Differentiation (অন্তরীকরণ)

সীমা (Limit) সম্পর্কিত ঃ

১। সীমার ধর্মাবলী (Properties of Limit) ঃ

$(i)\ \lim_{x\to a}\{f_1(x) \pm f_2(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$ $(iii)\ \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$

$(ii)\ \lim_{x\to a}\{f_1(x) \times f_2(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x) \times \lim_{x\to a} f_2(x)$ $(iv)\ \lim_{x\to a}(constant) = constant$

২। সীমার সূত্রসমূহ (Laws of Limit) ঃ

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$

(iii) $\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ (iv) $\lim_{x\to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$

(v) $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$ (vi) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ (vii) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

৩। স্যান্ডউইচ উপপাদ্য (Sandwich Theorem) ঃ যখন ত্রিকোণমিতিক ও বীজগাণিতিক ফাংশন একসাথে থাকে তখন লিমিট নির্ণয়ের জন্য ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের রেঞ্জ দিয়ে শুরু করে ধীরে ধীরে L. H. L (left Hand Limit) এবং R. H. L (Right hand limit) বের করতে হয়। L. H. L = R. H. L হলে লিমিটের অস্থিত্ব থাকবে।

$L.H.L = \lim_{x\to a^-} f(x)$ $R.H.L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

৪। **বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা ঃ** $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবে যদি

$(i)\ \lim_{x\to a} f(x)$ এর অস্থিত্ব থাকে এবং $(ii)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ হয়।

অন্তরীকরণ (Differentiation) সম্পর্কিত ঃ

১। মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

২। $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ ৩। $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ৪। $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \mathrm{In} a$

৫। $\frac{d}{dx}(l\mathrm{n}x) = \frac{1}{x}$ ৬। $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$ ৭। $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

৮। $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ ৯। $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ ১০। $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

১১। $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

১২। $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

১৩। $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

১৪। $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$

১৫। $\frac{d}{dx}\{\text{constant} \times f(x) = (\text{constant})\frac{d}{dx}f(x)$

যেমন ঃ $\frac{d}{dx}(5\sin x) = 5\frac{d}{dx}(\sin x) = 5\cos x$

১৬। $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

১৭। $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

১৮। $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

১৯। $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

২০। $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

২১। $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$

২২। $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$

২৩। $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

২৪। $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Note 1: মূল নিয়মে অন্তরীকরণ করার জন্য প্রয়োজনীয় সূত্র

(i) $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n$

(ii) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \infty$

(iii) $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \infty$

(iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \ldots \infty$ [শর্ত $-1 < x \leqslant 1$]

(v) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \ldots \infty$ [শর্ত $-1 \leqslant x < 1$]

(vi) $\log_a x = \log_a e \times \log_e x = \log_a e \times \ln x$

Note 2: $\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}$ যেমনঃ $y = \log_x a = \frac{\ln a}{\ln x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x.\frac{d}{dx}(\ln a) - \ln a.\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2} = \frac{-\ln a}{x(\ln x)^2}$

Note 3: (i) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(ii) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}x$ যেমনঃ $\tan^{-1}\frac{a-bx}{a+bx} = \tan^{-1}\frac{a\left(1-\frac{bx}{a}\right)}{a\left(1+\frac{bx}{a}\right)}$

$= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}(\frac{bx}{a})$

Note 4: **অন্তরীকরণে ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপন**

$\sqrt{a^2 - x^2} \longrightarrow$ প্রতিস্থাপন $x = a\sin\theta / a\cos\theta$

যেমন ঃ $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ এর ক্ষেত্রে $x = \sin\theta$ ধরি (কারন $a = 1$)

$\sqrt{a^2 + x^2} \longrightarrow$ প্রতিস্থাপন $x = a\tan\theta / a\cot\theta$

$\sqrt{x^2 - a^2} \longrightarrow$ প্রতিস্থাপন $x = a\sec\theta / a\,\mathrm{cosec}\,\theta$

$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \longrightarrow$ প্রতিস্থাপন $x = \cos\theta$

$\frac{2x}{1-x^2}, \frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \longrightarrow$ প্রতিস্থাপন $x = \tan\theta$ [অথবা Note 3 এর (i)নং সূত্রের সাহায্যে করা better]

$\frac{1+x}{1-x}, \frac{1-x}{1+x} \longrightarrow$ প্রতিস্থাপন $x = \tan\theta$ [অথবা Note 3 এর (ii) নং সূত্রের সাহায্যে করা better]

Note: 5ঃ (i) $\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2 + 2\sin x/2 \cos x/2} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2} =$

$\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) \left[\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}\right]$

(ii) একইভাবে , $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x/2 + \sin x/2}{\cos x/2 - \sin x/2} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$

(iii)$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$ (iv) $\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \cot\frac{x}{2}$

২৫। **পরামিতিক ফাংশন ঃ** $x = f(t), y = f(t)$ হলে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

যেমনঃ $x = 2t^2, y = 4t \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4}{4t} = \frac{1}{t}$

২৬। $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx})$ (For Admission Test)

২৭। **ম্যাকলরিনের উপপাদ্য ঃ** $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \cdots\infty$

২৮। (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = (\frac{dy}{dx})_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$

২৯। (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - y_1 = \frac{-1}{(\frac{dy}{dx})_{(x_1,y_1)}}(x - x_1)$

৩০। (i) স্পর্শকটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$

(ii) স্পর্শকটি x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = \tan 0^\circ = 0$

(iii) স্পর্শকটি x অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dy}} = \cot 90^\circ = 0$

(ব্যাখ্যা ঃ $\frac{dy}{dx} = \tan 90^\circ \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\tan 90^\circ} = \cot 90^\circ = 0$)

(iv) স্পর্শকটি স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \tan(\pm 45^\circ) = \pm 1$

৩১। বেগ, $v = \frac{ds}{dt}$

৩২। সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

৩৩। বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

৩৪। বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

৩৫। গুরুমান/ সর্বোচ্চ মান এবং লঘুমান/ সর্বনিম্নমান এর জন্য, $f'(x) = 0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$

Remember : $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোন বিন্দুতে শূন্য (0) হওয়া সম্ভব না হলে ঐ বিন্দুতে গুরুমান বা লঘুমান থাকবে না।

যেমনঃ $\mathbf{y = x^3 - 6x^2 + 24x + 4}$ **হলে** $\mathbf{\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8)}$

$$\mathbf{= 3(x^2 - 2.x.2 + 2^2 + 4) = 3\{(x-2)^2 + 4\}}$$

$(x-2)^2$ এর সর্বনিম্ন মান $0 \therefore\ 3\{(x-2)^2 + 4\}$ এর সর্বনিম্ন মান $= 3 \times 4 = 12$

$\frac{dy}{dx}$ এর মান কখনই শূন্য (0) হওয়া সম্ভব না $\therefore y$ ফাংশনের কোন গুরুমান বা লঘুমান নেই ।

৩৬। $f''(x) < 0$ অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হলে $x = x_1$ বিন্দুতে গুরুমান/ সর্বোচ্চ মান থাকবে।

৩৭। $f''(x) > 0$ অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হলে $x = x_1$ বিন্দুতে লঘুমান/ সর্বনিম্ন মান থাকবে।

Remember: $\mathbf{x} = x_1$ বিন্দুতে $f''(x) = 0$ হলে $x = x_1$ বিন্দুতে $f'''(x)$এর মান বের করতে হবে। আবার $f'''(x) = 0$ হলে $f^{iv}(x)$ এর মান $x = x_1$ বিন্দুতে বের করতে হবে। এভাবে,

$f^{\ 2n(\text{জোড়})}(x_1) > 0$ বা < 0 হলে গুরুমান, লঘুমান থাকবে।

$f^{\ 2n+1(\text{বিজোড়})}\ (x_1) > 0$ বা < 0 হলে গুরুমান লঘুমান থাকবে না ।

অর্থাৎ $f'''(x_1) > 0$ বা < 0 এর ক্ষেত্রে গুরুমান, লঘুমান থাকবে না

$f^{iv}(x_1) > 0$ বা < 0 এর ক্ষেত্রে গুরুমান, লঘুমান থাকবে।