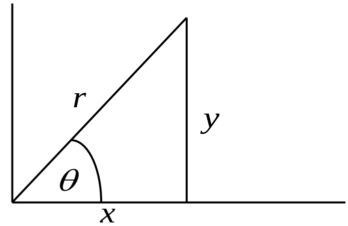
Straight Line (সরলরেখা)

সরলরেখা -Part 01 ঃ



কার্তেসীয় স্থানাংক ঃ (x, y); $x =$ ভুজ, $y =$ কোটি

পোলার স্থানাংক ঃ (r, θ); $r =$ ব্যাসার্ধ ভেক্টর; $\theta =$ ভেক্টরিয়াল কোণ

১। **কার্তেসীয় স্থানাংক হতে পোলার স্থানাংকে পরিবর্তন ঃ** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(i) ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে ভেক্টরিয়াল কোণ, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

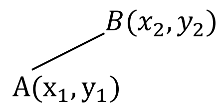
(ii) ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে ভেক্টরিয়াল কোণ, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iii) ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে ভেক্টরিয়াল কোণ, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iv) ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে ভেক্টরিয়াল কোণ, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

২। **পোলার স্থানাংক হতে কার্তেসীয় স্থানাংকে পরিবর্তন ঃ** $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

৩। **দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব ঃ** $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



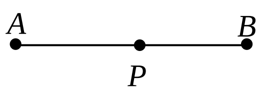
৪। y অক্ষ হতে $(x,\ y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ যেমন ঃ y অক্ষ হতে $(a, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |a|$

৫। x অক্ষ হতে $(x,\ y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |y|$ যেমন ঃ x অক্ষ হতে $(4, K)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |K|$

৬। **বিভক্তিকরণ ঃ**

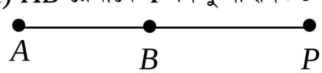
(i) $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুর সংযোজক রেখাকে $P(x, y)$ বিন্দু $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে

P বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$



$AP : PB = m_1 : m_2$

(ii) AB রেখাকে P বিন্দু বহির্বিভক্ত করলে P বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$



Remember: $AP : BP = m_1 : m_2$

(iii) AB রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

৭। AB রেখাকে P বিন্দুটি $K : 1$ অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত করলে P বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{x_1 + Kx_2}{1 + K}, \frac{y_1 + Ky_2}{1 + K}\right)$

(ii) বহির্বিভক্ত করলে P বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{x_1 - Kx_2}{1 - K}, \frac{y_1 - Ky_2}{1 - K}\right)$

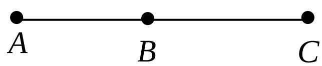
৮। $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দু হলে

(i) ভরকেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

(ii) ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

(iii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

৯। A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত (i) $AB + BC = AC$ (ii) $\Delta ABC = 0$



১০। সঞ্চারপথের বিন্দু / চলমান বিন্দু / সেটের বিন্দুর স্থানাংক (x, y)

Note – 1:

(i) ABCD আয়তক্ষেত্রের $AB = CD, AD = BC$ এবং কর্ণ $AC =$ কর্ণ BD
(ii) ABCD সামান্তরিকের $AB = CD, AD = BC$ কিন্তু কর্ণ $AC \neq$ কর্ণ BD
(iii) ABCD বর্গক্ষেত্রের $AB = BC = DC = DA$ এবং কর্ণ $AC =$ কর্ণ BD
(iv) ABCD রম্বসের $AB = BC = DC = DA$ এবং কর্ণ $AC \neq$ কর্ণ BD
(v) ABC সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $AB = BC = CA$

Note – 2: ABCD চতুর্ভুজের ACও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু একই।

Note – 3:

(i) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

(ii) সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

(iii) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহু $)^2$

(iv) রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল

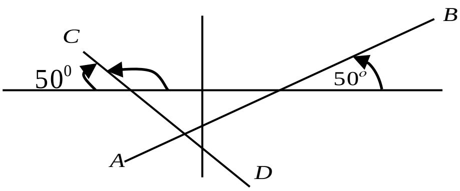
(v) সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (বাহু$)^2$

(vi) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র $'O'$ হলে $OA = OB = OC =$ ব্যাসার্ধ (R)

সরলরেখা -Part 02ঃ

ঢাল (Slope) ঃ কোন সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক tangent কে ঢাল (Slope) বলে।

১। **ঢাল নির্ণয় ঃ** (i) AB রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল, $m = \tan\theta$



AB রেখার ঢাল, $m = \tan 50^\circ$

CD রেখার ঢাল, $m = \tan(180^\circ - 50^\circ) = \tan 130^\circ$

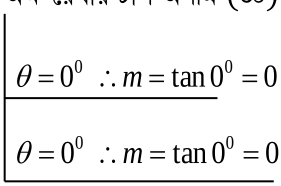
(ii) $ax + by + c = 0$ রেখার ঢাল, $m = \dfrac{\text{- x এর সহগ}}{\text{y এর সহগ}}$

যেমন ঃ $2x + 3y + 5 = 0$ রেখার ঢাল $m = \frac{-2}{3}$

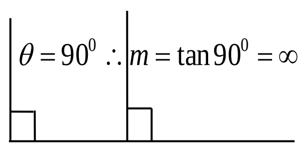
(iii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এই দুই বিন্দুগামী রেখার ঢাল, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(iv) x অক্ষ রেখার ঢাল শূন্য (0) এবং x অক্ষের সমান্তরাল রেখার ঢাল শূন্য (0) (চিত্র –১)

(v) y অক্ষ রেখার ঢাল অসীম (∞) এবং y অক্ষের সমান্তরাল রেখার ঢাল অসীম (∞) (চিত্র – ২)



চিত্র –১



চিত্র – ২

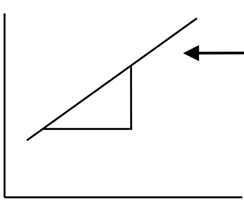
২। (i) x অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

(ii) y অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

(iii) x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y = b$

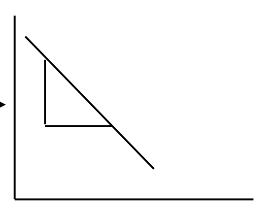
(iv) y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = a$

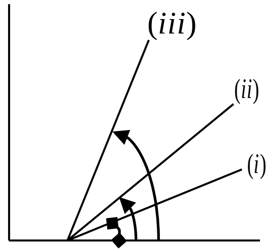
৩। ঢাল m এবং y অক্ষ হতে c' অংশ কর্তন করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$



ঢাল (m) ধনাত্মক (+) হলে রেখাটি ঊর্ধ্বগামী

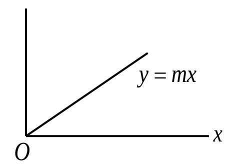
ঢাল (m) ঋনাত্মক (-) হলে রেখাটি নিম্নগামী





যে রেখার ঢাল যত বেশি, সেই রেখা তত খাড়া (উল্লম্বদিকে যাবে) ।

চিত্রে (iii) নং রেখার ঢাল সর্বোচ্চ তাই (iii) নং রেখা সবচেয়ে খাড়া।



৪। **মূলবিন্দু গামী** রেখার সমীকরণ, $y = mx$

৫। **একবিন্দুগামী $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$ রেখার** সমীকরণ ঃ $y - y_1 = m(x - x_1)$

যেমনঃ $(2,5)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y - 5 = m(x - 2)$

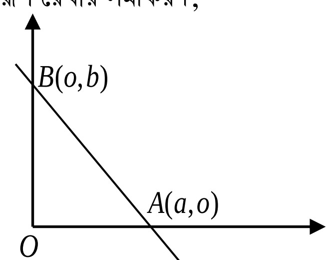
৬। **দুই বিন্দুগামী** (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

৭। মূলবিন্দুগামী এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y = \frac{y_1}{x_1}x$

যেমন ঃ $(0,0)$ ও $(2,5)$ দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ, $y = \frac{5}{2}x \;\Rightarrow\; 5x - 2y = 0$

৮। x অক্ষ হতে $'a'$ অংশ এবং y অক্ষ হতে $'b'$ অংশ ছেদ করে এরূপ রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$



(i) নং রেখা কর্তৃক x অক্ষের ছেদবিন্দু $A(a, 0)$

(i) নং রেখা কর্তৃক y অক্ষের ছেদবিন্দু $B(0, b)$

যেমন ঃ $2x - 5y = 10 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ কর্তৃক x অক্ষের ছেদবিন্দু $(5,0)$; y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, -2)$

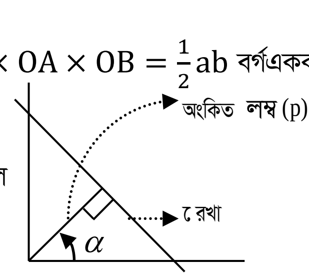
(i) নং রেখা কর্তৃক অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের দৈর্ঘ্য, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

(i) নং রেখা এবং x অক্ষ, y অক্ষ দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta OAB = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2}ab$ বর্গএকক

৯। $\longrightarrow$ মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য p

$\longrightarrow$ এবং ঐ লম্বটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে

$\longrightarrow$ রেখাটির সমীকরণ $\mathbf{x\cos\alpha + y\sin\alpha} = \boldsymbol{p}$



১০। $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots(i)$ $\quad$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots(ii)$

(i) নং ও (ii) নং একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত ঃ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

যেমন, $2x + 3y + k = 0,\ 7x + by + 2 = 0$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে ঃ $\frac{2}{7} = \frac{3}{b} = \frac{k}{2}$

১১। (i) নং ও (ii) নং রেখার **ছেদবিন্দু দিয়ে যায়** এরূপ রেখার সমীকরণ, $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ Here, K একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক (Arbitritary constant)

১২। উপরের (i) নং রেখার ঢাল m_1এবং (ii) নং রেখার ঢাল m_2 হলে **দুইটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ** $\emptyset$,

$$\tan\emptyset = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right) = \pm\left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}\right)$$

Remember: $(+)$ নিয়ে সুক্ষ্মকোণ এবং $(-)$ নিয়ে স্থুলকোণ পাওয়া যাবে ।

১৩। দুটি সরলরেখা **পরস্পর সমান্তরাল** হওয়ার শর্ত (i)$m_1 = m_2$ [ঢালদ্বয় সমান] $\quad$ (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(iii) $ax + by + c = 0$ রেখার **সমান্তরাল যেকোন রেখার সমীকরণ**, $ax + by + k = 0$

Remember ঃ সমান্তরাল যেকোন রেখার সমীকরণের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র constant change করতে হবে।

১৪। দুটি সরলরেখা **পরস্পর লম্ব** হওয়ার শর্ত (i) $m_1m_2 = -1$ [ঢালদ্বয়ের গুণফল= -1]
(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (iii) $ax + by + c = 0$ রেখার উপর **লম্ব রেখার সমীকরণ**, $bx - ay + k = 0$

Remember: লম্ব রেখার সমীকরণ বের করতে হলে (i) x ও y এর সহগ Interchange $\quad$ (ii) x ও y এর যেকোন একটির চিহ্ন change $\quad$ (iii) constant (ধ্রুবক) change

১৫। $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots(i)$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots(ii)$ $a_3x + b_3y + c_3 = 0 \dots\dots(iii)$

(i) নং, (ii) নং এবং (iii) নং রেখা **সমবিন্দু হওয়ার শর্ত ঃ** Determinant, $D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

১৬। (x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার উপর **লম্ব দূরত্ব,** $d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

[অর্থাৎ ঐ বিন্দু দিয়ে রেখাকে সিদ্ধ করা মান লবে থাকবে এবং হরে $\sqrt{(x\text{এর সহগ})^2 + (y\text{এর সহগ})^2}$]

যেমনঃ $(2,1)$ হতে $7x - 3y + 3 = 0$ রেখার উপর লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{14-3+3}{\sqrt{7^2+3^2}}\right| = \frac{14}{\sqrt{58}}$

১৭। $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ **সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব** $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Remember: (i) অবশ্যই x ও y এর সহগ দুটি সমীকরণে সমান করে নিতে হবে।

যেমনঃ $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $6x + 9y + 7 = 0$ রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{5 - {}^{7}/_{3}}{\sqrt{2^2 + 3^2}}\right|$

কারণঃ $2x + 3y + 5 = 0 \therefore c_1 = 5$ এবং $6x + 9y + 7 = 0 \Rightarrow 2x + 3y + {}^{7}/_{3} = 0 \therefore c_2 = {}^{7}/_{3}$

১৮। **দুইটি অসমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডক নির্ণয় ঃ**

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় ঃ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Check: (i) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে

$(+)$ নিয়ে স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক

$(-)$ নিয়ে সুক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে

$(+)$ নিয়ে সুক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক

$(-)$ নিয়ে স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক

(iii) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হলে রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব।

(iv) c_1 এবং c_2 একই চিহ্নযুক্ত হলে $(+)$ নিয়ে প্রাপ্ত রেখা মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক

(v) c_1এবং c_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে $(-)$ নিয়ে প্রাপ্ত রেখা মুলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

১৯। কোন সরলরেখার সাপেক্ষে দুইটি বিন্দুর অবস্থান ঃ

$A\ (x_1\ y_1)$ ও $B\ (x_2\ y_2)$ বিন্দু দুইটি $a\,x + by + c = 0$ রেখার কোন পার্শ্বে অবস্থিত **?**

$A\ (x_1\ y_1)$ দিয়ে সিদ্ধ $\longrightarrow L_1 = ax_1 + by_1 + c_1$; $B\ (x_2\ y_2)$ দিয়ে সিদ্ধ $\longrightarrow L_2 = ax_2 + by_2 + c_2$

(i) L_1 এবং L_2 একই চিহ্নযুক্ত হলে A, B বিন্দু দুইটি একই পার্শ্বে অবস্থিত।

(ii) L_1 এবং L_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে A, B বিন্দু দুইটি বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।