# দ্বিতীয় অধ্যায়　ভেক্টর (VECTORS)

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সকল ক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। বস্তুর দৈর্ঘ্য, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, আয়তনের পরিমাণ, তাপমাত্রার পরিমাণ ইত্যাদি শুধুমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। যে রাশিকে কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায় তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন, দ্রুতি, তাপমাত্রা ইত্যাদির প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি। শুধু স্কেলার রাশি সম্পর্কে ধারনা থাকলেই দৈনন্দিন জীবনের অনেক কার্যক্রম ব্যাখা করা যায় না। এক্ষেত্রে আমাদের ভেক্টর রাশির ধারণা প্রয়োজন হয়।

**অধ্যায় শেষে পারীক্ষার্থীরা -**

১. সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসাবে ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে ; ২. জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে; ৩. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক নির্ণয় করতে পারবে; ৪. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধিগুলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৫. সমতলে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবে; ৬. ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করতে পারবে; ৭. একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ বর্ণনা করতে পারবে; ৮.অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবে; ৯. দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ করতে পারবে; ১০. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবে; ১১. ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ব্যাখ্যা করতে পারবে; ১২. ভেক্টরকে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে; ১৩. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগ ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে; ১৪. সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে; ১৫. ভেক্টরের স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবে; ১৬.স্কেলার গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ১৭. দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে; ১৮. ভেক্টরের ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবে; ১৯. ভেক্টর গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ২০. ভেক্টর গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে।

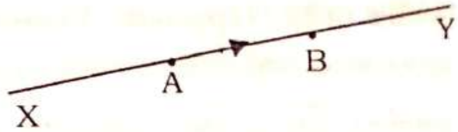
## ১. সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসাবে ভেক্টর

যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয় তাকে সদিক রাশি বলা হয়। সদিক রাশির প্রতিরূপ হচ্ছে ভেক্টর। সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল ইত্যাদির প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

**দিক নির্দেশক রেখাংশ বা সদিক রেখাংশ (Directed line segment):** যেকোনো ভেক্টর রাশিকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে **প্রারম্ববিন্দু (initial point)** এবং অপর প্রান্তকে **প্রান্তবিন্দু (terminal point)** হিসাবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ বা সদিক রেখাংশ বলা হয়। কোনো সদিক রেখাংশের প্রারম্ববিন্দু A এবং প্রান্তবিন্দু B হলে ঐ সদিক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। ''প্রতিটি সদিক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক বর্ণনা, যার পরিমাণ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক এবং যার দিক A বিন্দু হতে AB রেখা বরাবর B বিন্দুর অভিমুখে ''। A বিন্দুকে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের **লেজ (tail)** এবং B বিন্দুকে ভেক্টরটির **মাথাও (head)** বলা হয়। প্রতিটি সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর সাথে দৈর্ঘ্য, ধারক রেখা এবং দিক সংশ্লিষ্ট থাকে। A ও B বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বই সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং ইহাকে $|\overrightarrow{AB}| = AB$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$ সদিক রেখাংশ দুইটির দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

## ২. জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর :

**ধারক (Support):** কোনো ভেক্টর নির্দেশক সদিক রেখাংশ যে অসীম সরলরেখার অংশ বিশেষ , তাকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা শুধু ধারক বলা হয়। চিত্রে $\overline{AB}$ এর ধারক XY.




**দিক (Sense or direction):** $\overrightarrow{AB}$ এর দিক A বিন্দু হতে B বিন্দুর দিক এবং $\overrightarrow{BA}$ এর দিক B বিন্দু হতে A বিন্দুর দিক। সুতরাং, সদিক রেখাংশের দিক হচ্ছে প্রারম্ভবিন্দু হতে প্রান্তবিন্দুর দিক। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$ ভেক্টর দুইটি এক নয়।

সচারচার একটি ভেক্টরকে একটি অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়; $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ বা $\overline{u}$ বা **u**, কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ লিখলে যেমন বোঝা যায় যে, ভেক্টরটির আদিবিন্দু A এবং প্রান্তবিন্দু B , $\underline{u}$ লিখলে তেমন কোনো তথ্য পাওয়া যায় না।

**ভেক্টরের মান (Magnitude of Vector):** কোনো ভেক্টরের আদিবিন্দু ও প্রান্তবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে ভেক্টরটির মান বলে। $a$ ভেক্টরের মানকে $|\overline{a}|$ বা $a$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

**একক ভেক্টর (Unit Vector):** যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বা মান এক, তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। মান শূন্য নয় এমন যেকোনো ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরটির দিকে অথবা তার সদৃশ সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। $\overline{a}$ ভেক্টর রাশির মান $|\overline{a}| \neq 0$ হলে, $\overline{a}$ ভেক্টরের দিকে অথবা তার সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \hat{a}$ পাওয়া যায় । একক ভেক্টর বোঝানোর জন্য যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য অথবা মান এক এর সমান তার উপর "^" চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। একে পড়া হয় "$a$ হ্যাট " ।

**শূন্য ভেক্টর (Zero Vector or Null Vector)** : যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বা পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং ইহাকে $\underline{0}$ বা **0** (মোটা হরফের শূন্য ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। শূন্য ভেক্টরের প্রারম্ভবিন্দু ও প্রান্তবিন্দু একই বিন্দু। যেমন, $\overrightarrow{AA} = \underline{0}$.

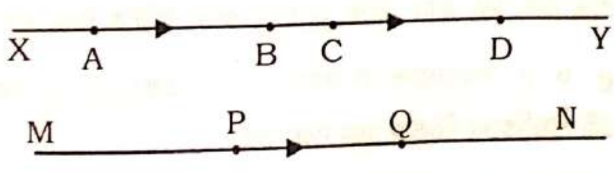
**প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভেক্টর (Proper and improper vector):** শূন্য ব্যতীত সকল ভেক্টরকে প্রকৃত ভেক্টর এবং শূন্য ভেক্টরকে অপ্রকৃত ভেক্টর বলে।

**সদৃশ ভেক্টর (Like Vectors):** যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই হয়, তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে। দুইটি সদৃশ ভেক্টরের ধারক রেখা একই অথবা পরস্পর সমান্তরাল কিন্তু তাদের দৈর্ঘ্য সমান নাও হতে পারে।

**অসদৃশ ভেক্টর (Unlike Vectors):** যদি দুইটি ভেক্টরের দিক বিপরীতমুখী হয়, তবে তাদেরকে অসদৃশ ভেক্টর বলে। অসদৃশ ভেক্টরের মান একই অথবা ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে।

**সমান ভেক্টর (Equal Vectors):** যদি দুইটি সদৃশ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান হয়, তবে তারা পরস্পর সমান। অর্থাৎ, দুইটি ভেক্টর সমান হবে, যদি তাদের দৈর্ঘ্য সমান , ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল এবং দিক একই হয়।

চিত্রে AB = CD হলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ । আবার, XY ও MN পরাস্পর সমান্তরাল সরলরেখা এবং AB = PQ হলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$



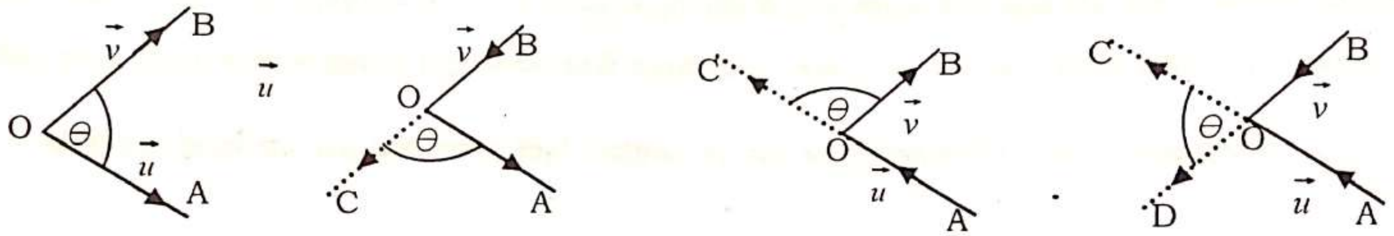
**বিপরীত ভেক্টর (Opposite Vector):** যদি দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য সমান অর্থাৎ $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ হয় এবং তাদের ধারক রেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয় কিন্তু দিক বিপরীত হয় , তবে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত হবে। উপরি উক্ত রেখাচিত্রে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর বিপরীত । আবার, $\overrightarrow{CD}$ ও $\overrightarrow{QP}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর বিপরীত।

**সমরৈখিক ভেক্টর (Collinear Vectors) :** কতগুলি ভেক্টর যদি একটি সরলরেখার সমান্তরাল হয় তবে তাদেরকে সমরৈখিক বা সমান্তরাল ভেক্টর বলা হয়। যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটি সমরৈখিক হয় তবে $\underline{a} = m\underline{b}$ ; যেখানে m একটি স্কেলার।

**সমতলীয় ভেক্টর (Coplanar Vector) :** কতগুলি ভেক্টরকে সমতলীয় ভেক্টর বলা হয়, যদি তাদের ধারক রেখা অভিন্ন সমতলের সমান্তরাল হয়।

**মুক্ত ভেক্টর (Free vector):** যে ভেক্টরের মডুলাস ও দিক স্থির কিন্তু অবস্থান স্থির নয় , অর্থাৎ মডুলাস ও দিকের কোনো পরিবর্তন না করে যে ভেক্টরকে স্থানান্তর করা যায় তাকে মুক্ত ভেক্টর বলা হয়।

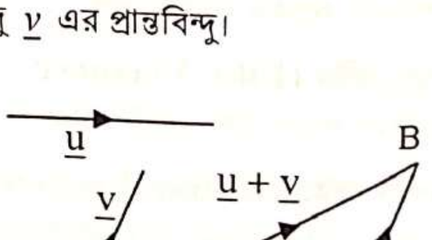
**দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণঃ** মনে করি, দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করলে এবং তাদের ছেদবিন্দুতে $0 < \theta < \pi$ কোণ উৎপন্ন করে




$\theta = 0$ অথবা $\pi$ হলে, ভেক্টর দুইটিকে পরস্পর সমান্তরাল বলা হয়। আবার, ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে যদি $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ হয়।

### ৩. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকঃ

**ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রঃ** কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু হতে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ অঙ্কন করা হলে $\underline{u}+\underline{v}$ দ্বারা এরূপ একটি ভেক্টর বোঝায় যার প্রারম্ভবিন্দু $\underline{u}$ এর প্রারম্ভবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

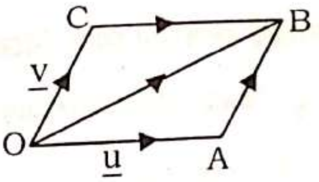



যেকোনো বিন্দু O হতে $\underline{u}$ নির্দেশক ধারক রেখার সমান ও সমান্তরাল করে OA রেখাংশ অঙ্কন করি। $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু A হতে $\underline{v}$ নির্দেশক ধারক রেখার সমান ও সমান্তরাল করে AB রেখাংশ অঙ্কন করি। তাহলে, $\underline{u} = \overrightarrow{OA}$ ও $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$ । $\underline{u}$ এর প্রারম্ভবিন্দু O এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু B সংযোগে গঠিত রেখাংশ $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি বা লব্ধি বলা হয় এবং একে $\underline{u}+\underline{v}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$ , $\underline{v}$ এবং $\underline{u}+\underline{v}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরি উক্ত ভেক্টর যোগের এই পদ্ধতিকে ত্রিভুজ সূত্র বলা হয়।

**ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রঃ ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ কে একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত করা হলে, ভেক্টরদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি $\underline{u}+\underline{v}$ কে মানে ও দিকে প্রকাশ করবে ।**

**প্রমাণঃ** মনে করি, যেকোনো বিন্দু O থেকে অঙ্কিত $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটি যথাক্রমে OA ও OC দ্বারা সূচিত। OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং O, B যোগ করি। তাহলে, O বিন্দুগামী OABC সামান্তরিকের OB কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি ( লব্ধি) সূচিত করবে।




OABC সামান্তরিকের OC ও AB পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$

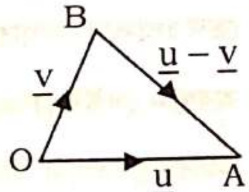
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

$\therefore$ OB কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি ( লব্ধি) কে সূচিত করে।

**দ্রষ্টব্য : (i)** দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের **লব্ধি** (Resultant) বলা হয় । $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টরের লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\underline{u} + \underline{v}}{|\underline{u} + \underline{v}|}$ । বল ও বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয় ।

**(ii)** দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

**ভেক্টরের বিয়োগঃ যদি দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর প্রারম্ভবিন্দু একই হয়, তাহলে ঐ ভেক্টর দুইটির বিয়োগফল ভেক্টর $\underline{u} - \underline{v}$ , যার প্রারম্ভবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু এবং প্রান্তবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু ।**




পাশের চিত্র হতে পাই, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

$\therefore\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{BA} = \underline{u} - \underline{v}$

অর্থাৎ, $\underline{v}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু ও $\underline{u}$ ভেক্টরের অন্তবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ দ্বারা তাদের অন্তর ভেক্টর $\underline{u} - \underline{v}$ সূচিত হয়।

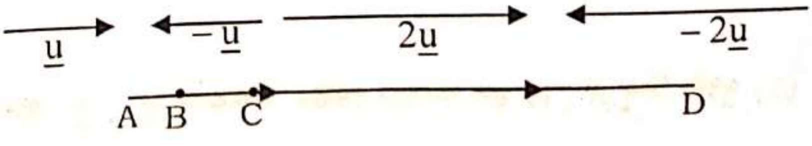
**ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক (Scalar Multiple of a vector):** মনে করি, $\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা। তাহলে, ভেক্টর $\underline{u}$ এবং স্কেলার m এর গুণফল $m\underline{u}$ একটি ভেক্টর।

(i) $m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য = $|m\underline{u}| = |m||\underline{u}|$ অর্থাৎ, $m\underline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ।

(ii) $m\underline{u}$ ও $\underline{u}$ ভেক্টরের ধারক অভিন্ন অথবা সমান্তরাল।

(iii) $m>0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সাথে অভিন্ন , $m<0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ দিকের বিপরীত এবং $m = 0$ হলে $m\underline{u}$ এর কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকবেনা।

(iv) $m(n\underline{u}) = n(m\underline{u}) = (mn)\underline{u}$ .




মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \underline{u}$

$\therefore\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} = 2\underline{u}$ .

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ হলে, $\overrightarrow{AD} = 3(2\underline{u}) = 6\underline{u} = (2.3)\underline{u}$

(v) $0\,\underline{u} = \underline{0}$ ; স্কেলার শূন্য ( 0 ) দ্বারা $\underline{u}$ ভেক্টরকে গুণ করলে গুণফল শূন্য ভেক্টর ( $\underline{0}$ ) হয়।

**৪. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি:**

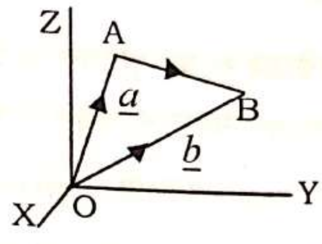
$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং m ও n দুইটি স্কেলার রাশির জন্য,

1. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ [যোগের বিনিময় বিধি]
2. $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ [যোগের সহযোগ বিধি]
3. $\underline{0}$ ভেক্টরের অস্তিত্ব বিদ্যমান যার জন্য, $\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$ [শূন্য ভেক্টরের বিদ্যমানতা]
4. প্রতিটি ভেক্টর $\underline{a}$ একটি অনন্য বিপরীত ভেক্টর $-\underline{a}$ রয়েছে যার জন্য, $\underline{a} + (-\underline{a}) = (-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{0}$ [বিপরীত ভেক্টরের বিদ্যমানতা]
5. $(m+n)\underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a}$ [যোগের বিতরণ বিধি]
6. $m(\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b}$ [গুণের বণ্টন বিধি] 7. $1(\underline{a}) = \underline{a}$

**যোগাশ্রয়ী সমাবেশ (Linear combinations):** কোনো ভেক্টর $\underline{r}$ কে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ⋯ ⋯ ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলা হয় যদি $\underline{r} = x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} + \cdots\cdots$; যখন $x, y, z, \cdots\cdots$ স্কেলার রাশি। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $2\underline{a} - 3\underline{b} + 4\underline{c}$, $\underline{a} - 3\underline{b} - 2\underline{c}$ প্রভৃতি ভেক্টরগুলি $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ভেক্টরগুলোর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ।

**৫. অবস্থান ভেক্টর (Position Vector):**

সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট O বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু (Origin) বলা হয়।




ধরি, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.

$\therefore\ \overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ and $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

**দ্রষ্টব্য :** বিভিন্ন ভেক্টর-মূলবিন্দুর সাপেক্ষে একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কোনো নির্দিষ্ট প্রতিপাদ্য বিষয়ের সমাধানে এ বিষয়ের বিবেচনাধীন সকল বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই মূলবিন্দু সাপেক্ষে ধরা হয়।

**অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কিত অনুসিদ্ধান্ত**

(1) দুইটি বিন্দু A , B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ , $\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$.

(2) A , B , C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ , $\underline{c}$ হলে A, B , C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC} = k\,.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \underline{c} - \underline{a} = k\,(\underline{b} - \underline{a})$ হয়। অর্থাৎ যদি $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক হয়।

(3) $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল (অসমরৈখিক) ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$ হলে $m = n = 0$.

(4) A , B , C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে এবং C বিন্দু AB রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $AC : CB = m : n \Rightarrow n.\,AC = m.\,CB$

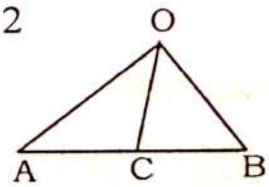

$\Rightarrow n\,|\overrightarrow{AC}| = m\,|\overrightarrow{CB}| \Rightarrow n.\,\overrightarrow{AC} = m.\,\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow n.(\underline{c} - \underline{a}) = m(\underline{b} - \underline{c}) \Rightarrow n\underline{c} - n\underline{a} = m\underline{b} - m\underline{c}$

$\Rightarrow (m+n)\,\underline{c} = m\,\underline{b} + n\,\underline{a} \quad \therefore\ \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$

দ্রষ্টব্য: 1. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m:n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m-n}$

2. C বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $m : n = 1 \ \therefore\ \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + m\underline{a}}{2m} = \dfrac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$




অতএব, O বিন্দুর সাপেক্ষে A , B , C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ , $\underline{b}$ , $\underline{c}$ এবং C বিন্দু AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

3. AB রেখাংশ C বিন্দুতে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে $2.\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{CB}$


$\therefore\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

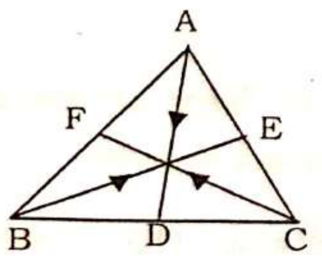
## উদাহরণমালা

**উদাহরণ –1: ABC ত্রিভুজের BC, CA , AB বাহগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E , F ।**

**(a) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$** [ঢা. '০৭; য.'১১; রা.'১১'১৩; সি.'০৯,'১২; ব.'১২; দি.'১৩ ]

**(b) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।**

**(a) প্রমাণঃ** BC এর মধ্যবিন্দু D বলে, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



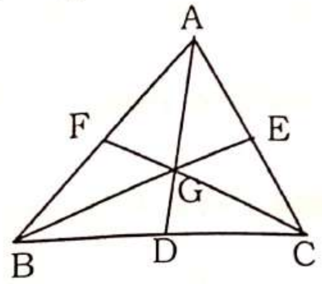

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$ এবং $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$

$\therefore\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$

$$=\frac{1}{2}\{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\underline{0}+\underline{0}+\underline{0})=\underline{0} \quad \text{( Proved )}$$

**সমাধান : (b)** মনে করি, ABC ত্রিভুজের AD, BE, CF বাহুগুলি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।




$\therefore$ AD , BE , CF পরস্পরকে G বিন্দুতে $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

এখন, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{FB}=2(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GB})=2\,(\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EB})$

$$=\frac{2}{3}(-\overrightarrow{CF})+\frac{4}{3}(-\overrightarrow{BE}) = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} \quad \text{(Ans.)}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} \quad \text{(Ans.)}$$

**উদাহরণ –2: যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর হয় এবং $(x-2)\underline{a}+(y+5)\underline{b}=\underline{0}$ হয় তবে দেখাও যে, $x=2, y=-5$**

**প্রমাণ :** দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $(x-2)\underline{a}+(y+5)\underline{b}=\underline{0}$

$\therefore\ x-2=0\,,\ y+5=0 \Rightarrow x=2\,,\ y=-5$

## প্রশ্নমালা II A

1. **(a)** ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু । $\overrightarrow{AB}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC}=\underline{b}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ [ব.'১১]

   **(b)** ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{b}$ , $\overrightarrow{CD}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE}=\underline{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$ [কু.'০১]

   **(c)** PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N । প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{RN}=\underline{0}$ [ সি.'০৭,'০৯,'১২; য.'০১; দি.'০৯,'১৩; রা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

2. **(a)** ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

   উ: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

   **(b)** OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B; যদি $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

   উত্তর: $2\underline{b}-\underline{a}$ [ ঢা.'০৯,'১৩; দি.'১২;রা.'১৪]

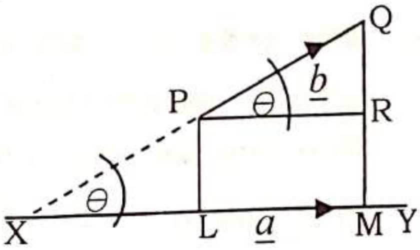
   **(c)** $\overrightarrow{OP}=\underline{a}$ , $\overrightarrow{OQ}=\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR}=\underline{a}+\underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।

উঃ সামান্তরিক।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।
উত্তর: $x = 1$ , $y = 3$

## ৬. সমতলে ভেক্টরের অংশক (Components of a vector in a Plane)

**ভেক্টরের অভিক্ষেপ (Projection):**




মনে করি, $\underline{b} = \overrightarrow{PQ}$ এবং $\underline{a}$ ভেক্টরের ধারক রেখা XY । P ও Q বিন্দু হতে অঙ্কিত লম্ব XY রেখাকে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, P বিন্দু হতে অঙ্কিত লম্ব QM রেখাংশকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

XY রেখার উপর $\underline{b}$ এর অভিক্ষেপ $= LM = PR = |\overrightarrow{PQ}| \cos\theta$

$= |\underline{b}| \cos\theta$ ; যেখানে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ এবং $0<\theta<\pi$.

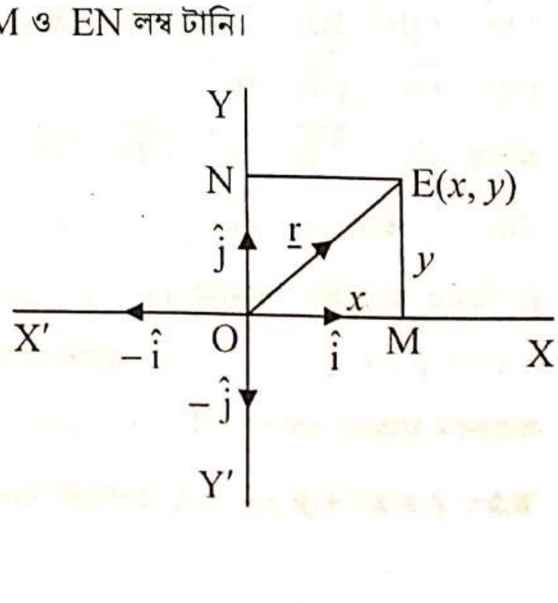
**অংশক (component):** একটি ভেক্টরকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করে ভেক্টরটির অংশক বা উপাংশ পাওয়া যায়। $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের অংশক একটি ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং দিক হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক ।

$\therefore$ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ হলে $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের অংশক $= |\underline{b}| \cos\theta\ \hat{a}$ ; যেখানে $\hat{a}$ , $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একটি একক ভেক্টর।

যদি $\underline{r}$ , $\underline{a}$ , $\underline{b}$ ভেক্টরত্রয়ের $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক হয় তবে $\underline{r} = m\underline{a} + n\underline{b}$ ; যেখানে m, n স্কেলার। এখানে $m\underline{a}$ ও $n\underline{b}$ কে যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক বরাবর $\underline{r}$ এর অংশক ভেক্টর বলে। আবার, $x\hat{i}$ ও $y\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ভেক্টরের অংশক।

## ৭. ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ (Representation of Vector in Cartesian coodinates)

মনে করি, $X'X$ ও $YY'$ রেখাদ্বয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাদ্বয় যথাক্রমে $x$ ও $y$ অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম চতুর্ভাগের যেকোনো বিন্দু E এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OE} = \underline{r}$ . E বিন্দু হতে OX ও OY এর উপর যথাক্রমে EM ও EN লম্ব টানি।



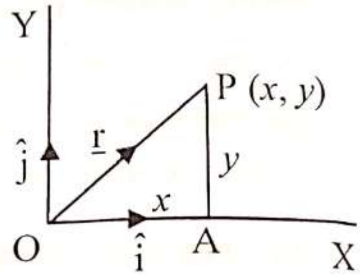

$\therefore$ $x$ ও $y$ অক্ষের উপর $\underline{r}$ এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে $OM = x$ ও $ON = ME = y$ হলে অক্ষদ্বয় বরাবর $\underline{r}$ এর অংশক যথাক্রমে $\overrightarrow{OM} = x\hat{i}$ ও $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ME} = y\hat{j}$; যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে OX ও OY বরাবর অর্থাৎ x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর।

$\therefore$ $\underline{r} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ME} = x\hat{i} + y\hat{j}$ এবং E এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x , y)$ । সুতরাং আমরা লিখতে

পারি, $\hat{i}=(1,0)$, $\hat{j}=(0,1)$ এবং $\underline{r}=\overrightarrow{OE}=(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}$ ।

OX ও OY বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ বলে OX′ ও OY′ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $-\hat{i}$ ও $-\hat{j}$ হবে এবং দ্বিতীয় , তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগে যেকোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $-x\hat{i}+y\hat{j}$, $-x\hat{i}-y\hat{j}$ ও $x\hat{i}-y\hat{j}$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে $(-x, y)$, $(-x, -y)$ ও $(x, -y)$ ।

৮. **একক ভেক্টর $\hat{i},\hat{j}$:** মনে করি, X′X ও YY′ রেখাদ্বয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাদ্বয় যথাক্রমে $x$ ও $y$ অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম চতুর্ভাগের যেকোনো বিন্দু P(x,y) এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}=\underline{r}$. P বিন্দু হতে *x- অক্ষের উপর* PA লম্ব টানি। তাহলে, OA = x এবং AP = y




x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ হলে,

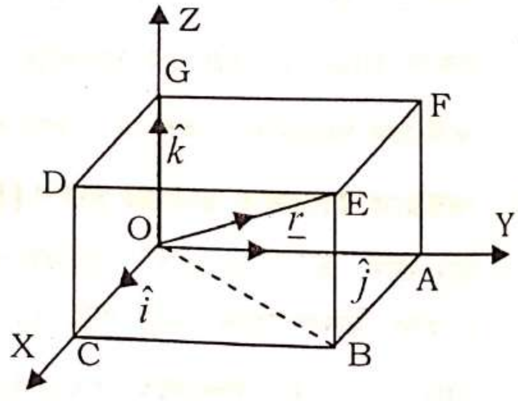
$$\hat{i}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}=\frac{\overrightarrow{OA}}{x}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=x\hat{i} \text{ এবং } \hat{j}=\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}=\frac{\overrightarrow{AP}}{AP}=\frac{\overrightarrow{AP}}{y}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=y\hat{j}$$

$\Delta OAP$ হতে, $\underline{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=x\hat{i}+y\hat{j}$ এবং $OP^2=OA^2+AP^2\Rightarrow r^2=x^2+y^2$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}=\underline{r}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}=\dfrac{\underline{r}}{r}=\dfrac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}}$

৯. **ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়**

মনে করি, OX , OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং রেখাত্রয় যথাক্রমে $x$ , $y$ ও $z$ অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করি, E বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x , y , z)$ এবং OX , OY ও OZ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ যারা পরস্পর পরস্পরের উপর লম্ব । XY সমতলের উপর EB এবং OX সরলরেখার উপর BC লম্ব টানি।




$\therefore$ $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}$ . কিন্তু $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

আবার, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{FE}=x\hat{i}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OA}=y\hat{j}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OG}=z\hat{k}$

$\overrightarrow{OE}=\underline{r}$ হলে, $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$\therefore$ E বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x , y , z)$ হলে মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে এর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OE}=\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ । $x, y, z$ যথাক্রমে অক্ষত্রয়ের উপর $\overrightarrow{OE}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ এবং $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ ও $z\hat{k}$ যথাক্রমে অক্ষত্রয় বরাবর $\overrightarrow{OE}=\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ভেক্টরের অংশক ।

**৯.১ : $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ভেক্টরের মান:**

সমকোণী ত্রিভুজ OAB এ, $OB^2 = OA^2 + AB^2$

সমকোণী ত্রিভুজ OBE এ, $OE^2 = OB^2 + BE^2 = OA^2 + AB^2 + BE^2 = y^2 + x^2 + z^2$

$\therefore \quad OE = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\therefore \quad \underline{r}$ এর মান = $|\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ এবং OE বরাবর একক ভেক্টর = $\dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

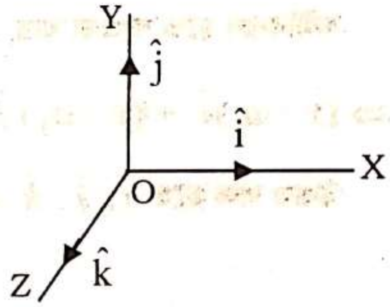
অনুসিদ্ধান্ত-১: $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ}$ = Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর – P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

অনুসিদ্ধান্ত-২: $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরটি যদি x অক্ষ, y অক্ষ ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে $\alpha, \beta$ ও $\gamma$ কোণ উৎপন্ন করে তবে $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ কে $\underline{r}$ ভেক্টরের দিক কোসাইন বলে

১০. ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (**$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ in three dimensional space)**

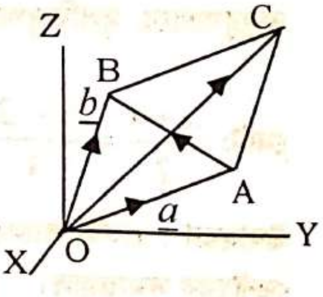



মনে করি, OX, OY, OZ তিনটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। ত্রিমাত্রিক জগতে OX, OY, OZ যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ, এবং z-অক্ষ। ত্রিমাত্রিক জগতে x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। স্পষ্টত $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$.

এখানে, $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$, $\hat{k} = (0,0,1)$ .

**১১. ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ** : $\underline{r}(x, y, z)$ ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আকারে। যেমন $\underline{a}\,(a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$.

**১২. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ**




মনে করি, O শীর্ষ বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$.

OACB সামান্তরিক অঙ্কন করে এর কর্ণদ্বয় যোগ করি।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$$= (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}\ (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$\therefore (a_1, a_2, a_3)$ ও $(b_1, b_2, b_3)$ ভেক্টরের যোগফল (লব্ধি) = $(a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

$\Delta OAB$ হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a} = (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) - (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

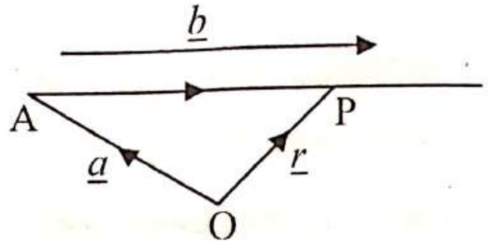
$$= (b_1 - a_1)\hat{i} + (b_2 - a_2)\hat{j} + (b_3 - a_3)\hat{k}$$

এখন, $m\underline{a} = m(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k} = (ma_1, ma_2, ma_3)$; যেখানে $m$ একটি স্কেলার।

**১৩. সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ**

**(i) A($\underline{a}$) বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ ; যেখানে t একটি প্যারামিটার।**

মনে করি, O মূলন্দু এবং A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ । ধরি, A বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার উপর যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ । $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টর $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল বলে $\overrightarrow{AP} = t\underline{b}$ ; যেখানে t যেকোনো স্কেলার।




এখন, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Rightarrow \underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ ; যা সরলরেখার নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ।

t এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য সরলরেখাটির উপর বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যায়।

**অনুসিদ্ধান্ত :** $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ , $\underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ও $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} + t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$$\Rightarrow (x - a_1)\hat{i} + (y - a_2)\hat{j} + (z - a_3)\hat{k} = t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $(x - a_1) = tb_1$, $(y - a_2) = tb_2$, $(z - a_3) = tb_3$

$$\Rightarrow \frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = t$$

অর্থাৎ , সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}$ (= t)

অনুরূপভাবে, মূলবিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল $\underline{r} = t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x}{b_1} = \frac{y}{b_2} = \frac{z}{b_3}$ (= t)

**নোট:** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{4}$ এর ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

**উদাহরণ :** একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা A(0, −1, 2) বিন্দুগামী এবং $\underline{b} = \hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

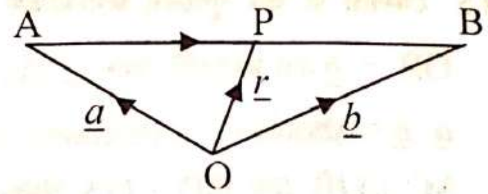
**সমাধান:** A(0, −1, 2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = -\hat{j} + 2\hat{k}$ .

∴ সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b} = -\hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$

$$\Rightarrow \underline{r} = t\hat{i} + (-1 + 5t)\hat{j} + (2 - 2t)\hat{k}$$

**(ii) A($\underline{a}$) ও B($\underline{b}$) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ অর্থাৎ**
**$\underline{r} = (1 - t)\underline{a} + t\underline{b}$** [রা.'১৫]

মনে করি, O মূলবিন্দু এবং A, B ও AB এর উপর যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ও $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ ।




$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} = t(\underline{b} - \underline{a})$; [$\because$ P , AB এর উপর অবস্থিত।]

এখন, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ $\therefore \underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) = (1-t)\underline{a} + t\underline{b}$

আবার, $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর একই রেখায় অবস্থিত হওয়ায় এদের ভেক্টর গুণন শূন্য হবে।

$\therefore \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \underline{0} \Rightarrow (\underline{r} - \underline{a}) + (\underline{b} - \underline{a}) = \underline{0}$ ; ইহাও ভেক্টর সমীকরণ।

**অনুসিদ্ধান্ত :** $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ও $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1} = \dfrac{y-a_2}{b_2-a_2} = \dfrac{z-a_3}{b_3-a_3}$

**উদাহরণ :** একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা A(3, −2, 1) এবং B(1, −3, 0) বিন্দুগামী।

**সমাধান:** A(3, −2, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং

B(1, 5, 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$

$\therefore$ সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t\{\hat{i} - 3\hat{j} - (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})\}$$
$$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t(\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$
$$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t(-2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$
$$\Rightarrow \underline{r} = (3-2t)\hat{i} + (-2-t)\hat{j} + (1-t)\hat{k}$$

## ১৪. দুইটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন (Scalar product or dot product of two vectors) [চ.'১১]

**যদি দুইটি ভেক্টরের গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়, তবে এই গুণনকে স্কেলার বা ডট গুণন বলে। এ গুণফলের মান ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের কোসাইন (cosine) এর গুণফলের সমান। $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$ হলে, ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণনকে $\underline{a} \cdot \underline{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।**

$\theta$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\cos\theta > 0$ এবং $\underline{a}.\underline{b} > 0$; $\theta$ স্থূলকোণ হলে, $\cos\theta < 0$ এবং $\underline{a}.\underline{b} < 0$;

ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে, $\cos\theta = 0$ এবং $\underline{a}.\underline{b} = 0$;

ভেক্টর দুইটি পরস্পর সমান্তরাল বা সমরেখ হলে, $\cos\theta = 1$ এবং $\underline{a}.\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|$

ভেক্টর দুইটির দিক বিপরীত হলে, $\underline{a}.\underline{b} = -|\underline{a}||\underline{b}|$

**দ্রষ্টব্যঃ** $\underline{a}.\underline{a} = |\underline{a}||\underline{a}| \cos 0^0 = a^2.1 = a^2$

$\hat{i}.\hat{i} = 1,\ \hat{j}.\hat{j} = 1,\ \hat{k}.\hat{k} = 1,\ \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0,\ \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0,\ \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

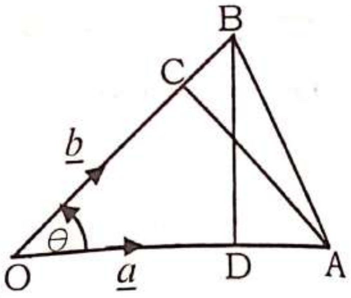
**১৪.১ স্কেলার বা ডট গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :** দুইটি ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\angle AOB = \theta$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন

$\underline{a} . \underline{b} = ab\cos\theta = a\,(b\cos\theta) = b\,(a\cos\theta)$

$AC \perp OB$ এবং $BD \perp OA$ অঙ্কন করি। তাহলে,

$\underline{a}$ এর উপর $\underline{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= OD = OB\cos\theta = b\cos\theta$ এবং

$\underline{b}$ এর উপর $\underline{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $OC = OA\cos\theta = a\cos\theta$




তাহলে, $\underline{a} . \underline{b} = a\,(b\cos\theta) =$ ($\underline{a}$ ভেক্টরের মান) ($\underline{a}$ এর উপর $\underline{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

অথবা, $\underline{a} . \underline{b} = b\,(a\cos\theta) =$ ($\underline{b}$ ভেক্টরের মান)($\underline{b}$ এর উপর $\underline{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

**সুতরাং, দুইটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন বলতে যেকোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফল বুঝায়। তাই দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি ভেক্টর ও সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।**

**দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ**

**$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি অশূন্য ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ হলে, $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$**

$$\therefore \cos\theta = \frac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}.$$

$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টর যদি x অক্ষ, y অক্ষ ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে $\alpha$, $\beta$ ও $\gamma$ কোণ উৎপন্ন করে তবে $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot\hat{i}}{|x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}||\hat{i}|} = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

তদ্রূপ, $\beta = \cos^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\gamma = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

**উদাহরণ:** $3\hat{i} - 4\hat{k}$ ভেক্টরটি x–অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$, y -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\dfrac{0}{5} = \dfrac{\pi}{2}$ এবং z –অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\dfrac{-4}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে।

**দ্রষ্টব্যঃ** $\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta \Rightarrow |\underline{b}|\cos\theta = \dfrac{a . b}{|\underline{a}|}$

$\therefore$ **$\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ** $= |\underline{b}|\cos\theta = \dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{a}|}$

**তদ্রূপ, $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ** $= |\underline{a}|\cos\theta = \dfrac{\underline{a} . \underline{b}}{|\underline{b}|}$

$\therefore$ **$\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের উপাংশ** $= |\underline{b}|\cos\theta\,\hat{a} = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|}\hat{a} = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a}$

তদ্রূপ, $\underline{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{a}$ ভেক্টরের উপাংশ $=|\underline{a}|\cos\theta\ \hat{b}=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|}\hat{b}=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|^2}\underline{b}$

**দ্রষ্টব্যঃ** $\underline{a}$ ভেক্টরের বরাবর $\underline{b}$ এর উপাংশের মান ও $\underline{a}$ এর উপর $\underline{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ পরস্পর সমান।

উদাহরণ : $\overline{A}=3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $=\left(\dfrac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}|^2}\right)\overline{A}=\dfrac{(3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}).(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})}{|3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}|^2}\overline{A}$

$$=\frac{6+2+5}{\{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}\}^2}\overline{A}=\frac{13}{9+4+25}(3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})=\frac{13}{38}(3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})$$

**১৫. স্কেলার গুণজের ধর্ম :**

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ যেকোনো ভেক্টর এবং $m$, $n$ যেকোনো স্কেলার হলে,

(i) $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$ (ii) $\underline{a}\cdot(-\underline{b})=-(\underline{a}\cdot\underline{b})$ এবং $(-\underline{a})\cdot(-\underline{b})=(\underline{a}\cdot\underline{b})$

(iii) $m\underline{a}\cdot n\underline{b}=mn(\underline{a}\cdot\underline{b})$ (iv) $\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$.

(v) স্কেলার গুণনের জন্য সংযোজন বিধি $(\underline{a}\cdot\underline{b}).\underline{c}$ অর্থহীন। কেননা, $\underline{a}\cdot\underline{b}$ একটি স্কেলার রাশি যার সাথে $\underline{c}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণন হতে পারেনা।

**১৬. অংশকের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ**

মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$\underline{a}\cdot\underline{b}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}).(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

**দ্রষ্টব্যঃ দুইটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত**, $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$, i.e., $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

**১৬.১ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ও দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ**

মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$|\underline{a}|^2=\underline{a}\cdot\underline{a}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

$\therefore\ |\underline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

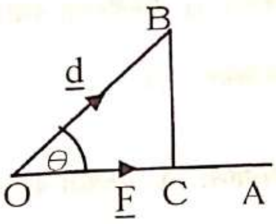
**$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ হলে,** $\cos\theta=\dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

উদাহরণ : $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\overline{B}=2\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ হলে, $\cos\theta=\dfrac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|}=\dfrac{(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(2\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k})}{|\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}||2\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k}|}$

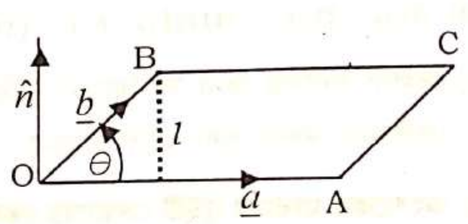
$$\Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1\times2+2\times(-10)+1\times5}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\times\sqrt{2^2+(-10)^2+5^2}}=\frac{2-20+5}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{4+100+25}}$$

$$=\frac{-13}{\sqrt{6}\times\sqrt{129}} \quad \therefore \theta=\cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{6}\times\sqrt{129}}\right) \quad \text{(Ans.)}$$




স্কেলার গুণজের উদাহরণ হিসাবে কাজ: কোনো বস্তুকণার উপর F মানের বল ক্রিয়াশীল হওয়ায় বলের দিকে বস্তুটির সরণ d হলে কৃত কাজ = Fd । কিন্তু যদি একটি বস্তুর উপর ধ্রুবক বল $\underline{F}$, OA বরাবর প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে OB বরাবর d দূরত্ব অতিক্রম করে B বিন্দুতে পৌছে তবে $\underline{F}=\overrightarrow{OA}$, $\underline{d}=\overrightarrow{OB}$ এবং $\underline{F}$ বরাবর বস্তুকণার সরণ $=\underline{F}$ এর উপর $\underline{d}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= OC = d\cos\theta$ . সুতরাং কাজ $= F(d\cos\theta) = \underline{F}.\underline{d}$ .

**১৭. দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন : যদি দুইটি ভেক্টরের গুণনে অপর একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায়, তবে এই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এ গুণফলের মান ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক হয় প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিক।**




$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভক্টর দুইটির ভেক্টর গুণনকে $\underline{a}\times\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যেখানে $\theta$ হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টর হতে $\underline{b}$ ভেক্টরের দিকে একটি ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণনে যে ক্ষুদ্রতর কোণ উৎপন্ন হয় তা এবং $\hat{n}$ হচ্ছে একটি একক ভেক্টর যা $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের উপর লম্ব । $\hat{n}$ এর দিক $\underline{a}$ ভেক্টর হতে $\underline{b}$ ভেক্টরের দিকে ঘূর্ণায়মান একটি ডানহাতি স্ক্রুর অগ্রসর হওয়ার দিক

$\therefore$ $\hat{n}$ এর দিক অর্থাৎ $\underline{a}\times\underline{b}$ এর দিক $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের উপরের দিকে যখন একটি ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্নন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে হয় অর্থাৎ $\theta$ ধনাত্মক হয় ; অথবা নিচের দিকে যখন ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্নন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের দিকে হয় অর্থাৎ $\theta$ ঋণাত্মক হয়।

মনে করি, OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ এবং $\angle AOB=\theta$, B হতে OA এর উপর লম্ব $l$ ।

$$\therefore\ \underline{a}\times\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta\,\hat{n}=a(b\sin\theta)\hat{n}=al\,\hat{n},\ [\because \sin\theta=\frac{l}{OB}\Rightarrow l=OB\sin\theta=b\sin\theta]$$

= $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরের সমতলের উপরে লম্ব দিকে OACB সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

সুতরাং, দুইটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুইটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

**$\therefore$ OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল $|\underline{a}\times\underline{b}|$ । অতএব, OAB ত্রিভুজের $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}|$ এবং B হতে OA এর লম্ব দূরত্ব $=\frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{|\underline{a}|}$**

দ্রষ্টব্য: $\hat{i}\times\hat{j}=|\hat{i}||\hat{j}|\sin 90^\circ\,\hat{n}=\hat{k}$; $\hat{j}\times\hat{i}=|\hat{j}||\hat{i}|\sin(-90^\circ)\hat{n}=-\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{i}=|\hat{i}||\hat{i}|\sin 0^\circ\,\hat{n}=\underline{0}$, $\hat{j}\times\hat{j}=\underline{0}$, $\hat{k}\times\hat{k}=\underline{0}$

অনুসিদ্ধান্ত: এখানে, $|\underline{a}\times\underline{b}|=ab\sin\theta\,|\hat{n}|=ab\sin\theta\Rightarrow\theta=\sin^{-1}\dfrac{\underline{a}\times\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}$ ; এই সূত্রের সাহায্যেও $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করা যায়।

১৮. **ভেক্টর গুণজের ধর্মঃ**

(i) ভেক্টর গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলেনা অর্থাৎ, $\underline{a}\times\underline{b}\neq\underline{b}\times\underline{a}$.

(ii) $\underline{a}\times\underline{b}=\hat{n}\,ab\sin\theta=-(-\hat{n}\,ba\sin\theta)=-(\underline{b}\times\underline{a})$

(iii) $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দ্বারা কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সূচিত হলে, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}|$

(iv) দুইটি অশূন্য ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{0}$. অন্যভাবে, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

(v) $m(\underline{a}\times\underline{b})=(m\underline{a})\times\underline{b}=\underline{a}\times(m\underline{b})$ (vi) $\underline{a}\times(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\times\underline{b}+\underline{a}\times\underline{c}$

১৯. **অংশকের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণজ :**

মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$$\underline{a}\times\underline{b}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$
$$=a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})$$
$$=a_1b_2(\hat{k})+a_1b_3(-\hat{j})+a_2b_1(-\hat{k})+a_2b_3(\hat{i})+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

**দ্রষ্টব্য:** $\underline{a}\times\underline{b}$ **ভেক্টরটি** $\underline{a}$ **ও** $\underline{b}$ **ভেক্টর দুইটির সমতলের ওপর লম্ব।**

সুতরাং, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\underline{a}\times\underline{b}}{|\underline{a}\times\underline{b}|}$

**১৯.১ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত :** মনে করি, $\underline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\underline{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ এবং $\underline{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

তাহলে, $\underline{a}\times\underline{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$

$$\therefore(\underline{a}\times\underline{b}).\underline{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$
$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$\therefore$ $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ , $\underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং $\underline{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি

সমতলীয় হওয়ার নির্ণেয় শর্ত, $(\underline{a} \times \underline{b}).\underline{c} = 0$ অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

**দ্রষ্টব্য:** (i) $(\underline{a} \times \underline{b}).\underline{c} = \underline{c}.(\underline{a} \times \underline{b})$ (ii) $\underline{a}.(\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}.(\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c}.(\underline{a} \times \underline{b})$
(iii) $\underline{a}.(\underline{b} \times \underline{c})$ ত্রয়ী স্কেলার গুণন নামে পরিচি যা দ্বারা $a, b, c$ ধারবিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন নির্দেশ করে।

**উদাহরণ :** A(2, −3, 1), B(−1, 3, −2) ও C(−3, 1, 1) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান:** $\overrightarrow{AB} = (-1-2)\hat{i} + (3+3)\hat{j} + (-2-1)\hat{k} = -3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$

$$\overrightarrow{AC} = (-3-2)\hat{i} + (1+3)\hat{j} + (1-1)\hat{k} = -5\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}$$

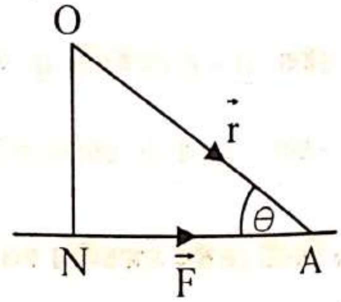
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 6 & -3 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0+12)\hat{i} - (0-15)\hat{j} + (-12+30)\hat{k}$$

$$= 12\hat{i} + 15\hat{j} + 18\hat{k}$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|12\hat{i} + 15\hat{j} + 18\hat{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 15^2 + 18^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{693} = \frac{3}{2}\sqrt{77}$ বর্গ একক।

**ভেক্টর গুণজের উদাহরণ হিসাবে ভ্রামক:** কোনো বলের ঘূর্ণন প্রভাবকে সেই বলের ভ্রামক বলে। কোনো বস্তুর উপর একটি বল প্রয়োগ করা হলে, কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা সরলরেখার চতুর্দিকে ঐ বস্তুর ঘূর্ণন প্রবণতাকে ঐ বিন্দু বা ঐ সরলরেখার চতুর্দিকে বলটির ভ্রামক বা মোমেন্ট বলা হয়। একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা সরলরেখার চতুর্দিকে একটি বলের মোমেন্ট হল প্রযুক্ত বল এবং ঐ বিন্দু বা ঐ সরলরেখা থেকে বলটির ক্রিয়ারেখার লম্বদূরত্বের গুণফল।




মনে করি, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং $\vec{F}$ একটি প্রযুক্ত বল। ধরি, O এর সাপেক্ষে $\vec{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপরস্থ কোনো বিন্দু A এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \bar{r}$, O থেকে বলের ক্রিয়ারেখার লম্বদূরত্ব ON এবং $\angle OAN = \theta$.

O বিন্দুর চতুর্দিকে $\vec{F}$ এর মোমেন্ট $= F \times ON = F \times r \sin\theta$

$= r \times F \sin\theta = |\vec{r} \times \vec{F}|$

$\therefore$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বলের মোমেন্ট বা ভ্রামক হলো বল এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টরের ক্রস বা ভেক্টর গুণফলের মান এবং দিক হচ্ছে একটি ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ এর সমতলে লম্বভাবে স্থাপন $\vec{r}$ থেকে $\vec{F}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘূরালে যেদিকে অগ্রসর হবে সেদিকে।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ −1:** $\underline{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ , $\underline{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ও $\underline{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে $(\underline{b} + 2\underline{a})\cdot(\underline{c} - \underline{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০১; সি.'০২]

সমাধান : $\underline{b}+2\underline{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}+2(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

$= (2+6)\hat{i}+(-1+2)\hat{j}+(1-4)\hat{k} = 8\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

$\underline{c}-\underline{a} = \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}-(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}) = (1-3)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(-2+2)\hat{j}$

$= -2\hat{i}+2\hat{j}$

$\therefore\ (\underline{b}+2\underline{a})\cdot(\underline{c}-\underline{a}) = (8\hat{i}+\hat{j}-5\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+2\hat{j}) = -16+2 = -14$ ( Ans.)

**উদাহরণ-2: $\underline{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\underline{b} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।** [. রা.'০৬; সি.'১০; ব.'১৫]

সমাধান : $|\underline{a}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$,

$|\underline{b}| = \sqrt{2^2+10^2+11^2} = \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\underline{a}\cdot\underline{b} = 2.2+2.10+1.(-11) = 4+20-11 = 13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta$ হলে, $\cos\theta = \dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \dfrac{13}{3\times15} = \dfrac{13}{45}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{13}{45}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{13}{45}$

**উদাহরণ-3: $\underline{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = -\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং $\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।** [য.'০৬]

সমাধান : $\underline{a}\cdot\underline{b} = (2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}) = 2\times-1-3\times2+1\times-1 = -2-6-1 = -9$

$|\underline{a}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ এবং $|\underline{b}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

$\therefore$ $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{b}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{6}} = -\dfrac{9}{\sqrt{6}}$ ( Ans.)

$\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{14}} = -\dfrac{9}{\sqrt{14}}$ ( Ans.)

**উদাহরণ-4: $\underline{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{b} = 5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।**

[কু.'০৬; য.'১১,'১৪; ব.'০৬,'১১,'১৪; রা.'০৯,'১১; চ.'০৯,'১১; ঢা.'১০,'১২; দি.'১৪; সি.'১৪; মা.'১৪]

সমাধান : $|\underline{a}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ এবং

$\underline{a}\cdot\underline{b} = (2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\cdot(5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}) = 10-3-4 = 3$

$\therefore$ $\underline{a}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের অংশক $= \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a} = \dfrac{3}{3^2}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}) = \dfrac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ ( Ans.)

**উদাহরণ-5: $\underline{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\underline{b} = -\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ হলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

[রা. '০৬,'১৪; ঢা.'০৭,'১২,'১৪; চ. '০৬,'০৮,'১৪; ব. '০৫,'০৭; সি. '০৭; মা.বো.'০৯; য.'১১,'১৩; দি.'১৩]

**সমাধান :** দেওয়া আছে, $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\underline{b} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \underline{a} + \underline{b} = (3-1)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-2-4)\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore \ |\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{|\underline{a}+\underline{b}|} = \pm \dfrac{2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}}{7} = \pm \dfrac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$ (Ans.)

**উদাহরণ-6: $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হলে ধ্রুবক $a$ এর মান নির্ণয় কর।** [সি.'০৩,'১১; ঢা.'০৪; ব.'০৬; কু.'০৬,'১২; চ.'০৬; দি.'১১; চুয়েট'০৭-০৮]

**সমাধান :** $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(-2a+12) - 1(3a-4) - 1(-9+2) = 0$$

$$\Rightarrow -4a + 24 - 3a + 4 + 7 = 0 \Rightarrow -7a = -35 \ \therefore a = 5 \ \text{(Ans.)}$$

**উদাহরণ-7:** $(\hat{i} - 5\hat{j}).[(2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{j} - 2\hat{k})]$ এর মান নির্ণয় কর।

**সমাধান:** $(\hat{i} - 5\hat{j}).[(2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{j} - 2\hat{k})] = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 1(8-9) + 5(-4-0) = -1 - 20 = -21$$

**উদাহরণ-8:** $\overline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}, \overline{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\overline{c} = 2\hat{j} - \hat{k}$ হলে $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

**সমাধান:** $\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2-2)\hat{i} - (-1-0)\hat{j} + (2+0)\hat{k} = 0\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \ \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6-2)\hat{i} - (4-0)\hat{j} + (2+0)\hat{k} = -8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\therefore \ \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \dfrac{\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})}{|\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})|} = \pm \dfrac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{|-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}|} = \pm \dfrac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{64+16+4}}$

$$= \pm \frac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{84}} = \pm \frac{-8\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{2\sqrt{21}} \ \text{(Ans.)}$$

**উদাহরণ-9: (1, 2 , − 6) বিন্দুগামী এবং (2, − 3, 0) ও (4, − 4, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

**সমাধান :** মনে করি, (1, 2, −6) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং A(2,−3,0) ও B(4,− 4, 1)

বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}-3\hat{j}+0\hat{k}$ ও $4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ ।

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k})-(2\hat{i}-3\hat{j}+0\hat{k})=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=\underline{b}$ (ধরি) । তাহলে, $\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সমীকরণের ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\underline{a}+t\underline{b}$ ; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$$\Rightarrow \underline{r}=\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}+t(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

**উদাহরণ-10: ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে $(x_1,x_2)$ ও $(y_1,y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$**

**প্রমাণ :** মনে করি, $\underline{r}=(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}$ , $\underline{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$ এবং $\underline{b}=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$

$\therefore (x_1,x_2)$ ও $(y_1,y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow x\hat{i}+y\hat{j}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+t(x_2\hat{i}+y_2\hat{j}-x_1\hat{i}-y_1\hat{j})$

$\Rightarrow (x-x_1)\hat{i}+(y-y_2)\hat{j}=t(x_2-x_1)\hat{i}+t(y_2-y_1)\hat{j}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}$ , $\hat{j}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $(x-x_1)=t(x_2-x_1),(y-y_2)=t(y_2-y_1)$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (=t)$$

**উদাহরণ-11 :** A(1, −2, −1), B(−2, 1, 3) ও C(−3, 3, 1) বিন্দুত্রয় যে সমতলে অবস্থিত তার সমীকরণ নির্কয় কর।

**সমাধান :** মনে করি, সমতলের উপর P(x, y, z) যেকোনো বিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{AP}=(x-1)\hat{i}+(y+2)\hat{j}+(z+1)\hat{k}$ , $\overrightarrow{AB}=(-2-1)\hat{i}+(1+2)\hat{j}+(3+1)\hat{k}=-3\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ,

$\overrightarrow{AC}=(-3-1)\hat{i}+(3+2)\hat{j}+(1+1)\hat{k}=-4\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একই সমতলে অবস্থিত।

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ -3 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x-1)(6-20)-(y+2)(-6+16)+(z+1)(-15+12)=0$$

$\Rightarrow -14(x-1)-10(y+2)-3(z+1) \Rightarrow 14x-14+10y+20+3z+3=0$

$\Rightarrow 14x+10y+3z+9=0$ , যা নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ।

**উদাহরণ-12 : A(2, −6, −3), B(4, 3, −1) এবং C(4, 3, −1) বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ।**

ক. y-অক্ষের উপর $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}$ **ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।**

খ. **$\angle C$ নির্ণয় কর।**

গ. **A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

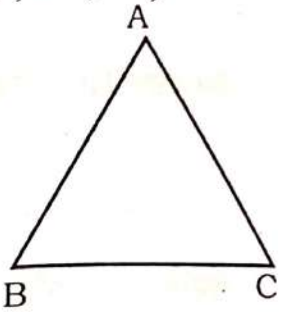
**[ব.'১৩; ঢা.'০৯; রা.'১০; দি.'১৫; সি.'১৩]**

**(অথবা , এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব।)**

ক. **সমাধান:** প্রদত্ত ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর লব্ধি ভেক্টর = $\underline{a} + \underline{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + \hat{i} - 3\hat{j} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ y- অক্ষের উপর $\underline{a} + \underline{b}$ এর অভিক্ষেপ $= -5$

খ. **সমাধান:** প্রশ্নমতে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2 ,– 6, –3), B(4 , 3, – 1) ও C(1 , –1 , –3)




$\therefore \quad \overrightarrow{CA} = (2-1)\hat{i} + (-6+1)\hat{j} + (-3+3)\hat{k}) = \hat{i} - 5\hat{j}$

$\overrightarrow{CB} = ((4-1)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (-1+3)\hat{k}) = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{(\hat{i} - 5\hat{j}) \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2 + 5^2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{3-20}{\sqrt{26}\sqrt{29}} = \frac{-17}{\sqrt{174}}$$

$$\Rightarrow \angle C = \cos^{-1}\frac{-17}{\sqrt{174}} \text{ (Ans.)}$$

গ. **A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

**[ব.'১৩; ঢা.'০৯; রা.'১০; দি.'১৫; সি.'১৩]**

**(অথবা , এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব।)**

**সমাধান** : ধরি, A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ .

এ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর, $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= (6+9)\hat{i} - (-2+12)\hat{j} + (6+24)\hat{k} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$

$\therefore \quad |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2} = \sqrt{5^2(3^2 + 2^2 + 6^2)} = 5\sqrt{9+4+36} = 35$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \pm \dfrac{5(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})}{35} = \pm \dfrac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ ( Ans.)

## প্রশ্নমালা IIB

**1.** (a) $\overline{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\overline{A} + \overline{B}$ ও $6\overline{A} - 3\overline{B}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

(b) $\overline{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট.১১-১২]

(c) (2, 3 , 1) এবং ( 3 , 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

(d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯,'১৩]

উত্তর : (a) $6\hat{i} + 4\hat{j}$, $-6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (b) $\sqrt{150}$ (c) 7 (d) $2\sqrt{19}$

2. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করঃ

(a) $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\overline{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ [কু.'০১; য.'০৩; রা.'০৬; ঢা.'১২]

(b) $\overline{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\overline{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ [ঢা. '০৩; রা. '০৪,'১১; য. '০৭,'১৩; সি. '০৮,'১৪; ব.'১১]

(c) $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\overline{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ [চ.'০৪,'০৮; ব.'০৫]

উত্তর :(a) $\cos^{-1}(\frac{13}{45})$ (b) $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$ (c) $\cos^{-1}(\frac{-3}{\sqrt{35}})$

3. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ , $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\cos^{-1}(31/50)$ [ব.'০৬ ]

4. নিচের ভেক্টরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর:

(a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ [ঢা.,চ.'১১; দি.,রা.,কু.,য'১০; রা.,দি.,সি.,চ.,মা.'১৩;ব.'১৫] উঃ $\cos^{-1}\frac{2}{3}, \cos^{-1}\frac{-1}{3}, \cos^{-1}\frac{2}{3}$

(b) $\hat{j} + 2\hat{k}$ উত্তরঃ $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$, $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ [রা.'০৮]

(c) $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ উত্তরঃ $\cos^{-1}(3/7)$, $\cos^{-1}(-6/7)$, $\cos^{-1}(2/7)$ [য.'০৮]

5. (a) $\overline{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $8/7$

[কু.'০৮,'১১; রা.'০৪,'১৩; চ.'০৫; য.'১২; সি.'১২ ; কুয়েট'০৫-০৬]

(b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $(\sqrt{3}+1)/4$ [ চ.'১২; কু.'১২; ব.'০৭; দি.'১১]

(c) A(2 , 3, −1) ও B ( − 2, −4, 3) হলে $\overrightarrow{AB}$ এর উপর $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

উত্তর : 1

6. (a) $\overline{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর। [সি.'১১]

(b) $\overline{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। $\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের অংশক এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান।

[ঢা.'০৯; চ.'১০; কু.'১৫]

উত্তর : (a) $\frac{13}{225}(2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$ (b) $\theta = \cos^{-1}(-\frac{4}{21})$; $\frac{-4}{9}(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}), -\frac{4}{3}$

7. (a) $2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি.'০৫,'০৯]

(b) $\overline{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\overline{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(c) $\overline{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overline{B} = -\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ হলে,

(i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উত্তর : (a) $\pm\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$ (c) (i) $\pm\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$ (ii) $\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$ (iii) $-\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$

**8.** (a) (i) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা.,কু.'১১;বুয়েট'১১-১২]

(ii) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় কর।

(b) $\underline{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\underline{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর, যা $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\underline{a}$ এর লম্ব হবে।

(c) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা.'০৮; কু.'০৮; য.'১০]

উত্তর : (a) (i) $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k})$ (ii) $\pm\frac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k})$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

**9.** (a) P(1 , 1, 1) এবং Q( 3, 2, – 1) শূন্যে অবস্থিত দুইটি বিন্দু । $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর এবং এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য.'০৯; বুয়েট'০৩-০৪]

(b) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P(2 , –1, 7) এবং Q(–4, 5, 0) হলে $|\overrightarrow{PQ}|$ নির্ণয় কর। [সি.'০৫,'০৯]

উত্তর : (a) $2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ বা, $-\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ (b) 11

**10.** (a) দেখাও যে, $\underline{a}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [ব.'০৮; বুয়েট'০৭-০৮]

(b) দেখাও যে, $\overline{A}=8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\overline{B}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[রা.'০৭; য.'১২; বুয়েট' ০৫-০৬; ১০-১১]

(c) $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\overline{A}+\overline{B}$ এবং $\overline{A}-\overline{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৮; য.'০৭; চ.'০৭,'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]

(d) দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব । এ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; কু.'০৫]

(e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$ ও $(4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ হলে $\overline{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং $\overline{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]

উত্তরঃ (d) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1274}}(-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k})$ (e) $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{19}$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{19}}\hat{i}-\dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{j}+\dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$

11. (a) $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে $a$ এর মান নির্ণয় কর। উঃ $-2$ , 1

[রা.'০৯,'১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; ঢা.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪; মা.'১৫]

(b) $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে $a$ এর মান নির্ণয় কর। উঃ 3 [ব.'০৪]

12. দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ , $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\underline{c}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। [ঢা.'০৬]

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ , $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\underline{c}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

[ব.'০৩,'১২; ঢা.'০৪,'১৪; রা.'০৭,'১৪; চ.'১৫; বুয়েট'০৩-০৪]

(b) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ , $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ ; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

[ঢা.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৪]

(c) ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A (1, − 1 , − 1 ) , B (3 , 3 , 1) এবং C ( − 1, 4 , 4 ) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P ( 0 , 1 , 2 ).

(d) A(0 , 1 , 2) , B ( − 1, 3 , 0) , C(1 , − 1 , 1) বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং $|\overrightarrow{AB}|$ এবং $|\overrightarrow{AC}|$ নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $\hat{j}+2\hat{k}, -\hat{i}+3\hat{j}, \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ , 3 , $\sqrt{6}$ [ঢা.'০৩]

14. (a) $\overline{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{B}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, $\overline{A}\times\overline{B}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪]

(b) $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\overline{B}=3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $|\overline{A}\times\overline{B}|$ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০০-০১]

(c) $(a\hat{i}+b\hat{j}+\hat{k})\times(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=\hat{i}-\hat{j}$ হলে, $a$ ও $b$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'০১-০২]

(d) $\overline{A}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ , $\overline{B}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{C}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে, $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})$ নির্ণয় কর।

[চ.'০০; ঢা.'১৫]

(e) $\underline{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ , $\underline{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k}$ হলে $5\underline{a}\times\underline{b}$ এবং $\dfrac{\underline{b}}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

উত্তরঃ (a) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$ b) $6\sqrt{5}$ (c) $a=1$, $b=1$ (d) $17\hat{i}-19\hat{j}+16\hat{k}$

(e) $55\hat{i}+45\hat{j}+5\hat{k}$, $\dfrac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k})$

(f) যেকোনো দুইটি ভেক্টর $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{B}\cdot\overline{A}$ এবং $\overline{A}\times\overline{B}=-\overline{B}\times\overline{A}$.

[চ.'০২]

(g) প্রমাণ কর যে, $\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ , যেখানে $\overline{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ , $\overline{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

(h) দুইটি ভেক্টর $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $\hat{i}\,.\,\hat{j}=0$ , $\hat{i}\,.\hat{i}=1$; যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে x ও y অক্ষ পরাবর এককা ভেক্টর। [চ.'১১]

**15.** (a) ভেক্টরের সাহায্যে A(1, 3, 2), B(2 , − 1 , 1) ও C(− 1, 2 , 3) শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{1}{2}\sqrt{107}$ [বুয়েট'০৪-০৫]

(b) $\overline{\mathrm{P}}=4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{\mathrm{Q}}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহ নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\sqrt{72}$ [বুয়েট'০৬-০৭]

(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{5}{2}\sqrt{38}$ বর্গ একক।

(d) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $\angle AOB=\cos^{-1}(\frac{-13}{\sqrt{364}})$, $\angle OAB=\cos^{-1}(\frac{27}{\sqrt{924}})$, $\angle OBA=\cos^{-1}(\frac{39}{\sqrt{1716}})$.

(e) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে, B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

উঃ $\sqrt{377}/3$ একক।

(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারগুলো $\overline{\mathrm{A}}=2\hat{\mathrm{i}}-3\hat{\mathrm{j}}+2\hat{\mathrm{k}}$ , $\overline{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{i}}+2\hat{\mathrm{j}}-\hat{\mathrm{k}}$ , $\overline{\mathrm{C}}=3\hat{\mathrm{i}}-\hat{\mathrm{j}}+2\hat{\mathrm{k}}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর । উত্তর: 7 ঘন একক।

(g) একটি ত্রিভূজের দুইটি বাহ $\overline{\mathrm{A}}=3\hat{\mathrm{i}}+6\hat{\mathrm{j}}-2\hat{\mathrm{k}}$ , $\overline{\mathrm{B}}=4\hat{\mathrm{i}}-\hat{\mathrm{j}}+3\hat{\mathrm{k}}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলি নির্ণয় কর। উত্তর: $\cos^{-1}7/\sqrt{75}$ , $\cos^{-1}\sqrt{26/75}$ , $90^0$

(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overline{\mathrm{A}}=3\hat{\mathrm{i}}-4\hat{\mathrm{j}}-\hat{\mathrm{k}}$ এবং $\overline{\mathrm{B}}=2\hat{\mathrm{i}}+3\hat{\mathrm{j}}-6\hat{\mathrm{k}}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস । ,এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর: 17.85 বর্গ একক।

**16.** (a) $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

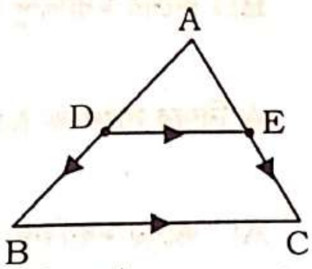
(c) দেখাও যে, (2, −3, 4) এবং (5, 7, −8) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=(2+3t)\,\hat{i}+(-3+10t)\,\hat{j}+(4-12t)\,\hat{k}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: (a) $\underline{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}+t(5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$, (b) $\underline{r}=(1-t)\,\hat{i}+t\,\hat{j}$ (c) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{10}=\frac{z-4}{-12}$

## ২০. জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানের ভেক্টর

**উদাহরণ-1. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর অর্ধেক ও সমান্তরাল।** [সি.'১১,'১৪; ঢা.'০৯; য.'১২,'১৪; দি.'১২;কু.'১৪,'১৫; মা.'১৪,'১৫]

**প্রমাণঃ** মনে কটির, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E । D ও E যোগ করি। ABC ত্রিভুজে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,




$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \cdots\cdots (1)$ এবং $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD}$

[$\because$ D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু ]

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{DE}$ [ (1) হতে ]

আমরা জানি , দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান হলে তাদের দৈর্ঘ্য সমান, ধারকরেখা দুইটি একই অথবা সমান্তরাল এবং দিক অভিন্ন। কিন্তু BC ও DE অভিন্ন হতে পারেনা ।

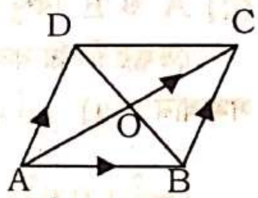
$\therefore\ |\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{DE}|$, i.e., $BC = 2DE \Rightarrow DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $BC \parallel DE$.

অতএব, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর অর্ধেক ও সমান্তরাল।

**উদাহরণ 2. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।**

[রা. '০৯,'১২; য. '০৭,'১৪,'১৫; কু. '০৭; সি.'০৩,'১৪; ঢা. '১১; চ. '০৮,'১৪; ব. '০৯,'১৩; দি.'১৩; মা.'১১,'১৪]

**প্রমাণঃ** মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$




$= \underline{a} + \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} - \underline{a}$

ধরি, $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AC} = m(\underline{a} + \underline{b})$ এবং $\overrightarrow{BO} = n\overrightarrow{BD} = n(\underline{b} - \underline{a})$

এখন, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} \Rightarrow m(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a} + n(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow m\underline{a} + m\underline{b} = \underline{a} + n\underline{b} - n\underline{a} \Rightarrow (m + n - 1)\underline{a} + (m - n)\underline{b} = \underline{0}$

$\therefore\ m + n - 1 = 0$ এবং $n - m = 0$, [ $\because \underline{a} = \overrightarrow{AB}$ ও $\underline{b} = \overrightarrow{AD}$ ভেক্টর দুইটি অশূন্য অসমান্তরাল ।]

$\Rightarrow m = n$ এবং $m + m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2} = n$

$\therefore\ \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

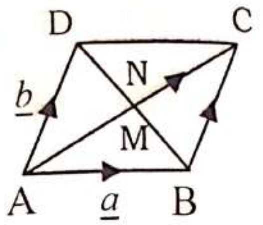
$\Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ এবং $|\overrightarrow{BO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$

$\therefore$ AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অতএব, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

**বিকল্প পদ্ধতিঃ** ধরি, ABCD সামান্তরিকে, A এর সাপেক্ষে B ও D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$ । সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল বিধায় $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \underline{b}$

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু M হলে আমরা পাই, $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$




$\therefore$ A বিন্দুর সাপেক্ষে M এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

AC কর্ণের মধ্যবিন্দু N হলে আমরা পাই, $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(-\underline{a}+\underline{b})$

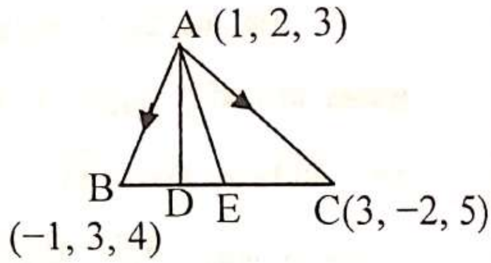
এখন, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \underline{a} + \frac{1}{2}(-\underline{a}+\underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

$\therefore$ A এর সাপেক্ষে M এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$ ।

একই বিন্দু A এর সাপেক্ষে M ও N এর অবস্থান ভেক্টর একই বিধায় বিন্দুদ্বয় সমস্থানিক।

অতএব, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

**উদাহরণ-3**: ABC ত্রিভুজে, $AD \perp BC$ এবং AE , BC বাহুতে মধ্যমা।




(a) $m\hat{i} + 0.6\hat{j}$ একটি একক ভেক্টর হলে m এর মান নির্ণয় কর।

(b) BD নির্ণয় কর।

(c) A ও E বিন্দু দুইটি যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

**সমাধান :** (a) $m\hat{i} + 0.6\hat{j}$ একটি একক ভেক্টর বলে,

$$|m\hat{i} + 0.6\hat{j}| = 1 \Rightarrow |m\hat{i} + \frac{6}{10}\hat{j}| = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2 + (\frac{3}{5})^2} = 1 \Rightarrow m^2 + \frac{9}{25} = 1$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \therefore m = \frac{4}{5} = 0\cdot 8 \text{ (Ans.)}$$

(b) $AD \perp BC$ বলে, BC বরাবর $\overrightarrow{BA}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ BD ।

$$\therefore BD = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$$

এখানে, $\overrightarrow{BA} = (1+1)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-4)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (3+1)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (5-4)\hat{k} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{BC}| = |4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$

$$\therefore BD = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})\cdot(4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{42}} = \frac{8+5-1}{\sqrt{42}} = \frac{12}{\sqrt{42}} \text{ (Ans.)}$$

(c) BC এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক $(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-2}{2}, \frac{4+5}{2}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2})$

ধরি, A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = \hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{9}{2}\hat{k}$.

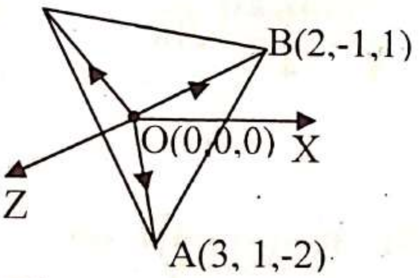
এ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর, $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1/2 & 9/2 \end{vmatrix}$

$= (9 - \frac{3}{2})\hat{i} - (\frac{9}{2} - 3)\hat{j} + (\frac{1}{2} - 2)\hat{k} = \frac{15}{2}\hat{i} - \frac{3}{2}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}$

$\therefore \ |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{225+9+9}{4}} = \frac{\sqrt{243}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \pm \frac{\frac{1}{2}(15\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k})}{\frac{\sqrt{243}}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{243}}(15\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k})$ ( Ans.)

**উদাহরণ-4**:




(a) z-অক্ষের উপর $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

(b) $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(c) ABC ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে A, B, C এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\angle BED = \angle EBC$

**সমাধান** : (a) $\overrightarrow{AC} = (1-3)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (-2+2)\hat{k} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$\therefore$ z-অক্ষের উপর $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= 0$

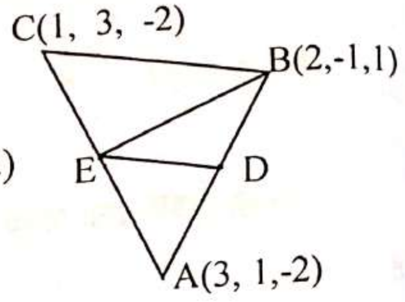
(b) $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OC} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একটি ভেক্টর, $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (2-3)\hat{i} - (-4-1)\hat{j} + (6+1)\hat{k} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore \ |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{1+25+7} = \sqrt{33}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}|} = \pm \dfrac{-\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{33}}$ ( Ans.)




(c) AB এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{2+3}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{1-2}{2}) = (\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

AC এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{1+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{-2-2}{2}) = (2, 2, -2)$

$\therefore \overrightarrow{DE} = (2 - \frac{5}{2})\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (-2 + \frac{1}{2})\hat{k} = -\frac{1}{2}\hat{i} + 2\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}$

$\overrightarrow{BE} = (2-2)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-2-1)\hat{k} = 0\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং

$\overrightarrow{BC} = (1-2)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (-2-1)\hat{k} = -\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$

$$\angle BED = \cos^{-1} \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{ED}||\overrightarrow{EB}|} = \cos^{-1} \frac{(\frac{1}{2}\hat{i} - 2\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}) \cdot (-0\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k})}{|\frac{1}{2}\hat{i} - 2\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}||-0\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}|}$$

$$= \cos^{-1} \frac{0 + 6 + \frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{9}{4}}\sqrt{0+9+9}} = \cos^{-1} \frac{\frac{21}{2}}{\sqrt{\frac{1+16+9}{4}}\sqrt{18}} = \cos^{-1} \frac{21}{\sqrt{26}\sqrt{18}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{21}{6\sqrt{13}} = \cos^{-1} \frac{7}{2\sqrt{13}}$$

$$\angle EBC = \cos^{-1} \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{BC}|} = \cos^{-1} \frac{(0\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k})}{|0\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}||-\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}|}$$

$$= \cos^{-1} \frac{0 + 12 + 9}{\sqrt{0+9+9}\sqrt{1+16+9}} = \cos^{-1} \frac{21}{\sqrt{18}\sqrt{26}} = \cos^{-1} \frac{21}{6\sqrt{13}} = \cos^{-1} \frac{7}{2\sqrt{13}}$$

$$\therefore \angle BED = \cos^{-1} \frac{7}{2\sqrt{13}} = \angle EBC$$

## প্রশ্নমালা II C

1. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

[ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য.'১০; কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪]

2. ABC ত্রিভুজে, D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে,

   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ [ব.'১১; সি.'১৩]

   (b) $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$. [য.'১৩;কু.'১০; ঢা. '১২; সি.'১০; চ.,দি.'১০; রা.'১৪; ব.'১৩]

3. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে।

[সি.'০৭; ব.'০৭; ঢা.'১০; দি.'১১; য.'১১; রা.,কু.,সি.'১৩]

4. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

5. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

6. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

7. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

8. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

9. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু। **[দি.'১৫]**

10. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [ঢা.,চ.'১৩; সি.'০৯,'১২; রা.'১০;ব.'১১; কু.'১১]

11. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজ ABC তে

(a) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ [ঢা.'১০,'১৪; রা. '১০; য.'১০; সি.'০৮,'১৫; ব.'১০; কু.'১, চ.'১৩,'১৫]

(b) $c = a\cos B + b\cos A$ [কু.'০৮,'১১; চ.'১১] (c) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ [সি.'০৫; চ.'০৭]

**সম্ভাব্য ধাপ (Step) সহ কিছু সমস্যা:**

12. $\overline{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j}, \overline{B} = -\hat{i} + 5\hat{j}, \vec{C} = 8\hat{i} - 3\hat{j}$ হলে $\overline{A} - 3\overline{B}$ এবং $3\overline{A} - 7\overline{C}$ নির্ণয় কর। (২), (২)
[চ.'০১] উ: $6\hat{i} - 13\hat{j}, -47\hat{i} + 27\hat{j}$

13.(a) $\overline{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $(2\overline{A} - \overline{B}).(6\overline{A} + 3\overline{B})$ এর মান নির্ণয় কর। (৩)
**[য.'০৩]**

(b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে $(\underline{a}\cdot\underline{b}) + (\underline{b}\cdot\underline{c}) + (\underline{c}\cdot\underline{a})$ এর মান নির্ণয় কর। (১) **[রা.'০৩; য.'০৯]** উ: (a) 60 (b) 1

14.(a) $\overline{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৫,'১৩; রা'১৫]** (8)

(b) $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৬; মা.'১৫]** (8)

(a) $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

15.(a) $\overline{P} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\overline{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উঃ $\dfrac{3}{\sqrt{38}}$ **[ঢা.'০৭]** (২)

(b) $\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উ: $\dfrac{10}{\sqrt{6}}$

**[য.'০৮]** (২)

**16.** $\underline{a} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে $y$ এর মান নির্ণয় কর। উ: $\frac{7}{2}$ (২)
[চ.'০২; রা.'০৫; কু.'০৫]

**17.** $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৮] উ: 1(২)

**18.** $\bar{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} - 2\hat{k} + t(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ ও $\bar{r} = 7\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} + s(2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয় ছেদ করে কিনা পরীক্ষা কর এবং যদি ছেদ করে তবে ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। উ: $9\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$ (৪)

**(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)**

**19.** (a) একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা $A(2, -3, -1)$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

(b) A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$। একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর যা A বিন্দুগামী এবং $\underline{b} = \hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

(c) একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা $A(2, -1, 3)$ এবং $B(1, 0, -2)$ বিন্দুগামী।

(d) A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a} = 7\hat{i} + \hat{k}$ ও $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$। একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর যা A ও B বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

(e) $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ ও $3\hat{i} - \lambda\hat{j} - 7\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর।

(f) $\hat{i} + 3\hat{j} - \lambda\hat{k}$ ভেক্টর ও এ ভেক্টরের উপর $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর।

(g) $A(2, -3, -6)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

**20.** $A \equiv (2, 2, 0)$, $B \equiv (2, 0, 2)$, $C \equiv (0, 0, 4)$, $D \equiv (0, 2, 2)$

(a) $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের উপর $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

(b) $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর বরাবর $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।

(c) $\angle DAB$ নির্ণয় কর।

(d) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি রম্বস।

(e) ভেক্টর গুণনের সাহায্যে $\Delta ABD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(f) ভেক্টর গুণনের সাহায্যে $\angle ABC$ নির্ণয় কর।

(g) ভেক্টর গুণনের সাহায্যে A হতে BD এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(h) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(i) A ও B বিন্দুদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(j) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ নির্ণয় কর।

(k) কোন শর্তে A, B, C ও $D(x, y, z)$ বিন্দু চারটি একই সমতলে অবস্থিত?

(l) এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর যা $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর সাথে সমতলীয় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর উপর লম্ব।

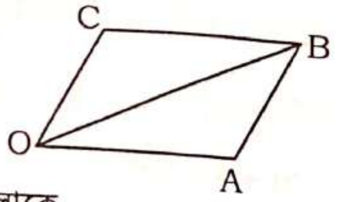
(m) $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(n) $\Delta ABC$ এ AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EF || BC.

(o) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ধারবিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1.




উদ্দীপকের আলোকে,

i. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

ii. ভেক্টরের বিয়োগ অনুযায়ী $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

iii. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

কোনটি সত্য?

ক. i  খ. i, iii  গ. iii  ঘ. i, ii, iii

2. $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$ হলে,

i. $\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভক্টরের অভিক্ষেপ $= |\underline{b}| \cos\theta$

ii. $\underline{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{a}$ ভেক্টরের উপাংশ $= |\underline{a}| \cos\theta\, \hat{b}$

iii. $\theta = \sin^{-1} \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{|\underline{a}||\underline{b}|}$

কোনটি সত্য?

ক. i, ii  খ. i, iii  গ. ii, iii  ঘ. i, ii, iii

**নিচের উদ্দীপকের আলোকে 3-6 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\overline{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

3. উদ্দীপকের আলোকে,

i. $|\overline{A} - \overline{B}|$ এর মান 42.

ii. y-অক্ষের উপর $\overline{B}$ এর অভিক্ষেপ $-3$.

iii. x- অক্ষ বরাবর $\overline{A}$ এর উপাংশ $= 2\hat{j}$

কোনটি সত্য?

ক. ii  খ. iii  গ. ii, iii  ঘ. i, ii, iii

4. $\overline{B}$ ভেক্টরটি y অক্ষের সাথে নিচের কোন কোণটি উৎপন্ন করে ?

ক. $\cos^{-1}(\frac{3}{7})$  খ. $\cos^{-1}(-\frac{3}{7})$

গ. $\cos^{-1}(-\frac{3}{49})$  ঘ. $\cos^{-1}(\frac{3}{49})$

5. $\overline{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর নিচের কোনটি?

ক. $\frac{1}{7}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ খ. $-\frac{1}{7}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

গ. $\pm\frac{1}{7}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ ঘ. $\pm\frac{1}{\sqrt{31}}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

6. উদ্দীপকের আলোকে,

i. z অক্ষের উপর $\overline{A}$ ভেক্টরটির অভিক্ষেপ $\hat{k}$

ii. x অক্ষ বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরটির অংশক 6i

iii. ভেক্টর দুইটির লব্ধি $8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

কোনটি সঠিক?

ক. i  খ. ii  গ. iii  ঘ. ii, iii

7. $\overline{A} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরটির মান কত?

ক. 49  খ. 31  গ. 7  ঘ. $-7$

8. $2\hat{i} + a\hat{j} - \hat{k}$ ও $-4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $a$ এর মান কত?

ক. $-3$  খ. 3  গ. $-5$  ঘ. 5

9. $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A} - \overline{B}$ হলে $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

ক. $0°$  খ. $90°$  গ. $120°$  ঘ. $180°$

10. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{4}$ এর ভেক্টর সমীকরণ কোনটি?

ক. $\underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

খ. $\underline{r} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

গ. $\underline{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + t(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

ঘ. $\underline{r} = -2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k} + t(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

11. $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ ও $3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এর স্কেলার গুণন হলো–

ক. 11 খ. 7 গ. 5 ঘ. 1

12. $\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ও $2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ এর লব্ধির মান কত?

ক. 19 খ. $\sqrt{17}$ গ. 1 ঘ. $\sqrt{19}$

13. $\overline{A}=2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$, $\overline{B}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে,

i. $|\overline{A}|=2\sqrt{3}$ ii. $\overline{A}\parallel\overline{B}$

iii. $\overline{B}-\overline{A}=0\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$

কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. i, ii ঘ. i, ii, iii

14. একক ভেক্টর $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

ক. $\hat{i}.\hat{i}=1$ খ. $\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}$

গ. $\hat{j}\times\hat{k}=-\hat{i}$ ঘ. $\hat{i}.\hat{j}=1$

15. $\overline{A}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\overline{B}=-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে, $\overline{A}\times\overline{B}=?$

ক. $-\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ খ. $-\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

গ. $-\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$ ঘ. $-\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$

16. O(0, 0, 0), A(1, 2, 3) ও B( −3, −2, −1) হলে-

i. B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $-3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$

ii. $\overline{OA}$ এর $\sqrt{14}$ মানের ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

iii. $\overrightarrow{BA}=-4\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

কোনটি সত্য?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

**বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:**

17. $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ও $\lambda\hat{i}+2\hat{k}-3\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $\lambda$ এর মান – [DU 06-07; NU 08-09, 05-06; RU 12-13,09-10]

ক. $\frac{13}{4}$ খ. $-\frac{13}{4}$ গ. 3 ঘ. −3

18. $a\hat{i}-5\hat{j}-2\hat{k}=0$ ও $a\hat{i}-5\hat{j}-2\hat{k}=0$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে a এর মান – [KUET 07-08]

ক. 3,1 খ. 2, 4 গ. 3,2 ঘ. 1,5

19. $\overrightarrow{F_1}=2\hat{i}-3\hat{j}$ ও $\overrightarrow{F_2}$ বল দুইটির লব্ধি $\overrightarrow{F_3}=5\hat{i}+4\hat{j}$ হলে $\overrightarrow{F_2}=?$ [DU 06-07]

ক. $-3\hat{i}-7\hat{j}$ খ. $3\hat{i}-2\hat{j}$

গ. $7\hat{i}+\hat{j}$ ঘ. $3\hat{i}+7\hat{j}$

20. $\vec{P}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান হবে- [BUET 13- 14]

ক. $\cos^{-1}\frac{21}{8}$ খ. $\cos^{-1}\frac{8}{21}$

গ. $\sin^{-1}\frac{8}{21}$ ঘ. $\cos^{-1}\frac{-4}{21}$

21. $\vec{B}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশের মান- [CU 07-08]

ক. $\frac{13}{15}$ খ. $\frac{12}{225}$ গ. $\frac{13}{14}$ ঘ. $\frac{6}{7}$

22. $\vec{A}$ এর দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য- [BUTEX 11- 12]

ক. $|\vec{A}|\cos\theta$ খ. $|\vec{B}|\cos\theta$

গ. $|\vec{B}|\sin\theta$ ঘ. $|\vec{A}|\sin\theta$

23. $\vec{X}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{Y}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ- [CU 07-08]

ক. $0°$ খ. $\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{45}}$

গ. $\cos^{-1}\frac{20}{\sqrt{3}\sqrt{45}}$ ঘ. $90°$

24. $\bar{a}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \bar{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\bar{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}=?$ [BAU 14-15]

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

25. $\vec{A}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ - [CU 14-15]

ক. $0^0$ খ. $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{18}}$

গ. $\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{18}}$ ঘ. $90^0$

26. $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\vec{A}+\vec{B}$ ও $\vec{A}-\vec{B}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ - [KU 14-15]

ক. $0^0$ খ. $90^0$

গ. $\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{19}}$ ঘ. $\cos^{-1}\frac{-5}{3\sqrt{19}}$

27. m ভরের একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত $\vec{F}=5\vec{x}+4\vec{y}$ বলের কারণে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল বস্তুটি উপর যে বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির গতিপথের সাথে $45°$ কোণ তৈরী করবে সে বলের মান কত? [RU 07-08]

ক. $(5\vec{x}+4\vec{y})\cos 45°$

খ. $(5\vec{x}+4\vec{y})\sin 45°$

গ. $-4\vec{x}+5\vec{y}\sin 45^0$ ঘ. কোনটিই নয়

28. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর হবে-[BUET 10-11]

ক. $4\hat{i}-3\hat{k}$ খ. $\frac{1}{5}(4\hat{i}-3\hat{k})$

গ. $\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$ ঘ. $\hat{j}$

বিভিন্ন বোর্ডের প্রশ্ন (প্রযোজ্য ক্ষেত্রে সংশোধনসহ)

29. $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ ভেক্টরটির সাথে $y$ অক্ষরেখার উৎপন্ন কোণের মান কোনটি? [দি.বো. ২০১৭]

ক. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$ খ. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{49}\right)$

গ. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$ ঘ. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{49}\right)$

30. $m$ এর মান কত হলে $\vec{P}=4\hat{i}+m\hat{j}$ এবং $\vec{Q}=6\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে? [দি.বো. ২০১৭]

ক. −8 খ. −6 গ. −4 ঘ. - 6

31. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে -[দি.বো. ২০১৭]

i. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ ii. $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

iii. $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. i, ii ঘ. i, ii,iii

32. $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ এর অংশক কত? [ঢা.বো. ২০১৭]

ক. $\frac{3}{11}\bar{b}$ খ. $\frac{3}{\sqrt{11}}\bar{b}$

গ. $-\frac{3}{\sqrt{21}}\bar{a}$ ঘ. $\frac{3}{\sqrt{21}}\bar{a}$

33. $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরটি Z- অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হলো- [ঢা.বো. ২০১৭]

ক. $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$ খ. $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{9}\right)$

গ. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ ঘ. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

34. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}, \overrightarrow{OB}=\underline{b}$, হলে $\overline{BA}$ কত? [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

ক. $\underline{a}-\underline{b}$ খ. $\underline{a}+\underline{b}$

গ. $\underline{b}+\underline{a}$ ঘ. $\underline{b}-\underline{a}$

35. $(\hat{j}\times\hat{i})\hat{k}=$ কত? [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. $k^2$

36. একটি সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ হলে উহার প্রধান কর্ণের দৈর্ঘ্য কত? [সি. বো. '১৭]

ক. $|\overline{P}+\overline{Q}|$ খ. $\frac{1}{2}|\overline{P}+\overline{Q}|$

গ. $|\overline{P}\times\overline{Q}|$ ঘ. $\frac{1}{2}|\overline{P}\times\overline{Q}|$

37. $a$ এর মান কত হলে $2\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$ ও $3\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে? [চ.বো.'১৭]
ক. -6 খ. -2 গ. 2 ঘ. 6

38. $P(1,3,4)$ ও $Q(2,-3,5)$ হলে- [চ.বো.'১৭]
i. $Q$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$
ii. $\overrightarrow{OP}$ এর একক ভেক্টর $=\frac{\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}}{\sqrt{26}}$
iii. $\overrightarrow{PQ}=-\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii,iii

39. $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ বরাবর একক ভেক্টর কোনটি? [য .বো.'১৭]
ক. $\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$ খ. $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{3}$
গ. $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ঘ. $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$

40. $\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\hat{k}$ এর মান কোনটি? [য .বো.'১৭]
ক. $\frac{7}{6}$ খ. $\frac{49}{36}$ গ. $\frac{11}{6}$ ঘ. $\sqrt{\frac{11}{6}}$

41. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{k},\vec{b}=3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে $\vec{a}.\vec{b}$ এর মান কত? [রা.বো.'১৭]
ক. -2 খ. $\sqrt{\frac{2}{13}}$ গ. 1 ঘ. 2

42. (-4, 3, 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হলে-
i. $\vec{r}=4\hat{i}-3\hat{j}$ ii. $|\vec{r}|=5$
iii. $\vec{r}$, $z-$ অক্ষের উপর লম্ব [রা.বো.'১৭]
কোনটি সঠিক?
ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii,iii

43. $\underline{a}=\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\underline{b}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ হলে, $\underline{b}$ এর উপর $\underline{a}$ এর অভিক্ষেপ কত? [কু.বো.'১৭]
ক. $\frac{8}{3}$ খ. $\frac{8}{7}$ গ. $\frac{8}{9}$ ঘ. $\frac{8}{49}$

44. $\overrightarrow{A}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B}=-3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ হলে,তাদের অন্তর্গত কোণ কোনটি? [কু.বো.'১৭]
ক. $\cos^{-1}\left(\frac{-4}{42}\right)$ খ. $\cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{42}}\right)$
গ. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$ ঘ. $\cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{42}}\right)$

45. $A$ ও $B$ উভয়ের উপর লম্ব ভেক্টর কোনটি? [কু.বো.'১৭]
ক. $\overline{A}+\overline{B}$ খ. $\frac{\overline{A}+\overline{B}}{|\overline{A}+\overline{B}|}$
গ. $\overline{A}\times\overline{B}$ ঘ. $\frac{\overline{A}\times\overline{B}}{|\overline{A}\times\overline{B}|}$

46. $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}$ এবং $\vec{b}=\hat{j}+\hat{k}$ হলে $|\vec{a}\times\vec{b}|$- [ব.বো.'১৭]
ক. −1 খ. 1 গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 3

47. $\overline{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এর একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে- [ব.বো.'১৭]
i. $\hat{a}=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ ii. $|\hat{a}|=1$ iii. $|\overline{a}|\neq 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i , ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii , iii

উ: 1খ. 2ঘ. 3গ. 4খ. 5ক. 6ঘ. 7গ. 8গ. 9খ. 10ক. 11খ. 12ঘ. 13গ. 14ক. 15খ. 16ক. 17গ. 18গ. 19ঘ. 20খ. 21ক. 22খ. 23ঘ. 24ঘ. 25ঘ. 26খ. 27ক. 28খ. 29গ. 30ঘ. 31গ. 32ঘ. 33গ. 34ক. 35ক. 36ক. 37ক. 38ক. 39ঘ. 40ক. 41ক. 42গ. 43খ. 44ঘ. 45ঘ. 46গ. 47ঘ.

**সৃজনশীল প্রশ্ন:**

**1.** $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$
ক. $\overline{A}\times\overline{B}$ নির্ণয় কর।

খ. $\overline{A}+\overline{B}$ এবং $\overline{A}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\overline{A}$, $\overline{A}-\overline{B}$ এবং $4\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

**2.** ABC ত্রিভুজের BC, CA , AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E , F ।

ক. $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\underline{0}$

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

**3.** $\overline{A}=2\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}$, $\overline{B}=3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$

ক. P(3, −1, 4), Q( 4, − 3, −2) হলে y-অক্ষের উপর $\overrightarrow{PQ}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

খ. $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর লব্ধি বল এবং $\overline{A}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

**4.** মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ ও $\underline{b}=\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ ।

ক. $\underline{a}\times\underline{b}$ নির্ণয় কর।

খ. AB এর মধ্যবিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর ।

গ. OAB ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর।

**5.** $\overline{P}=\overrightarrow{OA}=3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$,
$\overline{Q}=\overrightarrow{OB}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$, O মূলবিন্দু।

ক. $|\overline{P}+\overline{Q}|$ নির্ণয় কর।

খ. (2, 4, 6) বিন্দুগামী $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. AB এর মধ্যবিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

**6.** $\overline{A}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{B}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

ক. $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ স্কেলার গণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে -ব্যাখ্যা কর।

খ. $(\overline{A}+\overline{B})$ এর উপর $(\overline{A}-\overline{B})$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

গ. $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**7.** $\overline{A}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

ক. $\overline{A}$ বিন্দুগামী এবং $\overline{B}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. $\overline{A}$ বরাবর $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের উপাংশের একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর সাথে সমতলীয় এবং $\overline{A}$ এর উপর লম্ব।

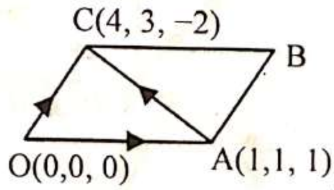
**8.** $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $\overrightarrow{OB}=2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং O মূলবিন্দু।

ক. $3\hat{j}+5\hat{k}$ কোন তলে অবস্থান করে - ব্যাখ্যা কর।

খ. (1, 3, −5) বিন্দুগামী $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. AB এর মধ্যবিন্দু D হলে, $\Delta OAD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**9.** চিত্রে, OABC একটি সামান্তরিক।




ক. $|\overrightarrow{AC}|$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. AB এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. A ও B বিন্দুদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর ।

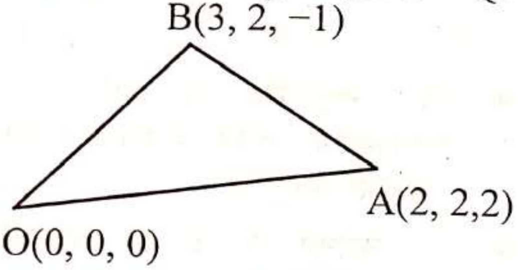
**10.** $\overline{A}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}-5\hat{k}$, $\overline{B}=2\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}$,
$\overline{C}=5\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$

ক. $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ কোনো ত্রিভুজের বাহু হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. $\overline{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{A}$ নির্ণয় কর যা $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ এর সাথে সমতলীয়।

**11.** OA ও OB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.




ক. AB এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \,||\, AB$.

গ. $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ কে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

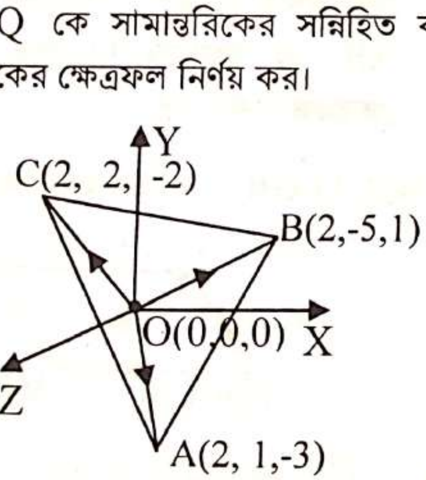
**12.** $\overline{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ , $\overline{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

ক. PQ এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. অভিক্ষেপ ব্যবহার করে $\overline{P}$ বরাবর $\overline{Q}$ এর অংশক নির্ণয় কর।

গ. $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ কে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**13.**

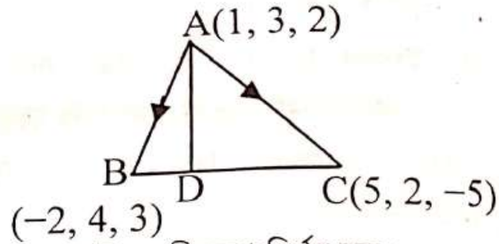



ক. BC এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. $\Delta ABC$ এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে প্রমাণ কর যে, $DE \,||\, BC$.

**14.** $\Delta ABC$ এ, $AD \perp BC$ ।




ক. AC এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. BD নির্ণয় কর।

গ. ভেক্টর গুণনের সাহায্যে AD নির্ণয় কর।

**15.** O(0, 0, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

ক. P(5, −3, 1), Q(3, −1, −2) এর সংযোগ রেখাংশকে R বিন্দু 3:4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে $\overrightarrow{OR}$ নির্ণয় কর।

খ. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. O হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

**16.** $\overline{A} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$, $\overline{B} = 6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$, $\overline{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

ক. $\overline{A}$ ভেক্টর ও এ ভেক্টরের উপর $\overline{B}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\overline{A}$, $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ সমতলীয় হলে $\lambda$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\overline{B}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{C}$ ভেক্টরের উপাংশ y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

**17.** O(0, 0, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{P} = 2\hat{i} + n\hat{j} - \hat{k}$, $\overline{Q} = 6\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$.

ক. একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর যা P ও Q বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

খ. $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ কোনো ত্রিভুজের বাহু হলে এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে n এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি বরাবর $\overline{Q}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

**18.** $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

ক. P(2, −1, 3) ও Q(3, 2, −4) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

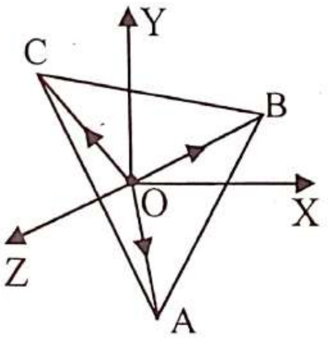
**19.** $\overrightarrow{OA} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু।

ক. সামান্তরিকটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

খ. সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর বরাবর $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের উপাংশ y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

**20.**



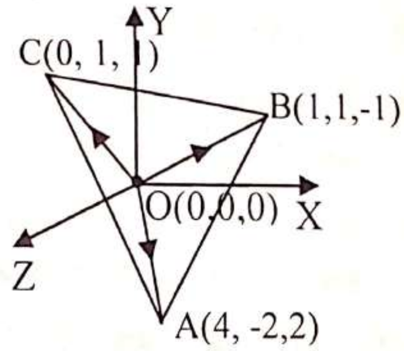

চিত্রে, $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$

ক. AB এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

গ. $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

**21.**




ক. $\underline{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}, \underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ভেক্টর y-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

খ. OA, OB, OC একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধার হলে ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

গ. ABC ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি AD, BE ও CF হলে A, B, C এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

**22.** তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

ক. প্রথম ভেক্টর ও এ ভেক্টরের উপর দ্বিতীয় ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

গ. x , y ও z অক্ষের উপর ভেক্টরগুলির অভিক্ষেপ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে $A^{-1}$ নির্ণয় কর।

**23.** $\overline{P} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}, \overline{Q} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$,
$\overline{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

ক. x-অক্ষের উপর $\overline{P} - \overline{Q}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

খ. $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরের $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর সহগগুলিকে কলাম বিবেচনা করে গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে $A^{-1}$ নির্ণয় কর।

**24.** $\overline{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $\overline{Q} = \hat{i} + 3\hat{k}$,

$\overline{R} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

ক. $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি বল x- অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

খ. $\overline{P}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে $A^{-1}$ নির্ণয় কর।

**25.** $\overline{P} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2z\hat{k}$, $\overline{Q} = y\hat{i} + 3z\hat{j} - 2x\hat{k}$ এবং

$$R = \begin{bmatrix} x-2y & z-y & y \\ y & -z & z-y-1 \\ y-1 & z-2 & x-3 \end{bmatrix}$$

ক. ভেক্টর পদ্ধতিতে A(0 , 1 , 2) ও B( − 1, 3 , 0) বিন্দু দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

খ. $\begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ z & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2-z & 5-y \end{bmatrix}$ হলে, $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি বলের উপর $\overline{P}$ বলের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

গ. x= 4, y = 2, z = 3 হলে $R^{-1}$ নির্ণয় কর।

**26.** $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$,
$\vec{C} = \hat{i} + b\hat{j} + 3\hat{k}$ . [দি.২০১৭]

ক. অবস্থান ভেক্টর বলতে কি বুঝ?

খ. $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $\vec{C}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে b-এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

**27.** $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং তিনটি বিন্দুর স্থানাংক $P(-3,-2,-1)$; $Q(4,0,-3)$ এবং $S(5,-7,8)$। [সি.বো.'১৭]

ক. উদাহরণসহ একক ভেক্টর এর সংজ্ঞা দাও। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $\Delta PQS$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

**28.** $\vec{P} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{Q} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ [রা.বো.'১৭]

ক. $\vec{P}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর ।

খ. দেখাও যে, $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরটি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব।

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে $A^{-1}$ নির্ণয় কর।