পাঠ-১

8.1 অন্বয় ও ফাংশন (Relation and function)

অন্বয় দুইটি অশূন্য সেট A ও B এর গুণজ সেট $A \times B$ এর যে কোনো উপসেটকে A সেট হতে B সেটে একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়। এই অন্বয়কে R দ্বারা প্রকাশ করা হলে, $R \subseteq A \times B$.

যদি $(a, b) \in R$ হয়, যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$, তবে তাকে $a\,R\,b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং 'b' এর সাথে 'a' অন্বিত ('a' is related to 'b') পড়া হয়।

যদি $(a, b) \notin R$ হয়, তবে তাকে $a \not{R}\, b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং 'b' এর সাথে 'a' অন্বিত নয় ('a' is not related to 'b') পড়া হয়।

8.1.1 বিপরীত অন্বয় (Inverse relation) : A সেট হতে B সেটে R একটি অন্বয় হলে, R এর বিপরীত অন্বয় হবে B সেট হতে A সেটে একটি অন্বয়, যাকে R^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গাণিতিকভাবে, $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ একটি অন্বয় হলে, $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$

উদাহরণ: $A = \{a, b\}$, $B = \{p, q, r\}$ হলে, $A \times B = \{(a, p), (a, q), (a, r), (b, p), (b, q), (b, r)\}$

মনে করি, $R_1 = \{(a, p)\}$; $R_2 = \{(a, p), (b, q)\}$; $R_3 = \{(a, p), (a, r), (b, p)\}$

যেহেতু $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset A \times B$ এবং $R_3 \subset A \times B$

সুতরাং R_1, R_2 এবং R_3 এর প্রত্যেক সেটই A থেকে B সেটের অন্বয়।

আবার, R_1 এর বিপরীত অন্বয় $R_1^{-1} = \{(p, a)\}$

R_2 এর বিপরীত অন্বয় $R_2^{-1} = \{(p, a), (q, b)\}$

R_3 এর বিপরীত অন্বয় $R_3^{-1} = \{(p, a), (r, a), (p, b)\}$

8.1.2 অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ: যদি A সেট হতে B সেটে R একটি অন্বয় হয়, তবে R এর অন্তর্গত সকল ক্রমজোড়গুলির প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে R-এর ডোমেন বলা হয়, যা D_R দ্বারা প্রকাশ করা হয়। R এর ডোমেন, A এর একটি উপসেট।

অনুরূপে, ক্রমজোড়গুলির দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে R এর রেঞ্জ বলা হয়, যা R_R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

R এর রেঞ্জ, B এর একটি উপসেট।

গাণিতিকভাবে, R এর ডোমেন $= \{a : a \in A, (a, b) \in R\}$ এবং R এর রেঞ্জ $= \{b : b \in B, (a, b) \in R\}$

উদাহরণ: (i) ধরি, $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ তাহলে, $A \times B = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 3), (b, 4)\}$

যদি $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3)\}$ হয় তাহলে R এর ডোমেন $= \{a, b\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1, 3\}$

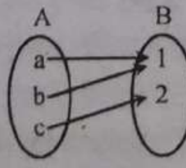
উদাহরণ: (ii) উদাহরণ (i) অনুসারে বিপরীত অন্বয় $R^{-1} = \{(1, a), (3, a), (1, b), (3, b)\}$ এর ডোমেন $= \{1, 3\}$ এবং রেঞ্জ $= \{a, b\}$.

দ্রষ্টব্য: কোনো অন্বয় R এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে তার বিপরীত অন্বয় R^{-1} এর রেঞ্জ ও ডোমেনের সমান।

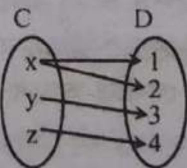
অন্বয় সংখ্যা: মনে করি, A ও B দুইটি সেট এবং $n(A) = p$, $n(B) = q$ তাহলে, $n(A \times B) = pq$ এবং $A \times B$ এর উপসেট সংখ্যা 2^{pq}। সুতরাং A সেট থেকে B সেটে 2^{pq} সংখ্যক অন্বয় বিদ্যমান থাকবে।

ফাংশন: মনে করি, A ও B দুইটি সেট। যদি A সেট হতে B সেটে f একটি অন্বয় হয় এবং প্রত্যেক $a \in A$ এর জন্য একটি অনন্য উপাদান $b \in B$ থাকে, যেখানে $(a, b) \in f$, তবে f কে A সেট হতে B সেটে **ফাংশন** বলা হয়। একে $f : A \to B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

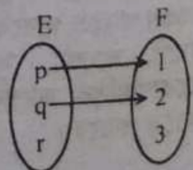
উদাহরণ:



$f : A \to B$



$f : C \to D$



$f : E \to F$

এখানে, $f : A \rightarrow B$ একটি ফাংশন। কেননা A সেটের প্রত্যেক উপাদানের প্রতিচ্ছবি আছে এবং একটি উপাদানের একাধিক প্রতিচ্ছবি নেই।

$f : C \rightarrow D$ ফাংশন নয়। কারণ, C সেটের একটি উপাদান x এর দুইটি প্রতিচ্ছবি 1 ও 2 বিদ্যমান।

$f : E \rightarrow F$ ফাংশন নয়। কারণ, E সেটের উপাদান r এর কোনো প্রতিচ্ছবি F সেটে নেই।

দ্রষ্টব্য: $f : A \rightarrow B$ কে ফাংশন বলা হবে–

যদি (i) A এর প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি B তে থাকে। (ii) A এর একটি উপাদানের একাধিক প্রতিচ্ছবি না থাকে।

কাজ: উদাহরণের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, সকল ফাংশনই অন্বয় কিন্তু সকল অন্বয়ই ফাংশন নয়।

পাঠ-২

8.2 ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ (Domain and range of functions)

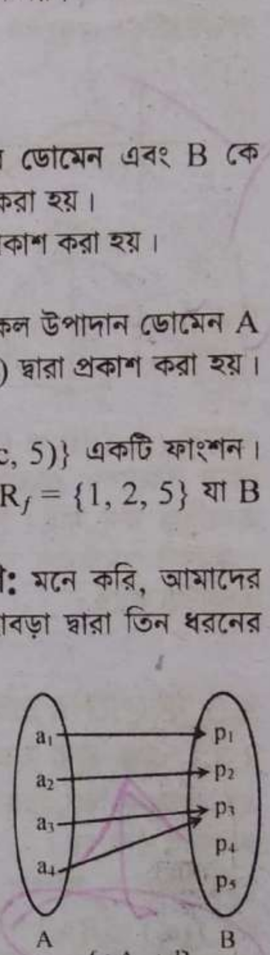
ফাংশনের ডোমেন: মনে করি, $f : A \rightarrow B$ একটি ফাংশন। তাহলে A কে f ফাংশনের **ডোমেন** এবং B কে **কোডোমেন** বলা হয়। f এর ডোমেনকে সাধারণত D_f এবং কোডোমেনকে Cod_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যদি $a \in A$ এর জন্য $b \in B$ হয় তবে b কে a এর প্রতিচ্ছবি (Image) বলা হয়। একে $f(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $f(a) = b$।

ফাংশনের রেঞ্জ: মনে করি, $f : A \rightarrow B$ একটি ফাংশন। কোডোমেন B এর যে উপসেটটির সকল উপাদান ডোমেন A এর উপাদানের সাথে সম্পর্কিত তাকে f এর **রেঞ্জ** বলা হয়। সাধারণত f এর রেঞ্জকে R_f বা $f(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং R_f বা $f(A) \subseteq Cod_f$ অর্থাৎ, $R_f \subseteq B$।

উদাহরণ: মনে করি, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ একটি ফাংশন। তাহলে ডোমেন $D_f = \{a, b, c\} = A$ কোডোমেন $cod_f = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$ এবং রেঞ্জ $R_f = \{1, 2, 5\}$ যা B সেটের উপসেট।

8.2.1 ফাংশন ও তার ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ সম্পর্কিত বাস্তব উদাহরণ: মনে করি, আমাদের দেশের কোনো কাগজকলে (যেমন: নিউজপ্রিন্ট মিল) গেওয়া কাঠ, পাট, বাঁশ এবং আখের ছোবড়া দ্বারা তিন ধরনের কাগজ উৎপন্ন হয়।



$f : A \rightarrow B$

কাঠকে a_1 এবং কাঠ দ্বারা উৎপন্ন কাগজকে p_1, পাটকে a_2 এবং পাট দ্বারা উৎপন্ন কাগজকে p_2, বাঁশকে a_3, আখের ছোবড়াকে a_4 এবং বাঁশ ও আখের ছোবড়ার মিশ্রণ দ্বারা উৎপন্ন কাগজকে p_3 নামকরণ করি।

ধরি, মিল-এর কাগজের মানের উন্নতিকল্পে বিদেশ থেকে p_4 এবং p_5 এই দুই ধরনের কিছু কাগজ আমদানি করা হলো।

যদি কাঁচামাল (যা দিয়ে কাগজ উৎপন্ন হয়) এর সেট A, কাগজের সেট B এবং মেশিনের মাধ্যমে কাগজ উৎপন্নের প্রক্রিয়া f হয়, তবে f কে গাণিতিকভাবে ফাংশন বলা হয়। পার্শ্ববর্তী চিত্রের মাধ্যমে নির্দেশিত A সেটটিকে ফাংশন f এর ডোমেন, B সেটটিকে f এর কোডোমেন এবং $\{p_1, p_2, p_3\}$ সেটটিকে f এর রেঞ্জ বলা হয়।

8.2.2 চলকের মাধ্যমে ফাংশনের সংজ্ঞা: মনে করি, দুইটি বাস্তব চলক x ও y কোনো গাণিতিক প্রক্রিয়ায় এমনভাবে সম্পর্কিত যেন, x এর প্রত্যেক নির্দিষ্ট মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়। একে সাধারণত $y = f(x)$ বা $y = F(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: (i) $y = x^2 + 1$ একটি ফাংশন, কেননা x এর বাস্তব মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি বাস্তব মান বিদ্যমান।

(ii) $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$ একটি ফাংশন নয়। কারণ x এর একটি বাস্তব মানের জন্য y এর দুইটি বাস্তব মান বিদ্যমান।

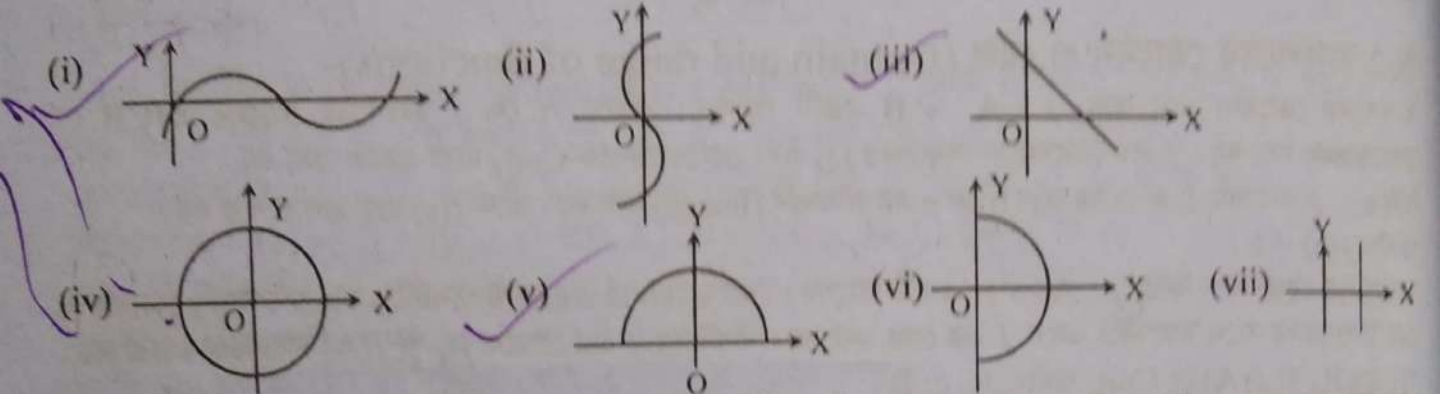
যেমন, $x = 1$ এর জন্য $y = -\sqrt{2}$ এবং $y = \sqrt{2}$ এই দুইটি বাস্তব মান পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য: মূলত দুইটি সেটের মধ্যকার ফাংশন এবং দুইটি চলকের মধ্যকার ফাংশন একই। কারণ $f : A \rightarrow B$ একটি ফাংশন হলে $x \in A$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in B$ থাকতে হয়। এখানে A সেটের সকল উপাদানের প্রতিনিধিত্ব করে x। সুতরাং x, A সেটের অন্তর্গত চলক। আবার x সম্পর্কিত B সেটের সকল উপাদানের প্রতিনিধিত্ব করে y। সুতরাং y, B সেটে A সেটের উপাদান সম্পর্কিত চলক অর্থাৎ, $y = f(x)$।

কাজ: ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর: (i) $y = \frac{3x+1}{2x+5}$ (ii) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ (iii) $y = \sqrt{16 - x^2}$
(iv) $y = \log(5 + x)$ (v) $y = e^{\frac{1}{x}}$ (vi) $y = a^x; a > 0, a \neq 1$, (vii) $y = \sin \frac{3}{2} x$ (viii) $y = 3\cos x + 5$
(ix) $y = |x + 3|$

8.2.3 লেখচিত্র হতে ফাংশনের ধারণা (Concept of functions from graph)

কোনো অন্বয়ের লেখচিত্র যদি xy সমতলে y-অক্ষের সমান্তরাল হয় অথবা y-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা যদি লেখচিত্রটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ লেখচিত্রটি ফাংশনের লেখচিত্র নয়। যেমন:



এখানে (i), (iii) ও (v) ফাংশনের লেখচিত্র। কারণ লেখচিত্রগুলি y-অক্ষের সমান্তরাল নয় বা y-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা লেখচিত্রগুলিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে না। অর্থাৎ x এর একটি মানের জন্য $y = f(x)$ এর একাধিক মান নাই। কিন্তু (ii), (iv), (vi) ও (vii) ফাংশনের লেখচিত্র নয়। কারণ লেখচিত্রগুলিকে y-অক্ষ বা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে। অর্থাৎ x এর একটি মানের জন্য $y = f(x)$ এর মান একাধিক আছে।

পাঠ-৩ ও ৪

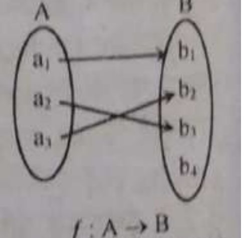
8.3 ফাংশনের প্রকারভেদ (Types of functions)

8.3.1 এক-এক ফাংশন (One-one function): ফাংশন $f : A \to B$ কে **এক-এক ফাংশন** বলা হবে যদি A এর প্রত্যেক ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের প্রতিচ্ছবি B তে ভিন্ন ভিন্ন হয়। এক-এক ফাংশনকে ইনজেকটিভ (Injective) ফাংশনও বলা হয়। [ঢা: বো: ০৯]

গাণিতিকভাবে, ফাংশন $f : A \to B$ কে এক-এক বলা হবে,
যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ অথবা সমতুল্যভাবে, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

উদাহরণ: (i) পাশের চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক।

(ii) ধরি, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহলে, f একটি এক-এক ফাংশন। কারণ, এখানে $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 2 = 3b + 2 \Rightarrow a = b$



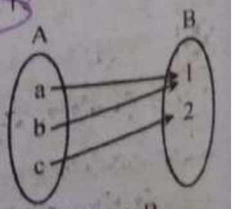
$f : A \to B$

8.3.2 সার্বিক বা সর্বগ্রাহী ফাংশন (Onto function): ফাংশন $f : A \to B$ কে **সার্বিক বা সর্বগ্রাহী ফাংশন** বলা হবে যদি B সেটের প্রত্যেক উপাদানই A সেটের অন্তত একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত হয়। সার্বিক ফাংশনকে সারজেকটিভ (Surjective) ফাংশনও বলা হয়। উল্লেখ্য যে সার্বিক ফাংশনে কোডোমেন ও রেঞ্জ একই হয়।

গাণিতিকভাবে, ফাংশন $f : A \to B$ কে সার্বিক বা সর্বগ্রাহী ফাংশন বলা হবে যদি $f(A) = B$ হয়।

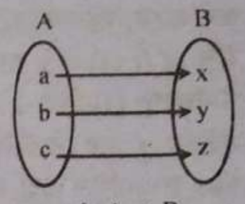
উদাহরণ: (i) পার্শ্বস্থ চিত্রে বর্ণিত ফাংশনটি সার্বিক বা সর্বগ্রাহী।

(ii) ধরি, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 5\}$ এবং $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = 2x^2 - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, যেখানে $x \in A$ এবং $f(x) \in B$। তাহলে f একটি সার্বিক ফাংশন কারণ কোডোমেন B এর যেকোনো উপাদানের জন্য ডোমেন A এ একটি করে উপাদান বিদ্যমান।



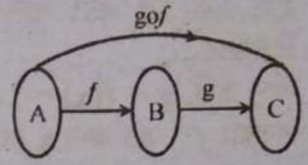
$f : A \to B$

8.3.3 বাইজেকটিভ ফাংশন (Bijective function): ফাংশন $f : A \rightarrow B$ কে বাইজেকটিভ ফাংশন বলা হবে যদি এটি একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়। পার্শ্বস্থ চিত্রে বর্ণিত ফাংশনটি বাইজেকটিভ ফাংশন।

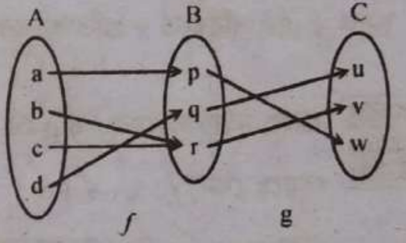


$f : A \rightarrow B$

8.3.4 সংযোজিত ফাংশন (Composite function):
মনে করি, তিনটি সেট A, B ও C এর মধ্যে দুইটি ফাংশন $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ বিদ্যমান যা পার্শ্বস্থ চিত্র দ্বারা নির্দেশিত।
যদি $a \in A$ হয় তবে $f(a) \in B$ হয়। আবার g এর ডোমেন $D_g = B$, সুতরাং $g(f(a)) \in C$. অতএব C এর একটি উপাদান $g(f(a))$, A এর যেকোনো উপাদান a এর সাথে সম্পর্কিত। সুতরাং A সেট থেকে C সেটে একটি নতুন ফাংশন পাওয়া যাবে। এই ফাংশনটিকে f এর সাথে g এর **সংযোজিত ফাংশন** বলা হয়, যা $(gof)(x)$ বা (gof) বা gf দ্বারা সূচিত করা হয়। যেখানে $x \in A$



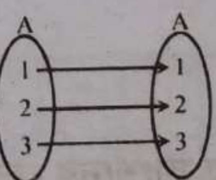
উদাহরণ: (i) $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ ফাংশনদ্বয়ের সংযোজিত ফাংশন $(gof) : A \rightarrow C$ কে পার্শ্বস্থ চিত্র দ্বারা নির্দেশিত করলে–



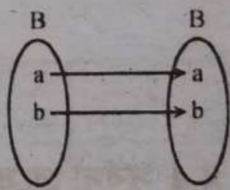
$(gof)(a) = g(f(a)) = g(p) = w$
$(gof)(b) = g(f(b)) = g(r) = v$
$(gof)(c) = g(f(c)) = g(r) = v$
$(gof)(d) = g(f(d)) = g(q) = u$

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = 2x$ এবং $g(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে,
$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$ এবং $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$
উল্লেখ্য যে, $(gof)(x) \neq (fog)(x)$.

8.3.5 অভেদ ফাংশন (Identity function):
ফাংশন $f : A \rightarrow A$ কে **অভেদ ফাংশন** বলা হবে যদি A এর প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি ঐ উপাদানই হয়। একে $f(x) = x$, সকল $x \in A$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়।
উদাহরণ: পার্শ্বস্থ চিত্র দুইটির প্রত্যেকটি অভেদ ফাংশন।

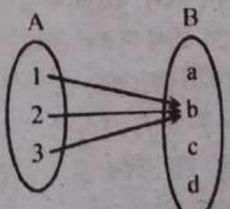


$f : A \rightarrow A$

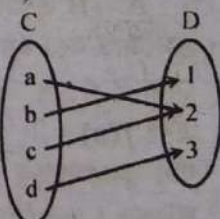


$f : B \rightarrow B$

8.3.6 ধ্রুবক ফাংশন (Constant function): ফাংশন $f : A \rightarrow B$ কে **ধ্রুবক ফাংশন** বলা হবে যদি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি B সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদান হয় অর্থাৎ, ফাংশনের রেঞ্জ R_f একটি এক উপাদানী সেট হয়।
গাণিতিকভাবে, ফাংশন $f : A \rightarrow B$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলা হবে যদি $f(x) = c$, সকল $x \in A$ এবং $c \in B$।



$f : A \rightarrow B$



$g : C \rightarrow D$

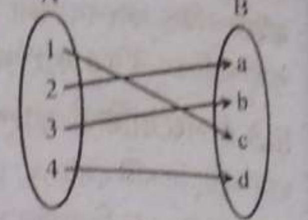
উদাহরণ: (i) পার্শ্বস্থ চিত্র দ্বারা বর্ণিত $f : A \rightarrow B$ ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন কিন্তু $g : C \rightarrow D$ ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন নয়।
(ii) ধরি, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহলে f একটি ধ্রুবক ফাংশন।

কাজ: নিচের ফাংশনগুলিকে কারণসহ প্রকারভেদে চিহ্নিত কর:
(i) $y = x$ **(ii)** $y = x^4$ **(iii)** $3y = 4$ **(iv)** $y = 3x + 2$ **(v)** $y = 4x^2$

8.3.7 বিপরীত ফাংশন (Inverse function): মনে করি, $f : A \rightarrow B$ একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। তাহলে একটি ফাংশন g পাওয়া যাবে যে, প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $g(b) \in A$ বিদ্যমান থাকে। তখন g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়। সাধারণত f এর বিপরীত ফাংশনকে f^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $g = f^{-1}$।

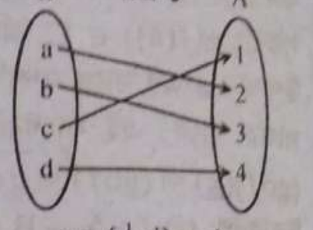
অন্যভাবে, মনে করি, $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$, তাহলে ফাংশন g কে f ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বলা হবে যদি $g(f(x)) = x$ হয়, যেখানে, $f(x) \in B$ এবং $x \in A$।

উদাহরণ: (i) চিত্র-১ দ্বারা বর্ণিত $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান এবং $f^{-1} : B \to A$ কে চিত্র-২ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়।



$f : A \to B$

চিত্র-১



$g = f^{-1} : B \to A$

চিত্র-২

(ii) যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x - 6$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে ইহা এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। অতএব f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান।

মনে করি, $y = f(x) = 3x - 6$

সুতরাং f^{-1} এর জন্য x হবে y এর প্রতিচ্ছবি অর্থাৎ $f^{-1}(y) = x$

এখন $y = 3x - 6 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(y + 6)$ সুতরাং $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y + 6)$

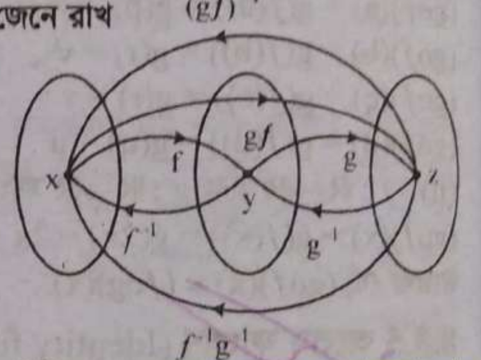
চলক y এর পরিবর্তে x প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 6)$

কাজ: দুইটি ফাংশন f ও g কে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে যেন, $f : x \to 1 + \frac{3}{x}, x \neq 0$

এবং $g : x \to 2x$ তাহলে নির্ণয় কর:

(a) f^{-1} (b) g^{-1} (c) gof (d) $(gof)^{-1}$ (e) $f^{-1}og^{-1}$

জেনে রাখ



যেকোনো দুইটি ফাংশন f ও g এর জন্য $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

পাঠ-৫, ৬ ও ৭

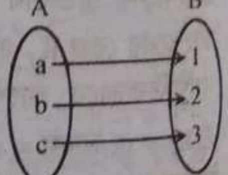
8.4 সর্বদা প্রয়োজনীয় ফাংশনের স্কেচ (Sketch of the elementary functions)

$f : A \to B$ একটি ফাংশন হলে, প্রত্যেক $a \in A$ এর জন্য একটি অনন্য উপাদান $b \in B$ পাওয়া যায় এবং (a, b) কে ক্রমজোড় বলা হয়। এরূপে প্রাপ্ত সকল ক্রমজোড়ের সেট S হলে, S কে ফাংশন f এর লেখচিত্র বলা হয়।

যেমন : $f : A \to B$ একটি ফাংশন, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

এবং $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ ও $f(c) = 3$

যদি ক্রমজোড়ের সেট S হয় তবে $S = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ সেটটিকেই ফাংশন f এর লেখচিত্র বলা হয়।



$f : A \to B$

কার্তেসীয় সমতলে প্রত্যেকটি ক্রমজোড়ই এক একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক। সুতরাং ক্রমজোড়ের সেট বলতে ফাংশনের ডোমেনের প্রত্যেক উপাদানের সাথে সম্পর্কিত রেঞ্জের উপাদান নিয়ে গঠিত বিন্দুগুলির সেটই বুঝায়।

সুতরাং কোনো ফাংশন $f : A \to B$ এর লেখচিত্র বলতে A এর উপাদানগুলির সাথে সম্পর্কিত B এর অনুরূপ উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত বিন্দুর সেটকে বুঝায়।

কোনো ফাংশনকে $y = f(x)$ আকারের সমীকরণের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত করা থাকলে, ফাংশনের ডোমেন হতে প্রাপ্ত x এর কিছু সংখ্যক (সরলরেখার সমীকরণ হলে কমপক্ষে দুইটি এবং বক্ররেখার সমীকরণ হলে কমপক্ষে তিনটি) মানের জন্য y এর অনুরূপ মানগুলি নিয়ে তালিকা নির্ণয় করা যায়। এই তালিকা হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে xy সমতলে স্থাপন করে সংযুক্ত করলে ফাংশন $y = f(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

8.4.1 দ্বিঘাত ফাংশন (Quadratic function):

$f(x) = ax^2 + bx + c$ আকারের ফাংশনকে দ্বিঘাত ফাংশন বলে। $f(x) = y$ ধরে নিলে সমীকরণটির আকার হয়,
$y = ax^2 + bx + c$, যা একটি পরাবৃত্ত (Parabola) নির্দেশ করে।
যেহেতু x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। সুতরাং এখানে ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$।

আবার, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ বা, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ পরাবৃত্তের অক্ষ, y-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং শীর্ষ বিন্দুতে y এর মান সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হবে। এখানে শীর্ষবিন্দু $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = (\alpha, \beta)$ (ধরি)

অর্থাৎ $a < 0$ এর জন্য রেঞ্জ $\mathbb{R}_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি$] = (-\infty, \beta]$
$a > 0$ এর জন্য রেঞ্জ $R_f = [$শীর্ষবিন্দুর কোটি$, \infty) = [\beta, \infty)$

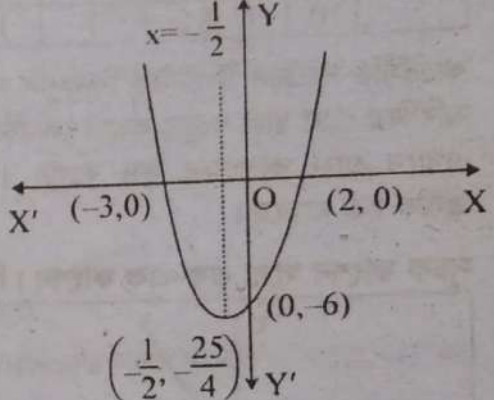
রেঞ্জ নির্ণয়ের বিকল্প নিয়ম (পৃথায়কের সাহায্যে রেঞ্জ নির্ণয়): $ax^2 + bx + (c - y) = 0$ সমীকরণে x এর মান বাস্তব হবে যদি পৃথায়ক ≥ 0 হয়।

বা, $b^2 - 4a(c - y) \geq 0$ বা, $y \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ বা, $y \geq \beta$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \geq \beta\}$

অর্থাৎ $a < 0$ হলে $R_f = (-\infty, \beta]$ এবং $a > 0$ হলে $R_f = [\beta, \infty)$

উদাহরণ: $f(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$, রেঞ্জ $R_f = [-\frac{25}{4}, \infty)$



লেখচিত্র হতে স্পষ্ট যে, ফাংশনটি এক-এক নয়।

দ্রষ্টব্য: পরাবৃত্তের বৈশিষ্ট্যাবলি ব্যবহার করেও স্কেচ অংকন করা যায়।

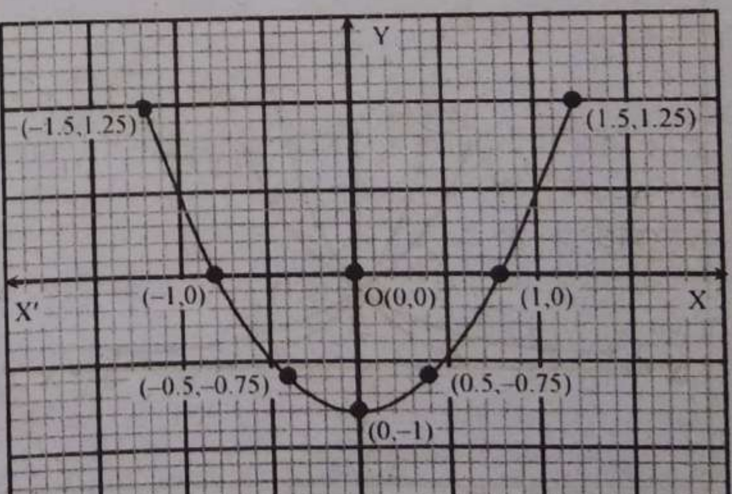
দ্বিঘাত ফাংশনের স্কেচ বা লেখচিত্র অঙ্কন, নিম্নের উদাহরণ দ্বারা আলোচনা করা হলো

উদাহরণ: $f(x) = x^2 - 1, -1.5 \leq x \leq 1.5$

ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন: এখানে, $y = f(x) = x^2 - 1$
যেখানে, $-1.5 \leq x \leq 1.5$
ফাংশনটি $-1.5 \leq x \leq 1.5$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত।
এ ব্যবধির মধ্যে x এর কিছু মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবদ্ধ করি।

x	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5
y	1.25	0	−0.75	−1	−0.75	0	1.25

কার্তেসীয় সমতলে উপরিউক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলিকে একটি অবিচ্ছিন্ন রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে নিম্নের লেখচিত্রটি পাই।



এখানে গ্রাফ কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 8 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হলো।

দ্বিঘাত ফাংশনের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয়

$ax^2 + bx + c$ রাশির বৃহত্তম মান $= c - \frac{b^2}{4a}$ (যখন $a < 0$)

ক্ষুদ্রতম মান $= c - \frac{b^2}{4a}$ (যখন $a > 0$)

উদাহরণস্বরূপ $9x^2 - 6x + 2$ এর ক্ষুদ্রতম মান $= 2 - \frac{(-6)^2}{4 \times 9} = 1$ [$\because a = 9 > 0$]

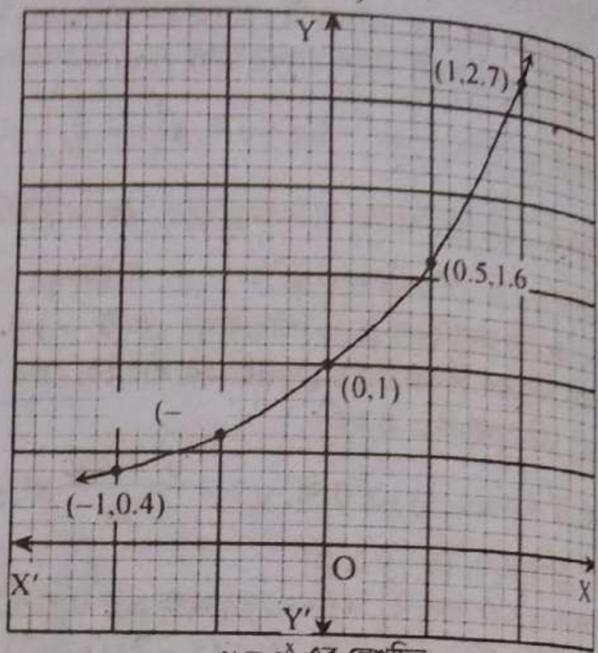
আবার $4x - x^2 - 2$ এর বৃহত্তম মান $-2 - \frac{(4)^2}{4 \times (-1)} = -2 + 4 = 2$ [$\because a = -1 < 0$]

8.4.2 সূচক ফাংশন (Exponential function): $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হলে $f(x) = a^x$ কে সূচক ফাংশন বলে।
যেহেতু x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বিদ্যমান। সুতরাং $f(x)$ এর ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$
আবার, $y = f(x) = a^x$ বা, $x = \log_a y$
এখানে, $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x এর মান বিদ্যমান।
সুতরাং $f(x)$ এর রেঞ্জ $R_f = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\} = (0, \infty)$

সূচক ফাংশনের স্কেচ বা লেখচিত্র অঙ্কন:
$f(x) = e^x$ একটি সূচক ফাংশন। ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$
ধরি, $y = f(x) = e^x$
এখানে $-\infty < x < \infty$ ব্যবধির মধ্যে x এর কিছু মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবদ্ধ করি:

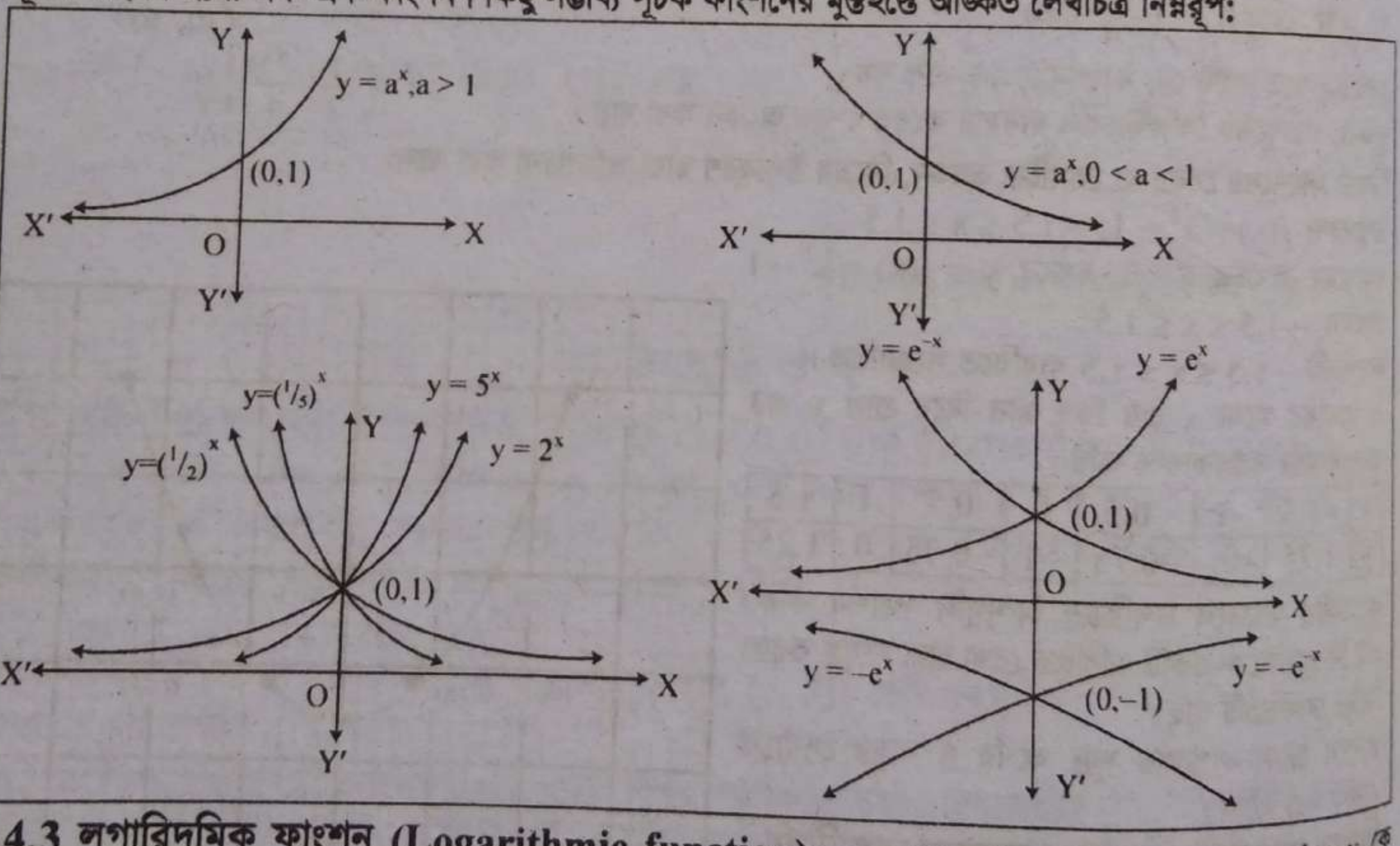
x	−1	−0.5	0	0.5	1
y	0.4	0.6	1	1.6	2.7

কার্তেসীয় সমতলে উপরিউক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করে একটি অবিচ্ছিন্ন রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে লেখচিত্রটি পাই।
এখানে গ্রাফ কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 10 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হয়েছে।



$y = e^x$ এর লেখচিত্র

সূচক ফাংশন হলো এক-এক ফাংশন। কিছু সম্ভাব্য সূচক ফাংশনের মুক্তহস্তে অঙ্কিত লেখচিত্র নিম্নরূপ:



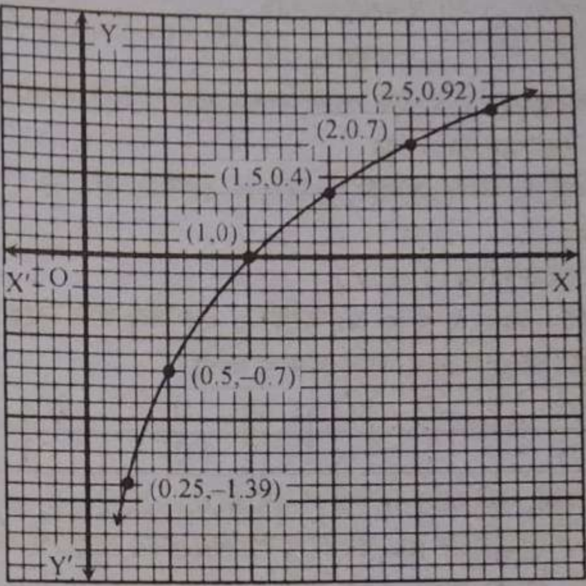
8.4.3 লগারিদমিক ফাংশন (Logarithmic function): $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হলে $f(x) = \log_a x$ কে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে লগারিদমিক ফাংশন বলে।
যেহেতু $x > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বিদ্যমান। সুতরাং $f(x)$ এর ডোমেন $D_f = (0, \infty)$
আবার, $y = f(x) = \log_a x$
বা, $x = a^y$, y এর সকল বাস্তব মানের জন্য a^y বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $f(x)$ এর রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$
লগারিদমিক ফাংশনের স্কেচ বা লেখচিত্র অঙ্কন:
$f(x) = \ln(x) = \log_e x$ একটি লগারিদমিক ফাংশন। ফাংশনটির ডোমেন $D_f = (0, \infty)$
$y = f(x) = \ln x$

এখন $(0, \infty)$ ব্যবধির মধ্যে x এর কিছু মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবদ্ধ করি।

x	.25	0.5	1	1.5	2	2.5
y	−1.39	−0.7	0	0.4	0.7	0.92

তালিকা হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি যথাক্রমে (0.25, −1.39), (0.5, −0.7), (1, 0), (1.5, 0.4), (2, 0.7), (2.5, 0.92)।

এখানে গ্রাফ কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূলবিন্দুকে চিহ্নিত করে উৎপন্ন কার্তেসীয় সমতলে উপরিউক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করে একটি অবিচ্ছিন্ন রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে নিম্নের লেখচিত্রটি পাই

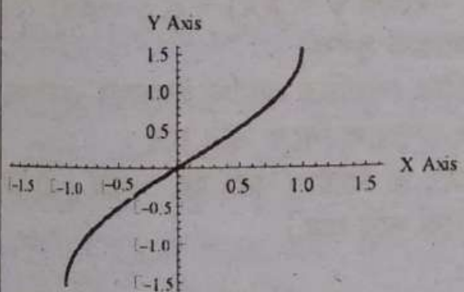


এখানে গ্রাফ কাগজের ক্ষুদ্র বর্গের 10 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হয়েছে।

8.4.4 ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

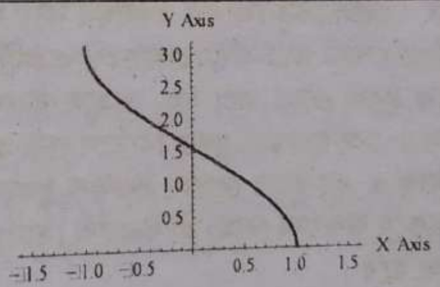
(Trigonometric functions and Inverse trigonometric functions)

ত্রিকোণমিতিক sine, cosine, tangent, cosecant, secant ও cotangent ফাংশন সম্পর্কে ষষ্ঠ অধ্যায়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এখানে শুধু বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের বিপরীত ফাংশন সম্পর্কে আলোচনা করা হলো।



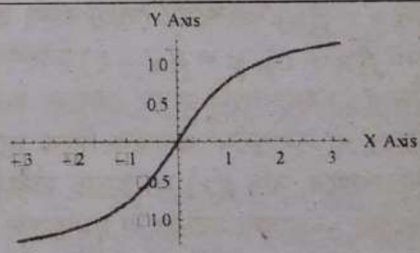
$f(x) = \sin^{-1}x$

$D_f = [-1, 1]; R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



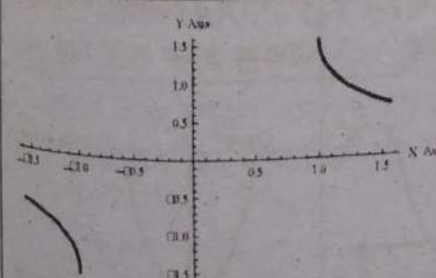
$f(x) = \cos^{-1}x$

$D_f = [-1, 1]; R_f = [0, \pi]$



$f(x) = \tan^{-1}x$

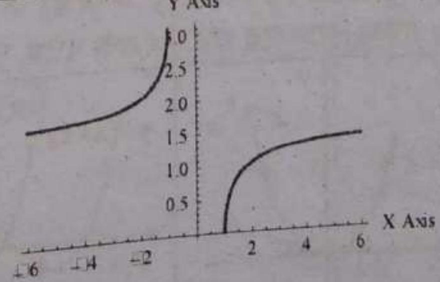
$D_f = \mathbb{R}; R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$f(x) = \text{cosec}^{-1}x$

$D_f = \mathbb{R} - (-1, 1);$

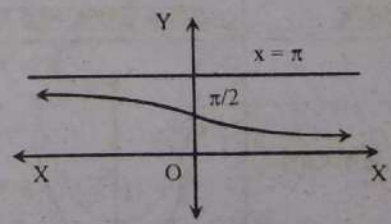
$R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$



$f(x) = \sec^{-1}x$

$D_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$

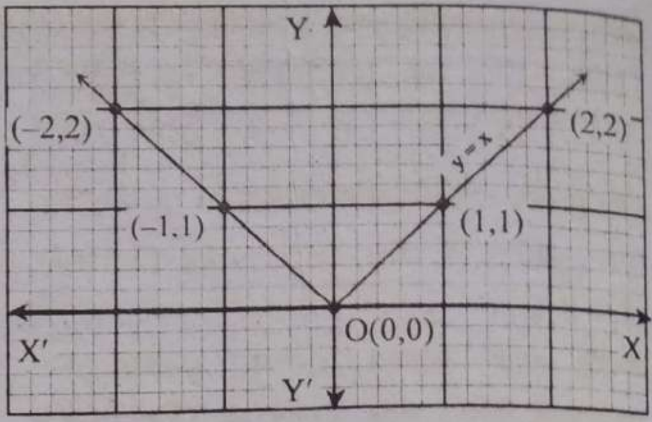
$R_f = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



$f(x) = \cot^{-1}x$

$D_f = \mathbb{R}; R_f = (0, \pi)$

8.4.5 পরম মান ফাংশন (Absolute value function)



$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$ কে পরম মান ফাংশন বলে।

এখানে $f(x)$, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য বিদ্যমান।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x)$ হলে, $x \in D_f$ এর জন্য $0 \leq y < \infty$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$

এখন $-\infty < x < \infty$ এর মধ্যে x এর কিছু মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবদ্ধ করি:

x	−2	−1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

তালিকা হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি যথাক্রমে $(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1)$ এবং $(2, 2)$

এই বিন্দুগুলিকে xy সমতলে স্থাপন করে সংযোগ করলে $f(x)$-এর লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

কাজ: প্রদত্ত ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর ও বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা কর:
(i) $4x + 3y = 24$ **(ii)** $y = x^2 - 4x + 5$ **(iii)** $y = \log(x-3)$ **(iv)** $y = 2\sin x + 2$ **(v)** $y = |x|$
(vi) $y = |x - 4| + 1$ **(vii)** $y = 3^x$

পাঠ-৮ ও ৯

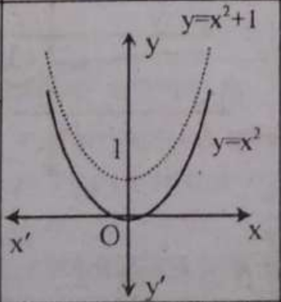
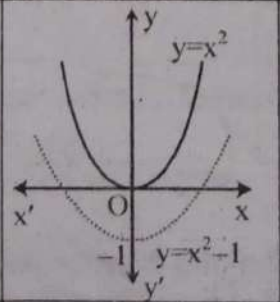
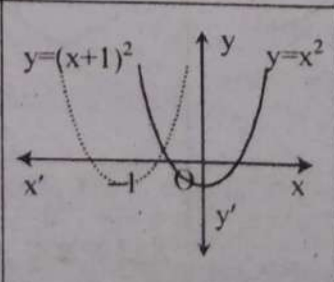
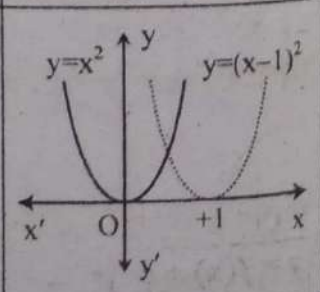
8.5 ফাংশনের এবং রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ
(Sketch of functions and transformed functions)

যদি $y = f(x)$ ফাংশনের স্কেচ জানা থাকে, তাহলে কিছু কৌশল অবলম্বন করে খুব সহজেই $y = f(x) + c$, $y = f(x) - c$, $y = f(x + c)$, $y = f(x - c)$ ফাংশনগুলির স্কেচ করা যায় (এখানে c একটি ধনাত্মক ধ্রুবক)।

যদি $f(x)$ ফাংশনের সাথে কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক যোগ করা হয়, তাহলে ফাংশনটির লেখচিত্র জ্যামিতিকভাবে y-অক্ষের বরাবর বা সমান্তরাল ধনাত্মক দিকে সরে যায় এবং ধনাত্মক ধ্রুবক বিয়োগ করা হলে ঋণাত্মক দিকে সরে যায়।

অনুরূপভাবে, যদি $f(x)$ ফাংশনের স্বাধীন চলক x এর সাথে কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক যোগ বা বিয়োগ করা হয় তাহলে $f(x)$ এর লেখচিত্র x-অক্ষের বরাবর বা সমান্তরাল যথাক্রমে ঋণাত্মক (বাম) বা ধনাত্মক (ডান) দিকে সরে যায়।

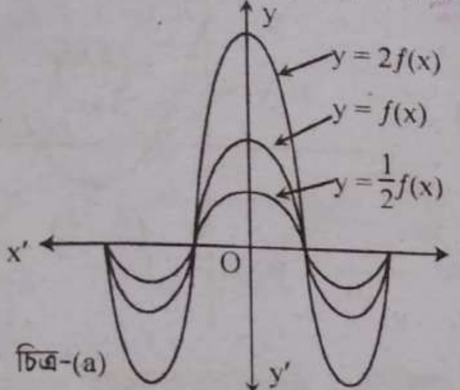
নিচের ছক থেকে বিষয়টি আরও পরিস্কার হবে।

মূল ফাংশন $y = f(x)$	$f(x)$ এর সাথে ধনাত্মক ধ্রুবক c যোগ	$f(x)$ থেকে ধনাত্মক ধ্রুবক c বিয়োগ	$f(x)$ এর স্বাধীন চলক x এর সাথে ধনাত্মক ধ্রুবক c যোগ	$f(x)$ এর স্বাধীন চলক x থেকে ধনাত্মক ধ্রুবক c বিয়োগ
নতুন ফাংশন	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$	$y = f(x + c)$	$y = f(x - c)$
জ্যামিতিক প্রভাব	$y = f(x)$ এর লেখচিত্র c একক উপরে সরে যায়	$y = f(x)$ এর লেখচিত্র c একক নিচে সরে যায়	$y = f(x)$ এর লেখচিত্র c একক বামে সরে যায়	$y = f(x)$ এর লেখচিত্র c একক ডানে সরে যায়
উদাহরণ				
	মূল ফাংশন $y = x^2$ রূপান্তরিত ফাংশন $y = x^2 + 1$	মূল ফাংশন $y = x^2$ রূপান্তরিত ফাংশন $y = x^2 - 1$	মূল ফাংশন $y = x^2$ রূপান্তরিত ফাংশন $y = (x+1)^2$	মূল ফাংশন $y = x^2$ রূপান্তরিত ফাংশন $y = (x-1)^2$

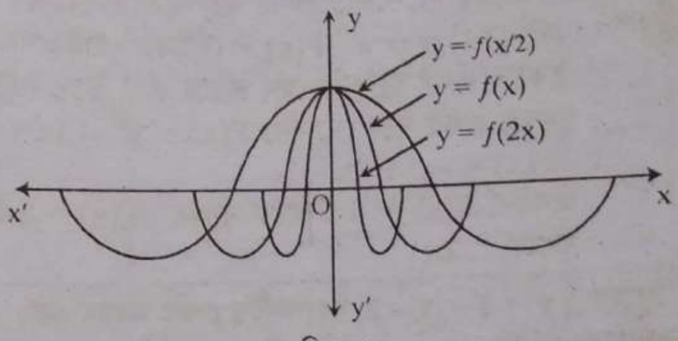
ফাংশনের লেখচিত্রের প্রসারণ বা সংকোচন (Stretch and comperession of the graph of functions)

কোনো ফাংশন $f(x)$ কে কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক c দ্বারা গুণ করলে উক্ত ফাংশনের লেখচিত্র জ্যামিতিকভাবে y-অক্ষ বরাবর প্রসারিত বা সংকুচিত হয়।

উদাহরণস্বরূপ $y = f(x)$, $y = 2f(x)$, $y = \frac{1}{2}f(x)$ এর লেখচিত্র-(a) নং চিত্রে দেখানো হয়েছে। $f(x)$ কে 2 দ্বারা গুণ করলে প্রতিটি y স্থানাঙ্ক দ্বিগুণ হয় এবং লেখচিত্রটি y-অক্ষ বরাবর প্রসারিত হয়। আবার $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করলে প্রতিটি y স্থানাঙ্ক অর্ধেক হয় এবং লেখচিত্রটি y-অক্ষ বরাবর সংকুচিত হয়।



চিত্র-(a)



চিত্র-(b)

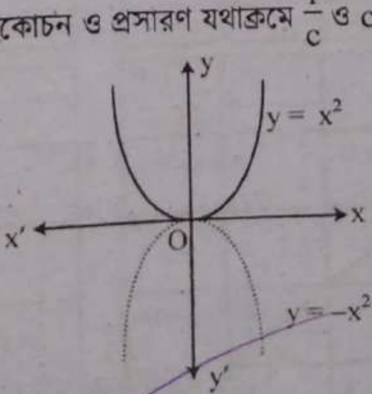
তাই সাধারণভাবে বলা যায় $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রকে y-অক্ষ বরাবর প্রসারিত করলে $y = c\,f(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে যখন $c > 1$ এবং $y = f(x)$ এর লেখচিত্রকে y-অক্ষ বরাবর সংকুচিত করলে $y = c\,f(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে যখন $0 < c < 1$. অপর পক্ষে $y = f(x)$ ফাংশনের স্বাধীন চলক x কে কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক c দ্বারা গুণ করলে উক্ত ফাংশনের লেখচিত্র জ্যামিতিকভাবে x-অক্ষ বরাবর সংকুচিত বা প্রসারিত হয়।

উদাহরণস্বরুপ $y = f(x)$, $y = f(2x)$ এবং $y = f(^x/_2)$ এর লেখচিত্র-(b) নং চিত্রে দেখানো হয়েছে। x কে 2 দ্বারা গুণ করলে লেখচিত্রটি সংকুচিত হয় এবং x কে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করলে লেখচিত্রটি প্রসারিত হয়।

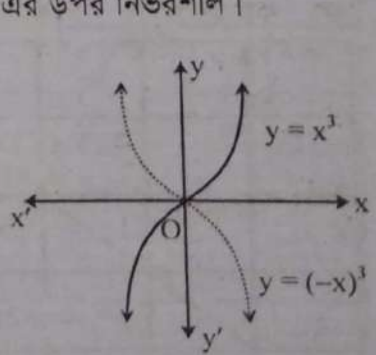
[বিষয়টি সংশয়পূর্ণ মনে হলেও আসলে ঘটনাটি হলো x অপেক্ষা 2x দ্বিগুণ হারে পরিবর্তন হয় তাই x-অক্ষ বরাবর x-এর অর্ধেক মানেই $y = f(2x)$ এর মান $y = f(x)$ এর সমান হয়।]

সাধারণভাবে বলা যায় $c > 1$ হলে $y = f(x)$ এর লেখচিত্রকে আনুভূমিকভাবে সংকুচিত করলে $y = f(cx)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে এবং $0 < c < 1$ এর ক্ষেত্রে এর $y = f(x)$ লেখচিত্রকে আনুভূমিকভাবে প্রসারিত করলে $y = f(cx)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে সংকোচন ও প্রসারণ যথাক্রমে $\frac{1}{c}$ ও c এর উপর নির্ভরশীল।

উল্লেখ্য যে, $y = f(x)$ ফাংশনকে -1 দ্বারা গুণ করলে সম্পূর্ণ লেখচিত্রটি x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত হবে চিত্র-(c)
আবার $y = f(x)$ এর স্বাধীন চলক x কে -1 দ্বারা গুণ করলে লেখচিত্রটি y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত হবে চিত্র-(d)।



চিত্র-(c)



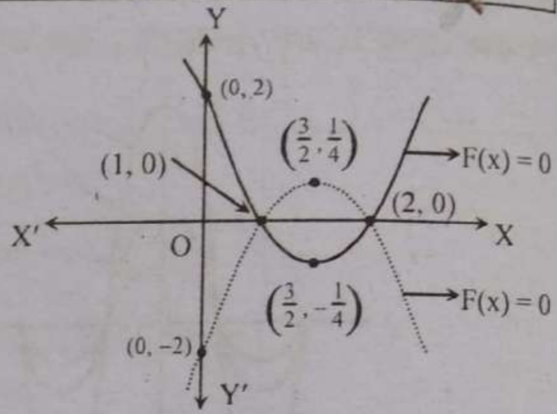
চিত্র-(d)

ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনের জন্য এক নজরে কিছু তথ্য:

$y = f(x) + c$	• $c > 0$; লেখচিত্র y-অক্ষ বরাবর বা সমান্তরাল উপরের দিকে c একক সরে যায়। • $c < 0$; লেখচিত্র y-অক্ষ বরাবর বা সমান্তরাল নিচের দিকে c একক সরে যায়।
$y = f(x + c)$	• $c > 0$; লেখচিত্র x-অক্ষ বরাবর বা সমান্তরাল বামে c একক সরে যায়। • $c < 0$; লেখচিত্র x-অক্ষ বরাবর বা সমান্তরাল ডানে c একক সরে যায়।

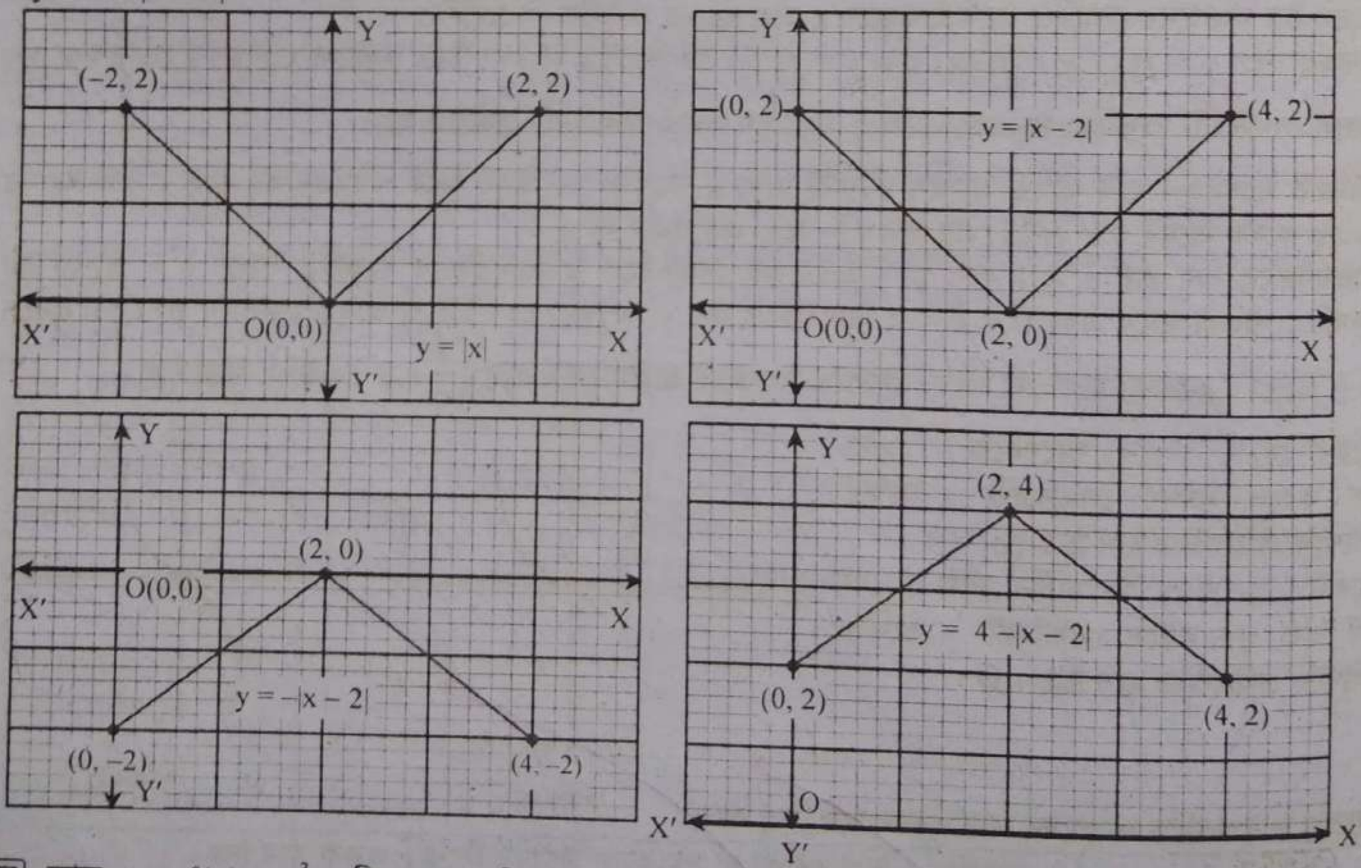
$y = c.\,f(x)$	• $c > 1$; লেখচিত্র y-অক্ষ বরাবর প্রসারিত হয়। • $0 < c < 1$; লেখচিত্র y-অক্ষ বরাবর সংকুচিত হয়।
$y = f(cx)$	• $c > 1$; লেখচিত্র x-অক্ষ বরাবর সংকুচিত হয়। • $0 < c < 1$; লেখচিত্র x-অক্ষ বরাবর প্রসারিত হয়।
$y = -f(x)$	• লেখচিত্র x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত হয়।
$y = f(-x)$	• লেখচিত্র y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত হয়।

জেনে রাখ: $F(x) = 0$ ও $-F(x) = 0$ সমীকরণের লেখদ্বয় x- অক্ষের সাপেক্ষে পরস্পর পরস্পরের প্রতিচ্ছবি। তাই $F(x) = 0$ ও $-F(x) = 0$ উভয় সমীকরণের লেখ x অক্ষকে একই বিন্দুতে ছেদ করবে এবং উভয় সমীকরণের মূলদ্বয় একই হবে। যেমন: $F(x) = x^2 - 3x + 2$ হলে $-F(x) = -x^2 + 3x - 2$
এখানে, $F(x) = 0$ উভয়ের মূলদ্বয় $-F(x) = 0$ উভয়ের মূলদ্বয় 1, 2।



উদাহরণ: $y = 4 - |x - 2|$ ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান: প্রথমে $y = |x|$ ফাংশনটির স্কেচ আঁকি। $y = |x|$ এর স্কেচকে 2 একক ডানে সরালে $y = |x - 2|$ এর স্কেচ পাওয়া যাবে। x-অক্ষের সাপেক্ষে $y = |x - 2|$ ফাংশনের স্কেচ এর প্রতিচ্ছবি স্কেচ অঙ্কন করলে $y = -|x - 2|$ ফাংশনের স্কেচ পাওয়া যাবে। এখন $y = -|x - 2|$ এর স্কেচকে 4 একক উপরে সরালে $y = -|x - 2| + 4$ বা $y = 4 - |x - 2|$ ফাংশনের স্কেচ পাওয়া যাবে।



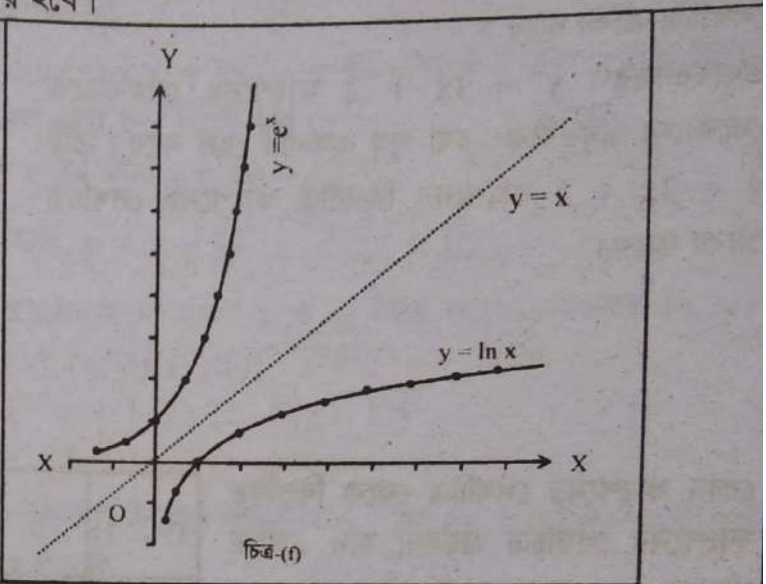
কাজ: $y = f(x) = x^3$ ও নিচের রূপান্তরিত ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর:
(i) $f(x + 3)$ (ii) $f(x - 3)$ **(iii)** $f(x + 3) + 3$ **(iv)** $f(x + 3) - 3$ **(v)** $f(x - 3) + 3$ **(vi)** $f(x - 3) - 3$
(vii) $f(2x)$ **(viii)** $f(\frac{x}{2})$ **(ix)** $-f(x)$ **(x)** $f(-x)$ এবং প্রতিক্ষেত্রে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

পাঠ-১০ ও ১১

৪.6 ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ (Sketch of functions and its inverse functions)

যদি $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রের উপর (a, b) একটি বিন্দু হয়, তাহলে (b, a) বিন্দুটি $y = f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রের উপর থাকবে। চিত্র-(f) থেকে বিষয়টি পরিষ্কার হবে।

x	$y = \ln x$	x	$y = e^x$
0.25	−1.39	−1.39	0.25
0.50	−0.69	−0.69	0.50
1.00	0	0	1.00
1.99	0.69	0.69	1.99
3.00	1.10	1.10	3.00
4.01	1.39	1.39	4.01
5.00	1.61	1.61	5.00
5.99	1.79	1.79	5.99
7.03	1.95	1.95	7.03
8.00	2.08	2.08	8.00
9.03	2.20	2.20	9.03



চিত্র-(f)

অর্থাৎ একটি ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলিকে বিপরীত ক্রমে সাজালে উক্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্রের উপরস্থ বিন্দুগুলি পাওয়া যাবে।

উদাহরণ: মনে করি, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যা $f(x) = 2x - 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। এখন $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় করব এবং $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করব।

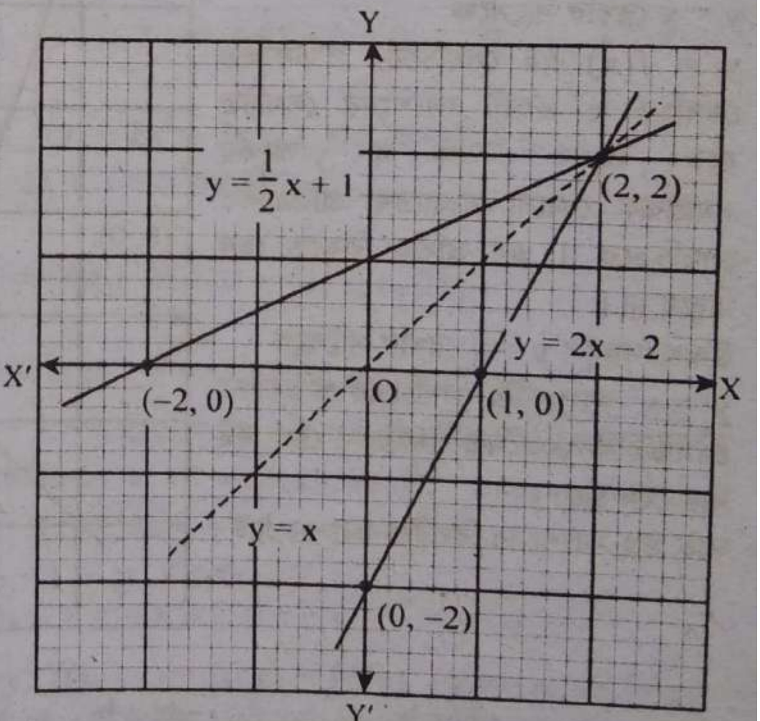
সমাধান: ধরি, $y = f(x) = 2x - 2$

বা, $x = 2y - 2$ [x এবং y কে বিনিময় করে পাই]

বা, $2y = x + 2$ বা, $y = \frac{1}{2}(x + 2)$

$\therefore f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2}(x + 2)$

এখানে $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ উভয়েই সরল রেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। সুতরাং $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য, x এর কিছু মান (কমপক্ষে দুইটি) নিয়ে পূর্বে উল্লেখিত নিয়ম অনুসারে একই xy-সমতলে উভয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করলে পাশের লেখচিত্র পাই।



বৈশিষ্ট্য:

(i) $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র $y = x$ সরলরেখার সাথে প্রতিসম হবে।

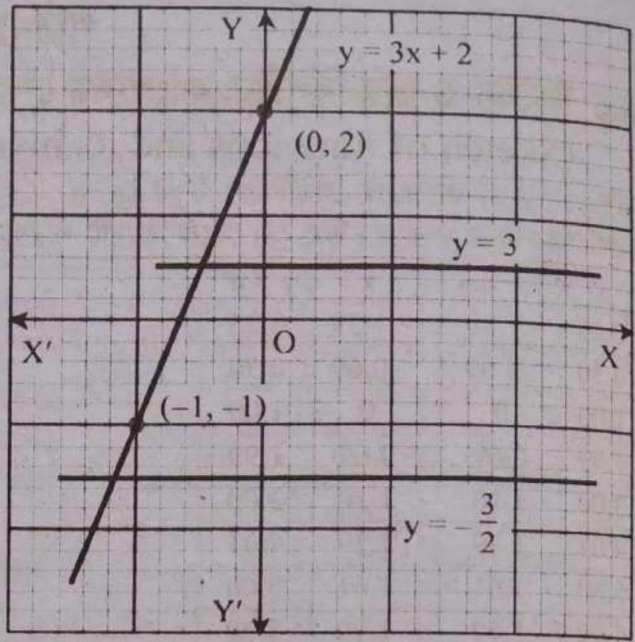
(ii) $y = f(x)$ অর্থাৎ প্রদত্ত ফাংশন এর লেখচিত্রকে x-অক্ষ বা x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে না।

- যেকোনো ফাংশনের বিপরীত সম্পর্ক ফাংশন হতেও পারে আবার নাও হতে পারে।
- কোনো ফাংশনের বিপরীত সম্পর্কও একটি ফাংশন হলে তাকে মূল ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বলে।

কোনো ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের পূর্বে এই বিষয়টি নিশ্চিত হতে হবে যে, উক্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান কী না?

অনুভূমিক রেখা পরীক্ষা (Horizontal line test) যদি কোনো ফাংশনের লেখচিত্রকে কোনো অনুভূমিক (x-অক্ষের সমান্তরাল) রেখা শুধু একটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে উক্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান এবং লেখচিত্র আঁকা যাবে।

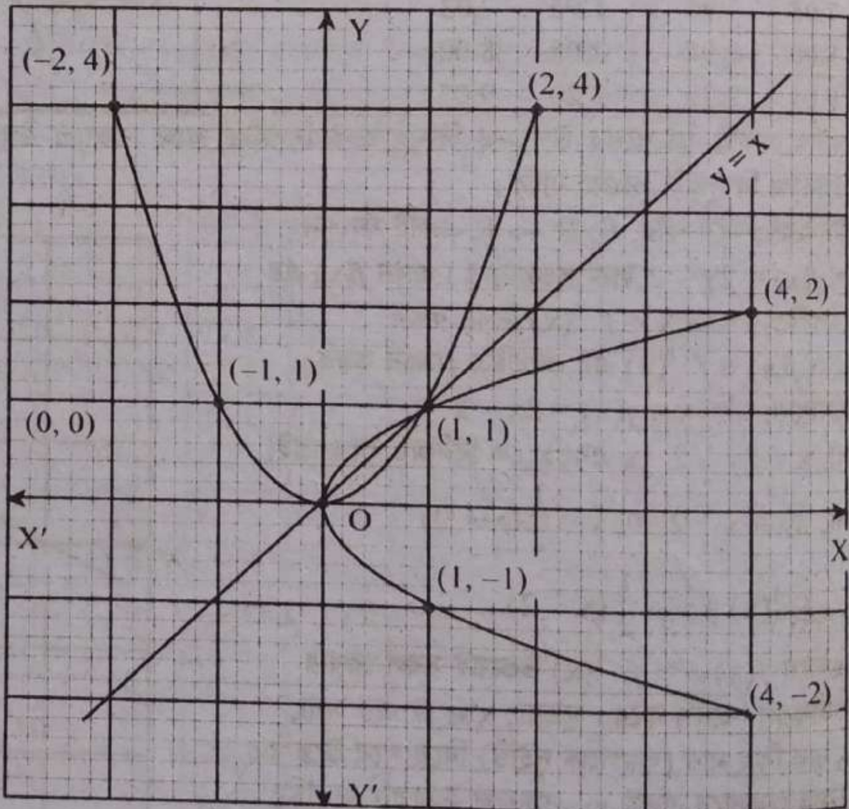
উদাহরণস্বরূপ $y = 3x + 2$ ফাংশনের লেখচিত্রকে যেকোনো অনুভূমিক রেখা শুধু একবার ছেদ করে। তাই $y = 3x + 2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকা সম্ভব।



কোন ফাংশনের লেখচিত্র থেকে বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন: যদি কোনো ফাংশন $y = f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $y = f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকে, তাহলে $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $y = f(x)$ এর লেখচিত্রের প্রতিফলিত লেখচিত্র ও একটি ফাংশনের লেখচিত্র হবে। অর্থাৎ y-অক্ষ বা y-অক্ষের সমান্তরাল কোনো সরলরেখা প্রতিফলিত লেখচিত্রকে 1 এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করবে না।

উদাহরণস্বরূপ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $y = x^2$ ফাংশনটির লেখচিত্রের প্রতিফলিত লেখচিত্রকে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা দুই বার ছেদ করে।

তাই উক্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নেই।



বি. দ্র. 1. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ হলে $f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$

2. যদি $f(x) = \log(a + bx)$ হয় তবে এর ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{a}{b}\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

কাজ: 1. $y = x^2$ ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নেই, তা দুই পদ্ধতিতে প্রমাণ কর এবং শর্ত আরোপ করে $y = x^2$ এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর ও উভয় ক্ষেত্রে লেখচিত্র আঁক।

2. $f(x) = \frac{2x + 5}{4x + 3}$ হলে $f^{-1}(x)$ এবং এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

পাঠ-১২

8.7 ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় নির্ণয়
(Determination of the Period of Trigonometric Function)

দ্রষ্টব্য 8.7 নং অনুচ্ছেদ সম্পর্কে ষষ্ঠ অধ্যায় এর 6.7.2 নং অনুচ্ছেদে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N}$ এবং $F = \{(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ এবং $x + 3y = 10\}$ হলে, অন্বয় F কে ক্রমজোড়ের সেট রূপে প্রকাশ কর। ডোমেন, রেঞ্জ এবং F^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ এখানে, $x, y \in \mathbb{N}$ এবং $x + 3y = 10$

সুতরাং $x = 1$ হলে, $y = 3 \quad \therefore (1, 3) \in F$ কিন্তু $x = 2$ হলে, $y = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \left(2, \frac{8}{3}\right) \notin F$

অর্থাৎ $\mathbb{N}$ একটি অসীম সেট এবং $x, y \in \mathbb{N}$ হলেও F অন্বয়ের মধ্যে সকল x ও y নিয়ে গঠিত ক্রমজোড় (x, y) থাকবে না। উপরি-উক্ত উপায়ে যাচাই করে পাই, $F = \{(1, 3), (4, 2), (7, 1)\}$

$\therefore$ F এর ডোমেন $= \{1, 4, 7\}$, রেঞ্জ $= \{3, 2, 1\}$ এবং $F^{-1} = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$

উদাহরণ-2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{যখন } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{যখন } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 & \text{যখন } x < -2 \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। [রা: বো:, চ: বো: ০৮; য: বো: ০৭]

$f(2), f(4), f(-1), f(-3)$ এবং $f(0)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2, f(4) = 3.4 + 1 = 13$

$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1, f(-3) = 2(-3) + 3 = -3$ এবং $f(0) = 0^2 - 2 = -2$

উদাহরণ-3. f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর, যখন

(i) $A = \{-1, 0, 2, 4\}$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশন, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(ii) $A = (1, 3)$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশন, $f(x) = 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

সমাধান : (i) এখানে f এর ডোমেন, $A = \{-1, 0, 2, 4\}$

আবার, $f(-1) = 6, f(0) = 1, f(2) = 3, f(4) = 21$ সুতরাং f এর রেঞ্জ $= \{1, 3, 6, 21\}$

(ii) এখানে f এর ডোমেন $= (1, 3)$

আবার $f(1) = 5, f(3) = 9$ এবং $x \in (1, 3)$ এর জন্য $5 < f(x) < 9$ সুতরাং f এর রেঞ্জ $= (5, 9)$

উদাহরণ-4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে $fog(2)$ এবং $gof(2)$ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১২-১৩, ০৮-০৯; বুটেক্স ০৯-১০; চুয়েট ১১-১২; রা: বো: ০৭; চ: বো: ০৫; সি: বো: ১০, ০৪; ব: বো: ১২]

সমাধান: fog বা $f(g(x)) = f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 3(2x - 3) + 1 = 4x^2 - 6x + 1$

gof বা $g(f(x)) = g(x^2 + 3x + 1) = 2(x^2 + 3x + 1) - 3 = 2x^2 + 6x - 1$

$fog(2) = 4.2^2 - 6.2 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5 \quad gof(2) = 2.2^2 + 6.2 - 1 = 8 + 12 - 1 = 19$

উদাহরণ-5. $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $f(x + y) f(x - y) = f(2x) + f(2y)$. [কু: বো: ১০, ০৪, সি: বো: ০৭, ০৪; চ: বো: ১৩, ০৯, ০৬, ০৩; রা: বো: ১৫, ১৪, ১০, ০৫; ব: বো: ০৯, ০৫; ঢা: বো: ১২; য: বো: ১২, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২]

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = e^x + e^{-x}$

$\therefore f(2x) = e^{2x} + e^{-2x}$ ... ... (i)

এবং $f(2y) = e^{2y} + e^{-2y}$ ... ... (ii)

$\therefore f(x+y) f(x-y) = \{e^{x+y} + e^{-(x+y)}\} \{e^{(x-y)} + e^{-(x-y)}\}$

$= e^{x+y} . e^{(x-y)} + e^{x+y} . e^{-(x-y)} + e^{-(x+y)} . e^{(x-y)} + e^{-(x+y)} . e^{-(x-y)} = e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$

$= e^{2x} + e^{-2x} + e^{2y} + e^{-2y} = (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y}) = f(2x) + f(2y)$ [(i) ও (ii) নং হতে]

উদাহরণ-6. $f(x) = \cos(\ln x)$ হলে $f(x)\,f(y) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\right]$ এর মান নির্ণয় কর।

[চ: বো: ০৭; কু: বো: ১৪, ০৯; য: বো: ০৫; দি: বো: ১৬, ১১; সি: বো: ১৬, ১৫, ১১]

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \cos(\ln x)$

$\therefore f(y) = \cos(\ln y) \quad \therefore f\left(\frac{x}{y}\right) = \cos\left(\ln\frac{x}{y}\right)$

$\therefore f(xy) = \cos(\ln xy) \quad \therefore f(x)\,f(y) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\right]$

$$= \cos(\ln x) \times \cos(\ln y) - \frac{1}{2}\left[\cos\left(\ln\frac{x}{y}\right) + \cos(\ln xy)\right]$$

$$= \cos(\ln x)\cos(\ln y) - \frac{1}{2}\left[\cos\{(\ln x) - (\ln y)\} + \cos\{(\ln x) + (\ln y)\}\right]$$

$$= \cos(\ln x)\cos(\ln y) - \frac{1}{2}.2\cos(\ln x)\cos(\ln y)$$

$[\because \cos(A - B) + \cos(A + B) = 2\cos A\cos B]$

$$= \cos(\ln x)\cos(\ln y) - \cos(\ln x)\cos(\ln y) = 0$$

উদাহরণ-7. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ এবং $g(x) = 2x - 3$ দুইটি ফাংশন।

ক. $h(x) = 3x^2 - 12x + 19$ এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $fog \neq gof$. ৪

গ. $f : A \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ শর্ত সাপেক্ষে সম্ভব হলে f^{-1} নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ক. $h(x) = 3x^2 - 12x + 19 = 3(x^2 - 4x + 4) + 7 = 3(x-2)^2 + 7$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $(x-2)^2 \geq 0$

কাজেই $f(x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে যখন $(x-2)^2 = 0$ এবং ক্ষুদ্রতম মান $= 7$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ এবং $g(x) = 2x - 3$.

$\therefore \; fog = (fog)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \frac{2x-3-3}{2(2x-3)+1} = \frac{2x-6}{4x-5}$

আবার, $gof = (gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2x+1}\right) = 2\left(\frac{x-3}{2x+1}\right) - 3 = \frac{2x-6}{2x+1} - 3$

$$= \frac{2x-6-6x-3}{2x+1} = -\frac{4x+9}{2x+1}$$

$\therefore \; fog \neq gof$ (দেখানো হলো)

গ. এখানে $2x + 1 = 0$ বা, $x = -\frac{1}{2}$ এবং $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{7}{2}}{0}$

অর্থাৎ $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান বিদ্যমান নয়।

কিন্তু $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

অতএব, f এর ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ধরি, $f(x) = y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$.

এখানে, $1 - 2y \neq 0$ কারণ $y = \frac{1}{2}$ বসালে x সংজ্ঞায়িত নয়।

অর্থাৎ y বা $f(x) = \frac{1}{2}$ হতে পারে না। অতএব f এর রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

ধরি, $f(a) = f(b)$ যেখানে $a \neq -\frac{1}{2}, b \neq -\frac{1}{2}$. অর্থাৎ $\frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1} \Rightarrow a = b \therefore f$ ফাংশনটি এক-এক।

এখানে, f এর রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = B = f$ এর কোডোমেন, সুতরাং f ফাংশনটি সার্বিক।

যেহেতু f একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন, সুতরাং f^{-1} বিদ্যমান।

এখানে $y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+3}{1-2y}$ অর্থাৎ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$

উদাহরণ-8. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ এবং $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

ক. $m(x) = 2x + 1$, $mop(x) = x^2$ হলে $p(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করে বৈশিষ্ট্য পর্যবেক্ষণ কর। ৪

গ. $fog^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

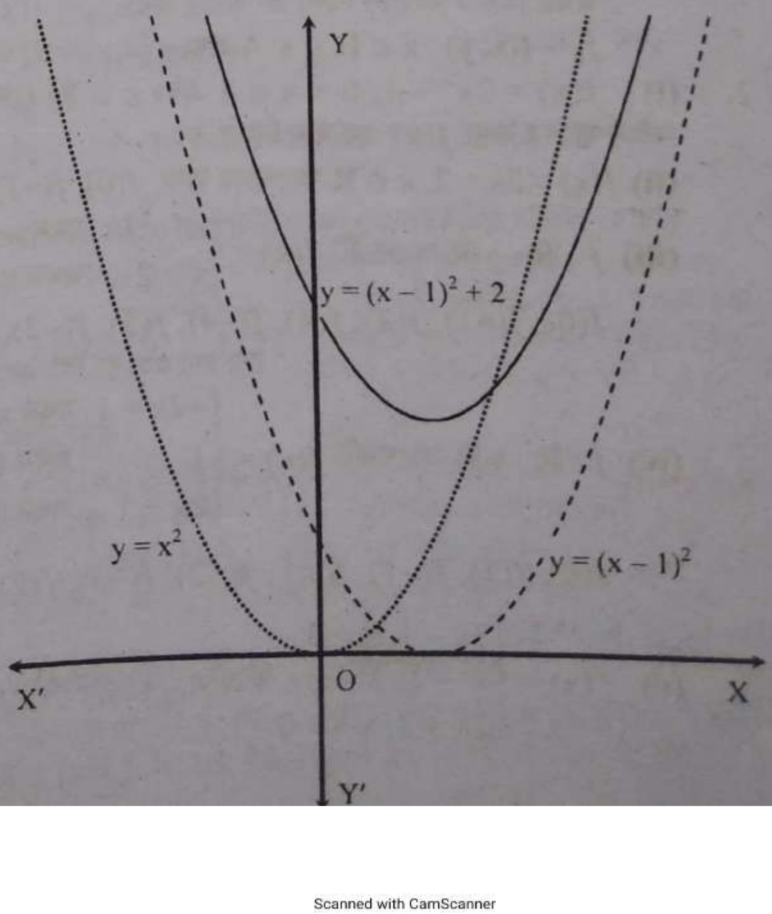
সমাধান: ক. দেওয়া আছে, $m(x) = 2x + 1$ এবং $mop(x) = x^2$

বা, $m(p(x)) = x^2$ বা, $2(p(x)) + 1 = x^2 \therefore p(x) = \frac{x^2-1}{2}$

x এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য $p(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore p(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R}$ **(Ans.)**

খ. ধরি, $y = f(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 \therefore y = (x-1)^2 + 2$



বৈশিষ্ট্য: (a) ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব ফাংশনের ডোমেন = R এবং রেঞ্জ = $[2, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 3$।
সুতরাং লেখচিত্রটি y অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) লেখটি $x = 1$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ এবং $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

ধরি, $y = g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

$\therefore\ y = \frac{x+2}{x-1}$ বা, $xy - y = x + 2$ বা, $xy - x = y + 2$

বা, $x(y-1) = y + 2 \therefore x = \frac{y+2}{y-1}$

$\therefore g^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-1}$ [$\because y = g(x)$ বা, $g^{-1}(y) = x$]

$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$

এখন $fog^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = (g^{-1}(x))^2 - 2g^{-1}(x) + 3 = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + 3$

$\therefore fog^{-1}(3) = \left(\frac{3+2}{3-1}\right)^2 - 2\left(\frac{3+2}{3-1}\right) + 3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) + 3 = \frac{25}{4} - 5 + 3 = \frac{25-8}{4} = \frac{17}{4}$ **(Ans.)**

পাঠ-১৩ ও ১৪

অনুশীলনী-৪

1. (i) $A = \{a, b, c, d\}$ থেকে $B = \{1, 2, 3\}$ সেটে বর্ণিত নিচের অন্বয়গুলির কোনটি ফাংশন এবং কোনটি ফাংশন নয় কারণসহ উল্লেখ কর।
$F = \{(a, 1), (b, 2), (d, 3), (c, 1)\}$, $G = \{(a, 1), (b, 3), (d, 2)\}$, $H = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 3), (d, 2)\}$ এবং $K = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

(ii) $A = [-3, 3]$ এবং $B = [0, 3]$ সেটদ্বয় দ্বারা বর্ণিত f_1, f_2 ও f_3 তিনটি অন্বয় নিচে দেওয়া হলো। অন্বয় তিনটি ফাংশন কিনা তা যাচাই কর: $f_1 = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x^2 + y^2 = 9\}$;
$f_2 = \{(x, y) : x \in B, y \in A$ এবং $x^2 + y^2 = 9\}$ ও $f_3 = \{(x, y) : x \in B, y \in B$ এবং $x^2 + y^2 = 9\}$

2. (i) $f(x) = 2x^2 - 1$, $0 < x \le 4$ এবং $x \in \mathbb{N}$ (যেখানে $\mathbb{N}$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) হলে, x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $f(x) = 3x + 2, x \in \mathbb{R}$ ফাংশনের জন্য, $f(0), f(-1), f(2), f(x^2), f(2x)$ এবং $f(x-1)$ নির্ণয় কর।

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{যখন } x \ge 2 \\ x + 2 & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে,
$f(0), f(-1), f(2), f(4), f(-4), f(5), f(-2), f(-3)$ ও $f(3)$ এর মান নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ০৩; কু: বো: ০৮, ০৪; চ: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৪; রা: বো: ১২; দি: বো: ১১]

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ 2x + 1 & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে,
$f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right), f(-2), f(-3), f(2)$ এবং $f(3)$ নির্ণয় কর।

(v) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, x > 3 \\ x^2 - 2, 2 \le x \le 3 \\ 2x + 3, x < -2 \end{cases}$ হলে, $f(2), f(4), f(-1)$ এবং $f(-3)$ নির্ণয় কর।
[কু: বো: ১৩; ঢা: বো: ১২; চ: বো: ১২; রা: বো: ১৫]

3. (i) $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, সকল বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 5\}$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [মাদ্রাসা বো: ১১]

(iii) $A = \{2, 4, 6\}$ এবং $f : A \to A$ ফাংশনটি $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(iv) $A = \{x : x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 6$ এবং x, 2 দ্বারা বিভাজ্য$\}$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 4x^2 - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(v) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $f : A \to B$ একটি ফাংশন যা $f(x) = x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(vi) $A = [0, 2]$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। যেখানে $\mathbb{R}$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট। f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(vii) $A = \{1, 2\ 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$, f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ফাংশনটি কী সার্বিক? [কুয়েট ০৫-০৬; কু: বো: ১২]

4. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

(i) $f(x) = x + 3$ (ii) $f(x) = \frac{1}{x - 5}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (iv) $f(x) = x^2 + 1$ [কু: বো: ০৭]

(v) $f(x) = -x^2 + 1$ (vi) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (vii) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ (viii) $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 1}$ [সি: বো: ১১]

(ix) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ (x) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ [য: বো: ১০] (xi) $f(x) = \frac{x + 4}{x + 4}$ (xii) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

(xiii) $f(x) = -\sqrt{x + 3}$ (xiv) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (xv) $f(x) = x^3$ [কু: বো: ০৭]

(xvi) $f(x) = \sin x$ (xvii) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ [চ: বো: ১১] (xviii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

5. (a) দেখাও যে, নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি ফাংশন f এক-এক এবং সার্বিক।

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(iii) $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(iv) $f : [0, 2] \to [0, 2]$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(b) দেখাও যে, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয়।

(c) দেখাও যে, $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি এক-এক নয় কিন্তু সার্বিক।

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ কর। [ঢা: বো: ১৩; সি: বো:১৩; ব: বো: ১৩]

(e) $f(x) = x - 1$ দ্বারা বর্ণিত $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা যাচাই কর।

6. (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
(i) $f^{-1}(9)$ [বুটেক্স ০৯-১০; ব: বো: ০৬] (ii) $f^{-1}(16)$ [বুটেক্স ০৯-১০; চ: বো: ০৪; ব: বো: ০৬]
(iii) $f^{-1}(-16)$ [য: বো: ১১] (iv) $f^{-1}(36)$ [ঢা: বো: ০৪] (v) $f^{-1}(25)$ [বুটেক্স ০৯-১০;য: বো: ১১]
(vi) $f^{-1}([4, 25])$ [বুটেক্স ০৯-১০] (vii) $f^{-1}(-4)$ এবং (viii) $f^{-1}([-1, 1])$ নির্ণয় কর।

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(2)$ এর মানকে সেটে প্রকাশ কর। [রা: বো: ১০; চ: বো: ০৩]

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। নিম্নের মানগুলি নির্ণয় কর :
(i) $f^{-1}(-5)$ [দি: বো: ১৬] (ii) $f^{-1}(0)$ [রুয়েট ০৭-০৮; ব: বো: ১১; কু: বো: ১১], (iii) $f^{-1}(2)$ [দি: বো: ১৬] (iv) $f^{-1}(5)$
(v) $f^{-1}(10)$ [রুয়েট ০৭-০৮; কু: বো: ১১] এবং (vi) $f^{-1}([10, 26])$ [রুয়েট ০৭-০৮; য: বো: ০৮; ব: বো: ১১]

(d) $A = \mathbb{R}-\{3\}, B = \mathbb{R} - \{1\}, f : A \to B$ এবং $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে, ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা, কারণসহ উল্লেখ কর। f^{-1} নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৯; সি: বো: ০৭]

(e) $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}, B = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}, f: A \to B$ এবং $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে f^{-1} নির্ণ কর। [চ: বো: ১৫; দি: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১০]

(f) যদি $f : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ফাংশনটি $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে f^{-1} নির্ণয় কর [কু: বো: ১৫]

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ কর। এক-এক এব সার্বিক ফাংশন হলে এর f^{-1} নির্ণয় কর। [কুয়েট ১৩-১৪; রা: বো: ১১; চ: বো: ১৩, ১

7. (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 6$ হলে, $g(f(2)), f(g(2))$ এবং $f(g(5)$ নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৬; য: বো: ০৯, ০৬; চ: বো: ০৭; রা: বো: ১৩, ০৫]

(b) f ও g দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ফাংশন সূচিত হলে, এবং $f(x) = x + 1, g(x) = x^2$ হলে, $f(g(x))$ এবং $g(f(x))$ নির্ণয় কর।

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 4$ হলে, $g(f(x)), f(g(x)), g(f(2)), f(g(2)), f(g(5)), g(f(5)), f(g(3))$ এবং $g(f(3))$ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৬; দি: বো: ১৩, ১০; সি: বো: ১২

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $g(x) = x^2 + 1$

(i) $(fog)(-2)$ [য: বো: ০৩; ব: বো: ০৭

(ii) $(gof)(-4)$ [ঢা: বো: ০৫; কু: বো: ০৯; য: বো: ০৩; সি: বো: ০৮; চ: বো: ১৬

(iii) $(fog)(5)$ [রা: বো: ১৬; চ: বো: ১৬

(iv) $(gof)(3)$ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫; সি: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ০৯

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x^3 + 1$ হলে $fog(4)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(fog)(-3) \neq (gof)(-3)$ [ঢা: বো: ১১, ০৭; রা: বো: ০৩; সি: বো: ১৫; ব: বো: ০৯

(f) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 - 1$ হলে, fog এবং gof নির্ণয় কর অতঃপর প্রত্যেক ক্ষেত্রে সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৬; চ: বো: ০৯; সি: বো: ০৫

(g) A, B, C এর প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা সেট। $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = x^2 + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। সংযোজিত ফাংশন gof এবং fog নির্ণয় কর। [মাদ্রাসা বো: ১২

8. নিম্নের ফাংশনগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর: $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

(i) $f(x) = |x|$, (ii) $f(x) = x^2; -3 \le x \le 3$, (iii) $f(x) = \sin x; 0 \le x \le 2\pi$, (iv) $f(x) = 3; -3 \le x \le 3$

9. নিম্নের দ্বিঘাত ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর এবং বৈশিষ্ট্য লিখ:

(i) $y = 4 + 3x - x^2$ (ii) $y = x^2 + 3x - 4$ (iii) $y = 8 + 2x - x^2$ (iv) $y = -x^2 + 3x + 2$

10. নিম্নের সূচক ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর এবং বৈশিষ্ট্য লিখ:

(i) 2^x (ii) -2^x (iii) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ (iv) 4^x (v) 2^{-x} (vi) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

11. নিম্নের লগারিদমিক ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর এবং বৈশিষ্ট্য লিখ:

(i) $y = \log_e(1 + x)$ (ii) $y = \log_{10}x$ (iii) $y = \log_{0.5}x$ (iv) $y = 0.2 \ln(x - 1)$

12. নিম্নের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর এবং বৈশিষ্ট্য লিখ:

(i) $y = \sin\dfrac{3}{2}x$ (ii) $y = \sin 3x$ (iii) $y = 2\sin\dfrac{x}{3}$ (iv) $y = \sec x$ (v) $y = \cos 3x$ (vi) $y = \tan 2x$

(vii) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

13. নিম্নের ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর এবং বৈশিষ্ট্য লিখ:

(i) $y = |x - 2|$ (ii) $y = (5 - x)$ (iii) $y = \dfrac{|x|}{x}$ (iv) $y = |3x - 2|$

14. নিম্নের ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনগুলির স্কেচ অঙ্কন কর:
(i) $f(x) = x^2 + 2$ হলে $f(x)$ ও $f(x \pm 1)$, $f(x) \pm 1$ (ii) $f(x) = e^{-x}$ হলে $f(x)$ ও $f(x \pm 2)$, $f(x) \pm 2$
(iii) $f(x) = x^2$ হলে $f(x)$ ও $f(x \pm 1)$, $f(-x)$ এবং $-f(x)$, $f(x) \pm 1$
(iv) $f(x) = \sin x$ হলে $f(x)$, $f(2x)$, $f(x \pm 2)$, $-f(x)$ $f(x) \pm 2$
(v) $f(x) = \log_{10}x$ হলে $f(x)$, $f(x) \pm 1$, $-f(x)$, $f(x \pm 1)$

15. একই লেখচিত্রে নিম্নের ফাংশনগুলির ও তাদের বিপরীত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন কর:
(i) $y = 5x + 1$ (ii) $y = e^x$ (iii) $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$ (iv) $y = 5^x$ (v) $y = \tan x; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
(vi) $y = e^{-2x}$ (vii) $y = \ln(x + 2)$

16. নিম্নের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলির মৌলিক পর্যায় নির্ণয় কর:
(i) $2\cos\frac{x}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}\cot\frac{3x}{4}$ (iii) $2\sec\frac{\theta}{4}$ (iv) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\sin\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ (vi) $\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$ (vii) $2\cos\frac{x}{3}$
(viii) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ (ix) $5\sec\frac{\theta}{8}$ (x) $\sin^3\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$

17. (i) $y = f(x) = \frac{4x - 7}{2x - 4}$ হলে দেখাও যে, $f(y) = x$. [বুটেক্স ০৬-০৭; চ: বো: ১২, ০৮, ০৫; ঢা: বো: ১৪, ১৩, ১১(অনু.), ০২; রা: বো: ১৬, ১২, ০৪; কু: বো: ১৩, ০৬; সি: বো: ১৩(অনু.), ০৯; ব: বো: ১১, ০৭, ০৪; দি: বো: ১৪, ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]
(ii) $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$ হলে দেখাও যে, $f(y) = x$ অথবা $f^{-1}(x) = f(x)$. [ঢা: বো: ১৬; য: বো: ১৪, ০৭]
(iii) যদি $f(x) = a\left(\frac{x - b}{a - b}\right) + b\left(\frac{x - a}{b - a}\right)$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(a) + f(b) = f(a + b)$
[বুয়েট ০৪-০৫; দি: বো: ১২; ঢা: বো: ০৭; য: বো: ০৪; কু: বো:০৮, রা: বো:১৩, ০৮, ব: বো: ০৮]
(iv) যদি $f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} = 2x$ [চ: বো: ১১(অনু.); দি: বো: ১০; ব: বো: ১৩]
(v) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ হলে দেখাও যে, $\frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)} = \frac{x - y}{1 + xy}$ [য: বো: ০২; সি: বো: ০৫]

18. যদি $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ [চ: বো: ১৬, ১৪]

19. (a) $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\varphi(x) = \ln(\cos x)$ হলে দেখাও যে, (i) $e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\varphi(2a)}$ [বুয়েট ১২-১৩; কু: বো: ১২; ঢা: বো: ১০; রা: বো: ০৯; চ: বো: ১৫; য: বো: ১৬, ১৫, ১০; সি: বো: ১৪, ১০, ০৮; ব: বো: ১৬, ১৪, ১০]
(ii) $e^{2f(x)} + e^{2\varphi(x)} = 1$. [কু: বো: ০২; য: বো: ১৬]
(b) যদি $f(x) = \ln(x)$ এবং $g(x) = x^n$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(g(x)) = nf(x)$ [রা: বো: ০৭, ০৩; সি: বো: ০৬]
(c) যদি $f(x) = \cos x$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $f(2x) = 2\{f(x)\}^2 - 1$ (ii) $f(3x) = 4\{(f(x)\}^3 - 3f(x)$ [য: বো: ১৩]

20. (i) যদি $f(x) = \tan x$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ [ঢা: বো: ০৫]
(ii) যদি $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(\cos\theta) = \tan^2\frac{\theta}{2}$ [কু: বো: ০৭; ব: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১০]
(iii) যদি $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $\varphi(y) + \varphi(z) = \varphi\left(\frac{y + z}{1 + yz}\right)$ [ঢা: বো: ০৪; কু: বো: ১১; চ: বো: ১০]
(iv) যদি $f(x) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) = 2f(x)$ [কুয়েট ০৪-০৫; কু: বো: ১৬; য: বো: ১১]

21. (i) $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$ হলে দেখাও যে, $\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$ [ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১৫]
(ii) যদি $f(x) = x^2 + ax + b$ এবং $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ হয়, তাহলে $f(3)$-এর মান নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৪]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$ হলে, $n(A \times B)$ কত?

ক. 4 খ. 5 গ. 6 ঘ. 9

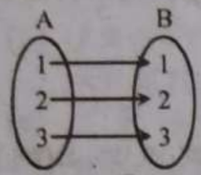
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & , x \geq 0 \\ x + 2 & , x < 0 \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f(-2) = ?$

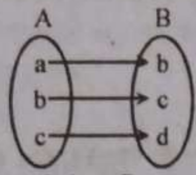
ক. −1 খ. 0 গ. 4 ঘ. 10

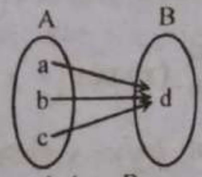
3. নিচের কোন ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক?

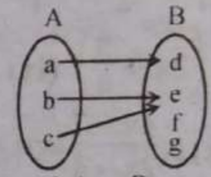
ক. $f(x) = x^2$ খ. $f(x) = |x|$ গ. $f(x) = \sin x$ ঘ. $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$

4. নিচের কোনটি অভেদ ফাংশন প্রকাশ করে?

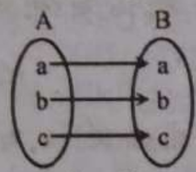
ক. 
$f: A \to B$

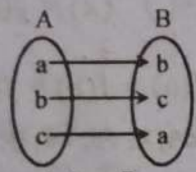
খ. 
$f: A \to B$

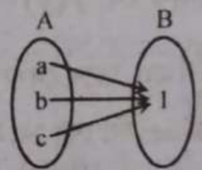
গ. 
$f: A \to B$

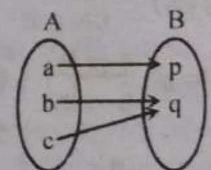
ঘ. 
$f: A \to B$

5. নিচের কোনটি ধ্রুবক ফাংশন?

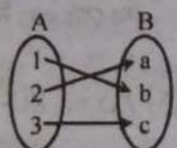
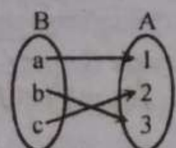
ক. 
$f: A \to B$

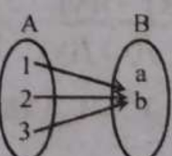
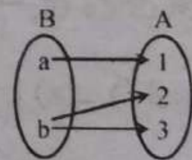
খ. 
$f: A \to B$

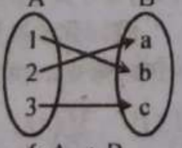
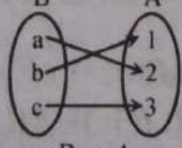
গ. 
$f: A \to B$

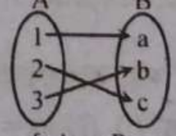
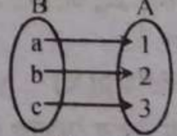
ঘ. 
$f: A \to B$

6. $f : A \to B$ এর বিপরীত ফাংশন $g : B \to A$ হলে নিম্নের কোনটি সঠিক?

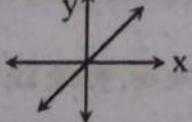
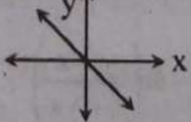
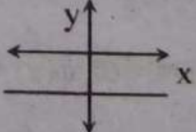
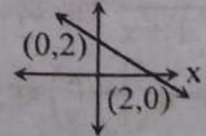
ক. 
$f: A \to B$ 
$g: B \to A$

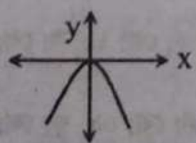
খ. 
$f: A \to B$ 
$g: B \to A$

গ. 
$f: A \to B$ 
$g: B \to A$

ঘ. 
$f: A \to B$ 
$g: B \to A$

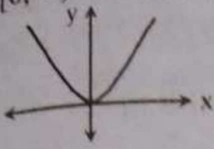
7. $y = -x$ এর লেখচিত্র কোনটি?

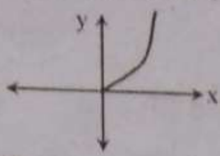
ক. 
খ. 
গ. 
ঘ. 

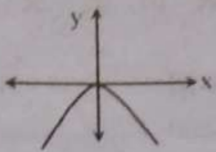
8.  লেখচিত্রটির সমীকরণ কোনটি?

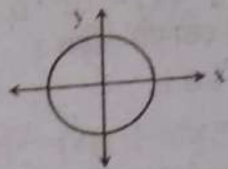
ক. $y = x^2$ খ. $y = x^2 - 3$ গ. $y = -x^2$ ঘ. $y = \sqrt{x}$

9. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ ফাংশনের লেখচিত্র কোনটি?

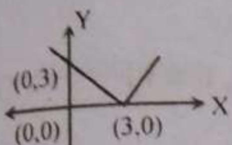
ক. 

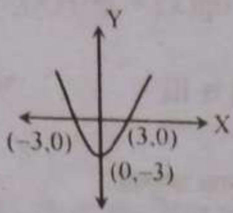
খ. 

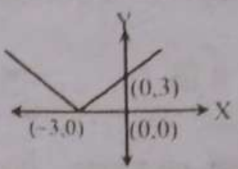
গ. 

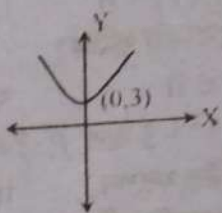
ঘ. 

10. $y=|x-3|$ এর লেখচিত্র কোনটি?

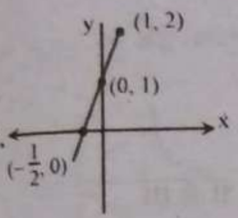
ক. 

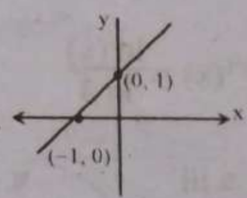
খ. 

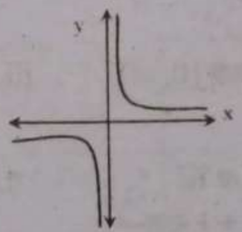
গ. 

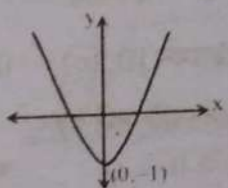
ঘ. 

11. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনের লেখচিত্র কোনটি?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

12. $y=\dfrac{3x+1}{2x+5}$ এর ডোমেন কত?

ক. $\mathbb{R}$ খ. $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$ গ. $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ ঘ. $\mathbb{R}-\{0\}$

13. $y=\dfrac{x-3}{3x+1}$ এর রেঞ্জ কত?

ক. $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ খ. $\mathbb{R}$ গ. $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ ঘ. $\mathbb{R}-\{3\}$

14. $f(x)=3x-6$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন কোনটি?

ক. $6x-3$ খ. $\dfrac{x+6}{3}$ গ. $3x+6$ ঘ. $\dfrac{1}{3x-6}$

15. যদি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x)=x^2+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, তবে $f^{-1}(0)=$ কত?

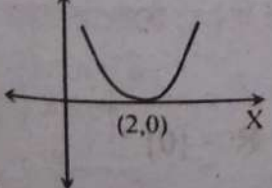
ক. $\{i,-i\}$ খ. $\mathbb{R}$ গ. $\{\ \}$ ঘ. অসংজ্ঞায়িত

16. $f(x)=\sqrt{x-1}$ হলে $f^{-1}(2)=$ কত?

ক. -1 খ. 1 গ. 3 ঘ. 5

17. $y=e^{\frac{1}{x}}$ ফাংশনের ডোমেন নিচের কোনটি?

ক. $[0,\infty)$ খ. $\mathbb{R}$ গ. $\mathbb{R}-\{0\}$ ঘ. $[1,\infty)$

18. 

উপরের লেখচিত্রের ফাংশন কোনটি?

ক. $y=x^2$ খ. $y=(x-2)^2$ গ. $y=(x+2)^2$ ঘ. $y=x^2+2$

19. $f(x) = \log x$ হলে—

i. $f^{-1}(x) = 10^x$ ii. $D_f = \mathbb{R}$ iii. $R_f = \mathbb{R}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

20. $f(x) = x^2 - 1, g(x) = \sqrt{x}$ হলে—

i. $gof(1) = 0$ ii. $fog(1) = 0$ iii. $fog(x) = gof(x)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

21. $f(x) = x^3 + 5$ হলে, $f(x)$ একটি —

i. সার্বিক ফাংশন ii. এক-এক ফাংশন iii. ধ্রুবক ফাংশন

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. $f(x) = 3^x$ ফাংশনটির —

i. ডোমেন $[0, \infty)$ ii. রেঞ্জ $(0, \infty)$ iii. $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln (x)}{\ln 3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

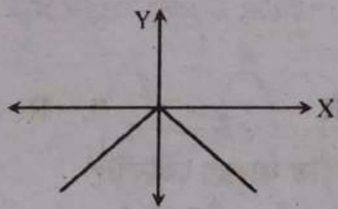
23. $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = x^2 + 1$ হলে—

i. $f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন ii. $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন iii. $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. চিত্রের –



i. ফাংশনটি $y = -|x|$

ii. ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R}$

iii. ফাংশনটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. $y = e^x$ হলে—

i. $y = e^{x+2}$ এর লেখচিত্র $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে যাবে ii. $y = e^x - 2$ এর রেঞ্জ হবে $(-2, \infty)$

iii. $y = e^x + 2$ এর লেখচিত্র $(0, 3)$ বিন্দু দিয়ে যাবে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (26 ও 27) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$f(x) = 3x^3 + 3, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}$$

26. $g(x)$ এর ডোমেন কত?

ক. $\mathbb{R}$ খ. $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ গ. $\mathbb{R} - \{2\}$ ঘ. $\mathbb{R} - \{0\}$

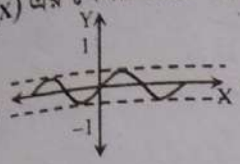
27. $fog(3) =$ কত?

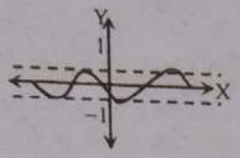
ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

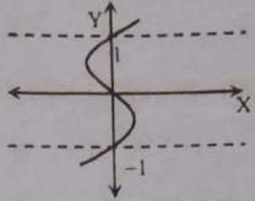
নিচের তথ্যের আলোকে (28 ও 29) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

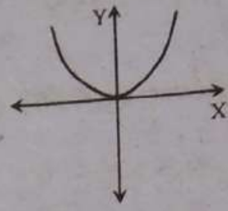
$f(x) = \sin x$ একটি পর্যায়বৃত্ত ফাংশন।

28. $f(x)$ এর লেখচিত্র কোনটি?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

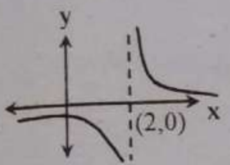
29. $f(x)$ এর পর্যায় কত?

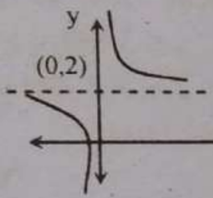
ক. 2π খ. π গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. $\frac{\pi}{4}$

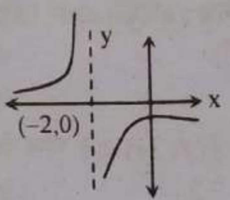
নিচের তথ্যের আলোকে (30 ও 31) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

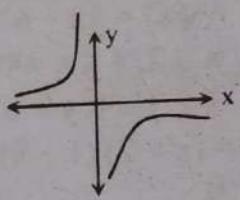
$f(x) = \frac{1}{x}$ একটি ফাংশন।

30. $y = f(x-2)$ এর লেখচিত্র কোনটি?

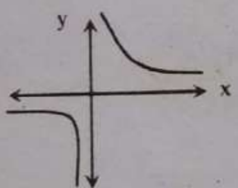
ক. 

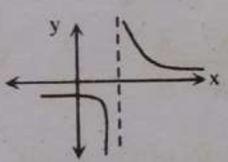
খ. 

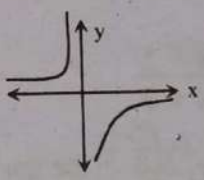
গ. 

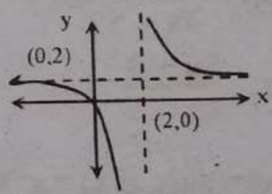
ঘ. 

31. $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র কোনটি?

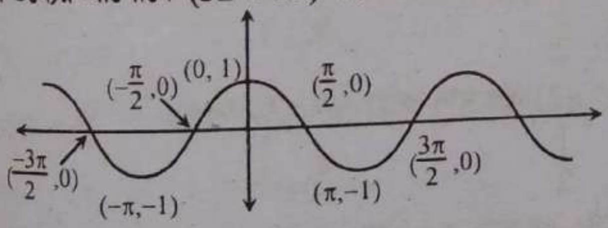
ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

নিচের তথ্যের আলোকে (32 ও 33) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



32. উপরের লেখচিত্রটির সমীকরণ কোনটি?

ক. $y = \sin x$ খ. $y = -\sin x$ গ. $y = \cos x$ ঘ. $y = -\cos x$

33. ফাংশনটি একটি পর্যায়ক্রমিক ফাংশন হলে, পর্যায় কোনটি ?

ক. π খ. 2π গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. $\frac{3\pi}{2}$

নিচের তথ্যের আলোকে (34 ও 35) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x^3 - 3) = x - 2$

34. $f(x) =$ কত?

ক. $\sqrt[3]{x-2}$ খ. $x^3 + x - 5$ গ. $\sqrt[3]{x+3}$ ঘ. $\sqrt[3]{x+3} - 2$

35. $f(5) =$ কত?

ক. 0 খ. 6 গ. $2\sqrt{2} - 2$ ঘ. 1

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

36. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = e^{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(e)$ এর মান নিচের কোনটি? *[DU. 15–16]*

ক. 4 খ. 3 গ. 2 ঘ. 0

37. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নিচের কোনটি? *[DU. 15–16]*

ক. $-\infty < x \le 4; 0 \le y < \infty$ খ. $-\infty < x < 4; 0 < y < \infty$
গ. $-\infty < x < 4; 0 \le y < \infty$ ঘ. $-\infty < x \le 4; 0 < y < \infty$

38. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ বাস্তব ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নিচের কোনটি? *[DU. 14–15]*

ক. $x < -2, y > \dfrac{1}{2}$ খ. $-2 < x < 2, y \ge \dfrac{1}{2}$
গ. $-2 \le x \le 2, y < \dfrac{1}{2}$ ঘ. $-x < -2 \,\&\, x > 2, -2 < y < 2$

39. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে– *[DU. 13-14]*

ক. $x \le 2, 3 \le x$ এবং $y \ge 0$ খ. $2 \le x \le 3$ এবং $y \ge 0$
গ. $x \ge 3$ এবং $y > 0$ ঘ. $x \le 2, x \ge 3$ এবং $y > 0$

40. $f(x) = (x-2)(1-x)$ হলে, $f(f(3))$ এর মান কত? *[DU. 13-14]*

ক. 9 খ. −12 গ. 12 ঘ. 8

41. $f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f^{-1}(x)$ কোনটি? *[DU. 10-11]*

ক. $\dfrac{5x+3}{4x-5}$ খ. $\dfrac{4x-5}{5x+3}$ গ. $\dfrac{5x-3}{4x-5}$ ঘ. $\dfrac{5x+3}{4x+5}$

42. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$ হলে $f\left(g\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)$ এর মান কত? *[DU.16-17, 09-10]*

ক. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ খ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ গ. $\dfrac{1}{2}$ ঘ. 1

43. যদি $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = 2x$ হয় তবে $(fog^{-1})(2)$ এর মান কত? *[BUET 13-14]*

ক. 2 খ. 3 গ. $\dfrac{1}{2}$ ঘ. 1

44. $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হলে $(fog)(2)$ এর মান কত হবে? *[BUET 12-13]*

ক. 0 খ. 5 গ. 15 ঘ. 25

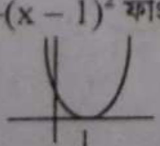
45. $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x > 3 \\ x^2 - 2, & -2 \le x \le 3 \\ 2x+3, & x < -2 \end{cases}$ হলে $f(x)$ এর y অক্ষের খণ্ডিতাংশ হবে– *[BUET 11-12]*

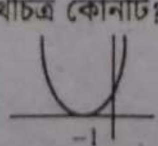
ক. −2 খ. 3 গ. −1 ঘ. 0

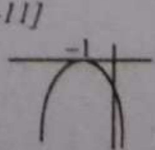
46. $f(x) = \sqrt{x-2}$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হলে fog এর ডোমেন হবে– *[BUET. 10-11]*

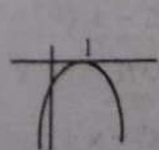
ক. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ খ. $[-1, 1]$ গ. $(-\infty, \infty)$ ঘ. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

47. $y = -(x-1)^2$ ফাংশনটির লেখচিত্র কোনটি? *[BUET 10-11]*

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

48. $f(x) = 3x^3 + 2$ এবং $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}$ হলে $(f o g)(5)$ এর মান কত হবে? *[BUET 08-09]*

ক. 1 খ. 5 গ. $\frac{1}{5}$ ঘ. –5

49. $\phi(z) = y \sin z + v$ এবং $\psi(w) = \sin^{-1}(yw^2 + y^2)^{-1}$ হলে, $\phi(\psi(u^2))$ এর মান কোনটি? *[KUET. 12-13]*

ক. $(u^4 + y)^{-1} + v$ খ. $y \sin^{-1}(u^2 + y) + v$ গ. $(u^4 + y)^{-2} + v$ ঘ. $(u^2 + y)^{-1} + v$

50. $\phi(x) = \log_e(\cos x)$ হলে $e^{2\phi(x)}$ এর মান কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ খ. $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ গ. $\frac{1}{3}(5 - \cos 2x)$ ঘ. $\frac{1}{3}(5 + \cos 2x)$

51. $f(x) = \ln e^{-\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$ হলে $f(2)$ এর মান কোনটি? *[KUET. 09-10]*

ক. $-\frac{\pi}{3}$ খ. $-\frac{\pi}{6}$ গ. $\frac{\pi}{3}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}$

52. $A = \mathbb{R} - \{3\}, B = \mathbb{R} - \{1\}, f : A \to B$ এবং $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ হলে $f\left(\frac{3}{2}\right) + f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ এর মান কোনটি? *[CUET. 11-12]*

ক. $\frac{2}{3}$ খ. $\frac{3}{2}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

53. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 2 \\ x + 2, & x < 2 \end{cases}$ হলে, $f(2) + f(-2)$ এর মান কোনটি? *[CUET. 10-11]*

ক. –2 খ. –1 গ. 0 ঘ. 1

54. $f(x) = 2^x$ হলে, $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} =$ কত? *[KU. 14-15]*

ক. $f(0)$ খ. $f(2)$ গ. $f(4)$ ঘ. $f(16)$

55. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনের বিস্তার কত $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$? [RU 16-17; CU 16-17, 04-05]

ক. $[-1, 1]$ খ. $\{-1, 1\}$ গ. $[0,)$ ঘ. $(0, 1]$

56. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ফাংশনটির ডোমেন কোনটি? [RU 16-17; IU 15-16; JU 14-15; RU 15-16; SUST 11-12; BRUR 16-17]

ক. $-4 \leq x \leq 0$ খ. $-2 \leq x \leq 0$ গ. $-2 \leq x \leq 2$ ঘ. $0 \leq x \leq 2$

57. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ হলে $f(x+1)$ এর ডোমেন হবে— [SUST. 16-17]

ক. $\mathbb{R} - \{2\}$ খ. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ গ. $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ ঘ. $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

58. $f(x) = \log_{x+1}(2x + 1)$ হলে $f(x)$ এর ডোমেন কোনটি? *[SUST. 16-17]*

ক. $(-1/2, 0) \cup (0, \infty)$ খ. $x > -1$

গ. $x \leq -1/2$ ঘ. $(0, \infty)$

59. $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [BUTEX 16-17]

ক. $\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{1}{5}$ খ. $\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{1}{5}$ গ. $\frac{1}{13}x^2 - x + \frac{1}{13}$ ঘ. $\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{1}{5}$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. 7 মিটার দীর্ঘ একটি তারকে x-সেকেন্ড উত্তপ্ত করায় তারটির তাপমাত্রা 4°C থেকে পরিবর্তিত হয়ে (2x)°C এবং দৈর্ঘ্য 7 মিটার থেকে পরিবর্তিত হয়ে (4x) মিটার হলো। তারটির দৈর্ঘ্য প্রসারণ সহগ $y = f(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায় যা দৈর্ঘ্য পরিবর্তন এবং তাপমাত্রা পরিবর্তনের একটি অনুপাত। উল্লেখ্য সময় (x) কখনো ঋণাত্মক হবে না।
   ক. $p(x) = 2x - 7$ এবং $q(x) = x^2 + 5$ হলে, $q(p(3))$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় করে দেখাও যে ফাংশনটি এক-এক।
   গ. $fog(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$ হলে $g(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

2. $f(x) = x^2 - 17,\ g(x) = \sqrt{x+8},\ p(x) = \dfrac{f^{-1}(x)}{g(x)}$
   ক. $\sqrt{f(x)}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
   খ. x এর কোন মানগুলোর জন্য $gof(x) \neq -fog(x)$ হবে?
   গ. $p(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

3. $f(x) = \sqrt{x-16},\ g(x) = x^2 + 7,\ fop(x) = \sqrt{\dfrac{61-31x}{2x-4}}$
   ক. $f(x) = \begin{cases} \lambda x + 6\ ;\ x \leq -2 \\ \lambda x - 6\ ;\ x > 2 \end{cases}$ এবং $f(3) = 0$ হলে λ এর মান কত?
   খ. $fog(x)$ এর ডোমেন ও $gof(9)$ নির্ণয় কর।
   গ. দেখাও যে, $p(x)$ ফাংশনটি এক-এক। very imp.

4. $f : x \rightarrow 2x - 3;\ g : x \rightarrow \dfrac{1}{x+5},\ x \neq -5$
   ক. $g(g(x))$ নির্ণয় কর।
   খ. $f(g(x))$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।
   গ. $f^{-1}(x) = g^{-1}(2)$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

5. $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x},\ f(x) = \ln(x).$
   ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, $\dfrac{g(x) - g(y)}{1 + g(x)\, g(y)} = \dfrac{x-y}{1+xy}$
   গ. প্রমাণ কর যে, $fog\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\, fog(x).$

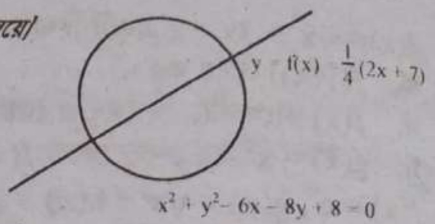
6. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-d}$
   ক. দেখাও যে, ফাংশনটি এক-এক।
   খ. $a = 1, b = -3, c = 3$ ও $d = -1$ হলে $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।
   গ. $a = d$ হলে দেখাও যে, $f^{-1}(x) = f(x).$

7. $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ একটি দ্বিঘাত ফাংশন।
   ক. $f(f(x))$ নির্ণয় কর।
   খ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।
   গ. $g(x) = x^2$ এর স্কেচ থেকে $f(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।
8. $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ ও $h(x) = 25 - x^2$ তিনটি ফাংশন।
   ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
   খ. $[0, 5]$ ব্যবধির মধ্যে goh ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক কিনা যাচাই কর।
   গ. $f(x)$ ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ অংকন করে তাদের প্রকৃতি কেমন তা মন্তব্য কর।
9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 + 2x$ [অধ্যায় ১ ও ৮ এর সমন্বয়ে]
   ক. $\text{Det}(A)$ নির্ণয় কর।
   খ. $f(A) + 5I_3$ নির্ণয় কর।
   গ. $f: \{-3, -2, 1, 2\} \to \mathbb{N}$ হলে রেঞ্জ f এর উপাদানগুলিকে ব্যবহার করে চার অংক বিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে?
10. $f(x) = x^2 + 9$ একটি ফাংশন এবং $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ও $B = [1\ \ 2\ \ 0]$ দুটি ম্যাট্রিক্স। [অধ্যায় ১ ও ৮ এর সমন্বয়ে]
   ক. $\begin{bmatrix} x+3 & 3 \\ 2 & x+2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যাতিক্রমী হলে x এর মান নির্ণয় কর।
   খ. $P(x) = \sqrt{f(x)}$ হলে, $P^{-1}[3, \sqrt{10}]$ এর মান নির্ণয় কর। Very imp
   গ. $f(AB + I)$ নির্ণয় কর।
11. $\mathbf{a} = 3\hat{i} + m\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 10\hat{k}$ [অধ্যায় ২ ও ৮ এর সমন্বয়ে]
   ক. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।
   খ. m এর মান কত হলে, **a** এবং **b** পরস্পর সমান্তরাল হবে।
   গ. $m = -2$ হলে $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ বরাবর **b** এর উপাংশ নির্ণয় কর।
12. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{4x + 7}$ ও $g(x) = 2x - 9$ [অধ্যায় ২ ও ৮ এর সমন্বয়ে]
   ক. $f(x)$ ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর।
   খ. $fop(x) = g(x)$ হলে $gop(4)$ নির্ণয় কর।
   গ. $\mathbf{R} = g(4)\hat{i} - g(5)\hat{j} - g(3)\hat{k}$ ও $\mathbf{M} = -g(10)\hat{i} + g(0)\hat{j} + g\left(\frac{1}{2}\right)\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
13. দৃশ্যকল্প ১: $3x - 4y + 5 = 0$; দৃশ্যকল্প ২: $g(x) = b\dfrac{x - a}{b - a} + a\dfrac{x - b}{a - b}$ [অধ্যায় ৩ ও ৮ এর সমন্বয়ে]
   ক. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{7 - x}}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।
   খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $g(a) + g(b) = g(a + b)$
   গ. $(2, -1)$ বিন্দু হতে দৃশ্যকল্প ১ এ বর্ণিত রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
14. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4$ এবং $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3x + 5}{4}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত দুটি ফাংশন। [অধ্যায় ৩ ও ৮ এর সমন্বয়ে]
   ক. ফাংশন ও অন্বয়ের পার্থক্য দেখাও।
   খ. দেখাও যে, $f(x)$ ফাংশনটি এক এক এবং সার্বিক।
   গ. $g(x, y) = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $f(x)$ এর রেখার উপর লম্ব হলে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

15. ক. বৃত্তটি y অক্ষ হতে কী পরিমাণ অংশ কর্তন করে? *[অধ্যায় ৪ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

খ. মূলবিন্দুগামী এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উদ্দীপকের বৃত্ত ও ছেদকের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

গ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হলে অস্তিত্ব যাচাইপূর্বক $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।



16. $g(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$ একটি বিপরীত COTANGENT ফাংশন। *[অধ্যায় ৫ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

খ. স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে উদ্দীপকে উল্লিখিত ইংরেজি শব্দটির বর্ণগুলো দিয়ে কতটি শব্দ গঠন করা যাবে?

গ. দেখাও যে, $g(0) + 2g(1) + g(2) = \frac{\pi}{2}$

17. $f(x) = 6x + 13$, $g(x) = 9 - 14x$ এবং $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. *[অধ্যায় ৫ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. COMPUTER শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যেন 'COM' অংশটি একত্রে থাকে?

খ. $p(x) = \frac{36x^2 - 169}{f(x)}$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $r(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

18. $h: \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{7}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{7}\right\}$ এবং $h(x) = \frac{4x + 3}{7x + 2}$ ফাংশনটির লেখচিত্র একটি HYPERBOLA. *[অধ্যায় ৫ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. $\cos\{h(-1) . \theta\}$ এর পর্যায় নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $h(x)$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।

গ. প্রমাণ কর যে, উদ্দীপকের ইংরেজি শব্দটির স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে বিন্যাস সংখ্যা, স্বরবর্ণগুলির অবস্থান পরিবর্তন না করে বিন্যাস সংখ্যার 462 গুণ।

19. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $g(x) = 2x + 1$ এবং $h(x) = e^{-x+3}$ *[অধ্যায় ৫ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. 10টি বস্তুর একবারে 5টি নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে?

খ. $h(g(x))$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

গ. $h(x)$ এর লেখচিত্র অংকনের মাধ্যমে দেখাও $h(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R}$।

20. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ এবং $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ দুইটি FUNCTION. *[অধ্যায় ৫ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. $g(-3)$ নির্ণয় কর।

খ. $g(x)$ এর বিপরীতযোগ্যতা যাচাইপূর্বক $fog^{-1}(3)$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. ইংরেজি হরফে লেখা শব্দটির বর্ণগুলো থেকে 3টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি ভিন্ন শব্দ তৈরি করা যায়?

21. $f(x) = 36 - x^2$ ও $g(x) = x - 6$ ফাংশন দুইটি $A = (-1, 9) \subset \mathbb{Z}$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত করা হলো। *[অধ্যায় ১, ২ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. $g(0)\hat{i} + g(3)\hat{j} + g(8)\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণসমূহ উৎপন্ন করে তাদের সাইনের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. $f(A)$ এর উপাদানগুলো ঊর্ধ্বক্রমে সারি বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

22. $P(x) = (x - 2)(8 - x)$ *[অধ্যায় ১, ৩ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. $11x - 4y + 13 = 0$ ও $11x - 4y + 18 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

খ. $P(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

গ. $A = \begin{bmatrix} P(1) & P(2) & P(3) \\ P(4) & P(4) & P(5) \\ P(2) & P(7) & P(8) \end{bmatrix}$ হলে $A^3 + 2A^2$ এর মান নির্ণয় কর।

23. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

ক. ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ হলে r-এর মান নির্ণয় কর। *[অধ্যায় ১, ৫ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

খ. $\begin{bmatrix} g(-2) & f(1) & f(4) \\ g(\sqrt{3}) & g(\sqrt{5}) & f(9) \\ g(1) & f(16) & g(-3) \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

গ. fog(x) সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন ও gof(x) এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

24. $f(x) = \sqrt{x + 13}$ এবং $g(x) = x^2 - 17$ দুটি ফাংশন। *[অধ্যায় ২, ৪ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. $x^2 - y^2 = p^2$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর।

খ. $p(x) = \dfrac{\{f(x)\}^2}{gof(x)}$ হলে, p(x) এক-এক কিনা যাচাই কর।

গ. $g(4)\hat{i} + f(23)\hat{j} + f(3)\hat{k}$ ও $f(12)\hat{i} + m\hat{j} - \{g(6) + 1\}\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে m এর মান নির্ণয় কর।

25. একটি বাস আজমপুর থেকে আব্দুল্লাহপুর সড়কে $y = 4x + 1$ সরলরেখা বরাবর চলছে। কিন্তু বাসটি হঠাৎ হাউসবিল্ডিং সিগন্যালে ইউটার্ন নিলো। একজন গণিতবিদ ইউটার্নটি খেয়াল করলো এবং মন্তব্য করলো বাসটির ইউটার্ন একটি দ্বিঘাত সমীকরণ অনুসরণ করেছে যার গাণিতিক রূপ, $y = p(x) = x^2 - 3x + 7$ *[অধ্যায় ৩, ৪ ও ৮ এর সমন্বয়ে]*

ক. ইউটার্নটির রেঞ্জ নির্ণয় করো।

খ. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র প্রদত্ত সড়কের ওপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি মূলবিন্দু এবং $(2, p(2))$ বিন্দু দিয়ে যায়।

গ. উদ্দীপকের সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং প্রদত্ত সড়কের ওপর অঙ্কিত লম্ব রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

26. $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x - 3$ এবং $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. *[রা. বো. ১৭]*

ক. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর: $x + 3y + 2 = 0, 2x + y + 3 = 0$

খ. $f(A) + I$ নির্ণয় কর।

গ. $gof(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^t$, $f(x) = x^2 - 4x$. *[চ. বো. ১৭]*

ক. $g(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$ ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. $f(B)$ নির্ণয় কর।

গ. B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

28. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = (x + 5)^n$ এবং $f(x) = x^2 - 6$.

দৃশ্যকল্প-২: রহিম স্যার ছাত্র-ছাত্রীদেরকে "TESTICLE" শব্দটি নিয়ে আলোচনা করলেন। *[সি. বো. ১৭]*

ক. $y = |x - 3|$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে $n = \frac{1}{2}$ হলে gof এর ডোমেন নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত শব্দটিকে কত প্রকারে সাজানো যাবে যাতে প্রথমে ও শেষে E থাকবে না।

29. SYLHET থেকে BANDARBAN এ 10 জন শিক্ষার্থীর একটি দল শিক্ষাসফরে আসল। তাদেরকে দুটি গাড়ীতে ভ্রমণ করতে হবে, যার একটিতে 7 জনের বেশি ও অন্যটিতে 4 জনের বেশি শিক্ষার্থী ধরে না। /ব. বো. ১৭/

ক. $f(x) = 2x - 5$ এবং $g(x) = x^2 + 6$ হলে, $(gof)(2)$ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, ১ম স্থানটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যা ২য় স্থানটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ।

গ. দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

30. দৃশ্যকল্প-১: MUJIBNAGAR

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \dfrac{2x+7}{3x-2}$; $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ /ব. বো. ১৭/

ক. ${}^nC_3 = \dfrac{4}{5} \times {}^nC_2$ হলে n এর এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যাতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে না থাকে।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখা যে, $f^{-1}(x) = f(x)$.

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

উত্তরমালা

1. **(i)** F ফাংশন, G ফাংশন নয়, H ফাংশন নয় এবং K ফাংশন। **(ii)** f_1 ও f_3 ফাংশন কিন্তু f_2 ফাংশন নয়।

2. **(i)** $f(1) = 1, f(2) = 7, f(3) = 17$ এবং $f(4) = 31$

(ii) $f(0) = 2, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(x^2) = 3x^2 + 2, f(2x) = 6x + 2$ এবং $f(x-1) = 3x - 1$

(iii) $f(0) = 2, f(-1) = 1, f(2) = -2, f(4) = 4, f(-4) = -2, f(5) = 10,$
$f(-2) = 0, f(-3) = -1, f(3) = 0$

(iv) $f(0) = 1, f(1) = 3, f(-1) = 3, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, f(-2) = 5, f(-3) = 7, f(2) = 5$ এবং $f(3) = 7$

(v) $f(2) = 2, f(4) = 11, f(-1)$ সংজ্ঞায়িত নয় এবং $f(-3) = -3$

3. **(i)** ডোমেন $= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1, 3, 7, 13\}$; **(ii)** রেঞ্জ $= \{1, 2, 5, 26\}$

(iii) রেঞ্জ $= \{2, 4, 6\}$; **(iv)** ডোমেন $= \{2, 4, 6\}$ এবং রেঞ্জ $= \{15, 63, 143\}$

(v) ডোমেন $= \{-1, 0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1, 2, 3\}$; **(vi)** ডোমেন $= [0, 2]$ এবং রেঞ্জ $= [1, 3]$

(vii) ডোমেন = A, রেঞ্জ $= \{2, 3, 4, 5\}$; সার্বিক নয়।

4. **(i)** ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

(ii) ডামেন $= \mathbb{R} - \{5\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{0\}$

(iii) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$

(iv) ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= [1, \infty)$

(v) ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= (-\infty, 1]$

(vi) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{2\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{4\}$

(vii) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{2\sqrt{2}\}$

(viii) ডোমেন $= \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

(ix) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{2\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{1\}$

(x) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{1\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{1\}$

(xi) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{-4\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1\}$

(xii) ডোমেন $= [1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \infty)$

(xiii) ডোমেন $= [-3, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (-\infty, 0]$

(xiv) ডোমেন $= (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \infty)$

(xv) ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

(xvi) ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= [-1, 1]$

(xvii) ডোমেন $= [-2, 2]$ এবং রেঞ্জ $= [0, 2]$

(xviii) ডোমেন $= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং রেঞ্জ $= \{-1, 1\}$

5. **(d)** এক-এক এবং সার্বিক। **(e)** এক-এক এবং সার্বিক।

6. **(a)** **(i)** $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$, **(ii)** $f^{-1}(16) = \{-4, 4\}$, **(iii)** $f^{-1}(-16) = \{\}$, **(iv)** $f^{-1}(36) = \{-6, 6\}$

(v) $f^{-1}(25) = \{-5, 5\}$, **(vi)** $f^{-1}[4, 25] = 2 \le x \le 5$ অথবা $-5 \le x \le -2$ **(vii)** $f^{-1}(-4) = \{\ \}$

(viii) $f^{-1}[-1, 1] = -1 \le x \le 1$

(b) $f^{-1}(2) = \{-3, 3\}$ (c) (i) $f^{-1}(-5) = \varnothing$, (ii) $f^{-1}(0) = \varnothing$, (iii) $f^{-1}(2) = \{-1, 1\}$,
(iv) $f^{-1}(5) = \{-2, 2\}$, (v) $f^{-1}(10) = \{-3, 3\}$, (vi) $f^{-1}([10, 26]) = \{x : -5 \le x \le -3$ অথবা $3 \le x \le 5\}$
(d) f এক-এক এবং সার্বিক $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$ (e) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$ (f) $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{4x-2}$ (g) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

7. (a) 7, 15 এবং 57 (b) $x^2 + 1, (x+1)^2$ (c) $3x^2 + 6x - 13, 9x^2 - 18x + 5, 11, 5, 140, 92, 32$ এবং 32
(d) (i) 15, (ii) 65, (iii) 624, (iv) 10, (e) 4225
(f) $(fog)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, ডোমেন $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; রেঞ্জ $= [0, \infty)$ এবং $(gof)(x) = x - 1$, ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$ (g) $gof = x^2 + 2x + 3$ এবং $fog = x^2 + 3$.

16. (i) 8π (ii) $\dfrac{4}{3}\pi$ (iii) 8π (iv) 4π (v) $\dfrac{2\pi}{3}$ (vi) 6π (vii) 6π (viii) π (ix) 16π (x) 2π **21.** (ii) 5

বহুনির্বাচনি

1. গ; **2.** খ; **3.** ঘ; **4.** ক; **5.** গ; **6.** গ; **7.** খ; **8.** গ; **9.** খ; **10.** ক; **11.** খ; **12.** খ; **13.** গ; **14.** খ; **15.** গ; 16. ঘ; **17.** গ; **18.** খ; **19.** খ; **20.** ক; **21.** ক; **22.** গ; **23.** ঘ; **24.** ঘ; **25.** গ; **26.** ক; **27.** ঘ; **28.** ক; **29.** ক; 30. ক; **31.** ক; **32.** গ; **33.** খ; **34.** ঘ; **35.** ক; **36.** ক; **37.** খ; **38.** খ; **39.** ক; **40.** খ; **41.** ক; **42.** ক; **43.** ক; 44. গ; **45.** ক; **46.** ক; **47.** ঘ; **48.** খ; **49.** ক; **50.** খ; **51.** ক; **52.** গ; **53.** ক; **54.** গ; **55.** খ; **56.** গ; **57.** খ; 58. ক; **59.** ক;

সৃজনশীল

1. ক. 6; খ. $\mathbb{R}^+ - \{2\}$; গ. $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$;

2. ক. $\{x \in \mathbb{R} : x \le -\sqrt{17}$ অথবা $x \ge \sqrt{17}\}$; খ. $\{x \in \mathbb{R} : x \le -3$ অথবা $x \ge 3, x \ne 5\}$;
গ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$;

3. ক. 2; খ. $\{x \in \mathbb{R} : x \ge 3$ অথবা $x \le -3\}$; 0;

4. ক. $\dfrac{x+5}{5x+26}$, খ. $D_{fog} = \mathbb{R} - \{-5\}$; $R_{fog} = \mathbb{R} - \{-3\}$; গ. -12;

5. ক. ডোমেন, $D_f = (0, \infty)$;

6. খ. ডোম, $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$; রেঞ্জ, $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$; **7.** ক. $-x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 3x + 4$; খ. $(-\infty, \infty)$; $(-\infty, \dfrac{17}{4}]$

8. ক. ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$; **9.** ক. 159; খ. $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 40 \\ 32 & 26 & -20 \\ 12 & 48 & 98 \end{bmatrix}$; গ. 8

10. ক. 0, -5; খ. $[-1, 1]$; গ. $\begin{bmatrix} 75 & 130 & 0 \\ 39 & 88 & 0 \\ 26 & 52 & 10 \end{bmatrix}$

11. ক. ডোমেন, $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$; রেঞ্জ, $R_f = \mathbb{R} - \{-7\}$; খ. $\dfrac{9}{5}$; গ. $\dfrac{13}{9}(2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

12. ক. $R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$; খ. $\dfrac{-67}{7}$; গ. $\cos^{-1}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{2926}}\right)$ **13.** ক. $D_f = (-\infty, 7)$; গ. $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$;

14. গ. $4x + 3y + 5 = 0$, $4x + 3y - 25 = 0$ **15.** ক. $4\sqrt{2}$; খ. $7x^2 + 7y^2 - 58x - 24y = 0$; গ. $\dfrac{1}{2}(4x - 7)$

16. ক. ডোমেন, $D_f = [-3, \infty)$; খ. 83160; **17.** ক. 720; খ. রেঞ্জ $= \mathbb{R}$; **18.** ক. 10π

19. ক. 6720; খ. রেঞ্জ $= [0, \infty)$; **20.** ক. $\frac{1}{4}$; খ. $\frac{17}{4}$; গ. 228

21. ক. $\mathbb{R} - \{-12\}$; খ. 2; গ. $\begin{bmatrix} \frac{-25}{24} & \frac{13}{6} & \frac{-13}{8} \\ \frac{13}{6} & \frac{-14}{3} & \frac{7}{2} \\ \frac{-85}{72} & \frac{47}{18} & \frac{-139}{72} \end{bmatrix}$

22. ক. $\frac{5}{\sqrt{137}}$; খ. ডোমেন $= \mathbb{R}$; রেঞ্জ $= (-\infty, 9]$; গ. $\begin{bmatrix} -45 & 75 & 400 \\ 832 & 1650 & 1245 \\ 120 & 625 & 650 \end{bmatrix}$

23. ক. $r = n - 1$; খ. $\frac{1}{60}\begin{bmatrix} 20 & 0 & -5 \\ -16 & 24 & -5 \\ 8 & -12 & 10 \end{bmatrix}$; গ. ডোমেন $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

24. ক. $r^2 \cos 2\theta = p^2$; খ. $p(x)$ এক এক ফাংশন; গ. -30

25. ক. $\left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq \frac{19}{4} \right\}$; খ. $22x^2 + 22y^2 - 19x - 120y = 0$; গ. $5\sqrt{17}$

26. ক. $(x, y) = \left(\frac{-7}{5}, \frac{-1}{5}\right)$; খ. $\begin{bmatrix} 25 & 4 & -8 \\ 2 & 41 & 46 \\ -38 & 56 & 79 \end{bmatrix}$

27. ক. $\mathbb{R} - \{0\}$; খ. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$; গ. $\frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

28. খ. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; গ. 9720; **29.** ক. 7; গ. 330; **30.** খ. 1753920;

পাঠ–১৫, ১৬, ১৭ ও ১৮

ব্যবহারিক

8.8 অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয়।

8.9 নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয়।

দ্রষ্টব্য 8.8 ও 8.9 নং অনুচ্ছেদ সম্পর্কে তৃতীয় অধ্যায় এর— 3.22 ও 3.23 নং অনুচ্ছেদে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

8.10 ফাংশন এবং রূপান্তরিত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন (Plotting graph of functions and transformed functions)

পরীক্ষণ নং 8.10.1	**$y = f(x)$ ফাংশন ও এর রূপান্তরিত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন ও বৈশিষ্ট্য নির্ণয় এবং তাদের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়**	**তারিখ: … … …**

সমস্যা: $y = x^2$ এর লেখচিত্র থেকে $y = -(x-2)^2$ এর লেখচিত্র অঙ্কন ও বৈশিষ্ট্য নির্ণয় এবং তাদের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $y = x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। এর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ রেখা y-অক্ষ। $y = x^2$ ও $y = -(x-2)^2$ উভয় লেখের আকৃতি একই। $y = x^2$ এর লেখচিত্রকে নিজের সমান্তরালে 2 একক ডানদিকে সরালে $y = (x-2)^2$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে। $y = (x-2)^2$ এর লেখচিত্র x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত করলে $y = -(x-2)^2$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

উপকরণ: (i) পেন্সিল, (ii) স্কেল, (iii) ইরেজার, (iv) ছক কাগজ ও (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।