ফাংশন

ফাংশন

যদি x ও y দুটি বাস্তব চলক এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, কোন নির্দিষ্ট ডোমেইনে x এর অনুরুপ প্রত্যেকটি মানের জন্য y এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তবে বলা যায় y ঐ ডোমেইনে x এর একটি ফাংশন। লেখা হয়, সেট তত্ত্বানুসারে $x, y \in f: x \to y$ যখন $f: R \to R$ এবং গাণিতিকভাবে, $y = f(x)$

এখানে, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, ডোমেন লেখা হয়, ডোম, $f = \{x_1, x_2, x_3\}$,

সঠিক পদ্ধতিঃব্যাবধি ব্যবহার করে ডোম $f = [x_1, x_2] \to$ বদ্ধ ব্যাবধি।

$= (x_1, x_2) \to$ খোলা ব্যাবধি।

$= [x_1, x_2) \to$ বদ্ধ খোলা ব্যাবধি।

$=(x_1, x_2] \to$ খোলা বদ্ধ ব্যাবধি।

রেঞ্জঃ x এর অনুরূপ মান গুলোর জন্য প্রাপ্ত y এর মানগুলোর সেটই হলো রেঞ্জ $f = \{y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots\}$

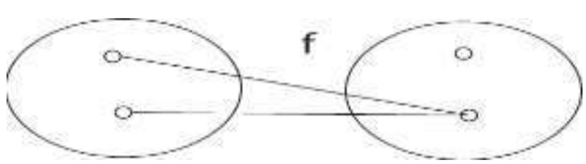
ব্যবধিতে x এর পর্যায়েক্রমিক মানের সেট পাওয়া যায় বলে এখানে x হলো অবিচ্ছিন্ন চলক। ব্যবধিতে $\pm\infty$ খোলা চিহ্ন '(   )' বা ']   [' বিশিষ্ট হয়।

ফাংশনের প্রকারভেদ : Not funcition $f(x) = 0$ [নট ফাংশন],constant function, $f(x) = c$ [ধ্রুব ফাংশন]

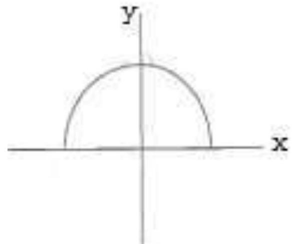
Identity function, $f(x) = x$ [অভেদক ফাংশন],এক এক ← one one function, $f(x) = x + 1$ dom f and range $f = R = (-\infty, \infty)$

সার্বিক ← onto fumction, $f(x) = x + 1$ ∵ Range = codomain.,বিপরীত ← Inverse function, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$ ∵ Range = codomain.

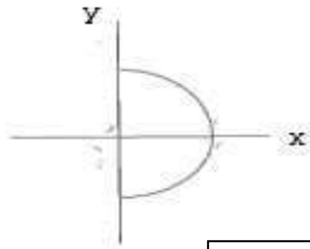
ফাংশনের বিপরীত ← Inverse of a function, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ when, $f(x) \geq 0$



$f(x) = x^2 + 1 = y$



ফাংশন, কারণ x এর একটি মানের জন্য f একটি মান দেখায়



ফাংশন নয়, কারণ x এর একটি মানের জন্য f দুটি মান দেখায় যা সংজ্ঞানুসারে অবৈধ। এটা একটা সম্পর্ক (Relation)

শর্ত (1) এক এক $x_1 \neq x_2$যাংশনের জন্য এর জন্য $f(x_1) \neq f(x_2)$ রেঞ্জ কোডোমেনের উপসেট অথবা সমান হতে পারে।

(1) সার্বিক ফাংশন (onto fumction): Range = codomain.

(2) বিপরীত ফাংশন (Inverse function) যে ফাংশনটি এক এক এবং সার্বিক সে ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করা যায়।

(3) বহু এক ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হল ফাংশনটির বিপরীত (Inverse of a function)

যুগ্ম ফাংশনঃ $f(x) = f(-x)$, $y= \cos x+ |x|$

অযুগ্ম ফাংশনঃ $f(x) = f(-x)$, $y= \sin x$

ট্রান্স সেনডেন্টাল ফাংশন : e^x, a^x, $\log x$, $\sin x$, $\sin^{-1} x$, etc

[exponential function : e^x, a^x, logarithmic function : $\log_e x$, $\log_{10} x$

Trisonometric function : $\sin x$, $\sin^{-1} x$]

ফাংশন সম্পর্কে পরিস্কার ধারনা অর্জন করার জন্য ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বের করার সঠিক পদ্ধতি শিখতে হবে।

Type-1: ডোমেন ও রেঞ্জ বের করার পদ্ধতি (বিভিন্ন ধরণের ফাংশনের জন্য)

EXAMPLE – 01 : $y= x-1 =f(x)$, $(x,y) \in R$ বাস্তব

এখানে x এর যে কোন মানের জন্য y সংজ্ঞয়িত।

$\therefore$ ডোম $f = (-\infty, \infty)$,

EXAMPLE – 02 : $y= \frac{1}{(x-1)} = f(x)$ এখানে $x=1$ এর জন্য ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত বা ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ $x=1$ ব্যতিত সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য y সংজ্ঞায়িত

$\therefore$ ডোম $f =R-\{1\}$,সঠিক পদ্ধতি : ডোম $f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

এবং রেঞ্জ $y = \{y_1, y_2, y_3 ....\}$ = রেঞ্জ f এখানে x_1এর জন্য y_1, x_2এর জন্য y_2 etc.

কিন্তু কোডোমেন হল y.,অর্থাৎ y অক্ষের ওপর প্রাপ্ত সকল বিন্দুর সেট বা রেঞ্জ $\subseteq$ কোডেমেন হতে পারে।

EXAMPLE – 03 : X, Y বাস্তব সংখ্যার সেট R এর দুইটি উপসেট এবং $f: X \rightarrow Y$, যেখানে $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, ফাংশন f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$,ফাংশনটি $2x + 1 \neq 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত,

তাহলে, $2x + 1 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \therefore$ ডোম ,$f = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (Ans)

আবার, ধরি, $f(x) = y$তাহলে, $y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$\Rightarrow 2xy - x = -y - 3 \Rightarrow x(2y - 1) = -(y + 3) \Rightarrow x = -\frac{y+3}{2y-1} \therefore f^{-1}(x) = -\frac{y+3}{2x-1}$

$2x - 1 \neq 0$ এর জন্য $f^{-1}(x)$ ফাংশন সংজ্ঞায়িত হবে অর্থাৎ,$2x - 1 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

অর্থাৎ রেঞ্জ ,$f = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (**Ans**) সংক্ষেপে,$f: R - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$এর জন্য$f(x)$ এক এক এবং সার্বিক।

EXAMPLE – 04 : সব বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, $f : A \rightarrow R$ কে $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, f ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2 + x + 1$

$f : A \rightarrow R$ এখানে ডোমেন $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ এবং কোডোমেন$= R$

$x = -3$ হলে, $f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$

$x = -1$ হলে, $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$x = 0$ হলে, $f(0) = 0 + 0 + 1 = 1$

$x = 1$ হলে, $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$x = 3$ হলে, $f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$ $\therefore$ রেঞ্জ, $f = \{7, 1, 1, 3, 13\}$(**Ans**)

Type-2: বিভিন্ন ধরণের ফাংশনের মান নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $f : R \to R$ এবং $g: R \to R$, $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হলে, $(fog)(-2)$, $(fog)(5)$, $(gof)(-4)$ এবং $(gof)(3)$ নিণয় কর।

SOLVE : $f: R \to R$, $g: R \to R$.

$f(x) = x^2 - 2|x|$, $g(x) = x^2 + 1$, $fog\,(x) = f\{g(x)\} = (x^2 + 1)^2 - 2|x^2 + 1|$

$fog(-2) = \{(-2)^2 + 1\}^2 - 2\,|(-2)^2 + 1| = (4 + 1)^2 - 2|(4 + 1)|$

$= 5^2 - 2 \times 5 = 25 - 10 = 15 \Longrightarrow fog\,(5) = (5^2 + 1)^2 - 2|5^2 + 1|$

$= (26)^2 - 2|26| = 676 - 52 = 624 \Longrightarrow gof(x = g\{f(x) = \{x^2 - |x|\}^2 + 1$

$gof\,(-4) = \{(-4)^2 - 2|-4|\}^2 + 1 \Longrightarrow= (16 - 8)^2 + 1 = 8^2 + 1 = 64 + 1 = 65$

$gof\,(3) = \{3^2 - 2|3|\}^2 + 1 = (9 - 6)^2 + 1 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

পর্যায়ক্রমে নির্ণেয় মানগুলো, $15, 624, 65, 10$ (**Ans**)

EXAMPLE – 02 : মনে কর, বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং $f : R \to R$ কে নিচের সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো

ঃ $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{যদি } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{যদি } -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{যদি } x < -2 \end{cases}$ মান নির্ণয় করঃ (ক) $f(2)$ (খ) $f(4)$ (গ) $f(-1)$

(ঘ)$f(-3)$

SOLVE : (ক) $x = 2$, যা$-2 \leq x \leq 3$ ব্যবধির মধ্যে $\therefore x = 2$ এর জন্য,$f(x) = x^2 - 2$

$\therefore f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ (**Ans**)

(খ) $x = 4 > 3 \;\therefore f(x) = 3x - 1$; $x = 4$ হলে $f(4) = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$ (**Ans**)

(গ) $x = 1$যা$[-2, 3]$ ব্যবধির মধ্যে এক্ষেত্রে, $f(x) = x^2 - 2 \;\therefore f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$(Ans)

(ঘ) $x = -3 < -2 \;\therefore$ এক্ষেত্রে $f(x) = 2x + 3 \;\therefore f(-3) = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$ (**Ans**)

Type-3: সংযোজিত ফাংশনের মান নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$ হলে, সংযোজিত ফাংশন (i) fog (ii) gof নির্ণয় কর। প্রত্যেকটি সংযোজতি ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

SOLVE: দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$

(i)$fog(x) = f\{g(x)\} = \sqrt{x^2 - 1}$ (ii)$gof\,(x) = g\{f(x)\} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 = x - 1$

(i)নং এর জন্য : ধরি,$fog(x) = F(x)$.

$F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $\therefore$ $F(x)$সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x^2 - 1 \geq 0$হয়,

অর্থাৎ, $x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$ $(+)$ve এর জন্য, $x \geqslant 1$

অর্থাৎ, $x \geq 1$বা $x \leq -1$ $(-)$ve এর জন্য, $-x \geqslant 1 \Rightarrow x \leqq -1$

$F(x)$ এর ডোমেন, $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$F(x)$ এর রেঞ্জ :$x = 1$ এর জন্য $f(x) = 0, x = \infty$ এর জন্য $F(x) = \infty$ $\therefore$ রেঞ্জ $F = [0, \infty]$

(ii)নং এর জন্য : ধরি, $G(x) = x - 1;$ xএর সকল বাস্তব মানের জন্য $G(x)$ সংজ্ঞায়িত$\therefore$ ডোম $G = R$

আবার, ধরি, $G(x) = y$, তাহলে, $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1,$

$G^{-1}(x) = x + 1$এক্ষেত্রে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $G^{-1}(x)$ সংজ্ঞায়িত $\therefore$ রেঞ্জ $G = R$

Type-4: এক-এক এবং সর্বগ্রাহী, বিপরীত ফাংশন

EXAMPLE – 01 : R বাস্তব সংখ্যার সেট, $A = R - \{3\}, B = R - \{1\}$ এবং $f: A \to B$ কে $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, f এক-এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরণের ফাংশন। যে সূত্র দ্বারা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা নির্ণয় কর।

SOLVE: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$; $x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$ এর জন্য $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত

$\therefore$ফাংশনটির ডোমেন : ডোম $f = R - \{3\}$ $\therefore$ $x = 3$ ব্যাতিত x এর প্রত্যেক মানের জন্য $f(x)$ এর একটি করে ভিন্ন মান পাওয়া যাবে। $\therefore$ $f(x)$ একটি এক এক ফাংশন। আবার, $x = x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots.$ ইত্যাদি মানের জন্য

$f(x_1) = \frac{x_1-2}{x_1-3}$, $f(x_2) = \frac{x_2-2}{x_2-3}$ যদি $f(x_1) \neq f(x_2)$ হয় তবে এক এক ফাংশনের জন্য $x_1 \neq x_2$ হবে

$$\therefore \frac{x_1 - 2}{x_1 - 3} \neq \frac{x_2 - 2}{x_2 - 3} \Longrightarrow x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 \neq x_1x_2 - 3x_2 - 2x_1 + 6$$

$\Longrightarrow x_1 \neq x_2$ $\therefore$ $f(x)$ একটি এক এক ফাংশন। আবার, ধরি, $y = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = x - 2$

$\Rightarrow yx - x = 3y - 2 \Rightarrow x(y - 1) = 3y - 2 \therefore x = \frac{3y-2}{y-1}$ বা $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

এখানে, বিপরীত ফাংশনটি $x - 1 \neq 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত,$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\therefore$বিপরীত ফাংশনের ডোমেন = প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ ।

$\therefore$ $f(x)$ এর রেঞ্জ, রেঞ্জ $f = R\{1\}$

অর্থাৎ, $x = 1$ ব্যতিত x এর প্রত্যেক মানের জন্য $f^{-1}(x)$ এর একটি করে মান পাওয়া যাবে যা $f(x)$ এর রেঞ্জ.... । এক্ষেত্রে $f(x)$ সঠিক।

ইনভার্স ফাংশনকে যে সুত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায় :

ধরি,$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = y \Rightarrow cxy + dy = ax + b \Rightarrow cxy - ax = -dy + b \Rightarrow x(cy - a) = -dy + b$

$\Rightarrow x = \frac{-dy+b}{cy-a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dy+b}{cx-a}$ $cx - a \neq 0$হলে $f^{-1}(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে। সুতরাং, $x \neq \frac{a}{c}$ হতে হবে,

প্রদত্ত ফাংশনের ক্ষেত্রে, $a = 1, c = 1$ $\therefore x \neq \frac{a}{c} \Rightarrow x \neq \frac{1}{1} \Rightarrow x \neq 1$এর জন্য$f^{-1}(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে।

EXAMPLE – 02 : ফাংশন f কে $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ $\{x \in R, x \neq 5\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f^{-1} এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

SOLVE : $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ $[\, x \varepsilon R, x \neq 5 \,]$

ধরি,$y = f(x)$তাহলে,$y = \frac{2x+1}{x-5} \Rightarrow yx - 5y = 2x + 1 \Rightarrow yx - 2x = 1 + 5y$

$\Rightarrow x(y-2) = 5y + 1 \Rightarrow x = \frac{5y+1}{y-2}$ ফাংশনটি$y - 2 \neq 0$এর জন্য সংজ্ঞায়িত$\therefore$ $y \neq 2$

$y = 2$ব্যাতিত সকল বাস্তব সংখ্যা $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন। $\therefore$ ডোম, $f = R - \{2\}$

আবার, $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ এর ডোমেনই হলো $f^{-1}(x)$ এর রেঞ্জ । $x - 5 \neq 0$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে।

অর্থাৎ, $x \neq 5$; $x = 5$ ব্যাতিত সকল বাস্তব সংখ্যার সেটেই হবে $f(x)$ এর ডোমেন। অর্থাৎ, $f^{-1}(x)$ এর রেঞ্জ

$\therefore$ রেঞ্জ $f^{-1}(x) = R - \{5\}$ অথবা, এভাবে লেখা যায়, $(-\infty,\ 5) \cup (5,\ \infty)$

EXAMPLE – 03 : নিচের ফাংশন গুলো এক এক এবং সার্বিক কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর ঃ

(i) $f_1 : R \rightarrow R\,, f_1(x) = x^5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। (ii) $f : R \rightarrow R, f(x) = x^3 + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ।

SOLVE : (**i**). প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^5$

$x = 1$যদি$f(1) = 1$

$x = -1$এর জন্য যদি $f(-1) = (-1)^5 = 5 - 1$

$x = 2$ এর জন্য যদি$f(2) = 2^5 = 32$

$x = -2$ এর জন্য যদি $f(-2) = (-2)^5 = -32$

$x = x_1$ এর জন্য যদি$f(x_1) = x_1^5$

$x = x_2$ এর জন্য যদি$f(x_2) = x_2^5$

যদি$x_1 \neq x_2$ হয় তবে , $\therefore x_1^5 \neq x_2^5 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_2)$ $\therefore$ ফাংশনটি এক এক আবার,

ধরি, $y = f(x)$ তাহলে, $y = x^5 \Rightarrow y^{\frac{1}{5}} = (x^5)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y^{\frac{1}{5}} = x;$ $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{5}}$

$x = 1$এর জন্য, $f^{-1}(1) = (1)^{\frac{1}{5}} = 1$

$x = -1$এর জন্য, $f^{-1}(-1) = (-1)^{\frac{1}{5}} = -1$

$x = 2$এর জন্য,$f^{-1}(2) = 2^{\frac{1}{5}}$

$x = x_1$এর জন্য,$f^{-1}(x_1) = x_1^{\frac{1}{5}}$

$x = x_2$এর জন্য,$f^{-1}(x_2) = x_2^{\frac{1}{5}}$

যদি, $f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$ হয়, তবে ,$x_1^{\frac{1}{5}} \neq x_2^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \left(x_1^{\frac{1}{5}}\right)^5 \neq \left(x_2^{\frac{1}{5}}\right)^5 \Rightarrow x_1 \neq x_2$

$\therefore f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x)$ এক এক। $\therefore f(x)$ সার্বিক।

(ii) দেওয়া আছে, $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 + 5$

তাহলে, $x = 0$ হলে, $f(0) = 0^3 + 5 = 0 + 5 = 5$

$x = 1$ হলে, $f(1) = 1^3 + 5 = 1 + 5 + = 6$

$x = -1$হলে, $f(-1) = (-1)^3 + 5 = -1 + 5 = 4$

$x = 2$হলে, $f(2) = 2^3 + 5 = 8 + 5 = 13$

$x = -2$ হলে, $f(-2) = (-2)^3 + = -8 + 5 = -3$

$x = x_1, x_2, x_3$ ইত্যাদি মানের জন্য $f(x_1) = x_1^3 + 5$, $f(x_2) = x_2^3 + 5, f(x)$ এক এক হবে যদি $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়। $\therefore x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5 \implies x_1^3 = x_2^3 \implies x_1 = x_2$ [কাল্পনিক মূল বাস্তব সংখ্যার অন্তর্ভূক্ত নয়]

এখানে ডোমেন xএর প্রত্যেক মানের জন্য ভিন্ন ভিন্ন রেঞ্জ পাওয়া যাচ্ছে। ডোমেন রেঞ্জ

$0 \xrightarrow{f} 5$; $1 \xrightarrow{f} 6$; $-1 \xrightarrow{f} 4$; $2 \xrightarrow{f} 13$; $-2 \xrightarrow{f} -3$

$\therefore$ ফাংশনটির এক এক প্রমাণিত হল। আবার ,ধরি, $f(x) = y$.

তাহলে, $y = x^3 + 5 \Rightarrow x^3 = y - 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 5} \therefore f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5}$

$x - 5 \geq 0$ এর জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $\therefore x \geq 5$ ফাংশনটি $x = 5$ হতে বড় সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$x = 5$ হলে, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5 - 5} = \sqrt[3]{0} = 0$

$x = 6$ হলে, $f^{-1}(6) = \sqrt[3]{6-5} = \sqrt[3]{1} = 1$

$x = 7$ হলে, $f^{-1}(7) = \sqrt[3]{7-5} = \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2} = x$ হলে,$2 = x^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{2}} = 1, \omega, \omega^2 \quad \therefore x = \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\omega$ এবং $\sqrt[3]{2}\omega^2$

এখানে $\sqrt[3]{2}\omega$ এবং $\sqrt[3]{2}\omega^2$ দুটো কাল্পনিক মূল বিধায় তা $f^{-1}(x)$ এর অন্তর্ভূক্ত হবে না।

সুতরাং, $x \geq 5$ এর জন্য $f^{-1}(x)$ একটি এক এক ফাংশন যেখানে রেঞ্জ = কোডোমেন।

$\therefore f(x)$ একটি সঠিক ফাংশন। সুতরাং $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন প্রমাণিত হল।

EXAMPLE – 04: $f : R \to R$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সূত্রায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ

(ক) $f^{-1}(36), f^{-1}(16), f^{-1}(-16)$ (খ) $f^{-1}([-\infty, 0])$ (গ) $f^{-1}([16])$

SOLVE : (ক) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2$ ধরি, $f(x) = y$ তাহলে, $y = x^2 \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x};\ x = 36$ হলে,$f^{-1}(36) = \sqrt{36} = \pm 6$

(খ) $f^{-1}([-\infty, 0]) = ?$ $f^{-1}(-\infty) = \sqrt{-\infty} =$[অসংজ্ঞায়িত]

$f^{-1}(0) = \sqrt{0} = 0$ [0 থেকে $-\infty$ এর মধ্যে সকল সংখ্যা কাল্পনিক যা বাস্তব সংখ্যায় প্রদর্শন করা যায় না]

$\therefore f^{-1}([-\infty, 0]) = \{0\}$

(গ). $f^{-1}([1, 16]) = ?$

$f^{-1}(1) = \sqrt{1} = \pm 1$; $f^{-1}(16) = \sqrt{16} = \pm 4$

$\therefore f^{-1}([1, 16]) = \{f: R \to R, -1 \leq x \leq 1, -4 \leq x \leq 4\}$

EXERCISES :

01. A, B, C এর প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার সেট। $f : A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = x^2 + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। সংযোজিত ফাংশন (gof) নির্ণয় কর।

02. $f : R \rightarrow R$ কে $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 2 \\ x + 2 & x < 2 \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f(7), f(0)$ এবং $f(2)$ নির্ণয় কর।

03. $f : R \rightarrow R$ কে $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 2 \\ x + 2 & x < 2 \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f(-1), f(2), f(4), f(-4), f(5)$ ও $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর।

04. মনে কর সেট $A = \{-4, -2, 0, 2.4\}$ এবং $f: A \rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

05. $f : R \rightarrow R$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ (ক) $f^{-1}(5)$ (খ) $f^{-1}(0)$ (গ) $f^{-1}(10)$

ANS:

01. $x^2 + 2x + 3$	02. $70,\ 2, 0$	03. $2, 1, -2, 4, -2, 10$
04. $\{11, 3, 27\}$	05. **(ক)** $\{-2, 2\}$ **(খ)** $\emptyset$ (গ) $\{3,\ -3\}$ (ঘ)	