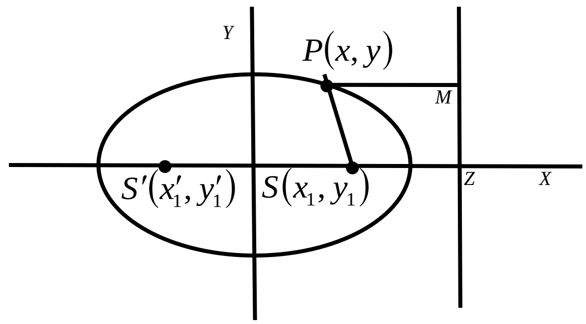
কনিক-১

কনিক

<u>সাধারন আলোচনা</u> ঃ

X ও Y সম্বলিত দ্বিঘাত রাশির সাধারণ সমীকরণ : $Ax^2 + By^2 + Hxy + Gx + Fy + C = 0$

সংঙ্গা ঃ একটি চলমান বিন্দুর একটি তলে (xy) এমনভাবে চলে যেন কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হতে চলমান বিন্দুর দুরত্ব ও চলমান বিন্দু হতে একটি নিদির্ষ্ট রেখার দুরত্বের অনুপাত সবসময় ধ্রুব থাকে। এটা হলো কণিকের বৈশিষ্ট্য।



যেখানে, চলমান বিন্দু: P (x,y) ; নির্দিষ্ট বিন্দুঃ উপকেন্দ্র বা ফোকাস, S (x,y)

নির্দিষ্ট সরলরেখারঃ দিকাক্ষ বা নিয়ামক ঃ $ax + by + c = 0$

ধ্রুব সংখ্যাঃ উৎকেন্দ্রিকতা বা বিকেন্দ্রিকতা , e

কণিকের বৈশিষ্ট্য :

$e = 0$ হলে, সমীকরণটা বৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়, $A = B, H = 0$

$e = 1$ হলে, সমীকরণটা পরাবৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়, $H^2 - 4AB = 0$ হলে xy- সম্বলিত পদ পূর্ণ বর্গ সৃষ্টি করে ।

$0 < e < 1 =$ হলে, সমীকরণটা উপবৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়, $H^2 - 4AB < 0$

$e > 1$ হলে, সমীরকণটা অধিবৃত্তের সমীকরণের সমীকরণে পরিণত হয়, $H^2 - 4AB > 0$

$e = a\sqrt{2}$ হলে, সমীকরণটা আয়তকার অধিবৃত্তের (যেখানে $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$) সমীকরণে পরিণত হয়।

চলমান বিন্দু p (x,y) এর সঞ্চারপথ (locus)ঃ সংঙ্গানুযায়ী,

p (x,y) বিন্দু হতে ফোকাসের দূরত্ব= e × p (x,y) বিন্দু হতে দিকাক্ষ, $ax + by + c = 0$ এর দূরত্ব

$\therefore SP = ePM \Rightarrow \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = e\ \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ বর্গ করে পাই,

$(a^2 + b^2)\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\} = e^2(ax + by + c)^2$

$\Rightarrow \{a^2(l - e^2) + b^2\}x^2 + \{a^2 + b^2(1 - e)^2\}y^2 - 2e^2abxy - 2x[(a^2 + b^2)x_1 + ace^2] - 2y[(a^2 + b^2)y_1 + bce^2] + (x_1^2 + y_1^2)(a^2 + b^2) - e^2c^2 = 0$

$Ax^2 + By^2 + Hxy + Gx + Fy + c = 0 \rightarrow$ যে কোন কণিকের সাধারণ সমীকরণ।

Note :

(i) তুমি অক্ষদ্বয় এবং মূলবিন্দুকে তোমার ইচ্ছামত পরিবর্তন করে সরল সমীকরণ প্রতিপাদন করতে পার।

(ii) অক্ষ পরিবর্তন করে বিপরীত তত্ত্ব দ্বারা উক্ত সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায় যা আমাদের পাঠ্যসুচির অন্তভূক্ত নয়। কিভাবে অক্ষকে পরিবর্তন করা যায় বা ঘুরানো যায় শিখবে। [উচ্চতর দক্ষতার জন্য]

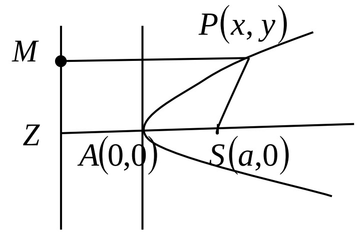
পরাবৃত্তঃ

প্রমিত সমীকরন ঃSP=PM =ZN=a+x

$\Rightarrow\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=a+x$

$\Rightarrow\ y^2=(x+a)^2-(x-a)^2=4ax$

$\Rightarrow y^2=4ax$



অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম

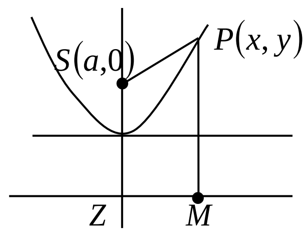
অক্ষরেখা x- অক্ষের সমান্তরাল]

সুতরাং x- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

অক্ষরেখাকে (α,β) বিন্দুতে স্থানান্তর করে ,

$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$

* $x^2=4ay\rightarrow$ y- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম



অক্ষরেখাকে (α,β) বিন্দুতে স্থানান্তর করে ,

$(x-\alpha)^2=4a(x-\beta)$

বিভিন্ন আকারের পরাবৃত্ত ঃ

আকার-০১ঃ $y^2=-4ax$ যেখানে, $a>0$, x'- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

আকার-০২ঃ $x^2=-4ay$ যেখানে, $a>0$, y'- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

আকার-০৩ঃ $y=ax^2+bx+c\rightarrow$অক্ষরেখা y- অক্ষের সমান্তরাল

$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{y}{a}+\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{1}{a}\left[y+\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$

$\Rightarrow X^2=4a'Y$ আকার-০৪ ঃ $x=ay^2+by+c\rightarrow$অক্ষরেখা x- অক্ষের সমান্তরাল

EXAMPLE – 01 : $y=ax^2+bx+c$ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0,5)$ বিন্দুগামী হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : $y=ax^2+bx+c\rightarrow$ y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম [অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল]

$\therefore\ x^2=4ay$, শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত তাহলে $(x+2)^2=4a(y-3)$ যা $(0,5)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 4=4a(5-3)\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore(x+2)^2=4\times\frac{1}{2}(y-3)\Rightarrow x^2+4x+4=2y-6\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2+2x+5$ [প্রদত্ত সমীকরণের সাথে সহগ সমীকৃত করে]

$\therefore\ a=\frac{1}{2}, b=2,\ c=5$ **Ans:**

পরাবৃত্তের সমীকরণ সমীকরণ :

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\left(\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2$

বর্গ করে, $m^2x^2-2lmxy+ly^2-2x\{(l^2+m^2)x_1-ln\}$

$-2y\{(1^2+m^2)y_1+mn\}+(l^2+m^2)(x_1{}^2+y_1{}^2)-n^2=0$

xy সম্বলিত পদসমূহ একটি পূর্ণ বর্গ $(mx - ly)^2$ সৃষ্টি করে । এটিই পরাবৃত্তের বৈশিষ্ট্য ।

$(Ax + By)^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0 \rightarrow$ পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

* (x_1, y_1) বিন্দুর অবস্থান ঃ

$y_1^2 - 4ax < 0$ হলে পরাবৃত্তের ভিতরে

$= 0$ হলে পরাবৃত্তের উপরে

> 0 হলে পরাবৃত্তের বাইরে অবস্থিত হবে।

* পরাবৃত্তঃ ফোকাস (S) এবং দিকাক্ষ (L) হতে সমদুরবর্তী বিন্দুর সঞ্চার পথ।

* পরাবৃত্তের অক্ষ ঃ যা দিকক্ষের উপর লম্ব এবং ফোকাস বা উপকেন্দ্রগামী

* পরাবৃত্তের শীর্ষ ঃ উপকেন্দ্র (S) ও দিকাক্ষের মধ্যবিন্দু।

Note :

(i) দিকাক্ষ ও অক্ষের ছেদবিন্দু শীর্ষ বিন্দু এবং উপকেন্দ্রি একই সরলরেখায় অবস্থিত

(ii) দ্বিকোটি ফোকাস বা উপকেন্দ্রগামী = উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 4a.

(iii) যদি $x < 0$ হয় তবে $y^2 = 4ax$ এ y এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যায় না যা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত। কিন্তু x এর 0 ব্যতিত যে কোন মানের জন্য y এর দুটি মান পাওয়া যাবে । y অক্ষের ডানদিকে কার্ভটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে।

(iv) যখন $x = 0, y = 0$ কার্ভটি মুলবিন্দুগামী হয়। অর্থাৎ শীর্ষ বিন্দুগামী যেখানে কেবল একটি বিন্দু (0. 0) পাওয়া যায় যা $x = 0$ রেখার সাথে বা শীর্ষে স্পর্শক y অক্ষের সাথে সমাপতিত হয়।

(v) ধরি, $k (a, l)$ প্রথম চতুর্ভাগে $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর উপকেন্দ্রিক লম্বের একটি প্রান্তবিন্দু।

তাহলে, $l^2 = 4a^2, l = \pm 2a.$, $\overleftrightarrow{SK} = 2a.$, $\overleftrightarrow{SK'} = -2a$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $4a = \dfrac{(\text{অক্ষ হতে চলমান বিন্দুর দুরত্ব})^2}{\text{শীর্ষে স্পর্শকের উপর চলমান বিন্দু হতে লম্ব দুরত্ব}} = 4a.$

(vi) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণঃ $yy_1 = 4a(\frac{x+x_1}{2})$ অর্থাৎ $yy_1 = 2a(x + x_1)$

অভিলম্বের সমীকরণ: $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

ঢাল এর সাহায্যেঃ $-\frac{y_1}{2a} = m$ হতে, $y_1 = -2am$, এবং $y_1^2 = 4ax$, হতে $x_1 = am^2$

$\therefore$ অভিলম্বের পাদবিন্দু , $(am^2 - 2am)$

$\therefore$ অভিলম্বের আকার ঃ $y + 2am = m(x - am^2) \Rightarrow y = mx - 2am - am^2$

*(x,y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

ধরি, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ $y = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর দুটি বিন্দু ।

তাহলে, $y_1^2 = 4ax_1$ এবং $y_2^2 = 4ax_2$

$y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = = \frac{4a}{y_1+y_2} \rightarrow$ PQ রেখার ঢাল।

স্পর্শকের ক্ষেত্র ঃ $y_2 \rightarrow y_1$ ও $x_2 \rightarrow x_1$ হবে।

$\therefore$ স্পর্শেকের ঢাল = $\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_1 \to y_2}} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_1 \to y_2}} = \frac{4a}{y_1+y_2} = \frac{4a}{2y_1} = \frac{2a}{y_1}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ : $y_1 - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 = 2a(x+x_1)$

স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাই অভিলম্বের $\therefore$ অভিলম্বের ঢাল = $\frac{y_1}{2a}(x - x_1) \Rightarrow 2ay - 2ay_1 = -xy_1 + x_1y_1$

$\Rightarrow 2ay + xy_1 = 2ay_1 + x_1y_1$

অথবা, স্পশর্কের ঢাল $= \frac{dy}{dx}$ [ক্যালকুলাস এর সাহায্যে]

$2y\frac{dy}{dx} = 4a \therefore \frac{dy}{dx} = 2a/y \therefore (\frac{dy}{dx})_{(x_1,y_1)} = \frac{2a}{y_1}$

EXAMPLE – 02 : $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত $(1, 2)$ বিন্দুগামী হলে $(5, 6)$ বিন্দুতে পরাবৃত্তে একটি স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : $2^2 = 4a \times 1 \Rightarrow a = 1 \therefore$ পরাবৃত্তটি ঃ $y^2 = 4x$; স্পর্শকের ঢাল : $(\frac{dy}{dx})_{(5,6)} =$ **?**

$2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{(5,6)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ স্পশর্কের সমীকরণ ঃ $y - 6 = \frac{1}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y - 18 = x - 5 \Rightarrow x - 3y + 13 = 0$

অভিলম্বের সমীকরণ : $y - 6 = -3(x - 5) \Rightarrow 3x + y - 21 = 0$

* $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক বৃত্তয়ার শর্ত ঃ

$(mx + c)^2 = 4ax \Rightarrow m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0$

যা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ যার দুটি মূল x_1ও x_2 একই হলে স্পর্শবিন্দু পাওয়া যাবে । সেক্ষেত্রে নিশ্চয়কের মান শূন্য হবে।

$\therefore 4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{a}{m}$

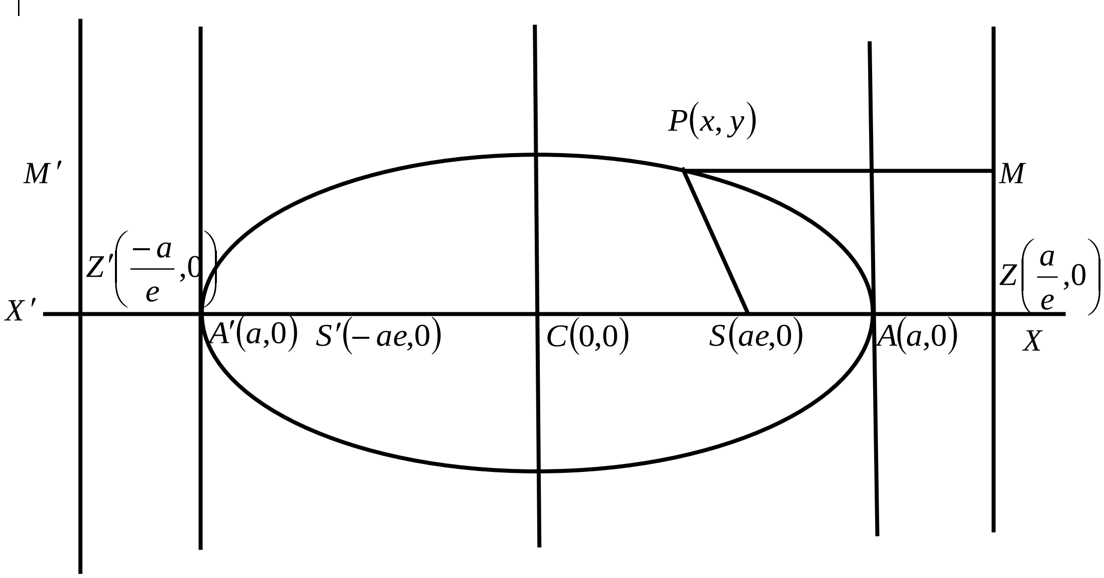
স্পর্শ বিন্দুর ভুজ, $x = -\frac{mc-2a}{m^2} = -\frac{m \times \frac{a}{m} - 2a}{m^2} = -\frac{a-2a}{m^2} = \frac{a}{m^2}$

$y = m \times \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$. $\therefore$ স্পর্শ বিন্দু ঃ $(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m})$

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বাহুদ্বয় সমান হলে স্পর্শ কিছু পাওয়া যাবে যার ভূজ, $x = \frac{-b}{2a}$ কারণ $x_1 = x_2 = x$ এবং $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

আকার $A(x,y)$	শীর্ষ $A(x,y)$	ফোকাস বা উপকেন্দ্র $S(x, y)$	অক্ষের সমীকরণ $ax + bx + c = 0$	দিকাক্ষের সমীকরণ $a^1x + b^1y + c^1 = 0$	শীর্ষে স্পর্শক $a^1x + b^1y + c^1 = 0$	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য (L)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $a_1^1 x + b_1^1 y + c_1^1 = 0$	প্রতিসমতা
$y^2 = 4ax$	$x = 0$, $y = 0$ $A(0,0)$	$x = a$, $y = 0$ $S(a,0)$	$y = 0$ (x-অক্ষ)	$x = -a$ y -অক্ষের সমান্তরাল	$x = 0$ (y—অক্ষ)	$\|4a\|$	$x = a$ [y অক্ষের সমান্তরাল]	x অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা x অক্ষ
$x^2 = 4ay$	$x = 0$, $y = 0$ $A(0,0)$	$y = a$, $x = 0$ $s(0,a)$	$x = 0$ (y অক্ষ)	$y = -a$ x -অক্ষের সমান্তরাল	$y = o$ (x-অক্ষ)	$\|4a\|$	$y = a$ [x অক্ষের সমান্তরাল]	y অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা y অক্ষ
$y^2 = -4ax$	$x = 0$, $y = 0$ $A(0,0)$	$x = -a$, $y = 0$ $s(-a,0)$	$y = 0$ (x-অক্ষ)	$x = -a$ y অক্ষের সমান্তরাল	$x = 0$ (y—অক্ষ)	$\|4a\|$	$x =- a$ [y অক্ষের সমান্তরাল]	x— অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা x— অক্ষ
$x^2 = -4ax$	$x = 0$, $y = 0$ $A(0,0)$	$y = -a$, $x = 0$ $s(0,-a)$	$x = 0$ (y-অক্ষ)	$y = a$ [x -অক্ষের সমান্তরাল]	$y = 0$ (x—অক্ষ)	$\|4a\|$	$y =- a$ [x অক্ষের সমান্তরাল]	y— অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা y— অক্ষ

উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণঃ [$0 < e < 1$]



অক্ষরেখা উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ঃ বৃহৎ অক্ষ ঃ $x -$ অক্ষ, ক্ষুদ্র অক্ষ ঃ $y-$ অক্ষ

$P(x, y)$ বিন্দু হতে S এর দুরত্ব $= e \times p\,(x,y)$ বিন্দু হতে অনুরূপ দিকাক্ষের দুরুত্ব।

$SP = e.PM \Rightarrow SP^2 = e^2 \times PM^2 \therefore (x - ae)^2 + y^2 = e^2 \times (x - a/e)^2$

$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2\left[x^2 - \frac{2ax}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right] = x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2 - a^2e^2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, এখানে, $b^2 = a^2 - a^2e^2 \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$

Note : (i) $y = 0$ হলে, $x = \pm a$ অর্থাৎ $A\,(a, 0)$ ও $A'\,(-a, 0)$ উপবৃত্তের দুটি শীর্ষ ।

(ii) $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ উপবৃত্তে $x^2 > a^2$ হলে কোন বাস্তব মান পাওয়া যাবে না যা উপরোক্ত সমীকরনটিকে সিদ্ধ করে। [অর্থাৎ $x > a$ বা $x < -a$] $x = a$ এর ডান পাশে বা $x = -a$ এর বাম পাশে কোন বিন্দু পাওয়া যাবে না যা উপবৃত্তটিকে সিদ্ধ করে।

[যখন বৃহৎ অক্ষ a কারণ $a < b$ হতে পারে না]

(iii) $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ উপবৃত্তে $y^2 > b^2$এর জন্য অর্থাৎ $y > b$ ও $y < -b$ এর জন্য x এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যাবে না যা $y = b$ এর উপরে বা $y = -b$ এর নীচে অবস্থিত এবং উপবৃত্তটিকে সিদ্ধ করে ।

(iv) যখন $x = +a$ বা $x = -a$, $y^2 = 0$ তখন $x = a$ ও $x = -a$ যথাক্রমে উক্ত উপবৃত্তে বৃহৎ অক্ষের প্রান্তবিন্দুতে দুটি স্পর্শক হবে।

(v) যখন $y = +b$ বা $y = -b$, $x^2 = 0$ তখন $y = b$ ও $y = -b$ যথাক্রমে উক্ত উপবৃত্তে ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্তবিন্দতে দুটি স্পর্শক হবে।

(vi) একটি বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব ঃ $\overleftrightarrow{SP} = e\overleftrightarrow{PM} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ae$

$\overleftrightarrow{S'P} = e\overleftrightarrow{PM'} = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ae$, $\overleftrightarrow{SP} + \overleftrightarrow{S'P} = 2a \rightarrow$ যা একটি ধ্রুব সংখ্যা ।

সিদ্ধান্ত :

(a) উপবৃত্তটি $x = \pm a$ ও $y = \pm b$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

(b) উপবৃত্তটির দ্বিতীয় আর একটি ফোকাস বা উপকেন্দ্র $S_1(-ae, o)$ এবং অনুরূপদিকাক্ষ L' ($x = -a/e$) আছে।

$\left|\overline{E'C}\right| = |CE| = \frac{a}{e}$, The equation of L' is $x = -{}^{a}/_{e}$

উপবৃত্তটির কেন্দ্র $(0, 0)$ এর পরির্বতে (α, β) হলে ,

$\frac{(x-\alpha)^2}{A^2} + \frac{(y-\beta)^2}{B^2} = 1$ (যেখানে, $A^2 > B^2$ হলে বৃহৎ অক্ষ $x-$ অক্ষের সমান্তরাল।

$\frac{(x-\alpha)^2}{B^2} + \frac{(y-\beta)^2}{A^2} = 1$(যেখানে, $B^2 > A^2$ হলে বৃহৎ অক্ষ $y -$ অক্ষের সমান্তরাল।

উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরন ঃ $\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta^2)} = e\frac{(ax+by+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

যেখানে, উপকেন্দ্র $S\,(\alpha,\beta)$ ও অনুরূপ দিকাক্ষ ঃ $ax + by + c = 0$, উৎকেন্দ্রিকত = e $[0 < e < 1]$

পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। $e > 1$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ সাধারণ সমীকরণে পরিণত হবে।

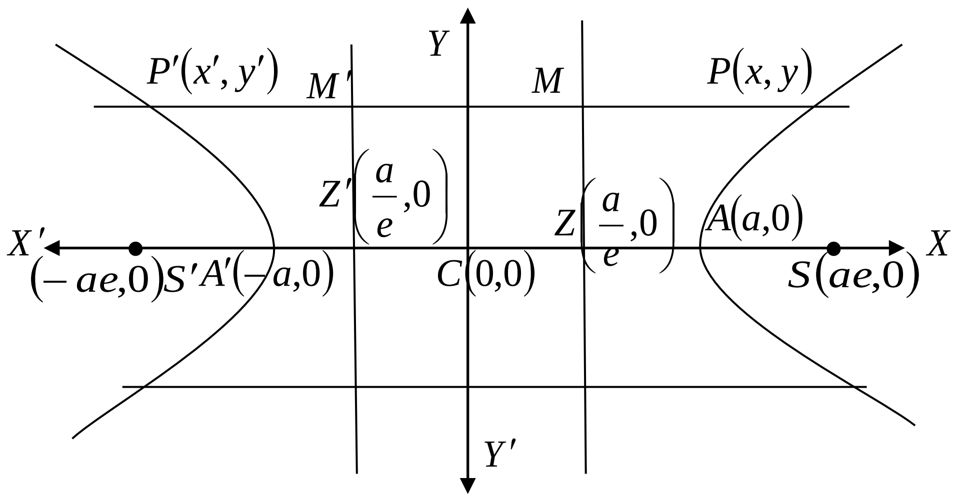
* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. ঢাল, $m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y-y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$

* $y = mx + c$ রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্তঃ $c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

স্পর্শ বিন্দু ঃ $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$ এবং $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$.

অধিবৃত্ত (Hyperbola) ঃ



সংজ্ঞানুযায়ী ঃ

$SP = e\,PM \therefore SP^2 = e^2 . PM^2$

$\therefore (x-ae)^2+(y-0)^2 = e^2(x-{}^a/_e)^2 = x^2-2xae+a^2e^2+y^2 = x^2e^2-2xae+a^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1 \therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

যেখানে, $b^2 = a^2(e^2-1) \Rightarrow e = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}$.

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = AA'$, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b = BB'$

Note :

(i) $e^2>1$ এর জন্য $a^2(e^2-1)$ রাশিটি ধনাত্মক $a^2(e^2-1) = b^2$ [যা একটি ধনাত্মক সংখ্যা]

$e^2 >, =$ or < 2 এর জন্য , $b^2 >, =, < a^2$ হতে পারে।

(ii) $A : (a, 0)$ ও $A' : (-a, 0)$ দুটি শীর্ষ বিন্দুতে উক্ত পরাবৃত্ত ছেদ করেছে।

(iii) $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y^2 = -b^2 \Rightarrow y = \sqrt{-b^2}$ যা কাল্পনিক সংখ্যা $b \in R$ হলে, y এর এমন কোন পাওয়া যাবে না যা অধিবৃত্তের উপস্থ কোন বিন্দু।

(iv) $-a < x < a$ এর মধ্যে y এর কোন মান পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ কার্ভের কোন অংশ A ও A′ এর মধ্যে থাকতে পারে না । অর্থাৎ $x > a$ or $x > -a$ এর মধ্যে y এর অসংখ্য মান পাওয়া যাবে যার জন্য কার্ভটি উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে।

$|\overline{E'C}| = |\overline{CE}| = {}^{a}/_{c}$; L_1 এর সমীকরণ : $x = {}^{-a}/_{e}$.

(v) P এর দ্বি-কোটি= উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $\frac{2b^2}{a}$

(viii) একটি বিন্দুর বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দুরত্ব ঃ $\overline{SP}, \overline{S'P}$

$\overline{SP} = e.\ \overline{PM} = e\ (x - {}^{a}/_{c}) = ax - a$

$\overline{S'P} = e.\ \overline{PM}' = e\ ({}^{a}/_{c} + x) = a + ax.$

$\overline{SP}$ ও $\overline{SP}$ কে প্রায়ই উপকেন্দ্রিক ব্যাসার্ধ বলে [p এর]

$\overline{S'P} - \overline{SP} = 2a$ হতে প্রমাণ করা যায়, $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$ $c > a$, $c^2 - a^2 = b^2$ যা ধনাত্বক

$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, $e = {}^{c}/_{a}$.

(iii) অন্য আকার

(a) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ এখানে, আড় অক্ষঃ y অক্ষ

(b) সাধারণ সমীকরণ : $Ax^2 - By^2 = \pm 1$ $(A, B > O)$ (+)ve sign হলে ফোকাস বা উপকেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত এবং এর অক্ষদ্বয় x ও y অক্ষ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু]

(c) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ যেখানে আড় অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ যেখানে আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল

Note : সবক্ষেত্রে আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a units.

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b units.

(d) $x^2 - y^2 = \pm a^2$ আকারে অধিবৃত্তকে সমবাহু বা আয়াতকার অধিবৃত্ত বলে।

যায় উৎকেন্দ্রিকতা সকল ক্ষেত্রে $\sqrt{2}$, অর্থাৎ, $e = a\sqrt{2}$ ।

* $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ঢাল, $m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

এবং উক্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

* $mx + c$ রেখা $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত ঃ

$c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ স্পর্শ বিন্দু ঃ $(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}})$ এবং $(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2m^2+b}})$.

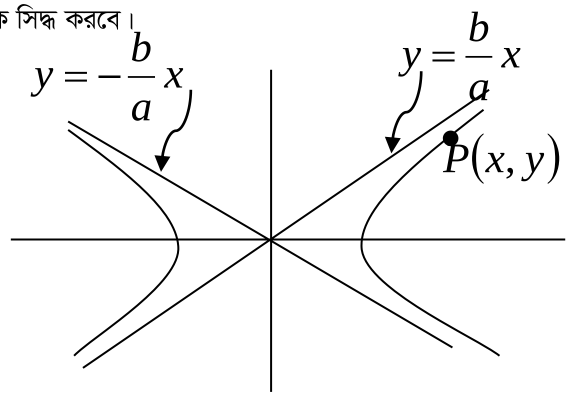
*অসীমতট (Asymptotes): অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ হতে আমরা লিখতে পারি,

$\Rightarrow (bx + ay)\ (bx - ay) = a^2b^2$

$bx - ay = 0$ রেখা ও বক্ররেখাকে একই অক্ষে আকাঁলে দেখা যাবে কেন্দ্র থেকে দুরত্ব বৃদ্ধির সাথে সাথে অর্থাৎ x এর বৃদ্ধির সাথে সাথে অধিবৃত্তটি রেখাটির খুবই নিকটবর্তী হচ্ছে কিন্তু রেখাটিকে স্পর্শ করতে পারছে না।

ধরি, $P(x_1, y_1)$ প্রথম অথবা তৃতীয় চতুর্থভাগে A অধিবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু রেখাটি হতে বিন্দুর দুরুত্ব,

$d = \left|\frac{bx_1 - ay_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ যেহেতু P অধিবৃত্তের উপরস্থ বিন্দু সুতরাং বিন্দুটি অবশ্যই অধিবৃত্তকে সিদ্ধ করবে।



$\therefore\ b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2 \Rightarrow bx_1 - ay_1 = \frac{a^2b^2}{bx_1 + ay_1}$

$\therefore\ d = \left|\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{bx_1 + ay_1}\right|$ স্পষ্টত d কখনও শূন্য হতে পারে না ;

যদি P বিন্দু কেন্দ্র হতে দুরে সরতে থাকে যাতে

x ও y উভয়ই অসীমভাবে বৃদ্ধি পায় তবে d শূন্যের খুবই নিকটবর্তী হবে।

অর্থাৎ এক্ষেত্রে , $d \to 0$.

$bx + ay = 0$ রেখার জন্যও একই ফল পাওয়া যায় যখন $p(x_1, y_1)$ বিন্দুটি দ্বিতীয় ও চুতর্থ চতুর্ভাগে অর্ধিবৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দু] সুতরাং $y = \pm\frac{b}{a}x$ রেখা দুটি $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$অধিবৃত্তের দুটি অসীমতট।

অসীমতট হলো আয়তক্ষেত্রে কর্ণ বরাবর দুটি সরলরেখা

শর্ত ঃ আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র ও অধিবৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু এবং আয়তক্ষেত্র বাহুগুলো অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল এবং সমান।

Note: আয়তকার অধিবৃত্তের জন্য অসীমতট দুটি পরস্পর লম্ব।

*অসীমতট এর সমীকরণ দেয়া আছে। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

সূত্র ঃ $(bx + ay)(bx - ay) + k = 0$ অধিবৃত্তটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, k নির্ণয় কর।

POINTS	ELLIPSE (উপবৃত্ত): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; a > b e <	HYPERBOLA(অধিবৃত্ত): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;(a > b)
1.কেন্দ্র : C	1. (0,0)	1. (0,0)
2. উপকেন্দ্র : S or S′	2. $(\pm ae, o)$ S: (ae,0), S′ $(-ae, 0)$	2. $(\pm ae, 0)$ S: (ae,0) S′ $(-ae, 0)$
3. দিকাক্ষের সমীকরণ ,MZ	3. $x = \pm\, {}^{a}/_{e}$	3. $x = \pm\, {}^{a}/_{e}$
4. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ	4. $\frac{2b^2}{a}$; $x = \pm\, ae$	4. $\frac{2b^2}{a}$; $x = \pm\, ae$
5. বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ.	5. $y = 0$	5. $y = 0$ (আড় অক্ষ)
6. ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ;	6. $x = 0$	6. $x = 0$ (অনুবন্ধী অক্ষ)
7. উৎকেন্দ্রিকতা	7. $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	7. $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$
8. যে অঞ্চলে কার্ভ পাওয়া যায় না।	8. $x > a$ or $x < -a$	8. $-a < x < a$
9. প্রধান সম্পর্ক:	9. $\overline{CS} = e.\overline{CA}$; $\overline{CA} = e.\overline{CE}$ $\overline{CS}.\overline{CE} = \overline{CA}^2$	9. $\overline{CS} = e.\overline{CA}$; $\overline{CA} = e.\overline{CE}$ $\overline{CS}.\overline{CE} = \overline{CA}^2$
10. অন্য আকার	10 (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a^2 > b^2$. y অক্ষ→ বৃহৎ অক্ষ (b) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a^2 > b^2$ কেন্দ্রঃ (h,k) work : $x - h = X \therefore x = X + h$. $y - k = Y \therefore y = Y + k$.	10. (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a^2 > b^2$. y− অক্ষ আড় অক্ষ. (b) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, কেন্দ্রঃ(h, k) work : $x - h = X \Rightarrow x = X + h$. $y - k = Y \Rightarrow y = Y + k$.

পরাবৃত্ত

TYPE : 01

পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরন সমাধান সম্পর্কিত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01: $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 9x$ এর সাথে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $y^2 = 4ax$ এর তুলনা করে পাই, $4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$

শীর্ষবিন্দু :$x = 0, y = 0 \quad \therefore$ শীর্ষবিন্দু$(0,0)$(Ans)

উপকেন্দ্র :$(a, 0), a = \frac{9}{4}, \quad \therefore$উকেন্দ্রের স্থানাংক$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ (Ans)

উপকেন্দিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = \left|4 \times \frac{9}{4}\right| = 9$ (Ans)

নিয়ামকের সমীকরণ : $x = -a \Rightarrow x = -\frac{9}{4} \Rightarrow 4x = -9 \Rightarrow 4x + 9 = 0$ (Ans)

EXAMPLE – 02: $x^2 = -12y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : $x^2 = -12y$ প্রদত্ত পরাবৃত্তের সাথে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $x^2 = -4ay$ এর তুলনা করে পাই,

$4a = 12, \Rightarrow a = \frac{12}{4}, \quad \therefore a = 3$

শীর্ষবিন্দু : $(0, 0); x = 0, -y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \therefore$শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$(Ans)

উপকেন্দ্র :$(0, -a) = (0, -3)$(Ans)

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4 \times 3| = 12$ (Ans)

নিয়ামকের সমীকরণ :$y = a \Rightarrow y = 3 \Rightarrow y - 3 = 0$ (Ans)

EXAMPLE – 03:$(y - 1)^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ,$(y - 1)^2 = 4(x - 2)$ এর সাথে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $Y^2 = 4aX$ এর তুলনা করে পাই, $Y = y - 1, X = x - 2$

$4a = 4 \Rightarrow a = 1 \quad \therefore a = 1,$

শীর্ষবিন্দু : $X = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, Y = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \therefore$ শীর্ষবিন্দু :$(2, 1)$(Ans)

উপকেন্দ্র :$(a, 0)$; $X = a \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$, $Y = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(3, 1)$(Ans)

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4 \times 1| = 4$

নিয়ামকের সমীকরণ :$X = -a \Rightarrow x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0$ (Ans)

EXAMPLE – 04 : $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, ফোকাস, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ,এর অক্ষরেখা , নিয়ামকরেখার সমীকরণ, উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু দুটি ,শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0 \Rightarrow 5\left(x^2 + 6x + \frac{5}{2}y + \frac{59}{5}\right) = 0$

$5 \neq 0 \therefore x^2 + 6x + \frac{2}{5}y + \frac{59}{5} = 0 \Rightarrow x^2 + 2.x.3 + 3^2 - 3^2 + \frac{2}{5}y + \frac{59}{5} = 0$

$\Rightarrow (x+3)^2 = \frac{-2}{5}y + 9 - \frac{59}{5} \Rightarrow (x+3)^2 = -\frac{2}{5}y + \frac{45-59}{5} \Rightarrow (x+3)^2 = -\frac{2}{5}y - \frac{14}{5}$

$\Rightarrow (x+3)^2 = -\frac{2}{5}(y+7)$

পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $X^2 = -4aY$ এর তুলনা করে পাই, $X = x + 3$, $Y = (y + 7)$

$4a = \frac{2}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{10}$

(i)শীর্ষবিন্দু :$X = 0, \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, Y = 0, \Rightarrow Y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7$

$\therefore$শীর্ষবিন্দু :$(-3, -7)$

(ii)ফোকাস বা উপকেন্দ্র :$Y = -a, \Rightarrow y + 7 = \frac{-1}{10} \Rightarrow y = -7 - \frac{1}{10} \Rightarrow y = -\frac{70+1}{10}$ $\therefore y = \frac{-71}{10}$

$X = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$\therefore$ফোকাস বা উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= \left(-3, -\frac{71}{10}\right)$

(iv)উকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = \left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

(v)অক্ষরেখার সমীকরণ, $x + 3 = 0$

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ,$Y = a, \Rightarrow y + 7 = \frac{1}{10} \Rightarrow 10y + 70 = 1 \Rightarrow 10y + 69 = 0$

(vii) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু দুটি $(\pm 2a, a)$, $x = \pm 2a \Rightarrow x + 3 = \pm 2 \times \frac{1}{10} \Rightarrow x + 3 = \pm\frac{1}{5}$

(+)veনিয়ে,$x + 3 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -3 + \frac{1}{5} = \frac{-15+1}{5} = \frac{-14}{5}$

$(-)$veনিয়ে,$x+3=-\frac{1}{5} \Rightarrow x=-3-\frac{1}{5}=\frac{-15-1}{5}=\frac{-16}{5}$

$Y=a \Rightarrow y+7=\frac{-1}{10} \Rightarrow y=-7-\frac{1}{10}=-\frac{70+1}{10}=-\frac{71}{10}$

∴উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তেবিন্দুদ্বয় $\left(\frac{-14}{5},\frac{-71}{10}\right),\left(\frac{-16}{5},\frac{-71}{10}\right)$

$(viii)$ শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ : X অক্ষের সমান্তরাল এবং X অক্ষ হতে -7 একক দূরে।∴ $y=-7 \Rightarrow y+7=0$

(ix) উভয় অক্ষের সমীকরণ, $X=0 \Rightarrow x+3=0, \quad Y=0, \Rightarrow y+7=0$

পরাবৃত্তটির x অক্ষের সমীকরণ, $x+3=0$এবং y অক্ষের সমীকরণ,$x+7=0$

(x) উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $=\left|-\frac{71}{10}\right|-\left|\frac{-69}{10}\right|=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\left[\therefore 10y+69=0 \quad \therefore y=-\frac{10}{69}\right]$

EXERCISE – 01: $y^2=4y+4x-8$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। $(1,2);(2,2);\ 4; \quad x=0. \qquad (Ans)$

EXERCISE – 02: $y^2=4px$ পরাবৃত্তটি $(3,-2)$ বিন্দুদিয়ে অতিক্রম করলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। $4\ /\ 3,\ (1/\ 3,0), 3x+1=0\ (\ Ans)$

EXERCISE –03: $5x^2+15x-10y-4=0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ, অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\left(\frac{3}{2},\frac{-61}{40}\right); 2x+3=0; 40y+81=0 \qquad (Ans)$

EXERCISE – 04:$3y^2-10x-12y-18=0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ, উপকেন্দ্র, অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। $(-3,2),\left(-\frac{13}{6},2\right), y-2=0, 6x+23=0\ (Ans)$

TYPE : 02

পরাবৃত্ত সনাক্তকরন বা পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় সংক্রান্ত গনিতিক সমস্যা ঃ

EXAMPLE – 01 : $(-1,1)$ উপকেন্দ্র এবং $x+y+1=0$ নিয়ামকরেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের $(Parabola)$ সমীকরণ নির্ণয় কর। উক্ত পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

SOLVE : দেওয়া আছে, উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(-1,1)$

এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ,$x+y+1=0 \Rightarrow x+y=-1 \Rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{-1}=1$

মনেকরি, নির্ণেয় পরাবৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দু $P\ (x,y)$.

পরাবৃত্তের সঙ্গানুসারে উপকেন্দ্র (s) হতে পরাবৃত্তের উপর বিন্দু$P(x,y)$ এর দূরত্ব $= P\ (x,y)$ বিন্দু হতে নিয়ামকMZM' এর দূরত্ব,$\sqrt{\{x-(-1)\}^2+(y-1)^2} = |\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}|$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2 = \left(\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1 = \frac{x^2+y^2+1+2xy+2y+2x}{2}$

$\Rightarrow 2x^2+4x+2+2y^2-4y+2 = x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$

$\Rightarrow x^2+y^2-2xy+2x-6y+3=0 \Rightarrow (x-y)^2+2x-6y+3=0$

[Not : xyসম্বলিত পদ পূর্ণ বর্গ সৃষ্টি করে বলে উক্ত $P(x,y)$ বিন্দুর চলমান পথ একটি পরাবৃত্ত হবে]

অক্ষরেখা : অক্ষরেখা নিয়ামক রেখার উপর লম্ব এবং উপকেন্দ্রগামী। নিয়ামকের উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x-y+k=0$ যা $(-1,1)$ বিন্দুগামী । $\therefore\ -1-1+k=0 \Rightarrow k=2$

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $x-y+2=0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য : উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ যা নিয়ামক রেখার সমান্তরাল এবং উপকেন্দ্রগামী।

নিয়ামক রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x+y+k=0$ যা $(-1,1)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং,$-1+1+k=0 \Rightarrow k=0$

$\therefore$উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ : $x+y=0 \Rightarrow y=-x \ldots\ldots\ldots..(i)$

$y=-x$ পরাবৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\{x-(-x)\}^2+2x-6(-x)+3=0$

$\Rightarrow (2x)^2+2x+6x+3=0 \Rightarrow 4x^2+8x+3=0 \Rightarrow 4x^2+6x+2x+3=0$

$\Rightarrow 2x(2x+3)+1(2x+3)=0 \Rightarrow (2x+3)(2x+1)=0$

হয়,$2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$;অথবা, $2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

(i)নং সমীকরণে $x = -\frac{3}{2}$ বসিয়ে পাই, $y=-x=-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ $\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের একটি প্রান্তবিন্দু $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

আবার,(i)নং সমীকরণে$x=-\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই, $y=-x=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ $\therefore$উপকেন্দ্রিক লম্বের অপর প্রান্তবিন্দু$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য= $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ একক.

$\therefore$নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ,$(x-y)^2+2x-6y+3=0$

অক্ষরেখার সমীকরণ, $x-y+2=0$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , $\sqrt{2}$(Ans)

EXAMPLE – 02 : $(3, 4)$ উপকেন্দ্র ও $(0, 0)$ শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক, $S\ (3, 4)$ এবং শীর্ষবিন্দু, $A\ (0, 0)$

আমরা জানি, নিয়ামকরেখা অক্ষরেখার উপর লম্ব এবং অক্ষরেখা উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা।

শীর্ষবিন্দু, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু ও উপকেন্দ্রের সংযোজক রেখাকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

ধরি, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দু (α, β)

তাহলে শর্তানুসারে, $\frac{\alpha+3}{2} = 0 \Rightarrow \alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -3$

এবং $\frac{\beta+4}{2} = 0 \Rightarrow \beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -4$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $(-3, -4)$

ধরি, নিয়ামক রেখার ঢাল $= m_2$,অক্ষরেখার ঢাল m_1হলে, $m_1 = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$

শর্তানুসারে,$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 \times \frac{4}{3} = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{4}$

তাহলে, নিয়ামকরেখা $(-3, -4)$বিন্দুগামী এবং $-\frac{3}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখা।

সুতরাং, নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $y - (-4) = -\frac{3}{4}\{x - (-3)\} \Rightarrow y + 4 = -\frac{3}{4}(x + 3)$

$\Rightarrow 4y + 16 = -3x - 9 \Rightarrow 3x + 4y + 25 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $3x + 4y + 25 = 0$

EXAMPLE – 03 : একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যার উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি পরাবৃত্তকে এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে।

SOLVE : নির্ণেয় পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(0, 0)$ এবং শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ, $x - y + 1 = 0$

$\Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 0$

উপকেন্দ্র $S(0, 0)$ হতে শীর্ষে স্পর্শকের উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য,$AS = \left|\frac{0-0+1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

তাহলে অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার ছেদবিন্দুর দূরত্ব,$ZS = 2 \times AS = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$ সুতরাং, রেখাটি ঢাল $= 1$

অক্ষরেখা এর উপর লম্বরেখা যার ঢাল $= -1$

ধরি, -1 ঢাল বিশিষ্ট রেখার উপর$(0\ ,0)$বিন্দু হতে $\sqrt{2}$এর দুরের বিন্দু স্থানাংক(x^1, y^1)

$\tan\theta = -1 \quad \therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \ \therefore \frac{x^1-0}{\cos\theta} = \sqrt{2} \ \Rightarrow x^1 = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$\frac{y^1-0}{\sin\theta} = \sqrt{2} \quad \therefore y^1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \ \therefore Z$ বিন্দুর স্থানাংক $(-1, 1)$

$(-1, 1)$বিন্দুগামী এবং 1ঢাল বিশিষ্ট রেখাই নিয়ামকরেখা যার সমীকরন, $y - 1 = 1(x + 1) \ \Rightarrow y - 1 = x + 1 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

ধরি, নির্ণেয় পরাবৃত্তের উপরস্থ চলমান বিন্দু $P(x, y)$

সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM \ \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \left|\frac{x-y+2}{1^2 + (-1)^2}\right|$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \left(\left|\frac{x-y-2}{\sqrt{2}}\right|\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{x^2+y^2+4-2xy-4y+4x}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow (x + y)^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।(Ans)

.একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি পরাবৃত্তকে এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে।

$(x + y)^2 - 4x + 4y - 4 = 0 \quad$ (Ans.)

EXERCISE – 01: এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র$(-8, -2)$এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $2x - y = 9$.

$[(x + 2y)^2 + 116x + 2y + 259 = 0$ (Ans)]

EXERCISE – 02: $(1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ নিয়ামকরেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর অক্ষেরও সমীকরণ নির্ণয় কর। $(4x - 3y)^2 - 44x - 42y + 49 = 0, 3y - 4x + 1 = 0$ (Ans)

EXERCISE – 03: একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0, 0)$শীর্ষবিন্দু$(-2, -1)$। তার নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$2x + y + 10 = 0$ (Ans)

EXERCISE – 04: একটি প্যারাবোলার নিয়ামকরেখা $2x + y = 0$এবং শীর্ষ $(3, -1)$ । প্যারাবোলাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x^2 + 4y^2 - 4xy - 50x + 125 = 0 \quad$ (Ans)

TYPE : 03

পরাবৃত্তের ফোকাস দূরত্ব সংক্রান্ত গনিতিক সমস্যা ঃ

EXAMPLE – 01: $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

SOLVE : পরাবৃত্তটিকে $y^2 = 4ax$ এর সাথে মিলিয়ে পাই, $4a = 8 \Rightarrow a = 2$,

প্রশ্নমতে , $x + a = 8 \Rightarrow x = 6$

$\therefore\ y^2 = 8.6 = 48;\ \therefore y = \sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$ অতএব, নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(6, \pm 4\sqrt{3})$

EXAMPLE – 02 : $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

SOLVE : $y^2 + 16x$ এর সাথে পরবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর প্রদত্ত পরাবৃত্ত তুলনা করে পাই,

$4a = 16 \Rightarrow a = 4$,

আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব= নিয়ামক রেখা হতে উকেন্দ্রের দূরত্ব $= x + a = x + 4$

প্রশ্নমতে, $x + 4 = 6 \Rightarrow x = 6 - 4\ \therefore x = 2$

$y^2 = 16x$ পরাবৃত্তে $x = 2$ বসিয়ে পাই, $y^2 = 16 \times 2 \Rightarrow y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2\ \therefore y = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore$নির্ণেয় বিন্দুর স্থানংক$\left(2, \pm 4\sqrt{2}\right)$(Ans)

EXERCISE – 04 : $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।$\left(4, \pm 4\sqrt{2}\right)$(Ans)

EXERCISE – 04: $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে, ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর। $18\frac{1}{4}$(Ans)

EXAMPLE – 03 : $y = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং তা $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, cএর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত পরাবৃত্ত, $y = ax^2 + 6x + c$

পরাবৃত্তটি $(x - x_1)^2 = 4a\ (y - y_1)$আকারের ফলে তা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

$(-2, 3)$শীর্ষ বিশিষ্ট y অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখার সাপেক্ষে পরাবৃত্তটির সমীকরণ,

$(x + 2)^2 = 4a\ (y - 3)$ যা $(0, 5)$ বিন্দুগামী, সুতরাং,$(0 + 2)^2 = 4a\ (5 - 3) \Rightarrow 4 = 4a \times 2 \Rightarrow 4a = 2$

(i)নং পরাবৃত্তটির সমীকরণ,$(x + 2)^2 = 2(y - 3) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 2(y - 3)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = y - 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$; নির্ণেয় পরাবৃত্ত ও প্রদত্ত পরাবৃত্ত দুটিকে পরস্পর তুলনা করে পাই, $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = 5$ **(Ans)**

[বিঃ দ্র : প্রদত্ত পরাবৃত্তকে প্রমিত আকারে পরিণত করে অংকটি সমাধান করা যাবে।]

উপবৃত্ত

TYPE : 01

উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরন সমাধান সম্পর্কিত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 : $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 5y^2 + 10y + 1 = 0$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) + 1 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 + 2y + 1) - 4 \times 4 - 5 \times 1 + 1 = 0$$

$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 - 20 = 0 \Rightarrow 4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i)নং সমীকরণের সাথে উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$এর তুলনা করে পাই, $a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$এবং $X = x - 2, Y = y + 1$

উপকেন্দ্রের স্থানাংক : $S\ (ae, o), S'(-ac, 0)$

$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{5-4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \therefore ae = \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$

$\therefore X = ae = 1 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$ এবং $Y = 0 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

$\therefore S\ (3, -1)$ আবার, $-ae = -1 \Rightarrow X = -ae \Rightarrow x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1,$

$Y = 0 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \therefore S'(1, -1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$; উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ : $X = \pm a/e \Rightarrow x - 2 = \pm \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow x - 2 = \pm 5$

(+)ve নিয়ে, $x - 2 = 5 \Rightarrow x - 7 = 0$;(−)veনিয়ে, $x - 2 = -5 \Rightarrow x + 3 = 0$

$\therefore$নিয়ামক রেখা দুটি, $x - 7 = 0, x + 3 = 0$ $\therefore$উপকেন্দ্র :$(3, -1),\ (1, -1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য :$\frac{8}{\sqrt{5}}$,উৎকেন্দ্রিকতা :$\frac{1}{\sqrt{5}}$, নিয়ামকরেখা দুটি : $x - 7 = 0, x + 3 = 0$

EXAMPLE – 02 : p এর মান কত হলে, $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে যাবে ? উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $4x^2 + py^2 = 80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i)নং উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দুগামী বলে, $4 \times 0 + p(\pm 4)^2 = 80 \Rightarrow 16p = 80 \Rightarrow p = \frac{80}{16} \therefore p = 5$ (Ans)

$\therefore p$ এর মান (i)নং এ বসিয়ে পাই, $4x^2 + 5y^2 = 80 \Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$

উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2 = 20 \Rightarrow a = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 4} = 2\sqrt{5}$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} = 4, a > b \therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{20}} = \sqrt{\frac{20-16}{20}} = \sqrt{\frac{4}{20}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্রের স্থানাংক: $(\pm ae, 0) = \left(\pm 2\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) = (\pm 2, 0)$(Ans)

অক্ষদুটি যথাক্রমে $2a$ এবং $2b$ অর্থাৎ, $2 \times 2\sqrt{5}$ এবং 2×4বা, $4\sqrt{5}$এবং8

বৃহৎ অক্ষ, $2a = 4\sqrt{5}$, ক্ষুদ্র অক্ষ, $2b = 8$ (**Ans**)

EXAMPLE – 03 : $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $9x^2 + 25y^2 = 225$

$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$[225 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে।]$\ldots\ldots\ldots..(i)$

(i) নং সমীকরণকে, উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

উপকেন্দ্র :$(\pm ae, 0)$; $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 5 \times \frac{4}{5} \therefore x = \pm 4, y = 0$

$\therefore$উপকেন্দ্রের স্থানাংকঃ $(\pm 4, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{5} = \frac{18}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ ঃ $x = \pm ae = 5 \times \frac{4}{5} = \pm 4 \therefore x = \pm 4$

$(+)$veনিয়ে, $x = 4 \Rightarrow x - 4 = 0$; $(-)$ ve নিয়ে, $x = -4 \Rightarrow x + 4 = 0$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ : $x = \pm\frac{a}{e} = \pm 5 \times \left(\frac{1}{4/5}\right) = \pm\frac{25}{4}$. বা $4x = \pm 25$

$(+)$veনিয়ে, $4x = 25 \Rightarrow 4x - 25 = 0$

$(-)$ve নিয়ে , $4x = -25 \Rightarrow 4x + 25 = 0$

EXERCISE – 01 : $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি $(6,4)$বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। p- এর মান, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $100, \frac{\sqrt{3}}{2}; (\pm 5\sqrt{3}, 0)$ (Ans:)

EXERCISE – 02 : এর মান কত হলে, $px^2 + 4y^2 = 1$উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যাবে ?

উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। $p = 1$,উৎকেন্দ্রিকতা,$\frac{1}{2}\sqrt{3}; 2; 1$ (Ans)

EXERCISE – 03 :দেখাও যে,$2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। ইহার উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $e = \frac{1}{\sqrt{2}}, (2,3), (2,-1)$(Ans)

EXERCISE – 04 :$2x^2 + 3y^2 = 1$উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

$\frac{2}{3}\sqrt{2}, \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ (**Ans**:)

TYPE : 02

উপবৃত্ত সনাক্তকরন বা উপবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় সংক্রান্ত গনিতিক সমস্যা

EXAMPLE -01: উপকেন্দ্র $(-1, 1)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং নিয়ামকরেখা $x - y + 3 = 0$ হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : দেওয়া আছে, নির্ণেয় উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(-1, 1)$ উৎকেন্দিকতা , $e = \frac{1}{2}$

নিয়ামকরেখা , $MZ : x - y + 3 = 0$

ধরি, নির্ণেয় উপবৃত্তের উপরস্থ চলমান বিন্দু $P(x, y)$ তাহলে উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে আমরা জানি,$SP = e.PM$

$\Rightarrow \sqrt{\{x-(-1)\}^2 + (y-1)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{x-y+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x-y+3}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{1}{8}(x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6y + 6x)$

$\Rightarrow 8x^2 + 16x + 8y^2 - 16y + 16 = x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9$

$\Rightarrow 7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans)**

EXAMPLE - 02 : একটি উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ এবং তা $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে গমন করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : নির্ণেয় উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{4}{5}$

ধরি, নির্ণেয় উপবৃত্তটি : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$এবং $a > b \dots\dots\dots (i)$

[প্রশ্নে উপবৃত্তটি কোন অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম উল্লেখ না থাকলে তোমরা ধরে নিবে উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম]

প্রশ্নমতে ,$e = \frac{4}{5} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{25-16}{25} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots. (ii)$

আবার (i) নং উপবৃত্তটি $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দুগামী বলে,$\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{5})^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{100}{9a^2} + \frac{5}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{100}{9a^2} + \frac{5}{\frac{9}{25}a^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{100}{9} + \frac{25}{9}\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{100+125}{9}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{225}{9}\right) = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{225}{9} \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5$

(ii)নং সমীকরণে aএর মান বসিয়ে পাই, $\frac{b}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow b = \frac{3}{5}a = \frac{3}{5} \times 5 = 3$

(i)নং সমীকরণে $a = 5$ ও $b = 3$ বসিয়ে পাই, $\therefore$নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ,$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$ **(Ans)**

EXAMPLE - 03 : কোনো একটি উপবৃত্ত $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x- অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ রেখাকে y- অক্ষের উপর ছেদ করে। তার সমীকরণ, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots.... (i)$

উপবৃত্তটি $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর ছেদ করে। সুতরাং ছেদবিন্দুর কোটি, $y = 0$

$\therefore \frac{x}{7} + \frac{0}{2} = 1$ বা, $x = 7$, $\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(7, 0)$;

আবার, উপবৃত্তটি $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ রেখাকে y- অক্ষের উপর ছেদ করে। সুতরাং $x = 0$ বসিয়ে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই $(0, 5)$ অতএব, উপবৃত্তটি $(7, 0)$ ও $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{49}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$বা, $a^2 = 49$ এবং $\frac{0}{a^2} + \frac{25}{b^2} = 1$ বা, $b^2 = 25$

$\therefore$নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ $[\because a > b, e > 0$

$\therefore$ উপকেন্দ্রয় $(\pm\, ae, 0)$, বা $\left(\pm\, 7.\frac{2\sqrt{6}}{7}, 0\right)$বা $\left(\pm\, 2\sqrt{6}, 0\right)$.

EXAMPLE - 04 : উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে ও অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, \pm 8)$এবং উৎকেন্দ্রিকতা$= \frac{8}{9}$.

SOLVE : দেওয়া আছে, নির্ণেয় উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, \pm 8)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{8}{9}$

ধরি, নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ,$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b > a$

উপকেন্দ্র দুটি, $S\,(0, be)$ ও $S'(0, -be)$

প্রশ্নমতে, $be = 8 \Rightarrow b \times \frac{8}{9} = 8 \Rightarrow b = 8 \times \frac{9}{8} \Rightarrow b = 9 \Rightarrow b^2 = 81$

আবার,$e = \frac{8}{9} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{8}{9} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{64}{81} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 1 - \frac{64}{81}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{81-64}{81} = \frac{17}{81} \Rightarrow a^2 = \frac{17}{81} \times b^2 = \frac{17}{81} \times 9^2 = \frac{17}{81} \times 81 = 17.$

$\therefore$নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ , $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{81} = 1$ (Ans)

EXERCISE – 01 : একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক$(1, -1)$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x - y + 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর।

$3x^2 + 3y^2 + 2xy + 12x + 12y + 4 = 0\,, 4$ (Ans:)

EXERCISE – 02 : একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত এবং $(2, 2)$ও $(3, 1)$বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়। উৎকেন্দ্রিকতাও নির্ণয় কর। $3x^2 + 5y^2 = 32,\ \sqrt{\frac{2}{5}}$ (**Ans**:)

EXERCISE – 03 : একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র$(2, 1)$উৎকেন্দ্রিকতা$\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $2x + y = 3$. (Ans): $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$

TYPE : 03

EXAMPLE - 04 : একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ক্ষুদ্র অক্ষ দুটি ফোকাসের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান এবং যার উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 10 একক ।

SOLVE : 2b =2ae এবং $\frac{2b^2}{a} = 10, \frac{b}{a} = e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow 2\frac{b^2}{a^2} = 1$

$\Rightarrow b = a/2 = \frac{2\times a/2}{a} = 10 \therefore a = 10, b = 5\sqrt{2}$, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{50} = 1$

অধিবৃত্ত

TYPE : 01

অধিবৃত্তের সমীকরন হতে বিভিন্ন রাশি ও সমীকরন নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলী ঃ

EXAMPLE - 01 : $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$অধিবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং কেন্দ্রর স্থানাংক নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 - 3y^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3y^2 = 8 + 1$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i)নং অধিবৃত্তকে অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$X = x - 1, Y = y, a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

কেন্দ্র :$X = 0, \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$Y = 0 \Rightarrow y = 0$ $\therefore$ কেন্দ্র $(1, 0)$ [$x -$ অক্ষের উপর]

উপকেন্দ্র :$(\pm ae, 0)$

উৎকেন্দ্রিকতা ,$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{9+3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$X = \pm ae \Rightarrow x - 1 = \pm 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x - 1 = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{3}$এবং $Y = 0 \Rightarrow y = 0$ উপকেন্দ্র $\left(1 \pm 2\sqrt{3}, 0\right)$

শীর্ষবিন্দু :$(\pm a, 0)$ অর্থাৎ, $X = \pm a \Rightarrow x - 1 = \pm 3$

$(+)$veনিয়ে, $x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$; $(-)$veনিয়ে, $x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2$

এবং$y = 0$ ∴শীর্ষবিন্দু দুটি$(4,0), (-2, 0)$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ :$X = \pm a/e \Rightarrow x - 1 = \pm\left(3\frac{1}{2/\sqrt{3}}\right) \Rightarrow x - 1 = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x - 2 = \pm 3\sqrt{3}$

$(+)$veনিয়ে, $2x - 2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow 2x - 2 - 3\sqrt{3} = 0$

$(-)$veনিয়ে, $2x - 2 = -3\sqrt{3} \Rightarrow 2x - 2 + 3\sqrt{3} = 0$

∴ নিয়ামকরেখা দুটো, $2x - 2 - 3\sqrt{3} = 0, 2x - 2 + 3\sqrt{3} = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয়ের সমীকরণ :$X = \pm ae \Rightarrow x - 1 = \pm 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x - 1 = \pm 2\sqrt{3}$

$(+)$ve, $x - 1 = 2\sqrt{3} \Rightarrow x - 1 - 2\sqrt{3} = 0$

$(-)$ve, $x - 1 = -2\sqrt{3} \Rightarrow x - 1 + 2\sqrt{3} = 0$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্ব দুটি,$x - 1 - 2\sqrt{3} = 0$, $x - 1 + 2\sqrt{3} = 0$; উৎকেন্দ্রিকতা,$e = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

প্রধান বা আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য$= 2a = 2 \times 3 = 6$

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য$= 2b = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 3}{3} = 2$

প্রধান অক্ষের সমীকরণ, $Y = 0 \Rightarrow y = 0$

এবং অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ (**Ans**)

EXAMPLE - 02 : $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, ফোকস বা উপকেন্দ্র, দিকাক্ষের সমীকরন, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরন ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

SOLVE : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ আকারের অধিবৃত্ত । যেখানে, X = x+ 1 ও Y= y – 2 ,a=2,b=$\sqrt{5}$

কেন্দ্র : X = 0 ⇒ x+ 1= 0 ⇒ x = -1 , Y = 0 ⇒ y – 2 = 0 ⇒ y = 2 ∴ কেন্দ্র ঃ (-1 , 2)

শীর্ষ ঃ $(\pm a, 0) = (\pm 2,0)$ ∴ $x + 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, -3$, $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

শীর্ষ ঃ $(3,2)$ ও $(-5,2)$, উৎকেন্দ্রিকতা ঃ $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \frac{3}{2}$

ফোকাস বা উপকেন্দ্র ঃ $(\pm ae, 0) = \left(\pm 2 \times \frac{3}{2}, 0\right) = (\pm 3,0)$

$\therefore x + 1 = \pm 3 \Rightarrow x = 2, -4$ এবং $y - 2 = 0 \;\therefore y = 2, \therefore$ ফোকাসদ্বয় (2,2) ও (-4, 2)

দিকাক্ষের সমীকরন ঃ $X = \pm\, a/e \;\Rightarrow x + 1 = \pm \frac{4}{3} \Rightarrow 3x + 3 = \pm 4 \Rightarrow 3x = 1$ এবং $3x = -7$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীরকন ঃ $X = \pm\, ae,\; x + 1 = 3,$ এবং $x = 2$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{\mathbf{a}} = \frac{2\times 5}{2} = 5$ একক।

EXERCISE – 01 : $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$ অধিবৃত্তের ফোকাস ও দিকাক্ষের সমীকরন নির্ণয় কর।

Ans: (3, 2) ,(-5, 2),দিকাক্ষ ঃ 4x = 5, এবং 4x +13 = 0

EXERCISE – 02 : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(\pm 5, 0), 5x = \pm 9$ (Ans)

EXERCISE – 03 :$16x^2 - 25y^2 = 400$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র , শীর্ষবিন্দু ,উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
$(0, 0); (\pm 5, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{41}}{5}, 0\right), x = \pm \frac{25}{\sqrt{41}}$ (Ans)

EXERCISE – 04 : $y^2 - x^2 = 4$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র , শীর্ষবিন্দু ,উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(0, 0), (0, \pm 2), \left(0, \pm 2\sqrt{2},\right); y = \pm\sqrt{2}$ (Ans)

EXERCISE – 05 :$x^2 - 2y^2 - 2x + 8y - 1 = 0$ অধিবৃত্তের ফোকাস ও দিকাক্ষের সমীকরন নির্ণয় কর। **Ans:**
ফোকাস : $(1, 2\pm 3\sqrt{3})$, দিকাক্ষের সমীরকন ঃ $y = 2\pm\sqrt{3}$

TYPE : 02

অধিবৃত্ত সনাক্তকরন বা অধিবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় সংক্রান্ত গনিতিক সমস্যা

EXAMPLE - 01 : .দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

SOLVE : প্রদত্ত অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $x^2 - 8y^2 = 2 \;\Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

(i)নং অধিবৃত্তকে অধিবৃত্তদ্বয় প্রতিম সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই ,$X = x, Y = y$

$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$; $b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2} [a > b]$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2+\frac{1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}}\right) \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow 3x = \pm 4$ **(Showed)**

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যে= $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\times\frac{1}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(Showed)**

EXAMPLE - 02: একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয়$(4, 2)$, $(8, 2)$ এবং উপকেন্দ্রিকতা 2 .

SOLVE : নির্ণয় অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটি $(4, 2)$ ও $(8, 2)$ লক্ষকর, উপকেন্দ্র দুটিতে কোটি দুটি একই সুতরাং, এর অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল কেন্দ্র স্থানাংক $\left(\frac{4+8}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (6, 2)$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $2ae = 8 - 4 \Rightarrow 2a\times 2 = 4 \Rightarrow a = 1$

আবার, $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \Rightarrow 4 = \frac{a^2+b^2}{a^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 4a^2$

$\Rightarrow b^2 = 4a^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow b^2 = 3.1^2 \therefore b = 3 \therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

EXAMPLE - 02: 10. অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাংকের অক্ষ ধরে এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, \pm 13)$.

SOLVE : মনে করি, অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

এখানে, আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য= $2a$; অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$

প্রশ্নমতে, $2b = 24 \Rightarrow b = \frac{24}{2} \Rightarrow b = 12 \Rightarrow b^2 = 144$

আবার, $2be = 13 - (-13) \Rightarrow 2\times 12\times e = 26 \Rightarrow e = \frac{26}{24} = \frac{13}{12} \Rightarrow \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{13}{12}$

$\Rightarrow 1 + \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{13}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{169}{144} - 1 = \frac{25}{144}$ (আমরা জানি, $e = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$ যখন, $b > a$)

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{169-144}{144} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{25}{144} \Rightarrow \frac{a^2}{12^2} = \frac{25}{144} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{144}\times 144 \Rightarrow a^2 = 25$

$\therefore$নির্ণয় অধিবৃত্তের সমীকরণ , $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

EXERCISE – 01 : একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব 16 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ অধিবৃত্তটির অক্ষ দুটির স্থানাংকের দুই অক্ষ বরাবর হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। $x^2 - y^2 = 32$ (Ans)

EXERCISE – 02 : একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$; উপকেন্দ্র $(1, -8)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $3x - 4y = 10$. (Ans)$4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x - 225 = 0$