বিন্যাস

বিন্যাস

গণনার যোজন বিধি : পরস্পর স্বাধীন দুটি কাজ এর মধ্যে যদি প্রথমটি m সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং অপর একটি কাজ স্বতন্ত্রভাবে n সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় তবে ঐ দুটি কাজ m+n সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে।

গননার গুণন বিধি: পরস্পর নির্ভরশীল দুটি কাজ এর প্রথমটি সংখ্যক m উপায়ে সম্পন্ন করায় পর দ্বিতীয় কাজ n সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা হলে কাজ দুটি একত্রে $m \times n$ প্রকারে সম্পন্ন করা যাবে।

উদাহরণ: তুমি A থেকে B এ তিনটি রাস্তা দিয়ে আসতে পার আবার যাত্রার সময় একটি রাস্তা বন্ধ হয়ে যায়। তেমার বন্ধু A থেকে B এ 4 টি ভিন্ন ভিন্ন পথে আসতে পারে এবং যাওয়ার ক্ষেত্রে তার জন্য দু'টি পথ বন্ধ থাকে। তোমরা কতভাবে আসা যাওয়া করতে পার।

সমাধান: তোমার জন্য বিন্যাস সংখ্যা $= 3 \times 2$ (গুণন বিধি)

তোমার বন্ধুর জন্য বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 2$ (গুণন বিধি)

তোমরা আসা যাওয়া করতে পার স্বতন্ত্রভাবে

$\therefore$ এখানে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 3 \times 2 + 4 \times 2$ ভাবে (গণনার যোজন বিধি)

বিন্যাস: কতগুলো বর্ণ, সংখ্যা, বস্তু, মানুষ ইত্যাদি (ভিন্ন ভিন্ন) হতে নির্দিষ্ট সংখ্যক বর্ণ, সংখ্যা,বস্তু বা মানুষ নিয়ে ভিন্ন ভিন্ন ক্রমে সাজানো হলে প্রতিটি সাজানোকে এক একটি বিন্যাস বলে।

যেমন, 5 টি বিভিন্ন ভিন্ন রং এর কলম হতে 2 টি কলম কতভাবে সাজানো যাবে।

${}^5P_2 = \frac{5!}{3!} = 20$ টি

a, b, c, d, e

ab, ac, da, ac, bc, bd, be, cd, ce,de

ba, ca, da, ca, cb, db, eb, dc, ec, ed

ক্রম পরিবর্তন না করলে অর্থাৎ দলে থাকলে সমাবেশ সংখ্যা পাওয়া যাবে এখানে সমাবেশ সংখ্যা = 10

${}^5C_2 = 10$

${}^nC_r$ ও ${}^nP_r$ এর মধ্যে সম্পর্ক:

${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$\therefore {}^nP_r = r! \times {}^nC_r$

অনুরূপভাবে, 5টি হতে 3টি নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = ${}^5P_3 = \frac{5!}{2!} = 60$

এবং সমাবেশ সংখ্যা , ${}^5C_3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$ টি

abc, acd, adc, bcd, bce, bde, cde, cea, dea, ead = 10 টি সমাবেশ প্রত্যেক সংখ্যা abc আলাদা এর। নিজেদের মধ্যে $3!$ ভাবে বিন্যাস্ত হবে। ∴মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 10 \times 6 = 60\ Ans.$

Type-1: সবগুলো ভিন্ন ভিন্ন এরূপ জিনিসের বিন্যাস সংখ্যা, ${}^nP_r$

EXAMPLE-01: রবর্ণ পাঁচটিকে কতভাবে বিন্যাস করা যায়।

Solve: ${}^5P_5 = 5! = 120$ ভাবে।

EXAMPLE-02: একই রকমের (2,2,2,2,2) 5টি সংখ্যাকে কতভাবে এক লাইনে রাখা যাবে?

Ans: $\frac{5!}{5!} = 1$ ভাবে। কারণ 5টি একই রকমের জিনিসের বিন্যাস ক্রম পরিবর্তন করলে পরিবর্তিত হয়না।

Try your self: (i) 1,2,3,4,5,6,7,8,9 সংখ্যাগুলো থেকে 5 অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?

Ans: ${}^9P_5 = 15120$ টি।

(ii) প্রমাণ কর, ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ ।

(iii) প্রমাণ কর, $0! = 1$ ।

(iv) 0 কি কোণ বিন্যাস সংখ্যার অন্তর্ভূক্ত তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দেখাও।

(v) $(-1)! = \infty, (-2)! = -\infty$ এগুলো অর্থপূর্ণ কিনা তোমার উপরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

Type-2: সবগুলি ভিন্ন ভিন্ন নয় এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা

$\boldsymbol{x = \frac{n!}{p!q!r!}}$;যেখানে p সংখ্যাক এক জাতীয়, q সংখ্যক আর এক জাতীয়, r সংখ্যক ভিন্ন

EXAMPLE-01: ENGINEERING শব্দটির সবগুলোকে একত্রে নিয়ে কতভাবে বিন্যস্ত করা যায় ?

Solve: 11 বর্ণের মধ্যে 3টি E, 3টি N, 2টি I 2টি G 1টি R

∴ বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{11!}{3!3!2!2!} = 277200\ \ Ans.$

Try your self: 2,3,3,4,4,4,5,5,66,7,8,9 সংখ্যাগুলির সবকটি নিয়ে কতভাবে বিন্যস্ত করা যায়?

$Ans. \frac{14!}{2!3!2!2!}$

Type -3: শর্তাধীন বিন্যাস

EXAMPLE-01: Biography , শব্দটির নিম্নোক্ত শর্তে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর, স্বরবর্ণগুলোকে

i) পৃথক না রেখে (একত্রে রেখে)

ii) পৃথক রেখে (একত্রে না রেখে)

iii) পাশাপাশি না রেখে

iv) স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে

v) স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে

vi) স্বরবর্ণ ও ব্যাঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে ।

vii) প্রথমে B ও শেষে y না রেখে

viii) স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে দখল করলে।

ix) B ও y প্রথমে বা শেষে থাকবে না কিন্তু সব সময় বিজোড় স্থানে থাকবে।

সমাধান ঃ- $\left.\begin{matrix} B\ I\ O\ G\ R\ A\ P\ H\ Y \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \end{matrix}\right\}$ 9 টি বর্ণের সব ভিন্ন ভিন্ন, স্বরবর্ণ 3 টি (IOA), ব্যাঞ্জনবর্ন 6 টি

i) স্বরবর্নগুলোকে পৃথক করলে 3 টি স্বরবর্ণকে একটি অক্ষর বিবেচনা করতে হবে। এক্ষেত্রে মোট বর্ণ সংখ্যা হয় $9 - 3 + 1 = 7$ টি {B,G,R,P,H,Y, (IOA)}

এখন 7 টি বর্নের বিন্যাস সংখ্যা $= 7!$! যেখানে 3 টি ভিন্ন ভিন্ন স্বরবর্ণ নিজেদের মধ্যে $3!$ ভাবে বিন্যস্ত হতে পারে। মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 7! \times 3! = 30240$

ii) পৃথক রেখে তার অর্থ একত্রে না নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = মোট বিন্যাস সংখ্যা - একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = $9! - 7! \times 3! = 332640$

iii) পাশাপাশি না রেখে কথার অর্থ পরপর দু'টি ব্যঞ্জণবর্ণের মাঝে একটি করে স্বরবর্ণ বসলে। স্বরবর্ণগুলি কখনো পাশাপাশি থাকবে না।

1 2 3 4 5 6 7; 6 টি ব্যাঞ্জনবর্নের মাঝে 7 টি ফাঁকা জায়গায় 3 টি স্বরবর্ণকে মোট $7P_3$ ভাবে বসানো যায়। এবং ব্যঞ্জনবর্নগুলো নিজেদের মধ্যে $6!$ ভাবে বিন্যস্ত হয়।

মূলতত্ব হতে, মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 7P_3 \times 6! = 1\ 5\ 1\ 2\ 0\ 0$

(iv) ক্রম পরিবর্তন না করার অর্থ বর্ণগুলো যে ক্রমে আছে সেই ক্রমেই থাকবে। এক্ষেত্রে বর্ণগুলোকে একই বর্ণ হিসেবে মনে করতে হবে। যেমন- ক্রম পরিবর্তন $\left.\begin{matrix} A & A & A \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$

নির্নেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{9!}{3!} = 60480,$

(v) স্বরবর্ণগুলো যে স্থানে আছে সেই স্থানে থাকবে এবং তারা বিন্যস্ত হবে না। অবশিষ্ট ছয়টি বর্ণ নিজেদের মধ্যে $6!$ ভাবে বিন্যস্থ হবে। এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস $= 6! = 720$

(vi) আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন করবে না অর্থাৎ স্বরবর্ন স্বরবর্নের সাপেক্ষে ব্যাঞ্জনবর্ন ব্যাঞ্জনবর্নের সাপেক্ষে নিজেদের মধ্যে বিন্যস্থ হবে।

এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 3! \times 6! = 4320$ ভাবে।

(vii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ও $n\big(N/(A \cup B)\big) = n(N) - n(A \cup B)$ পরস্পর নিশ্চেদ সেট বলে। প্রথমে B কে নির্দিষ্ট করে বিন্যাস সংখ্যা $= 8!$, শেষে Y কে নির্দিষ্ট করে বিন্যাস সংখ্যা $= 8!$

প্রথমে B ও শেষে Y কে নির্দিষ্ট করে বিন্যাস সংখ্যা $= 7!$, $\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 9! - 8! - 8! + 7! = 287280$

$(Viii)$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ← স্থানগুলো

2 4 6 8 ← জোড়া স্থানগুলো

জোড় স্থানগুলোতে তিনটি স্বরবর্ণ বিন্যস্ত হতে পারে $4p_3$ ভাবে। এবং ব্যঞ্জনবর্ণগুলো নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হতে পারে $6!$ ভাবে।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা = $^4P_3 \times 6! = 17280$

(iX)1 2 3 4 5 6 7 8 9

3 5 এবং 7 অবস্থানে অর্থাৎ 3 টি স্থানে 2 টি বর্ণ বসতে পারে $^3P_2$ ভাবে। অবশিষ্ট 7 টি বর্ণ 7 টি স্থানে নিজেদের মধ্যে বিন্যস্থ হতে পারে $7!$ ভাবে। সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3P_2 \times 7! = 30240$

Type-4: পূনরাবৃত্তি সংশ্লিষ্ট বিন্যাস সংক্রান্ত সমস্যাবলীঃ

n সংখ্যক জিনিস হতে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যস্ত করতে হবে যখন একই বস্তু r বার পর্যন্ত পূনারাবৃত্তি হতে পারে। $x = n^r$

EXAMPLE-01: বাংলালিংকের কোড নং 019 বাংলালিংক মোট কতটি গ্রাহককে সংযোগ দিতে পারবে?

Solve: মোট ১০ টি সংখ্যা ৮ টি ফাঁকা স্থানের যেকোন একটি স্থানে 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9 এই সংখ্যা ১০ টি একটি একটি করে মোট ১০ ভাবে আসতে পারে। সংযোগ দেয়া যেতে পারে $= 10^8$ ভাবে।

<u>Try yourself</u> : (i) 5 টি আঙ্গুলে তিনটি আংটি কতভাবে পড়ানো যাবে? $Ans. 5^3$. সূত্র ঃ $(\text{অপশন})^{\text{কমপালসরি}}$

(ii) তিনটি ফুটবল খেলার ফলাফল কতভাবে হতে পারে? $Ans. 3^3$. সূত্র ঃ $(\text{অপশন})^{\text{কমপালসরি}}$

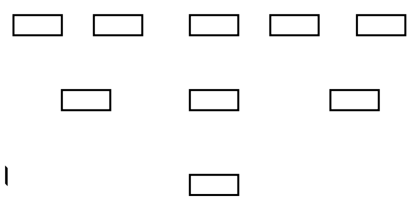
(iii) 4 টি ডাকবাক্সে 5 টি চিঠি কতভাবে ফেলা যেতে পারে? $Ans. 4^5$. সূত্র ঃ $(\text{অপশন})^{\text{কমপালসরি}}$

EXAMPLE-02: 1,2,3,4,5 অংকগুলো প্রত্যেকটিকে যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে তিন অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে? এদের কতগুলোতে দুই বা ততোধিক সমান অংক থাকবে?

Solve: একবার ব্যবহার করে 5 টি অংক হতে তিনটি অংক নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^5P_2$

∴ যে সব অংক দুই বা ততোধিক সমান অংক থাকবে তাদের বিন্যাস সংখ্যা $= 5^3 - {}^5P_2 = 65$ টি .

EXAMPLE-03: একটি প্রফেসর পদের জন্য 3 জন প্রার্থী 5 জন লোকের ভোটে নির্বাচিত হবে। কত প্রকারে ভোট দেয়া যেতে পারে।



Solve: 5 জন প্রার্থী 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে $3^5 = 243$ ভাবে।

এখানে উপরের বক্সগুলো ভোটার নিচের বক্সগুলো প্রার্থী শেষেরটা নির্বচিত প্রার্থী।

এক্ষেত্রে অপশন = 3 এবং কমপালসরি = 5

<u>**নিজে চেষ্টা কর**</u> : (1) একটি তালার 4 টি রিং এর প্রত্যেকটিতে 5 টি অক্ষর মুদ্রিত আছে। প্রতিটি রিং এর একটি করে 4টি অক্ষরের বিন্যাস তালাটি খোলা গেলে মোট কতগুলো বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না $Ans. 5^4 - 1$.
(২)তিনটি পুরষ্কারের একটি সদাচারের জন্য। একটি ক্রিয়ার জন্য এবং 1টি সাধারন উন্নতির জন্য । 10 জন বালকের মধ্যে এগুলি কতভাবে বিন্যস্ত করা যাবে? $Ans. 10^3$.

Type-5: চক্র বিন্যাস

(i) n সংখ্যক জিনিসের সবগুলো একত্রে নিয়ে চক্রবিন্যাস $(n-1)!$

(ii) চক্রটিকে উল্টানো গেলে অর্থাৎ দু'দিক থেকে দেখা গেলে বিন্যাস সংখ্যা হবে = $\frac{(n-1)!}{2}$

EXAMPLE-01: 5 জন পদার্থ বিজ্ঞানের ছাত্র, 5 জন গণিতের ছাত্র একটি গোলটেবিলে বসে কিছু প্রশ্ন করবে যাতে পদার্থ- গণিত-পদার্থ এরকম ক্রমে থাকে তারা কতভাবে বিন্যস্ত হতে পারে। এক্ষেত্রে একটি দল, দুটি দল তিনটি দল এবং সমসংখ্যক ছাত্রের দল হতে পারে।

সমাধান: পদার্থের একজন ছাত্রকে নির্দিষ্ট করে 5 জন গণিতের ছাত্র 5! ভাবে বসতে পারে

এবং ফাঁকা স্থানগুলোতে পদার্থের অবশিষ্ট 4 জন 4! ভাবে বসতে পারে।

∴মূলতত্ত্ব হতে, মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 5! \times 4! = 2880$

Try yourself: 1. 7 জন মেয়ে বৃত্তকারে দাড়িয়ে নাচবে তারা কতভাবে বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারে। $Ans.(7-1)!$

কিন্তু তোমার সাপেক্ষে তারা n! ভাবে দাঁড়াবে।

2. দুইজন মেয়েকে পাশাপাশি না রেখে 520 জন ছেলে ও 430 জন মেয়েকে কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর। Ans: ${}^{520}P_{430} \times 430!$

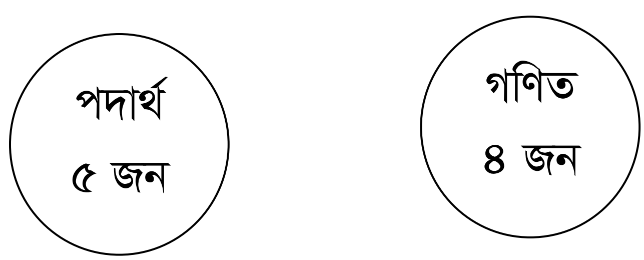
EXAMPLE-02: ৭ টি বিভিন্ন রং এর পুঁথি ব্যান্ডে লাগিয়ে তৈরি করতে হবে। তুমি কতভাবে পুথিগুলো ব্যান্ডে বসাতে পার।

সমাধান: একটা পুথিকে নির্দিষ্ট করে অন্যান্য পুথির বিন্যাস সংখ্যা $= (7-1)!$ যেহেতু মালাটিকে উল্টানো যায় সেজন্য বিন্যাস সংখ্যা হবে। $\frac{(7-1)!}{2}$

<u>ডাবল চক্র ক্রমিক বিন্যাস</u>: $(n-1)!\,P!$

যখন দলগুলো সমসংখ্যাক ছাত্রের নয়।

$(5-1)!$ 4!



এখানে স্বতন্ত্রভাবে ঘটনা হচ্ছে না। পদার্থের একজন ছাত্রের সাপেক্ষে দুটি টেবিলের বিন্যাস একত্রে ঘটছে। ∴ নির্ভরশীল ঘটনা। মূলতত্ত্ব দ্বারা, মোট বিন্যাস সংখ্যা $(5-1)!\,4!$

<u>ট্রিপল চক্র ক্রমিক বিন্যাস</u>: $(n-1)!\,p!\,q!$

Type-6:: সংখ্যার সমষ্টি, সংখ্যা গঠন

* প্রত্যেক অংককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $n(2 < n \leq 9)$ সংখ্যক অশূন্য ভিন্ন ভিন্ন অংক দ্বারা যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি $= (n-1)! \times$ (অংকগুলির সমষ্টি) $\times$ n সংখ্যক 1 দ্বারা গঠিত সংখ্যা।

EXAMPLE-01: 2,3,4,5,6,7, অংকগুলি দ্বারা গঠিত সংখ্যার সমষ্টি কত?

সমাধানঃ $= (6-1)!\,(2+3+4+5+6+7) \times (1+10+100+10000) = 359999640$

<u>Try yourself</u>: 1,2,3,4,5 অংকগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে গঠিত সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর

Ans. $4! \times 15 \times 11111$

EXAMPLE-02: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 অংকগুলি দ্বারা এদের প্রত্যেকে একবারের বেশি না নিয়ে 1000 অপেক্ষা ছোট ও 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধানঃ শেষে 0 অথবা 5 হলে সংখ্যাগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে। প্রথমে 0 থাকলে অংকগুলো অর্থপূর্ণ হবে না। এক্ষেত্রে 1 অংকের, 2 অংকের ও 3 অংকের অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করতে হবে।

অংকের সংখ্যা চিহ্ন	বিন্যাস সংখ্যা
1 অংকের $\rightarrow$ 5	অর্থ পূর্ণঃ 1
2 অংকের $\rightarrow$ শেষে 0 fixed $(9p_1)$	${}^9P_1 = 9$
2 অংকের $\rightarrow$ শেষে 5 fixed	${}^9P_1$
2 অংকের $\rightarrow$ প্রথমে 0 শেষে 5 fixed	1 অর্থপূর্ণ নয়
3 অংকের $\rightarrow$ শেষে 0 fixed	${}^9P_2 = 72$
3 অংকের $\rightarrow$ শেষে 5 fixed	${}^9P_2 = 72$
3 অংকের $\rightarrow$ প্রথমে 0 শেষে 5 fixed	${}^8P_1$ অর্থপূর্ণ নয়

$\therefore$ মোট অর্থপূর্ণ বিন্যাস সংখ্যা $= 154$

EXAMPLE-03: তোমাকে 6 টি পতাকা দেয়া হল। যাদের মধ্যে 1 টি সাদা 2 টি লাল ও 3 টি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আর একটি সাজালে 4 টি পতাকা দ্বারা তুমি কতগুলো সংকেত তৈরি করতে পার নির্ণয় কর।

সমাধান:

	সাদা	লাল	সবুজ
a	1	2	1
b	1	1	2
c	0	2	2
d	0	1	3
e	1	0	3

মোট গঠিত সংকেত সংখ্যা $= \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!}$

$= 12+12+6+4+4$

$= 38$ টি।