্ণয় কর।

তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$ সমরেখ হলে PQ রেখা এবং PR রেখার ঢাল একই হবে।



সুতরাং বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ ...... (i)

বা, $(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0$

বা, $x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_3 + x_2y_1 + x_1y_3 - x_1y_1 = 0$

বা, $-x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_1 - y_2) = 0$

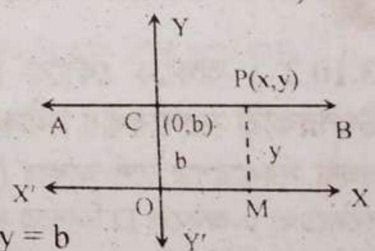
বা, $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ ...... (ii)

বা, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ...... (iii)

(i) অথবা (ii) অথবা (iii) -ই তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত।

3.9 অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ (Equation of parallel line of axes)

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ: মনে করি, x-অক্ষের সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখা AB; সরলরেখাটি y-অক্ষকে C(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।



$\therefore OC = b$

ধরি, AB সরলরেখার ওপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দু P (x, y);

$PM \perp OX$ হলে, $y = PM = OC = b$

সুতরাং AB সরলরেখার উপরস্থ বিন্দু সমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ $y = b$

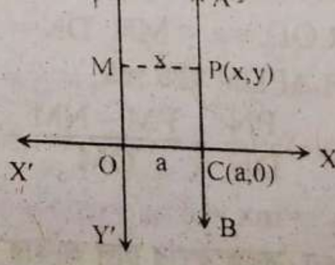
অতএব, **x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y = b$**

দ্রষ্টব্য:

(i) b এর মান ধনাত্মক হলে, রেখাটি x-অক্ষের b একক ওপরে এবং b ঋণাত্মক হলে x-অক্ষের b একক নিচে অবস্থান করবে।

(ii) $b = 0$ হলে সরলরেখার সমীকরণটি $y = 0$ হয়, যা x-অক্ষের সমীকরণ।
সুতরাং $b = 0$ হলে, রেখাটি x-অক্ষের ওপর সমাপতিত হয়।

y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ: মনে করি, y-অক্ষের সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখা AB; রেখাটি x-অক্ষকে C (a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore OC = a$



ধরি, AB সরলরেখার ওপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দু P(x, y) এবং $PM \perp OY$; তাহলে, $x = PM = OC = a$

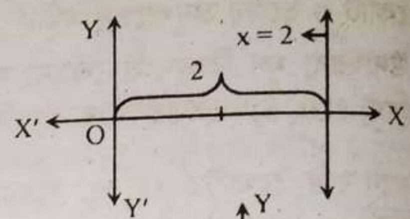
$\therefore$ P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ: $x = a$

অতএব, **y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x = a$**

দ্রষ্টব্য:

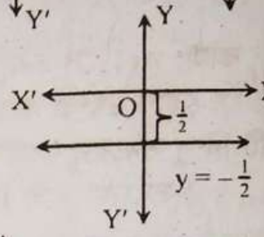
(i) a এর মান ধনাত্মক হলে, রেখাটি y-অক্ষের a একক ডান দিকে এবং a এর মান ঋণাত্মক হলে y-অক্ষের a একক বাম দিকে অবস্থান করবে।

(ii) $a = 0$ হলে সরলরেখার সমীকরণটি $x = 0$ হয়, যা y-অক্ষের সমীকরণ।
সুতরাং $a = 0$ হলে রেখাটি y-অক্ষের ওপর সমাপতিত হয়।



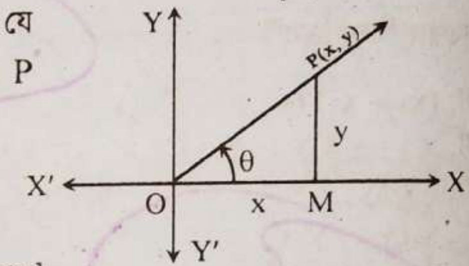
উদাহরণ: (i) $x = 2$ সমীকরণটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং y-অক্ষের ডান পাশে 2 একক দূরত্বে অবস্থিত একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।

(ii) $y = -\frac{1}{2}$ সমীকরণটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং x-অক্ষের নিচে $\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।



3.10 সরলরেখার সমীকরণ (Equation of straight lines)

3.10.1 মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: মনে করি, মূল বিন্দু O যে কোনো সরলরেখা OA এবং এর ওপর P(x, y) যে কোনো একটি বিন্দু। P থেকে x-অক্ষের ওপর PM লম্ব টানি।



তাহলে, $OM = x$ এবং $PM = y$

ধরি, $\angle POM = \theta$

এখন, ΔPOM হতে পাই $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$ বা, $m = \frac{y}{x}$ [m = সরলরেখাটির ঢাল]

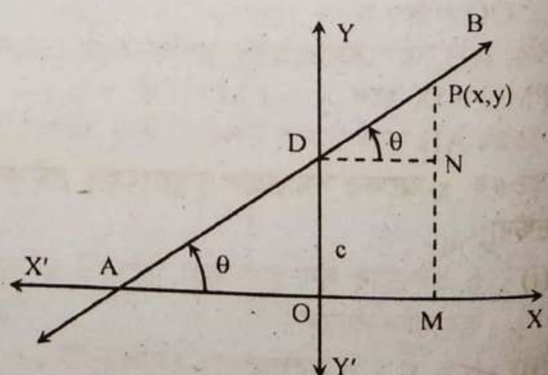
$\therefore y = mx$, যা P(x, y) বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ।

অতএব, মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $\mathbf{y = mx}$

কাজ: O(0, 0) এবং P(3, 2) হলে OP সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3.10.2 y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের সাথে একটি ধনাত্মক কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ:

অথবা সরলরেখার ঢাল আকার (slope form): মনে করি, AB সরলরেখা y-অক্ষকে D বিন্দুতে মূল বিন্দু হতে c একক দূরত্বে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



ধরি, AB রেখার ওপর P(x, y) যে কোনো একটি বিন্দু। P হতে x-অক্ষের ওপর PM এবং D হতে PM এর ওপর DN লম্ব টানি।

এখানে $\angle BAX = \theta = \angle BAM = \angle PDN$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $OD = c = MN$; $DN = OM = x$ এবং $PM = y$.

এখন ΔPDN হতে পাই,

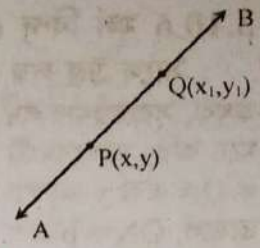
$$\tan\theta = \frac{PN}{DN} = \frac{PM - NM}{OM} = \frac{PM - OD}{OM} = \frac{y - c}{x} \text{ বা, } m = \frac{y - c}{x} \quad [m = \tan\theta = \text{সরলরেখার ঢাল}]$$

বা, $y = mx + c$

অতএব, সরলরেখার ঢাল আকার সমীকরণ $\mathbf{y = mx + c}$

কাজ: মূলবিন্দুগামী ও মূলবিন্দুগামী নয় এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ কর এবং এদের ঢালও নির্ণয় কর।
(i) $4x - 5y + 5 = 5$ (ii) $3x + 4y - 1 = 2$ (iii) $x + y = 0$ (iv) $x + y = 1$

3.10.3 (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ:



মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির ঢাল m.
ধরি, AB রেখার ওপর $P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু।

তাহলে, PQ এর ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$ [$\because$ AB রেখার ঢাল = PQ রেখার ঢাল]

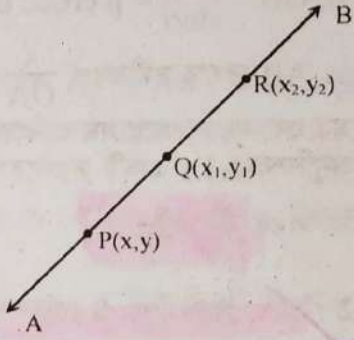
$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$

অতএব, **(x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$**

কাজ: যে সরলরেখা (–1, 2) বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3.10.4 দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ ও $R(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির ওপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।



তাহলে, PQ এর ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ এবং QR এর ঢাল $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

P, Q ও R একই রেখায় অবস্থিত।

সুতরাং, PQ এর ঢাল = QR এর ঢাল।

বা, $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ বা, $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

$\therefore \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

অতএব, **দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ: $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$,**

যেখানে $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m =$ রেখাটির ঢাল।

3.10.5 অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশ জানা আছে এমন সরলরেখার সমীকরণ

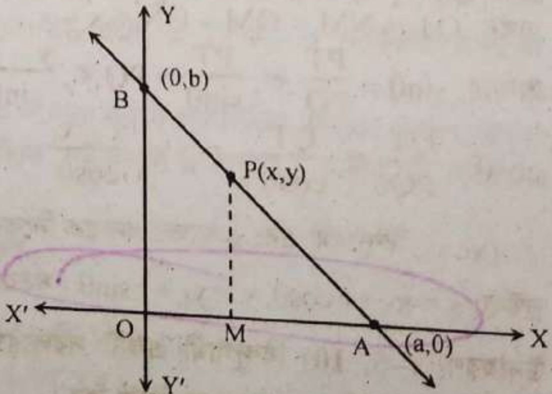
অথবা সরলরেখার খণ্ডিতাংশ আকার (Intercept form):

মনে করি, AB সরলরেখা x-অক্ষকে মূল বিন্দু হতে OA = a একক দূরত্বে এবং y-অক্ষকে মূল বিন্দু হতে OB = b একক দূরত্বে ছেদ করে।

ধরি, P (x, y) রেখাটির ওপর যে কোনো বিন্দু। P থেকে x-অক্ষের ওপর PM লম্ব টানি।

তাহলে, OM = x, PM = y, OA = a এবং OB = b

এখানে, ΔAOB এবং ΔAMP সদৃশ।



$\therefore \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{MA}{MP}$

বা, $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA - OM}{MP}$ বা, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a - x}{y}$ বা, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{a - x}{a}$

বা, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{a}{a} - \dfrac{x}{a}$ বা, $\dfrac{y}{b} = 1 - \dfrac{x}{a}$ বা, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

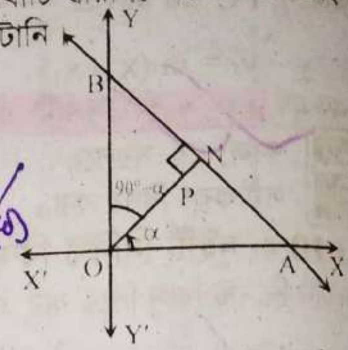
বা, $\dfrac{x}{\text{x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ}} + \dfrac{y}{\text{y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ}} = 1$

অতএব, **সরলরেখার খণ্ডিতাংশ আকারের সমীকরণ: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, যেখানে a = x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ এবং b = y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ।**

কাজ: $11x + 4y - 24 = 0$ রেখা দ্বারা x ও y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

3.10.6 মূল বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উক্ত লম্ব রেখা যে কোণ উৎপন্ন করে তা α হলে, সরলরেখার সমীকরণ

অথবা, সরলরেখার লম্ব আকার (Perpendicular form):



মনে করি, সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং রেখাটি দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= OA$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= OB$. মূল বিন্দু O থেকে AB এর ওপর ON লম্ব টানি।

তাহলে, $ON = p$ এবং $\angle NOA = \alpha$ $\therefore \angle BON = 90° - \alpha$

এখন, ΔONA হতে পাই, $\cos\alpha = \dfrac{ON}{OA}$ বা, $\sec\alpha = \dfrac{OA}{ON}$ বা, $OA = p\sec\alpha$

এবং ΔOBN হতে পাই, $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{ON}{OB}$ বা, $\sin\alpha = \dfrac{ON}{OB}$

বা, $OB = \dfrac{ON}{\sin\alpha} = p\operatorname{cosec}\alpha$

লম্বের দৈর্ঘ্য

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{OA} + \dfrac{y}{OB} = 1$ বা, $\dfrac{x}{p\sec\alpha} + \dfrac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$ $\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

অতএব, সরলরেখার লম্ব আকার সমীকরণ: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$; $p > 0$

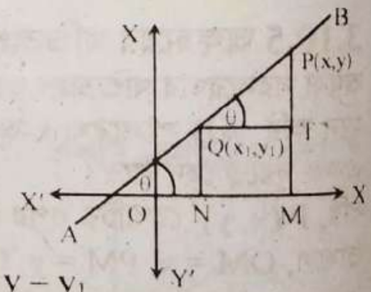
অনুসিদ্ধান্ত-1 : একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (a, b) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{2b} = 1$

2 : $ax + by + c = 0$ রেখার খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{b}\right)^2}$

3 : $ax + by + c = 0$ ও অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত অংশের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\dfrac{c^2}{a \times b}$

কাজ: মূল বিন্দু হতে কোনো সরলরেখার ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে লম্ব রেখাটি 60° কোণ উৎপন্ন করে, রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3.10.7 একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ



মনে করি, AB সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। ধরি, AB রেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং রেখাটির ওপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PM ও QN এবং Q বিন্দু হতে PM এর ওপর QT লম্ব টানি। $\therefore \angle PQT = \theta$

এখন, $QT = NM = OM - ON = x - x_1$, $PT = PM - TM = PM - QN = y - y_1$

আবার, $\sin\theta = \dfrac{PT}{PQ}$ বা, $\dfrac{PT}{\sin\theta} = PQ$ বা, $\dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ [$PQ = r$ ধরে] এবং

$\cos\theta = \dfrac{QT}{PQ}$ বা, $\dfrac{QT}{\cos\theta} = PQ$ বা, $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = r$ $\therefore \dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} (= r)$

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta}$

দ্রষ্টব্য: $x = x_1 + r\cos\theta$, $y = y_1 + r\sin\theta$। সুতরাং রেখাটির ওপর যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$

উদাহরণ: (–5, 10) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\dfrac{3}{4}$. রেখার উপর (–5, 10) বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: ঢাল $= \tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ $\therefore \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ ... ... (i) অথবা, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ ... ... (ii)

এখন, $\dfrac{x + 5}{\cos\alpha} = \dfrac{y - 10}{\sin\alpha} = 10$ (i) নং ক্ষেত্রে $x = -13, y = 16$; (ii) নং ক্ষেত্রে $x = 3, y = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় (–13, 16) এবং (3, 4)

3.11 সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ (General equation of a straight line)

মনে করি, x ও y সম্বলিত একঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার, $ax + by + c = 0$ ... ... (i)
এখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং a ও b উভয়ে শূন্য নয়।
ধরি, (i) নং সঞ্চারপথের ওপর অবস্থিত $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ও $P_3(x_3, y_3)$ যে কোনো তিনটি বিন্দু।

তাহলে, $ax_1 + by_1 + c = 0$ ... ... (ii)
$ax_2 + by_2 + c = 0$ ... ... (iii)
$ax_3 + by_3 + c = 0$ ... ... (iv)

(ii), (iii) ও (iv) হতে a, b, c অপসারণ করে পাই, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

যা $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_3, y_3)$ ও $P_3(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটির সমরেখ হওয়ার শর্ত। অর্থাৎ (i) নং সঞ্চারপথের ওপর অবস্থিত যে কোনো তিনটি বিন্দু একটি সরলরেখায় অবস্থিত। সুতরাং সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা। কেননা কোনো বক্ররেখার ওপরস্থ যে কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ হতে পারে না।
অতএব, $ax + by + c = 0$ একটি সরলরেখা প্রকাশ করে। অর্থাৎ x ও y সম্বলিত যে কোনো এক ঘাত সমীকরণ সর্বদা একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।
আবার $P_1(x_1, y_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু $P(x, y)$ হলে, বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সুতরাং $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ বা, $x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$

P_1 এবং P_2 স্থির বিন্দু বলে $y_1 - y_2$, $x_2 - x_1$ এবং $(x_1y_2 - x_2y_1)$ রাশিগুলো ধ্রুবক। রাশি তিনটিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা প্রকাশ করলেই পাই, $ax + by + c = 0$
এখানে, a ও b উভয়ই শূন্য হতে পারে না, কেননা P_1 ও P_2 ভিন্ন বিন্দু।
অতএব যেকোনো সরলরেখাকে x ও y সম্বলিত একঘাত সমীকরণ $ax + by + c = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়।
এ কারণে সমীকরণটিকে **সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ** বলা হয়।

3.11.1 পরামিতিক সমীকরণ (Parametric equation)

কোনো সঞ্চারপথের ওপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y); এখানে দুইটি চলক x ও y বিদ্যমান। যদি বিন্দুটির স্থানাঙ্ককে কেবলমাত্র একটি চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তবে, ঐ চলকটিকে **পরামিতি** এবং ঐ স্থানাঙ্ককে **পরামিতিক স্থানাঙ্ক** বলা হয়।
কোনো কার্তেসীয় আকারের সমীকরণ হতে দুইটি চলক x ও y কে কেবলমাত্র একটি পরামিতির মাধ্যমে প্রকাশ করলে যে রূপান্তরিত সমীকরণ পাওয়া যায় তাকে উক্ত সমীকরণের **পরামিতিক সমীকরণ** বলা হয়। আবার ঐ পরামিতি অপসারণ করলে পূর্বের কার্তেসীয় সমীকরণই পাওয়া যায়।

উদাহরণ: $x - 2y + 3 = 0$ সমীকরণের পরামিতিক সমীকরণ নির্ণয় কর।
সমাধান: সমীকরণটিতে $y = t$ বসিয়ে পাই, $x = 2t - 3$
t এর যে কোনো মানের জন্য $x = 2t - 3$ এবং $y = t$ দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।
সুতরাং $x = 2t - 3$, $y = t$ কে প্রদত্ত সরলরেখার পরামিতিক সমীকরণ বলা হয়।
পরামিতিক সমীকরণ আরও সহজে বুঝার জন্য নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ কর :
$x^2 + y^2 = a^2$ এর পরামিতিক সমীকরণ $x = a\cos t$, $y = a\sin t$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর পরামিতিক সমীকরণ $x = a\cos t$, $y = b\sin t$
$y^2 = 4ax$ এর পরামিতিক সমীকরণ $x = at^2$, $y = 2at$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. A (h, k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার ওপর অবস্থিত এবং B (k, h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার ওপর অবস্থিত। AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ১৪, ০৮, ১২; রা: বো: ১৬, ১১, ০৭, ০৫; কু: বো: ০৩; দি: বো: ০৯; য: বো: ১৪, ১১; মাদ্রাসা বো: ১০| সি: বো: ১৪; ব: বো: ১০, ০৪; চ: বো: ১৪, ০৪, ১২;

সমাধান : A (h, k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার ওপর অবস্থিত।

$\therefore 6h - k = 1$ বা, $6h - k - 1 = 0$ ...... (i)

আবার, B(k, h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার ওপর অবস্থিত।

$\therefore 2k - 5h = 5$ বা, $-5h + 2k - 5 = 0$ ...... (ii)

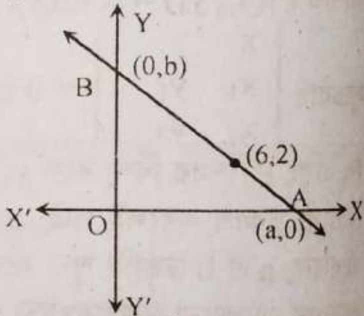
(i) ও (ii) নং থেকে বজ্রগুণন সূত্রানুসারে পাই, $\dfrac{h}{5+2} = \dfrac{k}{5+30} = \dfrac{1}{12-5}$ বা, $\dfrac{h}{7} = \dfrac{k}{35} = \dfrac{1}{7}$

$$\therefore h = \frac{7}{7} = 1 \text{ এবং } k = \frac{35}{7} = 5$$

$$\therefore A \equiv (1, 5) \text{ এবং } B \equiv (5, 1)$$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ $\dfrac{x-1}{1-5} = \dfrac{y-5}{5-1}$ বা, $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-5}{4}$ বা, $x - 1 = -(y-5)$ বা, $x + y - 6 = 0$

উদাহরণ-2. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 ঃ 3 অনুপাতে বিভক্ত হয়। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[রা: বো: ০৮; ব: বো: ০৭, ০৪; দি: বো: ১৬, ১১; মাদ্রাসা বো: ১১]



সমাধান: মনে করি, সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ...... (i)

রেখাটি x-অক্ষকে A (a, 0) এবং y-অক্ষকে B (0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

শর্তানুসারে (6, 2) বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2 ঃ 3 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore 6 = \dfrac{2 \times 0 + 3a}{2+3}$ এবং $2 = \dfrac{2b + 3 \times 0}{2+3}$

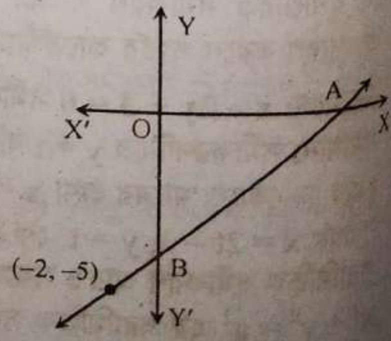
বা, $30 = 3a$ এবং $10 = 2b$ বা, $a = 10$ এবং $b = 5$

a ও b এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{5} = 1$ বা, $x + 2y - 10 = 0$; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ-3. (–2, –5) বিন্দুগামী কোনো সরলরেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন, $OA + 2OB = 0$, যেখানে O মূলবিন্দু। ঐ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ১৩, ০৬; রা: বো: ০৪; য: বো: ০৬, ১২; চ: বো: ০৬; দি: বো: ১৫, ১৪; সি: বো: ০৭; ব: বো: ১৫, ১০, ০৮]

সমাধান: মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ...... (i) তাহলে, $OA = a, OB = b$

শর্তানুসারে, $a + 2b = 0$ বা, $a = -2b$ ...... (ii)



আবার, (i) নং সরলরেখা (–2, –5) বিন্দুগামী।

$\therefore \dfrac{-2}{a} + \dfrac{-5}{b} = 1$ বা, $2b + 5a = -ab$

বা, $2b + 5(-2b) + (-2b)b = 0$ [(ii) নং হতে a এর মান বসিয়ে]

বা, $2b^2 + 8b = 0$ বা, $2b(b+4) = 0$ বা, $b = 0, -4$

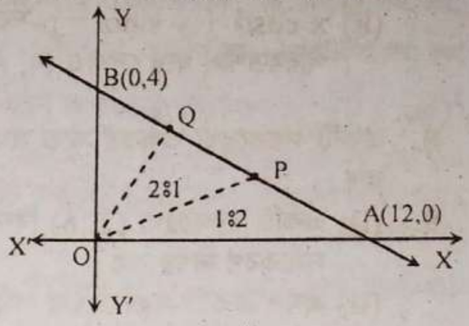
$\therefore a = 0, 8$ [(ii) নং হতে]

এখানে $a = 0$ ও $b = 0$ হলে কোনো সরলরেখা উৎপন্ন হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{-4} = 1$ বা, $x - 2y = 8$

উদাহরণ-4. $x + 3y - 12 = 0$ সরলরেখার যে অংশ অক্ষদ্বয়ের মধ্যে খণ্ডিত, তাকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূল বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১০; য: বো: ১৪, ০৮; কু: বো: ০৭, ০৩; ব: বো: ০৭]

সমাধান : প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $x + 3y - 12 = 0$ বা, $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$



মনে করি, রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, $A \equiv (12, 0)$ এবং $B \equiv (0, 4)$; আবার AB রেখাংশের ত্রিখণ্ডন বিন্দু P ও Q হলে, P ও Q বিন্দু যথাক্রমে খণ্ডিত অংশকে $1 : 2$ এবং $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ $1 : 2$ অনুপাতে বিভাজিত বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{0+24}{3}, \frac{4+0}{3}\right)$ বা, $\left(8, \frac{4}{3}\right)$

এবং $2 : 1$ অনুপাতে বিভাজিত বিন্দু Q এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{0+12}{3}, \frac{8+0}{3}\right)$ বা, $\left(4, \frac{8}{3}\right)$

সুতরাং $O(0, 0)$ এবং $P(8, \frac{4}{3})$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমীকরণ, $y - 0 = \frac{\frac{4}{3}}{8}(x - 0)$ বা, $x = 6y$

আবার, $O(0, 0)$ এবং $Q(4, \frac{8}{3})$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমীকরণ, $y - 0 = \frac{\frac{8}{3}}{4}(x - 0)$ বা, $2x = 3y$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x - 6y = 0$ এবং $2x - 3y = 0$

পাঠ-৭

? অনুশীলনী-3(E)

1. **(i)** একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।
(ii) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং ডান পাশে 2 একক দূরে অবস্থিত।
(iii) দুইটি সরলরেখার একটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং অপরটি $y = 0$ রেখার সাথে লম্ব। উভয়েই (4, 5) বিন্দু দিয়ে যায়, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূল বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে
(i) $30°$ (ii) $60°$ (iii) $90°$ (iv) $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ (v) $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

3. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং (i) রেখাটির ঢাল $\frac{3}{4}$, (ii) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে, (iii) x-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ খণ্ডিত করে
(iv) y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 4 একক অংশ খণ্ডিত করে।

4. **(i)** দেখাও যে, $(a, 0)$, $(0, b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়। [মাদ্রাসা বো: ১০, ১২]
(ii) একটি সরলরেখা $(1, 2)$ ও $(3, 4)$ বিন্দুগামী এবং (x, y) বিন্দুটি তার ওপর অবস্থিত হলে, দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$ [ঢা: বো: ০৩; রা: বো: ০৬; সি: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ০৯]
(iii) যদি (a, b), (a', b'), $(a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, $ab' = a'b$। [কু: বো: ০৯]

5. **(i)** $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ এবং $C(5, -2)$ হলে, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
(ii) $(2, 4)$, $(-4, -6)$, এবং $(6, -8)$ শীর্ষ বিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৭]
(iii) দেখাও যে, $(1, 15)$ এবং $(4, 60)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূল বিন্দু দিয়ে যায়। মূল বিন্দুটি যে অনুপাতে সরলরেখাংশটিকে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

6. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। [সি: বো: ১১, ০৬; ব: বো: ১৩]

7. (i) কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৩]

(ii) $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ সরলরেখাটি x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$ [ঢা: বো: ১১; কু: বো: ০৭; সি: বো: ০৩]

8. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান অংশ ছেদ করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে যায়। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৪; দি: বো: ১১]

9. (i) একটি সরলরেখা (2, 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির দ্বারা অক্ষ দুইটির খণ্ডিত অংশের সমষ্টি 15; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন, OA–OB = 2 হয়, যেখানে O মূল বিন্দু।
[ঢা: বো: ১০; য: বো: ১০, ০৪; রা: বো: ০৯, ১২; দি: বো:, চ: বো: ০৯; সি: বো: ১২; ব: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(iii) $3x + by + 1 = 0$ এবং $ax + 6y + 1 = 0$ রেখা দুইটি (5, 4) বিন্দুতে ছেদ করে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। যদি প্রথম রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৪]

(iv) x-অক্ষের ওপর P, Q বিন্দুদ্বয় এবং y-অক্ষের ওপর R, S বিন্দুদ্বয় অবস্থিত। PR ও QS রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ এবং $x + 2y - 1 = 0$; দেখাও যে, PQ = RS [য: বো: ১৫; ঢা. বো. ০৪]

10. দেখাও যে, $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি (–3, 6) বিন্দু থেকে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত সকল রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ঢা: বো: ০৯; দি: বো: ১২; চ: বো: ১১; য: বো: ০৫]

11. (i) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং মূল বিন্দু হতে উক্ত রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।
[বিআইটি ০২-০৩; কু: বো: ১৪; রা: বো: ১৪; য: বো: ১০; দি: বো: ১৩; চ: বো: ১৬, ১৩, ০৬; সি: বো: ০৫]

(ii) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং মূল বিন্দু থেকে তার ওপর লম্ব দূরত্ব 4 একক। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১১; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১১]

(iii) একটি সরলরেখা (1, 4) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১২; চ: বো: ১০; ব: বো: ০৬]

12. (i) $3x + 7y = 21$ এবং $2ax - 3by + 6 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা সূচিত করলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $3x + \sqrt{3}\,y + 2 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই রেখার সমীকরণ হলে α ও p এর মান নির্ণয় কর। [চুয়েট ০৪-০৫]

(iii) $3x - 4y = 12$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই রেখা সূচিত করলে p এর মান নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৩]

(iv) $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, p এর মান a, b ও c তে প্রকাশ কর। [ঢা: বো: ০৪; রা: বো: ০৭; দি: বো: ১৩; য: বো: ০৩; সি: বো: ১০; ব: বো: ০৯]

13. $5x + 4y - 20 = 0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করে এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূল বিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫; চ: বো: ১৩; সি: বো: ০৯; ব: বো: ১৬]

14. (i) $x - 4 = 0, y - 5 = 0, x + 3 = 0, y + 2 = 0$ সমীকরণগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১২; কু: বো: ০৯; চ: বো: ০৫; ব: বো: ১৪]

(ii) $x = 3, x = 5, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন আয়তের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৯; য: বো: ১১, ০৫; সি: বো: ০৫]

(iii) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরিউক্ত খণ্ডিত অংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ১০, ০৩; য: বো: ১৩, ০৭; সি: বো: ১৪, ০৩; চ: বো: ০৮; দি: বো: ১০; ব: বো: ০৫, ১২; মাদ্রাসা বো: ১২]

(iv) OABC একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 2); A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ১৫, ০৮; রা: বো: ১৩, ০৯, ০৬, ০৪; কু: বো: ১৬; চ: বো: ১৫, ১১; দি: বো: ১৪; য: বো: ০৭; সি: বো: ০৮; ব: বো: ১৪]

@Ahsan

15. (i) দেখাও যে, $y = mx$, $y = m_1x$ এবং $y = b$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m_1}\right)$ বর্গ একক যেখানে $m_1 > m$ । [বুটেক্স ০৮-০৯; ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১৫, ১০; দি: বো: ১২; সি: বো: ০৪; ব: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৩]

(ii) দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ [ঢা: বো: ১৬; কু: বো: ১২; রা: বো: ০৮; ব: বো: ১৩; য: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১০]

(iii) $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য: বো: ০৩]

16. $(1, -2)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$। এই রেখার ওপর $(1, -2)$ বিন্দু হতে 13 একক দূরে অবস্থিত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

17. একটি বৃক্ষ রোপণ কর্মসূচির মোট স্থানের সংখ্যা x এবং বৃক্ষ রোপণের জন্য নিয়োগকৃত মোট লোক y; 30 টি স্থানে বৃক্ষ রোপণের জন্য 15 জন এবং 45 টি স্থানের জন্য 25 জন লোক লাগে। x ও y এর মধ্যে একটি সরল রৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় কর এবং তা হতে 60 টি স্থানের জন্য কত জন লোক লাগবে তা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) $y = -4$ (ii) $x = 2$ (iii) $x - 4 = 0, y - 5 = 0$
2. (i) $x - \sqrt{3}\,y = 0$ (ii) $\sqrt{3}\,x - y = 0$ (iii) $x = 0$ (iv) $\sqrt{5}\,x - 2y = 0$ (v) $x + y = 0$.
3. (i) $3x - 4y - 18 = 0$ (ii) $\sqrt{3}\,x + y + (3 - 2\sqrt{3}) = 0$ (iii) $x - y - 5 = 0$, (iv) $7x + 2y - 8 = 0$
5. (i) $6x + 2y - 17 = 0$ (ii) $11x - y - 18 = 0, x - 2y - 8 = 0, x + y + 2 = 0,$
(iii) 1 : 4 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।
6. $9x - 20y + 96 = 0$ 7. (i) $3x + 2y = 12$ 8. $x \pm y = \alpha \pm \beta$
9. (i) $2x + y - 10 = 0; 3x + 2y - 18 = 0$
(ii) $2x + 3y - 12 = 0; x - y - 1 = 0$ (iii) $a = -5, b = -4; 3x + 6y + 1 = 0$
11. (i) $x + y = 4$ (ii) $x + y = 4\sqrt{2}$ (iii) $4x + y = 8$
12. (i) $a = -\frac{3}{7}, b = \frac{2}{3}$ (ii) $p = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha = 210°$ (iii) $p = \pm\frac{12}{5}$ (iv) $p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
13. $5x - 2y = 0, 5x - 8y = 0$
14. (i) $x - y + 1 = 0, x + y - 2 = 0$ (ii) $x + y - 9 = 0, x - y + 1 = 0$
(iii) $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{4}\right), 61\frac{1}{4}$ বর্গ একক (iv) $(3, 0), (1, 2), x + y - 3 = 0$
15. (iii) $\frac{3}{2}$ বর্গ একক; 16. $(13, 3), (-11, -7)$ 17. $2x - 3y - 15 = 0$, 35 জন।

পাঠ-৮

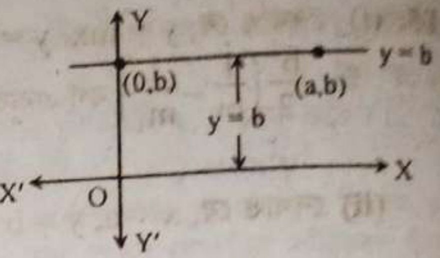
3.12 লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন (Representation of straight line in graph)

দুই চলকের এক ঘাত সমীকরণ হলো যোগাশ্রয়ী ফাংশন বা একঘাত বিশিষ্ট বহুপদী ফাংশন। এটি একটি এক-এক ফাংশন। লেখচিত্র হচ্ছে ফাংশনের জ্যামিতিক উপস্থাপন। চিত্রের মাধ্যমে কোনো তথ্যের উপস্থাপন দ্বারা তথ্যসমূহ সম্পর্কে স্বল্প সময়ে যে সুস্পষ্ট ধারণা পাওয়া যায় তা অন্য কোনো উপায়ে পাওয়া যায় না। লেখচিত্রের মাধ্যমে সরলরেখার প্রকৃতি সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান লাভ করা যায়।

কোনো ব্যবধিতে $ax + by + c = 0$ বা $y = mx + c$ আকারের সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্যে উক্ত ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x ও অধীন চলক y এর মান সম্বলিত অসংখ্য বিন্দু পাওয়া যায়। এরূপ কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করে এদের পরস্পর সংযুক্ত করলেই লেখচিত্র পাওয়া যায়।

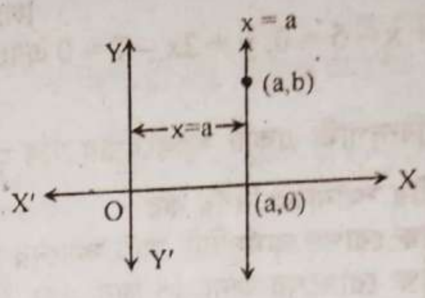
উল্লেখ্য যে, সরলরেখা অঙ্কনের জন্য অন্তত: দুইটি বিন্দু প্রয়োজন। তবে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখার ক্ষেত্রে শুধু সমীকরণ জানা থাকলেই লেখচিত্র আঁকা যায়।

3.12.1 x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন:



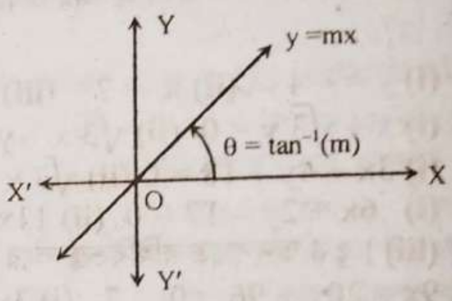
x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y = b$, যা y-অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাই x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা $y = b$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য এমন একটি সরলরেখা আঁকতে হবে যা অন্য একটি বিন্দু (a, b) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে।

3.12.2 y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন:



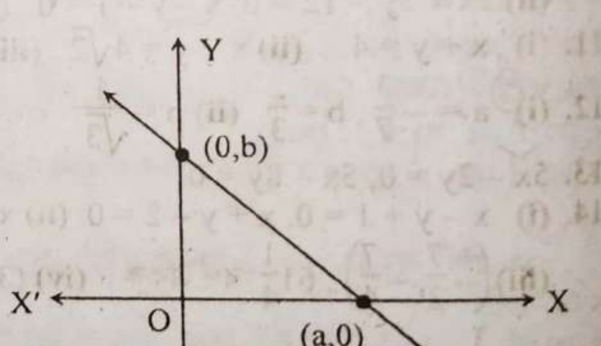
y- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x = a$, যা x- অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাই y- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা $x = a$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য এমন একটি সরলরেখা আঁকতে হবে যা $(a, 0)$ ও অন্য একটি বিন্দু (a, b) দিয়ে অতিক্রম করবে।

3.12.3 m ঢাল বিশিষ্ট মূলবিন্দুগামী সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন:



m ঢাল বিশিষ্ট মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx$। তাহলে উক্ত রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta = \tan^{-1}(m)$ কোণ উৎপন্ন করে। এরূপ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য xy সমতলের মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণের সমান চাপ নিয়ে কোণ এঁকে উক্ত সরলরেখার লেখচিত্র আঁকা হয়।

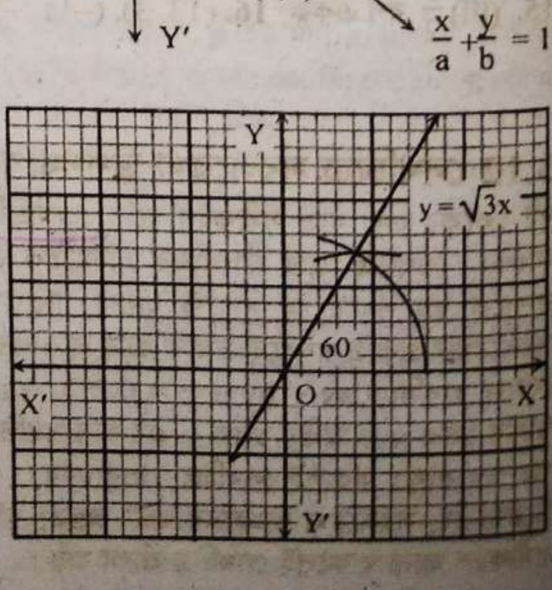
3.12.4 অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশ জানা আছে এমন সরলরেখা:



অঙ্কন: প্রদত্ত তথ্যের আলোকে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করে তাকে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের আকার $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারে প্রকাশ করতে হবে। তাহলে ঐ সরলরেখা x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করবে।

$(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুদ্বয় লেখ কাগজে স্থাপন করে সংযুক্ত করলে উক্ত সরলরেখার লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

উদাহরণ: $y = \sqrt{3}x$ সরলরেখাটির লেখচিত্র আঁক।



সমাধান: প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ, $y = \sqrt{3}x$ ... ... (i)

প্রদত্ত সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী যার ঢাল, $m = \sqrt{3}$।

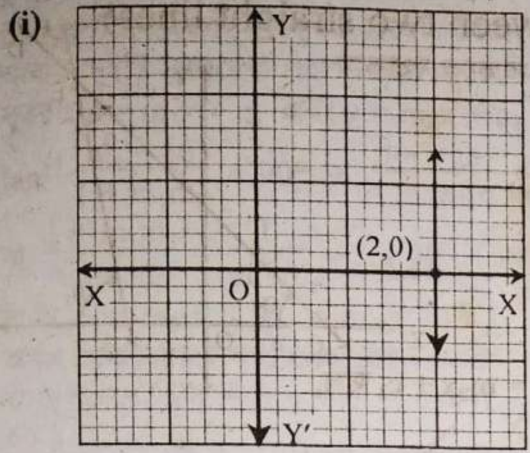
সুতরাং সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে

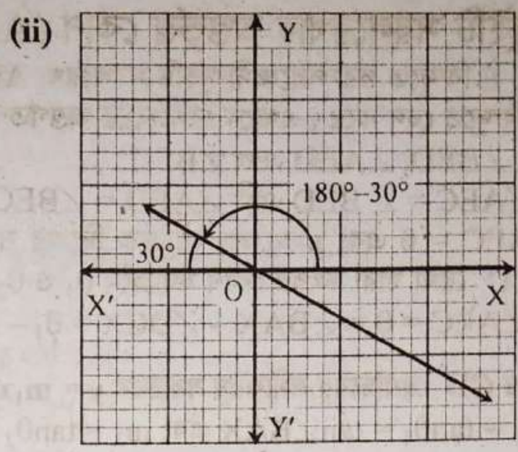
$\theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \tan^{-1}\tan 60° = 60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে চাঁদার সাহায্যে বা কম্পাসের সাহায্যে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ এঁকে সরলরেখাটির লেখচিত্র আঁকি।

কাজ: $\sqrt{3}y = x$ সরলরেখাটির লেখচিত্র আঁক।

উদাহরণ: নিচের লেখচিত্রগুলো কোন কোন সরলরেখাকে নির্দেশ করে তা নির্ণয় কর।

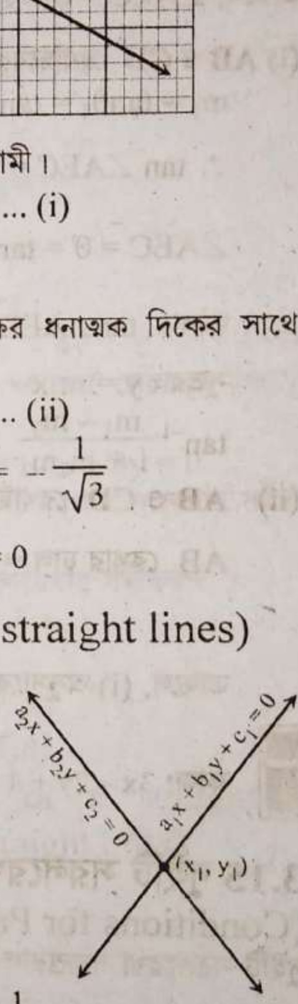




সমাধান: (i) চিত্র হতে দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তা (2, 0) বিন্দুগামী।
মনে করি, y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$ ... ... (i)
(i) নং সরলরেখাটি (2, 0) বিন্দুগামী হওয়ায়, $2 = a$ $\therefore x = 2$
$\therefore$ লেখচিত্রের সরলরেখাটির সমীকরণ $x = 2$.
(ii) চিত্র হতে দেখা যায় যে, লেখচিত্রের সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\theta = 180° - 30° = 150°$ কোণ উৎপন্ন করে।
মনে করি, m ঢাল বিশিষ্ট মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx$ ... ... (ii)
(ii) নং সরলরেখাটির ঢাল, $m = \tan\theta = \tan 150° = \tan(90° + 60°) = -\cot 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\therefore$ লেখচিত্রের সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ বা, $\sqrt{3}y = -x$ বা, $x + \sqrt{3}y = 0$

3.13 দুইটি সরলরেখার ছেদ বিন্দু (Point of intersection of two straight lines)

দুইটি সরলরেখার একটি সাধারণ (common) বিন্দু থাকলে, বিন্দুটিকে সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু বলা হয়।



মনে করি, (x_1, y_1) বিন্দুটি $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের একটি সাধারণ বিন্দু। তাহলে (x_1, y_1) বিন্দুকে উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু বলা হয়।
যেহেতু, (x_1, y_1) বিন্দুটি উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু কাজেই বিন্দুটি দ্বারা সরলরেখাদ্বয় সিদ্ধ হবে, $\therefore a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ ... ... (i)
এবং $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) কে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে পাই, $\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

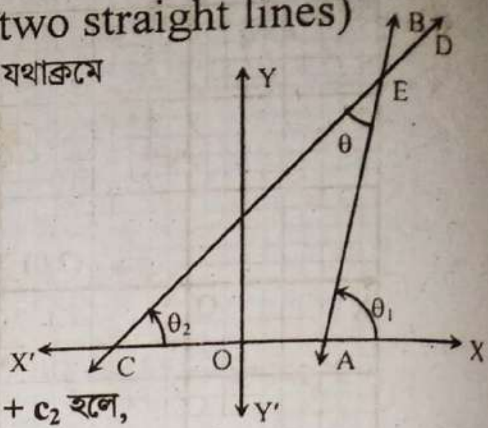
$\therefore x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ এবং $y_1 = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

সুতরাং রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$, যেখানে $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

মন্তব্য: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ হতে পারে না। কারণ সেক্ষেত্রে, স্থানাঙ্কটি অসংজ্ঞায়িত হয়ে যায়। অর্থাৎ সরলরেখাদ্বয় ছেদ করলে কখনও এটা হবে না। শুধুমাত্র, ছেদ না করলে অর্থাৎ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে এটা ঘটবে, আর সমান্তরালের ক্ষেত্রে ছেদ বিন্দু প্রযোজ্য নয়।

কাজ: $2x - 5y + 3 = 0$ এবং $3x + 4y - 1 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3.14 দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ (Angle between two straight lines)



মনে করি, E বিন্দুতে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা AB ও DC x–অক্ষকে যথাক্রমে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলি $\angle AEC, \angle BED, \angle AED$ এবং $\angle BEC$.

আবার, $\angle AEC = \angle BED$ এবং $\angle AED = \angle BEC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

ধরি, $\angle AEC = \theta$ এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে AB ও CD রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণ যথাক্রমে θ_1 ও θ_2

তাহলে, $\angle AEC = \theta = \angle BAX - \angle DCX = \theta_1 - \theta_2$

(i) AB ও CD রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ হলে,

$m_1 = \tan\theta_1 = \tan\angle BAX$ এবং $m_2 = \tan\theta_2 = \tan\angle DCX$

$$\therefore \tan\angle AEC = \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$\angle AEC = \theta = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

আবার, $\tan\angle AED = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = -\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$ $\therefore \angle AED = -\tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

সুতরাং $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ

$\tan^{-1}\frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1m_2}$ বা $\pm\tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

(ii) AB ও CD রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হলে,

AB রেখার ঢাল $= \frac{-a_1}{b_1} = m_1$ (ধরি) এবং CD রেখার ঢাল $= \frac{-a_2}{b_2} = m_2$ (ধরি)

তাহলে, (i) অনুসারে পাই, রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= \pm\tan^{-1}\frac{-\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}} = \pm\tan^{-1}\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$

কাজ: $3x - 2y + 4 = 0$ এবং $2x + 5y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

3.15 দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল এবং লম্ব হওয়ার শর্ত
(Conditions for Parallelism and perpendicularity)

দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হবে যদি রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 0° হয়।

সুতরাং, $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে যদি, $\tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = 0$ হয়।

[3.14 অনুচ্ছেদ অনুসারে]

অর্থাৎ, যদি $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \tan 0°$ বা, $m_1 - m_2 = 0$ বা, $m_1 = m_2$ হয়।

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হওয়ার শর্ত $m_1 = m_2$

অর্থাৎ রেখাদ্বয়ের ঢাল সমান হলে তারা সমান্তরাল হবে।

অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ বা, $y = -\left(\frac{a_1}{b_1}\right)x + \left(\frac{-c_1}{b_1}\right)$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

বা, $y = \left(-\frac{a_2}{b_2}\right)x + \left(\frac{-c_2}{b_2}\right)$ সরলরেখা দুইটির সমান্তরাল হওয়ার শর্ত হলো $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

দ্রষ্টব্য: যেকোনো সরলরেখার সমান্তরাল, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়ের নিয়ম নিম্নরূপ:
i. x ও y এর সহগদ্বয় অপরিবর্তিত থাকবে।
ii. ধ্রুবকটিকে ইচ্ছামূলক ধ্রুবক দ্বারা পরিবর্তন করতে হবে।
আবার, দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হবে যদি রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 90° হয়।
সুতরাং $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি

$\tan^{-1}\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = 90°$ বা, $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \tan 90°$ হয়।

বা, $\dfrac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2} = \dfrac{1}{\tan 90°} = \cot 90°$ [যেহেতু $\tan 90°$ অসংজ্ঞায়িত কিন্তু $\cot 90° = 0$]

বা, $1 + m_1m_2 = 0$ বা, $m_1m_2 = -1$

অর্থাৎ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল −1 হলে রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।
অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি
$\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right).\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right) = -1$ হয়। অর্থাৎ যদি $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হয়।

দ্রষ্টব্য: যে কোনো সরলরেখার সাথে লম্ব, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়ের নিয়ম নিম্নরূপ :
প্রদত্ত সমীকরণের (i) x ও y এর সহগ পরস্পর পরিবর্তন করতে হবে।
(ii) x বা y এর যে কোনো একটির পূর্বের চিহ্ন পরিবর্তন করতে হবে।
(iii) ধ্রুব পদের পরিবর্তে যে কোনো একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক বসাতে হবে।

যেমন: $4x + 3y + 10 = 0$ রেখার সাথে লম্ব, এরূপ যে কোনো রেখার সমীকরণ $3x - 4y + c = 0$; এখানে c ইচ্ছামূলক ধ্রুবক। উল্লেখ্য যে, মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণে ধ্রুব পদ থাকে না। কাজেই সেক্ষেত্রে ইচ্ছামূলক ধ্রুবক নেওয়া যাবে না।
যেমন: $3x - 4y + c = 0$ রেখার সাথে লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $4x + 3y = 0$

অনুসিদ্ধান্ত-1: $ax + by + c = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা যা (α, β) বিন্দুগামী এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $ax + by = a\alpha + b\beta$

2: $ax + by + c = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব যা (α, β) বিন্দুগামী এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $bx - ay = b\alpha - a\beta$

3.16 বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ (Equation of straight lines under different conditions)

3.16.1 দুইটি সরলরেখার ছেদ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ (Equation of a straight line which passes through a point of intersection of two given straight lines)

মনে করি, সরলরেখাদ্বয় $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ... ... (i)
এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ... ... (ii)

ধরি, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (x', y') তাহলে, $a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$
এবং $a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$

$\therefore a_1x' + b_1y' + c_1 + k(a_2x' + b_2y' + c_2) = 0$ ... ... (iii)

যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক (অশূন্য)। [$\because 0 + k.0 = 0$]
সুতরাং (iii) থেকে এটি স্পষ্ট যে, (x', y') বিন্দুটি
$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ... ... (iv)
সমীকরণকে সিদ্ধ করে। এই সমীকরণটি x ও y এর একটি একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ। অর্থাৎ এটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।
অতএব (iv) নং সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা। যেহেতু k এর বিভিন্ন মানের জন্য (iv) নং সমীকরণটি বিভিন্ন সরলরেখা প্রকাশ করে, যাদের প্রত্যেকটিই ছেদ বিন্দু (x', y') দিয়ে যায়।

সুতরাং (iv) নং সমীকরণটি (i) ও (ii) নং এর ছেদ বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ।
বিপরীতক্রমে, যে কোনো ইচ্ছামূলক অশূন্য ধ্রুবক k এর জন্য কোনো সরলরেখাকে

$$(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad \cdots\cdots (v)$$

আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হলে, রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অর্থাৎ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \cdots\cdots (vi)$$

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots\cdots (vii)$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যাবে।
কেননা, যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা (v) নং সিদ্ধ হয়, কেবল মাত্র সেই স্থানাঙ্ক দ্বারাই (vi) ও (vii) নং সিদ্ধ হয়।
সুতরাং (vi) ও (vii) নং এর ছেদ বিন্দু দিয়ে (v) নং যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও (α, β) বিন্দুগামী হলে সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1} = \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}$

কাজ: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূল বিন্দু এবং $6x - 2y - 1 = 0$ ও $3x + 5y + 2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়।

3.16.2 তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত:

মনে করি, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$, রেখা তিনটি একটি বিন্দু (x', y') দিয়ে যায়।
$\therefore$ বিন্দু দ্বারা রেখা তিনটি সিদ্ধ হবে,

$$\therefore \quad a_1x' + b_1y' + c_1 = 0 \quad \cdots\cdots (i)$$
$$a_2x' + b_2y' + c_2 = 0 \quad \cdots\cdots (ii)$$
$$a_3x' + b_3y' + c_3 = 0 \quad \cdots\cdots (iii)$$

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ থেকে x' ও y' অপসারণ করে পাই, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

বা, $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$; এটিই সমবিন্দু হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ : $x - 3y + 2 = 0$, $x - 6y + 3 = 0$, $x + ay = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [ব: বো: ০৩]

সমাধান: যেহেতু প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু, সুতরাং সমবিন্দু হওয়ার শর্তানুসারে পাই,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $1(0 - 3a) + 3(0 - 3) + 2(a + 6) = 0$
বা, $-a + 3 = 0$, বা $a = 3$ সুতরাং প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে $a = 3$ হবে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. মূল বিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি $(b, 0)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার ওপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$ [ঢা: বো: ১৩; রা: বো: ১৩, ০৪; চ: বো: ০৩; ব: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, বিন্দুগুলো $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(b, 0)$, এবং $C(x_2, y_2)$

$\therefore$ OA রেখার ঢাল $= \dfrac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \dfrac{y_1}{x_1}$ এবং BC রেখার ঢাল $= \dfrac{y_2 - 0}{x_2 - b} = \dfrac{y_2}{x_2 - b}$

$OA \perp BC$ হলে $\dfrac{y_1}{x_1} \times \dfrac{y_2}{x_2 - b} = -1$ বা, $y_1y_2 = -x_1(x_2 - b)$ বা, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$

উদাহরণ-2. x-অক্ষের সমান্তরাল (বা, y-অক্ষের সাথে লম্ব) এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখা দুইটির সমবিন্দু সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৩, ০৭; রা: বো: ১৪; কু: বো: ০৭, ০৫; ব: বো: ০৮; সি: বো: ১০; দি: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১১]

সমাধান: $4x + 3y = 6$ এবং $x - 2y = 7$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$$4x + 3y - 6 + k(x - 2y - 7) = 0 \text{ বা, } x(4 + k) + y(3 - 2k) - 6 - 7k = 0$$

এটি x-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় x এর সহগ শূন্য হবে।

$\therefore\ 4 + k = 0$ বা, $k = -4$

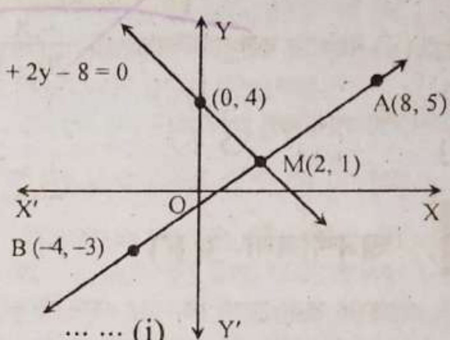
$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y\{3 - 2(-4)\} - 6 - 7(-4) = 0$

বা, $11y - 6 + 28 = 0$ বা, $11y + 22 = 0 \quad \therefore\ y + 2 = 0$

উদাহরণ-3. (8, 5) ও (– 4, – 3) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কুয়েট ০৩-০৪; বুয়েট ০৪-০৫; ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ০৩, ১২; কু: বো: ০৬; চ: বো: ১২; সি: বো: ১৩, ০৯; ব: বো: ০৪, ০৩]

সমাধান: মনে করি, বিন্দুদ্বয় $A(8, 5)$ ও $B(-4, -3)$ এবং AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু $M\left(\frac{8-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$ বা, $M(2, 1)$



তাহলে $M(2, 1)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে লম্ব, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

AB রেখার সমীকরণ $\frac{y-5}{5+3} = \frac{x-8}{8+4}$ বা, $\frac{y-5}{8} = \frac{x-8}{12}$

বা, $3(y - 5) = 2(x - 8)$ বা, $2x - 3y - 1 = 0$

এখন AB এর ওপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ: $3x + 2y + k = 0$ ... ... (i)

যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এই রেখাটি $M(2, 1)$ বিন্দুগামী হলে, $3 \times 2 + 2 \times 1 + k = 0$ বা, $k = -8$

k এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই $3x + 2y - 8 = 0$; যা নির্ণেয় সমীকরণ।

উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে পাই, $3x + 2y = 8$ বা, $\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{4} = 1$

$\therefore$ y-অক্ষকে ছেদকৃত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 4)$.

উদাহরণ-4. দুইটি সরলরেখা (–1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর [চ: বো: ১৩] এবং এদের সমীকরণ থেকে প্রমাণ কর যে, তারা পরস্পর লম্ব।

[ঢা: বো: ১১, ০৭; রা: বো: ১০, ০৬; দি: বো: ১৩; চ: বো: ০৫; সি: বো: ১৪, ০৭; ব: বো: ০৮, ০৬; য: বো: ১৪, ১১; মাদ্রাসা বো: ০৯]

সমাধান: ১ম অংশ: প্রদত্ত রেখা, $3x - y + 7 = 0$ বা, $y = 3x + 7$ কে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই, ঢাল $= 3$

মনে করি, $(-1, 2)$ বিন্দুগামী রেখাটির ঢাল $= m$; তাহলে তার সমীকরণ $y - 2 = m(x + 1)$ ... ... (i)

শর্তানুসারে, $\tan 45° = \pm \frac{m-3}{1+3m}$ বা, $1 = \pm \frac{m-3}{1+3m}$ বা, $1 + 3m = \pm(m - 3)$

(+) চিহ্ন দিয়ে পাই, $1 + 3m = m - 3$ বা, $2m = -4$ বা, $m = -2$

(–) চিহ্ন দিয়ে পাই, $1 + 3m = -m + 3$ বা, $4m = 2$ বা, $m = \frac{1}{2}$

m এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $y - 2 = -2(x + 1)$ বা, $2x + y = 0$

এবং $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$ বা, $x - 2y + 5 = 0$ যা নির্ণেয় সরলরেখা দুইটির সমীকরণ।

২য় অংশ: $2x + y = 0$ বা, $y = -2x$ রেখার ঢাল $= -2 = m_1$ (ধরি)

এবং $x - 2y + 5 = 0$ বা, $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ রেখার ঢাল $= \frac{1}{2} = m_2$ (ধরি)

এখানে, $m_1 \times m_2 = -2 \times \frac{1}{2} = -1$ সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

উদাহরণ-5. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x - 3y = 7$ রেখার ওপর লম্ব। [চ: বো: ১৪; য: বো: ০৭]

সমাধান: $2x - 3y = 7$ রেখার লম্বরেখার সমীকরণ, $3x + 2y + k = 0$ যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।
$(2, -3)$ বিন্দুটি (i) নং এ বসিয়ে পাই, $3.2 + 2(-3) + k = 0 \therefore k = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $3x + 2y = 0$

উদাহরণ-6. $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৪, ০৮; রা: বো:; দি: বো:; য: বো: ১২; চ: বো: ১০, ০৭; সি: বো: ০৭, ০৫; কু: বো: ০৪; সি: বো: ০৬, ১২; মাদ্রাসা বো: ১১, ০৯]

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত রেখা $3x - 4y + 5 = 0$ ……(i) এর ওপর লম্ব এরূপ যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0$, k যে কোনো ধ্রুবক।
যদি রেখাটি $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় তবে, $4 \times 2 + 3 \times (-1) + k = 0$ বা, $k = -5$
সুতরাং প্রদত্ত রেখার ওপর লম্ব এবং $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $4x + 3y - 5 = 0$ ……(ii)
তাহলে, (i) ও (ii) নং এর ছেদ বিন্দুই নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দু।
(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন করে পাই, $\frac{x}{20-15} = \frac{y}{20+15} = \frac{1}{9+16}$ বা, $\frac{x}{5} = \frac{y}{35} = \frac{1}{25}$ বা, $x = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, y = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$
$\therefore$ নির্ণেয় পাদবিন্দু $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

পাঠ-১০

অনুশীলনী-3(F)

1. প্রত্যেক সরলরেখা জোড়ার ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:
   (i) $x - y - 4 = 0$ এবং $x + y + 2 = 0$ (ii) $11x + 2y - 33 = 0$ এবং x-অক্ষ।
2. (i) মূলবিন্দু এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $x + y - 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [মাদ্রাসা বো: ১৩]
   (ii) মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৭, ০৫]
   (iii) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১০]
3. দেখাও যে, k এর যে কোনো মানের জন্যই $(k + 2)x - (2k - 3)y + (5k - 10) = 0$ রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৩]
4. (i) $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$ এবং $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয়ের একটি সাধারণ বিন্দু থাকলে a ও b এর সম্পর্ক নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৩-০৪; দি: বো: ১১; চ: বো: ১২; য: বো: ১৩, ০৯]
   (ii) $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$ এবং $cx + ay + b = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a + b + c = 0$
5. (i) $3x - y + 7 = 0$ এবং $5x + 3y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
   (ii) $x - y\sqrt{3} = 7$ এবং $x\sqrt{3} - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।
6. (i) দেখাও যে, $10x + 11y + 12 = 0$ এবং $10x + 11y - 13 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল।
   (ii) k এর মান কত হলে, $5x + 4y + 6 = 0$ এবং $3kx - 4y - 2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?
   (iii) একটি সরলরেখা $(2, 5)$ এবং $(5, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায়। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তা $(-4, 5)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার ওপর লম্ব।
   (iv) A, B, C, বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$, $(-3, 0)$ এবং $(5, 6)$; প্রমাণ কর যে, AB ও AC সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। উক্ত বিন্দুগুলো কোনো আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে তার চতুর্থ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য: বো: ০৪]
   (v) দেখাও যে, $x = 2t + 1, y = -t - 2$ এবং $x = 2t - 5, y = -t + 3$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।
   (vi) দেখাও যে, $x = t, y = 2t + 1$ এবং $x = 2t, y = -t - 4$ রেখা দুইটি $(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। [ব: বো: ১১]

7. **(i)** $3x-4y+8=0$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং $(1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৪]

(ii) x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x-3y+2=0$ ও $x+y-2=0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iii) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x-7y+11=0$ ও $x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের সাথে সমবিন্দু সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৯, ০৫; রা: বো: ০৮; য: বো: ১২; চ: বো: ০৮; দি: বো: ১৪; সি: বো: ১১]

(iv) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x-3y+4=0$ ও $3x+3y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য: বো: ১০; চ: বো: ০৪; ব: বো: ১০]

(v) যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাটি $2x-y=1$ এবং $3x-4y+6=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x+3y-6=0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১২; সি: বো: ১৩]

8. **(i)** $(2, 5)$ বিন্দুগামী এবং $3x+12y-7=0$ রেখার ওপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৫]

(ii) $(-3, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2y=11x+7$ রেখার ওপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iii) $4x+5y-2=0$ রেখার ওপর লম্ব এবং $(-3, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iv) $2x+11y-2=0$ রেখার সমান্তরাল এবং $(4, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৬]

(v) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(4, -3)$ বিন্দুগামী এবং $2x+11y-2=0$ এর উপর লম্ব। [রা: বো: ০৫; ব: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১২]

(vi) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ রেখার ওপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা: বো: ১৫; কু: বো: ১০, ০৮; ব: বো: ০৫]

(vii) AB ও AC রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $y=2x+1$ এবং $y=4x-1$; AB এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুটেক্স ০৪-০৫; ঢা: বো: ০৬; য: বো: ১৩; কু: বো: ; ব: বো: ১২; সি: বো: ০৮; ব: বো: ১৫]

9. **(i)** $(2, 1)$ ও $(6, 3)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য: বো: ০৬]

(ii) $A(2, 1)$ ও $B(5, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ AB কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১০; রা: বো: ১১, ০৭; চ: বো: ০৮, ০৪; য: বো: ১৬, ০৮, ০৪; ব: বো: ০৭]

(iii) দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$(a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$$

(iv) $(4, 5)$ ও $(-4, 10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং তার ওপর লম্ব, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. **(i)** $(6, 7)$ বিন্দুগামী দুইটি সরলরেখা $3x+4y=11$ রেখার সাথে প্রত্যেকে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৩, ১১, ০৫; ব: বো: ১৩; চ: বো: ১১; দি: বো: ০৯]

(ii) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x-2y-3=0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(iii) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x-y+4=0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। [কু: বো: ১৩, ০৬, ০৩; চ: বো: ০৯; দি: বো: ১১; সি: বো: ১০, ০৪; য: বো: ০৮]

(iv) $(6, -7)$ বিন্দুগামী দুইটি সরলরেখার প্রত্যেকে $y+x\sqrt{3}=1$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করলে, তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১১]

(v) দুইটি সরলরেখা $(1, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x+y=7$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫]

(vi) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x-2y-1=0$ ও $2x+3y+2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং যার ঢাল $\tan 45°$। [কু: বো: ০৮]

(vii) $5x-9y+13=0$ ও $9x-5y+11=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষের সহিত $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১২; কু: বো: ০৯]

(viii) দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $3y=2x$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে, রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব: বো: ১১]

11. (i) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $7x + 13y - 87 = 0$ এবং $5x - 8y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে সমান সাংখ্য মানের অংশ ছেদ করে। [বুটেক্স ০১-০২; চ: বো: ০৬; ব: বো: ১৪]

(ii) $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $5x + y = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্ন বিশিষ্ট সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৩]

12. (i) $(3, 1)$ বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে ঐ বিন্দু হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১০; কু: বো: ১১; রা: বো: ০৯; সি: বো: ১৫; ব: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৩]

13. (i) P বিন্দুটি $x - 2y + 7 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত এবং $(5, -1)$ ও $(4, -2)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) $4x - 2y + 7 = 0$ সরলরেখার ওপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যা $(2, 3)$, $(-2, 4)$ বিন্দু দুইটি থেকে সমদূরবর্তী। [ব: বো: ০৯]

14. (i) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ এবং $C(5, -2)$ হলে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল ও BC এর অর্ধেক।
[ঢা: বো: ১১; চ: বো: ১০, ০৩; কু: বো: ১৪, ০৮, ০৬; য: বো: ০৯; দি: বো: ১০]

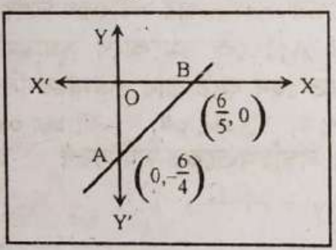
(ii) ABC ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(6, 1)$ ও $B(1, 6)$ এবং এর লম্ববিন্দু $P(3, 2)$। অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৪]

15. (i) $y = 6x - 2$ সরলরেখাটির লেখচিত্র আঁক।

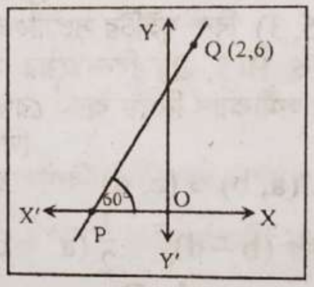
(ii) $5x + 4y - 20 = 0$ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

16. চিত্র হতে AB ও PQ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i)



(ii)



উত্তরমালা

1. (i) $(1, -3)$ (ii) $(3, 0)$; **2.** (i) $2x - y = 0$ (ii) $x - y = 0$ (iii) $4x + 5y = 0$

3. $\left(\frac{5}{7}, \frac{20}{7}\right)$ **4.** (i) $6a - 4b = 1$; **5.** (i) $\pm \tan^{-1}\left(-\frac{7}{6}\right)$ (ii) $30°$; **6.** (ii) $\frac{16}{15}$ (iii) $x - 3y + 13 = 0$ (iv) $(1, 8)$

7. (i) $3x - 4y + 5 = 0$ (ii) $y - 1 = 0$ (iii) $13x - 23 = 0$ (iv) $5x - 1 = 0$ (v) $a = \frac{17}{4}, b = \frac{17}{3}$

8. (i) $4x - y - 3 = 0$ (ii) $2x + 11y + 17 = 0$ (iii) $5x - 4y + 7 = 0$ (iv) $2x + 11y + 25 = 0$ (v) $11x - 2y - 50 = 0$, (vi) $ax + by = a^2$ (vii) $x + 2y = 7$

9. (i) $2x + y = 10$ (ii) $3x + y = 12$; $(0, 12)$ (iv) $24x - 15y + 68 = 0$

10. (i) $x - 7y + 43 = 0$, $7x + y - 49 = 0$, (ii) $3x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$
(iii) $(2 - \sqrt{3})x + y = 10 - 3\sqrt{3}$, $(2 + \sqrt{3})x + y = 10 + 3\sqrt{3}$
(iv) $y + 7 = 0$, $\sqrt{3}x - y - 7 - 6\sqrt{3} = 0$, (v) $x + 3y - 10 = 0$, $3x - y = 0$
(vi) $7x - 7y - 3 = 0$ (vii) $7x - 7y + 12 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$ (viii) $4y = 7x$; $8y = x$

11. (i) $x + y = 9$, $x - y = 1$ (ii) $23x + 23y = 11$ **12.** (i) $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$; 2

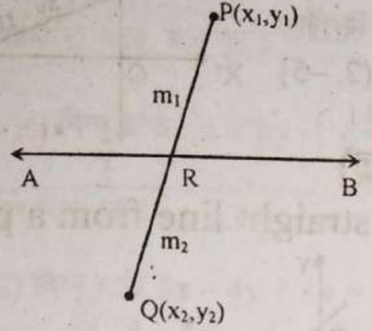
13. (i) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$ (ii) $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ **14.** (i) $6x + 2y - 17 = 0$ (ii) $(-2, -3)$ **15.** (ii) 10 বর্গ একক

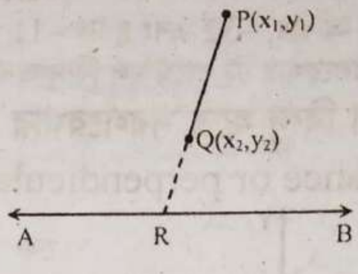
16. (i) $5x - 4y - 6 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 2(3 - \sqrt{3}) = 0$

পাঠ-১১

3.16.3 সরলরেখার একই পার্শ্ব অথবা বিপরীত পার্শ্বের বিন্দুসমূহ অথবা সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্ব এবং ঋণাত্মক পার্শ্বের বিন্দুসমূহ

মনে করি, AB সরলরেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$; $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ যে কোনো দুইটি বিন্দু।





ধরি, PQ রেখাংশ R বিন্দুতে AB সরলরেখাকে এমনভাবে ছেদ করে যেন, $PR : RQ = m_1 : m_2$ হয়।

(i) যদি P ও Q বিন্দু দুইটি AB সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে (অর্থাৎ একটি যে পার্শ্বে, অপরটি তার বিপরীত পার্শ্বে) অবস্থান করে, তবে R এর স্থানাঙ্ক হবে $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

[যেহেতু R বিন্দু দ্বারা PQ রেখাংশ $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে]

R বিন্দুটি AB রেখার উপরস্থ একটি বিন্দু।

$$\therefore a\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}\right) + b\left(\frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) + c = 0$$

বা, $m_1(ax_2 + by_2 + c) + m_2(ax_1 + by_1 + c) = 0$ বা, $\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\frac{m_1}{m_2}$ যা ঋণাত্মক।

সুতরাং $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুইটির মান বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

অতএব, **(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।**

(ii) যদি P ও Q বিন্দু দুইটি AB সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থান করে তবে, R এর স্থানাঙ্ক হবে,

$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$ [এক্ষেত্রে R দ্বারা PQ রেখাংশ বহির্বিভক্ত হয়েছে]

R বিন্দুটি AB রেখার ওপরস্থ একটি বিন্দু।

$$\therefore a\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}\right) + b\left(\frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right) + c = 0 \quad \text{বা, } \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = \frac{m_1}{m_2}$$ যা ধনাত্মক।

সুতরাং $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুইটির মান উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক।

অতএব, **(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।**

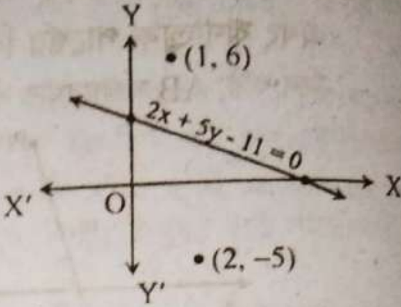
ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পার্শ্ব (Positive and negative side)

$ax + by + c = 0$ সরলরেখার কোনো পার্শ্বের যে কোনো বিন্দু (x_1, y_1) এর জন্য যদি $ax_1 + by_1 + c$ সর্বদা ধনাত্মক হয় তবে ঐ পার্শ্বটিকে সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্ব এবং তার বিপরীত পার্শ্বটিকে ঋণাত্মক পার্শ্ব বলা হয়।

মূল বিন্দুর অবস্থান: যদি $ax + by + c = 0$ সমীকরণের c ধনাত্মক হয় তবে মূল বিন্দু (0, 0) সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্বে এবং c ঋণাত্মক হলে মূল বিন্দু রেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

মূল বিন্দু ও অপর যে কোনো বিন্দুর অবস্থান: যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং c একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে (0,0) এবং (x_1,y_1) একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে। আর যদি ভিন্ন চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে মূলবিন্দু ও (x_1,y_1) বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে।

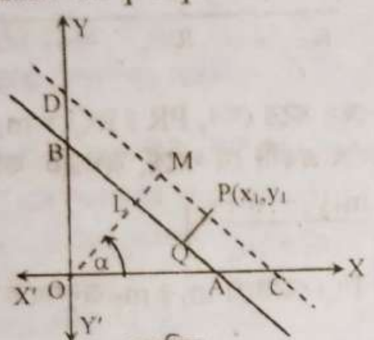
উদাহরণ: (1, 6) ও (2, − 5) বিন্দু দুইটি 2x + 5y − 11 = 0 রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা তা যাচাই কর। মূল বিন্দু যে পার্শ্বে অবস্থিত সেই পার্শ্বে কোন বিন্দুটি অবস্থিত?



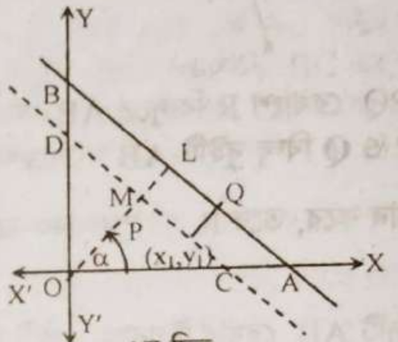
সমাধান: (1, 6) বিন্দুতে, $2x + 5y - 11$ রাশির মান $= 2 \times 1 + 5 \times 6 - 11 = 2 + 30 - 11 = 21$ আবার, (2, − 5) বিন্দুতে $2x + 5y - 11$ রাশির মান $= 2 \times 2 + 5 \times (-5) - 11 = -32$ যেহেতু মানদ্বয় বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট। সুতরাং বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। আবার, −32 এবং ধ্রুবক −11 এর চিহ্ন একই, সুতরাং (2, −5) বিন্দুটি প্রদত্ত সরলরেখার যে পার্শ্বে মূল বিন্দু অবস্থিত ঐ পার্শ্বে অবস্থিত।

3.17 কোনো বিন্দু হতে সরলরেখার দূরত্ব (বা লম্ব দূরত্ব)

(Distance or perpendicular distance of a straight line from a point)



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, AB সরলরেখার সমীকরণ $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$. মূল বিন্দু হতে AB এর ওপর OL লম্ব আঁকি। তাহলে $OL = p$ এবং $\angle XOL = \alpha$

ধরি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$; AB এর সমান্তরাল করে P বিন্দুগামী CD সরলরেখা, O হতে CD এর ওপর লম্ব OM এবং P হতে CD এর ওপর PQ লম্ব আঁকি।

যদি $OM = p_1$ হয় তবে, CD সরলরেখার সমীকরণ হবে $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p_1$ $[\because AB \parallel CD]$ ...... (i)

যেহেতু CD রেখার ওপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দু অবস্থিত, সুতরাং (i) নং সমীকরণটি (x_1, y_1) দ্বারা সিদ্ধ হবে।

$\therefore x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = p_1$ বা, $p_1 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$

১ম চিত্রানুযায়ী, OL এর বর্ধিত অংশ CD কে M বিন্দুতে ছেদ করলে, নির্ণেয় দূরত্ব (লম্ব দূরত্ব)

$$PQ = OM - OL = p_1 - p = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \qquad \text{...... (ii)}$$

২য় চিত্রানুযায়ী, OL রেখাংশ CD কে M বিন্দুতে ছেদ করলে নির্ণেয় দূরত্ব (লম্ব দূরত্ব)

$$PQ = OL - OM = p - p_1 = -(p_1 - p) = -(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p) \qquad \text{...... (iii)}$$

সুতরাং (ii) ও (iii) থেকে পাওয়া যায় নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) হতে $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ রেখার দূরত্ব (লম্ব দূরত্ব) $= \pm (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p)$

দ্রষ্টব্য: (i) দূরত্ব বা দৈর্ঘ্য সর্বদা ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়, তবে চিহ্নের দ্বারা কোন পার্শ্বের দূরত্ব তা বুঝা যায়। উপরিউক্ত দূরত্বের ক্ষেত্রে মূল বিন্দু এবং নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) একই পার্শ্বে থাকলে চিহ্ন '+' এবং বিপরীত পার্শ্বে থাকলে চিহ্ন '−' পাওয়া যাবে।

(ii) সুতরাং দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে দিকের প্রসঙ্গ উল্লেখ না থাকলে উক্ত দূরত্বকে $|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|$ বিবেচনা করতে হবে অথবা পরম মান চিহ্ন '| |' না দিলে, নির্ণেয় দূরত্ব লিখার সময় '−' চিহ্ন আসলে তা বাদ দিয়ে লিখতে হবে।

(iii) পৃথক কোনো শর্তারোপ করা না থাকলে দূরত্ব বলতে সর্বদা লম্ব দূরত্বকে বুঝায়।

(x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার দূরত্ব (অথবা লম্ব দূরত্ব অথবা অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য)

$ax + by + c = 0$ সমীকরণটিকে $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ এর সমরূপ বিবেচনা করলে পাই,

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{-p}{c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\therefore \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দু হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব (বা অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য)

$= \pm(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p) = \pm\left(x_1\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + y_1\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \pm\left(\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

দিক বিবেচনা না করে, লম্ব দূরত্ব $= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ **(x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$**

দ্রষ্টব্য: মূল বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার দূরত্ব $= \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

উদাহরণ: (3, 2) বিন্দু হতে $3x - 4y + 14 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: নির্ণেয় দূরত্ব $= \frac{|9 - 8 + 14|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$ একক

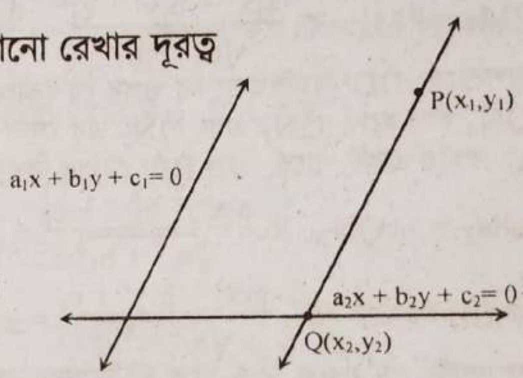
3.17.1 কোনো বিন্দু হতে কোনো রেখার সমান্তরালে অপর কোনো রেখার দূরত্ব

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু হতে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ রেখার সমান্তরালে $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখার দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য, প্রথমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখা $a_1x + b_1y + k = 0$ নিই। এই রেখার উপর $P(x_1, y_1)$ অবস্থিত।

$\therefore a_1x_1 + b_1y_1 + k = 0$ বা, $k = -a_1x - b_1y$

এখন $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং $a_1x + b_1y + k = 0$ সমাধান করে ছেদবিন্দু $Q(x_2, y_2)$ পাওয়া যাবে।

তাহলে, নির্ণেয় দূরত্ব $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$



3.17.2 দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব (বা দূরত্ব)

(Perpendicular distance between two parallel straight lines)

মনে করি, সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ চিত্রে, রেখা দুইটি যথাক্রমে AB ও CD

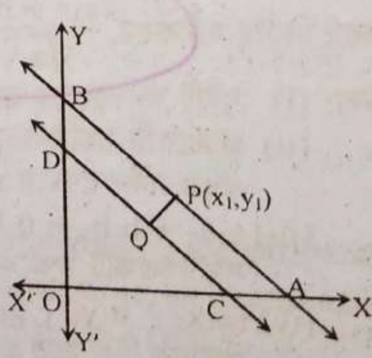
ধরি, AB সরলরেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$

$\therefore ax_1 + by_1 + c_1 = 0$ বা, $ax_1 + by_1 = -c_1 \cdots\cdots$ (i)

এখন, P থেকে CD এর উপর PQ লম্ব অঙ্কন করি।

তাহলে, $PQ = \frac{|ax_1+by_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [(i) নং সমীকরণ হতে]

$= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



সুতরাং দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব $= \frac{|\text{ধ্রুবকদ্বয়ের অন্তর}|}{\sqrt{(x \text{ এর সহগ})^2 + (y \text{ এর সহগ})^2}}$

উদাহরণ: $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১০]

সমাধান: প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয় $4x - 3y + 2 = 0 \cdots\cdots$ (i) এবং $8x - 6y - 9 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

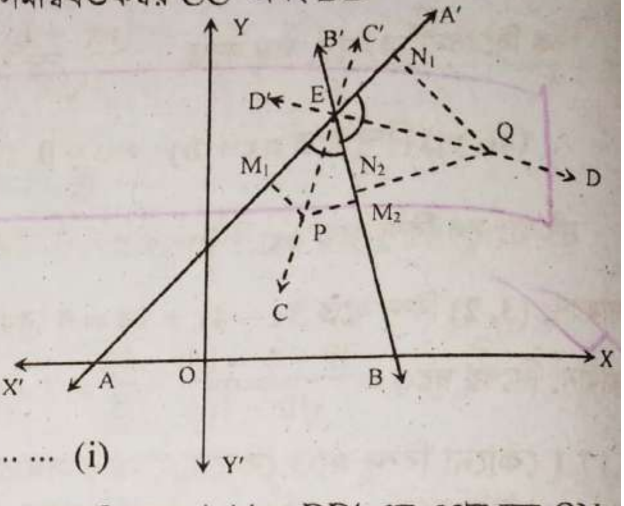
(ii) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $4x - 3y - \frac{9}{2} = 0 \cdots\cdots$ (iii)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব = সমীকরণ (i) ও (iii) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{\left|2 + \frac{9}{2}\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{25}} = \frac{13}{10}$

3.17.3 দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ (Equation of bisectors of the angle between two straight lines)

মনে করি, AA′ ও BB′ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয় এমন ভাবে লেখা হয়েছে যাতে, c_1 ও c_2 উভয়েই ধনাত্মক।

ধরি, রেখাদ্বয় E বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে এবং মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় CC′ এবং DD′



এখন, ∠AEB এর সমদ্বিখণ্ডক CC′ এর ওপর যে কোনো বিন্দু P(x′, y′) নিই। সমদ্বিখণ্ডকের সংজ্ঞা অনুযায়ী, CC′ এমন বিন্দু সমূহের সেট, যার ওপরের যে কোনো একটি বিন্দু থেকে AA′ এবং BB′ রেখার লম্ব দূরত্ব সমান।

P হতে AA′ ও BB′ এর ওপর যথাক্রমে PM_1 ও PM_2 লম্ব অঙ্কন করি।

তাহলে PM_1 ও PM_2 এর দৈর্ঘ্য সমান। আবার P (x′, y′) এবং মূল বিন্দু AA′ ও BB′ এর একই পার্শ্বে অবস্থিত, সুতরাং PM_1 এবং PM_2 একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

$$\therefore PM_1 = PM_2 \quad \text{বা, } \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \; \ldots \ldots \text{(i)}$$

অনুরূপভাবে, DD′ সমদ্বিখণ্ডকের ওপর যে কোনো বিন্দু Q (x′, y′) এবং Q হতে AA′ ও BB′ এর ওপর লম্ব QN_1 ও QN_2 লম্ব হলে, QN_1 এবং QN_2 এর দৈর্ঘ্য সমান হবে, কিন্তু তাদের চিহ্ন বিপরীত হবে। কারণ Q ও মূল বিন্দু AA′ রেখার একই পার্শ্বে, কিন্তু BB′ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

$$\therefore QN_1 = -QN_2 \quad \text{বা } \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \; \ldots \ldots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\dfrac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \dfrac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

আমরা জানি, যে সকল বিন্দু হতে দুইটি সরলরেখার লম্ব দূরত্বের মান সমান, ঐ সকল বিন্দু সমূহের সঞ্চারপথই উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

অতএব, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সঞ্চারপথই নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় হবে।

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ, $\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

দ্রষ্টব্য: (i) দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

(ii) প্রত্যেকটি সমদ্বিখন্ডকের সাপেক্ষে রেখাদ্বয় একে অপরের প্রতিচ্ছবি।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ে x-এর সহগদ্বয় একই চিহ্নবিশিষ্ট করার পর;

(iii) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে ঋণাত্মক চিহ্ন হতে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডকটি এবং < 0 হলে ধনাত্মক চিহ্ন হতে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডকটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক। অপরটি স্থূল কোণের সমদ্বিখন্ডক

(iv) $(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) > 0$ হলে ধনাত্মক চিহ্ন প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডকটি এবং < 0 হলে ঋণাত্মক চিহ্ন হতে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডকটি (x_1, y_1) বিন্দুকে ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

(v) $(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ হলে (x_1, y_1) বিন্দুটি স্থূলকোণে এবং < 0 হলে (x_1, y_1) বিন্দুটি সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

(vi) $f(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের (α, β) বিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) > 0$

এবং $\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) < 0.$

পাঠ-১২
উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু হতে $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং এ লম্ব x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৭]

সমাধান: $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু হতে $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$= \frac{|\sqrt{3}(\sqrt{3}) - 1 + 8|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - 1 + 8|}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$$

প্রদত্ত রেখা $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ বা, $y = \sqrt{3}x + 8$, যা $y = mx + c$ আকারের। রেখাটির ঢাল $= \sqrt{3} = m_1$(ধরি)

মনে করি, লম্ব রেখাটি x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং লম্ব রেখার ঢাল, $m = \tan\theta$

প্রশ্নানুসারে, $mm_1 = -1$ বা, $\tan\theta \times \sqrt{3} = -1$

বা, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan 30° = \tan(180° - 30°) = \tan 150° \therefore \theta = 150°$

উদাহরণ-2. দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্যের গুণফল θ বর্জিত। [ঢা: বো: ১১, ০৬; য: বো: ০৩; ব: বো: ০৮; কু: বো: ১৩]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাটি $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ বা, $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ ……… (i)

এখন $(4, 0)$ ও $(-4, 0)$ বিন্দু থেকে (i) নং এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p_1 ও p_2 হলে,

$$p_1 = \frac{|12\cos\theta - 15|}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}} \text{ এবং } p_2 = \frac{|-12\cos\theta - 15|}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}} = \frac{|12\cos\theta + 15|}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}$$

$$\text{লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল} = p_1 \times p_2 = \frac{|(12\cos\theta - 15)(12\cos\theta + 15)|}{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}$$

$$= \frac{|144\cos^2\theta - 225|}{9\cos^2\theta + 25 - 25\cos^2\theta} = \frac{|-9(25 - 16\cos^2\theta)|}{25 - 16\cos^2\theta} = 9; \text{ যা } \theta \text{ বর্জিত।}$$

উদাহরণ-3. $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ০৭, ০৩; রা: বো: ১৩; কু: বো: ০৮, ০৫; য: বো: ১০; সি: বো: ১২; চ: বো: ১৪, ০৭; ব: বো: ১০, ০৬]

সমাধান : ধরি, $12x - 5y = 7$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $12x - 5y + k = 0$ ……… (i)

যেখানে k যে কোনো ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

যেহেতু প্রদত্ত রেখা এবং তার সমান্তরাল রেখা (i) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 2 একক

$$\therefore \frac{|k + 7|}{\sqrt{144 + 25}} = 2 \text{ বা, } \frac{|k + 7|}{13} = 2 \text{ বা, } k + 7 = \pm 26 \text{ বা, } k = 19, -33$$

অতএব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $12x - 5y + 19 = 0$, $12x - 5y - 33 = 0$

উদাহরণ-4. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৬, ০৯; রা: বো: ০৮, ১২; য: বো: ১৪, ০৫; চ: বো: ০৬, ০৪; ব: বো: ০৪, ০৩]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $4x + 3y - c = 0$ ……… (i) এবং $12x - 5y - 2(c + 3) = 0$ ……… (ii)

$$\text{মূলবিন্দু } (0, 0) \text{ হতে (i) নং এর লম্ব দূরত্ব} = \frac{|4 \times 0 - 3 \times 0 - c|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|c|}{5}$$

$$\text{আবার, } (0, 0) \text{ হতে (ii) নং এর লম্ব দূরত্ব} = \frac{|12 \times 0 - 5 \times 0 - 2(c + 3)|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|2(c + 3)|}{13}$$

শর্তানুসারে, $\frac{c}{5} = \pm \frac{2(c + 3)}{13}$ বা, $13c = \pm 10(c + 3)$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $13c = 10c + 30$ বা, $c = 10$

(−) চিহ্ন নিয়ে পাই, $13c = -10c - 30$ বা, $c = \frac{-30}{23}$

$\therefore$ c এর ধনাত্মক মান 10

উদাহরণ-5. $3x - 4y + 7 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. ঢালের সাহায্যে দেখাও যে, $(1, 2)$, $(3, 4)$ ও $(5, 6)$ বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। ২

খ. উদ্দীপকের রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশকে $3 : 7$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করা বিন্দুর সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা, $(3, 1)$ বিন্দুগামী। ৪

সমাধান: ক. মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ ও $C(5, 6)$.

AB রেখার ঢাল, $m_1 = \dfrac{4-2}{3-1} = \dfrac{2}{2} = 1$;

BC রেখার ঢাল, $m_2 = \dfrac{6-4}{5-3} = \dfrac{2}{2} = 1$

যেহেতু AB ও BC রেখার ঢাল সমান এবং B উভয় রেখার সাধারণ বিন্দু।

$\therefore$ A, B, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

খ. $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব যেকোন রেখার সমীকরণ,

$4x + 3y + k = 0$ .... (i) যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এখন মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{|k|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|k|}{5} = 7$ বা, $\dfrac{k}{5} = \pm 7$ $\therefore$ $k = \pm 35$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $4x + 3y \pm 35 = 0$ ইহাই নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ।

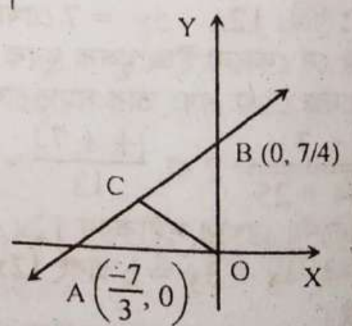
গ. প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 7 = 0$

বা, $3x - 4y = -7$

$\therefore \dfrac{x}{\frac{-7}{3}} + \dfrac{y}{\frac{7}{4}} = 1$

মনে করি, রেখাটি x-অক্ষকে $A\left(\dfrac{-7}{3}, 0\right)$ ও y-অক্ষকে $B\left(0, \dfrac{7}{4}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, AB রেখাংশকে $3 : 7$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $C(x_1, y_1)$



$\therefore$ $x_1 = \dfrac{3.0 + 7\left(\frac{-7}{3}\right)}{3+7} = -\dfrac{49}{30}$; $y_1 = \dfrac{3 . \frac{7}{4} + 7.0}{3+7} = \dfrac{21}{40}$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\dfrac{49}{30}, \dfrac{21}{40}\right)$

$\therefore$ OC রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-0}{0+\frac{49}{30}} = \dfrac{y-0}{0-\frac{21}{40}}$

বা, $\dfrac{30x}{49} = -\dfrac{40y}{21}$

বা, $\dfrac{3x}{7} = -\dfrac{4y}{3}$

বা, $9x = -28y$ $\therefore$ $9x + 28y = 0$ .... (ii)

এখন (ii) নং রেখার সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ, $9x + 28y + k = 0$ .... (iii)

(iii) নং রেখাটি $(3, 1)$ বিন্দুগামী হলে, $27 + 28 + k = 0$ $\therefore$ $k = -55$

k এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $9x + 28y - 55 = 0$ ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

উদাহরণ-6. পদ্মা সেতুর একটি আয়তাকার স্প্যান চারটি খুঁটির উপর বসানো আছে যার দুইটি খুঁটির স্থানাঙ্ক A(1, 0) এবং B(3, 2)। অপর একটি স্প্যান বর্গাকার যার একটি ধার, $x + y = 1$

ক. B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. আয়তাকার স্প্যানের একটি খুঁটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে উক্ত খুঁটির স্থানাঙ্ক এবং স্প্যানটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

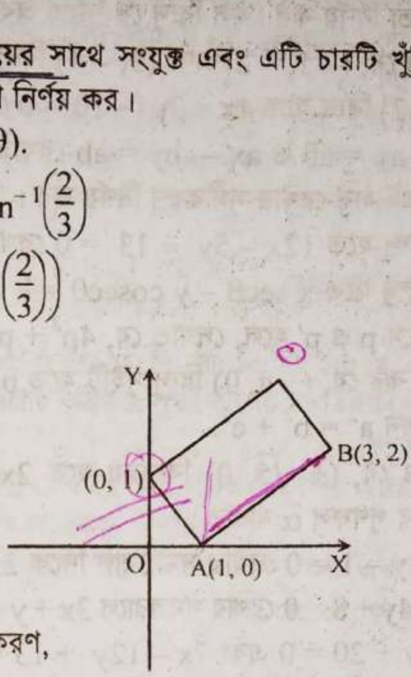
গ. বর্গাকার স্প্যানটির অপর ধারগুলির প্রান্তবিন্দুসমূহ অক্ষদ্বয়ের সাথে সংযুক্ত এবং এটি চারটি খুঁটির ওপর বসানো হলে খুঁটিগুলির স্থানাঙ্ক এবং অবশিষ্ট ধারত্রয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: **ক.** মনে করি, B(3, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\therefore$ B(3, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{13}, \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

খ. মনে করি, A(1, 0) এবং B(3, 2)



AB ধারের সমীকরণ, $\frac{x-1}{1-3} = \frac{y-0}{0-2}$

বা, $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-2}$

বা, $x - y - 1 = 0$ ... ... (i)

$\therefore$ AB ধারের ঢাল = 1

AB সরলরেখার উপর লম্ব A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$(y - 0) = (-1)(x - 1)$

বা, $y = -x + 1$

বা, $x + y - 1 = 0$ ... ... (ii)

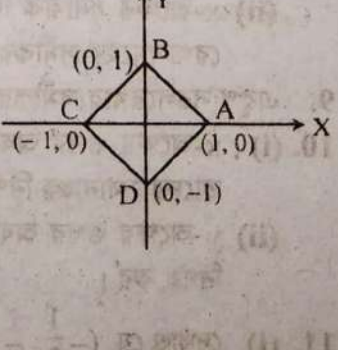
(ii) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y = 1$, সুতরাং আয়তাকার স্প্যানটির যে খুঁটিটি y-অক্ষের ওপর অবস্থিত তার স্থানাঙ্ক হবে (0, 1)। সুতরাং, স্প্যানটির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$= \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2}\ \sqrt{(1-3)^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{1+1}\ \sqrt{4+4} = \sqrt{2}\sqrt{8} = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$ বর্গ একক

গ. বর্গাকার স্প্যানের একটি ধার $x + y = 1$

বা, $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$ ... ... (i)



এটি x- অক্ষের সাথে A(1, 0) ও y-অক্ষের সাথে B(0, 1) বিন্দুতে সংযুক্ত। যেহেতু ধারগুলির প্রান্তবিন্দুসমূহ অক্ষ যুগলের সাথে সংযুক্ত। সুতরাং চারটি খুঁটিই অক্ষরেখার ওপর অবস্থিত হবে।

আবার স্প্যানটি বর্গাকার হওয়ায় প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য হবে

$\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ খুঁটি চারটির স্থানাঙ্ক হবে A(1, 0), B(0, 1), C(–1, 0) ও D(0, –1)

$\therefore$ BC ধারের সমীকরণ, $\frac{(x+1)}{-1-0} = \frac{y-0}{0-1}$ বা, $x - y + 1 = 0$

$\therefore$ CD ধারের সমীকরণ, $\frac{x+1}{-1-0} = \frac{y-0}{0+1}$ বা, $x + y + 1 = 0$

এবং DA ধারের সমীকরণ, $\frac{x-0}{0-1} = \frac{y+1}{-1-0}$ বা, $x - y - 1 = 0$

পাঠ-১৩ ও ১৪

অনুশীলনী-3(G)

1. (i) $(3, 4)$ ও $(1, -3)$ বিন্দু দুইটি $4x - 5y + 7 = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা তা নির্ণয় কর। মূল বিন্দু যে পার্শ্বে অবস্থিত সেই পার্শ্বে কোন বিন্দুটি অবস্থিত ?

   (ii) দেখাও যে, $(-1, -2)$ এবং $(3, -4)$ বিন্দু দুইটি $x + 4y + 6 = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত।

2. (i) $(3, -2)$ বিন্দু হতে $4x - 3y - 10 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

   (ii) $bx + ay = ab$ ও $ax - by = ab$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হতে $ax - by = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর এবং এই লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (iii) মূল বিন্দু হতে $12x - 5y + 13 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

   (iv) মূল বিন্দু হতে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ এবং $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের ওপর লম্ব দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p ও p' হলে, দেখাও যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$ [য: বো: ০৯; রা: বো: ০৪; চ: বো: ১১, ০৩]

3. (i) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$ এর ওপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$. [কু: বো: ০৯]

   (ii) দেখাও যে, $(\pm\sqrt{5}, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে $2x \cos\alpha - 3y \sin\alpha = 6$ সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল α বর্জিত। [রা: বো: ০৭; কু: বো: ০৫]

4. (i) $x - 2y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $2x + 3y - 14 = 0$ রেখা হতে $(3, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

   (ii) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরালে $3x + y + 4 = 0$ রেখা থেকে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [য: বো: ০৮]

5. $7x - 12y + 20 = 0$ এবং $7x - 12y + 13 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. (i) $5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (ii) $4x - 3y = 8$ রেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [ঢা: বো: ১৩, ১০, ০৮; চ: বো: ০৯; দি: বো: ১৪; সি: বো: ০৭; য: বো: ১৬, ০৪; ব: বো: ১৩]

   (iii) $(1, -2)$ বিন্দু হতে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখার সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [ঢা: বো: ১৪; ব: বো: ১৪; দি: বো: ১০; য: বো: ১৩; চ: বো: ১২; সি: বো: ১৩]

7. মূল বিন্দু হতে 4 একক দূরত্বে এবং $8x - 6y + 5 = 0$ রেখার ওপর লম্ব এরূপ সরলরেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. (i) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূল বিন্দু হতে যার দূরত্ব 4 একক।
   [কু: বো: ০৬, ১২; সি: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১২]

   (ii) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(5, 4)$ বিন্দু হতে 7 একক দূরত্বে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 6)$ বিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হতে যার দূরত্ব 6 একক।

10. (i) x-অক্ষের ওপর অবস্থিত যে বিন্দুগুলো হতে $3x + 4y = 15$ রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব দূরত্ব 6 একক, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

    (ii) y-অক্ষের ওপর অবস্থিত যে বিন্দুগুলো হতে $3y = 4x - 10$ রেখার লম্ব দূরত্ব 4 একক তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ: বো: ১৪, ১০]

11. (i) দেখাও যে, $(-\frac{1}{2}, -2)$ বিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $6x + 4y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।
    [য: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

    (ii) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$
    [রা: বো: ১০; য: বো: ১৫; চ: বো: ১৩; সি: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪]

12. (i) $12x + 5y = 4$ এবং $3x + 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মাদ্রাসা বো: ১৩]

(ii) $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চুয়েট ০৯-১০; সি: বো: ১৫; দি: বো: ০৯]

(iii) $4x - 4y + 3 = 0$ ও $x + 7y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের মধ্যে কোনটি মূল বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক ? [য: বো: ১২; ব: বো: ০৯]

(iv) $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক সমূহ y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [চুয়েট ০৮-০৯; রা: বো: ১৪, ১১, ০৩; কু: বো: ১৪; য: বো: ০৭; সি: বো: ০৫, ০৪; ব: বো: ১৬, ১২]

(v) $15x - 8y + 3 = 0$ ও $4x + 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(vi) দেখাও যে, (0, 1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।
[ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ০৬; কু: বো: ১৩, ১১, ০৩; য: বো: ১১; দি: বো: ১৩; সি: বো: ১৪, ০৮, ০৪; চ: বো: ০৮]

(vii) $2x + y + 3 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৪; সি: বো: ১০]

13. (i) $4x + 3y = 12$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x - 3y = 12$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(ii) (0, 0), (– 22, – 11), (–1, 3) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৩]

14. (0, 0), (0, 3) ও (4, 0) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের কোণসমূহের অন্তদ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কত ? [ঢা: বো: ০৪; কু: বো: ১০; সি: বো: ১১]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $(\sqrt{3}, -1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কত?

ক. (2, 120°) খ. (2, 150°) গ. (2, 300°) ঘ. (2, 330°)

2. (–1, b) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (2, 120°) হলে b এর মান কত?

ক. $-\sqrt{3}$ খ. 1 গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 2

3. (– 2, – 5) ও (3, – 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল কত?

ক. 5 খ. $\frac{9}{5}$ গ. $\frac{1}{5}$ ঘ. $\frac{-1}{9}$

4. (–1, –2) এবং (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল কত?

ক. $\frac{-7}{6}$ খ. $\frac{-6}{7}$ গ. $\frac{6}{7}$ ঘ. $\frac{7}{6}$

5. (3, 3a) এবং $(4, a^2 + 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল –1 হলে, a এর মান কত?

ক. 2, 1 খ. –2, 1 গ. $\frac{1}{2}$, 1 ঘ. –2, –1

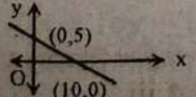
6. (x, 0), (5, 4) ও (–3, –4) বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে x এর মান কত?

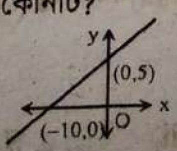
ক. –1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 5

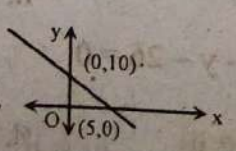
7. (a, 0), (0, b) এবং (1, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ কত?

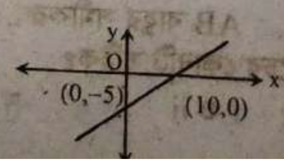
ক. –1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 2

8. $x + 2y = 10$ এর লেখচিত্র কোনটি?

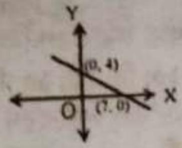
ক. 

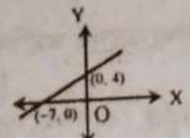
খ. 

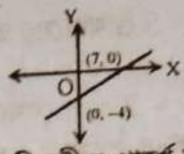
গ. 

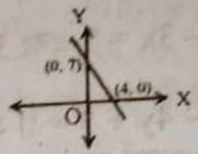
ঘ. 

9. $4x + 7y = 28$ সরলরেখাটির লেখচিত্র কোনটি?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

10. $(2, 2)$ ও $(-6, 4)$ বিন্দু দুটি নিচের কোন সরলরেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত?
ক. $10x - y = 26$ খ. $5x + 3y + 9 = 0$ গ. $2x + 3y + 6 = 0$ ঘ. $-10x + 2y + 39 = 0$

11. $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে রেখাটি হতে $(2, 3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব বিন্দুর দূরত্ব কত একক?
ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 6

12. $(-5, -7)$ থেকে $(4, k)$ বিন্দুর দূরত্ব $9\sqrt{2}$ হলে k এর মান কত?
ক. $-\sqrt{2}$ খ. $\sqrt{2}$ গ. 2 ঘ. $2\sqrt{2}$

13. $5x + 2y - 8 = 0$ রেখার ওপর লম্ব রেখার ঢাল কত?
ক. $\frac{-5}{2}$ খ. $\frac{-2}{5}$ গ. $\frac{2}{5}$ ঘ. $\frac{5}{2}$

14. $y + 3x - 12 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল কত?
ক. -3 খ. $-\frac{1}{6}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. 6

15. $8x + 6y = 17$ ও $8x + 6y - 37 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
ক. -2 খ. 1 গ. 2 ঘ. 5

16. $\frac{11}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(-3, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
ক. $2x - 11y + 7 = 0$ খ. $2x + 11y + 17 = 0$
গ. $11x - 2y + 7 = 0$ ঘ. $11x + 2y + 17 = 0$

17. মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরবর্তী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
ক. $y + x \pm 4\sqrt{2} = 0$ খ. $y - x \pm 4\sqrt{2} = 0$ গ. $y + 4\sqrt{2}\,x = 0$ ঘ. $4\sqrt{2}\,x - y = 0$

18. $(-5, 10)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে সরলরেখাটির সমীকরণ কোনটি?
ক. $x - y + 15 = 0$ খ. $x - y - 1 = 0$ গ. $x + y - 15 = 0$ ঘ. $2x + 3y + 30 = 0$

19. $(-2, 4)$ এবং $(5, -3)$ বিন্দুগামী রেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত?
ক. $2\sqrt{3}$ খ. $3\sqrt{2}$ গ. 2 ঘ. $2\sqrt{2}$

20. $2x + 3y = 7$ এবং $3ax - 5by + 15 = 0$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা প্রকাশ করলে ধ্রুবক a এবং b এর মান কত?
ক. $-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}$ খ. $-\frac{5}{7}, \frac{9}{7}$ গ. $-\frac{10}{7}, \frac{9}{7}$ ঘ. $-\frac{10}{7}, \frac{3}{7}$

21. $P(3, -3)$ বিন্দুটির—
i. ব্যাসার্ধ ভেক্টর $3\sqrt{2}$ ii. ভেক্টর কোণ $\frac{7\pi}{4}$ iii. পোলার স্থানাঙ্ক $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. $A(3, -2)$, $B(4, 6)$ ও $C(5, 7)$ বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে ত্রিভুজটির —
i. ভরকেন্দ্র $\left(4, \frac{11}{3}\right)$ ii. BC বাহুর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$
iii. AB বাহুর সমীকরণ, $8x - y - 26 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. A(8, 10) ও B(18, 20) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে Q এবং R বিন্দু দুইটি 2 : 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করলে—

i. Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (12, 14) ii. R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−12, −10)

iii. $QR = 24\sqrt{2}$ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $8x + 7y + 16 = 0$ রেখা দ্বারা —

i. x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য 2 একক ii. y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $\frac{16}{7}$ একক

iii. উভয় অক্ষের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{8}{7}$ বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. $6x - 5y + 17 = 0$ রেখাটির —

i. লম্ব রেখার সমীকরণ $5x + 6y + 2 = 0$

ii. সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $6x - 5y + 8 = 0$

iii. দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ 50.2°

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

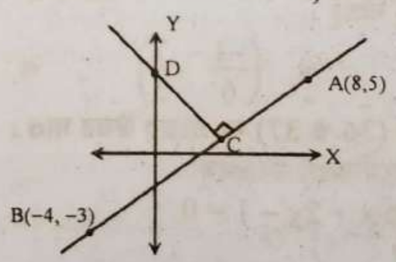
26. মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার ওপর লম্ব রেখার সমীকরণ —

i. $4x + 3y + 35 = 0$ ii. $4x - 3y - 35 = 0$ iii. $4x + 3y - 35 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

27.



CD, AB এর লম্বদ্বিখন্ডক হলে—

i. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 1)

ii. AB এর সমীকরণ, $2x - 3y - 1 = 0$

iii. CD এর সমীকরণ, $3x - 2y + 8 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

28. $3x - y + 1 = 0$ ও $4x - 2y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের—

i. ছেদবিন্দু $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{2}\right)$ ii. অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ iii. পরস্পর সমান্তরাল

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. $12x + 5y + 3 = 0$ এবং $4x - 3y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক রেখাগুলির সমীকরণ—

i. $4x + 32y + 53 = 0$

ii. $56x - 7y + 53 = 0$

iii. $2x + 16y - 19 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (30 ও 31) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(-1, 5)$, $B(-4, 1)$ এবং $C(2, 1)$

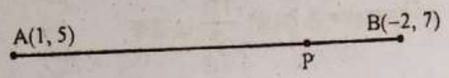
30. $AB =$ কত একক?

ক. 5 খ. 9 গ. 16 ঘ. 25

31. C হতে AB বাহুর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য কত একক?

ক. $\frac{5}{24}$ খ. $\frac{24}{5}$ গ. 5 ঘ. 24

নিচের তথ্যের আলোকে (32 ও 33) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে $AP = 3BP$.

32. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?

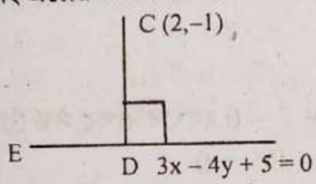
ক. $\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{2}\right)$ খ. $\left(\frac{-5}{4}, \frac{13}{2}\right)$ গ. $\left(\frac{-7}{2}, 8\right)$ ঘ. $\left(\frac{-5}{2}, -4\right)$

33. AB রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $3x + 2y + 17 = 0$ খ. $2x + 3y - 17 = 0$

গ. $2x - 3y - 17 = 0$ ঘ. $3x + 4y - 17 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে (34 ও 35) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



34. CD এর সমীকরণ কোনটি?

ক. $4x + 3y - 5 = 0$ খ. $4x + 3y + 5 = 0$ গ. $4x - 3y + 5 = 0$ ঘ. $3x + 4y - 5 = 0$

35. D বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ক. $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ খ. $\left(\frac{-1}{6}, \frac{7}{5}\right)$ গ. $\left(\frac{1}{5}, \frac{-7}{5}\right)$ ঘ. $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{-7}{5}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে (36 ও 37) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

PR ও QS রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে

$4x + 3y + 6 = 0$ এবং $x + 2y - 1 = 0$.

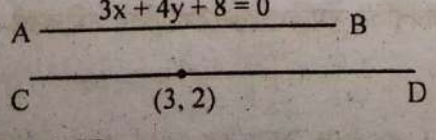
36. $PQ =$ কত একক?

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{3}{2}$ গ. $\frac{5}{2}$ ঘ. $\frac{7}{2}$

37. $SR =$ কত একক?

ক. 5 খ. $\frac{5}{2}$ গ. $\frac{3}{2}$ ঘ. $\frac{1}{2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (38 ও 39) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



$AB \parallel CD$

38. CD সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

ক. $3x + 4y - 17 = 0$ খ. $3x - 4y - 1 = 0$ গ. $4x - 3y - 6 = 0$ ঘ. $3x + 4y + 17 = 0$

39. AB রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু থেকে মূলবিন্দুর দূরত্ব কত?
ক. $\frac{5}{8}$ খ. $\frac{5}{3}$ গ. $\frac{25}{9}$ ঘ. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে (40 ও 41) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$(1, \sqrt{3})$ বিন্দু হতে $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বরেখার দূরত্ব P এবং লম্বরেখাটি x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

40. P এর মান কত?
ক. 2 খ. 4 গ. 10 ঘ. 20

41. θ এর মান কত?
ক. 30° খ. 60° গ. 120° ঘ. 150°

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

42. $2x + 3y - 4 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান— [DU 16-17]
ক. $\frac{1}{\sqrt{13}}$ খ. $\frac{2}{\sqrt{13}}$ গ. $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ঘ. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

43. $x = a$ এবং $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের মান— [DU 16-17]
ক. 30° খ. 45° গ. 60° ঘ. 75°

44. $(x, y), (2, 2)$ এবং $(3, 3)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে— [DU 16-17]
ক. $x - 2y + 1 = 0$ খ. $x - y = 0$ গ. $2x - y + 3 = 0$ ঘ. $x - y + 1 = 0$

45. অক্ষদ্বয় দ্বারা $4x + 3y = 12$ সরলরেখার ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য — [DU 16-17]
ক. 5 খ. 4 গ. 3 ঘ. 2

46. $y = kx - 1$ সরলরেখাটি $y = x^2 + 3$ বক্ররেখার স্পর্শক হলে k এর একটি মান— [DU 15-16, 07-08; JnU 07-08; BUET 13-14]
ক. 1 খ. $2\sqrt{2}$ গ. 3 ঘ. 4

47. $y = 3x + 7$ এবং $3y - x = 8$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান কত? [DU 15-16; DU 08-09; RU 08-09, 10-11, IU 10-11, 12-13]
ক. $\tan^{-1}(1)$ খ. $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$
গ. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ ঘ. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

48. কোন বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (3, 150°) হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কোনটি? *[DU. 15-16]*
ক. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ খ. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ গ. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ঘ. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

49. $y = -5x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতির ট্যানজেন্ট কোনটি? *[DU. 14-15]*
ক. 5 খ. –5 গ. $\frac{1}{5}$ ঘ. $-\frac{1}{5}$

50. P(6, 8), Q(4, 0) এবং R(0, 0) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কোনটি? *[DU. 14-15]*
ক. 32 বর্গ একক খ. 16 বর্গ একক গ. 12 বর্গ একক ঘ. 24 বর্গ একক

51. যে বিন্দু (1, 4) এবং (9, –12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে অন্তঃস্থভাবে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক— *[DU. 14-15, 10-11, KUET. 05-06]*
ক. (4, –2) খ. (2, –4) গ. (–4, 2) ঘ. (4, 2)

52. $3x + 5y = 2, 2x + 3y = 0, ax + by + 1 = 0$ সমবিন্দুগামী হলে a এবং b এর সম্পর্ক কোনটি? *[DU. 14-15]*
ক. $4a - 6b = 1$ খ. $4a - 6b = 2$ গ. $6a - 4b = 1$ ঘ. $6a - 4b = 2$

53. (3, –1) এবং (5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখাংশকে 3 : 4 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক— *[DU. 13-14]*
ক. $\left(\frac{17}{3}, 3\right)$ খ. $\left(\frac{27}{7}, \frac{2}{7}\right)$ গ. $\left(\frac{27}{4}, \frac{4}{3}\right)$ ঘ. কোনটিই নয়

54. $x+y=3$ এবং $y-x=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ— *[DU. 13-14]*

ক. $y=2$ খ. $2y=3$ গ. $x=1$ ঘ. $x+3=0$

55. $5x-7y=15$ রেখার উপর লম্ব এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখাটির সমীকরণ— *[DU. 16-17; 10-11]*

ক. $7x-5y+1=0$ খ. $7x+5y=15$ গ. $5x+7y+15=0$ ঘ. $7x+5y+1=0$

56. A, B, C বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (a, bc), (b, ca), (c, ab) হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত? *[DU. 09-10]*

ক. $\frac{1}{2}abc$ খ. $3abc$

গ. $\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$ ঘ. $\frac{1}{2}(b-a)(b-c)(c-a)$

57. $2x-3y+6=0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(1, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ— *[DU. 09-10]*

ক. $3x+2y=1$ খ. $3x-2y=5$ গ. $3x+2y=5$ ঘ. $2x+3y=1$

58. a এর মান কত হলে, $3x+2y-5=0$, $ax+4y-9=0$ এবং $x+2y-7=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু? *[BUET. 13-14]*

ক. -7 খ. 5 গ. 3 ঘ. 7

59. $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী রেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত? *[BUET. 12-13]*

ক. $2\sqrt{3}$ খ. $3\sqrt{2}$ গ. 2 ঘ. $2\sqrt{2}$

60. x এর কোন মানের জন্য $(1, -x)$, $(1, x)$ এবং $(x^2, -1)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করবে? *[BUET. 12-13]*

ক. $-1, 0, 1$ খ. $2, 3, 4$ গ. $-3, 2, 3$ ঘ. $-4, 3, 4$

61. $x-3y-2=0$ রেখার উপর অবস্থিত P বিন্দুটি (2, 3) এবং (6, −5) বিন্দু দুইটি হতে সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? *[BUET. 11-12]*

ক. (12, 4) খ. (14, 4) গ. (16, 4) ঘ. (18, 4)

62. (1, 0) বিন্দু এবং $x+1=0$ সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চারপথ গঠন করে তার সমীকরণ হবে— *[BUET. 11-12]*

ক. $x^2=2y$ খ. $y^2=4x$ গ. $x^2=4y$ ঘ. $y^2=2x$

63. $4y=3(x-4)$ এবং $4y=3(x-1)$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত? *[BUET. 10-11]*

ক. $\frac{9}{4}$ খ. $\frac{15}{9}$ গ. $\frac{9}{5}$ ঘ. কোনটিই নয়

64. $4x+5y-7=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হল— *[BUET. 09-10]*

ক. $4x+5y-7=0$ খ. $5x-4y-1=0$ গ. $5x-4y+3=0$ ঘ. $4x+5y-10=0$

65. k এর মান কত হলে $x-y+5=0$, $x+y-1=0$ এবং $kx-y+13=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে? *[BUET. 08-09]*

ক. 1 খ. 5 গ. $\frac{1}{5}$ ঘ. -5

66. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পোল, $\left(\sqrt{2}, \frac{p}{4}\right)$ ও $\left(2, \frac{p}{3}\right)$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? *[KUET. 13-14]*

ক. $1+\sqrt{3}$ খ. $1-\sqrt{3}$ গ. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ ঘ. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

67. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(0, 0), B(1, 5) এবং C(−2, 2) হলে A বিন্দুগামী BC রেখার উপর লম্বের সমীকরণ হল— *[KUET. 12-13]*

ক. $2x+y=0$ খ. $x+2y=0$ গ. $x-y=0$ ঘ. $x+y=0$

68. একটি সরলরেখা $(1, -2)$ বিন্দুগামী ও অক্ষদ্বয় হতে সমান অংশ খন্ডিত করলে রেখাটির ঢাল কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. 45° খ. 60° গ. 120° ঘ. 135°

69. A(1, 3), B(−3, 5) ও C(a, 7) বিন্দু তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক হলে C বিন্দুগামী মধ্যমার দৈর্ঘ্য কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. $\sqrt{110}$ খ. $\sqrt{127}$ গ. $\sqrt{130}$ ঘ. $\sqrt{147}$

70. $x-3y+4=0$, $x-6y+5=0$ এবং $x+ay+2=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দুগামী হলে তৃতীয় রেখার সাথে লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ কোনটি? *[KUET. 10-11, 03-04; BIT-97-98]*
ক. $4x-3y=0$ খ. $3x-4y=0$ গ. $3x-y=0$ ঘ. $x-3y=0$

71. (1, 2) বিন্দু হইতে $x-\sqrt{3}y+4=0$ রেখার উপর লম্ব অঙ্কন করা হইল। মূল বিন্দু থেকে ঐ লম্বের দূরত্ব কত? *[KUET. 10-11, 05-06; BIT-96-97]*
ক. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ খ. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ গ. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ ঘ. $\frac{1+\sqrt{3}}{5}$

72. $5x+4y-3=0$ এবং $7y-6x=5$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x+y-3=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ কোনটি? *[KUET. 09-10]*
ক. $11x+11y-8=0$ খ. $11x-11y+18=0$
গ. $30x-28y+15=0$ ঘ. $59x-59y+42=0$

73. নিচের কোন সরলরেখাটি (3, 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং মূল বিন্দু থেকে উহার লম্ব দূরত্ব 6 একক? *[CUET. 13-14]*
ক. $4x+3y-30=0$ খ. $4x-3y-30=0$
গ. $3x+4y-30=0$ ঘ. $3x+4y+10=0$

74. একটি সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দুগুলি (1, 1), (4, 4), (4, 8) এবং (1, 5) হলে এর যে কোন একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে— *[CUET. 10-11]*
ক. $3\sqrt{2}$ খ. 4 গ. $\sqrt{10}$ ঘ. 8

75. y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে $3y=4x-10$ রেখার উপর অংকিত লম্ব দূরত্ব 4 একক তার স্থানাঙ্ক কত? *[CUET. 10-11]*
ক. (0, 10) এবং $\left(0, -\frac{10}{3}\right)$ খ. (0, 10) এবং $\left(0, \frac{10}{3}\right)$
গ. (0, –10) এবং $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ ঘ. (0, –10) এবং $\left(0, -\frac{10}{3}\right)$

76. $r=a\sin\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? *[BUTEX. 12-13]*
ক. $ax^2+y^2-y=0$ খ. $x^2+y^2+ay=0$ গ. $x^2+y^2-ay=0$ ঘ. $x^2+ay^2-y=0$

77. (–2, 1) বিন্দু হতে $3x+4y=8$ রেখার লম্ব দূরত্ব কোনটি? *[BUTEX. 10-11]*
ক. 2 একক খ. 4 একক গ. 6 একক ঘ. 8 একক

78. $y+x=0$ সরলরেখাটি x-অক্ষের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে? *[BUTEX. 09-10]*
ক. 45° খ. 60° গ. 90° ঘ. 135°

79. সমীকরণ $4y=3(x-4)$ এবং $4y=3(x+1)$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত? *[RUET. 11-12]*
ক. $\frac{11}{5}$ খ. $\frac{11}{2\sqrt{13}}$ গ. 3 ঘ. 12

80. $4x-y+5=0$ এবং $9x-2y-12=0$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে tanθ এর ধনাত্মক মান কত? *[KU. 14-15]*
ক. $\frac{1}{38}$ খ. $\frac{5}{37}$ গ. $\frac{1}{37}$ ঘ. $\frac{5}{38}$

81. A(6, 2) বিন্দু থেকে B(3, 3) এবং C(4, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল কত হবে? *[KU. 14-15]*
ক. 3 খ. $\frac{1}{3}$ গ. $-\frac{1}{3}$ ঘ. –3

82. A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দুগুলো ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক কোনটি? *[KU. 14-15]*
ক. (4, 3) খ. (9, 12) গ. (4, 7) ঘ. (7, 9)

83. $3x+4y+3=0$ এবং $4x+3y+4=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ কোনগুলো? *[Ch. U. 14-15]*
ক. $x-y+1=0, x+y+1=0$ খ. $x-y+2=0, x+y+7=0$
গ. $2x+3y=0, 3x+2y=0$ ঘ. $2x-y+2=0, 4x+3y+1=0$

84. x অক্ষ ও $(-5, -7)$ থেকে $(4, K)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে K এর মান— [CH. U. 16-17; RU 16-17, 12-13, 02-03; IU 12-13, 05-06, DU 14-15]

ক. $-\frac{65}{7}$ খ. $\frac{65}{7}$ গ. 20 ঘ. -130

85. $x + y = 0, x - y = 0, x = 7$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটি হবে— [BUTEX 16-17]

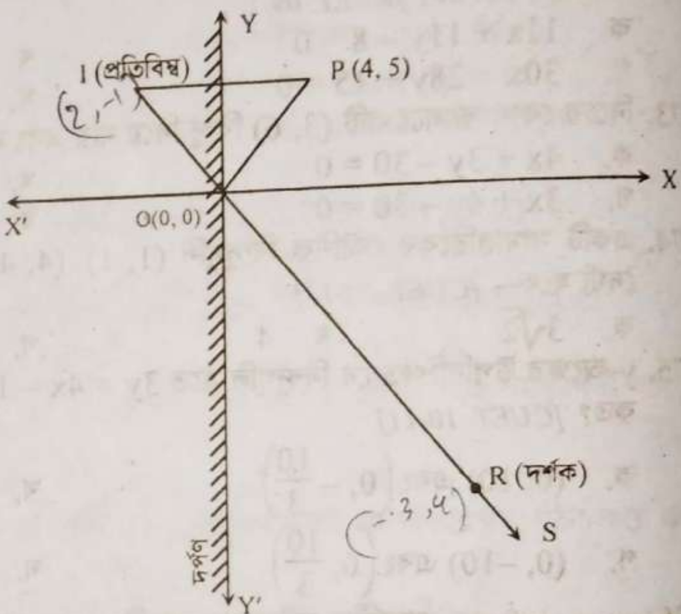
ক. $30°, 60°, 90°$ খ. $60°, 30°, 90°$ গ. $45°, 45°, 45°$ ঘ. None

86. $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ কোনটি? [BUTEX 16-17]

ক. $x - y + 2 = 0$ খ. $-x + y + 2 = 0$ গ. $x + y + 2 = 0$ ঘ. $x + y - 2 = 0$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. P বস্তুটির প্রতিবিম্ব I.

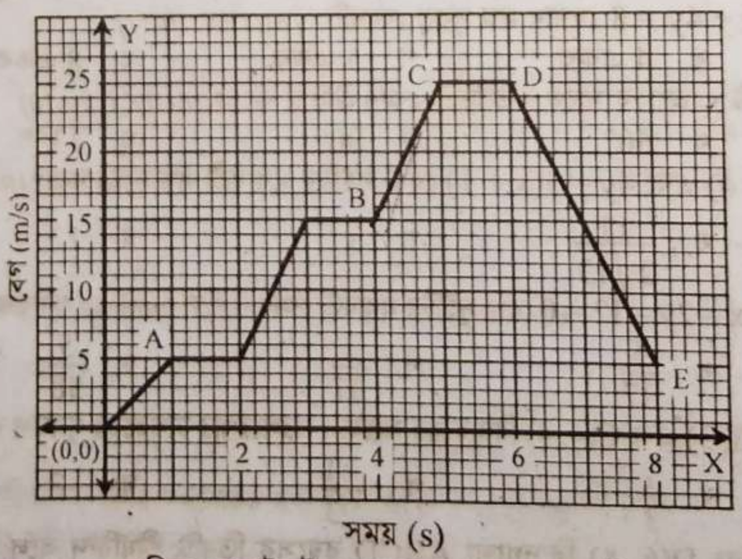


ক. $(-3, 4)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $(2, -1)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

খ. OP রেখার সমান্তরাল এবং তা হতে $\sqrt{41}$ একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দর্পণ থেকে 16 একক দূরত্বে অবস্থানকারী একজন দর্শক P বিন্দু থেকে কত দূরে অবস্থিত?

2.



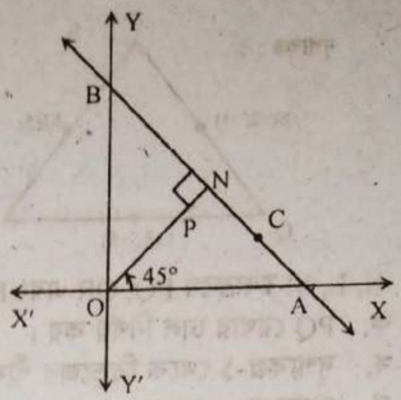
চিত্র : বুলেট ট্রেনের বেগ ও সময়ের লেখচিত্র

ক. $2x + by + 4 = 0$, $4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর।

খ. ট্রেনটির গতিবেগ যদি B বিন্দু থেকে DE রেখার সমান্তরালে হ্রাস পায়, তাহলে কত সেকেন্ড পর ট্রেনটি থেমে যাবে?

গ. BC এবং CD এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করে দেখাও যে, তা BD এর সমান্তরাল ও BD এর অর্ধেক।

3.

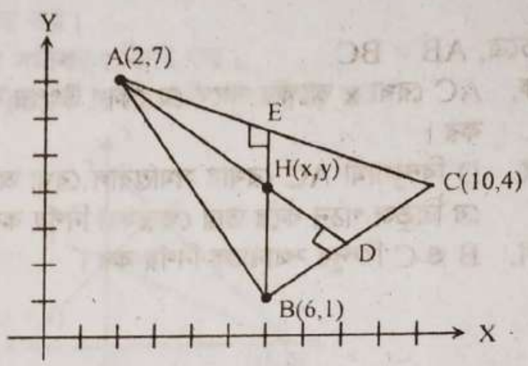


ক. t পরামিতি হলে $P(2t - 1, t + 3)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. $\Delta OAB = 8$ বর্গএকক হলে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের AB সরলরেখার সমীকরণ $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ এবং $AC : BC = 3 : 5$ হলে C বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4.

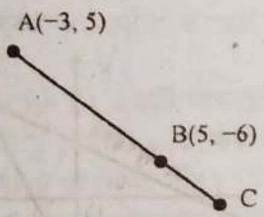


ক. ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা AB রেখার সমান্তরাল এবং C বিন্দুগামী।

গ. ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র $H(x, y)$ নির্ণয় কর।

5.



চিত্রে, $AB = 4BC$

ক. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

খ. B বিন্দু হতে $6\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং AB রেখার সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. AB এর মধ্যবিন্দু হতে $12x - 5y + 4 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. $A(4, 5)$, $B(-4, -3)$, $C(5, 6)$ এবং $D(x, y)$ চারটি বিন্দু।

ক. মূলবিন্দুগামী এবং x অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. ABCD একটি সামান্তরিক হলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. BC এর লম্বদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $2x - y - 4 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

ক. k-এর কোন মানের জন্য উদ্দীপকের রেখাদ্বয় $x + ky - 1 = 0$ রেখার সাথে সমবিন্দু হবে?

খ. উদ্দীপকের রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

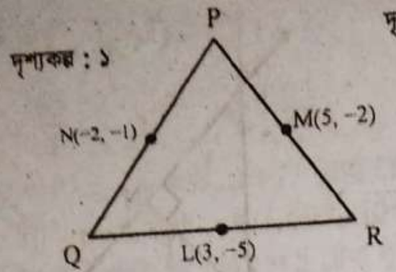
8. $4x + 7y - 15 = 0$ ও $5x - 3y + 1 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

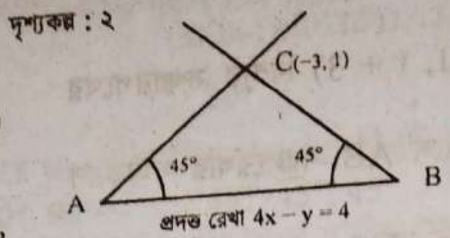
ক. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণটিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর।

খ. রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $(1, -2)$ বিন্দুগামী ১ম রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ ও ২য় রেখার ছেদ বিন্দু হতে $(1, -2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

9.





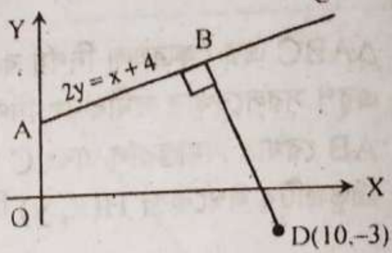
N, L, M যথাক্রমে PQ, QR এবং RP বাহুর মধ্যবিন্দু।

ক. PQ রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে AC এবং BC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. চিত্রে, $AB = BC$

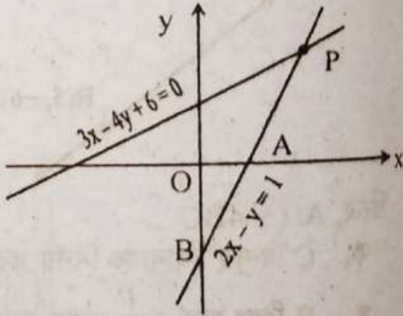


ক. AC রেখা x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

খ. D বিন্দুগামী AC রেখার সমান্তরাল রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

11.

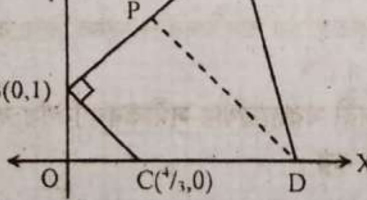


ক. OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা P বিন্দুগামী ও $4x + 3y = 6$ রেখার সমান্তরাল।

গ. দেখাও যে, রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডদ্বয় পরস্পর লম্ব।

12.

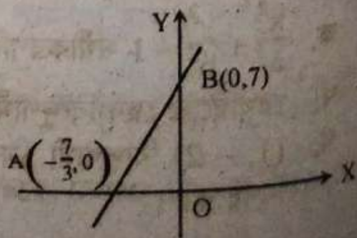


ক. দেখাও যে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

খ. C বিন্দুগামী AB রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. DP রেখা AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক হলে ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

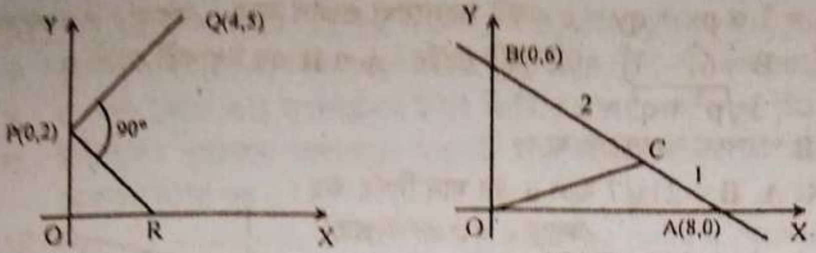
13.



ক. B বিন্দুগামী x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. AB রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এবং $(-1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $(2, -1)$ বিন্দু হতে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

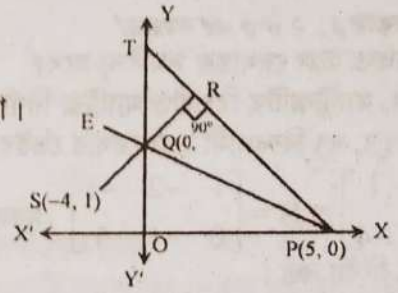
14. 

AC : CB = 1 : 2

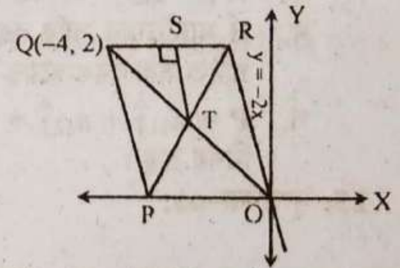
ক. P(0, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাংক নির্ণয় কর।
খ. ΔOAC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
গ. PR রেখার সমীকরণ থেকে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

15. $4x + 3y - 12 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।
ক. (5, 2) বিন্দু হতে সরলরেখাটির ওপর লম্ব দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
খ. রেখাটির সমান্তরাল এবং 4 একক দূরবর্তী রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।
গ. রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. ক. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ (3,5) ও (7, – 1) এবং ভরকেন্দ্র (7,2) হলে তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় করো।
খ. PR রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।
গ. দেখাও যে, PE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।



17. চিত্রে OPQR একটি সামান্তরিক।
ক. PQ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।
খ. S বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
গ. Q বিন্দুগামী PR কর্ণের সমান্তরাল সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



18. PQRS একটি ট্রাপিজিয়াম যার PQ ∥ SR এর শীর্ষবিন্দু P(1, –1), Q(7, 1), S(3, 3) এবং ∠PQR এক সমকোণ।
ক. SQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
খ. ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল কত?
গ. যদি PQTS একটি সামান্তরিক হয় তবে T বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, RT = SR

19. $Z = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সারি বরাবর ভুক্তিগুলি $ax + by + c = 0$ আকারের তিনটি সরলরেখার a, b ও c এর মান নির্দেশ করে। *[অধ্যায় ১ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*
ক. দেখাও যে, $Z - Z^t$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।
খ. ১ম দুইটি সারির ভুক্তিগুলি দ্বারা গঠিত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং ৩য় রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
গ. |adj Z| নির্ণয় কর।

20. A(3, 5), B(6, 8), C(0, t) ও D(–3, 5) বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। *[অধ্যায় ২ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*
ক. (8, 1) ও (3, 5) বিন্দুগামী রেখা দ্বারা x ও y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
খ. t = 2 হলে বিন্দু চারটি দ্বারা সামান্তরিক গঠন করা যায় কিনা যাচাই করো।
গ. $\overrightarrow{BC}$ বরাবর $\overrightarrow{AB}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

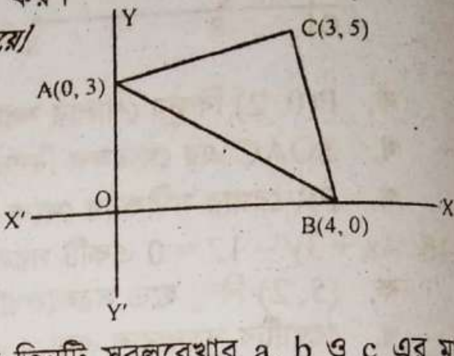
21. দৃশ্যকল্প-১: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 3$ ও $px + qy = c$ একই সরলরেখা প্রকাশ করে। */অধ্যায় ২ ও ৩ এর সমন্বয়ে/*
দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{A} = 2\hat{j} + a\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর। **A** ও **B** এর মধ্যবর্তী কোণ α।

ক. দৃশ্যকল্প-০১ থেকে দেখাও যে, $3\sqrt{p^2 + q^2} = \pm c$

খ. a এর মান কত হলে **A** ও **B** পরস্পর সমান্তরাল হবে?

গ. $p = q = 1, q = 3\sqrt{2}$ এবং $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 21\sqrt{7}$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

22. */অধ্যায় ২ ও ৩ এর সমন্বয়ে/*



ক. P এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 2, 7) এবং (3, 4, −1) হলে $|\overrightarrow{PQ}|$ নির্ণয় করো।

খ. C বিন্দু হতে AB এর উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দু AB রেখাকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় করো।

গ. $\angle ACB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

23. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সারি বরাবর $ax + by + c = 0$ আকারের তিনটি সরলরেখার a, b ও c এর মান প্রকাশ করে। */অধ্যায় ১, ২ ও ৩ এর সমন্বয়ে/*

ক. k এর মান কত হলে রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে?

খ. $k = 3$ হলে, ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

গ. সমবিন্দু ও (3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

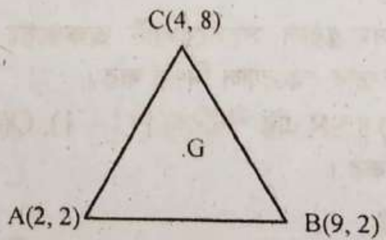
24. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ */অধ্যায় ১, ২ ও ৩ এর সমন্বয়ে/*

ক. $7A - 5B$ নির্ণয় কর।

খ. B ম্যাট্রিক্সের সারি বরাবর ভুক্তি সমূহকে $ax + by + c = 0$ আকারের সরলরেখার a, b ও c এর মান ধরে গঠিত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ বের কর।

গ. $\mathbf{P} = a_{11}\hat{i} + a_{12}\hat{j} + a_{13}\hat{k}$ ও $\mathbf{Q} = a_{21}\hat{i} + a_{22}\hat{j} + a_{23}\hat{k}$ হলে, **P** ও **Q** ভেক্টরের লম্বদিকের একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

25. দৃশ্যকল্প-০১: */অধ্যায় ১, ২ ও ৩ এর সমন্বয়ে/*



G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

দৃশ্যকল্প-০২: $x + 2y + 3z = 1,\ 2x + 4y + 5z = -1,\ 3x + 5y + 6z = 1$

ক. AC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-০২ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।

গ. $\overrightarrow{CG}$ ও $\overrightarrow{CB}$ ভেক্টরদ্বয় কোন সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

26. দৃশ্যকল্প-I : $3x - 4y + 12 = 0$
দৃশ্যকল্প-II : $8x + 15y - 12 = 0$ */ঢা. বো. ১৭/*

ক. $\mathbf{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি লম্ব কিনা যাচাই কর।

খ. দৃশ্যকল্প-II নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-I এবং দৃশ্যকল্প-II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখন্ডক x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর।

27. A(2, 4), B(3, 1), C(4, 5); $2x - y + 2 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$. /রা. বো. ১৭/

ক. y-অক্ষ এবং (k, 4) বিন্দু থেকে A(2, 4) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর।

খ. C বিন্দু থেকে AB সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

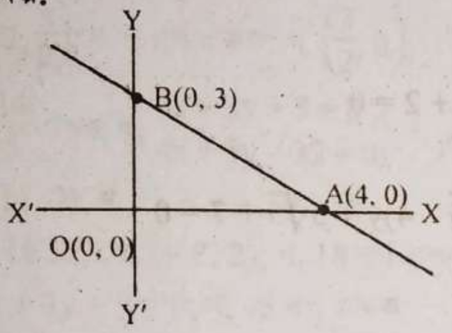
28. $5x - 4y - 1 = 0$ ও $-8x + 7y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু স্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত। /কু. বো. ১৭/

ক. (−1, 2) এবং (3, −5) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. স্টেশনমাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. রেললাইনের সাথে $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. দৃশ্যকল্প:



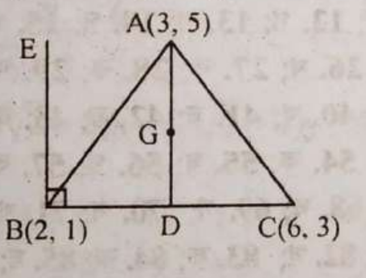
/চ. বো. ১৭/

ক. (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের ঢাল নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্পের মূলবিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

30.



চিত্রে: G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র;
D, BC এর মধ্যবিন্দু, $EB \perp BC$। /য. বো. ১৭/

ক. ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, G বিন্দুটি AD রেখাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

গ. $\angle EBC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

31. দৃশ্যকল্প-১: $x - 2y + 1 = 0$

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{P} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\mathbf{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$. /ব. বো. ১৭/

ক. (1, 2) এবং (3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে যে বিন্দু 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে এবং (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ দুটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})$ বরাবর $\mathbf{Q}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

উত্তরমালা

1. (i) বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত, $(1, -3)$
2. (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $bx + ay = ab$ (iii) 1
4. (i) $\sqrt{5}$ (ii) 3 একক 5. $\frac{7}{\sqrt{193}}$
6. (i) $5y + 3 = 0, 5y - 17 = 0$ (ii) $4x - 3y + 2 = 0, 4x - 3y - 18 = 0$
   (iii) $6x + 8y - 65 = 0, 6x + 8y + 85 = 0$
7. $6x + 8y \pm 40 = 0$ 8. (i) $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (ii) $x - y + 7\sqrt{2} - 1 = 0, x - y - 7\sqrt{2} - 1 = 0$
9. $y = 6, 4x + 3y = 30$
10. (i) $(-5, 0), (15, 0)$ (ii) $\left(0, \frac{10}{3}\right), (0, -10)$
12. (i) $7x - 9y - 37 = 0, 99x + 77y + 71 = 0$ (ii) $x + y + 2 = 0$
    (iii) $16x - 48y + 23 = 0, 24x + 8y + 7 = 0$, দ্বিতীয়টি।
    (iv) $\frac{4}{3}$ একক (v) $\frac{1190}{143}$ একক (vii) $(2\sqrt{5} + 3)x + (\sqrt{5} - 4)y + 3\sqrt{5} + 7 = 0$
13. (i) $\left(3, \frac{25}{7}\right)$ (ii) $(2, -3)$
14. $x - y = 0, x + 3y - 4 = 0, 2x + y - 3 = 0; (1, 1)$

বহুনির্বাচনি

1. ঘ; 2. গ; 3. গ; 4. গ; 5. ক; 6. গ; 7. গ; 8. ক; 9. ক; 10. খ; 11. ক; 12. গ; 13. গ; 14. গ; 15. গ; 16. খ; 17. ক; 18. ক; 19. ঘ; 20. গ; 21. ক; 22. ঘ; 23. ঘ; 24. ক; 25. ঘ; 26. খ; 27. ক; 28. ক; 29. গ; 30. ক; 31. খ; 32. খ; 33. খ; 34. ক; 35. ক; 36. গ; 37. খ; 38. ক; 39. খ; 40. খ; 41. ঘ; 42. ঘ; 43. ক; 44. খ; 45. ক; 46. ঘ; 47. গ; 48. গ; 49. গ; 50. খ; 51. ক; 52. গ; 53. ঘ; 54. ক; 55. ঘ; 56. গ; 57. ক; 58. ঘ; 59. ঘ; 60. ক; 61. খ; 62. খ; 63. গ; 64. গ; 65. খ; 66. ঘ; 67. ঘ; 68. ঘ; 69. গ; 70. গ; 71. খ; 72. ঘ; 73. ক; 74. গ; 75. গ; 76. গ; 77. ক; 78. ঘ; 79. গ; 80. ক; 81. খ; 82. খ; 83. ক; 84. ক; 85. ঘ; 86. গ;

সৃজনশীল

1. ক. $(-8, 9)$; খ. $5x - 4y = \pm 41$; গ. $\sqrt{769}$ একক;
2. ক. $3, \frac{-5}{3}$; খ. 5.5 সেকেন্ড;
3. ক. $x - 2y + 7 = 0$; খ. $x + y - 4 = 0$; গ. $p^2(9x^2 + 25y^2) = 64x^2y^2$;
4. ক. 18 বর্গ একক; খ. $3x + 2y - 38 = 0$; গ. $\left(\frac{37}{6}, \frac{13}{9}\right)$
5. ক. $\left(7, -\frac{35}{4}\right)$; খ. $22x + 16y \pm 13\sqrt{185} - 14 = 0$;
   গ. $\left(-\frac{53}{169}, \frac{8}{169}\right)$
6. ক. $x - \sqrt{3}y = 0$; খ. 0 বর্গ একক; গ. $x + y - 2 = 0$;
7. ক. -1; খ. $x - 3 = 0$; গ. $(2\sqrt{2} - 1)x - (3 + \sqrt{2})y + (9 - 4\sqrt{2}) = 0$;

8. ক. $r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$; খ. $47y - 79 = 0$; গ. $12\sqrt{65}$ একক

9. ক. $\frac{3}{2}$; খ. P(0, 2), Q(−4, 4), R(10, −6); গ. $5x + 3y + 12 = 0$; $3x - 5y + 14 = 0$

10. ক. 26.57°; খ. 64 বর্গ একক; গ. (6, 5), (12, 8)

11. ক. $\frac{1}{4}$ বর্গ একক; খ. $4x + 3y - 17 = 0$;

12. খ. $12x - 9y - 16 = 0$; গ. $14\frac{7}{12}$ বর্গ একক;

13. ক. $y - 7 = 0$; খ. $x - 2y + 5 = 0$, $2x + y = 0$ গ. $\left(\frac{-11}{5}, \frac{2}{5}\right)$

14. ক. $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$; খ. 8 বর্গ একক; গ. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$;

15. ক. $\frac{14}{5}$ একক; খ. $\left.\begin{matrix} 4x + 3y + 8 = 0 \\ 4x + 3y - 32 = 0 \end{matrix}\right\}$; গ. $6x - 8y + 7 = 0$

16. ক. (11, 2); খ. $2x + y - 10 = 0$;

17. ক. 116.57°; খ. (− 2, 2); গ. 18 বর্গ একক;

18. ক. $x + 2y - 9 = 0$; খ. 15 বর্গ একক;

19. খ. $3x + y - 2 = 0$; গ. 0;

20. ক. $\frac{37}{4}$ ও $\frac{37}{5}$; খ. সামান্তরিক গঠন করে না; গ. $3\hat{i}$;

21. খ. −1; গ. ± 6;

22. ক. $\sqrt{69}$; খ. 6 : 19;
গ. $(2\sqrt{2} - 5)x - (3\sqrt{2} + 1)y + 9\sqrt{2} + 20 = 0$ এবং $(2\sqrt{2} + 5)x - (3\sqrt{2} - 1)y + 9\sqrt{2} - 20 = 0$

23. ক. 2; খ. $\begin{bmatrix} -9 & 23 & -6 \\ 6 & -15 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; গ. $r = (9t - 6)\hat{i} + 4\hat{j}$

24. ক. $\begin{bmatrix} 9 & -25 & 22 \\ 21 & 5 & -53 \end{bmatrix}$; খ. $x - (\sqrt{5} + 2)y - (3 - 5\sqrt{5}) = 0$; গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{746}}(20\hat{i} + 11\hat{j} + 15\hat{k})$;

25. ক. $3x - y - 4 = 0$; খ. (6, −7, 3); গ. 14 বর্গ একক

26. ক. লম্ব নয়; খ. $\frac{46}{17}; \frac{22}{17}$; গ. $\frac{1}{13}$

27. ক. 0, 4; খ. $\left(\frac{19}{10}, \frac{43}{10}\right)$; গ. $\frac{25}{18}$ বর্গ একক

28. ক. $7x + 4y = 1$; খ. $3x - 4y + 1 = 0$;

29. ক. $\frac{-3}{2}$; খ. $3x + 4y + 3 = 0$, $3x + 4y - 27 = 0$; গ. 2 বর্গ একক;

30. ক. 7 বর্গ একক; গ. $3x - y - 5 = 0$

31. ক. $\left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right)$; খ. $3x - y = 1$, $x + 3y = 7$; গ. $\frac{11}{14}(3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$