পঞ্চম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

Binomial Expansions

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-5.1 | পৃষ্ঠা-১৫৮

সমাধান: এখানে, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdots\cdots\cdots (i)$$

$n = 1$ হলে (i) এর বামপক্ষ $= 1^2 = 1$

এবং ডানপক্ষ $= \frac{1}{6}.1.2.3 = 1$

অতএব, $n = 1$ হলে, (i) নং উক্তিটি সত্য।

এখন, মনে করি, $n = m$ এর জন্য (i) নং উক্তিটি সত্য।

অর্থাৎ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + m^2$

$= \frac{1}{6}m(m+2)(2m+1) \cdots\cdots\cdots (ii)$

$n = m + 1$ এর জন্য (i) নং উক্তিটি সত্য হবে।

অর্থাৎ, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + (m+1)^2$

$= \frac{1}{6}(m+1)(m+1)(2m+3) \cdots \cdots (iii)$ সত্য হয়।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $(m+1)^2$ যোগ করে পাই,

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + m^2 + (m+1)^2$

$= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2$

$= \frac{1}{6}(m+1)\{m(2m+1) + 6(m+1)\}$

$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + m + 6m + 6)$

$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + 7m + 6)$

$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + 4m + 3m + 6)$

$= \frac{1}{6}(m+1)\{2m(m+2) + 3(m+2)\}$

$= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$

অতএব, (iii) নং উক্তিটি সত্য প্রমাণিত হলো। অর্থাৎ, উক্তিটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হবে।

অতএব, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে (i) নং উক্তিটি n এর সকল $n \in \mathbb{N}$ জন্য সত্য। **(প্রমাণিত)**

▶ অনুচ্ছেদ-5.2 | পৃষ্ঠা-১৫৯

সমাধান: $1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}$

এখানে প্রথম হতে সহগ বৃদ্ধি পেয়ে পুনরায় হ্রাস পাচ্ছে এবং প্রথম হতে ১ম, ২য়, ৩য়, ৪র্থ ও ৫ম পদের সহগ শেষ হতে ১ম, ২য়, ৩য়, ৪র্থ ও ৫ম পদগুলির সহগের সমান।

▶ অনুচ্ছেদ-5.3 | পৃষ্ঠা-১৬১

সমাধান:

n = 0: 1
n = 1: 1 1
n = 2: 1 2 1
n = 3: 1 3 3 1
n = 4: 1 4 6 4 1
n = 5: 1 5 10 10 5 1
n = 6: 1 6 15 20 15 6 1
n = 7: 1 7 21 35 35 21 7 1
n = 8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
n = 9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
n = 10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজ

$$\therefore\ (a+x)^1 = a + x$$
$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$
$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$
$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$
$$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$$
$$(a+x)^6 = a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + 20a^3x^3 + 15a^2x^4 + 6ax^5 + x^6$$
$$(a+x)^7 = a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3 + 35a^3x^4 + 21a^2x^5 + 7ax^6 + x^7$$
$$(a+x)^8 = a^8 + 8a^7x + 28a^6x^2 + 56a^5x^3 + 70a^4x^4 + 56a^3x^5 + 28a^2x^6 + 8ax^7 + x^8$$
$$(a+x)^9 = a^9 + 9a^8x + 36a^7x^2 + 84a^6x^3 + 126a^5x^4 + 126a^4x^5 + 84a^3x^6 + 36a^2x^7 + 9ax^8 + x^9$$
$$(a+x)^{10} = a^{10} + 10a^9x + 45a^8x^2 + 120a^7x^3 + 210a^6x^4 + 252a^5x^5 + 210a^4x^6 + 120a^3x^7 + 45a^2x^8 + 10ax^9 + x^{10}$$

অনুচ্ছেদ-5.4.3 | পৃষ্ঠা-১৬৩

$n = 0$: 1
$n = 1$: 1 1
$n = 2$: 1 2 1
$n = 3$: 1 3 3 1
$n = 4$: 1 4 6 4 1
$n = 5$: 1 5 10 10 5 1
$n = 6$: 1 6 15 20 15 6 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজ

এখন, ত্রিভুজটি হতে দেখা যায়, $n = 4$ হলে, প্রথম হতে দ্বিতীয় পদের সহগ $= 4 =$ শেষ হতে দ্বিতীয় পদের সহগ।
$n = 5$ হলে, প্রথম হতে দ্বিতীয় পদের সহগ $= 5 =$ শেষ হতে দ্বিতীয় পদের সহগ।
$n = 6$ হলে, প্রথম হতে দ্বিতীয় পদের সহগ $= 6 =$ শেষ হতে দ্বিতীয় পদের সহগ।

2. $\left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে,

সাধারণ পদ অর্থাৎ $(r+1)$ তম পদ $= {}^nC_r \left(\frac{a}{x}\right)^{n-r} (-bx^2)^r = (-1)^r\, {}^nC_r\, a^{n-r} b^r x^{-n+3r}$

$n = 7$ হলে, $(r+1)$ তম পদ $= (-1)^r\, {}^7C_r\, a^{7-r} b^r x^{-7+3r}$ ... ... (i)
$n = 8$ হলে, $(r+1)$ তম পদ $= (-1)^r\, {}^8C_r\, a^{8-r} b^r x^{-8+3r}$ ... ... (ii)

আবার, $n = 7$ হলে, $\left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^n = \left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= (7+1) = 8$; যা জোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে দুইটি এবং এরা $\left(\frac{7-1}{2} + 1\right) = 4$ তম ও $\left(\frac{7+1}{2} + 1\right) = 5$ তম পদ।

(i) নং এ $r = 3$ বসিয়ে, 4-তম পদ $= (-1)^3\, {}^7C_3\, a^{7-3} b^3\, x^{-7+9} = -\, {}^7C_3\, a^4 b^3 x^2 = -\,35a^4b^3x^2$
(i) নং এ $r = 4$ বসিয়ে, 5-তম পদ $= (-1)^4\, {}^7C_4\, a^{7-4} b^4\, x^{-7+12} = -\,35\, a^3b^4x^5$

এখন, $n = 8$ হলে, $\left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^n = \left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $(8+1) = 9$; যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে একটি এবং এটি $\left(\frac{8}{2} + 1\right) = 5$ তম পদ।

(ii) নং এ $r = 4$ বসিয়ে, 5-তম পদ $= (-1)^4\ {}^8C_4\, a^{8-4}\, b^4 x^{-8+12} = 70a^4b^4x^4$

অনুশীলনী-5(A) এর সমাধান

1. **(i)** $(1-ax)^6 = 1 + {}^6C_1(-ax) + {}^6C_2(-ax)^2 + {}^6C_3(-ax)^3 + {}^6C_4(-ax)^4 + {}^6C_5(-ax)^5 + (-ax)^6$
$= 1 - 6ax + 15a^2x^2 - 20a^3x^3 + 15a^4x^4 - 6a^5x^5 + a^6x^6$ **(Ans.)**

(ii) $\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{3}\right)^4 + {}^4C_1\left(\frac{x}{3}\right)^{4-1}\left(\frac{2}{y}\right) + {}^4C_2\left(\frac{x}{3}\right)^{4-2}\left(\frac{2}{y}\right)^2 + {}^4C_3\left(\frac{x}{3}\right)^{4-3}\left(\frac{2}{y}\right)^3 + \left(\frac{2}{y}\right)^4$
$= \frac{x^4}{81} + 4.\frac{x^3}{27}.\frac{2}{y} + 6.\frac{x^2}{9}.\frac{4}{y^2} + 4.\frac{x}{3}.\frac{8}{y^3} + \frac{16}{y^4}$
$= \frac{x^4}{81} + \frac{8x^3}{27y} + \frac{8x^2}{3y^2} + \frac{32x}{3y^3} + \frac{16}{y^4}$ **(Ans.)**

(iii) $\left(\frac{a^2}{2}-2b\right)^6 = \left(\frac{a^2}{2}\right)^6 + {}^6C_1\left(\frac{a^2}{2}\right)^{6-1}(-2b) + {}^6C_2\left(\frac{a^2}{2}\right)^{6-2}(-2b)^2 + {}^6C_3\left(\frac{a^2}{2}\right)^{6-3}(-2b)^3$
$+ {}^6C_4\left(\frac{a^2}{2}\right)^{6-4}(-2b)^4 + {}^6C_5\left(\frac{a^2}{2}\right)^{6-5}(-2b)^5 + (-2b)^6$
$= \frac{a^{12}}{64} - 6.\frac{a^{10}}{32}.2b + 15.\frac{a^8}{16}.4b^2 - 20.\frac{a^6}{8}.8b^3 + 15.\frac{a^4}{4}.16b^4 - 6.\frac{a^2}{2}.32b^5 + 64b^6$
$= \frac{1}{64}a^{12} - \frac{3}{8}a^{10}b + \frac{15}{4}a^8b^2 - 20a^6b^3 + 60a^4b^4 - 96a^2b^5 + 64b^6$ **(Ans.)**

(iv) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {}^6C_1x^{6-1}\left(-\frac{1}{x}\right) + {}^6C_2x^{6-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + {}^6C_3x^{6-3}\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6C_4x^{6-4}\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5x^{6-5}\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \left(-\frac{1}{x}\right)^6$
$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$ **(Ans.)**

(v) $(1-x+x^2)^4 = x^4\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^4$
$= x^4(-1)^4\left\{1-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}^4$
$= x^4\left\{1 - {}^4C_1\left(x+\frac{1}{x}\right) + {}^4C_2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - {}^4C_3\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x+\frac{1}{x}\right)^4\right\}$
$= x^4\left\{1 - 4x - \frac{4}{x} + 6\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x^3+3.x^2.\frac{1}{x}+3.x.\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right.$
$\left.+\left(x^4 + {}^4C_1x^{4-1}.\frac{1}{x} + {}^4C_2x^{4-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^4C_3x^{4-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4\right)\right\}$
$= x^4\left(1 - 4x - \frac{4}{x} + 6x^2 + 12 + \frac{6}{x^2} - 4x^3 - 12x - \frac{12}{x} - \frac{4}{x^3} + x^4 + 4x^2 + 6 + 4.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$
$= x^4\left(\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{10}{x^2} - \frac{16}{x} + 19 - 16x + 10x^2 - 4x^3 + x^4\right)$
$= 1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8$ **(Ans.)**

2. **(i)** $(3-x)^5 = -x^5\left(1-\frac{3}{x}\right)^5 = -x^5\left\{1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right\}^5$

এখন সহগের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ (পঞ্চম সারি পর্যন্ত):

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

$\therefore (3-x)^5 = -x^5\left\{1 + 5\left(-\frac{3}{x}\right) + 10\left(-\frac{3}{x}\right)^2 + 10\left(-\frac{3}{x}\right)^3 + 5\left(-\frac{3}{x}\right)^4 + \left(-\frac{3}{x}\right)^5\right\}$
$= -x^5 + 15x^4 - 90x^3 + 270x^2 - 405x + 243$
$= 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$ **(Ans.)**

(ii) আমরা পাই, $(2+x^2)^5 = x^{10}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^5$

এখন সহগের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ (পঞ্চম সারি পর্যন্ত):

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$\therefore (2+x^2)^5 = x^{10}\left\{1+5.\frac{2}{x^2}+10.\left(\frac{2}{x^2}\right)^2+10.\left(\frac{2}{x^2}\right)^3+5\left(\frac{2}{x^2}\right)^4+\left(\frac{2}{x^2}\right)^5\right\}$$
$$= x^{10}+10x^8+40x^6+80x^4+80x^2+32$$
$$= 32+80x^2+80x^4+40x^6+10x^8+x^{10} \textbf{ (Ans.)}$$

(iii) $\left(3x-\frac{y}{4}\right)^4 = (3x)^4\left\{1+\left(-\frac{y}{12x}\right)\right\}^4$

এখন সহগের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ (চতুর্থ সারি পর্যন্ত):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\therefore \left(3x-\frac{y}{4}\right)^4 = (3x)^4\left\{1+4\left(-\frac{y}{12x}\right)+6\left(-\frac{y}{12x}\right)^2+4\left(-\frac{y}{12x}\right)^3+\left(-\frac{y}{12x}\right)^4\right\}$$
$$= 81x^4\left(1-\frac{y}{3x}+\frac{y^2}{24x^2}-\frac{y^3}{432x^3}+\frac{y^4}{20736x^4}\right)$$
$$= 81x^4-27x^3y+\frac{27}{8}x^2y^2-\frac{3}{16}xy^3+\frac{y^4}{256} \textbf{ (Ans.)}$$

3. বামপক্ষ $= (1+\sqrt{x})^5-(1-\sqrt{x})^5$
$$= \left\{1+{}^5C_1.\sqrt{x}+{}^5C_2(\sqrt{x})^2+{}^5C_3(\sqrt{x})^3+{}^5C_4(\sqrt{x})^4+(\sqrt{x})^5\right\}$$
$$-\left\{1-{}^5C_1\sqrt{x}+{}^5C_2(\sqrt{x})^2-{}^5C_3(\sqrt{x})^3+{}^5C_4(\sqrt{x})^4-(\sqrt{x})^5\right\}$$
$$= 2.{}^5C_1.\sqrt{x}+2.{}^5C_3(\sqrt{x})^3+2(\sqrt{x})^5$$
$= 10\sqrt{x}+20x\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

4. **(i)** $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^9$ এর বিস্তৃতির

7 তম পদ = (6 + 1) তম পদ $= {}^9C_6\left(\frac{4x}{5}\right)^{9-6}\left(-\frac{5}{2x}\right)^6 = 84.\frac{64x^3}{5^3}.\frac{5^6}{64x^6} = \frac{10500}{x^3}$ **(Ans.)**

(ii) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{4}{3x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির

5 তম পদ = (4 + 1) তম পদ $= {}^{12}C_4\left(\frac{3x}{4}\right)^{12-4}.\left(\frac{4}{3x}\right)^4 = 495.\frac{3^8x^8}{4^8}.\frac{4^4}{3^4x^4} = \frac{40095}{256}x^4$ **(Ans.)**

(iii) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ এর বিস্তৃতির

n তম পদ = {(n + 1) + 1} তম পদ $= {}^{3n}C_{n-1}x^{3n-n+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{(3n)!}{(3n-n+1)!\,(n-1)!}.x^{2n+1}.\frac{1}{x^{2n-2}}$
$$= (-1)^{n-1}\frac{(3n)!}{(n-1)!\,(2n+1)!}x^3 \textbf{ (Ans.)}$$

(iv) $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $(8+1)=9$টি। শেষ থেকে ৩য় পদ অর্থাৎ ১ম হতে $(9-2)=7$ম পদ।

বিস্তৃতির শেষ থেকে ৩য় পদটি (7ম পদ) $=(6+1)$ তম পদ $={}^8C_6\left(\frac{4x}{5}\right)^{8-6}\left(-\frac{5}{2x}\right)^6=28.\frac{2^4x^2}{5^2}.\frac{5^6}{2^6x^6}=\frac{4375}{x^4}$ **(Ans.)**

5. (i) মনে করি, $\left\{x^2+\frac{2y}{x}\right\}^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^8 বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$ তম পদ $={}^{10}C_r(x^2)^{10-r}\left(\frac{2y}{x}\right)^r={}^{10}C_r\,x^{20-2r}\,2^r\,y^r.x^{-r}={}^{10}C_r2^ry^r\,x^{20-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^8 আছে,

সুতরাং, $20-3r=8$ বা, $3r=12$ $\therefore r=4$

$\therefore$ $(4+1)$ তম পদ $={}^{10}C_4\,2^4y^4x^{20-3\times4}={}^{10}C_42^4y^4x^8$

$\therefore$ x^8 এর সহগ $={}^{10}C_42^4y^4=3360\,y^4$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{18} বিদ্যমান।

তাহলে, $(r+1)$ তম পদ $={}^{15}C_r(x^2)^{15-r}\left(\frac{3a}{x}\right)^r={}^{15}C_rx^{30-2r}.(3a)^r.x^{-r}={}^{15}C_r(3a)^r.x^{30-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^{18} আছে,

সুতরাং $30-3r=18$ বা, $3r=12$ $\therefore$ $r=4$

$(4+1)$ তম পদ $={}^{15}C_4\,(3a)^4\,x^{30-3\times4}={}^{15}C_4\,(3a)^4\,x^{18}$

$\therefore$ x^{18} এর সহগ $={}^{15}C_4(3a)^4=110565a^4$ **(Ans.)**

(iii) মনে করি, $\left(x^3-\frac{1}{x^4}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{-18} বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $={}^{15}C_r(x^3)^{15-r}.\left(-\frac{1}{x^4}\right)^r={}^{15}C_r.\,x^{45-3r}.(-1)^r.\,x^{-4r}=(-1)^r\,{}^{15}C_r.x^{45-7r}$

যেহেতু পদটিতে x^{-18} বিদ্যমান,

সুতরাং, $45-7r=-18$

বা, $7r=63$

$\therefore$ $r=9$

$\therefore$ $(9+1)$ তম পদ $=(-1)^9\,{}^{15}C_4\,x^{45-7\times9}=-{}^{15}C_4\,x^{-18}$

$\therefore x^{-18}$ এর সহগ $=-{}^{15}C_9=-5005$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x^{10} বিদ্যমান।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $={}^{20}C_r\,(2x^2)^{20-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}^{20}C_r.\,2^{20-r}.\,x^{40-2r}.\,(-1)^r\frac{1}{x^r}=(-1)^r\,{}^{20}C_r\,2^{20-r}\,x^{40-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^{10} বিদ্যমান।

$\therefore 40-3r=10$ বা, $3r=30$ $\therefore r=10$

$\therefore (10+1)$ তম পদ $=(-1)^{10}\,{}^{20}C_{10}\,2^{20-10}.x^{40-30}={}^{20}C_{10}2^{10}x^{10}$

$\therefore x^{10}$ এর সহগ $={}^{20}C_{10}\,2^{10}$ **(Ans.)**

(v) মনে করি, $\left(2x-\frac{1}{x^2\sqrt{3}}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{-2} বিদ্যমান।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $={}^{10}C_r\,(2x)^{10-r}\left(-\frac{1}{x^2\sqrt{3}}\right)^r={}^{10}C_r\,2^{10-r}\,x^{10-r}.\,(-1)^r.\frac{1}{x^{2r}}.\frac{1}{(\sqrt{3})^r}=(-1)^r\,{}^{10}C_r\,2^{10-r}.\frac{1}{(\sqrt{3})^r}.\,x^{10-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^{-2} বিদ্যমান।

সুতরাং $10 - 3r = -2$ বা, $3r = 12 \therefore r = 4$

$\therefore (4+1)$ তম পদ $= (-1)^4\ {}^{10}C_4\, 2^{10-4} \dfrac{1}{(\sqrt{3})^4}\, x^{10-3\times4} = 210 \times 64 \times \dfrac{1}{9} x^{-2}$

$\therefore x^{-2}$ এর সহগ $= 210 \times 64 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{4480}{3}$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, $\left(2x^3 - \dfrac{1}{x}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{12} বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$ তমপদ $= {}^{20}C_r (2x^3)^{20-r} \left(-\dfrac{1}{x}\right)^r = {}^{20}C_r\, 2^{20-r} x^{60-3r} (-1)^r x^{-r} = {}^{20}C_r\, x^{60-4r}\, 2^{20-r} (-1)^r$

যেহেতু পদটিতে x^{12} আছে।

সুতরাং, $60 - 4r = 12$ বা, $4r = 60 - 12$ বা, $4r = 48 \therefore r = 12$

$\therefore x^{12}$ এর সহগ $= {}^{20}C_{12}\, 2^{20-12} (-1)^{12} = 125970 \times 2^8 = 32248320$ **(Ans.)**

(vii) $(1 + x + x^3)^9 = \{(1+x) + x^3\}^9$
$= (1+x)^9 + {}^9C_1 (1+x)^8 . x^3 + {}^9C_2 (1+x)^7 x^6 + \dots\dots$
$= (1 + {}^9C_1 x + \dots\dots + {}^9C_5 x^5 + \dots\dots + x^9)$
$+ {}^9C_1 (1 + {}^8C_1 x + {}^8C_2 x^2 + \dots\dots + x^8).x^3 + \dots\dots$

$\therefore x^5$ এর সহগ $= {}^9C_5 + {}^9C_1 . {}^8C_2$
$= 126 + 9 \times 28$
$= 126 + 252 = 378$ **(Ans.)**

6. (i) $(1+3x)^4 (1-x)^3$ এর বিস্তৃতি $= \{1 + {}^4C_1 . 3x + {}^4C_2 (3x)^2 + {}^4C_3 (3x)^3 + (3x)^4\} (1 - 3x + 3x^2 - x^3)$
$= (1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4)(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$

$\therefore x^5$ এর সহগ $= -54 + 324 - 243 = 27$ **(দেখানো হলো)**

(ii) $(1+x)^4 (1+x^2)^5$ এর বিস্তৃতি
$= (1 + {}^4C_1 x + {}^4C_2 x^2 + {}^4C_3 x^3 + x^4)(1 + {}^5C_1 x^2 + {}^5C_2 x^4 + {}^5C_3 x^6 + {}^5C_4 x^8 + x^{10})$
$= (1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4)(1 + 5x^2 + 10x^4 + 10x^6 + 5x^8 + x^{10})$

$\therefore x^5$ এর সহগ $= 40 + 20 = 60$ **(দেখানো হলো)**

(iii) প্রদত্ত রাশি $= (1-x)^8 (1+x)^7 = (1-x)(1-x)^7 (1+x)^7 = (1-x)(1-x^2)^7$
$= (1-x)\{1 + {}^7C_1(-x^2) + {}^7C_2(-x^2)^2 + {}^7C_3(-x^2)^3 + {}^7C_4(-x^2)^4 + \dots\dots + (-x^2)^7\}$

এ বিস্তৃতি হতে দেখা যায়, x^7-এর সহগ $= {}^7C_3.(-1).(-1)^3 = 35$ **(দেখানো হলো)**

(iv) $(p+2x)^5$ এর বিস্তৃতি $= p^5 + {}^5C_1 p^4 (2x) + {}^5C_2 p^3 (2x)^2 + {}^5C_3 p^2 (2x)^3 + \dots\dots + (2x)^5$

x^3 এর সহগ $= {}^5C_3 . p^2 . 2^3 = 80p^2$

প্রশ্নানুসারে, $80p^2 = 320$ বা, $p^2 = 4 \therefore p = \pm 2$ **(Ans.)**

(v) এখানে, $(1+x)(a-bx)^{12} = (1+x)\{a^{12} + {}^{12}C_1$
$a^{11}(-bx) + {}^{12}C_2 a^{10}(-bx)^2 + \dots\dots + {}^{12}C_7 a^5(-bx)^7 + {}^{12}C_8 a^4(-bx)^8 + \dots\dots + (-bx)^{12}\}$

$\therefore x^8$ এর সহগ $= {}^{12}C_8 a^4(-b)^8 + {}^{12}C_7 a^5(-b)^7$
$= {}^{12}C_8 a^4 b^8 - {}^{12}C_7 a^5 b^7$

শর্তমতে, ${}^{12}C_8 a^4 b^8 - {}^{12}C_7 a^5 b^7 = 0$

বা, $\dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^4 b^8 = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a^5 b^7$

বা, $\dfrac{b^8}{b^7} = \dfrac{8}{5} . \dfrac{a^5}{a^4}$ বা, $b = \dfrac{8}{5} . a \quad \therefore \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{8}$ **(Ans.)**

(vi) $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

$\therefore$ $(a+x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ $4a$.

প্রশ্নমতে, $4a = 16$

বা, $a = \frac{16}{4}$

$\therefore$ $a = 4$ **(Ans.)**

7. (i) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left\{(x)^2 - 2.x.\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

মনে করি, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x-বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r\, x^{12-r}.\left(\frac{-1}{x}\right)^r = {}^{12}C_r\, x^{12-r}.(-1)^r.\, x^{-r} = (-1)^r.\, {}^{12}C_r\, x^{12-2r}$

যেহেতু পদটিতে x^0 আছে,

সুতরাং $12 - 2r = 0$ বা, $2r = 12$ $\therefore r = 6$

$\therefore$ x বর্জিত পদ অর্থাৎ $(6+1)$ তম পদের মান $= (-1)^6\, {}^{12}C_6 = {}^{12}C_6 = 924$ **(Ans.)**

(ii) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= (1+x)^p\left(1 + \frac{1}{x}\right)^q = (1+x)^p\frac{(1+x)^q}{x^q} = \frac{1}{x^q}(1+x)^{p+q}$

এখন, $(1+x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতিতে যে পদে x^q আছে, সেই পদটিই x বর্জিত।

মনে করি, $(1+x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^q বিদ্যমান।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= {}^{p+q}C_r\,.x^r$

যেহেতু পদটিতে x^q বিদ্যমান।

সুতরাং $r = q$

$\therefore$ x বর্জিত পদ অর্থাৎ $(q+1)$ তম পদের মান $= {}^{p+q}C_q = \frac{(p+q)!}{p!q!}$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

$$(1+x)^p\left(1+\frac{1}{x}\right)^q = (1+x)^p\frac{(1+x)^q}{x^q}$$

$$= \frac{1}{x^q}(1+x)^{p+q}$$

$$= \frac{1}{x^q}\{1 + {}^{(p+q)}C_1x + {}^{(p+q)}C_2x^2 + \ldots + {}^{(p+q)}C_qx^q + \ldots + x^{p+q}\}$$

$\therefore$ x বর্জিত পদ $= {}^{(p+q)}C_q$

$$= \frac{(p+q)!}{p!q!}$$

(iii) মনে করি, $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত। অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r(2x)^{12-r}\left(-\frac{1}{4x^2}\right)^r = {}^{12}C_r.\, 2^{12-r}.\, x^{12-r}.\, (-1)^r.\, 4^{-r}.x^{-2r} = (-1)^r\, {}^{12}C_r 2^{12-r}.\, 4^{-r}.x^{12-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^0 আছে, সুতরাং $12 - 3r = 0$

$\therefore$ $r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদ অর্থাৎ $(4+1)$-তম পদ $= (-1)^4\, {}^{12}C_4\, 2^{12-4}\, 4^{-4}\, x^{12-12} = (-1)^4\, {}^{12}C_4\, 2^8\, 4^{-4} = 495$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদটি $= {}^{12}C_r\,(2x^3)^{12-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r\, {}^{12}C_r 2^{12-r}.\, x^{36-3r}\, x^{-r} = (-1)^r\, {}^{12}C_r 2^{12-r}.\, x^{36-4r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত, অর্থাৎ x এর ঘাত শূন্য।
সুতরাং, $36-4r=0$

$\therefore$ $r=9$ অর্থাৎ $(9+1)=10$ তম পদ $=(-1)^9\,{}^{12}C_9 2^{12-9}.x^{36-36}=-{}^{12}C_9 2^3$

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $=-{}^{12}C_9 2^3=-1760$ **(Ans.)**

(v) মনে করি, $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $={}^{15}C_r(3x)^{15-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r={}^{15}C_r\,3^{15-r}x^{15-r}(-1)^r.2^r.x^{-2r}={}^{15}C_r(-1)^r.3^{15-r}.2^r x^{15-3r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত অর্থাৎ x এর ঘাত শূন্য।
সুতরাং $15-3r=0$ $\therefore r=5$

$\therefore (5+1)=6$ তম পদ $={}^{15}C_5(-1)^5 3^{15-5}2^5x^{15-5}={}^{15}C_5(-1)^5 3^{10}.2^5=-{}^{15}C_5 2^5 3^{10}$

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $=-{}^{15}C_5 2^5 3^{10}$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি ধ্রুব অর্থাৎ x বর্জিত।

এখানে, $(r+1)$ তম পদ $={}^{18}C_r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-r}(-x)^r={}^{18}C_r(x^{-2})^{18-r}(-1)^r.x^r=(-1)^r\,{}^{18}C_r x^{-36+2r}.x^r=(-1)^r.{}^{18}C_r x^{3r-36}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত, অর্থাৎ x এর ঘাত শূন্য।
সুতরাং $3r-36=0$ $\therefore r=12$

$\therefore (12+1)$ তম $=13$ তম পদ $=(-1)^{12}\,{}^{18}C_{12}\,x^0=(-1)^{12}\,{}^{18}C_{12}$

সুতরাং, 13 তম পদটি ধ্রুব পদ এবং ঐ পদের মান $=(-1)^{12}.\,{}^{18}C_{12}=18564$

Ans. 13 তম এবং 18564.

(vii) $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে

$(r+1)$ তম পদ $={}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r={}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{20-2r}.(-1)^r.2^{-r}.x^{-3r}=(-1)^r\,{}^{10}C_r.2^{10-2r}.x^{20-5r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত সুতরাং $20-5r=0$ $\therefore r=4$

$(4+1)$ তম $=5$তম পদ $=(-1)^4\,{}^{10}C_4\,2^2.x^0={}^{10}C_4\times 2^2=4.\frac{10.9.8.7}{4.3.2}=4.210=840$

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $=840$

Ans. 5 তম পদ এবং 840

(viii) প্রদত্ত রাশি $=(1+4x)^p\left(1+\frac{1}{4x}\right)^q=(1+4x)^p\left(\frac{1+4x}{4x}\right)^q=(4x)^{-q}(1+4x)^{p+q}=\frac{1}{x^q}.4^{-q}(1+4x)^{p+q}$

$\therefore (1+4x)^p\left(1+\frac{1}{4x}\right)^q$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদটি x^q এর সহগ।

মনে করি, পদটি $4^{-q}(1+4x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^q আছে।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $=4^{-q}.{}^{p+q}C_r(4x)^r=4^{r-q}.{}^{p+q}C_r x^r$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটিতে x^q আছে, $\therefore r=q$

$\therefore$ x বর্জিত পদ অর্থাৎ $(q+1)$ তম পদ $={}^{p+q}C_q\,4^{q-q}={}^{p+q}C_q\,4^0={}^{p+q}C_q=\frac{(p+q)!}{q!\,(p+q-q)!}=\frac{(p+q)!}{q!\,p!}$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

$$(1+4x)^p\left(1+\frac{1}{4x}\right)^q=(1+4x)^p\frac{(1+4x)^q}{4^qx^q}$$

$$=\frac{1}{4^qx^q}(1+4x)^{p+q}$$

$$=\frac{1}{4^qx^q}\{1+{}^{(p+q)}C_1 4x+{}^{(p+q)}C_2(4x)^2+\ldots+{}^{(p+q)}C_q(4x)^q+\ldots+(4x)^{p+q}\}$$

$\therefore$ x বর্জিত পদ $= \frac{1}{4^q} \cdot {}^{(p+q)}C_q . 4^q$

$= {}^{(p+q)}C_q$

$= \frac{(p+q)!}{p!\, q!}$

(ix) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_r\, x^{2n-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}^{2n}C_r\, x^{2n-r} (-1)^r . x^{-r} = (-1)^r\, {}^{2n}C_r\, x^{2n-2r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

সুতরাং $2n - 2r = 0 \quad \therefore n = r$

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $= (-1)^n . {}^{2n}C_n = (-1)^n . \frac{(2n)!}{n!\, n!}$

Ans. $(n+1)$ তম পদ, $(-1)^n . \frac{(2n)!}{n!\, n!}$

(x) প্রদত্ত রাশি $= \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

মনে করি, বিস্তৃতিটির $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r\, (2)^{15-r} . \left(\frac{-3}{x}\right)^r = {}^{15}C_r\, 2^{15-r} (-3)^r . x^{-r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত

$\therefore \quad -r = 0$

$\therefore \quad r = 0$

$\therefore \quad (r+1) = (0+1) = 1$ বা ১ম পদ x বর্জিত এবং এর মান $= {}^{15}C_0\, 2^{15-0} (-3)^0 = 32768$ **(Ans.)**

(xi) দেওয়া আছে, $a = x^3$

এবং $\left(2a - \frac{2}{a}\right)^{10}$ বা, $\left(2x^3 - \frac{2}{x^3}\right)^{10}$

ধরি, $\left(2x^3 - \frac{2}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ ধ্রুবক অর্থাৎ, x বর্জিত।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r\, (2x^3)^{10-r} \left(\frac{-2}{x^3}\right)^r$

$= (-1)^r . {}^{10}C_r . 2^{10-r+r} . x^{3(10-2r)}$

$= (-1)^r . {}^{10}C_r . 2^{10} . x^{3(10-2r)}$

$(r+1)$ তম পদ x বর্জিত হলে,

$3(10 - 2r) = 0$

বা, $10 - 2r = 0$

বা, $r = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore (5+1)$ বা 6-তম পদটি ধ্রুবক এবং

তার মান $= (-1)^5 . {}^{10}C_5 . 2^{10} = -258048$ **(Ans.)**

8. (i) ধরি, $\left(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r \left(\sqrt{x}\right)^{10-r} . \left(-\frac{k}{x^2}\right)^r = (-1)^r k^r . {}^{10}C_r . x^{\frac{10-r}{2} - 2r}$

$= (-1)^r k^r . {}^{10}C_r . x^{\frac{10-r-4r}{2}} = (-1)^r k^r . {}^{10}C_r . x^{\frac{10-5r}{2}}$

এখন, $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত হলে $\frac{10-5r}{2} = 0$ বা, $10-5r=0$ $\therefore r=2$

$\therefore$ x বর্জিত পদ $= (-1)^2 k^2 .{}^{10}C_2 = k^2\, {}^{10}C_2$

প্রশ্নমতে, $k^2 \cdot {}^{10}C_2 = 405$ বা, $k^2 = \frac{405}{{}^{10}C_2}$ বা, $k^2 = \frac{405}{45}$ বা, $k^2 = 9$ $\therefore k = \pm 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k = \pm 3$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি y বর্জিত।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদটি $= {}^{10}C_r \left(\frac{x^4}{y^3}\right)^{10-r} \left(\frac{y^2}{2x}\right)^r = {}^{10}C_r x^{40-4r} y^{-30+3r} .2^{-r}.y^{2r}.x^{-r} = {}^{10}C_r\, x^{40-5r} 2^{-r} y^{-30+5r}$

যেহেতু, $(r+1)$ তম পদটি y বর্জিত, অর্থাৎ y এর ঘাত শূন্য।

সুতরাং $-30+5r=0$ $\therefore$ $r=6$

$\therefore$ $(6+1)$ তম পদ বা 7 তম পদ $= {}^{10}C_6\, x^{40-30}\, 2^{-6}\, y^0$

$\therefore$ y বর্জিত পদটির মান $= {}^{10}C_6 x^{40-30} 2^{-6} = \frac{1}{2^6} . {}^{10}C_6\, x^{10} = \frac{105x^{10}}{32}$

Ans. 7 তম পদ এবং $\frac{105x^{10}}{32}$

(iii) ধরি,

$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$$\begin{aligned}
\therefore (r+1) \text{ তম পদ } &= {}^{2n}C_r\, (x^p)^{2n-r} \left(\frac{1}{x^p}\right)^r \\
&= {}^{2n}C_r\, x^{2pn-pr} . x^{-pr} \\
&= {}^{2n}C_r\, x^{2pn-2pr} \\
&= {}^{2n}C_r\, x^{2p(n-r)}
\end{aligned}$$

$n = r$ হলে $(r+1)$ তম পদ

$= {}^{2r}C_r\, x^{2p(r-r)} = {}^{2r}C_r$

$\therefore$ $n = r$ হলে প্রদত্ত বিস্তৃতিতে সর্বদা একটি x বর্জিত পদ থাকবে।

$n = 5$ হলে x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5 = 252$ **(Ans.)**

9. (i) $\left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

অর্থাৎ, $(r+1)$ তম পদ $= {}^nC_r 3^{n-r} . \left(\frac{x}{2}\right)^r = {}^nC_r\, (3)^{n-r} .2^{-r} . x^r$

যদি $(r+1)$ তম পদে x^7 থাকে, তবে $r = 7$

আবার, যদি $(r+1)$ তম পদে x^8 থাকে তবে $r = 8$

সুতরাং x^7 এবং x^8-এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে,

${}^nC_7\, 3^{n-7}\, 2^{-7} = {}^nC_8 .3^{n-8} . 2^{-8}$

বা, ${}^nC_7 . 3^n . 3^{-7} . 2^{-7} = {}^nC_8 .3^n . 3^{-8} . 2^{-8}$

বা, ${}^nC_7 = {}^nC_8 .3^{-1} . 2^{-1}$

বা, $\frac{n!}{7!\,(n-7)!} = \frac{n!}{8!\,(n-8)!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ বা, $\frac{1}{7!\,(n-7)\,(n-8)!} = \frac{1}{8 \times 7!\,(n-8)!} \cdot \frac{1}{6}$

বা, $\frac{1}{n-7} = \frac{1}{48}$ বা, $n - 7 = 48$ বা, $n = 48 + 7$

$\therefore$ $n = 55$ **(Ans.)**

(ii) $(1+x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ
অর্থাৎ, $(r+1)$ তম পদ $= {}^{2n+1}C_r\, x^r$
$\therefore x^r$ এর সহগ $= {}^{2n+1}C_r$
x^{r+1} এর সহগ $= {}^{2n+1}C_{r+1}$
প্রশ্নানুসারে, ${}^{2n+1}C_r = {}^{2n+1}C_{r+1}$
বা, $r + r + 1 = 2n + 1$ [সূত্র ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে $x + y = n$]
বা, $2r = 2n$ $\therefore r = n$ **(Ans.)**

(iii) $(1+x)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে
$(2r+4)$ তম পদ $= {}^{18}C_{2r+3}\, x^{2r+3}$ এবং $(r-2)$ তম পদ $= {}^{18}C_{r-3}\, x^{r-3}$
প্রশ্নানুসারে, ${}^{18}C_{2r+3} = {}^{18}C_{r-3}$
বা, $2r + 3 + r - 3 = 18$ [সূত্র ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে $x + y = n$]
বা, $3r = 18$
$\therefore r = 6$ **(Ans.)**

(iv) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি $= 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots\cdots\cdots + {}^nC_rx^r + {}^nC_{r+1}x^{r+1} + {}^nC_{r+2}x^{r+2} + \cdots\cdots\cdots + x^n$
সুতরাং বিস্তৃতি হতে, $(r+1)$ তম পদের সহগ $= {}^nC_r$ এবং $(r+3)$ বা $(r+2+1)$ তম পদের সহগ $= {}^nC_{r+2}$
প্রশ্নানুসারে, ${}^nC_{r+2} = {}^nC_r$
বা, $r + 2 + r = n$ [সূত্র ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে $x + y = n$]
$\therefore 2r = n - 2$ **(দেখানো হলো)**

(v) $(1+x)^{14}$ -এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{14}C_r\, x^r$
এবং $(3r-1)$ বা $\{(3r-2)+1\}$ তম পদ $= {}^{14}C_{3r-2}\, x^{3r-2}$
শর্তমতে, ${}^{14}C_r = {}^{14}C_{3r-2}$
বা, $r + 3r - 2 = 14$ [সূত্র ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে $x + y = n$]
বা, $4r = 16$
$\therefore r = 4$ **(Ans)**

(vi) প্রদত্ত রাশি $= (4x+3)^{34} = (3+4x)^{34}$
মনে করি, ক্রমিক পদ দুইটি $(r+1)$ এবং $\{(r+1)+1\}$ তম পদ।
$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= {}^{34}C_r\, 3^{34-r}\,(4x)^r = {}^{34}C_r\, 3^{34-r}\cdot 4^r\cdot x^r$
$\therefore$ x^r এর সহগ $= {}^{34}C_r\, 3^{34-r}\cdot 4^r$
আবার, $(r+2)$ তম পদ $= {}^{34}C_{r+1}\, 3^{34-r-1}\,(4x)^{r+1} = {}^{34}C_{r+1}\, 3^{33-r}\cdot 4^{r+1}\cdot x^{r+1}$
$\therefore$ x^{r+1} এর সহগ $= {}^{34}C_{r+1}\, 3^{33-r}\cdot 4^{r+1}$
শর্তমতে, ${}^{34}C_r\cdot 3^{34-r}\cdot 4^r = {}^{34}C_{r+1}\cdot 3^{33-r}\cdot 4^{r+1}$
বা, $\dfrac{(34)!\, 3.\, 3^{33-r}.\, 4^r}{r!\,(34-r)!} = \dfrac{(34)!\, 3^{33-r}.4.4^r}{(r+1)!\,(34-r-1)!}$
বা, $\dfrac{3}{34-r} = \dfrac{4}{r+1}$ [$\because n! = n(n-1)!$]
বা, $3r + 3 = 136 - 4r$ বা, $7r = 133$ $\therefore r = 19$
$\therefore$ $r + 1 = 19 + 1 = 20$
$\therefore$ 20 তম পদে x এর ঘাত 19, 21 তম পদে x এর ঘাত $= 19 + 1 = 20$
Ans. 19 এবং 20

(vii) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots\cdots\cdots + {}^nC_{r-1}\,x^{r-1} + {}^nC_rx^r + {}^nC_{r+1}\,x^{r+1} + \cdots\cdots\cdots + x^n$
x^{r-1} এর সহগ $= {}^nC_{r-1}$, x^r এর সহগ $= {}^nC_r$, এবং x^{r+1} এর সহগ $= {}^nC_{r+1}$
প্রশ্নানুসারে, সহগগুলো সমান্তর প্রগমনে আছে।

সুতরাং, $^nC_r - {^nC_{r-1}} = {^nC_{r+1}} - {^nC_r}$

বা, $^nC_{r+1} + {^nC_{r-1}} = 2.{^nC_r}$

বা, $\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = 2.\frac{n!}{r!(n-r)!}$

বা, $\frac{1}{(r+1)r(r-1)!(n-r-1)!} + \frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!} = 2.\frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$

বা, $\frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(n-r)(n-r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$

বা, $\frac{(n-r)(n-r+1)+r(r+1)}{r(r+1)(n-r)(n-r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$

বা, $(n-r)(n-r+1)+r(r+1) = \frac{2r(r+1)(n-r)(n-r+1)}{r(n-r)}$

বা, $(n-r)(n-r+1)+r(r+1) = 2(r+1)(n-r+1)$

বা, $(n-r)^2 + (n-r) + r(r+1) = 2(r+1)(n-r+1)$

বা, $n^2 - 2nr + r^2 + n - r + r^2 + r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$

বা, $n^2 - 2nr + 2r^2 + n = 2nr - 2r^2 + 2n + 2$

বা, $n^2 - 4nr + 4r^2 - n - 2 = 0$

বা, $n^2 - 4nr - n - 2 + 4r^2 = 0$

$\therefore n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$ **(প্রমাণিত)**

(viii) মনে করি, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে ক্রমিক পদত্রয় $(r+1)$ তম, $(r+2)$ তম এবং $(r+3)$ তম

এখন, $(r+1)$ তম পদ $= {^nC_r}x^r$

$(r+2)$ বা $(r+1+1)$ তম পদ $= {^nC_{r+1}}\, x^{r+1}$ এবং

$(r+3)$ বা $(r+2+1)$তম পদ $= {^nC_{r+2}}\, x^{r+2}$

$\therefore x^r, x^{r+1}$ এবং x^{r+2} পদত্রয়ের সহগ যথাক্রমে ^nC_r, $^nC_{r+1}$ ও $^nC_{r+2}$

প্রশ্নানুসারে, $^nC_r : {^nC_{r+1}} : {^nC_{r+2}} = 1 : 7 : 42$

সুতরাং, $^nC_r : {^nC_{r+1}} = 1 : 7$

বা, $\frac{^nC_r}{^nC_{r+1}} = \frac{1}{7}$ বা, $7.{^nC_r} = {^nC_{r+1}}$ বা, $7.\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$

বা, $7.\frac{1}{r!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{1}{(r+1)r!(n-r-1)!}$ বা, $\frac{7}{n-r} = \frac{1}{r+1}$

বা, $7(r+1) = n-r$ বা, $7r+7+r = n$ $\therefore 8r = n-7 \cdots\cdots\cdots$ (i)

আবার, $^nC_{r+1} : {^nC_{r+2}} = 7 : 42$

বা, $\frac{^nC_{r+1}}{^nC_{r+2}} = \frac{7}{42}$

বা, $6.{^nC_{r+1}} = {^nC_{r+2}}$

বা, $6.\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = \frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$

বা, $\frac{6}{(r+1)!(n-r-1)(n-r-2)!} = \frac{1}{(r+2)(r+1)!(n-r-2)!}$

বা, $\frac{6}{n-r-1} = \frac{1}{r+2}$

বা, $6(r+2) = n - r - 1$

বা, $6r + 12 + r = n - 1$

$\therefore\ 7r = n - 13 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

এখন, (i) নং হতে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$8r - 7r = n - 7 - n + 13 \ \therefore\ r = 6$

(ii) এ $r = 6$ বসিয়ে $7 \times 6 = n - 13$

বা, $n = 42 + 13 = 55$ **(Ans.)**

(ix) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ হতে ৪র্থ পদ = প্রথম হতে ডানদিকে $(n - r + 2)$

$= (12 - 4 + 2)$ তম পদ $= 10$ তম পদ $= (9 + 1)$ তম পদ $= {}^{12}C_9\, x^{12-9}\left(-\frac{1}{x}\right)^9$

$= {}^{12}C_9\, x^3\, (-1)^9\, x^{-9} = -\,{}^{12}C_9\, x^{-6} = -\,220x^{-6}$ **(Ans.)**

(x) $\beta = 0$ হলে, $z = \alpha$

তাহলে, $\left(2z^2 + \frac{R}{z^3}\right)^{10} = \left(2\alpha^2 + \frac{R}{\alpha^3}\right)^{10}$

এখন, $\left(2\alpha^2 + \frac{R}{\alpha^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$তম পদ $= {}^{10}C_r\, (2\alpha^2)^{10-r}\left(\frac{R}{\alpha^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r \,.\, 2^{10-r}\, \alpha^{20-2r} .\, R^r .\, \frac{1}{\alpha^{3r}} = {}^{10}C_r .\, 2^{10-r}\, \alpha^{20-2r-3r} .\, R^r = {}^{10}C_r .\, 2^{10-r}\, \alpha^{20-5r} .\, R^r$

α^5 এর সহগের জন্য $20 - 5r = 5 \Rightarrow 5r = 20 - 5 \Rightarrow 5r = 15 \quad \therefore r = 3$

$\therefore \alpha^5$ এর সহগ $= {}^{10}C_3\, 2^{10-3} .\, R^3 = {}^{10}C_3\, 2^7 .\, R^3$

আবার, α^{15} এর সহগের জন্য, $20 - 5r = 15 \Rightarrow 5r = 5 \therefore r = 1$

$\therefore\ \alpha^{15}$ এর সহগ $= {}^{10}C_1\, 2^{10-1} .\, R = {}^{10}C_1 .\, 2^9\, R$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3\, 2^7 \,.\, R^3 = {}^{10}C_1 \,.\, 2^9 .\, R$

$$\Rightarrow \frac{R^3}{R} = \frac{{}^{10}C_1}{{}^{10}C_3} \cdot \frac{2^9}{2^7}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{10}{120} \cdot 2^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore R = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$ **(Ans.)**

(xi) $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r = {}^{11}C_r\, x^{22-2r}\frac{3^r}{x^r} = {}^{11}C_r \,.\, 3^r \,.\, x^{22-3r}$

এবং $(r+2)$ তম পদ $= {}^{11}C_{r+1}\, (x^2)^{11-r-1}\left(\frac{3}{x}\right)^{r+1} = {}^{11}C_{r+1}\, x^{22-2r-2}\frac{3^{r+1}}{x^{r+1}} = {}^{11}C_{r+1} \,.\, 3^{r+1} \,.\, x^{22-3r-3}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদ ও $(r+2)$ তম পদের সহগ সমান।

$\therefore\ {}^{11}C_r \,.\, 3^r = {}^{11}C_{r+1} \,.\, 3^{r+1}$

বা, $\frac{11!}{r!\,(11-r)!} .\, 3^r = \frac{11!}{(r+1)!\,(11-r-1)!} \,.\, 3^{r+1}$

বা, $\frac{1}{r!\,(11-r)\,(11-r-1)!} = \frac{3}{(r+1)\,r!\,(11-r-1)!}$

বা, $\frac{1}{11-r} = \frac{3}{r+1}$

বা, $r + 1 = 33 - 3r$

বা, $r + 3r = 33 - 1$

বা, $4r = 32 \therefore r = 8$ **(Ans.)**

(xii) ধরি, ক্রমিক পদ দুইটি T_{r+1} ও T_{r+2}

$\therefore \dfrac{T_{r+1} \text{ এর সহগ}}{T_{r+2} \text{ এর সহগ}} = \dfrac{11}{20}$

বা, $\dfrac{{}^{20}C_r \cdot 2^r}{{}^{20}C_{r+1} \cdot 2^{r+1}} = \dfrac{11}{20}$

বা, $\dfrac{\dfrac{\lfloor 20}{\lfloor r \lfloor 20-r}}{\dfrac{\lfloor 20}{\lfloor r+1 \lfloor 19-r} \times 2} = \dfrac{11}{20}$

বা, $\dfrac{r+1}{20-r} = \dfrac{22}{20}$

বা, $20r + 20 = 440 - 22r$

বা, $42r = 420 \quad \therefore r = 10$

$\therefore$ 11 তম পদ ও 12 তম পদ

$\therefore {}^{20}C_{10}(2y)^{10}$ এবং ${}^{20}C_{11}(2y)^{11}$

(xiii) $(1 + x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে ধরি

$(r + 1)$ তম ও $(r + 2)$ তম পদ দুইটি ক্রমিক পদ।

$\therefore (r + 1)$ তম পদ $= {}^{24}C_r\, x^r$

$\therefore$ সহগ $= {}^{24}C_r$

এবং $(r + 2)$ তম পদ $= {}^{24}C_{r+1}\, x^{r+1}$

$\therefore$ সহগ $= {}^{24}C_{r+1}$

শর্তমতে, ${}^{24}C_r : {}^{24}C_{r+1} = 4 : 1$

অথবা, ${}^{24}C_{r+1} : {}^{24}C_r = 4 : 1$

এখন, ${}^{24}C_r : {}^{24}C_{r+1} = 4 : 1$

$\Rightarrow \dfrac{{}^{24}C_{r+1}}{{}^{24}C_r} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{24-r}{r+1} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow r + 1 = 96 - 4r$

$\Rightarrow 5r = 95 \quad \therefore r = 19$

$\therefore (19 + 1)$ এবং $(19 + 2)$ অর্থাৎ 20 তম এবং 21 তম পদ দুইটি ক্রমিক পদ।

আবার, ${}^{24}C_{r+1} : {}^{24}C_r = 4 : 1$

$\Rightarrow \dfrac{{}^{24}C_{r+1}}{{}^{24}C_r} = 4$

$\Rightarrow \dfrac{24-r}{r+1} = 4$

$\Rightarrow 4r + 4 = 24 - r \Rightarrow 5r = 20 \therefore r = 4$

$\therefore (4 + 1)$ এবং $(4 + 2)$ তম পদ অর্থাৎ 5-তম এবং 6-তম পদ দুইটি ক্রমিক পদ। **(Ans.)**

10. **(i)** এখানে, প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি = $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতি $(a+3x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}(3x) + {}^nC_2a^{n-2}(3x)^2 + \cdots + (3x)^n$
সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $a^n = b \cdots\cdots\cdots$ (i)

$${}^nC_1a^{n-1}(3x) = \frac{21}{2}bx \quad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

এবং $${}^nC_2\,a^{n-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2 \cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

এখন, (ii) নং হতে পাই, $n.\frac{a^n}{a}.3x = \frac{21}{2}bx$

বা, $n.\frac{b}{a} = \frac{7}{2}b$ [(i) হতে]

$\therefore\ n = \frac{7a}{2} \cdots\cdots\cdots$ (iv)

আবার (iii) নং হতে পাই, ${}^nC_2\,a^{n-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{a^n}{a^2}.9x^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b}{a^2} = \frac{21}{4}b$ [(i) নং হতে $a^n = b$]

বা, $n(n-1).\,\frac{1}{a^2} = \frac{21}{2}$

বা, $2n\,(n-1) = 21a^2$

বা, $2.\frac{7a}{2}\left(\frac{7a}{2}-1\right) = 21a^2$[(iv) নং হতে]

বা, $\frac{7a-2}{2} = 3a$ [উভয়পক্ষকে 7a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $7a-2 = 6a\ \therefore\ a = 2$

(iv) নং এ $a = 2$ বসিয়ে, $n = \frac{7}{2}\times 2 = 7$

(i) নং এ $a = 2$, $b = 7$ বসিয়ে, $b = 2^7$

$\therefore$ a, b ও n এর মান যথাক্রমে 2, 128 ও 7. **(Ans.)**

(ii) $(a+2x)^n = a^n + {}^nC_1\,a^{n-1}\,2x + {}^nC_2\,a^{n-2}\,(2x)^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + (2x)^n$
সুতরাং প্রশ্নানুসারে,

$a^n = b$ .... (i)

${}^nC_1\,a^{n-1}\,(2x) = \frac{10}{3}bx$ .... (ii)

${}^nC_2\,a^{n-2}\,(2x)^2 = \frac{40}{9}bx^2$ .... (iii)

(ii) নং হতে, $n\,\frac{a^n}{a}.\,2x = \frac{10}{3}bx$ বা, $n.\frac{b}{a} = \frac{5}{3}b$ বা, $\frac{n}{a} = \frac{5}{3}$ বা, $5a = 3n\ \ \therefore\ a = \frac{3n}{5}$ .... (iv)

(iii) নং হতে, $\frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{a^n}{a^2}\,4x^2 = \frac{40}{9}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b}{a^2} = \frac{10}{9}b$ বা, $9n(n-1) = 20a^2$

বা, $9n(n-1) = 20\left(\frac{3n}{5}\right)^2$ বা, $9n(n-1) = 20\times\frac{9n^2}{25}$ বা, $25\,n(n-1) = 20n^2$

বা, $5(n-1) = 4n$ বা, $5n-5 = 4n$ বা, $5n-4n = 5\ \therefore\ n = 5$

(iv) নং এ $n = 5$ বসিয়ে, $a = \frac{3}{5} \times 5 = 3$

(i) নং এ a ও n এর মান বসিয়ে, $3^5 = b$ বা, $b = 3^5$

$\therefore a = 3, b = 3^5$ ও $n = 5$

(iii) $(1+x)^n = 1 + {}^nc_1x + {}^nc_2x^2 + {}^nc_3x^3 + {}^nc_4x^4 + {}^nc_5x^5 + {}^nc_6x^6 + {}^nc_7x^7 + {}^nc_8x^8 + \dots\dots\dots + x^n$

প্রশ্নমতে, ${}^nc_5x^5 = a$; ${}^nc_6x^6 = b$; ${}^nc_7x^7 = c$ এবং ${}^nc_8x^8 = d$

এখন, $\frac{a}{b} = \frac{{}^nc_5}{{}^nc_6}.\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{ax}{b} = \frac{6}{n-5}\left[\because \frac{{}^nc_{r+1}}{{}^nc_r} = \frac{n-r}{r+1}\right]$

$\frac{b}{c} = \frac{{}^nc_6}{{}^nc_7}.\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{bx}{c} = \frac{7}{n-6}$

$\frac{c}{d} = \frac{{}^nc_7}{{}^nc_8}.\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{cx}{d} = \frac{8}{n-7}$

এখন, $\frac{\frac{bx}{c}}{\frac{ax}{b}} = \frac{\frac{7}{n-6}}{\frac{6}{n-5}} \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{7(n-5)}{6(n-6)}$

$\Rightarrow \frac{b^2-ac}{ac} = \frac{7n-35-6n+36}{6(n-6)} = \frac{n+1}{6(n-6)} \dots$ (i)

আবার, $\frac{\frac{cx}{d}}{\frac{bx}{c}} = \frac{\frac{8}{n-7}}{\frac{7}{n-6}}$

$\Rightarrow \frac{c^2}{bd} = \frac{8(n-6)}{7(n-7)} \Rightarrow \frac{c^2}{c^2-bd} = \frac{8(n-6)}{8n-48-7n+49} = \frac{c^2}{c^2-bd} = \frac{8(n-6)}{n+1}$

$\therefore \quad \frac{c^2-bd}{c^2} = \frac{n+1}{8(n-6)} \dots$.(ii)

(i) ÷ (ii) করে পাই,

$\frac{b^2-ac}{ac} \times \frac{c^2}{c^2-bd} = \frac{(n+1)}{6(n-6)} \times \frac{8(n-6)}{(n+1)}$

$\Rightarrow \frac{b^2-ac}{c^2-bd} = \frac{4a}{3c}$ **(প্রমাণিত)**

(iv) প্রদত্ত রাশি, $= (x+a)^n$

$\therefore$ ১ম পদ, $T_1 = x^n = 729$

২য় পদ, $T_2 = {}^nC_1\, x^{n-1}\, a = nx^{n-1}.\, a = 7290$

৩য় পদ, $T_3 = {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 = \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\, a^2 = 30375$

এখন, $T_2 \div T_1 = \frac{nx^{n-1}a}{x^n} = 10$ বা, $\frac{nx^n.x^{-1}.a}{x^n} = 10$

বা, $\frac{na}{x} = 10 \dots \dots$ (i)

আবার, $T_3 \div T_2 = \frac{\frac{n(n-1)}{2}x^n.x^{-2}a^2}{nx^n.x^{-1}.a} = \frac{30375}{7290}$

বা, $\frac{n-1}{2}.\frac{a}{x} = \frac{25}{6} \dots \dots$ (ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{na}{x} \cdot \frac{2x}{(n-1)a} = 10 \times \frac{6}{25}$

বা, $12n - 12 = 10n$ বা, $2n = 12$ $\therefore n = 6$

T_1 হতে, $x^6 = 729$ বা, $x^6 = 3^6$ $\therefore x = 3$

(i) নং হতে, $\frac{6 \times a}{3} = 10$ $\therefore a = 5$ **(Ans.)**

11. (i) $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা $= 8 + 1 = 9$, যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, এর মধ্যপদ হবে একটি এবং এটি $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা $(4 + 1)$ তম পদ।

$\therefore$ $(4+1)$ তম পদ $= {}^8C_4(3x^2)^{8-4}\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 = {}^8C_4(3x^2)^4.(-1)^4.(2x)^{-4} = {}^8C_4.3^4.x^8\,2^{-4}.x^{-4} = {}^8C_4.\frac{3^4}{2^4}x^4$

$= {}^8C_4\left(\frac{3}{2}\right)^4 x^4 = \frac{2835}{8}x^4$ **(Ans.)**

(ii) $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা $= 2n + 1 + 1 = (2n + 2)$ টি, যা জোড় সংখ্যা।

অতএব, এর মধ্যপদ হবে দুইটি অর্থাৎ, মধ্যপদদ্বয় $\left(\frac{2n+1-1}{2} + 1\right)$ এবং $\left(\frac{2n+1+1}{2} + 1\right)$

অর্থাৎ $(n + 1)$ তম এবং $(n + 2)$ তম পদ।

এখন, $(n + 1)$ তম পদ $= {}^{2n+1}C_n\left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n}\left(\frac{x}{a}\right)^n = {}^{2n+1}C_n\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^n = {}^{2n+1}C_n\frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}.\frac{x^n}{a^n} = {}^{2n+1}C_n\frac{a}{x}$

এবং $(n + 2)$ তম পদ $= {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} = {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\frac{a}{x}\right)^n\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} = {}^{2n+1}C_{n+1}.\frac{x}{a}$

Ans. ${}^{2n+1}C_n\frac{a}{x}$ ও ${}^{2n+1}C_{n+1}\frac{x}{a}$.

(iii) $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা $= 10 + 1 = 11$; যা বিজোড় সংখ্যা।

অতএব মধ্যপদ হবে একটি। অর্থাৎ মধ্যপদটি $\left(\frac{10}{2} + 1\right)$ তম বা 6 তম।

$\therefore$ 6 তম পদ $= {}^{10}C_5(3x^2)^{10-5}\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 = -{}^{10}C_5.\,3^5x^{10}.\frac{1}{2^5.x^5} = -{}^{10}C_5\left(\frac{3}{2}\right)^5x^5$ **(Ans.)**

(iv) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{17}$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা $= 17 + 1 = 18$, যা জোড়। সুতরাং, এর মধ্যপদ হবে দুইটি।

অর্থাৎ মধ্যপদদ্বয় $\left(\frac{17-1}{2} + 1\right)$ বা, $(8 + 1)$ তম এবং $\left(\frac{17+1}{2} + 1\right)$ বা $(9 + 1)$ তম।

$\therefore$ $(8+1)$ তম পদ $= {}^{17}C_8\left(\frac{x}{y}\right)^{17-8}\left(\frac{y}{x}\right)^8 = {}^{17}C_8.\frac{x^9}{y^9}.\frac{y^8}{x^8} = {}^{17}C_8\left(\frac{x}{y}\right)$

এবং $(9+1)$ তম পদ $= {}^{17}C_9\left(\frac{x}{y}\right)^{17-9}.\left(\frac{y}{x}\right)^9 = {}^{17}C_9\frac{y^8}{x^8}.\frac{x^9}{y^9} = {}^{17}C_9.\left(\frac{y}{x}\right)$

Ans. ${}^{17}C_8\left(\frac{x}{y}\right)$ ও ${}^{17}C_9\left(\frac{y}{x}\right)$.

(v) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{17}$

দ্বিপদী রাশির ঘাতের সূচক $n = 17$ অর্থাৎ বিজোড় সংখ্যা। $\therefore$ পদের সংখ্যা জোড়। সুতরাং মধ্যপদ থাকবে দুইটি।

একটি মধ্যপদ $\left(\frac{17+1}{2} + 1\right) = (9 + 1) = 10$ তম পদ $= {}^{17}C_9x^{17-9}(-x^{-1})^9 = -{}^{17}C_9x^8x^{-9} = -{}^{17}C_9.\frac{1}{x} = \frac{-24310}{x}$

অপর মধ্যপদ $= \left(\frac{17-1}{2}+1\right) = (8+1) = 9$ তম পদ $= {}^{17}C_8\, x^{17-8}\,(-x^{-1})^8 = {}^{17}C_8\, x^9\, x^{-8} = {}^{17}C_8\, x = 24310\, x$

Ans. $\frac{-24310}{x}$, $24310x$

(vi) $\left(2-\frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $12+1=13$টি যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ, $\left(\frac{12}{2}+1\right)$ তম পদ $= 7$ তম পদ

$\therefore$ 7 বা $(6+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_6\, 2^{12-6} . \left(\frac{-3}{x}\right)^6 = {}^{12}C_6\, 2^6 . \frac{3^6}{x^6} = {}^{12}C_6\, 2^6 . 3^6 . x^{-6}$ **(Ans.)**

(vii) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $12+1=13$টি যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{12}{2}+1\right)$ তম পদ $= 7$ তম পদ

$\therefore$ 7 তম পদ $= {}^{12}C_6\,(2x^2)^{12-6}\left(\frac{-3}{x}\right)^6$

$= {}^{12}C_6\, 2^6\, x^{12}\,(-1)^6\, 3^6\, \frac{1}{x^6}$

$= {}^{12}C_6\, 2^6\, 3^6\, x^6$ **(Ans.)**

12. (i) $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= 8+1 = 9$; যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম বা 5 তম পদ।

$\therefore$ 5 তম পদ $= {}^8C_4 . \left(\frac{k}{2}\right)^{8-4} . 2^4$

প্রশ্নানুসারে, ${}^8C_4\left(\frac{k}{2}\right)^4 . 2^4 = 1120$ বা, $70 . \frac{k^4}{2^4} . 2^4 = 1120$ বা, $k^4 = 16$

বা, $k^2 = 4 \therefore k = \pm 2$ **(Ans.)**

(ii) $(1+2y)^{2n}$; এখানে, $n \in \mathbb{N}$, কাজেই $2n$ জোড় সংখ্যা।
কাজেই, বিস্তৃতিটিতে একটি মাত্র মধ্যপদ আছে।

মধ্যপদটি $= \left(\frac{2n}{2}+1\right)$ তম পদ $= (n+1)$ তম পদ

$\therefore$ মধ্যপদটির মান $T_{n+1} = {}^{2n}C_n . (1)^{2n-n} . (2y)^n = {}^{2n}C_n . (1)^n . (2y)^n = {}^{2n}C_n . (2y)^n$

$\therefore {}^{2n}C_n\,(2y)^n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor 2n-n} . (2y)^n$

$= \frac{2n . (2n-1) . (2n-2) . (2n-3) ..... 4.3.2.1}{\lfloor n . \lfloor n}(2y)^n$

$= \frac{\{2n\,(2n-2)\,(2n-4) .... 4.2\}\ \{(2n-1)\,(2n-3) ... 5.3.1\}}{\lfloor n . \lfloor n}(2y)^n$

$= \frac{2^n\,\{n\,(n-1)\,(n-2) .... 2.1\}\ \{1.3.5 ...... (2n-3)\,(2n-1)\}}{\lfloor n . \lfloor n}2^n . y^n$

$= \frac{\{1.2.3 .... (n-2)\,(n-1)n\}\ \{1.3.5 ..... (2n-3)\,(2n-1)\}}{\lfloor n . \lfloor n}2^n 2^n y^n$

$$= \frac{\lfloor n \;\{1.3.5.\ldots\ldots(2n-1)\}}{\lfloor n \,.\, \lfloor n} 2^{2n}.y^n$$

$$= \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{\lfloor n} 2^{2n}.y^n \text{ (দেখানো হলো)}$$

(iii) $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= 2n+1$; যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা $(n+1)$ তম পদ।

$$\therefore (n+1) \text{ তম পদ} = {}^{2n}C_n x^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}x^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdots 4.3.2.1}{n!\,n!}x^n$$

$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6.\cdots\cdots(2n-2)2n\}}{n!\,n!}x^n$$

$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}.2^n\{1.2.3.\cdots\cdots(n-1)n\}}{n!\,n!}x^n$$

$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}\,n!}{n!\,n!}2^n x^n = \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)}{n!}2^n x^n \text{ (দেখানো হলো)}$$

(iv) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= (2n+1)$; যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ তম বা $(n+1)$ তম পদ

$$\therefore (n+1) \text{ তম পদ} = {}^{2n}C_n x^{2n-n}.\left(\frac{1}{2x}\right)^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}.x^n.\frac{1}{2^n x^n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdots 4.3.2.1}{n!\,n!}.\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6.\cdots\cdots(2n-2)2n\}}{n!\,n!}.\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}2^n\{1.2.3.\cdots\cdots(n-1)n\}}{n!\,n!}.\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\}\,n!}{n!n!} = \frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)}{n!} \text{ (দেখানো হলো)}$$

(v) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_r x^{2n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^{2n}C_r x^{2n-2r}$ এই পদটি x বর্জিত হলে,

$2n-2r = 0$ বা, $r = n$

$\therefore (n+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$$\therefore (n+1) \text{ তম পদ} = {}^{2n}C_n x^{2n-n}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}.x^n.\frac{1}{x^n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots 4.3.2.1}{n!\,n!}$$

$$= \frac{\{1.3.5.\ldots\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6.\ldots\ldots(2n-2)2n\}}{n!\,n!}$$

$$= \frac{2^n\{1.3.5.\ldots\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{1.2.3.\ldots\ldots(n-1)n\}}{n!\,n!}$$

$$= \frac{\{1.3.5.\ldots\ldots(2n-1)\}.n!}{n!\,n!}2^n = \frac{1.3.5.\ldots\ldots(2n-1)}{n!}2^n \text{ (দেখানো হলো)}$$

(vi) $\left(2-\frac{3}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= 15+1 = 16$ যা জোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতিটির মধ্যপদ হবে 2টি।

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটি $\left(\frac{15+1}{2}\right) = 8$ তম পদ এবং $\left(\frac{15+3}{2}\right) = 9$ তম পদ

এখন, (7 + 1) বা 8 তম পদ $= {}^{15}C_7\, 2^{15-7} . (-3)^7 . x^{-7}$

$= {}^{15}C_7 . 2^8 . (-3)^7 . x^{-7}$

$= {}^{15}C_7 . 2^8 . (-3)^7$ [যখন, x = 1]

আবার, (8 + 1) বা 9 তম পদ $= {}^{15}C_8 . 2^{15-8} . (-3)^8 . x^{-8}$

$= {}^{15}C_8 . 2^7 . (-3)^8 . x^{-8}$

$= {}^{15}C_8 . 2^7 . (-3)^8$ [যখন, x = 1]

∴ মধ্যপদ দুইটির মধ্যে পার্থক্য $= \{{}^{15}C_8\, 2^7 (-3)^8\} - \{{}^{15}C_7 . 2^8 . (-3)^7\} = 9006940800$

(vii) প্রদত্ত রাশি $= \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^n$

n জোড় সংখ্যা হলে একটি মধ্যপদ থাকবে। **(Ans.)**

n = 21 হলে মধ্যপদ থাকবে দুইটি।

এগুলি হল $\left(\frac{21-1}{2} + 1\right)$ তম ও $\left(\frac{21+1}{2} + 1\right)$ তম পদদ্বয়

বা, 11 তম এবং 12 তম পদদ্বয়

11 তম পদ বা (10 + 1) তম পদ $= {}^{21}C_{10} . \left(\frac{2}{x}\right)^{21-10} . \left(\frac{x}{2}\right)^{10} = {}^{21}C_{10} . \frac{2^{11}}{x^{11}} . \frac{x^{10}}{2^{10}} = {}^{21}C_{10} . \frac{2}{x} = \frac{705432}{x}$ **(Ans.)**

12 তম পদ বা (11 + 1) তম পদ $= {}^{21}C_{11} . \left(\frac{2}{x}\right)^{21-11} . \left(\frac{x}{2}\right)^{11} = {}^{21}C_{11} \frac{2^{10}}{x^{10}} . \frac{x^{11}}{2^{11}} = {}^{21}C_{11} \frac{x}{2} = 176358x$ **(Ans.)**

13. (i) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি, $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots\cdots + C_nx^n \cdots\cdots\cdots$ (i)

এখন (i) নং সমীকরণে x = 1 এবং x = –1 বসিয়ে পাই,

$(1+1)^n = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots\cdots + C_n$

বা, $2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots\cdots + C_n \qquad \cdots\cdots\cdots$ (ii)

এবং $(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^nC_n$

বা, $0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^nC_n \qquad \cdots\cdots\cdots$ (iii)

এখন (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে 2 দ্বারা ভাগ করলে পাই,

$$\frac{2^n}{2} = \frac{1}{2}(2C_0 + 2C_2 + 2C_4 + \cdots\cdots\cdots)$$

$$\therefore 2^{n-1} = C_0 + C_2 + C_4 + \cdots\cdots\cdots$$

আবার, (ii) নং হতে (iii) নং বিয়োগ করে 2 দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়,

$$\frac{2^n}{2} = \frac{1}{2}(2C_1 + 2C_3 + 2C_5 + \cdots\cdots\cdots)$$

$$\therefore 2^{n-1} = C_1 + C_3 + C_5 + \cdots\cdots\cdots$$

সুতরাং, $C_0 + C_2 + C_4 + \cdots\cdots\cdots = C_1 + C_3 + C_5 + \cdots\cdots\cdots = 2^{n-1}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি, $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots\cdots + C_nx^n$

সুতরাং, $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^n (x + 1)^n$

$= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n)(C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + C_2x^2 + C_1x + C_0)$

অর্থাৎ, $(1 + x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n)(C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + C_2x^2 + C_1x + C_0)$

এখন বামপক্ষে $(1 + x)^{2n}$ -এর বিস্তৃতিতে x^n -এর সহগ $= {}^{2n}C_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$ এবং ডানপক্ষের গুণফলে x^n এর সহগ $= C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \ldots + C_3C_0$.

সুতরাং, $C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots\cdots\cdots + C_nC_0 = \frac{(2n)!}{n!n!}$ **(প্রমাণিত)**

(iii) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি, $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots\cdots + C_nx^n$
এখন, $x = 1$ বসিয়ে পাই, $2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots\cdots + C_n$
এখন, বামপক্ষ $= C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n$

$$= (C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n) + (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots\cdots + nC_n)$$
$$= 2^n + \{n + \frac{2n(n-1)}{2!} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots\cdots + n\} \quad [\because C_n = 1]$$
$$= 2^n + n\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots\cdots + 1\}$$
$$= 2^n + n\{1 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_4 + \cdots\cdots + 1\}$$
$$= 2^n + n(1+1)^{n-1} = 2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}.2 + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(2+n)$$

$\therefore C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots\cdots + (n+1)C_n = 2^{n-1}(2+n)$ **(প্রমাণিত)**

(iv) এখানে, বামপক্ষ $= C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots\cdots + nC_n$

$$= n + 2.\frac{n(n-1)}{2!} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots\cdots + nC_n$$
$$= n\{1 + \frac{n-1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots\cdots + C_n\}$$
$$= n\{1 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + \cdots\cdots + 1\}$$
$$= n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1}$$

$\therefore C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots\cdots + nC_n = n.2^{n-1}$ **(প্রমাণিত)**

14. $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots\dots + {}^nC_nx^n$
এবং $(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - {}^nC_3x^3 + \dots\dots + (-1)^n\,{}^nC_nx^n$.
প্রশ্নমতে, ${}^nC_0 + {}^nC_2x^2 + {}^nC_4x^4 + \dots\dots = S_1$
এবং ${}^nC_1x + {}^nC_3x^3 + {}^nC_5x^5 + \dots\dots = S_2$
$\therefore (1+x)^n = S_1 + S_2 \dots\dots\dots$ (i)
এবং $(1-x)^n = S_1 - S_2 \dots\dots\dots$ (ii)
(i) × (ii) করে পাই, $(1+x)^n(1-x)^n = (S_1+S_2)(S_1-S_2)$
$\Rightarrow (1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$ **(দেখানো হলো)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-5.6 | পৃষ্ঠা-১৭১

সমস্যা: প্রদত্ত (i) নং বিস্তৃতিটি নিম্নরূপ:
(i) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^r + \dots\dots$
$x = 2$ হলে, (i) নং এর বামপক্ষ $= (1-2)^2 = (-1)^{-1} = -1$ এবং ডানপক্ষ $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots$
$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ অর্থাৎ $x = 2$ এর জন্য বিস্তৃতিটি খাটে না।

$x = 2$ হলে, বিস্তৃতিটির ডানপক্ষের জন্য সাধারণ অনুপাত, $\pi = \frac{2}{1} = 2 > 1$এটি একটি অসীম ধারা হওয়ায় উক্ত অনুপাতের জন্য ধারাটির কোন অসীমতক সমষ্টি নেই।

আবার, $x = 0.5 = \frac{1}{2}$ হলে, (i) নং এর বামপক্ষ $= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

এবং ডানপক্ষ $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ $[S_\infty = \frac{a}{1-r}$ এখানে $r = \frac{1}{2}]$
$= 2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ অর্থাৎ বিস্তৃতিটি সত্য।

এবং $x = -0.5 = -\frac{1}{2}$ হলে, (i) নং এর বামপক্ষ $= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$ এবং

ডানপক্ষ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$ $\left[S_\infty = \frac{a}{1-r}\right.$, এখানে $\left. r = -\frac{1}{2}\right]$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ অর্থাৎ বিস্তৃতিটি সত্য।

▶ অনুচ্ছেদ-5.6.1 | পৃষ্ঠা-১৭২

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots\cdots$$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে r-তম পদ, $u_r = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\cdots\cdots\left\{-\frac{1}{2}-(r-2)\right\}}{(r-1)!}x^{r-1}$

$$= \frac{(-1)^{r-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\cdots\left\{\frac{1}{2}+(r-2)\right\}}{(r-1)!}x^{r-1}$$

$(r+1)$ তম পদ, $u_{r+1} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\cdots\cdots\left\{-\frac{1}{2}-(r-2)\right\}\left\{-\frac{1}{2}-(r-1)\right\}}{r!}x^r$

$$= (-1)^{r-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\left\{\frac{1}{2}+(r-1)\right\}}{r!}x^r$$

$$\therefore \frac{u_{r+1}}{u_r} = -\frac{\left\{\frac{1}{2}+(r-1)\right\}(r-1)!}{r!} = -\frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)}{r}x = -\left(1-\frac{1}{2r}\right)x$$

$\therefore \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{u_{r+1}}{u_r} = -\lim\limits_{r\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2r}\right)x = -x < 1$ যেহেতু দেওয়া আছে, $|x| > 1$

$\therefore$ D'Alembert অনুপাত পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় ধারাটি অভিসৃত।

▶ অনুচ্ছেদ-5.7 | পৃষ্ঠা-১৭৩

$\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{-2-3}{(x+1)(-1-3)} + \dfrac{6-3}{(3+1)(x-3)}$ [Cover-up Rule এর সাহায্যে]

$$= \frac{5}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-3)}$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(1+x)} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{-3\left(1-\frac{x}{3}\right)}$$

$$= \frac{5}{4}(1+x)^{-1} - \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}$$

$$= \frac{5}{4}(1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots + (-1)^n x^n + \dots\dots)$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots\dots + \left(\frac{x}{3}\right)^n \dots\dots\right)$$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= \dfrac{5}{4}(-1)^n - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3^n}$

$$= \frac{1}{4}\{5(-1)^n - 3^{-n}\} \textbf{ (Ans.)}$$

▶ অনুচ্ছেদ-5.7 | পৃষ্ঠা-১৭৪

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}x^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots\dots$$

বিস্তৃতিটি বৈধ হবে যদি $|x| < 1$ অর্থাৎ $-1 < x < 1$ সুতরাং, $x = 0.08$ এর জন্য বিস্তৃতিটি বৈধ।

$$\therefore \quad (1+0.08)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \times 0.08 - \frac{(0.08)^2}{8} + \frac{(0.08)^3}{16} - \dots\dots$$

বা, $\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + 0.04 - 0.0008000 + 0.0000320 - \dots\dots$

বা, $\sqrt{\frac{108}{100}} = 1.039232$

বা, $\sqrt{\frac{36 \times 3}{10^2}} = 1.039232$

বা, $\frac{6}{10}\sqrt{3} = 1.039232$

বা, $\sqrt{3} = \frac{10 \times 1.039232}{6} = 1.7320$

আবার, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\sqrt{3} = 1.7320$

$\therefore$ সত্যতা প্রমাণিত হলো।

অনুশীলনী-5(B) এর সমাধান

1. **(i)** $(1-x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}(-x) + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}(-x)^3 + \dots\dots\dots \infty$

$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ (চতুর্থ পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

(ii) $(2+3x)^{-4} = 2^{-4}\left(1 + \frac{3}{2}x\right)^{-4}$

$= \frac{1}{16}\left\{1 + (-4)\frac{3}{2}(x) + \frac{-4(-4-1)}{2!}\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \frac{-4(-4-1)(-4-2)}{3!}\left(\frac{3}{2}x\right)^3\right\} + \dots\dots\dots \infty$

$= \frac{1}{16}\left(1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 - \frac{135}{2}x^3\right)$ (চতুর্থ পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

(iii) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}} = 1 + \left(-\frac{1}{n}\right).(-nx) + \frac{-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}-1\right)}{2!}(-nx)^2 + \frac{-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}-1\right)\left(-\frac{1}{n}-2\right)}{3!}(-nx)^3 + \dots\dots \infty$

$= 1 + x + \frac{n+1}{2}x^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6}x^3$ (চতুর্থ পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

2. **(i)** $(1-3x)^{-1} = 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \dots\dots$

$= 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots\dots\dots$

(ii) $(4+3x)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2} = (4)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$

$= 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\cdots\cdots\cdots\infty\right) - \left(1+(-2)\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{-2\,(-2-1)}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\infty\right)$

$= \left(2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+\cdots\cdots\cdots\infty\right) - \left(1+x+\frac{3}{4}x^2+\cdots\cdots\cdots\infty\right) = 1-\frac{x}{4}-\frac{57}{64}x^2+\cdots\cdots\cdots\infty$

$= 1-\frac{x}{4}-\frac{57}{64}x^2$ (x^2 সম্বলিত পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

(iii) $(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+x^3}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore (1-x+x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \left(1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots\cdots\infty\right)\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots\cdots\cdots\infty\right\}$

$= \left(1+\frac{1}{2}x^3+\cdots\cdots\infty\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\cdots\infty\right) = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{1}{2}x^3-\cdots\cdots\infty$

$\therefore (1-x+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3$ (চতুর্থ পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ অর্থাৎ $(r+1)$ তম।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= \frac{-3\,(-3-1)\,(-3-2)\cdots\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r = \frac{3.4.5.\cdots\cdots\cdots(r+2)}{r!}(-1)^r.(-1)^r.x^r$

$= \frac{1.2.3.4.5.\cdots\cdots\cdots(r+2)}{1.2.\,r!}x^r$ [লব ও হরকে 1. 2 দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(r+2)!}{2.r!}x^r$

$= \frac{(r+2)\,(r+1)r!}{2.r!}x^r$

$= \frac{(r+1)\,(r+2)}{2}x^r$

$\therefore$ প্রথম পদ $= \frac{(0+1)\,(0+2)}{2}x^0 = 1$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $= \frac{(1+1)\,(1+2)}{2}x^1 = 3x$

$\therefore$ তৃতীয় পদ $= \frac{(2+1)\,(2+2)}{2}x^2 = 6x^2$

Ans. $\frac{(r+1)\,(r+2)}{2}x^r$; $1, 3x, 6x^2$

(v) প্রদত্ত রাশি $= \left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{1+\left(-\frac{x}{8}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{8}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-\frac{x}{8}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\left(-\frac{x}{8}\right)^4+\cdots\cdots\cdots$

$= 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^3}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{x^2}{2^6}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3.2}\frac{x^3}{2^9}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2.3.4}\frac{x^4}{2^{12}}-\cdots\cdots\cdots$

$= 1-\frac{x}{2^4}-\frac{x^2}{2^9}-\frac{x^3}{2^{13}}-\frac{5x^4}{2^{19}}-\cdots\cdots\cdots$

$= 1-\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24}\cdot\frac{x^3}{2^3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24}\cdot\frac{5}{32}\cdot\frac{x^4}{2^4}$ (5 তম পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

$x = 2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\left(1-\frac{2}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24} - \cdots\cdots\cdots$$

বা, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24} - \cdots\cdots\cdots$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24} - \cdots\cdots\cdots$

$\therefore 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24} - \cdots\cdots\cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(প্রমাণিত)**

(vi) প্রদত্ত রাশি $= \left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{6}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{6}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-\frac{x}{6}\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\left(-\frac{x}{6}\right)^4 + \cdots\cdots$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{6} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}\cdot\frac{x^2}{6^2} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3!}\cdot\frac{x^3}{6^3} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{4!}\cdot\frac{x^4}{6^4} - \cdots\cdots$$

$\therefore \left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{x^3}{2^3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{x^4}{2^4}$ (5 তম পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

$x = 2$ বসিয়ে আমরা পাই, $\left(1-\frac{2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18} - \cdots\cdots$

$\therefore \sqrt{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18} - \cdots\cdots$ **(দেখানো হলো)**

3. (i) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= (1-x)^{-1} - 2(1-2x)^{-2}$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^r + \cdots\cdots) - 2\{1 + 2(2x) + 3(2x)^2 + \cdots\cdots + (r+1)(2x)^r + \cdots\}$$

$\therefore$ সাধারণ পদ $= x^r - 2(r+1)(2x)^r = x^r - (r+1)\,2^r.2.x^r = \{1 - (r+1)2^{r+1}\}x^r$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{1+x}{\sqrt{1-2x}} = (1+x)(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= (1+x)\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= (1+x)\left\{1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \left\{1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \cdots\cdots\right\} = \left\{1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\right\}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির বিস্তৃতি হতে পাই, x^3 এর সহগ 4 **(Ans.)**

(iii) $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{\frac{1}{4}}{(1-4x)\left(1-\frac{5}{4}\right)} + \frac{\frac{1}{5}}{(1-5x)\left(1-\frac{4}{5}\right)}$ [cover-up rule এর সাহায্যে]

$$= \frac{1}{4(1-4x)\left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{5(1-5x).\frac{1}{5}} = \frac{1}{1-5x} - \frac{1}{1-4x} = (1-5x)^{-1} - (1-4x)^{-1}$$

$$= \{1 + 5x + (5x)^2 + \cdots\cdots + (5x)^n + \cdots\cdots\} - \{1 + 4x + (4x)^2 + \cdots\cdots + (4x)^n + \cdots\cdots\}$$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= 5^n - 4^n$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{x}{1-4x+3x^2}=\frac{x}{1-3x-x+3x^2}=\frac{x}{(1-3x)(1-x)}=\frac{\frac{1}{3}}{(1-3x)\left(1-\frac{1}{3}\right)}+\frac{1}{(1-x)(1-3)}$ [cover-up rule এর সাহায্যে]

$=\frac{1}{2(1-3x)}-\frac{1}{2(1-x)}=\frac{1}{2}\{(1-3x)^{-1}-(1-x)^{-1}\}$

$=\frac{1}{2}[\{1+3x+(3x)^2+\ldots+(3x)^r+\ldots\}-\{1+x+x^2+\ldots+x^r+\ldots\}]$

$=\frac{1}{2}[1+3x+9x^2+\ldots+3^r.x^r+\ldots-1-x-x^2-\ldots-x^r-\ldots]$

$\therefore$ x^r এর সহগ $=\frac{1}{2}(3^r-1)$ **(Ans.)**

(v) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}=\frac{1}{(1-x)(1-2)}+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-2x)}$ [cover-up rule এর সাহায্যে]

$=-\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-2x}=2(1-2x)^{-1}-(1-x)^{-1}$

$=2\{1+2x+(2x)^2+\cdots\cdots+(2x)^n+\cdots\cdots\}-(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots)$

$=2\{1+2x+4x^2+\cdots\cdots+2^nx^n+\cdots\cdots)-(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots)$

অতএব, x^n-এর সহগ $=2.2^n-1=2^{n+1}-1$ **(Ans.)**

(vi) $(42x^2-13x+1)^{-1}=\frac{1}{42x^2-13x+1}=\frac{1}{1-7x-6x+42x^2}=\frac{1}{(1-7x)(1-6x)}$

ধরি, $\frac{1}{(1-7x)(1-6x)}=\frac{A}{1-7x}+\frac{B}{1-6x}$

বা, $1=A(1-6x)+B(1-7x)$

যখন $x=\frac{1}{7}$, তখন $A=7$

যখন $x=\frac{1}{6}$, তখন $B=-6$

$\therefore \frac{1}{(1-7x)(1-6x)}=\frac{7}{1-7x}-\frac{6}{1-6x}$

$=7(1-7x)^{-1}-6(1-6x)^{-1}$

$=7\{1+7x+(7x)^2+\ldots\ldots+(7x)^n+\ldots\ldots\}-6\{1+6x+(6x)^2+\ldots\ldots+(6x)^n+\ldots\ldots\}$

$\therefore$ x^n এর সহগ $=7.7^n-6.6^n=7^{n+1}-6^{n+1}$ **(Ans.)**

(vii) প্রদত্ত রাশি $=(1-5x+6x^2)^{-1}=\{1-3x-2x+6x^2\}^{-1}=\{(1-3x)-2x(1-3x)\}^{-1}$

$=\{(1-3x)(1-2x)\}^{-1}=\frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$

$=\frac{1}{(1-3x)\left(1-\frac{2}{3}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2x)}$ [cover-up rule এর সাহায্যে]

$=\frac{1}{\frac{1}{3}(1-3x)}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)(1-2x)}$

$\therefore \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}=3(1-3x)^{-1}-2(1-2x)^{-1}$

$=3(1+3x+3^2x^2+\cdots+3^rx^r+\cdots)-2(1+2x+2^2x^2+\cdots+2^rx^r\cdots)$

$\therefore$ x^r-এর সহগ $=3.3^r-2.2^r=3^{r+1}-2^{r+1}$

সুতরাং, x^r এর সহগ $3^{r+1}-2^{r+1}$ **(দেখানো হলো)**

(viii) $(1-9x+20x^2)^{-1} = \dfrac{1}{20x^2-9x+1} = \dfrac{1}{20x^2-4x-5x+1} = \dfrac{1}{4x(5x-1)-1(5x-1)} = \dfrac{1}{(4x-1)(5x-1)}$

ধরি, $\dfrac{1}{(4x-1)(5x-1)} \equiv \dfrac{A}{4x-1} + \dfrac{B}{5x-1}$

$(4x-1)(5x-1)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে পাই,

$1 \equiv A(5x-1) + B(4x-1)$

$x = \dfrac{1}{5}$ হলে, $1 = A\left(5 \times \dfrac{1}{5} - 1\right) + B\left(\dfrac{4}{5} - 1\right)$

বা, $1 = A \times 0 + B\left(-\dfrac{1}{5}\right) \quad \therefore B = -5$

$x = \dfrac{1}{4}$ হলে, $1 = A\left(\dfrac{5}{4} - 1\right) + B\left(4 \times \dfrac{1}{4} - 1\right)$

বা, $1 = A \times \dfrac{1}{4} + B \times 0 \quad \therefore A = 4$

$\therefore \dfrac{1}{(4x-1)(5x-1)} = \dfrac{4}{4x-1} - \dfrac{5}{5x-1} = \dfrac{4}{-(1-4x)} - \dfrac{5}{-(1-5x)} = \dfrac{5}{1-5x} - \dfrac{4}{1-4x}$

$= 5(1-5x)^{-1} - 4(1-4x)^{-1}$

$= 5\{1 + 5x + (5x)^2 + \dots \dots + 5^r.x^r + \dots \dots\} - 4\{1 + 4x + (4x)^2 + \dots \dots + 4^r.x^r + \dots \dots\}$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= 5.5^r - 4.4^r$

$= 5^{r+1} - 4^{r+1}$

$r = 9$ হলে, x^9 এর সহগ $= 5^{10} - 4^{10}$ **(প্রমাণিত)**

(ix) প্রদত্ত রাশি $= \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2 = \dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2} = (1+2x+x^2)(1-x)^{-2}$

এখন, $(1+2x+x^2)(1-x)^{-2} = (1+2x+x^2)\{1 + 2x + 3x^2 + \dots \dots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} + (n+1)x^n \dots \dots\}$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= n+1+2n+n-1 = 4n$ **(দেখানো হলো)**

(x) $(1-8x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots \dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-8x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\dots\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r.8^r.x^r$$

$$= \frac{(-1)^{2r}\ 1.3.5 \dots (2r-1)}{2^r.\ r!}.2^{3r}.\ x^r$$

$$= \frac{\{1.3.5 \dots\dots (2r-1)\}\ \{2.4.6 \dots\dots 2r\}}{r!\ \{2.4.6 \dots\dots 2r\}}\ 2^{2r}.\ x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4 \dots\dots 2r}{r!\ 2^r\ (1.2.3 \dots\dots r)}.2^{2r}.\ x^r$$

$$= \frac{(2r)!}{r!\ r!}.2^r.\ x^r = \frac{(2r)!\ 2^r}{(r!)^2}\ x^r$$

$\therefore (1-8x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\dfrac{(2r)!\ .\ 2^r}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

(xi) প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ অর্থাৎ

$$(r+1) \text{ তম পদ} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)\dots\dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-4x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)......\left(r+\frac{1}{2}-1\right)}{r!}(-1)^r.4^r.x^r = \frac{(-1)^{2r}\{1.3.5......(2r-1)\}\frac{1}{2^r}}{r!}.2^{2r}.x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= \frac{1.3.5......(2r-1)}{2^r r!}2^{2r} = \frac{\{1.3.5......(2r-1)\}\{2.4.6......2r\}}{r!\{2.4.6......2r\}}2^r$

$$= \frac{1.2.3.4......(2r-1).2r}{r!(1.2.3.4......r)2^r}.2^r = \frac{(2r)!}{r!r!} = \frac{(2r)!}{(r!)^2}$$ **(দেখানো হলো)**

(xii) $(1-12x)^{-\frac{1}{2}}$ রাশিটির বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ,

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)....\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-12x)^r$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)....\left\{-\left(\frac{2r-1}{2}\right)\right\}}{r!}(-12)^r.x^r$$

$$= \frac{(-1)^r.\{1.3.5.......(2r-1)\}}{2^r.r!}(-1)^r.(3.4)^r.x^r$$

$$= \frac{(-1)^{2r}.\{1.3.5.....(2r-1)\}\{2.4.6.....2r\}}{2^r.r!(2.4.6.....2r)}.3^r.4^r.x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4.5.6.....(2r-1).2r}{2^r.r!.2^r(1.2.3.....r)}.3^r.(2.2)^r.x^r$$

$$= \frac{(2r)!}{2^r.2^r.r!.r!}3^r.2^r.2^r.x^r$$

$$= \frac{(2r)!\,3^r}{(r!)^2}x^r$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $= \frac{(2r)!.3^r}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

(xiii) $(4x+3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{-\frac{1}{2}}$

প্রদত্ত বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ $= 3^{-\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\left(\frac{-1}{2}-3\right)........\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}\left(\frac{4}{3}x\right)^r$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^r\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right).......\left(r+\frac{1}{2}-1\right)}{r!}\left(\frac{4}{3}\right)^r x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}}\frac{1.3.5.7......(2r-1)}{2^r r!}2^{2r}\frac{1}{3^r}x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}}\frac{\{1.3.5.........(2r-1)\}\{2.4.6......2r\}}{r!(2.4.6......2r)}2^r\frac{1}{3^r}x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}}\frac{1.2.3.4.........2r}{r!\,2^r(1.2.3.......r)}2^r\frac{1}{3^r}x^r$$

$$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}}\frac{(2r)!}{r!\,r!}\frac{1}{3^r}x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}}\frac{(2r)!}{(r!)^2}\frac{1}{3^r}$ **(Ans.)**

$r = 4$ হলে,

পঞ্চম পদ $= \frac{(-1)^4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8!}{(4!)^2} \cdot \frac{1}{3^4} x^4$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{x^4}{81}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{70}{81} x^4$ **(Ans.)**

(xiv) প্রদত্ত রাশি $= (1 + x)^n/(1 - x),\ n \in \mathbb{N} = (1 + x)^n (1 - x)^{-1}$

$= (1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \cdots \cdots + {}^nC_nx^n)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n + \cdots \cdots)$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 1 + {}^nC_1.1 + {}^nC_2.1^2 + \ldots + {}^nC_n.1^n = (1 + 1)^n$

$= 2^n$ **(দেখানো হলো)**

(xv) প্রদত্ত রাশি $= (1 - x + x^2)^{-3} = \frac{1}{(1 - x + x^2)^3} = \left\{\frac{1 + x}{(1 + x)(1 - x + x^2)}\right\}^3 = \frac{(1 + x)^3}{(1 + x^3)^3} = (1 + x)^3 (1 + x^3)^{-3}$

$= (1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 - 3x^3 + 6x^6 - \cdots \cdots)$

$\therefore x^7$ এর সহগ $= 18$ **(Ans.)**

(xvi) প্রদত্ত রাশি $= \frac{3x^2 - 2}{x + x^2} = \frac{3x^2 - 2}{x(1 + x)} = x^{-1}(3x^2 - 2)(1 + x)^{-1}$

$= (3x - 2x^{-1})(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + \cdots \cdots)$

$\therefore x^8$ এর সহগ $= -3 + 2 = -1$ **(Ans.)**

(xvii) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \ldots)^{\frac{1}{2}}$

$= [(1 - x)^{-2}]^{\frac{1}{2}}$

$= (1 - x)^{-1}$

$= 1 + x + x^2 + \ldots \ldots + x^r + \ldots \ldots$

$\therefore x^r$ এর সহগ $= 1$ **(Ans.)**

(xviii) $(1 + x + x^2 + \cdots \cdots)^{\frac{2}{3}} = \{(1 - x)^{-1}\}^{\frac{2}{3}} = (1 - x)^{-\frac{2}{3}} + \cdots \cdots \cdots$

$$= 1 + \left(\frac{-2}{3}\right)(-x) + \frac{-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3} - 1\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3} - 1\right)\left(-\frac{2}{3} - 2\right)}{3!}(-x)^2$$

$$+ \cdots \cdots + \frac{-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3} - 1\right)\left(-\frac{2}{3} - 2\right)\cdots \cdots\left(-\frac{2}{3} - n + 1\right)}{n!}(-x)^n$$

$$= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2.5}{2!.\ 3^2}x^2 + \frac{2.5.8}{3!.\ 3^3}x^3 + \cdots \cdots + \frac{2.5.8.\ \ldots \ldots (3n - 1)}{n!\ 3^n}x^n + \cdots \cdots$$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= \frac{2.5.8 \ldots (3n - 1)}{3^n\ n!}$ **(Ans.)**

(xix) দেওয়া আছে, $g(p) = 1 - \frac{1}{2}p$

$\therefore\ g(4x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4x = 1 - 2x$

$\therefore\ \{g(4x)\}^{-\frac{1}{2}} = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ তম পদ

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2x)^n$$

$$= \frac{(-1)^n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\left(n-1+\frac{1}{2}\right)}{n!}(-1)^n.\,2^n.\,x^n$$

$$= (-1)^{2n}.\frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)}{2^n.n!}.2^n.\,x^n$$

$$= \frac{\{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)\}\,\{2.4.6.8\cdots\cdots 2n\}}{n!(2.4.6\cdots\cdots 2n)}x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4\cdots\cdots 2n}{n!\,2^n(1.2.3\cdots\cdots n)}x^n = \frac{(2n)!}{2^n.n!.n!}x^n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$$

$\therefore\ (n+1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

4. (i) দেওয়া আছে, $y = x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots$

বা, $1 + y = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots$

বা, $1 + y = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$ বা, $1 + y = \frac{1}{1-x}$

বা, $1 - x = \frac{1}{1+y}$ বা, $1 - x = (1+y)^{-1}$

বা, $1 - x = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots\cdots$ বা, $-x = -y + y^2 - y^3 + \cdots\cdots$

$\therefore\ x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \cdots\cdots$ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\cdots$

বা, $1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\cdots$

বা, $1 + y = (1-x)^{-2}$ বা, $1 + y = \frac{1}{(1-x)^2}$ বা, $(1-x)^2 = \frac{1}{1+y}$

বা, $(1-x)^2 = (1+y)^{-1}$ বা, $1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3 + \ldots\ldots\infty$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1.3}{4.2}y^2 - \frac{1.3.5}{8.6}y^3 + \ldots\ldots$ বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots\ldots$

বা, $-x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots\ldots$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \ldots\ldots$ **(দেখানো হলো)**

(iii) বামপক্ষ $= (1 + x + x^2 + \cdots\cdots\cdots)^2 = \{(1-x)^{-1}\}^2 = (1-x)^{-2}$

$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\cdots + nx^{n-1} + \cdots\cdots\cdots =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(iv) বামপক্ষ $= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots\cdots)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots\cdots)$

$= (1-x)^{-1}(1-x)^{-2}$

$= (1-x)^{-3}$

$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 2.6x^2 + 2.10x^3 + \cdots\cdots\cdots)$

$= \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + \cdots\cdots\cdots) =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

5. (i) $(1+x)^{\frac{21}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ $T_{r+1} = \dfrac{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-1\right)\left(\frac{21}{2}-2\right)\cdots\cdots\cdots\left(\frac{21}{2}-r+1\right)}{1.2.3\cdots\cdots\cdots r}.x^r$

এবং r-তম পদ $T_r = \dfrac{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-1\right)\left(\frac{21}{2}-2\right)\ldots\ldots\ldots\left\{\frac{21}{2}-(r-1)+1\right\}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(r-1)}x^{r-1}$

$\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{\frac{21}{2}-r+1}{r}.x = \dfrac{23-2r}{2r}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{23-2r}{3r}$

$T_{r+1} >=< T_r$ বা, $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} >=< 1$ বা, $\dfrac{23-2r}{3r} >=< 1$ বা, $23-2r >=< 3r$ বা, $23 >=< 5r$ বা, $5r <=> 23$ বা,

$r <=> \dfrac{23}{5}$ বা, $r <=> 4\frac{3}{5}$

r এর মান সর্বদাই যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা। কাজেই r = 4 হবে।

∴ 5-তম পদটি হবে বৃহত্তম পদ। **(Ans.)**

বৃহত্তম পদ $= T_{4+1} = T_5 = \dfrac{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-1\right)\left(\frac{21}{2}-3\right)}{\underline{|4}}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{\frac{21}{2}.\frac{19}{2}.\frac{17}{2}.\frac{15}{2}}{4.3.2.1}.\dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{11305}{216}$ **(Ans.)**

(ii) $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r}{\frac{r(r+1)}{2}x^{r-1}} = \dfrac{r+2}{r}x = \dfrac{r+2}{r}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{6+3r}{4r}$

সংখ্যাসূচক ভাবে, $T_{r+1} >=< T_r$ বা, $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} >=< 1$

বা, $\dfrac{6+3r}{4r} >=< 1$ বা, $6+3r >=< 4r$

বা, $6 >=< r$

বা, $r <=> 6$

অতএব, 6-তম এবং 7-তম পদই বৃহত্তম পদ এবং এরা পরস্পর সমান।

∴ $T_6 = T_{5+1} = \left(\dfrac{6.7}{2}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{7.3^6}{4^5}$

$T_7 = T_{6+1} = \dfrac{7.8}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^6 = \dfrac{7.3^6}{4^5}$

∴ বৃহত্তম পদটি $= \dfrac{7.3^6}{4^5}$

6. (i) $\sqrt[3]{126} = (125+1)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1+\dfrac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1+\dfrac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 5\left\{1+\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}.\dfrac{1}{5^6}+\cdots\cdots\cdots\right\} = 5\left(1+\dfrac{1}{375}-\dfrac{2}{9}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{15625}+\cdots\cdots\cdots\right)$

$= 5+\dfrac{1}{75}-\dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{3125}+\cdots\cdots\cdots = 5+0.01333-0.1111\times0.00032 = 5+0.01333-0.00003552$

$= 5.01329 = 5.0133$ **(Ans.)**

(ii) $\sqrt[3]{1.03} = (1+0.03)^{\frac{1}{3}} = 1+\dfrac{1}{3}.(0.03)+\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}.(0.03)^2+\cdots\cdots = 1+0.01-\dfrac{1}{9}\times0.0009$

$= 1.0099$ **(Ans.)**

(iii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}} = (128)^{-\frac{1}{3}} = (125+3)^{-\frac{1}{3}} = (5^3+3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{125} + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{3}{125}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{125} + \frac{2}{9}\times\frac{9}{(125)^2} + \cdots\cdots\cdots\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{625} + \frac{2}{5\times(125)^2} + \cdots\cdots$$

$= 0.2 - 0.0016 + 0.0000256 = 0.1984256 = 0.1984$ **(Ans.)**

(iv) $\sqrt{4.004} = (4.004)^{\frac{1}{2}} = (4+0.004)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1+\frac{0.004}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2(1+0.001)^{\frac{1}{2}}$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\times 0.001 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\times(0.001)^2 + \cdots\cdots\cdots\right)$$

$$= 2\left(1 + 0.0005 - \frac{1}{8}\times 0.000001 + \cdots\cdots\cdots\right) = 2(1 + 0.0005 - 0.000000125 + \cdots\cdots)$$

$= 2 + 0.001 - 0.00000025 = 2.00099975 = 2.0010$ **(Ans.)**

7. (i) দেওয়া আছে, $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \cdots\cdots\infty$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারা $= 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots\cdots$

$$= 1 + \left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}-1\right)\left(\frac{-3}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প সমাধান:

প্রদত্ত ধারাকে $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots\infty$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$nx = \frac{3}{4} \ldots\ldots\ldots (i),\ \frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{3.5}{4.8} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{(n-1)}{2!}.x = \frac{15}{32}\times\frac{4}{3}$

বা, $\frac{nx-x}{2!} = \frac{5}{8}$

বা, $\frac{3}{4} - x = \frac{5}{8}\times 2$; [মান বসিয়ে]

বা, $x = -\frac{1}{2}$; $\therefore n = \frac{3}{4}\times\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{-3}{2}$

$\therefore (1+x)^n = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

(ii) প্রদত্ত ধারা $= 1 - \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} - \frac{3.5.7}{4.8.12} + \dots\dots$

$$= 1 + \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{-7}{2}\right)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}-1\right)\left(\frac{-3}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

(iii) প্রদত্ত ধারা $= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^2} + \dots\dots$

$$= 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (Ans.)}$$

(iv) প্রদত্ত ধারা $= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1.4}{6.12} + \frac{1.4.7}{6.12.18} + \dots\dots$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}-1\right)\left(\frac{-1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \text{ (Ans.)}$$

(v) প্রদত্ত ধারা $= 1 + 2\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{2.5.8}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^6} + \dots\dots$

$$= 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}-1\right)\left(\frac{-2}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \text{ (Ans.)}$$

(vi) এখন,

$$p = e^{\ln p} = 1 + \frac{\ln p}{1!} + \frac{(\ln p)^2}{2!} + \frac{(\ln p)^3}{3!} + \dots \dots \dots \dots \infty \dots \dots \text{(i)}$$

আবার,

$$\frac{1}{p} = e^{\ln\frac{1}{p}} = e^{\ln p^{-1}} = 1 + \frac{(-\ln p)}{1!} + \frac{(-\ln p)^2}{2!} + \frac{(-\ln p)^3}{3!} + \dots \dots \dots \infty$$

বা, $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\ln p}{1!} + \frac{(\ln p)^2}{2!} - \frac{(\ln p)^3}{3!} + \dots \dots \dots \infty \dots \dots$ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$p + \frac{1}{p} = 2\left[1 + \frac{(\ln p)^2}{2!} + \frac{(\ln p)^4}{4!} + \dots \dots \infty\right]$$ (প্রমাণিত)

8. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

ধরি, $u_n = \frac{1}{n!}$

$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)\,n!}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)n!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{(n+1)\,n!} \times n! = \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$

D' Alembert অনুপাত পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় ধারাটি অভিসৃত।

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

ধরি, $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times n(n+1) = \frac{n}{(n+2)} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1+\frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$\therefore$ কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া গেল না।

ধরি, $v_n = \frac{1}{n^2}$, যা অভিসৃত।

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = 1$ যা, একটি অশূন্য সসীম সংখ্যা।

সুতরাং তুলনামূলক পরীক্ষণ (comparision) এর সাহায্যে বলা যায় যে, ধারাটি অভিসৃত।

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

আমরা জানি, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ধারাটি অভিসৃত হবে যদি $P > 1$ হয়।

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ এখানে, $P = 2 > 1$। সুতরাং ধারাটি অভিসৃত।

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

ধরি, $u_n = \frac{1}{1+n^2}$ এবং $v_n = \frac{1}{n^2}$; যা অভিসৃত।

$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{1+n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+1\right)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1$; যা একটি অশূন্য সসীম সংখ্যা।

সুতরাং তুলনামূলক পরীক্ষণ এর সাহায্যে বলা যায় যে, ধারাটি অভিসৃত।

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

ধরি, $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ এবং $v_n = \frac{1}{n^2}$; যা অভিসৃত।

$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1$;

যা একটি অশূন্য সসীম সংখ্যা।

সুতরাং তুলনামূলক পরীক্ষণ এর সাহায্যে বলা যায় যে, ধারাটি অভিসৃত।

(vi) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\dots\dots$

n তম পদ $= u_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n})}$

এবং $v_n = \frac{1}{n^2}$; যা অভিসৃত।

$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n^2}(1+\frac{2}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{1+\frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1+0}$

$= 1$; যা একটি অশূন্য সসীম সংখ্যা।

সুতরাং তুলনামূলক পরীক্ষণ এর সাহায্যে বলা যায় যে, ধারাটি অভিসৃত।

(vii) $\frac{6}{1.3.5}+\frac{8}{3.5.7}+\frac{10}{5.7.9}+\dots\dots$

n তম পদ $= u_n = \frac{2n+4}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

ধরি, $v_n = \frac{1}{n^2}$; যা অভিসৃত।

$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{(2n+4)n^2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

$= \frac{n^3\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}$

$= \frac{2+\frac{4}{n}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}$

$= \frac{2+\frac{4}{\infty}}{\left(2-\frac{1}{\infty}\right)\left(2+\frac{1}{\infty}\right)\left(2+\frac{3}{\infty}\right)}$

$= \frac{2+0}{(2-0)(2+0)(2+0)} = \frac{2}{8}$

$= \frac{1}{4}$; যা একটি অশূন্য সসীম সংখ্যা।

সুতরাং তুলনামূলক পরীক্ষণের সাহায্যে বলা যায় যে, ধারাটি অভিসৃত।

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,n}{(n-1)!\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.(n-1)!\,n}{(n-1)!\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

মনে করি, $U_n = \frac{n^2}{3^n}$

$\therefore U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$

এখন, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}$

$= \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2}$

$= \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{3^n}{3^{n+1}}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 . 3^{-1}$

$= \frac{1}{3}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^2$

$= \frac{1}{3} < 1$

D' Alembert অনুপাত পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় ধারাটি অভিসৃত।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর

1. ক;
2. ক;
3. ক;
4. ক; ব্যাখ্যা: $T_{4+1} = {}^{11}C_4 . m^4 . x^4$
   $T_{5+1} = {}^{11}C_5 . m^5 . x^5$
   প্রশ্নমতে, ${}^{11}C_4\, m^4 = {}^{11}C_5\, m^5$
   $\Rightarrow \frac{m^5}{m^4} = \frac{{}^{11}C_4}{{}^{11}C_5} = \frac{330}{462}$
   $\therefore m = \frac{5}{7}$
5. খ; ব্যাখ্যা: $a = -3, n = 12, r = 6$
   $\therefore x = a\frac{r}{(n-r+1)}$
   বা, $x = (-3)\frac{6}{(12-6+1)} = \frac{-18}{7}$
6. খ; ব্যাখ্যা: $(1-x)^7$ এর বিস্তৃতিতে $(5+1)$তম পদ
   $= {}^7C_5.1^{7-5}.(-x)^5$
   $= {}^7C_5.(-1)^5.x^5$
   $= -21x^5$

7. খ; ব্যাখ্যা: $(2-x)^9$ এর বিস্তৃতিতে $(5+1)$তম পদ
$= {}^9C_5.2^{9-5}.(-x)^5$
$= {}^9C_5.2^4.(-1)^5.x^5$
$= -2016x^5$

8. ক; ব্যাখ্যা: $(1+2x)^{-1}$
$= \{1-(-2x)\}^{-1}$
$= 1+(-2x)+(-2x)^2+\dots\dots+(-2x)^n+\dots\dots$
$= 1-2x+4x^2+\dots\dots+(-2)^n x^n+\dots\dots$
$\therefore x^n$ এর সহগ $= (-2)^n$

9. খ; ব্যাখ্যা: $(1-3x)^{-2} = 1+2(3x)+3.(3x)^2+4(3x)^3+\dots\dots+(n+1)(3)^n x^n+\dots\dots$
$\therefore x^n$ এর সহগ $= (n+1)3^n$

10. ক; ব্যাখ্যা: $(1-x)^8(1+x)^7 = (1-x)(1-x^2)^7$
$= (1-x)\{1+{}^7C_1(-x^2)+{}^7C_2(-x^2)^2+\dots\dots+{}^7C_4(-x^2)^4+\dots\dots+(-x^2)^7\}$
x^9 এর সহগ $= {}^7C_4 = 35$

11. গ;

12. খ; ব্যাখ্যা: $y = 2x-3x^2+4x^3-5x^4+\dots\dots$
$\Rightarrow -y = -2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots\dots$
$\Rightarrow 1-y = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4\dots\dots$
$\Rightarrow 1-y = (1+x)^{-2}$
$\therefore (1+x) = (1-y)^{-\frac{1}{2}}$

13. খ; ব্যাখ্যা: $y = x+x^2+x^3+\dots$
বা, $(1+y) = 1+x+x^2+\dots$
বা, $(1+y) = (1-x)^{-1}$
$\therefore (1-x) = (1+y)^{-1}$

14. ঘ;

15. ক; ব্যাখ্যা: $\left(1-\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-x}{5}\right)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{-x}{5}\right)^2+\dots\dots$$

$$= 1-\frac{1}{10}x-\frac{1}{200}x^2+\dots\dots$$

$\therefore x$ এর সহগ $= -\frac{1}{10}$

16. ক; ব্যাখ্যা: $\left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{8}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{8}\right)^2-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{x}{8}\right)^3+\dots$$

x^3 এর সহগ $= \dfrac{\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\times\frac{1}{8^3} = \frac{-1}{8192}$

17. খ; ব্যাখ্যা: $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^3 = \left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^3 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^6$
$\therefore$ পদসংখ্যা $= 6+1 = 7$

18. ক; ব্যাখ্যা: x^n এর সহগ $= {}^{m+n}C_n$
$= \frac{(m+n)!}{(m+n-n)!\,n!} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$.

19. ক; ব্যাখ্যা: $T_{(r+1)} = {}^{11}C_r.\left(\frac{3}{2}\right)^{11-2r}.x^{11-r}.\left(\frac{-2}{3}\right)^r.x^{-2r}$
$= {}^{11}C_r.3^{11-2r}.2^{-11+2r}.(-1)^r.x^{11-3r}$
প্রশ্নমতে, $11-3r = 5 \therefore r = 2$
$\therefore T_{(2+1)} = {}^{11}C_2.3^{11-4}.2^{-11+2.2}.x^5$
$= \frac{120285}{128}x^5$

20. ঘ; ব্যাখ্যা: $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $n+1$. শেষ দিক থেকে r তম পদ প্রথম দিক থেকে $(n+1-r)$ তম পদ হবে।
$\therefore T_{(n-r)+1} = {}^nC_{(n-r)}.a^r.x^{n-r}$।

21. ক; ব্যাখ্যা: $n = 18$, সুতরাং পদসংখ্যা 19 এবং মধ্যপদ 10তম পদ x বর্জিত।

22. ক;

23. ক; ব্যাখ্যা: $5(1-2x)^{-1} = 5(1+2x+2^2x^2+\dots\dots+2^m x^m+\dots\dots)$
$\therefore x^m$ এর সহগ $= 5.2^m$

24. খ; ব্যাখ্যা: $y = 3x+6x^2+10x^3+\dots$
$\therefore 1+y = 1+3x+6x^2+10x^3+\dots$
বা, $(1+y) = (1-x)^{-3}$

25. খ; ব্যাখ্যা: $nx = -\frac{1}{5} \therefore x = \frac{-1}{5n}$
এবং $\frac{n(n-1)}{2}\times x^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}$
$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{25.n^2} = \frac{-1}{25.2}$
$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{n^2} = -1$
$\Rightarrow n^2-n = -n^2$
$\Rightarrow 2n^2-n = 0$
$\Rightarrow n(2n-1) = 0$
$\therefore n = \frac{1}{2}\ [n \neq 0]$
$\therefore x = -\frac{1}{5}\times 2 = -\frac{2}{5}$
$\therefore (1+x)^n = \left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

26. খ; 27. ঘ;

28. ক; ব্যাখ্যা: (iii) সঠিক নয়। কারণ, $(1 + 5x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ $(7 + 1)$তম পদে বিদ্যমান।
$\therefore x^7$ এর সহগ $= {}^{13}C_7\, 5^7$।

29. ঘ; ব্যাখ্যা: (iii) $\frac{r \text{ তম পদ}}{(r+1) \text{ তম পদ}} = \frac{T_{(r-1+1)}}{T_{(r+1)}}$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!} \times x^{r-1} \times a^{n-r+1}}{\frac{n!}{(n-r)!\,.\,r!} \times x^r \times a^{n-r}}$$

$$= \frac{ar}{(n-r+1)x}$$

30. ঘ; 31. ক;

32. খ; ব্যাখ্যা: (i) $\left(x^3 - \frac{1}{x^6}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(5 + 1)$ তম পদ $= {}^{15}C_5.(x^3)^{10}.\left(-\frac{1}{x^6}\right)^5 = -\,{}^{15}C_5$

(ii) মধ্যপদ $\frac{15-1}{2} + 1$

বা, ৪ম এবং $\frac{15+1}{2} + 1$ বা ৭ম পদ।

33. গ;

34. ক; ব্যাখ্যা: $(5 + 1)$ তম পদ $= {}^{13}C_5.x^{13-5}.(-1)^5.x^{-15}$
$= -\,{}^{13}C_5\,.\,x^{-7}$

35. খ;

36. ঘ; ব্যাখ্যা: $t = \frac{(n+1)3x}{a+3x} = \frac{(9+1)\,3.3}{1+3.3} = 9$

$\because t$ পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং বৃহত্তম পদ হবে দুইটি। 9-তম পদ এবং $(9 + 1)$ বা 10-তম পদ।

37. গ; 38. খ; 39. ক;

40. খ; ব্যাখ্যা: এখানে, $a = 1, r = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3} < 1$।

$$\therefore S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

41. ঘ; ব্যাখ্যা: $1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots\dots$

$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$

$= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots, \dots \infty\right) = 2\ln 2$

42. ঘ;

43. ক; ব্যাখ্যা: $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $= \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম

$= (4 + 1)$ তম $= {}^8C_4\, x^{8-4}\left(\frac{2}{x}\right)^4 = 1120$

44. ক; 45. ক;

46. ঘ; ব্যাখ্যা: $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{10}$ মধ্যপদ $= \left(\frac{10}{2} + 1\right)$

$= (5 + 1)$ তম পদ

$= {}^{10}C_5\left(\frac{x}{y}\right)^5.\left(\frac{y}{x}\right)^5 = {}^{10}C_5 = 252$

47. ক; ব্যাখ্যা: $1 + 2.\frac{1}{3^2} + \frac{2.5}{1.2}.\frac{1}{3^4} + \frac{2.5.8}{1.2.3}.\frac{1}{3^6} + \dots\dots$

এখানে, $a = 2, d = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$

$\therefore$ ঘাত $n = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{3}$

$\left[\text{কারণ, } nx = 2\frac{1}{3^2} \text{ বা, } \frac{-2}{3}x = \frac{2}{3}\frac{1}{3} \text{ বা, } x = -\frac{1}{3}\right]$

$\therefore$ যোগফল $= \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

48. খ; ব্যাখ্যা: $(3 + kx)^9$ এর বিস্তৃতিতে
x^3-এর সহগ $= {}^9C_3\, 3^{9-3}\,.\,k^3$
এবং x^4 এর সহগ $= {}^9C_4\, 3^{9-4}.\,k^4$
প্রশ্নমতে, ${}^9C_4\, 3^{9-4}.\,k^4 = {}^9C_3\, 3^{9-3}\,.\,k^3$
বা, $k = \frac{{}^9C_3}{{}^9C_4}.\frac{3^6}{3^5} = 2$

49. গ; ব্যাখ্যা: $(1 + x)^4(1 + x^2)^5 = (1 + 2x + x^2)^2(1 + x^2)^5$
$= (1 + 4x^2 + x^4 + 4x + 2x^2 + 4x^3)(1 + {}^5C_1 x^2 + {}^5C_2 x^4 + {}^5C_3 x^6 + {}^5C_4 x^8 + x^{10})$
$= (1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4)(1 + {}^5C_1 x^2 + {}^5C_2 x^4 + {}^5C_3 x^6 + {}^5C_4 x^8 + x^{10})$
বিস্তৃতিতে x^{12} আছে এমন পদসমূহের সমষ্টি
$= 6x^2 \times x^{10} + x^4 \times {}^5C_4 x^8$
$= 6x^{12} + {}^5C_4\, x^{12} = (6 + {}^5C_4)\, x^{12}$
$\therefore x^{12}$ এর সহগ $= 6 + {}^5C_4 = 6 + 5 = 11$

50. ঘ; ব্যাখ্যা: $(1 + x)^{17}$ এর $(r + 2)$ বা $(r + 1 + 1)$ তম পদ
$(r + 1 + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^{17}C_{r+1}$
এবং $(2r - 1)$ তম পদ $= \{(2r - 2) + 1\}$ তম পদের সহগ $= {}^{17}C_{2r-2}$
প্রশ্নমতে, ${}^{17}C_{r+1} = {}^{17}C_{2r-2}$
বা, $r + 1 + 2r - 2 = 17$ বা, $3r = 18$ বা, $r = 6$

51. ঘ; ব্যাখ্যা: $\left(x - \frac{k}{x}\right)^5$, এখানে $r = \frac{5-1}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$
$\therefore x$ এর সহগ $= {}^5C_2(-k)^2 = 10k^2$
প্রশ্নমতে, $10k^2 = 120$ বা, $k^2 = 12$ বা, $k = \pm\sqrt{12}$

52. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3!}(-x)^3$

$= \frac{(-4)\times(-5)(-6)(-1)^3}{6}x^3 = 20x^3$

53. গ; ব্যাখ্যা: $(1-x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে r তম

বা $\{(r-1)+1\}$ তম পদের মান

$= \frac{(-2-1)(-2-2)\ldots\ldots(-2-r+1+1)}{(r-1)!}(-x)^{r-1}$

$= \{(-1)^{r-1}\}^2 . \frac{2.3.4.5\ldots\ldots r}{(r-1)!} . x^{r-1}$

$= \frac{r!}{(r-1)!}x^{r-1}$

$= \frac{r(r-1)!}{(r-1)!}x^{r-1} = rx^{r-1}$

54. খ; ব্যাখ্যা: $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots\ldots\ldots$

বা, $-1 + y = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots\ldots$

বা, $1 - y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots$

বা, $1 - y = (1+x)^{-1}$

বা, $1 - y = \frac{1}{1+x}$

$\therefore 1 + x = (1-y)^{-1}$

55. ঘ; ব্যাখ্যা: $\left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম

পদ $= {}^{10}C_r . (-1)^r . 2^{10-2r} . x^{20-5r}$

শর্তমতে, $20 - 5r = 0 \quad \therefore r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_4(-1)^4 . 2^{10-8} = 840$

56. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\right)$

$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots$

57. খ;

58. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{2}(e + e^{-1}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots\ldots + 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6} - \ldots\ldots\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2!} + \frac{2}{4!} + \frac{2}{6!} + \ldots\ldots\ldots\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots\ldots\infty$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2+1}{e}\right) = \frac{e^2+1}{2e}$

59. ঘ; ব্যাখ্যা: $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ

$= {}^{10}C_r 2^{10-r} . x^{10-2r} . \left(\frac{1}{6}\right)^r$

শর্তমতে, $10 - 2r = 0 \quad \therefore r = 5$

x বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5(2)^{10-5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{28}{27}$

60. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{1+2x}{1-x}$

$= (1+2x)(1-x)^{-1} = (1-x)^{-1} + 2x(1-x)^{-1}$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots\infty)$

$+ 2x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots\infty)$

$\therefore x^9$ এর সহগ $= 1 + 2 = 3$

61. খ; ব্যাখ্যা: $r = \frac{np - m}{p - q} = \frac{18.1 - 8}{1-(-1)} = 5$

a^8 এর সহগ $= {}^{18}C_5 = 8568$

62. ক; ব্যাখ্যা: $(r+1)$ তম পদ $= {}^9C_r\left(\frac{2}{3}\right)^{9-r}(x^2)^{9-r}\left(\frac{-1}{3x}\right)^r$

$= {}^9C_r \frac{2^{9-r}}{3^{9-r}}\frac{(-1)^r}{3^r}x^{18-3r}$

$\therefore 18 - 3r = 0$ বা, $r = 6$

সুতরাং x বর্জিত পদ $= {}^9C_6\frac{2^3}{3^3}\frac{(-1)^6}{3^6} = \frac{224}{3^8}$

63. খ; ব্যাখ্যা: $T_{r+1} = {}^6C_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$

$= {}^6C_r x^{12-2r}.2^r.x^{-r}$

$= {}^6C_r 2^r x^{12-3r}$

x বর্জিত পদের জন্য, $12 - 3r = 0$

বা, $r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদ $= {}^6C_4 2^4 = 240$

64. খ; ব্যাখ্যা: $(1+ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ $=$ ${}^8C_r(ax)^r = {}^8C_r a^r x^r$

শর্তমতে, ${}^8C_3a^3 = {}^8C_4a^4 \quad \therefore a = \frac{4}{5}$

65. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{(1-x)(3-x)} = \frac{1}{(1-x)(3-1)} + \frac{1}{(1-3)(3-x)}$

$= \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(3-x)}$

$= \frac{1}{2}(1-x)^{-1} - \frac{1}{2}(3-x)^{-1}$

$= \frac{1}{2}(1-x)^{-1} - \frac{1}{2}\left\{3\left(1 - \frac{x}{3}\right)\right\}^{-1}$

$$= \frac{1}{2}(1-x)^{-1} - \frac{1}{2}.3^{-1}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{2}(1-x)^{-1} - \frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{2}[1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{10} + \ldots\ldots]$$
$$- \frac{1}{6}\left[1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + \ldots\ldots\right]$$

$\therefore$ x^{10} এর সহগ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{10}}\right)$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{11}}\right)$$

66. ঘ; ব্যাখ্যা: $x \times \left(\frac{-1}{x}\right) = -1 \quad \therefore r = \frac{n}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$\therefore$ মধ্যপদ $= {}^{16}C_8(-1)^8 = 12870$

67. ক;

68. ক; ব্যাখ্যা: $\log_e(1 - 3x + 2x^2)^{-1}$
$$= \log_e(1 - 2x - x + 2x^2)^{-1}$$
$$= \log_e\{(1-2x) - x(1-2x)\}^{-1}$$
$$= \log_e\{(1-x)(1-2x)\}^{-1}$$
$$= \log_e\left\{\frac{1}{(1-x)(1-2x)}\right\}$$
$$= \log_e 1 - \log_e\{(1-x)(1-2x)\}$$
$$= 0 - \log_e(1-x) - \log_e(1-2x)$$
$$= -\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\ldots\right]$$
$$-\left[-2x - \frac{(2x)^2}{2} - \ldots\ldots - \frac{(2x)^n}{n} - \ldots\ldots\right]$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= \frac{1}{n} + \frac{2^n}{n} = \frac{1+2^n}{n}$

69. খ; 70. ঘ;

71. ক; ব্যাখ্যা: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$$= \ln(1+x) - \ln(1-x)$$
$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\right)$$
$$-\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\right)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots$$
$$= 2x + 2\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots$$
$$= 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$\therefore$ সাধারণ পদ $= 2x\cdot\left(\frac{x^{2n-2}}{2n-1}\right) = \frac{2.x^{2n-1}}{2n-1}$

72. ঘ; ব্যাখ্যা: $(1+3x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ
$$= {}^{10}C_r(3x)^r$$
শর্তমতে, ${}^{10}C_4(3x)^4 = {}^{10}C_5(3x)^5$

বা, $17010x^4 = 61236x^5$
$$\therefore x = \frac{5}{18}$$

73. ক; ব্যাখ্যা: $\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে
$$r = \frac{np-m}{p-q} = \frac{11\times 2 - 7}{2-(-1)} = \frac{22-7}{3} = \frac{15}{3} = 5$$
x^7 এর সহগ $= {}^{11}C_5\, 2^{11-5}\left(-\frac{1}{4}\right)^5$
$$= 462 \times 2^6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -\frac{231}{8}$$

74. ক; ব্যাখ্যা: $\left(3x^2 - \frac{1}{3x}\right)^5$
$$= (3x^2)^5 - {}^5C_1(3x^2)^4\left(\frac{1}{3x}\right) + {}^5C_2(3x^2)^3\left(\frac{1}{3x}\right)^2 - {}^5C_3(3x^2)^2\cdot\left(\frac{1}{3x}\right)^3 + \ldots$$
$\therefore$ x এর সহগ $= -{}^5C_3 \times 3^2\frac{1}{3^3} = -\frac{10}{3}$

75. গ

76. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{1+2x}{(1-2x)^2}$
$$= (1+2x)(1-2x)^{-2}$$
$$= (1+2x)\{1 + 2.2x + 3.(2x)^2 + \ldots\ldots + 10(2x)^9 + 11(2x)^{10} + \ldots\}$$
$\therefore$ x^{10} এর সহগ $= (11 \times 2^{10}) + (2 \times 10 \times 2^9)$
$$= 21504$$

77. গ; ব্যাখ্যা: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots$$
$$\therefore \sqrt{2} = 1 + 1\frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2!2^4} + \frac{1.3.5}{3!2^6} \ldots\ldots \infty$$

78. খ;

▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. ক দেওয়া আছে, $f(x) = 1 - 2x - 15x^2$

এখন, $f(x) = 0$

বা, $1 - 2x - 15x^2 = 0$

বা, $15x^2 + 2x - 1 = 0$

সমীকরণের নিশ্চায়ক $= 2^2 - 4.15(-1)$
$= 4 + 60 = 64 = 8^2$

নিশ্চায়ক পূর্ণবর্গ

∴ মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ।

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{14}$

ধরি, g(x) এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ x বর্জিত।

(r + 1) তম পদ $= {}^{14}C_r (x^2)^{14-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2$
$= {}^{14}C_r\, x^{28-2r} (-1)^r x^{-2r}$
$= {}^{14}C_r (-1)^r x^{28-4r}$

∴ $28 - 4r = 0$

বা, $4r = 28$

∴ $r = 7$

∴ x বর্জিত পদ $= {}^{14}C_7 (-1)^7 = -{}^{14}C_7$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 1 - 2x - 15x^2$
$= 1 - 5x + 3x - 15x^2$
$= 1(1 - 5x) + 3x(1 - 5x)$
$= (1 - 5x)(1 + 3x)$

$$\therefore \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{(1-5x)(1+3x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{(1-5x)\left(1+3.\frac{1}{5}\right)} + \frac{-\frac{1}{3}}{\left\{1-5\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}(1+3x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{(1-5x)\left(\frac{8}{5}\right)} + \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}(1+3x)}$$

$$= \frac{1}{8(1-5x)} - \frac{1}{8(1+3x)}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-5x)} - \frac{1}{(1+3x)}\right]$$

$$= \frac{1}{8}[(1-5x)^{-1} - (1+3x)^{-1}]$$

$$= \frac{1}{8}\{(1 + 5x + 5^2x^2 + \ldots\ldots 5^rx^r + \ldots\ldots) - (1 - 3x + 3^2x^2 - 3^3x^3 + \ldots\ldots + (-3)^rx^r + \ldots\ldots\}$$

∴ x^r এর সহগ $\frac{1}{8}\{5^r + (-3)^r\}$ **(দেখানো হলো)**

2. ক দেওয়া আছে, $g(x) = px^2 + qx + r$

প্রশ্নমতে, $g(x) = 0$

∴ $px^2 + qx + r = 0$

বা, $4p^2x^2 + 4pqx + 4pr = 0$

বা, $(2px)^2 + 2(2px).\, q + q^2 - q^2 + 4pr = 0$

বা, $(2px + q)^2 = q^2 - 4pr$

বা, $2px + q = \pm\sqrt{q^2 - 4pr}$

বা, $2px = -q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}$

∴ $x = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = 3 + x$

∴ $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 3 + \frac{x}{2}$

∴ $\left\{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^n = \left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

অর্থাৎ (r + 1) তম পদ $= {}^nC_r 3^{n-r}\left(\frac{x}{2}\right)^r = {}^nC_r 3^{n-r} 2^{-r} x^r$

∴ x^4 এর সহগ $= {}^nC_4 3^{n-4} 2^{-4}$

x^5 এর সহগ $= {}^nC_5 3^{n-5} 4^{-5}$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_4 3^{n-4} 2^{-4} = {}^nC_5 3^{n-5} 2^{-5}$

বা, ${}^nC_4 = {}^nC_5 2^{-1} 3^{-1}$

বা, $\dfrac{n!}{4!(n-4)!} = \dfrac{n!}{5!(n-5)}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$

বা, $\dfrac{1}{4!(n-4)(n-5)!} = \dfrac{n!}{5.4!(n-5)!}\dfrac{1}{6}$

বা, $\dfrac{1}{n-4} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{6}$

বা, $\dfrac{1}{n-4} = \dfrac{1}{30}$

বা, $n - 4 = 30$

∴ $n = 34$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = px^2 + qx + r,\ p = 9$

$q = -\frac{2}{3x},\ r = \frac{1}{81x^2}$

∴ $g(x) = 9x^2 - \frac{2}{3x}.\, x + \frac{1}{81x^2}$
$= 9x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{81x^2}$
$= (3x)^2 - 2.\, 3x.\, \frac{1}{9x} + \left(\frac{1}{9x}\right)^2$
$= \left(3x - \frac{1}{9x}\right)^2$

∴ $\{g(x)\}^7 = \left\{\left(3x - \frac{1}{9x}\right)^2\right\}^7 = \left(3x - \frac{1}{9x}\right)^{14}$

মনে করি, $\left(3x - \frac{1}{9x}\right)^{14}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদ x বর্জিত।

$\therefore\ (r + 1)$ তম পদ $= {}^{14}C_r (3x)^{14-r}\left(-\frac{1}{9x}\right)^r$

$= {}^{14}C_r 3^{14-r} x^{14-r} (-1)^r 9^{-r} x^{-r}$

$= {}^{14}C_r (-1)^r 3^{14-r} 3^{-2r} x^{14-2r}$

$= {}^{14}C_r (-1)^r 3^{14-3r} x^{14-2r}$

যেহেতু $(r + 1)$ তম পদ x বর্জিত,

সেহেতু $14 - 2r = 0$

বা, $2r = 14$

$\therefore\ r = 7$

$\therefore$ x বর্জিত পদের মান $= {}^{14}C_7 (-1)^7 3^{14-21}$

$= -{}^{14}C_7 3^{-7}$ **(Ans.)**

3. **ক** দেওয়া আছে, $R(x) = 1 + x$

এখন, $\left|R\left(\frac{4x}{3}\right)\right| < 5$

বা, $\left|1 + \frac{4x}{3}\right| < 5$

বা, $-5 < 1 + \frac{4x}{3} < 5$

বা, $-5 - 1 < \frac{4x}{3} < 5 - 1$

বা, $-6 < \frac{4x}{3} < 4$

বা, $-6.\frac{3}{4} < x < 4.\frac{3}{4}$

বা, $-\frac{9}{2} < x < 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{9}{2} < x < 3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $R(x) = 1 + x,\ R\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x}$

$R(x) - R\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x - \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$= 1 + x - 1 - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$

$\therefore\ \left\{R(x) - R\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^{2n} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $(2n + 1)$ টি যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ বা $(n + 1)$ তম পদ।

$\therefore\ (n + 1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_n x^{2n-n}\left(-\frac{1}{x}\right)^n$

$= {}^{2n}C_n . x^n . (-1)^n . x^{-n} = (-1)^n . {}^{2n}C_n$

$= (-1)^n . \frac{(2n)!}{(2n - n)!n!}$

$= (-1)^n . \frac{2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3) \ldots 4.3.2.1}{n!\ n!}$

$= (-1)^n . \frac{1.2.3.4 \ldots (2n-3)(2n-2)(2n-1)\ 2n}{n!\ n!}$

$= (-1)^n . \frac{\{1.3.5 \ldots (2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6 \ldots (2n-2)\ 2n\}}{n!\ n!}$

$= (-1)^n \frac{\{1.3.5 \ldots (2n-3)(2n-1)\} 2^n \{1.2.3.4 \ldots (n-1).n\}}{n!n!}$

$= \frac{\{1.3.5 \ldots (2n-1)\}\ \{1.2.3 \ldots n\}}{n!\ n!} (-1)^n 2^n$

$= \frac{\{1.3.5 \ldots (2n-1)\}\ n!}{n!\ n!} (-2)^n$

$= \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{n!} (-2)^n$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $R(x) = 1 + x$

$\therefore\ \{R(x)\}^n = (1 + x)^n$

মনে করি, $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে ক্রমিক পদত্রয় $(r + 1)$ তম, $(r + 2)$ তম এবং $(r + 3)$ তম

এখন, $(r + 1)$ তম পদ $= {}^nC_r x^r$

$(r + 2)$ বা $(r + 1 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_{r+1} x^{r+1}$ এবং

$(r + 3)$ বা $(r + 2 + 1)$তম পদ $= {}^nC_{r+2} x^{r+2}$

$\therefore\ x^r, x^{r+1}$ এবং x^{r+2} পদত্রয়ের সহগ যথাক্রমে ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$ ও ${}^nC_{r+2}$

প্রশ্নানুসারে, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 7 : 42$

সুতরাং, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} = 1 : 7$

বা, $\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \frac{1}{7}$ বা, $7.{}^nC_r = {}^nC_{r+1}$

বা, $7. \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$

বা, $7. \frac{1}{r!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{1}{(r+1)r!(n-r-1)!}$

বা, $\frac{7}{n-r} = \frac{1}{r+1}$

বা, $7(r+1) = n - r$

বা, $7r + 7 + r = n$

$\therefore\ 8r = n - 7 \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, ${}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 7 : 42$

বা, $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+2}} = \frac{7}{42}$

বা, $6.{}^nC_{r+1} = {}^nC_{r+2}$

বা, $6.\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = \frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$

বা, $\frac{6}{(r+1)!(n-r-1)(n-r-2)!}$

$= \frac{1}{(r+2)(r+1)!(n-r-2)!}$

বা, $\frac{6}{n-r-1} = \frac{1}{r+2}$

বা, $6(r+2) = n-r-1$

বা, $6r+12+r = n-1$

$\therefore\ 7r = n-13 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

এখন, (i) নং হতে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$8r-7r = n-7-n+13 \quad \therefore\ r = 6$

(ii) এ $r = 6$ বসিয়ে $7 \times 6 = n - 13$

বা, $n = 42 + 13 = 55$ **(Ans.)**

4. **ক** দেওয়া আছে, $N = 3 + \frac{1}{x}$

$\therefore\ N^8 = \left(3 + \frac{1}{x}\right)^8$

$\therefore$ N^8 এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $= 8 + 1 = 9$, যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, বিস্তৃতিতে একটি মধ্যপদ আছে এটি $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম পদ বা, 5 তম পদ

$\therefore$ মধ্যপদ $= {}^8C_4\, 3^{8-4}\left(\frac{1}{x}\right)^4 = {}^8C_4\, 3^4 \frac{1}{x^4}$

$= 70 \times 81 \times \frac{1}{x^4} = \frac{5670}{x^4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = 1 + 3x$, $N = 3 + \frac{1}{x}$

$\therefore\ M^pN^q = (1+3x)^p\left(3+\frac{1}{x}\right)^q$

$= (1+3x)^p\left(\frac{1+3x}{x}\right)^q = \frac{(1+3x)^{p+q}}{x^q}$

মনে করি, M^pN^q এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ ধ্রুবক পদ।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= \frac{1}{x^q}.{}^{p+q}C_r(3x)^r = {}^{p+q}C_r\, 3^r x^{r-q}$

$\therefore\ r - q = 0$

বা, $r = q$

$\therefore$ $(q+1)$ তম পদ ধ্রুবক পদ এবং ধ্রুবক পদের মান $= {}^{p+q}C_q\, 3^q$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P(x) = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \ldots$

এবং $y = P(x)$

বা, $y = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \ldots$

বা, $1 - y = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots\ldots$

বা, $1 - y = (1+x)^{-3}$

বা, $1 + x = (1-y)^{-\frac{1}{3}}$

বা, $1 + x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)y + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2 - \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3 + \ldots\ldots\infty$

বা, $1 + x = 1 + \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{14}{81}y^3 + \ldots\ldots\infty$

$\therefore\ x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{14}{81}y^3 + \ldots..\infty$ **(দেখানো হলো)**

5. **ক** দেওয়া আছে, $F = b - cx$, $b = 7$, $x = \frac{30\sqrt{-2}}{c}$

$\therefore\ \sqrt{F} = \sqrt{b-cx} = \sqrt{7 - c.\frac{30\sqrt{-2}}{c}}$

$= \sqrt{7 - 30\sqrt{-2}} = \sqrt{7 - 30\sqrt{2}i}$

$= \sqrt{25 - 2.15\sqrt{2}i - 18}$

$= \sqrt{5^2 - 2.5.3\sqrt{2}i + (3\sqrt{2}i)^2}$

$= \sqrt{(5-3\sqrt{2}i)^2} = \pm(5 - 3\sqrt{2}i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $F = b - cx$, $b = 1$, $c = 2$

$\therefore\ F = 1 - 2x$

$\therefore\ F^{-\frac{1}{2}} = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ

$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-2x)^r$

$= \frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r.2^r.x^r$

$= (-1)^{2r}.\frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{2^r.r!}.2^r.x^r$

$= \frac{\{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)\}\{2.4.6.8\cdots\cdots 2r\}}{r!(2.4.6\cdots\cdots 2r)}x^r$

$= \frac{1.2.3.4\cdots\cdots 2r}{r!\,2^r(1.2.3\cdots\cdots r)}x^r$

$= \frac{(2r)!}{2^r.r!.r!}x^r = \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}x^r$

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $F = b - cx, c = -3$

$\therefore \quad F = b + 3x$

$\therefore \quad F^m = (b + 3x)^m$

এখানে, প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= (b + 3x)^m$ এর বিস্তৃতি

$(b + 3x)^m = b^m + {}^mC_1 b^{m-1}(3x) + {}^mC_2 b^{m-2}(3x)^2 + \cdots \cdots \cdots + (3x)^m$

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $b^m = p \cdots \cdots \cdots$ (i)

${}^mC_1 b^{m-1}(3x) = \frac{21}{2}px \quad \cdots \cdots \cdots$ (ii)

এবং ${}^mC_2\, b^{m-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}px^2 \cdots \cdots \cdots$ (iii)

এখন, (ii) নং হতে পাই, $m.\frac{b^m}{b}.3x = \frac{21}{2}px$

বা, $m.\frac{p}{b} = \frac{7}{2}p$ [(i) হতে]

$\therefore m = \frac{7b}{2} \cdots \cdots \cdots$ (iv)

আবার (iii) নং হতে পাই, ${}^mC_2\, b^{m-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}px^2$

বা, $\frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{b^m}{b^2}.9x^2 = \frac{189}{4}px^2$

বা, $\frac{m(m-1)}{2}\frac{p}{b^2} = \frac{21}{4}p$ [(i) নং হতে $b^m = p$]

বা, $m(m-1).\frac{1}{b^2} = \frac{21}{2}$

বা, $2m(m-1) = 21b^2$

বা, $2.\frac{7b}{2}\left(\frac{7b}{2} - 1\right) = 21b^2$[(iv) নং হতে]

বা, $\frac{7b-2}{2} = 3b$ [উভয়পক্ষকে 7b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $7b - 2 = 6b \quad \therefore b = 2$

(iv) নং এ $b = 2$ বসিয়ে, $m = \frac{7}{2} \times 2 = 7$

(i) নং এ $b = 2, p = 7$ বসিয়ে, $p = 2^7$

$\therefore$ b, p ও m এর মান যথাক্রমে 2, 128 ও 7. **(Ans.)**

6. **ক** দেওয়া আছে, $P = 1 - 4x$

$\frac{1}{|P|} \geq 3$

বা, $\frac{1}{|1-4x|} \geq 3$

$\frac{1}{|1-4x|} \geq 3, \; x \neq \frac{1}{4}$

বা, $|1 - 4x| \leq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{4}$

বা, $-\frac{1}{3} \leq 4x - 1 \leq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{4}$

বা, $\frac{2}{3} \leq 4x \leq \frac{4}{3}$, [1 যোগ করে] $x \neq \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \infty$

ধরি, $y = g(x)$

$\therefore \quad x = g^{-1}(y)$

এখন, $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots \infty$

বা, $1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \cdots \cdots$

বা, $1 + y = (1 - x)^{-2}$

বা, $1 + y = \frac{1}{(1-x)^2}$

বা, $(1-x)^2 = \frac{1}{1+y}$

বা, $(1-x)^2 = (1+y)^{-1}$

বা, $1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3 + \ldots\ldots \infty$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1.3}{4.2}y^2 - \frac{1.3.5}{8.6}y^3 \ldots\ldots \infty$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 \ldots\ldots \infty$

বা, $-x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots\ldots \infty$

$\therefore \; x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \ldots\ldots \infty$

$\therefore \; g^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \ldots\ldots \infty$

$\therefore \; g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \ldots\ldots \infty$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $P = 1 - 4x$

$\therefore \; \frac{1}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-4x)^r$

$= \frac{(-1)^r.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)\ldots\left(r+\frac{1}{2}-1\right)}{r!}(-1)^r.4^r.x^r$

$$= \frac{(-1)^{2r}\{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)\}\frac{1}{2^r}}{r!}.2^{2r}.x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= \dfrac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r\,r!}2^{2r}$

$$= \frac{\{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)\}\{2.4.6\ldots\ldots2r\}}{r!\{2.4.6\ldots\ldots2r\}}2^r$$

$$= \frac{1.2.3.4\ldots\ldots(2r-1).2r}{r!(1.2.3.4\ldots\ldots r)2^r}.2^r$$

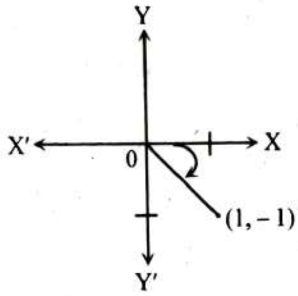
$= \dfrac{(2r)!}{r!r!} = \dfrac{(2r)!}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

7. **ক** দেওয়া আছে,

$h(x) = 1 - x$

এখন, $z = h(i)$

$= 1 - i$



যেহেতু z এর প্রতিরূপী বিন্দু চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত;

$\therefore \arg z = -\tan^{-1}\left|\dfrac{-1}{1}\right| = -\tan^{-1}(1) = -\dfrac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $h(x) = 1 - x$

$\therefore \sqrt{h\left(\dfrac{x}{6}\right)} = \sqrt{1-\dfrac{x}{6}} = \left(1-\dfrac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$

প্রদত্ত রাশি $= \left(1-\dfrac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{6}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{6}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(-\frac{x}{6}\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\left(-\frac{x}{6}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{6} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}\cdot\frac{x^2}{6^2} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3!}\cdot\frac{x^3}{6^3} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{4!}\cdot\frac{x^4}{6^4} - \ldots$$

…

$$\therefore \left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{x^3}{2^3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{x^4}{2^4}$$ (5 তম পদ পর্যন্ত) **(Ans.)**

$x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$\left(1-\frac{4}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{16}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{64}{8} - \ldots - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{256}{16} - \ldots.$$

বা, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{54} - \dfrac{5}{648} - \ldots\ldots$

$\therefore 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{54} - \dfrac{5}{648} - \ldots\ldots = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $h(x) = 1 - x$

$$\therefore h\left(\frac{x^2-8x+9}{x^2-3x+2}\right) = 1 - \frac{x^2-8x+9}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{x^2-3x+2-x^2+8x-9}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{5x-7}{x^2-2x-x+2}$$

$$= \frac{5x-7}{x(x-2)-1(x-2)}$$

$$= \frac{5x-7}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{5.27}{(x-2)(2-1)} + \frac{5.1-7}{(1-2)(x-1)}$$

$$= \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-1}$$

$$= \frac{3}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{-(1-x)}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} - 2(1-x)^{-1}$$

$$= -\frac{3}{2}\left\{1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right\} - 2\{1+x+x^2+\ldots.+x^n+\ldots..\}$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= -\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2^n} - 2.1 = -\dfrac{3}{2^{n+1}} - 2$ **(Ans.)**

8. **ক** $(a+x)^8 = a^8 + {}^8C_1a^7x + {}^8C_2a^6x^2 + {}^8C_3a^5x^3 + {}^8C_4a^4x^4 + {}^8C_5a^3x^5 + {}^8C_6a^2x^6 + {}^8C_7ax^7 + x^8$

$= a^8 + 8a^7x + 28a^6x^2 + 56a^5x^3 + 70a^4x^4 + 56a^3x^5 + 28a^2x^6 + 8ax^7 + x^8$ **(Ans.)**

খ $\left(\dfrac{a}{x} - bx^2\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে,

সাধারণ পদ অর্থাৎ $(r+1)$ তম পদ

$= {}^nC_r\left(\dfrac{a}{x}\right)^{n-r}(-bx^2)^r$

$= (-1)^r\,{}^nC_r\,a^{n-r}b^rx^{-n+3r}$

$n = 7$ হলে, $(r+1)$ তম পদ

$= (-1)^r\,{}^7C_r\,a^{7-r}b^rx^{-7+3r}$ ... (i)

আবার, $n = 7$ হলে, $\left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^n = \left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= (7 + 1) = 8$; যা জোড় সংখ্যা।
সুতরাং বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে দুইটি এবং এরা $\left(\frac{7-1}{2} + 1\right) = 4$ তম ও $\left(\frac{7+1}{2} + 1\right) = 5$ তম পদ।

(i) নং এ $r = 3$ বসিয়ে, 4-তম পদ
$= (-1)^3\, {}^7C_3\, a^{7-3} b^3 x^{-7+9}$
$= -\,{}^7C_3\, a^4 b^3 x^2 = -35a^4b^3x^2$

(i) নং এ $r = 4$ বসিয়ে,
5-তম পদ $= (-1)^4\, {}^7C_4\, a^{7-4} b^4 x^{-7+12}$
$= 35\, a^3b^4x^5$

গ

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ

এখন, ত্রিভুজটি হতে দেখা যায়, $n = 4$ হলে, প্রথম হতে দ্বিতীয় পদের সহগ $= 4 =$ শেষ হতে দ্বিতীয় পদের সহগ।
$n = 5$ হলে, প্রথম হতে দ্বিতীয় পদের সহগ $= 5 =$ শেষ হতে দ্বিতীয় পদের সহগ এবং প্রথম হতে তৃতীয় পদের সহগ $= 10 =$ শেষ হতে তৃতীয় পদের সহগ।
$n = 6$ হলে, প্রথম হতে দ্বিতীয় পদের সহগ $= 6 =$ শেষ হতে দ্বিতীয় পদের সহগ এবং প্রথম হতে তৃতীয় পদের সহগ $= 15 =$ শেষ হতে তৃতীয় পদের সহগ।

(দেখানো হলো)

9. **ক** $\frac{1}{x-1} = -(1-x)^{-1}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি $|x| < 1$
বা $-1 < x < 1$ হয়।
আবার, $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি
$\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ বা $|x| < 2$ বা $-2 < x < 2$ হয়।
$\therefore$ x এর বৈধ ব্যবধি $= \{-1 < x < 1\} \cap \{-2 < x < 2\}$
$= -1 < x < 1$
$= |x| < 1$ **(Ans.)**

খ $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{5-7}{(x-1)(1-2)} + \frac{10-7}{(x-2)(2-1)}$
[Cover-up Rule এর সাহায্যে]

$$= \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$
$$= \frac{2}{-(1-x)} + \frac{3}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$$
$$= -2(1-x)^{-1} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}$$

এখন, $-2(1-x)^{-1} = -2(1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots)$
$\therefore$ x^n এর সহগ $= -2$
এবং $-\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\ldots\right)$
x^n এর সহগ $= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{-3}{2^{n+1}}$

$\therefore$ $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ
$$= -2 - \frac{3}{2^{n+1}}$$
$$= -\left(2 + \frac{3}{2^{n+1}}\right) \textbf{ (Ans.)}$$

গ $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots\ldots$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে r-তম পদ,
$$u_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left\{-\frac{1}{2}-(r-2)\right\}}{(r-1)!}x^{r-1}$$
$$= \frac{(-1)^{r-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\ldots\ldots\left\{\frac{1}{2}+(r-2)\right\}}{(r-1)!}x^{r-1}$$

$(r+1)$ তম পদ, u_{r+1}
$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left\{-\frac{1}{2}-(r-2)\right\}\left\{-\frac{1}{2}-(r-1)\right\}}{r!}x^r$$
$$= (-1)^r \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\ldots\left\{\frac{1}{2}+(r-1)\right\}}{r!}x^r$$
$$\therefore \frac{u_{r+1}}{u_r} = -\frac{\left\{\frac{1}{2}+(r-1)\right\}(r-1)!}{r!}\frac{x^r}{x^{r-1}}$$
$$= -\frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)}{r}x = -\left(1-\frac{1}{2r}\right)x$$

$\therefore \lim_{r\to\infty} \frac{u_{r+1}}{u_r} = -\lim_{r\to\infty}\left(1-\frac{1}{2r}\right)x = -x < 1$

যেহেতু দেওয়া আছে, $|x| < 1$

$\therefore$ D'Alembert অনুপাত পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় ধারাটি অভিসৃত।

10. ক $(2+3x)^{-4} = \left\{2\left(1+\frac{3x}{2}\right)\right\}^{-4}$

$= 2^{-4}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{16}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-4}$

$= \frac{1}{16}\left\{1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{(-4)(-4-1)}{2!}\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$

$= \frac{1}{16}\left\{1-6x+\frac{45x^2}{2}-\ldots\ldots\ldots\right\}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $P = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল (A)}} = \frac{\pi}{\pi r^2}$

$= \frac{1}{\left\{\left(\theta^2-2+\frac{1}{\theta^2}\right)^{-3}\right\}^2}$ [উদ্দীপক হতে]

$= \left(\theta^2-2+\frac{1}{\theta^2}\right)^6 = \left\{\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)^2\right\}^6$

$\therefore P = \left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)^{12}$.

এখন, ধরি $\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে θ বর্জিত পদ $(r+1)$ তম পদ

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r \cdot \theta^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{\theta}\right)^r$

$= {}^{12}C_r(-1)^r\theta^{12-2r}$

শর্ত অনুসারে, $(r+1)$ তম পদে θ এর ঘাত 0 হবে।

$\therefore 2r-12=0, \therefore r=6$

$\therefore \theta$ বর্জিত পদ $= {}^{12}C_6 \cdot (-1)^6 = 924$ **(Ans.)**

গ এখানে, $r = \left(\theta^2-2+\frac{1}{\theta^2}\right)^{-3}$

বা, $r^{-1} = \left(\theta^2-2+\frac{1}{\theta^2}\right)^3$ বা, $r^{-\frac{n}{3}} = \left(\theta^2-2+\frac{1}{\theta^2}\right)^n$

বা, $r^{-\frac{n}{3}} = \left\{\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)^2\right\}^n$ $\therefore r^{-\frac{n}{3}} = \left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)^{2n}$

$\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $(2n+1)$টি যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা $(n+1)$ তম পদ।

$\therefore (n+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_n\,\theta^{2n-n}\left(-\frac{1}{\theta}\right)^n$

$= {}^{2n}C_n.\theta^n.(-1)^n.\theta^{-n}$

$= (-1)^n.\,{}^{2n}C_n = (-1)^n.\frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}$

$= (-1)^n.\frac{2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots4.3.2.1}{n!\,n!}$

$= (-1)^n.\frac{1.2.3.4\ldots(2n-3)(2n-2)(2n-1)\,2n}{n!\,n!}$

$= (-1)^n.\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6\ldots(2n-2)\,2n\}}{n!\,n!}$

$= (-1)^n\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}2^n\{1.2.3.4\ldots(n-1).n\}}{n!n!}$

$= \frac{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}\{1.2.3\ldots n\}}{n!\,n!}(-1)^n2^n$

$= \frac{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}\,n!}{n!\,n!}(-2)^n$

$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}(-2)^n$ **(প্রমাণিত)**

11. ক $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6 = \left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

যেহেতু, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $n+1$ সংখ্যক পদ আছে।

$\therefore$ পদের সংখ্যা $= 12+1 = 13$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $q_1 = q_2 = 10^{-4}$ কুলম্ব

এবং $C = 9\times10^9$

উদ্দীপক অনুসারে, $y \propto \frac{q_1q_2}{r^2}$ বা, $y = C\frac{q_1q_2}{r^2}$ ...... (i)

এখন বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 0.25 মিটার পরিবর্তন করলে আমরা পাই, $r = 1+0.25 = 1.25$ মিটার

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$y = \frac{9\times10^9\times10^{-4}\times10^{-4}}{(1.25)^2} = 57.6$ নিউটন **(Ans.)**

গ প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, $y \propto \frac{q_1q_2}{r^2}$ বা, $y = C\frac{q_1q_2}{r^2}$

এখানে, $r = 1+x$

$q_1 = q_2 = 10^{-4}$

$c = 9\times10^9$

$\therefore y = 9\times10^9\times\frac{10^{-4}\times10^{-4}}{(1+x)^2}$

বা, $y = 90\,(1+x)^{-2}$

$\therefore y = 90\,(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots\ldots)$

দ্বিপদীটির ১ম তিন পদ নিয়ে পাই,

$y = 90\,(1-2x+3x^2)$

আবার, $y = 180$

$\therefore 90\,(1-2x+3x^2) = 180$

বা, $3x^2-2x+1 = 2$

বা, $3x^2-2x-1 = 0$

বা, $3x^2 - 3x + x - 1 = 0$

বা, $3x(x-1) + (x-1) = 0$

বা, $(x-1)(3x+1) = 0$

হয়, $x = 1$ অথবা $x = -\frac{1}{3}$

যেহেতু দূরত্ব ঋণাত্মক হবে না

সুতরাং, $x = 1$ **(Ans.)**

12. ক $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots + (-1)^r x^r + \ldots$

$\therefore x^r$ এর সহগ $= (-1)^r$. **(Ans.)**

খ $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = (1+x)^{-1}$

বা, $S^{\frac{3}{2}} = (1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3.5}{8}x^2 - \frac{3.5.7}{8.6}x^3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \ldots \textbf{ (Ans.)}$$

গ $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

$= (1+x)^{-1}$

$\therefore \frac{1}{S^n} = \frac{1}{(1+x)^{-n}} = (1+x)^n$

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^nC_r x^r$ এবং

$(r+3)$ তম পদ $= {}^nC_{r+2} x^{r+2}$

প্রশ্নানুসারে,

${}^nC_r = {}^nC_{r+2}$ বা, $r + r + 2 = n$

$\therefore 2r = n - 2$ **(দেখানো হলো)**

13. ক দেওয়া আছে, $f(x) = \left(x + \frac{1}{3x}\right)^{2n}, n \in \mathbb{N}$.

$\therefore f(x)$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ এবং $(2n - r + 1)$ তম পদদ্বয় সমদূরবর্তী।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_r.x^{2n-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r = \frac{1}{3^r}.{}^{2n}C_r x^{2n-2r}$ **(Ans.)**

আবার, $(2n - r + 1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_{2n-r}.x^{2n-2n+r}\left(\frac{1}{3x}\right)^{2n-r}$

$$= {}^{2n}C_r . x^{-2n+r+r}\frac{1}{3^{2n-r}}$$

$$= \frac{{}^{2n}C_r}{3^{2n-r}} . x^{2r-2n} \textbf{ (Ans.)}$$

খ মনে করি, $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= \frac{1}{3^r}{}^{2n}C_r.x^{2n-2r}$ ['ক' হতে]

যেহেতু পদটি x বর্জিত,

$\therefore 2n - 2r = 0$ অর্থাৎ $n = r$

$\therefore x$ বর্জিত পদটি $= \frac{1}{3^n}.{}^{2n}C_n = \frac{1}{3^n}.\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}$

$$= \frac{1}{3^n}.\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots\ldots 4.3.2.1}{n!\,n!}$$

$$= \frac{1}{3^n}.\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6\ldots(2n-2)2n\}}{n!\,n!}$$

$$= \frac{2^n}{3^n}.\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{1.2.3\ldots(n-1)(n)\}}{n!\,n!}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-3)(2n-1)}{n!}.\left(\frac{2}{3}\right)^n \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(x + \frac{1}{3x}\right)^{2n}$

এখানে, $2n$ জোড় সংখ্যা। সুতরাং মধ্যপদ হবে $\left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ তম বা $(n+1)$ তম পদ।

$\therefore f(x)$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $= {}^{2n}C_n.x^n.\left(\frac{1}{3x}\right)^{2n-n}$

$$= {}^{2n}C_n.x^n.\frac{1}{3^n x^n}$$

$$= {}^{2n}C_n.\frac{1}{3^n}$$

আবার, $f(x) = \left(x + \frac{1}{3x}\right)^{2n}; n \in \mathbb{N}$

বা, $f(2x) = \left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{2n}$

বা, $[f(2x)]^{\frac{3}{n}} = \left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{2n.\frac{3}{n}}$

$\therefore [f(2x)]^{\frac{3}{n}} = \left(2x + \frac{1}{6x}\right)^6$

$[f(2x)]^{\frac{3}{n}}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $(6+1)$ বা, 7 যা একটি বিজোড় সংখ্যা। এক্ষেত্রে $\left(\frac{6}{2} + 1\right)$ বা, 4 তম পদটি মধ্যপদ।

$\therefore 4$ তম পদ $= {}^6C_3(2x)^3\left(\frac{1}{6x}\right)^3 = {}^6C_3.\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$f(x)$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ ${}^{2n}C_n.\frac{1}{3^n}$

শর্তমতে, $\frac{1}{3^n}{}^{2n}C_n = \left(\frac{1}{3}\right)^3.{}^6C_3$

বা, $\left(\frac{1}{3}\right)^n {}^{2n}C_n = \left(\frac{1}{3}\right)^3.{}^6C_3$

$\therefore n = 3$ **(দেখানো হলো)**

14. ক দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$
$= (1 + 1)x + (2 + 1)x^2 + (3 + 1)x^3 + ...$

$\therefore$ সাধারণ পদ $= (n + 1)x^n$ যেখানে $n = 1, 2, 3 ......$

যখন $n = 10$ তখন ১০ম পদ $= (10 + 1)x^{10}$
$= 11x^{10}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

$\therefore 1 + f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (n + 1)x^n + ...$

[উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $1 + f(x) = (1 - x)^{-2}$

বা, $1 + f(0.5) = (1 - 0.5)^{-2}$

বা, $1 + f(0.5) = (0.5)^{-2}$

বা, $1 + f(0.5) = 4$

বা, $f(0.5) = 4 - 1$

$\therefore f(0.5) = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 3 **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (n + 1)x^4 + ...$

ধরি, $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\therefore y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \cdots$

বা, $1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \cdots$

বা, $1 + y = (1 - x)^{-2}$

বা, $1 + y = \frac{1}{(1 - x)^2}$

বা, $(1 - x)^2 = \frac{1}{1 + y}$

বা, $(1 - x)^2 = (1 + y)^{-1}$

বা, $1 - x = (1 + y)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}y^3 + \dots \dots \infty$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1.3}{4.2}y^2 - \frac{1.3.5}{8.6}y^3 + \dots \dots$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \dots \dots$

বা, $-x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \dots \dots$

বা, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \dots \dots$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \dots \dots$

এখন y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \dots \dots$ **(দেখানো হলো)**

15. ক $g(x) = (1 - x)^{-1}(1 - 2x)^{-1}$

x এর বৈধ ব্যবধি $= \{x : -1 < x < 1\} \cap \{x : -1 < 2x < 1\}$
$= \{x : -1 < x < 1\} \cap \{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$
$= (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ ব্যবধি : $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ $g(x) = (1 - x)^{-1}(1 - 2x)^{-1}$

$= \{(1 - x)(1 - 2x)\}^{-1} = \frac{1}{(1 - x)(1 - 2x)}$

$= \frac{1}{(1 - x)(1 - 2)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 - 2x)}$

[cover-up rule এর সাহায্যে]

$= -\frac{1}{1 - x} + \frac{2}{1 - 2x} = 2(1 - 2x)^{-1} - (1 - x)^{-1}$

$= 2\{1 + 2x + (2x)^2 + \cdots \cdots + (2x)^n + \cdots \cdots\} - (1 + x + x^2 + \cdots \cdots + x^n + \cdots \cdots)$

$= 2\{1 + 2x + 4x^2 + \cdots \cdots + 2^n x^n + \cdots \cdots) - (1 + x + x^2 + \cdots \cdots + x^n + \cdots \cdots)$

অতএব, x^n-এর সহগ $= 2.2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ **(দেখানো হলো)**

গ উদ্দীপক থেকে পাই,

$f(x) = (1 + x)^p, p \in \mathbb{N}$

$\therefore f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^p$

ধরি, $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^p$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^2 আছে।

$\therefore (r + 1)$ তমপদ $= {}^pC_r(1)^{p-r}\left(\frac{x}{2}\right)^r = {}^pC_r\frac{x^r}{2^r}$.

যেহেতু এই পদটিতে x^2 আছে;

সেহেতু $x^2 = x^r \therefore r = 2$

$\therefore 2 + 1$ বা, 3 তমপদে x^2 আছে;

$\therefore x^2$ এর সহগ $= {}^pC_2 . \frac{1}{2^2}$

বা, $7 = \frac{p!}{2!(p - 2)!} . \frac{1}{4}$

বা, $28 = \frac{p(p - 1)(p - 2)!}{2.1.(p - 2)!}$

বা, $p^2 - p = 56$ বা, $p^2 - p - 56 = 0$

বা, $p^2 - 8p + 7p - 56 = 0$

বা, $p(p-8) + 7(p-8) = 0$

বা, $(p+7)(p-8) = 0$

বা, $p = 8$ কিন্তু $p + 7 \neq 0$.

$\therefore p = 8$ **(Ans.)**

16. ক মনে করি, $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

$\therefore (r+1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r (2x)^{10-r}.\left(\frac{1}{6x}\right)^r$

$= {}^{10}C_r 2^{10-r}. x^{10-r}. 6^{-r}.x^{-r}$

$= {}^{10}C_r. 2^{10-r}.(3.2)^{-r}. x^{10-2r}$

$= {}^{10}C_r 2^{10-2r}. 3^{-r}. x^{10-2r}$

যেহেতু, পদটিতে x^0 আছে। সুতরাং $10 - 2r = 0$

বা, $2r = 10 \quad \therefore r = 5$

$\therefore$ 6 তম পদটি x বর্জিত। **(Ans.)**

খ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ …… (i) এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i) হতে, $a\alpha + a\beta = -b$ বা, $a\alpha + b = -\alpha\beta$

$\alpha\beta + b = -a\alpha$

তাহলে, $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$

$= \frac{1}{(a\alpha+b)^2} + \frac{1}{(a\beta+b)^2}$

$= \frac{1}{(-a\beta)^2} + \frac{1}{(-a\alpha)^2} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right\} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right\}$

$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\right\} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}\right\}$

$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2}\right\} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$

সুতরাং $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \cdots$

বা, $1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \cdots$

বা, $1 + y = (1-x)^{-2}$ বা, $1 + y = \frac{1}{(1-x)^2}$

বা, $(1-x)^2 = \frac{1}{1+y}$

বা, $(1-x)^2 = (1+y)^{-1}$ বা, $1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $1 - x =$

$1 - \frac{1}{2}y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3 + \ldots\ldots\infty$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1.3}{4.2}y^2 - \frac{1.3.5}{8.6}y^3 + \ldots\ldots$

বা, $1 - x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots\ldots$

বা, $-x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots\ldots$

$\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \ldots\ldots$ **(দেখানো হলো)**

17. ক $2x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b ও c হলে $a + b + c = \frac{-(-2)}{2} = 1$

এবং $abc = \frac{-(-6)}{2} = 3$

$\therefore a + b + c + abc = 1 + 3 = 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = (1-x)^n$

$n = \frac{1}{2}$ হলে, $g(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$

$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x)^3}{3!} + \cdots$

$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots\cdots$

এ বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি $|x| < 1$ অর্থাৎ $-1 < x < 1$ হয়; কাজেই $x = 0.02$ এর জন্যও বিস্তৃতিটি বৈধ।

$\therefore (1 - 0.02)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{0.02}{2} - \frac{(0.02)^2}{8} - \frac{(0.02)^3}{16} - \cdots\cdots$

বা, $\sqrt{\frac{98}{100}} = 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 - \cdots\cdots$

বা, $\frac{7}{10}\sqrt{2} = 0.9899495 \cdots\cdots$

বা, $\sqrt{2} = \frac{9.899495}{7} \ldots\ldots = 1.4142136 \cdots\cdots$

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421$ (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = \frac{1}{(1-px)(1-qx)}$

$p = 1$ এবং $q = 2$ হলে, $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$

$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{(1-x)(1-2)} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-2x)}$

[cover-up rule এর সাহায্যে]

$= -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} = 2(1-2x)^{-1} - (1-x)^{-1}$

$= 2\{1 + 2x + (2x)^2 + \cdots\cdots + (2x)^n + \cdots\cdots\}$

$- (1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots)$

$= 2\{1 + 2x + 4x^2 + \cdots\cdots + 2^n x^n + \cdots\cdots\}$
$\qquad - (1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots)$

অতএব, x^n-এর সহগ $= 2.2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ **(Ans.)**

18. ক দেওয়া আছে, $\frac{-1}{2} \le x \le 4$

এখন, $\frac{-\frac{1}{2}+4}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$

উভয় পক্ষে $\frac{7}{4}$ বিয়োগ করে পাই,

$-\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \le x - \frac{7}{4} < 4 - \frac{7}{4}$

বা, $\frac{-2-7}{4} \le x - \frac{7}{4} \le \frac{16-7}{4}$ বা, $\frac{-9}{4} \le x - \frac{7}{4} \le \frac{9}{4}$

$\therefore \left|x - \frac{7}{4}\right| \le \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = p + x$

$p = 2$ এবং $x = -2i$ হলে $f(x) = 2 - 2i$

$\therefore \sqrt{f(x)} = \sqrt{2-2i}$

ধরি, $\sqrt{2-2i} = a + ib$ ....(i)

বা, $2 - 2i = (a + ib)^2$ [বর্গ করে]

বা, $2 - 2i = a^2 - b^2 + i\,2ab$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a^2 - b^2 = 2$ ....(ii)

$2ab = -2$ ....(iii)

এখন, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$
$= (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$
$= 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$

$\therefore a^2 + b^2 = 2\sqrt{2}$ ....(iv)

(ii) + (iv) $\Rightarrow 2a^2 = 2\sqrt{2} + 2$

বা, $a^2 = \sqrt{2} + 1 \quad \therefore a = \pm(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}$

(iv) − (ii) $\Rightarrow 2b^2 = 2\sqrt{2} - 2$

বা, $b^2 = \sqrt{2} - 1 \quad \therefore b = \pm(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}$

a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\sqrt{2-2i} = \pm\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$

$\therefore \sqrt{f(x)} = \pm\left[(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right]$ **(Ans)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = p + x$

$\therefore \{f(x)\}^n = (p + x)^n$

এখন, $(p + x)^n$ এর বিস্তৃতি

৩য় পদ $= (2 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_2\, p^{n-2} x^2$

৪র্থ পদ $= (3 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_3\, p^{n-3} x^3$

এবং ৫ম পদ $= (4 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_4\, p^{n-4} x^4$

শর্তমতে, ${}^nC_2\, p^{n-2} x^2 = 240x^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} = 240$

বা, $n(n-1)p^{n-2} = 480$ ...... (i)

আবার, ${}^nC_3\, p^{n-3} x^3 = 160x^3$

বা, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^{n-3} = 160$

বা, $n(n-1)(n-2)p^{n-3} = 960$..............(ii)

এবং ${}^nC_4\, p^{n-4} x^4 = 60x^4$

বা, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)p^{n-4}}{24} x^4 = 60x^4$

বা, $n(n-1)(n-2)(n-3)p^{n-4} = 1440$ ....(iii)

এখন (iii) ÷ (ii) $\Rightarrow (n-3)p^{n-4-n+3} = \frac{1440}{960}$

বা, $(n-3)p^{-1} = \frac{3}{2}$

বা, $\frac{n-3}{p} = \frac{3}{2}$

বা, $3p = 2n - 6$

বা, $p = \frac{2n-6}{3}$ ....(iv)

আবার, (ii) ÷ (i) $\Rightarrow (n-2)p^{n-3-n+2} = \frac{960}{480}$

বা, $\frac{n-2}{p} = 2$

বা, $n - 2 = 2p$

বা, $n - 2 = 2.\left(\frac{2n-6}{3}\right)$

বা, $3n - 6 = 4n - 12$

বা, $4n - 3n = 12 - 6 \quad \therefore n = 6$

n এর মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$p = \frac{2.6-6}{3} = \frac{12-6}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\therefore np = 6.2 = 12$ **(প্রমাণিত)**

19. ক $(3-y)^5 = -y^5\left(1 - \frac{3}{y}\right)^5 = -y^5\left\{1 + \left(-\frac{3}{y}\right)\right\}^5$

এখন সহগের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ (পঞ্চম সারি পর্যন্ত):

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$\therefore\ (3-y)^5$

$= -y^5\left\{1+5\left(-\frac{3}{y}\right)+10\left(-\frac{3}{y}\right)^2+10\left(-\frac{3}{y}\right)^3+5\left(-\frac{3}{y}\right)^4+\left(-\frac{3}{y}\right)^5\right\}$

$= -y^5 + 15y^4 - 90y^3 + 270y^2 - 405y + 243$

$= 243 - 405y + 270y^2 - 90y^3 + 15y^4 - y^5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3 + \frac{x}{2}$

$\therefore\ \{f(x)\}^n = \left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ

অর্থাৎ $(r+1)$ তম পদ $= {}^nC_r 3^{n-r} . \left(\frac{x}{2}\right)^r$

$= {}^nC_r (3)^{n-r} . 2^{-r} . x^r$

যদি $(r+1)$ তম পদে x^7 থাকে, তবে $r = 7$

আবার, যদি $(r+1)$ তম পদে x^8 থাকে তবে $r = 8$

সুতরাং x^7 এবং x^8-এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে,

${}^nC_7\, 3^{n-7}\, 2^{-7} = {}^nC_8 . 3^{n-8} . 2^{-8}$

বা, ${}^nC_7 . 3^n . 3^{-7} . 2^{-7} = {}^nC_8 . 3^n . 3^{-8} . 2^{-8}$

বা, ${}^nC_7 = {}^nC_8 . 3^{-1} . 2^{-1}$

বা, $\frac{n!}{7!\,(n-7)!} = \frac{n!}{8!\,(n-8)!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

বা, $\frac{1}{7!\,(n-7)\,(n-8)!} = \frac{1}{8 \times 7!\,(n-8)!} \cdot \frac{1}{6}$

বা, $\frac{1}{n-7} = \frac{1}{48}$ বা, $n - 7 = 48$

বা, $n = 48 + 7\ \therefore n = 55$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(p) = 1 - \frac{1}{2}p$

$\therefore\ g(4x) = 1 - \frac{1}{2} . 4x = 1 - 2x$

$\therefore\ \{g(4x)\}^{-\frac{1}{2}} = (1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ তম পদ

$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2x)^n$

$= \frac{(-1)^n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\left(n-1+\frac{1}{2}\right)}{n!}$

$(-1)^n . 2^n . x^n$

$= (-1)^{2n} . \frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)}{2^n . n!} . 2^n . x^n$

$= \frac{\{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)\}\ \{2.4.6.8\cdots\cdots 2n\}}{n!(2.4.6\cdots\cdots 2n)} x^n$

$= \frac{1.2.3.4\cdots\cdots 2n}{n!\,2^n(1.2.3\cdots\cdots n)} x^n = \frac{(2n)!}{2^n . n! . n!} x^n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n$

$\therefore (n+1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

20. **ক** $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

$\therefore\ (a+x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ $4a$.

প্রশ্নমতে, $4a = 16$ বা, $a = \frac{16}{4}$

$\therefore\ a = 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = 2x + 3y$

$\therefore\ y = \frac{-1}{x^2}$ হলে, $z = 2x - \frac{3}{x^2}$

$\therefore\ z^{12}$ বা $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে

$(r+1)$-তম পদ $= {}^{12}C_r\,(2x)^{12-r}\left(\frac{-3}{x^2}\right)^r$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r}\, x^{12-r}\, (-3)^r\, x^{-2r}$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r}\, (-3)^r\, x^{12-3r}$

প্রশ্নমতে, $x^{12-3r} = x^0$

বা, $12 - 3r = 0$ বা, $12 = 3r$

বা, $r = \frac{12}{3}\ \therefore\ r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $= {}^{12}C_r\, 2^{12-r}\, (-3)^r$

$= {}^{12}C_4 . 2^{12-4} . (-3)^4\ [\because r = 4]$

$= 495 \times 256 \times 81$

$= 10264320$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + 3y$ এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \le 8, x + y \le 6, x, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

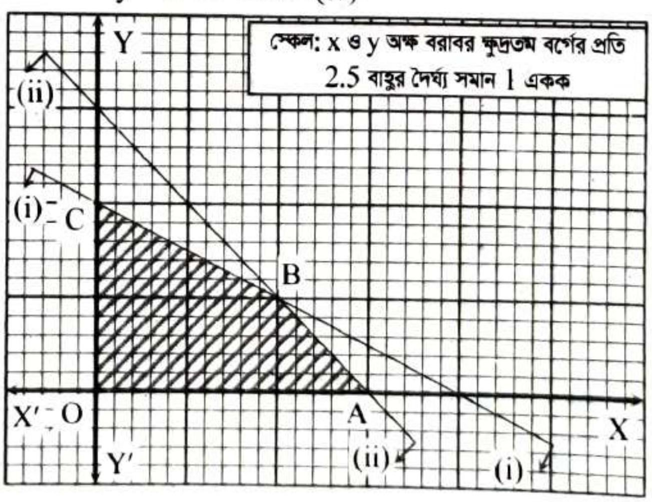
অতএব আমরা পাই,

$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots$ (i)

$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots\cdots$ (ii)

$x = 0 \cdots\cdots\cdots$ (iii)

$y = 0 \cdots\cdots\cdots$ (iv)



লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। যেখানে O(0, 0) হচ্ছে মূল বিন্দু।

চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (ii) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু।

তাহলে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABCO যা চিত্রে ছায়া ঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে-

O(0, 0), A(6, 0), B(4, 2) এবং C(0, 4)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$

A(6, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 6 + 3 \times 0 = 12$

B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$

C(0, 4) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 4 = 12$

স্পষ্টত: B(4, 2) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 14$ **(Ans.)**

21. **ক** ধরি, $\sqrt{bi} = x$

বা, $x^2 = bi$ বা, $x^2 = 8i$ [দেওয়া আছে, b = 8]

বা, $x^2 = 4 + 8i - 4$ বা, $x^2 = 2^2 + 2.2.2i + (2i)^2$

বা, $x^2 = (2 + 2i)^2$ বা, $x = \pm (2 + 2i)$

বা, $x = \pm 2(1 + i)$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $\pm 2(1 + i)$

খ দেওয়া আছে, $a = x^3$ এবং $\left(2a - \frac{2}{a}\right)^{10}$ বা, $\left(2x^3 - \frac{2}{x^3}\right)^{10}$

ধরি, $\left(2x^3 - \frac{2}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ ধ্রুবক অর্থাৎ, x বর্জিত।

$\therefore$ (r + 1) তম পদ $= {}^{10}C_r\,(2x^3)^{10-r}\left(\frac{-2}{x^3}\right)^r$

$= (-1)^r.{}^{10}C_r.2^{10-r+r}.x^{3(10-2r)}$

$= (-1)^r.{}^{10}C_r.2^{10}.x^{3(10-2r)}$

(r + 1) তম পদ x বর্জিত হলে, $3(10 - 2r) = 0$

বা, $10 - 2r = 0$

বা, $r = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ (5 + 1) বা 6-তম পদটি ধ্রুবক এবং

তার মান $= (-1)^5.{}^{10}C_5.2^{10} = -258048$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = x^3, b = 8$

এবং $a - b = 0$ বা, $x^3 - 8 = 0$ বা, $x^3 - 2^3 = 0$

বা, $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

হয়, $x - 2 = 0$ অথবা, $x^2 + 2x + 4 = 0$

বা, $x = 2$ $\quad \therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4.1.4}}{2}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times (-3)}}{2}$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$

$= -1 \pm \sqrt{3}i$

$\therefore z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$

এবং, $z_1z_2 = (-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)$

$= 1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 3i^2 = 1 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$

$\therefore \arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\frac{0}{4} = 0$

$\arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\arg(z_2) = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} + \left(\frac{-2\pi}{3}\right) = 0$

$\therefore \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ **(দেখানো হলো)**

22. **ক** দেওয়া আছে, $x = i$

এবং $h(x) = \frac{-8x}{1 - x^2} = \frac{-8(i)}{1 - i^2} = \frac{-8i}{1 - (-1)} = -4i$

$\therefore$ h(x) এর বর্গমূল $= \sqrt{-4i} = \sqrt{2 - 4i - 2}$

$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{2}i + (\sqrt{2}i)^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2} = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$ **(Ans.)**

খ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n}{(n-1)!\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.(n-1)!\,n}{(n-1)!\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

মনে করি, $U_n = \frac{n^2}{3^n}$ $\quad \therefore U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$

এখন, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{3^n}{3^{n+1}}$

$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 . 3^{-1} = \frac{1}{3}.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} . \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1$

D' Alembert অনুপাত পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় ধারাটি অভিসৃত।

গ $h(x) = \frac{-8x}{1-x^2} = \frac{-8x}{(1+x)(1-x)}$

$= \frac{-4}{1-x} + \frac{4}{1+x} = -4(1-x)^{-1} + 4(1+x)^{-1}$

$= -4(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^r + \ldots) +$
$4(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^r . x^r + \ldots)$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= -4 + 4.(-1)^r$ **(Ans.)**

23. **ক** জটিল সংখ্যাটি: $-4-4i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-4}{-4}\right| = \tan^{-1}1$

যেহেতু বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত বিস্তৃতি, $g(x) = \frac{1}{1-9x+20x^2}$

$= \frac{1}{1-5x-4x+20x^2} = \frac{1}{1-5x-4x(1-5x)}$

$= \frac{1}{(1-5x)(1-4x)}$

$= \frac{1}{(1-5x)\left(1-\frac{4}{5}\right)} + \frac{1}{(1-4x)\left(1-\frac{5}{4}\right)}$ ['cover-up rule' অনুসারে]

$= \frac{5}{1-5x} - \frac{4}{1-4x}$

$= 5[1 + 5x + (5x)^2 + \ldots + (5x)^n + \ldots] - 4[1 + 4x + \ldots + (4x)^n + \ldots]$ **(Ans.)**

$\therefore x^n$ এর সহগ $= 5.5^n - 4.4^n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, দ্বিঘাত সমীকরণ, $mx^2 + nx + s = 0$

এখন, $m = 9, n = 2, s = -\frac{1}{3}(p+2)$ হলে,

সমীকরণটি

$9x^2 + 2x - \frac{(p+2)}{3} = 0$ .... (i)

$\therefore 27x^2 + 6x - (p+2) = 0$

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও α^2

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27}$ এবং $\alpha.\alpha^2 = \alpha^3$

$= \frac{-(p+2)}{27}$ ... ... (i)

$\therefore \alpha + \alpha^2 = \frac{-2}{9}$ বা, $9\alpha + 9\alpha^2 = -2$

বা, $9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$ বা, $9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$

বা, $3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$

বা, $(3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

(i) নং এ $\alpha = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে,

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\frac{-8}{27} = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $p + 2 = 8$

বা, $p = 6$

আবার, (i) নং এ $\alpha = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে,

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $\frac{-1}{27} = -\frac{(p+2)}{27}$

বা, $p + 2 = 1$

বা, $p = -1$

$\therefore p = 6, -1$ **(Ans.)**

24. **ক** মনে করি, $x = \sqrt[3]{i}$

বা, $x^3 = i$ [ঘন করে]

বা, $x^3 - i = 0$ বা, $x^3 + i^3 = 0$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $(x+i)(x^2 - ix + i^2) = 0$

হয় $x + i = 0$

$\therefore x = -i$

অথবা, $x^2 - ix + i^2 = 0$

বা, $x^2 - ix - 1 = 0$

বা, $x = \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-1+4}}{2}$

$\therefore x = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sqrt[3]{i} = -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$8x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a ও b.

$\therefore$ $a + b = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ এবং $ab = \frac{1}{8}$

এখন, $a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{a} = a + b + \frac{a+b}{ab} = \frac{3}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times 8 = \frac{3+24}{4} = \frac{27}{4}$

এবং $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab} = \frac{1}{8} + 2 + 8 = \frac{1+80}{8} = \frac{81}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - \left(\frac{27}{4}\right)x + \frac{81}{8} = 0$

বা, $8x^2 - 54x + 81 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত উদ্দীপক $= (1 + 3y)^{2n}$; এখানে, n এর যে কোন মানের জন্য 2n জোড় সংখ্যা।
কাজেই, বিস্তৃতিতে একটি মাত্র মধ্যপদ আছে।
মধ্যপদটি $= \left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ তম পদ $= (n + 1)$ তম পদ

$\therefore$ মধ্যপদটির মান $T_{n+1} = {}^{2n}C_n \cdot (1)^{2n-n} \cdot (3y)^n$
$= {}^{2n}C_n \cdot (1)^n \cdot (3y)^n = {}^{2n}C_n \cdot (3y)^n$

$$= \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor 2n - n} \cdot (3y)^n$$

$$= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3) \ldots\ldots 4.3.2.1}{\lfloor n \cdot \lfloor n} (3y)^n$$

$$= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4) \ldots 4.2\}\{(2n-1)(2n-3) \ldots 5.3.1\}}{\lfloor n \cdot \lfloor n} (3y)^n$$

$$= \frac{2^n\{n(n-1)(n-2) \ldots 2.1\}\{1.3.5 \ldots\ldots (2n-3)(2n-1)\}}{\lfloor n \cdot \lfloor n} 3^n.y^n$$

$$= \frac{\{1.2.3 \ldots\ldots (n-2)(n-1)n\}\{1.3.5 \ldots (2n-3)(2n-1)\}}{\lfloor n \cdot \lfloor n} 2^n.3^n y^n$$

$$= \frac{\lfloor n \ \{1.3.5. \ldots\ldots\ldots (2n-1)\}}{\lfloor n \cdot \lfloor n} 6^n \cdot y^n$$

$$= \frac{1.3.5 \ldots\ldots\ldots (2n-1)}{\lfloor n} 6^n.y^n$$ **(দেখানো হলো)**

25. **ক** $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 2i যা একটি জটিল সংখ্যা। কিন্তু জটিল মূল জোড়ায় থাকে; সুতরাং দ্বিতীয় মূলটি – 2i।
ধরি, তৃতীয় মূল α
প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই,
$2i + (-2i) + \alpha = -1$
বা, $\alpha = -1$
$\therefore$ মূলত্রয়, যথাক্রমে $\pm 2i, -1$ **(Ans.)**

খ $lx^2 + mx + n = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় a ও b হলে,

$$a + b = \frac{-m}{l} \text{ এবং } ab = \frac{n}{l}$$

এখন, $nl(x^2 + 1) + (2nl - m^2)x = 0$
বা, $ln(x^2 + 1) - (m^2 - 2nl)x = 0$
বা, $\frac{ln(x^2+1)}{l^2} - \frac{1}{l^2}(m^2 - 2nl)x = 0$ [l^2 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\frac{n}{l}(x^2 + 1) - \left(\frac{m^2}{l^2} - 2\frac{n}{l}\right)x = 0$
বা, $\frac{n}{l}(x^2 + 1) - \left\{\left(\frac{-m}{l}\right)^2 - 2\frac{n}{l}\right\}x = 0$
বা, $ab(x^2 + 1) - \{(a + b)^2 - 2ab\}x = 0$
বা, $abx^2 + ab - a^2x - b^2x = 0$
বা, $abx^2 - a^2x + ab - b^2x = 0$
বা, $ax(bx - a) - b(bx - a) = 0$
বা, $(bx - a)(ax - b) = 0$
$\therefore$ $bx - a = 0$ অথবা, $ax - b = 0$
বা, $x = \frac{a}{b}$ বা, $x = \frac{b}{a}$
$\therefore$ মূল দুইটি $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{b}{a}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $l = 42, m = -13, n = 1$

$$\therefore \{\varphi(x)\}^{-1} = (42x^2 - 13x + 1)^{-1}$$
$$= (42x^2 - 7x - 6x + 1)^{-1}$$
$$= \{7x(6x - 1) - 1(6x - 1)\}^{-1}$$
$$= \{(6x - 1)(7x - 1)\}^{-1}$$
$$= \frac{1}{(6x - 1)(7x - 1)}$$

ধরি, $\frac{1}{(6x-1)(7x-1)} \equiv \frac{A}{6x-1} + \frac{B}{7x-1}$
উভয় পক্ষকে $(6x - 1)(7x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$1 \equiv A(7x - 1) + B(6x - 1)$
$x = \frac{1}{7}$ হলে, $1 = A\left(7 \times \frac{1}{7} - 1\right) + B\left(6 \times \frac{1}{7} - 1\right)$
বা, $1 = A \times 0 + B\left(-\frac{1}{7}\right)$ $\therefore B = -7$
আবার, $x = \frac{1}{6}$ হলে, $1 = A\left(7 \times \frac{1}{6} - 1\right) + B\left(6 \times \frac{1}{6} - 1\right)$
বা, $1 = A \times \frac{1}{6} + B \times 0$ $\therefore A = 6$

$$\therefore \frac{1}{(6x-1)(7x-1)}$$
$$= \frac{6}{6x-1} - \frac{7}{7x-1}$$
$$= \frac{6}{-(1-6x)} - \frac{7}{-(1-7x)}$$
$$= \frac{7}{1-7x} - \frac{6}{1-6x}$$
$$= 7(1 - 7x)^{-1} - 6(1 - 6x)^{-1}$$
$$= 7\{1 + 7x + 49x^2 + \ldots + 7^r . x^r + \ldots\}$$
$$- 6\{1 + 6x + 36x^2 + \ldots + 6^r.x^r + \ldots\}$$

$\therefore$ r = 99 হলে, আমরা পাই,
$7(1 + 7x + 49x^2 + \ldots + 7^{99}.x^{99})$
$- 6(1 + 6x + 36x^2 + \ldots + 6^{99}.x^{99})$
$\therefore$ x^{99} এর সহগ $= 7^{100} - 6^{100}$ **(Ans.)**

26. ক $\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)^8=\left(y^2-2.y.\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}\right)^8$

$$=\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\right\}^8=\left(y-\frac{1}{y}\right)^{16}$$

রাশিটির বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $=(16+1)=17$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=a+bx$

$a=1, b=-2$ হলে, $f(x)=1-2x$

$\{f(x)\}^{2m}=(1-2x)^{2m}$ রাশিটির ঘাত 2m যা জোড় সংখ্যা। সুতরাং মধ্যপদ 1টি। যা $\left(\frac{2m}{2}+1\right)$

বা, (m + 1)-তম পদ।

$(1-2x)^{2m}$ এর বিস্তৃতিতে (m + 1) তম পদ

$$={}^{2m}C_m 1^{2m-m}(-2x)^m=\frac{(2m)!}{m!(2m-m)!}(-2)^m x^m$$

$$=\frac{2m(2m-1)\ldots\ldots 6.5.4.3.2.1}{m!m!}(-2)^m x^m$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots(2m-1)(2m)}{m!m!}(-2)^m x^m$$

$$=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2m-1)}{m!}\cdot\frac{2.4.6\ldots\ldots 2m}{m!}(-2)^m x^m$$

$$=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2m-1)}{m!}\cdot\frac{2^m(1.2.3\ldots\ldots m)}{m!}(-2)^m x^m$$

$$=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2m-1)}{m!}\cdot\frac{m!}{m!}(-4)^m x^m$$

$$=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2m-1)}{m!}(-4)^m x^m;\ m\in\mathbb{N}$$ **(Ans.)**

গ $f(x)=a+bx$

$b=2$ হলে, $f(x)=a+2x$

$\{f(x)\}^m=(a+2x)^m$

$(a+2x)^m=a^m+{}^mC_1 a^{m-1}2x+{}^mC_2 a^{m-2}(2x)^2+\ldots\ldots+(2x)^m$

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $a^m=k$ ……… (i)

$${}^mC_1 a^{m-1}.(2x)=\frac{10}{3}kx \ \ldots\ldots\ldots (ii)$$

$${}^mC_2 a^{m-2}(2x)^2=\frac{40}{9}kx^2 \ \ldots\ldots\ldots (iii)$$

(ii) নং হতে, $m\frac{a^m}{a}.2x=\frac{10}{3}kx$

বা, $m.\frac{k}{a}=\frac{5}{3}k$ বা, $\frac{m}{a}=\frac{5}{3}$

বা, $5a=3m$ $\therefore a=\frac{3m}{5}$ ………… (iv)

(iii) নং হতে, $\frac{m(m-1)}{2!}\frac{a^m}{a^2}4x^2=\frac{40}{9}kx^2$

বা, $\frac{m(m-1)}{2}\frac{k}{a^2}=\frac{10}{9}k$

বা, $9m(m-1)=20a^2$

বা, $9m(m-1)=20\left(\frac{3m}{5}\right)^2$

বা, $9m(m-1)=20\times\frac{9m^2}{25}$

বা, $25m(m-1)=20m^2$

বা, $5(m-1)=4m$

বা, $5m-5=4m$

বা, $5m-4m=5$

$\therefore m=5$

(iv) নং এ $m=5$ বসিয়ে, $a=\frac{3}{5}\times 5=3$

(i) নং এ a ও m এর মান বসিয়ে, $3^5=k$ বা, $k=3^5$

$\therefore a=3, k=3^5$ ও $m=5$ **(Ans.)**

27. ক $4x^2+2x-1=0$

নিশ্চায়ক $=(2)^2-4.(-1).4=4+16=20$

যেহেতু সমীকরণটির নিশ্চায়ক ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়। অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়, বাস্তব অসমান ও অমূলদ।

খ $px^2+qx+r=0$ এর জন্য প্রশ্নটি সমাধান করা সম্ভব নয়। r এর স্থলে q হলে তা প্রমাণ করা সম্ভব।

মনে করি, $px^2+qx+q=0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $u\alpha$ এবং $v\alpha$

$u\alpha+v\alpha=-\frac{q}{p}$ এবং $u\alpha.v\alpha=\frac{q}{p}$

$\therefore u+v=-\frac{q}{p\alpha}$ ……… (i)

$\therefore uv=\frac{q}{p\alpha^2}$ ……… (ii)

এখন, $\sqrt{\frac{u}{v}}+\sqrt{\frac{v}{u}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=\frac{u+v}{\sqrt{uv}}+\sqrt{\frac{q}{p}}$

$$=\frac{-\frac{q}{p\alpha}}{\sqrt{\frac{q}{p\alpha^2}}}+\sqrt{\frac{q}{p}}$$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$$=-\frac{q}{p\alpha}\cdot\frac{\sqrt{p}\cdot\alpha}{\sqrt{q}}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$

$$=-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}=0$$

$\therefore \sqrt{\frac{u}{v}}+\sqrt{\frac{v}{u}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=0$ (প্রমাণিত)

গ প্রদত্ত রাশি $= \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$

$n = 9$ হলে, $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ এর মধ্যপদ হবে 2টি এবং তা হবে,

$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পদ $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ তম পদ $= 5$ তম পদ

এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ $= \left(\frac{9+1}{2}+1\right)$ তম পদ

$= 6$ তম পদ।

5 তম পদ $= (4+1)$ তম পদ $= {}^9C_4 (3x^2)^{9-4} . \left(\frac{-1}{x}\right)^4$

$= 126.3^5. x^{10}. \frac{1}{x^4}$

$= 30618\, x^6$

6 তম পদ $= (5+1)$ তম পদ $= {}^9C_5 (3x^2)^{9-5}. \left(-\frac{1}{x}\right)^5$

$= 126.\ 3^4. x^8. \frac{-1}{x^5}$

$= -10206\, x^3$

$\therefore n = 9$ হলে মধ্যপদদ্বয় $30618\, x^6, - 10206\, x^3$ **(Ans.)**

$n = 12$ হলে, $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর মধ্যপদ হবে একটি এবং তা হবে, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ $= \left(\frac{12}{2}+1\right)$ তম পদ

$= 7$ তম পদ

$\therefore 7$ তম পদ $= (6+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_6 (3x^2)^{12-6} . \left(\frac{-1}{x}\right)^6$

$= 924 . 3^6 . x^{12} . \frac{1}{x^6}$

$= 673596x^6$

$\therefore n = 12$ হলে মধ্যপদ $673596\, x^6$ **(Ans.)**

28. **ক** দেওয়া আছে,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p-x+x}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p}{px-x^2} = \frac{1}{q}$

বা, $pq = px - x^2$

বা, $x^2 - px + pq = 0$

এখন, $p = q = 1$ হলে আমরা পাই,

$x^2 - x + 1 = 0 \ldots\ldots (i)$

(i) নং এর পৃথায়ক $= (-1)^2 - 4.1.1 = 1 - 4 = -3 < 0$

পৃথায়ক ঋণাত্মক হওয়ায় প্রদত্ত সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে।

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p-x+x}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $x(p-x) = pq$

বা, $px - x^2 = pq$

$\therefore x^2 - px + pq = 0 \ldots\ldots (i)$

মনে করি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore \alpha + \beta = p$

এবং $\alpha\beta = pq$

প্রশ্নানুসারে, $\alpha - \beta = \pm r$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = r^2$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = r^2$

বা, $p^2 - 4pq = r^2$

বা, $p^2 - 2.\ p.\ 2q + (2q)^2 - 4q^2 = r^2$

বা, $(p - 2q)^2 = r^2 + 4q^2$

বা, $p - 2q = \pm\sqrt{r^2 + 4q^2}$

$\therefore p = 2q \pm \sqrt{r^2 + 4q^2}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{12} এর সহগ বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$ তমপদ $= {}^{20}C_r (2x^3)^{20-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r$

$= {}^{20}C_r\, 2^{20-r}\, x^{60-3r} (-1)^r x^{-r}$

$= {}^{20}C_r\, x^{60-4r}\, 2^{20-r} (-1)^r$

যেহেতু পদটিতে x^{12} আছে।

সুতরাং, $60 - 4r = 12$

বা, $4r = 60 - 12$

বা, $4r = 48 \quad \therefore r = 12$

$\therefore x^{12}$ এর সহগ $= {}^{20}C_{12}\, 2^{20-12} (-1)^{12}$

$= 125970 \times 2^8$

$= 32248320$ **(Ans.)**

29. **ক** $\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $12 + 1$

$= 13$টি যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{12}{2}+1\right)$ তম পদ $= 7$ তম পদ

$\therefore$ 7 বা $(6+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_6\, 2^{12-6} . \left(\frac{-3}{x}\right)^6$

$= {}^{12}C_6\, 2^6 . \frac{3^6}{x^6}$

$= {}^{12}C_6\, 2^6 . 3^6 . x^{-6}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = -12,\ b = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ (1+ax)^b = (1-12x)^{-\frac{1}{2}}$

রাশিটির বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ,

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)....\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-12x)^r$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)....\left\{-\left(\frac{2r-1}{2}\right)\right\}}{r!}(-12)^r \cdot x^r$$

$$= \frac{(-1)^r \cdot \{1.3.5. ...... (2r-1)\}}{2^r \cdot r!}(-1)^r \cdot (3.4)^r \cdot x^r$$

$$= \frac{(-1)^{2r} \cdot \{1.3.5 ..... (2r-1)\}\{2.4.6 ..... 2r\}}{2^r \cdot r!\,(2.4.6 ..... 2r)} \cdot 3^r \cdot 4^r \cdot x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4.5.6 ..... (2r-1) \cdot 2r}{2^r \cdot r! \cdot 2^r\,(1.2.3 ..... r)} \cdot 3^r \cdot (2.2)^r \cdot x^r$$

$$= \frac{(2r)!}{2^r \cdot 2^r \cdot r! \cdot r!} 3^r \cdot 2^r \cdot 2^r \cdot x^r = \frac{(2r)!\ 3^r}{(r!)^2} x^r$$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $= \frac{(2r)! \cdot 3^r}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + (-1)^n px + q = 0$

$n = 2$ হলে,

$x^2 + (-1)^2 px + q = 0$

$\therefore\ x^2 + px + q = 0$

ধরি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β

$\therefore\ \alpha + \beta = -p$ ...... (i)

$\alpha\beta = q$ ...... (ii)

এবং প্রদত্ত শর্তানুসারে

$\alpha - \beta = \pm 1$ ...... (iii)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$(\alpha + \beta)^2 = p^2$

বা, $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = p^2$

বা, $1 + 4q = p^2$ [(ii) ও (iii) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $p^2 + 4q^2 = 1 + 4q + 4q^2$

[উভয়পক্ষে $4q^2$ (একটি ধ্রুবক) যোগ করে]

$\therefore\ p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ **(দেখানো হলো)**

বি.দ্রঃ প্রশ্নে ভুল আছে। $2q^2$ এর স্থলে $2q$ হবে।

30. **ক** $n = 4$ এর জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ—

$n = 0$ 1

$n = 1$ 1 1

$n = 2$ 1 2 1

$n = 3$ 1 3 3 1

$n = 4$ 1 4 6 4 1

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

মনে করি, বিস্তৃতিটির $(r + 1)$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore\ (r+1)$ তম পদ $= {}^{15}C_r\,(2)^{15-r} \cdot \left(\frac{-3}{x}\right)^r$

$= {}^{15}C_r\,2^{15-r}\,(-3)^r \cdot x^{-r}$

যেহেতু $(r + 1)$ তম পদ x বর্জিত

$\therefore\ -r = 0$

$\therefore\ r = 0$

$\therefore\ (r + 1) = (0 + 1) = 1$ বা ১ম পদ x বর্জিত এবং

এর মান $= {}^{15}C_0\,2^{15-0}\,(-3)^0 = 32768$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

যেহেতু $f(x)$ এর বিস্তৃতির ঘাত 15, যা বিজোড়।

সুতরাং বিস্তৃতিটির মধ্যপদ হবে 2টি।

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটি $\left(\frac{15+1}{2}\right) = 8$ তম পদ

এবং $\left(\frac{15+3}{2}\right) = 9$ তম পদ

এখন, $(7 + 1)$ বা 8 তম পদ $= {}^{15}C_7\,2^{15-7} \cdot (-3)^7 \cdot x^{-7}$

$= {}^{15}C_7 \cdot 2^8 \cdot (-3)^7 . x^{-7}$

$= {}^{15}C_7 . 2^8 \cdot (-3)^7$ [যখন $x = 1$]

আবার, $(8 + 1)$ বা 9 তম পদ $= {}^{15}C_8 . 2^{15-8} . (-3)^8 . x^{-8}$

$= {}^{15}C_8 . 2^7 \cdot (-3)^8 \cdot x^{-8}$

$= {}^{15}C_8 \cdot 2^7 . (-3)^8$ [যখন, $x = 1$]

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটির মধ্যে পার্থক্য

$= \{{}^{15}C_8\,2^7\,(-3)^8\} - \{{}^{15}C_7 \cdot 2^8 \cdot (-3)^7\}$

$= 9006940800$ **(Ans.)**

31. **ক** প্রদত্ত সমীকরণ, $6x^2 - 5x - 1 = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= (-5)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 + 24$

$= 49 = 7^2$ যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

$\therefore$ মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

খ দেওয়া আছে, $A = \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)^n$

n জোড় সংখ্যা হলে একটি মধ্যপদ থাকবে। **(Ans.)**

$n = 21$ হলে মধ্যপদ থাকবে দুইটি।

এগুলি হল $\left(\frac{21-1}{2} + 1\right)$ তম ও $\left(\frac{21+1}{2} + 1\right)$ তম পদদ্বয়

বা, 11 তম এবং 12 তম পদদ্বয়

11 তম পদ বা $(10 + 1)$ তম পদ $= {}^{21}C_{10} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{21-10} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{10}$

$= {}^{21}C_{10} \cdot \frac{2^{11}}{x^{11}} \cdot \frac{x^{10}}{2^{10}}$

$= {}^{21}C_{10} \cdot \frac{2}{x} = \frac{705432}{x}$ **(Ans.)**

12 তম পদ বা (11 + 1) তম পদ $= {}^{21}C_{11} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{21-11} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{11}$

$= {}^{21}C_{11} \frac{2^{10}}{x^{10}} \cdot \frac{x^{11}}{2^{11}} = {}^{21}C_{11} \frac{x}{2} = 176358x$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = (1 - 9x + 20x^2)^{-1}$

$= \frac{1}{20x^2 - 9x + 1} = \frac{1}{20x^2 - 4x - 5x + 1}$

$= \frac{1}{4x(5x-1) - 1(5x-1)}$

$= \frac{1}{(4x-1)(5x-1)}$

ধরি, $\frac{1}{(4x-1)(5x-1)} \equiv \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{5x-1}$

$(4x-1)(5x-1)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে পাই,

$1 \equiv A(5x-1) + B(4x-1)$

$x = \frac{1}{5}$ হলে, $1 = A\left(5 \times \frac{1}{5} - 1\right) + B\left(\frac{4}{5} - 1\right)$

বা, $1 = A \times 0 + B\left(-\frac{1}{5}\right)$

$\therefore B = -5$

$x = \frac{1}{4}$ হলে, $1 = A\left(\frac{5}{4} - 1\right) + B\left(4 \times \frac{1}{4} - 1\right)$

বা, $1 = A \times \frac{1}{4} + B \times 0$

$\therefore A = 4$

$\therefore \frac{1}{(4x-1)(5x-1)} = \frac{4}{4x-1} - \frac{5}{5x-1}$

$= \frac{4}{-(1-4x)} - \frac{5}{-(1-5x)} = \frac{5}{1-5x} - \frac{4}{1-4x}$

$= 5(1-5x)^{-1} - 4(1-4x)^{-1}$

$= 5\{1 + 5x + 25x^2 + \dots + 5^r.x^r + \dots\} - 4\{1 + 4x + 16x^2 + \dots + 4^r.x^r + \dots\}$

$r = 9$ হলে, আমরা পাই, $5\{1 + 5x + 25x^2 + \dots + 5^9x^9\} - 4\{1 + 4x + \dots + 4^9x^9\}$

$\therefore x^9$ এর সহগ $= 5^{10} - 4^{10}$ **(প্রমাণিত)**

32. **ক** $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা 12 + 1 = 13টি যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{12}{2} + 1\right)$ তম পদ

= 7 তম পদ

$\therefore$ 7 তম পদ $= {}^{12}C_6 (2x^2)^{12-6} \left(\frac{-3}{x}\right)^6$

$= {}^{12}C_6\, 2^6 x^{12} (-1)^6 3^6 \frac{1}{x^6}$

$= {}^{12}C_6\, 2^6\, 3^6\, x^6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = 4x + 3$

এখন, $(4x + 3)^{34}$ এর বিস্তৃতির দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান

মনে করি,

ক্রমিক পদদ্বয় (r + 1) তম পদ ও (r + 2) তম পদ

(r + 1) তম পদ $= {}^{34}C_r(3)^{34-r}(4x)^r = {}^{34}C_r 3^{34-r} 4^r x^r$

(r + 2) তম পদ $= {}^{34}C_{r+1}(3)^{34-r-1}(4x)^{r+1}$

$= {}^{34}C_{r+1} 3^{33-r} 4^{r+1} x^{r+1}$

শর্তমতে, ${}^{34}C_r 3^{34-r} 4^r = {}^{34}C_{r+1} 3^{33-r} 4^{r+1}$

বা, $\frac{\lfloor 34}{\lfloor r \lfloor 34-r} 3 = \frac{\lfloor 34}{\lfloor r+1 \lfloor 33-r} 4$

বা, $\frac{3}{\lfloor r (34-r) \lfloor 33-r} = \frac{4}{(r+1) \lfloor r \lfloor 33-r}$

বা, $\frac{3}{34-r} = \frac{4}{r+1}$

বা, $3r + 3 = 136 - 4r$

বা, $7r = 133$

$\therefore r = 19$

$\therefore$ এ পদ দুইটির x এর ঘাত 19 এবং 20 **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P = 4x + 3$

এখন, $P^{-\frac{1}{2}} = (4x+3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4}{3}x\right)^{-\frac{1}{2}}$

প্রদত্ত বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$= 3^{-\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\left(\frac{-1}{2}-3\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} \left(\frac{4}{3}x\right)^r$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^r \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right) \dots \left(r+\frac{1}{2}-1\right)}{r!} \left(\frac{4}{3}\right)^r x^r$

$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{1.3.5.7 \dots (2r-1)}{2^r r!} 2^{2r} \frac{1}{3^r} x^r$

$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{\{1.3.5 \dots (2r-1)\}\{2.4.6 \dots 2r\}}{r!(2.4.6 \dots 2r)} 2^r \frac{1}{3^r} x^r$

$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{1.2.3.4 \dots 2r}{r!\, 2^r (1.2.3 \dots r)} 2^r \frac{1}{3^r} x^r$

$= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{(2r)!}{r!\, r!} \frac{1}{3^r} x^r$

$\therefore x^r$ এর সহগ $= \frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{(2r)!}{(r!)^2} \frac{1}{3^r}$ **(Ans.)**

পঞ্চম পদ $= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^4 \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right)}{4!} \left(\frac{4}{3}\right)^4 x^4$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{24}\frac{256}{81}x^4$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{105}{16\times 24}\frac{256}{81}x^4$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{70}{81}x^4 \textbf{ (Ans.)}$$

33. ক $\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{x^3-2^3}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=x^2+2x+4$, এখানে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z=\alpha+\beta i$

যখন, $\alpha=2, \beta=\sqrt{3}$ হয়

তখন, $z=2+i\sqrt{3}$

আমরা জানি, কোনো বাস্তব সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে। একটি মূল $2+i\sqrt{3}$ হলে অপর মূলটি হবে $2-i\sqrt{3}$ এবং সমীকরণটি হবে,

$x^2-(2+i\sqrt{3}+2-i\sqrt{3})x+(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow x^2-4x+(4-i^2 3)=0$

$\Rightarrow x^2-4x+(4+3)=0$

$\Rightarrow x^2-4x+7=0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ **(Ans.)**

গ $\beta=0$ হলে, $z=\alpha$

তাহলে, $\left(2z^2+\frac{R}{z^3}\right)^{10}=\left(2\alpha^2+\frac{R}{\alpha^3}\right)^{10}$

এখন, $\left(2\alpha^2+\frac{R}{\alpha^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$তম পদ

$={}^{10}C_r(2\alpha^2)^{10-r}\left(\frac{R}{\alpha^3}\right)^r$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}\alpha^{20-2r}.R^r.\frac{1}{\alpha^{3r}}$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}\alpha^{20-2r-3r}.R^r$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}\alpha^{20-5r}.R^r$

α^5 এর সহগের জন্য, $20-5r=5$

$\Rightarrow 5r=20-5\Rightarrow 5r=15 \therefore r=3$

$\therefore \alpha^5$ এর সহগ $={}^{10}C_3\, 2^{10-3}.R^3={}^{10}C_3\, 2^7.R^3$

আবার, α^{15} এর সহগের জন্য, $20-5r=15$

$\Rightarrow 5r=5 \therefore r=1$

$\therefore \alpha^{15}$ এর সহগ $={}^{10}C_1\, 2^{10-1}.R={}^{10}C_1.2^9 R$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3\, 2^7.R^3={}^{10}C_1.2^9.R$

$\Rightarrow \frac{R^3}{R}=\frac{{}^{10}C_1}{{}^{10}C_3}.\frac{2^9}{2^7}\Rightarrow R^2=\frac{10}{120}.2^2\Rightarrow R^2=\frac{4}{12}$

$\Rightarrow R^2=\frac{1}{3} \therefore R=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

34. ক $(1-3x)^{-1}=1+(-1)(-3x)+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}(-3x)^2+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(-3x)^3+\ldots\ldots$

$=1+3x+\frac{2}{2}(9x^2)+\frac{(-1)(-2)(-3)}{6}(-27x^3)+\ldots$

$=1+3x+9x^2+27x^3+\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ $f(x)=\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{11}$

f(x) এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $={}^{11}C_r(x^2)^{11-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r$

$={}^{11}C_r\,x^{22-2r}\frac{3^r}{x^r}$

$={}^{11}C_r.3^r.x^{22-3r}$

এবং $(r+2)$ তম পদ $={}^{11}C_{r+1}(x^2)^{11-r-1}\left(\frac{3}{x}\right)^{r+1}$

$={}^{11}C_{r+1}\,x^{22-2r-2}\frac{3^{r+1}}{x^{r+1}}$

$={}^{11}C_{r+1}.3^{r+1}.x^{22-3r-3}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদ ও $(r+2)$ তম পদের সহগ সমান।

$\therefore\ {}^{11}C_r.3^r={}^{11}C_{r+1}.3^{r+1}$

বা, $\frac{11!}{r!(11-r)!}.3^r=\frac{11!}{(r+1)!(11-r-1)!}.3^{r+1}$

বা, $\frac{1}{r!(11-r)(11-r-1)!}=\frac{3}{(r+1)r!(11-r-1)!}$

বা, $\frac{1}{11-r}=\frac{3}{r+1}$ বা, $r+1=33-3r$

বা, $r+3r=33-1$ বা, $4r=32$ $\therefore r=8$ **(Ans.)**

গ $g(x)=(1+Px)^m$

$p=-8$ এবং $m=\frac{-1}{2}$ হলে $g(x)=(1-8x)^{-\frac{1}{2}}$

এখন, g(x) এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-8x)^r$$

$$=\frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\ldots\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r.8^r x^r$$

$$=\frac{(-1)^{2r}\,1.3.5\ldots(2r-1)}{2^r.r!}.2^{3r}.x^r$$

$$=\frac{\{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)\}\{2.4.6\ldots\ldots 2r\}}{r!\{2.4.6\ldots\ldots 2r\}}2^{2r}.x^r$$

$$=\frac{1.2.3.4\ldots\ldots 2r}{r!\,2^r(1.2.3\ldots\ldots r)}.2^{2r}.x^r=\frac{(2r)!}{r!\,r!}.2^r.x^r=\frac{(2r)!\,2^r}{(r!)^2}x^r$$

$\therefore$ g(x) এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!.2^r}{(r!)^2}$ **(দেখানো হলো)**

35. ক অনুশীলনী-5(B) এর 3(vi) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮

খ অনুশীলনী-5(A) এর 12(ii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২০

গ অনুশীলনী-5(A) এর 9(xii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২১৬

36. ক প্রদত্ত রাশি $(3-2x)^{\frac{1}{2}} = \left\{3\left(1-\frac{2}{3}x\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি

$\left|\frac{2}{3}x\right| < 1$ বা, $|x| < \frac{3}{2}$ হয়। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই,

$x^2 - 5x + 3$ এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = 5$ এবং $\alpha\beta = 3$

এখন $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$$x^2 - \left(\frac{3}{5-\alpha} + \frac{3}{5-\beta}\right)x + \frac{3}{5-\alpha}\cdot\frac{3}{5-\beta} = 0$$

বা, $x^2 - \frac{15-3\beta+15-3\alpha}{25-5\alpha-5\beta+\alpha\beta}x + \frac{9}{25-5\alpha-5\beta+\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{30-3(\alpha+\beta)}{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta}x + \frac{9}{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{30-3\times 5}{25-5\times 5+3}x + \frac{9}{25-5\times 5+3} = 0$

বা, $x^2 - \frac{15}{3}x + \frac{9}{3} = 0$

বা, $x^2 - 5x + 3 = 0$

যা নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

গ অনুশীলনী-5(B) এর 3(ii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৭

37. ক **পৃথায়ক:** $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। এর মূলদ্বয়, $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

যেখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা।

এখানে, '$\sqrt{\ }$' এর ভিতরের রাশি $b^2 - 4ac$ এর মানের উপর ভিত্তি করে মূলদ্বয়ের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয়। এর মান পর্যালোচনা করে মূলের প্রকৃতি নিশ্চিত ভাবে নিরূপণ করা যায়। এ কারণে একে পৃথায়ক বলা হয়।

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ এর পৃথায়ক, $b^2 - 4ac$

উদাহরণ: $x^2 - x - 6$ রাশিটির পৃথায়ক

$(-1)^2 - 4.1(-6) = 1 + 24 = 25$

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58$

এবং $f(x) = 0$

$\therefore x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58 = 0$ ... ... (i)

সমীকরণটির একটি মূল $5 + 2i$ হলে অপর একটি মূল হবে $5 - 2i$.

মনে করি, সমীকরণটির অবশিষ্ট মূল দুইটি α, β

$\therefore$ মূলগুলির যোগফল, $5 + 2i + 5 - 2i + \alpha + \beta = 13$

বা, $\alpha + \beta + 10 = 13$

$\therefore \alpha + \beta = 3$ ... ... (ii)

আবার, মূলগুলির গুণফল, $(5+2i)(5-2i)\alpha\beta = 58$

বা, $(25 - 4i^2)\alpha\beta = 58$

বা, $\{25 - 4(-1)\}\alpha\beta = 58$

বা, $29\alpha\beta = 58$

$\therefore \alpha\beta = 2$ ... ... (iii)

এখন, $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 - 4.2 = 1$

$\therefore \alpha - \beta = \pm 1.$

(+) চিহ্ন ব্যবহার করে পাই, $\alpha - \beta = 1$ ... ... (iv)

(ii) ও (iv) যোগ করে পাই,

$2\alpha = 4 \therefore \alpha = 2$

α এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \beta = 3 \therefore \beta = 1$

(–) চিহ্ন ব্যবহার করেও একই মূল পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় অপর মূলগুলি $5 - 2i, 2, 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$$g(x) = \frac{x}{1-4x+3x^2}$$

$$= \frac{x}{1-3x-x+3x^2}$$

$$= \frac{x}{(1-3x)(1-x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3-1}}{1-3x} + \frac{\frac{1}{1-3}}{1-x}$$ [cover-up rule এর সাহায্যে]

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-3x} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2}\{(1-3x)^{-1} - (1-x)^{-1}\}$$

$$= \frac{1}{2}[\{1 + 3x + (3x)^2 + ... + (3x)^r + ...\} - \{1 + x + x^2 + ... + x^r + ...\}]$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 3x + 9x^2 + ... + 3^r.x^r + ... - 1 - x - x^2 - ... - x^r - ...]$$

$\therefore x^r$ এর সহগ $= \frac{1}{2}(3^r - 1)$ **(Ans.)**