স্থিতিবিদ্যা

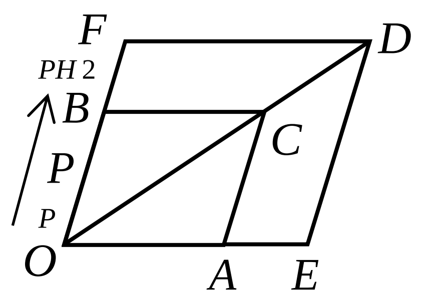
স্থিতিবিদ্যা

TYPE – 01

EXAMPLE – 01: কোনো একটি বিন্দুতে $2P$ এবং P মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত। প্রথমটিকে তিনগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 12 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে।P এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, O বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা সূচিত $2P$ এবং P বল দুইটির লব্ধি $OACB$ সমান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা সূচিত হবে।

আবার, OE ও OF দ্বারা সূচিত যথাক্রমে $6P$ ও $P + 12$ বল দুইটির লব্ধি $OEDF$ সমান্তরিকের কর্ণ OD দ্বারা সূচিত হবে, যা OC বরাবর ক্রিয়াশীল।



এখন, ΔOAC এবং ΔOED সদৃশকোণী।

সুতরাং, আমরা পাই, $\frac{OA}{AC} = \frac{OE}{ED}$

$$\Rightarrow \frac{2P}{P} = \frac{6P}{P+12} \Rightarrow 1 = \frac{3P}{P+12} \Rightarrow P + 12 = 3P$$

অতএব $P = 6$ (একক)।

EXAMPLE – 02: বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q মানের বল দুইটির লব্ধির মান Rযদি কেনো ছেদক P, Q, R এর ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমান কর যে, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$.

SOLVE :O বিন্দু থেকে ছেদক LM এর উপর OX লম্ব অঙ্কন করি। আমরা জানি, যে কোনো দিকে অংশক বলগুলির লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাশের সমান। সুতরাং, OX বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P\cos XOL + Q\cos XOM = R\cos XON$বা, $P.\frac{OX}{OL} + Q.\frac{OX}{OM} = R\frac{OX}{ON}$ অতএব, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$

EXAMPLE – 03: পরস্পর α কোণে আনত P ও Q মানের বল দুইটির লব্ধির মান $\sqrt{3}Q$ এবং তা P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P = Q$ অথবা,$P = 2Q$.

SOLVE : মনে করি, Pও Q বলদ্বয় পরস্পর α কোণে একই বিন্দু O তে ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধি $\sqrt{3}Q$ বলের সাথে $30°$ কোণে আনত। তাহলে, P বরাবর লব্ধির অংশক নিয়ে পাই,

$$\sqrt{3}Q\cos 30° = P + Q\cos\alpha \Rightarrow \sqrt{3}Q.\frac{\sqrt{3}}{2} = P + Q\cos\alpha \Rightarrow Q\cos\alpha = \frac{3}{2}Q - P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

এবং P এর লম্ব দিক বরাবর লব্ধির উপাংশ নিয়ে পাই,

$$\sqrt{3}Q\sin 30° = Q\sin\alpha \Rightarrow Q\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}Q \ \ldots\ldots\ldots.. (ii)$$

(i) ও (ii)নং সমীকরণকে পৃথক ভাবে বর্গ করে যোগ করি।

$(Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2 = \left(\frac{3}{2}Q - P\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha = \frac{9}{4}Q^2 - 3PQ + P^2 + \frac{3}{4}Q^2$

$\Rightarrow Q^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 3Q^2 - 3PQ + P^2 \Rightarrow Q^2 = 3Q^2 - 3PQ + P^2 \Rightarrow 2Q^2 - 3PQ + P^2 = 0$

$\Rightarrow 2Q^2 - 2PQ - PQ + P^2 = 0 \Rightarrow 2Q(Q-P) - P(Q-P) = 0 \Rightarrow (Q-P)(2Q-P) = 0$

হয়, $Q - P = 0 \Rightarrow Q = P$ অথবা, $2Q - P = 0 \Rightarrow 2Q = P$ $\therefore$ নির্ণেয় শর্ত, $P = Q$ অথবা, $P = 2Q$ (Ans)

TYPE – 02

লব্ধি ঃ

EXAMPLE – 01 : 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি, 2β কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = 2\text{cso}\,\beta$.

SOLVE : ধরি, বল দুটি P ও P প্রথম ক্ষেত্রে লব্ধি R দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লব্ধি R'

আমরা জানি, সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে। এখানে প্রথম ক্ষেত্রে সমান বল P ও P এর মধ্যকার কোণ 2α এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সমান বল P ও P এর মধ্যকার কোণ 2β।

প্রশ্নমতে, $R = 2R' \Rightarrow \sqrt{p^2 + p^2 + 2.p.p\cos 2\alpha} = 2\sqrt{p^2 + p^2 + 2.p.p\cos 2\beta}$

$\Rightarrow p^2 + p^2 + 2.p.p\cos 2\alpha = 4(p^2 + p^2 + 2.p.p\cos 2\beta)$

$\Rightarrow p^2(1 + 1 + 2\cos 2\alpha) = 4p^2(1 + 1 + 2\cos 2\beta) \Rightarrow 2 + 2\cos 2\alpha = 4(2 + 2\cos 2\beta)$

$\Rightarrow 2(1 + \cos 2\alpha) = 4 \times 2(1 + \cos 2\beta) \Rightarrow 2.2\cos^2\alpha = 4 \times 2 \times 2\cos^2\beta$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 4\cos^2\beta \Rightarrow (\cos\alpha)^2 = (2\cos\beta)^2 \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos\beta$ (**Proved**)

EXAMPLE – 02 : দুইটি বল ABC ত্রিভূজের CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে $\cos A$ ও $\cos B$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sin C$ এর সমানুপাতিক এবং এর গাতিপথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে।

SOLVE : ধরি, CA ও CB বরাবর ক্রিয়াশীল দুটি বল যথাক্রমে $K\cos A$ ও $K\cos B$. যেখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক এবং CD বরাবার এদের লব্ধি ক্রিয়াশীল। ধরি, লব্ধি R তাহলে, $R^2 = (k\cos A)^2 + (k\cos B)^2 + 2.k\cos A.k\cos B.\cos C$ [$k\cos A$ ও $k\cos B$ বল দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন C

$= k^2\cos^2 A + k^2\cos^2 B + 2k^2\cos A.\cos B.\cos C$

$\Rightarrow k^2(\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\cos B.\cos C) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

আমরা জানি, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$

$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\cos B.\cos C = \sin^2 C \quad [\,1 - \cos^2 C = \sin^2 C\,]$

(i)নং সমীকরণ হইতে পাই,

$R^2 = k^2 \sin^2 C \Rightarrow R = k\sin C \therefore R \propto \sin C$

পূনরায়, ধরি লব্ধি R. CA বাহুর সাথে α কোন তৈরী করে তাহলে CA বরাবর R এর উপাংশ নিয়ে পাই,

$K\sin C.\cos\alpha = K\cos A + K\cos B.\cos C$

$\Rightarrow \sin C.\cos\alpha = \cos A + \cos B.\cos C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

ΔABC হতে পাই, $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow B + C = \pi - A \Rightarrow \cos(B + C) = \cos(\pi - A)$

$\Rightarrow \cos B.\cos C - \sin B.\sin C = -\cos A \Rightarrow \cos A = \sin B.\sin C - \cos B.\cos C$

(i)নং সমীকরনে $\cos A$ এর মান বসিয়ে পাই,

$\sin C.\cos\alpha = \sin B.\sin C - \cos B.\cos C + \cos B.\cos C \Rightarrow \sin C.\cos\alpha = \sin B.\sin C$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sin B = \cos(\pi/2 - B) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - B = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - B$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{C}{2} - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}(A + C - B)$$

আবার, R, CB এর সাথে $C - \alpha$ কোণে আনত, $\therefore C - \alpha = C - \frac{\pi}{2} + B = B + C - \frac{\pi}{2}$

$$= B + C - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = B + C - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(B + C - A)$$

$\therefore$লব্ধি R, C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $(A + C - B)$ অংশ বিভক্ত করে।

EXAMPLE – 03 : এক বিন্দুতে কার্যরত P, Q মানের দুইটি বলের লব্ধির মান R এবং P এর দিকে বরাবর R এর লম্বাংশের পরিমাণ Q হলে, প্রমাণ কর যে, বল দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ, $\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$

SOLVE : মনে করি, P ও Q বলদ্বয় O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল এবং তাদের লব্ধি R. P বলের দিকের সাথে Q কোণে আনত।

P বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ, $R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$

প্রশ্নমতে, $R\cos\theta = Q = P + Q\cos\alpha$

তাহলে, $R\cos\theta = Q$

$\Rightarrow Q\cos\alpha = Q - P \Rightarrow \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q} \Rightarrow \cos^{-1}\cos\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$

আবার, $P + Q\cos\alpha = Q$

$\Rightarrow P = Q - Q\cos\alpha \Rightarrow P = Q(1-\cos\alpha) \Rightarrow P = Q\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P}{2Q}} \Rightarrow \sin^{-1}\sin\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} \Rightarrow \propto = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$; পুনরায় লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos.\cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ.\frac{Q-P}{Q}}$

$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P(Q-P)} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2} = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$

বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন, $\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-p}{Q} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$ (Proved)

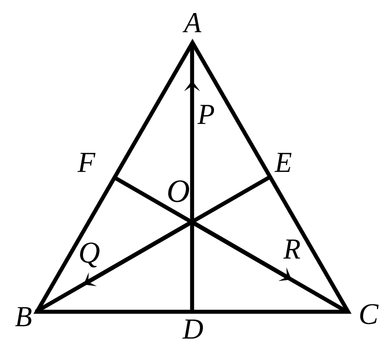
EXERCISE – 01 : কান বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে S এবংT প্রমাণ করে যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ α হলে, তাদের লব্ধির মান $S^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + T^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ হবে।

TYPE – 03

অন্তঃ কেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, লম্বকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র ঃ

EXAMPLE – 01 : ABC ত্রিভূজের অন্তঃকেন্দ্র O হতে P, Q, R মান বিশিষ্ট তিনটি বল যথাক্রমে OA, B, OC বরাবর ক্রিয়াশীল। বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ করে যে, $P : Q : R = \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

SOLVE : ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O, সুতরাং OA, OB ও OC রেখা তিনটি যতাক্রমে A, B ও C কোণের সমদ্বিখন্ডক। ABC ত্রিভূজে, $A + B + C = 180°$



$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° \Rightarrow \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ ……….. (ii)

BOC ত্রিভূজে $< BOC + < BOC + < OCB = 180°$

$\Rightarrow < BOC + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180° \Rightarrow < BOC + \left(90° - \frac{A}{2}\right) = 180°$

$\therefore < BOC = 90° + \frac{A}{2}$ তদ্রুপ, $< COA = 90° + \frac{B}{2}$ এবং $< AOB = 90° + \frac{C}{2}$

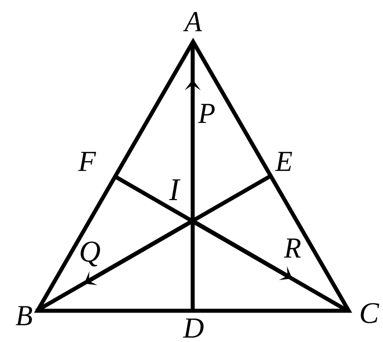
এখন P, Q, R মানের বলত্রয় O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়ে সাম্যাবস্থায় থাকলে লামির সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$\frac{P}{\sin BOC}=\frac{Q}{\sin COA}=\frac{R}{\sin AOB}\Rightarrow\frac{P}{\sin\left(90°+\frac{A}{2}\right)}=\frac{Q}{\sin\left(90°+\frac{B}{2}\right)}=\frac{R}{\sin\left(90°+\frac{C}{2}\right)}\Rightarrow\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

অতএব, $P:Q:R=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{c}{2}$

EXAMPLE – 02 : ABC ত্রিভূজের অন্তঃকেন্দ্র I থেকে IA, IB, IC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P^2:Q^2:R^2=a(b+c-a):b(c+a-b):c(a+b-c)$.

SOLVE : যেহেতু ΔABC ত্রিভূজের অন্তকেন্দ্র হতে IA বরাবর P ও IB বরাবর Q এবং IC বরাবর R বলতিনটি ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। সুতরাং, লামীর সূত্রানুসারে আমরা পাই,



$$\frac{P}{\sin\widehat{QR}}=\frac{Q}{\sin\widehat{RP}}=\frac{R}{\sin\widehat{PQ}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$\widehat{QR}=<BIC=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$; অনুরূপভাবে,

$\widehat{RP}=<AIC=\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}$ এবং $\widehat{PQ}=<AIB=\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}$

এখানে, $A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

আবার, $\angle BIC+\angle IBC+\angle ICB=\pi\Rightarrow\angle BIC+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\pi$

$\Rightarrow<BIC+\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}=\pi\Rightarrow<BIC=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$ তাহলে (i)নং সমীকরণে উক্ত কোনগুলো বসিয়ে পাই,

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)}=\frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}\Rightarrow\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow\frac{P^2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{Q^2}{\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{R^2}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{P^2}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{Q^2}{2\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{R^2}{2\cos^2\frac{C}{2}}\Rightarrow\frac{P^2}{1+\cos A}=\frac{Q^2}{1+\cos B}=\frac{R^2}{1+\cos C}\Rightarrow\frac{P^2}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{Q^2}{1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}=\frac{R^2}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

$$\Rightarrow\frac{P^2}{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{Q^2}{\frac{2ca+c^2+a^2-b^2}{2ca}}=\frac{R^2}{\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}}\Rightarrow\frac{P^2}{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}}=\frac{Q^2}{\frac{(c+a)^2-b^2}{2ca}}=\frac{R^2}{\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}}$$

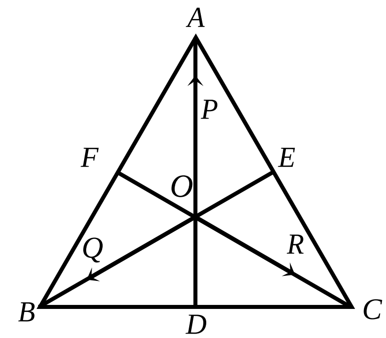
$$\Rightarrow\frac{2bc\,P^2}{(b+c+a)(b+c-a)}=\frac{2caQ^2}{(c+a+b)(c+a-b)}=\frac{2abR^2}{(a+b+c)(a+b-c)}\Rightarrow\frac{abcP^2}{a(b+c-a)}=\frac{abcQ^2}{b(c+a+b)}=\frac{R^2}{c(a+b-c)}$$

$$\Rightarrow\frac{P^2}{a(b+c-a)}=\frac{Q^2}{b(c+a-b)}=\frac{R^2}{c(a+b-c)}$$

$\therefore P^2:Q^2:R^2=a\,(b+c-a):b(c+a-b):c(a+b-c)$(Proved)

EXAMPLE – 03 : ABC ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যতাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

SOLVE : ABC ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র O হতে OA বরাবর P, OB বরাবর Q এবং OC বরাবর R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং, লামীর সূত্রানুসারে আমরা পাই,



$\frac{P}{\sin\widehat{QR}}=\frac{Q}{\sin\widehat{RP}}=\frac{R}{\sin\widehat{PA}}$

এখানে, $\widehat{QR}=<BOC=2A$[কেন্দ্রস্থ কোন বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অনুরূপভাবে, $\widehat{RP}=<AOC=2B$ এবং

$\widehat{PQ}=<AOB=2C. ABC$ ত্রিভূজ sin ব্যবহার করে পাই,

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{C}{\sin C}=R$এবং ABC ত্রিভূজের cos সূত্র বা অভিক্ষেপ সূত্র হতে জানি,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\therefore \frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}\Rightarrow \frac{P}{2\sin A.\cos A}=\frac{Q}{2\sin B.\cos B}=\frac{R}{2\sin C.\cos C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{2a}{2R}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{Q}{\frac{2b}{2R}.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}=\frac{R}{\frac{2C}{2R}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\Rightarrow \frac{P}{\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{2abc}}=\frac{Q}{\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{2abc}}=\frac{R}{\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

$\therefore P:Q:R=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)$ **(Proved)**

TYPE – 04

লামির উপপাদ্য ভিত্তিক ঃ

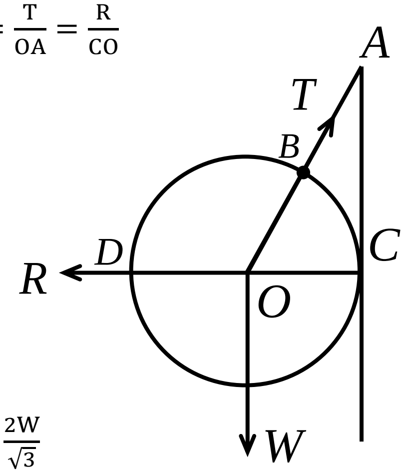
EXAMPLE – 01 : a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজনWহলে দেখাও যে, সুতার টানা, $T=\frac{2}{\sqrt{3}}W.$

SOLVE : মনে করি, a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সুতার একপ্রান্ত উলম্ব দেয়াল CA এর A বিন্দুতে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত গোলকের উপরস্থ বিন্দু B তে সংযুক্ত। গোলকটি ঝুলানোর ফলে তা দেয়ালের C বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে।

পুনরায়, মনে করি, সুতরাং , টান T যা BA বরাবর ক্রিয়ারত, দেয়ালের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R যা CD বরাবর এবং গোলকের ওজন W যা নিণ্ম মুখী করে গোলকটিকে ভারসাম্য রেখেছে।

বল সরানোর নীতি অনুযায়ী উক্ত তিনটি বল OAC ত্রিভূজের OA বরাবর T, OC বরাবর R এবং গোলকটির 3 জন W, AC বরাবর ত্রিয়ারত।

বলগুলো সংশিষ্ট বাহুগুলোর সমানুপাতিক বিধায় ত্রিভূজ সূত্রানুসারে আমরা লিখতে পারি, $\Rightarrow \frac{W}{AC} = \frac{T}{OA} = \frac{R}{CO}$



খানে, $CO = OB =$ গোলকের ব্যাসার্ধ $= a$; $OA = OB + BC = a + a = 2a$

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow T = W.\frac{OA}{AC} = W.\frac{2a}{a\sqrt{3}} \therefore T = \frac{2W}{\sqrt{3}} \text{ (Showed)}$$

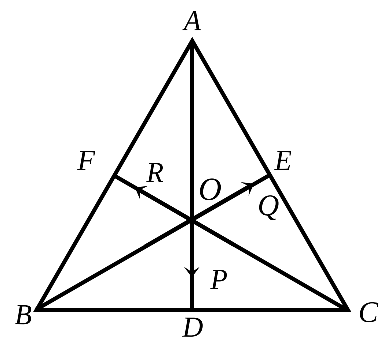
অথবা, sin সূত্রানুসারে, $\frac{T}{\sin\widehat{RW}} = \frac{W}{\sin\widehat{RT}}$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin 90°} = W.\frac{1}{\sin(\pi - AOC)} \Rightarrow T = \frac{W}{\sin\angle AOC} \therefore T = \frac{W}{\frac{AC}{OA}} = W.\frac{OA}{AC} = W.\frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

EXAMPLE – 02 : কোনো বিন্দুতে কার্যরত P, Q, R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে।P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ P ও R এর মধ্যবর্তী কোণের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে $R^2 = Q(Q - P)$

SOLVE : মনে করি O বিন্দুতে P, Q, R বলতিনটি ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে।

এখানে, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 2α হলে P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোন $360° - (2\alpha + \alpha)$ বা $360° - 3\alpha$ লামীর সূত্র হতে পাই,



$$\frac{P}{\sin\widehat{RQ}} = \frac{Q}{\sin\widehat{PR}} = \frac{R}{\sin\widehat{PQ}} \Rightarrow \frac{P}{\sin(360° - 3\alpha)} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{-\sin 3\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha} \ldots\ldots\ldots.. \text{ (i)}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \; -\sin 3\alpha = 4\sin^2\alpha - 3\sin\alpha = \sin\alpha(4\sin^2\alpha - 3)$$

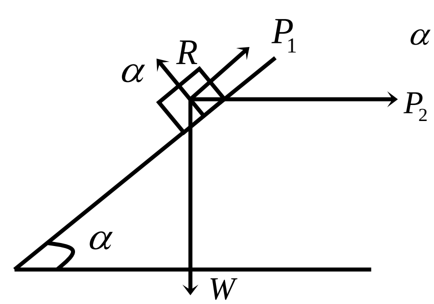
এবং $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$$\therefore \frac{P}{\sin\alpha(4\sin^2\alpha - 3)} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{2\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \frac{P}{4\sin^2\alpha - 3} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{Q}{1} = \frac{P}{4\sin^2\alpha - 3} = \frac{Q - P}{1 - 4\sin^2\alpha + 3} = \frac{Q - P}{4 - 4\sin^2\alpha} = \frac{Q - P}{4(1 - \sin^2\alpha)} = \frac{Q - P}{4\cos^2\alpha} \therefore \frac{R}{2\cos\alpha} = \alpha$$

$$\therefore \left(\frac{R}{2\cos\alpha}\right)^2 = \frac{R}{2\cos\alpha}.\frac{R}{2\cos\alpha} = Q.\frac{Q - P}{4\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{R^2}{4\cos^2\alpha} = \frac{Q(Q - P)}{4\cos^2\alpha} \therefore R^2 = Q(Q - P)(\textbf{ Proved})$$

EXAMPLE – 03 : ভূমির সাথে α কোণে নত একটি মসৃণ সমতল বরাবর উপরের দিকে কার্যরত P_1 বল এবং P_2 মানের অনুভূমিক বল একটি বস্তুকে তলের উপর সাম্যাবস্থায় রাখে।P_1, P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$



SOLVE : α কোনে আনত তলে বস্তুর ওজন W নিচের দিকে বস্তুর উপর তলের প্রতিক্রিয়া R তলের অভিলম্ব বরাবর উপরের দিকে ক্রিয়াশীল।

P_1 বল তল বরাবর ও P_2 বল অভিলম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল।

যেহেতু, বলগুলোর ক্রিয়ার ফলে বস্তুটি তলের উপর স্থির আছে সুতরাং,

$\sum F = 0$ তল বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$\therefore P_1 + R\cos 90° + W\sin\alpha.\cos 180° + W\cos\alpha.\cos 270° + P_2\cos(2\pi - \alpha) = 0$

$\Rightarrow P_1 - W\sin\alpha + P_2\cos\alpha = 0 \Longrightarrow P_1 + P_2\cos\alpha = W\sin\alpha$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে : বস্তুর উপর প্রয়োগকৃত বল P_1, P_2 এবং তাদের মর্ধ্যবর্তী কোণ অর্থাৎ অনুভূমির সাথে তলের আনভিককে অর্ধেক $\frac{\alpha}{2}$ করা হয়েছে এবং বস্তুটি তলের উপর স্থিত আছে অর্থাৎ ভারসাম্য অর্জিত হয়েছে।

সুতরাং ,(ii) নং সূত্রে $P_1 = \frac{P_1}{2}, P_2 = \frac{P_2}{2}$ এবং $\alpha = \frac{\alpha}{2}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{P_1}{2} - W\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{P_2}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow P_1 - 2W\sin\frac{\alpha}{2} + P_2\cos\frac{\alpha}{2} = 0$

$P_1 + P_2\cos\frac{\alpha}{2} = 2W\sin\frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(i)$

(i)নং কে (ii) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{P_1+P_2\cos\frac{\alpha}{2}}{P_1+P_2\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{P_1+P_2\cos\frac{\alpha}{2}}{P_1+P_2\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{P_1+P_2\cos\frac{\alpha}{2}}{P_1+P_2\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow P_1\cos\frac{\alpha}{2} + P_2\cos^2\frac{\alpha}{2} = P_1 + P_2\cos\alpha \Rightarrow P_1\cos\frac{\alpha}{2}P_1 = P_2\cos\alpha - P_2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow P_1\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) = P_2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) - P_2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow P_1\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 2P_2\cos^2\frac{\alpha}{2} - P_2\cos^2\frac{\alpha}{2} = P_2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)}$

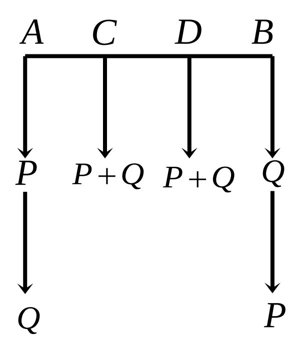
$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} \;\therefore P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} : 1$ (**Proved**)

TYPE – 05

সদৃশ ও বিসদৃশ বল ঃ

EXAMPLE – 01 : একটি বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q $(P > Q)$ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়।

প্রমাণ কর, $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$.



SOLVE : মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুইটি

সদৃশ সমান্তারাল বলের লব্ধি $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ যা C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore \mathrm{P}\times\mathrm{AC}=\mathrm{Q}\times\mathrm{BC}\Rightarrow\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{BC+AC}}{\mathrm{P+Q}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{P+Q}}\therefore \mathrm{AC}=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P+Q}}\mathrm{AB}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i})$

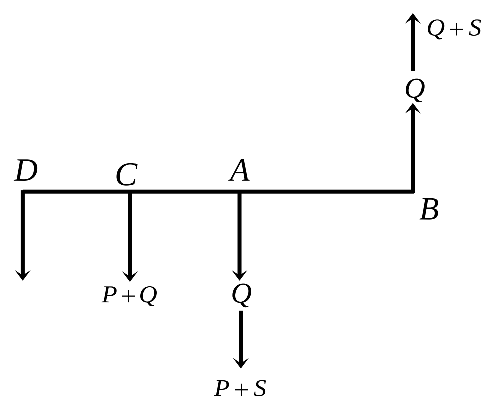
আবার ধরি, বল দুইটি স্থান বিনিময় করলে অর্থাৎ Q বলটি A বিন্দুতে এবং P বলটি B বিন্দুতে কার্যরত হলে এদের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়ারত হবে।

$\therefore \mathrm{Q}\times\mathrm{AD}=\mathrm{P}\times\mathrm{BD}\Rightarrow\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{AD+BD}}{\mathrm{P+Q}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{P+Q}}\therefore \mathrm{AD}=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P+Q}}\mathrm{AB}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii})$

$(\mathrm{ii})-(\mathrm{i})\Rightarrow(\mathrm{AD}-\mathrm{AC})=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P+Q}}\mathrm{AB}-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P+Q}}\mathrm{AB}\Rightarrow\mathrm{CD}=\mathrm{d}=\frac{\mathrm{P-Q}}{\mathrm{P+Q}}\mathrm{AB}$ প্রমাণিত।

EXAMPLE – 02 : P ও Q $(\mathrm{P}>Q)$ দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। যদি এদেরকে সম পরিমাণে বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে, নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P বল থেকে আরও দূরে সরে যাবে।

SOLVE : A বিন্দুতে P ও B বিন্দুতে Q মানের দুটি বিসদৃশ বল ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি R, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এখন P ও Q বলের সাথে S মানের দুটি বল সংযুক্ত করি। ফলে $\mathrm{P}+\mathrm{S}$ বল ও $\mathrm{Q}+\mathrm{S}$ বলের লব্ধি R, D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



ধরি, $\mathrm{CD}=\mathrm{d}$

প্রথম ক্ষেত্রে, $\mathrm{P.AC}=\mathrm{Q.BC}$

$\Rightarrow\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{BC-AC}}{\mathrm{P-Q}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{P-Q}}$

$\Rightarrow \mathrm{AC}=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P-Q}}\mathrm{AB}\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{i})$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $(\mathrm{P}+\mathrm{S}).\mathrm{AD}=(\mathrm{Q}+\mathrm{S}).\mathrm{BD}$

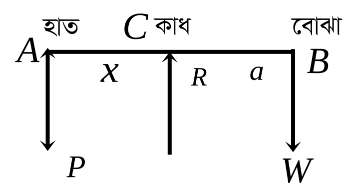
$\Rightarrow\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{Q+S}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{P+S}}=\frac{\mathrm{BD-AD}}{\mathrm{P+S-(Q+S)}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{P+S-Q-S}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{P-Q}}$

$\Rightarrow \mathrm{AD}=\frac{\mathrm{Q+S}}{\mathrm{P-Q}}.\mathrm{AB}.=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P-Q}}\mathrm{AB}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P-Q}}\mathrm{AB}=\mathrm{AC}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P-Q}}\mathrm{AB}\therefore \mathrm{AD}>AC$

সুতরাং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

EXERCISE – 01 : দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের Q কে $\frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{Q}}$ তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে এদের লব্ধির অবস্থান একই থাকে।

EXAMPLE – 03 : যদি তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a এবং x হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তার কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ হবে $\mathrm{W}(1+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}})$



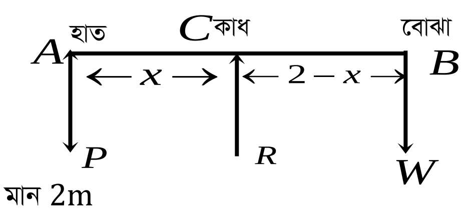
SOLVE : ধরি, AB একটি লাঠি যার A প্রান্ত লোকটির হাতের অবস্থান, C বিন্দু কাঁধের অবস্থান B প্রান্ত বস্তুর অবস্থান নির্দেশ করে । $\mathrm{AC}=\mathrm{x},\mathrm{BC}=\mathrm{a}$

ধরি, কাধের উপর চাপ R এবং হাত কর্তৃক প্রযুক্ত চাপ P তাহলে, $R.AC = W.AB$

$P+S$

$\Rightarrow R = W.\left(\frac{AC+BC}{AC}\right) = W.\left(\frac{x+a}{x}\right) = W.\left(1+\frac{a}{x}\right) \Rightarrow$ লোকটির কাধেঁর উপর চাপের পরিমাণ $W(1+\frac{a}{x})$

EXAMPLE – 04 : যদি লাঠির দৈর্ঘ্য 2 মিটার হয় তবে লোকটির হাত ও কাধেঁর দূরত্ব কত হলে কাঁধের উপর চাপ ন্যূনতম হবে ?



SOLVE :   ধরি, লোকের হাত ও কাঁধের দূরত্ব, $AC = x$

$R.AC = W.AB \Rightarrow R = W.\frac{AC+BC}{AC} = W.\frac{2}{x}.AB = 2m$

x এর বৃহত্তম মানের জন্য R এর মান অর্থাৎ কাঠের উপর চাপ ন্যূনতম হবে। x এর বৃহত্তম মান $2m$

$\therefore$ লোকটির হাত হতে কাঁধের দূরত্ব $2m$ হতে হবে ।(Ans)

EXAMPLE – 05 : যদি লাঠির দৈর্ঘ্য 3 মিটার এবং কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের তিনগুণ হয় তবে, হাত ও কাঁধের দূরত্ব নির্ণয় কর।

SOLVE : AB লাঠির দৈর্ঘ্য $3m$. A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে হাত ও বস্তুর অবস্থান। কাধেঁর অবস্থান C বিন্দুতে।

ধরি, $AC = x$ তাহলে $BC = 3 - x$

$3W, AC = W, AB \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1 \;\; \therefore x = 1m$

$\therefore$ লোকটির হাত ও কাধেঁর দূরত্ব $1m$.   (Ans)

EXAMPLE – 06 : P ও Qদুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল।Pবলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকেx দূরত্বে সরালে দেখাও যে, এদের লব্ধি$\frac{Px}{P+Q}$দূরত্বে সরে যাবে।

SOLVE : ধরি P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত । এবং তাদের লব্ধি $P + Q$, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।
তাহলে,$P.AC = Q.BC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ (i)

Pবলকে A হতে B এর দিকে x দূরত্বে A' স্থানান্তর করা হল।ফলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C হতে সরে C'এ স্থানান্তারিত হল।

তাহলে, এক্ষেত্রে $P.A'C' = Q.BC' = Q\,(BC - CC')$

$\Rightarrow P.(AC' - AA') = Q\,(BC - CC') \Rightarrow P.(AC + CC' - AA') = Q.BC - Q.CC'$

$\Rightarrow P.AC + P.CC' - P.AA' = Q.BC - Q.CC'$

$\Rightarrow P.CC' + QCC' = Q.BC - P.AC + P.x[AA' = x$ □□□$]$

$\Rightarrow CC'(P+Q) = P.AC - P.AC + Px$[(i) নং হতে পাই]

$\Rightarrow CC' = \frac{Px}{P+Q}$ $\therefore$ P ও Q এর লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে ।

EXAMPLE – 07 : P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি Oবিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P ও Q এর বদলে যথাক্রমে Q ও R ক্রিয়া করলে ও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$.

SOLVE : MN রেখায় M বিন্দুতে P ও N বিন্দুতে Q মানের দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি MN রেখার বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

তাহলে, ১ম ক্ষেত্রে $POM = Q.ON \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে :$(P+R).OM = (Q+S).ON \ldots\ldots\ldots\ldots.$(ii)

তৃতীয় ক্ষেত্রে : $Q.OM = R.ON \ldots\ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i)নং সমীকরণ ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{P+R}{P} = \frac{Q+S}{Q} \Rightarrow \frac{P+R-P}{P} = \frac{Q+S-Q}{Q} \Rightarrow \frac{R}{P} = \frac{S}{Q} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$

(i) ও (iii) হতে, $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P-Q}{Q-R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + + +$ (iv)

$\therefore \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{Q-R}{R-S} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$(v)

তাহলে, $\frac{Q}{R} = \frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q-R}{R-S} \Rightarrow R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q} \Rightarrow S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ (Proved)

EXERCISE – 01 : P ও Qদুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল$(P > Q)$যথাক্রমেAওBবিন্দুতে কার্যরত আছে। উভয় বলকেRপরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে যদি এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায় তবে দেখাও যে,$d = \frac{R}{P-Q}.AB$.

TYPE – 06

অন্তঃকেন্দ্র, লম্বকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র এবং সদৃশ ও বিসদৃশ সমান্তরাল বল ঃ

EXAMPLE – 01 : P: Q : R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে ABCত্রিভূজের কৌণিক বিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভূজটির লম্ববিন্দুগামী হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,(i)$P\,Q\,R = \tan A : \tan B : \tan C$. (ii)$P \cot A = Q \cot B = R \cot C$

SOLVE : মনেকরি, O বিন্দুটি ΔABC এর লম্ববিন্দু এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D তে ছেদ করে। সুতরাং $AD \perp BC$. এখন B ও C তে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি $Q + R$ বলটি BC রেখাস্থ কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার বলত্রয়ের লব্ধি O তে ক্রিয়া করে এবং এর একটি অংশক P যা A তে ক্রিয়া করে, সুতরাং অপর অংশক $(Q + R)$, AD রেখাস্থ কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করবে অর্থাৎ, AD ও BC এর ছেদ বিন্দু D তে অবশ্যই ক্রিয়া করবে।

$\therefore Q \times BD = R \times CD. \Rightarrow Q \times \frac{BD}{AD} = R \times \frac{CD}{AD}$

$\Rightarrow Q\cot B = R\cot C$ তদ্রুপ, দেখানো যায়, $P\cot A = R\cot C$ সুতরাং, $P\cot A = Q\cot B = R\cot C$

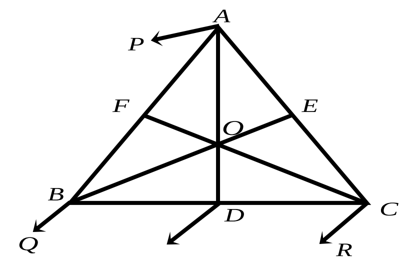
বা, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$ অর্থাৎ, $P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$. **Proved (i)**

EXAMPLE – 02 : P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমেABCত্রিভূজের শীর্ষA, B, Cতে ক্রিয়ারত। বলগুলির যে কোন সাধারণ দিকের জন্য এদের লব্ধি যদি ত্রিভূজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

SOLVE : মনে করি, ΔABC এর পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D তে ছেদ করে। এখন B ও C তে ক্রিয়ারত Q ও R দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(Q + R)$, BC রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার O তে ক্রিয়ারত লব্ধি বলের একটি অংশক P যা A তা ক্রিয়া করে। সুতরাং অপর অংশকটি $(Q + R)$, AD রেখার কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ার করবে, অর্থাৎ AD ও BC এর ছেদবিন্দু D তে অবশ্যই ক্রিয়া করবে।

$\therefore Q \times BD = R \times CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}CD\times h}{\frac{1}{2}BD\times h} = \frac{\Delta ADC}{\Delta ABD} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$[যখনA থেকে BC এর দূরত্ব $= h$]

অনুরূপভাবে, $\frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{\Delta OCD}{\Delta ABD} \ldots\ldots\ldots\ldots.. (ii)$



(i) ও (ii) হতে পাই $\frac{Q}{R} = \frac{\Delta ADC}{\Delta ABD} = \frac{\Delta OCD}{\Delta OBD}$

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\Delta ADC - \Delta OCD}{\Delta ABD - \Delta OVD} = \frac{\Delta AOC}{\Delta AOB} = \frac{\frac{1}{2}\ OA\times OC\sin AOC}{\frac{1}{2}\ OB\times OA\sin AOB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

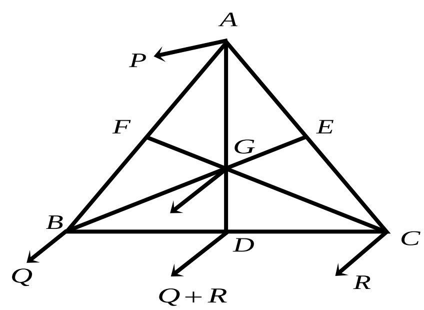
সুতরাং, $Q : R = \sin 2B : \sin 2C$ [$\because OA = OB = OC$ এবং $< AOC = 2B, < AOB = 2C$]

অনুরুপ ভাবে, $P : Q = \sin 2A : \sin 2B$ সুতরাং,$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

EXAMPLE – 03 : ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল P, Q, R কার্যরত আছে। এদের লব্ধি ত্রিভূটির ভরকেন্দ্রে কার্যরত হলে দেখাও যে,$P = Q = R$

SOLVE : ABC ত্রিভূজের A, B, C বিন্দুতে কার্যরত তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল P, Q, R কার্যরত আছে।AD, ABC ত্রিভূজের মধ্যমা সুতরাং BC এর মধ্যবিন্দু D। তাহলে B ও C বিন্দুতে ত্রিয়ারত সমমুখী বল Q ও R এর লব্ধি $Q + R$, BC এর মধ্যবিন্দু D তে ক্রিয়া করে। [যেহেতু A বিন্দুতে P ও G বিন্দুতে $P + Q + R$ বল দুটি ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে সুতরাং AGD রেখার D বিন্দুতে অবশ্যই Q ও R এর লব্ধি $Q + R$ ক্রিয়া করে]

$(Q + R).DG = P.AG.$ [G, AD কে $2 : 1$ বিভক্ত করে]



$\frac{Q+R}{P} = \frac{AG}{DG} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{Q+R+P}{P} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1}.\left[\frac{AG}{DG} = \frac{2}{1}\right]$

$\Rightarrow Q + R + P = 3P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (i)$

অনুরূপভাবে, BE মধ্যমার ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায়,

$P + Q + R = 3Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ \ (ii)$

এবং CF মধ্যমার ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায়, $P + Q + R = 3R \ldots\ldots\ldots\ldots.\ \ (iii)$

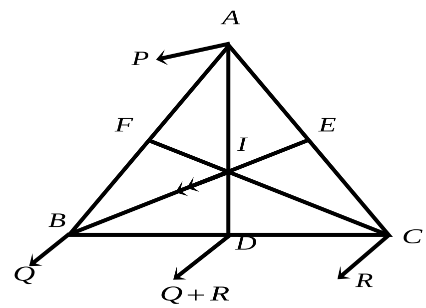
(i), (ii)ও(iii)নং সমীকরণ হতে পাই, $P + Q + R = 3P = 3Q = 3R$

$\Rightarrow 3P = 3Q = 3R \Rightarrow P = Q = R$ (**Proved**)

EXAMPLE – 04 : তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু A, B, C তে কার্যরত আছে। যদি এদের লব্ধি ত্রিভূজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,

(i). $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

SOLVE : ABC ত্রিভূজের A, B, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত



তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে P, Q, R এর লব্ধি ত্রিভূজটির অন্তঃকেন্দ্র

I তে ক্রিয়া করে।A কোণের সমদ্বিখন্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

B ও C বিন্দু ক্রিয়াশীল সদৃশ সমান্তরাল বল Q ও R এর লব্ধি Q + R, D

বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে, $Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ ……….. (i)

আবার, $\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AD}{\sin\angle ABD} \Rightarrow \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin B}$ …………..(ii)

অনুরূপভাবে, $\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AD}{\sin\angle ACD} \Rightarrow \frac{CD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin C}$ ……………….. (iii)

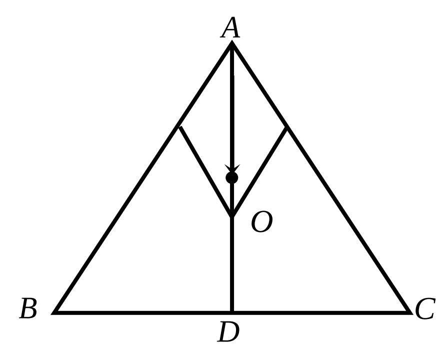
(iii)নং সমীকরণকে(ii)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{CD}{BD} = \frac{\sin B}{\sin C} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin B}{\sin C} \Rightarrow \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$

অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করা যায়, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B}$ সুতরাং অমরা লিখতে পারি, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$ ……………….. (iv)

অর্থাৎ,$P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ (**Showed**)

EXAMPLE – 05 : P, Q, R তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বলঃ



এর তিনটি কৌণিক বিন্দুতেA, B, C যথাক্রমে ক্রিয়ারত।

এদের লব্ধি যদি ত্রিভূজের লম্বকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i). $P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2)$

$= R(a^2 + b^2 - c^2)$ (ii)$P : Q : R = a : b : c$

SOLVE : মনেকরি, ABC ত্রিভূজের লম্বকেন্দ্র O

AD, BE, CFযথাক্রমে BC, CA, ও AB বাহুর উপর লম্ব।B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল Q ও R এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াকরলে আমরা পাই,

$Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}. \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\frac{CD}{AD}}{\frac{BD}{AD}} = \frac{\cot C}{\cot B} = \frac{\tan B}{\tan C} \Rightarrow \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

অনুরূপভাবে প্রমান করা যায়, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B}$ সুতরাং, আমরা লিখতে পারি, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

$$\Rightarrow \frac{P}{\frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{Q}{\frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{R}{\frac{\sin C}{\cos C}} \Rightarrow \frac{P.\cos A}{\sin A} = \frac{Q\cos B}{\sin B} = \frac{R\cos C}{\sin C} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$$

$$\Rightarrow \frac{P.\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\frac{a}{2R}} = \frac{Q.\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{\frac{b}{2R}} = \frac{R\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{\frac{c}{2R}}$$

[$\because\ \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ এবং $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$]

$$\Rightarrow \frac{P(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \frac{Q(c^2+a^2-b^2)}{2abc} = \frac{R\,(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$\Rightarrow P\,(b^2+c^2-a^2) = Q\,(c^2+a^2-b^2) = R\,(a^2+b^2-c^2)$(**Proved**)

(i)নং হইতে, $\frac{P\cos A}{\frac{a}{2R}} = \frac{Q\cos B}{\frac{b}{2R}} = \frac{R\cos}{\frac{c}{2R}} \Rightarrow \frac{P\cos A}{a} = \frac{Q\cos B}{b} = \frac{R\cos C}{c}$

$\therefore P\cos A : Q\cos B : R\cos C = a : b : c$ (**Proved**) (ii)

EXAMPLE – 06: P, Q, R মানের বলত্রয়ABCত্রিভূজেরA, B, Cতিনটি কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে,P: Q: R = a : b : c

SOLVE : ABC ত্রিভূজের A বিন্দু BC এর উপর লম্ব AD বরাবর

P মানের বল B বিন্দু CA এর উপর লম্ব BE বরাবর Q মানের বল

এবং C বিন্দু হতে AB এর লম্ব CF বরাবর R মানের বল ক্রিয়াশীল।

বল তিনটির ক্রিয়ারেখা O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে O বিন্দুতে বল তিনটি ভারসাম্যবস্থা সৃষ্টি করেছে।

সুতরাং, লামীর সূত্রানুসারো পাই,

$$\frac{P}{\sin\widehat{RQ}} = \frac{Q}{\sin\widehat{RP}} = \frac{R}{\sin\widehat{PR}} \Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi-A)} = \frac{Q}{\sin(\pi-B)} = \frac{R}{\sin(\pi-C)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C} \Rightarrow \frac{P}{\frac{a}{2R}} = \frac{Q}{\frac{b}{2R}} = \frac{R}{\frac{c}{2R}}$$

$\because$ ABC ত্রিভূজ sin সূত্রানুসারে জানি,

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \therefore P : Q : R = a : b : c$ (Proved)

এখানে, AFOE চুর্তভুজে এ

$< EAF + < AFO + < EOF + < AEO = 2\pi$

$\Rightarrow < EAF + \frac{\pi}{2} + < EOF + \frac{\pi}{2} = 2\pi$

$\Rightarrow < EAF + < EOF = \pi$

$\Rightarrow < EOF = \pi - < EAF$

অর্থাৎ, $\widehat{RQ} = \pi - A$,

অনুরূপভাবে, $\widehat{RP} = \pi - B$ এবং $\widehat{PQ} = \pi - C$

EXERCISE – 01 : P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভূজের শীর্ষ A, B, C তে ক্রিয়ারত। বলগুলির যে কোনো সাধারণ দিকের জন্য এদের লব্ধি যদি ত্রিভূজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$P ∶ Q ∶ R = a\cos A ∶ b\cos B ∶ c\cos C$

EXERCISE – 02 : ABC ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র O একটি বল P, AO বরাবর ক্রিয়ারত। দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে P এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B ∶ \sin 2C$