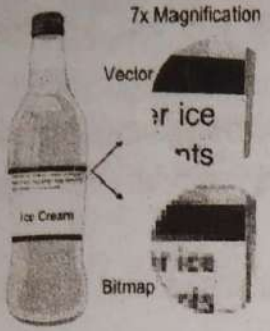
ভেক্টর
Vectors

William Rowan Hamilton

দৈনন্দিন জীবনে পরিমাপের গুরুত্ব অপরিসীম। পরিমাপযোগ্য সকল রাশিকে কেবল এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। সম্পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন। এ ধরনের রাশিকে ভেক্টর রাশি বলে। ভেক্টর (Vector) শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে ল্যাটিন শব্দ Vehere থেকে, যার অর্থ to carry। অষ্টাদশ শতাব্দিতে জ্যোতির্বিদগণ গ্রহ ও সূর্যের আবর্তন ব্যাখ্যা করতে গিয়ে Vector শব্দটি ব্যবহার করেন। আইরিশ গণিতবিদ, পদার্থবিদ, জ্যোতির্বিদ **উইলিয়াম রোয়ান হ্যামিলটন** (William Rowan Hamilton) এর 1843 সালে কোয়ান্টরিয়ন সংখ্যার ধারণাই ভেক্টরের মূলভিত্তি। গণিত, পদার্থবিদ্যা ও প্রকৌশল বিদ্যায় ভেক্টরের ব্যবহার বহুল। এছাড়া জ্যামিতিক প্রিমিটিভ যেমন বিন্দু, রেখা, বক্ররেখা ও বহুভুজের ভেক্টর গাণিতিক সমীকরণ ব্যবহার করে ভেক্টর গ্রাফিক্স পদ্ধতিতে কম্পিউটারে ছবি প্রদর্শন করা হয়। ভেক্টর গ্রাফিক্স পদ্ধতিতে ছবি বড় করলে তা বিটম্যাপ পদ্ধতির মতো ফেটে যায় না বরং আরও স্পষ্ট হয় এবং ফাইলের সাইজ অপরিবর্তিত থাকে।



এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে—

- সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসেবে ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধিগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সমতলে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবে।
- ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাংকে প্রকাশ করতে পারবে।
- একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$ বর্ণনা করতে পারবে।
- অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবে।
- ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে।
- ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে।
- সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ভেক্টরের স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- স্কেলার গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে।
- ভেক্টরের ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ভেক্টর গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১: সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসেবে ভেক্টর, কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা
- পাঠ-২: দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক; দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি; উদাহরণমালা
- পাঠ-৩: অনুশীলনী-2(A)
- পাঠ-৪: একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$; সমতলে ভেক্টরের অংশক; ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ; অবস্থান ভেক্টর
- পাঠ-৫: ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ; ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ; সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ
- পাঠ-৬: দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বা ডট $(\cdot)$ গুণন; ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়; স্কেলার বা ডট গুণজের ধর্মাবলি; দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ
- পাঠ-৭: ভেক্টরের ভেক্টর বা ক্রস $(\times)$ গুণন; ভেক্টর বা ক্রস গুণজের ধর্ম; ভেক্টর গুণজ
- পাঠ-৮: উদাহরণমালা
- পাঠ-৯: অনুশীলনী-2(B)
- পাঠ-১০: দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ
- পাঠ-১১ ও ১২: অনুশীলনী-2(C)

Scanned with CamScanner

পাঠ-১

গণিত ও বিজ্ঞানে আলোচিত রাশিগুলোকে পরিমাপ করা এবং সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করার ক্ষেত্রে লক্ষ করা যায় যে, কিছু রাশি আছে যাদের শুধু মাত্র পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার কিছু রাশি আছে যাদের প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয়ই জানা দরকার হয়।

যেমন- কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য জানার জন্য শুধুমাত্র এর মান জানলেই হয়, কিন্তু সরণ জানতে হলে মান ও দিক উভয়ই জানা প্রয়োজন।

এই কারণে, সকল রাশিগুলোকে দুইভাগে ভাগ করা হয়। যার একটিকে **অদিক বা স্কেলার রাশি** এবং অপরটিকে **সদিক বা ভেক্টর রাশি** বলা হয়।

অদিক বা স্কেলার রাশি (Scalar quantity): যে সকল রাশি সুস্পষ্টভাবে প্রকাশের জন্য কেবলমাত্র মানের প্রয়োজন হয় তাদেরকে অদিক বা স্কেলার রাশি বলে। যেমন- ভর, দৈর্ঘ্য, সময়, দূরত্ব, আয়তন, ঘনত্ব, তাপমাত্রা, কাজ, শক্তি ইত্যাদি রাশিগুলোর প্রত্যেকেই এক একটি স্কেলার রাশি।

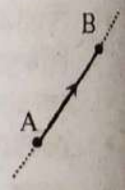
সদিক বা ভেক্টর রাশি (Vector quantity): যে সকল রাশি সুস্পষ্টভাবে প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয়েরই প্রয়োজন হয় তাদেরকে সদিক বা ভেক্টর রাশি বলে।

যেমন- সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, ভরবেগ, ওজন ইত্যাদি রাশিগুলোর প্রত্যেকেই এক একটি ভেক্টর রাশি।

দ্রষ্টব্য: স্কেলার রাশির মান আছে, দিক নেই। কিন্তু ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে।

2.1 সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসেবে ভেক্টর (Vector as a counter part of directed line)

কোনো সরল রেখাংশের আদিবিন্দু (Initial point) A এবং প্রান্তবিন্দু (Terminal Point) B হলে, AB রেখাংশটিকে **দিক নির্দেশিত রেখাংশ** (Directed line segment) বলে, যার দিক A হতে B এর দিকে। এই দিক নির্দেশিত রেখাংশ (বা **সদিক রেখাংশ**) কে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



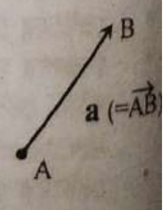
সদিক রেখাংশের দৈর্ঘ্য: সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য হলো, A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব যা $|\overrightarrow{AB}|$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

সদিক রেখাংশের দিক: সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর দিক A বিন্দু হতে B বিন্দুর দিকে এবং $\overrightarrow{BA}$ রেখাংশের দিক B হতে A এর দিকে। যে বিন্দু হতে শুরু তাকে **আদি বিন্দু** এবং যে বিন্দুর দিকে তাকে **প্রান্তবিন্দু** বলে। অর্থাৎ সদিক রেখাংশের দিক আদি বিন্দু হতে প্রান্ত বিন্দুর দিকে।

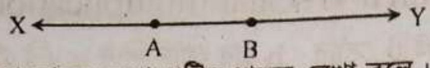
এই সদিক রেখাংশকে ভেক্টর, রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে ভেক্টরের মান বলে। ধারক রেখা হলো ভেক্টরটি যে রেখা বরাবর ক্রিয়ারত সেই রেখা এবং সদিক রেখাংশের দিকই ভেক্টরের দিক।

ভেক্টরের প্রতীক: আদিবিন্দু A ও প্রান্তবিন্দু B বিশিষ্ট ভেক্টরের জন্য $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যখন কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয় এবং মূলবিন্দুকে সকল ভেক্টরের আদিবিন্দু ধরা হয় (Localized vector) তখন প্রান্তবিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। একটিমাত্র অক্ষর প্রতীক দ্বারা (a, b, c, ..., u, v, w) ভেক্টর বুঝালে উপরে বা নিচে তীর চিহ্ন দেয়া সঙ্গত নয়। ছাপার সময় মোটা (Bold) হরফ **(a)** ব্যবহার করতে হবে। তবে **হাতে লেখার সময় অক্ষরের নিচে বা উপরে টান চিহ্ন** ($\underline{a}$ বা $\bar{a}$ বা $\vec{a}$) দিতে হবে।



2.2 কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা (Some important definitions) (ধারক রেখা, সমতা, ভেক্টরের মান, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর, প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভেক্টর, সদৃশ ভেক্টর, একক ভেক্টর)

(i) ধারক রেখা (Line of support):

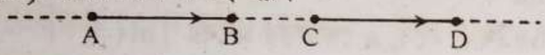


কোনো রেখাংশ যে অসীম দৈর্ঘ্যের রেখার অংশ তাকে রেখাংশটির ধারক রেখা বলে।

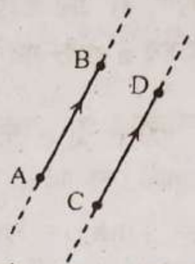
XY একটি অসীম রেখা এবং AB রেখাংশ। এখানে, XY হলো $\overrightarrow{AB}$ এর ধারক রেখা।

(ii) ভেক্টরের মান (Magnitude of vector): কোনো ভেক্টরের আদি বিন্দু ও প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে ভেক্টরটির মান বলে। **a** ভেক্টরের মানকে $|\mathbf{a}|$ বা a দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(iii) দুইটি ভেক্টরের সমতা (Equality of two vectors):
দুইটি ভেক্টরকে সমান ভেক্টর বলা হয় যদি,
(i) এদের মান সমান হয়।
(ii) এদের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়।
(iii) এদের দিক একই হয়।

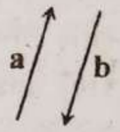


[এখানে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর মান ও দিক সমান এবং এদের ধারক রেখা একই।]



[এখানে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর মান ও দিক সমান এবং এদের ধারক রেখাদ্বয় সমান্তরাল।]

(iv) কোনো ভেক্টরের বিপরীত ভেক্টর (Opposite vector of a given vector): **a** কে **b** এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়, যদি (i) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মান সমান হয়। (ii) **b** এর ধারক রেখা **a** এর ধারকরেখার সাথে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়। (iii) **b** এর দিক **a** এর দিকের বিপরীত হয়।

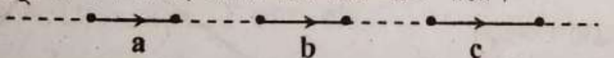


(v) শূন্য ভেক্টর (Null vector or Zero vector): কোনো ভেক্টরের মান শূন্য হলে ভেক্টরটিকে শূন্য ভেক্টর বলে। অর্থাৎ শূন্য ভেক্টরের আদি বিন্দু ও প্রান্ত বিন্দু একই। শূন্য ভেক্টরের দিক সুনির্দিষ্ট নয়। শূন্য ভেক্টরের দিক যে কোনো ভেক্টরের দিক বরাবর গ্রহণ করা যায়। শূন্য ভেক্টরকে **0** দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

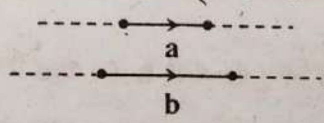
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ (বা, $\underline{0}$) একটি শূন্য ভেক্টর হলে $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0$

(vi) প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভেক্টর (Proper and improper vector): শূন্য ভেক্টর ব্যতিত সকল ভেক্টরকে প্রকৃত ভেক্টর এবং শূন্য ভেক্টরকে অপ্রকৃত ভেক্টর বলে।

(vii) সদৃশ ভেক্টর (Like vector): যে সকল ভেক্টর সমূহের দিক একই তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে। সদৃশ ভেক্টর সমূহের মান একই অথবা ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে।



[এখানে **a**, **b** ও **c** সদৃশ ভেক্টর, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq |\mathbf{c}|$ এবং ভেক্টরত্রয়ের ধারকরেখা একই]



[এখানে **a** ও **b** সদৃশ ভেক্টর এবং ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা একই নয়]

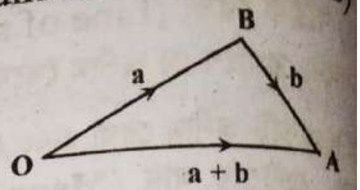
(viii) একক ভেক্টর (Unit vector): যে ভেক্টরের মান এক (1) তাকে একক ভেক্টর বলে। অর্থাৎ **a** একটি একক ভেক্টর হলে, $|\mathbf{a}| = 1$. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a \neq 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ এর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$. একক ভেক্টর প্রকাশ করার জন্য ভেক্টর প্রতীক হিসেবে সাধারণত (^) চিহ্ন ব্যবহার করা হয় (একে পড়া হয় হ্যাট) তাহলে, $\hat{a} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ অর্থাৎ কোনো ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

(ix) মুক্ত ভেক্টর (Free Vector): যে ভেক্টরের মডুলাস ও দিক স্থির কিন্তু অবস্থান স্থির নয় অর্থাৎ মডুলাস ও দিকের কোনো পরিবর্তন না করে যে ভেক্টরকে স্থানান্তর করা যায়, তাকে মুক্ত ভেক্টর বলা হয়।

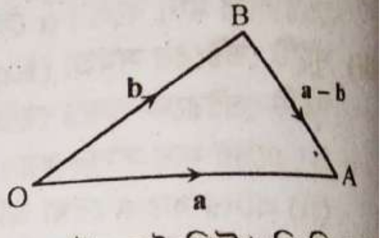
Scanned with CamScanner

পাঠ-২

2.3 দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক (Addition, subtraction and scalar multiplication of two dimensional vectors)



2.3.1 ভেক্টরের যোগ: **a** ও **b** দুইটি ভেক্টর। **b** এর আদি বিন্দু **a** এর প্রান্ত বিন্দুতে স্থাপন করলে, **a** এর আদি বিন্দু থেকে **b** এর প্রান্ত বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ হলো ভেক্টর **a** ও **b** এর যোগফল একে **a** + **b** এর দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



2.3.2 ভেক্টরের বিয়োগ: **a** ও **b** দুইটি ভেক্টর। **b** এর আদি বিন্দু **a** এর আদি বিন্দুতে স্থাপন করলে, **b** এর প্রান্ত বিন্দু থেকে **a** এর প্রান্ত বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ হলো ভেক্টর **a** ও **b** এর বিয়োগফল একে **a** – **b** দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.3.3 ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক:

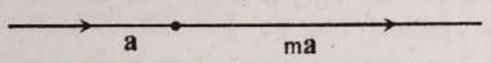
কোনো ভেক্টর **a** কে একটি স্কেলার m দ্বারা গুণ করলে গুণফল m**a** ও একটি ভেক্টর হয়। m**a** ভেক্টরের বৈশিষ্ট্যাবলি নিম্নরূপ:

(i) m**a** এর মান = $|m\mathbf{a}| = |m|\,|\mathbf{a}|$; অর্থাৎ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে, **a** ভেক্টরের মানের $|m|$ গুণ।

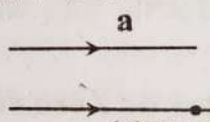
(ii) m**a** এর দিক এবং **a** এর দিক একই হবে যদি m ধনাত্মক হয়। m**a** এর দিক **a** এর দিকের বিপরীত দিক হবে যদি m ঋণাত্মক হয়।

(iii) যদি m = 0 হয় তবে m**a** = **0** (শূন্য ভেক্টর) হবে।

(iv) m**a** ভেক্টর এবং **a** ভেক্টরের ধারক রেখা হয় একই অথবা সমান্তরাল হবে।



(ধারক রেখা এক বা অভিন্ন হবার চিত্র)

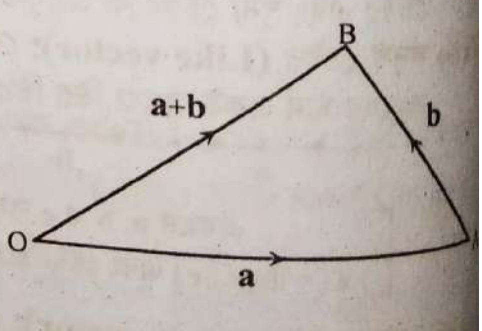


(ধারক রেখা সমান্তরাল হবার চিত্র)

2.4 দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি (Rules of addition, subtraction and scalar multiple of two dimensional vectors)

2.4.1 ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র: মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ দুইটি অসমান্তরাল ভেক্টর এমন যেন **a** এর প্রান্ত বিন্দু এবং **b** এর আদি বিন্দু একই।

এখন **a** এর আদি বিন্দু O এবং **b** এর প্রান্ত বিন্দু B সংযোগ করলে $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ পাওয়া যায়। এখানে OAB একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।



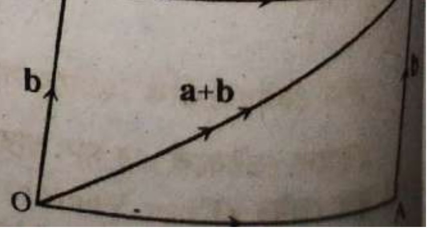
$\therefore$ ΔOAB এ $\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}}$

এই সূত্রকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র বলে।

2.4.2 ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র: মনে করি, OACB একটি সামান্তরিক যার দুইটি সন্নিহিত বাহু OA এবং OB দ্বারা যথাক্রমে **a** এবং **b** ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়। অর্থাৎ, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; O, C যোগ করি।

তাহলে, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ বা, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ [ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে]

অতএব, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ [$\because$ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$]



Scanned with CamScanner

সুতরাং কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর **a** ও **b** এর মান ও দিক সূচিত হলে **a** ও **b** ভেক্টর নির্দেশক রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণ **a + b** ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করে।

দ্রষ্টব্য: (i) দুই বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ভেক্টরের যোগফলকে ভেক্টরগুলির লব্ধি (Resultant) বলে।

(ii) **a** ও **b** দুইটি ভেক্টরের লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}$

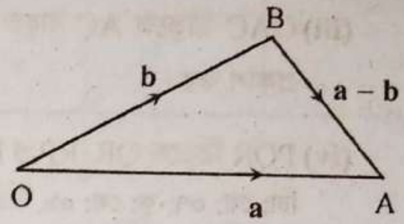
2.4.3 ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রের দ্বারা দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল প্রকাশ: মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ দুইটি অসমান্তরাল ভেক্টর। এখানে **a** ও **b** উভয়ের আদি বিন্দু O এবং প্রান্ত বিন্দু যথাক্রমে A ও B;

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে পাই, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

বা, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ [উভয় পার্শ্বে $\overrightarrow{BO}$ যোগ করে]

বা, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ [$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$]

বা, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ $\therefore$ $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

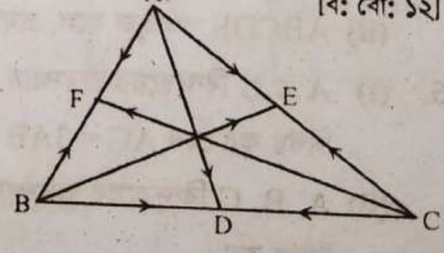


2.4.4 ভেক্টরের যোগ এবং স্কেলার গুণিতক সম্পর্কিত মৌলিক সূত্র

(i)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	[ভেক্টর যোগের বিনিময় সূত্র]
(ii)	$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$	[যোগের সহযোজন সূত্র]
(iii)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$	[যোগের অভেদ সূত্র]
(iv)	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$	[যোগের বিপরীত সূত্র]
(v)	$m\mathbf{a}=\mathbf{a}m$	[স্কেলার গুণনের বিনিময় সূত্র]
(vi)	$m(n\mathbf{a})=(mn)\mathbf{a}$	[স্কেলার গুণনের সহযোজন সূত্র]
(vi)	$(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}$	[বণ্টন সূত্র]
(viii)	$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$	[বণ্টন সূত্র]

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, ও F হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$। [ব: বো: ১২]



সমাধান: A, D; B, E; C, F যোগ করি।

এখন, ΔABD হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ ... ... (ii) [ΔACD হতে]

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

অনুরূপভাবে, $2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ এবং $2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

যোগ করে, $2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

$$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA}) = \mathbf{0}$$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$

Scanned with CamScanner

পাঠ-৩

অনুশীলনী-2(A)

1. (i) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ । [ব: বো: ১১; সি: বো: ১৩]

   (ii) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ।
   [ঢা: বো: ০৮, ১২; ব: বো: ১৩; রা: বো: ১৬, ১৪, ১১; কু: বো: ১০, ০৪; দি: বো: ১০; য: বো: ১৩, ০৯; চ: বো: ১০; সি: বো: ১০, ০৮]

   (iii) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B; যদি $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ কে **a** ও **b** এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা: বো: ১৩, ০৯; রা: বো: ১৪; দি: বো: ১২]

   (iv) PQR ত্রিভুজে QR, RP ও PQ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু L, M ও N হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = \mathbf{0}$ ।
   [ঢা: বো: ০৭; কু: বো: ০৯, ০৩; রা: বো: ১৩, ১১, ০৯, ০৫; চ: বো: ০৬, ০৪; দি: বো: ১৩, ০৯; য: বো: ১১, ০৬; সি: বো: ০৯, ০৭, ০৫, ১২; ব: বো: ১৪, ০৯, ০৭]

2. (i) ABC একটি ত্রিভুজ। D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ।
   [ব: বো: ১১]

   (ii) ABCDE একটি পঞ্চভূজ। $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DE} = \mathbf{d}$ হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ ।

3. (i) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F, হলে, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

   (ii) **a** ও **b** ভেক্টরদ্বয় দ্বারা সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়কে **a** ও **b** এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

4. (i) ABCD চতুর্ভুজের BD ও AC কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হলে, প্রমাণ কর যে,
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{FE}$ এবং $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ।

   (ii) ABCDE পঞ্চভুজ হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$ ।

5. (i) A ও B বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** ও **b**; বর্ধিত AB এর ওপর এরূপ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর যেন AC = 3AB হয়।

   (ii) A, B, C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a**, **b**, **c**; ABCD সামান্তরিকের D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (iii) $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$

3. (i) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (ii) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$

5. (i) $3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ (ii) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$

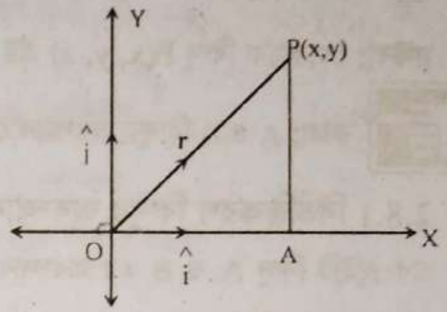
Scanned with CamScanner

পাঠ-৪

2.5 একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ (Unit vector $\hat{i}$, $\hat{j}$)

মনে করি, O মূলবিন্দু এবং OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে X ও Y-অক্ষ নির্দেশ করে।
ধরি, XY সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু P(x,y); P হতে X-অক্ষের ওপর PA লম্ব টানি এবং O, P যোগ করি। তাহলে, OA = x এবং AP = y

এখন X ও Y-অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ হলে



$$\hat{i} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{x} \quad \text{বা, } \overrightarrow{OA} = x\hat{i}$$

$$\text{এবং } \hat{j} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP} = \frac{\overrightarrow{AP}}{y} \quad \text{বা, } \overrightarrow{AP} = y\hat{j}$$

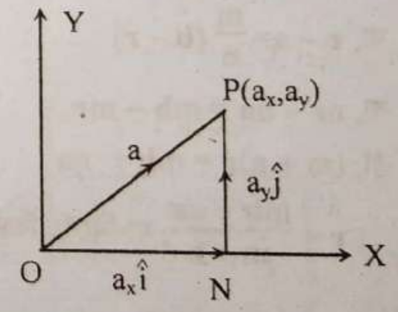
ΔOAP হতে (যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে) পাই, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ $\therefore$ $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ [$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ ধরে]
আবার, সমকোণী ত্রিভুজ OAP হতে পাই, $OP^2 = OA^2 + AP^2$ বা, $r^2 = x^2 + y^2$ বা, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

অতএব, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2.6 সমতলে ভেক্টরের অংশক (Components of vector in a plane)

মনে করি, **a** একটি ভেক্টর, যার মূলবিন্দু O(0,0) এবং শীর্ষবিন্দু $P(a_x, a_y)$ তাহলে $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$ হবে অবস্থান ভেক্টর।
আমরা জানি, ভেক্টরের মানের সাথে ঐ ভেক্টরের দিকে একটি একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে রাশিটি একটি ভেক্টর রাশি হয়। X-অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\hat{i}$ দ্বারা a_x কে গুণ করলে $\overrightarrow{ON} = a_x\hat{i}$ একটি ভেক্টর রাশি হবে যার মান হবে a_x এবং দিক হবে X-অক্ষের দিকে।

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{NP} = a_y\hat{j}$ একটি ভেক্টর যার মান হলো a_y এবং দিক হলো Y অক্ষের দিকে। এখানে $\hat{j}$, Y অক্ষের দিকে একটি একক ভেক্টর।



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে আমরা পাই,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$

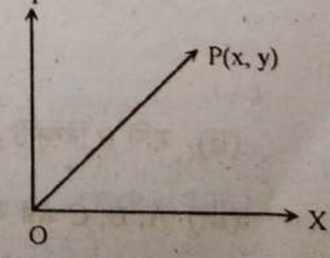
বা, $\mathbf{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

$a_x\hat{i}$ এবং $a_y\hat{j}$ হলো **a** এর উপাংশ।

a ভেক্টরের মান $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

2.7 ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ
(Representation of vector in cartesian coordinates)

আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X, Y ও Z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরকে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ দ্বারা নির্দেশ করে।



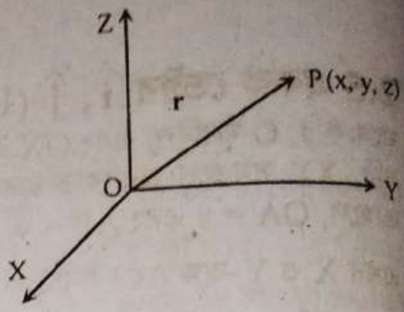
চিত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$

একে $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ বা $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপভাবে ত্রিমাত্রিক জগতে $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরকে $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ বা (x, y, z) দ্বারাও প্রকাশ করা যায়।

Scanned with CamScanner

2.8 অবস্থান ভেক্টর (Position vector)



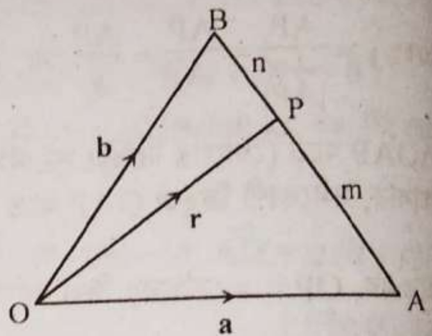
যদি প্রসঙ্গ কাঠামোয় মূল বিন্দু O এর সাপেক্ষে একটি বিন্দু P এর অবস্থানকে $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় তবে $\overrightarrow{OP}$ কে P এর অবস্থান ভেক্টর বলে।

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ হলে, $\mathbf{r}$ কে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: যেকোনো বিন্দু P(x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

কাজ: A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (3, –2, 1) ও (–1, 1, 1) হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর।

2.8.1 বিভক্তিকরণ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর:



মনে করি, O মূল বিন্দু এবং দুইটি বিন্দু A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** ও **b**; তাহলে

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

ধরি, P বিন্দুটি AB রেখাংশকে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে।

যদি P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ হয় তবে, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$

শর্তানুসারে, $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : n$

বা, $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \dfrac{m}{n}$ বা, $\overrightarrow{AP} = \left(\dfrac{m}{n}\right)\overrightarrow{PB}$; [যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ বা, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB}$ বা, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$]

বা, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \dfrac{m}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$

বা, $\mathbf{r} - \mathbf{a} = \dfrac{m}{n}(\mathbf{b} - \mathbf{r})$

বা, $n\mathbf{r} - n\mathbf{a} = m\mathbf{b} - m\mathbf{r}$

বা, $(m + n)\mathbf{r} = m\mathbf{b} + n\mathbf{a}$

$\therefore \mathbf{r} = \dfrac{m\mathbf{b} + n\mathbf{a}}{m + n}$, যা নির্ণেয় বিভক্তি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর।

দ্রষ্টব্য: (i) যদি P বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হয় অর্থাৎ m = n হয় তবে, $\mathbf{r} = \dfrac{n(\mathbf{b} + \mathbf{a})}{2n} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

বা, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{r}$

বা, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP}$

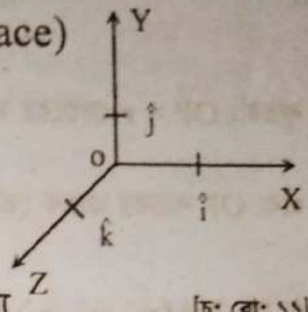
(ii) যদি P বিন্দুটি AB রেখাংশকে m ঃ n অনুপাতে বহি:র্বিভক্ত করে তবে, $\mathbf{r} = \dfrac{m\mathbf{b} - n\mathbf{a}}{m - n}$ হবে।

(iii) A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ বা $(\underline{c} - \underline{a}) = k(\underline{b} - \underline{a})$ হয়।

Scanned with CamScanner

পাঠ-৫

2.9 ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ in three dimensional space)



মনে করি, ত্রিমাত্রিক জগতে OX, OY, OZ বরাবর যথাক্রমে x, y ও z অক্ষকে নির্দেশ করে।

তাহলে x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরকে যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.9.1 আয়ত অক্ষ বরাবর অবস্থিত একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর কিছু বৈশিষ্ট্য [চ: বো: ১১]

x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং z-অক্ষ বরাবর অবস্থিত একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ এবং $\hat{k}$ এর জন্য

$\hat{i}.\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0° = 1$ [$\because |\hat{i}| = 1$ এবং $\hat{i}$ ভেক্টরটি তার নিজের সাথে 0° কোণ উৎপন্ন করে]

অনুরূপভাবে $\hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

আবার, $\hat{i}.\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90° = 0$ [$\because |\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$ এবং $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°]

অনুরূপভাবে = $\hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

2.10 ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ (Representation of vectors in terms of $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$)

মনে করি, O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছেদ করে, এরূপ তিনটি রেখা OX, OY ও OZ এই রেখাত্রয়কে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্কের অক্ষ এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু বলে।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z) অর্থাৎ, OX বরাবর x দূরত্ব, তারপর OY এর সমান্তরাল বরাবর y দূরত্ব এবং অতঃপর OZ এর সমান্তরালে z দূরত্ব অতিক্রম করলে ঐ বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, যে কোনো একটি বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y, z)

P এর মধ্য দিয়ে YZ, ZX ও XY সমতলের সমান্তরাল করে যথাক্রমে PBAF, PBCD ও PDEF সমতলগুলো অঙ্কন করি। সমতলত্রয় যথাক্রমে x, y ও z অক্ষত্রয়কে A, C ও E বিন্দুতে ছেদ করলে OA = x, OC = y এবং OE = z

আবার ধরি, x, y ও z অক্ষ বরাবর তিনটি একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$

তাহলে, $\overrightarrow{OA} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{OC} = y\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OE} = z\hat{k}$

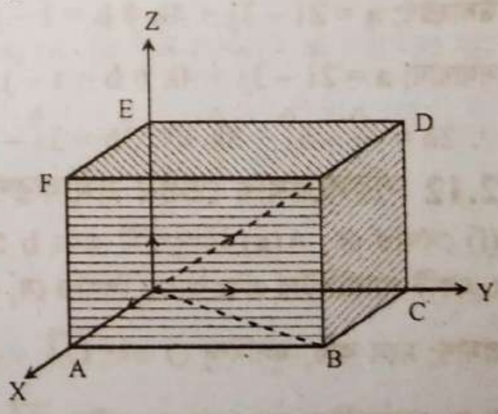
এখন O, P এবং O, B যোগ করি এবং ধরি OP = r

তাহলে, ΔOPB হতে পাই, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ ...... (i)

এবং ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ...... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ [$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OE}$]



$\therefore \mathbf{r} = \mathbf{x}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\hat{\mathbf{k}}$

এই ভেক্টরটিকে সাধারণ ভেক্টর বা যে কোনো বিন্দু (x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর বলে।

2.10.1 সাধারণ ভেক্টর $\mathbf{r} = \mathbf{x}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\hat{\mathbf{k}}$ এর মান নির্ণয়:

2.10 হতে, সমকোণী ত্রিভুজ OBP হতে পাই, $OP^2 = OB^2 + BP^2$ ...... (iii) [$\because \angle OBP = 90°$]

আবার সমকোণী ত্রিভুজ OAB হতে পাই,

$OB^2 = OA^2 + AB^2$ ...... (iv) [$\because \angle OBA = 90°$]

Scanned with CamScanner

(iii) ও (iv) নং হতে পাই, $OP^2 = OA^2 + AB^2 + BP^2 = OA^2 + OC^2 + OE^2$ [$\because$ AB=OC,BP=OE]

বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ [$\because$ OA = x, OC = y, OE = z]

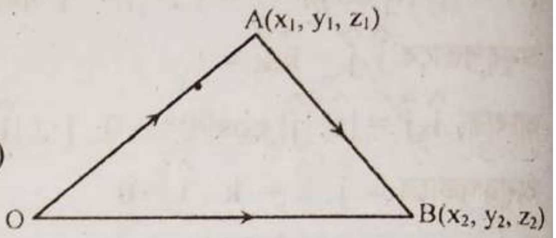
$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

সুতরাং $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ ভেক্টরের মান $= |\overrightarrow{OP}| = |\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

এবং $\overrightarrow{OP}$ বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

2.10.2 $A(x_1, y_1, z_1)$ এবং $B(x_2, y_2, z_2)$ হলে, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

মনে করি, O মূলবিন্দু। তাহলে O এর সাপেক্ষে A এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$



ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

2.11 ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ (Representation of vector addition and scalar multiple in three dimensional space)

ধরি, $\mathbf{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\mathbf{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

a ও **b** এর যোগফল বা লব্ধি, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

এবং **a** এর m গুণিতক, $m\mathbf{a} = m(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k}$

উদাহরণ: $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$ হলে, $2a + 3b$ নির্ণয় কর।

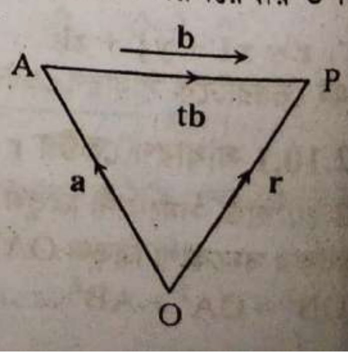
সমাধান: $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore 2\mathbf{a} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $3\mathbf{b} = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 18\hat{k}$ এবং $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 7\hat{i} - 9\hat{j} - 10\hat{k}$

2.12 সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ (Vector equation of straight line)

(i) দেখাও যে, A(a) বিন্দুগামী এবং b ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার এবং আরও দেখাও যে, একে $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$ আকারেও প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ: মনে করি, মূলবিন্দু O এবং $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$। ধরি, **A(a)** বিন্দুগামী এবং **b** ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার উপর P যে কোনো বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$



যেহেতু AP এবং **b** সমান্তরাল

$\therefore AP = t\mathbf{b}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার।

এখন ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ বা, $\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{r}$ বা, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$

আবার, $\overrightarrow{AP}$ এবং **b** ভেক্টর সমান্তরাল বলে, $\overrightarrow{AP} \times \mathbf{b} = 0$ বা, $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$

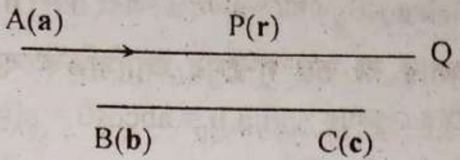
Scanned with CamScanner

(ii) A(a) বিন্দুগামী এবং B(b) ও C(c) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, A(a) বিন্দুগামী এবং B(b) ও C(c) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা AQ এর ওপর P(r) যে কোনো বিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ ……… (1)

আবার, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ ……… (2)



যেহেতু $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{BC}$ সমান্তরাল

$\therefore \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{BC}$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

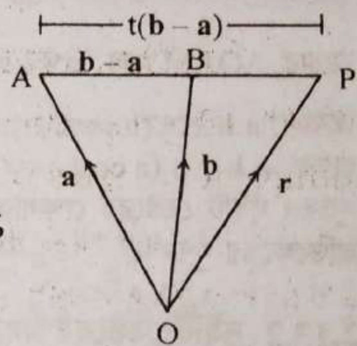
বা, $\mathbf{r} - \mathbf{a} = t(\mathbf{c} - \mathbf{b})$

$\therefore$ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{c} - \mathbf{b})$ এটাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(iii) দুইটি প্রদত্ত বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৫]

সমাধান: মনে করি, A এবং B প্রদত্ত দুইটি বিন্দু। মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$



এখন $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ কাজেই নির্ণেয় সরলরেখাটি A(a) বিন্দুগামী এবং $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

মনে করি, নির্ণেয় রেখার উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

বা, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ……… (1) এটাই নির্ণেয় সমীকরণ।

(iv) সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\mathbf{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\mathbf{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ও $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ সমীকরণ হতে পাওয়া যায়,

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} + t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$\Rightarrow (x - a_1)\hat{i} + (y - a_2)\hat{j} + (z - a_3)\hat{k} = t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$(x - a_1) = tb_1, (y - a_2) = tb_2, (z - a_3) = tb_3$

বা, $\dfrac{x - a_1}{b_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2} = \dfrac{z - a_3}{b_3} = t$

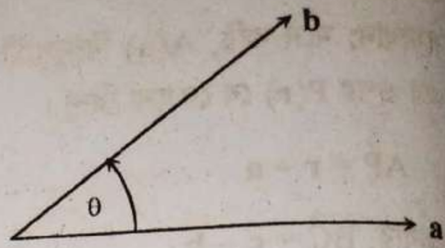
অর্থাৎ সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\dfrac{x - a_1}{b_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2} = \dfrac{z - a_3}{b_3}$

কাজ: 1. (3, 2, 1) এবং (4, 1, –2) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. (2, –1, 3) বিন্দুগামী এবং (1, 3, 2) ও (3, 5, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

পাঠ-৬

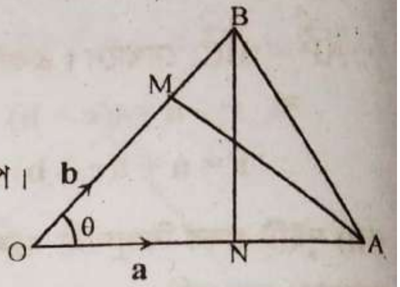


2.13 ভেক্টরের স্কেলার গুণন বা ডট্ গুণন

(Scalar product or dot product of two vectors)

দুইটি ভেক্টর **a** এবং **b** এর মধ্যবর্তী কোণ θ, $0 \le \theta \le \pi$ হলে $ab\cos\theta$ কে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন বা ডট গুণন বলে যা $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
অর্থাৎ, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ab\cos\theta$; এখানে $a = |\mathbf{a}|$ এবং $b = |\mathbf{b}|$

2.13.1 স্কেলার বা ডট গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: দুইটি ভেক্টর **a** এবং **b** এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে



ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ab\cos\theta = a(b\cos\theta) = b(a\cos\theta)$

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
A হতে OB এর ওপর লম্ব AM এবং B হতে OA এর ওপর লম্ব BN অঙ্কন করি।
তাহলে ON = **a** বরাবর **b** এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং OM = **b** বরাবর **a** এর লম্ব অভিক্ষেপ।

ΔOBN হতে, $\cos\theta = \frac{ON}{OB}$ বা, $ON = OB\cos\theta = b\cos\theta$

$[\because b = |\mathbf{b}| = |\overrightarrow{OB}|]$

আবার, ΔOAM হতে, $\cos\theta = \frac{OM}{OA}$ বা, $OM = a\cos\theta$ $[\because a = |\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OA}|]$

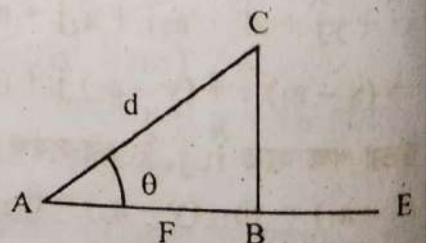
তাহলে, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = a(b\cos\theta)$ = (**a** ভেক্টরের মান) (**a** উপর **b** এর লম্ব অভিক্ষেপ)
অথবা, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = b(a\cos\theta)$ = (**b** ভেক্টরের মান) (**b** উপর **a** এর লম্ব অভিক্ষেপ)
সুতরাং দুইটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন হলো যে কোনো একটি ভেক্টরের মান এবং তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের গুণন।

2.13.2 দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ: $\mathbf{a}\ (\neq 0)$ এবং $\mathbf{b}\ (\neq 0)$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে (2.13 অনুসারে) পাই, $\mathbf{a}.\ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{ab}$ $[\because |\mathbf{a}| = a, |\mathbf{b}| = b]$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{ab}$

দ্রষ্টব্য: $\mathbf{a}.\ \mathbf{b} = 0$ হলে, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ অথবা $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ অথবা **a** ও **b** এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হবে।

2.13.3 স্কেলার গুণজের প্রয়োগ



মনে করি, একটি বস্তুর ওপর **F** বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$ যখন **F** বলটি AE বরাবর ক্রিয়াশীল।
F বলের দিকে সরণ **d** এর মান $= AB = AC\cos\theta$
আমরা জানি, কাজ = বল × সরণ
$\therefore W = F \times AB = F \times AC\cos\theta = Fd\cos\theta = \mathbf{F}.\mathbf{d}$
সুতরাং দেখা যাচ্ছে, কাজ = **F** এবং **d** এর স্কেলার গুণন। কাজেই, কাজ একটি স্কেলার রাশি।

উদাহরণ: একটি কণার উপর $\mathbf{F} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নিউটন বল প্রয়োগে কণাটির সরণ $\mathbf{d} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ মিটার হলে প্রযুক্ত বলটি দ্বারা কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

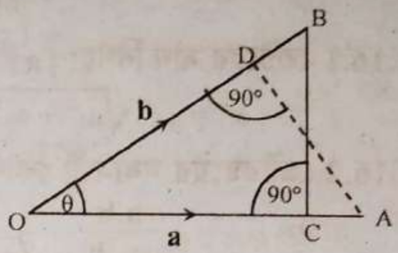
সমাধান: আমরা জানি, কাজ = বল এবং সরণের স্কেলার গুণজ

$\therefore W = \mathbf{F}.\mathbf{d} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 12 - 9 + 4 = 7$ জুল

2.14 ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়
(Resolved part of a vector in three dimensional space)

2.14.1 একটি ভেক্টরের ওপর অপর একটি ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ (বা সংক্ষেপে অভিক্ষেপ) নির্ণয়:

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ এবং $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ.
B হতে OA এর ওপর BC লম্ব টানি।
তাহলে $\mathbf{a}$ ভেক্টরের ওপর $\mathbf{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ হবে OC



ΔOBC হতে, $\cos\theta = \dfrac{OC}{OB}$ বা, $OC = OB\cos\theta = |\mathbf{b}|\cos\theta$

$\therefore OC = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|}$ $\left[\because \cos\theta = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|}\right.$ বা, $\left.|\mathbf{b}|\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|}\right]$

অনুরূপভাবে, দেখানো যাবে, $\mathbf{b}$ ভেক্টরের ওপর $\mathbf{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ OD (চিত্রানুসারে) $= \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}|}$

নোট: এই অভিক্ষেপকে স্কেলার অভিক্ষেপ (Scalar Projection) ও বলা হয়।

2.14.2 একটি ভেক্টরের দিক বরাবর অপর একটি ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক নির্ণয়:

$\mathbf{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\mathbf{b}$ ভেক্টরের উপাংশও একটি ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য হলো $\mathbf{a}$ এর ওপর $\mathbf{b}$ এর অভিক্ষেপ এবং দিক হলো $\mathbf{a}$ এর দিক।

আমরা জানি, $\mathbf{a}$ এর ওপর $\mathbf{b}$ এর অভিক্ষেপ, $OC = |\mathbf{b}|\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|}$ [উপরের চিত্রানুসারে]

এখন $\mathbf{a}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\hat{a} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

তাহলে $\mathbf{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\mathbf{b}$ ভেক্টরের উপাংশ হবে $\overrightarrow{OC} = OC\,\hat{a} = |\mathbf{b}|\cos\theta\,\hat{a} = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|}\hat{a} = \dfrac{(\mathbf{a.b})\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$

অনুরূপভাবে $\mathbf{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\mathbf{a}$ ভেক্টরের উপাংশ হবে $\overrightarrow{OD} = OD\hat{b} = |\mathbf{a}|\cos\theta\hat{b} = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}|}\hat{b} = \dfrac{(\mathbf{a.b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$

নোটঃ ভেক্টর উপাংশকে ভেক্টর অভিক্ষেপ (Vector Projection)ও বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: কোনো ভেক্টরের স্কেলার অভিক্ষেপ একটি স্কেলার রাশি এবং উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি। উপাংশ ও অভিক্ষেপের পরমমান একই।

কাজ: 1. $\mathbf{a} = 3\hat{i} - 2\hat{k} + 5\hat{j}$ ভেক্টরের উপর $\mathbf{b} = 2\hat{i} + \hat{k} - \hat{j}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
2. $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j}$ ভেক্টর বরাবর $\mathbf{B} = 5\hat{i} + \hat{k} - 2\hat{j}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

2.15 স্কেলার বা ডট গুণজের ধর্মাবলি (Properties of scalar or dot product)

(i) দুইটি ভেক্টর $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\theta = \cos^{-1}\dfrac{\mathbf{a.\,b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

(ii) $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $\mathbf{a.b} = 0$

(iii) স্কেলার গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলে, $\mathbf{a.b} = \mathbf{b.a}$

(iv) $\mathbf{a}$ এর ওপর $\mathbf{b}$ এর অভিক্ষেপ $= |\mathbf{b}|\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|}$

$\mathbf{b}$ এর ওপর $\mathbf{a}$ এর অভিক্ষেপ $= |\mathbf{a}|\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}|}$

(v) স্কেলার গুণন সংযোগ বিধি মেনে চলে, $(m\,\mathbf{a}).\mathbf{b} = m\,(\mathbf{a.b}) = \mathbf{a}.(m\,\mathbf{b})$, যেখানে m একটি স্কেলার

(vi) স্কেলার গুণন বন্টন বিধি মেনে চলে, $\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a.b} + \mathbf{a.c}$

Scanned with CamScanner

2.16 দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ (Scalar product of two vectors)

মনে করি, $\mathbf{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ দুইটি সাধারণ আকারের ভেক্টর।

ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার বা ডট গুণন $= \mathbf{a}.\mathbf{b} = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right).\left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}\right)$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad [\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \text{ এবং } \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0]$$

2.16.1 ভেক্টরের মান নির্ণয়: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}.\mathbf{a} = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right).\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$$\therefore |\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2.16.2 ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়: মনে করি, **a** ও **b** এর মধ্যবর্তী কোণ θ

তাহলে $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

2.16.3 দুইটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত: দুইটি ভেক্টর **a** ও **b** লম্ব হওয়ার শর্ত, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ অর্থাৎ, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

দ্রষ্টব্য: $\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = \left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}\right).\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) = \mathbf{b}.\mathbf{a}$

কাজ: 1. $\mathbf{b} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ হলে, **b** এর মান নির্ণয় কর।

2. $\mathbf{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

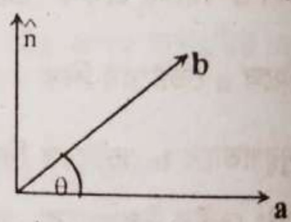
3. দেখাও যে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

পাঠ-৭

2.17 ভেক্টরের ভেক্টর বা ক্রস (×) গুণন (Vector or cross product of two vectors)

দুইটি ভেক্টর **a** এবং **b** এর মধ্যবর্তী কোণ θ, $0 \le \theta \le \pi$ হলে,

$\hat{n}\, ab\sin\theta$ কে ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই গুণনকে $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে $|\mathbf{a}| = a$; $|\mathbf{b}| = b$ এবং $\hat{n}$ ঘূর্ণায়মান ডানমুখী স্ক্রুর দিকমুখী একটি একক ভেক্টর যা **a** ও **b** উভয়ের ওপর লম্ব।

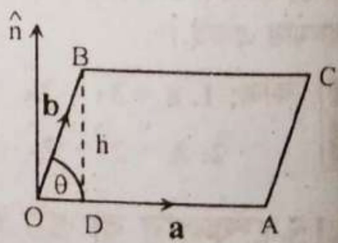


2.17.1 ভেক্টর বা ক্রস গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: মনে করি, OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{OA}$ বাহুর ওপর BD উচ্চতা = h

a এবং **b** এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{n}\, ab\sin\theta = \hat{n}ah$

$$[\because \sin\theta = \frac{h}{|\mathbf{b}|} \text{ বা, } h = b\sin\theta]$$

বা, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ah \quad [\because |\hat{n}| = 1]$ = সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল



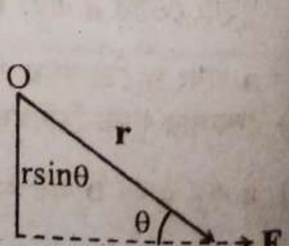
সুতরাং কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় দুইটি ভেক্টর দ্বারা সূচিত হলে, তাদের ভেক্টর গুণনের মান দ্বারা উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্দেশিত হয়।

2.17.2 ভেক্টর গুণনের প্রয়োগ

ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে **r** দূরত্বে কোনো কণার ওপর **F** বল প্রযুক্ত হলে কণাটির বলের ভ্রামক

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \hat{n}\, rF\sin\theta$

এখানে n একটি একক ভেক্টর যার দিক **r** ও **F** এর লম্ব বরাবর এবং θ হচ্ছে **r** এবং **F** এর অন্তর্ভুক্ত কোণ এবং ভ্রামকের মান $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF\sin\theta$



উদাহরণ: $\mathbf{F} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ **বলটি (2, –1, 2) বিন্দুতে প্রয়োগ করলে (5, 1, 4) বিন্দুর সাপেক্ষে এদের ভ্রামক নির্ণয় কর।**

সমাধান: এখানে $\mathbf{r} = (5-2)\hat{i} + (1+1)\hat{j} + (4-2)\hat{k} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ বলের ভ্রামক $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 6\hat{i} + \hat{j} - 10\hat{k}$

Scanned with CamScanner

2.18 ভেক্টর বা ক্রস গুণজের ধর্ম (Properties of vector or cross product)

(i) $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 0$ বা π;
তাহলে, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ কেননা, যখন $\theta = 0$ বা π তখন, $\sin\theta = 0$

(ii) ভেক্টর গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলে না। $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(iii) সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা সূচিত হলে, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ দ্বারা সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্দেশিত হয়।

(iv) $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ দ্বারা কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু সূচিত হলে উক্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

(v) $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সূচিত হলে, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল হবে $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

(vi) মৌলিক একক ভেক্টর সমূহের মধ্যে ভেক্টর গুণন: $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{n}|\hat{i}||\hat{i}|\sin 0^\circ = \mathbf{0}$ অনুরূপভাবে, $\hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$
আবার, $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{n}|\hat{i}||\hat{j}|\sin 90^\circ = \hat{n} = \hat{k}$; [কেননা $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ উভয়ের সাথে লম্ব একক ভেক্টর হল $\hat{k}$]
অনুরূপভাবে, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ তাহলে, $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ এবং $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

2.19 ভেক্টর গুণজ (Vector product)

$\mathbf{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ হলে, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) = 0 + a_1b_2\hat{k} - a_1b_3\hat{j} - a_2b_1\hat{k} + 0 + a_2b_3\hat{i} + a_3b_1\hat{j} - a_3b_2\hat{i} + 0$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$; [গুণফলটিকে নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করে]

দ্রষ্টব্য: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ভেক্টরকে $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের ওপর লম্ব ভেক্টর বলে। এর দিক হবে $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ এর সংযোগ স্থলে ডানহাতি স্ক্রু স্থাপন করে $\mathbf{a}$ হতে $\mathbf{b}$ এর দিকে ঘুরালে যেদিক অগ্রসর হবে উক্ত দিকে।

সুতরাং $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$

2.19.1 তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত:
তিনটি ভেক্টর $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ও $\mathbf{c}$ সমতলীয় হবে যদি $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c} = 0$ হয়।

মনে করি, $\mathbf{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\mathbf{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং $\mathbf{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

তাহলে, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$

তাহলে, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ [নির্ণায়ক আকারে প্রকাশ করে]

$\therefore$ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ও $\mathbf{c}$ সমতলীয় হওয়ার নির্ণেয় শর্ত : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

দ্রষ্টব্য: (i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c} = \mathbf{c}.(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (ii) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}.(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}.(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
(iii) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ত্রয়ী স্কেলার গুণন (Scaler Triple Product) নামে পরিচিত।
(iv) $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ দ্বারা $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ধারবিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন নির্দেশ করে।

কাজ: 1. দেখাও যে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\mathbf{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।
2. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

পাঠ-৮

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. (1, 2, 3) এবং (4, –3, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, (1, 2, 3) এবং (4, –3, 1) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** এবং **b**.

সুতরাং $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ বিন্দুগামী সরলরেখার নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ–

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ বা, $\mathbf{r} = (1 - t)\,\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

বা, $\mathbf{r} = (1 - t)(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$ বা, $\mathbf{r} = (1 + 3t)\,\hat{i} + (2 - 5t)\,\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$

এটাই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

উদাহরণ-2. (1, 2, –3) বিন্দুগামী এবং (2, 3, –1) ও (3, 5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, (1, 2, –3) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর **a** এবং (2, 3, –1) ও (3, 5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ ভেক্টর **b**

$\therefore \mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = (3 - 2)\hat{i} + (5 - 3)\hat{j} + (2 + 1)\hat{k} = i + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

অতএব (1, 2, –3) বিন্দুগামী এবং (2, 3, –1) ও (3, 5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$

বা, $\mathbf{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ যেখানে t প্যারামিটার

বা, $\mathbf{r} = (1 + t)\hat{i} + (2 + 2t)\hat{j} + (-3 + 3t)\hat{k}$

উদাহরণ-3. $\mathbf{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে, (2A + B) এবং (6A –3B) নির্ণয় কর।

সমাধান : $2\mathbf{A} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k}$ [চ: বো: ০৪; য: বো: ০৩; কু: বো: ০৭]

$\therefore 2\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k}) + (4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = (2 + 4)\,\hat{i} + (6 - 2)\,\hat{j} + (-4 + 4)\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j} + 0.\hat{k} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$

$\therefore 6\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$

উদাহরণ-4. $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ এবং $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর।

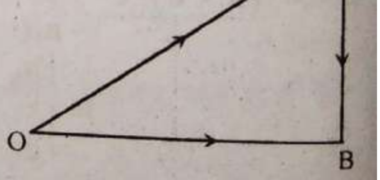
[বুয়েট ০৬-০৭; ঢা: বো: ১৩, ০৮, ০৪; রা: বো: ১২; য: বো: ১৪, ১২, ০৬, ০৪; দি: বো: ১৪, ১১, ০৯; চ: বো: ০৮, ১২; ব: বো: ১০, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৩, ০৯]

সমাধান: যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

এবং $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36 + 36} = 2\sqrt{19}$



উদাহরণ-5. a এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে?

[ঢা: বো: ১০, ০৬; কু: বো: ১৩; য: বো: ১৩, ০৯, ০৫; রা: বো: ০৯, ০৩, ১২; দি: বো: ১৪; চ: বো: ০৯; সি: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২]

সমাধান: মনে করি, $\mathbf{P} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = 2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ এই ভেক্টর দুইটি লম্ব হবে যদি $\mathbf{P}.\mathbf{Q} = 0$ হয়।

অর্থাৎ $(a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

বা, $2a^2 + 2a - 4 = 0$ বা, $a^2 + a - 2 = 0$

বা, $(a + 2)(a - 1) = 0 \therefore a = -2, 1$

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-6. $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [য: বো: ০৮]

সমাধান : মনে করি, $\mathbf{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ $\therefore |\mathbf{A}| = \sqrt{9+36+4} = 7$

এবং **A** ভেক্টরটি x, y ও z-অক্ষের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 ও θ_3 কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, x, y ও z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$।

তাহলে, $\cos\theta_1 = \dfrac{\mathbf{A}.\hat{i}}{|\mathbf{A}|\,|\hat{i}|} = \dfrac{(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}).\hat{i}}{7.1} = \dfrac{3}{7}$ [$\because |\hat{i}| = 1$ এবং $\mathbf{A}.\hat{i} = 3$]

বা, $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right)$

আবার, $\cos\theta_2 = \dfrac{\mathbf{A}.\hat{j}}{|\mathbf{A}|\,|\hat{j}|} = \dfrac{-6}{7}$ বা, $\theta_2 = \cos^{-1}\left(-\dfrac{6}{7}\right)$ এবং $\cos\theta_3 = \dfrac{\mathbf{A}.\hat{k}}{|\mathbf{A}|\,|\hat{k}|} = \dfrac{2}{7}$ বা, $\theta_3 = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{7}\right)$

উদাহরণ-7. $\mathbf{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = \sqrt{3}\,\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$; (i) **A** ভেক্টরের ওপর **B** ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[কু: বো: ০৬, ০৪; রা: বো: ০৩; য: বো: ০৮; চ: বো: ০৭, ০৩, ব: বো: ০৭; দি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(ii) **A** ভেক্টর বরাবর **B** এর উপাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান: (i) **A** ভেক্টরের ওপর **B** ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|}$

এখানে $\mathbf{A}.\mathbf{B} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}).(\sqrt{3}\,\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \sqrt{3} + 3 - 2 = \sqrt{3} + 1$ এবং $|\mathbf{A}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

সুতরাং, **A** ভেক্টরের ওপর **B** এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$

(ii) **A** ভেক্টর বরাবর **B** এর উপাংশ $= \mathbf{A}.\mathbf{B}\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2} = (\sqrt{3}+1)\dfrac{(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{3} = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\right)(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

উদাহরণ-8. $\mathbf{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\mathbf{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৬, ১২, ০৯; রা: বো: ১১, ০৯; দি: বো: ১৪; চ: বো: ১৪, ১১, ০৯; য: বো: ১১; কু: বো: ০৬; সি: বো: ১৪; ব: বো: ১৪, ১১, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৪]

সমাধান: **a** ভেক্টর বরাবর **b** ভেক্টরের উপাংশ = (**a** ভেক্টরের ওপর **b** এর অভিক্ষেপ).(**a** ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর)

এখানে, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 10 - 3 - 4 = 3$

এবং $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38}$

$\therefore$ **a** ভেক্টরের ওপর **b** এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{3}{3} = 1$

a ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপাংশ = (অভিক্ষেপ). $\hat{a} = 1.\hat{a} = \dfrac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

উদাহরণ-9. $\mathbf{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\mathbf{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৫]

সমাধান : $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-4-1) + \hat{k}(6+1) = -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\therefore \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \hat{i}(7+10) - \hat{j}(21-2) + \hat{k}(15+1) = 17\hat{i} - 19\hat{j} + 16\hat{k}$$

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-10. A, B, C, D বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$, $4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$, $7\hat{i}+9\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $4\hat{i}+6\hat{j}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ সমান্তরাল।

সমাধান: $\overrightarrow{AB}=(4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})-(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{CD}=(4\hat{i}+6\hat{j})-(7\hat{i}+9\hat{j}+3\hat{k})=-3\hat{i}-3\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$ হয়।

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -3 & -3 & -3\end{vmatrix}=\hat{i}(-3+3)-\hat{j}(-3+3)+\hat{k}(-3+3)=\mathbf{0}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল।

উদাহরণ-11. ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে থাকে। [চুয়েট ০৭-০৮; ঢা.বি. ১০-১১; ঢা: বো: ১০; য: বো: ০৮; কু: বো: ১২; চ: বো: ০৬; সি: বো: ১১; ব: বো: ০৬; দি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১২]

সমাধান : মনে করি, $\mathbf{A}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\mathbf{B}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\mathbf{C}=\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$

A, B, C ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে, $\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -3 & a\end{vmatrix}=0$ হবে।

বা, $2(-2a+12)-1(3a-4)-1(-9+2)=0$

বা, $-4a+24-3a+4+7=0$

বা, $-7a+35=0 \quad \therefore \quad a=5$

উদাহরণ-12. $\mathbf{a}=3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\mathbf{b}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির ওপর লম্ব এরূপ একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৫]

সমাধান: **a** ও **b** উভয় ভেক্টরের ওপর লম্ব একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -6\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=\hat{i}(2-18)-\hat{j}(3+24)+\hat{k}(-9-8)=-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}$$

$\therefore |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(-16)^2+(-27)^2+(-17)^2}=\sqrt{256+729+289}=\sqrt{1274}$

সুতরাং নির্ণেয় লম্ব একক ভেক্টর $=\pm\left(\dfrac{-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}}{\sqrt{1274}}\right)=\pm\dfrac{1}{7\sqrt{26}}(-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k})$

কাজ: $\mathbf{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\mathbf{B}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে

(i) **A** ও **B** উভয় ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(ii) **A** ও **B** এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) **A** ও **B** এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(iv) **A** ও **B** ভেক্টরের ওপর বা সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(v) **A** এর ওপর **B** এবং **B** এর ওপর **A** ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

(vi) **A** বরাবর **B** এবং **B** বরাবর **A** ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

পাঠ-৯

অনুশীলনী-2(B)

1. (i) $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে, $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}|, |\mathbf{A} + \mathbf{B}|, |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ এবং $|\mathbf{A} - 2\mathbf{B}|$ নির্ণয় কর।
   (ii) $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\mathbf{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{c} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরত্রয়ের লব্ধি ভেক্টর ও তার মান নির্ণয় কর।
   (iii) মূলবিন্দু O সাপেক্ষে $A(2, -1, 7)$, $B(-4, 5, 0)$ হলে $\overrightarrow{AB}$ নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৯, ০৫]
2. (i) যদি $A(1, 1, 4)$ আদি বিন্দু এবং $B(3, 4, -2)$ প্রান্তবিন্দু হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর এবং তার মান নির্ণয় কর।
   (ii) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(1, -1, 1)$ বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর লিখ এবং $|\overrightarrow{AB}|$ ও $|\overrightarrow{AC}|$ নির্ণয় কর।
3. (i) $P(1, 1, 1)$ এবং $Q(3, 2, -1)$ বিন্দু দুইটির সাহায্যে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর এবং এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৩-০৪]
   (ii) $\mathbf{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = -\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ হলে, **A** ও **B** ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৩; ব:বো: ০৪]
   (iii) $\mathbf{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে, **A** ও **B** এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর বের কর। [ঢা: বো: ১৪, ১২; রা: বো: ১৪; দি: বো: ১৩; চ: বো: ১৬, ১৪; ব: বো: ১০; য: বো: ১৩, ১১; মাদ্রাসা বো: ০৯, ১২]
   (iv) $2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৯, ০৫]
   (v) $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে **A** ও **B** এর লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি: বো: ১১]
4. (i) $\mathbf{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে, $(\mathbf{a}.\mathbf{b}) + (\mathbf{b}.\mathbf{c}) + (\mathbf{c}.\mathbf{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৩; য: বো: ০৯]
   (ii) $\mathbf{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ নির্ণয় কর।
5. (i) দেখাও যে, $\mathbf{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [বুয়েট ১০-১১, ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৩; ব: বো: ০৮]
   (ii) দেখাও যে, $\mathbf{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [বুয়েট ০৫-০৬; কু: বো: ০৭; চ: বো: ০৫; রা: বো: ০৭; য: বো: ১২; সি: বো: ০৪; ব: বো: ০৫]
   (iii) $\mathbf{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ এবং $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। [বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৫, ০৮; কু: বো: ১৬; চ: বো: ১৪, ১২; সি: বো: ১৬; ব: বো: ১২; দি: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১৪]
6. (i) যদি $2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$ ও $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হয়, তবে λ এর মান নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৩; সি: বো: ০৬; ব: বো: ০৯]
   (ii) a এর মান কত হলে, $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে। [রা: বো: ০৫; কু: বো: ০৫; ব: বো: ০৪]
   (iii) যে শর্তে $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ভেক্টরটি (ক) x অক্ষ; (খ) y-অক্ষ এবং (গ) z-অক্ষের ওপর লম্ব তা নির্ণয় কর।
7. (i) দেখাও যে, $\mathbf{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\mathbf{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। [বুয়েট ০৩-০৪; বুয়েট ০৪-০৫; ঢা: বো: ১৪, ০৪; রা: বো: ১৪, ০৭; ব: বো: ১৪, ১২; চ: বো: ১৫]
   (ii) দেখাও যে, $\mathbf{a} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{c} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ অবস্থান ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।
   (iii) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। [ঢা: বো: ১৩, ০৫; কু: বো: ১৪; চ: বো: ১৩, ১০; সি: বো: ১০]

Scanned with CamScanner

8. (i) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৫]

(ii) $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} + 11\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১৩-১৪; চুয়েট ১১-১২; ঢা: বো: ১২; রা: বো: ১৬; দি: বো: ১০, ০৯; য: বো: ০৩; সি: বো: ১০; কু: বো: ০৯; ব: বো: ০৬]

(iii) $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, A ও B এর অন্তর্গত কোণ কত? [চ: বো: ১০, ০৮; সি: বো: ০৬]

(iv) $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০২-০৩; ঢা: বো: ০৩; রা: বো: ১১, ০৪; য: বো: ১৩, ০৭; কু: বো: ০৬; সি: বো: ১৪, ০৮; ব: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১১]

(v) যদি $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\mathbf{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হয়, তবে $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ এবং $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ এর অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৩; য: বো: ০৪; ব: বো: ০৬]

(vi) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১১; কু: বো: ১০; চ: বো: ১৩, ১১; য: বো: ১০; রা: বো: ১৩, ১০; দি: বো: ১৬, ১৩; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১৫, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১০]

(vii) দেখাও যে, $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত। [বুটেক্স ০৫-০৬]

(viii) $\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৮]

9. (i) $\mathbf{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ হলে, A ভেক্টরের ওপর B ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৬; ব: বো: ০৪]

(ii) $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ হলে, b ভেক্টরের ওপর a ভেক্টরের অভিক্ষেপ কত? [বিআইটি ৯৮-৯৯; কু: বো: ১৪; য: বো: ০৬; ব: বো: ১৫]

(iii) $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের ওপর $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৯-১০, ০০-০১; কুয়েট ০৫-০৬; চ: বো: ০৫; রা: বো: ১৩, ০৭, ০৪; কু: বো: ১১, ০৮; য: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১১]

10. (i) $\mathbf{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১০; রা: বো: ১৩, ০৫; সি: বো: ১১, ০৭, ১২; ব: বো: ০৯]

(ii) $\mathbf{a} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরের দিকে $\mathbf{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর। আবার, b বরাবর a এর অংশক নির্ণয় কর।

(iii) $\mathbf{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এর দিক বরাবর $\mathbf{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৫; দি: বো: ১২]

11. (i) (2, 3, 1) এবং (1, 1, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) (4, 1, −2) বিন্দুগামী এবং (3, 2, 1) ও (5, 3, −4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $\mathbf{F} = 7\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ নিউটন বলের ক্রিয়ার ফলে একটি বস্তু (2, 4, −1) অবস্থান থেকে (4, 6, −3) বিন্দুতে সরে যায়। কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

13. দেখাও যে, (2, 3, 4) এবং (5, 7, −6) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $r = (2 + 3t)\hat{i} + (3 + 4t)\hat{j} + (4 - 10t)\hat{k}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার। বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার কার্তেসীয় সমীকরণও নির্ণয় কর।

14. (i) $\mathbf{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ নির্ণয় কর।

(ii) $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ নির্ণয় কর।

(iii) $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ধরে মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৪]

15. (i) কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ দ্বারা সূচিত হলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ii) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার শীর্ষ বিন্দুগুলো $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

(iii) কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ দ্বারা সূচিত হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

16. (i) $A(5, 2, -3)$, $B(-3, -2, 1)$, $C(3, -2, 11)$ এবং $D(-1, -4, 13)$ হলে, ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান্তরাল।

(ii) a এর মান কত হলে, $\mathbf{P} = 2\hat{i} + a\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k}$ পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

17. (i) দেখাও যে, $\mathbf{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\mathbf{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

(ii) $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $4\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে λ এর মান নির্ণয় কর।

18. (i) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির ওপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।
[বুয়েট ১১-১২, ১২-১৩; চুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৮; চ: বো: ১০, ০৫; কু: বো: ১১, ০৮; সি: বো: ১০]

(ii) দুইটি ভেক্টর $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের ওপর একটি একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৯, ০৬; রা: বো: ১০; সি: বো: ১৩; দি: বো: ১৫, ১২; য: বো: ১৬; ব: বো: ১৬, ১৩]

(iii) এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির ওপর লম্ব।
[বিআইটি ০২-০৩; য: বো: ১০]

(iv) একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা সৃষ্ট সমতলের উপর লম্ব।
[কু: বো: ১৩; সি: বো: ১৫]

19. প্রমাণ কর যে, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A}.\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2$

20. যে সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর বাহুগুলি $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ তার আয়তন নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) $\sqrt{29}, \sqrt{11}, \sqrt{38}, \sqrt{42}$ এবং $\sqrt{77}$ (ii) $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}, 3$ (iii) $-6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}$

2. (i) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}, 7$ (ii) $\mathbf{A} = \hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{B} = -\hat{i} + 3\hat{j}$, $\mathbf{C} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, 3, \sqrt{6}$

3. (i) $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ (ii) $\frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$ (iii) $\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$ (iv) $\frac{1}{15}(2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$;
(v) $\frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$; **4.** (i) 1 (ii) 26; **6.** (i) $\lambda = \frac{5}{2}$ (ii) $a = 3$ (iii) $a = 0, b = 0, c = 0$

8. (i) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)$; (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{13}{45}\right)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\frac{13}{2\sqrt{91}}\right)$ (v) $\cos^{-1}\left(\frac{31}{50}\right)$
(vi) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right), \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (viii) $90°, \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

9. (i) $\frac{8}{3}$ (ii) $-\frac{9}{\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{8}{7}$; **10.** (i) $\frac{13}{225}(2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$
(ii) $-\frac{17}{121}(7\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}), \frac{-17}{9}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ (iii) $\left(\frac{-4}{9}\right)(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

11. (i) $(2 - t)\hat{i} + (3 - 2t)\hat{j} + (1 + 2t)\hat{k}$ (ii) $(4 + 2t)\hat{i} + (1 + t)\hat{j} - (2 + 5t)\hat{k}$ **12.** 2 জুল

13. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-10}$; **14.** (i) $15\hat{i} + 15\hat{j} - 15\hat{k}$ (ii) $-20\hat{i} - 6\hat{j} - 22\hat{k}$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}}\right)$

15. (i) $5\sqrt{3}$ বর্গ একক (ii) $\frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গ একক (iii) 15.59 বর্গ একক; **16.** (ii) $a = -1$; **17.** (ii) $\frac{3}{5}$

18. (i) $\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$ (ii) $\pm\frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$
(iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ (iv) $\pm\frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ **20.** 7 ঘন একক।

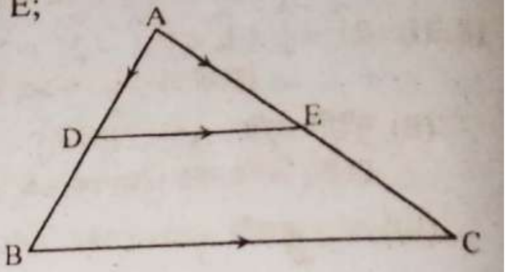
Scanned with CamScanner

পাঠ-১০

2.20 দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ (Application of vectors to solve the two dimensional geometrical problems)

উদাহরণ-1. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর অর্ধেক ও সমান্তরাল। [ঢা: বো: ১৫; কু: বো: ১৫, ১৪; য: বো: ১২; দি: বো: ১২; সি: বো: ১৪, ১১; ব: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

সমাধান: মনে করি, ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্য বিন্দু যথাক্রমে D ও E;



প্রমাণ করতে হবে, $DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DE \parallel BC$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি]

$= 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD}$ [$\because AC = 2AE$ এবং $AB = 2AD$] ... ... (i)

$= 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{DE}$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2} BC$

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ হওয়ায় $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে।

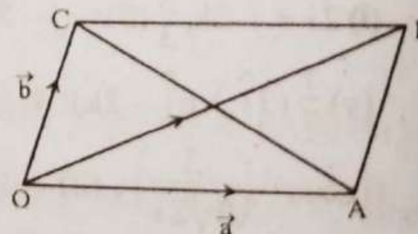
যেহেতু এক্ষেত্রে ধারক রেখাদ্বয় একই নয়, কাজেই সমান্তরাল।

অতএব, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$

উদাহরণ-2. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[ঢা: বো: ১১; রা: বো: ১২; দি: বো: ১৩, ০৯; য: বো: ১৫, ১৪; চ: বো: ১৪; সি: বো: ১৪; ব: বো: ১৩, ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

সমাধান: মনে করি, OABC সামান্তরিকে O ভেক্টর মূলবিন্দু এবং A ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** ও **b**.



অর্থাৎ $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$

$\therefore \overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

$\therefore$ B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

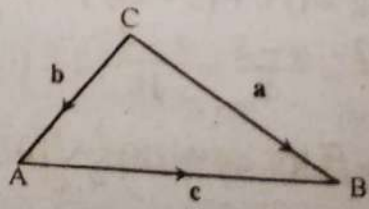
এখন, কর্ণ OB এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{0 + \mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$

এবং কর্ণ AC এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$

$\therefore$ OB ও AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই। অর্থাৎ, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণ-3. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

সমাধান: মনে করি, ΔABC এ $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$



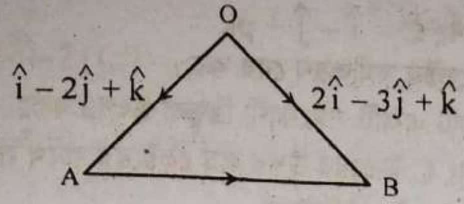
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

তাহলে $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

$\therefore (\overrightarrow{AB})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}).(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a}.\mathbf{b}$

বা, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ বা, $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

উদাহরণ-4.

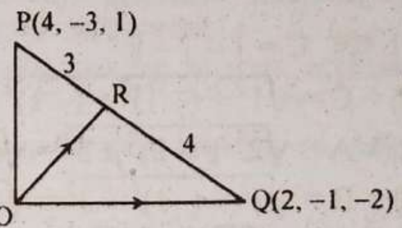


ক. P(4, –3, 1), Q(2, –1, –2) এর সংযোগ রেখাকে R বিন্দু 3 ঃ 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে $\overrightarrow{OR}$ নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সাথে x অক্ষের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ক. মনেকরি, R বিন্দুর স্থানাংক (x, y, z)



$$\therefore\ x = \frac{3 \times 2 + 4 \times 4}{3+4} = \frac{6+16}{7} = \frac{22}{7}$$

$$y = \frac{3 \times (-1) + 4 \times (-3)}{3+4} = \frac{-3-12}{7} = -\frac{15}{7}$$

$$z = \frac{3 \times (-2) + 4 \times 1}{3+4} = \frac{-6+4}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OR} = \frac{22}{7}\hat{i} - \frac{15}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}\ \textbf{(Ans.)}$$

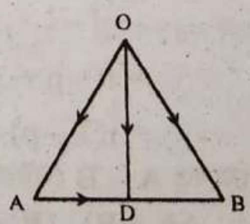
খ. $$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2+3) - \hat{j}(1-2) + \hat{k}(-3+4) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ. মনে করি, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু D।



এখন, চিত্র হতে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$= (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \hat{i} - \hat{j}$$

এবং $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + \frac{1}{2}(\hat{i} - \hat{j}) = \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{5}{2}\hat{j} + \hat{k}$

এখন, ধরি, x-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\vec{C} = \hat{i}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OD}$ এবং x-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OD}\,.\,\vec{C}}{|\overrightarrow{OD}|\,|\vec{C}|} = \frac{\left(\frac{3}{2}\hat{i} - \frac{5}{2}\hat{j} + \hat{k}\right).\,\hat{i}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2}\,.\,1} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 1}} = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right)\ \textbf{(Ans.)}$$

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-5. $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\mathbf{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{C} = \hat{i} - \hat{j} + p\hat{k}$

ক. **A** বিন্দুগামী **B** ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ বের কর। ২

খ. $p = -1$ হলে দেখাও যে, উদ্দীপকের ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ৪

গ. p এর কোন মানের জন্য **A − B** ভেক্টরটি **B** এবং **C** উভয়ের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব হবে। ৪

সমাধান: ক. **A** বিন্দুগামী **B** ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\mathbf{R} = \mathbf{A} + t\mathbf{B}$, যেখানে t ধ্রুবক

$$= (2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$
$$= 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + 2t\hat{i} - t\hat{j} + 3t\hat{k}$$
$$= (2 + 2t)\hat{i} - (2 + t)\hat{j} + (3 + 3t)\hat{k} \text{ (Ans.)}$$

খ. $p = -1$ হলে, $\mathbf{C} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

$$\therefore |\mathbf{C}| = C = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$
$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$
$$|\mathbf{B}| = B = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$
$$\therefore B^2 + C^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{3})^2 = 14 + 3 = 17 = (\sqrt{17})^2 = A^2$$

আবার, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$

$$= 2 + 1 - 3 = 0$$

∴ **A, B, C** ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। (দেখানো হলো)

গ. **B** ও **C** ভেক্টরের দ্বারা গঠিত সমতলের উপর গঠিত লম্ব ভেক্টর,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & p \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & p \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(-p + 3) - \hat{j}(2p - 3) + \hat{k}(-2 + 1)$$
$$= \hat{i}(3 - p) - \hat{j}(2p - 3) + \hat{k}(-1)$$

যেহেতু **A − B** ভেক্টরটি **B** এবং **C** উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব

$$\therefore (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$$
$$\therefore \mathbf{A} - \mathbf{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} - (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$
$$= 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$
$$= -\hat{j}$$
$$\therefore (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$$

বা, $(-j) \cdot \{\hat{i}(3 - p) - \hat{j}(2p - 3) - \hat{k}\} = 0$

বা, $2p - 3 = 0$

বা, $p = \frac{3}{2}$

∴ নির্ণেয় মান $p = \frac{3}{2}$

পাঠ-১১ ও ১২

অনুশীলনী-2(C)

1. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,
   (i) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ সমান অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি।
   (ii) ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। [ঢা: বো: ১৪, ১১, ০৮; রা: বো: ০৬, ০৪, ১২; চ: বো: ০৭, ১২; দি: বো: ১৬, ১৪; কু: বো: ১৬, ১৪, ১০, ০৮, ১২; সি: বো: ০৬; য: বো: ১৬, ১০, ০৩; ব: বো: ১৪, ১০, ০৬; মাদ্রাসা বো: ০৯, ১২]
   (iii) ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু। [ঢা: বো: ১৪; চ: বো: ১৪]
   (iv) ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।
   (v) ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পরের সমবিন্দু এবং তাদের ছেদবিন্দুতে মধ্যমা 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। [রা: বো: ০৪; য: বো: ০৫; চ: বো: ০৫; সি: বো: ০৩]
   (vi) কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে উৎপন্ন চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে। [য: বো: ০৪]
   (vii) সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি তার বাহু চারটির বর্গের সমষ্টির সমান।
   (viii) ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।
   (ix) ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।
   (x) রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [ঢা: বো: ১০; রা: বো: ১৩, ০৯; কু: বো: ১৩; চ: বো: ০৪; সি: বো: ১৩, ০৭; ব: বো: ১৬, ০৭; য: বো:; দি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩]
   (xi) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [ঢা: বো: ১৬, ১৩; রা: বো: ১০; দি: বো: ১৫; কু: বো: ১১; চ: বো: ১৩; সি: বো: ১৬, ১২]
   (xii) রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে এটি একটি বর্গ।
2. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC তে
   (i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$
   (iv) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ [চ: বো: , কু: বো: ১১; রা: বো: ০৩]
   অথবা, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ [রা: বো: ১০; চ: বো: ১৩; কু: বো: ০৯; সি: বো: ০৮; য: বো: ০৫]
   (v) $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
   (vi) $a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$ (vii) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ [চ: বো: ০৭; সি: বো: ০৫]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. A ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে $\hat{a} =$ কত?
   ক. $\dfrac{A}{|\mathbf{A}|}$ খ. A গ. $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ ঘ. 1
2. $-10\hat{i} + \hat{j}$ বরাবর একক ভেক্টর নিচের কোনটি?
   ক. $\dfrac{1}{\sqrt{101}}(-10\hat{i}+\hat{j})$ খ. $\dfrac{1}{\sqrt{101}}(10\hat{i}-\hat{j})$
   গ. $\sqrt{101}(-10\hat{i}+\hat{j})$ ঘ. $\sqrt{101}(10\hat{i}-\hat{j})$
3. $a\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{4}\hat{k}$ ভেক্টরটি একক ভেক্টর হলে, a এর মান কত?
   ক. $\pm\dfrac{5}{6}$ খ. $\pm\dfrac{4}{3}$ গ. $\pm\dfrac{\sqrt{23}}{6}$ ঘ. $\pm\dfrac{\sqrt{11}}{4}$
4. $\mathbf{P} = a\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $|\mathbf{P}| = \sqrt{13}$ হলে a এর মান কত?
   ক. −3 খ. $\sqrt{13}$ গ. 4 ঘ. 0

Scanned with CamScanner

5. $A = 5\hat{i}, B = 10\hat{j}$ হলে, $A.B$ = কত?
ক. -50 খ. 0 গ. 50 ঘ. 100

6. $a = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $b = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে $a.b$ = কত?
ক. -4 খ. 0 গ. 2 ঘ. 4

7. λ এর কোন মানের জন্য $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $3\hat{i} - \lambda\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব?
ক. $\frac{-5}{2}$ খ. $\frac{-13}{2}$ গ. 0 ঘ. 2

8. $F = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ বলের ক্রিয়ার দ্বারা সরণ $S = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে কাজের পরিমাণ কত?
ক. 23 খ. 24 গ. 25 ঘ. 26

9. P বিন্দুর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক $(-3, 2, -5)$ হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নিচের কোনটি?
ক. $3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ খ. $-3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ গ. $-3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ঘ. $-3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

10. $A = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $B = \hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ নিচের কোনটি?
ক. $\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$ খ. $-\hat{i} - 2\hat{j} - 10\hat{k}$ গ. $-\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$ ঘ. $-\hat{i} + 10\hat{j} - 2\hat{k}$

11. $P(2, 4, 4)$ এবং $Q(-3, 2, 2)$ দুইটি বিন্দু হলে $\overrightarrow{PQ}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর কোনটি?
ক. $\frac{1}{\sqrt{33}}(5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ খ. $\frac{-1}{\sqrt{33}}(5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$
গ. $\frac{1}{\sqrt{33}}(5\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ ঘ. $\frac{-1}{\sqrt{33}}(5\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

12. $P = 6\hat{i}$ এবং $Q = -7\hat{i}$ হলে, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রি?
ক. 0 খ. 90 গ. 120 ঘ. 180

13. $a = -2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $b = -4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত?
ক. $0°$ খ. $30°$ গ. $90°$ ঘ. $180°$

14. $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি x-অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?
ক. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)$ খ. $\cos^{-1}\left(\frac{-6}{7}\right)$ গ. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$ ঘ. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{7}\right)$

15. $A = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $B = 7\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে $(A \times A).(A \times B).(B \times B)$ = কত?
ক. 0 খ. 45 গ. 24 ঘ. 5

16. $P(2, -3, 5)$ বিন্দুর চতুর্দিকে $F = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ বলের ভ্রামক কোনটি?
ক. $\sqrt{481}$ খ. $\sqrt{482}$ গ. $\sqrt{483}$ ঘ. $\sqrt{485}$

17. কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় $P = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $Q = 3\hat{k}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
ক. $\sqrt{13}$ খ. $\sqrt{14}$ গ. $\sqrt{117}$ ঘ. 13

18. $(\hat{j} \times \hat{k}).\hat{i}$ = কত?
ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. $\hat{i}$

19. $A(3, 1, 0)$ এবং $B(2, 1, 2)$ বিন্দুর মধ্যবিন্দু O হলে AO এর দূরত্ব কত?
ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ গ. $\sqrt{5}$ ঘ. 5

20. $(3, 2, 1)$ এবং $(4, 1, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নিচের কোনটি?
ক. $(3 + t)\hat{i} + (2 - t)\hat{j} + (1 - 3t)\hat{k}$ খ. $(3 + 4t)\hat{i} + (2 + t)\hat{j} + (1 - 2t)\hat{k}$
গ. $(3 - 4t)\hat{i} + (2 - t)\hat{j} + (1 + 2t)\hat{k}$ ঘ. $(4 - 3t)\hat{i} + (1 - 2t)\hat{j} + (-2 - t)\hat{k}$

Scanned with CamScanner

21. **a** ও **b** বিপরীত ভেক্টর হলে —
i. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ii. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ iii. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. P(1, 2, 3) এবং Q(4, –3, 1) দুইটি বিন্দু হলে —
i. P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ii. Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$
iii. P ও Q বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $(1 + 3t)\hat{i} + (2 - 5t)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ হলে —
i. $\hat{i} \times \hat{i} = 0$ ii. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ iii. $\hat{j}.\hat{k} = 0.$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $5\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$ একটি ভেক্টর হলে —
i. x অক্ষের ওপর অভিক্ষেপ 5 ii. z অক্ষ বরাবর উপাংশ $-2\hat{k}$
iii. ভেক্টরটির দিকে একক ভেক্টর $\frac{1}{\sqrt{78}}(5\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k})$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. $\mathbf{A} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$ হলে —
i. **A** একটি একক ভেক্টর ii. $|\mathbf{A} \times \hat{k}| = 10$ iii. $\mathbf{A}.\hat{j} = 6$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

26. $\mathbf{P} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে —
i. $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ ii. $\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}$ iii. $|\mathbf{P}| = \sqrt{118}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

27. $\mathbf{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে —
i. **A** ভেক্টরের মান $\sqrt{3}$ ii. **A** ভেক্টরের ওপর **B** ভেক্টরের অভিক্ষেপ $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 1)$
iii. **A** ভেক্টরের ওপর **B** ভেক্টরের অংশক $\sqrt{3}\hat{i}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

28. P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (1, 2, 4) হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর —
i. $\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ii. এর মান $\sqrt{21}$ iii. বরাবর একক ভেক্টর $\frac{1}{\sqrt{21}}(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. **A** এবং **B** দুইটি ভেক্টর হলে —
i. $\mathbf{A}.\mathbf{B} = AB\cos\theta$ ii. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta$ iii. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{B} \times \mathbf{A}|$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

Scanned with CamScanner

নিচের তথ্যের আলোকে (30 ও 31) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\mathbf{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

30. **A.B** এর মান কত?

ক. $1 - \sqrt{3}$ খ. $\sqrt{3}$ গ. $1 + \sqrt{3}$ ঘ. 3

31. **B** ভেক্টরের উপর **A** ভেক্টরের অভিক্ষেপ কত?

ক. $4(1 + \sqrt{3})$ খ. $4(1 - \sqrt{3})$ গ. $\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})$ ঘ. $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (32 ও 33) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\mathbf{A} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$, $\mathbf{B} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ তিনটি ভেক্টর।

32. $|\mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{C}|$ এর মান কত?

ক. $\sqrt{59}$ খ. $\sqrt{93}$ গ. 0 ঘ. $\sqrt{13}$

33. **C** ভেক্টরটি y-অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

ক. $\frac{2}{\sqrt{6}}$ খ. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ গ. $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ ঘ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

নিচের তথ্যের আলোকে (34 ও 35) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

A ও B বিন্দুর অবস্থান যথাক্রমে (3, –2, 1) ও (–1,1,1)।

34. $\overrightarrow{AB}$ নিচের কোনটি হবে?

ক. $-4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ খ. $-4\hat{i} + 3\hat{j}$ গ. $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ঘ. $4\hat{i} - 3\hat{j}$

35. $|\overrightarrow{AB}|$ = কত?

ক. 5 খ. $\sqrt{29}$ গ. 25 ঘ. 29

নিচের তথ্যের আলোকে (36 ও 37) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

36. **A.B** = কত?

ক. –4 খ. 4 গ. 12 ঘ. 18

37. **A** ও **B** এর অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?

ক. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{25}\right)$ খ. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$ গ. 45° ঘ. 90°

নিচের তথ্যের আলোকে (38 ও 39) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\mathbf{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\mathbf{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$ ভেক্টর দুইটি কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে।

38. নিচের কোন ভেক্টরটি সামান্তরিকের কর্ণ নির্দেশ করবে?

ক. $8\hat{j}$ খ. $4\hat{i} + 8\hat{j}$ গ. $-4\hat{i} + 8\hat{j}$ ঘ. $-4\hat{i} + 2\hat{j}$

39. কর্ণের সমান্তরাল একক ভেক্টর নিচের কোনটি?

ক. $-\hat{i}$ খ. $\hat{j}$ গ. $\hat{k}$ ঘ. $8\hat{j}$

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

40. $\mathbf{P} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\mathbf{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ কত? *[DU. 16-17]*

ক. $\frac{5}{\sqrt{38}}$ খ. $\frac{3}{\sqrt{38}}$ গ. $\frac{2}{\sqrt{38}}$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt{38}}$

41. $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? *[DU.15-16]*

ক. $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ খ. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ গ. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$ ঘ. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$

42. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে D, E ও F হলে নিচের কোনটি সঠিক? *[DU.14-15]*

ক. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ খ. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}$ গ. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ঘ. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$

Scanned with CamScanner

43. a এর মান কত হলে $\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টরটি একটি একক ভেক্টর হবে? *[DU.14-15]*

ক. $\pm\frac{2}{3}$ খ. $\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$ গ. $\pm\frac{7}{6}$ ঘ. $\pm\frac{\sqrt{23}}{6}$

44. যদি $\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} + \hat{j}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ হয় তবে AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? *[DU. 11-12]*

ক. $2\sqrt{6}$ খ. $4\sqrt{6}$ গ. $5\sqrt{6}$ ঘ. $6\sqrt{6}$

45. 'a' এর কোন মানের জন্য $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়? *[DU. 10-11]*

ক. 5 খ. 4 গ. 2 ঘ. –2

46. $\mathbf{A} = 8\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ হলে **B** ভেক্টরের ওপর **A** ভেক্টরের অভিক্ষেপ কোনটি? *[BUET. 12-13]*

ক. $\frac{30\sqrt{2}}{10}$ খ. $\frac{35}{10\sqrt{2}}$ গ. $\frac{30}{10\sqrt{2}}$ ঘ. $\frac{35\sqrt{2}}{10}$

47. $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে **a + b** এবং **a – b** এর মধ্যবর্তী কোণের মান কত? *[BUET. 11-12, 07-08]*

ক. 30° খ. 45° গ. 90° ঘ. 120°

48. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর কোনটি? *[BUET. 10-11]*

ক. $4\hat{i} - 3\hat{k}$ খ. $\frac{1}{5}(4\hat{i} - 3\hat{k})$ গ. $\frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$ ঘ. $\hat{j}$

49. $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ সামান্তরিকের দুইটি বাহু হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত? *[BUET. 09-10]*

ক. $\sqrt{279}$ বর্গ একক খ. $\sqrt{289}$ বর্গ একক গ. $\sqrt{299}$ বর্গ একক ঘ. কোনটিই নয়

50. $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = \hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি? *[KUET.10-11]*

ক. $\cos^{-1}\frac{19}{\sqrt{27}}$ খ. $\cos^{-1}\frac{19}{3\sqrt{87}}$ গ. $\cos^{-1}\frac{19}{27}$ ঘ. $\cos^{-1}\frac{19}{29}$

51. $\mathbf{A} = \sqrt{2}\cos\alpha\,\hat{i} - \sqrt{2}\sin\alpha\,\hat{j}$, $\mathbf{B} = -\sqrt{2}\cos\alpha\,\hat{j} + \sqrt{2}\sin\alpha\,\hat{k}$ হলে **A** ও **B** এর অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি? *[RUET.12-13]*

ক. $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ খ. $\frac{\pi}{2} - \alpha$ গ. $\cos^{-1}(\sin\alpha + \cos\alpha)$ ঘ. $\cos^{-1}(\sin\alpha\cos\alpha)$

52. একটি কণার উপর $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ মানের দুইটি ধ্রুব বল কাজ করার ফলে কণাটির $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দু থেকে $5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ বিন্দুতে সরণ হলে সম্পন্ন কাজের পরিমাণ কত? *[RUET.09-10]*

ক. 15 খ. 23 গ. 30 ঘ. 48

53. $2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান কোনটি? *[RUET.09-10]*

ক. $\frac{3}{2}$ খ. $\frac{2}{3}$ গ. $\frac{5}{2}$ ঘ. $\frac{2}{5}$

54. a, b ও c এর মান কত হলে $\hat{v} = (x + y + az)\hat{i} + (bx + 3y - z)\hat{j} + (3x + cy + z)\hat{k}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে? *[CUET. 15-16]*

ক. (3, 1, 1) খ. (3, –1, –1) গ. (– 3, 1, –1) ঘ. (3, 1, –1)

55. $\mathbf{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি? *[CUET.10-11]*

ক. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ খ. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ গ. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ঘ. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Scanned with CamScanner

56. দুইটি ভেক্টর $\mathbf{p} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{q} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর কোনটি? *[CUET. 10-11]*

ক. $\frac{1}{\sqrt{134}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k})$ খ. $\frac{1}{\sqrt{19}}(3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$

গ. $\frac{1}{\sqrt{51}}(\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k})$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt{230}}(10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k})$

57. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ হলে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} =$ কত? *[BUTEX. 15-16]*

ক. $3\overrightarrow{AD}$ খ. $2\overrightarrow{AD}$ গ. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ ঘ. কোনোটিই নয়

58. A এর দিক বরাবর B ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি? *[BUTEX.11-12]*

ক. $|\mathbf{A}|\cos\theta$ খ. $|\mathbf{B}|\cos\theta$ গ. $|\mathbf{B}|\sin\theta$ ঘ. $|\mathbf{A}|\sin\theta$

59. λ এর কোন মানের জন্য $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে? *[CU. 14-15]*

ক. -2 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

60. $5\hat{i}$ ভেক্টরের উপর $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ কোনটি? *[Ch. U. 14-15]*

ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

61. $\mathbf{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত? *[Ch. U. 10-11]*

ক. 45° খ. 90° গ. 135° ঘ. 180°

62. $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের কোসাইনের মান কোনটি? *[RU. 10-11]*

ক. $\frac{32}{5}$ খ. $\frac{3}{4}$ গ. $\frac{2}{3}$ ঘ. $\frac{1}{3}$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. একটি বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $A(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$, বস্তুটির উপর $\mathbf{F} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ বল প্রয়োগ করায় বস্তুটির অবস্থান পরিবর্তন হয়। B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(3\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k})$ এবং $(5\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$.

ক. $|\mathbf{A} + \mathbf{C}|$ নির্ণয় কর।

খ. $\overrightarrow{AB}$ বরাবর বস্তুটির সরণ (বা এর লম্ব অভিক্ষেপ) না থাকলে z নির্ণয় কর।

গ. C বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামকের মান নির্ণয় কর।

2. জেনারেটরে ব্যবহৃত একটি সামান্তরিক আকৃতির কুন্ডলীপাতের দুটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $\overrightarrow{QP} = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{QR} = 2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$. পাতটির নিকটে অবস্থিত একটি চুম্বকের চৌম্বকক্ষেত্র $\mathbf{B} = 4\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$.

ক. B বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

খ. সামান্তরিক পাতের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা B ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা সৃষ্ট সমতলের উপর লম্ব।

3. $\mathbf{F} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ মানের বল $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে কোনো একটি কণার উপর প্রয়োগ করায় কণাটির শেষ অবস্থান $(5, 1, 4)$ হলো।

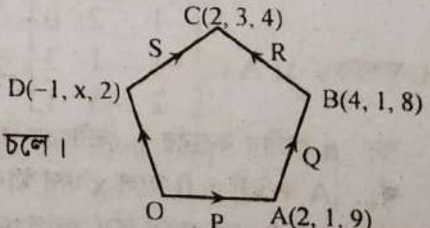
ক. প্রদত্ত দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. বলটি দ্বারা কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

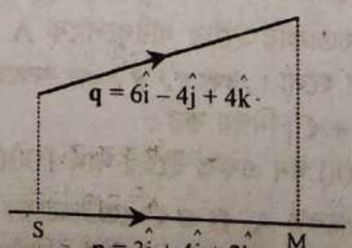
গ. ঘূর্ণন কেন্দ্র $(2, 3, 2)$ হলে বলের ভ্রামকের মান নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

4. PQRS সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাংক যথাক্রমে $P(1, 0, 2)$, $Q(2, -3, 3)$, $R(2, 1, 4)$, $S(1, 4, 3)$.
   ক. $A(-1, 2, 2)$ বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।
   খ. $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{QS}$ কে সামান্তরিকের কর্ণ ধরে ভেক্টর পদ্ধতিতে PQRS সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   গ. দেখাও যে, $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{RS}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\sin^{-1}\sqrt{\frac{6}{17}}$.
5. $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\mathbf{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি ঘনবস্তুর ধার নির্দেশ করে।
   ক. $|\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}|$ নির্ণয় কর।
   খ. ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।
   গ. ঘনবস্তুটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
6. $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -1, 8)$ ও $C(-4, 4, 6)$ বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং O মূলবিন্দু।
   ক. AB বাহুর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।
   খ. অক্ষত্রয়ের সাথে $\overrightarrow{OB}$ যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।
   গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ΔABC সমবাহু।
7. $\mathbf{P} = \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$; $\mathbf{Q} = \overrightarrow{OB} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ যেখানে O মূল বিন্দু।
   ক. $\mathbf{P}$ ভেক্টরের ওপর $\mathbf{Q}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ ও $(\mathbf{P} - \mathbf{Q})$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।
   গ. $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সাথে অক্ষত্রয়ের উৎপন্ন কোণগুলোর মধ্যে কোনটি বৃহত্তম নির্ণয় কর।
8. (i) মূল বিন্দু O এর সাপেক্ষে L ও M এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $5\hat{i} + \hat{j} + c\hat{k}$; c একটি ধ্রুবক। এমন একটি বিন্দু N নেয়া হলো, যাতে OLMN একটি আয়তক্ষেত্র হয়।
   (ii) আটলান্টিক মহাসাগরে দুইটি সাবমেরিন সরলরেখা বরাবর চলছে। মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে তাদের গতিপথের ভেক্টর সমীকরণ যথাক্রমে–
   $\mathbf{r}_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ এবং $\mathbf{r}_2 = 9\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \mu(4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$
   ক. দেখাও যে, সাবমেরিন দুইটির গতিপথ পরস্পর লম্ব।
   খ. সাবমেরিনদ্বয়ের গতিপথের ছেদবিন্দু A এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।
   গ. N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।
9. $\mathbf{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\mathbf{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ও $\mathbf{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর।
   ক. $A(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $\mathbf{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।
   খ. $\mathbf{c}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ এর লব্ধির অংশক নির্ণয় কর।
   গ. দেখাও যে, $\mathbf{b}$ ও $\mathbf{c}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\sin^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$।



10. ক. $x\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k}$ একক ভেক্টর হলে x এর মান নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, P, Q, R ভেক্টরত্রয় ভেক্টর যোগের সহযোজন সূত্র মেনে চলে।
   গ. x এর ধনাত্মক মানের জন্য $\overrightarrow{OD}$ এর মান 9 হলে $\overrightarrow{OD}$ এবং $3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।



11. ক. মূলবিন্দু 'O' সাপেক্ষে $A(2, -1, 7)$ ও $B(-4, 5, 0)$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর।
   খ. SM এর মান নির্ণয় কর।
   গ. $\mathbf{p}$ ও $\mathbf{q}$ উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

12. P(1, 3, 2), Q(2, −1, 3) ও R(−1, 2, 3) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং O

ক. $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}$ নির্ণয় কর।

খ. QR বাহুর ভেক্টর ও কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. $\mathbf{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \mu\hat{k}$, $\mathbf{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\mathbf{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর।

ক. **a** ও **b** পরস্পর লম্ব হলে μ এর মান নির্ণয় কর।

খ. μ-এর মান কত হলে, **a**, **b** ও **c** ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হবে।

গ. **b** ও **c** দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

14. $\mathbf{M} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\mathbf{N} = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$।

ক. **M** ও **N** এর লব্ধি ভেক্টরের মান নির্ণয় কর।

খ. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব।

গ. $\mathbf{P} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ হলে দেখাও যে, **M**, **N**, **P** একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

15. $\mathbf{P} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = a\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ দুইটি ভেক্টর।

ক. দুইটি ভেক্টরের ক্রস প্রোডাক্ট ব্যাখ্যা কর।

খ. **P** এবং **Q** ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে **Q** ভেক্টরটি x-অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

গ. $a = 4$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের ওপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

16. PQR ত্রিভুজের S, T এবং U যথাক্রমে QR, RP এবং PQ এর মধ্যবিন্দু।

ক. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ দুইটি অসমান্তরাল ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

খ. উদ্দীপক থেকে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$.

গ. দেখাও যে, $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{RU} = 0$

17. $Q = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & m & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ১ম, ২য় ও ৩য় সারি বরাবর ভুক্তিগুলোকে যথাক্রমে **A**, **B** ও **C** চিন্তা কর।

[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]

ক. D একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|D| = -7$ হলে, $|(2D)^{-1}| =$ কত?

খ. **A**, **B** ও **C** কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করলে এবং $m = \sqrt{61}$ হলে, ত্রিভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর।

গ. $m = 1$ এবং $Q\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$ হলে ক্রেমারের নিয়মে x, y ও z এর মান নির্ণয় কর।

18. দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ এবং $\mathbf{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ *[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. **a** ভেক্টর বরাবর **b** ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

খ. $|A + xI| = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

গ. **a** ও **b** এর ওপর লম্ব এরূপ একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

19. একটি আয়তাকার ইটের ধারগুলোকে $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = \hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{C} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ দ্বারা সূচিত করা হলো। *[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $|2\mathbf{A} + \mathbf{C}|$ নির্ণয় কর।

খ. 59000 ঘন একক ইটের দাম 10000 টাকা হলে প্রতিটি ইটের দাম কত?

গ. উদ্দীপকের **A**, **B** ও **C** ভেক্টরত্রয়ের $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর সহগকে যথাক্রমে কলাম বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটি E হলে $E^3 - 3E^2 - 5I$ এর মান নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

20. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3\\ 11\end{bmatrix}$ *[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. O মূলবিন্দু সাপেক্ষে A(1, –1, 3) ও B(–2, 3, 5) হলে, $\overrightarrow{AB}$ নির্ণয় কর।

খ. BX = C এর সমাধান বিন্দু এবং (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $A(\text{adj } A) = |A|I_3$.

21. A(3, –1, 2), B(1, –1, –3) ও C(4, –3, 2) বিন্দুত্রয় শূন্যে অবস্থান করে। *[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $H=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি কিনা যাচাই কর।

খ. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ কে কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. A, B ও C এর উপাদানসমূহকে ভিন্ন ভিন্ন সারি বরাবর সাজিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

22. $\mathbf{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}, \mathbf{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}, \mathbf{c} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ *[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $A=\begin{bmatrix}x^2-1 & -x+1\\ 1 & x\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রম হলে x এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ হলে **c** ও **d** এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ বরাবর $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

23. $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 2 & -3 & 2\\ -5 & 2 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}7\\ -1\\ -9\end{bmatrix}$ *[অধ্যায় ১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি কিনা যাচাই কর।

খ. $\mathbf{P} = a_{11}\hat{i} + a_{21}\hat{j} + a_{31}\hat{k}$ ও $\mathbf{Q} = a_{12}\hat{i} + a_{22}\hat{j} + a_{32}\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির ওপর লম্ব এরূপ একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. AX = B হলে নির্ণায়ক পদ্ধতিতে X^t নির্ণয় কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

24. $\mathbf{P} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}, \mathbf{Q} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$. *[রা. বো. ১৭]*

ক. **P** বিন্দুগামী এবং **Q** ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, **P – Q** ভেক্টরটি **P** এবং **Q** ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব।

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

25. $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}, \mathbf{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \mathbf{C} = \hat{i} + b\hat{j} + 3\hat{k}$. *[দি. বো. ১৭]*

ক. অবস্থান ভেক্টর বলতে কি বুঝ?

খ. **A** ভেক্টর বরাবর **B** ভেক্টরের উপাংশ **C** ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে b এর মান নির্ণয় কর।

গ. **A + B** এবং **A × B** ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

26. $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}; \mathbf{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক P(– 3, – 2, – 1); Q(4, 0, – 3) এবং S(6, – 7, 8)। *[সি. বো. ১৭]*

ক. উদাহরণসহ একক ভেক্টর এর সংজ্ঞা দাও।

খ. উদ্দীপকের আলোকে **A** বরাবর **B** এর উপাংশ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের আলোকে ΔPQS এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

Scanned with CamScanner

উত্তরমালা

বহুনির্বাচনি

1. গ; 2. ক; 3. ঘ; 4. ঘ; 5. খ; 6. খ; 7. ক; 8. ক; 9. খ; 10. গ; 11. খ; 12. ঘ; 13. গ; 14. গ; 15. ক; 16. গ; 17. গ; 18. গ; 19. খ; 20. ক; 21. খ; 22. ঘ; 23. ঘ; 24. ঘ; 25. খ; 26. খ; 27. ক; 28. ঘ; 29. খ; 30. গ; 31. ঘ; 32. ক; 33. খ; 34. খ; 35. ক; 36. খ; 37. খ; 38. ক; 39. খ; 40. খ; 41. গ; 42. খ; 43. ঘ; 44. গ; 45. ক; 46. ঘ; 47. গ; 48. খ; 49. গ; 50. খ; 51. ঘ; 52. ঘ; 53. গ; 54. ঘ; 55. ক; 56. ঘ; 57. ক; 58. খ; 59. গ; 60. খ; 61. ঘ; 62. গ;

সৃজনশীল

1. ক. $\sqrt{85}$; খ. 6; গ. $\sqrt{137}$; 2. ক. $\frac{1}{\sqrt{69}}(4\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k})$; খ. $\sqrt{74}$ বর্গ একক; গ. $\pm\frac{1}{17\sqrt{5}}(-33\hat{i}+16\hat{j}-10\hat{k})$

3. ক. $r=(2+3t)\hat{i}+(-1+2t)\hat{j}+(2+2t)\hat{k}$; খ. 4 একক; গ. $4\sqrt{5}$ একক;

4. ক. $(-1+t)\hat{i}+(2-3t)\hat{j}+(2+t)\hat{k}$; খ. $\sqrt{66}$ বর্গ একক

5. ক. $\sqrt{29}$; খ. 7 ঘন একক; গ. 60.84 বর্গ একক;

6. ক. $(1-2t)\hat{i}+(2-3t)\hat{j}+(3+5t)\hat{k}$.; খ. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{66}}\right)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{66}}\right)$ ও $\cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{66}}\right)$

7. ক. $\frac{31}{\sqrt{34}}$, গ. Y অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $116.57°$ বৃহত্তম

8. খ. $5\hat{i}-\hat{k}$; গ. $3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$; 9. ক. $(1+2t)\hat{i}+(2-t)\hat{j}+(3+t)\hat{k}$; খ. $\frac{7}{9}(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$

10. ক. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, গ. $\cos^{-1}\frac{4\sqrt{76}-7}{9\sqrt{29}}$, 11. ক. 11; খ. $\frac{10}{\sqrt{29}}$; গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{13}}(2\hat{i}-3\hat{k})$;

12. ক. 5; খ. $(2-3t)\hat{i}+(-1+3t)\hat{j}+3\hat{k}$, $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{0}$, গ. $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ বর্গ একক;

13. ক. -1; খ. -1; গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{174}}(2\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k})$; 14. ক. $\sqrt{69}$; খ. $\pm\frac{1}{7\sqrt{5}}(-8\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k})$

15. খ. $\cos^{-1}\frac{15}{\sqrt{265}}$, গ. $\pm\left(\frac{3}{7}\hat{i}-\frac{2}{7}\hat{j}+\frac{6}{7}\hat{k}\right)$; 17. ক. $-\frac{1}{56}$, খ. সূক্ষ্মকোণী ও সমদ্বিবাহু; গ. $x=-3, y=0, z=2$;

18. ক. $\frac{1}{\sqrt{5}}$, খ. -2; গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$; 19. ক. $\sqrt{161}$; খ. 10 টাকা; গ. $\begin{bmatrix}-40 & -20 & -36\\ 60 & 4 & 28\\ 88 & 84 & 40\end{bmatrix}$;

20. ক. $-3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$; খ. $(3-t)\hat{i}+(1+2t)\hat{j}$

21. ক. সমঘাতি; খ. $\sqrt{141}$ বর্গ একক; গ. $\frac{1}{-17}\begin{bmatrix}-11 & -4 & 5\\ -14 & -2 & 11\\ 1 & 5 & -2\end{bmatrix}$

22. ক. 1, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; খ. $\cos^{-1}\left(\frac{14}{15}\right)$; গ. $\frac{15}{19}(3\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$;

23. ক. অভেদঘাতি নয়; খ. $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$; গ. $[2\ \ 1\ \ -1]$

24. ক. $\vec{r}=(3+3t)\hat{i}+(3+2t)\hat{j}+(4+4t)\hat{k}$; গ. $\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

25. খ. $\frac{1}{3}$, গ. $90°$; 26. খ. $\frac{3}{14}(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$; গ. 48.564 বর্গ একক (প্রায়)

Scanned with CamScanner