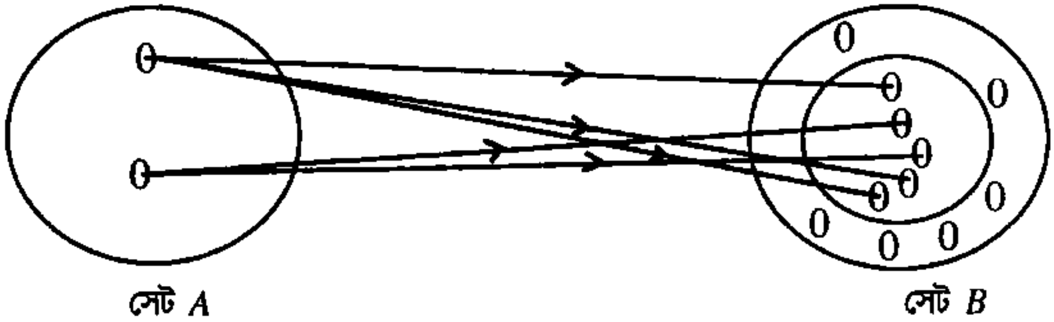
অষ্টম অধ্যায়

ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র
(Functions and graph of Functions)

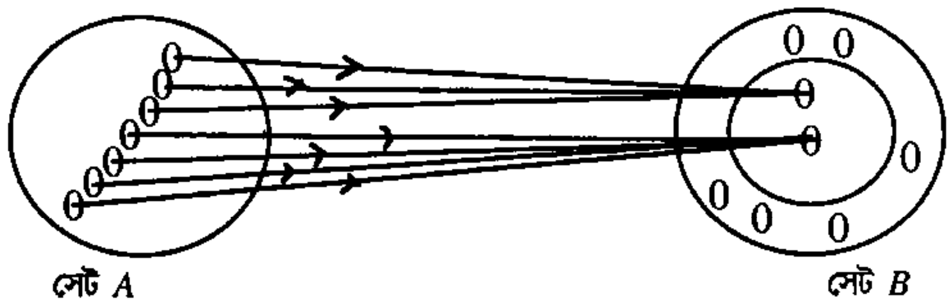
8.1. অন্বয় ও ফাংশন

অন্বয় : মনে করি, A দ্বারা কলেজের কয়েকজন শিক্ষার্থীর সেট এবং B দ্বারা শিক্ষার্থীদের নিজস্ব পাঠ্যপুস্তকের সেট সূচিত করা হলো। ভেনচিত্রের সাহায্যে নিচে A ও B সেট দেখানো হলোঃ

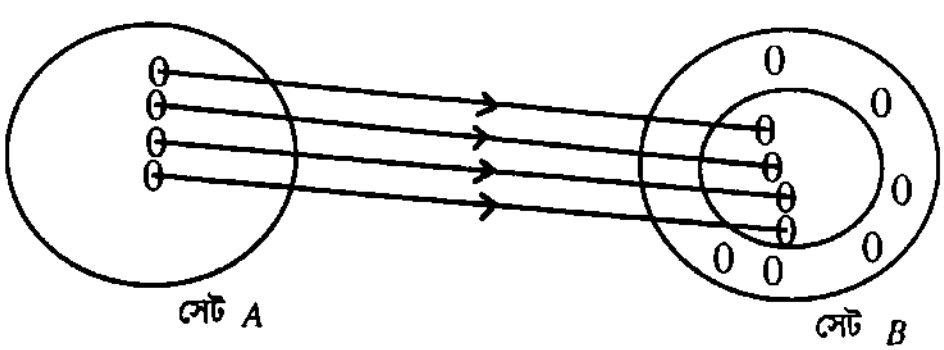


উপরের 'তীর চিহ্ন' পর্যবেক্ষণ করে আমরা সহজেই বলতে পারি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের একাধিক উপাদানের অন্বয় রয়েছে। কারণ একজন শিক্ষার্থীর একাধিক পাঠ্যপুস্তক থাকতে পারে।

(খ) মনে করি, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা কলেজের ছাত্রাবাসগুলির সেট সূচিত করা হলো। নিচে ভেনচিত্র ও তীরচিহ্ন দ্বারা A সেট থেকে B সেটে অন্বয় দেখানো হলো। একটি ছাত্রাবাসে একাধিক শিক্ষার্থী বাস করতে পারে। সুতরাং A সেটের একাধিক উপাদান B সেটের যে কোন অনন্য *(unique)* উপাদানের সাথে অন্বয় রয়েছে।



(গ) মনে করি, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা তাদের রোল নম্বরের সেট সূচিত করা হলো। ভেনচিত্র ও তীরচিহ্ন দ্বারা নিচে A সেট থেকে B সেটে তা দেখানো হলো। একজন শিক্ষার্থীর কেবল একটি রোল নম্বর থাকতে পারে। সুতরাং A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যে কোন অনন্য উপাদানের অন্বয় রয়েছে।



(ক) থেকে (গ) উদাহরণের অন্বয়কে ক্রমজোড়ের সেটের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

অন্বয় : ফাঁকা (*Empty*) নয় এরূপ দুইটি সেট A এবং B হলে, গুণজ সেট $A \times B$ অথবা এর উপসেটকে A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় বলা হয়।

যদি এ অন্বয়কে R দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $R \subseteq A \times B$.

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয়। তাহলে, $R \subseteq A \times B$.

এখন যদি, $a \in A$, $b \in B$ এবং $(a,b) \in R$ হয়, তবে আমরা বলি 'b' এর সাথে 'a' অন্বিত (*Related*) এবং লেখি $a\,R\,b$.

আবার যদি $(a,b) \notin R$, তাহলে আমরা বলি b এর সাথে a অন্বিত নয় এবং লেখি $a \not R\, b$.

মন্তব্য : দুইটি সেটের মাঝখানে '$\subseteq$' ব্যবহার করা হলে বুঝতে হবে যে প্রথম সেটটি দ্বিতীয় সেটের উপসেট অথবা সমান।

অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ : মনে করি, $R \subseteq A \times B$. তাহলে, আমরা জানি R কে বলা হয় A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়। এখানে

R এর ডোমেন $= \{a : (a, b) \in R\}$; R এর রেঞ্জ $= \{b : (a, b) \in R\}$.

উদাহরণ 1. মনে করি, $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 3, 4\}$ তাহলে,

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1,4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় R_1 হলে,

$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ [$\because R_1$ হলো $A \times B$ এর একটি উপসেট]

উদাহরণ 2. মনে করি, N হলো সব স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং অন্বয় R_2

$= \{(a, b) : a \in N,\ b \in N,\ b$ এর একটি উৎপাদক $a\}$.

তাহলে, $2R_2\,6$, $6 \not R_2\, 2$, $5R_2\,15$, $7 \not R_2\, 18$. ইত্যাদি।

বিপরীত অন্বয় : A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় যদি R, অর্থাৎ $R = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ হয়, তবে B সেট থেকে A সেটের অন্বয় হচ্ছে R এর বিপরীত অন্বয়, যা R^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

ফাংশন (*Function*)

অনুচ্ছেদ 8.1 এর উদাহরণ (খ) ও (গ) থেকে দেখা যাচ্ছে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যে কোন অনন্য উপাদান সম্পর্কিত। এ ধরনের অন্বয়কে (*Relation*) বলা হয় A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন (*a function of A into B*). এ ফাংশনকে সাধারণত f দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং লেখা হয়: $f : A \to B$.

মন্তব্য : $f : A \to B$ কে সাধারণভাবে বলা হয় A সেট থেকে B সেটে চিত্রণ (*Mapping of A into B*).

সংজ্ঞা : একটি অন্বয় (*Relation*) যদি এরূপ হয় যে A সেটের প্রত্যেক উপাদান B সেটের অনন্য (*Unique*) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট (*Associated*) থাকে, তাহলে ঐ অন্বয়কে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন বলা হয়।

মন্তব্য : ফাংশনের সংজ্ঞা ক্রমজোড়ের সাহায্যেও দেওয়া যায়। যদি কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা : যদি $(a, b) \in f : A \to B$ হয়, তবে b-কে f এর অধীনে a এর প্রতিচ্ছবি (*image*) বলা হয় এবং $b = f(a)$ লেখা হয়।

উদাহরণ। মনে করি, x হলো $\mathbf{R}$ সেটের উপাদান এবং $\mathbf{R}$ হলো বাস্তব সংখ্যার সেট। $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। যেহেতু $-3 \in R$, $\therefore -3$ এর প্রতিচ্ছবি $f(-3)=(-3)^2 = 9$.

8.2. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ *(Domain and range of a function).*

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন, অর্থাৎ $f: A \to B$. তাহলে f এর অধীনে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি B সেটের উপাদানের অন্তর্ভুক্ত থাকে। A সেটের সব উপাদানের প্রতিচ্ছবিগুলো দ্বারা গঠিত সেটকে

f এর **রেঞ্জ** বলা হয়। A সেটকে f এর **ডোমেন** বলা হয়। এক্ষেত্রে **রেঞ্জকে** $f(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $f(A) \subset B$.

সাধারণভাবে, f এর ডোমেন ও রেঞ্জকে যথাক্রমে ডোম f এবং রেঞ্জ f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ। (a) মনে করি $\mathbf{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, ফাংশন f এর রেঞ্জ হলো সব ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং 0(শূন্য) দ্বারা গঠিত সেট।

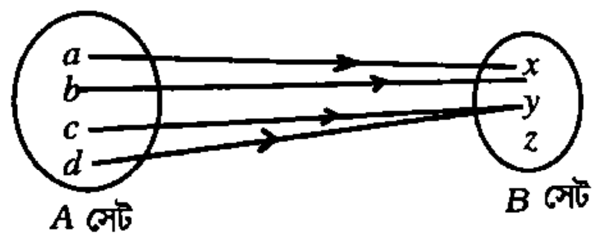
(b) R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f: R \to R$ কে $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : $-1 \le x \le 1$ এর সীমাবদ্ধতার মধ্যে $f(x)$ এর মান বাস্তব হবে। $\therefore f(x)$ এর ডোমেন : $-1 \le x \le 1$.

আবার, ডোমেনের যেকোনো মানের জন্য f এর প্রতিচ্ছবি 0 থেকে 1 হবে।

$\therefore f$ এর রেঞ্জ : 0 থেকে 1.

(c) নিচের স্কেচ থেকে $f: A \to B$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।



$\therefore f: A \to B$ এর ডোমেন : $\{a, b, c, d\}$ এবং রেঞ্জ : $\{x, y\}$.

8.3. ফাংশনের প্রকারভেদ

এক–এক ফাংশন *(One-One function)* :

মনে করি, প্রদত্ত ফাংশন হলো $f: A \to B$. যদি $a_1 \in A$ ও $a_2 \in A$ এর ক্ষেত্রে $a_1 \neq a_2$ হলে, $f(a_1) \neq f(a_2)$ হয়, তবে f কে এক–এক ফাংশন বলা হয়। যেমন, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^3$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করলে f এক–এক ফাংশন হবে; কারণ $x = 3, -3$ হলে, $f(3) = 27$ এবং $f(-3) = -27$; এবং অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার জন্য এদের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা হবে।

সংজ্ঞা : যদি f ফাংশন এর অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে f কে এক–এক ফাংশন বলা হয়।

সার্বিক ফাংশন (*Onto function*)

মনে করি, প্রদত্ত ফাংশন হলো $f{:}A \to B$. তাহলে, f এর রেঞ্জ $f(A)$ হবে B এর উপসেট। যদি $f(A) = B$ হয়, অর্থাৎ B এর সব উপাদানই A এর কমপক্ষে একটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি হয়, তবে f কে **সার্বিক ফাংশন** বলা হয়।

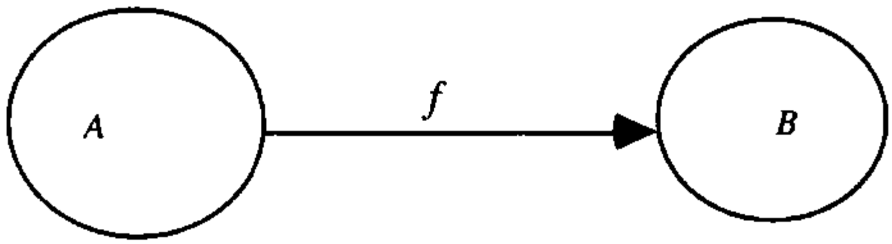
উদাহরণ। মনে করি, $A = [-1,1]$ এবং $f : A \to A$ কে $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো।

তাহলে, f একটি সার্বিক ফাংশন, কারণ $f(A) = A$.

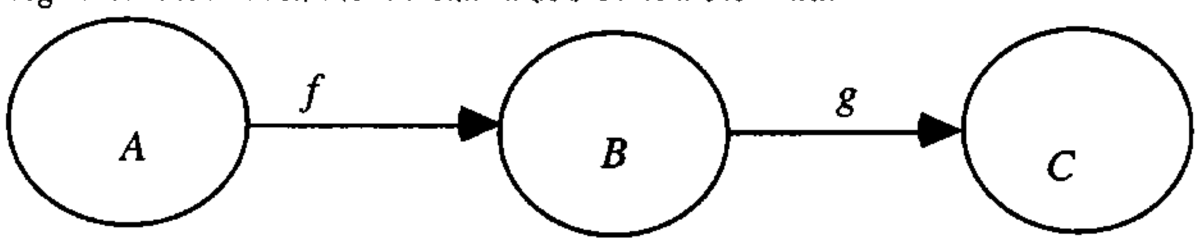
সংযোজিত ফাংশন (*Composition function*):

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশনকে f এবং B সেট থেকে C সেটে বর্ণিত ফাংশনকে g দ্বারা সূচিত করা হলো।

A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশনকে নিচের চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়:



এবং f এবং g ফাংশনদ্বয়কে একত্রে নিচের চিত্রের সাহায্যে দেখানো যেতে পারেঃ



যদি $a \in A$ হয়, তবে f এর অধীনে a–এর প্রতিচ্ছবি অর্থাৎ $f(a)$ হবে B সেটের একটি উপাদান। যেহেতু ফাংশন g এর ডোমেন B এবং B এর একটি উপাদান $f(a)$. সুতরাং g এর অধীনে $f(a)$ এর প্রতিচ্ছবি হবে $g\,(f(a))$; অর্থাৎ $g(f(a))$ হবে C এর একটি উপাদান। এভাবে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানকে C সেটের যে কোন অনন্য *(unique)* উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট করা যেতে পারে। অর্থাৎ A সেট থেকে C সেটে একটি ফাংশন পাওয়া যাবে।

এ নতুন ফাংশনকে বলা হয় f এর সাথে g এর সংযোজিত ফাংশন। এটিকে সাধারণত $(g\ o\ f)$ বা gf দ্বারা সূচিত করা হয়। সংক্ষেপে, $x \in A$ হলে, $(g\ o\ f)(x) \equiv g(f(x))$.

উদাহরণ। A, B, C এর প্রত্যেকে বাস্তব সংখ্যার সেট। $f : A \to B$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা এবং $g : B \to C$ কে $g(x) = x + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো।

এখন $2 \in A$ হলে, $(g\ o\ f)\,(2) = g(\,f(2)\,) = g(4) = 9$.

মন্তব্য : সংজ্ঞা থেকে $(fog)\ (x) \equiv f(g(x))$ এবং $(gof)\ (x) \equiv g(f(x))$. সুতরাং $(fog) \neq (gof)$.

অভেদক ফাংশন (*identity function*) ঃ

মনে করি, A একটি সেট এবং $f : A \to A$ কে $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি ঐ একই উপাদান হবে। এ ধরনের ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলা হয়। অভেদ ফাংশনকে সাধারণত I_A দ্বারা সূচিত করা হয়।

ধ্রুব ফাংশন (constant *f*unction) ঃ

যদি ফাংশন f এর অধীনে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি B সেটের কেবল একটি উপাদান হয়, তবে $f ঃ A \rightarrow B$ কে ধ্রুব ফাংশন বলা হয়। অন্যভাবে বলা যায় যে ফাংশন f একটি ধ্রুব ফাংশন, যদি f এর রেঞ্জে কেবল একটি উপাদান অন্তর্ভুক্ত থাকে।

উদাহরণ। মনে করি, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ কে $f(x) = 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, f একটি ধ্রুব ফাংশন; কারণ x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান সব সময় 7 হবে।

একটি ফাংশনের বিপরীত (Inverse *of* a *f*unction)

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন এবং $b \in B$. তাহলে, f এর অধীনে A সেটের যে সকল উপাদানের প্রত্যেকের প্রতিচ্ছবি b হবে ঐ উপাদানগুলোর সেটকে b এর বিপরীত (*inverse of b*) বলা হয় এবং $f^{-1}(b)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে, যদি $f : A \rightarrow B$ হয়,তবে $f^{-1}(b) = \{x ঃ x \in A, f(x) = b \}$.

উদাহরণ। মনে করি, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট) কে $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, $f(2) = 4$ এবং $f(-2) = 4$. যেহেতু -2 এবং 2 এর উভয়ের প্রতিচ্ছবি 4, সুতরাং $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$.

আবার $f^{-1}(-9) = \varnothing$ (ফাঁকা সেট), কারণ $\mathbf{R}$ এ কোন উপাদান নেই যার বর্গ হলো -9.

বিপরীত ফাংশন (Inverse *f*unction) :

ধরি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন। তাহলে, $f^{-1}(b)$ দ্বারা A সেটের এমন এক বা একাধিক উপাদান সূচিত করে যার বা যাদের প্রতিচ্ছবি হচ্ছে b. b যদি A সেটের কোন উপাদানের প্রতিচ্ছবি না হয় তবে $f^{-1}(b)$ একটি ফাঁকা সেট। যদি $f : A \rightarrow B$ এক–এক এবং সার্বিক উভয় ধরনের ফাংশন হয়, তবে প্রত্যেকটি $b \in B$ এর জন্য $f^{-1}(b)$ এর অনন্য উপাদান A সেটে অন্তর্ভুক্ত থাকবে। সুতরাং প্রত্যেকটি $b \in B$ এর জন্য A সেটে অনন্য (Unique) উপাদান পাওয়া যায়। তাহলে, f^{-1} হলো B সেট থেকে A সেটে একটি ফাংশন। এ ফাংশনকে $f^{-1}: B \rightarrow A$ দ্বারা সূচিত করা হয়। f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়। সুতরাং $f: A \rightarrow B$ এক–এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরনের ফাংশন না হলে বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান থাকে না।

উদাহরণ। মনে করি, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^3 + 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। তাহলে f এক–এক এবং সার্বিক উভয় ধরনের ফাংশন। অতএব, f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান।

এখন f এর অধীনে x এর প্রতিচ্ছবি y হলে, আমরা পাই, $y = f(x) = x^3 + 7$ ... (i)

সুতরাং f^{-1} এর অধীনে y এর প্রতিচ্ছবি x হলে, $x = f^{-1}(y)$

(i) থেকে আমরা পাই, $x^3 = y - 7$

বা, $x = \sqrt[3]{y-7}$

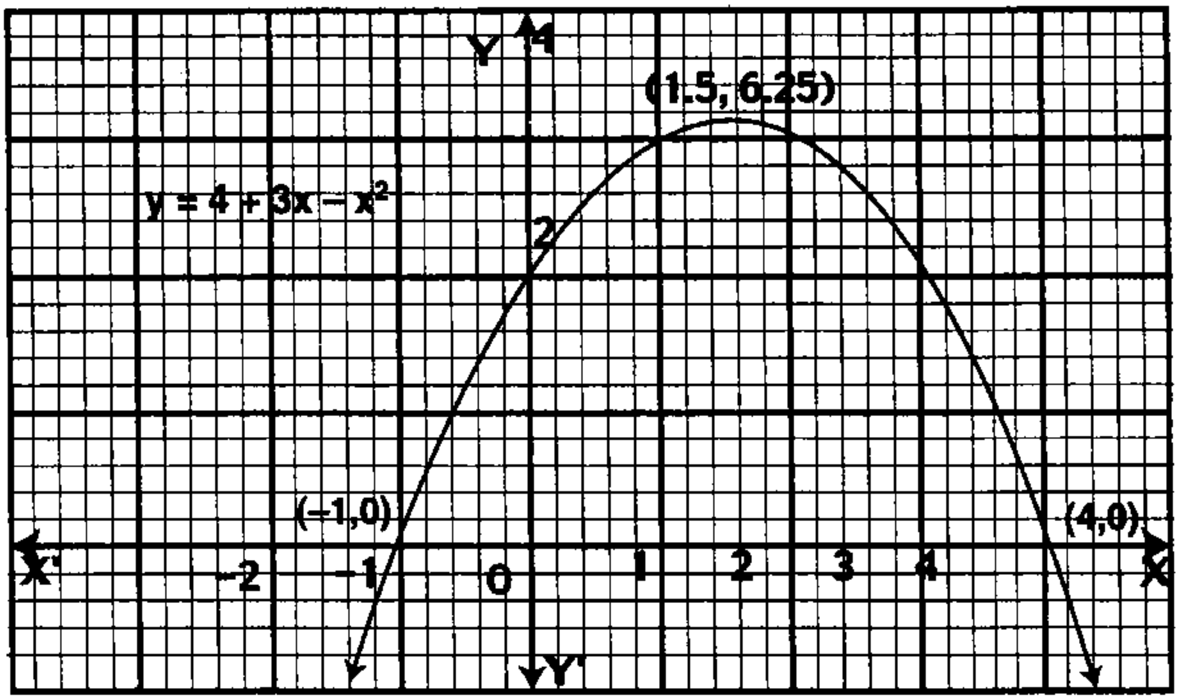
$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}$.

সুতরাং $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7}$.

8.4 সর্বদা প্রয়োজনীয় (Elementary) ফাংশনের স্কেচ

8.4.1 দ্বিঘাত ফাংশনের স্কেচ :

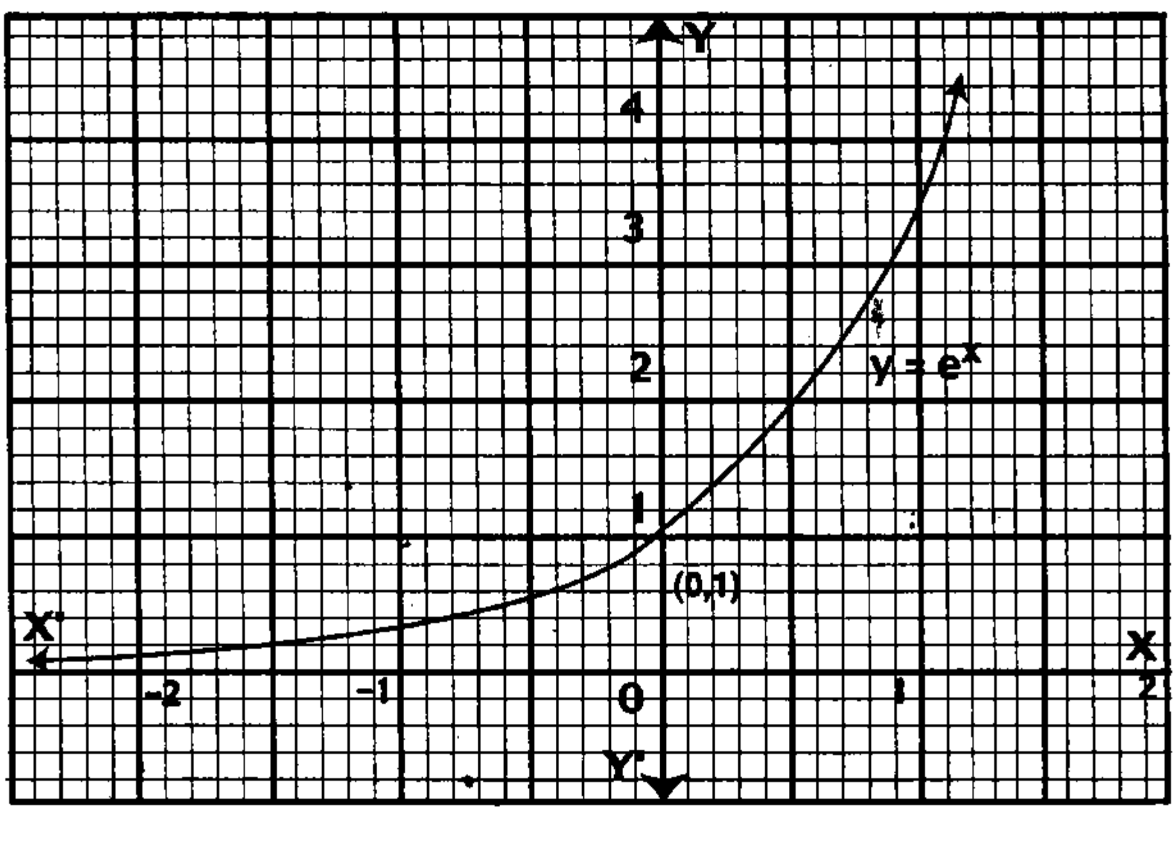
মনে করি, $y = 4 + 3x - x^2$



বৈশিষ্ট্য : (i) স্কেচটি একটি পরাবৃত্ত যার অক্ষটি y-অক্ষের সমান্তরাল।
(ii) স্কেচটি x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে এবং y–অক্ষকে একটি বিন্দুতে ছেদ করে।
(iii) স্কেচটি x-অক্ষের নিচের দিকে তৃতীয় ও চতুর্থ চর্তুভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

8.4.2 সূচক ফাংশনের স্কেচ :

মনে করি, $y = e^x$.



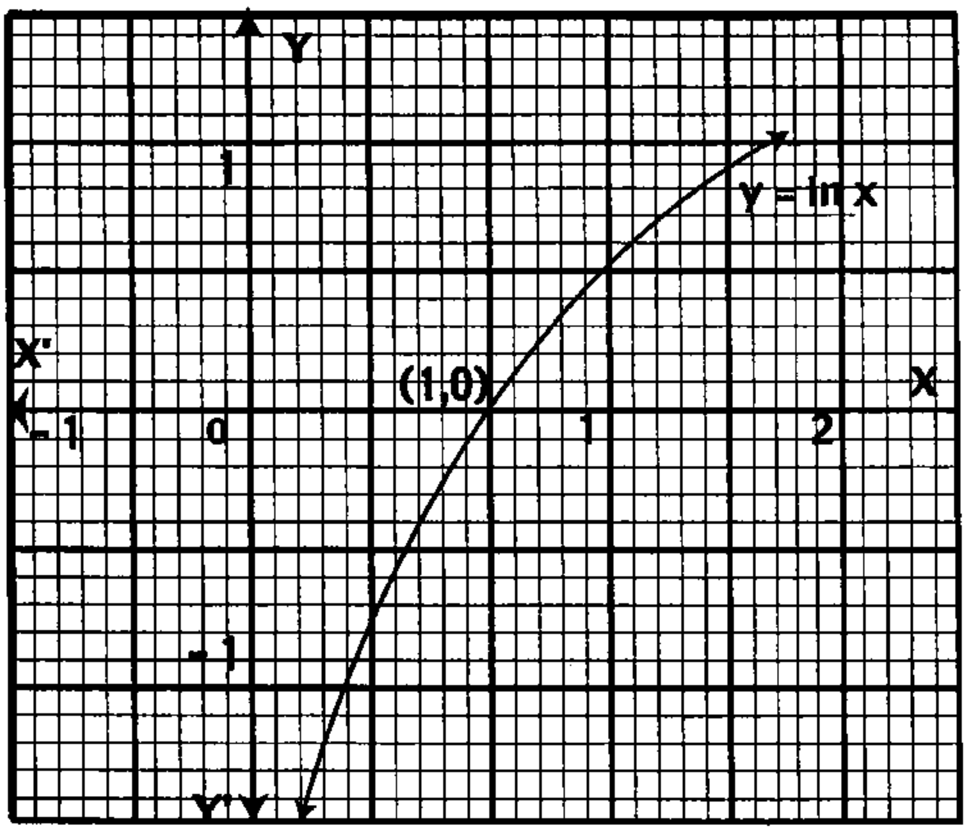
বৈশিষ্ট্য : (i) সম্পূর্ণ স্কেচটি x-অক্ষের উপরিভাগে অবস্থিত।

(ii) স্কেচটি x-অক্ষের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(iii) যেহেতু $y \to 0$, যখন $x \to -\infty$. সুতরাং স্কেচটি x–অক্ষকে ছেদ করবে না।

8.4.3. লগারিদম ফাংশনের স্কেচ :

মনে করি, $y = ln\ x$.

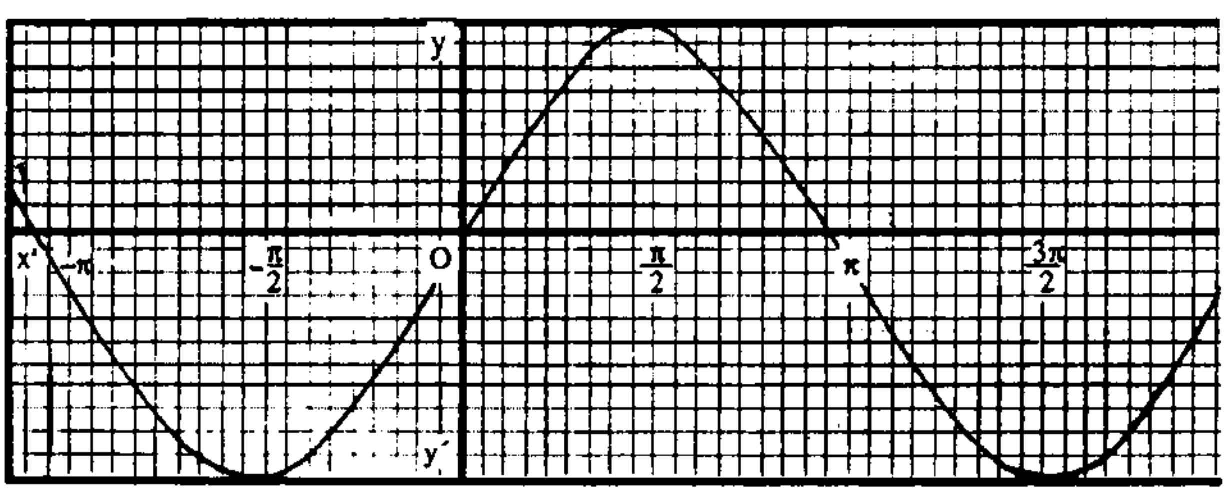


বৈশিষ্ট্য : (i) কেবল $x > 0$ হলেই $ln\ x$ সংজ্ঞায়িত। সুতরাং স্কেচের সব অংশই y-অক্ষের ডানদিকে থাকবে।

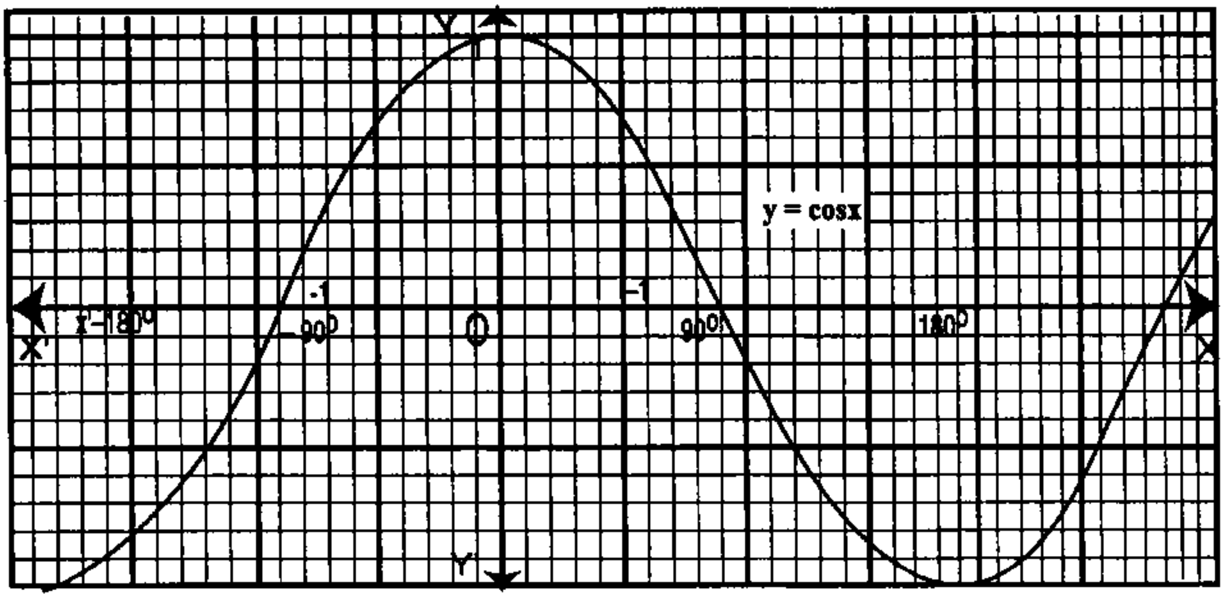
(ii) x এর মান যতই ক্ষুদ্র হবে স্কেচটি ততই y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অগ্রসর হবে কিন্তু কখনই y-অক্ষকে ছেদ করবে না।

8.4.4. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের স্কেচ :

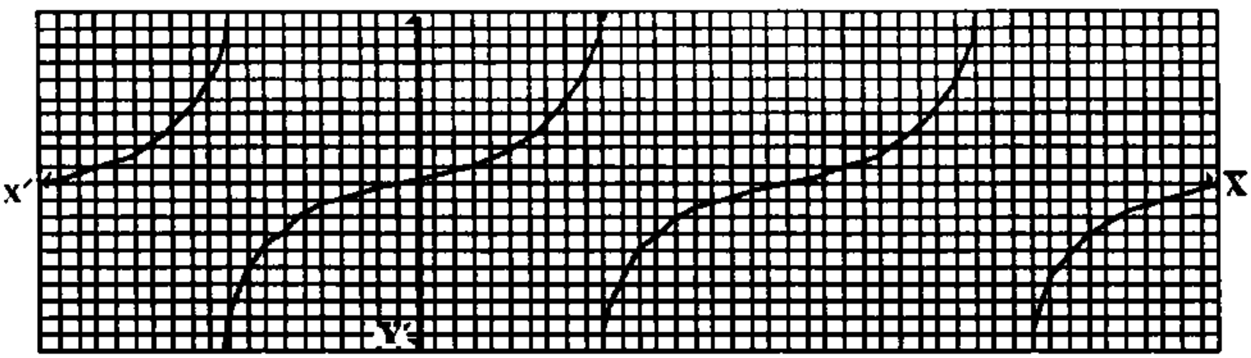
নিচে **sin x, cos x, tan x, cot x, cosec x, sec x** এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



sin x এর স্কেচ



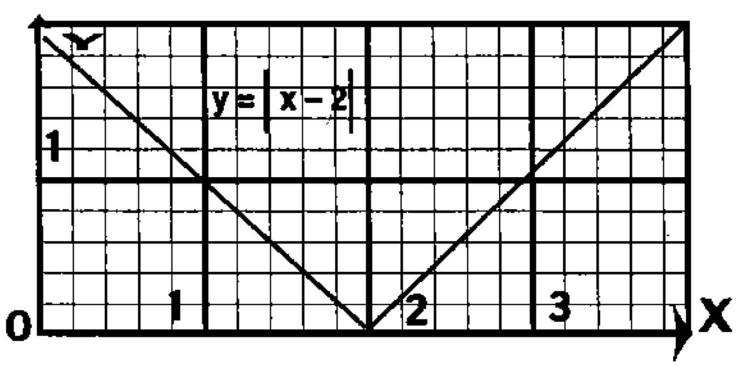
cos x এর স্কেচ



tan x এর স্কেচ

8.4.5. পরম মান ফাংশনের স্কেচ :

মনে করি, $y = |x - 2|$



8.5. ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ

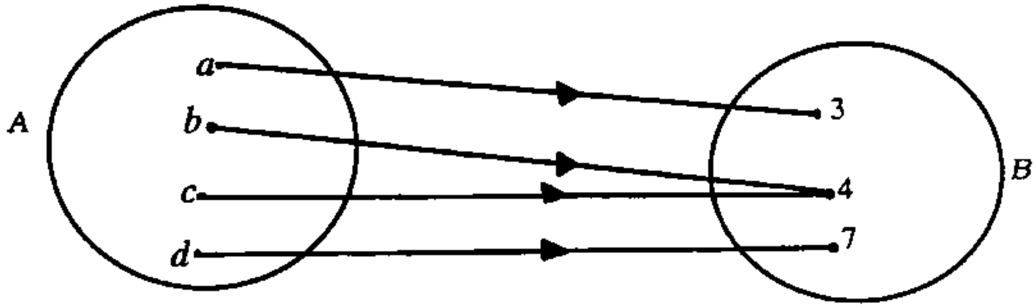
মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশন হলো f, অর্থাৎ $f : A \rightarrow B$. তাহলে, f থেকে ক্রমজোড় (a, b) পাই, যেখানে ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান $a \in A$ এবং ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদান b হলো a এর প্রতিচ্ছবি অর্থাৎ $b \in B$.

এভাবে প্রাপ্ত সব ক্রমজোড়ের প্রতিরূপী বিন্দুগুলো কার্তেসীয় সমতলে স্থানাঙ্কিত করে f এর চিত্ররূপ নির্ণয় করা যায়। এ চিত্ররূপকেই f এর লেখচিত্র বলা হয়। এ লেখচিত্রকে সাধারণভাবে f^* দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ

$f^* = \{(a, b) : a \in A, b = f(a)\}$

মন্তব্য : ফাংশনের লেখচিত্রে $A \times B$ এর কয়েকটি উপাদান অন্তর্ভুক্ত থাকে। $\therefore f: A \to B$ এর লেখচিত্র f^* হলো $A \times B$ এর উপসেট।

উদাহরণ। নিচের চিত্র দ্বারা $f: A \to B$ কে সংজ্ঞায়িত করা হলোঃ



তাহলে, $f(a) = 3, f(b) = 4, f(c) = 4$ এবং $f(d) = 7$. সুতরাং, $f^* = \{(a, 3), (b, 4), (c, 4), (d, 7)\}$.

উপরের চিত্র থেকে লক্ষ করি :

(1) A সেটে একটি মান প্রদানের ফলে B সেট থেকে একটি প্রতিসঙ্গী মান পাওয়া গেছে।

(2) A সেটে একটি মান প্রদানের জন্য B সেট থেকে অনন্য *(unique)* মান নির্ণীত হয়েছে।

f এর এ দুইটি বৈশিষ্ট্যের জন্য f এর লেখচিত্র থেকে নিচের দুইটি বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায় ঃ

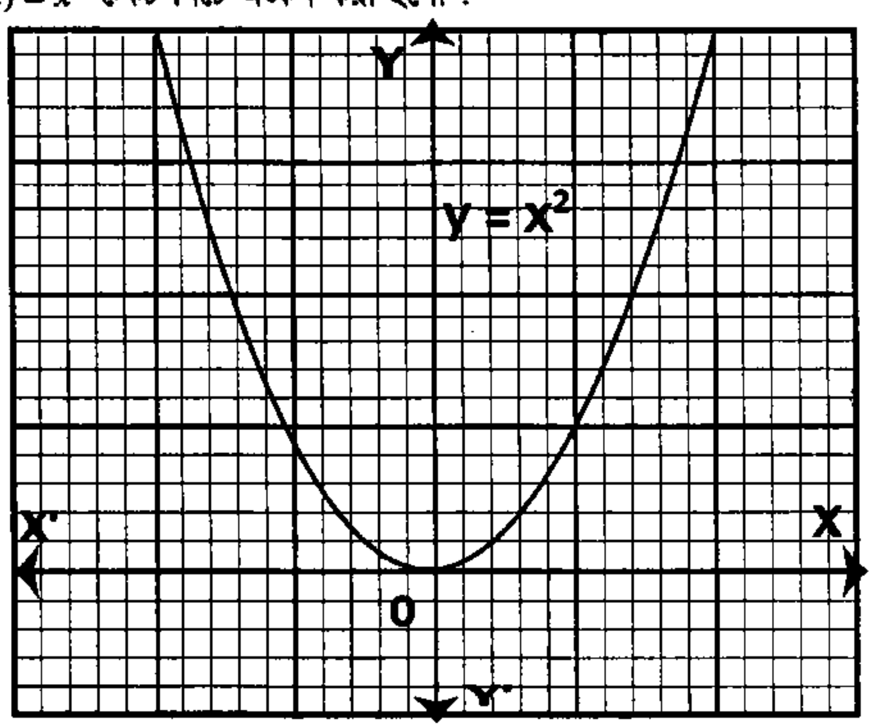
(i) প্রত্যেকটি $a \in A$ এর জন্য লেখচিত্রে একটি ক্রমজোড় (a, b) পাওয়া যায়, অর্থাৎ $(a, b) \in f^*$.

(ii) প্রত্যেকটি $a \in A$ এর জন্য f^* সেটের ক্রমজোড়গুলোর কেবল একটি ক্রমজোড়ে a প্রথম উপাদান হিসাবে থাকে। অর্থাৎ, $(a, b) \in f^*$ এবং $(a, c) \in f^*$ হলে, $b = c$.

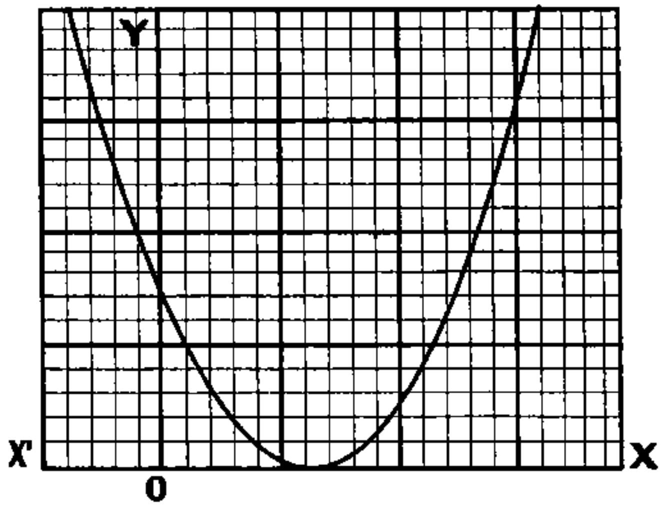
8.5.1 একটি প্রদত্ত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করে উক্ত ফাংশনের রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা :

উদাহরণ : $f(x) = x^2$ এর স্কেচ থেকে রূপান্তরিত $g(x) = (x-2)^2$ এবং $g(x) + 3 = (x-2)^2 + 3$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

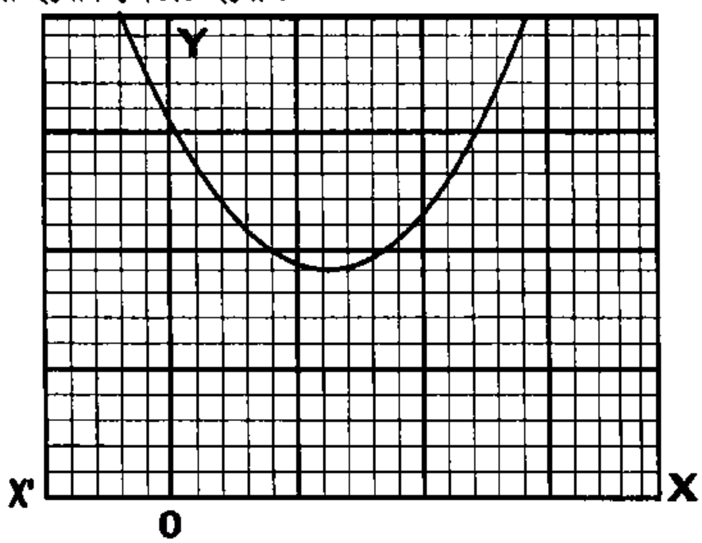
সমাধান : (i) $f(x) = x^2$ স্কেচ নিচে অঙ্কন করা হলো :



(ii) এখন স্কেচটি আনুভূমিক দিকে $+2$ একক সরালে $g(x) = (x-2)^2$ এর স্কেচ পাওয়া যাবে। স্কেচটি হলো :



(iii) উপরের (ii) এর স্কেচ উল্লম্বভাবে $+3$ একক সরালে $g(x) + 3 = (x-2)^2 + 3$ এর স্কেচ পাওয়া যাবে। পাশে স্কেচটি অঙ্কন করা হলো। স্কেচটি হলো :



8.6 ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ :

মনে করি, একটি ফাংশন $g(x) = 2x - 4$, যেখানে $x \in R$ এবং $x \geq 0$ দ্বারা সজ্ঞায়িত। এখন $g(x)$ এর বিপরীত ফাংশন $g^{-1}(x)$ নির্ণয় করি।

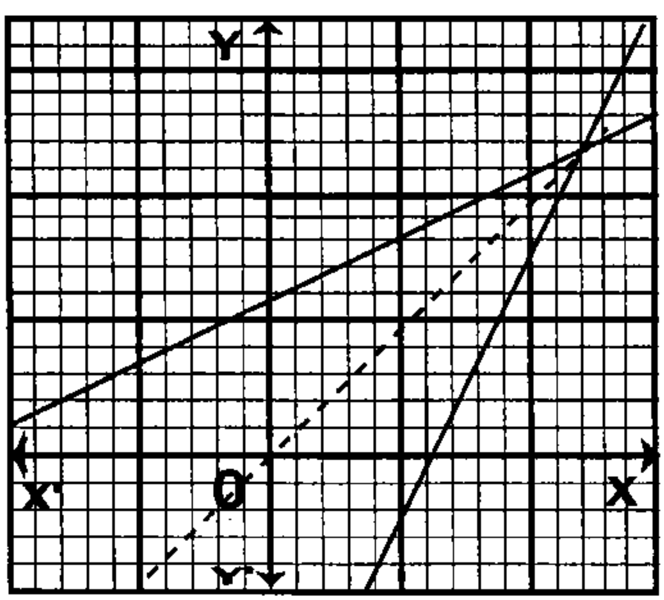
মনে করি, $y = 2x - 4$

$\Rightarrow y + 4 = 2x$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+4}{2}$

$\therefore g^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$, যেখানে $x \geq -4$.

পাশে একই লেখচিত্রে $g(x)$ এবং $g^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



পাশের চিত্র দুইটি থেকে লক্ষ করি :

(i) $g(x)$ এর ডোমেনের সেটের একটি উপাদান 0 এর জন্য $g(x)$ এর রেঞ্জের উপাদান -4, যা $g^{-1}(x)$ এর ডোমেনের একটি উপাদান।

(ii) $g^{-1}(x)$ এর ডোমেনের সেটের একটি উপাদান 0 এর জন্য $g^{-1}(x)$ এর রেঞ্জের উপাদান 2, যা $g(x)$ এর ডোমেনের একটি উপাদান।

এভাবে দেখানো যায় যে, $g(x)$ এর ডোমেনের সেটের প্রত্যেক উপাদানের রেঞ্জ হবে $g^{-1}(x)$ এর ডোমেনের সেটের উপাদান এবং বিপরীতক্রমে ।

8.7 . ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় নির্ণয়

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন F এর ডোমেনের দুইটি উপাদান (সদস্য) θ এবং $(\theta + P)$, যেখানে $P > 0$, এর জন্য $F(\theta + P) = F(\theta)$ হলে, F কে বলা হয় পর্যায়বৃত্ত ফাংশন (***Periodic function***). যদি P ধনাত্মক ও ক্ষুদ্রতম পর্যায় (***period***) হয়, তবে P কে **মৌলিক পর্যায়** বলা হয়।

সুতরাং, আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ের আলোচনা থেকে সহজেই বলতে পারি ছয়টি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনই পর্যায়বৃত্ত ফাংশন (*Periodic function*).

প্রতিজ্ঞা : সাইন, কোসাইন, সেকেন্ট এবং কোসেকেন্ট ফাংশনের প্রত্যেকের মৌলিক পর্যায় 2π এবং টেনজেন্ট ও কোটেনজেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় π.

প্রমাণ : (ক) মনে করি, $\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ এবং $(\theta + 2\pi)$ হলো সাইন ফাংশনের ডোমেনের দুইটি সদস্য।

এখন $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$.

$\therefore$ সাইন ফাংশনের পর্যায় 2π.

আবার যদি P একটি বাস্তব সংখ্যা হয় যেন $0 < P < 2\pi$, তাহলে,

$\sin(\theta + P) = \sin\theta\cos P + \cos\theta\sin P$ .... (i)

এখন (i) এর ডান পক্ষ $= \sin\theta$ হতে পারে যদি একই সংগে $\sin P = 0$ এবং $\cos P = 1$.

কিন্তু $0 < P < 2\pi$ ব্যবধিতে P এর এমন কোন মান নেই যেন একই সংগে $\sin P = 0$ এবং $\cos P = 1$ হতে পারে।

সুতরাং, P অর্থাৎ 2π অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা সাইন ফাংশনের পর্যায় হতে পারে না।

$\therefore$ সাইন ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π হবে।

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে কোসাইন ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π.

(খ) মনে করি, $\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ এবং $(\theta + 2\pi)$ হলো সেকেন্ট ফাংশনের ডোমেনের দুইটি সদস্য।

এখন $\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta$ **$\therefore$ সেকেন্ট ফাংশনের পর্যায় 2π.**

আবার যদি P একটি বাস্তব সংখ্যা হয় যেন $0 < P < 2\pi$, তাহলে

$$\sec(\theta + P) = \frac{1}{\cos(\theta + P)} = \frac{1}{\cos\theta\cos P - \sin\theta\sin P} \text{ .... (ii)}$$

এখন ডানপক্ষ, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ হতে পারে যদি একই সংগে $\cos P = 1$ এবং $\sin P = 0$. কিন্তু তা সম্ভব নয়। সুতরাং, P অর্থাৎ 2π অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোন বাস্তব সংখ্যা সেকেন্ট ফাংশনের পর্যায় হতে পারে না।

$\therefore$ সেকেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π.

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে কোসেকেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π.

(গ) আবার $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ এবং $\cot(\theta + \pi) = \cot\theta$.

সুতরাং , টেনজেন্ট ফাংশন ও কোটেনজেন্ট ফাংশনের মৌলিক পর্যায় π.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. ফাংশন f কে $f(x)=x^2$, যেখানে $-2\leq x\leq 8$,দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f(2), f(y-5)$ এবং $f(-5)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(2) = (2)^2 = 4.$

$f(y-5) = (y-5)^2 = y^2-10y+25.$ কিন্তু এ সূত্রটি সত্য হবে যদি $-2 \leq y-5 \leq 8,$

অর্থাৎ $3 \leq y \leq 13.$

$f(-5)$ এর মান সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ -5 ফাংশনের ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত নয়।

উদাহরণ 2. R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ কে $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা a এর একটি ঘনমূল $\sqrt[3]{a}$ আছে, যা একটি বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore f(\sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{a})^3 = a.$

অর্থাৎ প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা (বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি উপাদান) থেকে যে প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায় তাও বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং f এর রেঞ্জ হলো বাস্তব সংখ্যার সেট।

উদাহরণ 3. A, B, C এর প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার সেট। $f:A\to B$ এবং $g:B\to C$ ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে

$f(x) = x+1$ এবং $g(x) = x^2+2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। সংযোজিত ফাংশন (gof) নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি $(gof)(x) = g(f(x)).$

$$\therefore (gof)(x) = g(x+1) = g(z) \quad [z = x+1 \text{ ধরে}]$$
$$= z^2+2 \quad [\because g(x) = x^2+2]$$
$$= (x+1)^2 + 2 = x^2+2x+3.$$

উদাহরণ 4. R বাস্তব সংখ্যার সেট, $A = \mathbf{R}-\{3\}, B = \mathbf{R}-\{1\}$ এবং $f : A\to B$ কে $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, f এক–এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরণের ফাংশন। যে সূত্র দ্বারা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) মনে করি, x_1 এবং x_2 দুইটি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা, যেখানে $x_1 \neq 3$ এবং $x_2 \neq 3.$

তাহলে, $f(x_1) = f(x_2)$ হলে, আমরা পাই

$\dfrac{x_1-2}{x_1-3} = \dfrac{x_2-2}{x_2-3} \Rightarrow (x_1-2)(x_2-3) = (x_1-3)(x_2-2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore f$ এক এক ফাংশন।

আবার মনে করি, $y = \dfrac{x-2}{x-3}$, যেখানে $y \in \boldsymbol{R} \ (y \neq 1)$

তাহলে, $y(x-3) = x-2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

$$\therefore f\left(\frac{3y-2}{y-1}\right) = \frac{\frac{3y-2}{y-1}-2}{\frac{3y-2}{y-1}-3} = y \quad \text{অর্থাৎ } f(A) = B\ .$$

সুতরাং f হলো সার্বিক ফাংশন।

(ii) মনে করি, $y = \dfrac{x-2}{x-3}$

তাহলে, $y(x-3) = x-2$ বা, $yx-3y = x-2$ বা, $x(y-1) = 3y-2$

বা, $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \quad \therefore f^{-1}(y) = \dfrac{3y-2}{y-1}$ অর্থাৎ, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}.$

প্রশ্নমালা 8.1

1. (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেট থেকে $B = \{1, 2, 5\}$ সেটে F একটি অন্বয়, যেখানে $F = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B,\ x < y\}$, F সেট নির্ণয় কর।

   (b) নিচের ফাংশনগুলি এক এক এবং সার্বিক কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর ঃ

   (i) $f_1 : R \to R$, $f_1(x) = x^5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। (ii) $f : R \to R, f(x) = x^3 + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। [ঢা. ব. সি. '১৩]

2. মনে কর, একটি ফাংশনকে $-1 \le x \le 7$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2 + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। তাহলে, মান নির্ণয় করঃ

   (i) $f(5)$ (ii) $f(-7)$ (iii) $f(-0\cdot5)$ (iv) $f(t-3)$.

3. (i) f: R→R কে $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \ge 2 \\ x + 2, & x < 2. \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f(7)$, $f(0)$, $f(5)$ এবং $f(-2)$ নির্ণয় কর। [সি. '১১; রা. '১২]

   (ii) f : R → R কে $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{যখন } x \ge 2 \\ x + 2, & \text{যখন } x < 2. \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। [ব. '১০]

   $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(5)$ ও $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর।

4. মনে কর, বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং f: R→R কে নিচের সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলোঃ

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{যদি } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{যদি } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 & \text{যদি } x < -2. \end{cases}$$

   মান নির্ণয় কর : (ক) $f(2)$ (খ) $f(4)$ (গ) $f(-1)$ (ঘ) $f(-3)$ (ঙ) $f(4.5)$ (চ) $f(0)$.

   [রা. চ. '০৮; ঢা. চ. '১২; কু. '১৩]

5. সব বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, $f : A \to R$ কে $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞয়িত হলে, f এর রেঞ্জ (*Range*) নির্ণয় কর।

6. $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $f : A \to B$ কে $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু. '১২]

7. মনে কর, $A = \{-2, -1, 0\}$, $f : A \to$ R, (যেখানে R বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং f কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

8. মনে কর, $A = \{-4, -3, -2, 0, 3, 4\}$ এবং $f : A \to B$ কে $f(x) = x^2 + x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

9. $f : R \to$ R, কে (i) $f(x) = x^5$, (ii) $f(x) = \cos x$ (iii) $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু. '০৭]

10. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 5\}$ এবং $f : A \to$ R কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

11. মনে কর সেট $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ এবং $f : A \to \mathbf{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

12. X, Y বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbf{R}$ এর দুইটি উপসেট এবং $f : X \to Y$, যেখানে $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, ফাংশন f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [সি. '১১; কু. '১০; দি. '১২; য. '১৩]

13. মনে কর, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 - 4x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ

(ক) $f(4)$ (খ) $f(-3)$ (গ) $f(y - 2z)$.

14. (ক) $f: R \to \mathbf{R}$, ফাংশনটি $f(x) = 2x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, প্রমাণ কর যে, ফাংশনটি এক–এক এবং সার্বিক। f^{-1} নির্ণয় কর। [চ. '১০; '১৩; রা. '১১]

(খ) $f: R - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ হলে, $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

15. $A = \{x : -1 \le x \le 1\}, f: A \to A$ এবং $g : A \to A$ কে যথাক্রমে $f(x) = x^4$ এবং $g(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f এবং g এর মধ্যে কোন্‌টি সার্বিক ফাংশন ?

16. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ

(ক) $f^{-1}(5)$ (খ) $f^{-1}(0)$ (গ) $f^{-1}(10)$. [ব. কু.'১১]

17. (i) বাস্তব সংখ্যার দুইটি ফাংশন f এবং g কে যথাক্রমে $f(x) = x^2 + 2x - 3$ এবং $g(x) = 3x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। যে সূত্রদ্বয় দ্বারা $g\,o\,f$ এবং $f\,o\,g$ ফাংশনদ্বয়কে সংজ্ঞায়িত করা যায় তা নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত সূত্রদ্বয় থেকে $(g\,o\,f)(2)$ এবং $(f\,o\,g)(2)$ এর মান নির্ণয় কর। [দি. '১০, '১৩; ব. সি.'১২]

(ii) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 1$ হলে, $(f\,o\,g)$, $(g\,o\,f)$ এবং $(f\,o\,g)(2)$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'১১; ব. '০৯]

(iii) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে, (ক) $(f\,o\,g)(x)$, (খ) $(g\,o\,f)(x)$, [সি.'১০]

(গ) $(f\,o\,f)(x)$, (ঘ) $(gof)(2)$ এবং (ঙ) $(fog)(2)$ নির্ণয় কর। [রা.'১৩]

(iv) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^3 + 1$, যখন $x = -3$ হলে, দেখাও যে, $f\,o\,g \ne g\,o\,f$.

(v) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হলে, $(f\,o\,g)(-2)$, $(fog)(5)$, $(g\,o\,f)(-4)$ এবং $(g\,o\,f)(3)$ নির্ণয় কর। [সি.'০৮]

18. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে যথাক্রমে $f(x) = 2x - 5$ এবং $g(x) = x^2 + 6$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $f(7)$ (ii) $g(-2)$ (iii) $(gof)(2)$, [রা.'১৩] $(fog)(2)$ (iv) $(fog)(5)$ [রা.'১৩]

(v) $g(t-1)$ (vi) $f(g(t-1))$ (vii) $f(g(x+2))$ (viii) $g(g(x))$.

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$ হলে, সংযোজিত ফাংশন (i) fog (ii) gof নির্ণয় কর। প্রত্যেকটি সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

20. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সূত্রায়িত করা হলো। মান নির্ণয় কর :

(ক) $f^{-1}(36)$, $f^{-1}(16)$, $f^{-1}(-16)$

(গ) $f^{-1}([-\infty, 0])$ (ঘ) $f^{-1}([1, 16])$.

21. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(2)$ এর মানকে সেটে প্রকাশ কর। [রা.'১০]

22. $M = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $f: \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = x^2 + 2x - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f^* নির্ণয় কর।

23. নিচের সূত্রগুলোর প্রত্যেকটি $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে সংজ্ঞায়িত করে। কার্তেসীয় সমতল, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এ সূত্রগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর : (ক) $f(x) = 2x - 1$ (খ) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (গ) $f(x) = x - 3|x|$.

24. $y = 3x - 5, (x \in R)$ এর স্কেচ অঙ্কন করে ঐ স্কেচ থেকে $y = |3x - 5|$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

25. $y = \cos x \ (x \in R)$ এর স্কেচ অঙ্কন করে ঐ স্কেচ থেকে $y = \cos 2x$ এবং $y = \cos 2x + 3$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

26. যদি $g(x)$ ফাংশনকে $g(x) = 3x - 6 \ (x \in R, x \geq 2)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, তাহলে,

(i) $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

(ii) একই লেখচিত্রে উভয় ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন কর।

(iii) স্কেচ দুইটি থেকে কি ধরনের সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয়?

27. নিচের ফাংশন $f(x)$ থেকে একই লেখচিত্রে $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর। $f^{-1}(x)$ সূত্র ও এর সমীকরণও নির্ণয় কর।

(i) $f(x) = 2x - 5 \ (x \in R)$

(ii) $f(x) = 5 - x \ (x \in R)$

(iii) $f(x) = x^2 + 3 \ (x \in R, x \geq 0)$

28. নিচের ফাংশনগুলির মৌলিক পর্যায় (যদি থাকে) নির্ণয় কর :

(i) $2 \cos \frac{\theta}{2}$; (ii) $\frac{1}{2} \cos \frac{2\theta}{3}$; (iii) $\sin \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$; (iv) $\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; (v) $7 \sec \frac{\theta}{8}$.

প্রশ্নমালা 8.2

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. **(a)** এক-এক ফাংশনের সংজ্ঞা লেখ।

(b) $f: R \to R$ ফাংশনকে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, $f(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।

(c) সেট $A = R - \{1\}$ এবং সেট $B = R - \{1\}$ এবং $f: A \to B$ কে $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

2. **(a)** উদাহরণের মাধ্যমে অন্বয় ও ফাংশনের পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

(b) সেট $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 5, 6, 7, 13, 15, 22\}$ এবং $f: A \to B$ ফাংশনকে $f(x) = x^2 - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(c) বাস্তব সংখ্যার দুইটি ফাংশন f এবং g কে যথাক্রমে $f(x) = 2x + 1$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। প্রমাণ কর যে, $(gof)(2) \neq (fog)(2)$;

3. (a) উদাহরণের মাধ্যমে অভেদ ফাংশন ব্যাখ্যা কর।

(b) ফাংশন f কে $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \neq 5\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। f^{-1} এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(c) ফাংশন f কে $f(x) = 2x - 3$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \geq \frac{3}{2}\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। একই লেখচিত্রে f এবং f^{-1} এর স্কেচ অঙ্কন কর।

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

4. $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \geq 3\}$, f এর রেঞ্জ—

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\boldsymbol{R}$

(c) $\frac{5}{6}$ এর চেয়ে বৃহত্তর সব বাস্তব সংখ্যা (d) $\frac{5}{6}$ এর ক্ষুদ্রত্তর সব বাস্তব সংখ্যা।

5. $f(x) = 2x - 3$ এবং $g(x) = x^2 - 2$ হলে, $(gof)(-5)$ এর মান —

(a) 43 (b) 167 (c) -43 (d) -167

6. f এবং g বাস্তব সংখ্যার ফাংশন। $f(x) = x^2 - 2$ এবং $g(x) = x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $(fog)(x)$ এর মান—

(a) $x^2 + 9x + 7$ (b) $x^2 + 1$ (c) $x^2 - 9x + 7$ (d) $x^2 + 2x + 3$

7. $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ কে $f(x) = 5x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(3)$ এর মান—

(a) 12 (b) -12 (c) $\frac{6}{5}$ (d) $-\frac{6}{5}$

8. $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = x^2$ হলে, $fog\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ এর মান—

(a) $\cos x^2$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ $\{x \in \boldsymbol{R}, x \neq \frac{1}{2}\}$ হলে, $f^{-1}(x)$ এর মান —

(a) $\frac{2x-1}{x+3}$; $x \neq -3$ (b) $\frac{x+3}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$

(c) $\frac{2x-1}{x+3}$ (d) $\frac{x+3}{2x-1}$

10. $f(x) = 2x + 1$ এবং $g(x) = x - 3$ হলে, $(gof)(2)$ এর ক্ষেত্রে কোন দুইটি সঠিক ?

(a) 2 (b) $(gof)(2) = (fog)(2)$

(c) -1 (d) $(fog)(2) \neq (gof)(2)$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 8.1

1. (a) $\{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$. **(b)** (i), (ii), (iii) ফাংশনগুলো এক এক এবং সার্বিক কারণ ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা এবং $f(R) = R$. **2.**(i) 28; **(ii)** সংজ্ঞায়িত নয়; **(iii)** 3·25; **(iv)** $t^2 - 6t + 12$, যদি $2 \le t \le 10$ হয়। **3. (i)** 70, 2, 40, 0. **(ii)** 2, 1, –2, 4, –2, 10, 0. **4. (ক)** 2, **(খ)** 11, **(গ)** –1, **(ঘ)** – 3, **(ঙ)** 12.5, **(চ)** – 2. **5.** $\{7, 1, 3, 13\}$. **6.** ডোমেন $= \{1, 2, 3\}$ এবং রেঞ্জ $= \{2, 3, 4\}$. **7.** $\{5, 2, 1\}$. **8.** $\{-3, -1, 3, 9, 17\}$. **9. (i)** R **(ii)** $[-1, 1]$ **(iii)** $\{y : y \in R, y \ge 1\}$. **10.** $\{5, 2, 1, 26\}$. **11.** $\{11, 3, 27\}$. **12.** ডোমেন $= R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, রেঞ্জ $= R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **13. (ক)** 3, **(খ)** 24, **(গ)** $y^2 - 4yz + 4z^2 - 4y + 8z + 3$. **14. (ক)** $\frac{x+3}{2}$ **(খ)** $\frac{x+3}{1-2x}$. **15.** g সার্বিক ফাংশন। **16. (ক)** $\{-2, 2\}$, **(খ)** $\varnothing$, **(গ)** $\{3, -3\}$.

17. (i) $(g\,of)(x) = 3x^2 + 6x - 13$, $(f\,o\,g)(x) = 9x^2 - 18x + 5$, $(g\,of)(2) = 11$, $(fog)(2) = 5$; **(ii)** $(fog)(x) = x^6 + 2x^3 + 1$, $(gof)(x) = x^6 + 1$, 81. **(iii) (ক)** $(fog)(x) = 4x^2 - 6x + 1$, **(খ)** $(gof)(x) = 2x^2 + 6x - 1$, **(গ)** $(fof)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 4$. **(ঘ)** 19, **(ঙ)** 5. **(iv)** 15, 624, 65, 10. **18. (i)** 9, **(ii)** 10, **(iii)** 7, 15; **(iv)** 57, **(v)** $t^2 - 2t + 7$. **(vi)** $2t^2 - 4t + 9$, **(vii)** $2x^2 + 8x + 15$, **(viii)** $x^4 + 12x^2 + 42$. **19. (i)** $\sqrt{x^2 - 1}$; ডোমেন, $x \le -1$ অথবা $x \ge 1$; রেঞ্জ : সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট। **(ii)** $x - 1$, ডোমেন : **R**, রেঞ্জ: **R.**

20. (ক) $\{6, -6\}$, $\{4, -4\}$, $\varnothing$; **(খ)** $[-1, 1]$; **(গ)** $\{0\}$; **(ঘ)** $\{x : 1 \le x \le 4$ অথবা $-4 \le x \le -1\}$. **21.** $\{-3, 3\}$. **22.** $\{(1, 2), (2, 7), (3, 14), (4, 23)\}$. **27.** (i) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$; (ii) $f^{-1}(x) = 5 - x$; (iii) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$. **28.** (i) 6π; (ii) $\frac{3\pi}{2}$; (iii) π; (iv) 4π; (v) 16π.

প্রশ্নমালা 8.2

1. (c) $\frac{x+2}{x-1}$; **2.** **(*b*)** $\{1, 6, 13, 22\}$; **3.** **(*b*)** ডোমেন : $R - \{2\}$; রেঞ্জ : $R - \{5\}$; **4.** *c.* **5.** *b.* **6.** *a.* **7.** *c.* **8.** *b.* **9.** *b.* **10.** (*a*) এবং (*d*).

ব্যবহারিক

8.8. অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় (তৃতীয় অধ্যায় দ্রষ্টব্য।)

8.9. নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় (তৃতীয় অধ্যায় দ্রষ্টব্য।)

8.10. ফাংশন ও রূপান্তরিত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মনে করি, $f(x) = \cos x$ এবং রূপান্তরিত ফাংশন $g(x) = \cos 2x$ এবং $g(x) - 1 = \cos 2x - 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমস্যা নং 8.10.1	তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = \cos x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $f(x) = y = \cos x$, যখন $-180° \leq x \leq 180°$.

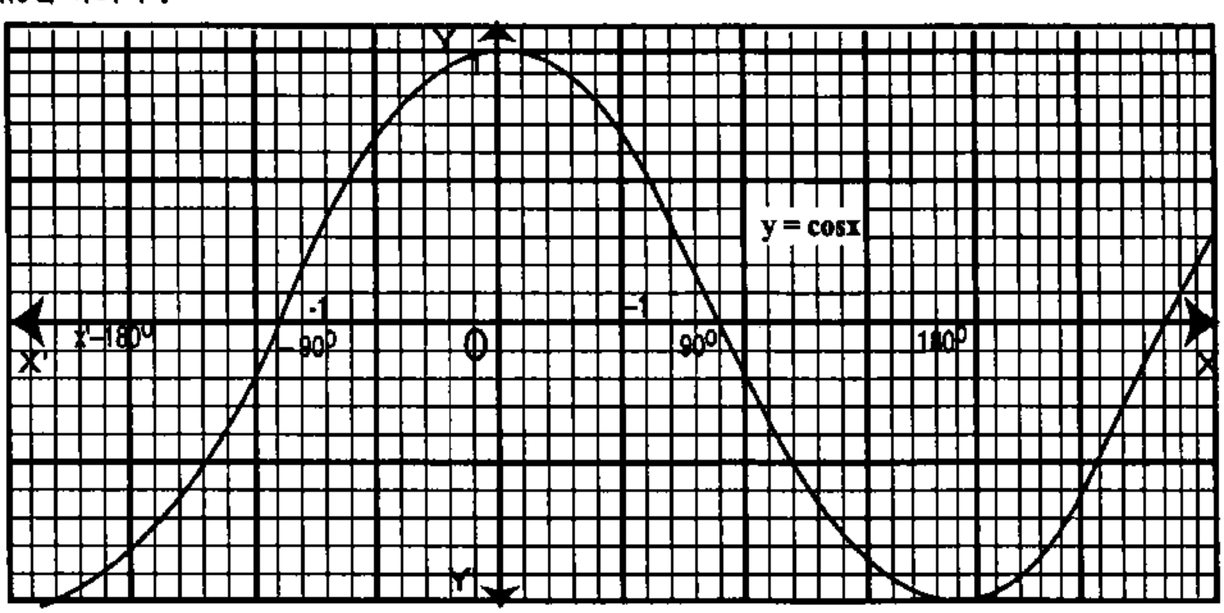
কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ অঙ্কন করি।
2. x-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos x$ থেকে y এর আনুষঙ্গিক মান বের করি।
3. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য $= 10°$ এবং y-অক্ষের দিকে 10 বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$ ধরি
4. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি

ফলাফল :

x	$-180°$	$-150°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	0	$30°$	$60°$
y	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5
x	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$					
y	0	-0.5	-0.87	-1					

লেখচিত্র অঙ্কন :



সমস্যা নং 8.10.2	তারিখ :

সমস্যা : $g(x) = \cos 2x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $g(x) = y = \cos 2x$, যখন $-180° \leq x \leq 180°$.

কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ অঙ্কন করি।

2. x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos 2x$ এর আনুষঙ্গিক মান নির্ণয় করি।

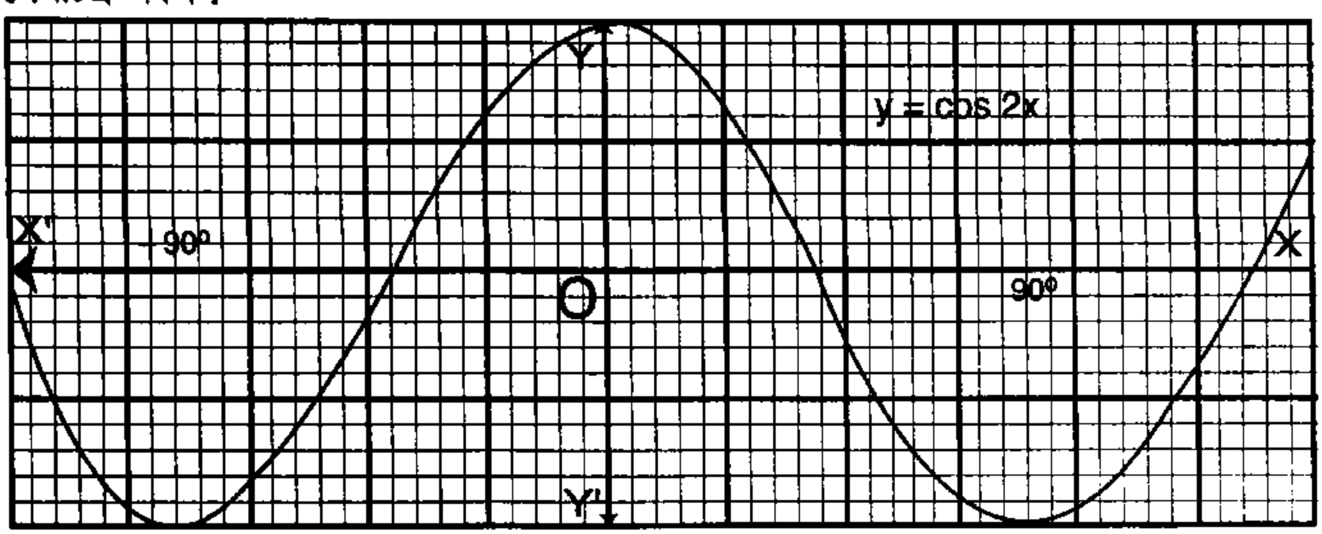
3. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 5° এবং y-অক্ষের দিকে 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 ধরি।

4. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফলাফল :

x	– 180°	– 150°	– 135°	– 120°	– 90°	– 60°	– 30°	0
y	1	0.5	0	– 0.5	– 1	– 0.5	0.5	1
x	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y	0.5	0	– 0.5	– 1	– 0.5	0	0.5	1

লেখচিত্র অঙ্কন :



সমস্যা নং 8.10.3	তারিখ :

সমস্যা : $g(x) = \cos 2x - 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $g(x) - 1 = y = \cos 2x - 1$, যখন $-180° \le x \le 180°$.

কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ অঙ্কন করি।

2. x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos 2x - 1$ এর আনুষঙ্গিক মান নির্ণয় করি।

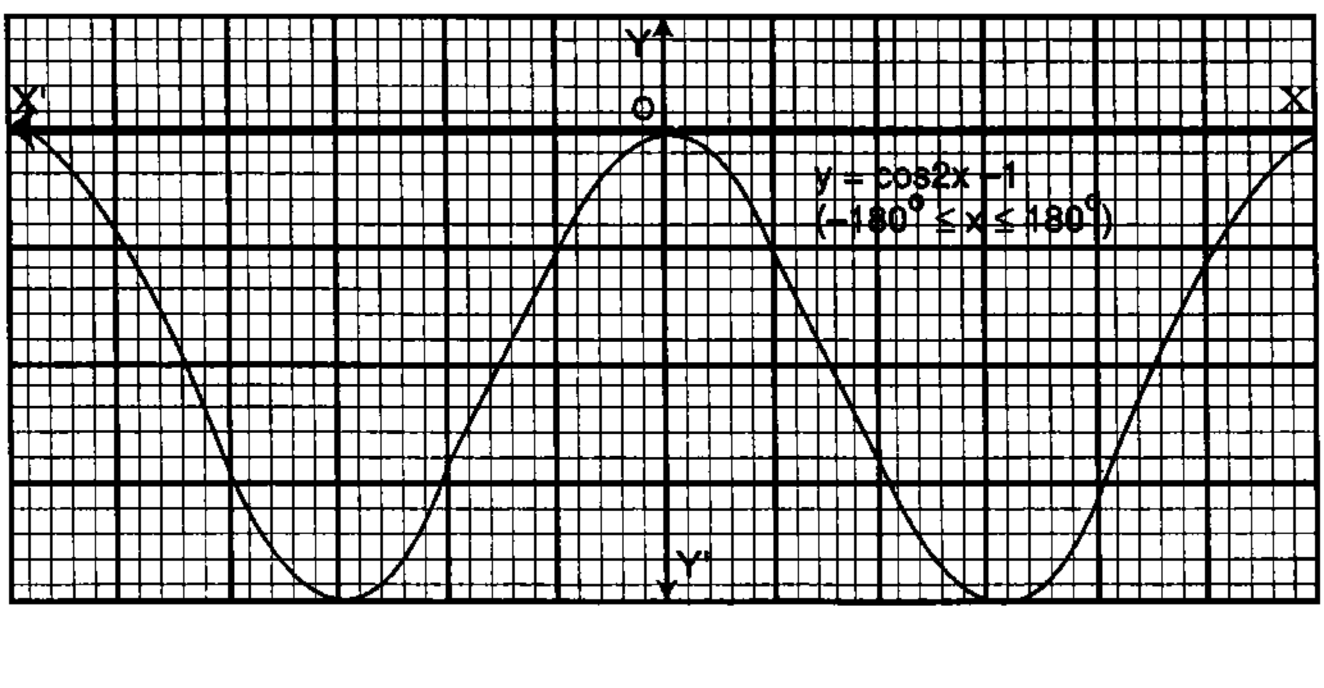
3. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 6° এবং y-অক্ষের দিকে 10 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 ধরি।

4. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে বিন্দুগুলি সংযুক্ত করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফলাফল :

x	$-180°$	$-150°$	$-135°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	0
y	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-1.5	-0.5	0
x	30°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	
y	-0.5	-1.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	

লেখ অঙ্কন :



8.11. একই লেখচিত্রে ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.11	তারিখ : ....

সমস্যা : $f(x) = 2x + 1$ এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখ অঙ্কন করতে হবে।

তত্ত্ব : মনে করি, $y = f(x) = 2x + 1$........ (i)

তাহলে, $x = \frac{1}{2}(y - 1)$

বা, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$ [y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে]

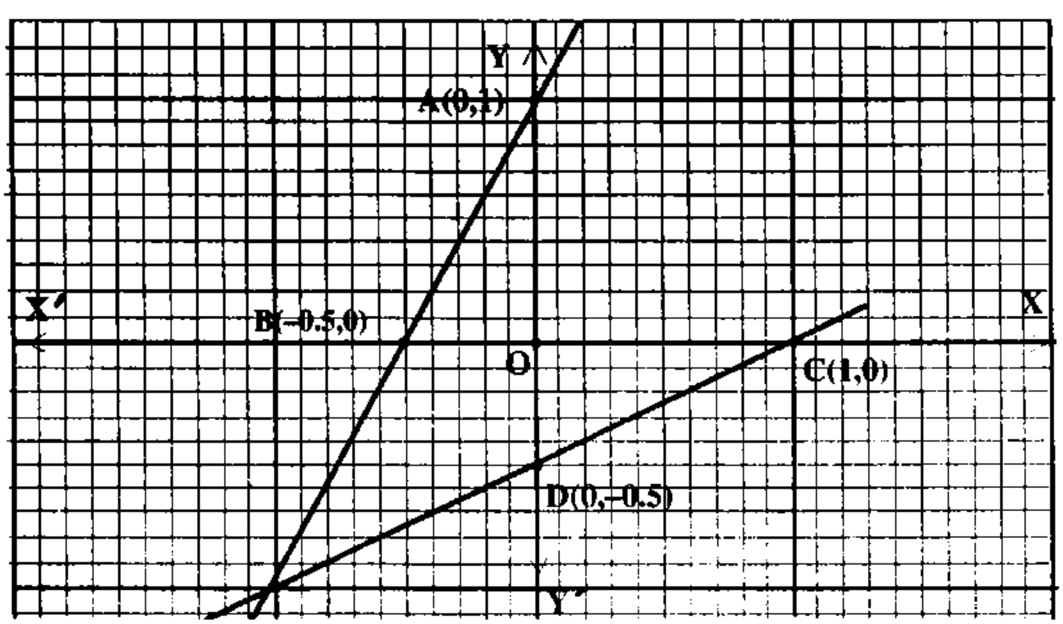
$\therefore$ f এর বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ .... (ii)

কার্যপদ্ধতি :

1. ছক কাগজে x–অক্ষ ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম দশ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1(একক) ধরে (i) সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত $A(0, 1)$ এবং $B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করি। এ বিন্দু দুইটি সংযোগ করে $y = f(x)$ এর লেখ AB অঙ্কন করি।

2. (ii) নং সমীকরণ থেকে একই স্কেলে প্রাপ্ত দুইটি বিন্দু $C(1, 0)$ এবং $D\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ ছক কাগজে স্থাপন করে $f^{-1}(x)$ এর লেখ CD অঙ্কন করি।

লেখ অঙ্কন:



8.12.1. দ্বিঘাত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সসমস্যা নং 8.12.1	তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = 4 + 3x - x^2$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $y = f(x) = 4 + 3x - x^2$, যখন $x \in R$

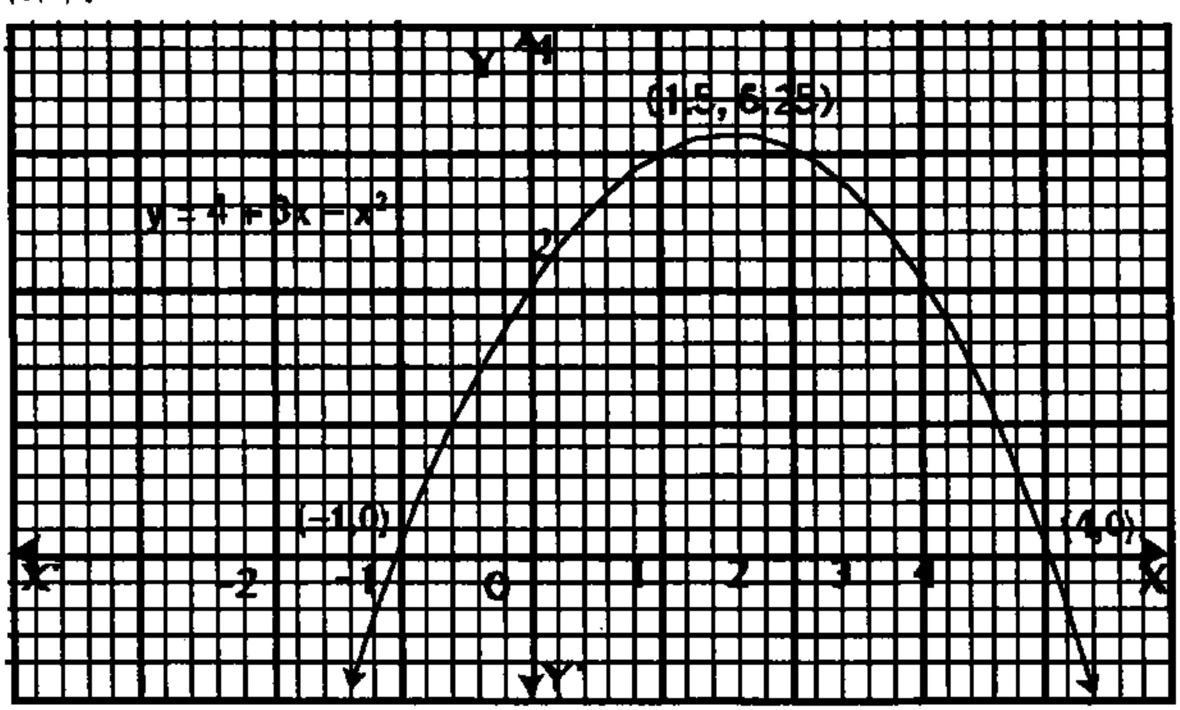
কার্যপদ্ধতি :

1. ধরি, $y = f(x) = 4 + 3x - x^2$, যা দ্বিঘাত ফাংশন। সুতরাং এর লেখ পরাবৃত্ত *(Parabola)* আকৃতির হবে। প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নরূপে লেখা যায় : $y - \frac{25}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
2. ছক কাগজে $x -$ অক্ষ ও $y -$ অক্ষ অঙ্কন করি।
   $y = 0$ বসিয়ে, $4 + 3x - x^2 = 0$
   $\Rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0 \therefore x = -1, 4.$
   আবার, $x = 0$ বসিয়ে, $y = 4.$
   $\therefore$ ফাংশনের লেখটি x- অক্ষের সাথে $(-1, 0)$ ও $(4, 0)$ এবং y -অক্ষের সাথে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
3. প্রদত্ত সমীকরণে x এর বিভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।
4. x–অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক এবং y–অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে 2 একক ধরি। এরপর উক্ত স্কেল অনুসারে ছক কাগজে বিন্দগুলি স্থাপন করি। চিহ্নিত বিন্দুগুলো যুক্ত করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখ অঙ্কন করি।

ফল সংকলন :

x	0	1	2	3	4	5	– 1	– 2	– 3
y	4	6	6	4	0	– 6	0	– 6	– 14

লেখ অঙ্কন :



8.12.2 : সূচক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.12.2	তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = e^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : ধরি, $y = f(x) = e^x$, যখন $x \in \boldsymbol{R}$ এবং e একটি অমূলদ সংখ্যা যা $2 < e < 3$.

কার্যপদ্ধতি :

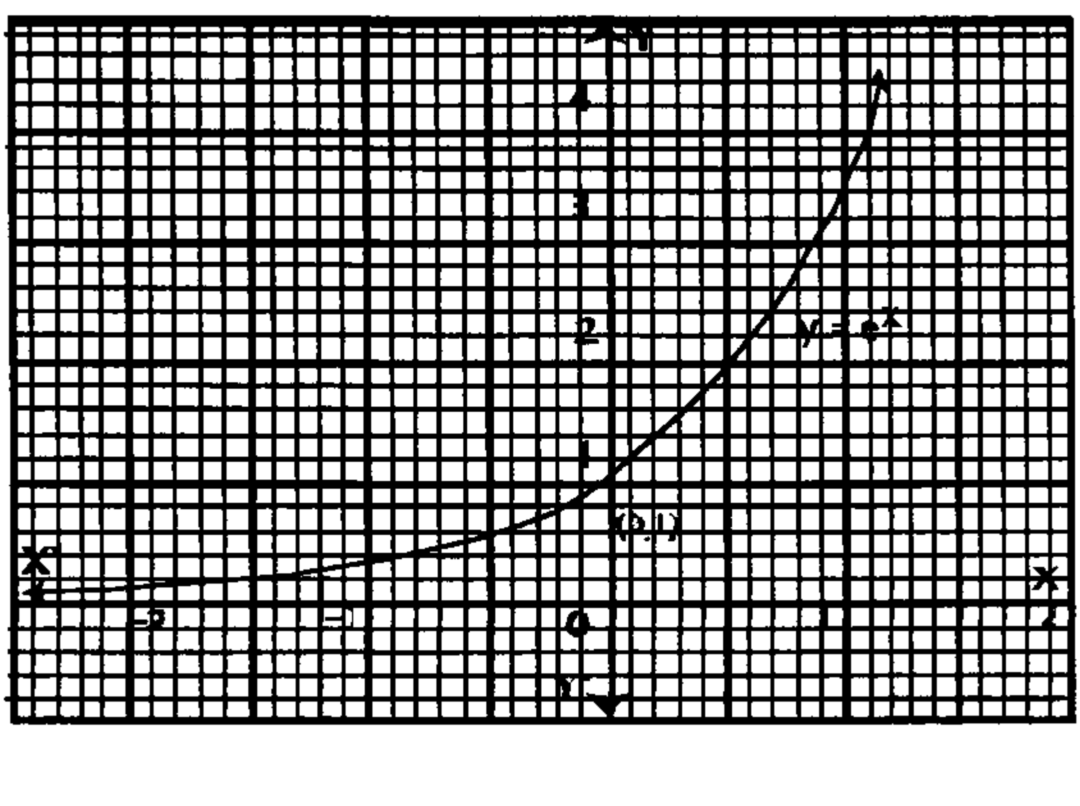
1. $y = f(x) = e^x$ এ x এর বিভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 10 ঘরের দৈর্ঘ্য = 1 ও y-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ চিহ্নিত করে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। উক্ত বিন্দুগুলি সাবলীলভাবে সংযুক্ত করি। প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

ফল সংকলন :

x	– 3	– 2	– 1	– 0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
y	.049	0.135	0.367	0.61	1	1.65	2.71	4.48	7.38	20.08

লেখ অংকন :



সমস্যা নং 8.12.3(a)	তারিখ :

সমস্যা : $y = f(x) = ln\ x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : ধরি, $y = f(x) = ln\ x$, যখন $x \in \mathbf{R}$ এবং $x > 0$.

কার্যপদ্ধতি :

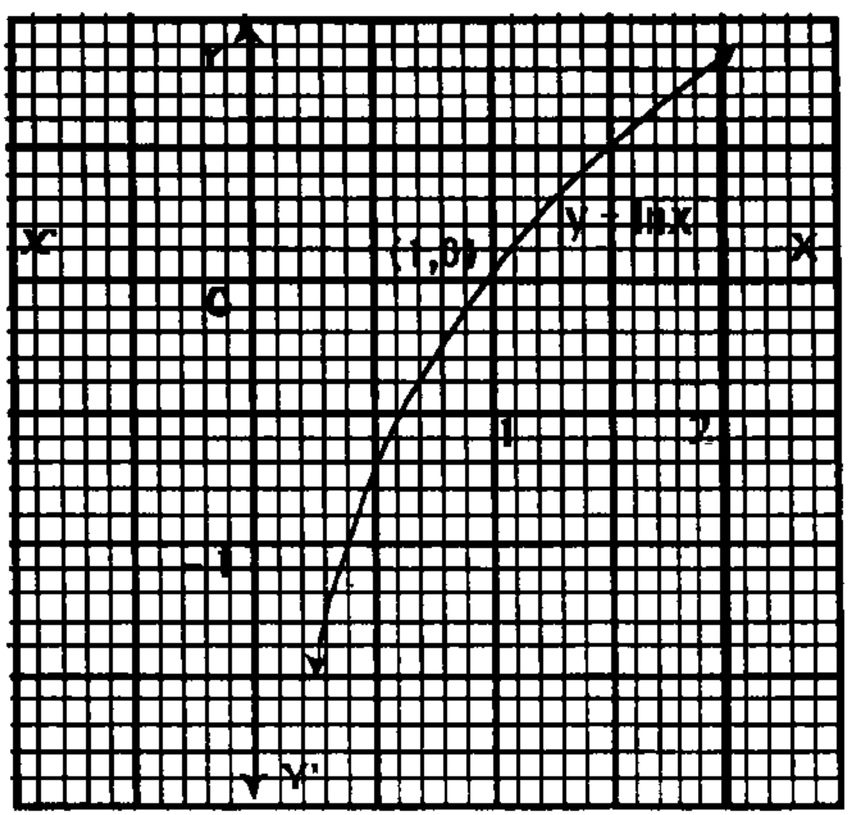
1. $y = f(x) = ln\ x$ এ x এর বাস্তব ও ধনাত্মক মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. x-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 10 ঘরের দৈর্ঘ্য = 1 ও y-অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ চিহ্নিত করে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। উক্ত বিন্দুগুলি সাবলীলভাবে সংযুক্ত করি। প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

ফল সংকলন :

x	0.25	0.75	1	1.25	1.50	2	2.25	2.50	3
y	–1.38	– 0.28	0	0.22	0.41	0.69	0.81	0.92	1.1

লেখ অঙ্কন :



সমস্যা নং 8.12.3(*b*)	তারিখ :

সমস্যা : $y = f(x) = log_2 x$ এর লেখ অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : $y = f(x) = log_2 x,$

$\Rightarrow y = log_2 x = log_{10} x \times log_2 10 = \dfrac{log_{10} x}{log_{10} 2}$, যখন x যেকোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

কার্যপদ্ধতি :

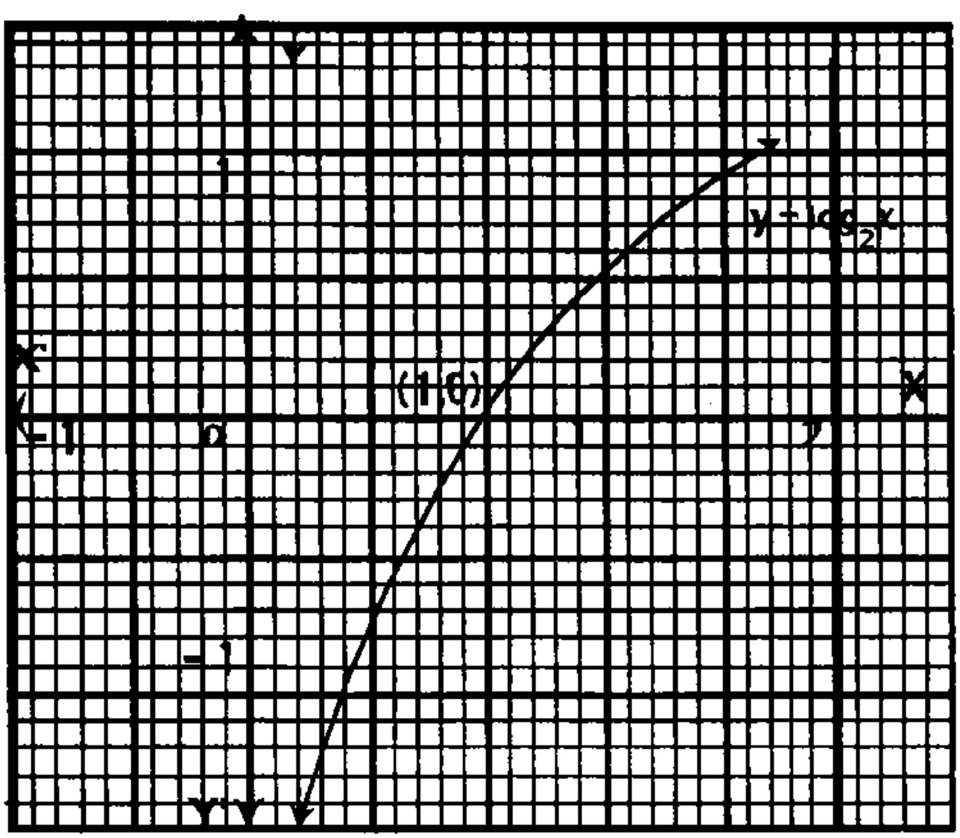
1. $y = \dfrac{log_{10} x}{log_{10} 2}$ ফাংশনে x এর বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. উভয় অক্ষরেখার ক্ষুদ্রতম 10 ঘরের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। ছক কাগজে x- অক্ষ ও y- অক্ষচিহ্নিত করে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি স্থাপন করি। চিহ্নিত বিন্দুগুলি সাবলীলভাবে সংযুক্ত করলে প্রাপ্ত বক্ররেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

ফল সংকলন :

x	≤ 0	0.125	0.25	0.5	1	2	3	4	8	12	16
y	মান বিদ্যমান নেই	– 3	– 2	– 1	0	1	1.59	2	3	3.	4

লেখ অঙ্কন :



8.12.4. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।

ষষ্ঠ অধ্যায় অনুচ্ছেদ 6.8 দ্রষ্টব্য

8.12.5 . পরমমান ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 8.12.5	তারিখ : ....

সমস্যা : $f(x) = |x|\ ; x \in R$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

তত্ত্ব : $f(x) = |x|$, যখন x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y এর মান সর্বদা ধনাত্মক অথবা শূন্য হবে। পরম মানের সংজ্ঞা থেকে $f(x) = |x|$ কে নিম্নরূপে লেখা যায় :

$$y = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ x \text{ যখন } x < 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$$

কার্যপদ্ধতি :

1. $y = |x|$ সমীকরণে x এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

2. ছক কাগজে x ও y অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গের দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে উপরোক্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু স্থানাঙ্কায়িত করি। অতঃপর উক্ত বিন্দুগুলি পেন্সিল দ্বারা সংযোজন করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফলসংকলন :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	3	2	1	0	1	2	3	...

লেখ অঙ্কন :