বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

Inverse Trigonometric Functions and Trigonometric Equations

ত্রিকোণমিতি গণিত শাস্ত্রের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা। ইংরেজি trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ trigon যার অর্থ তিন কোণ এবং metron যার অর্থ পরিমাপ এর সমন্বয়ে গঠিত। পরিমাপের ক্ষেত্রে উদ্ভূত নিত্য-নতুন জটিল সমস্যা সহজে সমাধানের জন্যই ত্রিকোণমিতির আবির্ভাব। খ্রিস্টপূর্ব 2000 বছরেরও পূর্বে প্রাচীন মিশরীয় ও গ্রিক গণিতবিদগণ ত্রিকোণমিতি বিষয়ে অধ্যয়ন করতেন। জ্যোতির্বিদ্যা সংক্রান্ত গবেষণায় এটি ব্যাপক ব্যবহৃত হয়। ভারতবর্ষে গুপ্ত আমলে আর্যভট্টের (৬ষ্ঠ শতাব্দী) বিশেষ অবদানের কারণে ত্রিকোণমিতির স্বরূপ উন্মোচিত হয়। পরবর্তীতে ১৭ শতকে স্যার আইজ্যাক নিউটন ও জেম্‌স স্টার্লিং-এর মতো বিজ্ঞানীদের হাত ধরে ত্রিকোণমিতি আধুনিক গণিতের গুরুত্বপূর্ণ শাখা হিসেবে প্রতিষ্ঠা লাভ করে। প্রাচীন গণিতবিদ হিপোক্রাস (Hipparchus, 190-120BC) কে ত্রিকোণমিতি ও জ্যোতির্বিদ্যার জনক বলা হয়। আরব গণিতবিদরাই সর্বপ্রথম ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের বৈজ্ঞানিক রূপ প্রতিষ্ঠিত করে এর সাহায্যে সূর্য, চন্দ্র ও গ্রহের আবর্তনকাল, পৃথিবীর আয়তন, মহাবিশ্বের বস্তুসমূহের আকৃতি ও তাদের পারস্পরিক দূরত্ব, ত্রিমাত্রিক বস্তুর আকার আকৃতি ও আয়তন নির্ণয়ে দক্ষতার পরিচয় দেন।

নাম	: হিপার্কাস (Hipparchus)
জন্ম	: ১৯০ খ্রিষ্টপূর্ব
জন্মস্থান	: নিসিয়া, গ্রিস
অবদান	: গণিত, জ্যোতির্বিদ্যা, ভূগোল
আবিষ্কার	: প্রথম ত্রিকোণমিতিক সারণি প্রণয়ন করে 'arc' ও 'chord' সিরিজের মান নির্ণয়
পরিচিতি	: ত্রিকোণমিতি ও জ্যোতির্বিদ্যার জনক
মৃত্যু	: ১২০ খ্রিষ্টপূর্ব

হিপার্কাসের প্রণীত সারণি সংস্কার করে ক্লডিয়াস টলেমী অনেক গুরুত্বপূর্ণ তথ্য সংযোজন করেন। পরবর্তীতে ভারতবর্ষে ৪র্থ-৫ম শতাব্দীতে সিদ্ধার্থ, আর্যভট্ট (476-550), ৭ম শতাব্দীতে ভাস্করা-I, ব্রহ্মগুপ্ত বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ নিয়ে ব্যাপক তত্ত্ব লিপিবন্ধ করেন।

৭ম শতাব্দীতে ভাস্করা-II সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক সূত্র আবিষ্কার করেন। মিশরে 'Ahmes Papyrus' নামক গণিতশাস্ত্রের পান্ডুলিপিতে Seked শব্দটির ব্যবহার লক্ষ করা যায়। কোসাইন এবং কোটেনজেন্ট অনুপাতের আবিষ্কারের কৃতিত্ব গণিতবিদ গানটারের। পরবর্তী সময়ে নবম শতাব্দীতে মুসা-আল খোয়ারিজমী নির্ভুলভাবে সাইন, কোসাইন ও ট্যানজেন্ট-এর সারণি প্রণয়ন করেন। হাসাব-আল হাসিব আল মাওয়াজি কোট্যানজেন্ট, আল বাত্তানী সিক্যান্ট ও কোসিক্যান্ট ফাংশন ও বিপরীত ফাংশনের বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করেন।

সপ্তদশ শতাব্দীতে স্যার আইজ্যাক নিউটন ও জেম্‌স স্টার্লিং ত্রিকোণমিতিক সিরিজের বিস্তার নির্ণয় করেন। অষ্টাদশ শতাব্দীতে বিজ্ঞানী অয়লার এগুলিকে অসীম সিরিজ আকারে বর্ণনা করেন এবং বর্তমানে ব্যবহৃত sin, cos, tan, sec এবং cosec প্রতীক ব্যবহার করেন। ইংরেজ গণিতবিদ জন হার্শেল (John Herchel) 1813 সালে সর্বপ্রথম বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন প্রকাশের জন্য $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$ ইত্যাদি প্রতীকগুলো ব্যবহার করেন।

ত্রিকোণমিতির ছয়টি অনুপাত ব্যবহার করে ত্রিভুজের তিন কোণ ও তিন বাহুর সমন্বয়ে খুব সহজেই কোনো বস্তুর দূরত্ব, উচ্চতা ও কোণ নির্ণয় করা যায়। ভূমি জরিপে, সমুদ্রবিজ্ঞানে, মহাশূন্য গবেষণায় ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার লক্ষ করা যায়। তাছাড়া ব্রাক টেইলর, জেম্‌স গ্রেগরি, কলিন ম্যাকলরিন প্রমুখ বিজ্ঞানীদের হাত ধরেই ত্রিকোণমিতিক জগতে অত্যাধুনিক বিপ্লব সূচিত হয়েছে।

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং এর মুখ্যমান নির্ণয় করতে পারবে।
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে পারবে।
- নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- একই লেখচিত্রে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও এর বিপরীত ফাংশন অঙ্কন করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ ও ২: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও মুখ্যমান
- পাঠ-৩: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র
- পাঠ-৪: উদাহরণমালা
- পাঠ-৫ ও ৬: অনুশীলনী-7(A)
- পাঠ-৭ ও ৮: ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান, নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান
- পাঠ-৯: উদাহরণমালা
- পাঠ-১০, ১১ ও ১২: অনুশীলনী-7(B)
- পাঠ-১৩ ও ১৪: ব্যবহারিক

পাঠ-১ ও ২

7.1 বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও মুখ্যমান (Inverse trigonometric functions and its principal value)

7.1.1 বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন (Inverse trigonometric functions)

$\sin\theta = x : (-1 \le x \le 1$ এবং $x \in \mathbb{R})$ হলে আমরা বুঝি θ একটি কোণ যার sine এর মান x এর সমান। এ কথাটিকে উল্টোভাবে $\theta = \sin^{-1}x$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $\sin^{-1}x$ প্রতীকটি এমন একটি কোণ নির্দেশ করে যার sine অনুপাত x এর সমান। তাই দেখা যাচ্ছে যে, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ। কিন্তু $\sin\theta$ একটি সংখ্যা। সুতরাং, $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ সমীকরণদ্বয় সমতুল্য। এদের একটি থেকে অপরটি সহজেই প্রতিপাদন করা যায়। $\sin^{-1}x$ কে সাইন ইনভার্স x (sine inverse x) বা ইনভার্স সাইন অফ x (Inverse sine of x) পড়া হয়। $\sin^{-1}x$ এর পরিবর্তে এর মুখ্য মানকে অনেক সময় arc sinx এবং সাধারণ মানকে Arc sinx লেখা হয়ে থাকে। $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ প্রভৃতি কোণকে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বা বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন বলা হয়।

বি.দ্র. (i) $\sin^{-1}x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এক নয়। প্রথমটি একটি কোণ এবং দ্বিতীয়টি একটি বিশুদ্ধ রাশি নির্দেশ করে। অর্থাৎ $\sin^{-1}x$ এর পরিবর্তে $(\sin x)^{-1}$ বা $\frac{1}{\sin x}$ লেখা যাবে না।

(ii) $\frac{1}{\sin^2 x}$ কে $(\sin x)^{-2}$ লেখা যাবে কিন্তু $\frac{1}{\sin^2 x}$ কে $\sin^{-2}x$ লেখা যাবে না। অন্যান্য বিপরীত ফাংশনের ক্ষেত্রে একই নিয়ম প্রযোজ্য।

(iii) $\sin^{-1}x$, x এর যেকোনো মানের জন্য সংজ্ঞায়িত নয়। যেমন $x = 2$ হলে $\sin^{-1}x$ সংজ্ঞায়িত হয় না। অনুরূপে $\cos^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cose}^{-1}x$ এর যেকোনো মানের জন্য সংজ্ঞায়িত হয় না।

7.1.2 বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান (Principal value of inverse trigonometric functions)

ধরি, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ সুতরাং $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ আমরা জানি, $30°$ হলো ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার জন্য sine অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ হয়। সুতরাং $\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}$

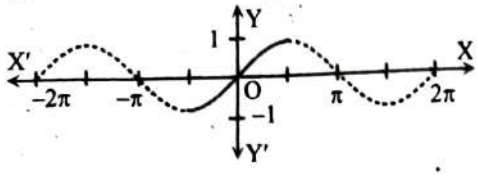
বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক মানকে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) এর মুখ্য মান বলা হয়। সুতরাং $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এবং $\tan^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান হলো যথাক্রমে $30°$ এবং $-45°$। যখন কোনো বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের জন্য দুইটি মান হয় এবং একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক ও ঋণাত্মক এবং অপরটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক ও ধনাত্মক তখন ধনাত্মক মানকে ঐ ফাংশনের মুখ্যমান ধরা হয়।

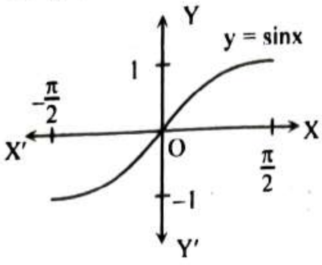
যেহেতু আমরা জানি, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সুতরাং $45°$ কে $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ ফাংশনের মুখ্যমান ধরতে হবে। কোনো শর্ত না থাকলে সংখ্যাসূচক উদাহরণে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের জন্য এর মুখ্য মানই গ্রহণ করতে হবে।

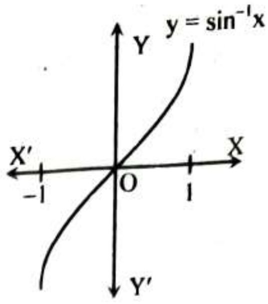
বিভিন্ন প্রকার বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান

(i) বিপরীত সাইন ফাংশন





$y = \sin x, \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



$y = \sin^{-1}x$

চিত্র হতে দেখা যায় $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে এক-এক। অর্থাৎ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে x এর প্রত্যেকটি মানের জন্য $f(x) = \sin x$ এর পৃথক-পৃথক মান পাওয়া যায়, যা $[-1, 1]$ ব্যবধিতে বিদ্যমান এবং x এর এই মানকে ফাংশনের মুখ্যমান বা মুখ্য সমাধান বলা হয়।

যদি $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ যেখানে $f(x) = \sin x$ কোনো ফাংশন হয় তাহলে $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ যেখানে $f^{-1}(x) = \sin^{-1}x \left(\neq \frac{1}{\sin x}\right)$, একে সাইন এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

সুতরাং $y = \sin^{-1}x \Leftrightarrow x = \sin y$

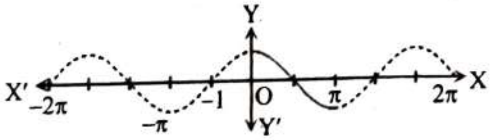
যেমন $y = \sin^{-1}\frac{1}{2} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

যেহেতু $\sin^{-1}x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, অতএব বিপরীত সাইন ফাংশনের মুখ্যমান $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে অবস্থিত এবং ফাংশনের মানগুলি প্রথম বা ৩য় চতুস্কোণে থাকবে [চিত্র দ্রষ্টব্য]

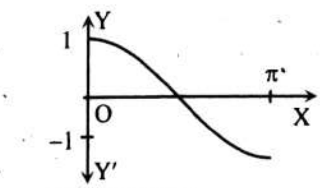
কাজ: নিচের ফাংশনগুলির মুখ্যমান নির্ণয় কর:

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\sin^{-1}(-1)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (iv) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (v) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

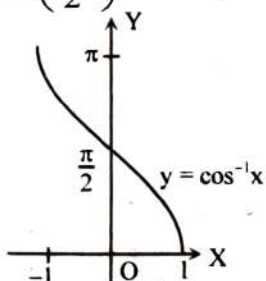
(ii) বিপরীত কোসাইন ফাংশন



y = cos x



$y = \cos x, 0 \le x \le \pi$



$y = \cos^{-1}x$

চিত্র হতে, $[0, \pi]$ ব্যবধিতে cosx এর মান এক-এক। এ ব্যবধিতে cosx এর মান $[-1, 1]$ এবং অনন্য সমাধান আছে।

যদি $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ যেখানে $g(x) = \cos x$ হয় তাহলে $g(x)$ এর বিপরীত ফাংশন

$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ যেখানে $g^{-1}(x) = \cos^{-1}x$

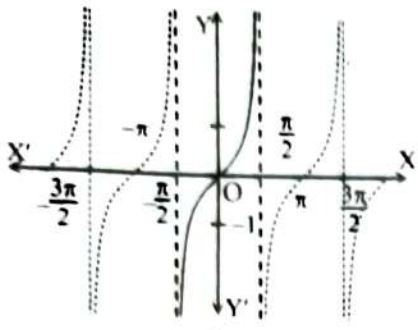
আবার, $y = \cos^{-1}x \Leftrightarrow x = \cos y$

সুতরাং $\cos^{-1}x$ এর মুখ্যমান $[0, \pi]$ ব্যবধিতে অবস্থিত এবং ফাংশনটির লেখ সর্বদাই ১ম বা ৪র্থ চতুষ্কোণে থাকবে।

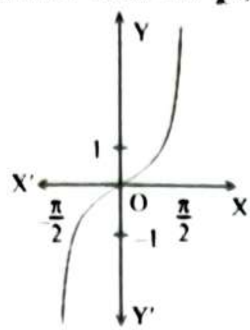
কাজ: নিচের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলির মুখ্যমান বের কর:

(i) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, (iii) $\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$, (iv) $\tan\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

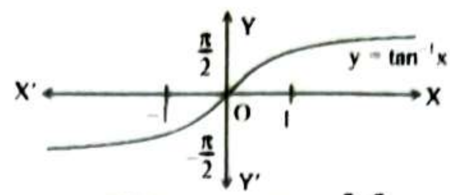
(iii) বিপরীত ট্যানজেন্ট ফাংশন: $f(x) = \tan x$ ফাংশনের মান $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে অনন্য। এই ব্যবধিতে $\tan x$ এর মান $(-\infty, \infty)$। এই ব্যবধিতে ফাংশনের সমাধানকে $\tan x$ এর মুখ্যমান বলা হয়।



$y = \tan x$



$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



ডোমেন: $(-\infty, \infty)$; রেঞ্জ: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

যদি $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ যেখানে $h(x) = \tan x$ কোনো ফাংশন হয় তাহলে $h(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ যেখানে $h^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং $y = \tan^{-1}x \Leftrightarrow x = \tan y$।

সুতরাং $\tan^{-1}x$ এর মুখ্যমান $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে অবস্থিত এবং ১ম ও ৩য় চতুষ্কোণে অবস্থিত।

কাজ: নিচের ফাংশনগুলির মুখ্যমান বের কর:

(i) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$, (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, (iii) $\cos[\tan^{-1}(-\sqrt{3})]$, (iv) $\tan[\tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})]$, (v) $\tan[\tan^{-1}(1)]$

দ্রষ্টব্য: সুতরাং উপরোক্ত আলোচনা হতে পাই,

$\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা $0 \le x \le \pi$

$\tan^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

এই সীমা নির্ধারণের ফলে কোনো ইনভার্স ফাংশনের একাধিক মুখ্যমান থাকতে পারে না।

উদাহরণ: মুখ্যমান নিয়ে সমষ্টি নির্ণয় কর: $\tan^{-1}8 + \tan^{-1}\frac{9}{7}$

সমাধান: $\tan^{-1}8 + \tan^{-1}\frac{9}{7} = \tan^{-1}\dfrac{8 + \frac{9}{7}}{1 - 8.\frac{9}{7}} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{65}{7}}{\frac{-65}{7}} = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, ($-\frac{\pi}{4}$ নয়)

কারণ, $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ধরলে দুইটি ধনাত্মক পদের সমষ্টি ঋণাত্মক হয়। যা গ্রহণযোগ্য নয়।

প্রত্যেক বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মতো $\tan^{-1}(-1)$ এরও অসংখ্য মান আছে। যেমন $\tan^{-1}(-1) = n\pi - \frac{\pi}{4}$, এখানে $n = 0$ বা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে। তাই উপরের উদাহরণের ক্ষেত্রে $\tan^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ কেননা $\tan^{-1}8 + \tan^{-1}\frac{9}{7}$ (মুখ্যমান ধরে প্রাপ্ত) কোণটি π অপেক্ষা বৃহত্তর নয়। তাই এক্ষেত্রে $n = 1$ নিতে হবে।

বি.দ্র: $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\frac{x + y}{1 - xy}$; যখন $xy > 1$

জেনে রাখো

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	মুখ্যমান যখন, $x \geq 0$	মুখ্যমান যখন, $x < 0$
$x = \sin(y)$	$y = \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$	$0 \leq \sin^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}(x) < 0$
$x = \cos(y)$	$y = \cos^{-1}(x) = \arccos(x)$	$0 \leq \cos^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \cos^{-1}(x) \leq \pi$
$x = \tan(y)$	$y = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$	$0 \leq \tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < 0$
$x = \cot(y)$	$y = \cot^{-1}(x) = \text{arccot}(x)$	$0 < \cot^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \cot^{-1}(x) < \pi$
$x = \sec(y)$	$y = \sec^{-1}(x) = \text{arcsec}(x)$	$0 \leq \sec^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \sec^{-1}(x) \leq \pi$
$x = \text{cosec}(y)$	$y = \text{cosec}^{-1}(x) = \text{arc cosec}(x)$	$0 < \text{cosec}^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \text{cosec}^{-1}(x) < 0$

7.1.3 মুখ্য সীমায় বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলির মধ্যে সম্পর্ক
(Relation of inverse trigonometric functions in the principal range)

(a) **(i)** $\sin^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$; $-1 \leq x \leq 1$ **(ii)** $\text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$; $x \leq -1$ অথবা $x \geq 1$

(iii) $\cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x}$; $-1 \leq x \leq 1$ **(iv)** $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$; $x \leq -1$ অথবা $x \geq 1$

(v) $\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$ **(vi)** $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$

প্রমাণ: (i) ধরি, $\sin\theta = x \quad \therefore \theta = \sin^{-1}x$

আবার, $\sin\theta = x \Rightarrow \frac{1}{\text{cosec}\theta} = x \Rightarrow \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ সুতরাং $\sin^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

(ii) ধরি, $\text{cosec}\,\theta = x \quad \therefore \theta = \text{cosec}^{-1}x$

আবার, $\text{cosec}\theta = x \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = x \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{1}{x}$ সুতরাং $\text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

অনুরূপভাবে অন্যান্য সম্পর্কগুলি প্রমাণ করা যায়।

(b) **(i)** $\sin(\sin^{-1}x) = x$ **(ii)** $\cos(\cos^{-1}x) = x$ **(iii)** $\tan(\tan^{-1}x) = x$
(iv) $\cot(\cot^{-1}x) = x$ **(v)** $\sec(\sec^{-1}x) = x$ **(vi)** $\text{cosec}(\text{cosec}^{-1}x) = x$

প্রমাণ: (ii) ধরি, $\cos\theta = x \quad \therefore \theta = \cos^{-1}x$

এখন, θ এর মান $\cos\theta = x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\cos(\cos^{-1}x) = x$

অনুরূপভাবে অন্যান্য সম্পর্কগুলি প্রমাণ করা যায়।

(c) **(i)** $\sin^{-1}(\sin x) = x$ **(ii)** $\cos^{-1}(\cos x) = x$ **(iii)** $\tan^{-1}(\tan x) = x$
(iv) $\cot^{-1}(\cot x) = x$ **(v)** $\sec^{-1}(\sec x) = x$ **(vi)** $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}x) = x$

প্রমাণ: (iii) ধরি, $\tan x = \theta \quad \therefore x = \tan^{-1}\theta = \tan^{-1}(\tan x)$ সুতরাং $\tan^{-1}(\tan x) = x$

(v) ধরি, $\sec x = \theta \quad \therefore x = \sec^{-1}\theta = \sec^{-1}(\sec x)$ সুতরাং $\sec^{-1}(\sec x) = x$

অনুরূপভাবে অন্যান্য সম্পর্কগুলি প্রমাণ করা যায়।

(d) $\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

প্রমাণ: ধরি, $\sin^{-1}x = \theta \quad \therefore \sin\theta = x$

এখন, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ অর্থাৎ $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ...... (i)

আবার, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ অর্থাৎ $\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ...... (ii)

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ অর্থাৎ $\sin^{-1}x = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ...... (iii)

$\sin\theta = x \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = x \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ অর্থাৎ $\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ ...... (iv)

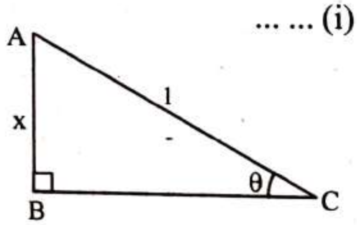
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ অর্থাৎ $\sin^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ...... (v)

(i), (ii), (iii), (iv) ও (v) নং হতে পাই,

$$\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

জ্যামিতিক প্রমাণ:

মনে করি, $\sin\theta = x \Rightarrow \theta = \sin^{-1}x$ ...... (i)



ΔABC এ $\angle B = 90°$ এবং $\angle C = \theta$

এখন, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow x = \frac{AB}{AC} \quad \therefore AB = x$ এবং $AC = 1$

এক্ষেত্রে, $AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{1-x^2}$

এখন, $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ...... (ii)

$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ...... (iii)

$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ...... (iv)

$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \Rightarrow \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ...... (v)

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ ...... (vi)

(i), (ii), (iii), (iv), (v) ও (vi) নং হতে পাওয়া যায়,

$$\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

পাঠ-৩

7.2 বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র

(Graph of inverse trigonometric functions)

(i) বিপরীত সাইন ফাংশন (Inverse sine function)

$y = f(x) = \sin x$ ফাংশন $D_f = \mathbb{R}$ ডোমেনে এক-এক নয়, কিন্তু $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে এক-এক।

[অনুচ্ছেদ 7.1.2 এর (i) নং চিত্র দ্রষ্টব্য]

যেহেতু $\sin x$ ফাংশনের ডোমেন হবে $\sin^{-1}x$ ফাংশনের রেঞ্জ এবং $\sin x$ ফাংশনের রেঞ্জ হবে $\sin^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন, কাজেই $f(x) = \sin^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

বি.দ্র. (ক) $f(x) = \sin^{-1}x$ ফাংশনকে $f(x) = \arcsin x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
(খ) $y = \sin x$ এর লেখচিত্রের ডোমেনের যে অংশটুকুর জন্য ফাংশনটি এক-এক ঐ অংশটুকুর বিন্দুগুলি বিপরীতভাবে (ভুজকে কোটি এবং কোটিকে ভুজ ধরে) বসিয়ে $y = \sin^{-1}x$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

(ii) বিপরীত কোসাইন ফাংশন (Inverse cosine function)

$y = f(x) = \cos x$ ফাংশন $D_f = \mathbb{R}$ ডোমেনে এক-এক নয়। কিন্তু ফাংশনটি $[0, \pi]$ ব্যবধিতে এক-এক।

[অনুচ্ছেদ 7.1.2 এর (ii) নং চিত্র দ্রষ্টব্য]

যেহেতু $\cos x$ ফাংশনের রেঞ্জ $[-1, 1]$, কাজেই $\cos^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = [-1, 1]$। আবার $\cos x$ ফাংশনের এক-এক হওয়ার প্রয়োজনীয় ডোমেন $[0, \pi]$ হবে $\cos^{-1}x$ ফাংশনের রেঞ্জ।
অর্থাৎ $f(x) = \cos^{-1}x$ ফাংশনের $D_f = [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \pi]$

(iii) বিপরীত ট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse tangent function)

বিপরীত ট্যানজেন্ট ফাংশনকে $\tan^{-1}x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেহেতু $\tan x$ ফাংশন

$D_f = \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ ব্যবধিতে এক-এক নয়। কিন্তু $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে এক-এক।

[অনুচ্ছেদ 7.1.2 এর (iii) নং চিত্র দ্রষ্টব্য]

$\tan^{-1}x$ ফাংশনের রেঞ্জ $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$। আবার, $\tan x$ ফাংশনের রেঞ্জ $\mathbb{R}$ হবে $\tan^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন অর্থাৎ

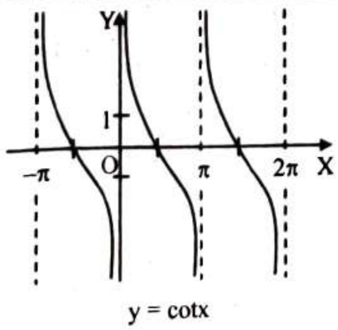
$\tan^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iv) বিপরীত কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Cotangent function)

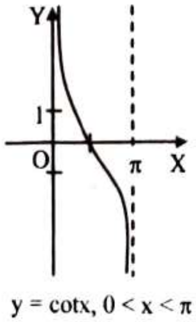
বিপরীত কোট্যানজেন্ট ফাংশনকে $\cot^{-1}x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেহেতু $\cot x$ ফাংশন $(0, \pi)$ ব্যবধিতে এক-এক, কাজেই $\cot^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= (0, \pi)$

$y = \cot^{-1}x \Rightarrow x = \cot y$

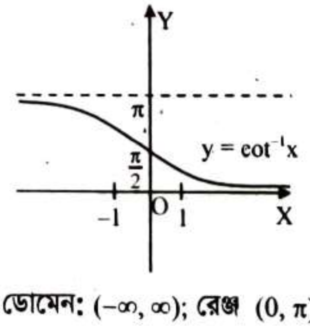
y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x	∞	1	0	$-\infty$



y = cotx



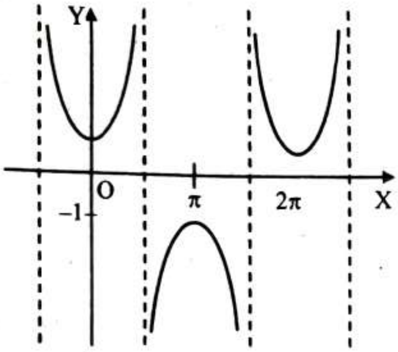
y = cotx, 0 < x < π



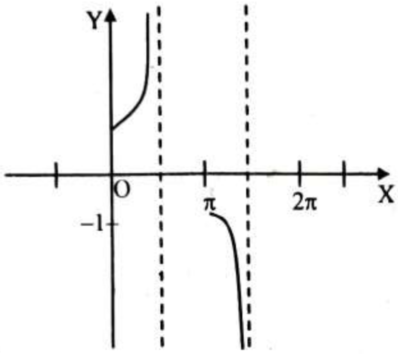
ডোমেন: $(-\infty, \infty)$; রেঞ্জ $(0, \pi)$

জেনে রাখো

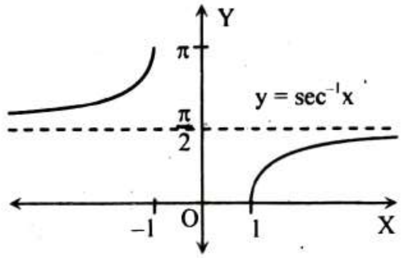
$\sec x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$ or $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ব্যবধিতে এক-এক।



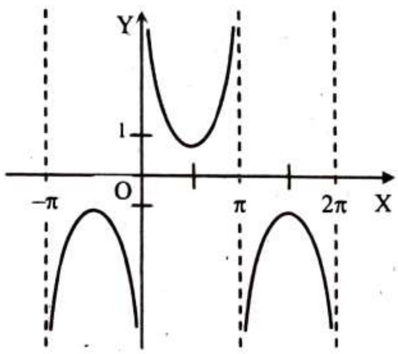
y = secx



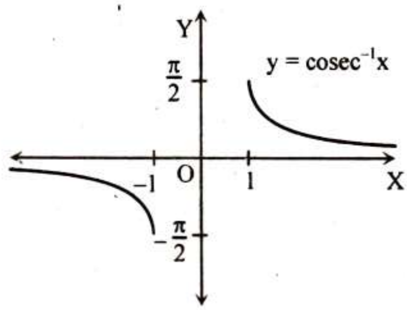
$y = \sec x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2},\ \pi \le x < \frac{3\pi}{2}$



$\text{cosec}\,x,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$, [or $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ ব্যবধিতে এক-এক।



y = cosecx



বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জের ছক

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$ বা $\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$ বা $\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\sec^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ বা, $\mathbb{R} - (-1, 1)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\text{cosec}^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ বা, $\mathbb{R} - (-1, 1)$	$(0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

$\sec^{-1}x$ ও $\text{cosec}^{-1}x$ এর রেঞ্জ নিয়ে দ্বিমত আছে। কোনো কোনো গণিতবিদ মনে করেন $\sec^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ এবং $\text{cosec}^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

কাজ: $\sin \sin^{-1}x = x$ এবং $\sin^{-1} \sin x = x$ এ উক্তিদ্বয়ের অন্তর্নিহিত তাৎপর্য কী? $\sin \sin^{-1}x = \sin^{-1} \sin x$ লিখা যায় কি? কেন?

7.2.1 বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের কয়েকটি সূত্র

(Some rules of inverse trigonometric functions)

(a) **(i)** $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$; $[-1 \le x \le 1]$; **(ii)** $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$; $[x \ge 0]$;

(iii) $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ $[x \le -1, x \ge 1]$

প্রমাণ: (i) মনে করি, $\sin^{-1}x = \theta$ $\therefore \sin\theta = x$

এখন, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

$\Rightarrow \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$ $\Rightarrow \theta + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

সুতরাং, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ii) মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta$ $\therefore \tan\theta = x$

এখন, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \theta + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

সুতরাং $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iii) মনে করি, $\sec^{-1}x = \theta$ $\therefore \sec\theta = x$

এখন, $\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta \Rightarrow \text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \theta + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

সুতরাং $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(b) **(i)** $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ $[xy \le 1]$ **(ii)** $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

[**বি.দ্র.** যদি কোনো ক্ষেত্রে $\tan^{-1}x$ এবং $\tan^{-1}y$ উভয়েই ধনাত্মক এবং $1 - xy$ বা $\frac{x+y}{1-xy}$ ঋণাত্মক হয়। তখন ডানপক্ষের জন্য মুখ্যমান গ্রহণযোগ্য নয়। বিষয়টি পূর্বেই উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।]

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$; $[xy + yz + zx \le 1]$

প্রমাণ: (i) মনে করি, $\tan^{-1}x = A$ এবং $\tan^{-1}y = B$ $\therefore$ $\tan A = x$ এবং $\tan B = y$

এখন, $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow A + B = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

সুতরাং $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

(ii) মনে করি, $\tan^{-1}x = A$ এবং $\tan^{-1}y = B$

$\therefore$ $\tan A = x$ এবং $\tan B = y$

এখন, $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{x-y}{1+xy} \Rightarrow A - B = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

সুতরাং $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1}z$ [(i) এর সাহায্যে]

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{x+y}{1-xy}+z}{1-\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)z}\right\} = \tan^{-1}\frac{(x+y)+z(1-xy)}{1-xy-(x+y)z} = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

সুতরাং $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$

জেনে রাখো

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} & \text{যখন } xy < 1 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} & \text{যখন } xy > 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{যখন } xy = 1 \end{cases}$$

(c) (i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$ [যখন $x^2 + y^2 \le 1$]

(ii) $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(iii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$ [যখন $x + y \ge 0$]

(iv) $\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

প্রমাণ: (i) মনে করি, $\sin^{-1}x = A$ এবং $\sin^{-1}y = B$

$\therefore \sin A = x$ এবং $\sin B = y$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin A\sqrt{1-\sin^2 B} + \sin B\sqrt{1-\sin^2 A}$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

$\Rightarrow A + B = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$

সুতরাং, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(ii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin A\sqrt{1-\sin^2 B} - \sin B\sqrt{1-\sin^2 A}$
$$= x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$$

$\Rightarrow A - B = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right\}$

সুতরাং, $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(iii) মনে করি, $\cos^{-1}x = A$ এবং $\cos^{-1}y = B$

$\therefore \cos A = x$ এবং $\cos B = y$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos A\cos B - \sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B}$$
$$= xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$\Rightarrow A + B = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

সুতরাং $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

(iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos A\cos B + \sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B}$
$$= xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$\therefore A - B = \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

$\Rightarrow \cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

বি.দ্র. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \pi - \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$ যখন $x^2 + y^2 > 1$.

(d) **(i)** $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ **(ii)** $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$ **(iii)** $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(iv) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$ **(v)** $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$ **(vi)** $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

প্রমাণ:

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x = A \therefore \sin A = x$ এবং $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-x^2}$
এখন, $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2A = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
সুতরাং, $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

(ii) মনে করি, $\cos^{-1}x = A \quad \therefore \cos A = x$
এখন, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2x^2 - 1 \Rightarrow 2A = \cos^{-1}(2x^2-1)$
অর্থাৎ $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

(iii) মনে করি, $\tan^{-1}x = A \quad \therefore \tan A = x$
এখন, $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow 2A = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ সুতরাং, $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(iv) মনে করি, $\sin^{-1}x = A \therefore \sin A = x$
যখন, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A = 3x - 4x^3 \Rightarrow 3A = \sin^{-1}(3x-4x^3)$
সুতরাং, $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

(v) মনে করি, $\cos^{-1}x = A \therefore \cos A = x$
এখন, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A = 4x^3 - 3x \Rightarrow 3A = \cos^{-1}(4x^3-3x)$
সুতরাং, $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

(vi) মনে করি, $\tan^{-1}x = A \quad \therefore \tan A = x$
এখন, $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} = \left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) \Rightarrow 3A = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$
সুতরাং, $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

(e) $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

[ঢা: বো: ০৯; রা: বো: ১১, ০৯; য: বো: ১৬, ০৮; সি: বো: ০৭; কু: বো: ১০; দি: বো: ১০; চ: বো: ১০; ব: বো: ১০]

প্রমাণ: মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta \quad \therefore \tan\theta = x$

এখন, $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ... ... (i)

আবার, $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 2\theta = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ... ... (ii)

এবং $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow 2\theta = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে আমরা পাই, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

কাজ: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সম্পর্কগুলির ক্ষেত্রে সীমা নির্ধারণ কেন প্রয়োজন? মুখ্য সীমা ছাড়া সমীকরণগুলির সম্পর্ক কেন সত্য নয়? যৌক্তিক আলোচনা কর।

পাঠ-৪

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

সমাধান: $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=2(\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8})+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$=2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{7}=2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{13}{40}}{\frac{39}{40}}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{7}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

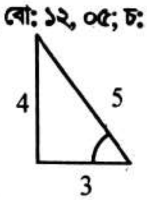
$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}\right)+\tan^{-1}7=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}\right)=\tan^{-1}=\left(\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}\right)=\tan^{-1}1=\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$$

সুতরাং $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

উদাহরণ-2. প্রমাণ কর : $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$

[কু: বো: ০৫; ব: বো: ১০; সি: বো: ১২, ০৫; চ: বো: ০৫; দি: বো: ১৩, ০৯; মাদ্রাসা বো: ১১]

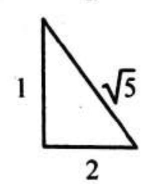
সমাধান: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$



$\sin^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

$=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}$ [পার্শ্বের চিত্র হতে]

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\tan^{-1}\frac{\frac{8+3}{6}}{\frac{6-4}{6}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$$



$\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

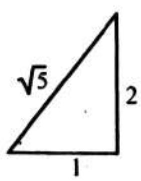
সুতরাং $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}\frac{11}{2}$

উদাহরণ-3. প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}2$

[ঢা: বো: ১৪, ০৭; য: বো: ১৩, ১০, ০৬; কু: বো: ১৪, ০৯, ০৬; রা: বো: ০৮, ০৫; চ: বো: ১৫, ১১, ০৮, ০৬; সি: বো: ১৫, ১১, ০৮; দি: বো: ১৫, ১৪]

সমাধান: $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$=\tan^{-1}2-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}.\,2\tan^{-1}\frac{1}{3}$



$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}2$

$$=\tan^{-1}2-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\tan^{-1}2-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\right)$$

$$=\tan^{-1}2-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}2$$

উদাহরণ-4. প্রমাণ কর যে, $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = x$

[রা: বো: ১২, ০৮; ব: বো: ০৯; কু: বো: ০৫; দি: বো: ১১; য: বো: ১৪ সি: বো: ০৭; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$

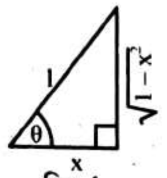
$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [চিত্র-1 হতে]

$= \sin\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \sin\sin^{-1}x$ [চিত্র-2 হতে]

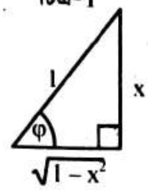
$= x$

সুতরাং $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = x$



চিত্র-1

$\cos^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



চিত্র-2

$\sin^{-1}x = \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

উদাহরণ-5. প্রমাণ কর যে, $\sin^2(\cos^{-1}\frac{1}{3}) - \cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9}$ [রা: বো: ০৭; চ: বো: ০৭]

সমাধান: $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \cos^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) - \left\{1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$= 1 - \left\{\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)\right\}^2 - 1 + \left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{-1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

সুতরাং, $\sin^2(\cos^{-1}\frac{1}{3}) - \cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9}$

উদাহরণ-6. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = -2x$ [সি: বো: ০৯]

সমাধান : $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = \sin^{-1}\left\{-\cos x\sqrt{1-\cos^2 3x} + \cos 3x\sqrt{1-\cos^2 x}\right\}$

$= \sin^{-1}\{(-\cos x\sin 3x + \cos 3x\sin x)\} = \sin^{-1}\{-\sin(3x-x)\} = \sin^{-1}\{-\sin 2x\} = \sin^{-1}\{\sin(-2x)\} = -2x$

সুতরাং $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = -2x$

উদাহরণ-7. যদি $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$.

[বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৩; য: বো: ১০, ০৭; রা: বো: ১৬, ১২, ০৭; কু: বো: ০৭; চ: বো: ১৫, ০৬; সি: বো: ০৮; ব: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১১, ০৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y\right)$

$\Rightarrow x = \cos(\sin^{-1}y) \Rightarrow x = \cos\{\cos^{-1}\sqrt{1-y^2}\} \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

সুতরাং $x^2 + y^2 = 1$

কাজ: ধরি $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ আমরা জানি, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

বা, $\sin(\pi - \sin^{-1}\frac{1}{2}) = \sin(\sin^{-1}\frac{1}{2})$

বা, $\pi - \sin^{-1}\frac{1}{2} = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ বা, $2\sin^{-1}\frac{1}{2} = \pi$

বা, $\sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ বা, $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{2}$ $\therefore \frac{1}{2} = 1$

এরকম ভ্রমাত্মক যুক্তির মাধ্যমে $2 = \sqrt{3}$ এবং $\pi = 0$ প্রমাণ করে মুখ্যমানের রহস্যের যৌক্তিকতা আলোচনা কর।

পাঠ-৫ ও ৬

অনুশীলনী-7(A)

Type-I

প্রমাণ কর:

1. **(i)** $\tan^{-1}\frac{7}{11}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}=\frac{\pi}{4}$ **(ii)** $\tan^{-1}\frac{1}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$

(iii) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$ **(iv)** $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$

(v) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$ [রা; বো: ০৫]

Type-II

2. **প্রমাণ কর:**

(i) $\sin^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}=\tan^{-1}\sqrt{2}$ **(ii)** $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cot^{-1}\frac{5}{3}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ [ঢা: বো: ১২]

(iii) $4(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3)=\pi$ [ঢা: বো: ০৯, ০৮; দি: বো: ১২; য: বো: ১১; ব: বো: ০৭; মাদ্রাসা: বো: ১৪]

(iv) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ **(v)** $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

(vi) $\sec^{-1}\frac{13}{5}-\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}=\tan^{-1}\frac{2}{29}$ [ব: বো: ০৬]

(vii) $\sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\cot^{-1}\frac{3}{4}$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

(viii) $\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}=\frac{\pi}{4}$

(ix) $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$ [ঢা: বো: ১১; সি: বো: ১০; ব: বো: ০৯; য: বো: ০৮]

(x) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{28}{29}$
[ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৪; চ: বো: ১৩; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১৩, ১২; কু: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]

(xi) $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)=0$ [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৪(খ)]

(xii) $\sec^{-1}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}-\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\tan^{-1}2.$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(খ)]

(xiii) $\sec^{-1}\frac{5}{3}+\cot^{-1}\frac{12}{5}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(খ)]

(xiv) $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ [মাদ্রাসা বো: ১৩]

(xv) $\tan^{-1}\frac{5}{3}=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল ৪(ক)]

Type-III

3. **প্রমাণ কর:**

(i) $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3) = 25$

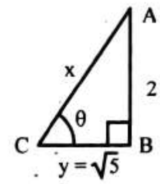
[চুয়েট ১০-১১; কু: বো: ১৩, ০৬; রা: বো: ১৩; চ: বো: ০৫; ব: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১২]

(ii) $\sec^2(\tan^{-1}2)+\text{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$ [কুয়েট ০৫-০৬; ঢা: বো: ১৩, ০৭; ব: বো: ১২, ০৮; য: বো: ০৭; সি: বো: ১৪; চ: বো: ১৪; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(iii) $\sec^2(\cot^{-1}3) + \text{cosec}^2(\tan^{-1}2) = 2\frac{13}{36}$ [ঢা. বি. ১৫-১৬; বিআইটি ৯৬-৯৭]

(iv) $\text{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3}) = 1$ [কুয়েট ০৮-০৯]

(v) $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{9}$. যেখানে



[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৪(খ)]

Type-IV

4. **প্রমাণ কর:**

(i) $2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right\} = \cos^{-1}\frac{b + a\cos\theta}{a + b\cos\theta}$

[ঢা: বো: ১৪, ০৫; ব: বো: ১৬; য: বো: ০৯; কু: বো: ১৫, ১১, ০৮; সি: বো: ১৩]

(ii) $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin x}{(b+a)+(b-a)\cos x}$

(iii) $2\tan^{-1}\left[\tan\frac{A}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{\sin A\cos B}{\cos A + \sin B}\right)$

(iv) $2\tan^{-1}\{\text{cosec}(\tan^{-1}x) - \tan(\cot^{-1}x)\} = \tan^{-1}x$

[রা: বো: ১৫, ১১; দি: বো: ১০; কু: বো: ১৬; য: বো: ১২]

(v) $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1).\tan\alpha\} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$ [দি: বো: ১৩; চ: বো: ১০]

(vi) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = 0$ [য: বো: ০৫]

(vii) $\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2} + \tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2} = 0$

(viii) $\tan^{-1}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} + \tan^{-1}\frac{\beta-\gamma}{1+\beta\gamma} = \tan^{-1}\alpha - \tan^{-1}\gamma$

(ix) $\tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) = 2x$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

(x) $\cot^{-1}(\tan 2x) + \cot^{-1}(-\tan 3x) = x$ [ব: বো: ১১]

(xi) $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}) = \frac{\pi}{2}$

[ঢা: বো: ০৬; কু: বো: ১১; সি: বো: ১২; রা: বো: ০৯; য: বো: ১১; চ: বো: ১২, ০৮; দি: বো: ১৪; ব: বো: ১৩]

(xii) $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$ [চ: বো: ১৪, ০৯; কু: বো: ০৭; রা: বো: ০৬; ব: বো: ০৫]

(xiii) $\tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\} = \frac{2x}{1-x^2}$

(xiv) $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$ [ব: বো: ১৫; রা: বো: ১৩]

(xv) $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

(xvi) $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ [বুয়েটেক্স ০৮-০৯; কু: বো: ১৪, ০৮]

(xvii) $\tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})\tan x\} + \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})\tan x\} = \tan^{-1}\{2\tan(2x)\}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল ৪(খ)]

Type-V

5. দেখাও যে,

(i) $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ [ঢা: বো: ১২]

(ii) $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x = x$ [বুয়েট ০৫-০৬; কুয়েট ১৩-১৪; সি:বো: ০৬; য: বো: ১২; মাদ্রাসা: বো: ১৪, ১০]

(iii) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x = x$ [সি: বো: ০৯; রা: বো: ১৬; ব: বো: ১১; দি: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১৫]

(iv) $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

[কুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ১০; য: বো: ০৯; দি: বো: ০৯; চ: বো: ১২; ব: বো: ১৪; সি: বো: ১৪, ০৫]

6. (i) $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}$ এর মুখ্য মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

(ii) $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{17} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5}$ এর মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

(iv) $\tan^{-1}4$ ও $\tan^{-1}\frac{5}{3}$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৪(ক)]

Type-VI

7. (i) যদি $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = xyz$ [ব: বো: ০৬]

(ii) যদি $\tan^{-1}a + \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c} = \pi$ হয়, তবে দেখাও যে, $a+b+c = abc$ [চ: বো: ১১]

(iii) যদি $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{a-b}{1+ab}$

[চুয়েট ১১-১২; য: বো: ০৫; দি: বো: ১১]

(iv) যদি $A + B + C = \pi$, $\tan^{-1}2 = A$ এবং $\tan^{-1}3 = B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $C = \frac{\pi}{4}$

[ঢা: বো: ০৮; চ: বো: ১৬, ১৩, ০৭; ব: বো: ০৭]

(v) যদি $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ [কু: বো: ১০]

(vi) যদি $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$

(vii) যদি $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$ [য: বো: ১৪]

(viii) যদি $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ [কু: বো: ১৬, ১২]

(ix) যদি $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

[ঢা: বো: ১০; রা: বো: ১০; ব: বো: ১৫; দি: বো: ১২; সি: বো: ১০; কু: বো: ১৩; য: বো: ১৫, ০৬]

(x) যদি $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
[য: বো: ১৬; ব: বো: ১৪]

(xi) যদি $\sec(\pi\text{cosec}\theta) = \text{cosec}(\pi\sec\theta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}(8 \pm 4\sqrt{5})$

(xii) $\sec\theta - \text{cosec}\theta = \frac{4}{3}$ হলে, দেখাও যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

(xiii) $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \theta$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\theta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$. [রা: বো:, ব: বো: ১৪]

(xiv) $\cot^{-1}y - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(খ)]

(xv) $\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(খ)]

(xvi) $\sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b} = \alpha$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$
[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৪(গ)]

Type-VII

8. **সমাধান কর:**

(i) $\tan^{-1}(x+2) + \tan^{-1}(x-2) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

(ii) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}x + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}3x$ [সি: বো: ০৬]

(iii) $\tan\cos^{-1}x = \sin\cot^{-1}\frac{1}{2}$

(iv) $\sin^{-1}x - \cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

(v) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$ [বুয়েট: ০৬; ০৭]

(vi) $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ [বুয়েট: ১০-১১] **(vii)** $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$ [বুয়েট ১২-১৩]

9. নিম্নোক্ত ত্রিকোণমিতিক অভেদগুলি প্রমাণ কর এবং মুখ্যসীমার প্রভাব আলোচনা কর:

(i) $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = \frac{3\pi}{4}$ **(ii)** $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}5 + \tan^{-1}8 = \frac{5\pi}{4}$

(iii) $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{56}{65} = \pi$ **(iv)** $2\sin^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{120}{169} = \pi$

Type-VIII

10. দেখাও যে,

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{x\cos\theta}{1 - x\sin\theta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x - \sin\theta}{\cos\theta}\right) = \theta$

(ii) $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$

উত্তরমালা

6. **(i)** $\frac{\pi}{3}$ **(ii)** $30°$ **(iii)** $\tan^{-1}\frac{9}{19}$ **(iv)** $\frac{3\pi}{4}$

8. **(i)** 1, –5 **(ii)** $0, \pm\frac{1}{2}$ **(iii)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **(iv)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(v)** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(vi)** $\sqrt{3}$ **(vii)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

পাঠ-৭ ও ৮

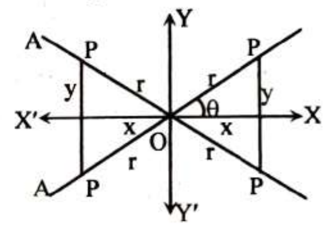
7.3 ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান
(General solution of trigonometric equations)

এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বলিত সমীকরণকে ত্রিকোণমিতিক **সমীকরণ** বলে। সমীকরণটির সংশ্লিষ্ট কোণকেই চলরাশি বলা হয়। চলরাশির (কোণের) যে সকল মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, সে সকল মানকে সমীকরণটির **সমাধান** বলা হয়। সকল সমাধানকে অভিন্ন রাশিমালাতে প্রকাশ করা হলে তাকে **সাধারণ সমাধান** বলে। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে উৎপাদকে প্রকাশ করে যে সকল সহজ সমীকরণ পাওয়া যায় তাদেরকে মূল সমীকরণের প্রতীক সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ: $\tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। সমীকরণটিকে উৎপাদক করলে পাওয়া যায় $(\tan\theta - 1)(\tan\theta - 1) = 0$ এখানে প্রতীক সমীকরণ $\tan\theta - 1 = 0$

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের একাধিক প্রতীক সমীকরণ থাকতে পারে। সেক্ষেত্রে যেকোনো একটি প্রতীক সমীকরণের সাধারণ সমাধান মূল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নয়। সকল প্রতীক সমীকরণের সাধারণ সমাধানই একত্রে মূল সমীকরণের সাধারণ সমাধান। এ অধ্যায়ে আমরা ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় শিখব।

7.3.1 আদর্শ আকারের ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান
(General solution of trigonometric equations of standard form)



(i) $\sin\theta = 0$ হলে, θ কোণ উৎপন্নকারী রেখার যেকোনো বিন্দু হতে আদিরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য শূন্য হবে। অর্থাৎ θ কোণ উৎপন্নকারী বাহুদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করে। অর্থাৎ OP, OX বা OX′ এর সাথে মিশে যাবে। ফলে এরূপ কোণের মান শূন্য অথবা π কোণের জোড় বা বিজোড় গুণিতক হবে।

সুতরাং $\sin\theta = 0$ হলে $\theta = n\pi$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

(ii) $\cos\theta = 0$ হলে, θ কোণ উৎপন্নকারী রেখা বা বাহুর যেকোনো বিন্দু আদিরেখা বা বাহুর ওপর লম্ব হবে। অর্থাৎ প্রান্তীয় রেখা OP, y-অক্ষের ওপর সমাপতিত হবে। এক্ষেত্রে কোণটির মান $\frac{\pi}{2}$ অথবা $\frac{3\pi}{2}$ হবে। সুতরাং $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক কোণের cosine এর মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

(iii) $\tan\theta = 0$ হলে, অর্থাৎ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$ বা, $\sin\theta = 0$

সুতরাং $\tan\theta = 0$ ও $\sin\theta = 0$ উভয় ক্ষেত্রে $\theta = n\pi$, যখন n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

অনুরূপভাবে, $\cot\theta = 0$ হলে $\cos\theta = 0$। সুতরাং $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

(iv) $\sin\theta = k \; (-1 \le k \le 1)$ হলে,

মনে করি, $\sin\theta = k = \sin\alpha$, যেখানে α হচ্ছে সূক্ষ্মকোণ।

$$\Rightarrow \sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0 \Rightarrow 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ অথবা, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ | $\Rightarrow \frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$

$\Rightarrow \theta + \alpha = (2m+1)\pi$ | $\Rightarrow \theta - \alpha = 2m\pi$

$\Rightarrow \theta = (2m+1)\pi - \alpha$ | $\Rightarrow \theta = 2m\pi + \alpha$

$\Rightarrow \theta = (2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha$ | $\Rightarrow \theta = 2m\pi + (-1)^{2m}\alpha$

সুতরাং $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

দ্রষ্টব্য: $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

(v) $\cos\theta = k\ (-1 \le k \le 1)$ হলে,

মনে করি, $\cos\theta = k = \cos\alpha$, যেখানে α হচ্ছে সূক্ষ্মকোণ।

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha-\theta}{2} = 0$

$\Rightarrow \sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$ $\quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$\Rightarrow \sin\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0$ অথবা, $\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\theta+\alpha}{2} = m\pi$ $\qquad \Rightarrow \dfrac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$

$\Rightarrow \theta + \alpha = 2m\pi$ $\qquad \Rightarrow \theta - \alpha = 2m\pi$

$\Rightarrow \theta = 2m\pi - \alpha$ $\qquad \Rightarrow \theta = 2m\pi + \alpha$

$\therefore$ সুতরাং $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

দ্রষ্টব্য: $\sec\theta = \sec\alpha$ হলে $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.

(vi) $\tan\theta = k$ হলে,

মনে করি, $\tan\theta = k = \tan\alpha$ যেখানে α হচ্ছে সূক্ষ্মকোণ।

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \tan\theta - \tan\alpha = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\cos\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0 \Rightarrow \sec\theta\sec\alpha\sin(\theta-\alpha) = 0$

$\Rightarrow \sin(\theta-\alpha) = 0$, কেননা $\sec\theta$ বা $\sec\alpha$ এর মান শূন্য হতে পারে না।

$\Rightarrow \theta - \alpha = n\pi \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$

সুতরাং, $\theta = n\pi + \alpha$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

দ্রষ্টব্য: $\cot\theta = \cot\alpha$ হলে $\theta = n\pi + \alpha$.

(vii) $\sin\theta = 1$ হলে, অর্থাৎ, $\sin\theta = 1 = \sin\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = m\pi + (-1)^m\dfrac{\pi}{2}$, যেখানে m যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

m জোড় সংখ্যা হলে, $m = 2n$, $\therefore \theta = 2n\pi + (-1)^{2n}\dfrac{\pi}{2} = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$

m বিজোড় সংখ্যা হলে, $m = 2n+1$, $\therefore \theta = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1}\dfrac{\pi}{2} = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$

সুতরাং, $\theta = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

(viii) $\sin\theta = -1$ হলে, অর্থাৎ $\sin\theta = -1 = -\sin\dfrac{\pi}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \theta = m\pi + (-1)^m\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = m\pi - (-1)^m\dfrac{\pi}{2}$

m জোড় সংখ্যা হলে, $m = 2n$ $\quad \therefore \theta = 2n\pi - (-1)^{2n}\dfrac{\pi}{2} = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2} = (4n-1)\dfrac{\pi}{2}$

m বিজোড় সংখ্যা হলে, $m = 2n - 1$

$\therefore \quad \theta = (2n-1)\pi - (-1)^{2n+1}\dfrac{\pi}{2} = 2n\pi - \pi + \dfrac{\pi}{2} = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2} = (4n-1)\dfrac{\pi}{2}$

সুতরাং $\theta = (4n-1)\dfrac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

(ix) $\cos\theta = 1$ হলে, অর্থাৎ $\cos\theta = 1 = \cos 0$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm 0 = 2n\pi$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

(x) $\cos\theta = -1$ হলে,

অর্থাৎ $\cos\theta = -1 = \cos\pi \therefore \theta = 2n\pi \pm \pi = (2n \pm 1)\pi$

$(2n+1)$ ও $(2n-1)$ উভয়ই বিজোড় সংখ্যা প্রকাশ করে বিধায় মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে।

সুতরাং বিয়োগ চিহ্ন বাদ দিয়ে পাই, $\theta = (2n+1)\pi$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

7.3.2 ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের অবান্তর মূল (Extraneous roots of trigonometric equations)

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় সমাধান করা হয় এবং বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে প্রাপ্ত মূলগুলি দৃশ্যত ভিন্ন আকারের হলেও তারা সমতুল্য। কিছু কিছু সমীকরণকে বর্গ করে সমাধান নির্ণয় করা যায়। এ প্রক্রিয়া কিছুটা ত্রুটিপূর্ণ বলে প্রাপ্ত মূলগুলির কোনো কোনোটি প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এরূপ মূলকে অবান্তর মূল বলে। সুতরাং প্রকৃত মূল নির্ণয় করার জন্য প্রাপ্ত মূলগুলি দিয়ে প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় কিনা তা পরীক্ষা করা দরকার।

উদাহরণ: $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

$\Rightarrow (\sqrt{3}\sin\theta)^2 = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2 \Rightarrow 3\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

$\Rightarrow 3(1 - \cos^2\theta) - 2 + 2\sqrt{2}\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-(-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4.4(-1)}}{2.4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos 15° = \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

আবার, $\cos\theta = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = -\sin 15° = \cos(90° + 15°) = \cos\dfrac{7\pi}{12} \therefore \theta = 2n\pi \pm \dfrac{7\pi}{12}$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{12} \text{ বা, } 2n\pi \pm \frac{7\pi}{12}$$

$\theta = 2n\pi - \dfrac{\pi}{12}$ বা, $2n\pi - \dfrac{7\pi}{12}$ বসিয়ে দেখা যায় যে, সমীকরণটি সিদ্ধ করে না। সমীকরণটি বর্গ করা হয়েছে বলে এই ভুল সমাধান বের হয়েছে। সেজন্য এরূপ সমীকরণ অর্থাৎ $a\cos x + b\sin x = c$ আকারের সমীকরণ সমাধানে উদাহরণমালার উদাহরণ-6 বা উদাহরণ-7 প্রক্রিয়া ব্যবহার করতে হবে।

7.4 নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান
(Solution of trigonometric equation in a finite interval)

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন পর্যায়বৃত্ত হওয়ায় এর মানগুলো পর্যায়ক্রমে আবর্তিত হয়। নির্দিষ্ট ব্যবধিতেও সমাধানের পুনরাবৃত্তি হয়। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান থেকে নির্দিষ্ট ব্যবধিতে অবস্থিত মানগুলি নির্ণয় করা যায়। আবার লেখচিত্রের সাহায্যে নির্দিষ্ট ব্যবধিতে সমীকরণের সমাধানগুলি নির্ণয় করা যায়। নিম্নে লেখের সাহায্যে সমাধান নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হলো:

(i) প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন (মুক্ত হস্তে) করতে হবে।

(ii) ফাংশনের নির্দেশিত স্থানে x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁকতে হবে।

(iii) সমান্তরাল রেখাটি ফাংশনকে যতবার ছেদ করবে ঠিক ততটি সমাধান বিদ্যমান থাকবে।

(iv) ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক প্রতিসমতা বা ফাংশনের পর্যায়কাল ব্যবহার করে নির্ণয় করতে হবে। অত:পর ছেদবিন্দুগুলির x স্থানাঙ্কই ফাংশনের সমাধান।

লেখচিত্রের সাহায্যে নির্দিষ্ট ব্যবধিতে সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের দুইটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

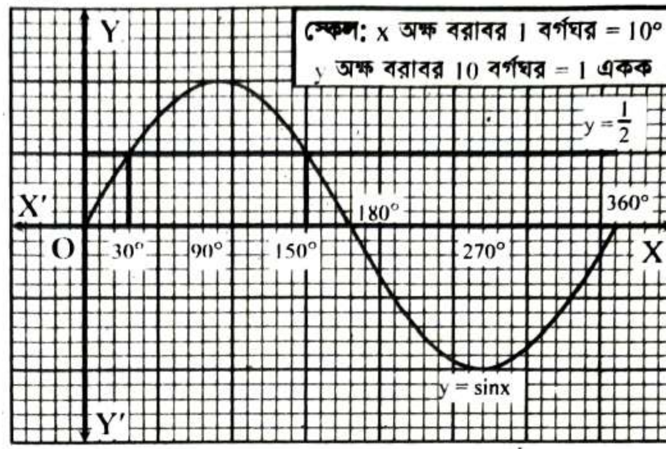
উদাহরণ-(a): $\sin x = \frac{1}{2}$ যখন $0 \le x \le 360°$ এর সমাধান লেখের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান: (i) $[0, 360°]$ ব্যবধিতে ফাংশনের লেখ অঙ্কন করি।

(ii) $\sin x = \frac{1}{2}$ নির্দেশিত স্থানে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা ফাংশনের লেখকে দুই বার ছেদ করে। সুতরাং দুইটি সমাধান বিদ্যমান।

(iii) প্রতিসমতা ব্যবহার করে পাই, বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(30°, \frac{1}{2})$ ও $(150°, \frac{1}{2})$

$\therefore$ প্রদত্ত ব্যবধিতে $\sin x = \frac{1}{2}$ ফাংশনের সমাধান $x = 30°, 150°$

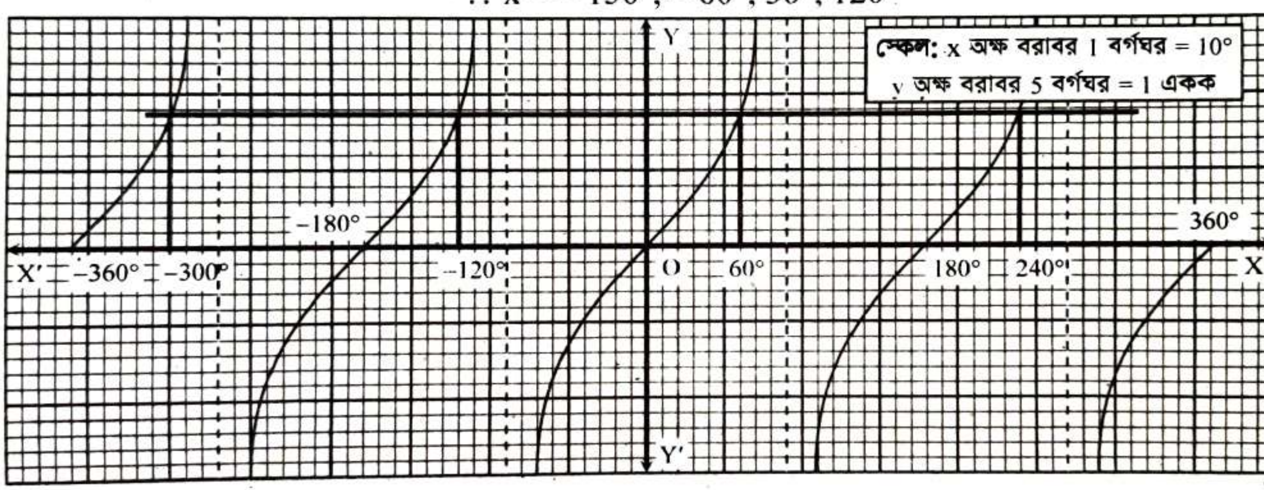


উদাহরণ-(b): লেখের সাহায্যে $\tan 2x = \sqrt{3}$; $-180° \le x \le 180°$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $u = 2x$ হলে আমরা পাই, $\tan u = \sqrt{3}$; $-360° \le u \le 360°$

লেখচিত্র হতে প্রতিসমতা ব্যবহার করে পাই, $u = -300°, -120°, 60°, 240°$

$\therefore x = -150°, -60°, 30°, 120°$



কাজ: নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সকল সমাধান নির্ণয় কর।

(i) $\tan 2x = 1;\ 0 \le x \le \pi$ **(ii)** $\sin 2x = -1;\ -\pi < x < \pi$

(iii) $\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}};\ -\pi < x < \pi$ **(iv)** $\tan\frac{1}{2}x = -1;\ -2\pi < x < 0$

(v) $3\tan^2 x - 2 = 5\sec^2 x - 9;\ 0 < x < 2\pi$ **(vi)** $3\cos^2 x - 6\cos x = \sin^2 x - 3;\ -\pi < x < \pi$

পাঠ-৯

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. সমাধান কর: $4(\sin^2 x + \cos x) = 5$

সমাধান: $4(\sin^2 x + \cos x) = 5 \Rightarrow 4(1 - \cos^2 x + \cos x) = 5 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

সুতরাং $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণ-2. সমাধান কর: $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$; যখন $-2\pi \le \theta \le 2\pi$ [সি: বো: ১২; চ: বো: ১০; য: বো: ০৬]

সমাধান: $\sin\theta - 2 = \cos2\theta \Rightarrow \sin\theta - 2 = 1 - 2\sin^2\theta \Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3\sin\theta - 3 = 0 \Rightarrow 2\sin\theta(\sin\theta - 1) + 3(\sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow (\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta - 1 = 0$ [$\because 2\sin\theta + 3 \neq 0$, কেননা $\sin\theta$ এর মান -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।]

$\Rightarrow \sin\theta = 1$

$\therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{3\pi}{2}$; $n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$; $n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{2}$;

সুতরাং প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ : $\theta = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

উদাহরণ-3. সমাধান কর: $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$; যখন $0 < \theta < 180°$ [চুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ০৮; কু: বো: ১১]

সমাধান: $\sec4\theta - \sec2\theta = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos4\theta} - \frac{1}{\cos2\theta} = 2 \Rightarrow \frac{\cos2\theta - \cos4\theta}{\cos4\theta\cos2\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos2\theta - \cos4\theta = 2\cos4\theta\cos2\theta \Rightarrow \cos2\theta - \cos4\theta = \cos6\theta + \cos2\theta$

$\Rightarrow \cos6\theta + \cos4\theta = 0 \Rightarrow 2\cos5\theta\cos\theta = 0$

হয়, $\cos5\theta = 0$ অথবা, $\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}$ $\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

সুতরাং $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, (2n+1)\frac{\pi}{2}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = 18°, 90°$; $n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = 54°, 270°$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \theta = 90°, 450°$; $n = 3$ হলে, $\theta = \frac{7\pi}{10}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \theta = 126°, 630°$

$n = 4$ হলে, $\theta = \frac{9\pi}{10}, \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \theta = 162°, 810°$

সুতরাং প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ : $\theta = 18°, 54°, 90°, 126°, 162°$

উদাহরণ-4. সমাধান কর: $2\sin x \sin 3x = 1$; যখন $0 < x < 2\pi$

[ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ১০; সি: বো: ০৯, ০৬; দি: বো: ১২; ব: বো: ০৯, ০৭; চ: বো: ০৯, ০৭; য: বো: ১৬, ১৩, ০৮]

সমাধান: $2\sin x\sin3x = 1 \Rightarrow \cos2x - \cos4x = 1$

$\Rightarrow \cos2x - (1 + \cos4x) = 0 \Rightarrow \cos2x - 2\cos^2 2x = 0 \Rightarrow \cos2x(1 - 2\cos2x) = 0$

হয়, $\cos2x = 0$ অথবা, $1 - 2\cos2x = 0$

$\therefore 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \cos2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

সুতরাং $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, (2n+1)\frac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = \pm\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$; $n = 1$ হলে, $x = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$; $n = 3$ হলে, $x = \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ : $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

উদাহরণ-5. সমাধান কর : $\tan\theta + \tan2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan2\theta = \sqrt{3}$ [ব: বো: ০৯; য: বো: ০৬; রা: বো: ০৬; চ: বো: ১১, ০৯]

সমাধান: $\tan\theta + \tan2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan2\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta + \tan2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan\theta\tan2\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta + \tan2\theta}{1 - \tan\theta\tan2\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(\theta + 2\theta) = \sqrt{3} \Rightarrow \tan3\theta = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

সুতরাং, $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণ-6. সমাধান কর: $a\cos x + b\sin x = c$, যখন a, b, c এর মান ধ্রুব।

সমাধান: মনে করি, $a = r\cos\alpha$ এবং $b = r\sin\alpha$ তাহলে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\therefore \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এখন প্রদত্ত সমীকরণে a ও b এর মান বসিয়ে পাই,

$r\cos x\cos\alpha + r\sin x\sin\alpha = c \Rightarrow r(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha) = c.$

$\Rightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{r} \Rightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$ [ধরি, $\cos\beta = \frac{c}{r}$]

$\therefore x - \alpha = 2n\pi \pm \beta$

$\therefore x = 2n\pi + \alpha \pm \beta$; যখন n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

যেহেতু a, b, c এর মান দেওয়া আছে, সুতরাং α এবং β এর মান নির্ণয় করা যায়।

বি.দ্র. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ আকারের সমীকরণ সমাধান করতে উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করতে হয়।

উদাহরণ-7. সমাধান কর: $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(খ); ঢা: বো: ১৫, ০৭; চ: বো: ০৭; য: বো: ১২, ০৯; সি: বো: ১৬, ১৪, ০৬; রা: বো: ০৫; কু: বো: ০৬; ব: বো: ১৬, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১০]

সমাধান: ১ম পদ্ধতি: $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

$$\Rightarrow \cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3},\ 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

সুতরাং $\theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{12},\ 2n\pi + \frac{\pi}{12}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

২য় পদ্ধতি: $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

$$\Rightarrow \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} + \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$\therefore \theta + \frac{\pi}{6} = m\pi + (-1)^m\frac{\pi}{4}$ ...... (i)

m জোড় সংখ্যা হলে, ধরি, $m = 2n$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\theta + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{12}$

আবার, m বিজোড় সংখ্যা হলে, ধরি, $m = 2n + 1$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\theta + \frac{\pi}{6} = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$

সুতরাং $\theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{12},\ 2n\pi + \frac{\pi}{12}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণ-8. $\tan(\pi\cot\theta) = \cot(\pi\tan\theta)$ হলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{4}\{(2n+1) \pm \sqrt{4n^2+4n-15}\}$; যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$ এবং $n < -2$ এবং $n > 1$.

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan(\pi\cot\theta) = \cot(\pi\tan\theta)$

$$\Rightarrow \tan(\pi\cot\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \pi\tan\theta\right)$$

$$\Rightarrow \pi\cot\theta = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \pi\tan\theta\right)$$

$$\Rightarrow \pi\cot\theta + \pi\tan\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cot\theta + \tan\theta = n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta = \frac{2n+1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{(2n+1)}{2}.\tan\theta$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta - \left(\frac{2n+1}{2}\right)\tan\theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{2n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{2n+1}{2} \pm \sqrt{\frac{4n^2+4n+1-16}{4}}}{2}$$

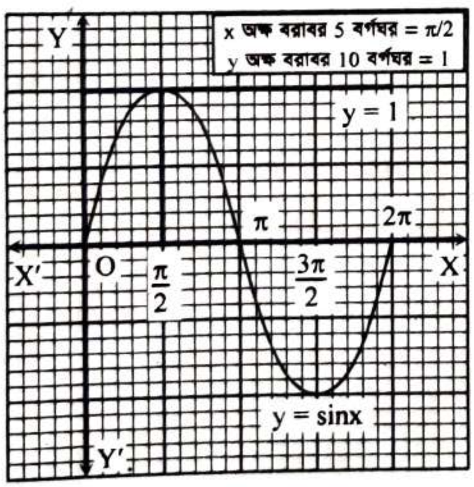
$\therefore \tan\theta = \frac{1}{4}\{(2n+1) \pm \sqrt{4n^2+4n-15}\}$ **(দেখানো হলো)**

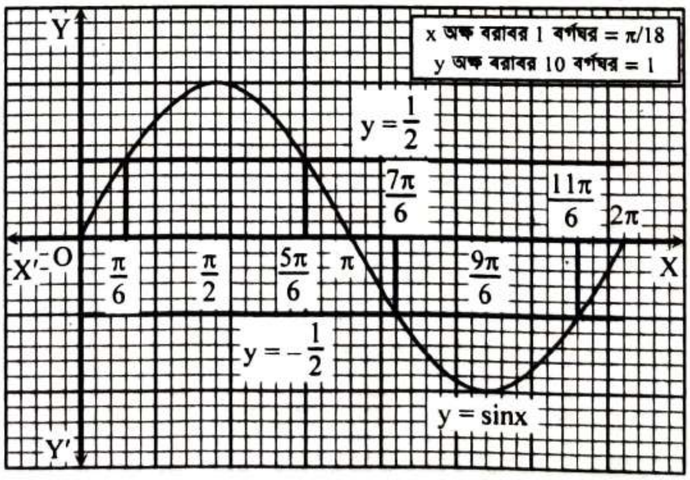
উদাহরণ-9. লেখচিত্রের সাহায্যে $2\cos^2x + \sin x = 1$; $0 \le x \le 2\pi$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধান: $2\cos^2x + \sin x = 1$

বা, $2 - 2\sin^2x + \sin x = 1$ বা, $2\sin^2x - \sin x - 1 = 0$

বা, $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ $\therefore \sin x = 1$ অথবা $\sin x = -\frac{1}{2}$



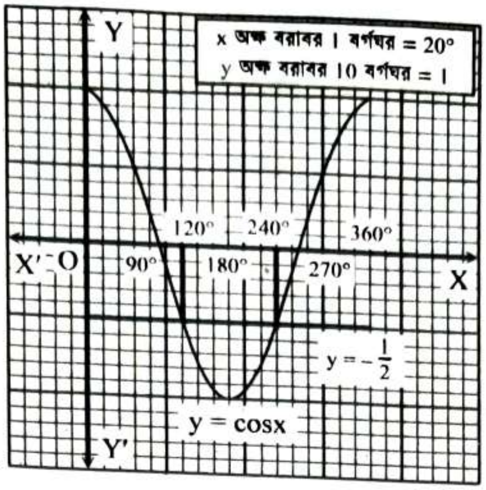


১ম লেখচিত্র হতে পাই, $x = \frac{\pi}{2}$

২য় লেখচিত্র হতে পাই, $x = \pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

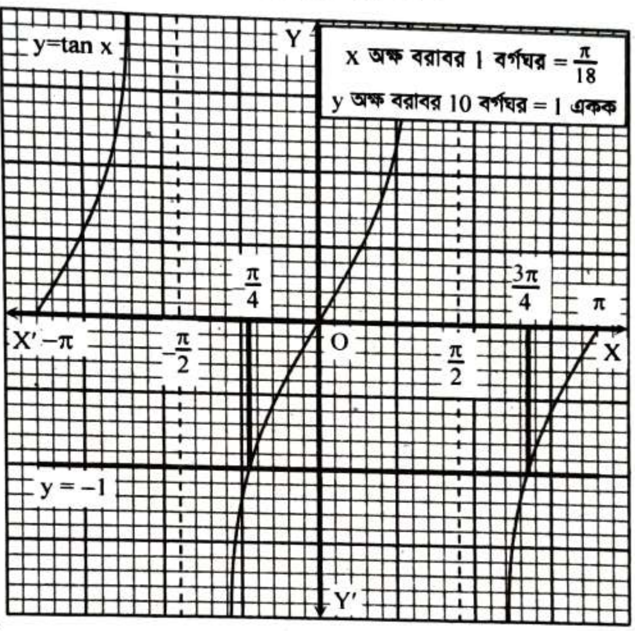
উদাহরণ-10. লেখচিত্রের সাহায্যে $\cos x = -\frac{1}{2}$; $0 \le x \le 360°$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

$\therefore$ সমাধানগুলি হলো $x = 120°, 240°$



উদাহরণ-11. লেখচিত্রের সাহায্যে $\tan x = -1$; $-\pi \le x \le \pi$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

সমাধানগুলি হলো $x = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$



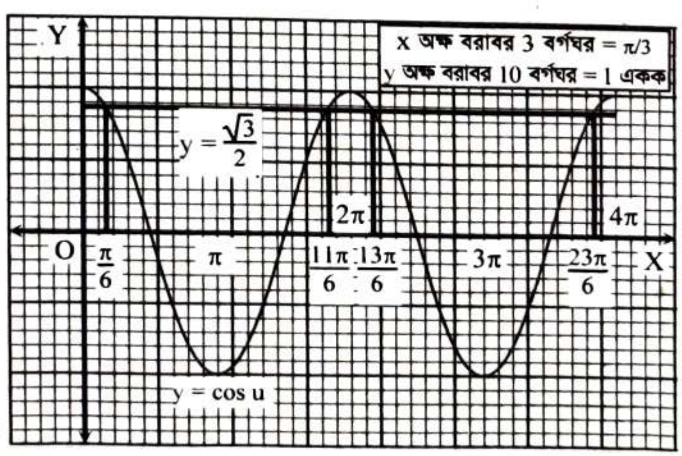
উদাহরণ-12. লেখচিত্রের সাহায্যে $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $0 \le x \le 2\pi$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

$u = 2x$ হলে, আমরা পাই, $\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $0 \le u \le 4\pi$

$u = \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi - \frac{\pi}{6}$

বা, $u = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$

$\therefore$ সমাধানগুলি হলো $x = \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$



উদাহরণ-13. $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \sin^{-1} x$

ক. $f(x)$ এর পর্যায়কাল ও $g(x)$ এর মুখ্যমান কত?

খ. প্রমাণ কর যে, $g\left(\sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + g(\sqrt{f(2\theta)}) = \frac{\pi}{2}$

গ. $4f(x)f(2x)f(3x) = 1$ হলে $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

আমরা জানি, $\cos x$ ফাংশন পর্যায়ী এবং এর পর্যায়কাল 2π। $\therefore f(x)$ এর পর্যায়কাল 2π।

$g(x) = \sin^{-1}x$

$\sin x$ ফাংশন $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে এক-এক।

$\therefore$ বিপরীত সাইন ফাংশন $\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমানের ব্যবধি $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$।

$\therefore$ $g(x)$ এর মুখ্যমানের ব্যবধি $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \sin^{-1}x$

বামপক্ষ $= g\left(\sqrt{2}\, f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + g\left(\sqrt{f(2\theta)}\right)$

$= g\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + g\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)$

$= g(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}\sqrt{\cos 2\theta} = \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1 - \cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta \times \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{\cos 2\theta}\right\} = \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + \cos 2\theta\}$

$= \sin^{-1}(2\sin^2\theta + 1 - 2\sin^2\theta) = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2} =$ ডানপক্ষ

$\therefore g\left(\sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + g\left(\sqrt{f(2\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}$

গ. দেওয়া আছে, $4f(x)\, f(2x) f(3x) = 1$

বা, $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1;\ 0 < x < \pi$

বা, $(2\cos 3x \cos x)(2\cos 2x) = 1$

বা, $(\cos 4x + \cos 2x)(2\cos 2x) = 1$

বা, $2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

বা, $2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$

বা, $\cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

হয়, $\cos 4x = 0$ বা, $4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\cos 2x + 1 = 0$

বা, $2\cos 2x = -1$ বা, $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ $\therefore x = \left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right), \left(n\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

যেখানে, n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n = 0, x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

$n = 1, x = \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$n = 2, x = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$n = 3, x = \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর মানসমূহ: $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

উদাহরণ-14. দুইটি আতসবাজি বিস্ফোরণের ফলে $y_1 = a\cos x_1$ এবং $y_2 = b\cos x_2$ পরিবর্তনশীল সরণ বিশিষ্ট দুইটি শব্দ তরঙ্গ উৎপন্ন হয়। উপরিপাতনের ফলে তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত তরঙ্গের সরণ হল $y = y_1 + y_2$। এখানে y হল তরঙ্গের সরণ এবং x হল সময়।

ক. $x_1 = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ হলে y_1 নির্ণয় কর।

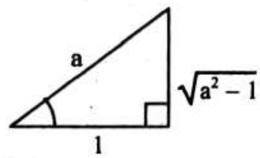
খ. $a = b = 1$ এবং $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$ হলে, কত সময় পরে মিলিত তরঙ্গের সরণ $\sqrt{2}$ একক হবে।

গ. $x_1 + x_2 = \theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{2y_1y_2\cos\theta}{ab} + \frac{y_2^2}{b^2} = \sin^2\theta$.

সমাধান: ক. দেওয়া আছে, $y_1 = a\cos x_1 = a\cos\operatorname{cosec}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ $\left[\because x_1 = \operatorname{cosec}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right]$

$= a\cos\cos^{-1}\frac{1}{a}$ [চিত্র হতে]

$= a.\frac{1}{a} = 1$



খ. দেওয়া আছে, তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত তরঙ্গের সরণ, $y = y_1 + y_2$

প্রশ্নমতে, $y = \sqrt{2}$

বা, $y_1 + y_2 = \sqrt{2}$

বা, $a\cos x_1 + b\cos x_2 = \sqrt{2}$

বা, $a\cos x_1 + b\cos\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = \sqrt{2}$ $\left[\because x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}\right]$

বা, $\cos x_1 + \sin x_1 = \sqrt{2}$ $[\because a = b = 1]$

বা, $(\cos x_1)\frac{1}{\sqrt{2}} + (\sin x_1)\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ [উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos x_1 \cos\frac{\pi}{4} + \sin x_1 \sin\frac{\pi}{4} = 1$ বা, $\cos\left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 0$

বা, $x_1 - \frac{\pi}{4} = 0$ $\therefore x_1 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ প্রথম তরঙ্গ উৎপন্নের পর $\frac{\pi}{4}$ সময় অতিক্রান্ত হলে তরঙ্গদ্বয় মিলিত হবে।

গ. দেওয়া আছে, $y_1 = a\cos x_1$ বা, $\cos x_1 = \frac{y_1}{a}$ $\therefore x_1 = \cos^{-1}\frac{y_1}{a}$

এবং $y_2 = b\cos x_2$ বা, $\cos x_2 = \frac{y_2}{b}$ $\therefore x_2 = \cos^{-1}\frac{y_2}{b}$

আবার, দেওয়া আছে, $x_1 + x_2 = \theta$

বা, $\cos^{-1}\frac{y_1}{a} + \cos^{-1}\frac{y_2}{b} = \theta$ বা, $\cos^{-1}\left\{\frac{y_1}{a}\cdot\frac{y_2}{b} - \sqrt{\left(1-\frac{y_1^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y_2^2}{b^2}\right)}\right\} = \theta$

বা, $\frac{y_1y_2}{ab} - \sqrt{\left(1-\frac{y_1^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y_2^2}{b^2}\right)} = \cos\theta$ বা, $\frac{y_1y_2}{ab} - \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_1^2y_2^2}{a^2b^2}}$

বা, $\left(\frac{y_1y_2}{ab} - \cos\theta\right)^2 = 1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_1^2y_2^2}{a^2b^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{y_1^2y_2^2}{a^2b^2} - 2\frac{y_1y_2}{ab}\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_1^2y_2^2}{a^2b^2}$

বা, $\frac{y_1^2}{a^2} - 2\frac{y_1y_2\cos\theta}{ab} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta$ $\therefore \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{2y_1y_2\cos\theta}{ab} + \frac{y_2^2}{b^2} = \sin^2\theta$

পাঠ-১০, ১১ ও ১২

অনুশীলনী-7(B)

Type-I

1. **সমাধান কর:**

(i) $\tan^2x + \sec^2x = 3$

(ii) $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$

(iii) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$ [কু: বো: ১২; দি: বো: ০৯]

(iv) $\tan^2x = 3\ \text{cosec}^2x - 1$ [কুয়েট ০৩-০৪]

(v) $\sec^2\theta + 3\text{cosec}^2\theta = 8$

(vi) $\tan^2x + \cot^2x = 2$ [ব: বো: ০৭]

(vii) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta = 0$

(viii) $6\cos^2x + \sin x = 5$

(ix) $\sqrt{3}\cot^2x + 4\cot x + \sqrt{3} = 0$

(x) $\tan^2\theta - 2\sqrt{3}\sec\theta + 4 = 0$ [চুয়েট ১১-১২; কু: বো: ০৫; রা: বো: ১৪]

(xi) $\cot 2\theta - \cot 4\theta = \sqrt{2}$

(xii) $3\tan\theta + \cot\theta = 5\text{cosec}\theta$ [রা: বো: ১৩]

(xiii) $4\sin^2x + \sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})\sin x$

(xiv) $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$ [চুয়েট ০৫-০৬]

(xv) $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$ [কু: বো: ১০, ০৯; সি: বো: ১১]

(xvi) $2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2$ (xvii) $\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \tan\theta = 2$ [সি: বো: ১৩]

(xviii) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta}$

(xix) $\cos^3\theta\sin 3\theta + \sin^3\theta\cos 3\theta = \dfrac{3}{4}$ (xx) $\cot 2x = \cos x + \sin x$ [কু: বো: ১১]

(xxi) $2\sin 2x + 3\cos x = 0$

(xxii) $2\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ)]

(xxiii) $2\cos^2x + \cos^2 2x = 2$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ)]

(xxiv) $1 + \sin^2x - 2\cos^2x + 3\cos x = 3 - \cos^2x$.

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৪(গ)]

Type-II

2. **নির্দিষ্ট ব্যবধিতে সমাধান কর:**

(i) $4(\cos^2x + \sin x) = 5$ যখন $0 < x < 2\pi$

(ii) $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$ [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৪(গ); রা: বো:, ব: বো: ১০; দি: বো: ১২; সি: বো: ১০, ০৭; চ: বো: ১১]

(iii) $2\sin^2x - 5\cos x + 1 = 0$ যখন $0° < x < 360°$

(iv) $2\sin^2x = 3\cos x$, যখন $0 < x < 2\pi$ [য: বো: ০৯]

(v) $3\tan^2x - 4\sqrt{3}\sec x + 7 = 0$, যখন $0° < x < 360°$

(vi) $\tan^2x + \sec^2x = 3\tan x$ যখন $0 \le x \le 2\pi$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ)]

(vii) $\sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}$, যখন $0 < x < 2\pi$ [বুয়েটেক্স ০৫-০৬; কু: বো: ১৫; ব: বো: ১৩]

(viii) $\cot\theta - \tan\theta = 2$, যখন $0 \le \theta \le \pi$

(ix) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$ [ঢা: বো: ১৫, ১০; ব: বো: ১৫, ০৮; সি: বো: ১৬, ১৫, ১২; চ: বো: ১৩, য: বো: ১২; রা: বো: ০৭; দি: বো; ১১; কু: বো: ১৪, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১২]

(x) $1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = (1 + \sqrt{3})\tan\theta$, যখন $0° < \theta < 360°$ [য: বো: ০৫; ব: বো: ১৪]

(xi) $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta$, যখন $0° < \theta < 180°$ [সি: বো: ১৩]

Type-III

3. **সমাধান কর:**

(i) $\tan2\theta\tan\theta = 1$ [বুয়েট ০৬-০৭; বুয়েট ১৩-১৪; কুয়েট ১৩-১৪; ঢা: বো: ১১, ০৮; চ: বো: ১৫; রা: বো: ০৯; ব: বো: ১২, ১০, ০৫; সি: বো: ০৫; কু: বো: ১০, ০৭; য: বো: ১০]

(ii) $\tan3\theta\tan\theta = 1$ [মাদ্রাসা বো: ১৫]

(iii) $\tan\theta + \tan3\theta = 0$ [রা: বো: ০৫]

(iv) $\tan x + \tan 2x + \tan x\tan2x = 1$ [ঢা: বো: ০৯; ব: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১২]

(v) $\sqrt{3}(\tan x + \tan2x) + \tan x\tan2x = 1$ [রা: বো: ১১; চ: বো: ১৩; দি: বো: ১৩; সি: বো: ১৪, ০৭; য: বো: ১১]

(vi) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$ [ব: বো: ১১]

(vii) $\tan\theta + \tan2\theta + \tan3\theta = \tan\theta\tan2\theta\tan3\theta$ [য: বো: ১৫]

(viii) $\cot\theta + \cot2\theta + \cot3\theta = \cot\theta\cot2\theta\cot3\theta$ [বুয়েট ১৪-১৫]

Type-IV

4. **সমাধান কর:**

(i) $\cos7\theta = \cos3\theta + \sin5\theta$ [চ: বো: ০৫; ব: বো: ০৭]

(ii) $\cos\theta - \cos7\theta = \sin4\theta$ [বুটেক্স ০২-০৩; ঢা: বো: ১৪, ১০, ০৩; চ: বো: ১৪; য: বো: ০৮; দি: বো: ০৯; ব: বো: ১১; কু: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

(iii) $\cos\theta - \cos9\theta = \sin5\theta$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ)]

(iv) $\sqrt{2}\cos3\theta - \cos\theta = \cos5\theta$ [সি: বো: ১০; য: বো: ১৩; কু: বো:, চ: বো: ০৮]

(v) $\sin7\theta - \sqrt{3}\cos4\theta = \sin\theta$ [ঢা: বো: ১৬; দি: বো: ১০; য: বো: ০৫]

(vi) $\sin x + \sin2x + \sin3x = 0$ [রা: বো: ০৭; ব: বো: ১৩]

(vii) $\cos x + \cos2x + \cos3x = 0$ [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬; কু: বো: ১৩]

(viii) $\cos7x = \cos3x + \sin5x$, যখন $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(ix) $\cos2x + \cos x + 1 = 0$, যখন $0° < x < 360°$

Type-V

5. **সমাধান কর:**

(i) $\cos x + \sin x = \cos2x + \sin2x$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ); ঢা: বো: ১৩, ০৬; চ: বো: ১২, ০৬; সি: বো: ১৫, ০৫; কু: বো: ১৪, ০৫; য: বো: ১৪, ১১, ০৭; রা: বো: ১২, ০৮; দি: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৩, ০৯]

(ii) $\cos6x + \cos4x = \sin3x + \sin x$. [রা: বো: ১৪; কু: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১০]

(iii) $\sin\theta + \sin2\theta + \sin3\theta = 1 + \cos\theta + \cos2\theta$ [বুয়েট ০৮-০৯; চ: বো: ০৮]

(iv) $\cos\theta + \cos3\theta + \cos5\theta + \cos7\theta = 0$

(v) $\sin3\theta + \sin5\theta + \sin7\theta + \sin9\theta = 0$

(vi) $4\cos x\cos2x\cos3x = 1$, যখন $0 < x < \pi$ [চুয়েট ০৮-০৯; কুয়েট ০৬-০৭; ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ১৫, ১২, ০৯; দি: বো; ১৬, ১৪, ১১; চ: বো: ১৪, ০৬; ব: বো: ১৬; কু: বো: ১২; সি: বো: ১১, ০৮; মাদ্রাসা: বো: ১৪]

(vii) $\cos9x\cos7x = \cos5x\cos3x$, যখন $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ [ঢা: বো: ১২; চ: বো: ১৬]

(viii) $h(x) = \sin x$ হলে, $0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta) . h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল ৪(গ)]

Type-VI

6. সমাধান কর:

(i) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ); বিআইটি ০১-০২; ব: বো: ১২, ০৫; কু: বো: ১৫]

(ii) $\cos\theta + \sin\theta = 1$ [ঢা: বো: ০৫; সি: বো: ০৯; চ: বো: ১০; দি: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(iii) $\cos\theta - \sin\theta = 1$ [ঢা: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(iv) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$ (v) $\cos\theta + 2\sin\theta = 1$

(vi) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, যখন $-\pi < \theta < \pi$ [কু: বো: ১৩, ০৯; দি: বো: ১৩; মাদ্রাসা বো: ১১]

(vii) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$, যখন $-\pi < \theta < \pi$ [বুয়েট ০২-০৩; বুয়েট ০৪-০৫; চুয়েট ১০-১১; বুটেক্স ০১-০২; চ: বো: ১৪; দি: বো: ১০; ব: বো: ০৬]

(viii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৪(গ); বুয়েট ০৭-০৮; কুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১৬, ১৩, ০৯, ০৬; চ: বো: ১২, ০৫; ব: বো: ১৫; রা: বো: ১১, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৩]

(ix) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$, যখন $-2\pi < x < 2\pi$ [ঢা: বো: ১১; য: বো: ১৪, ১০, ০৭; দি: বো: ১৫; কু: বো:, সি: বো: ০৮; রা: বো: ১৩, ০৬; ব: বো: ১৪]

(x) $\cos^3\theta - \cos\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 1$

(xi) $\sin\sqrt{2}x - \cos\frac{x}{2} = 0$ হলে x এর সমাধানের জন্য সাধারণ রাশিমালা বের কর। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল ৪(খ)]

Type-VII

7. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

(i) $\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ 0 \le x < 2\pi$ (ii) $\cos\theta + \cos3\theta + \cos5\theta + \cos7\theta = 0,\ 0 < \theta < \pi$

(iii) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\pi < \theta < \pi$ (iv) $\sin4\theta = \cos3\theta + \sin2\theta,\ 0 < \theta < \pi$

8. (i) $\frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = 4$ [বুয়েট ০৬-০৭]

(ii) $\sin 3x \sin x = \cos 2x + \frac{1}{2}$

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ এর মান কত?

ক. 1 খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin^{-1}y + \cos^{-1}y = ?$

ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{6}$ ঘ. $\frac{\pi}{4}$

3. $\sin\theta = -1$ হলে $\theta = ?$

ক. $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ খ. $2n\pi$ গ. $(4n-1)\frac{\pi}{2}$ ঘ. $(2n-1)\frac{\pi}{2}$

4. $\cot^{-1}x$ এর রেঞ্জ কত?

ক. $[0, \pi]$ খ. $(0, \pi)$ গ. $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ঘ. $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

5. $\sec^{-1}x + \_\_\_\_ = \frac{\pi}{2}$, শূন্যস্থানে কী বসবে?

ক. $\cot^{-1}x$ খ. $\tan^{-1}x$ গ. $\text{cosec}^{-1}x$ ঘ. $\cos^{-1}x$

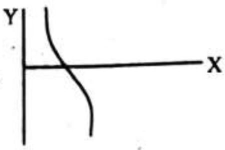
6. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্য মান কত?

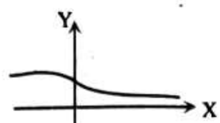
ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. $\frac{2\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{3}$ ঘ. $\frac{-2\pi}{3}$

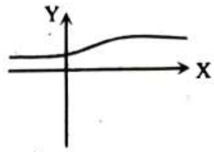
7. $y = \tan^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা—

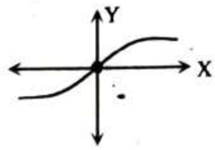
ক. $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ খ. $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ গ. $0 \leq x \leq \pi$ ঘ. $-\pi \leq x \leq \pi$

8. $y = \cot^{-1}x$ এর লেখচিত্র নিচের কোনটি?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

9. $3\sin^{-1}x = 2\sin^{-1}y$ সমীকরণে $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে y এর মান কোনটি?

ক. 0 খ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 1

10. $\sin^{-1}\cos\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{5}{2}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি?

ক. $\frac{1}{5}$ খ. $\frac{-1}{5}$ গ. $\frac{-2}{5}$ ঘ. $\frac{3}{5}$

11. $2\tan^2x - y\tan x + 1 = 0$ কোন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ হলে সংশ্লিষ্ট চলরাশি কোনটি?

ক. y খ. x গ. tanx ঘ. 0

12. $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণের কোন সমাধানটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত?

ক. 240° খ. 300° গ. 330° ঘ. 150°

13. কোন মানটি $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে?

ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}$

14. [0, 360°] ব্যবধিতে $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$ সমীকরণের সমাধান কোনটি?

ক. 45° খ. 60° গ. 135° ঘ. 300°

15. $n\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{nx}{1+x^n}$ হলে, n এর মান কত?

ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

16. $m\cos^{-1}x = \cos^{-1}\{(m+1)x^m - mx\}$ হলে m এর মান কত?

ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

17. $\text{cosec}^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) =$ কত?

ক. 2π খ. π গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. $\frac{\pi}{4}$

18. $\cos\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} =$ কত?

ক. $\sqrt{\frac{3}{7}}$ খ. $\sqrt{\frac{7}{3}}$ গ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ কে নিচের কোনটির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়?

ক. $\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2-1}}$ খ. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2-1}}$ গ. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2-1}}$ ঘ. $\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x^2-1}}$

20. $y = \sec^{-1}x$ এবং $x < 0$ হলে, ফাংশনটির মুখ্যমান কত?

ক. $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ খ. $0 < y \le \frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{-\pi}{2} \le y < 0$ ঘ. $\frac{\pi}{2} < y \le \pi$

21. $y = \tan^{-1}x$ এর রেঞ্জ কত?

ক. $(-\infty, \infty)$ খ. $(0, \pi)$ গ. $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ঘ. $(\pi, 0)$

22. $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\sqrt{7}$ খ. 5 গ. 12 ঘ. 25

23. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\left(A + \frac{9}{25}\right)$ হলে A এর মান কত?

ক. $\frac{3}{5}$ খ. $\frac{4}{5}$ গ. $\frac{9}{25}$ ঘ. $\frac{16}{25}$

24. $2\sin^3x = \cos x + \sin x$ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের চলরাশি কোনটি?

ক. sinx খ. cosx গ. x ঘ. θ

25. $\cos(2x) + \cos(4x) + \cos(8x) = -\frac{3}{2}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? যখন $0 < \theta < \pi$

ক. $\frac{3\pi}{2}$ খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{5\pi}{6}$ ঘ. $\frac{2\pi}{3}$

26. $\sin x. \sin 2x. \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ হলে x এর মান কোনটি?

ক. 30° খ. 60° গ. 75° ঘ. 90°

27. $4\cos^3x - 3\sin^2x - 5\cos x = -\frac{1}{4}$ হলে x এর মান কোনটি?

ক. 60° খ. 90° গ. 120° ঘ. 150°

28. $1 - \sin 2\theta = 0$ হলে—

i. θ এর একটি সমাধান $\frac{13\pi}{4}$

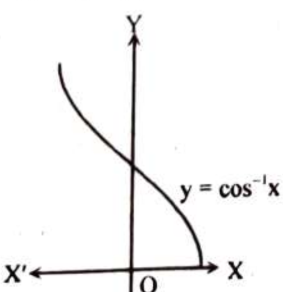
ii. θ এর সাধারণ সমাধান $(4n + 1)\frac{\pi}{2}$

iii. $0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যাবধিতে θ এর 2টি সমাধান বিদ্যমান।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

29.



উপরের চিত্রে—

i. ফাংশনটির লেখ সর্বদাই ১ম বা ২য় চতুর্ভাগে থাকবে

ii. মুখ্যমান $[0, \pi]$

iii. ডোমেন $[-1, 1]$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে—

i. $\sin^{-1}x$ এর মান সংজ্ঞায়িত

ii. $\cos^{-1}x$ এর মান সংজ্ঞায়িত

iii. $\tan^{-1}x$ এর মান অসংজ্ঞায়িত

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. অবান্তর মূল ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে–

i. সিদ্ধ করে না ii. বর্গ করলে পাওয়া যায় iii. বর্গমূল করলে পাওয়া যায়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

32. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ –

i. $\cos x + \sin x = -1$ এর একটি সমাধান π

ii. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ এর একটি সমাধান $\frac{\pi}{4}$

iii. $\cos x - \sin x = 1$ এর একটি সমাধান $\frac{\pi}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

33. $R(x) = \cot^{-1}x$ হলে—

i. $R(x) = \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+x^2}$

ii. $R(x)$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

iii. মুখ্যমান $0 < R(x) \le \frac{\pi}{2}$; যখন $x < 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

34. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$ কে প্রকাশ করা যায়–

i. $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$; যখন $xy < 1$ ii. $\pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$; যখন $xy > 1$

iii. $\frac{\pi}{2}$; যখন $xy = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

35. যদি $\tan^{-1}x$ একটি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন হয় তবে–

i. $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ii. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ iii. $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

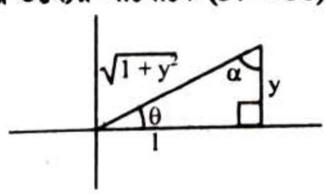
36. $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ সম্পর্কটি সত্য হবে যখন–

i. $x \le -1$ ii. $x \ge 1$ iii. $x = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (37 ও 38) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



37. α কোণের জন্যে কোনটি সত্য?

ক. $\cos^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ খ. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ গ. $\tan^{-1}y$ ঘ. $\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

38. θ কোণের জন্য কোনটি সত্য?

ক. $\tan^{-1}\frac{1}{y}$ খ. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$ গ. $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$ ঘ. $\cos^{-1}\sqrt{1+y^2}$

নিচের তথ্যের আলোকে (39 ও 40) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p(x) = \tan^{-1}x$ একটি বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন।

39. $p\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ এর মান কত?

ক. $30°$ খ. $45°$ গ. $60°$ ঘ. $90°$

40. $p(x)$ এর রেঞ্জ কোনটি?

ক. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ খ. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ গ. $\left[\frac{-x}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ঘ. $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে (41 ও 42) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\sin^{-1}p + \sin^{-1}q = \frac{\pi}{2}$

41. $p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}$ এর মান কত?

ক. 0 খ. 1 গ. -1 ঘ. অনির্ণেয়

42. $p^2 + q^2 = ?$

ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ গ. -1 ঘ. 1

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (43 ও 44) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$.

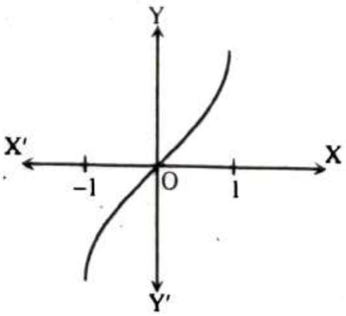
43. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\alpha =$ কত?

ক. $\frac{\pi}{6}$ খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{\pi}{3}$ ঘ. $\frac{\pi}{2}$

44. $k = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে θ এর মান কত?

ক. $\frac{3\pi}{2}$ খ. $\frac{5\pi}{4}$ গ. $\frac{3\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{2}$

নিচের তথ্যের আলোকে (45 ও 46) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



45. প্রদত্ত লেখ কোন ফাংশনের?

ক. $y = \tan^{-1}x$ খ. $y = \cos^{-1}x$ গ. $y = \sin^{-1}x$ ঘ. $y = \operatorname{cosec}^{-1}x$

46. প্রদত্ত লেখের ফাংশনের মুখ্যমান কত?

ক. $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ খ. $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]$ গ. $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ঘ. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

নিচের তথ্যের আলোকে (47 ও 48) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্বের মান x ও ভূমির মান $\sqrt{1-x^2}$।

47. $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

ক. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ খ. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ঘ. $\sqrt{1-x^2}$

48. $\sec\theta$ এর মান কোনটি?

ক. x খ. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ গ. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

নিচের তথ্যের আলোকে (49 ও 50) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p = \tan^{-1}x$

49. $x = \sqrt{3}$ হলে p এর মান কত?

ক. π খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{\pi}{3}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}$

50. 2p এর মান নিচের কোনটি হবে?

ক. $\sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ খ. $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ গ. $\tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ঘ. $\cos^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$

নিচের তথ্যের আলোকে (51 ও 52) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}; R = \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{7}$

51. R কে tangent এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাত আকারে প্রকাশ করে কোনটি?

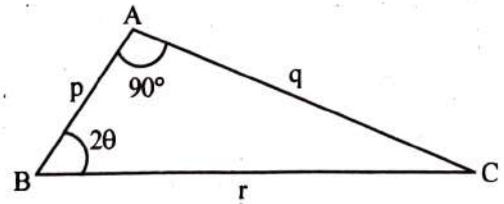
ক. $\tan^{-1}\frac{7}{\sqrt{5}}$ খ. $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$ গ. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{11}}$ ঘ. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{7}$

52. $(P+R)$ এর মান কত হবে?

ক. $\tan^{-1}(-3.35)$ খ. $\pi + \tan^{-1}(-3.35)$

গ. $\tan^{-1}(0.73)$ ঘ. $\pi + \tan^{-1}(0.73)$

নিচের তথ্যের আলোকে (53 ও 54) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



53. BC বাহুর দৈর্ঘ্যের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

ক. $P\cos\theta + q\sin\theta = r$ খ. $P\cos 2\theta + q\sin 2\theta = r$

গ. $P\sin\theta + q\cos\theta = r$ ঘ. $P\sin 2\theta + q\cos 2\theta = r$

54. যদি $\frac{pq}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ হয় তবে—

i. θ এর সাধারণ সমাধান, $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \times \frac{\pi}{6}$

ii. ΔABC -এ, θ এর মান হবে $30°$

iii. ΔABC -এ, θ এর মান হবে $15°$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

55. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ = কত? [ঢা.বি. ১৯-২০]

ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ. $\sqrt{3}$ ঘ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

56. $\sin\theta + \sin2\theta + \sin3\theta = 1 + \cos2\theta + \cos\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে θ এর মান কত? [নো.বি.প্র.বি. ১৯-২০]

ক. $0°$ খ. $30°$ গ. $60°$ ঘ. $90°$

57. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$ সমীকরণে $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে y এর মান কত? [খু. বি. ১৯-২০]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ. 1

58. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. $x^2 + y^2 = 1$ খ. $x^2 - y^2 = 1$ গ. $x + y = 1$ ঘ. $x - y = 1$

59. $0° \le x \le 90°$ হলে $\sin3x = \cos x$ সমীকরণের সমাধান হবে— [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. $0°, 45°$ খ. $0°, 22.5°$ গ. $45°, 45°$ ঘ. $22.5°, 45°$

60. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$ এর মান কত? [খু. বি. ১৬-১৭]

ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}$

61. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = ?$ [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y + \sqrt{y^2 - x^2}}\right)$ খ. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{x + \sqrt{y^2 - x^2}}\right)$

গ. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{y - x}{y + x}\right)}\right)$ ঘ. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{y + x}{y - x}\right)}\right)$

62. $\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ এর মান কত? [বা. কৃ. বি. ১৭-১৮]

ক. 0 খ. $\frac{2}{3}$ গ. $\frac{3}{2}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

63. $\tan^{-1}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}2$ হলে, x এর মান— [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $-\frac{5}{6}$ খ. $-\frac{1}{3}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. $\frac{2}{3}$

64. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right)$ = কত? [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $1 - x$ খ. $1 + x$ গ. $\sin x$ ঘ. x

65. $\sin^{-1}(1)$ এর মান কত? [বুয়েট ১২-১৩]

ক. $\frac{n\pi}{2}$ খ. $(n + 1)\frac{\pi}{2}$ গ. $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ঘ. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$, সকল $n \in \mathbb{Z}$

66. $4\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3\right)$ = কত? [জা. বি. ১৫-১৬]

ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. π ঘ. 4π

67. সমাধান কর: $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}, 0 < \theta < \pi$ [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ খ. $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ গ. $\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

68. $\sin\{2(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)\} = a$ হলে a এর মান কত? [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. 0 খ. 1 গ. -1 ঘ. $\frac{\pi}{2}$

69. $\sin \tan^{-1}\frac{3}{4}$ এর মান কোনটি? [জা. বি. ২০০৮-০৯]

ক. $\frac{3}{5}$ খ. $\frac{4}{5}$ গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

70. $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$ হলে x এর মান কত? [জা. বি. ২০০৯-১০]

ক. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ খ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

71. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান— [ঢা. বি. ০৯-১০; শা. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ. $\sqrt{3}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

72. $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$ হলে, θ এর মান— [ঢা. বি. ০৭-০৮]

ক. 30° খ. 45° গ. 60° ঘ. 180°

73. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান— [ঢা. বি. ১১-১২]

ক. $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ খ. $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ গ. $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ ঘ. $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

74. $\cos \tan^{-1}\cot \sin^{-1}x$ এর সমান— [ঢা. বি. ১১-১২]

ক. x খ. $\frac{\pi}{2} - x$ গ. $-x$ ঘ. $x - \frac{\pi}{2}$

75. $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ এর মান— [ঢা. বি. ০৭-০৮]

ক. 0 খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. π ঘ. 2π

76. $\cot x + \tan x = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান— [ঢা. বি. ০৫-০৬]

ক. $\frac{n\pi}{4}$ খ. $\frac{n\pi}{2}$ গ. $\frac{(4n+1)\pi}{4}$ ঘ. $\frac{(4n+1)\pi}{2}$

77. $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} =$ কত? [ঢা. বি. ১০-১১]

ক. $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ খ. $\cot^{-1}3$ গ. $\tan^{-1}\frac{1}{5}$ ঘ. $\sin^{-1}\frac{1}{3}$

78. $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান— [ঢা. বি. ১০-১১]

ক. $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ খ. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ গ. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ঘ. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

79. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান— [ঢা. বি. ০৯-১০]

ক. $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ খ. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ গ. $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ঘ. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

80. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}(0 < \theta < 2\pi)$ হলে, θ এর মান— [ঢা. বি. ০৩-০৪; ১৪-১৫]

ক. $\frac{\pi}{6}$ খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{\pi}{3}$ ঘ. $\frac{2\pi}{3}$

81. $\cot\theta + \sqrt{3} = 2\ \mathrm{cosec}\theta$ এর সাধারণ সমাধান— [ঢা. বি. ১৩-১৪]

ক. $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ খ. $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ গ. $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ ঘ. $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

82. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ এর সমান— [ঢা. বি. ১৪-১৫]

ক. $\tan^{-1}\frac{2}{11}$ খ. $\sin^{-1}\frac{11}{2}$ গ. $\tan^{-1}\frac{11}{2}$ ঘ. $\cos^{-1}\frac{11}{2}$

83. $\tan^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কোনটি? [কুয়েট ১১-১২]

ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{3\pi}{4}$ ঘ. $\frac{5\pi}{4}$

84. $\sec^2(\tan^{-1}2) + \mathrm{cosec}^2(\cot^{-1}3)$ এর মান কোনটি? [কুয়েট ০৫-০৬]

ক. 7 খ. 11 গ. 13 ঘ. 15

85. $\mathrm{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) - \sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$ এর মান নিচের কোনটি? [কুয়েট ০৮-০৯]

ক. $\frac{11}{3}$ খ. $\frac{13}{3}$ গ. $\frac{35}{9}$ ঘ. $\frac{37}{9}$

86. $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$ এর মান কোনটি? [চুয়েট ১০-১১]

ক. 7 খ. 9 গ. 25 ঘ. 27

87. $\cot(\sin^{-1}x)$ এর মান কোনটি? [বুয়েট ০৯-১০; বুটেক্স ১১-১২]

ক. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ খ. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ গ. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ঘ. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

88. $\tan^2\theta + \sec\theta + 1 = 0$, যখন $0° \le \theta \le 360°$) এর সমাধান কোনটি? [বুয়েট ০৭-০৮]

ক. $0°$ খ. $90°$ গ. $180°$ ঘ. $270°$

89. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [বুয়েট ০২-০৩; চুয়েট ১০-১১; রুয়েট ০৪-০৫]

ক. $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ খ. $\theta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

গ. $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ ঘ. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

90. $\sin4\theta = \cos3\theta + \sin2\theta$ হলে θ এর মান কোনটি? [চুয়েট, রুয়েট, কুয়েট ০২-০৩]

ক. $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ খ. $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

গ. $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ ঘ. $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. দৃশ্যকল্প-১: $\sec 2P = \frac{1+b^2}{1-b^2}$, $\mathrm{cosec}2Q = \frac{1+c^2}{2c}$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

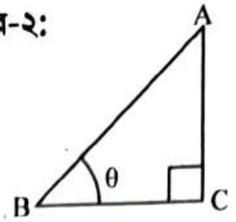
ক. $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $P + Q = \pi - \tan^{-1}a$ হলে দেখাও যে, $a + b + c = abc$

গ. সমাধান কর: $\{f(x)\}^3 g(3x) + \{g(x)\}^3 f(3x) = \frac{3}{4}$

2. দৃশ্যকল্প-১: $\tan^{-1}(x+p)+\tan^{-1}(x-p)=\tan^{-1}2$

দৃশ্যকল্প-২:



ক. দেখাও যে, $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cot^{-1}\frac{5}{3}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$

খ. $P=\frac{1}{3}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

গ. সমাধান কর: $AC+BC=\sqrt{2}AB\ (-\pi<\theta<\pi)$

3. $f(x)=\sin x$

ক. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ এর মুখ্যমান নির্ণয় কর।

খ. $4\left[\{f(x)\}^2+\sqrt{1-\{f(x)\}^2}\right]=5;\ (-2\pi<x<2\pi)$ সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}(\sqrt{2}f(x))+\text{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-f(2(x))^2}}}=\frac{\pi}{2}$

4. $P=x^2-y^2+1$ এবং $g(x)=\sin x$

ক. দেখাও যে, $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

খ. $\cos^{-1}\sin 2\tan^{-1}\cot\text{cosec}^{-1}\sqrt{P}=0$ হলে দেখাও যে, $x^2-y^2=1$

গ. $0<x<2\pi$ ব্যবধিতে $2g(x)\,g(3x)=1$ সমীকরণটি সমাধান কর।

5. $P(x)=2\tan^{-1}x$

ক. প্রমাণ কর যে, $P(x)=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

খ. দেখাও যে, $P\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)=\cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$

গ. দেখাও যে, $\tan(P(x))=2\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3)$

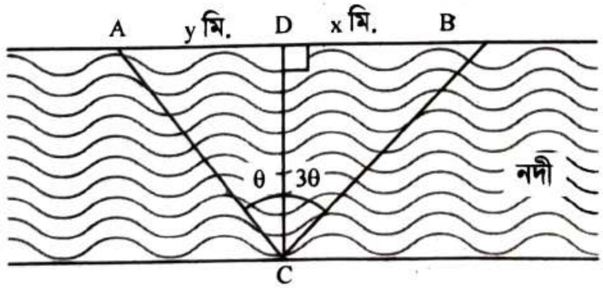
6. একটি সার্চ লাইট থেকে দুটি দেয়াল AB ও BC এর দূরত্ব যথাক্রমে x এবং y। দেয়াল দুটি পর্যবেক্ষনের জন্য সার্চ লাইটটিকে যথাক্রমে $\cos^{-1}x$ এবং $\cos^{-1}y$ কোণে ঘুরাতে হয় এবং কোণদ্বয়ের সমষ্টি $\frac{\pi}{2}$.

ক. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4}$ নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$

গ. AB দেয়াল দ্বারা সার্চলাইটে উৎপন্ন কোণ θ হলে $x+y=\sqrt{2}$ কে সমাধান করে θ নির্ণয় কর।

7.



ক. $4(\sin^2x+\cos x)=5$ এর সমাধান কর।

খ. নদীর প্রস্থ 1 একক হলে $xy=1$ কে সমাধান করে θ নির্ণয় কর যেখানে, $0\le\theta\le2\pi$

গ. $\angle A=\tan^{-1}2$ এর $\angle B=\tan^{-1}3$ হলে প্রমাণ কর যে, $\theta=\frac{\pi}{16}$

8. $m = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

ক. $\left(\tan^{-1}\frac{5}{7} + \tan^{-1}\frac{5}{8}\right)$-কে ট্যানজেন্ট এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $x = \frac{1}{2}\tan 2A; y = \cot A$ এবং $z = \cot^3 A$ হলে m নির্ণয় কর।

গ. $m = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $xy + yz + zx = 1$.

9. $\cos\theta - \cos 7\theta = P$. যখন একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

ক. $\cos 7\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে θ নির্ণয় কর।

খ. $P = \sin 4\theta$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে θ নির্ণয় কর যখন $P = \sin\theta - \cos 7\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}$, যখন $-\pi < \theta < \pi$

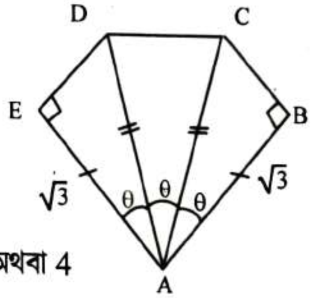
10. $P = \cos\theta$ এবং $Q = \sin\theta$; এখানে θ হল জ্যামিতিক কোণ।

ক. $Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে θ নির্ণয় কর।

খ. $P + \sqrt{3}Q = \sqrt{2}$ হলে θ নির্ণয় কর।

গ. $P^3 - PQ - Q^3 = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, θ কখনোই একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ হতে পারে না।

11. $2\sin\angle CAD.\sin\angle BAE = 1$

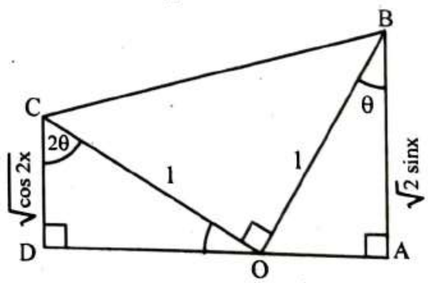


ক. $\sec\cot^{-1}\tan\text{cosec}^{-1}\frac{7}{5}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. θ নির্ণয় কর।

গ. $\theta = \frac{\pi}{3}$ অথবা $\frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, (AC + AD) এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ অথবা 4

12.

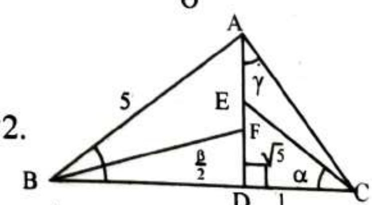


ক. দেখাও যে, $2\sin^{-1}\frac{AB}{\sqrt{2}} = \cos^{-1}(CD^2)$

খ. $\angle COD + \angle AOB$ এর মান রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

গ. $\left(\frac{OA}{AB}\right).\left(\frac{OD}{CD}\right) = 1$ হলে দেখাও যে, $\angle OBC + \angle OCB = 3\theta$

13. $\angle ABC$ এর সমদ্বিখণ্ডক BF, $AD \perp BC$ এবং $AD = 3$ একক।



ক. দেখাও যে, $\alpha = \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

খ. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে দেখাও যে, $\alpha - \frac{\beta}{2} + \gamma = \tan^{-1}2$.

গ. DF এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

14. জোয়ারের সময় সমুদ্রের পানি স্বাভাবিকের থেকে উপরে উঠে যায় এবং ভাটার সময় নিচে নেমে যায়। আবহাওয়াবিদগণ সেন্টমার্টিন দ্বীপে সমুদ্রের পানির এই ওঠানামাকে একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

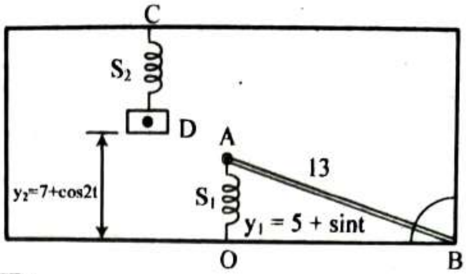
$f(x) = \sin\left(\pi\cos\frac{x}{4}\right) - \cos\left(\pi\sin\frac{x}{4}\right)$ দ্বারা উপস্থাপন করলেন যেখানে x হল সময়।

ক. রাত বারটা (0:00 hr) এ সমুদ্রের পানির উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ. f(x) এর লেখচিত্র অঙ্কন কর যখন $0 \le x \le 2\pi$.

গ. সমুদ্রের পানির উচ্চতা স্বাভাবিক থাকার শর্তে [f(x) = 0] দেখাও যে, $x = \pm 2\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

15. S_1 স্প্রিংটি 13m লম্বা AB দণ্ডের সাহায্যে O বিন্দুতে আটকানো এবং S_2 স্প্রিংটি C বিন্দুতে একটি অজানা ভরের সাহায্যে ঝুলানো হলো। AO কে y_1 এবং D বিন্দুর উচ্চতাকে y_2 দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল যেখানে t হল সময়ের পরিমাণ। $t = 0$ সময়ে A ও D উভয়ই ভূমি থেকে সর্বোচ্চ অবস্থানে থাকে।



ক. A বিন্দুর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন অবস্থান নির্ণয় কর।

খ. AB এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন অবস্থানের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. $0 < t < 2\pi$ সময়ের মধ্যে কখন A এবং D বিন্দু ভূমি থেকে একই উচ্চতায় থাকবে তা নির্ণয় কর।

16. $P = \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1} 2$ এবং $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ ....(i)

ক. $1 - y = (1 + x)^{-1}$ হলে দেখাও যে, $x = y + y^2 + y^3 + y^4 + ...$

খ. $\sec^2 P$ নির্ণয় কর।

গ. $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে (i) নং সমীকরণ সমাধান কর।

17. $P = \cos\theta + \sin\theta;\ Q = \cos\theta - \sin\theta$

ক. $\frac{P}{Q} = 1$ হলে θ এর মান নির্ণয় করো যখন $-\pi < \theta < \pi$

খ. $P = 1$ হলে দেখাও যে, $\theta = 2n\pi$ বা $(4n + 1)\frac{\pi}{2}$ যখন n শূন্য বা যে কোনো পূর্ণসংখ্যা।.

গ. $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে $-\pi < \theta < \pi$ ব্যবধিতে θ এর মান নির্ণয় কর।

18. $f(x) = \sin x$ একটি বৃত্তীয় ফাংশন

ক. $x + y + z = \pi$, $\tan^{-1}2 = x$ এবং $\tan^{-1}3 = y$ হলে z এর মান নির্ণয় কর।

খ. সমাধান কর: $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{3}f(x) = \sqrt{2}$

গ. $f\left(\pi f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \pi f(x)\right)$ হলে দেখাও যে, $x = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

19. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$. $g(y) = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$ এর $h(x) = \sin x$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৯]

ক. $\cos^{-1}m + \cos^{-1}n = \frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^2 + n^2 = 1$.

খ. $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{f(a)} - \sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2\tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{a - b}{1 + ab}$.

গ. $0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta) . h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান কর।

20. দৃশ্যকল্প-১: $\sec A = \sqrt{5}$, $\text{cosec}B = \frac{5}{3}$ এবং $\cot C = 3$. [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]

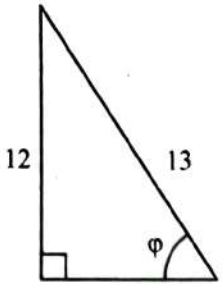
দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin x$.

ক. $\text{cosec}^{-1}\sqrt{17} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে, $A + C - \frac{1}{2}B$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. সমাধান কর: দৃশ্যকল্প-২ থেকে $\sqrt{3}\ f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2$. যখন $-2\pi < x < 2\pi$

21. দৃশ্যকল্প-১: [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]



দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = \cot x$.

ক. $\tan^{-1} 4$ ও $\tan^{-1}\frac{5}{3}$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1} 2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$.

গ. সমাধান কর: $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) . g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1, 0 \le \theta \le \pi$

22. উদ্দীপক : দুটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলো $\sqrt{2}x = \sin^{-1}A, \frac{-x}{2} = \cos^{-1} B$ এবং একটি বহুপদী ফাংশন হলো $h(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$. [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে বিস্তার করে দেখাও যে, $(1 - x)^3 = h(x)$.

খ. $A - B = 0$ হলে, x এর সমাধানের জন্য সাধারণ রাশিমালা বের কর।

গ. $\{h(x)\}^3$ এর বিস্তারের মধ্যপদ/মধ্যপদসমূহের মান নির্ণয় কর।

23. দৃশ্যকল্প-১: $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

দৃশ্যকল্প-২: $g(\alpha) = \sin(\pi \cos\alpha) - \cos(\pi \sin\alpha)$.

ক. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে যদি $g(\alpha) = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $\alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $f(a) = \alpha$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

24. $f(x) = \tan x$. [সিলেট বোর্ড-২০১৯]

ক. দেখাও যে, $\tan^{-1}\frac{5}{3} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$.

খ. প্রমাণ কর যে,
$\tan^{-1}\{(2 + \sqrt{3}) f(x)\} + \tan^{-1}\{(2 - \sqrt{3}) f(x)\} = \tan^{-1}\{2 f(2x)\}$.

গ. সমাধান কর : $f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x + \sin x$.

25. $f(x) = \sin^{-1}x$ এবং $g(x) = \cos x$. [যশোর বোর্ড-২০১৯]

ক. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কত?

খ. $f\left\{\sqrt{2}g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} + f\left\{\sqrt{g(2\theta)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. সমাধান কর: $\sqrt{3}g(x) + g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$.

26. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2}$. দৃশ্যকল্প-২: $A = 2\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

ক. $\sec^2(\cot^{-1}3) + \operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১, হতে সমাধান কর : $f(\sin\theta) = 0$.

গ. দৃশ্যকল্প-২,হতে প্রমান কর যে, $A = \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$

27. দৃশ্যকল্প-১ : $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \cot^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$

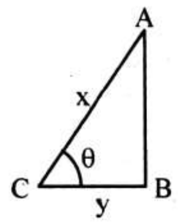
দৃশ্যকল্প-২ : $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5, -2\pi < \theta < 2\pi$ [ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড-২০১৮]

ক. প্রমাণ কর যে, $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান কর।

28. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $1 + \sin^2x - 2\cos^2x + 3\cos x = 3 - \cos^2x$.

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]

ক. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{9}$. যেখানে $AB = 2, y = \sqrt{5}$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

29. দৃশ্যকল্প-১: $\sec^{-1}\frac{5}{3} + \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$. দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{3}\sin\theta = 2 + \cos\theta$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৭]

ক. দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$.

খ. দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এর মান $\frac{\pi}{2}$.

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমাধান কর যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$.

30. $f(x) = \tan x$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]

ক. $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}$ এর মুখ্য মান নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকে উল্লেখিত $f(x)$ এর জন্য $f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, প্রাপ্ত সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে যার ঢাল -1 হবে।

গ. $\{f(x)\}^2 + f'(x) = 3f(x)$ হলে বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর যখন $0 \le x \le 2\pi$.

31. $A = \cos\theta, B = \sin\theta, C = \cos2\theta, D = \sin2\theta$. [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

ক. মান নির্ণয় কর : $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

খ. $A + \sqrt{3}B = \sqrt{2}$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. $A + B = C + D$ হলে, সমীকরণটির $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সমাধান আছে কিনা যাচাই কর।

32. $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, \sin\theta = \frac{4}{5}$, [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]

ক. $\text{cosec}^{-1}\sqrt{5} + \sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}2$.

গ. উদ্দীপকের আলোকে সমাধান কর: $\sqrt{3}\,g(x) + f(x) = \sqrt{3}$.

33. $f(x) = \cot^{-1} y - \tan^{-1} x$ .... (i) [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

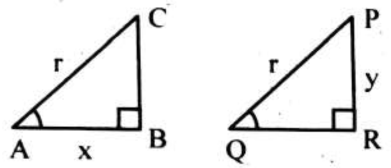
$\cos\theta - \cos 9\theta = \sin 5\theta$ .... (ii)

ক. $\sin\frac{x}{3}$ এর পর্যায়কাল কত?

খ. $f(x) = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$

গ. উদ্দীপক-২ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

34. [সিলেট বোর্ড-২০১৭]



ক. দেখাও যে, $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

খ. উদ্দীপকে $A + P = \varphi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2 = r^2\sin^2\varphi$

গ. $f(\theta) = \frac{r}{x}$ হলে $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $f(2\theta) - f(\theta) = 2$ সমীকরণটি সমাধান কর।

35. দৃশ্যকল্প-১ : $\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5}$ [যশোর বোর্ড-২০১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : $2\sin2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}(\cot3x) + \tan^{-1}(-\cot5x) = 2x$

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

36. $g(x) = p\sin^{-1}x; h(x) = \cos x$. [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]

ক. প্রমাণ কর যে, $\sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$

খ. $g(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর, যখন $p = \frac{1}{2}, -1 \le x \le 1$.

গ. $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

অন্য রকম কিছু উল্লেখ না থাকলে, n এর মান শূন্য বা যে কোনো পূর্ণসংখ্যা হবে।

1. **(i)** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ **(ii)** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ **(iii)** $n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \alpha$, যখন $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

(iv) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **(v)** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **(vi)** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(vii) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ **(viii)** $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n\pi + (-1)^n\alpha$, যখন $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$

(ix) $n\pi + \frac{5\pi}{6}, n\pi + \frac{2\pi}{3}$ **(x)** $2n\pi \pm \alpha$, যখন $\sec\alpha = \sqrt{3}$ **(xi)** $\frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{16}$

(xii) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **(xiii)** $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

(xiv) $n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ **(xv)** $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(xvi) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{4}$ **(xvii)** $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(xviii) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ **(xix)** $(4n+1)\frac{\pi}{8}$

(xx) $n\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\alpha}{2}$, যখন $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **(xxi)** $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n\alpha$ যখন $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$

(xxii) $n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}; 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ **(xxiii)** $n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ যখন, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(xxiv) $2n\pi, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

2. **(i)** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **(ii)** $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$ **(iii)** $60°, 300°$

(iv) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(v)** $30°, 330°$ **(vi)** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

(vii) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ **(viii)** $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ **(ix)** $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(x) $30°, 45°, 210°, 225°$ **(xi)** $30°, 120°, 150°$

3. **(i)** $n\pi + \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}$ অথবা $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$ **(ii)** $(2n+1)\frac{\pi}{8}$

(iii) $\frac{n\pi}{4}$ **(iv)** $(4n+1)\frac{\pi}{12}$ **(v)** $(6n+1)\frac{\pi}{18}$ **(vi)** $\frac{n\pi}{3}, n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(vii)** $\frac{n\pi}{3}$ **(viii)** $(4n \pm 1)\frac{\pi}{12}$

4. **(i)** $\frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{7\pi}{12}$ **(ii)** $\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$

(iii) $\frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$ **(iv)** $(2n+1)\frac{\pi}{6}, n\pi \pm \frac{\pi}{8}$

(v) $(2n+1)\frac{\pi}{8}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{9}$ **(vi)** $\frac{n\pi}{2}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ **(vii)** $(2n+1)\frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(viii) $-\frac{5\pi}{12}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{12}, 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ **(ix)** $90°, 120°, 240°, 270°$

5. **(i)** $2n\pi, \frac{2}{3}(n\pi + \frac{\pi}{4})$ **(ii)** $(2n+1)\frac{\pi}{2}, (4n-1)\frac{\pi}{6}, (4n+1)\frac{\pi}{14}$

(iii) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ **(iv)** $(2n+1)\frac{\pi}{8}, (2n+1)\frac{\pi}{4}, (2n+1)\frac{\pi}{2}$

(v) $\frac{n\pi}{6}, (2n+1)\frac{\pi}{4}, (2n+1)\frac{\pi}{2}$ **(vi)** $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ **(vii)** $0, \pm\frac{\pi}{12}, \pm\frac{\pi}{6}$

(viii) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

6. (i) $2n\pi, (6n+1)\frac{\pi}{3}$ (ii) $2n\pi, (4n+1)\frac{\pi}{2}$ (iii) $2n\pi, (4n-1)\frac{\pi}{2}$ (iv) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$

(v) $2n\pi, 2n\pi+2\alpha$, যখন $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (vi) $-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$ (vii) $\frac{\pi}{4}$ (viii) $-\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

(ix) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (x) $2n\pi, 2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (xi) $\frac{(4n+1)\pi}{1+2\sqrt{2}}, \frac{(4n-1)\pi}{1-2\sqrt{2}}$

7. (i) $0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ (iii) $-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$ (iv) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

8. (i) $(6n+1)\frac{\pi}{18}$ বা $(3n+1)\frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

(ii) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা, $n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

বহুনির্বাচনি

1. খ	2. ক	3. গ	4. খ	5. গ	6. খ	7. খ	8. খ	9. ঘ	10. গ	11. খ	12. খ	13. ক	14. খ
15. খ	16. গ	17. গ	18. ক	19. গ	20. ঘ	21. গ	22. ঘ	23. ঘ	24. গ	25. ঘ	26. ক	27. গ	28. গ
29. ঘ	30. ক	31. ক	32. ক	33. ক	34. ঘ	35. খ	36. ক	37. ক	38. গ	39. ক	40. ঘ	41. খ	42. ঘ
43. গ	44. খ	45. গ	46. গ	47. খ	48. ঘ	49. গ	50. খ	51. খ	52. খ	53. খ	54. খ	55. গ	56. খ
57. গ	58. ক	59. ঘ	60. গ	61. ক	62. খ	63. ঘ	64. ঘ	65. ঘ	66. গ	67. ঘ	68. ক	69. ক	70. ক
71. গ	72. খ	73. খ	74. ক	75. গ	76. গ	77. খ	78. খ	79. খ	80. গ	81. গ	82. গ	83. গ	84. ঘ
85. ক	86. গ	87. ক	88. গ	89 গ	90. গ								

সৃজনশীল

1. ক. $\frac{3}{4}$; গ. $x = (4n+1)\frac{\pi}{8}$;

2. খ. $-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}$; গ. $\theta = \frac{\pi}{4}$;

3. ক. $-\frac{\pi}{3}$; খ. $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$;

4. গ. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; 6. ক. $\frac{3}{4}$ গ. $\frac{\pi}{4}$

7. ক. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$; খ. $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$;

8. ক. $\tan^{-1}\frac{75}{31}$; খ. 0;

9. ক. $(8n+1)\frac{\pi}{28}, (8n-1)\frac{\pi}{28}; n \in \mathbb{Z}$ খ. $\frac{n\pi}{4}; \frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}; n \in \mathbb{Z}$ গ. $\frac{-7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

10. ক. $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ খ. $2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$

11. ক. $\frac{7}{5}$ খ. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ 12. খ. $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান। 13. গ. $\frac{4}{3}$

14. ক. স্বাভাবিকের চেয়ে 1 সে.মি. নিচে নেমে যাবে।

15. ক. 6 মি. ও 4 মি. খ. 9.57° গ. $\frac{\pi}{2}$

16. খ. $\frac{1625}{841}$ গ. $\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

17. ক. 0; গ. $\frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$;

18. ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$

19. গ. $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

20. ক. $\tan^{-1}\frac{9}{19}$; খ. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}2$; গ. $\frac{-4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$; যখন $-2\pi < x < 2\pi$

21. ক. $\frac{3\pi}{4}$; গ. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

22. খ. $\frac{(4n+1)\pi}{1+2\sqrt{2}}, \frac{(4n-1)\pi}{1-2\sqrt{2}}$; গ. $126x^4, -126x^5$

23. ক. 2

24. গ. $n\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\alpha}{2}$; যখন $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

25. ক. $\frac{\pi}{4}$; খ. $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$; গ. $-\frac{11\pi}{6}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

26. ক. $2\frac{13}{36}$; খ. $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$

27. খ. 0; গ. $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$;

28. গ. $2n\pi, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$;

29. গ. $\theta = \frac{-4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$;

30. ক. $\frac{\pi}{3}$; গ. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$;

31. ক. 30°; খ. $2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$; গ. সমাধান বিদ্যমান এবং $\theta = 0, \frac{\pi}{6}$;

32. ক. নির্ণয়যোগ্য নয়; গ. $x = 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

33. ক. 6π; গ. $\theta = \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}; n \in \mathbb{Z}$

34. গ. $\frac{\pi}{5}, \pi, -\frac{\pi}{5}, -\frac{3\pi}{5}, -\pi, \frac{3\pi}{5}$;

35. গ. $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

36. গ. $x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ যেখানে $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$;

পাঠ-১৩ ও ১৪

ব্যবহারিক

7.5 বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন (Graph of inverse trigonometric functions)

পরীক্ষণ নং 7.5	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ: ... ...

সমস্যা : $y = \tan^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $\tan x$ ফাংশনটি $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে এক-এক এবং এর রেঞ্জ $\mathbb{R}$। কাজেই $\tan^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

উপকরণ: ছক কাগজ, পেন্সিল, রাবার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় আঁকি।

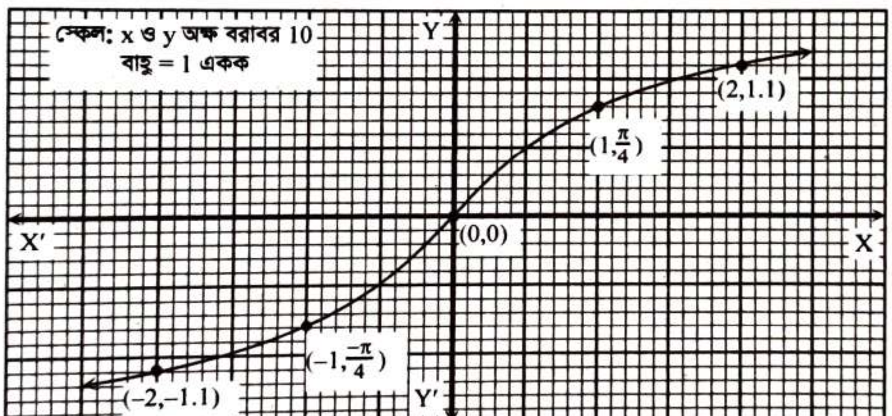
ii. x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \tan^{-1}x$ হতে y এর মান নির্ণয় করি।

iii. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে সুবিধাজনক স্কেলে স্থাপন করি।

iv. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে মসৃন বক্ররেখার সাহায্যে বিন্দুগুলি যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	−2	−1	0	1	2
$y = \tan^{-1}x$	−1.1	$\frac{-\pi}{4} = -0.79$	0	$\frac{\pi}{4} = 0.79$	1.1



সতর্কতা:

i. বিন্দুগুলির মান নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

ii. ফাংশনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করে ফাংশনের লেখের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

iii. বিন্দুগুলি যোগের সময় সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে।

বৈশিষ্ট্য:

(i) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

(ii) $[0, \frac{\pi}{2})$ ব্যবধিতে ফাংশনের মান ধনাত্মক অসীমের দিকে ধাবিত হয় এবং $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ ব্যবধিতে ফাংশনের মান ঋণাত্মক অসীমের দিকে ধাবিত হয়।

(iii) $x \to \infty$ হলে $\tan^{-1}x \to \frac{\pi}{2}$ এবং $x \to -\infty$ হলে $\tan^{-1}x \to \frac{-\pi}{2}$ হওয়ায় $x = \frac{\pi}{2}$ এবং $x = \frac{-\pi}{2}$ রেখাদ্বয় ফাংশনের অসীমতট রেখা।

(iv) $\tan(\tan^{-1}x) = x$ যখন $-\infty < x < \infty$ **(v)** $\tan^{-1}(\tan x) = x$ যখন $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(vi) $\text{Arctan}(x) = t$ বা, $\tan^2 x = t$ যদি এবং কেবল যদি $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ এবং $\tan(t) = x$

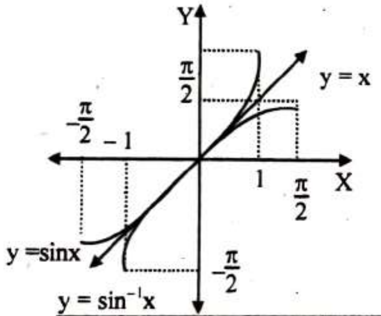
(vii) Arc (tanx) বা, $\tan^{-1}x$ একটি অযুগ্ম ফাংশন।
Note: $\text{Arc}\tan(x) = \tan^{-1}x$

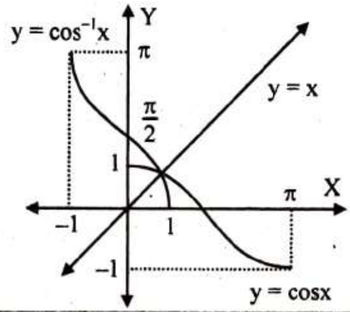
কাজ: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর।
i. $\sin^{-1}x$ **ii.** $\cos^{-1}x$ **iii.** $\cot^{-1}x$

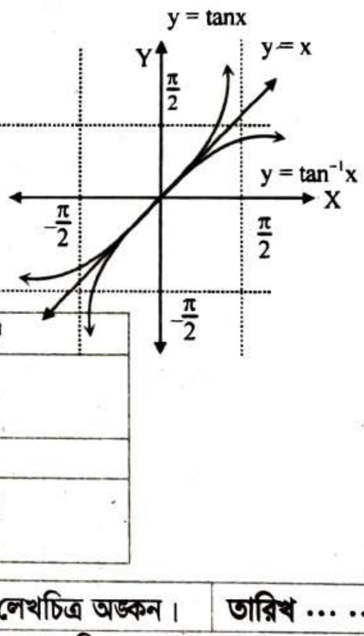
7.6 একই অক্ষে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র (Trigonometric functions and its inverse in same axes)

একই লেখচিত্রে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে নিম্নোক্ত বিষয়সমূহের প্রতি অবশ্যই দৃষ্টি দিতে হবে।

(i) মূল ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ এবং তা কোন ব্যবধিতে এক-এক তা নির্ধারণ করতে হবে।
(ii) মূল ফাংশন যে ব্যবধিতে এক-এক শুধুমাত্র সে ব্যবধিতেই ফাংশনের বিপরীত ফাংশন অঙ্কন করতে হবে।
(iii) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে কোনো ফাংশনের লেখচিত্রের প্রতিফলিত চিত্রই বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র।
নিম্নে একই লেখচিত্রে (মুক্ত হস্তে) sinx, cosx ও tanx এবং বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র দেখানো হলো।







ফাংশন	বর্ণনা	রেঞ্জ
$y = \sin^{-1}x$	$x = \sin y, -1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1}x$	$x = \cos y, -1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \tan^{-1}x$	$x = \tan y, x \in \mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

পরীক্ষণ নং 7.6.1	একই অক্ষে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	**তারিখ ... ...**

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \cos x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $y = f(x) = \cos x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= [-1, 1]$ কিন্তু $[0, \pi]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক। সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= [0, \pi]$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।
$y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

উপকরণ: (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি: i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. $y = \cos x$ এর ফাংশন থেকে $[0, \pi]$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

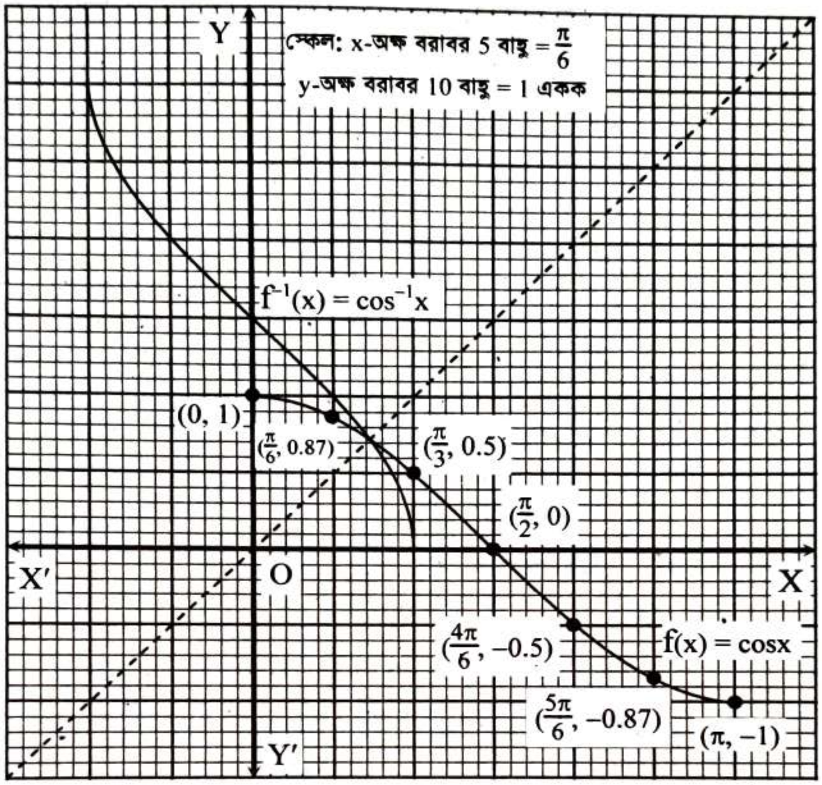
iii. ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 5 বাহু $= \frac{\pi}{6}$ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু $= 1$ একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

iv. সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \cos x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

v. $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।
vi. প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$
$y = \cos x$	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1



লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $[0,\pi]$ ব্যবধিতে $f(x) = \cos x$ ফাংশনটি অনন্য।
(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= [0, \pi]$
(iii) $\cos^{-1}(x) = t$ যদি এবং কেবল যদি $0 \leq t \leq \pi$ এবং $\cos(t) = x$
(iv) $\cos(\cos^{-1}(x)) = x$ যদি এবং কেবল যদি $-1 \leq x \leq 1$
(v) $\cos^{-1}(\cos(x)) = x$ যদি $0 \leq x \leq \pi$

কাজ: একই লেখচিত্রে নিম্নোক্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও এদের বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর:
i. $\sin x$ **ii.** $\tan x$ **iii.** $\sin 2x$ **iv.** $\cot x$ **v.** $\sec x$ **vi.** $\operatorname{cosec} x$

মৌখিক প্রশ্ন

1. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ কাকে বলে? উদাহরণ দাও।
2. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের অবান্তর মূল (Extraneous roots) এর সংজ্ঞা দাও।
3. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের সংজ্ঞা দাও।
4. মুখ্যমান বলতে কী বোঝ?
5. $\sin^{-1}x$ ফাংশনের মুখ্যসীমা কত?
6. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ এর মান কত?
7. মুখ্যসীমায় $\sin x$ ও $\sin^{-1}x$ এর লেখ কোন রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম?