গতিবিদ্যা

গতিবিদ্যা

TYPE – 01

লব্ধি ও ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় ঃ

EXAMPLE – 01: দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির n গুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি বেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়। প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = \frac{n^2+2}{2(1-n^2)}$

A

P

SOLVE : মনে করি, বেগ দুইটির মান u ও $v\ (u > v)$. ∴ এদের বৃহত্তম লব্ধি $= u + v$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= u - v$ শর্তানুসারে, $u + v = n\,(u - v) = n.m$, যেখানে, $m = (u - v)$

E

I

আবার প্রশ্নমতে, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধির মান $w = \frac{1}{2}(u + v)$

B D C

Q Q+R R

$\therefore w^2 = \frac{(u+v)^2}{4} = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \Rightarrow \frac{(m\,n)^2}{2} = 2(u^2 + v^2) + 4uv\cos\alpha$ [2 দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{(mn)^2}{2} = (u+v)^2 + (u-v)^2 + \{(u+v)^2 - (u-v)^2\}\cos\alpha,$ [12 $(a^2 + b^2)$ও $4ab$ এর সূত্র প্রয়োগ করে]

$\Rightarrow \frac{m^2n^2}{2} = m^2n^2 + m^2 + \{m^2n^2 - m^2\}\cos\alpha$

$\Rightarrow n^2 = 2n^2 + 2 + (2n^2 - 2)\cos\alpha$ [$\frac{m^2}{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow (2n^2 - 2)\cos\alpha = -(n^2 + 2)$ সুতরাং $\cos\alpha = \frac{n^2+2}{2(1-n^2)}$ **(প্রমাণিত)** ।

EXAMPLE – 02: পরস্পর লম্বভাবে মিলিত দুইটি সরল রেলপথের একটির উপর দিয়ে ঘন্টায় 30 কি.মি. বেগে চলমান একটি ট্রেন সকাল 10 টায় জংশন অতিক্রম করে। অন্য একটি ট্রেন দ্বিতীয় রেলপথে ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে চলে বিকেল 3 টায় জংশনে পৌঁছে। কখন এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম ছিল? ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি ,AC এবং DC রেলপথ দুইটি জংশন C তে লম্বভাবে মিলিত হয়েছে। সকাল 10 টায় একটি ট্রেন C তে এবং অন্য ট্রেনটি Dতে অবস্থান করে। 10 টা বাজার t সময় পরে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে। দ্বিতীয় ট্রেনটি 40 কি. মি. /ঘ. বেগে চলে সকাল 10টা থেকে বিকাল 3 টা মোট 5 ঘন্টায় CD দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং $CD = 40 \times 5 = 200$ কি. মি.

ধরি, উক্ত t সময়ে ১ম ট্রেনটি 30 কি.মি./ঘ. বেগে CA এবং অন্য ট্রেনটি 40 কি. মি./ঘ. বেগে BD দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore CA = 30t$ এবং $BD = 40t$ সুতরাং $Bc = (200 - 40t)$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 = (200 - 40t)^2 + (30t)^2 = 40000 + 1600t^2 - 16000t + 900t^2$$

$= 2500t^2 - 16000t + 40000 = 100\,(25t^2 - 160t + 400)$

$= 100\{(5t)^2 - 2.5t.16 + (16)^2 + 144\} = 100\,\{(5t - 16)^2 + (12)^2\}$

যেহেতু$(5t-16)^2$এর মান সর্বদাই ধনাত্মক। সুতরাং দূরত্ব AB ক্ষুদ্রতম হবে যখন $(5t-16)^2 = 0$

অর্থাৎ, $t = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$ ঘন্টা$= 3$ ঘন্টা 12 মি ঃ

$\therefore$সকাল 10 টার 3 ঘ.12 মি. পরে অর্থাৎ বেলা 1টা 12মিনিটে এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে। ক্ষুদ্রতম দূরত্ব, $AB = \sqrt{100 \times (12)^2} = 10 \times 12 = 120$ কি. মি.

EXAMPLE – 03 : সকাল 7 টায় 9 কি.মি./ ঘ. বেগে পূর্ব দিকে চলমান একটি জাহাজ তার সোজা উত্তরের 20 কি.মি. দূরে 12 কি.মি./ঘ. বেগে উত্তর দিক থেকে দক্ষিণ দিকে চলমান আর একটি জাহাজ দেখতে পেল। কখন তাদের মধ্যে দূরত্ব ন্যূতম হবে এবং ন্যূতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, t সময় পর তাদের মধ্যেকার ব্যাধান ক্ষুদ্রতম হবে।

তাহলে, প্রথম জাহাজ কর্তৃক অতিকক্রান্ত দূরত্ব $= 12t$ কি.মি. এবং দ্বিতীয় জাহাজ কর্তৃক অতিক্রান্ত$= 9t$ কি.মি.

সুতরাং $AB = 12t$ কি.মি. $OA = 20$কি.মি.$\therefore$ $OB = (20-12t)$ কি.মি.$OC = 9t$ কি.মি.

ধরি, t সময় পর জাহাজ দ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $BC = d$

OBC ত্রিভূজে $< BOC = 90° \therefore BC^2 = OB^2 + OC^2 \Rightarrow d^2 = (20-9t)^2 + (12t)^2$

$\Rightarrow d = \sqrt{400 + 360t + 81t^2 + 144t^2} = \sqrt{400 - 360t + 225t^2}$

$= \sqrt{(15t)^2 - 2.15t.12 + 12^2 - 12^2 + 400} = \sqrt{(15t-12)^2 + 256}$

দূরত্ব d ন্যূনতম হবে যদি $15t - 12 = 0$ হয়, অর্থাৎ, $15t = 12 \Rightarrow t = \frac{12}{15} \Rightarrow t = \frac{4}{5}$ ঘন্টা $= 48$ মিনিট

জাহাজ হতে সময় গণনার সময় সকাল 7টা, $\therefore$ সকাল 7 টা 48 মিনিট তাদের দূরত্ব ন্যূতম হবে।

$\therefore$ ন্যূতম দূরত্ব $d_{min} = \sqrt{0 + 256} = \sqrt{256} = 16$ কি.মি.

$\therefore$নির্ণেয় সময় সকাল 7টা 48 মিনিট এবং ন্যূনতম দূরত্ব 16 কি.মি.(Ans)

EXAMPLE – 04 : একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর 3 মি./সে. গতিতে চলছে। 3 সেকেন্ড পর কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর 4 মি./সে. গতি সংযোজন করা হল। এর 2 সেকেন্ড পর কণাটি যে বিন্দু হতে প্রথম যাত্রা শুরু করেছিল তা হতে কতদূরে থাকবে?

SOLVE : মনে করি, কণাটি চলমান পথের A বিন্দু হতে AOB পথে 3 মি/সে গতিতে ও 3 সেকেন্ড চলে O বিন্দুতে পৌঁছাল।

তাহলে, $OA = 3 \times 3 = 9$ মিটার। O বিন্দুতে লম্বভাবে OC বরাবর 4 মি./সে. বেগ সংযোজন করার কনাটির প্রাপ্ত লব্ধি বেগ OD বরাবর ত্রিয়াকরে। তাহলে,OB বরাবর 3 মি./সে. ও OC বরাবর 4 মি./সে. বেগের মধ্যবর্তী কোন $90°$

$\therefore$ লব্ধিবেগ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ মি/সে.

2 সে পর O বিন্দু হতে সরণ, $OD = 5 \times 2 = 10$ মি.

ধরি, লব্ধিবেগ 3মি./ সে. বেগের সাথে θ কোণে আনত। তাহলে,$\cos\theta = \frac{3}{5}$

ধরি, A বিন্দু হতে D বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ, লব্ধি সরণ $= s$

$\therefore$ AODত্রিভূজে, অভিক্ষেপ সূত্র ব্যবহার করে,

[বি : দ্র এখানে লব্ধি সূত্র দিয়ে অংকটি solve করতে পার এতে concept অনুযায়ী ভুল হবার সম্ভাবনা থাকে]

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{OA^2+OD^2-AD^2}{2.OA.OD}\Rightarrow -\cos\theta=\frac{9^2+10^2-s^2}{2\times9\times10}\ \Rightarrow\ -\frac{3}{5}=\frac{81+100-s^2}{2\times9\times10}$$

$\Rightarrow 81+100-s^2=-\frac{3}{5}\times2\times9\times10\Rightarrow s^2=181+108\Rightarrow s^2=289\Rightarrow s=17$ মিটার

সুতরাং, যাত্রা বিন্দু হতে 17 মিটার দুরত্বে যাবে । (Ans)

TYPE – 02

ক্ষুদ্রতম দূরত্বে ও ক্ষুদ্রতম সময়ে নদী পারাপার

EXAMPLE – 01 : s মিটার প্রশস্ত স্রোতহীন একটি নদী সাঁতার দিয়ে পার হতে একজন লোকের tমিনিট সময় লাগে। স্রোত থাকলে t_1মিনিটে সে এটা সোজাসুজি পার হয় ।প্রমাণ কর যে, স্রোতের বেগ $= s\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)$ মি. /মিনিট

SOLVE : মনে করি, স্রোতের বেগ $= v$, সাতারুর বেগ $= u$ এবং তাদের লব্ধি বেগ $= w$ এবং স্রোতের বেগের সাথে সাতারু $\propto$ কোণে সাতাঁর কাটঁছে। এখানে, নদীর প্রস্থ $= s$ মিটার, স্রোতহীন অবস্থায় সাতাঁর দিয়ে s মিটার প্রশস্থ নদী পার হতে সাতারুর t মিনিট সময় লাগে।

অর্থাৎ, সাতারুর বেগ, $u=\frac{s}{t}$ মিটার/ মিনিট

আবার নদীতে স্রোত থাকলে সাঁতারের ঐ s মিটার দূরত্ব সোজাসুজি অর্থাৎ নদীর প্রস্থ বরাবর পার হতে সময় লাগে t_1 মিনিট।

এক্ষেত্রে সাতারুর লব্ধি বেগ, $w=\frac{s}{t_1}$মিটার/ মিনিট।

এখানে লব্ধি বেগ স্রোতের বেগের সাথে $90°$ কোণে আনত।

নদীর তীর বরাবর w এর অংশক নিয়ে পাই, $w\cos90°=v+u\cos\alpha\ \Rightarrow 0=v+u\cos\alpha$

$\Rightarrow u\cos\propto=-v\Rightarrow\cos\alpha=\ -\frac{v}{u}$; লব্ধিবেগ, $w=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$

$$=\sqrt{u^2+v^2+2uv\left(-\frac{v}{u}\right)}=\sqrt{u^2+v^2-2v^2}=\sqrt{u^2-v^2}$$

$$w^2=u^2-v^2\Rightarrow v^2=u^2-w^2\Rightarrow v=\sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2-\left(\frac{s}{t_1}\right)^2}=\sqrt{\frac{s^2}{t^2}-\frac{s^2}{t_1^2}}=\sqrt{s^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1^2}{t_1^2}\right)}$$

$=s\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t_1^2}}$ মিটার / মিনিট

EXAMPLE – 02 : এক ব্যক্তি সোজাসুজি ভাবে t_1 সময়ে একটি নদী পারাপার করতে পারে। তীর বরাবর নদীর প্রস্থের সমান দূরত্ব যাওয়া আসা করতে তার t_2 সময় লাগে। সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ $v(u > v)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{u^2 - v^2} : u = t_1 : t_2$

SOLVE : এখানে , সাঁতারুর বেগ u, স্রোতের বেগ v সোজাসুজি পার হতে প্রয়োজনীয় সময় t

ধরি, লব্ধি বেগ $= w$ সাতারুর বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α এবং নদীর প্রস্থ $AB = d$

OCD সমকোনী ত্রিভূজের OC, CD, OD বাহু তিনিটি দ্বারা যথাক্রমে u, v ও w বেগ তিনটিকে দিক ও মানে সুচিত করলে আমরা পাই,

$OC^2 = OD^2 + CD^2 \Rightarrow u^2 = w^2 + v^2 \Rightarrow w^2 = u^2 - v^2 \Rightarrow w = \sqrt{u^2 - v^2} [\ \because \angle CDO = 90°\ ]$

EXAMPLE – 03 : সোজাসুজি একটি নদী পার হতে একজন সাতারুর t_1 সেকেন্ড সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_2 সেকেন্ড সময় লাগে। সাঁতারুর গতিবেগ u মি/সে. এবং স্রোতের গতিবেগ v মি/সে. $(u > v)$ হলে, দেখাও যে, $t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$

SOLVE : এখানে, সাতারুর বেগ $= u$ মিটার/সে. , স্রোতের বেগ $= v$ মিটার/সে.

১ম ক্ষেত্রে , ধরি, $u > v$ নদীর প্রস্থ $= d$ মিটার, OCD একটি সমকোনী ত্রিভূজ যার $\angle ODC = 90°$ এখন, OCD ত্রিভূজের বাহুত্রয় OC, CD, OD দ্বারা যথাক্রমে u, v ও w বেগ তিনটিকে দিকে ও মানে সুচিত করলে অমরা পিথাগোরাসের সুত্রানুসারে পাই,

$OC^2 = CD^2 + OD^2 \Rightarrow u^2 = v^2 + w^2 \Rightarrow w^2 = u^2 - v^2 \Rightarrow w = \sqrt{u^2 - v^2}$

দেওয়া আছে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময় $\therefore t_1 = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

২য় ক্ষেত্রে : নদীর তীর বরাবর স্রোতের অনুকুলে সাতারুর মোট লব্ধিবেগ $(u + v)$ মিটার / সে.

$\therefore$সাতারু$(u + v)$ মিটার/সে. বেগে t_2 সময়ে নদীর প্রস্থের সমান দুরত্ব d তীর বরাবর অতিক্রম করবে।

এক্ষেত্রে, $t_2 = \frac{d}{u+v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i)নং সমীকরণকে (ii) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}}{\frac{d}{u+v}} = \frac{u+v}{\sqrt{u^2-v^2}} = \frac{(\sqrt{u+v})(\sqrt{u+v})}{(\sqrt{u+v})(\sqrt{u-v})} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{u-v}} \therefore t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$(Ans)

$w = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}} \ldots\ldots\ldots \quad (i)$

আবার, নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের অনুকূলে dদুরত্ব$(v + u)$অতিক্রম করে এবং আসার সময় অর্থাৎ স্রোতের প্রতিকূলে

$(u - v)$ বেগে d দুরত্ব অতিক্রম করে। ধরি, নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের দিকে সাতারু t' সময়ে $(u + v)$ বেগেd দুরত্ব যায়$\therefore d = (u + v)t' \Rightarrow t' = \frac{d}{u+v}$

আবার, ফিরে আসার সময় স্রোতের প্রতিকুলে $(u - v)$ বেগে d দূরত্ব অতিক্রম করতে সাতারুর t'' সময় লাগলে$t'' = \frac{d}{u-v}$

$\therefore$ যাওয়া আসা করতে প্রয়োজনীয় সময় $t_2 = t' + t'' = \frac{d}{u+v} + \frac{d}{u-v} = d\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v}\right) = d\frac{u-v+u+v}{(u+v)(u-v)}$

$\therefore t_2 = \frac{2du}{u^2-v^2}$ ... ... (ii)

সোজাসুজি নদী পারাপারে প্রয়োজনীয় সময় t_1 হলে, $t_1 = 2t = \frac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}}$ ... ... (i)

(i)নং সমীকরণকে(ii) নং সমীকরন দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}}}{\frac{2du}{u^2-v^2}}$

$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{u^2-v^2}{(\sqrt{u^2-v^2})u} = \frac{\sqrt{u^2-v^2}}{u} \therefore t_1 : t_2 = \sqrt{u^2-v^2} : u$ (**Proved**)

EXAMPLE – 04: 550 মিটার প্রস্থ একটি নদীর স্রোত ঘন্টায়3কি. মি. বেগে প্রবাহিত হয়। দুইটি নৌকার প্রত্যেকটি ঘন্টায়5 কি.মি. বেগে একটি নৌকা ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরটি ক্ষুদ্রতম সময়ে নদীটি অতিক্রম করতে চেষ্টা করছে। যদি তারা একই সময়ে যাত্রা শুরু করে তবে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছাবার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রথম ক্ষেত্রে : ধরি, স্রোতের বেগ, $v = 3$ কি.মি/ঘন্টা , নৌকার বেগ $u = 5$ কি.মি./ ঘন্টা, নদীর প্রস্থ, $d = 550$মিটার $= 0.55$ কি.মি. এবং নৌকার লব্ধি বেগ $= w$

ধরি, ক্ষুদ্রতম পথে অর্থাৎ নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার পার হতে প্রয়োজনীয় সময় $= t_1$

চিত্র হতে, OAB সমকোণী ত্রিভূজের OA, OB ও AB বাহু দ্বারা যথাক্রমে u, w ও v বেগ তিনটিকে দিক ও মানে সুচিত করলে পাই, $OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow u^2 = w^2 + v^2 \Rightarrow w^2 = u^2 - v^2 \Rightarrow w = \sqrt{u^2-v^2}$

$= \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2}$ $\therefore w = 4$ কি. মি. / ঘন্টা $\therefore t_1 = \frac{d}{w} = \frac{0.55}{4}$ ঘন্টা 0.1375 ঘন্টা

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে : ধরি, ক্ষুদ্রতম সময় $= t_2$, লব্ধিবেগ w স্রোতের বেগের সাথে θ কোণে আনত এবং স্রোতের বেগের সাথে নৌকা α কোণে চলছে।

তাহলে নদীর প্রস্থ বরাবর লব্ধি বেগের অংশক,

$w\sin\theta = v\cos 90° + u\sin\alpha = v \times o + u\sin\alpha = u\sin\alpha$ $\therefore t_2 = \frac{d}{w\sin\theta} = \frac{d}{u\sin\alpha}$

এখানে d ও u ধ্রুবক সুতরাং t_2 এর মান $\sin\alpha$ এর মানের উপর নির্ভরশীল।

$\sin\alpha$ এর বৃহত্তম মানের জন্য t_2 এর মান ক্ষুদ্রতম হবে,

$\therefore \sin\alpha$ এর বৃহত্তম মান $= 1$ $\therefore$ ক্ষুদ্রতম সময় $t_2 = \frac{d}{u} = \frac{0.55}{5} = 0.11$ ঘন্টা

সুতরাং নির্ণেয় সময়ের পার্থক্য, $\Delta t = t_1 - t_2 = (0.1375 - 0.11)$ ঘন্টা

$= 0.0275$ঘন্টা $= \frac{11}{400}$ ঘন্টা $= 99$ সেকেন্ড $= 1$ মিনিট 39 সে.

TYPE – 03

আপেক্ষিক বেগ

EXAMPLE – 01: বৃষ্টির দিনে একটি লোক ঘন্টায় 5 কি. মি. বেগে হেঁটে দেখল বৃষ্টি খাড়াভাবে পড়ছে। তার বেগ দ্বিগুণ করে দেখল বৃষ্টি খাড়া রেখার সাথে $30°$ কোণে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রথম ক্ষেত্রে ঃ মনে করি, OX বরাবর লোকটি 5 কি.মি./ঘ বেগে চলছে। বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ OC খাড়া রেখা দ্বারা এবং লোকটির বেগ OE দ্বারা সূচিত করি এবং O বিন্দুতে এর সমান ও বিপরীতমুখী বেগ OB প্রয়োগ করি।বৃষ্টির প্রকৃত বেগ v যা OA দ্বারা সূচিত করে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঃO বিন্দুতে লোকটির বেগের দ্বিগুণ ও বিপরীত বেগ প্রয়োগ করি, যা OX' দ্বারা সূচিত।$OADX'$ সান্তরিকের OD কর্ণ বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক হবে। তাহলে $< COD = 30°$ এবং $< AOC = \theta$ (ধরি)

প্রথম ক্ষেত্রে ঃ $\frac{5}{\sin\theta} = \frac{v}{\sin 90°} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঃ $\frac{10}{\sin(\theta+30°)} = \frac{v}{\sin 60°} \ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

$$\text{(i)} \div \text{(ii)} \Rightarrow \frac{5}{\sin\theta} \times \frac{\sin(\theta+30°)}{10} = \frac{v}{\sin 90°} \times \frac{\sin 60°}{v} \Rightarrow \frac{\sin(\theta+30°)}{\sin\theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos 30° + \cos\theta\sin 30° = \sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \Longrightarrow \frac{1}{2}\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° \Rightarrow \theta = 30°$ (i) $\Rightarrow v = \frac{5}{\sin\theta} = 10$কিলোমিটার / ঘন্টা।

লক্ষনীয় ঃ যার সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ জানা থাকে তার বিপরীত বেগ ও অন্যটির প্রকৃত বেগ এবং আপেক্ষিক বেগের মধ্যবর্তী কোণ বেগের সাইন সূত্রের প্রয়োগ করতে হয়।

EXAMPLE – 02: একটি ভ্যান গাড়ি সোজা রাস্তায় প্রতি ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে চলে এবং বৃষ্টি উপর থেকে উলম্বভাবে পড়ে। যদি বৃষ্টি ভ্যান গাড়িতে উলম্বের সাথে $30°$ কোণে আঘাত করে তবে বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $= v$

তাহলে, $\tan 30° = \frac{40}{v} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{v} \Rightarrow v = 40\sqrt{3}$ কি.মি. / ঘন্টা

EXAMPLE – 03: u বেগে একটি জাহাজ পূর্বদিকে চলছে। অপর একটি জাহাজ প্রথমটির দিকের সাথে উত্তর দিকে θ আনত রেখায় 2u বেগে চলছে। প্রথম জাহাজের যাত্রীদের নিকট মনে হচ্ছে দ্বিতীয় জাহাজটি উত্তর- পূর্বদিকে চলছে। প্রমাণ কর যে,$\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

SOLVE : প্রথম জাহজের বেগের দিককে উল্টা করে দিলে, অপেক্ষিক বেগের সাথে উক্ত বেগের মধ্যেকার কোণ হয়

$= 180° - 45° = 135°$

sin সূত্রানুযায়ী লেখা যায়, $\frac{2u}{\sin 135°} = \frac{u}{\sin(45°-\theta)}$

$\Rightarrow 2\sin(45° - \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(\sin 45°.\cos\theta.\cos 45°.\sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2.\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos^2 + \sin^2\theta - 2\cos\theta.\sin\theta = \frac{1}{4}$[বর্গ করে]

$\Rightarrow 1 - \sin 2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\theta = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\,\theta = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ (Proved)

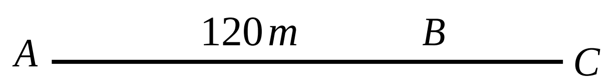
PART-02

TYPE – 01

ত্বরণ সর্ম্পকিত প্রমাণ ঃ

EXAMPLE - 01: একজন যাত্রী তার 120 মিটার সামনে স্থির অবস্থান হতে সুষম ত্বরণে সরলপথে একটি বাসকে ছাড়তে দেখে একে ধরার জন্য সমবেগে দৌঁড় শুরু করল। যদি সে এক মিনিটে কোনো রকমে বাসটি ধরতে সক্ষম হয়, তবে লোকটির বেগ ও বাসের ত্বরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, B বিন্দু হতে f সুষম ত্বরণে বাসটি ছাড়তে দেখে A বিন্দু থেকে যাত্রী u সমবেগে দৌঁড় শুরু করল এবং C বিন্দুতে বাসটি ধরে ফেলল।



এক মিনিটে বা 60 সে. লোকটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, AC = 60 u মিটার [s = vt সূত্র]

বাসের অতিক্রান্ত দূরত্ব, $BC = 0 + \frac{1}{2}f(60)^2 = 30 \times 60f$ $\left[s = ut + \frac{1}{2}ft^2 \text{ সূত্র}\right]$

এবং বাসের অর্জিত বেগ, $v = 60\,f$ মি. / সে. $[v = u + ft$ সূত্র যখন $u = 0]$

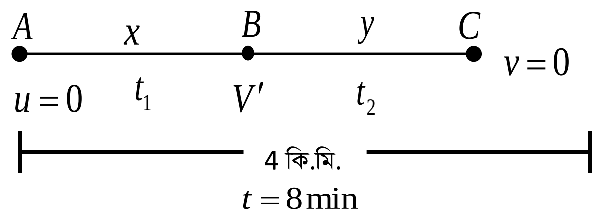
এখন, $AC = 60\,u \Longrightarrow AB + BC = 60\,u \Longrightarrow 120 + 30 \times 60f \Longrightarrow 2 + 30f = u \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$

এক মিনিটে লোকটি কোনো রকম বাসটি ধরতে সক্ষম। সুতরাং বাস ধরার মুহুর্তে বাসের অর্জিত বেগ লোকটির বেগের সমান হবে।

অর্থাৎ $u = v \Longrightarrow 60f = 2 + 30f$; ত্বরণ, $f = \frac{1}{15}\ ms^2$ এবং লোকটির বেগ $u = 60f = 4$ মিটার / সেকেন্ড।

EXAMPLE - 02: একটি ট্রেন 4 কি.মি. দূরবর্তী সরলপথ 8 মিনিটে অতিক্রম করে। যাত্রাপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং শেষ অংশ y সমমন্দনে যায়। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$ (দূরত্ব ও সময়ের একক যথাক্রমে কি.মি. ও মিনিট)

SOLVE : ধরি, ABC রেখার



A থেকে ট্রেন ছেড়ে x সমত্বরণে t_1 সময়ে B বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ v_1 প্রাপ্ত হয় আবার B হতে y সমমন্দনে চলে t_2 সময় পর C বিন্দুতে গিয়ে থামে অর্থাৎ শেষ বেগ, $v=0$ হয়। তাহলে, ধরি, $AB=s_1$ ও $BC=s_2$ এবং আদিবেগ, $u=0$

$\therefore v_1 = x\,t_1 \dots\dots\dots\dots..(i)$ এবং $v_1^2 = 2xs_1 \dots\dots\dots\dots.(ii)$

আবার, s_2 দূরত্ব অতিক্রমনের সময় t_2, শেষবেগ $=0$

$v_1 = y\,t_2 \dots\dots\dots\dots.(iii)$ এবং $v_1^2 = 2ys_2 \dots\dots\dots\dots.(iv)$

(i) নং ও (iii) নং হতে পাই, $t_1+t_2=\frac{v_1}{x}+\frac{v_1}{y}=v_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\dots\dots\dots\dots..(v)$

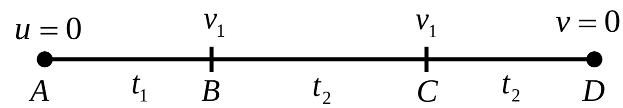
(ii) নং (iv) হতে পাই, $s_1+s_2=\frac{v_1^2}{2x}+\frac{v_1^2}{2y}=\frac{v_1^2}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\dots\dots\dots\dots.(vi)$

(v) নং সমীকরণকে বর্গ করে পাই, $(t_1+t_2)^2=v_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\dots\dots\dots\dots(vii)$

(vii) নং সমীকরণকে (vi) নং সমীকরন দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{(t_1+t_2)^2}{s_1+s_2}=\frac{v_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{v_1^2}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\Longrightarrow\frac{8^2}{4}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Longrightarrow 8=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\quad\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8\ (\textbf{Proved})$$

EXAMPLE – 03: একটি রেলগাড়ি একটি স্টশন থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে অপর স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িখানা যদি মোট দূরত্বের প্রথম $\frac{1}{m}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{n}$ অংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে চলে তবে প্রমাণ কর যে, এর সর্বোচ্চ বেগ ও গড়বেগের অনুপাত $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1$.



SOLVE: A ও D স্টেশন দুটির অবস্থান ; মোট দূরত্ব, $AD = s$

মোট সময়, $t = t_1 + t_2 + t_3$ তাহলে, গড়বেগ $= \frac{s}{t}$

প্রশ্নমতে, $AB = \frac{s}{m}; CD = \frac{s}{n}\ ; BC = s - \frac{s}{m} - \frac{s}{n}$

ট্রেনটি, A বিন্দু হতে f_1 সমত্বরনে চলে এবং যাত্রা করে t_1 সময় পর v_1 বেগ প্রাপ্ত হয় এবং B বিন্দু হতে v_1সমবেগে t_2 সময় চলে C বিন্দুতে পৌঁছে। D বিন্দুতে হবে f_2 সমমন্দনে t_2 সময় চলে। D বিন্দুতে অর্থাৎ অপর স্টেশনে থামে। এক্ষেত্রে শেষ বেগ $v = 0$ হয়।

$$AB = \frac{s}{m} = \frac{0 + v^{\prime}}{2} t_1 \Longrightarrow \frac{2s}{m} = v_1\, t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$CD = \frac{s}{n} = \frac{v^{\prime} + D}{2} t_3 \Longrightarrow \frac{2s}{n} = v_1 t_3 \ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$BC = s - \frac{s}{m} - \frac{s}{n} = v_1 t_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

(i) নং (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\frac{2s}{m} + \frac{2s}{n} + \left(s - \frac{s}{m} - \frac{s}{n}\right) = v_1 t_1 + v_1 t_3 + v_1 t_2 \Longrightarrow s\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 1\right) = v_1 (t_1 + t_2 + t_3)$$

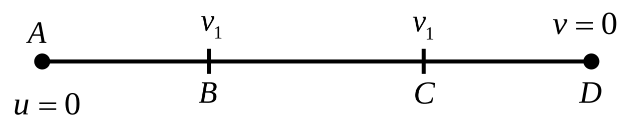
$$\Longrightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 1 = \frac{v_1 t}{s} \Longrightarrow \frac{v_1}{\frac{s}{t}} = \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \frac{\text{সর্বোচ্চ বেগ}}{\text{গড় বেগ}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}{1}$$

$\Longrightarrow$ সর্বোচ্চ বেগ : গড় বেগ $= \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) : 1$ (**Ans**:)

EXAMPLE – 04: একটি রেলগাড়ি কমলাপুর স্টেশন থেকে ছেড়ে নারায়ণগঞ্জে থামে। যদি এর ভ্রমণ পথের প্রথম চুতর্থাংশ সমত্বরণে, শেষ চুতর্থাংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে যায়, তবে প্রমাণ করে যে, গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত 2 ঃ 3 হবে।

SOLVE : মনে করি, কমলাপুরের অবস্থান A ; নারায়ণগঞ্জের অবস্থান D

A বিন্দুতে ট্রেনের আদি বেগ, $u = 0$



B বিন্দুতে ট্রেনের সর্বোচ্চ বেগ, v_1

C বিন্দুতে ট্রেনের সর্বোচ্চ বেগ, v_1

D বিন্দুতে ট্রেনের শেষ বেগ, $v = 0$

ধরি, AB, BC, CDঅংশ অতিক্রমণের সময় যথাক্রমে t_1, t_2 ও t_3

$$AB = \frac{AD}{4} = \frac{0 + v_1}{2} t_1 \Longrightarrow \frac{AD}{2} = v_1 t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$$

$$CD = \frac{AD}{4} = \frac{v_1 + 0}{2} t_3 \Longrightarrow \frac{AD}{2} = v_1 t_3 \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$$

$BC = \frac{AD}{2} = v_1 t_2$[কারণ BC অংশ v_1 সমবেগে চলে]..............(iii)

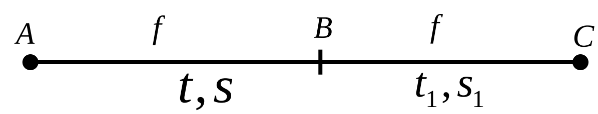
(i) নং (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} = v_1 t_1 + v_1 t_3 + v_1 t_2 \Longrightarrow \frac{3AD}{2} = v_1(t_1 + t_2 + t_3)$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2}.AD = v_1 t \Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{v_1}{\frac{AD}{t}} \Longrightarrow \frac{\text{সর্বোচ্চ বেগ}}{\text{গড় বেগ}} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \therefore \text{গড় বেগ : সর্বোচ্চ বেগ} = 2 : 3$$ **(Proved)**

EXAMPLE – 05: একটি বস্তু কণা f সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, $f = 2\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t}\right)/(t + t_1)$.

SOLVE : মনে করি, বস্তু কণাটি A বিন্দু হতে u আদিবেগে t সময় যাবৎ চলে s দূরত্ব অতিক্রমের করে C বিন্দুতে পৌঁছে। বস্তুকণাটি A হতে C সমস্ত পথ f সমত্বরণে চলে।



$\therefore v = u + ft \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

$s = ut + \frac{1}{2}ft^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

$s_1 = vt_1 + \frac{1}{2}ft_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{s}{t} = u + \frac{1}{2}ft \Rightarrow u = \frac{s}{t} - \frac{1}{2}ft \ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$

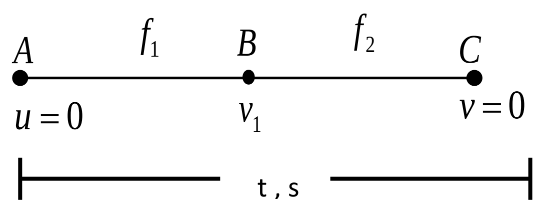
(iii) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{s_1}{t_1} = v + \frac{1}{2}ft_1 = u + ft + \frac{1}{2}ft_1$

$= \frac{s}{t} - \frac{1}{2}ft + ft + \frac{1}{2}ft_1 \Rightarrow \frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} = \frac{1}{2}f(t + t_1) \Rightarrow f = 2\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t}\right)/(t + t_1)$ (**Proved**)

EXAMPLE – 06: একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে প্রথমে f_1 সুষম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুষম মন্দনে চলে। যদি তা t সময়ে যাত্রা বিন্দু থেকে s দূরত্বে গিয়ে থামে, তবে প্রমাণ কর যে, (i) $t = \sqrt{\frac{2(f_1+f_2)}{f_1 f_2}}$

(ii) $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

SOLVE :



A বিন্দুতে আদিবেগ, $u = 0$

B বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ $= v_1$

C বিন্দুতে শেষ বেগ, $v = 0$

AB অংশ f_1 সমত্বরণে t_1সময়ে অতিক্রম করে ধরি, $AB = s_1$

আবার, BC অংশ f_2 সমমন্দনে চলে t_2 সময়ে অতিক্রম করে, $BC = s_2$

$s_1 + s_2 = s$; $t_1 + t_2 = t$; $v = 0 + f_1 t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{v}{f_1}$

আবার, $0 = v - f_2 t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{v}{f_2}$

$t_1 + t_2 = t = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2} = v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \Longrightarrow t^2 = v^2 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $v^2 = 0 + 2f_1 s_1 \Longrightarrow s_1 = \frac{v^2}{2f_1}$ আবার , $0 = v^2 - 2f_2 s_2 \Longrightarrow 2f_2 s_2 = v^2 \Longrightarrow s_2 = \frac{v^2}{2f_2}$

$s_1 + s_2 = s = \frac{v^2}{2f_1} + \frac{v^2}{2f_2}$; $s = \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) নং ও (ii) নং হতে, $\frac{t^2}{s} = 2\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

$\Longrightarrow t^2 = \sqrt{\frac{2(f_1+f_2)s}{f_1 f_2}}$ (**Proved**) (i)

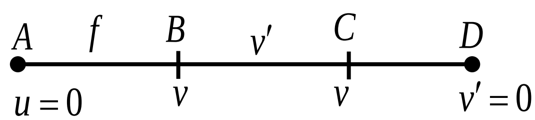
(ii) নং (iii) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ (**Proved**) (ii)

EXAMPLE – 07: সোজা রেলপথে একটি রেলগাড়ির বেগ f_1 সুষম হারে বৃদ্ধি পেয়ে শূন্য থেকে v হবার পর কিছুক্ষণ বেগ বৃদ্ধি বন্ধ থাকে এবং শেষে f_2 সুষম হারে হ্রাস পেয়ে বেগ শূন্য হয়। অতিক্রান্ত দূরত্ব x এবং সময় t হলে প্রমাণ কর যে, (i) $t = \frac{x}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$ (ii) $2x = v\left[2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right]$

SOLVE : মনেকরি, ট্রেনটি A বিন্দু হতে f_1 সুষম ত্বারণে যাত্রা করে t_1 সময় পর B বিন্দুতে v সমবেগে t_2 সময় যাবৎ চলে।

C বিন্দুতে হতে f_2 সুষত্বরণে t_3 সময় চলে D বিন্দুতে থামে।

A বিন্দুতে আদিবেগ, $u = 0$;



D বিন্দুতে শেষ বেগ , $v_1 = 0$

B ও C বিন্দুতে সর্বোচ্চ বেগ, = v

ধরি, $AB = x_1$; $BC = x_2$; $CD = x_3$ এবং $AD = x$

তাহলে, $x = x_1 + x_2 + x_3$

$x = \frac{0+v}{2}t_1$; $x_1 = \frac{v}{2}t_1$; $x_2 = vt_2$; $x_3 = \frac{v+0}{2}t_3$

$\therefore x = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{v}{2}t_1 + vt_2 + \frac{v}{2}t_3 \therefore \frac{v}{2}(t_1 + 2t_2 + t_3) \Longrightarrow t_1 + 2t_2 + t_3 = \frac{2x}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

AB এর জন্য, $v = 0 + f_1t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{v}{f_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (ii)$

BC এর জন্য, $0 = v - f_2t_3 \Longrightarrow f_2t_3 = v \Longrightarrow t_3 = \frac{v}{f_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) নং (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই ,

$t_1 + 2t_2 + t_3 + t_1 + t_3 = \frac{2x}{v} + \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2} \Longrightarrow 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 = \frac{2x}{v} + v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$

$$\Longrightarrow \mathbf{2}(t_1 + t_2 + t_3) = \frac{2x}{v} + v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \Longrightarrow 2t = \frac{2x}{v} + v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

$\Longrightarrow t = \frac{x}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$ $\because$ মোট সময়, $t = t_1 + t_2 + t_3$ $\therefore t = \frac{x}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$ **(Proved)**

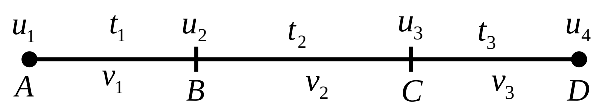
EXAMPLE – 08: একটি ট্রেন একটি স্টেশন হতে সরলরেলপথে যাত্রা করে f_1 সমত্বরণে চলে v গতিবেগ প্রাপ্ত হয় এবং কিছুক্ষণ v সমবেগে চলে। অতঃপর f_2 সমমন্দনে চলে অন্য একটি স্টেশনে থামে। মোট দূরত্ব x এবং ভ্রমণ কাল t হলে, প্রমাণ কর যে, $2x = v\left[2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right]$.

SOLVE : example – 09 এর (ii) নং (iv) নং হতে পাই,

$$t = \frac{x}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right); 2t = \frac{2x}{v} + \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) \Longrightarrow 2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) = \frac{2x}{v} \therefore 2x = v\left\{2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right\}$$

EXAMPLE – 11: একটি সরলরেখায় সমত্বরণে চলমান কোনো বিন্দুর t_1, t_2, t_3 সময়ের গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 হলে দেখাও যে, $\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$.

SOLVE : ধরি, A বিন্দুতে বেগ $= u_1$



B বিন্দুতে বেগ $= u_2$

C বিন্দুতে বেগ $= u_3$

D বিন্দুতে বেগ $= u_4$

বিন্দুটির A হতে B -তে যেতে সময় লাগে t_1

বিন্দুটির B হতে C -তে যেতে সময় লাগে t_2

বিন্দুটির C হতে D -তে যেতে সময় লাগে t_3

$$v_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$v_2 = \frac{u_2 + u_3}{2}$$

$$v_3 = \frac{u_3 + u_4}{2}$$

$$u_2 = u_1 + ft_1$$

$$u_3 = u_2 + ft_2$$

$$u_4 = u_3 + ft_3$$

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{\frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_2 + u_3}{2}}{\frac{u_2 + u_3}{2} - \frac{u_3 + u_4}{2}} = \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_4} = \frac{u_1 - (u_2 + ft_2)}{u_2 - (u_3 + ft_3)} = \frac{u_1 - u_2 - ft_2}{u_2 - u_3 - ft_3} = \frac{u_1 - (u_1 + ft_1) - ft_2}{u_2 - (u_2 + ft_2) - ft_3}$$

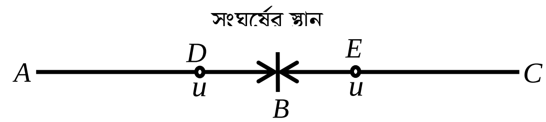
$$= \frac{u_1 - u_1 - ft_1 - ft_2}{u_2 - u_2 - ft_2 - ft_3} = \frac{-(t_1 + t_2)}{-(t_2 + t_3)} \therefore \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3} \quad (\textbf{Ans}:)$$

EXAMPLE – 09: দুইটি রেলগাড়ি একই সরলরেল পথে u_1 এবং u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদর মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন পরস্পরকে দেখতে পায়। ব্রেক প্রয়োগ করে রেলগাড়ি দুইটি যদি যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 মন্দন সৃষ্টি করে, তবে প্রমাণ কর যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি

(i) $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x$ হয়। (ii) $\frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2} = 2x$

SOLVE : <u>প্রথম ট্রেনের জন্য</u> ঃ আদিবেগ $= u_1$; প্রয়োগকৃত মন্দন $= f_1$

<u>দ্বিতীয় ট্রেনের জন্য</u> ঃ আদিবেগ $= u_2$; প্রয়োগকৃত মন্দন $= f_2$



চিত্রে প্রথম ট্রেন A বিন্দু হতে যাত্রা করে t_1 সময় পর, D বিন্দুতে পৌঁছে

দ্বিতীয় ট্রেন C বিন্দু হতে যাত্রা করে t_2 সময় পর E বিন্দুতে পৌঁছে।

এখানে, $DE = x$, ধরি, শর্তানুযায়ী B বিন্দুতে উভয় শেষবেগ, $v = 0$; $DB = x_1$ এবং $BE = x_2$

প্রশ্নমতে, প্রথম ট্রেনের জন্য, $v^2 = u_1^2 - 2f_1x_1 \Longrightarrow 0 = u_1^2 - 2f_1x_1$

$\Longrightarrow 2f_1x_1 = u_1^2 \Longrightarrow x_1 = \frac{u_1^2}{2f_1} \dots\dots\dots\dots\dots (i)$

দ্বিতীয় ট্রেনের জন্য, $v^2 = u_2^2 - 2f_2x_2 \Longrightarrow 0 = u_2^2 - 2f_2x_2 \Longrightarrow 2f_2x_2 = u_2^2$

$$\Longrightarrow x_2 = \frac{u_2^2}{2f_2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $x_1 + x_2 = \frac{u_1^2}{2f_1} + \frac{u_2^2}{2f_2} \dots\dots\dots\dots\dots (iii)$

$$\Longrightarrow x = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2f_1 2f_2} \Longrightarrow u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 2f_2 x \quad (\textbf{Proved})(\textbf{i})$$

(iii) নং সমীকরণ হতে পাই, $x = \frac{1}{2}\left(\frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2}\right) \Longrightarrow 2x = \frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2}$ (**Proved**) (ii)

EXAMPLE – 10: একটি সরলরেখায় দুইটি কণা a এবং b সমত্বরণে চলছে। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যখন এরা x ও y দূরত্বে অবস্থান করে তখন এদের বেগ যথক্রমে u ও v হয়। প্রমাণ কর এরা দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না এবং মিলিত হবার সময়ের ব্যবধান $= \frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$.

SOLVE : ধরি, প্রথম কণা u_1 আদিবেগে a সমত্বরণে t সময় পর B বিন্দুতে u বেগ প্রাপ্ত হয়।

দ্বিতীয় কণা u_2 আদিবেগে b সমত্বরণে চলে t সময় পর C বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়।

প্রশ্নমতে, $AB = x\,; AC = y$

তাহলে, $x = u_1 t + \frac{1}{2}at^2$ এবং $u = v_1 + at = (u-at)t + \frac{1}{2}at^2$ $[v_1 = u - at]$

$$= ut - \frac{1}{2}at^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

এবং $y = u_2 t + \frac{1}{2}bt^2$ ও $v = u_2 + bt$

$$\Longrightarrow y(v-bt)t + \frac{1}{2}bt^2 = vt - bt^2 + \frac{1}{2}bt^2 \; [\because u_2 = v - bt] = vt - \frac{1}{2}bt^2 \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$$

(i) নং (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$x - y = ut - \frac{1}{2}at^2 - vt + \frac{1}{2}bt^2 = (u-v)t - \frac{1}{2}\,(a-b)t^2$$

$$\Longrightarrow (a-b)t^2 - 2(u-v)t + (x-y) = 0$$

যা t এর একটি দ্বিঘাত সমীকরন।

ধরি, t এর দুটি মূল t_1 ও t_2

$$\Longrightarrow t = \frac{2(u-v) \pm \sqrt{\{-2(u-v)\}^2 - 4(a-b)(x-y)}}{2(a-b)} = \frac{2(u-v) \pm \sqrt{4(u-v)^2 - 4(a-b)(x-y)}}{2(a-b)}$$

$$= \frac{2(u-v) \pm 2\sqrt{(u-v) - (a-b)(x-y)}}{2(a-b)} = \frac{(u-v) \pm \sqrt{(u-v)^2 - (a-b)(x-y)}}{a-b}$$

এখানে, $t_1 = \frac{(u-v)-\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}}{a-b}$ সময় পর একবার মিলিত হবে এবং

$t_2 = \frac{(u-v)+\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}}{a-b}$ সময় পর দ্বিতীয় বার কণাদ্বয় মিলিত হবে।

দুইবার মিলিত হবার সময়ের পার্থক্য ঃ

$$t_2 - t_1 = \frac{(u-v)+\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}}{a-b} - \frac{(u-v)-\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}}{a-b}$$

$$= \frac{(u-v)+\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}-(u-v)+\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}}{a-b} = \frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2-(a-b)(x-y)}$$

TYPE – 02

তক্তা ও বুলেট ঃ

EXAMPLE – 01: একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{20}$ অংশ হারায়। মন্দন সুষম হলে, বুলেটটি থামার পূর্বে পরপর স্থাপিত অনুরূপ কতগুলি তক্তা ভেদ করবে ?

SOLVE : মনেকরি, বুলেটটি তক্তায় u বেগে আঘাত করে এবং v বেগে বেরিয়ে যায়।

প্রশ্নেমতে, তক্তাটি ভেদ করতে বেগ হারায় u এর $\frac{1}{20}$ অংশ অর্থাৎ $v = u - \frac{u}{20} = \frac{20u-u}{20} = \frac{19u}{20}$

ধরি, তক্তায় পুরুত্ব x এবং সমমন্দন a তাহলে,

$$v^2 = u^2 - 2ax \Rightarrow \left(\frac{19u}{20}\right)^2 = u^2 - 2ax \Rightarrow 2ax = u^2 - \frac{361}{400}u^2 = \frac{39u^2}{400}$$

পুনরায় ধরি, বুলেটটি n সংখ্যক তক্তা ভেদ করার পর সম্পূর্ণ বেগ হারাবে।

তাহলে, $0^2 = u^2 - 2a(nx) \Rightarrow (2ax)n = u^2 \Rightarrow n = \frac{u^2}{2ax} = \frac{u^2}{\frac{39u^2}{400}} = \frac{400}{39} = 10\frac{10}{39}$ টি

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদকৃত তক্তার সংখ্যা $10\frac{10}{39}$ টি । [**বিঃদ্রঃ** পূর্ণ সংখ্যায় ১০ টি]

EXAMPLE – 02: একটি বুলেট কোনো দেয়ালে ভিতর 2 ইঞ্চি ঢুকবার পর এর অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আর কতদূর ঢুকবে ?

SOLVE: ধরি, বুলেট u বেগে দেয়ালকে আঘাত করে a সমমন্দনে x দূরত্ব প্রবেশ করার পর v বেগ প্রাপ্ত হয়।

প্রশ্নমতে, $v = u - \frac{u}{2} = \frac{u}{2}$ এবং $x = 2$ ইঞ্চি

তাহলে, $v^2 = u^2 - 2ax = \left(\frac{u}{2}\right)^2 = u^2 - 2a \times 2 \Rightarrow 4a = u^2 - \frac{4^2}{4} = \frac{4u^2 - u^2}{4} = \frac{3u^2}{4}$

$$\Rightarrow 2a = \frac{3u^2}{8} \dots\dots\dots\dots..(i)$$

ধরি, বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আরও y দূরত্ব প্রবেশ করে সম্পূর্ণ বেগ হারাবে। এক্ষেত্রে শেষবেগ $= 0$

$\therefore\ 0^2 = v^2 - 2ay \Rightarrow 2ay = v^2 \Rightarrow \frac{v^2}{2a} = \frac{\frac{u^2}{4}}{\frac{3u^2}{4}} = \frac{2}{3}$ ইঞ্চি

$\therefore$ বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আরও $\frac{2}{3}$ ইঞ্চি প্রবেশ করবে। (**Ans:**)

TYPE – 03

পড়ন্ত বস্তুর গতি ঃ

EXAMPLE – 01: একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবার সমমন্দনে চলে পঞ্চম সেকেন্ডে 7 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে এবং কিছুক্ষণ পরে থেমে যায়। কণাটি এর ভ্রমণকালের শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত পথের $\frac{1}{64}$ অংশ যায়। এর ভ্রমণকাল নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, কণাটির আদিবেগ $= u$; মন্দন $= f$, মোট পথের দৈর্ঘ্য $= s$; শেষ বেগ, $v = 0$

<u>প্রথম ক্ষেত্রে</u> ঃ $s_{th} = u - \frac{1}{2}f(2t-1)$

তাহলে, $s_{5th} = u - \frac{1}{2}f(2\times 5 - 1) \Rightarrow 7 = u - \frac{9}{2}f \dots\dots\dots\dots..(i)$

$$v = u - ft$$
$$\Rightarrow 0 = u - ft$$
$$\Rightarrow u = ft$$

<u>দ্বিতীয় ক্ষেত্রে</u> ঃ $s_{th} = u - \frac{1}{2}f(2t-1) \Rightarrow s \times \frac{1}{64} = u - \frac{1}{2}f(2t-1)$

$$\Rightarrow \left(ut - \frac{1}{2}ft^2\right) \times \frac{1}{64} = ft - ft + \frac{1}{2}ft \;\Rightarrow \left(ft.t - \frac{1}{2}ft^2\right) \times \frac{1}{64} = \frac{1}{2}f$$

$$\Rightarrow \left(ft^2 - \frac{1}{2}ft^2\right) \times \frac{1}{64} = \frac{1}{2}f \Rightarrow \frac{1}{2}ft^2 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{2}f \Rightarrow t^2 = 64 \Rightarrow t = 8\text{ s}$$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$7 = ft - \frac{9}{2}f \Rightarrow 7 = f\left(t - \frac{9}{2}\right) \Rightarrow 7 = f\left(8 - \frac{9}{2}\right) \Rightarrow 7 = f\left(\frac{16-9}{2}\right) \Rightarrow 7 = f \times \frac{7}{2} \Rightarrow f = 2\text{ ms}^{-1}$$

$u = f \times t = 2 \times 8 = 16\text{ms}^{-1}$ $\therefore$ ভ্রমণকাল 8 s ও আদিবেগ 16ms^{-1} (**Ans:**)

EXAMPLE – 02: 10 মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি বেলুন থেকে একখন্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথর খন্ডটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হলে, কত উঁচু থেকে পাথর খন্ডটি ফেলা হয়েছিল ?

SOLVE : গতি জড়তার জন্য পাথরের উর্ধমুখী বেগ বেলুনের বেগের সমান হবে।

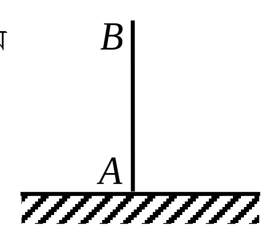
ধরি, পাথরটি ফেলার সময় বেলুনের উচ্চতা ছিল h মিটার। পাথরটি ১০ সেকেন্ডে সময়ে ভূমিতে পৌঁছে।

$\therefore h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্রের সাহায্যে পাই,

$h = -10 \times 10 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (10)^2 = 290$ মিটার যখন $g = 9.8\text{ m/sec}^2$.

EXAMPLE – 03: ভূমি থেকে একটি কণা u মিটার / সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করার t সেকেন্ড পরে একই স্থান হতে একই বেগে অপর একটি কণা একই দিকে ছোড়া হলে, প্রমাণ কর যে, তারা $\frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$ মিটার উঁচুতে মিলিত হবে।

SOLVE : মনে করি, A বিন্দু হতে বস্তু দুইটি নিক্ষিপ্ত হল। ২য় বস্তুটি নিক্ষিপ্ত হবার t_1 সময় পরে h উচ্চতায় B বিন্দুতে এরা মিলিত হয়। ১ম বস্তুটির h উচ্চতায় উড্ডয়নকাল $(t + t_1)$ এবং ২য় বস্তুটির h উচ্চতায় উড্ডয়নকাল t_1



১ম বস্তুর ক্ষেত্রে ঃ $h = u(t+t_1) - \frac{1}{2}g(t+t_1)^2 = ut + ut_1 - \frac{1}{2}g(t^2 + 2tt_1 + t_1^2) \ldots\ldots\ldots (i)$

২য় বস্তুর ক্ষেত্রে ঃ $h = ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)-(ii) \Rightarrow 0 = ut - \frac{1}{2}g(t^2 + 2tt_1) \Rightarrow 0 = u - \frac{1}{2}g(t + 2t_1)$ [t দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow t + 2t_1 = \frac{2u}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2u}{g} - t\right) = \frac{2u-gt}{2g}$

(ii) নং থেকে $h = u\left(\frac{2u-gt}{2g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{2u-gt}{2g}\right)^2 = \frac{2u^2-ugt}{2g} - \frac{4u^2+g^2t^2-4ugt}{8g}$

$= \frac{8u^2-4ugt-4u^2-g^2t^2+4ugt}{8g} \Rightarrow h = \frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$

EXAMPLE – 04: একটি বল u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা t_1 ও t_2 সেকেন্ডে h উচ্চতায় অবস্থান করে। প্রমাণ কর যে, (i) $h = \frac{1}{2}gt_1t_2$ (ii) $u = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$.

SOLVE : মনে করি, বলটি ভূমি হতে u বেগে নিক্ষেপ করায় t সময় পর h উচ্চতায় ওঠে।

তাহলে, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2h = 2ut - gt^2 \Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$

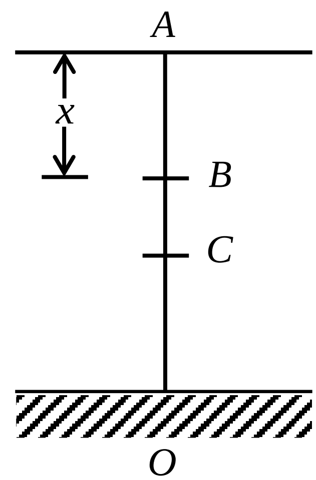
যা t এর দ্বিঘাত সমীরকণ সুতরাং এ দুটি মূল t_1ও t_2

$$t_1t_2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow 2h = gt_1t_2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_1t_2 \quad (\textbf{Proved})(i)$$

এবং $t_1 + t_2 = -\frac{-2u}{g} = \frac{2u}{g} \Rightarrow 2u = g(t_1 + t_2) \Rightarrow u = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2) \quad (\textbf{Proved})(ii)$

EXAMPLE – 05: h উচ্চতা বিশিষ্ট একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে অবাধে পড়ন্ত একখন্ড পাথর x মিটার দূরত্বে পৌঁছিলে টাওয়ারের শীর্ষবিন্দুর y মিটার নীচে কোনো বিন্দু থেকে আর একখন্ড পাথর নিচের ফেলা হল। এরা একই সাথে ভূমিতে পড়লে দেখাও যে , $h = \frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার।

SOLVE : ধরি, টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু A হতে অবাধে পতনশীল প্রথম খন্ড t_1সময়ে x দূরত্ব অতিক্রম করে B বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং C বিন্দু হতে আর এক খন্ড পাথর $u = 0$ বেগে নিচের দিকে ছুড়া হল এবং তারা t সময় পর ভূমির O বিন্দুতে পতিত হল। তাহলে, $AB = x, OB = h - x,\ AC = y,\ OC = h - y$.



প্রথম পাথরের ক্ষেত্রে ঃ $h - x = vt + \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots\dots..(i)$

দ্বিতীয় পাথরের ক্ষেত্রে ঃ $h - y = \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots\dots..(ii)$

(i) নং (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$y - x = vt \Rightarrow t = \frac{y - x}{v} \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(iii)$$

আবার, $v^2 = 2gx \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(iv)$ [প্রথম কণার জন্য]

(ii) নং সমীকরণে, $t = \frac{y-x}{v}$ বসিয়ে পাই,

$$h - y = \frac{1}{2}g\left(\frac{y-x}{v}\right)^2 \Rightarrow h = y + \frac{1}{2}g\,\frac{(y-x)^2}{v^2} = y + \frac{1}{2}g\,\frac{(y-x)^2}{2gx} = y + \frac{(y-x)^2}{4x}$$

$$= \frac{4xy+(y-x)^2}{4x} = \frac{4xy+x^2-2xy+y^2}{4x} = \frac{x^2+2xy+y^2}{4x} = \frac{(x+y)^2}{4x} \;\therefore h = \frac{(x+y)^2}{4x}$$

EXAMPLE – 06: একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার t সময় পরে পানিতে এর পতন শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কুয়ার গভীরতা h হলে, বাতাসের বাধা অগ্রাহ্য করে, প্রমাণ কর যে,

$$(\mathbf{i})\, t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v'} \quad (\mathbf{ii})\, gt^2 = 2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right), \text{যখন } v > h \quad (\mathbf{iii})\, gv^2t^2 - 2ghvt + h(gh - 2v^2) = 0$$

SOLVE : মনে করি, পাথর খন্ড কুয়ার ভিতর পানির উপরিতলে t_1 সময়ে পৌঁছে এবং t_2 সময়ে শব্দ কুয়ার উপরিতলে পৌঁছে।

এখানে কুয়ার গভীরতা $= h$; বাতাসের শব্দের বেগ $= v$; পাথরের পতনকাল $= t_1$; শব্দের উত্থানকাল $= t_2$

তাহলে, $t_1 + t_2 = t$; পাথরের ক্ষেত্রে : $h = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ … … … … … … … (i)

শব্দের ক্ষেত্রে ঃ $h = vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{h}{v}$ … … … … … … . (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ কের পাই, $t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} \;\therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$ … … … … (iii) (**Proved**)(i)

(iii) নং সমীকরণ হতে পাই, $t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t^2 - 2t\frac{h}{v} + \frac{h^2}{v^2} = \frac{2h}{g}$

$$\Rightarrow t^2 - 2t\,\frac{h}{v} + \frac{h^2}{v^2} - \frac{2h}{g} = 0 \Rightarrow gt^2 - 2gt\frac{h}{v} + \frac{h^2g}{v^2} - 2h = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

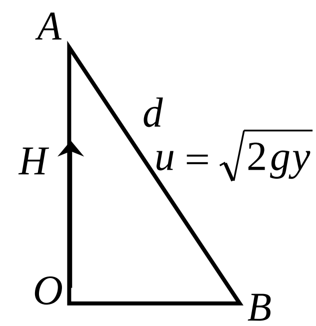
$\Rightarrow gt^2 = 2gt\,\frac{h}{v} - \frac{h^2g}{v^2} + 2h$ যখন $v > h$ তখন, $\frac{h^2}{v^2}$ কে অগ্রাহ্য করা যায়।

$\Rightarrow gt^2 = 29t\frac{h}{v} + 2h \;\therefore\; gt^2 = 2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right)$ (**Proved**) (ii) .

(iv) নং সমীরকরণ হতে পাই, $gt^2 - 2gt\frac{h}{v} + \frac{h^2g}{v^2} - 2h = 0$

$\Rightarrow gv^2t^2 - 2ghvt + h^2g - 2hv^2 = 0 \Rightarrow gv^2t^2 - 2ghvt + h(gh - 2v^2) = 0$ (**Proved**) (iii)

EXAMPLE – 07: $\sqrt{2gy}$ মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি রকেট এর বৃহত্তম উচ্চতায় ফেটে গেল। এর শব্দ $\frac{1}{n}$ সেকেন্ডের ব্যবধানে রকেটের যাত্রাস্থানে ও এ থেকে x মিটার আনুভূমিক দূরত্বে দুই স্থানে শোনা গেল। প্রমাণ কর যে, শব্দের বেগ $v = n\{\sqrt{x^2+y^2} - y\}$ মি./সে.



SOLVE : রকেটের আদিবেগে, $u = \sqrt{2gh}$ ধরি, সর্বাধিক উচ্চতা, H

বিস্ফোরণের পর শব্দ কর্তৃক উলম্ব সরণ, $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(\sqrt{2gh})^2}{2g} = \frac{2gy}{2g} = y$

আনুভূমিক সরণ = x তাহলে, পুনরায় ধরি, রকেটের যাত্রা বিন্দু O, বিস্ফোরণ বিন্দু A . O বিন্দু হতে

অনুভূমিক সরণ, $OB = x$ তাহলে, $OA = y$, $OB = x$ OAB ত্রিভুজে $\angle O = 90^\circ$

$\therefore\ OA^2 + OB^2 = AB^2 \Longrightarrow AB^2 = y^2 + x^2 \Longrightarrow AB = \sqrt{y^2+x^2}$

আবার, ধরি, শব্দ A বিন্দু হতে t_2 সময় পর B বিন্দুতে পৌঁছে। তাহলে, $t_1 - t_2 = \frac{1}{n}$ সে

$OA = y = vt_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$; $AB = \sqrt{y^2+x^2} = vt_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(ii) নং ও (i) নং সমীকরণ হতে পাই, $\sqrt{y^2+x^2} - y = vt_2 - vt_1$

$\Longrightarrow v(t_1 - t_2) = \sqrt{y^2+x^2} - y \Longrightarrow v.\frac{1}{n} = \sqrt{y^2+x^2} - y\ \therefore v = n\{\sqrt{y^2+x^2} - y\}$ মি./ সে.

EXAMPLE – 08: একটি কণা u আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত হল। যদি কণাটির বৃহত্তম উচ্চতা H হয় , তবে প্রমাণ কর যে, এর আনুভূমিক পাল্লা $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$.

SOLVE : ধরি, কণাটির আনুভূমিক সাথে α কোণে u আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত হল। তাহলে, বৃহত্তম উচ্চতা,

$H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$ এবং আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$ এখন $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ বা,

$R = \frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$ কে বর্গ করে পাই, $R^2 = \frac{4}{g^2}\ (u^2\sin^2\alpha)(u^2\cos^2\alpha)$

$$= 4 \times 4\left(\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right) \times \frac{u^2(1-\sin^2\alpha)}{2g} = 16H\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

বা, $R^2 = 16H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)$ [(i)] $\therefore R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$

EXERCISE :

01. একটি বস্তুকে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন তা 7 মি.ব্যবধানে অবস্থিত 3.5 মি. উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans: } 7\sqrt{3}\text{ m}\right]$.

TYPE – 04

পড়ন্ত বস্তুর গতি সম্পর্কিত প্রমাণ ঃ

EXAMPLE – 01 : প্রমাণ কর যে, নিক্ষেপণ কোণ $\frac{\pi}{4}$ হলে আনুভূমিক পাল্লার মান বৃহত্তম হবে এবং পাল্লা, $R = 4H$.

SOLVE : O বিন্দু হতে একটি প্রক্ষেপককে u আদিবেগে α কোণে নিক্ষেপ করা হল। অনুভূমিক পাল্লা,

$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ এখানে u ও g ধ্রুবক সুতরাং R এর মান $\sin 2\alpha$ এর মানের উপর নির্ভরশীল, $\sin 2\alpha$ এর বৃহত্তম মানের জন্য R এর মান বৃহত্তম হবে, $\sin 2\alpha$ এর বৃহত্তম মান 1 অর্থাৎ

$$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ নিক্ষেপণ কোণ $\frac{\pi}{4}$ এর জন্য মান বৃহত্তম হবে। $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2.2\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$; $\frac{R}{H} = \frac{\frac{2u^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g}}{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}} = \frac{2u^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g} \times \frac{2g}{u^2\sin^2\alpha}$

$= 4\cot\alpha = 4\cot\frac{\pi}{4} = 4.1 = 4 \;\; \therefore R = 4H$ (**Proved**)

EXAMPLE – 02 : u আদিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লার মান যথাক্রমে R ও D হলে, প্রমাণ কর যে, $R = D\sin 2\alpha$ এবং দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা $h_1 : h_2$ হলে $D = 2(h_1 + h_2)$.

SOLVE : এখানে আদিবেগ $= u$

নিক্ষেপণ কোণ $= \alpha$

অনুভূমিক পাল্লা $= R$; সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা $= D$

তাহলে, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ ……… (i)

u ও g ধ্রুবক , $\sin 2\alpha$ এর বৃহত্তম মানের জন্য অনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম হবে।

$\sin 2\alpha$ এর বৃহত্তম মান 1 অর্থাৎ $\sin 2\alpha = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore D = \frac{u^2 \sin 2\times\frac{\pi}{4}}{g} = \frac{u^2}{g} \therefore R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \Rightarrow R = D\ \sin 2\alpha$ (**Proved**)

একই নিক্ষেপণ বেগ ও অনুভূমিক পাল্লার জন্য দুটি নিক্ষেপণ কোন আছে।একটি α হলে অপরটি $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

α এর সর্বাধিক উচ্চতা h_1হলে $h_1 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$ এর জন্য সর্বাধিক উচ্চতা $h_2 = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$

$$h_2 = \frac{u^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2g} = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \Rightarrow h_1 + h_2 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{u^2}{2g}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$= \frac{u^2}{2g}\times 1 = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow \frac{u^2}{g} = 2(h_1 + h_2) \Rightarrow D = 2(h_1 + h_2)$ (**Proved**)

EXAMPLE – 03 : t সময় অন্তে একটি প্রক্ষেপক এর বিচরণে পথের P বিন্দুতে পৌঁছে। আরও t' সময় শেষে তা P বিন্দু হতে নিক্ষেপণ বিন্দুর আনুভূমিক সমতলে ফিরে আসে। দেখাও যে, P বিন্দুর উচ্চতা $h = \frac{1}{2}gtt'$.

SOLVE : ধরি, প্রক্ষপকটি t সময় পর অনুভূমি হতে h উচ্চতায় P বিন্দুতে অবস্থান করে এবং t' সময় পর তা পুনরায় অনুভূমিক সমতলে ফিরে আসে। তাহলে,

$h = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{1}{2}g(t+t')t - \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gtt' - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gtt'$

$\therefore h = \frac{1}{2}gtt'$ (**Proved**)

বিচরণ কাল, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

$\Rightarrow t + t' = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

$\Rightarrow 2u\sin\alpha = g(t+t')$

$\Rightarrow u\sin\alpha = \frac{1}{2}g(t+t') \ldots\ldots\ldots.(i)$

EXAMPLE – 04 : একই বেগে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর একই আনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য বিচরণ কাল t_1, t_2 হয় তবে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2}gt_1t_2$.

SOLVE : আমরা জানি একই অনুভূমিক পাল্লা R ও একই নিক্ষেপন বেগের জন্য দুটি নিক্ষেপন কোণ থাকে একটি α এবং অপরটি $\frac{\pi}{2} - \alpha$

α কোণে নিক্ষেপনের জন্য একটি বিচরণ পথ থাকে এক্ষেত্রে বিচরণ কাল t_1 হলে, $t_1 = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$\frac{\pi}{2} - \alpha$ কোণে নিক্ষেপনের জন্য অপর একটি বিচরণ পথ থাকে।

এক্ষেত্রে বিচরণ কাল, $t_2 = \frac{u^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{g} = \frac{2u\cos\alpha}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

(i) নং (ii) নং সমীকরণ গুণ করে পাই, $t_1t_2 = \frac{2u\sin\alpha}{g} \times \frac{2u\cos\alpha}{g}$

$= \frac{4u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g^2} = \frac{2u^2}{g^2}\sin 2\alpha = \frac{2}{g}\ \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{2}{g}R \Rightarrow \frac{2}{g}R = t_1t_2$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}gt_1t_2$ (**Proved**)

EXAMPLE – 05: একই গতিতে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h, h' হলে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{hh'}$.

SOLVE : একেই নিক্ষেপণ বেগ ও একই অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য দুটি নিক্ষেপণ কোণ থাকে। একটি α হলে অপরটি $\frac{\pi}{2} - \alpha$. α কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h হলে, $h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

এবং $\frac{\pi}{2} - \alpha$ কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h' হলে, $h' = \frac{u^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2g} = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$

$hh' = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} . \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} = \left(\frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}\right)^2 = \left(\frac{u^2\, 2\sin\alpha\cos\alpha}{4g}\right)^2 = \left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{4g}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\ .\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{4}.R\right)^2 \Longrightarrow \frac{R}{4} = \sqrt{hh'}\ \therefore R = 4\sqrt{hh'}$ (**Proved**)

EXAMPLE – 06: একটি বস্তু u বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষেপক করা হল। আনুভূমিক পাল্লা R, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং বিরচণকাল T হলে, প্রমাণ কর যে, (i) $16gH^2 - 8u^2H + gH^2 = 0$

(ii) $g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0.$

SOLVE : একটি বস্তু u বেগে অনুভূমির সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হলে,

অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

বিরচণ কাল, $T = \frac{2u \sin\alpha}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

(ii) নং হতে, $u^2\sin^2\alpha = 2gH \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$

(i) নং হতে , $R^2 = \frac{u^4\sin^2\alpha}{g^2} = \frac{u^4}{g^2}\, 4\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \Longrightarrow u^2\sin^2\alpha \,.\, u^2\cos^2\alpha = R^2g^2/4$

$$\Longrightarrow u^2\cos^2\alpha = \frac{R^2g^2}{8H} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

(iv) নং ও (v) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $\Longrightarrow u^2\cos^2\alpha = \frac{R^2g^2}{8H}$

$u^2\sin^2\alpha + u^2\cos^2\alpha = 2gH + \frac{R^2g}{8H} \Longrightarrow u^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2gH + \frac{R^2g}{8H}$

$\Longrightarrow u^2 \times 1 = 2gH + \frac{R^2g}{8H} \Longrightarrow 8u^2H = 16gH^2 + R^2g \Longrightarrow 16gH^2 - 8u^2H + R^2g = 0.$ **Proved**

(ii) $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} \Longrightarrow u\sin\alpha = \frac{gT}{2} \Longrightarrow (u\sin\alpha)^2 = \left(\frac{gT}{2}\right)^2 \Longrightarrow u^2\sin^2\alpha = \frac{g^2T^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং হতে, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \Longrightarrow Rg = 2u^2 \sin 2\alpha \,.\, \cos\alpha \Longrightarrow (Rg)^2 = (2u^2 \sin 2\alpha \,.\, \cos\alpha)^2$

$\Longrightarrow R^2g^2 = 4u^2\sin^2\alpha .\, u^2\cos^2\alpha \Longrightarrow u^2\cos^2\alpha = \frac{R^2g^2}{4u^2\sin^2\alpha} = \frac{R^2g^2}{4\times\frac{g^2T^2}{4}} = \frac{R^2}{T^2}$

$$\Longrightarrow u^2\cos^2\alpha = \frac{R^2}{T^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $u^2\sin^2\alpha + u^2\cos^2\alpha = \frac{R^2g^2}{4} + \frac{R^2}{T^2}$

$\Rightarrow u^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{R^2g^2}{4} + \frac{R^2}{T^2} \Rightarrow \mathbf{4}T^2u^2 \times 1 = g^2T^4 + 4R^2$

$\Rightarrow g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0 \therefore \Rightarrow u^2\cos^2\alpha = \frac{R^2g^2}{8H}$ (**Proved**)

EXAMPLE –07: একটি বস্তুকে ভূমি থেকে α কোণে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হলে যেন তা $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a পরিমাণ উঁচু দুইটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অতিকম করে। প্রমাণ কর বস্তুটির পাল্লা $R = 2a\cot\frac{\alpha}{2}$.

SOLVE : মনে করি, বস্তুটিকে u বেগে α কোণে নিক্ষেপ করায় তা t সময়ে অনুভূমি হতে x দূরত্বে এবং উলম্বভাবে a দূরত্বে অবস্থান করে।

তাহলে, $a = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ……………….. (i) এবং $x = u\cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{u\cos\alpha}$

(i) নং এ $t = \frac{x}{u\cos\alpha}$ বসিয়ে পাই, $a = \sin\alpha\frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2$

$$= x\tan\alpha - \frac{1}{2}g.\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g.\frac{x^2.\sin\alpha}{u^2\cos\alpha.\sin\alpha.\cos\alpha}$$

$$= x\tan\alpha - \frac{x^2\tan\alpha}{\frac{u^2\sin2\alpha}{g}} = x\tan\alpha - \frac{x^2\tan\alpha}{R} \Rightarrow a = x\tan\alpha - \frac{x^2\tan\alpha}{R} \Rightarrow Ra = Rx + \tan\alpha - x^2\tan\alpha$$

$\Rightarrow x^2\tan\alpha - Rx\tan\alpha + Ra = 0$ যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি, এর দুটি মূল x_1ও x_2 $\therefore x_1 + x_2 = \frac{R\tan\alpha}{\tan\alpha} = R,\ x_1x_2 = \frac{Ra}{\tan\alpha}$

আমরা জানি, $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = R^2 - 4\frac{Ra}{\tan\alpha} \Rightarrow (2a)^2 = R^2 - \frac{4Ra}{\tan\alpha} \Rightarrow R^2\tan\alpha - 4Ra = 4a^2\tan\alpha$

$\Rightarrow R^2\tan\alpha - 4Ra - 4a^2\tan\alpha = 0$

$$R = \frac{-(-4a)\pm\sqrt{(-4a)^2 - 4\tan\alpha(-4a^2\tan\alpha)}}{2\tan\alpha} = \frac{4a\pm\sqrt{16a^2(1+\tan^2\alpha)}}{2\tan\alpha} = \frac{4a\pm4a\sqrt{\sec^2\alpha}}{2\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow R = \frac{4(1\pm\sec\alpha)}{2\tan\alpha} = 2a\left(\frac{1\pm\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right) = 2a\left(\frac{\frac{\cos\alpha\pm1}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right) = 2a\left(\frac{\cos\alpha\pm1}{\sin\alpha}\right)$$

$(-)$ve মান গ্রহনযোগ্য নয় কারণ $\cos\alpha$ এর মান 1 হলে, $R = 0$ হয়ে যায়, এছাড়া $\cos\alpha$ এর অন্যান্য মানের জন্য R এর মান $(-)$ve হয় যা গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\therefore 2R = 2a.\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2a.\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}} = 2a.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2a\cot\frac{\alpha}{2} \therefore R = 2a\cot\frac{\alpha}{2} \qquad (\textbf{Proved})$$

EXAMPLE –08: ভূমির সাথে α কোণে এবং u বেগে একটি শূন্যে নিক্ষিপ্ত হল। যদি কণাটির পাল্লা R এবং বিচরণ কাল T হয়, তাহলে দেখাও যে, $gT^2 = 2R\tan\alpha$.

SOLVE : দেওয়া আছে, নিক্ষেপণ কোণ $= \alpha$; আদিবেগ $= u$; অনুভূমিক পাল্লা $= R$; বিচরণকাল $= T$

তাহলে, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} \Rightarrow T^2 = \frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2} \Rightarrow u\sin\alpha = \frac{gT}{2} \Rightarrow \frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2}$

আবার,, $R = \frac{4u^2\sin\alpha}{g} = \frac{u^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g} = \frac{4u^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{2g.\sin\alpha} = \frac{4u^2\sin^2\alpha}{2g.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$$\Rightarrow R = \frac{4u^2\sin^2\alpha}{2g.\tan\alpha} \Rightarrow 2R\tan\alpha = \frac{4u^2\sin^2\alpha}{g} = gT^2 \therefore gT^2 = 2R\tan\alpha \quad (\textbf{Proved})$$

EXAMPLE –09: $49ms^{-1}$ বেগে অনুভূমির সাথে 45^o কোণে একটি বস্তুকে শূণ্যে নিক্ষেপ করা হল। এটা সর্বোচ্চ কত উপরে উঠবে? এতে কত সময় লাগবে? কত সময় পর এটা ভূমিতে পতিত হবে? অনুভূমিক পাল্লা কত হবে?

সমাধান ঃ সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow \frac{49^2\times\frac{1}{2}}{2\times9.8} = 61.25m$

সময়, $t = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{49\times\sin45^o}{9.8} = \frac{5\sqrt{2}}{2}m$ অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{49\sin90^o}{9.8} = 5m$

EXAMPLE –10: একটি বোমারু বিমান $147ms^{-1}$ বেগে অনুভূমিক বরাবর চলার পথে $490m$ উঁচু হতে একটি বোমা ফেলে দিল। বায়ুর বাধা উপেক্ষা করে বোমাটি কখন ও কোথায় মাটিতে পতিত হবে? ফেলার মুহূর্ত হতে $5s$ পর বোমার দ্রুতি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি t সময় পর বোমা মাটিতে পড়বে।

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \;\therefore 490 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\times490}{g}} \Rightarrow 10s,\; x = ut \Rightarrow x = 147\times10 = 1470m$$

EXAMPLE −11: একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30^o কোণে $40ms^{-1}$ বেগে কিক করা হল। কিপার বলকে $1.2m$ উচ্চতায় ধরে ফেলল। কত বেগে কিপারের হাতে পড়েছিল?

সমাধানঃ $u\cos 30^o = v\cos\theta = v_x$, $v\sin\theta = u\sin\alpha - gt = v_y$

$$y = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 1.2 = 40\times\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\times 9.8t^2 \Rightarrow 2.4 = 40t - 9.8t^2 \quad \Rightarrow 9.8t^2 - 40t + 2.4 = 0$$

$$t = \frac{40\pm\sqrt{(-40)^2 - 4\times 9.8\times 2.4}}{2\times 9.8} = \frac{40\pm 37.9}{19.6} \quad = 4.05s$$

$$\therefore v\cos\theta = 40\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \ , \ v\sin\theta = 40\times\frac{1}{2} - 9.8\times 4.05 = 19.7$$

$$v = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + (19.7)^2} \ = 39.85ms^{-1}$$

EXAMPLE −12: .একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষেপ করায় 2a ব্যবধানে a উচ্চতায় বিশিষ্ট দুটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে যায়। প্রমাণ কর $R = D\cot{}^{\alpha}/_{2}$ যেখানে , D = 2a.

সমাধান ঃ $a = x\tan\alpha - \frac{x^2}{R}\tan\alpha \Rightarrow \frac{x^2}{R}\tan\alpha - x\tan + a = 0$

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{tan\alpha}{\frac{tan\alpha}{R}} = R$, $x_1x_2 = \frac{a}{\frac{tan\alpha}{R}} = \frac{aR}{tan\alpha} = \frac{aR}{tan\alpha}$

$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \Rightarrow (2a)^2 = R^2 - 4.\frac{aR}{tan\alpha} \Rightarrow R^2 - \frac{4aR}{tan\alpha} - 4a^2 = 0$

$$R = \frac{\frac{4a}{tan\alpha}\pm\sqrt{\frac{16a^2}{(tan\alpha)^2}+16a^2}}{2} = \frac{4a\pm\sqrt{16a^2(1+tan^2\alpha)}}{2tan\alpha} = \frac{4a(1\pm sec\alpha)}{2tan\alpha} = 2a.\frac{2cos^2{}^{\alpha}/_{2}}{2sin{}^{\theta}/_{2}\,cos{}^{\alpha}/_{2}} = 2a\cot{}^{\alpha}/_{2}$$

Try : একটি বস্তু $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ পথ অনুসরণ করে। তার পাল্লা নির্ণয় কর। Ans: $\sqrt{2a}$

EXAMPLE −13: 196 মি/সে বেগে ভূসমান্তরালে চলমান একটি বেলুন থেকে একখন্ড পাথর নিচে ফেলা হল তা 5s পর ভূমিতে পরে। বেলুনের উচ্চতা ও পাথর যে বেগে ভূমিতে আঘাত করে তা নির্ণয় কর।

$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.8)\,(5)^2 = 122.5m$ ($\alpha = 0^0$ বলে $u\sin\alpha = 0$)

$v\sin\theta = -u\sin\alpha + gt = 9.8\times 5 = 49ms^{-1}$

$v\cos\theta = u\cos 0° = 196$

$v = \sqrt{49^2 + (-196)^2} = 49\sqrt{17}\ ms^{-1}$

অনুভূমিক দুরত্ব $x = u\cos\alpha t = 196\times 5 = 980$ m

EXAMPLE –14: একজন ব্যাটস্‌ম্যান 2m উচু হতে 28.4m/s বেগে অনুভূমির সাথে 30^0 কোণে একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করল। একজন ফিল্ডার বলটিকে 50cm উচুতে ধরে ফেলল। ব্যাট্‌সম্যান থেকে ফিল্ডার দুরত্ব কত ছিল?

সমাধান ঃ $1.5 = 28.4 \times \sin 30^0 t + 4.9t^2$

$\Rightarrow 4.9t^2 - 14.2t - 1.5 = 0 \Rightarrow t = \frac{14.2 \pm \sqrt{(-14.2)^2 - 4\,(4.9)(-1.5)}}{2 \times 4.9} = \frac{14.2 \pm 15.2}{9.8} = 3s$ (+)ve নিয়ে

$x = u\cos\alpha t = 28.4 \times \cos 30^0 \times 3 = 73.79m$ (প্রায়)

Try Yourself: একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 60^0 কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন তা 7 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত 3.5 মিটার উচুঁ দুইটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে যায়। বস্তুটির অনুভূমিকের পাল্লা নির্ণয় কর।Ans : $7\sqrt{3}$ m