পাঠ-১

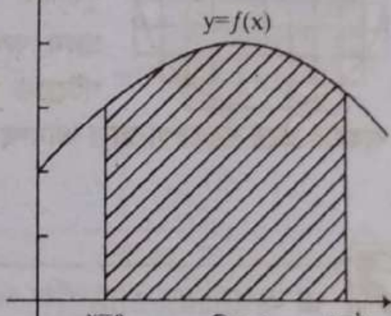
10.1 নির্দিষ্ট যোগজ (The Definite integral)

গ্রীক বিজ্ঞানী আর্কিমিডিস (287 B.C. – 212 B.C.) এর সময় হতে যোগজীকরণ তথা যোজিত ফলের মৌলিক ধারণা পাওয়া যায়। কতগুলি বক্ররেখা দিয়ে আবদ্ধ স্থানকে অসংখ্য ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে এদের সমষ্টি নির্ণয়ের মাধ্যমে উক্ত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হতে যোগজ ক্যালকুলাসের সৃষ্টি। সপ্তদশ শতাব্দীতে স্যার আইজ্যাক নিউটন ও গটফ্রেড লিবনীজ পৃথকভাবে প্রমাণ করেন যে, অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়ায় কোনো সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

আক্ষরিক অর্থে যোগজীকরণ অর্থ হলো অসংখ্য অতি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল সমষ্টি। সরলরেখা বা বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতলকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশে বিভক্তিকরণের মাধ্যমে এদের সমষ্টি দ্বারা সামগ্রিকভাবে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার পদ্ধতি হিসাবেই যোগজীকরণের উৎপত্তি। সমতলে সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ জ্যামিতিক চিত্রগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সহজ যেমন ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদি। কিন্তু বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র সুনির্দিষ্ট কোনো জ্যামিতিক আকৃতি লাভ না করলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় বেশ কষ্টসাধ্য। লিমিটের ধারণা থেকে নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

10.1.1 বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of a region bounded by curves):

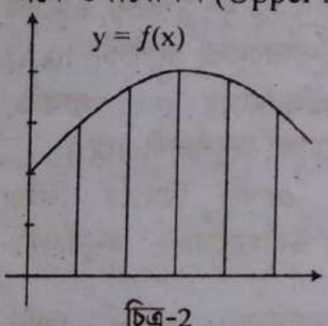
মনে করি, $y = f(x)$ বক্ররেখা, x-অক্ষ, $x = a$ ও $x = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের (চিত্র-1) ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



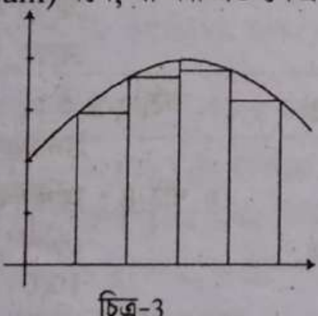
চিত্র-1

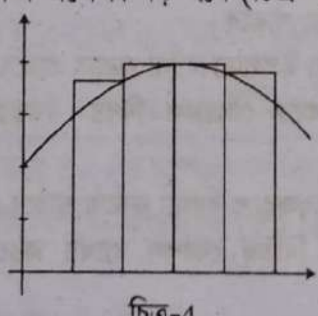
এক্ষেত্রে আমরা [a, b] ব্যবধিকে কতগুলি ছোট ছোট ব্যবধিতে বিভক্ত করে (চিত্র-2) উক্ত ব্যবধিতে উলম্বরেখা আঁকতে পারি।

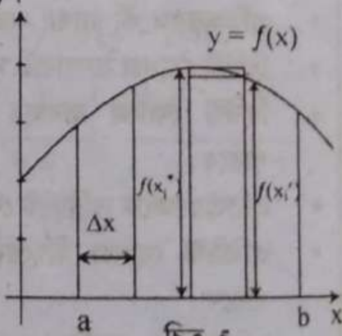
এখন যদি প্রতিটি উপব্যবধিতে $f(x)$ এর সবচেয়ে ছোট মান বিবেচনায় আয়তক্ষেত্র তৈরি করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি তাহলে, একে নিম্নযোগজ (Lower sum) বলে যা কাঙ্খিত ক্ষেত্রফল অপেক্ষা ছোট হবে (চিত্র-3) আবার যদি $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বিবেচনায় আয়তক্ষেত্র তৈরি করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি তাহলে একে উর্ধ্বযোগজ (Upper sum) বলে, যা কাঙ্খিত ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বড় হবে (চিত্র-4)।



চিত্র-2


চিত্র-3


চিত্র-4



চিত্র-5

উপরিউক্ত আলোচনা হতে আমরা বলতে পারি, কাঙ্খিত ক্ষেত্রফল নিম্ন যোগজ অপেক্ষা বড় এবং উর্ধ্ব যোগজ অপেক্ষা ছোট, কিন্তু সঠিক ক্ষেত্রফল কত তা বলতে পারি না।

এখন, [a, b] ব্যবধিকে n সংখ্যক সমান প্রস্থের ব্যবধিতে বিভক্ত করি, যাদের প্রস্থ Δx (চিত্র-5)। প্রতিটি ব্যবধিতে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান $f(x_i^*)$ ও সর্বনিম্ন মান $f(x'_i)$

তাহলে, উর্ধ্ব যোগজের মানকে আমরা নিম্নোক্তভাবে লিখতে পারি:

$$f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots\ldots\ldots + f(x_n^*)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

অনুরূপভাবে নিম্ন যোগজের মান $= \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x$

এখন কাঙ্খিত ক্ষেত্রফল A হলে আমরা লিখতে পারি $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x \le A \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

যদি $n \to \infty$ (উপব্যবধির সংখ্যা) হলে কাঙ্খিত ক্ষেত্রফল, উর্ধ্বযোগজ ও নিম্নযোগজ সমান হবে অর্থাৎ

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x$$

উপরিউক্ত আলোচনা হতে আমরা পাই, $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ……… (i)

যেখানে $[a, b]$ ব্যবধিকে Δx প্রস্থ বিশিষ্ট n সংখ্যক উপব্যবধিতে ভাগ করা হয়েছে। (i) নং সমীকরণকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয় $A = \int_a^b f(x)dx$

সুতরাং আমরা বলতে পারি **নির্দিষ্ট যোগজ হলো একটি বিশেষ ধরনের সমষ্টি যা লিমিট দ্বারা সজ্ঞায়িত।**

10.2 প্রতি-অন্তরজ (Antiderivative)

অনির্দিষ্ট যোগজের প্রতিঅন্তরজ থেকে নির্দিষ্ট যোগজের মান নির্ণয় করা হয়। প্রতিঅন্তরজ ক্যালকুলাসে খুবই গুরুত্বপূর্ণ কারণ ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য ব্যবহার করে নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে প্রতিঅন্তরজ ব্যবহার করা হয়।

যদি $\frac{d}{dx}(f(x)) = g(x)$; $\int g(x)\,dx = f(x) + c$ হয় তবে $f(x)$ কে $g(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ বলা হয়।

যদি $f(x)$, $[a, b]$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য হয় তাহলে, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

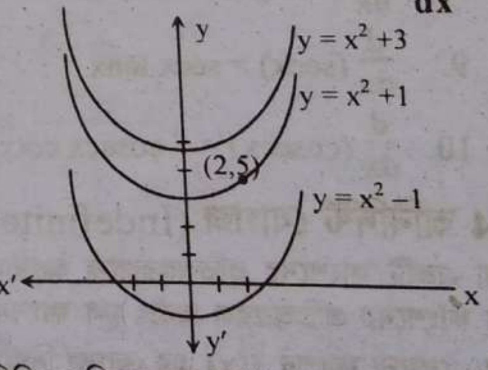
$f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ হলো $F(b) - F(a)$

উদাহরণ: প্রতিঅন্তরজের সাহায্যে দেখাও যে, $\int_0^{12}(3x+5)dx = 276$

ধরি, $f(x) = 3x + 5$ তাহলে $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 5x$; কারণ, $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2}{2} + 5x\right) = 3x + 5$

এখন $\int_0^{12}(3x+5)dx = F(12) - F(0) = \left[\frac{3(12)^2}{2} + 5.12\right] - \left[\frac{3.0}{2} + 0\right] = 216 + 60 = 276$

উদাহরণ: একটি প্রতিঅন্তরজ নির্ণয় কর যা (2, 5) বিন্দুগামী এবং x এর যে কোনো মানের জন্য ঢাল $\frac{dy}{dx} = 2x$, চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রতিঅন্তরজ দেখাও।



সমাধান: $\frac{dy}{dx} = 2x$

$y = \int 2x\,dx$ [যোগজীকরণ করে] $= 2.\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$

এখানে $x^2 + c$ একটি প্রতিঅন্তরজ।

যেহেতু ইহা (2, 5) বিন্দুগামী

$5 = 2^2 + c \Rightarrow c = 1$

$\therefore y = x^2 + 1$, অপর একটি প্রতিঅন্তরজ $x^2 + 1$ চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রতিঅন্তরজ দেখানো হলো।

10.3 নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য (Fundamental theorem on definite integrals)

বর্ণনা: যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $F'(x) = f(x)$ হয় অর্থাৎ $f(x)$ ফাংশনের অনির্দিষ্ট যোগজ $F(x)$ হয়, তবে $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

এখানে, a কে নির্দিষ্ট যোগজের নিম্নসীমা এবং b কে উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

নোট: নির্দিষ্ট যোগজে যোগজীকরণ ধ্রুবক ব্যবহার করার প্রয়োজন হয় না। কারণ,

যদি $\int f(x)\,dx = F(x)$ হয়, তবে $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ……… (i)

আবার, যদি $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+c]_a^b = \{F(b)+c\} - \{F(a)+c\} = F(b) - F(a)$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে দেখা যায় যে, $\int_a^b f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয়ে যোগজীকরণ ধ্রুবক প্রভাব বিস্তার করে না।

10.3.1 '0' (শূন্য) এর যোগজ [Integrals of '0' (zero)]

আমরা জানি, c একটি ধ্রুবক হলে $\frac{d}{dx}(c) = 0$ তাহলে $\int 0\,dx = 0 + c = c$ অর্থাৎ '0' এর যোগজ c (ধ্রুবক)।

10.3.2 কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ (Integrals of some standard functions)

যোগজীকরণ অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া। তাই এদের সম্পর্ক বুঝার জন্য, নিচে কয়েকটি ফাংশনের অন্তরজ ফল এবং যোগজ ফল পাশাপাশি দেওয়া হলো।

1. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $\qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ (n \neq -1)$
2. $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$ $\qquad \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$
3. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ $\qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$
4. $\frac{d}{dx}\{\ln|x|\} = \frac{1}{x}$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ x \neq 0$
5. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$
6. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ $\qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
8. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$ $\qquad \int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
9. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ $\qquad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
10. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,x) = -\text{cosec}\,x \cot x$ $\qquad \int \text{cosec}\,x \cot x\,dx = -\text{cosec}\,x + c$

10.4 অনির্দিষ্ট যোগজ (Indefinite integral)

কোনো একটি ফাংশনের প্রতিঅন্তরজকে অন্তরীকরণ করে যে অন্তরজ সহগ পাওয়া যায় তাকে পুনরায় যোগজীকরণ করলে ফাংশনের প্রতিঅন্তরজ অর্থাৎ মূল ফাংশন পাওয়া যায়। অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ একটি অপরটির বিপরীত প্রক্রিয়া। কোনো ফাংশন $f(x)$ এর যোগজ নির্ণয়ের পদ্ধতিকে যোগজীকরণ বলা হয়। একে সাধারণত $\int$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ফাংশন $f(x)$ এর পরে dx ব্যবহৃত হয়। dx দ্বারা যোগজীকরণের চলক x বুঝায়।
যেমন: $\int t^2 dt$ এর dt দ্বারা যোগজীকরণের চলক t বুঝায়।

10.4.1 প্রতিঅন্তরজকে অনির্দিষ্ট যোগজরূপে ব্যাখ্যা

যদি F(x) ফাংশনের অন্তরক $f(x)$ হয় অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ হয়, তবে F(x) ফাংশনকে $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ বলা হয়। একে $\int f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$, এখানে c যোজিত করণের ধ্রুবক। cos x এর একটি প্রতি অন্তরজ হলো sin x + c,
c এর বিভিন্ন মানের জন্য cos x এর বিভিন্ন প্রতিঅন্তরজ পাওয়া যাবে।
প্রতিটি প্রতি অন্তরজকে অন্তরীকরণ করলে একই মান পাওয়া যাবে।

যেমন $\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x, \frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x, \frac{d}{dx}(\sin x - \pi) = \cos x, \frac{d}{dx}(\sin x + 5) = \cos x$ ইত্যাদি।

$\sin x + c, \sin x + 1, \sin x - \pi, \sin x + 5$ এর অন্তরজ হলো $\cos x$

এবং $\cos x$ এর প্রতিঅন্তরজ হলো, $\sin x + c, \sin x + 1, \sin x - \pi, \sin x + 5$

10.4.2 যোগজীকরণ ধ্রুবক (Integrating Constant)

যদি $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ হয়, তবে $\frac{d}{dx}\{F(x) + c\} = \frac{d}{dx}\{F(x)\} + \frac{d}{dx}(c) = f(x) + 0 = f(x)$

$$\Rightarrow F(x) + c = \int f(x)\,dx \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

অর্থাৎ $F(x)$ ফাংশন যদি $f(x)$ এর যোজিত ফল হয়, তবে যে কোনো ধ্রুবক c এর জন্য $F(x) + c$ ও $f(x)$ এর যোজিত ফল। সুতরাং কোনো ফাংশন $f(x)$ এর সাধারণ যোজিত ফল নির্ণয় করতে $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ (anti-derivative) $F(x)$ এর সাথে অজানা ধ্রুবক c যোগ করতে হয়। এই ধ্রুবককে যোগজীকরণ ধ্রুবক বলা হয়।

যেমন: (i) $\frac{d}{dx}(x^n + c) = nx^{n-1}$ অর্থাৎ $\int nx^{n-1}dx = x^n + c$ বা, $\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + c$

(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$ অর্থাৎ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(iii) $\frac{d}{dx}(\ell n x + c) = \frac{1}{x}$ অর্থাৎ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ell n x + c$ (i), (ii) ও (iii) এ ব্যবহৃত 'c' একটি ধ্রুবক।

10.4.3 যোগজের যোগাশ্রয়ী বৈশিষ্ট্য (Linear properties of integrals)

$\int \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$

এ ধর্ম দুইটির অধিক ফাংশনের জন্যও প্রযোজ্য।

অর্থাৎ, $\int \{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\}dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)\}dx$

10.4.4 যোগজের স্কেলার গুণ (Scalar multiplication of integral)

$\int \{cf(x)\}\,dx = c\int f(x)\,dx.$

অনুরূপভাবে, $\int \{c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x)\}\,dx = c_1\int f_1(x)\,dx \pm c_2 \int f_2(x)\,dx$

কাজ: যোগজ নির্ণয় কর: (i) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ (ii) $\int \cot^2 x\,dx$ (iii) $\int \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $\int \frac{at^2 + bt + c}{t}dt$ এর যোজিত ফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int \frac{at^2 + bt + c}{t}dt = \int\left(at + b + \frac{c}{t}\right)dt = a\int tdt + b\int dt + c\int \frac{dt}{t} = \frac{at^2}{2} + bt + c\ln|t| + k.$

উদাহরণ-2. $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৬, ০৯, ০৭, ১২; রা: বো: ১৬, ১০, ০৮; চ: বো: ১ ০৮, ০৩; কু: বো: ১৩, ১১, ০৫; য: বো: ০৭; সি: বো: ১৪, ১০, ০৪; ব: বো: ০৯, ০৪; দি: বো: ১১]

সমাধান:
$$\begin{aligned}\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx &= \int (1 + \tan^2 x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx\\
&= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \tan^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx\\
&= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin^2 x}\,dx\\
&= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \sec^2 x\,dx\\
&= -\cot x + \tan x + c\\
&= \tan x - \cot x + c.\end{aligned}$$

উদাহরণ-3. $\int\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}d\theta$ এর যোজিত ফল নির্ণয় কর। [য: বো: ১৪, ০৩]

সমাধান: $\int\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}d\theta=\int\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}d\theta=\int\tan^2\theta d\theta$

$=\int(\sec^2\theta-1)\,d\theta=\int\sec^2\theta\,d\theta-\int d\theta$

$=\tan\theta-\theta+c$

অনুশীলনী-10(A)

নিম্নের যোগজগুলি নির্ণয় কর: (1-15)

1. (i) $\int(2x+5x^4)\,dx$ (ii) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (iii) $\int 11x^5\,dx$ (iv) $\int\frac{6}{x^3}\,dx$ (v) $\int dz$

2. $\int\sin5x\,dx$ [সি: বো: ০৫] 3. (i) $\int x\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ [য: বো: ০৪] (ii) $\int\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ০৯]

(iii) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (iv) $\int(x^3+2)(x+1)\,dx$

4. $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$ 5. $\int\frac{5x^4+4x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$ 6. $\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$

7. $\int(3^x+e^x)\,dx$ 8. $\int\sec x\,(\sec x+\tan x)\,dx$

9. (i) $\int\frac{dx}{1+\cos2x}$ [কু: বো: ০৮] (ii) $\int\sqrt{1-\cos2x}\,dx$ [চ: বো: ০৯, ০৭, ১২; সি: বো: ০৬, ০৩; ব: বো: ০৮]

10. $\int\sqrt{1+\sin2x}\,dx$ 11. $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin2x}}dx$

12. (i) $\int\tan^2x\,dx$ [ঢা: বো: ০৫; কু: বো: ০৭] (ii) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ [চ: বো: ১০; য: বো: ১৩, ০৭]

13. $\int\frac{dx}{1-\sin x}$ [ঢা: বো: ০৭; য: বো: ১৫; সি: বো: ১৩]

14. $\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$ 15. $\int\frac{a\sin^3\theta+b\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}d\theta$

উত্তরমালা

1. (i) x^2+x^5+c (ii) $3x^{\frac{1}{3}}+c$ (iii) $\frac{11x^6}{6}+c$ (iv) $-\frac{3}{x^2}+c$

(v) $z+c$ 2. $-\frac{1}{5}\cos5x+c$

3. (i) $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$ (ii) $x-\frac{1}{x}+c$ (iii) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+2\sqrt{x}+c$ (iv) $\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+x^2+2x+c$

4. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$ 5. $\frac{15}{14}x^{\frac{14}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}}+\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$ 6. $\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)+c$ 7. $\frac{3^x}{ln3}+e^x+c$

8. $\tan x+\sec x+c$ 9. (i) $\frac{1}{2}\tan x+c$ (ii) $-\sqrt{2}\cos x+c$

10. $\sin x-\cos x+c$; 11. $x+c$ 12. (i) $\tan x-x+c$ (ii) $\tan x-\sec x+c$

13. $\tan x+\sec x+c$; 14. $-\text{cosec}\theta+c$ 15. $a\sec\theta-b\,\text{cosec}\theta+c$

10.4.5 প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of substitution)

যদি $\int f(x)dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে ইন্টিগ্রেন্ড (integrand) $f(x)$ আমাদের জানা কোনো আদর্শ বা প্রামান্য আকারের নয় অর্থাৎ $\int f(x)dx$ এর সরাসরি মান নির্ণয় করা যায় না। প্রতিস্থাপন পদ্ধতির লক্ষ্য হলো চলকের পরিবর্তনের মাধ্যমে ইন্টিগ্রেন্ডকে জানা ও একটি আদর্শ ইন্টিগ্রেন্ডে পরিণত করা। নিম্নে চলকের পরিবর্তন পদ্ধতি আলোচনা করা হলো:

যদি $I = \int f(x)dx$ তাহা হইলে সংজ্ঞানুযায়ী $\frac{dI}{dx} = f(x)$

এখন $x = g(u)$ হইলে $\frac{dx}{du} = g'(u)$ $\therefore \frac{dI}{du} = \frac{dI}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = f(x)\, g'(u)$

বা, $\frac{dI}{du} = f\{g(u)\}g'(u)$ $\quad [\because x = g(u)]$

সুতরাং সংজ্ঞানুযায়ী, $I = \int f\{g(u)\}g'(u)du$ বা, $\int f(x)dx = \int f\{g(u)\}g'(u)du$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে ব্যবহৃত সূত্রসমূহ ও এদের প্রমাণ

1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c, (n \neq -1)$

প্রমাণ: মনে করি, $ax + b = z \Rightarrow adx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{a}$

$\therefore \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int z^n dz = \frac{1}{a} \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

2. $\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

প্রমাণ: মনে করি, $ax + b = z \Rightarrow adx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{a}$

$\therefore \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \sin z\, dz = -\frac{1}{a}\cos z + c = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

দ্রষ্টব্য: $b = 0$ হলে, $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

3. $\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

প্রমাণ: 2 নং এর অনুরূপ।

4. $\int \tan x\, dx = ln\,|\sec x| + c$

প্রমাণ: $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

মনে করি, $\cos x = z \therefore -\sin x\, dx = dz \Rightarrow \sin x\, dx = -dz$

$\therefore \int \tan x\, dx = -\int \frac{dz}{z} = -ln\,|z| + c = -ln\,|\cos x| + c = ln\,|\sec x| + c$

5. $\int \cot x\, dx = ln\,|\sin x| + c$

প্রমাণ: $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$

মনে করি, $\sin x = z \therefore \cos x\, dx = dz$

$\therefore \int \cot x\, dx = \int \frac{dz}{z} = ln\,|z| + c = ln\,|\sin x| + c$

6. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

প্রমাণ : $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

ধরি, $\sec x + \tan x = z \Rightarrow (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = dz$

$\therefore \int \sec x\, dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$

আবার, $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$ [লব ও হরকে $\cos\frac{x}{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$\therefore \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

7. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c = -\ln|\operatorname{coscex} + \cot x| + c$

প্রমাণ: $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$ [লব ও হরকে $\sec^2\frac{x}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

মনে করি, $\tan\frac{x}{2} = z \therefore \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx = dz$

$\therefore \int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$

অথবা, $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{\operatorname{cosec} x + \cot x} dx$ [লব ও হরকে $\operatorname{cosec} x + \cot x$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x + \cot x} dx$$

মনে করি, $\operatorname{cosec} x + \cot x = z \quad \therefore (-\operatorname{cosec} x \cot x - \operatorname{cosec}^2 x)\, dx = dz$

$\Rightarrow (\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cot x)\, dx = -dz$

$\therefore \int \operatorname{cosec} x\, dx = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| + c = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c$

দ্রষ্টব্য: 6 নং এর প্রমাণ 7 নং এর অনুরূপ এবং 7 নং এর প্রমাণ 6 নং এর অনুরূপ করা যায়।

৪. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

প্রমাণ: মনে করি, $f(x) = z \quad \therefore f'(x)\,dx = dz.$

$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|f(x)| + c$

অর্থাৎ কোনো রাশি যদি এমন হয় যে, তার হরের অন্তরজ লবে অবস্থিত, তাহলে উক্ত রাশিটির যোগজ হবে ℓn |হর| + c (ধ্রুবক)

যেমন: $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ell n\,|\sin x| + c,\ \int \frac{(6x+2)\,dx}{3x^2+2x+1} = \ell n\,|3x^2+2x+1| + c$

দ্রষ্টব্য: 4 নং হতে 7 নং পর্যন্ত সূত্রের প্রমাণে 8 নং প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণমালা

কৌশল-1: যদি কোনো যোগজের যোজ্য 1 মাত্রার রাশির ঘাত আকারে থাকে সেক্ষেত্রে রাশিটিকে z ধরে যোগজীকরণ করা হয়।

উদাহরণ-1. $\int (5-3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $5 - 3x = z \Rightarrow -3dx = dz \quad \therefore dx = -\frac{1}{3}dz$

$$\therefore \int (5-3x)^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int z^{\frac{3}{2}}dz = -\frac{1}{3}\frac{z^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} + c = -\frac{2}{15}(5-3x)^{\frac{5}{2}} + c$$

কৌশল-2: যদি কোনো যোগজ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}$ আকারে থাকে উহাকে যোগজীকরণ করতে হলে $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$ কে $\sqrt{\ }$ মুক্ত করতে হয়।

উদাহরণ-2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ নির্ণয় কর। [বিআইটি ৯৪-৯৫; দি: বো: ১০]

সমাধান: $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int\sqrt{x+1}\,dx - \int\sqrt{x-1}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left\{(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$$

কৌশল-3. যোগজীয় রাশির sinx বা cosx ফাংশনের উচ্চতর ঘাতকে sinx বা cosx এর গুণিতক কোণে প্রকাশ করে যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ-3. $\int \cos^2 x\,dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৮]

সমাধান: $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

উদাহরণ-4. $\int \sin^3x \cos^3x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় কর। [য: বো: ০৬]

সমাধান: $\int \sin^3x \cos^3x\, dx = \int \sin^3x \cos^2x . \cos x\, dx = \int \sin^3x\,(1 - \sin^2x) \cos x\, dx$

মনে করি, $\sin x = z \therefore \cos x\, dx = dz$

$\therefore \int \sin^3x \cos^3x\, dx = \int z^3(1 - z^2)\, dz = \int (z^3 - z^5)\, dz = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{6} z^6 + c = \frac{1}{4} \sin^4x - \frac{1}{6} \sin^6x + c$

উদাহরণ-5. $\int \sin^4x\, dx$ যোগজটি নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৯]

সমাধান: $\int \sin^4x\, dx = \frac{1}{4} \int (2\sin^2x)^2\, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos2x + \cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos2x\, dx + \frac{1}{8} \int 2\cos^2 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos2x\, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos4x)\, dx$$
$$= \frac{3}{8} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos2x\, dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x\, dx$$
$$= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin4x + c.$$

কৌশল-4. যোগজীয় রাশি $\sin mx \cos nx$ বা $\sin mx \sin nx$ বা $\cos mx \cos nx$; $m, n \in \mathbb{R}$ আকারের হলে সূত্র প্রয়োগে রাশিটিকে sin ও cos এর পৃথক ফাংশনে পরিণত করে যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ-6. $\int \sin px \cos qx\, dx$, $(p > q)$ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৩; সি: বো: ০৭]

সমাধান: $\int \sin px \cos qx\, dx = \frac{1}{2} \int 2\sin px \cos qx\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int \{\sin (p + q)x + \sin (p - q)x\}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(p + q)x}{p + q} - \frac{\cos(p - q)x}{p - q}\right\} + c$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(p + q)x}{p + q} + \frac{\cos(p - q)x}{p - q}\right\} + c.$$

কৌশল-5. যদি যোগজীয় রাশির একটি অংশ (১ম অংশ) কে অন্তরীকরণ করলে অন্য অংশ পাওয়া যায়, তবে '১ম অংশ = z' ধরে যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ-7. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ নির্ণয় কর। [য: বো: ০৬; দি: বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, $1 - x^2 = z \Rightarrow - 2x dx = dz \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2}\, dz.$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2} . 2\sqrt{z} + c = -\sqrt{1 - x^2} + c$$

কৌশল-6: যদি কোনো যোগজের যোজ্য রাশি ভগ্নাংশ আকারে থাকে এবং হরকে z ধরে অন্তরীকরণ করলে যদি লব পাওয়া যায় সেক্ষেত্রে ln লিখে হর বসালে হয়।

উদাহরণ-8. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$ নির্ণয় কর। [দি: বো: ১০]

সমাধান: মনে করি, $e^x + e^{-x} = z \Rightarrow (e^x - e^{-x})\, dx = dz \therefore \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{dz}{z} = ln\,|z| + c = ln\,|e^x + e^{-x}| + c$

কৌশল-7: যদি কোনো যোগজের যোজ্য রাশিতে বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন এবং উহার অন্তরীকরণ ফল বিদ্যমান থাকে, সেক্ষেত্রে বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনকে z ধরে অন্তরীকরণ করে সরলীকরণ করে যোগজীকরণ করতে হয়।

উদাহরণ-9. $\int \frac{x^2 \tan^{-1}x^3}{1+x^6} dx$ নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৭; কু: বো: ১৫, ০৮; য: বো: ০৬]

সমাধান: মনে করি, $\tan^{-1}x^3 = z \Rightarrow \frac{3x^2\,dx}{1+x^6} = dz \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}dz$

$$\therefore \int \frac{x^2 \tan^{-1}x^3}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int z\,dz = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}z^2 + c = \frac{1}{6}(\tan^{-1}x^3)^2 + c$$

উদাহরণ-10. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$ নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৭; দি: বো: ১৩; চ: বো: ১০, ০৫]

সমাধান: মনে করি, $x^{\frac{1}{4}} = z \Rightarrow x = z^4 \Rightarrow dx = 4z^3\,dz.$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4z^3\,dz}{z^2 - z} = 4\int \frac{z^2}{z-1}dz$$

$$= 4\int \frac{z(z-1)+1\,(z-1)+1}{z-1}dz$$

$$= 4\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz = 4\int z\,dz + 4\int dz + 4\int\frac{dz}{z-1}$$

$$= 4.\frac{z^2}{2} + 4z + 4\,ln\,|z-1| + c$$

$$= 2z^2 + 4z + 4\,ln\,|z-1| + c$$

$$= 2\sqrt{x} + 4\,x^{\frac{1}{4}} + 4ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + c$$

$$= 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4ln\left|\sqrt[4]{x} - 1\right| + c$$

অনুশীলনী-10(B)

নিম্নের যোগজগুলি নির্ণয় কর: (1-29)

1. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$ **2.** $\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{3}{5-x}\right)dx$ **3.** $\int e^{5-\frac{x}{2}}dx$

4. $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}}dx$ [মাদ্রাসা:বো: ১০] **5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ **6.** (i) $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$ (ii) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ [বুয়েট ০৫-০৬; ঢা:বো: ১৪; চ:বো: ১৪; য:বো: ১৬]

7. $\int\sqrt{1-\cos 4x}\,dx$ [চ: বো: ০৫] **8.** (i) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ [রা: বো: ১০, ১১; কু: বো: ১৩; ব: বো: ০৩; য: বো: ১১] (ii) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ **9.** $\int \cos^3 3\theta\,d\theta$ **10.** $\int \sin^2x\cos^2x\,dx$ [বুয়েট ০৩-০৪; ঢা:বো: ১৩; দি:বো: ১৬; য:বো: ০৮; রা:বো: ১৩; চ:বো: ০৬]

11. $\int \cos^4x\,dx$ [ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ১৪, ০৭; দি: বো: ১৩; চ: বো: ১৬, ০৫; সি: বো: ০৮, ০৪] **12.** $\int \sin x^\circ dx$ [চ: বো: ০৪]

13. (i) $\int 5\cos4x\sin3x\,dx$ [ঢা: বো: ০৬, ০৪; রা: বো: ০৯, ০৩; দি: বো: ১৪, ০৯; সি: বো: ১৪, ০৯, ০৩; য: বো: ১২; কু: বো: ১৩, ০৩, ০৬; ব: বো: ১৪, ১০, ০৬; চ: বো: ১৫, ১১] (ii) $\int \sin2x\sin4x\,dx$ [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৫; য: বো: ০৪] (iii) $\int \sin5x\sin3x\,dx$ [চ: বো: ১২; য: বো: ১৪, ১০; ব: বো: ০৮, ১২; দি: বো: ১২; সি: বো: ১২] (iv) $\int \cos2\theta\cos\theta\,d\theta$

14. **(i)** $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$ [কু: বো: ১৪, ১০, ০৭; রা: বো: ১২; চ: বো: ০৯; য: বো: ০৭; সি: বো: ১১]
(ii) $\int (2\cos x + \sin x)\cos x\, dx$ [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ০৯]

15. **(i)** $\int x e^{x^2} dx$ [কু: বো: ০৫] **(ii)** $\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x}\, dx$ **(iii)** $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)(e^x + \ln x)\, dx$
(iv) $\int \sec^2 x\, e^{\tan x} dx$ **(v)** $\int \frac{e^{a\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ **(vi)** $\int \frac{e^{a\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$ [মাদ্রাসা বো: ১৪, ১২]
(vii) $\int \cos x\, e^{\sin x} dx$ [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৪] **(viii)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ **(ix)** $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ [কু বো: ১২;ব: বো: ০৯]
(x) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ **(xi)** $\int \frac{dx}{x(1+\ell n x)^2}$ **(xii)** $\int (1+\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta$ [কু: বো: ০৩]
(xiii) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ [রা: বো: ১০; কু: বো; ১৬, ০৫] **(xiv)** $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$ [য: বো: ০৪] **(xv)** $\int \frac{1+\cos x}{\sqrt[3]{x+\sin x}} dx$
(xvi) $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx$ [ঢা: বো: ১৫, ০৭; রা: বো; ০৩; ব: বো: ১৩]
(xvii) $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2} dx$ [কু: বো: ০৬; ব: বো: ১১] **(xviii)** $\int \frac{\sin(2+5\ln x)}{x} dx$ **(xix)** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
(xx) $\int \frac{\sec^2\theta}{2+4\tan\theta} d\theta$ **(xxi)** $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$ [রা: বো: ০৯; দি: বো: ১৪, ০৯; চ: বো: ০৬; কু: বো: ০৯; য: বো: ০৮; সি: বো: ০৯, ০৭, ০৪; ব: বো: ০৬] **(xxii)** $\int e^{2x}\tan e^{2x} \sec e^{2x} dx$ [চ: বো: ০৭] **(xxiii)** $\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ [য: বো: ০৭]
(xxiv) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$ **(xxv)** $\int \frac{2x\tan^{-1}x^2}{1+x^4} dx$ [রা: বো: ১১]

16. **(i)** $\int \frac{dx}{e^x+1}$ **(ii)** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ [য: বো: ০৪] **(iii)** $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}} dx$ **(iv)** $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

17. **(i)** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$ [ঢা: বো: ১০; ব: বো: ০৪; সি: বো: ১১] **(ii)** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}}$ **(iii)** $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(iv) $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ **(v)** $\int \frac{2t\sin^{-1}t^2}{\sqrt{1-t^4}} dt$ **(vi)** $\int \frac{(\sec^{-1}x)^4}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ **18.** $\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} d\theta$ **19.** $\int \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$

20. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ [ঢা: বো: ১০, ০৮; চ: বো: ১০, ০৬; রা: বো: ০৮, ০৫, ১২; কু: বো: ১৬, ১০, ০৮; য: বো: ০৮, ১২; সি: বো: ১৪, ১০, ০৮, ০৬; ব: বো: ১৪, ০৯, ০৫, ১২; দি: বো: ১১]

21. $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [ঢা: বো: ১৩, ০৩; রা: বো: ০৫; কু: বো: ০৭, ০৪, ১২; য: বো: ১৩, ০৯; সি: বো: ০৬; ব: বো: ১৪, ১১, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১১]

22. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x} dx$ [কুয়েট ১১-১২; সি: বো: ১৬; য: বো: ০৫] **23.** $\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\, dx$ [য: বো: ১৬; ব: বো: ১৬]

24. **(i)** $\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}} dx$ **(ii)** $\int \sin^3 x\cos x\, dx$ **25.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ **26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ **27.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ [রা: বো: ১১]

28. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **29.** **(i)** $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ [রা: বো: ০৮; ব: বো: ১১] **(ii)** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$

উত্তরমালা

1. (i) $-\frac{2}{9}\sqrt{16-9x}+c$ (ii) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-3}+c$ (iii) $\frac{1}{2}(3x-5)^{\frac{2}{3}}+c$

2. $ln\left|\frac{(x-3)^2}{(5-x)^3}\right|+c$ 3. $-2e^{5-x/2}+c$ 4. $\frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}}+4e^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{-x}{2}}+c$ 5. $\frac{1}{3}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right]+c$

6. (i) $\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}-6\sqrt{x+3}+c$ (ii) $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1-x}+c$ 7. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+c$

8. (i) $\tan\frac{x}{2}+c$ (ii) $-\cot\frac{x}{2}+c$ 9. $\frac{1}{36}\sin 9\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta+c$ 10. $\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]+c$

11. $\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]+c$ 12. $-\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180}+c$ 13. (i) $\frac{5}{14}(7\cos x-\cos 7x)+c$
(ii) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin 6x\right]+c$ (iii) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$ (iv) $\frac{1}{6}\sin 3\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+c$

14. (i) $-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 4x+c$ (ii) $x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

15. (i) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$ (ii) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+3x)^3}+c$ (iii) $\frac{1}{2}(e^x+ln x)^2+c$ (iv) $e^{\tan x}+c$ (v) $\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x}+c$
(vi) $\frac{1}{a}e^{a\tan^{-1}x}+c$ (vii) $e^{\sin x}+c$ (viii) $2e^{\sqrt{x}}+c$ (ix) $ln|1+ln\,x|+c$ (x) $-\frac{1}{ln|x|}+c$
(xi) $-\frac{1}{1+ln x}+c$ (xii) $-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4+c$ (xiii) $2\sqrt{\sin x}+c$ (xiv) $ln|x+\sin x|+c$
(xv) $\frac{3}{2}(x+\sin x)^{\frac{2}{3}}+c$ (xvi) $-\frac{1}{4}ln|3+4\cos x|+c$ (xvii) $\frac{1}{1-\sin x}+c$ (xviii) $-\frac{1}{5}\cos(2+5ln x)+c$
(xix) $2\sin\sqrt{x}+c$ (xx) $\frac{1}{4}ln|2+4\tan\theta|+c$ (xxi) $-ln[ln|\cos x|]+c$ (xxii) $\frac{1}{2}\sec e^{2x}+c$
(xxiii) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$ (xxiv) $-\sqrt{16-x^2}+c$ (xxv) $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x^2)^2+c$

16. (i) $-ln|1+e^{-x}|+c$ (ii) $\tan^{-1}(e^x)+c$ (iii) $\frac{e^{4x}}{4}+c$ (iv) $x+2\ell n(1+e^{-x})+c$

17. (i) $ln|\tan^{-1}x|+c$ (ii) $2\sqrt{\tan^{-1}x+3}+c$ (iii) $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+c$ (iv) $\frac{1}{3}(\sin^{-1}x)^3+c$
(v) $\frac{1}{2}(\sin^{-1}t^2)^2+c$ (vi) $\frac{1}{5}(\sec^{-1}x)^5+c$ 18. $ln|\sin\theta+\cos\theta|+c$ 19. $2\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)+c$

20. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}ln|\cos x+\sin x|+c$ 21. $ln|\sec(\sin^{-1}x)|+c$ 22. $2\sqrt{\tan x}+c$

23. $\frac{2}{3}(\sqrt{\sin x})^3-\frac{2}{7}(\sqrt{\sin x})^7+c$ 24. (i) $2\sqrt{\tan x}+\frac{2}{5}\sqrt{(\tan x)^5}+c$ (ii) $\frac{1}{4}\sin^4 x+c$

25. $6\left[\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-x^{\frac{1}{6}}+\tan^{-1}x^{\frac{1}{6}}\right]+c$

26. $2ln|1+\sqrt{x}|+c$ 27. $\frac{1}{2}\sec^{-1}x^2+c$

28. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$ 29. (i) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+c$ (ii) $\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)+c$

পাঠ-৪

10.5 অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের বিভিন্ন কৌশল
(Different techniques of determination of indefinite integral)

আদর্শ যোগজ সম্পর্কিত সূত্রসমূহ ও এদের প্রমাণ:

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

প্রমাণ: মনে করি, $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta d\theta$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c.$

অনুসিদ্ধান্ত: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$

2. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c; (a > x)$

প্রমাণ: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right\} dx = \frac{1}{2a}\left\{\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right\}$

$= \frac{1}{2a}\{ln|a+x| - ln|a-x|\} + c = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

3. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c; (x > a)$

প্রমাণ: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \int \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right\} dx = \frac{1}{2a}\left\{\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right\}$

$= \frac{1}{2a}\{ln|x-a| - ln|x+a|\} + c = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

প্রমাণ: মনে করি, $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$ এবং $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

অনুসিদ্ধান্ত: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

প্রমাণ: মনে করি, $x + \sqrt{x^2-a^2} = z \Rightarrow \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right)dx = dz \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = dz$

$\Rightarrow \frac{z}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = dz \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{dz}{z}$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{dz}{z} = ln|z| + c = ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

প্রমাণ: 5 নং এর অনুরূপ।

7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ [সি: বো: ১৫]

প্রমাণ: মনে করি, $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$ এবং $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$\therefore \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,.\,a\cos\theta\,d\theta = a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]+c$$
$$= \frac{a^2}{2}\theta+\frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta+c$$
$$= \frac{a^2}{2}\theta+\frac{a^2}{2}\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}+c$$
$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+c$$
$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

সূত্র: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

কাজ: যোগজীকরণ কর: (i) $\int\sqrt{36-x^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{25-9x^2}\,dx$

উদাহরণমালা

কৌশল-8: যদি কোনো যোগজ $\int\frac{dx}{ax^2+b}$ আকারে থাকে, সেক্ষেত্রে ax^2+b কে $x^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ আকারে প্রকাশ করে যোগজীকরণ করা হয়।

উদাহরণ-1. $\int\frac{dx}{9x^2+4}$ নির্ণয় কর। [ব: বো: ০৭]

সমাধান: $\int\frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+\frac{4}{9}} = \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\frac{2}{3}}\right)+c$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)+c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2}+c$$

কৌশল-9: যদি কোনো যোগজ $\int\frac{dx}{a-bx^2}$ আকারে থাকে, সেক্ষেত্রে $a-bx^2$ কে $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-x^2$ আকারে প্রকাশ করে যোগজীকরণ করা হয়।

উদাহরণ-2. $\int\frac{dx}{16-4x^2}$ নির্ণয় কর। [ব: বো: ১৩]

সমাধান: $\int\frac{dx}{16-4x^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{2^2-x^2}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2.2}\,ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c = \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$$

কৌশল-10: যদি কোনো যোগজ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+x^2}}$ আকারে থাকে, সেক্ষেত্রে $ax + x^2$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে অথবা অন্তরফলরূপে প্রকাশ করে যোগজীকরণ করা হয়।

উদাহরণ-3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ নির্ণয় কর। [য: বো: ০৯]

সমাধান: $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x^2-2ax+a^2)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}-1\right) + c$$

উদাহরণ-4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5-\cos^2 x}}\, dx$ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৪; মাদ্রাসা: বো: ১০]

সমাধান: ধরি, $\cos x = z \quad \therefore -\sin x\, dx = dz \Rightarrow \sin x\, dx = -dz.$

$$\therefore \int \frac{\sin x}{\sqrt{5-\cos^2 x}}\, dx = -\int \frac{dz}{\sqrt{5-z^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - z^2}}$$

$$= -\sin^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right) + c = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{5}}\right) + c$$

উদাহরণ-5. $\int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}$ নির্ণয় কর। [বুটেক্স ০২-০৩; ঢা: বো: ১২; কু: বো: ১৫; দি: বো: ১৬; য: বো: ১৬; রা: বো: ০৭; চ: বো: ১৬, ১৩]

সমাধান: ধরি, $I = \int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = \int \frac{d\theta}{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+3\cos^2\theta} = \int \frac{d\theta}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \int \frac{\sec^2\theta}{4+\tan^2\theta}\, d\theta$ [$\cos^2\theta$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে]

মনে করি, $\tan\theta = z \Rightarrow \sec^2\theta\, d\theta = dz$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{2^2+z^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2} + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right) + c.$$

উদাহরণ-6. $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\, dx$ নির্ণয় কর। [সি: বো: ১২; চ: বো: ০৮]

সমাধান: ধরি, $I = \int \frac{3x^2}{1+x^6}\, dx = \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\, dx$

মনে করি, $x^3 = z \Rightarrow 3x^2\, dx = dz$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}z + c = \tan^{-1}(x^3) + c$$

কৌশল-11: যদি কোনো যোগজ $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ আকারে থাকে সেক্ষেত্রে $e^x = z$ ধরে সরলীকরণ করে যোগজীকরণ করা হয়।

উদাহরণ-7. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১৩-১৪; ঢা: বো: ১৬, ০৬; দি: বো: ১৫, ১৩; কু: বো: ১৪, ১২; রা: বো: ১৪, ০৭; চ: বো: ০৮; য: বো: ১৫; ০৩, ১২; সি: বো: ১০; ব: বো: ০৯, ০৭, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

সমাধান : ধরি, $I = \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}\, dx$ [লব ও হরকে e^x দ্বারা গুণ করে]

মনে করি, $e^x = z \Rightarrow e^x dx = dz.$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{z^2+1} = \tan^{-1}z + c = \tan^{-1}(e^x) + c.$$

কৌশল-12: যদি কোনো যোগজ $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ আকারের হয়, তবে ax^2+bx+c কে দুইটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করে যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

যেমন: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$

এখন, প্রয়োজন মতো যোগজটিকে $\int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$ আকারে প্রকাশ করে যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ-8. $\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)+c = \frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)+c$$

কৌশল-13: যদি কোনো যোগজ $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px+q}}$ আকারে থাকে, অর্থাৎ হরে '$\sqrt{\ }$' এর ভিতরে ও বাহিরে একঘাত রাশিমালা থাকে, তবে $px+q=z^2$ ধরে সরলীকরণ করার পর যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ-9. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $I = \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$

মনে করি, $4x+3=z^2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}(z^2-3) \Rightarrow 4dx = 2z\,dz \Rightarrow dx = \frac{zdz}{2}$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \frac{zdz}{\left\{\frac{2}{4}(z^2-3)+1\right\}.z} = \frac{1}{2}.2\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2.1}\,ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+c = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right|+c$$

অনুশীলনী-10(C)

নিম্নের যোগজগুলি নির্ণয় কর: **(1-16)**

1. (i) $\int \frac{dx}{25+4x^2}$ (ii) $\int \frac{dx}{4x^2+5}$
2. (i) $\int \frac{dx}{9x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$ [সি: বো: ১১] (iii) $\int \frac{dx}{25a^2-49x^2}$ (iv) $\int \frac{dx}{16-25x^2}$ (v) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$
3. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ [কু: বো: ১৪; চ: বো: ১৩; দি: বো: ১০] (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ [ঢা: বো: ১২; কু: বো: ১০, ০৭; সি: বো: ১৩; চ: বো: ১৫; ব: বো: ১২]

   (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$ [ঢা: বো: ০৬, ০৪; রা: বো: ০৬, ০৩; কু: বো: ০৬; সি: বো: ০৯]

   (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ [ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১২; রা: বো: ০৮; চ: বো: ১১, ০৩; সি: বো: ১৫; য: বো: ১১; ব: বো: ১০, ০৬] (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

4. (i) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$ [ব: বো: ০৮; দি: বো: ১২; য: বো: ১১; রা: বো: ১৫, ১২] (ii) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^8-x^8}}$ (iii) $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$ [বুয়েট ১১-১২; চ: বো: ১১]

5. (i) $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$ (ii) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ [য: বো: ১০] (iii) $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$ [চ: বো: ০৩]

6. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ **7.** (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$ (ii) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{5+4x-x^2}$ [কুয়েট ০৪-০৫] **9.** (i) $\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{2ax-x^2}dx$ **10.** $\int \frac{dx}{1+\cos^2x}$ [রা: বো: ০৬]

11. $\int \frac{\sec^2x}{4+9\tan^2x}dx$ **12.** $\int \frac{\sec^2x}{\sqrt{1-\tan^2x}}dx$ **13.** $\int \frac{3\tan^2x\sec^2x}{1+\tan^6x}dx$

14. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3+\cos^2x}}dx$ **15.** (i) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ [ঢা: বো: ১৫] (ii) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ [বুয়েট ১৪-১৫]

16. (i) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ [ঢা: বো: ১০; সি: বো: ১৩] (ii) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$ (iii) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+c$ (ii) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}+c$

2. (i) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{70a}\ln\left|\frac{5a+7x}{5a-7x}\right|+c$

(iv) $\frac{1}{40}\ln\left|\frac{4+5x}{4-5x}\right|+c$ (v) $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$

3. (i) $\sin^{-1}\frac{x}{5}+c$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+c$ (iii) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}+c$ (iv) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}+c$ (v) $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3}+c$

4. (i) $\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)+c$ (ii) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{x^4}{a^4}+c$ (iii) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x})+c$ **5.** (i) $\tan^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)+c$

(ii) $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)+c$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$ **6.** (i) $\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$

7. (i) $\ln|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+13}|+c$ (ii) $\ln|e^x+\sqrt{e^{2x}+1}|+c$ (iii) $\ln|(x+1)+\sqrt{2x+x^2}|+c$

8. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x}{5-x}\right|+c$ **9.** (i) $\frac{x\sqrt{1-9x^2}}{2}+\frac{1}{6}\sin^{-1}3x+c$ (ii) $\frac{(x-a)\sqrt{2ax-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+c$

10. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ **11.** $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{2}\right)+c$

12. $\sin^{-1}(\tan x)+c$ **13.** $\tan^{-1}(\tan^3x)+c$

14. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+c$ **15.** (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+c$

16. (i) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right|+c$ (ii) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right|+c$

পাঠ-৫, ৬ ও ৭

10.6 অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় (Determination of indefinite integral)

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় সম্পর্কে 10.4.5 নং অনুচ্ছেদে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

10.6.1 আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে মূলদ ভগ্নাংশের যোগজীকরণ (Integration by partial fractions)

$f(x)$ ও $g(x)$ দুইটি বহুপদী হলে $\frac{f(x)}{g(x)}$ আকারের ফাংশনকে মূলদীয় ফাংশন বলে। মূলদীয় ফাংশনের যোগজীকরণের (অর্থাৎ $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ নির্ণয়ের) জন্য $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করার পর যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের নিয়ম:

যদি $f(x)$ এর মাত্রা $g(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা বেশি বা সমান হয়, তবে সাধারণ ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে $f(x)$ কে $g(x)$ দ্বারা এমনভাবে ভাগ করতে হবে যেন অবশিষ্ট লবের মাত্রা $g(x)$ এর মাত্রা হতে ছোট হয়।

$f(x)$ এর মাত্রা $g(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হলে, $g(x)$ এর–

(i) প্রত্যেক $ax + b$ উৎপাদকের জন্য প্রতিসঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ হবে $\frac{A}{ax+b}$

এবং প্রত্যেক $(ax + b)^n$ উৎপাদকের জন্য প্রতিসঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ হবে

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

(ii) প্রত্যেক $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য প্রতিসঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ হবে $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$

এবং প্রত্যেক $(ax^2 + bx + c)^n$ উৎপাদকের জন্য প্রতিসঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ হবে

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + \cdots \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

এখানে A, B, A_i ও B_i ধ্রুবক।

মূলদীয় ভগ্নাংশকে কভার-আপ (cover-up rule) নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে যোগজীকরণ:

$\int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx$ নির্ণয়ের জন্য

ধরি, $\frac{ax^2 + bx + c}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ যেখানে $A, B, C \in \mathbb{R}$ ……… (i)

যখন $x = a$ তখন $A = \frac{a^3 + ab + c}{(a-b)(a-c)}$ যখন $x = b$ তখন $B = \frac{ab^2 + b^2 + c}{(b-a)(b-c)}$

যখন $x = c$ তখন $C = \frac{ac^2 + bc + c}{(c-a)(c-b)}$

এভাবে A, B, C এর মান নির্ণয় করে (i) অভেদটিতে বসিয়ে সহজেই আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করে যোগজীকরণ করা যায়।

$\int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-a)^2(x-b)} dx$ নির্ণয়ের জন্য

ধরি, $\frac{ax^2 + bx + c}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{(a-x)^2} + \frac{C}{x-b}$ ……… (i)

যখন $x = a$ তখন $B = \frac{a^3 + ab + c}{a-b}$ যখন $x = b$ তখন $C = \frac{ab^2 + b^2 + c}{b-a}$

B ও C এর মান নির্ণয় করে এরপর x^2 এর সহগ সমীকৃত করলে A এর মান পাওয়া যাবে। এভাবে (i) অভেদটিতে মান বসিয়ে সহজেই আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় করে যোগজীকরণ করা যায়।

উদাহরণ: $\int \frac{2x+3}{x^3-x}dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int \frac{2x+3}{x^3-x}dx = \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+1)}dx$

$$= \int \left[\frac{\frac{3}{(-1)1}}{x} + \frac{\frac{5}{1.2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{(-1).(-2)}}{x+1}\right] dx \text{ [cover up নিয়মে]}$$

$$= -3\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -3\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

বি.দ্র. 1. ভগ্নাংশ রাশিকে $\frac{f(x)}{g(x)}$ বিবেচনা করে যদি $f(x)$ এর চেয়ে $g(x)$ এর ঘাত বেশি থাকে এবং $g(x)$ এর উৎপাদকগুলি এক ঘাতি হলে cover up নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে সরাসরি বিভক্ত করা যায়।

যেমন: উপরিউক্ত উদাহরণ-1 এর $\frac{2x+3}{(x-0)(x-1)(x+1)}$ এর ক্ষেত্রে, প্রথমে $\frac{}{(x-0)} + \frac{}{x-1} + \frac{}{x+1}$ লিখে লবের ফাঁকা স্থানকে নিম্ন উপায়ে পূর্ণ করতে হয়।

প্রথম ভগ্নাংশের হর অর্থাৎ $(x-0)$, x এর যে মানের জন্য 0 হয় মূল ভগ্নাংশের লবে ও হরে x এর ঐ মান বসাতে হয়। তবে হরের নির্ধারক উৎপাদকে বসানো যাবে না। যেমন প্রথম ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে মূল ভগ্নাংশে $(x-0)$ তে $x = 0$ বসানো ব্যতিত প্রদত্ত ভগ্নাংশতে $x = 0$ বসালে $\frac{2.0+3}{(0-1)(0+1)} = \frac{3}{-1} = -3$ হয় যা প্রথম আংশিক ভগ্নাংশের লবে বসিয়ে ফাঁকা স্থান পূর্ণ করতে হবে। একইভাবে দ্বিতীয় ও তৃতীয় আংশিক ভগ্নাংশের লবের ফাঁকা স্থান পূর্ণ করতে হবে।

দ্বিতীয় ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে, $x = 1$ বসালে $(x-1) = 0$ হয় এবং $(x-1)$ ব্যতিত মূল ভগ্নাংশে $x = 1$ বসালে $\frac{2+3}{(1)(1+1)} = \frac{5}{2}$ এবং তৃতীয় ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে, $x = -1$ বসালে $(x+1) = 0$ হয় এবং $(x+1)$ ব্যতিত মূল ভগ্নাংশে $x = -1$ বসালে $\frac{2(-1)+3}{(-1)(-1-1)} = \frac{1}{2}$ পাওয়া যায়। যা দ্বারা যথাক্রমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় আংশিক ভগ্নাংশের লবের ফাঁকা স্থান পূর্ণ করতে হয়।

2. $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর $f(x)$ এর ঘাত $\geq g(x)$ এর ঘাত হলে প্রথমে $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, যেখানে $r(x)$ এর ঘাত $\leq g(x)$ এর ঘাত আকারে তৈরি করে (1) এর নিয়মে $\frac{r(x)}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করতে হয়।

উদাহরণ: $\int \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+2}\left[\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}\right] = \frac{1}{x+2}\left[1 - \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)}\right]$

$$= \frac{1}{x+2}\left[1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2}\right] \text{ [cover up নিয়মে]}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} \text{ [cover up নিয়মে]}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}dx = \int\frac{dx}{x+1} - 4\int\frac{dx}{(x+2)^2} = ln\,|x+1| - 4\left\{-\frac{1}{(x+2)}\right\} + c$$

$$= ln\,|x+1| + \frac{4}{x+2} + c$$

মূলদীয় ফাংশনকে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করার কৌশল

(ক) $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\ell)(x-m)(x-n)}$ আকৃতি হলে $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\ell)(x-m)(x-n)} = \frac{A}{x-\ell} + \frac{B}{x-m} + \frac{C}{x-n}$

(খ) $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\ell)^2(x-m)}$ আকৃতি হলে $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\ell)^2(x-m)} = \frac{A}{x-\ell} + \frac{B}{(x-\ell)^2} + \frac{C}{x-m}$

(গ) $\frac{ax^2+bx+c}{(x^2+\ell)(x+m)}$ আকৃতি হলে $\frac{ax^2+bx+c}{(x^2+\ell)(x+m)} = \frac{Ax+B}{x^2+\ell} + \frac{C}{x+m}$

(ঘ) $\frac{Ax^2+bx+c}{(x-\ell)(x-m)}$ আকৃতি হলে $\frac{Ax^2+bx+c}{(x-\ell)(x-m)} = A + \frac{B}{x-\ell} + \frac{C}{x-m}$

(ঙ) $\frac{Ax^3+bx^2+cx+d}{(x-\ell)^2}$ আকৃতি হলে $\frac{Ax^3+bx^2+cx+d}{(x-\ell)^2} = Ax + B + \frac{C}{x-\ell} + \frac{D}{(x-\ell)^2}$

যেখানে a, b, c, d, l, m, n শূন্যসহ যেকোনো মূলদ সংখ্যা।

x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে ও সমীকৃত করে আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় করে যোগজীকরণ করা হয়।

উদাহরণ: $\int \frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$ নির্ণয়ের জন্য

ধরি, $\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}$ ……… (i)

এখানে $A_1 = \left[\frac{x^2+3x+1}{(x-2)(x+3)}\right]_{x=1} = \frac{5}{(-1)(4)} = -\frac{5}{4}$

$A_2 = \left[\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x+3)}\right]_{x=2} = \frac{11}{5}$ এবং $A_3 = \left[\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=-3} = \frac{1}{20}$

সুতরাং (i) এর মাধ্যমে পাই,

$$\int\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx = -\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{11}{5}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{20}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= -\frac{5}{4}\ell n\,|x-1| + \frac{11}{5}\ell n\,|x-2| + \frac{1}{20}\ell n\,|x+3| + c$$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৩, ০৮; কু: বো: ১১, ০৪; রা: বো: ১৩; দি: বো: ১৪, ০৯; য: বো: ১৩; ব: বো: ০৭]

সমাধান: মনে করি, $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

উভয় পক্ষকে $(x-1)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$ …… (i)

(i) নং এ $x = 1$ বসিয়ে, $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

(i) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $0 = A - C \Rightarrow C = A = \frac{1}{2}$

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ ln|x-1| - \frac{1}{4}ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c.$$

উদাহরণ-2. $\int\frac{x^2}{x^2-4}dx$ **নির্ণয় কর।** [রা: বো: ০৪; সি: বো: ০৮; ব: বো: ০৪]

সমাধান: $\int\frac{x^2}{x^2-4}dx = \int\frac{(x^2-4)+4}{x^2-4}dx = \int dx + 4\int\frac{dx}{x^2-4} = \int dx + 4\int\frac{dx}{(x+2)(x-2)}$ ...... (i)

মনে করি, $\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$

$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x+2)$ [উভয় পক্ষকে $(x+2)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে] ...... (ii)

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে, $1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে, $1 = -4A \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{1}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$\therefore \int\frac{x^2}{x^2-4}dx = \int dx - \int\frac{dx}{x+2} + \int\frac{dx}{x-2} = x - ln|x+2| + ln|x-2| + c.$$

অনুশীলনী-10(D)

নিম্নের যোগজগুলি নির্ণয় কর: (1-6)

1. (i) $\int\frac{dx}{x^2+x-6}$ (ii) $\int\frac{x+1}{3x^2-x-2}dx$ (iii) $\int\frac{dx}{x(x-1)(x-3)}$
   (iv) $\int\frac{x-3}{(1-2x)(1+x)}dx$ (v) $\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$ [ঢা: বো: ০৯]
2. (i) $\int\frac{1}{x(x+1)^2}dx$ (ii) $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$ [ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ১৪; ব: বো: ১০, ০৫]
3. (i) $\int\frac{x+35}{x^2-25}dx$ [চ: বো: ০৪; সি: বো: ০৭] (ii) $\int\frac{x^2+1}{(x+2)^2}dx$ (iii) $\int\frac{x^3-2x+3}{x^2+x-2}dx$ [সি: বো: ০৩]
   (iv) $\int\frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2}dx$ (v) $\int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$ (vi) $\int\frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}dx$ (vii) $\int\frac{dx}{x^2(x+1)^2}$
4. (i) $\int\frac{x^2-1}{x^2-4}dx$ [ঢা: বো: ১১; ব: বো: ১৩; য: বো: ০৯; কু: বো: ১৬, ০৯; সি: বো: ০৫, ০৩, ১২] (ii) $\int\frac{x^2}{x^2-4}dx$ [ব: বো: ০৪; রা: বো: ০৪]
5. (i) $\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)}$ (ii) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$ (iii) $\int\frac{x^2}{x^4-1}dx$ [রা: বো: ১১] (iv) $\int\frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$
6. $\int\frac{dx}{(e^x-1)(e^x+3)}$

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{1}{5} ln \left|\frac{x-2}{x+3}\right| + c$ (ii) $\frac{2}{5} ln |x-1| - \frac{1}{15} ln |3x+2| + c$
(iii) $\frac{1}{3} ln |x| - \frac{1}{2} ln |x-1| + \frac{1}{6} ln |x-3| + c$ (iv) $\frac{5}{6} ln |1-2x| - \frac{4}{3} ln |x+1| + c$
(v) $-\frac{3}{2} ln |x| - \frac{1}{6} ln |x+2| + \frac{5}{3} ln |x-1| + c$

2. (i) $ln \left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c$ (ii) $ln \left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + c$

3. (i) $4 ln |x-5| - 3ln |x+5| + c$ (ii) $-\frac{5}{x+2} - 4ln |x+2| + x + c$
(iii) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\ln(x+2) + \frac{2}{3}\ln(x-1) + c$ (iv) $-\frac{3}{25} ln |x+2| + \frac{3}{25} ln |x-3| - \frac{7}{5(x-3)} + c$
(v) $\frac{2}{9} ln \left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(x-1)} + c$ (vi) $\frac{1}{3(x+1)} + \frac{11}{9} ln |x+1| + \frac{7}{9} ln |x-2| + c$
(vii) $-\frac{1}{x} - 2ln |x| - \frac{1}{x+1} + 2 ln |x+1| + c$ 4. (i) $x + \frac{3}{4} ln \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ (ii) $x + ln \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

5. (i) $\frac{1}{5} ln |x-1| - \frac{1}{10} ln |x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$ (ii) $ln |x| - \frac{1}{2} ln |x^2+1| + c$
(iii) $\frac{1}{4} ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$ (iv) $\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}x + c$

6. $-\frac{1}{3} ln |e^x| + \frac{1}{4} ln |e^x - 1| + \frac{1}{12} ln |e^x + 3| + c$

10.6.2 অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ (Integration by parts)

বর্ণনা: যদি u ও v প্রত্যেকেই x-এর ফাংশন হয়, তবে $\int uv dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v\, dx\right\} dx.$

প্রমাণ: যদি u ও w প্রত্যেকেই x-এর অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন হয়, তবে দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ সূত্র হতে পাই, $\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$

এখন, x-এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে পাই, $uw = \int\left(u\frac{dw}{dx}\right) dx + \int\left(w\frac{du}{dx}\right) dx$

$$\Rightarrow \int\left(u\frac{dw}{dx}\right) dx = uw - \int\left(w\frac{du}{dx}\right) dx \; ...\; ...\; (i)$$

মনে করি, $\frac{dw}{dx} = v \Rightarrow w = \int v dx$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $\int(uv)\, dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v\, dx\right\} dx$

অর্থাৎ, দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ
= ১ম ফাংশন × ২য় ফাংশনের যোগজ – (১ম ফাংশনের অন্তরজ × ২য় ফাংশনের যোগজ) এর যোগজ।

যোগজীকরণ সূত্র $\int \underline{udv = uv - \int v\, du}$:
যদি u এবং v প্রত্যেকেই x এর ফাংশন হয় তবে, d(uv) = ud(v) + vd(u) যোগজীকরণ করে পাই,
$\int d(uv) = \int u\, d(v) + \int v\, d(u)$ বা, $uv = \int udv + \int vdu$ বা, $\int udv = uv - \int vdu$

উদাহরণ: $\int x\,\ell nx\,dx$

$= \int \ell n\,x.\,x\,dx$

$= \int u\,dv$ | যেখানে $u = \ell nx$ এবং $dv = xdx$

$= uv - \int vdu$ | $\therefore du = \frac{1}{x}dx \quad \therefore v = \frac{x^2}{2}$

$= \ell nx.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ell nx - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ell nx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

উদাহরণ: $\int x\sin x\,dx$

$= \int u\,dv$

$= uv - \int v\,du$ | যেখানে $u = x$ এবং $dv = \sin x\,dx$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$ | $\therefore du = dx \quad \therefore v = -\cos x$

$= \sin x - x\cos x + c$

উদাহরণমালা

কৌশল-14. যদি দুইটি ফাংশনের গুণফলের প্রত্যেককে পৃথকভাবে যোগজীকরণ করা যায় এবং তাদের মধ্যে একটি x^n থাকে তবে x^n কে u (১ম ফাংশন) ধরতে হয়।

উদাহরণ-1. $\int x^2e^x\,dx$ **নির্ণয় কর।** [বুয়েট ১১-১২; বিআইটি ০০-০১; কু: বো: ০৪; সি: বো: ১৩, ০৯]

সমাধান: $\int x^2e^x\,dx = x^2\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^x\,dx\right\}dx$

$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$

$= x^2e^x - 2\left[x\int e^x - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\}dx\right]$

$= x^2e^x - 2\,[xe^x - \int e^x\,dx]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + c$

কৌশল-15. যে ফাংশনকে যোগজীকরণ করা যায় না তাকে u (১ম ফাংশন) এবং অন্যটিকে v (২য় ফাংশন) ধরতে হয়।

যেমন: $\int lnx\,dx$; $\int \sin^{-1}x\,dx$; $\int \cos^{-1}x\,dx$; $\int \tan^{-1}x\,dx$; ইত্যাদির যোগজীকরণ করার ক্ষেত্রে lnx, $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ইত্যাদি ফাংশনগুলিকে u (১ম ফাংশন) এবং 1 কে ২য় ফাংশন ধরতে হয়।

উদাহরণ-2. $\int \cos^{-1}x\,dx$ **নির্ণয় কর।** [রা: বো: ১০; য: বো: ০৮; কু: বো: ১৪, ০৫; চ: বো: ০৬, ১২; সি: বো: ১২]

সমাধান: ধরি, $I = \int \cos^{-1}x\,dx = \cos^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)\int dx\right\}dx$

$= x\cos^{-1}x + \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\cos^{-1}x + I_1$ যেখানে, $I_1 = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

মনে করি, $1 - x^2 = z \Rightarrow -2x\,dx = dz \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}dz$

$\therefore I_1 = -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}.2\sqrt{z} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

$\therefore I = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

অর্থাৎ, $\int\cos^{-1}x\,dx = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

উদাহরণ-3. $\int lnx\,dx$ **নির্ণয় কর।** [কু: বো: ০৬; রা: বো: ১৫; চ: বো: ০৮, ০৪; ব: বো: ০৪]

সমাধান: $\int lnx\,dx = lnx\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(lnx)\int dx\right\}dx = xlnx - \int\frac{1}{x}.x\,dx = xlnx - \int dx = xlnx - x + c$

কৌশল-16. দুইটি ফাংশনের গুণফলের মধ্যে যে ফাংশনটিকে যোগজীকরণ করা যায় না সেটিকে u (১ম ফাংশন) ধরতে হয়।

উদাহরণ-4. $\int x \tan^{-1}x\, dx$ **নির্ণয় কর।** [রা: বো: ০৬; য: বো: ০৬; কু: বো: ১০; সি: বো: ০৮, ০৪; ব: বো: ১১; দি: বো: ১১]

সমাধান: $\int x\tan^{-1}x\, dx = \tan^{-1}x \int x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) \int x\, dx\right\} dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + c$$

কৌশল-17. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ বা $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ আকারের যোগজ নির্ণয়ে সখণ্ড যোজন প্রক্রিয়া দুইবার প্রয়োগ করতে হয়। ১ম বার e^{ax} কে ১ম ফাংশন ধরলে, ২য় বারও ১ম ফাংশন ধরতে হয়, অথবা ১ম বার e^{ax} কে ২য় ফাংশন ধরলে। ২য় বারও ২য় ফাংশন ধরতে হয়।

উদাহরণ-5. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $I = \int e^{ax}\cos bx\, dx = \cos bx \int e^{ax} dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos bx) \int e^{ax} dx\right\} dx$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left[\sin bx \int e^{ax}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin bx)\int e^{ax}dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\, dx\right]$$

$$\therefore I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = e^{ax}\left[\frac{\cos bx}{a} + \frac{b\sin bx}{a^2}\right] + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2} \times \frac{a^2}{a^2+b^2} + c$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + c$$

একটি বিশেষ সূত্র: $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}\, dx = e^x f(x) + c$

প্রমাণ: $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$

$$= f(x)\int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\}\int e^x dx\right]dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= e^x f(x) - \int e^x f'(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= e^x f(x) + c$$

উদাহরণ-6. $\int e^x\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right\}dx$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান: $I=\int e^x\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right\}dx$

ধরি, $f(x)=\frac{1}{1-x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}(-1)=\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\therefore I=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}\,dx=e^x f(x)+c=\frac{e^x}{1-x}+c$$

উদাহরণ-7. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ **নির্ণয় কর।** [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ; য: বো: ০৯, ০৩; চ: বো: ১৩, ১১, ০৫, ০৪; সি: বো: ০৬; কু: বো: ১১]

সমাধান:
$$\begin{aligned}\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx &= \int\frac{\{(x+1)-1\}e^x}{(x+1)^2}dx\\ &= \int e^x\cdot\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx.\\ &= \frac{1}{x+1}\int e^x dx-\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)\int e^x dx\right\}dx-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx\\ &= \frac{e^x}{x+1}+\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx=\frac{e^x}{x+1}+c.\end{aligned}$$

? অনুশীলনী-10(E)

নিম্নের যোগজগুলি নির্ণয় কর : **(1-21)**

1. **(i)** $\int x^2e^{-3x}dx$ **(ii)** $\int x^3e^{x^2}dx$ **2. (i)** $\int x^2\sin x\,dx$ **(ii)** $\int x^2\cos x\,dx$ **3. (i)** $\int x\cos x\,dx$ **(ii)** $\int e^{2x}\cos e^x\,dx$
4. **(i)** $\int x\sin x\cos x\,dx$ **(ii)** $\int x\sin x\sin 2x\,dx$
5. **(i)** $\int x\sec^2x\,dx$ [চ: বো: ১৪] **(ii)** $\int\frac{x}{\cos^2x}dx$
6. **(i)** $\int x\cos^2x\,dx$ [সি: বো: ০৭] **(ii)** $\int x\sin^2\frac{x}{2}dx$
7. $\int x\tan^2x\,dx$ [রা: বো: ০৫; সি: বো: ০৫] **8.** $\int x\cos^3x\,dx$
9. **(i)** $\int\sin^{-1}x\,dx$ [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১০, ০৩; ব: বো: ১২]
   (ii) $\int\tan^{-1}x\,dx$ [ঢা: বো: ০৪; য: বো: ১৩; দি: বো: ১২; ব: বো: ১০] **(iii)** $\int\sec^{-1}x\,dx$
10. **(i)** $\int x\ln x\,dx$ [চুয়েট ১৩-১৪; ঢা: বো: ১৩; য: বো: ০৩; রা: বো: ১৩; ব: বো: ০৬] **(ii)** $\int(\ln x)^2dx$ [য: বো: ১৪; চ: বো: ০৭]
    (iii) $\int x^2(\ln x)^2dx$ [বুয়েট ০৫-০৬] **(iv)** $\int x^n\,ln x\,dx$
11. $\int x\sin^{-1}x\,dx$ [ঢা: বো: ০৭] **12. (i)** $\int x\cos^{-1}x\,dx$ [মাদ্রাসা বো: ১১]
    (ii) $\int x\sin^{-1}x^2\,dx$ [কুয়েট ০৩-০৪; বুয়েট ০৫-০৬; চুয়েট ০৪-০৫; ঢা বো: ০৫; রা: বো: ১৩, ০৬] **(iii)** $\int x\cos^{-1}x^2dx$
13. **(i)** $\int\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}dx$ **(ii)** $\int\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}dx$ **(iii)** $\int\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$
14. $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ [মাদ্রাসা বো: ১২] **15.** $\int\frac{\ln(\sec^{-1}x)}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ [ঢা: বো: ০৮; সি: বো: ১৪]
16. **(i)** $\int e^x\cos x\,dx$ [দি: বো: ১০] **(ii)** $\int e^x\sin x\,dx$ [ঢা: বো: ১২; কু: বো: ১৩, ০৮, ০৩; রা: বো: ১৬, ১৪; দি: বো: ১৪]
    (iii) $\int e^x\sin 2x\,dx$ [ঢা: বো: ০৩; রা: বো: ০৯, ০৪; দি: বো: ০৯; সি: বো: ১০] **(iv)** $\int e^{-3x}\cos 4x\,dx$

17. (i) $\int e^x(\sin x + \cos x)\, dx$ [ঢা: বো: ১০; সি: বো: ১১, ০৫; ব: বো: ০৬] (ii) $\int e^x(\tan x - \ln|\cos x|)\, dx$ [চ: বো: ১৩; য: বো: ১১]
(iii) $\int e^x \sec x\,(1 + \tan x)dx$ [বুয়েট ০৪-০৫; চুয়েট ১১-১২; কুয়েট ০৯-১০; বুটেক্স ০৫-০৬; রা: বো: ০৩; চ: বো: ১৩; য: বো: ১১]

18. $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx$ [বুয়েট ০৮-০৯; দি: বো: ১৩; য: বো: ০৭] 19. (i) $\int e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ (ii) $\int e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

20. $\int e^{5x}\left[5 \ln x + \frac{1}{x}\right] dx$ [চ: বো: ০৯] 21. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a + x}}\, dx$ [বুয়েট ১১-১২; চ: বো: ১০; কু: বো: ১১]

উত্তরমালা

1. (i) $-\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) e^{-3x} + c$ (ii) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) e^{x^2} + c$

2. (i) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$ (ii) $x^2\sin x + 2x \cos x - 2\sin x + c$

3. (i) $x \sin x + \cos x + c$ (ii) $e^x\sin e^x + \cos e^x + c$

4. (i) $-\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + c$ (ii) $\frac{1}{2}(x \sin x + \cos x - \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{9}\cos 3x) + c$

5. (i) $x \tan x - \ln|\sec x| + c$ (ii) $x \tan x - \ln|\sec x| + c$

6. (i) $\frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + \frac{1}{8}\cos 2x + c$ (ii) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \cos x + c$

7. $x \tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$

8. $\frac{3}{4}(x \sin x + \cos x) + \frac{1}{36}(3x \sin 3x + \cos 3x) + c$

9. (i) $x \sin^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + c$ (ii) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + c$
(iii) $x \sec^{-1}x - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + c$

10. (i) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$ (ii) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$
(iii) $\frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + c$ (iv) $\frac{x^{n+1}\ln x}{(n+1)} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$

11. $\frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + c$

12. (i) $\frac{1}{2}x^2 \cos^{-1}x + \frac{1}{4}\sin^{-1} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + c$ (ii) $\frac{1}{2}x^2 \sin^{-1}(x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4} + c$
(iii) $\frac{1}{2}x^2 \cos^{-1}(x^2) - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4} + c$

13. (i) $2x \tan^{-1}x - \ln(1 + x^2) + c$ (ii) $2x \tan^{-1}x - \ln(1 + x^2) + c$
(iii) $2x \tan^{-1}x - \ln(1 + x^2) + c$

14. $\ln x\,\{\ln(\ln x) - 1\} + c$; 15. $\sec^{-1}x\,[\ln|\sec^{-1}x| - 1] + c$

16. (i) $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c$ (ii) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$
(iii) $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$ (iv) $\frac{1}{25}e^{-3x}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$

17. (i) $e^x\sin x + c$ (ii) $e^x\ln|\sec x| + c$ (iii) $e^x\sec x + c$

18. $e^x\ln|x| + c$ 19. (i) $\frac{e^x}{x} + c$ (ii) $-\frac{e^{-x}}{x} + c$

20. $e^{5x}\ln|x| + c$; 21. $(x + a)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + c$

পাঠ-৮ ও ৯

10.7 নির্দিষ্ট যোগজ (Definite integral)

আমরা জেনেছি, যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া। এখন, আমরা একে সমষ্টিকরণের পদ্ধতি হিসেবে সংজ্ঞায়িত করব। বস্তুত যোগজীকরণের উৎপত্তিই হলো বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের উদ্দেশ্য নিয়ে। এক্ষেত্রে, ক্ষেত্রটিকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে, ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি থেকেই মূল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হয়।

নির্দিষ্ট যোগজের বৈশিষ্ট্যাবলি: (i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. যেমন : $\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 t^2\,dt$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. যেমন : $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \sin x\,dx$

কেননা, $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

এবং $-\int_{\pi/2}^0 \sin x\,dx = -[-\cos x]_{\pi/2}^0 = [\cos x]_{\pi/2}^0 = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$

(iii) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

যেমন: $\int_0^2 x^3\,dx = \int_0^2 (2-x)^3\,dx$; $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ ইত্যাদি।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)\,dx$ **-এর মান নির্ণয় কর।** [কু: বো: ০৭, ০৬; ব: বো: ০৪]

সমাধান: $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)\,dx = \left[3x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = (9 - 9 + 9) - 0 = 9$

উদাহরণ-2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x^2 - 2x + 1)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1$

$= \sin^{-1} 0 - \sin^{-1}(-1) = \sin^{-1}(\sin 0) - \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right\} = -\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

উদাহরণ-3. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$ **-এর মান নির্ণয় কর।** [য: বো: ০৪]

সমাধান: $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (2\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x)^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}[x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}[0 - 0] + \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - 0\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$

উদাহরণ-4. $\int_0^1 \frac{2x\,(\tan^{-1} x^2)^2}{1 + x^4}\,dx$ **এর মান নির্ণয় কর।** [চ: বো: ০৫]

সমাধান: ধরি, $I = \int_0^1 \frac{2x\,(\tan^{-1} x^2)^2}{1 + x^4}\,dx$ ধরি, $\tan^{-1} x^2 = z \Rightarrow \frac{2x\,dx}{1 + x^4} = dz$

যখন $x = 0, z = 0$ এবং যখন $x = 1, z = \frac{\pi}{4}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} z^2\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - 0\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3}{64} = \frac{\pi^3}{192}$

উদাহরণ-5. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x\, dx$ -এর মান নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৩; য: বো: ১৫, ০৮; চ: বো: ০৬; ব: বো: ০৬, ০৪]

সমাধান: $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin 2x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos 3x)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}[\sin x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{6}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ-6. $\int_1^{\sqrt{e}} x\, ln x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৪; য: বো: ০৪]

সমাধান: $\int x\, ln x\, dx = ln x \int x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(ln x)\int x\, dx\right\} dx$

$$= \frac{x^2\, ln x}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2\, ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2\, ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} x\, ln x\, dx = \left[\frac{x^2\, ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \left(\frac{e\, ln\sqrt{e}}{2} - \frac{e}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right);\ [\because ln 1 = 0]$$

$$= \frac{e\, ln e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4};\ [\because ln e = 1]$$

উদাহরণ-7. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৬-০৭; বুটেক্স ১১-১২; ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৫; দি: বো: ১৪, ০৯, ১২; চ: বো: ০৯, ১২; য: বো: ১০, ০৩, ১২; কু: বো: ১৬, ১৩, ০৯; সি: বো: ০৭, ১২; ব: বো: ১৫, ১২]

সমাধান: ধরি, $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ এবং $x = a\sin\theta \therefore dx = a\cos\theta\, d\theta$ যখন $x = 0, \theta = 0$ এবং যখন $x = a, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.a\cos\theta\, d\theta = a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - 0\right] = \frac{\pi a^2}{4}$$

উদাহরণ-8. $\int_2^8 |x - 5|\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $x - 5 < 0$ হলে $|x - 5| = -(x - 5) \Rightarrow x < 5$ হলে $|x - 5| = 5 - x$

আবার, $x - 5 > 0$ হলে, $|x - 5| = x - 5 \Rightarrow x > 5$ হলে, $|x - 5| = x - 5$

$$\therefore \int_2^8 |x - 5|\, dx = \int_2^5 |x - 5|\, dx + \int_5^8 |x - 5|\, dx$$

$$= \int_2^5 (5 - x)\, dx + \int_5^8 (x - 5)\, dx = \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_2^5 + \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^8$$

$$= \left(25 - \frac{25}{2}\right) - (10 - 2) + (32 - 40) - \left(\frac{25}{2} - 25\right) = \frac{25}{2} - 8 - 8 + \frac{25}{2} = 9 \text{ (Ans.)}$$

? অনুশীলনী-10(F)

মান নির্ণয় কর : **(1-40)**

1. (i) $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta$ [চ: বো: ০৪] (ii) $\int_0^{\pi/2} \cos 4x\, dx$ [রা: বো: ০৪; কু: বো: ০৬]

2. (i) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}$ (ii) $\int_1^4 \frac{dx}{(2 + 3x)^2}$ [য: বো: ০৭] (iii) $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2\, dx$ (iv) $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

   (v) $\int_2^3 \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$ [কু: বো: ০৩; সি: বো: ০৬] (vi) $\int_4^8 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 15}}$

Scanned with CamScanner

(vii) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ১২; য: বো: ০৭; সি: বো: ০৯]

(viii) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}$ [ঢা: বো: ১৫, ১৩; কু: বো: ১২; সি: বো: ১৪; ব: বো: ১০]

(ix) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ [ঢা: বো: ১০; রা: বো: ১০; দি: বো: ১৩; কু: বো: ১০, ০৫] (x) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

3. (i) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ [কুয়েট ০৬-০৭, ০৫-০৬] (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$ [ব: বো: ১৩] (iv) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ [ঢা: বো: ০৩]

(v) $\int_2^3 \frac{dx}{9x^2-16}$ **4.** $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\,d\theta$ [চ: বো: ১৪; রা: বো: ০৩]

5. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ [ঢা: বো: ১১; সি: বো: ১১; ব: বো: ০৮]

(ii) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$ [ঢা: বো: ০৬; চ: বো: ০৭; কু: বো: ০৩] (iii) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$ [দি: বো: ১২; চ: বো: ১২]

6. (i) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x}$ [ঢা: বো: ১৩, ০৯, ০৮; কু: বো: ০৯; সি: বো: ১০; রা: বো: ১৩; য: বো: ০৯]

(ii) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x}$ [বুয়েট ০৫-০৬; ঢা: বো: ১০, ১২; রা: বো: ১০, ০৮; চ: বো: ০৮, ০৬; দি: বো: ১৪, ১০; য: বো: ০৮, ০৩; কু: বো: ১৪, ০৫; সি: বো: ১৪, ০৮, ০৪; ব: বো: ১৪, ০৯, ০৬, ০৩, ১২]

7. (i) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi} 3\sqrt{1-\cos x}\,dx$ [কু: বো: ০৪] (iii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ [ব: বো: ১১]

(iv) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec x+1}{\sec x}\,dx$ [য: বো: ১৩, ০৬, ০৩] (v) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$ [ব: বো: ১১]

8. (i) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ [রা: বো: ০৯, ০৫; ব: বো: ০৩; সি: বো: ১১] (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ [সি: বো: ০৫] (iii) $\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\,d\theta$

9. (i) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$ [কু: বো: ১৬; য: বো: ১৩, ০৯, ০৭; সি: বো: ০৬, ০৫, ১২; দি: বো: ১৩; ব: বো: ০৮] (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta$

10. $\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\,dx$ **11.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

12. (i) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ [ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১২; রা: বো: ০৯, ০৬, ০৪; সি: বো: ১৪, ০৫, ১২; ব: বো: ০৭; দি: বো: ১১; চ: বো: ১৫, ১১; য: বো: ১১] (ii) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx$ [য: বো: ০৪; ব: বো: ০৪, ০৩; মাদ্রাসা বো: ১০]

13. (i) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ [ঢা: বো: ১৩, ০৯, ০৫; কু: বো: ১৩, ১২; য: বো: ১৩, ০৮, ০৬; চ: বো: ১৫, ০৬, ০৪, ০৩, ১২; সি: বো: ১৫, ১০, ০৭, ০৩; ব: বো: ০৫; দি: বো: ১২] (ii) $\int_1^2 x^2 e^{x^3}\,dx$ [রা: বো: ০৬, ০৪; ব: বো: ১০]

14. (i) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ [বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১০, ০৭; রা: বো: ১০, ০৬, ০৪; য: বো: ১৪, ১১, ০৯, ০৭; কু: বো: ১৫, ১৩, ১০, ০৭, ০৫; চ: বো: ১১, ০৯, ০৫; সি: বো: ০৮, ১২; দি: বো: ০৯; ব: বো: ১৪, ১১, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

(ii) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ [বুটেক্স ১২-১৩; কুয়েট ০৯-১০; বিআইটি ০২-০৩; ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ০৩, ১২; কু: বো: ০৮; ব: বো: ১৩; সি: বো: ০৭, ০৪; মাদ্রাসা বো: ১০] (iii) $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$

15. (i) $\int_1^3 \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$ [ঢা: বো: ০৮; দি: বো: ১৬; চ: বো: ১৩; কু: বো: ১৪, ০৮; রা: বো: ১৫; ব: বো: ১২] (ii) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$ [ঢা: বো: ১৬; রা: বো: ০৯, ০৭, ০৫; কু: বো: ১০, ০৭; চ: বো: ০৮, ০৫; সি: বো: ০৮, ১২; য: বো: ১২; ব: বো: ০৯, ০৪; মাদ্রাসা বো: ১১]

(iii) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ [কু: বো: ১৬; ব: বো: ০৭, ০৪; সি: বো: ১৫; দি: বো: ১১; য: বো: ১৫] (iv) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ [বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১৪, ০৮, ০৬; রা: বো: ১৩, ০৯; কু: বো: ০৯; য: বো: ১০, ০৬, ১২; চ: বো: ১৩, ০৭, ০৫; দি: বো: ১৪; সি: বো: ১০, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১০]

(v) $\int_0^{\pi} 3\sqrt{1-\cos x}\,\sin x\,dx$ [কু: বো: ০৪] (vi) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\,d\theta$ (vii) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx$ [ঢা: বো: ১১, ০৫; কু: বো: ১১, ০৮; রা: বো: ০৭; সি: বো: ১০, ০৬; য: বো: ১৩, ১০; চ: বো: ১৩, ১০; ব: বো: ০৬, ০৩, ১২]

(viii) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ [বুয়েট ০৭-০৮; বুটেক্স ০৪-০৫; দি: বো: ০৯; সি: বো: ০৭; য: বো: ০৪; ব: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২]

(ix) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{9-\sin^2 x}$ [ঢা: বো: ০৫; কু: বো: ১৫, ১০; দি: বো: ১৩; চ: বো: ০৯; সি: বো: ১৩, ০৯; ব: বো: ১০]

(x) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,\sec^2 x\,dx$ [ঢা: বো: ১৩, ০৫, ০৩; রা: বো: ১৫, ০৫; কু: বো: ০৬, ০৪; চ: বো: ১১, ০৪]

(xi) $\int_0^{\pi/4} 4\tan^3 x\,\sec^2 x\,dx$ [ঢা: বো: ১৬, ১১; কু: বো: ০৯; দি: বো: ০৯; য: বো: ০৬; সি: বো: ১৩, ০৯; ব: বো: ১১]

(xii) $\int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\,\cos\theta\,d\theta$ (xiii) $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\,\sin\theta\,d\theta$ [চুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ০৩; দি: বো: ১০; য: বো: ১১]

(xiv) $\int_0^1 \frac{(\cos^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ [রা: বো: ০৩; য: বো: ০৩] (xv) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ [বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ০৪; কু: বো: ০৬; রা: বো: ১১]

(xvi) $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x\,dx$ [বুয়েট ০৭-০৮; সি: বো: ০৫; চ: বো: ১১] (xvii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ [ঢা: বো: ০৭; য: বো: ১৪]

(xviii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ [রা: বো:, সি: বো: ১৩] (xix) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\,d\theta$ (xx) $\int_0^1 \frac{2x(\tan^{-1}x^2)^3}{1+x^4}\,dx$

16. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta$ [বুয়েট ০৩-০৪; রা: বো: ১২; চ: বো: ১০; ব: বো: ১০] (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\sqrt{\cos x}\,dx$ [কুয়েট ০৩-০৪; রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৫; সি: বো: ১৩; চ: বো: ১৩, ০৯; ব: বো: ১৩; য: বো: ১০] (iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\sqrt{\sin x}\,dx$ [বুয়েট ১০-১১; বুয়েট ০৬-০৭, ০৫-০৬; ঢা: বো: ১৪, ০৬, ০৪; রা: বো: ১৪; কু: বো: ১৩, ১১, ০৭; দি: বো: ১১; সি: বো: ১১, ০৮, ০৪; য:বো: ১২; ব: বো: ১১, ০৯, ০৭, ০৫]

17. $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\,\cos^4\theta\,d\theta$ 18. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}\,dx$ [বুয়েট ০৯-১০; ঢা: বো: ১২; রা: বো: ০৭; চ: বো: ০৮; য: বো: ০৫; দি: বো: ১১]

19. $\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x)\,dx$ [কু: বো: ০৮; য: বো: ০৫] 20. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,\cos x\,dx$ [য: বো: ০৫]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos 3\theta\,\cos 2\theta\,d\theta$ [ঢা: বো: ১৪; চ: বো: ০৩] (iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\sin 3x\,dx$
[চুয়েট ০৮-০৯; বুয়েট ০৩-০৪; য: বো: ১৪; সি: বো: ০৩; ব: বো: ০৫]

21. (i) $\int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}}$ (ii) $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\,dx$ (iii) $\int_1^3 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$ (iv) $\int_0^2 \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx$ (v) $\int_0^3 \frac{dx}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

22. (i) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ [বিআইটি ০১-০২; রা: বো: ১৪, ০৯, ০৬, ০৩; চ: বো: ০৬; কু: বো: ১১, ০৩; য: বো: ০৮; সি: বো: ১৩, ১১, ০৯, ০৬, ০৩; ব: বো: ১৪, ০৭]

(ii) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$ [রা: বো: ১১, ০৩] (iii) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ [ঢা: বো: ০৮; চ: বো: ১৬, ০৩; য: বো: ০৯, ০৫; ব: বো: ০৮]

23. $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy$ [বুয়েট ১০-১১; বুটেক্স ০৭-০৮; ঢা: বো: ১০, ০৯, ১২; রা: বো: ১৩, ০৭; দি: বো: ১৬, ১০; চ: বো: ১৪, ১০; ব: বো: ০৫; সি: বো: ১৪]

24. (i) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\,dx$ (ii) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$ [চ: বো: ১০] 25. (i) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (ii) $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$

26. $\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ 27. (i) $\int_1^4 \ln x\,dx$ [কু: বো: ০৪; ব: বো: ১৪] (ii) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$ [ঢা: বো: ০৭; চ: বো: ১৪]

28. $\int_1^4 \frac{lnx}{\sqrt{x}} dx$ [ঢা: বো: ১২] **29. (i)** $\int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$ [বুয়েট ১২-১৩] **(ii)** $\int_0^1 xe^{-3x} dx$ [দি: বো: ১০; সি: বো: ০৩]

30. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$ [ঢা: বো: ০৬; চ: বো: ০৭; কু: বো: ০৪] **31.** $\int_0^1 \sin^{-1}x\, dx$

32. $\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\, dx$ [বুটেক্স ০৯-১০; রা: বো: ০৮, ১২; কু: বো: ১৪; ব: বো: ১৬, ১৩; চ: বো: ১৬, ০৮, ১২; সি: বো; ১৬; য: বো: ১১; দি: বো: ১২]

33. $\int_0^{\pi/2} e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ [রা: বো: ১০; কু: বো: ১১, ০৫] **34.** $\int_0^{\pi/2} (a\cos^2x + b\sin^2x)dx$ [চ: বো: ০৩]

35. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x}$ [বুয়েট ১১-১২] **(ii)** $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a\sin^2\theta + b\cos^2\theta}$ [রা: বো: ১১]

36. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot x}$ **(ii)** $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1 + \sin x}$ **37.** $\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ **38.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1 + x^4}$ [রা: বো: ১১]

39. $\int_0^1 \ell nx\, dx$ [বুয়েট ০৫-০৬; ব: বো: ১৫] **40.** $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

41. (i) $\int_{1/4}^1 |2x-1|dx$ **(ii)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|dx$ **(iii)** $\int_0^{\pi/2} |\cos 2x|dx$ **(iv)** $\int_{-2}^2 |x|\, dx$ **(v)** $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\, dx$

উত্তরমালা

1. (i) 2 **(ii)** 0 **2. (i)** 2 **(ii)** $\frac{3}{70}$ **(iii)** $\frac{1}{30}$ **(iv)** $\frac{28}{3}$ **(v)** $ln\, 2$ **(vi)** 6 **(vii)** 1 **(viii)** 1 **(ix)** $2-\sqrt{3}$ **(x)** $2(e-1)$

3. (i) $\frac{\pi}{4}$ **(ii)** $\frac{\pi}{2}$ **(iii)** $\frac{1}{5} ln \frac{3}{2}$ **(iv)** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ **(v)** $\frac{1}{24} ln \frac{25}{13}$ **4.** $1-\frac{\pi}{4}$ **5. (i)** 1 **(ii)** $\frac{1}{2}$ **(iii)** ∞

6. (i) $\sqrt{3}+1$ **(ii)** $2-\sqrt{2}$ **7. (i)** 2 **(ii)** $6\sqrt{2}$ **(iii)** 2 **(iv)** $\pi + 2$ **(v)** $\frac{\pi}{2} - 1$ **8. (i)** $\frac{\pi}{4}$ **(ii)** $\frac{\pi}{4}$ **(iii)** $1-\frac{\pi}{4}$

9. (i) $\frac{2}{3}$ **(ii)** $\frac{2}{3}$ **10.** $\frac{3\pi - 8}{32}$ **11.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-2)$ **12. (i)** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} ln2$ **(ii)** $ln\left(\frac{4}{e}\right)$

13. (i) $\frac{1}{2}(e-1)$ **(ii)** $\frac{1}{3}e(e^7-1)$ **14(i)** $ln\frac{3}{2}$ **(ii)** $\tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}$ **(iii)** $\frac{1}{2} ln\left(\frac{b}{a}\right) ln(ab)$

15. (i) $\sin(ln3)$ **(ii)** $\frac{7}{18}$ **(iii)** $ln\, 3$ **(iv)** $\frac{2}{3}$ **(v)** $4\sqrt{2}$ **(vi)** $\frac{3}{8}$ **(vii)** $\frac{\pi^3}{192}$ **(viii)** $\frac{\pi^2}{8}$ **(ix)** $\frac{1}{6} ln2$ **(x)** $\frac{1}{3}$
(xi) 1 **(xii)** $\frac{1}{16}$ **(xiii)** $\frac{1}{6}$ **(xiv)** $\frac{\pi^4}{64}$ **(xv)** $\frac{\pi^3}{24}$ **(xvi)** $\frac{7}{3}$ **(xvii)** $\frac{\pi}{2}$ **(xviii)** $\frac{\pi}{4}$ **(xix)** $\frac{\pi}{6}$ **(xx)** $\frac{1}{1024}\pi^4$

16. (i) $\frac{8}{5}$ **(ii)** $\frac{8}{21}$ **(iii)** $\frac{8}{21}$ **17.** $\frac{8}{315}$ **18.** $\frac{1}{162}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **20. (i)** $\frac{2}{3}$ **(ii)** $\frac{3}{5}$ **(iii)** $\frac{-2}{15}$ **21. (i)** $\frac{3}{2} ln\left(\frac{8}{3}\right)$
(ii) $4\left(\frac{2}{3} + \tan^{-1}2\right)$ **(iii)** $4ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2$ **(iv)** $\frac{2}{3} + 2\tan^{-1}2$ **(v)** $\frac{3\sqrt{11}}{22}$ **22.(i)** 4π **(ii)** $\frac{25\pi}{4}$ **(iii)** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

23. $\frac{128}{15}$ **24. (i)** $\frac{\pi a^2}{2}$ **(ii)** π **25. (i)** π **(ii)** $\frac{a}{2}(\pi + 2)$ **26.** $\frac{44}{3}$ **27. (i)** $4ln\, 4 - 3$ **(ii)** $ln2 + \frac{\pi}{2} - 2$

28. $8ln2 - 4$ **29. (i)** $1 - \frac{2}{e}$ **(ii)** $\frac{1}{9}(1-4e^{-3})$ **30.** $\frac{\pi^2}{4} - 2$ **31.** $\frac{\pi}{2} - 1$ **32.** $\frac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$ **33.** $e^{\frac{\pi}{2}}$

34. $\frac{1}{4}(a+b)\pi$ **35. (i)** $\frac{\pi}{2ab}$ **(ii)** $\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$ **36(i).** $\frac{\pi}{4}$ **(ii)** π **37.** $\frac{1}{2} ln\left(\frac{5}{3}\right)$ **38.** $\frac{\pi}{8}$ **39.** -1

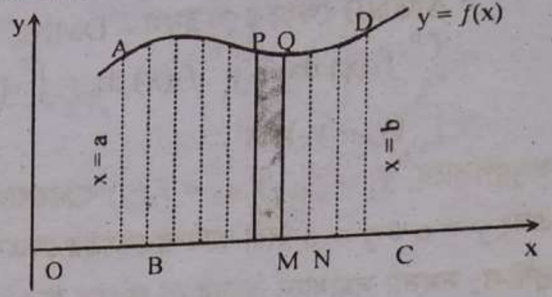
40. $\frac{\pi}{4}$ **41. (i)** $\frac{5}{16}$ **(ii)** 2 **(iii)** 1 **(iv)** 4 **(v)** 4

পাঠ-১০ ও ১১

10.8 নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল (Area by using definite integral)

$y = f(x)$ সমীকরণের লেখ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়।

বর্ণনা: $y = f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ ব্যবধিতে সসীম অবিচ্ছিন্ন ও একমানবিশিষ্ট হলে $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = \int_a^b y\,dx$



প্রমাণ: মনে করি, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x-অক্ষ $(y = 0)$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র ABCD; ক্ষেত্রটিকে y-অক্ষের সমান্তরাল δx প্রস্থের n সংখ্যক ফালিতে বিভক্ত করি।
যার একটি ফালি PMNQ, P ও Q খুব নিকটবর্তী দুইটি বিন্দু ও তাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_i, y_i) এবং $(x_i + \delta x, y_i + \delta y)$।
অর্থাৎ $PM = y_i$ এবং $MN = \delta x$
P ও Q বিন্দুদ্বয় $y = f(x)$ বক্ররেখার খুব নিকটবর্তী হওয়ায় PQ কে সরলরেখা বিবেচনা করি। তাহলে PMNQ একটি আয়তক্ষেত্র প্রকাশ করে। ইহার ক্ষেত্রফল δA হলে,

$\delta A \simeq y\,\delta x$ বা, $\dfrac{\delta A}{\delta x} \simeq y$ ... ... (1) [$\simeq$ দ্বারা আসন্নমান বুঝানো হয়েছে]

এইরূপে, অন্যান্য সকল ফালির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে যোগ করলে সম্পূর্ণ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে।
যদি $\delta x \to 0$ ও $\delta y \to 0$ হয় তবে সকল ফালিগুলির ক্ষেত্রফল প্রায় একই (Almost same) হবে।

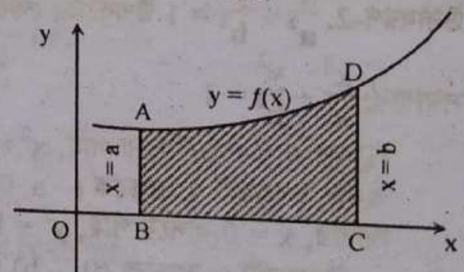
$\therefore$ ABCD এর ক্ষেত্রফল $\simeq \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,\delta x$ [যেহেতু ক্ষেত্রটি $x = a$ ও $x = b$ এর মধ্যে আবদ্ধ এবং $\delta x = \dfrac{b-a}{n}$]

$$= \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i\,\delta x$$

যোগজে রূপান্তর:

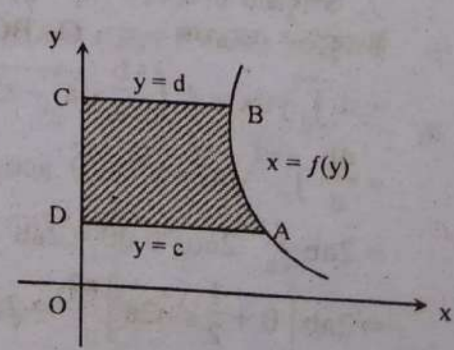
সমীকরণ (1) হতে পাই, $\dfrac{\delta A}{\delta x} \simeq y$ বা, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta A}{\delta x} = y$ বা, $\dfrac{dA}{dx} = y$ বা, $dA = y dx$ বা, $A = \int_{x=a}^{b} y\,dx$

$y = f(x)$ রেখা বেষ্টিত সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



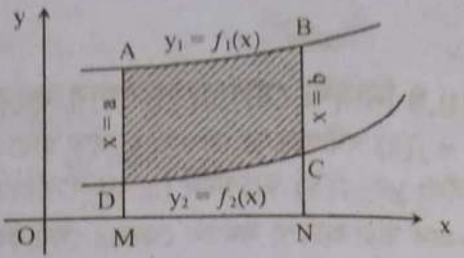
যদি ফাংশন $f(x)$, $[a, b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ও একমান বিশিষ্ট হয়, তবে $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x -অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b y\,dx$
চিত্রে, ABCD ক্ষেত্রটি $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x-অক্ষ $(y = 0)$ দ্বারা আবদ্ধ। এক্ষেত্রে ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$,

$x = f(y)$ রেখা বেষ্টিত সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ এবং y-অক্ষ $(x = 0)$ দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_c^d x\,dy$
চিত্রে, ABCD ক্ষেত্রটি $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ এবং y-অক্ষ $(x = 0)$ দ্বারা আবদ্ধ। এক্ষেত্রে ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= \int_c^d x\,dy = \int_c^d f(y)\,dy$.

দুইটি বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

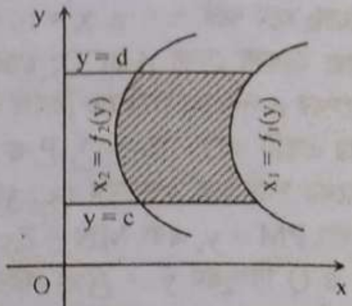


মনে করি, $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ বক্ররেখাদ্বয় এবং $x = a$ ও $x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।
চিত্রে ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।
এখন, ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= AMNB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – DMNC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

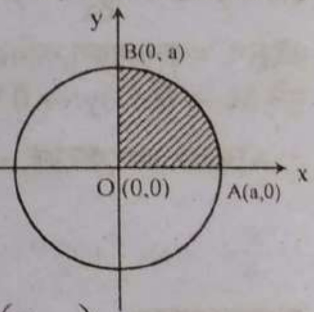


অনুরূপভাবে, $x_1 = f_1(y)$, $x_2 = f_2(y)$ বক্ররেখাদ্বয় এবং $y = c$ ও $y = d$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_c^d (x_1 - x_2)\,dy$.

দ্রষ্টব্য: সমস্যা সমাধানে চিত্রের যে ফাংশন হতে y বা x -এর মান বড় সেটিকে y_1 বা x_1 ধরতে হয়।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৪-০৫; য: বো: ০৯; ব: বো: ১৩; চ: বো: ১১; সি: বো: ১২]



সমাধান: $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ = a.
$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, x-অক্ষের উপরের অংশে y ধনাত্মক অর্থাৎ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × OABO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

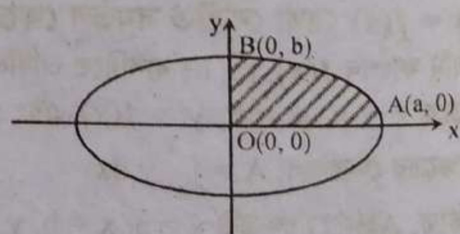
$$= 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.a\cos\theta\,d\theta$$

ধরি, $x = a\sin\theta \ \therefore dx = a\cos\theta\,d\theta$
যখন $x = 0$, তখন $\theta = 0$
এবং যখন $x = a$, তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta = 2a^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi a^2$$ বর্গ একক।

উদাহরণ-2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু: বো: ১২; রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৪; য: বো: ১৬; সি: বো: ০৮]



সমাধান: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...... (i)

(i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 = a^2 \ \therefore x = \pm a$
অর্থাৎ উপবৃত্তটি x-অক্ষকে $(-a, 0)$ ও $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
আবার, $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y^2 = b^2 \ \therefore y = \pm b$
$\therefore$ উপবৃত্তটি y-অক্ষকে $(0, -b)$ ও $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × OABO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.a\cos\theta\,d\theta$$

ধরি, $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$
যখন $x = 0$, তখন $\theta = 0$
এবং যখন $x = a$, তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta = 2ab\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

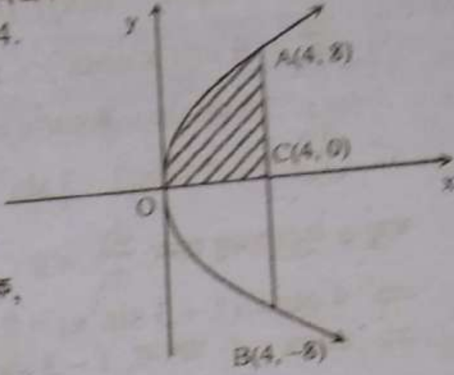
$$= 2ab\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi ab$$ বর্গ একক।

কাজ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উদাহরণ-3. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত ও এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি: বো: ০৫]

সমাধান: $y^2 = 16x = 4.4.x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = 4$.

কাজেই উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(4, 8)$ ও $(4, -8)$।



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = OBCAO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= 2 × OCAO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx$$

| $y^2 = 16x$
| $\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{x}$
| x-অক্ষের উপরে y-ধনাত্মক,
| কাজেই $y = 4\sqrt{x}$

$$= 8\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

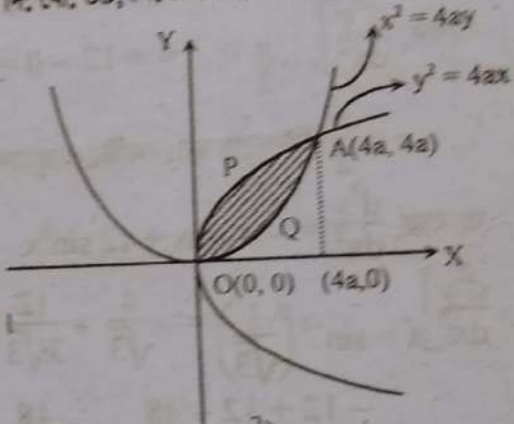
$$= 8.\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{16}{3}.8 = \frac{128}{3}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ-4. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[সি: বো: ০৮; রা: বো: ১৩; কু: বো: ০৮; দি: বো: ০৯; সি: বো: ১৬, ১৫, ০৪; ব: বো: ১৫, ১৪]

সমাধান: $y^2 = 4ax$ .... (i) ও $x^2 = 4ay$ .... (ii)

পরাবৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় করি।

(ii) নং হতে y -এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে,



$$\left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64a^3x$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4a)(x^2 + 4ax + 16a^2) = 0$$

$\Rightarrow x = 0, 4a$; কারণ, $x^2 + 4ax + 16a^2 = 0$ হতে প্রাপ্ত মান কাল্পনিক।

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow y = 0, 4a$

$\therefore$ পরাবৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয় $(0, 0)$ ও $(4a, 4a)$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = OPAQO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a}(y_1 - y_2)\,dx = \int_0^{4a}\left(2\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a} = 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}(8a^{3/2} - 0) - \frac{1}{12a}(64a^3 - 0)$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ-5. $f(x) = \sin x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।

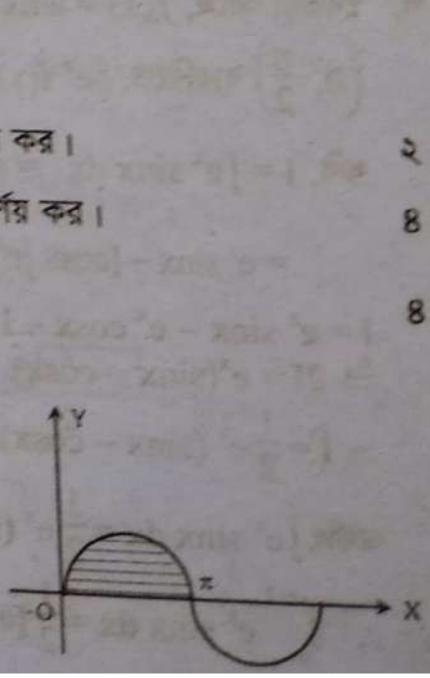
ক. উদ্দীপকের ফাংশনটি দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে উৎপন্ন একটি লুপের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. $4f(x)[1 - \{f(x)\}^2]$ ফাংশনটির $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে লঘু ও গুরুমান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে $\int e^x f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ক. ধরি, $y = f(x) = \sin x$

যেহেতু $x = 0$ এবং $x = \pi$ হলে $y = 0$ হয়, কাজেই ফাংশনটির ১ম চতুর্ভাগে লুপটি 0 হতে π সীমার মধ্যে অবস্থিত।



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$$= -[\cos x]_0^{\pi} = -[\cos\pi - \cos 0] = -[-1 - 1]$$

= 2 বর্গ একক **(Ans.)**

খ. ধরি, $y = 4f(x)[1 - \{f(x)\}^2] = 4\sin x(1 - \sin^2 x) = 4\sin x\cos^2 x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4\cos^2 x.\cos x + 4\sin x.2\cos x(-\sin x)$$

$$= 4\cos^3 x - 8\sin^2 x\cos x = 4\cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x) = 4\cos x(1 - 3\sin^2 x)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin x(1 - 3\sin^2 x) + 4\cos x(-6\sin x\cos x) = -4\sin x + 12\sin^3 x - 24\cos^2 x\sin x$$

লঘু ও গুরুমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 4\cos x(1 - 3\sin^2 x) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0$ অথবা, $1 - 3\sin^2 x = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

এখন, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = -4 + 12 - 0 = 8 > 0$

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির লঘুমান বিদ্যমান এবং উক্ত মান $= 4\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$ **(Ans.)**

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin x + 12\sin^3 x - 24\sin x(1 - \sin^2 x)$

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{12}{3\sqrt{3}} - 24.\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{12}{3\sqrt{3}} - \frac{48}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-12 + 12 - 48}{3\sqrt{3}} = -\frac{48}{3\sqrt{3}} = -\frac{16}{\sqrt{3}} < 0$$

$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ বিন্দুতে ফাংশনটির গুরুমান বিদ্যমান এবং উক্ত মান $= 4\sin x(1 - \sin^2 x)$

$$= 4.\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}.\frac{2}{3} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে, $\int e^x f(x)\,dx$ এর মান $= \int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$ নির্ণয় করতে হবে।

ধরি, $I = \int e^x \sin x\,dx = \sin x\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin x)\int e^x dx\}dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$

$$= e^x\sin x - [\cos x\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\cos x)\int e^x dx\}dx] = e^x\sin x - [e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx]$$

$I = e^x\sin x - e^x\cos x - I$

$\Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x)$

$\therefore I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

অর্থাৎ $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}[e^x(\sin x - \cos x)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\{e^{\frac{\pi}{2}}(1 - 0) - 1(0 - 1)\} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-6. $x^2 + y^2 = 50$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

ক. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর। ২

খ. $y = x$ রেখা উদ্দীপকের বৃত্তকে ১ম চতুর্ভাগে যে বিন্দুতে ছেদ করে উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের বৃত্তটি x-অক্ষের উপরে যে অংশ আবদ্ধ করে উক্ত অংশের ক্ষেত্রফল যোগজের সাহায্যে নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ক. $f(x) = x + \frac{1}{x} \therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\therefore x = -1$ এবং 1 হলে $f'(x) = 0$ হয়।

$x < -1$ ও $x > 1$ এর জন্য $f'(x) > 0$ হবে।

সুতরাং $x < -1$ ও $x > 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়। **(Ans.)**

আবার, $-1 < x < 1$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$.

$\therefore -1 < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়। **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 50 \;\ldots\ldots$ (i)

এবং সরলরেখার সমীকরণ, $y = x \;\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $x^2 + x^2 = 50$ বা, $2x^2 = 50$ বা, $x^2 = 25 \;\therefore x = \pm 5$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 5$ হলে $y = x = 5$

$x = -5$ হলে $y = x = -5$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $(5, 5)$ ও $(-5, -5)$

কিন্তু $y = x$ রেখাটি বৃত্তটিকে ১ম চতুর্ভাগে $(5, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

x এর সাপেক্ষে (i) নং অন্তরীকরণ করে,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

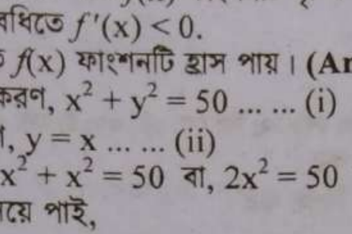
$(5, 5)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{5} = -1$

$\therefore (5, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 5 = \frac{dy}{dx}(x - 5)$

বা, $y - 5 = -1(x - 5) \;\therefore x + y - 10 = 0$ **(Ans.)**

গ. $x^2 + y^2 = 50$

$\therefore y = \pm\sqrt{50 - x^2}$



x-অক্ষের উপরের অংশে y-ধনাত্মক অর্থাৎ, $y = \sqrt{50 x^2}$

$x = 0$ হলে $y = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

যেহেতু বৃত্তটির কেন্দ্র মূলবিন্দু। সুতরাং x-অক্ষের ওপরে ক্ষেত্রটি অর্ধেক অংশ অবস্থিত।

$\therefore$ x অক্ষের উপরে অবস্থিত অংশের ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^{5\sqrt{2}} \sqrt{50 - x^2}\, dx = 2\int_0^{5\sqrt{2}} \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - x^2}}{2} + \frac{(5\sqrt{2})^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5\sqrt{2}}\right]_0^{5\sqrt{2}} \left[\because \int\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c\right]$$

$$= 2\left[\left\{\frac{5\sqrt{2}\sqrt{50 - 50}}{2} + \frac{50}{2}\sin^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right\} - (0 + 0)\right]$$

$$= 2(0 + 25\sin^{-1}1) = 2.\frac{25\pi}{2} = 25\pi \text{ (Ans.)}$$

অনুশীলনী-10(G)

1. (i) $y^2 = 4x$ প্যারাবোলা এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[চুয়েট ১৩-১৪; বুটেক্স ১২-১৩; ঢা: বো: ১৩, ০৩; য: বো: ০৭; চ: বো: ১৩, ১০; কু: বো: ১৫, ১৩; সি: বো: ১১, ০৯; ব: বো: ১০]
(ii) $y^2 = 4x$ প্যারাবোলা এবং $x = 2y$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
2. x -অক্ষের সাথে $y = \sin x$ বক্ররেখা এবং $x = \frac{\pi}{2}$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৫]
3. (i) $y = x^3$, x-অক্ষ এবং $x = 2$ ও $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(ii) $y = x^2$, x -অক্ষ $(y = 0)$ এবং $x = 2$ ও $x = 4$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
4. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৭; য: বো: ০৬]
5. $x^2 + y^2 = 16$ দ্বারা
(i) আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[ঢা: বো: ১১; রা: বো: ১৬, ০৭; কু: বো: ১১, ০৭; দি: বো: ১২; সি: বো: ১৪, ০৭; চ: বো: ০৪; য: বো: ১৪; ব: বো: ১১, ০৮, ০৬]
(ii) ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(iii) x-অক্ষের উপরে অবস্থিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ অথবা $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৪, ১২; রা: বো: ১৪, ০৬, ১২; চ: বো: ০৬; কু: বো: ০৯, ০৬, ১২; সি: বো: ১৩, ১০, ০৬; য: বো: ১১, ০৮, ০৫; দি: বো: ১১; ব: বো: ০৯, ০৭]
7. $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুটেক্স ০৫-০৬; য: বো: ১০; ব: বো: ১৬]
8. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
9. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[রুয়েট ০৪-০৫; ঢা: বো: ১৪, ০৯, ০৫; য: বো: ১৩; চ: বো: ১৪; রা: বো: ০৯; কু: বো: ১৪, ১০]
10. $x - y + 2 = 0$ সরলরেখা এবং $y = x^2$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৩]
11. $y = 2x - x^2$ পরাবৃত্ত ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
12. $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্ত এবং $y^2 = ax$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
13. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি: বো: ১০]
14. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৪]
15. $y^2 + x = 0$ প্যারাবোলা এবং $y = x + 2$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
16. $x^2 + y^2 = 1$ এবং $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

1. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx =$ কত?
ক. $\ln|e^x - e^{-x}| + c$ খ. $\ln|e^x + e^{-x}| + c$ গ. $\ln|e^{-x} - e^x| + c$ ঘ. $\ln|e^{2x}| + c$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$ কত?
ক. $\frac{x^2}{2} + c$ খ. $-\sqrt{1 - x^2} + c$ গ. $\sqrt{1 - x^2} + c$ ঘ. $-\sqrt{1 - x^2}$
3. $\int e^x (\tan x + \sec^2 x)\, dx =$ কত?
ক. $e^x \tan x + c$ খ. $e^x \sec^2 x + c$ গ. $-e^x \tan x + c$ ঘ. $e^x \sec^2 x + c$
4. $\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx =$ কত?
ক. $\ell n\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ খ. $\ell n\left|\frac{x+2}{x-2}\right| - 5x + c$ গ. $x + \ell n\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ ঘ. $2x + \ell n\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$

5. $\int 11^z\,dz =$ কত?

ক. $z11^{z+1}+c$ খ. $\frac{11^z}{\ell n 11}+c$ গ. $z11^{z-1}+c$ ঘ. $\frac{z}{11}+c$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{1+x^2}$ হয় তবে y এর মান কোনটি?

ক. $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}+c$ খ. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+c$ গ. $\frac{-1}{1+x^2}+c$ ঘ. $2\tan^{-1}x+c$

7. $\int \frac{dx}{1+\cos x}=$ কত?

ক. $\sec\frac{x}{2}+c$ খ. $\tan\frac{x}{2}+c$ গ. $\sec x+c$ ঘ. $\tan x+c$

8. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$ কত?

ক. $-2\sin\sqrt{x}$ খ. $-\sin\sqrt{x}+c$ গ. $\sin\sqrt{x}+c$ ঘ. $2\sin\sqrt{x}+c$

9. $\int \sin x^\circ\,dx=$ কত?

ক. $\cos x^\circ+c$ খ. $-\cos x+c$ গ. $-\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180}+c$ ঘ. $\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180}+c$

10. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}}=$ কত?

ক. $2\sqrt{1+x^2}+c$ খ. $2\sqrt{\tan^{-1}x+3}+c$ গ. $\sec^2x+c$ ঘ. $\ell n(1+x^2)+c$

11. $\int \frac{\ell n(\sec^{-1}x)}{x\sqrt{x^2-1}}dx=f(x)+c$ হলে, $f(x)$ এর মান কত?

ক. $\frac{(\sec^{-1}x)^2}{2}$ খ. $\sec^{-1}x[\ell n|\sec^{-1}x|-1]$

গ. $\ell n|\sec^{-1}x|-1$ ঘ. $\frac{1}{\sec^{-1}x}-x$

12. $\int e^x(\sin x+\cos x)dx=$ কত?

ক. $-e^x\sin x+c$ খ. $-e^x\cos x+c$ গ. $e^x\sin x+c$ ঘ. $e^x\cos x+c$

13. $\int x^3e^xdx=f(x)+c$ হয় তবে $f(x)=$ কত?

ক. $\frac{1}{3}e^x(3x^2-6x+6)$ খ. $\frac{1}{3}e^x(x^3-3x^2+6x-6)$

গ. $e^x(x^4-5x^3+3x^2-6x+6)$ ঘ. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)$

14. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ এর মান কোনটি?

ক. $2e^{-1}$ খ. $\frac{2}{e}-1$ গ. $2(e-1)$ ঘ. $1-\frac{1}{e}$

15. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$ এর মান কোনটি?

ক. $\frac{\pi}{32}$ খ. $\frac{\pi}{16}$ গ. $\frac{\pi^2}{32}$ ঘ. $\frac{\pi^2}{16}$

16. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}=A$ হলে A এর মান কত?

ক. $\frac{\pi}{3}$ খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{\pi}{8}$ ঘ. $\frac{\pi}{12}$

17. $\int_{-1}^{1} |x+1|\, dx$ এর মান কোনটি হবে?
ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 2

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x} =$ কত?
ক. 0 খ. $\frac{1}{2}$ গ. 1 ঘ. $\frac{3}{2}$

19. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}\, dx$ এর মান কোনটি?
ক. 0 খ. 1 গ. $\frac{1}{152}$ ঘ. $\frac{1}{162}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ এর মান
i. $\int \sec\theta d\theta$ এর সমান ii. $\ell n|\sec\theta + \tan\theta| + c$ iii. $\ell n\,|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

21. $\int \operatorname{cosec}x\, dx$ এর যোগজ—
i. $\ell n\,|\tan \frac{x}{2}| + c$ ii. $-\ell n|\operatorname{cosec}x + \cot x| + c$ iii. $\ell n|\sec x + \tan x| + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. $A = \tan^{-1}x$ ও $B = \frac{1}{1+x^2}$ হলে—
i. B এর যোগজ A ii. $\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx$ এর মান $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \ell n2\right)$
iii. $\tan^{-1}x$ এর যোগজ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. $f(x) = 1 + \sin x, a = 0, b = \frac{\pi}{2}$ হলে—
i. $\sqrt{f(x)}$ এর মান $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$
ii. $\int\sqrt{f(x)}\, dx$ এর মান $2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$
iii. $\int_a^b \sqrt{f(x)}\, dx = 2$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $\int(11x^5 + 6x^4)\, dx = Ax^6 + Bx^D + c$ হলে –
i. $A = \frac{11}{6}$ ii. $B = 6$ iii. $D = 5$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. x চলকের জন্য –

i. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ ii. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ell n\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c$ iii. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

26. $f(x) = \ln x$ হলে –

i. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{x} + c$ ii. $\int_1^e f(x)\,dx = \ln e$ iii. $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{1}{\ln e}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (27 ও 28) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,d\theta$ এর মান কত?

ক. $\frac{\pi}{4}(a-b)$ খ. $\frac{\pi}{4}(a+b)$ গ. $\frac{\pi}{2}(a-b)$ ঘ. $\frac{\pi}{2}(a+b)$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{A}$ এর মান কোনটি?

ক. $\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$ খ. $\frac{\pi}{3\sqrt{ab}}$ গ. $\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$ ঘ. $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$

$F(x) = \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)}$

উপরের তথ্যের আলোকে (29 ও 30) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

29. $F(x) = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+x}$ হলে, A ও B এর মান কত হবে?

ক. $\frac{5}{3}, \frac{4}{3}$ খ. $-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}$ গ. $\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}$ ঘ. $\frac{-5}{3}, -\frac{4}{3}$

30. $\int F(x)\,dx = G(x) + c$ হলে, $G(x) =$ কত?

ক. $\frac{5}{3}\ell n|1-2x| + \frac{4}{3}\ell n|1+x|$ খ. $-\frac{5}{3}\ell n|1-2x| - \frac{4}{3}\ell n|1+x|$

গ. $\frac{5}{6}\ell n|1-2x| + \frac{4}{3}\ell n|1+x|$ ঘ. $\frac{5}{6}\ell n|1-2x| - \frac{4}{3}\ell n|1+x|$

নিচের তথ্যের আলোকে (31 ও 32) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

x এর যে কোনো মানের জন্য একটি বক্ররেখার ঢাল $\frac{dy}{dx} = 2x.$

31. ঢাল এর প্রতি অন্তরজ কত?

ক. $\frac{x^2}{2} + c$ খ. $x^2 + c$ গ. $-\frac{x^2}{2} + c$ ঘ. $-x^2 + c$

32. (2, 5) বিন্দুগামী বক্ররেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $y = x^2 + 1$ খ. $y = x^2 - 1$ গ. $y = x^2 + 3$ ঘ. $y = x^2 - 3$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (33 ও 34) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$, $a=0, b=3$

33. $\int f(x)\,dx =$ কত?

ক. $\sin^{-1}\left(x+\frac{3}{2}\right)+c$ খ. $\sin^{-1}\left(\frac{2x+3}{3}\right)+c$ গ. $\sin^{-1}\left(x-\frac{3}{2}\right)+c$ ঘ. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{3}\right)+c$

34. $\int_a^b f(x)\,dx =$ কত?

ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. π গ. $\frac{3\pi}{2}$ ঘ. 2π

নিচের তথ্যের আলোকে (35 ও 36) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2=9x$ ও $y=3$

35. উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ক. $(-1, 0)$ খ. $(1, 0)$ গ. $(0, 2)$ ঘ. $(1, 3)$

36. y অক্ষ ও রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

ক. $\frac{1}{4}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. 1 ঘ. 2

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

37. $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=f(x)+c$ হলে, $f(x)=?$ [DU 16-17]

ক. $\ln(\sqrt{1+x^2})$ খ. $\tan^{-1}x$ গ. $\sin^{-1}x$ ঘ. $\sqrt{1+x^2}$

38. $\int_1^4 f(x)dx=5$ $\int_0^1 f(3x+1)dx$ এর মান— [DU 16-17]

ক. $\frac{5}{4}$ খ. $\frac{4}{3}$ গ. $\frac{5}{3}$ ঘ. 5

39. $y=x, y=0$ রেখাদ্বয় এবং $x^2+y^2=16$ বৃত্ত দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল— [DU 16-17]

ক. 2π sq. units খ. 3π sq. units গ. 4π sq. units ঘ. 5π sq. units

40. $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{5-2x}}=?$ [DU 16- 17]

ক. $-1+\sqrt{3}$ খ. $1-\sqrt{3}$ গ. $1+\sqrt{3}$ ঘ. $-1-\sqrt{3}$

41. $y=\frac{1}{(2x+1)^2}$ বক্ররেখা এবং $y=0, x=0$ ও $x=1$ রেখাত্রয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [DU 16-17]

ক. $\frac{1}{3}$ খ. 3 গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 2

42. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx$ এর মান কত? [DU 16-17]

ক. $1+\frac{\pi}{4}$ খ. $1-\frac{\pi}{4}$ গ. $1+\frac{\pi}{3}$ ঘ. $1-\frac{\pi}{3}$

43. $\int_0^{10}|x-5|dx$ এর মান কোনটি? *[DU. 15-16]*

ক. 5 খ. $\frac{25}{2}$ গ. 25 ঘ. 50

44. $\int_0^x f(p)\, f'(p)\, dp$ এর মান কোনটি? *[DU. 15-16]*

ক. $\frac{1}{2}f^2(x)$ খ. $\frac{1}{2}x^2$ গ. $\frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$ ঘ. $f(x) - f(0)$

45. $y^2 = 16x$ এবং $y = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি? *[DU. 15-16]*

ক. $\frac{2}{3}$ বর্গ একক খ. $-\frac{2}{3}$ বর্গ একক গ. $\frac{3}{2}$ বর্গ একক ঘ. $\frac{1}{3}$ বর্গ একক

46. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx = f(x) + c$ হলে $f(x) = ?$

[DU 15-16, 07-08; BUET. 11-12; PUST 16-17; IU 16-17, 15-16, 14-15; CU 15-16; JnU 07-08]

ক. $\sin(xe^x)$ খ. $\tan(xe^x)$ গ. $\cot(xe^x)$ ঘ. $\sec(xe^x)$

47. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$ এর মান কোনটি? *[DU. 14-15]*

ক. $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$ খ. $\frac{1}{2}\ln 2$ গ. ∞ ঘ. 0

48. $y = x$ এবং $y = x^2$ দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (বর্গ এককে) কত? *[DU. 14-15]*

ক. $\frac{5}{6}$ খ. $\frac{1}{6}$ গ. $-\frac{1}{6}$ ঘ. $\frac{1}{3}$

49. ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t\, dt$ হলে $F'(x) = ?$ *[DU. 13-14]*

ক. $\frac{1}{x}$ খ. $\ln x$ গ. $x\ln x$ ঘ. $x\ln x - x$

50. $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি? *[DU. 13-14]*

ক. $\frac{\pi a^2}{4}$ খ. $\frac{\pi a^2}{2}$ গ. πa^2 ঘ. $\frac{1}{2}a^2$

51. $y^2 = 4x$ এবং $y = x$ দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল— *[DU. 11-12]*

ক. 3 খ. 8 গ. $\frac{3}{8}$ ঘ. $\frac{8}{3}$

52. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ell nx)}$ এর মান কত? *[DU. 10-11]*

ক. ln3 খ. ln2 গ. 1 ঘ. 0

53. $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ এর মান কোনটি? *[BUET. 12-13]*

ক. $e^x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$ খ. $e^x\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$ গ. $e^x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$ ঘ. $e^x\cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$

54. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} =$ কত? *[BUET. 12-13]*

ক. $\frac{\pi}{3}$ খ. $\frac{\pi}{6}$ গ. $\frac{\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{2}$

55. $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}dt$ হলে x এর কোন মানের জন্য F(x) ন্যূনতম হবে? *[BUET. 11-12]*

ক. 0 খ. 3 গ. $\sqrt{7}$ ঘ. $-\sqrt{7}$

56. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\, dx = ?$ *[BUET. 11-12]*

ক. $\frac{2\pi}{3}$ খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{\pi}{3}$ ঘ. π

57. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$ এর মান কত? *[BUET. 10-11]*

ক. $\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$ খ. $\sqrt{1-x^2} + c$

গ. $\sin^{-1}x + c$ ঘ. $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

58. $\int \frac{\sec^2(\cot^{-1}x)}{1+x^2}\, dx$ এর মান কত? *[BUET. 10-11]*

ক. $x + c$ খ. $-x + c$ গ. $\frac{1}{x} + c$ ঘ. $-\frac{1}{x} + c$

59. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\, d\theta =$ কত? *[BUET 10-11; KUE.T 08-09]*

ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{3\pi}{4}$ ঘ. π

60. $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2} dx$ এর মান কোনটি? *[KUET. 13-14]*

ক. $\frac{1}{1+\cot x} + c$ খ. $\frac{1}{1-\tan x} + c$ গ. $\frac{1}{1+\cos x} + c$ ঘ. $-\frac{1}{1+\tan x} + c$

61. $\int \cos^{-1}x\,dx$ এর মান কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ খ. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

গ. $x[\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}] + c$ ঘ. $x[\cos^{-1}x + \sqrt{1-x^2}] + c$

62. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}\, dx$ এর মান কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. $\tan x + c$ খ. $\cot x + c$ গ. $2\sqrt{\tan x} + c$ ঘ. $\frac{\sqrt{\tan x}}{2} + c$

63. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin x}\, dx$ এর মান কোনটি? *[RUET. 13-14]*

ক. $\frac{1}{2}\ln(2)$ খ. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ গ. $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ ঘ. None

64. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$ এর মান কোনটি? *[RUET. 10-11]*

ক. $2\sqrt{1+\tan x} + c$ খ. $\sqrt{1+\tan x} + c$ গ. $\frac{1}{2}\sqrt{1+\tan x} + c$ ঘ. None

65. $\int x \ln x\, dx$ এর মান নিচের কোনটি? *[CUET. 13-14]*

ক. $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$ খ. $x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c$ গ. $\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c$ ঘ. None

66. $\int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ = কত? *[CUET. 13-14]*

ক. π খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. 2π ঘ. $\frac{\pi}{4}$

67. $\int_1^2 \log x \, dx$ এর মান কোনটি? *[CUET. 10-11]*

ক. $\log 2$ খ. $2 \log 2$ গ. $2 \log 2 - 1$ ঘ. None

68. যদি $\int_0^4 f(x)dx = 6$ হয় তবে $\int_{-1}^3 f(x + 1)dx$ এর মান কত? [BUTEX 16-17]

ক. 5 খ. 7 গ. 0 ঘ. 6

69. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} d\theta$ এর মান কোনটি? *[BUTEX. 12-13]*

ক. $\ln|1 + \sqrt{2}|$ খ. $\ln|1 - \sqrt{2}|$ গ. $\ln 3$ ঘ. $\ln\sqrt{2}$

70. $\int x^{-1} dx$ এর মান কোনটি? *[BUTEX. 11-12]*

ক. $\ln x$ খ. ∞ গ. 0 ঘ. $\frac{1}{x^2}$

71. α এর মান কত হলে $\int_1^{\alpha} \{2 + x\ln(x^2 + 5)\}dx + \int_1^{\alpha} \{3 - x\ln(x^2 + 5)\}dx = 30$ [SUST. 16-17]

ক. 2 খ. 7 গ. 4 ঘ. $\ln 5$

72. $\int x^x(1 + \log x)dx = ?$ [SUST. 16-17]

ক. $x\log x + c$ খ. $c + x^x \log x$ গ. $\log(x^x + 1) + c$ ঘ. $x^x + c$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. O কেন্দ্র বিশিষ্ট $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল A. O কেন্দ্রের সাপেক্ষে O হতে r দূরত্বে একটি বৃত্তাকার ক্ষুদ্র রিং ক্ষেত্রের ভ্রামক $dI = dA.r^2$ যেখানে dA ক্ষুদ্র রিংটির ক্ষেত্রফল।

ক. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx$ নির্ণয় কর।

খ. O বিন্দুর সাপেক্ষে বৃত্তটির ক্ষেত্রফলের ভ্রামক I নির্ণয় কর।

গ. $a = 1$ হলে $y^2 = 1 - x$ দ্বারা আবদ্ধ বৃত্তের অংশটির ক্ষেত্রফল কত?

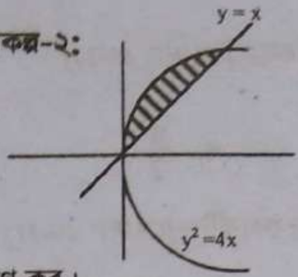
2. 10 ঘনমিটার পানিকে $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ আকারের চৌবাচ্চায় রাখা হয়েছে যার ওজন (w) 98 কিলো-নিউটন। চৌবাচ্চা থেকে একটি ঢালু পথে $\frac{ds}{dt} = 9t - 1$ বেগে প্রবাহিত পানির শক্তি $(w \times s)$ ব্যবহার করে বিদ্যুৎ উৎপাদন করা যায় যেখানে s হলো t সময়ে (সেকেন্ডে) পানির কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব (মিটারে)।

ক. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$ নির্ণয় কর।

খ. চৌবাচ্চাটির গভীরতা নির্ণয় কর।

গ. এক মিনিটে সমস্ত পানি বিদ্যুৎ উৎপাদনে ব্যবহৃত হলে কি পরিমান পানির শক্তি খরচ হবে?

3. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$; দৃশ্যকল্প-২:



ক. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত রাশিটিকে x এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লেখিত চিত্রের ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. $f(x) = x^2$ একটি বক্ররেখা।

ক. $\int_0^3 \frac{8}{3}\sqrt{9-x^2}\, dx =$ কত?

খ. $\int_{-3}^{3} |1 - f(x)|\, dx$ নির্ণয় কর।

গ. $y = 2f(x) + 1$ বক্ররেখা এবং $x - y + 2 = 0$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. $f = e^x$, $g = \sin x$ এবং $h = \cos x$

ক. প্রমাণ কর যে, $\int f(g + h)\, dx = fg +$ ধ্রুবক।

খ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\, gh}{g^4 + h^4} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. 0 হতে $\frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে g, h ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. $y = x^2$ একটি পরাবৃত্ত।

ক. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ নির্ণয় কর।

খ. $\int \frac{dx}{y(x+1)}$ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের পরাবৃত্ত এবং $y = x$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর।

7. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = a + x$

দৃশ্যকল্প-২: $\cot y = \theta$

ক. θ^7 এর y সাপেক্ষে সমাকলিত মান নির্ণয় কর।

খ. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{f(x-a)}{f(x)}}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\int_1^{\sqrt{3}} f(\theta - a) y\, d\theta$ এর মান $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$.

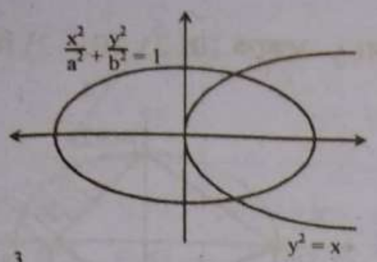
8. $f(x) = 1 - \sin^2 x$

ক. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 9x^2}}$ নির্ণয় কর।

খ. $\int \frac{d\theta}{1 + \sqrt{\frac{f(\theta)}{f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}}$ এর যোজিতফল নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x)\}^2\, dx = \frac{1}{32}(8 + 3\pi)$

9.



ক. $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)\, dx$ নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের পরাবৃত্ত ও $x - y - 2 = 0$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

10. $\ell ny = u$ ও $\tan^{-1}z = p$

ক. $\int u\, dy$ এর মান কত?

খ. $\int z\, p\, dz$ নির্ণয় কর।

গ. $\int_4^9 \frac{u}{\sqrt{e^u}}\, dy$ নির্ণয় কর।

11. $f(x) = (x - 5)^2$ ও $g(x) = \sin x - \cos x$

ক. $\int \sin x^\circ\, dx$ এর মান কত?

খ. $\int \frac{1 - g(x)}{1 + g(x)}\, dx$ এর যোগজ কত?

গ. প্রমাণ কর যে, $\int_0^{10} \sqrt{25 - f(x)}\, dx$ এর মান $\frac{25\pi}{2}$

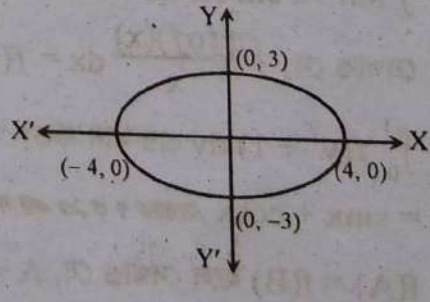
12. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x + 2)(x - 3)^2}$ এবং $y^2 + x = 0$

ক. $[0, 3]$ ব্যবধির মধ্যে $y = x^2$ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. $\int_0^2 f(x)\, dx$ নির্ণয় কর।

গ. $h(x) = (x + 2)(x - 3)^2 f(x)$ হলে $h(x)$ ও $y^2 + x = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. $f(x) = x^4$ একটি ফাংশন।



ক. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x}\, dx$ নির্ণয় কর।

খ. $I = \int_0^{\pi/4} f(\cos\theta)\, d\theta$ হলে, দেখাও যে, $I - \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{32}$

গ. চিত্রে প্রদর্শিত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

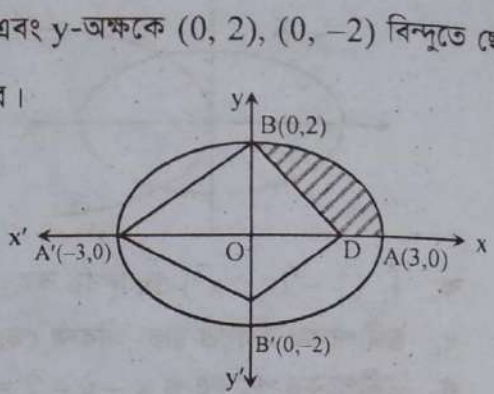
14. $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x$

ক. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$ নির্ণয় কর।

খ. $\int_0^1 g(x)\, e^{g(-3x)}\, dx$ নির্ণয় কর।

গ. $\frac{f(x)}{\{f(x) + 2\}\{f(x) - 3\}}$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় কর।

15. নিচের চিত্রে $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে (3, 0), (–3, 0) এবং y-অক্ষকে (0, 2), (0, –2) বিন্দুতে ছেদ করে। BD সরলরেখার ঢাল –1 যা x অক্ষকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

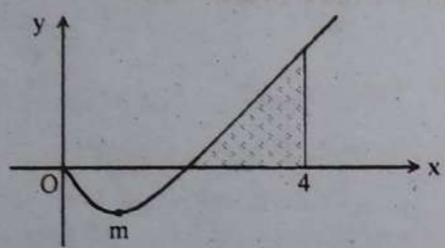


ক. $\int \ln x$ নির্ণয় কর।

খ. প্রদত্ত বক্ররেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. দাগাঙ্কিত এলাকা ABD অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

16.



চিত্রে, $y=\sqrt{x}\,\ell nx$ এর বক্ররেখার লেখচিত্র দেখানো হয়েছে।

ক. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ এর যোগজ নির্ণয় কর।

খ. বক্ররেখাটির সর্বনিম্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং x = 4 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

17. $f(x)=4-x^2$

ক. $\int_2^5\frac{x^3}{1+x^8}dx$ নির্ণয় কর।

খ. $\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{f(x)}\,dx$ নির্ণয় কর।

গ. সমাকলন পদ্ধতিতে $y^2=f(x)$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. $f(x)=ln\,x$

ক. $\int\sin 7x\sin 5x\,dx$ এর যোগজ কত?

খ. দেখাও যে, $\int\frac{(fof)(x)}{x}dx=f(x)\{(fof)(x)-1\}+c$

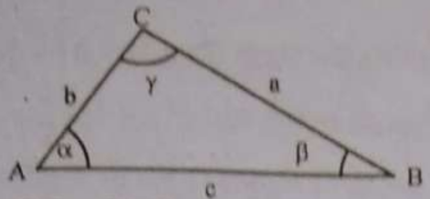
গ. $\int_0^1 f(y^2+1)\,dy$ এর মান কত?

19. $f(x)=\sin x+\cos x$ *[অধ্যায় ৭ ও ১০ এর সমন্বয়ে]*

ক. f(A) = f(B) হলে দেখাও যে, $A+B=\frac{\pi}{2}$

খ. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1-f(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $y=\left\{f\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{49-x^2}\right)\right\}^2-1$ সমীকরণটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যোগজীকরণের মাধ্যমে নির্ণয় কর।

20. 

$\alpha = 3\beta$, $BC = 2AC$ /অধ্যায় ৭ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ নির্ণয় কর।

খ. α, β, γ নির্ণয় কর।

গ. $\gamma = 60^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

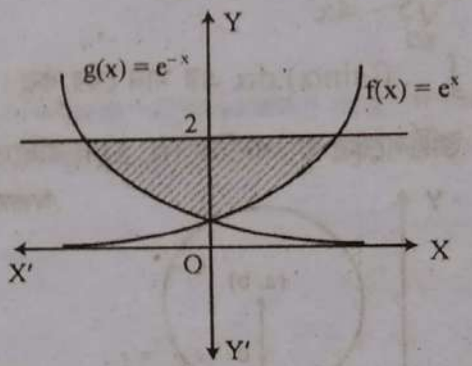
21. $f(x) = x^2 + 1$ একটি ফাংশন। /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ মান বের কর।

খ. $[f(x) - 1]^{\frac{n}{2}}$ এর মূল নিয়মে অন্তরজ বের কর।

গ. $\int \frac{x}{(x-5)\, f(x)}\, dx$ নির্ণয় কর।

22. /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/



ক. $\frac{d}{dq}\left(\frac{p}{q^2} + \frac{1}{pq} + \frac{q}{p^2}\right)$এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\int \frac{f(5x) + f(3x)}{f(x) + g(x)}\, dx$ নির্ণয় কর।

গ. ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

23. $f(x) = \sin px \cos qx$ $(p > q)$ এবং $h(x) = x$ /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$ নির্ণয় কর।

খ. $\int f(x)\, dx = g(x) +$ ধ্রুবক হলে, $g(x)$ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\int_0^4 h(x)\sqrt{4 - h(x)}\, dx = \frac{128}{15}$

24. $f(x) = \tan^{-1}x$ একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন। /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $x^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. $\ln y = f(x)$ হলে, দেখাও যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$

গ. $\int x\, f(x)\, dx$ নির্ণয় কর।

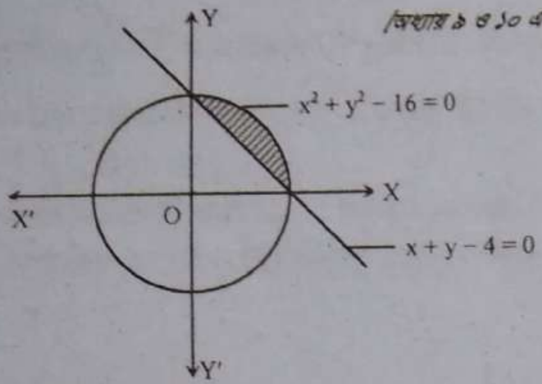
25. $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$এবং $y = g(x) = \ln(x + f(x))$ /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\int \log_a x\, dx$ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $(a^2 + x^2)\, y_2 + xy_1 = 0$

গ. প্রমাণ কর যে, $\int \frac{1}{f(x)}\, dx = g(x) +$ ধ্রুবক।

26. *[অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে]*



ক. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+9} - 3}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের বৃত্ত ও সরলরেখার সমষ্টি দ্বারা গঠিত বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

গ. ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

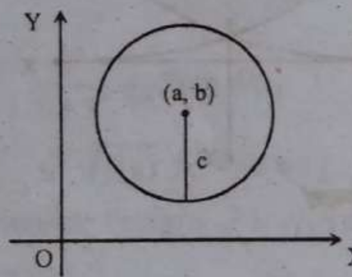
27. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x$ একটি ফাংশন *[অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে]*

ক. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$ নির্ণয় কর।

খ. $\int_0^{\pi/2} f(\sin\alpha)\, d\alpha$ এর মান বের কর।

গ. উদ্দীপকের ফাংশনটির $[0, 5]$ ব্যবধিতে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের কর।

28. *[অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে]*

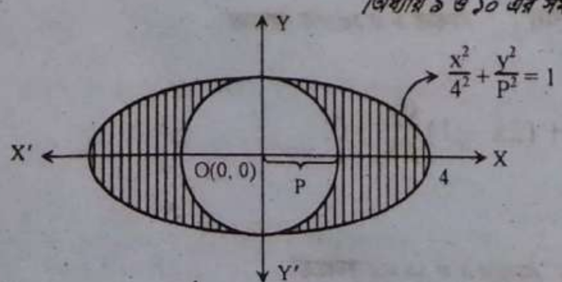


ক. p এর সাপেক্ষে $\ln(e^p + e^{-p})$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. প্রদত্ত বৃত্তের যে সমস্ত বিন্দু x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

গ. $a = b = 0$ হলে প্রদত্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

29. *[অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে]*



ক. $a = e$ বিন্দুতে $\dfrac{d}{da}(7^a)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. যোগজীকরণের সাহায্যে চিত্রের বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. $P = 3$ হলে ছায়াঘেরা অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

30. $x^2+y^2-16=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ হলে দেখাও যে, $y_1^2=y^2-1$

খ. বৃত্তটির উপর এমন বিন্দুগুলি নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x-অক্ষের উপর লম্ব।

গ. যোগজীকরণের সাহায্যে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

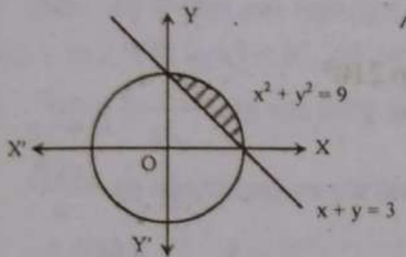
31. একটি ফাংশন $f(x)$ কে নিম্নোক্ত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হলো $f(x)=\frac{4x}{(3x+1)(x+1)^2}$ /অধ্যায় ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\frac{4x}{(3x+1)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln 2$.

32. /অধ্যায় ৬, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

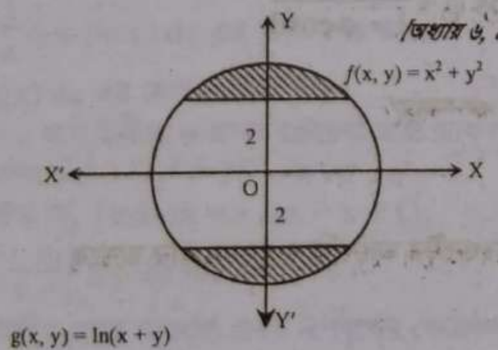


ক. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 একক এবং একটি চাপ কেন্দ্রে 50°কোণ উৎপন্ন করলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. যে সকল বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখা x অক্ষের উপর লম্ব, সেই বিন্দুগুলোতে বক্ররেখার স্পর্শক নির্ণয় কর।

গ. ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

33. /অধ্যায় ৬, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/



ক. ঢাকা ও বগুড়া পৃথিবীর কেন্দ্রে 1.5° কোণ উৎপন্ন করে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। ঢাকা ও বগুড়া এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

খ. $f(x, y)=g(x, y)$ হলে $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $f(x,y)=9$ হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

34. $P(x)=\sin 2x$ ও $R(x)=\cos 2x$ /অধ্যায় ৬, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-P(x)}{R(x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $\int e^x P(x)\,dx=\frac{1}{5}e^x R(x)(\tan 2x-2)+c$

গ. $0\le x\le\frac{9\pi}{8}$ ব্যবধিতে লেখচিত্রের সাহায্যে $P(x)-R(x)=0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর।

35. $M(x) = \cot x$ /অধ্যায় ৬, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\frac{1}{M(A)} + \frac{1}{M(B)} + \frac{1}{M(C)} = 0$ হলে, দেখাও যে, $\left\{\sum M(A)\right\}^2 = \sum \{M(A)\}^2$

খ. $y = M\left(a \tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\, y_2 + 2\,(x - ay)\, y_1 = 0$

গ. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} x\, M\,\{\cot^{-1}(\cot^{-1} x)\}\, dx$ নির্ণয় কর।

36. $g(a) = a^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন। /অধ্যায় ৬, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\ln\{g(x)\}$ এর যোগজীকরণ নির্ণয় কর।

খ. $y = x^{g(x)}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

গ. $\tan x = g(e)$ সমীকরণটি $(0, 2)$ ব্যবধিতে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

37. $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = \sin x$ /অধ্যায় ৭, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. প্রমাণ কর যে, $\sin 750° = \sin 540° \cos 210° + \cos 540° \sin 210°$

খ. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\int f(x).\, g(x)\, dx$ নির্ণয় কর।

38. $f(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$. /অধ্যায় ৭, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\int f(\theta)\, d\theta$ নির্ণয় কর।

খ. $f(\theta) = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan\frac{\varphi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$

গ. লিমিট হিসাবে $f(\theta)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

39. $f(\theta) = \sin\theta$ এবং $g(\theta) = \cos\theta$ /অধ্যায় ৮, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\frac{f(\theta)}{g(\theta)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এর জন্য ডোমেন নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $\theta = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে $f(\theta)\,\{1 + g(\theta)\}$ ফাংশনটির আপেক্ষিক বৃহত্তম মান রয়েছে।

গ. $\int f^2\,(2g^2 - 1)\, d\theta$ মান এর নির্ণয় কর।

40. $f(x) = 1 + x^2$ ও $g(x) = 3 - x^2$ /অধ্যায় ৮, ৯ ও ১০ এর সমন্বয়ে/

ক. $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. $\frac{x}{f(x)}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

গ. $f(x)$ ও $g(x)$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

41. দৃশ্যকল্প-I : $f(x) = \frac{x}{(x - 1)(x^2 + 1)}$

দৃশ্যকল্প-II : $2x^2 + 2y^2 = 64$ /ঢা. বো. ১৭/

ক. $\int \ln x\, dx$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-I হতে $\int f(x)\, dx$ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-II দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

42. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$ .... (i), $g(x) = x^2 + 1$ .... (ii) /রা. বো. ১৭/

ক. $\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ নির্ণয় কর।

খ. (i) বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $\int_0^1 f(x).g(x)\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

43. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, $x = 3$; $f(x) = xe^x$, $g(x) = (x+1)^3$. /রা. বো. ১৭/

ক. $\cot x = \frac{1}{9}$ হলে $\sec 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}\{g(x)\}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

44. $f(x) = \ln x$ এবং $g(x) = e^x$. /দি. বো. ১৭/

ক. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{ax}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\frac{f(2x)}{x}$ এর গুরুমান এবং লঘুমান বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

গ. $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^2 g(x)\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

45. $g(z) = mz \sin^{-1} z$ একটি ফাংশন এবং $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ একটি বক্ররেখা। /দি. বো. ১৭/

ক. $\int_1^2 \frac{1}{z} \cos(\ln z)\, dz$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\int g(x)\, dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর।

গ. $b > a$ হলে উদ্দীপকে প্রদত্ত বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল বের কর।

46. $u = e^x$ এবং $4x^2 + 9y^2 = 36$ /কু. বো. ১৭/

ক. দেখাও যে, $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

খ. $\int_0^{\ln 2} \frac{u}{1+u} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. যোগজীকরণের সাহায্যে প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

47. দৃশ্যকল্প: $g(x) = x \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $y = \cos(m \sin^{-1} p)$। /চ. বো. ১৭/

ক. x এর সাপেক্ষে $ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্পের আলোকে x এর সাপেক্ষে g(x) এর যোগজ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্পের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1-p^2)y_2 - py_1 + m^2y = 0$.

48. $\varphi(x, y) = 9x^2 + 16y^2 - 144$; $f(x) = x - 2$ এবং $g(x) = \sin^6 x$. /সি. বো. ১৭/

ক. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)}$ নির্ণয় কর।

খ. (i) $\int_0^2 f(x)\tan^{-1}(x-2)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\varphi(x, y) = 0$ ও $f(x) = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

49. $F(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$, $H(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$. *[য. বো. ১৭]*

ক. $y = (x-2)(x+1)$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $F(x)$ এর লঘুমান, গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর।

গ. $\int_0^1 H(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

50. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12 - 16x^2}}$ এবং $\psi(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{5}\right)$ *[ব. বো. ১৭]*

ক. x এর সাপেক্ষে x^x এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের আলোকে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের আলোকে নির্ণয় কর : (i) $\int \varphi(x)\,dx$; (ii) $\int \psi(x)\,dx$

51. দৃশ্যকল্প-১ : $f(\theta) = \cos^3\theta$, $g(\theta) = \sin\theta$,

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 = 36$ *[ব. বো. ১৭]*

ক. $\int \dfrac{dx}{1 + e^x}$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + g(\theta)}\,d\theta$; (ii) $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমাকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

উত্তরমালা

1. **(i)** $\frac{8}{3}$ বর্গ একক **(ii)** $\frac{64}{3}$ বর্গ একক **2.** 1 বর্গ একক **3.** **(i)** $\frac{65}{4}$ বর্গ একক **(ii)** $\frac{56}{3}$ বর্গ একক

4. 4π বর্গ একক **5.** **(i)** 16π বর্গ একক **(ii)** 4π বর্গ একক **(iii)** 8π বর্গ একক

6. 6π বর্গ একক **7.** $\frac{1}{3}$ বর্গ একক **8.** $\frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক **9.** $\left(\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12\right)$ বর্গ একক

10. $\frac{9}{2}$ বর্গ একক **11.** $\frac{4}{3}$ বর্গ একক **12.** $a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right)$ বর্গ একক **13.** $c^2\, ln\left(\frac{b}{a}\right)$ বর্গ একক

14. $\frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক **15.** $\frac{9}{2}$ বর্গ একক **16.** $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$ বর্গ একক

বহুনির্বাচনি

1. খ; **2.** খ; **3.** ক; **4.** গ; **5.** খ; **6.** ঘ; **7.** খ; **8.** ঘ; **9.** গ; **10.** খ; **11.** খ; **12.** গ; **13.** ঘ; **14.** গ; **15.** গ; **16.** গ; **17.** ঘ; **18.** খ; **19.** ঘ; **20.** ঘ; **21.** ক; **22.** ক; **23.** ঘ; **24.** খ; **25.** খ; **26.** গ; **27.** খ; **28.** গ; **29.** ঘ; **30.** ঘ; **31.** খ; **32.** ক; **33.** ঘ; **34.** খ; **35.** ঘ; **36.** গ; **37.** ঘ; **38.** গ; **39.** ক; **40.** ক; **41.** ক; **42.** খ; **43.** গ; **44.** গ; **45.** ক; **46.** খ; **47.** ক; **48.** খ; **49.** খ; **50.** খ; **51.** ঘ; **52.** ক; **53.** গ; **54.** খ; **55.** খ; **56.** ঘ; **57.** ঘ; **58.** ঘ; **59.** ক; **60.** ঘ; **61.** ক; **62.** গ; **63.** ঘ; **64.** ক; **65.** ক; **66.** ক; **67.** গ; **68.** ঘ; **69.** ক; **70.** ক; **71.** খ; **72.** ঘ;

সৃজনশীল

1. ক. 0; খ. $\frac{\pi r^4}{2}$; গ. $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)$ বর্গ একক
2. ক. $\tan x + \sec x + c$; খ. 0.27 মি.; গ. 1581720 কিলোজুল।
3. ক. $\tan^{-1}(e^x) + c$; খ. $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$; গ. $\frac{8}{3}$ বর্গ একক
4. ক. 6π; খ. $\frac{44}{3}$; গ. $\frac{9}{8}$ বর্গ একক; 5. খ. $\frac{\pi}{4}$; গ. $2-\sqrt{2}$ বর্গ একক;
6. ক. $\frac{\pi^2}{8}$; খ. $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + c$; গ. $\frac{1}{6}$ বর্গ একক
7. ক. $-\frac{1}{6}\cot^6 y + \frac{1}{4}\cot^4 y - \frac{1}{2}\cot^2 y - \ln\sin y + c$; খ. $(x+a)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + c$
8. ক. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{7}}\right) + c$; খ. $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\ln|\sin\theta + \cos\theta| + c$
9. ক. 9; খ. πab বর্গ একক; গ. $\frac{9}{2}$ বর্গ একক
10. ক. $y\ln y - y + c$; খ. $\frac{1}{2}(z^2+1)\tan^{-1}z - \frac{z}{2} + c$; গ. $12\ln 3 - 8\ln 2 - 4$
11. ক. $\frac{-180}{\pi}\cos\frac{x\pi}{180} + c$; খ. $-x + 2\ln\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} + c$
12. ক. 9 বর্গ একক; খ. $-\frac{3}{25}\ln 6 + \frac{14}{15}$; গ. $\frac{9}{16}$ বর্গ একক; 13. ক. $\frac{1}{6}\ln 2$; গ. 12π;
14. ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$; খ. $\frac{1}{9}(1-4e^{-3})$; গ. $\frac{\sqrt{3}}{10}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$
15. ক. $x\ln x - x + c$; খ. 6π; গ. $\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)$ বর্গ একক;
16. ক. $\tan^{-1}(e^x) + c$; খ. $\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$; গ. $\frac{32}{3}\ln 2 - \frac{28}{9}$ বর্গ একক
17. ক. $\frac{1}{4}(\tan^{-1}625 - \tan^{-1}16)$; খ. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; গ. 4π বর্গ একক
18. ক. $\frac{1}{24}(6\sin 2x - \sin 12x) + c$; গ. $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$
19. খ. $\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; গ. $\frac{49\pi}{2}$ বর্গ একক;
20. ক. $\frac{\pi}{4}$; খ. $\alpha = 90°, \beta = 30°, \gamma = 60°$
21. ক. $2-\sqrt{3}$; খ. nx^{n-1}; গ. $\frac{5}{26}\ln|x-5| - \frac{5}{52}\ln|x^2+1| + \frac{1}{26}\tan^{-1}x + c$
22. ক. $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{pq^2} - \frac{2p}{q^3}$; খ. $\frac{e^{4x}}{4} + c$; গ. $\ln 16 - 2$

23. ক. p cospx cosqx − q sinpx sinqx; খ. $\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(p-q)x}{q-p} - \frac{\cos(p+q)x}{p+q}\right]$

24. ক. $x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$; গ. $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + c$

25. ক. $x\log_a x + x\log_a e + c$

26. ক. 6; খ. $\left(\frac{-1+\sqrt{82}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{82}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; গ. $(4\pi - 8)$ বর্গ একক

27. ক. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}} + c$; খ. $\frac{\pi}{2} - \frac{14}{9}$; গ. $\frac{2}{3}(-1+\sqrt{2})^3 + 2(-1+\sqrt{2})^2 - 2(-1+\sqrt{2})$

28. ক. $\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$; খ. (a, b + c) এবং (a, b − c) গ. πc^2 বর্গ একক

29. ক. $7^e \ln 7$; খ. πP^2 বর্গ একক; গ. 3π বর্গ একক

30. খ. $(\pm 4, 0)$; গ. 16π বর্গ একক

31. ক. $\frac{4}{(3x+1)^2}$; খ. $\frac{4(3x+1)(x+1)^2 - 4x\{2(3x+1)(x+1) + 3(x+1)^2\}}{\{(3x+1)(x+1)^2\}^2}$

32. ক. $\frac{20\pi}{9}$ বর্গ একক; খ. $x \pm 3 = 0$; গ. $\frac{9}{4}(\pi - 2)$ বর্গ একক

33. ক. 168.6 কি. মি. (প্রায়); খ. $x - y = 0$; গ. $9\pi - 18\sin^{-1}\frac{2}{3} - 9\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ বর্গএকক

34. ক. 0; গ. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$; **35.** গ. $\frac{1}{36}(18 - 6\sqrt{3} + \pi)$;

36. ক. $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + c$; খ. $x^{x^x}.x^{x-1}\{1 + x\ln x + x(\ln x)^2\}$; গ. 1.3

37. খ. e^x; গ. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$;

38. ক. $-2\ln\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| + c$; গ. $\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$

39. ক. $\mathbb{R} - \left\{\pm(2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\right\}$; গ. $\frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{1}{4}\theta - \frac{\sin 4\theta}{16} + c$

40. ক. $\frac{8x}{(3-x^2)^2}$; খ. ডোমেন $= \mathbb{R}$; রেঞ্জ $= \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$; গ. $\frac{8}{3}$ বর্গ একক

41. ক. $x\ln x - x + c$;

খ. $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

গ. 8π বর্গ একক

42. ক. $x - \cos x + c$; খ. $(5 - 8\ln 2)x - 50y - 10 + 26\ln 2 = 0$ গ. -1;

43. ক. $\frac{-41}{40}$; খ. $\frac{1}{12}(e^3 - 4)$; গ. $10\pi - \frac{15\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

44. ক. $\frac{2}{a}$; খ. গুরুমান $= \frac{2}{e}$;

গ. $2 + e^2 - e$

45. ক. $\sin(\ln 2)$;

খ. $m\left(\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}\right) + c$;

গ. $\frac{\pi ab}{2}$ বর্গ একক

46. খ. $\ln\frac{3}{2}$; গ. 6π বর্গ একক

47. ক. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

খ. $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + c$

48. ক. $x + \ln|x-1| + c$; খ. (i) $-1 - \frac{5}{2}\tan^{-1}(-2)$; (ii) $\frac{1}{7}$;

গ. $\frac{3}{2}\left(\frac{8\pi}{3} - \sqrt{12}\right)$ বর্গ একক

49. ক. 3; গ. $\frac{e}{2} - 1$

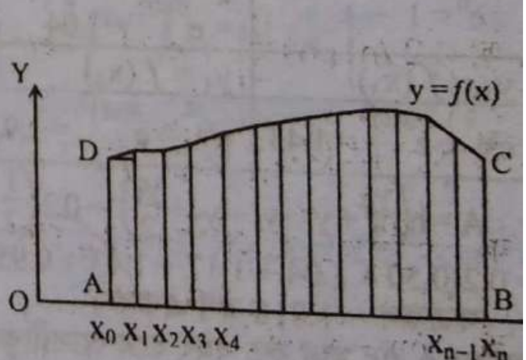
50. ক. $x^x(1 + \ln x)$; খ. 4; 8; গ. (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + c$; (ii) $x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\ln|5^2 + x^2| + c$

51. ক. $-\ln(e^{-x} + 1) + c$; খ. (i) 2; (ii) $\frac{9}{20}$; গ. 36π বর্গ একক

পাঠ-১২

ব্যবহারিক

10.9 $y = f(x)$ রেখা এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ তলের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়



মনে করি, $y = f(x)$ রেখা, x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা $x = x_0$ এবং $x = x_n$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র ABCD, যেখানে $x = x_0$ রেখাকে AD ও $x = x_1$ রেখাকে BC বিবেচনা করা হয়েছে এবং এই রেখাদ্বয় $y = f(x)$ কে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ই মূল লক্ষ্য। x অক্ষস্থ x_0 এবং x_n বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বকে $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{n-1}$ বিন্দু দিয়ে n সংখ্যক সমান h দূরত্বে বিভক্ত করা হলো। প্রত্যেক অংশকে একটি ট্রাপিজিয়াম মনে করলে যেকোন অংশের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান তার প্রতিসঙ্গী ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফলের সমান মনে করা যায়।

এখানে $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots\ldots$ ইত্যাদি এবং $y = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots\ldots$ ইত্যাদি।

সুতরাং ABCD ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}h(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}h(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}h(y_2 + y_3) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}h(y_{n-1} + y_n)$

$$= \frac{1}{2}h[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$$