ষষ্ঠ অধ্যায়

কণিক
Conics

সৃষ্টিজগতের অতি আকর্ষণীয় ও দূর্বোধ্য ক্ষেত্র থেকেই মানুষ কণিকের ধারণা লাভ করে।

Menaechmus (380-320 BC) সর্বপ্রথম সমতল ও কোণকের ছেদের ফলে উৎপন্ন বক্ররেখার বিভিন্ন অংশকে উপবৃত্ত, প্যারাবোলা ও হাইপারবোলা নামকরণ করেন। দীর্ঘদিন ধরে এগুলি Maenechmian triad হিসেবে পরিচিত ছিল। ইউক্লিড (300-250BC) তাঁর Elements গ্রন্থে কণিক সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করেন। পরবতীতে আর্কিমিডিস (287-212 BC) তাঁর Quadrature of parabola গ্রন্থে এবং অ্যাপোলোনিয়াস কণিকের ওপর সিরিজ আকারে ৮টি বই লিখে কণিক সম্পর্কে অনেক মৌলিক ও মূল্যবান তথ্যাবলির ব্যাখ্যা দেন।

নাম	:	মিনেইকমাস (Menaechmus)
জন্ম	:	৩৮০ খ্রিষ্টপূর্ব
জন্মস্থান	:	মর্মর দ্বীপ, তুরস্ক
মৃত্যু	:	৩২০ খ্রিষ্টপূর্ব

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- কণিক কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- উপকেন্দ্র (ফোকাস), উৎকেন্দ্রিকতা ও নিয়ামক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বৃত্ত, প্যারাবোলা, উপবৃত্ত, হাইপারবোলা চিহ্নিত করতে পারবে।
- চিত্রের সাহায্যে কণিক উপস্থাপন করতে পারবে।
- কোণকের ও তলের ছেদ হিসেবে কণিক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- মূলবিন্দুগামী প্যারাবোলার সমীকরণ শনাক্ত করতে পারবে।
- প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে এবং শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও নিয়ামক চিহ্নিত করতে পারবে।
- প্যারাবোলার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ শনাক্ত করতে পারবে।
- উপবৃত্তের সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করে অক্ষদ্বয়ের সাথে ছেদবিন্দু নির্ধারণ করতে পারবে।
- উপবৃত্তের লেখচিত্র উপকেন্দ্র (ফোকাস) ও নিয়ামক চিহ্নিত করতে পারবে।
- উপবৃত্তের বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় করতে পারবে।
- উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- কেন্দ্র মূলবিন্দুবিশিষ্ট হাইপারবোলার প্রমিত সমীকরণ শনাক্ত করতে পারবে ও লিখতে পারবে।
- হাইপারবোলার প্রমিত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- অক্ষদ্বয়ের সাথে হাইপারবোলার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে পারবে।
- হাইপারবোলার অসীমতটের অবস্থান নির্ধারণ করতে পারবে।
- হাইপারবোলার বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে হাইপারবোলার পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ নির্ণয় করতে পারবে।
- উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সংজ্ঞা হতে হাইপারবোলার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- হাইপারবোলার সমীকরণ হতে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় করতে পারবে।
- হাইপারবোলার সমীকরণ হতে উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- হাইপারবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে এবং উপকেন্দ্র ও নিয়ামকয় চিহ্নিত করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রিকতা দেওয়া থাকলে উপবৃত্ত অঙ্কন করতে পারবে।
- অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রিকতা দেওয়া থাকলে অধিবৃত্ত অঙ্কন করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ : কণিক, উপকেন্দ্র (ফোকাস), উৎকেন্দ্রিকতা ও নিয়ামক, বিভিন্ন ধরনের কণিক (বৃত্ত, প্যারাবোলা, উপবৃত্ত ও হাইপারবোলা), চিত্রের সাহায্যে কণিক উপস্থাপন, কোণকের ও তলের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথই যে কণিক তা চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন।
- পাঠ-২ ও ৩: মূলবিন্দুগামী প্যারাবোলার সমীকরণ, $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন, প্যারাবোলার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ।
- পাঠ-৪ : উদাহরণমালা
- পাঠ-৫ ও ৬: অনুশীলনী-6(A)
- পাঠ-৭ ও ৮ : উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন, উপকেন্দ্র ও নিয়ামক, উপবৃত্তের বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।
- পাঠ-৯ ও ১০: কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক, উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয়, উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয়।
- পাঠ-১১: উদাহরণমালা
- পাঠ-১২ ও ১৩: অনুশীলনী-6(B)
- পাঠ-১৪: মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট হাইপারবোলার প্রমিত সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, হাইপারবোলার প্রমিত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন, অক্ষদ্বয়ের সাথে হাইপারবোলার ছেদবিন্দু, হাইপারবোলার অসীমতটের অবস্থান নির্ণয়, হাইপারবোলার বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।
- পাঠ-১৫: হাইপারবোলার পরামিতিক স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ হতে হাইপারবোলার সমীকরণ নির্ণয়, উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয়, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয়, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হাইপারবোলার বিভিন্ন অংশচিহ্নিত করণ।
- পাঠ-১৬: উদাহরণমালা
- পাঠ-১৭ ও ১৮: অনুশীলনী-6(C)
- পাঠ-১৯ ও ২০: ব্যবহারিক।

পাঠ-১

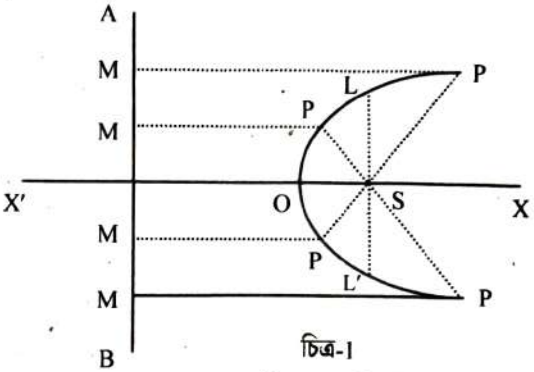
6.1 কণিক (Conic)

কোনো সমতলে একটি বিন্দু যদি এমনভাবে চলে যে, ঐ সমতলের ওপর অবস্থিত একটি স্থির বিন্দু ও চলমান বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব এবং চলমান বিন্দু থেকে সমতলটির ওপর অবস্থিত একটি স্থির সরলরেখার লম্ব দূরত্বের অনুপাত সর্বদা ধ্রুবক থাকে, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে **কণিক** বলা হয়।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কণিকের উপকেন্দ্র (Focus), নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে এর নিয়ামক বা দিকাক্ষ (Directrix) এবং ঐ ধ্রুবক অনুপাতকে এর উৎকেন্দ্রিকতা বা বিকেন্দ্রিকতা (Eccentricity) বলা হয়।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: মনে করি, কোনো সমতলে S একটি স্থির বিন্দু এবং AB একটি স্থির সরলরেখা। ঐ সমতলের ওপর অবস্থিত একটি চলমান বিন্দু P, যা এমনভাবে গতিশীল যে P ও S এর মধ্যবর্তী দূরত্ব PS এবং P হতে AB এর ওপর লম্ব দূরত্ব PM এর অনুপাত সর্বদা ধ্রুবক থাকে, তাহলে P এর সঞ্চারপথকে কণিক বলে। ধ্রুবকটিকে e দ্বারা প্রকাশ করলে $\frac{SP}{PM} = e$ হয়।

SP = ePM কণিকের সমীকরণ প্রকাশ করে।



চিত্র-1

কাজ: $x = -3$ রেখা ও $(5, 0)$ বিন্দু হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। এই সমীকরণটি কি কণিক প্রকাশ করবে?

6.2 উপকেন্দ্র (ফোকাস), উৎকেন্দ্রিকতা ও নিয়ামক (Focus, Ecentricity and Directrix)

চিত্র-1 এর স্থির বিন্দু S কে কণিকের উপকেন্দ্র, AB সরলরেখাকে কণিকের নিয়ামক বা দিকাক্ষ (Directrix) এবং ধ্রুবক e কে কণিকের **উৎকেন্দ্রিকতা** বলা হয়।

আবার নিয়ামকের সাথে লম্ব যে সরলরেখা (চিত্রে X′ X) উপকেন্দ্র দিয়ে যায় তাকে কণিকের **অক্ষ** বলা হয়। কণিকটি তার অক্ষকে যে এক বা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্রে O) তাকে কণিকের **শীর্ষবিন্দু** বলা হয়। কণিকের ওপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে কণিকের **জ্যা**, উপকেন্দ্রের মধ্যদিয়ে অঙ্কিত যে কোনো জ্যাকে **উপকেন্দ্রিক জ্যা** এবং অক্ষের সাথে লম্ব এরূপ উপকেন্দ্রিক জ্যাকে (চিত্রে LSL′) কণিকের **উপকেন্দ্রিক লম্ব** বা **নাভিলম্ব** বলা হয়।

কাজ: কাগজে অঙ্কিত কোনো কণিকের উপকেন্দ্র ও নিয়ামক চিহ্নিত কর এবং এর সাহায্যে উৎকেন্দ্রিকতা প্রকাশ কর।

6.3 বিভিন্ন ধরনের কণিক (বৃত্ত, প্যারাবোলা/পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও হাইপারবোলা/অধিবৃত্ত) (Different types of Conic (Circle, Parabola, Ellipse and Hyperbola)

$e = 0$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথটি একটি **বৃত্ত** প্রকাশ করে। $e = 1$ বা, $\frac{SP}{PM} = e = 1$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথটি একটি **পরাবৃত্ত** প্রকাশ করে। সুতরাং উপকেন্দ্র ও নিয়ামক থেকে সমান দূরে ($\because SP = PM$) অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেটই পরাবৃত্ত।

$0 < e < 1$ বা, $0 < \frac{SP}{PM} < 1$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথটি একটি **উপবৃত্ত** প্রকাশ করে। সুতরাং উপকেন্দ্র ও নিয়ামক থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 1-এর চেয়ে ছোট কোনো ধ্রুবক হয়, তাদের সেটই উপবৃত্ত।

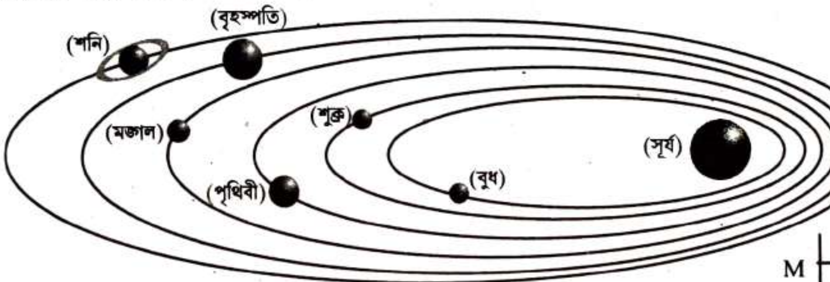
$e > 1$ বা, $\frac{SP}{PM} > 1$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথটি একটি **অধিবৃত্ত** প্রকাশ করে। সুতরাং উপকেন্দ্র ও নিয়ামক থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 1 এর চেয়ে বড় কোনো ধ্রুবক হয়, তাদের সেটই অধিবৃত্ত।

জেনে রাখো

কণিক	সমীকরণ	উৎকেন্দ্রিকতা
বৃত্ত	$x^2 + y^2 = a^2$	$e = 0$
পরাবৃত্ত	$y^2 = 4ax$	$e = 1$
উপবৃত্ত	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$0 < e < 1$
অধিবৃত্ত	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$e > 1$

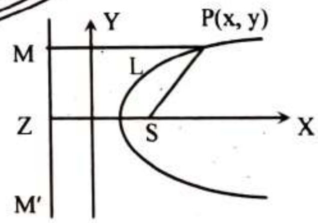
বৃত্ত হলো উপবৃত্তের একটি সীমান্ত অবস্থা। যেহেতু বৃত্তের ক্ষেত্রে $e = 0$ অর্থাৎ $\frac{SP}{PM} = 0 \Rightarrow PM \to \infty$, অর্থাৎ নিয়ামকটি অসীমে থাকে। অতএব বৃত্ত একটি কণিক, যার উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য (0) এবং নিয়ামক অসীমে থাকে।

বিশ্ব-ব্রহ্মাণ্ডের সকল গ্রহ, উপগ্রহের আকৃতি ও গতিপথ কণিকের বাস্তবতাকে স্পষ্ট করে দেয়। যেমন- সৌরজগতে সূর্যকে প্রদক্ষিণকারী গ্রহ-উপগ্রহগুলি (পৃথিবীসহ) উপবৃত্তাকার পথে প্রতিনিয়ত বিচরণ করছে। আবার সংঘর্ষ বা অজানা অন্য কোনো কারণে কক্ষচ্যুত কোনো গ্রহ বা উপগ্রহ হয় উপবৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করছে অথবা গ্রহের মাধ্যাকর্ষণ বল কাটিয়ে প্যারাবোলিক বা হাইপারবোলিক আকারে মহাশূন্যের পথে অসীমে চিরতরে হারিয়ে যাচ্ছে। যেমন, $0 \le e < 1$ হলে মহাজাগতিক বস্তু গ্রহের টানে বাঁধা পড়ে বৃত্ত বা উপবৃত্তাকার পথে গ্রহটির চতুর্দিকে পরিভ্রমণ করে এবং $e \ge 1$ হলে সূর্যের মায়া কাটিয়ে প্যারাবোলিক বা হাইপারবোলিক পথে মহাশূন্যে চিরতরের জন্য বিলীন হয়ে যায়।



কাজ: $\frac{SP}{PM} = e$ হলে বক্ররেখাটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যখন,

(a) $e = 1$ (b) $e = \frac{1}{2}$ (c) $e = 2$ এবং প্রাপ্ত সমীকরণগুলি চিহ্নিত কর।



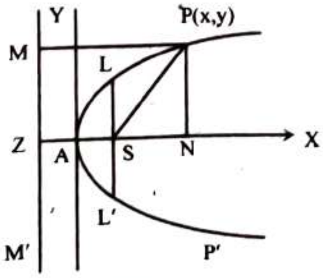
6.4 চিত্রের সাহায্যে কণিক উপস্থাপন (Representation of Conic by diagram)

কোনো কণিকের উপকেন্দ্র S, নিয়ামক MZM′, উৎকেন্দ্রিকতা e এবং উক্ত কণিকের ওপরস্থ যেকোনো বিন্দু P হলে

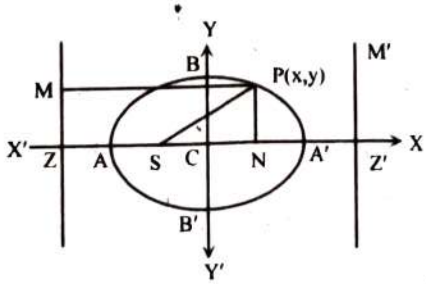
উক্ত কণিকের সমীকরণ $\frac{SP}{PM} = e$ ... ... (i)

(i) নং কণিকটি একটি পরাবৃত্ত প্রকাশ করে; যখন $e = 1$

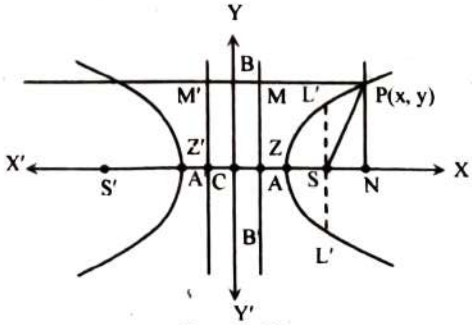
উপবৃত্ত প্রকাশ করে; যখন $0 < e < 1$ এবং অধিবৃত্ত প্রকাশ করে; যখন $e > 1$



চিত্র: পরাবৃত্ত



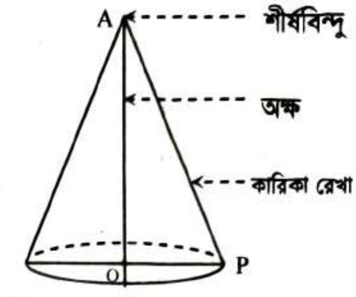
চিত্র: উপবৃত্ত



চিত্র: অধিবৃত্ত

দ্রষ্টব্য: অনুচ্ছেদ 6.2 এর চিত্রের মতো উপরিউক্ত কণিকগুলির বিভিন্ন অংশের নামকরণ করা হয়েছে।

6.5 কোণকের ও তলের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথই যে কণিক তা চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন (Representation of conic by diagram as the locus of intersection of cone and plane)



চিত্র : সমবৃত্তীয় কোণক

কোণক হতে কণিকের উৎপত্তি। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে অপর একটি সরলরেখার এক প্রান্ত আটকে রেখে যদি রেখাটিকে ঐ নির্দিষ্ট রেখার চারিদিকে ধ্রুবক সূক্ষ্মকোণে আবর্তন করানো হয়, তবে একটি **বৃত্তীয় কোণক** উৎপন্ন হয়। নির্দিষ্ট রেখাটি ভূমির সাথে লম্ব অর্থাৎ $\angle AOP = 90°$ হলে একটি **সমবৃত্তীয় কোণক** উৎপন্ন হয়।

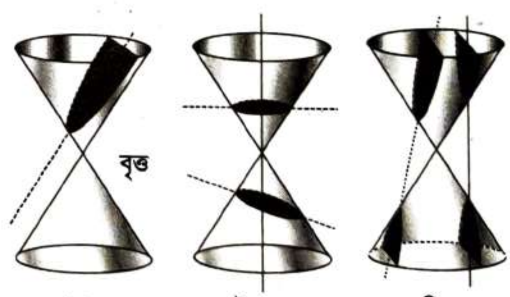
নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কোণকের শীর্ষবিন্দু, নির্দিষ্ট সরলরেখাকে অক্ষ এবং ঘূর্ণায়মান রেখাকে **কারিকা রেখা** বা **উৎপাদক রেখা (Generating Line)** বলা হয়।

চিত্রে AO অক্ষ (axis), AP কারিকা রেখা বা উৎপাদক রেখা (Generating Line) এবং $\angle OAP$ অর্ধশীর্ষ কোণ (Semi Vertical Angle)

সমতল দ্বারা কোণকের ছেদন বা কর্তনের ফলে কণিক উৎপন্ন হয়। কণিক বলতে **পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত** ও **অধিবৃত্তকে** বোঝানো হয়।

কারিকা রেখা বা উৎপাদক রেখার সমান্তরাল কিন্তু শীর্ষবিন্দুগামী নয় এরূপ কোনো সমতল দ্বারা যদি সমবৃত্তীয় কোণককে ছেদ বা কর্তন করা হয়, তবে ছেদ রেখাটি একটি **পরাবৃত্ত** উৎপন্ন করে।

কারিকারেখা এবং ভূমির সমান্তরাল নয় এবং শীর্ষবিন্দুগামী নয় এরূপ কোনো সমতল দ্বারা যদি সমবৃত্তীয় কোণককে সম্পূর্ণরূপে ছেদ করা হয় তবে ছেদ রেখাটি একটি **উপবৃত্ত** উৎপন্ন করে এবং এক্ষেত্রে সমতলটি ভূমির সমান্তরাল হলে একটি **বৃত্ত** উৎপন্ন করে।



পরাবৃত্ত উপবৃত্ত অধিবৃত্ত

শীর্ষবিন্দুগামী নয় এরূপ কোনো সমতল দ্বারা যদি কোনো দ্বিকোণককে এমনভাবে ছেদ করা হয় যেন তা উভয় কোণককেই ছেদ করে, তবে ছেদ রেখাটি একটি **অধিবৃত্ত** উৎপন্ন করে।

উল্লেখ্য যে, কোনো সমতল যদি কোণকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায় এবং ভূমির ওপর লম্ব হয় তাহলে একজোড়া বাস্তব বা অবাস্তব সরলরেখা উৎপন্ন হবে এবং উৎপন্ন সরলরেখা দুইটিকে একত্রে যুগল সরলরেখা (Pair of Straight lines) বলা হয়।

এই বিষয়ে উচ্চতর শ্রেণিতে জানবে।

উল্লিখিত পর্যালোচনা হতে বলা যায় যে যুগল সরলরেখা, বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্তকে সাধারণত কণিক বলা হয়। উল্লিখিত কোণকচ্ছেদগুলি $\mathbf{ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ দ্বিমাত্রিক সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়

যেখানে, $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ এবং সমীকরণটি—

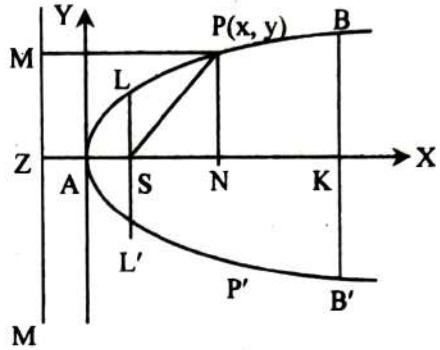
(a) বৃত্ত নির্দেশ করে; যখন $a = b$ এবং $h = 0$ **(b)** পরাবৃত্ত হবে যদি $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 = ab$ হয়

(c) উপবৃত্ত হবে যদি $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 < ab$ হয় **(d)** অধিবৃত্ত হবে যদি $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 > ab$ হয় **(e)** জোড়া সরলরেখা হবে যদি $\Delta = 0$ হয়।

পাঠ-২ ও ৩

প্যারাবোলা/পরাবৃত্ত (Parabola)

6.6 মূলবিন্দুগামী প্যারাবোলা/পরাবৃত্তের সমীকরণ (Equation of Parabola passing through origin)



মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S, নিয়ামক MZM′; নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব টানি এবং SZ কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। তাহলে A, পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু। ZS কে X পর্যন্ত বর্ধিত করি। তাহলে ZSX পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা।

A কে মূলবিন্দু, AX কে X-অক্ষ এবং AX এর ওপর লম্ব AY কে Y-অক্ষ মনে করি।

ধরি, পরাবৃত্তের ওপর যেকোনো চলমান বিন্দু P(x, y) এবং ZA =AS = a; P হতে নিয়ামকের ওপর PM ও AX এর ওপর PN লম্ব অঙ্কন করি। SP যোগ করি।

$\therefore$ পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে পাই, $SP = PM = ZN = AZ + AN = a + x$ [$\because AZ = a$ এবং $AN = x$]

বা, $SP^2 = (a+x)^2$

বা, $(x-a)^2 + (y-0)^2 = (a+x)^2$ [$\because$ S(a, 0) এবং P(x, y) এর দূরত্ব $SP = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$]

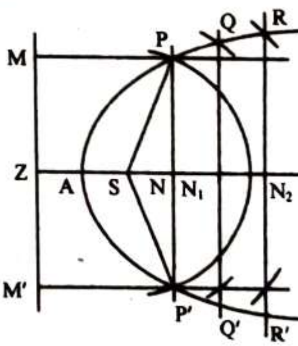
বা, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 \quad \therefore \mathbf{y^2 = 4ax}$

এই সমীকরণ হলো পরাবৃত্তের আদর্শ বা প্রমিত সমীকরণ (Standard equation)।

কাজ: একটি পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ নির্ণয় কর y-অক্ষ যার অক্ষরেখা।

6.7 $y^2 = 4ax$ প্যরাবোলা/পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন (Drawing the graph of the parabola $y^2 = 4ax$)

মনে করি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S এবং নিয়ামক MM′; নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব আঁকি এবং SZ কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। তাহলে SA = AZ;



অতএব, সংজ্ঞানুসারে $\left(\because \dfrac{SA}{AZ} = 1\right)$, পরাবৃত্তের ওপর A একটি বিন্দু।

এখন AS অথবা বর্ধিত AS এর ওপর যেকোনো বিন্দু N নিয়ে ZS এর ওপর PNP′ লম্ব আঁকি।

S কে কেন্দ্র করে ZN এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন তা PNP′ কে P ও P′ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন নিয়ামকের ওপর PM ও P′M′ লম্ব আঁকি।

তাহলে, SP = ZN = PM; অতএব, সংজ্ঞানুসারে পরাবৃত্তের ওপর P একটি বিন্দু।

অনরূপভাবে, AS অথবা বর্ধিত AS এর ওপর N_1, N_2 ... ইত্যাদি বিন্দু দিয়ে পরাবৃত্তের ওপর Q, Q′ ; R, R′ ... ইত্যাদি বিন্দু পাওয়া যায়। এই বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখা দ্বারা যোগ করলে একটি পরাবৃত্তের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

অনুচ্ছেদ 6.6 এর চিত্রানুযায়ী, পরাবৃত্তের বিভিন্ন অংশের নামকরণ ও পরিচিতি

অক্ষরেখা (Axis): যে সরলরেখা উপকেন্দ্র দিয়ে যায় এবং নিয়ামকের ওপর লম্ব তাকে পরাবৃত্তের অক্ষরেখা বলা হয়। চিত্রে ZS রেখাই অক্ষরেখা।

শীর্ষবিন্দু (Vertex): অক্ষরেখাটি পরাবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে পরাবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** বলা হয়। চিত্রে A বিন্দুই শীর্ষবিন্দু।

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব (Focal distance): উপকেন্দ্র হতে পরাবৃত্তের ওপরস্থ যেকোনো বিন্দুর দূরত্বকে **উপকেন্দ্রিক দূরত্ব** বলা হয়। চিত্রে SP, SA বা SP′ এর প্রত্যেক দূরত্বই উপকেন্দ্রিক দূরত্ব।

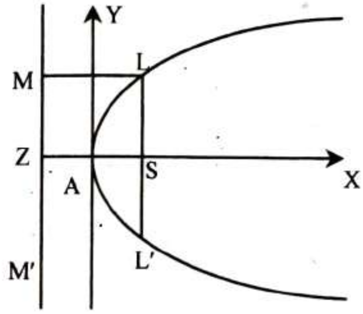
উপকেন্দ্রিক জ্যা (Focal chord): উপকেন্দ্র দিয়ে যায় এমন যে কোনো জ্যাকেই পরাবৃত্তের **উপকেন্দ্রিক জ্যা** বলা হয়। চিত্রে PS রেখা বর্ধিত করে অঙ্কিত জ্যাই উপকেন্দ্রিক জ্যা।

উপকেন্দ্রিক লম্ব বা নাভিলম্ব (Latus rectum): যে উপকেন্দ্রিক জ্যা, অক্ষের ওপর লম্ব তাকে পরাবৃত্তের **উপকেন্দ্রিক লম্ব বা নাভিলম্ব** বলা হয়। অর্থাৎ LSL′ রেখাই উপকেন্দ্রিক লম্ব।

ডবল কোটি (Double Ordinate) : পরাবৃত্তের যে জ্যা অক্ষের উপর লম্ব তাকে ডবল কোটি বলে। 6.6 এর চিত্রে BKB′ একটি ডবল কোটি। উপকেন্দ্রিক লম্বও বিশেষ ডবল কোটি।

6.8 প্যারাবোলা/পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ (Length of latus rectum, coordinates of focus and vertex and equation of directrix of parabola)

6.8.1 উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য



মনে করি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S, নিয়ামক MZM′, শীর্ষবিন্দু A, অক্ষ ZS এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব LSL′, তাহলে S এর স্থানাঙ্ক (a, 0).

$LM \perp MM'$ হলে, সংজ্ঞানুসারে পাই,

$SL = LM = ZS = AZ + AS = a + a = 2a$

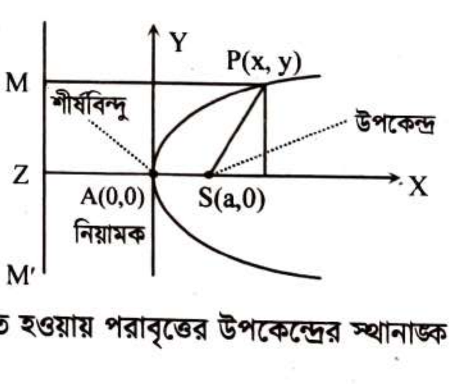
$\therefore LL' = SL + SL' = 2SL \; [\because SL = SL']$

$= 2.2a = 4a$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a|$

অর্থাৎ, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = শীর্ষ থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের চারগুণ অথবা নিয়ামক থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের দ্বিগুণ।

6.8.2 উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক



অনুচ্ছেদ 6.6 এর চিত্রে $y^2 = 4ax$ একটি পরাবৃত্ত। A উহার শীর্ষ বিন্দু। MZM′ উহার নিয়ামক এবং S হলো উপকেন্দ্র। পরাবৃত্তের সমীকরণে $x = 0$ হলে $y = 0$ হয়।

$\therefore$ পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(0, 0) শীর্ষ বিন্দু A হতে x-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের দূরত্ব এবং ঋণাত্মক দিক বরাবর নিয়ামক পর্যন্ত দূরত্ব সমান। এই দূরত্বের পরিমাণ a। উপকেন্দ্রটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A হতে x-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর a দূরত্বে অবস্থিত হওয়ায় পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক S(a,0)।

6.8.3 পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ

$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের নিয়ামক MZM′। শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(0,0) ধরে শীর্ষবিন্দু হতে নিয়ামকের দূরত্ব ZA = a। যেহেতু নিয়ামক MZM′ রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং এটি শীর্ষবিন্দু A থেকে ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত।

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ $x = -a \Rightarrow x + a = 0$

$\therefore y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তে নিয়ামকের সমীকরণ $x + a = 0$

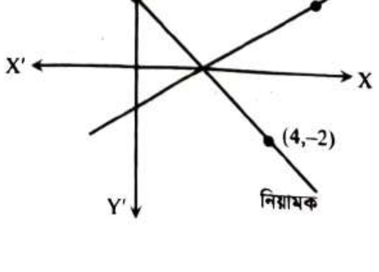
কাজ: চিত্রে একটি পরাবৃত্তের নিয়ামক, অক্ষরেখা, উপকেন্দ্র নির্দেশ করা হয়েছে।

পরাবৃত্তটির (i) নিয়ামক ও অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

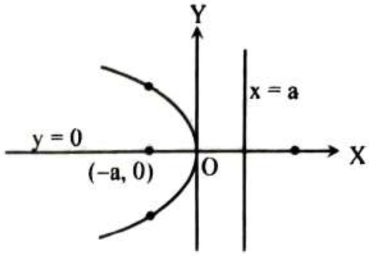
(iii) সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iv) চিত্রটি সম্পূর্ণ কর।



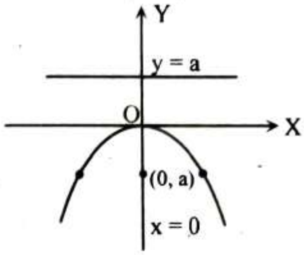
6.9 পরাবৃত্তের বিভিন্ন আকার, সাধারণ সমীকরণ, প্রমিত সমীকরণের লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য, সরলরেখার স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয়

6.9.1 পরাবৃত্তের বিভিন্ন আকার ($y^2 = -4ax$, $x^2 = -4ay$ এবং $a > 0$)



(i) পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = -4ax$ $(a > 0)$ হলে; শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$, উপকেন্দ্র $(-a, 0)$, দিকাক্ষ ও অক্ষের সমীকরণ যথাক্রমে $x = a$ এবং $y = 0$ সুতরাং উপকেন্দ্রটি নিয়ামকের বামপাশে অবস্থিত।

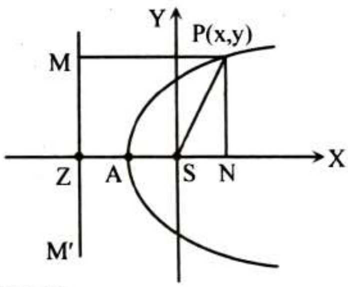
(ii) পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = -4ay$ $(a > 0)$ হলে; শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$, উপকেন্দ্র $(0, -a)$, নিয়ামকের ও অক্ষের সমীকরণ যথাক্রমে $y = a$ এবং $x = 0$ সুতরাং উপকেন্দ্রটি y-অক্ষের ওপর দিকাক্ষের নিচের দিকে অবস্থিত।



6.9.2 পরাবৃত্তের বিশেষ আকার

(i) মূল বিন্দুকে উপকেন্দ্র এবং x-অক্ষকে পরাবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y^2 = 4a(x + a)$

মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(0, 0)$ এবং অক্ষ x-অক্ষ। পরাবৃত্তের নিয়ামক MZM', নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব নিয়ে SZ-কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। যেন $SA = AZ = a$ তাহলে, A পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু।



ধরি, পরাবৃত্তের ওপর যেকোনো চলমান বিন্দু $P(x, y)$; P হতে নিয়ামকের ওপর PM, এবং অক্ষের ওপর PN লম্ব আঁকি এবং PS যোগ করি।

তাহলে $SN = x$ এবং $PN = y$ $\therefore ZN = ZS + SN = 2a + x$

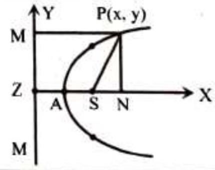
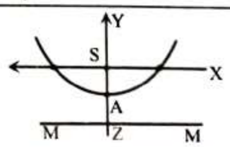
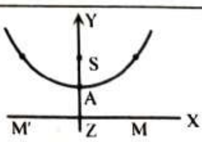
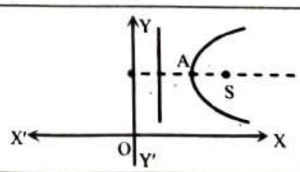
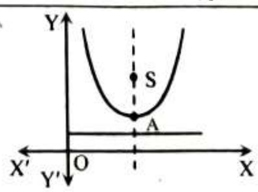
ΔPSN -হতে $SP^2 = SN^2 + PN^2$ বা, $PM^2 = SN^2 + PN^2$

[$\because$ পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $SP = PM$]

বা, $ZN^2 = SN^2 + PN^2$ বা, $(x + 2a)^2 = x^2 + y^2$ বা, $x^2 + y^2 = x^2 + 4ax + 4a^2$

$\therefore y^2 = 4a(x + a)$, যা নির্ণেয় সমীকরণ।

এছাড়া নিম্নে আরও কয়েকটি বিশেষ ধরনের পরাবৃত্তের সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্র দেওয়া হলো:

পরাবৃত্তের সমীকরণ	পরাবৃত্তের চিত্র
(a) x-অক্ষকে পরাবৃত্তের অক্ষ এবং y-অক্ষকে তার নিয়ামক বিবেচনা করে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y^2 = 4a(x - a)$; $a > 0$	
(b) মূলবিন্দুকে উপকেন্দ্র এবং y-অক্ষকে পরাবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x^2 = 4a(y + a)$; $a > 0$	
(c) y-অক্ষকে পরাবৃত্তের অক্ষ এবং x-অক্ষকে তার নিয়ামক বা দিকাক্ষ বিবেচনা করে পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x^2 = 4a(y - a)$; $a > 0$	
(d) অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং শীর্ষ বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ: $(y - y_1)^2 = 4a(x - x_1)$; $a > 0$	
(e) অনুরূপভাবে, অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং শীর্ষ বিন্দু $A(x_1,y_1)$ এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ: $(x - x_1)^2 = 4a(y - y_1)$; $a > 0$	

দ্রষ্টব্য-1: $y^2 = -4a(x+a)$, $y^2 = -4a(x-a)$, $x^2 = -4a(y+a)$, $x^2 = -4a(y-a)$;

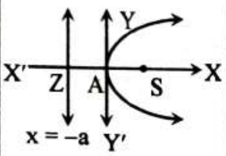
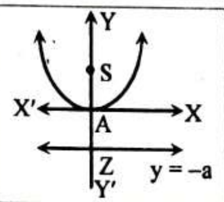
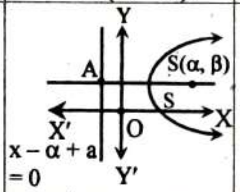
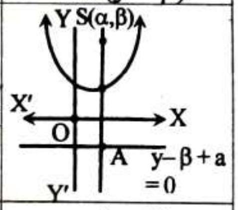
$(a < 0)$ পরাবৃত্তের অক্ষ ও শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে a, b, c, d ও e এ গঠিত পরাবৃত্তের অক্ষ ও শীর্ষবিন্দু একই। কিন্তু চিত্রে পরাবৃত্তগুলির খোলা মুখ উল্টো দিকে হবে। অর্থাৎ a, b, c, d ও e এর উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের অবস্থান যে পাশে আছে তার উল্টো পাশে, উল্লিখিত পরাবৃত্তগুলির উপকেন্দ্র ও নিয়ামক থাকবে।

দ্রষ্টব্য-2: x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x = ay^2 + by + c, a \neq 0$

দ্রষ্টব্য-3: y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

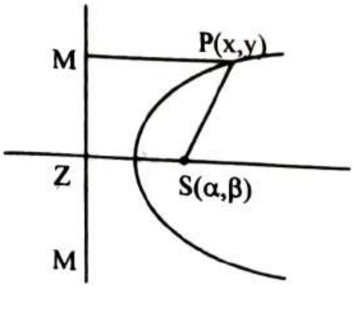
জেনে রাখো

পরাবৃত্তের প্রয়োজনীয় সূত্র:

পরাবৃত্তের আকার:	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
চিত্র				
(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক:	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাংক:	$(a, 0)$	$(0, a)$	$(a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, a+\beta)$
(iii) নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুর স্থানাংক:	$(-a, 0)$	$(0, -a)$	$(-a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, -a+\beta)$
(iv) অক্ষ রেখার সমীকরণ:	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
(v) নিয়ামক রেখার সমীকরণ:	$x + a = 0$	$y + a = 0$	$x - \alpha + a = 0$	$y - \beta + a = 0$
(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ:	$x = a$	$y = a$	$x - \alpha = a$	$y - \beta = a$
(vii) শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ:	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য:	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
(ix) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক:	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a+\alpha, \pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha, a+\beta)$
(x) (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব	$x + a$	$y + a$	$x - \alpha + a$	$y - \beta + a$

6.9.3 পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

[নিয়ামকের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্র জানা থাকলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়]



মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$ এবং নিয়ামক MZM′ যার সমীকরণ $\ell x + my + n = 0$; পরাবৃত্তের ওপর $P(x, y)$ একটি চলমান বিন্দু। P থেকে নিয়ামকের ওপর PM, S থেকে নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব টানি এবং PS যোগ করি। সংজ্ঞানুসারে, $SP = PM$ বা, $SP^2 = PM^2$

বা, $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left(\dfrac{\ell x+my+n}{\sqrt{\ell^2+m^2}}\right)^2$

বা, $m^2x^2-2\ell mxy+\ell^2y^2-2x\{(\ell^2+m^2)\alpha+\ell n\}-2y\{(\ell^2+m^2)\beta+mn\}+(\ell^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2)-n^2=0$

[সরলীকরণ করে]

বা, $(mx-\ell y)^2-2x\{(\ell^2+m^2)\alpha+\ell n\}-2y\{(\ell^2+m^2)\beta+mn\}+(\ell^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2)-n^2=0$

উপরি-উক্ত সমীকরণে লক্ষণীয় যে, x ও y এর দ্বিঘাত সম্বলিত পদগুলি একটি পূর্ণবর্গ।

সুতরাং, পরাবৃত্তের সমীকরণের বৈশিষ্ট্য হলো, দ্বিঘাত সম্বলিত পদগুলি একটি পূর্ণবর্গ গঠন করে।

অতএব, পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণের আকৃতি; $(Ax+By)^2+2Gx+2Fy+C=0$

পরাবৃত্তের ব্যবহার: (i) স্যাটেলাইট ডিস; (ii) রাডার ডিস; (iii) আতশ কাঁচের সাহায্যে সূর্য রশ্মিকে কেন্দ্রিভূত করে কোনো বস্তুকে উত্তপ্ত করা বা আগুন ধরানো যায়।

6.9.4 পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণের লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য

লেখচিত্র অঙ্কন ও তার বৈশিষ্ট্য আলোচনার জন্য $y^2=4ax\ (a>0)$ পরাবৃত্তটি বিবেচনা করি।
সমীকরণটির লেখচিত্রে যে সকল উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান তা নিম্নরূপ:

(i) সমীকরণটিতে $x=0$ বসালে $y=0$ হয়। অর্থাৎ পরাবৃত্তটি মূলবিন্দুগামী। যদি A(0, 0) হয় তবে A হলো পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু।

(ii) $y^2=4ax$ বা, $y=\pm2\sqrt{ax}$; এখানে $a>0$. সুতরাং $x<0$ হলে, y কাল্পনিক সংখ্যা হবে অর্থাৎ, y-এর মান বাস্তব হতে হলে x-এর মান ঋণাত্মক হতে পারবে না। সুতরাং পরাবৃত্তটির কোনো অংশই x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে থাকবে না।

(iii) x এর প্রত্যেক ধনাত্মক মানের জন্য $y=2\sqrt{ax}$ এবং $y=-2\sqrt{ax}$ অর্থাৎ, যে কোনো $x>0$ এর জন্য পরাবৃত্তের ওপরস্থ দুইটি বিন্দু $(x, 2\sqrt{ax})$ এবং $(x, -2\sqrt{ax})$ পাওয়া যাবে।

(iv) আমরা জানি x ও y-এর কোনো সমীকরণে x-এর কেবলমাত্র জোড়ঘাত থাকলে, সমীকরণের লেখচিত্র y-অক্ষের সাথে প্রতিসম এবং y-এর কেবলমাত্র জোড়ঘাত থাকলে, x-অক্ষের সাথে প্রতিসম হয়।
সুতরাং $y^2=4ax$ পরাবৃত্তটি x-অক্ষের সাথে প্রতিসম হবে।

(v) পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র (a, 0) তার অক্ষের ওপর অবস্থিত এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4a। অর্থাৎ উপকেন্দ্র অক্ষের সাথে লম্ব রেখার ওপরে ও নিচে 2a দৈর্ঘ্যে পরাবৃত্তে (a, 2a) এবং (a, −2a) বিন্দু অবস্থিত।

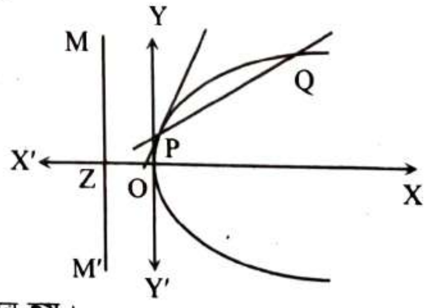
(vi) x এর মান বৃদ্ধি পেলে y-এর মান ও বৃদ্ধি পায়। আবার x এর মান বৃদ্ধিতে কোনো বাঁধা নেই। সুতরাং পরাবৃত্তটি x-অক্ষের ওপরে ও নিচে y-অক্ষের উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হবে।

(vii) পরাবৃত্ত একটি কেন্দ্রবিহীন কণিক।

কাজ: $x^2=4by$ পরাবৃত্তের লেখের কমপক্ষে তিনটি বৈশিষ্ট্য লিখ।

6.9.5 কোনো সরলরেখা পরাবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত ও স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়:

মনে করি, $y^2=4ax$ ... ... (i) পরাবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু এবং PQ যেকোনো একটি ছেদক জ্যা। Q বিন্দু ক্রমশ P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়ে P বিন্দুর উপর সমাপতিত হলে ছেদকটি P বিন্দুতে উক্ত পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক হবে।



মনে করি, PQ ছেদকের সমীকরণ, $y=mx+c$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $(mx+c)^2=4ax$

$\Rightarrow m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ ... ... (iii)

PQ ছেদক (i) নং পরাবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি (iii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

কিন্তু মূলদ্বয় সমান হলে এর পৃথায়ক শূন্য হবে, অর্থাৎ $4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0 \Rightarrow c=\dfrac{a}{m}$

$\therefore$ **$y=mx+c$ রেখা (i) নং পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c=\dfrac{a}{m}$ হয়।** ... ... (iv)

(iii) নং সমীকরণ $c = \frac{a}{m}$ বসিয়ে পাই, $m^2x^2 + 2x\left(m.\frac{a}{m} - 2a\right) + \left(\frac{a}{m}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow m^2x^2 - 2ax + \frac{a^2}{m^2} = 0 \Rightarrow \left(mx - \frac{a}{m}\right)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{a}{m^2}$

$\therefore y = mx + c = m\left(\frac{a}{m^2}\right) + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$.

সুতরাং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

উদাহরণ: k এর মান কত হলে $3x - y + k = 0$ রেখাটি $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হবে? স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

সমাধান: এখানে $a = \frac{3}{2}$, $m = 3$ এবং $c = k$.

সুতরাং $c = \frac{a}{m} \Rightarrow k = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$.

স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right) = \left(\frac{\frac{3}{2}}{3^2}, \frac{2.\frac{3}{2}}{3}\right) = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$

পাঠ-৪

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ, উপকেন্দ্র, অক্ষ, নিয়ামক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৮; রা: বো: ০৭; কু: বো: ১১; সি: বো: ০৯, ০৫]

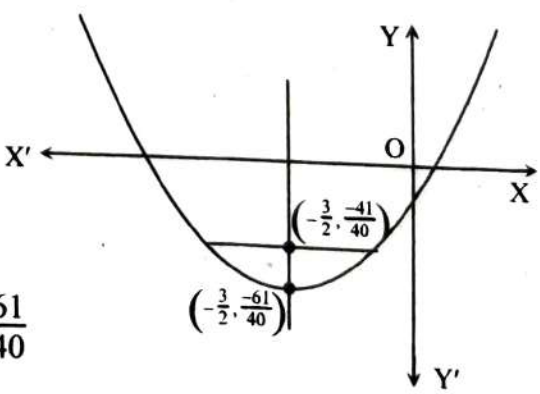
সমাধান: দেওয়া আছে, $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$

$$\Rightarrow 5\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = 10y + 4 + \frac{45}{4} = 10y + \frac{61}{4}$$

$$\Rightarrow 5\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10\left(y + \frac{61}{40}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(y + \frac{61}{40}\right)$$

$\Rightarrow X^2 = 4.\frac{1}{2}.Y$ যা $X^2 = 4aY$ আকারের।



যেখানে $X = x + \frac{3}{2}$, $a = \frac{1}{2}$ এবং $Y = y + \frac{61}{40}$

শীর্ষ (0, 0) অর্থাৎ, X = 0, Y = 0

$\therefore x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ এবং $y + \frac{61}{40} = 0 \Rightarrow y = -\frac{61}{40}$

$\therefore$ শীর্ষ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)$

উপকেন্দ্র (0, a) অর্থাৎ, X = 0, Y = a $\therefore x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$ এবং $y + \frac{61}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{41}{40}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{41}{40}\right)$

অক্ষের সমীকরণ, $X = 0 \;\therefore\; x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0$

নিয়ামকের সমীকরণ, $Y = -a \;\therefore\; y + \frac{61}{40} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 40y + 81 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4.\frac{1}{2} = 2$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $Y = a \;\therefore\; y + \frac{61}{40} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow 40y + 41 = 0$

উদাহরণ-2. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 8; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ১৫, ০৭; রা: বো: ১৩, ১১, ০৯; দি: বো: ১৩; চ: বো: ১১, ০৭; য: বো: ১০; কু: বো: ০৬; সি: বো: ১০; ব: বো: ১০, ০৮]

সমাধান : ধরি, পরাবৃত্তস্থ বিন্দু $P(x, y)$ এর ফোকাস দূরত্ব, $SP = 8$.

এখন, $y^2 = 4ax$ এর সাথে $y^2 = 8x$ এর তুলনা করে পাই, $a = 2 = AS = AZ$

$P(x, y)$ বিন্দু হতে অক্ষের ওপর PK লম্ব আঁকি।

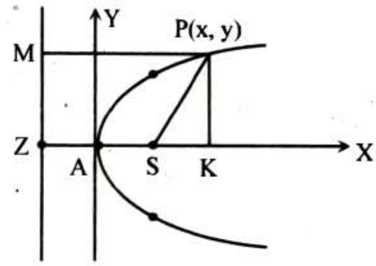
$\therefore SP = MP = ZK = AZ + AK$

$\Rightarrow 8 = a + x \Rightarrow x + 2 = 8 \;\therefore x = 6$

যেহেতু, $P(x, y)$ বিন্দুটি $y^2 = 8x$ এর ওপর অবস্থিত।

সুতরাং $y^2 = 8.6 = 48 \;\therefore\; y = \pm 4\sqrt{3}$

সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(6, \pm 4\sqrt{3})$



উদাহরণ-3. $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র এবং $2x - y = 9$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[বুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৪, ১০, ১২; য: বো: ০৬; রা: বো: ১০, ০৬; দি: বো: ১২; কু: বো: ০৭; ব: বো: ১৪, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

সমাধান: ধরি, উপকেন্দ্র $S(-8, -2)$, নিয়ামকের MZ এবং পরাবৃত্তের ওপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।

সুতরাং, $SP = MP$

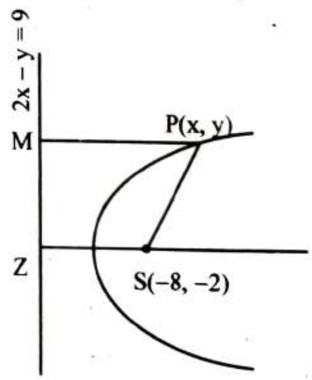
বা, $SP^2 = MP^2$

বা, $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = \left(\frac{2x - y - 9}{\sqrt{4 + 1}}\right)^2$

বা, $5(x^2 + y^2 + 16x + 4y + 68) = 4x^2 + y^2 + 81 - 4xy - 36x + 18y$

বা, $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$

বা, $(x + 2y)^2 + 116x + 2y + 259 = 0$ এটিই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।



উদাহরণ-4. (3, 4) উপকেন্দ্র ও (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[বুয়েট ০৬-০৭; ঢা: বো: ১১, ০৮; রা: বো: ০৯; চ: বো: ১৫, ০৮; য: বো: ১৩; সি: বো: ০৯; ব: বো: ০৭; কু: বো: ১৩; দি: বো: ১১]

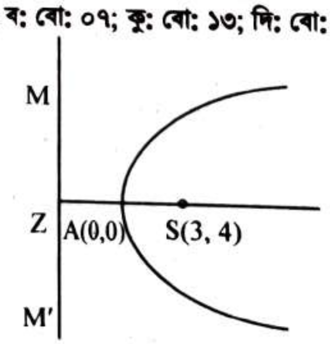
সমাধান: ধরি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(3, 4)$ এবং শীর্ষবিন্দু $A(0, 0)$.

AX-অক্ষ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং $AZ = AS$

যেহেতু A এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ সুতরাং Z এর স্থানাঙ্ক $(-3, -4)$.

এখন AS রেখার ঢাল $= \frac{4}{3}$;

সুতরাং MZ এর ঢাল $= -\frac{3}{4}$



$\therefore$ MZ রেখার সমীকরণ $y + 4 = -\frac{3}{4}(x + 3)$

$\Rightarrow 4y + 16 = -3x - 9 \Rightarrow 3x + 4y + 25 = 0$ এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

পাঠ-৫ ও ৬

অনুশীলনী-6(A)

Type-I

1. নিম্নোক্ত সমীকরণ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর:
   - **(i)** $y^2 = 4x$
   - **(ii)** $x^2 = -10y$
   - **(iii)** $x^2 + 4y - 4 = 0$
   - **(iv)** $x^2 = 4(1 - y)$ [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৮; চ: বো: ১১; ব: বো: ০৯]
   - **(v)** $y^2 = 4(x - 2)$
   - **(vi)** $y^2 = 2(x + 3)$ [ঢা: বো: ১৩; মাদ্রাসা বো: ১২]
   - **(vii)** $y^2 = 8x + 5$ [বুয়েট ০৪-০৫]
   - **(viii)** $(y - 1)^2 = 4(x - 2)$ [দি: বো: ১০]
2. **(i)** $x^2 = -12y$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ বের কর।
   [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

   (ii) $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী হলে, তার উপকেন্দ্র ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৬, ১৪, ০৯; সি: বো: ০৭; ব: বো: ০৫, ১০, ১২; য: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৩, ০৯]

Type-II

3. নিম্নোক্ত সমীকরণ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ, অক্ষের সমীকরণ এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর:
   - **(i)** $y^2 = 4x + 4y - 8$ [রা: বো: ১০, ১২; দি: বো: ১৫; য: বো: ০৭, ০৫; ব: বো: ১১]
   - **(ii)** $y^2 = 8x - 8y$ [বিআইটি ৯৯-০০; রা: বো: ১৬; দি: বো: ১১]
   - **(iii)** $x^2 + 4x + 2y = 0$ [সি: বো: ১৬]
   - **(iv)** $x^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ [সি: বো: ১৩, ০৮; ব: বো: ০৬]
   - **(v)** $x^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ [কু: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১০]
   - **(vi)** $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ [কু: বো: ১৬; য: বো: ০৯; চ: বো: ১৩; ব: বো: ১৪]
   - **(vii)** $3x^2 - 4y + 3x - 5 = 0$ [চ: বো: ১৪; সি: বো: ০৬]
   - **(viii)** $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$
     [ঢা: বো: ১০, ০৬; য: বো: ১৬, ১১; কু: বো: ১৫, ১৪, ০৮, ১২; চ: বো: ০৯, ০৬ সি: বো: ১১; দি: বো: ১৩; ব: বো: ১৬, ১৪]
4. **(i)** $x^2 + 6x + 3y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৫(খ)]

   (ii) $y^2 + 6y - 4x = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

Type-III

5. **(i)** $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের ওপরোস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
   [চুয়েট ০৫-০৬; ঢা: বো: ০৯, ০৫, ১২; কু: বো: ১০; য: বো: ১৫; রা: বো: ০৭; দি: বো: ১০; সি: বো: ০৭, ১২; ব: বো: ১৩]

   (ii) $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 10; বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
   [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

   (iii) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 7; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   (iv) $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর কোটি 12 হলে উক্ত বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

   (v) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের ধনাত্মক দিকের প্রান্তবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (vi) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় P, Q হলে ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Type-IV

6. এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:
   (i) উপকেন্দ্র $(1, 1)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $3x + 4y = 1$
   [ঢা: বো: ০৭; য: বো: ১০; রা: বো: ০৫; কু: বো: ১৪, ০৫; ব: বো: ১১, ০৫; সি: বো: ০৮; চ: বো: ০৫, ১২; দি: বো: ১৪]
   (ii) উপকেন্দ্র $(0, -4)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y - 4 = 0$ [ব: বো: ০৭]
   (iii) উপকেন্দ্র $(2, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x + 2 = 0$
   (iv) উপকেন্দ্র $(0, a)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y + a = 0$ [য: বো: ০৬]
7. $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $x + y + 1 = 0$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ০৮, ১২; দি: বো: ১০; সি: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১৫]

Type-V

8. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:
   (i) শীর্ষবিন্দু $(2, 3)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y = 6$ [য: বো: ১২; ব: বো: ০৯; কু: বো: ০৯]
   (ii) শীর্ষবিন্দু $(3, 1)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $4x + 3y = 5$
9. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:
   (i) উপকেন্দ্র $(7, 3)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-1, 3)$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ)]
   (ii) উপকেন্দ্র $(0, 2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(3, 2)$ [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ)]
   (iii) উপকেন্দ্র $(5, 8)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-1, 2)$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ)]
   (iv) উপকেন্দ্র $(5, 2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(3, 4)$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ)]
   (v) $(-6, -6)$ উপকেন্দ্র এবং $(-2, 2)$ শীর্ষবিন্দু হলে, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৫(খ)]
10. (i) $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $(2, -3)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট পরাবৃত্তের অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [কুয়েট ০৫-০৬; ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ১৩; চ: বো: ১৩]
   (ii) কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0, 0)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [চ: বো: ১০; য: বো: ০৮; সি: বো: ১১]
   (iii) কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(-2, 2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(1, -2)$ হলে নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ)]
   (iv) উপকেন্দ্র $(-1, 3)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(4, 3)$ পরাবৃত্তের সমীকরণ ও তার অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু: বো: ১১; সি: বো: ০৬; ব: বো: ১৩]
   (v) উপকেন্দ্র $(-6, -3)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-2, 1)$ পরাবৃত্তের সমীকরণ ও তার অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Type-VI

11. (i) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(4, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং নিয়ামক x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-4, -7)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি: বো: ০৫, ১২]
   (ii) $(4, 5)$ বিন্দুগামী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(2, 3)$ এবং অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল।
   (iii) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(4, -3)$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং অক্ষটি x অক্ষের সমান্তরাল। [চুয়েট ১০-১১; বুয়েট ০৫-০৬; বুটেক্স ০৪-০৫; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১৪]
   (iv) $(3, 3), (6, 5)$ এবং $(6, -3)$ বিন্দুগামী যে পরাবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
   (v) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং শীর্ষবিন্দু y-অক্ষের ওপর অবস্থিত এবং যা $(0, 2)$ ও $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দুগামী।
   (vi) কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তদ্বয় $(-2, 2)$ ও $(-2, -4)$ হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   (vii) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ও $(3, -3)$।

Type-VII

12. (i) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + 2y - 1 = 0$ রেখার ওপর লম্ব।

(ii) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x + y - 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

(iii) $y = 2x + 2$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(iv) দেখাও যে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $ln = am^2$ হয়।
[রা: বো: ০৫; কু: বো: ০৫; চ: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(v) যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(2, 5)$ বিন্দুতে এবং $x = 4$ রেখাটি যাকে শীর্ষে স্পর্শ করে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু: বো: ১২; সি: বো: ১৩]

(vi) কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি পরাবৃত্তকে উহার শীর্ষ বিন্দুতে স্পর্শ করে, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৫-০৬]

13. (i) $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৬, ১৩, ০৯, ০৬; রা: বো: ১৪, ১১; য: বো: ১৪, ০৫; চ: বো: ০৯, ১২; দি: বো: ০৯, ১২; কু: বো: ১৩, ০৯, ০৭, ১৪; সি: বো: ১৫, ১৪; ব: বো: ১২]

(ii) $x = ay^2 + by + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(3, -2)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(5, 0)$ বিন্দুগামী। a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

14. (i) একটি সরলরেখা $x^2 + y^2 = 2a^2$ বৃত্ত ও $y^2 = 8ax$ পরাবৃত্ত উভয়কে স্পর্শ করে। দেখাও যে, রেখাটির সমীকরণ $y = \pm(x + 2a)$

(ii) একটি পরাবৃত্তাকার খিলানের উচ্চতা 18 ফুট ও তার প্রান্তদ্বয়ের আনুভূমিক দূরত্ব 24 ফুট। প্রান্তদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হতে 8 ফুট দূরে খিলানের উচ্চতা কত?

উত্তরমালা

1. (i) $(0, 0), (1, 0), 4, x + 1 = 0$ (ii) $(0, 0), \left(0, \frac{-5}{2}\right), 10, 2y - 5 = 0$

(iii) $(0, 1), (0, 0), 4, y - 2 = 0$ (iv) $(0, 1), (0, 0), 4, y = 2$

(v) $(2, 0), (3, 0), 4, x - 1 = 0$ (vi) $(-3, 0), \left(-\frac{5}{2}, 0\right), 2, 2x + 7 = 0$

(vii) $\left(-\frac{5}{8}, 0\right), \left(\frac{11}{8}, 0\right), 8, 8x + 21 = 0$

(viii) $(2, 1), (3, 1), 4, x = 1$

2. (i) $y - 3 = 0$ (ii) $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \frac{4}{3}, 3x + 1 = 0$

3. (i) $(1, 2), (2, 2), 4, x - 2 = 0, y - 2 = 0, x = 0$

(ii) $(-2, -4), (0, -4), 8, x = 0, y + 4 = 0, x + 4 = 0$

(iii) $(-2, 2), \left(-2, \frac{3}{2}\right), 2, 2y - 3 = 0, x + 2 = 0, 2y - 5 = 0$

(iv) $\left(4, \frac{9}{2}\right), (4, 4), 2, y - 4 = 0, x - 4 = 0, y - 5 = 0$

(v) $\left(-4, -\frac{39}{2}\right), (-4, -19), 2, y + 19 = 0, x + 4 = 0, y + 20 = 0$

(vi) $(-3, 2), \left(-\frac{13}{6}, 2\right), \frac{10}{3}, 6x + 13 = 0, y - 2 = 0, 6x + 23 = 0$

(vii) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{23}{16}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{53}{48}\right), \frac{4}{3}, 48y + 53 = 0, 2x + 1 = 0, 48y + 85 = 0$

(viii) $(-3, -7), \left(-3, -\frac{71}{10}\right), \frac{2}{5}, 10y + 71 = 0, x + 3 = 0, 10y + 69 = 0$

4. (i) $(-3, 3)$; $\left(-3, \frac{9}{4}\right)$; 3 (ii) 4

5. (i) $\left(2, \pm 4\sqrt{2}\right)$ (ii) $(2, \pm 8)$ (iii) $\left(4, \pm 4\sqrt{3}\right)$ (iv) $18\frac{1}{4}$ একক (v) $2x - y = 0$

6. (i) $(4x - 3y)^2 - 44x - 42y + 49 = 0$ (ii) $x^2 = -16y$ (iii) $y^2 = 8x$ (iv) $x^2 = 4ay$

7. $(x - y)^2 + 2x - 6y + 3 = 0$, $x - y + 2 = 0$, $\sqrt{2}$, $x + y = 0$

8. (i) $x^2 - 4x + 12y - 32 = 0$ (ii) $(3x - 4y)^2 - 190x - 80y + 625 = 0$

9. (i) $(y - 3)^2 = 32(x + 1)$; (ii) $(y - 2)^2 = -12(x - 3)$;
(iii) $(x - y)^2 - 42x - 54y + 57 = 0$;
(iv) $x^2 + y^2 + 2xy - 30x + 2y + 33 = 0$;
(v) $4x^2 + y^2 + 104x + 148y - 4xy - 124 = 0$;

10. (i) $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y - 43 = 0$ (ii) $2x + y + 10 = 0$ (iii) $3x - 4y - 36 = 0$
(iv) $y^2 - 6y + 20x - 71 = 0$, $y - 3 = 0$, 20
(v) $(x - y)^2 + 38x + 26y + 41 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $16\sqrt{2}$

11. (i) $x^2 - 8x + 16y + 64 = 0$ (ii) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
(iii) $y^2 + 6y - 4x + 25 = 0$; $y^2 + 6y + 4x - 7 = 0$
(iv) $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$ (v) $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$
(vi) $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$ অথবা, $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$
(vii) $y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$ অথবা, $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$

12. (i) $4x - 2y + 3 = 0$ (ii) $8x + 2y + 1 = 0$ (iii) 16
(v) $(y - 5)^2 + 8(x - 4) = 0$ (vi) $(x + y)^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

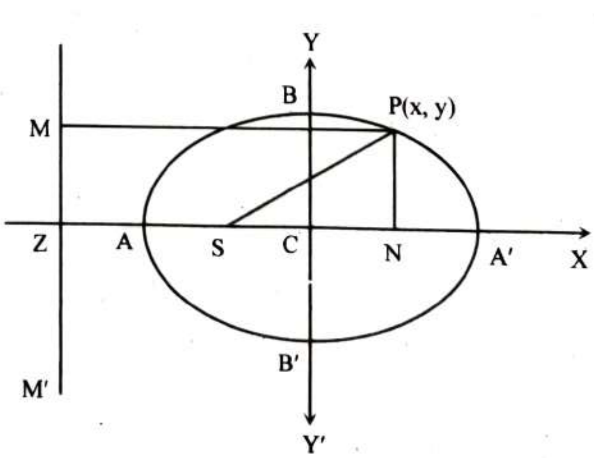
13. (i) $\frac{1}{2}$, 2, 5 (ii) $\frac{1}{2}$, 2, 5.

14. (ii) 10 ফুট;

পাঠ-৭ ও ৮

6.10 উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ (Standard equation of ellipse)

মনে করি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S, উৎকেন্দ্রতা e এবং নিয়ামক MZM′; নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব টানি। ধরি, SZ রেখাটি উপবৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করে।



আবার AS কে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন রেখাটি উপবৃত্তকে A′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AA′ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ। AA′ এর মধ্যবিন্দু C নিই এবং C এর মধ্যদিয়ে AA′ এর ওপর একটি লম্ব আঁকি যেন রেখাটি উপবৃত্তকে B ও B′ বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, C বিন্দুটি উপবৃত্তটির কেন্দ্র এবং BB′ উপবৃত্তের ক্ষুদ্রাক্ষ।

ধরি, $AA' = 2a$ তাহলে, $CA = CA' = a$

সংজ্ঞানুসারে, $\frac{SA}{AZ} = e$ এবং $\frac{SA'}{A'Z} = e$

বা, $SA = e.\ AZ$ ⋯ ⋯ (i) এবং $SA' = e.\ A'Z$ ⋯ ⋯ (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে, $SA + SA' = e\,(AZ + A'Z) = e\,(CZ - CA + CA' + CZ)$

বা, $AA' = e.2CZ$ $[\because CA = CA']$

বা, $2CA = e.2CZ \quad \therefore\ CZ = \frac{CA}{e} = \frac{a}{e}$

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে, $SA' - SA = e\,(A'Z - AZ) = e.AA'$

বা, $(CS + CA') - (CA - CS) = e.AA'$ বা, $2CS = e\ 2CA \quad \therefore\ CS = e.CA = e.a$

এখন C-কে মূলবিন্দু, AA′ কে x-অক্ষ বরাবর এবং BB′ কে y-অক্ষ বরাবর ধরে,উপবৃত্তের ওপর একটি চলমান বিন্দু P(x, y) নিই। P হতে নিয়ামক MM′ ও বৃহদাক্ষ AA′ এর ওপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টানি এবং SP যোগ করি।

$\therefore$ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$ $[\because CS = ae]$

$CN = x,\ PN = y,\ SP = \sqrt{SN^2 + PN^2} = \sqrt{(SC + CN)^2 + PN^2} = \sqrt{(x + ea)^2 + y^2}$

সংজ্ঞানুসারে, $SP = e.\ PM = e.\ ZN = e\,(CZ + CN) = e\left(\frac{a}{e} + x\right)$ $[\because CZ = \frac{a}{e}]$

বা, $SP^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$ বা, $(x + ea)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$

বা, $x^2 + 2aex + e^2a^2 + y^2 = a^2 + 2aex + e^2x^2$

বা, $(1 - e^2)\,x^2 + y^2 = a^2\,(1 - e^2)$

বা, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$ ...... (iii)

(iii)-এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y = \pm a\sqrt{1 - e^2}$; অতএব $CB = CB' = a\sqrt{1 - e^2}$

ধরি, $CB = CB' = b$, তাহলে $b^2 = a^2(1 - e^2)$

সুতরাং (iii) সমীকরণটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকার ধারণ করে। এই সমীকরণ হলো উপবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ।

কাজ: y-অক্ষকে বৃহৎ অক্ষ ধরে উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণটি লিখ। অতঃপর x-অক্ষকে বৃহৎ অক্ষবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণের সাথে তুলনা কর।

6.10.1 উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণের বৈশিষ্ট্য

উপবৃত্তের আদর্শ বা প্রমিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ হতে পাই,

$y = \pm b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$ ... ... (i) এবং $x = \pm a\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}}$ ... ... (ii)

(a) $x < a$ এর জন্য (i) নং হতে y এর সমান অথচ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট দুইটি মান পাওয়া যাবে। সুতরাং উপবৃত্তটি x-অক্ষ অর্থাৎ এর বৃহৎ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, উপবৃত্তটি y-অক্ষ অর্থাৎ এর ক্ষুদ্র অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(b) $x > a$ বা, $x < -a$ এবং $y > b$ বা, $y < -b$ হলে (i) ও (ii) নং হতে যথাক্রমে পাই, y ও x এর মান অবাস্তব। সুতরাং উপবৃত্তটির কোনো অংশই x-অক্ষের A ও A′ বিন্দুদ্বয়ের এবং y-অক্ষের B ও B′ বিন্দুদ্বয়ের বাইরে অবস্থান করবে না।

$x = \pm a$ এর জন্য $y = 0$ এবং $y = \pm b$ এর জন্য $x = 0$ অর্থাৎ, উপবৃত্তের শীর্ষ x ও y অক্ষে অবস্থিত। তাহলে, x ও y এর সীমা যথাক্রমে $[-a, a]$ ও $[-b, b]$

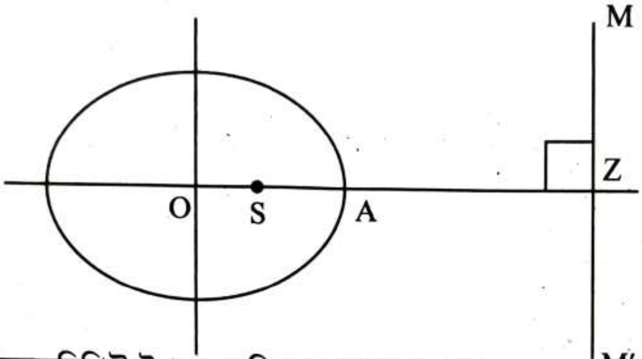
সুতরাং উপবৃত্তটি একটি সীমাবদ্ধ বক্ররেখা এবং তা $x = \pm a$ ও $y = \pm b$ এই চারটি রেখা দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত হবে।

(c) আবার, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$

সুতরাং, (x, y) বিন্দুটি উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত হলে (– x, y), (x , – y) ও (– x, – y) বিন্দুত্রয়ও উপবৃত্তটির ওপর অবস্থিত হবে। (x, y) ও (– x, y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-টি y-অক্ষের ওপর লম্ব হবে এবং y-অক্ষ দ্বারা (0, y) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হবে। আবার, (x, y) ও (x, – y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-টি x-অক্ষের ওপর লম্ব হবে এবং x-অক্ষ দ্বারা (x, 0) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হবে।

আবার, (x, y) ও (– x, – y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-টি (0, 0) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হবে এবং এই বিন্দুটি উপবৃত্তটির কেন্দ্র। সুতরাং বলা যায়, উপবৃত্তের অভ্যন্তরস্থ যে বিন্দুগামী প্রত্যেকটি জ্যা উক্ত বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তাই উক্ত উপবৃত্তের কেন্দ্র।

6.10.2 কেন্দ্র ও দিকাক্ষের দূরত্বকে উপকেন্দ্র যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে



O কেন্দ্র ও S উপকেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের দিকাক্ষ MZM′। OA = a

তাহলে, $OS = ae,\ OZ = \frac{a}{e}$

$$SZ = OZ - OS = \frac{a}{e} - ae = \frac{a(1-e^2)}{e}$$

এখন, $$\frac{OS}{SZ} = \frac{ae}{\frac{a(1-e^2)}{e}} = \frac{e^2}{1-e^2}$$

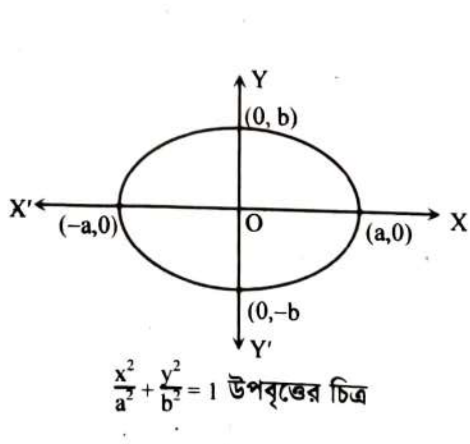
অর্থাৎ উপকেন্দ্র S, OZ রেখাকে $e^2 : (1 - e^2)$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

6.11 উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

(Drawing the graph of the equation of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণে x এর স্থলে –x এবং y এর স্থলে –y বসালে, সমীকরণটির কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং উপবৃত্তটি উভয় অক্ষের (x-অক্ষ ও y-অক্ষ) সাথে প্রতিসম।
আবার সমীকরণটিকে নিম্ন উপায়ে বিশ্লেষণ করা যায়:

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$ হতে প্রতীয়মান হয় যে, $a^2 < x^2$ হতে পারবে না। কেননা সেক্ষেত্রে y এর মান অবাস্তব হবে। অর্থাৎ $-a \le x \le a$ হবে এবং এই ব্যবধির যেকোনো x এর জন্য y এর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট দুইটি মান পাওয়া যাবে। কিন্তু x ও y এর মান দ্বারা গঠিত বিন্দুগুলির মধ্যে (–a, 0) ও (a, 0) বিন্দুদ্বয় x-অক্ষের উভয় দিকের প্রান্ত বিন্দু হবে।



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের চিত্র

অনুরূপভাবে, $x = \pm a\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}}$ হতে বলা যায়, $-b \le y \le b$ হবে এবং (0, –b) ও (0, b) বিন্দুদ্বয় y-অক্ষের উভয়দিকের প্রান্ত বিন্দু হবে।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) উপবৃত্ত একটি কেন্দ্রিক কণিক। বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র বলা হয়।

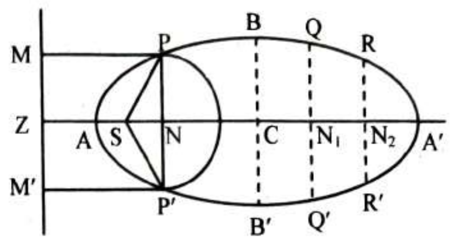
(ii) উপবৃত্তটি x ও y উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম, কারণ এটি x ও y এর কেবলমাত্র জোড় ঘাত ধারণ করে।

কাজ: একই লেখচিত্রে নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর: (i) $x^2 + 4y^2 = 36$ (ii) $4x^2 + y^2 = 36$

6.11.1 সংজ্ঞার সাহায্যে উপবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন

[উপকেন্দ্র ও নিয়ামক জানা থাকলে, উপবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন]

মনে করি, কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S, উৎকেন্দ্রতা e $(0 < e < 1)$ এবং নিয়ামক MM′; নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব আঁকি এবং ZS কে বর্ধিত করি। SZ কে e ঃ 1 অনুপাতে A ও A′ বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করি যেন SA ঃ AZ = SA′ ঃ A′Z = e ঃ 1 হয়। তাহলে, সংজ্ঞানুসারে, A ও A′ উপবৃত্তের ওপরে অবস্থিত দুইটি বিন্দু হবে। AA′ এর ওপর যেকোনো বিন্দু N নিয়ে AA′ এর ওপর PNP′ লম্ব আঁকি।



এখন S-কে কেন্দ্র করে e.NZ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি, যা PNP′ কে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করে। SP ও SP′ যোগ করি এবং নিয়ামকের ওপর PM ও P′M′ লম্ব আঁকি। এখানে, SP = e. ZN = e. PM অর্থাৎ SP ঃ PM = e; সুতরাং P উপবৃত্তের ওপরস্থ একটি বিন্দু। অনুরূপভাবে, P′ উপবৃত্তের ওপরস্থ একটি বিন্দু।

AA′ এর ওপর $N_1, N_2 \cdots$ ইত্যাদি বিন্দু নিয়ে পূর্বের ন্যায় Q, Q′; R,R′; ... বিন্দুগুলি পাওয়া যাবে এবং এই বিন্দুগুলি উপবৃত্তের ওপরস্থ বিন্দু। এই বিন্দুগুলি সংযোগ করলে যে সুষম বন্ধ বক্ররেখা পাওয়া যায় তাই উপবৃত্ত।

উপরি-উক্ত চিত্রানুসারে, উপবৃত্তের বিভিন্ন অংশের নামকরণ ও পরিচিতি (6.10 এর চিত্রানুসারে)

(i) **শীর্ষবিন্দু (Vertices):** A ও A′ বিন্দুদ্বয়কে উপবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** বলে।

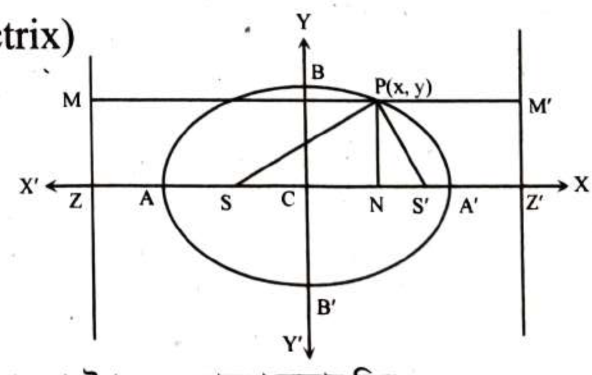
(ii) **বৃহদাক্ষ (Major axis):** AA′ রেখাংশকে বৃহদাক্ষ বলে।

(iii) **কেন্দ্র (Centre):** AA′ এর মধ্যবিন্দু C কে উপবৃত্তটির কেন্দ্র বলা হয়।

(iv) **ক্ষুদ্রাক্ষ (Minor axis):** কেন্দ্র দিয়ে অঙ্কিত বৃহদাক্ষের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা BB′ কে উপবৃত্তের ক্ষুদ্রাক্ষ বলে।

6.12 উপকেন্দ্র ও নিয়ামক (Focus and directrix)

মনে করি, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র C(0, 0), একটি উপকেন্দ্র S(– ae, 0), একটি নিয়ামক MZ, বৃহৎ অক্ষ AA′ = 2a এবং ক্ষুদ্রাক্ষ BB′ = 2b ধরি, x-অক্ষের ওপর ধনাত্মক দিকে দুইটি বিন্দু S′(ae, 0) এবং $Z'\left(\frac{a}{e}, 0\right)$



ZZ′ এর ওপর M′Z′ এবং M′Z′ এর ওপর PM′ লম্ব আঁকি। P(x, y) উপবৃত্তের ওপরস্থ চলমান বিন্দু।

সংজ্ঞানুসারে, SP = e. PM বা, $SP^2 = e^2.PM^2$

বা, $(x + ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$ [সরলীকরণ করে]

বা, $(x - ae)^2 + 4aex + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + 4aex$

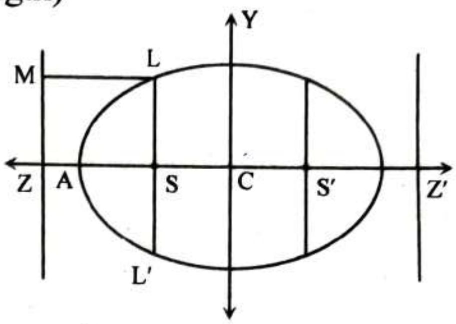
বা, $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = e^2(CZ' - CN)^2$

বা, $S'P^2 = e^2(NZ')^2 = e^2(PM')^2$ বা, S′P = e.PM′

সুতরাং e কে উৎকেন্দ্রিকতা ধরে $\frac{SP}{PM} = e$ শর্তে যে উপবৃত্ত পাওয়া যায়, e-কে উৎকেন্দ্রিকতা ধরে, S′ কে উপকেন্দ্র এবং M′Z′ কে নিয়ামক ধরে সেই একই উপবৃত্ত পাওয়া যাবে।
অতএব, উপবৃত্তটির দুইটি উপকেন্দ্র S(−ae, 0), S′(ae, 0) এবং দুইটি নিয়ামক MZ, M′Z′ বিদ্যমান এদের সমীকরণ যথাক্রমে $x = -\frac{a}{e}$ ও $x = \frac{a}{e}$ ।

6.12.1 উপকেন্দ্রিক লম্ব ও এর দৈর্ঘ্য (Latus rectum and its length)

উপবৃত্তের যে কোনো উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত জ্যা বৃহৎ অক্ষের ওপর লম্ব হলে তাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বলা হয়।



মনে করি, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্রিক লম্ব LSL′ ।
তাহলে SL = SL′ এবং L এর স্থানাঙ্ক (−ae, SL);
যেহেতু L(−ae, SL) বিন্দুটি উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত।

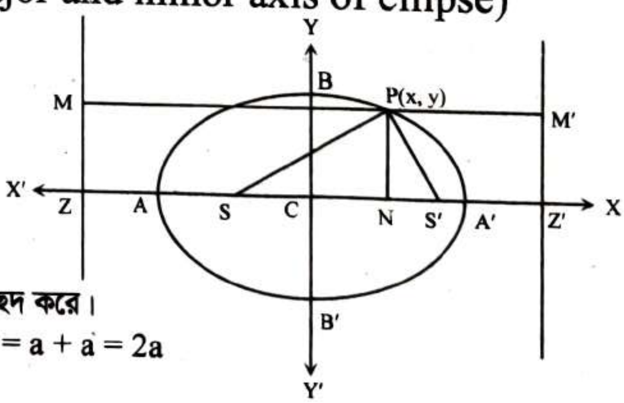
$\therefore \frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{SL^2}{b^2} = 1$ বা, $SL^2 = b^2(1 - e^2)$

বা, $SL^2 = b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$ বা, $SL = \frac{b^2}{a}$ $[\because (1 - e^2) = \frac{b^2}{a^2}]$

$\therefore LL' = 2.SL = \frac{2b^2}{a}$, যা উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য।

বিকল্প পদ্ধতিতে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়:
চিত্রানুসারে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = LL′ = 2.SL ... ... (i)
উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে আমরা জানি, $\frac{SL}{LM} = e$
বা, SL = e.LM = e.SZ $[\because LM = SZ]$
সমীকরণ (i) হতে পাই,
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, LL′ = 2e.SZ

6.13 উপবৃত্তের বৃহদাক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয়
(Determination of the length of major and minor axis of ellipse)



উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (i)
a > b ধরে C(0, 0) বিন্দু উপবৃত্তের কেন্দ্র।
(i) নং সমীকরণে y = 0 বসিয়ে পাই $\frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$

$\Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$

সুতরাং উপবৃত্ত x-অক্ষকে A(a, 0) এবং A′(− a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।
AA′ কে বৃহদাক্ষ বলে এবং এর দৈর্ঘ্য AA′ = AC + CA′ = a + a = 2a
∴ বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য 2a
x = 0, উপবৃত্তের (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$0 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \therefore y = \pm b$

সুতরাং বক্ররেখাটি বাস্তবে y-অক্ষকে ছেদ করে এবং ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক B(0, b) এবং B′(0, −b)
BB′ কে ক্ষুদ্রাক্ষ বলা হয় এবং এর দৈর্ঘ্য BB′ = BO + OB′ = b + b = 2b
∴ ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b

6.13.1 উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব দুইটির সমষ্টি বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান

মনে করি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (চিত্র 6.13নং অনুচ্ছেদে) উপরিস্থিত কোনো বিন্দু $P(x, y)$. উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি S ও S' এবং MZ, $M'Z'$ এর দুইটি নিয়ামক। S, P ও S', P যোগ করি এবং নিয়ামক দুইটির উপর MPM' লম্ব আঁকি।

এখন, কণিকের সংজ্ঞা অনুযায়ী, $SP = e.PM$ এবং $S'P = e.PM'$

$$\therefore SP + S'P = e(PM + PM') = e\{(CZ + CN) + (CZ' - CN)\}$$
$$= e.2CZ \quad [\because CZ = CZ']$$
$$= 2.e.CZ = 2.CA \quad [\because e.CZ = CA]$$
$$= AA' = 2a, \text{ যা বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য} \quad \therefore SP + S'P = 2a$$

উপরে বর্ণিত ধর্মটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এর সাহায্যে উপবৃত্তের সংজ্ঞা নিম্নরূপ–

কোনো সমতলে, কোনো সেটের বিন্দুসমূহ যদি এমনভাবে অবস্থিত হয় যে, ঐ সমতলে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে এর দূরত্ব দুইটির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক হয় তাহলে উক্ত বিন্দুর সেটের সঞ্চারপথ উপবৃত্ত হবে।

টিকা: উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষই এর বৃহত্তম জ্যা।

পাঠ-৯ ও ১০

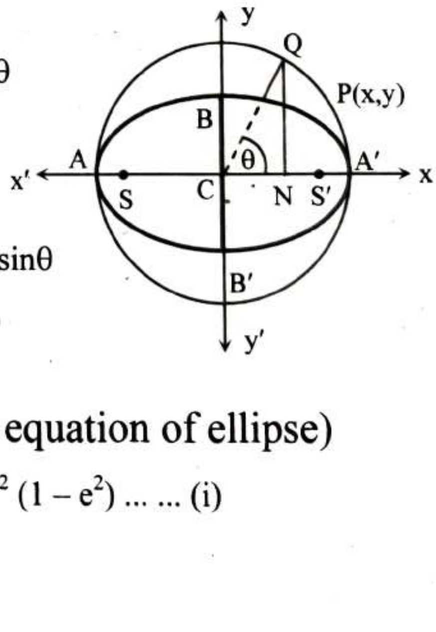
6.14 কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক

(Parametric coordinates of ellipse at fixed point)

মনে করি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (i) $(a > b)$ একটি উপবৃত্ত যার কেন্দ্র C এবং বৃহৎ অক্ষ AA'

C কে কেন্দ্র ও বৃহৎ অক্ষ AA' কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$ ... ... (ii)

মনে করি, $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু। P হতে AA' এর উপর অঙ্কিত PN লম্বকে বর্ধিত করলে তা সহায়ক বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।



এবং ধরি, উৎকেন্দ্রিক কোণ $\angle QCN = \theta$

তাহলে Q বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ এবং $x = CN = a\cos\theta$

কিন্তু $P(x, y)$ বিন্দুটি (i) নং উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত।

$$\therefore \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ বা, } \frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta \text{ বা, } y = b\sin\theta$$

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$

এবং কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

6.15 উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয়

(Determination of the eccentricity from the equation of ellipse)

আমরা জানি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ যেখানে $a > b$ এবং $b^2 = a^2(1-e^2)$ ... ... (i)

ইহাই উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ [চিত্র এবং প্রমাণ 6.10 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য]

(i) নং হতে পাই, $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2 \Rightarrow e^2 = 1-\frac{b^2}{a^2} \quad \therefore e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

যেহেতু উপবৃত্তের e এর মান $0 < e < 1$. সুতরাং e কে ধনাত্মক হিসাবে বিবেচনা করা হয়েছে।

উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের অর্ধেকের দৈর্ঘ্য a এবং ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেকের দৈর্ঘ্য b এর মান জানা থাকলে উৎকেন্দ্রিকতা e এর মান নির্ণয় করা যায়।

কাজ: $4x^2 + 5y^2 = 20$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

6.16 উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় (Determination of the coordinates of focus and equation of directrix from the equation of ellipse)

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ যেখানে $a > b$ এবং $b^2 = a^2(1-e^2)$ উপবৃত্তের সমীকরণের প্রমাণ হিসাবে ধরি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S এবং S'। MZ' এবং M'Z' হলো এর নিয়ামকদ্বয়। Z Z' রেখা S এবং S' বিন্দুগামী রেখার অনুরূপ। ZZ' রেখা নিয়ামকদ্বয়ের উপর লম্ব। SZ এর উপর A একটি বিন্দু নেওয়া হলো যেন $SA = eAZ$ ... ... (i)

এখানে e উৎকেন্দ্রিকতা

আবার, SZ এর বর্ধিতাংশের উপর আর একটি বিন্দু A' নেওয়া হলো যেন $SA' = eA'Z$ ... ... (ii)

ধরি $AA' = 2a$ এবং C হলো AA' এর মধ্যবিন্দু। C কে কেন্দ্র বিন্দু বলা হয় যার স্থানাঙ্ক C(0, 0)

(i) এবং (ii) যোগ করে পাই, $SA + SA' = eAZ + eA'Z$

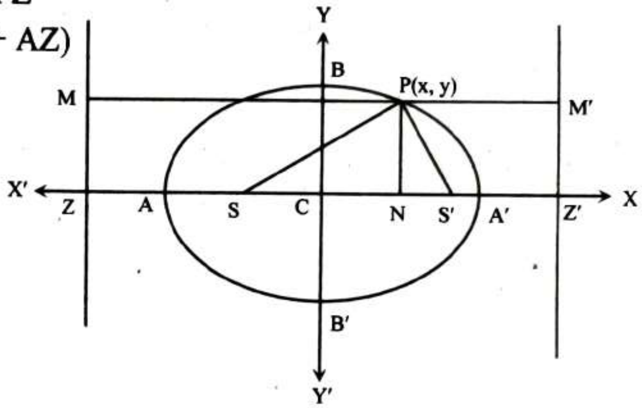
$\Rightarrow AA' = e.(AZ + A'Z) \Rightarrow 2a = e\,(AZ + AA' + AZ)$

$\Rightarrow 2a = e\,(AA' + 2AZ) \Rightarrow 2a = e\,(2a + 2AZ)$

$\Rightarrow a = e\,(a + AZ)$

$\Rightarrow a = e.CZ \;\; [\because CZ = CA + AZ = a + AZ]$

$\Rightarrow CZ = \frac{a}{e}$ ... ... (iii)



আবার, $CS = CA - AS$

$= CA - eAZ \;\; [\because AS = eAZ]$

$= CA - e(CZ - CA)$

$= a - e\left(\frac{a}{e} - a\right) = a - a + ae$

$\therefore CS = ae$ ... ... (iv)

C বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরে CX কে x-অক্ষ এবং CY কে y-অক্ষ বিবেচনা করি। যেহেতু S বিন্দু x-অক্ষে অবস্থিত। অতএব S এর স্থানাঙ্ক (– ae, 0) এখানে S ই হলো উপকেন্দ্র। যেহেতু উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক S এবং S' সুতরাং এদের স্থানাঙ্ক লেখা হয় $(\pm ae, 0)$

এবং নিয়ামক MZ এর সমীকরণ $x = CZ = \frac{a}{-e} \Rightarrow x = \frac{a}{-e}$ অনুরূপভাবে নিয়ামক M'Z' এর সমীকরণ $x = \frac{a}{e}$

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e}$.

উপকেন্দ্র, নিয়ামকের সমীকরণ এবং উৎকেন্দ্রিকতা জানা থাকলে, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়:

মনে করি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$, নিয়ামক MZ যার সমীকরণ $lx + my + n = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $e\,(0 < e < 1)$; উপবৃত্তের ওপর P(x, y) একটি চলমান বিন্দু। P থেকে নিয়ামকের উপর PM লম্ব আঁকি এবং S, P যোগ করি। তাহলে, $SP = e.PM$ বা, $SP^2 = e^2.PM^2$

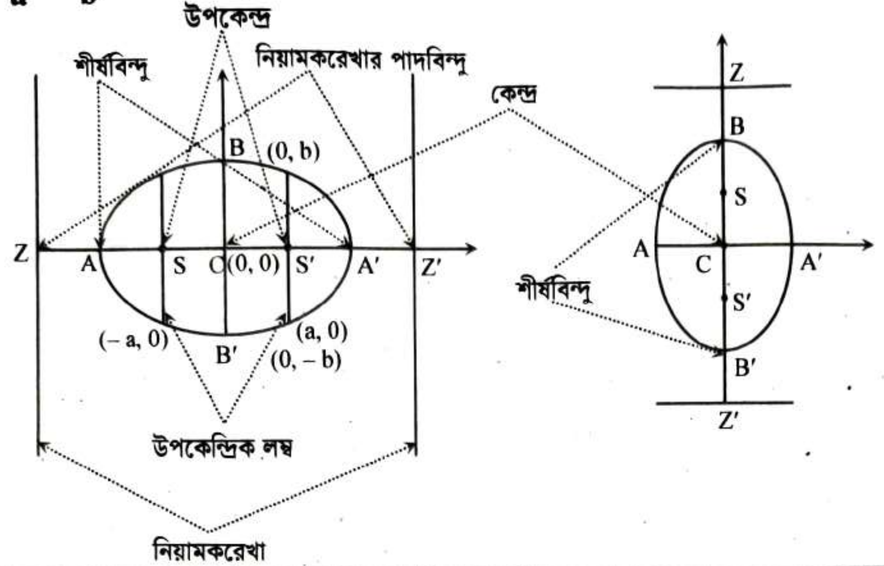
বা, $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 . \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$

বা, $(l^2+m^2)\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\} = e^2(lx+my+n)^2$

এই সমীকরণকে **উপবৃত্তের সাধারণ** সমীকরণ বলে।

কাজ: $4x^2 + 25y^2 = 100$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

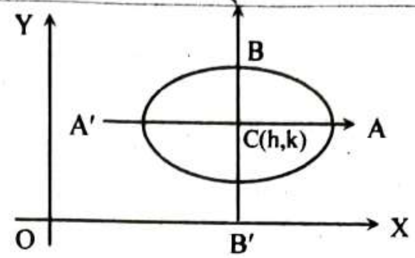
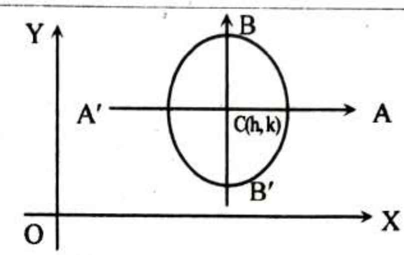
6.16.1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের বিভিন্ন অংশের চিহ্নিতকরণসহ চিত্র এবং প্রয়োজনীয় সূত্র



	উপবৃত্তের আকার	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$
		যখন $a > b$	যখন $a < b$	যখন $a > b$	যখন $a < b$
(i)	কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii)	উৎকেন্দ্রিকতা	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
(iii)	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
(iv)	ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
(v)	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$	$y-\beta = 0$	$x-\alpha = 0$
(vi)	ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$	$x-\alpha = 0$	$y-\beta = 0$
(vii)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\pm a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm b+\beta)$
(viii)	ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm ae, 0)$ বা, $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$	$(0, \pm be)$ বা, $(0, \pm\sqrt{b^2-a^2})$	$(\pm ae+\alpha, \beta)$ বা, $(\pm\sqrt{a^2-b^2}+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm be+\beta)$ বা, $(\alpha, \pm\sqrt{b^2-a^2}+\beta)$
(ix)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব	$2ae = 2\sqrt{a^2-b^2}$	$2be = 2\sqrt{b^2-a^2}$	$2ae = 2\sqrt{a^2-b^2}$	$2be = 2\sqrt{b^2-a^2}$
(x)	নিয়ামকরেখার পাদবিন্দু	$\left(\pm\frac{a}{e}, 0\right)$ বা, $\left(\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}, 0\right)$	$\left(0, \pm\frac{b}{e}\right)$ বা, $\left(0, \frac{\pm b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$	$\left(\pm\frac{a}{e}+\alpha, \beta\right)$ বা, $\left(\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}+\alpha, \beta\right)$	$\left(\alpha, \pm\frac{b}{e}+\beta\right)$ বা, $\left(\alpha, \frac{\pm b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}+\beta\right)$
(xi)	নিয়ামকরেখা দুইটির দূরত্ব	$\frac{2a}{e}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\frac{2b}{e}=\frac{2b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$	$\frac{2a}{e}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\frac{2b}{e}=\frac{2b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$
(xii)	নিয়ামকরেখা দুইটির সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x-\alpha=\pm\frac{a}{e}$	$y-\beta=\pm\frac{b}{e}$
(xiii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(xiv)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$y = \pm be$	$x - a = \pm ae$	$y - \beta = \pm be$

6.16.2 দুইটি বিশেষ ধরনের উপবৃত্তের সমীকরণ ও চিত্র

মূলবিন্দু ব্যতীত অন্য কোনো বিন্দুতে কেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ যার অক্ষ x বা y-অক্ষের সমান্তরাল।

উপবৃত্তের সমীকরণ	উপবৃত্তের চিত্র
(a) উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ যার কেন্দ্র (h, k), বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য 2a	
(b) উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ যার কেন্দ্র (h, k), বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য 2b.	

6.16.3 কোনো সরলরেখা উপবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত ও স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

মনে করি, সরলরেখা ও উপবৃত্তটির সমীকরণ যথাক্রমে

$y = mx + c$ ... ... (i) ও $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$

বা, $b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mcx + c^2) = a^2b^2$

বা, $(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2mca^2x + a^2(c^2 - b^2) = 0$ ... ... (iii)

(iii) নং সমীকরণ x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং এর মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান, বাস্তব ও সমান অথবা কাল্পনিক হতে পারে। মূলদ্বয় x_1 ও x_2 হলে (i) নং সমীকরণ হতে y_1 ও y_2 পাওয়া যাবে। x_1 ও x_2 এর মানের ওপর ভিত্তি করে তিনটি ঘটনা ঘটতে পারে, যথা—

(a) x_1 ও x_2 বাস্তব ও অসমান হলে (i) নং রেখা উপবৃত্তটিকে দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করবে।

(b) x_1 ও x_2 বাস্তব ও সমান হলে (i) নং রেখা উপবৃত্তটিকে স্পর্শ করবে।

(c) x_1 ও x_2 কাল্পনিক হলে (i) নং রেখা উপবৃত্তটিকে আদৌ স্পর্শ করবে না।

এখন (b) ঘটনা সত্য হলে (iii) নং সমীকরণের পৃথায়ক শূন্য (0) হবে।

$\therefore (2mca^2)^2 - 4(a^2m^2 + b^2)a^2(c^2 - b^2) = 0$

বা, $(2mca^2)^2 = 4a^2(a^2m^2 + b^2)(c^2 - b^2)$

বা, $4m^2c^2a^4 = 4m^2c^2a^4 + 4a^2b^2c^2 - 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2)$

বা, $4a^2b^2c^2 = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2)$

বা, $c^2 = a^2m^2 + b^2$

$\therefore$ (i) নং সরলরেখা (ii) নং উপবৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত, $c = \pm\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$

$\therefore$ m এর সকল মানের জন্য $y = mx \pm \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ রেখাদ্বয় $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক

এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\pm a^2m}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}, \frac{\pm b^2}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}\right)$

উদাহরণ: $y = 3x + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে c এর মান কত?

সমাধান: $m = 3, a = 2, b = \sqrt{3}$.

$\therefore c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} = \pm\sqrt{2^2 \times 3^2 + (\sqrt{3})^2} = \pm\sqrt{39}$

অনুসিদ্ধান্ত-1. $x \sin\alpha + y \cos\alpha = p$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি

$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$ হয়, এক্ষেত্রে স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{a^2\cos\alpha}{p}, \frac{b^2\sin\alpha}{p}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত-2. $lx + my + n = 0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$ হয়, এক্ষেত্রে স্পর্শ বিন্দু $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{-b^2m}{n}\right)$

দ্রষ্টব্য-1: (x_1, y_1) বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যথাক্রমে বাইরে অথবা উপরে অথবা ভিতরে অবস্থিত হবে যদি $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$ অথবা 0 অথবা < 0 হয়।

দ্রষ্টব্য-2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

পাঠ-১১

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $25x^2 + 16y^2 = 400$ **উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[বুয়েটেক্স ১২-১৩; ঢা: বো: ১৫, ০৯; কু: বো: ০৯, ০৭; দি: বো: ১২; ব: বো: ০৮, ০৬; য: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: $25x^2 + 16y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

একে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, এবং $a^2 = 16, b^2 = 25 \Rightarrow a = 4, b = 5$ এবং

অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, $x = 0, y = 0$ অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 10 ও 8 একক।

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

উপকেন্দ্র $(0, \pm be)$ বা, $(0, \pm 3)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2.\frac{16}{5} = \frac{32}{5}$;

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y = \pm 3$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{5}{\frac{3}{5}} = \pm\frac{25}{3} \Rightarrow 3y \pm 25 = 0$

উদাহরণ-2. p এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যাবে? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৮; চ: বো: ০৯, ০৫, ১২; ব: বো: ০৯, ০৫, ১২; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

সমাধান: $px^2 + 4y^2 = 1$ ……… (i)

(i) নং উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে গেলে আমরা পাই,

$p(\pm 1)^2 + 4 \times 0 = 1 \Rightarrow p = 1$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ ……… (ii)

(ii) নং সমীকরণের সাথে $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের তুলনা করে পাই, $a^2 = 1, b^2 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\frac{1}{4}}{1}\right)} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2.1 = 2$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

উদাহরণ-3. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের ওপর অবস্থিত এবং (2, 2) ও (3, 1) বিন্দু দিয়ে যায়। [রা: বো: ১৪; য: বো: ১৫, ০৬; চ: বো: ০৮, ০৬; ব: বো: ০৬]

সমাধান : ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ …… (i)

(i) নং উপবৃত্তটি (2, 2) ও (3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সুতরাং $\dfrac{2^2}{a^2} + \dfrac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{4}$ …… (ii)

এবং $\dfrac{3^2}{a^2} + \dfrac{1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$ …… (iii)

(iii) – (ii) $\Rightarrow \dfrac{8}{a^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow a^2 = \dfrac{32}{3}$

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow b^2 = \dfrac{32}{5}$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{32}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 5y^2 = 32$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

উদাহরণ-4. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে $(0, \pm 4)$ উপকেন্দ্র এবং $\dfrac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ: বো: ১০; য: বো: ১২; সি: বো: ১০, ০৬]

সমাধান: মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ …… (i)

উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0, \pm 4)$ সুতরাং, y-অক্ষই বৃহৎ অক্ষ।

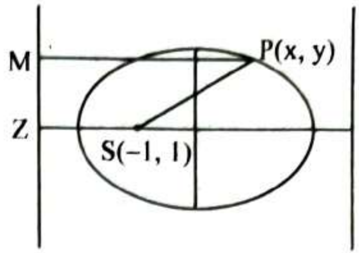
উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \dfrac{4}{5}$ $\therefore 4 = be \Rightarrow b = \dfrac{4}{e} = \dfrac{4}{4/5} = 5$ $\therefore b = 5$

আবার, $a^2 = b^2(1 - e^2) \Rightarrow a^2 = 25\left(1 - \dfrac{16}{25}\right) = 9$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

উদাহরণ-5. কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্র (−1, 1), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামক $x - y + 3 = 0$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৬; য: বো: ১৩; চ: বো: ০৮, ০৬; কু: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: মনে করি, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S(−1, 1) নিয়ামক MZ এবং উপবৃত্তের উপর P(x, y) যে কোনো বিন্দু।



উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{2}$ $\therefore$ উপবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে পাই, SP = e. PM

$\Rightarrow SP^2 = e^2.PM^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x-y+3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2$

$\Rightarrow 8(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y$

$\therefore 7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$ এটিই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

পাঠ-১২ ও ১৩

? অনুশীলনী-6(B)

Type-I

1. লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ **(ii)** $2x^2 + 3y^2 = 1$ **(iii)** $16x^2 + 25y^2 = 400$ **(iv)** $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

Type-II

2. নিম্নোক্ত উপবৃত্তগুলির অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং যে কোনো বিন্দুতে উপবৃত্তগুলির পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন উপকেন্দ্রিক কোণ θ:

(i) $9x^2 + 16y^2 = 144$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ); ব: বো: ১৪]

(ii) $16x^2 + 25y^2 = 400$ [ঢাকা ও দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(খ ও গ); রা: বো: ০৫; কু: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১০]

(iii) $9x^2 + 25y^2 = 225$ [সি: বো: ০৭; মাদ্রাসা বো: ১২] **(iv)** $3x^2 + 4y^2 = 12$ [চ: বো: ১৬]

3. উপবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ নির্ণয় কর। যেখানে θ হলো বিন্দুটির উপকেন্দ্রিক কোণ:

(i) $(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ **(ii)** $(4\cos\theta, \sqrt{5}\sin\theta)$ **(iii)** $(4\cos\theta, 5\sin\theta)$ **(iv)** $(\cos\theta, 2\sin\theta)$

Type-III

4. **(i)** দেখাও যে, **(a)** $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ [ঢা: বো: ১৬; কু: বো: ১২; সি: বো: ১৩; দি: বো: ১৪]
(b) $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ [য: বো: ০৯, ১২] সমীকরণদ্বয় প্রত্যেকে একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। এই উপবৃত্তদ্বয়ের উৎকেন্দ্রিকতা, কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [বুয়েট ০২-০৩]

(ii) $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৭; চ: বো: ১১; ব: বো: ১৩; মাদ্রাসা বো: ১১]

(iii) $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$ সমীকরণটির উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ বের কর। [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

(iv) $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৪-০৫; চুয়েট ১৩-১৪, ১১-১২; কু: বো: ১০; চ: বো: ১৪, রা: বো: ০৯]

(v) $2x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৪, ০৬; সি: বো: ১১]

(vi) $3x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

Type-IV

5. (i) p এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান কত তা নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৮-০৯, ০৪-০৫; বিআইটি ০১-০২; ঢা: বো: ০৯, ১২; রা: বো: ১৪, ১২; দি: বো: ১৫, ১৪, ১১, ০৯; কু: বো: ০৬; য: বো: ১৩; সি: বো: ১৪, ১২, ০৮; মাদ্রাসা: বো: ১৫]

(ii) p এর কোন মানের জন্য $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{p} = 1$ উপবৃত্তটি (4, 6) বিন্দু দিয়ে যাবে? উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৭; সি: বো: ১৬]

(iii) p এর মান কত হলে, $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে যাবে? উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা: বো: ১০; য: বো: ০৮]

(iv) p এর মান কত হলে $x^2 + py^2 = 1$ উপবৃত্তটি $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যাবে? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Type-V

6. এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:

(i) উপকেন্দ্র (3, 4), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x + y - 2 = 0$

[ঢা: বো: ১০, ০৭; কু: বো: ১০; রা: বো: ১৩; চ: বো: ১৫; য: বো: ১১, ০৭; ব: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১০, ১২]

(ii) উপকেন্দ্র (2, 1), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $2x + y = 3$

(iii) উপকেন্দ্র (0, 2), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y + 4 = 0$; এছাড়া উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৪, ০৮]

(iv) উপকেন্দ্র (–2, 3), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x - y + 7 = 0$; এছাড়া উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৫; ব: বো: ১৬, ০৭]

(v) মূলবিন্দু উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x = 2$

(vi) উপকেন্দ্র (– 1, 1), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $4x + 3y - 5 = 0$

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

(vii) উপকেন্দ্র (– 2, 2), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $3x + 4y - 1 = 0$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

Type-VI

7. এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র মূল বিন্দুতে, অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং যা নিম্নলিখিত বিন্দু দিয়ে যায়: (i) (2, 4) ও $(5, \sqrt{2})$ (ii) $(1, \sqrt{6})$ ও (3, 0) [সি: বো: ০৯]

(iii) $(0, 2\sqrt{2})$ ও (– 3, 0) [ঢাকা ও দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

8. (i) স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় (–2, 0), (2, 0) এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 16 একক। [দি: বো: ১১]

(ii) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় (1, –1), (–2, 2) এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক।

9. মূলবিন্দুকে কেন্দ্র এবং x ও y অক্ষদ্বয়কে অক্ষ ধরে এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:

(i) উপকেন্দ্র (± 4, 0) এবং শীর্ষ (± 5, 0)

(ii) শীর্ষবিন্দু (± 10, 0) এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক।

10. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরে, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:

(i) ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(ii) বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$. [কু: বো: ১৩; য: বো: ০৭]

(iii) বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$. [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

11. এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়, কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং যার

(i) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$.

[ঢা: বো: ১১, ০৫; চ: বো: ০৫; রা: বো: ১১, ০৬; সি: বো: ১৫; য: বো: ১১, ০৯; দি: বো: ১৩, ১০]

12. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার :

(i) উপকেন্দ্র $(\pm 1, 0)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক। [কু: বো: ১১]

(ii) কেন্দ্র $(-1, -1)$, শীর্ষবিন্দু $(5, -1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$

13. x ও y অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ এবং মূলবিন্দুকে উপবৃত্তের কেন্দ্র ধরে নিম্নের শর্তানুসারে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) উপকেন্দ্র $(\pm 3, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ [য: বো: ০৫] **(ii).** উপকেন্দ্র $(\pm 5, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{8}$

Type-VII

14. (i) $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট ও $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির ওপর অবস্থিত। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৩, ০৮; দি: বো: ১৬; য: বো: ১৬, ১০, ০৮; চ: বো: ০৭]

(ii) উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x ও y-অক্ষ ধরে এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 একক এবং নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 18 একক।

[কুয়েট ১২-১৩, ১০-১১; বিআইটি ০০-০১; রা: বো: ১৫, ১০; কু: বো: ১৬]

(iii) একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত। উপবৃত্ত $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x-অক্ষের ওপর এবং $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ রেখাকে y-অক্ষের ওপর ছেদ করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৮-০৯]

(iv) নিয়ামককে y-অক্ষ ধরে এরূপ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা e এবং উপকেন্দ্র $(c, 0)$

(v) কোনো উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও তার নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 16 সে.মি. এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ হলে, অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব: বো: ১১]

(vi) কোনো উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্বের সমান এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব 10 একক। উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৯-১০; চ: বো: ১০]

(vii) কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [ব: বো: ১১]

(viii) প্রমাণ কর যে, $y = x - 5$ সরলরেখাটি $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৫(খ)]

(ix) উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও তার নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 14 সে.মি. এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{4}$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

15. (i) দেখাও যে, $2x + y - 10 = 0$ সরলরেখাটি $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তকে কখনো ছেদ করে না।

(ii) যেসব বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iii) যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল হয় তবে প্রমাণ কর ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল $\frac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4 + 4b^2}}$; e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা।

উত্তরমালা

2. **(i)** $y = 0, x = 0, 8, 6, \frac{\sqrt{7}}{4}, (\pm\sqrt{7}, 0), \frac{9}{2}, x = \pm\sqrt{7}, x = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}, (4\cos\theta, 3\sin\theta)$

(ii) $y = 0, x = 0, 10, 8, \frac{3}{5}, (\pm 3, 0), \frac{32}{5}, x = \pm 3, x = \pm\frac{25}{3}, (5\cos\theta, 4\sin\theta)$

(iii) $y = 0, x = 0, 10, 6, \frac{4}{5}, (\pm 4, 0), \frac{18}{5}, x = \pm 4, x = \pm\frac{25}{4}, (5\cos\theta, 3\sin\theta)$

(iv) $y = 0, x = 0, 4, 2\sqrt{3}, \frac{1}{2}, (\pm 1, 0), 3, x = \pm 1, x = \pm 4, (2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$

3. **(i)** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ **(ii)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ **(iii)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ **(iv)** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

4. **(i) (a)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (2, 1); (2, 3), (2, −1); **(b)** $\frac{2}{3}$, (3, 0); (5, 0), (1, 0)

(ii) $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}$ **(iii)** উপকেন্দ্র $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(3, -\frac{1}{2}\right)$; নিয়ামকদ্বয় $2y - 7 = 0, 2y + 5 = 0$;

(iv) $2y = \pm\sqrt{5}$ **(v)** $\frac{2}{3}\sqrt{2}, \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ **(vi)** $\sqrt{\frac{2}{5}}$;

5. **(i)** $p = 100, \frac{\sqrt{3}}{2}, (\pm 5\sqrt{3}, 0)$ **(ii)** $p = 100, \frac{\sqrt{3}}{2}, (0, \pm 5\sqrt{3})$ **(iii)** $p = 5, (\pm 2, 0); 4\sqrt{5}, 8$ **(iv)** $\frac{\sqrt{3}}{2}, 2, 1$

6. **(i)** $17x^2 - 2xy + 17y^2 - 104x - 140y + 446 = 0$ **(ii)** $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$

(iii) $4x^2 + 3y^2 - 24y = 0; 6$ **(iv)** $5x^2 + 5y^2 + 2xy + 10x - 22y + 29 = 0; 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

(v) $9x^2 + 64x + 25y^2 = 64$ **(vi)** $84x^2 + 91y^2 - 24xy + 240x - 170y + 175 = 0$

(vii) $91x^2 + 84y^2 - 24xy + 406x - 392y + 799 = 0$

7. **(i)** $2x^2 + 3y^2 = 56$ **(ii)** $3x^2 + 4y^2 = 27$ **(iii)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

8. **(i)** $15x^2 + 16y^2 = 960$ **(ii)** $55x^2 + 55y^2 + 18xy + 46x - 46y - 713 = 0$

9. **(i)** $9x^2 + 25y^2 = 225$ **(ii)** $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

10. **(i)** $4x^2 + 5y^2 = 5$ **(ii)** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ **(iii)** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

11. **(i)** $x^2 + 2y^2 = 64$; **(ii)** $\frac{4x^2}{81} + \frac{y^2}{18} = 1$

12. **(i)** $3x^2 + 4y^2 = 12$ **(ii)** $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$

13. **(i)** $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$ **(ii)** $39x^2 + 64y^2 = 2496$

14. (i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (ii) $5x^2+9y^2=180$

(iii) $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{5^2}=1; \frac{2\sqrt{6}}{7}; (\pm 2\sqrt{6}, 0)$

(iv) $(x-c)^2+y^2=e^2x^2$ (v) 30 সে.মি. ও 24 সে.মি.

(vi) $\frac{1}{\sqrt{2}}, x^2+2y^2=100$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(viii) $\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ (ix) 21 সে.মি.;

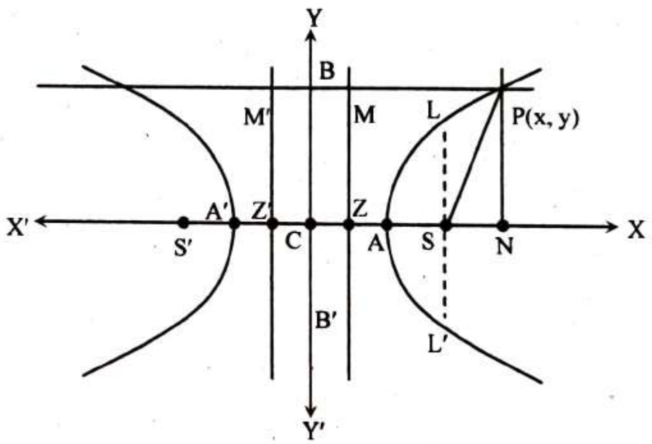
15. (ii) $x^2+y^2=a^2+b^2$;

পাঠ-১৪

6.17 মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(Standard equation of hyperbola whose centre is at origin)

মনে করি, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র S, উৎকেন্দ্রতা e (> 1) এবং নিয়ামক MZ; নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব টানি। SZ-কে বর্ধিত করি এবং e ঃ 1 অনুপাতে A ও A′ বিন্দুতে যথাক্রমে এমনভাবে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করি যেন, SA = e. AZ এবং SA′ = e. A′Z হয়। তাহলে A ও A′ বিন্দুদ্বয় অধিবৃত্তের ওপরস্থ দুইটি বিন্দু। মনে করি, AA′ = 2a এবং AA′ এর মধ্যবিন্দু C, তাহলে CA = CA′ = a



এখন SA = e.AZ বা, CS – CA = e (CA – CZ)

বা, CS – a = e(a – CZ) ... ... (i)

এবং SA′ = e.A′Z বা, CS + CA′ = e(A′C + CZ)

বা, CS + a = e(a + CZ) ... ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে, 2CS = 2ae ∴ CS = ae

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে, 2a = 2e. CZ ∴ $CZ=\frac{a}{e}$

C-কে মূলবিন্দু, AA′ কে x-অক্ষ ও C বিন্দুগামী যে রেখাটি AA′ এর সাথে লম্ব তাকে y-অক্ষ ধরি। তাহলে, উপকেন্দ্র S(ae, 0) হবে।

অধিবৃত্তের ওপর যে কোনো বিন্দু P(x, y) নিই। P থেকে নিয়ামকের ওপর PM এবং AX এর ওপর PN লম্ব অঙ্কন করি। সংজ্ঞানুসারে, SP = e. PM = e. ZN বা, $SP^2 = e^2. ZN^2$

বা, $SN^2+PN^2=e^2(CN-CZ)^2$ [∵ Δ SPN-এ, $SP^2=SN^2+PN^2$ এবং ZN = CN – CZ]

বা, $(CN-CS)^2+PN^2=e^2(CN-CZ)^2$ বা, $(x-ae)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$

বা, $x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$ বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$

বা, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$, যেহেতু e > 1, সুতরাং $a^2(e^2-1)$ এর মান ধনাত্মক।

ধরি $a^2(e^2-1)=b^2$, যেখানে b একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

অতএব সমীকরণটি আকার ধারণ করে: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

এই সমীকরণ হলো **অধিবৃত্তের** প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণ।

6.17.1 অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণের বিভিন্ন অংশের নামকরণ ও পরিচিতি (6.17 এর চিত্রানুসারে)

(i) শীর্ষবিন্দু (Vertices): A ও A′ বিন্দুদ্বয় হলো অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু।

(ii) আড় অক্ষ (Transverse axis): AA′ হলো অধিবৃত্তের আড় অক্ষ।

(iii) অনুবন্ধী অক্ষ (Conjugate axis): BB′ হলো অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ।

(iv) কেন্দ্র (Centre) : AA′ এর মধ্যবিন্দু C হলো অধিবৃত্তের কেন্দ্র।

(v) উপকেন্দ্র (Focus): S এবং S′ হলো অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র।

(vi) নিয়ামক (Directrix): ZM এবং Z′M′ হলো অধিবৃত্তের নিয়ামক।

[বি. দ্র. যেকোনো অধিবৃত্তের দুইটি উপকেন্দ্র ও দুইটি নিয়ামক বিদ্যমান।]

6.17.2 উপকেন্দ্রিক লম্ব ও এর দৈর্ঘ্য (Latus rectum and its length)

অধিবৃত্তের যে কোনো উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত জ্যা আড় অক্ষের ওপর লম্ব হলে; তাকে উপকেন্দ্রিক লম্ব বলে।

মনে করি, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের একটি উপকেন্দ্রিক লম্ব LSL′ (6.17 অনুচ্ছেদের চিত্রানুসারে)

তাহলে, SL = SL′ এবং L এর স্থানাঙ্ক (ae, SL); যেহেতু L(ae, SL) বিন্দুটি অধিবৃত্তের ওপর অবস্থিত,

$\therefore \frac{a^2e^2}{a^2}-\frac{SL^2}{b^2}=1$

বা, $SL^2=b^2(e^2-1)=b^2.\frac{b^2}{a^2}$ $[\because a^2(e^2-1)=b^2]$

বা, $SL^2=\frac{b^4}{a^2}$ বা, $SL=\frac{b^2}{a}$

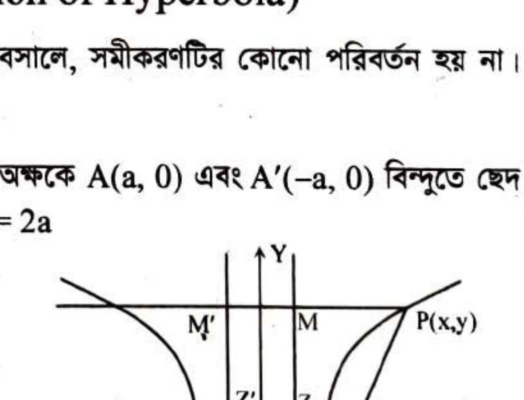
$\therefore LL'=2.SL=\frac{2b^2}{a}$, যা অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য।

6.18 হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন

(Drawing the graph of the standard equation of Hyperbola)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণে x এর স্থলে −x এবং y এর স্থলে −y বসালে, সমীকরণটির কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং অধিবৃত্তটি উভয় অক্ষের (x-অক্ষ ও y-অক্ষ) সাথে প্রতিসম।

সমীকরণে y = 0 বসালে, x = ±a পাওয়া যায়। অর্থাৎ অধিবৃত্তটি x-অক্ষকে A(a, 0) এবং A′(−a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। এই বিন্দুদ্বয়ই অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু। AA′, আড়অক্ষ যার দৈর্ঘ্য = 2a



আবার, x = 0 বসালে, $y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm ib$ হয়।

অর্থাৎ অধিবৃত্তটি y-অক্ষকে দুইটি কাল্পনিক বা অবাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে।

y-অক্ষের ওপর B ও B′ দুইটি কাল্পনিক বিন্দু বিবেচনা করি যেন CB = CB′ = b হয়। তাহলে BB′ অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ যার দৈর্ঘ্য = 2b

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ বা, $\frac{x^2}{a^2}=\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\geq 1$ $\therefore x^2\geq a^2$

বা, $|x|\geq a$ অর্থাৎ $x\leq -a$ অথবা $x\geq a$; সুতরাং x = a এবং x = − a এই সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে লেখচিত্রের কোনো বিন্দু নেই।

অতএব A′ এর বামপার্শ্বে এবং A এর ডান পার্শ্বে x এর মান নিয়ে অগ্রসর হলে y এর মানও উভয় দিকে বাড়তে থাকবে, এভাবে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হবে।

6.19 অক্ষদ্বয়ের সাথে হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু

(Intersecting points of hyperbola with axes)

অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (i)

x-অক্ষের উপর $y = 0 \therefore x^2 = a^2 \therefore x = \pm a$

$\therefore$ (i) নং অধিবৃত্তটি x-অক্ষকে $(\pm a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, y-অক্ষের উপর $x = 0$

$\therefore -y^2 = b^2 \quad \therefore y = \pm ib$

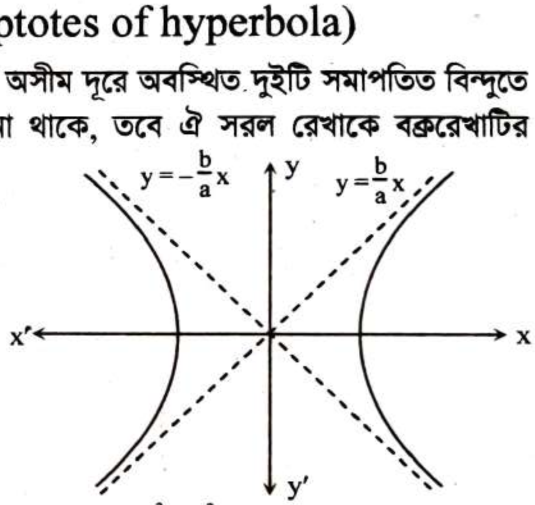
$\therefore$ অধিবৃত্তটি y-অক্ষকে ছেদ করে না।

অনুরূপভাবে $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্ত x-অক্ষকে ছেদ করে না এবং y-অক্ষকে $(0, \pm a)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

6.20 হাইপারবোলা/অধিবৃত্তে অসীমতটের অবস্থান নির্ণয়

(Determination of the position of asymptotes of hyperbola)

অসীমতট (Asymptotes): কোনো সরলরেখা কোনো বক্ররেখার সাথে অসীম দূরে অবস্থিত দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে মিলিত হয় কিন্তু ঐ সরলরেখা যদি নিজে সম্পূর্ণ অসীমে অবস্থিত না থাকে, তবে ঐ সরল রেখাকে বক্ররেখাটির অসীমতট বলে।



চিত্র: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসমীতটরেখা

অসীমতটের সমীকরণ

মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (i)

যে কোনো একটি সরলরেখার সমীকরণ $y = mx + c$ ... ... (ii)

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx + c)^2}{b^2} = a^2b^2$

$\Rightarrow b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mcx + c^2) = a^2b^2$

$\Rightarrow b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2mca^2x - c^2a^2 = a^2b^2$

$\Rightarrow x^2(b^2 - a^2m^2) - 2mca^2x - a^2(b^2 + c^2) = 0$ ... ... (iii)

(i) নং অধিবৃত্তকে (ii) নং সরলরেখা অসীমে ছেদ করলে সেক্ষেত্রে x^2 এবং x এর সহগ শূন্য হবে।

তাই (iii) নং দ্বিঘাত সমীকরণের উভয় মূলই অসীম হবে।

অতএব x^2 এর সহগ $= b^2 - a^2m^2 = 0$ ... ... (iv)

এবং x এর সহগ $= -2a^2mc = 0$ ... ... (v)

(iv) নং হতে পাই,

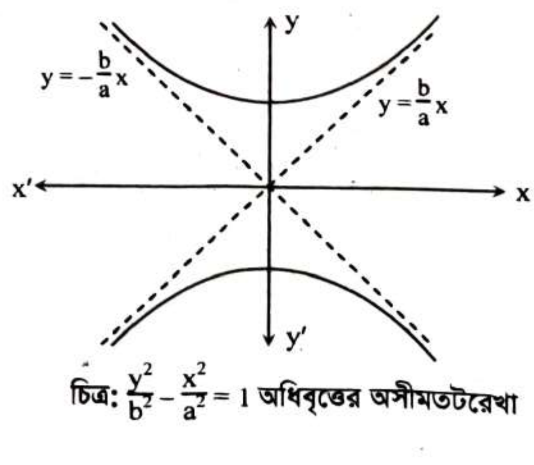
$b^2 - a^2m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{b^2}{a^2}$

$\therefore m = \pm \frac{b}{a}$

(v) নং হতে পাই, $c = 0 \quad [\because -2a^2m \neq 0]$

m এবং c এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $y = \pm \frac{b}{a}x$

নির্ণেয় অসীমতট রেখার সমীকরণ $\mathbf{y = \pm \frac{b}{a} x}$



চিত্র: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটরেখা

অনুরূপভাবে $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ $y=\pm\frac{b}{a}x$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ আকৃতির অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

এবং $\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$ আকৃতির অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

বি.দ্র.: যদি অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ হয় তবে অসীমতটের সমীকরণ হবে $y=\pm\frac{a}{b}x$.

6.21 হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (Determination of the length of transverse and conjugate axes of Hyperbola)

আমরা জানি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণে $y=0$ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\ \therefore x=\pm\ a$

সুতরাং অধিবৃত্তের x-অক্ষকে $A(a, 0)$ এবং $A'(-a, 0)$ বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে।

$\therefore$ AA' রেখাকে আড় অক্ষ বলে। আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $AA'=2a$

আবার, (i) নং সমীকরণে $x=0$ বসিয়ে পাই,

$\frac{0}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=-1\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=i^2\Rightarrow y^2=i^2b^2$

$\therefore y=\pm ib$ যেহেতু y এর মান কাল্পনিক, বক্ররেখাটি y-অক্ষকে বাস্তবে ছেদ করে না।

যদি অবাস্তব বিন্দুদ্বয়কে $B(0, ib)$ এবং $B(0, -ib)$ স্থানাঙ্কে চিহ্নিত করা হয় তবে অবাস্তব BB' অক্ষকে অধিবৃত্তের অনুবন্ধী (conjugate) অক্ষ বলা হয়।

অতএব অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$

বি.দ্র.: যে অধিবৃত্তের (Hyperbola) অসীমতটদ্বয় পরস্পর লম্ব তাকে আয়ত অধিবৃত্ত বা Rectangular Hyperbola বলা হয়। আয়ত অধিবৃত্তের সাধারণ আকার দুইটি। যথা: $x^2-y^2=c$ এবং $xy=c$

প্রমিত সমীকরণ হতে একটি আয়ত অধিবৃত্তের প্রতিপাদন:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতট $y=\pm\frac{b}{a}x$

ঢালদ্বয়ের গুণফল $=-1$ হলে পরস্পর লম্ব হবে।

$\therefore\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

বা, $b^2=a^2$

বা, $b=a$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2-y^2=a^2=c$ যেখানে $c=a^2$ ইহাই আয়ত অধিবৃত্তের সমীকরণ।

কাজ: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$ অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

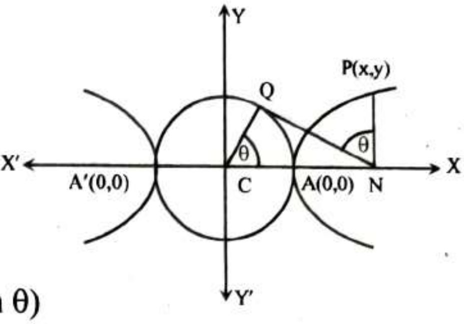
পাঠ-১৫

6.22 হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক (Parametric coordinates of Hyperbola)

মনে করি, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (i) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র C এবং AA′ হলো আড় অক্ষ।

এখন, AA′ কে ব্যাস ও C কেন্দ্র ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$

মনে করি, P(x, y) অধিবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। PN ⊥ AA′ আঁকি। NQ হলো বৃত্তটির স্পর্শক। C, Q যোগ করি।



ধরি, $\angle QCN = \theta$ [**$\angle QCN = \theta$ হলো P বিন্দুর উপকেন্দ্রিক কোণ**]

$\therefore x = CN = a \sec\theta$

কিন্তু P(x, y) বিন্দুটি (i) নং অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{a^2 \sec^2\theta}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ বা, $\frac{y^2}{b^2} = \sec^2\theta - 1$ বা, $y = b \tan\theta$

সুতরাং অধিবৃত্তস্থ যেকোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a \sec\theta, b \tan\theta)$

এবং অধিবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x = a \sec\theta$, $y = b \tan\theta$.

6.23 উপকেন্দ্র, নিয়ামকের সমীকরণ এবং উৎকেন্দ্রিকতা হতে হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (Determination of the equation of Hyperbola when focus, equation of directrix and eccentricity are given)

মনে করি, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$, নিয়ামক MZ, যার সমীকরণ $\ell x + my + n = 0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $e (> 1)$; অধিবৃত্তের ওপর P(x, y) একটি চলমান বিন্দু। P থেকে নিয়ামকের ওপর PM লম্ব আঁকি এবং S, P যোগ করি।

তাহলে, $SP = e.PM$ বা, $SP^2 = e^2.PM^2$ বা, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 \frac{(\ell x + my + n)^2}{\ell^2 + m^2}$

বা, $(\ell^2 + m^2) \{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2\} = e^2 (\ell x + my + n)^2$

এই সমীকরণ অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হলো।

6.24 উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় (Determination of the eccentricity)

আমরা জানি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (i)

যেখানে $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$ ... ... (iii)

a, b হলো অধিবৃত্তের আড় এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক এবং e হল উৎকেন্দ্রিকতা।

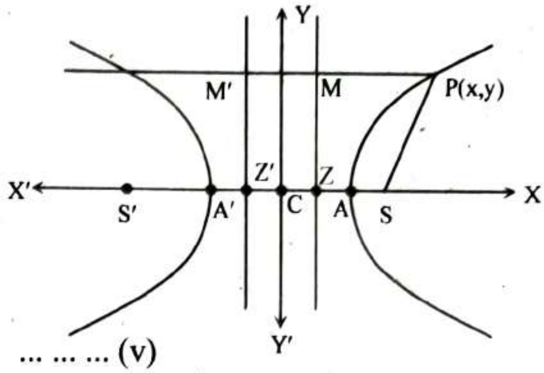
(ii) হতে পাই, $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

a এবং b মান জানা থাকলে অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় করা যায়। অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e > 1$.

কাজ: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

6.25 উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয়
(Determination of the coordinates of focus and equation of directrix)

নিয়ামকের সমীকরণ: A এবং A′ দুইটি বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের আড় অক্ষের উপর অবস্থিত। MZ এবং M′Z′ হল উক্ত অধিবৃত্তের নিয়ামকদ্বয়। S এবং S′ হল উহার উপকেন্দ্রদ্বয়। e অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হলে সংজ্ঞানুসারে,



$AS = e\,ZA$ ……… (i)

এবং $A'S' = e\,A'Z'$ ……… (ii)

(i) নং হতে পাই,

$CS - CA = e(CA - CZ) \Rightarrow CS - a = e(a - CZ)$

$\Rightarrow CS - a = ea - eCZ$ ……… (iii)

অনুরূপভাবে প্রতিসম বক্ররেখার জন্য

(ii) নং হতে পাই, $CS + a = e(a + CZ)$

$\Rightarrow CS + a = ca + eCZ$ ……… (iv)

(iii) এবং (iv) যোগ করে পাই, $2CS = 2ae \Rightarrow CS = ae$ ……… (v)

(iv) − (iii) হতে $2a = 2eCZ \Rightarrow a = eCZ \therefore CZ = \frac{a}{e}$ ……… (vi)

(vi) নং হতে পাই নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \frac{a}{e}$

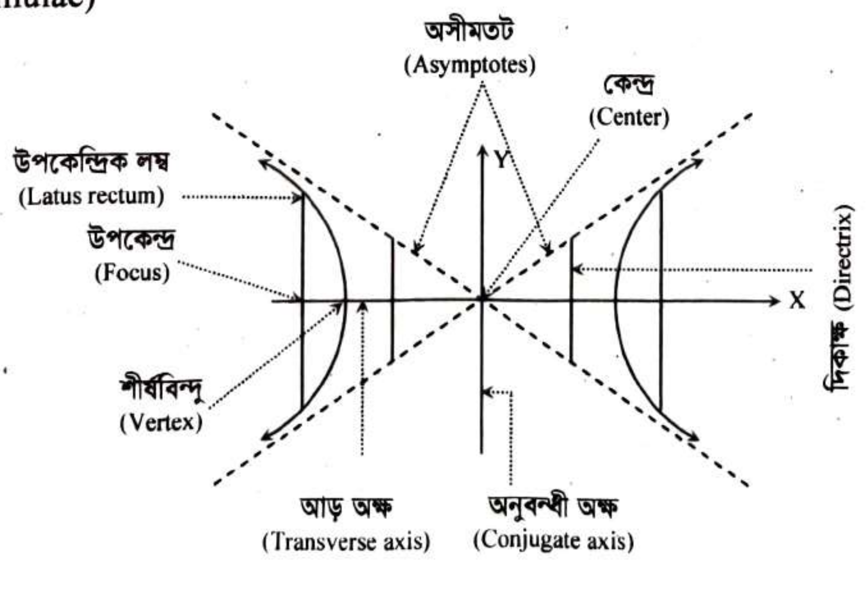
যেহেতু বক্ররেখাটি অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম তাই অপর নিয়ামকের সমীকরণ $x = -\frac{a}{e}$

সুতরাং নিয়ামকের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক: (v) নং সমীকরণ হতে পাই, S(ae,0) যেহেতু বক্ররেখাটি প্রতিসম।
অতএব অপর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক S′ (− ae, 0) সুতরাং অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (±ae, 0)

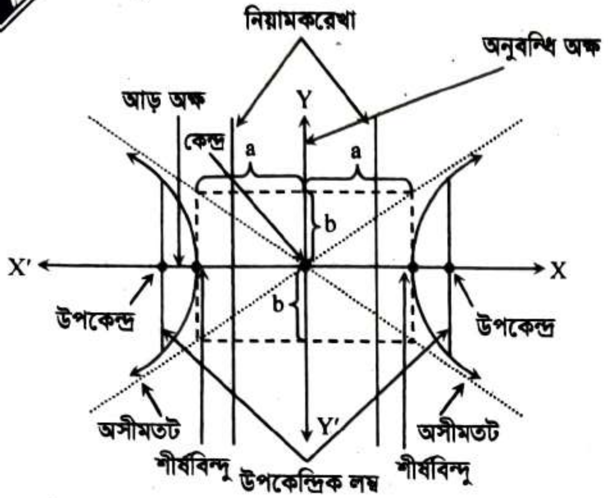
কাজ: $x^2 - 4y^2 = 4$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

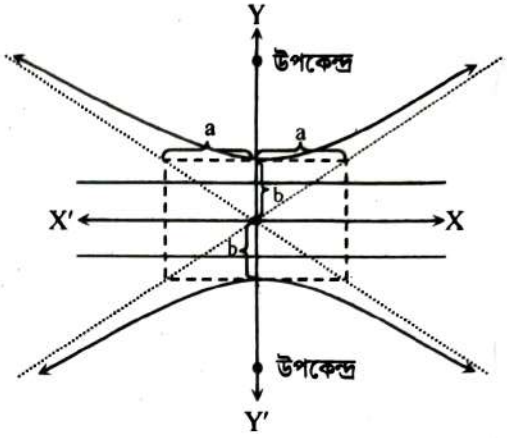
6.26 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের বিভিন্ন অংশের চিহ্নিতকরণসহ চিত্র এবং প্রয়োজনীয় সূত্র
(Diagram with identification of different parts of Hyperbola and its necessary formulae)



জেনে রাখো

অধিবৃত্তের প্রয়োজনীয় সূত্র:





	অধিবৃত্তের আকার	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$
(i)	কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii)	উৎকেন্দ্রিকতা	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$
(iii)	আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
(iv)	অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
(v)	আড় অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(vi)	অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
(vii)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\pm a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm b+\beta)$
(viii)	ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(\pm ae, 0)$ $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$	$(0, \pm be)$ $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$	$(\pm ae+\alpha, \beta)$ $(\pm\sqrt{a^2+b^2}+\alpha, \beta)$	$(\alpha, \pm b+\beta)$ $(\alpha, \pm\sqrt{a^2+b^2}+\beta)$
(ix)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব	$2ae=$ $2\sqrt{a^2+b^2}$	$2be=$ $2\sqrt{a^2+b^2}$	$2ae=2\sqrt{a^2+b^2}$	$2be=2\sqrt{a^2+b^2}$
(x)	নিয়ামকরেখার পাদবিন্দু	$\left(\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$	$\left(\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\alpha, \beta\right)$	$\left(\alpha, \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\beta\right)$
(xi)	নিয়ামকরেখা দুইটির দূরত্ব	$\frac{2a}{e}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{2b}{e}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{2a}{e}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{2b}{e}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$
(xii)	নিয়ামকরেখার সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x-\alpha=\pm\frac{a}{e}$	$y-\beta=\pm\frac{b}{e}$
(xiii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(xiv)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=+be$	$x-\alpha=\pm ae$	$y-\beta=\pm be$
(xv)	অধিবৃত্তের অসীমতট	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$	$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$

6.26.1 অধিবৃত্তের প্রমিত বা আদর্শ সমীকরণের বৈশিষ্ট্য

অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপ:

(a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

(b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$

(c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের $y = mx + c$ রেখা স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c=\pm\sqrt{(a^2m^2-b^2)}$

(d) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত $p=\pm\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b}$ ।

(e) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের নির্দেশক বৃত্ত (Director circle) এর সমীকরণ $x^2+y^2=a^2-b^2$

(f) (x_1, y_1) বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের যথাক্রমে বাইরে অথবা উপরে অথবা ভিতরে অবস্থিত হবে যদি $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0$ অথবা 0 অথবা >0 হয়।

বিভিন্ন প্রকার অধিবৃত্ত

(i) অধিবৃত্তের কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে; আড় অক্ষ 3 অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষের সমান্তরাল এবং আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2a ও 2b হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

(ii) অধিবৃত্তের কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে y-অক্ষ ও x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2b ও 2a হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$

(iii) অসীমতটদ্বয়কে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ $xy = c$

পাঠ-১৬

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$ অধিবৃত্তটির অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$

$$\Rightarrow 4(x^2-4x+4)-9(y^2-2y+1)-16+9-29=0 \Rightarrow 4(x-2)^2-9(y-1)^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1 \therefore \frac{(x-2)^2}{3^2}-\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির অসীমতট রেখার সমীকরণ, $y-1=\pm\frac{2}{3}(x-2)$ বা, $3(y-1)=\pm 2(x-2)$

$\therefore 2x-3y-1=0,\ 3y+2x-7=0$

উদাহরণ-2. দেখাও যে, $x^2-8y^2=2$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $3x=\pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

[ঢা: বো: ১৪; সি: বো: ১৬, ১২; চ: বো: ১২; কু: বো: ১০; য: বো: ১৬, ০৭; ব: বো: ০৪]

সমাধান : প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $x^2-8y^2=2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}-4y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$

একে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a^2=2,\ b^2=\frac{1}{4}$

উৎকেন্দ্রতা, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1/4}{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{3} \Rightarrow 3x = \pm\ 4$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.\frac{1}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ একক

উদাহরণ-3. $\mathbf{x^2 - 3y^2 - 2x = 8}$ **অধিবৃত্তের শীর্ষ; উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, অক্ষদ্বয় ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর।** [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৩; চ: বো: ০৮; সি: বো: ১৩, ১০; ব: বো: ০৭, ১২]

সমাধান: $x^2 - 3y^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3y^2 = 9 \quad \Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

একে $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করলে পাই, $a = 3, b = \sqrt{3}, X = x - 1, Y = y$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

শীর্ষ $(X = \pm a, Y = 0)$

এখন, $X = \pm\ a$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 1 = \pm\ 3 \quad \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x = 1 \pm 3$

$\therefore$ শীর্ষ $(4, 0), (-2, 0)$

উপকেন্দ্র $(X = \pm ae, Y = 0)$

এখন, $X = \pm\ ae$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 1 = \pm\ 3.\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(1 + 2\sqrt{3}, 0), (1 - 2\sqrt{3}, 0)$ অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 2a ও 2b বা, 6 ও $2\sqrt{3}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.3}{3} = 2$

নিয়ামকের সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x - 1 = \pm\frac{3}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2(x-1) = \pm\ 3\sqrt{3}$

লেখচিত্র অঙ্কন: প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$

বা, $3y^2 = x^2 - 2x - 8$

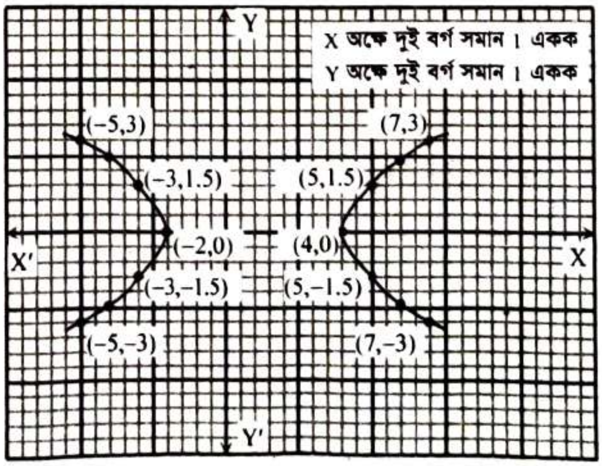
বা, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - 2x - 8} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x+2)(x-4)}$

$\therefore (x+2)(x-4) \geq 0$

$\Rightarrow x + 2 \leq 0$ অথবা, $x - 4 \geq 0$

$\Rightarrow x \leq -2$ অথবা, $x \geq 4$

এই সীমার মধ্যে x এর কতিপয় মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর মান নিয়ে একটি তালিকা তৈরি করি।



x	−5	−4	−3	−2	4	5	6	7
y	±3	±2.3	±1.5	0	0	±1.5	±2.3	±3

ওপরোক্ত টেবিল হতে প্রাপ্ত $(-2, 0)$, $(-3, \pm1.5), (-4, \pm2.3), (-5, \pm3)$ এবং $(4, 0), (5, \pm1.5), (6, \pm2.3), (7, \pm3)$ বিন্দুগুলি রেখার ওপর অবস্থিত। এখন X'OX কে x-অক্ষ এবং Y'OY- কে y-অক্ষ ধরে, xy-তলে ওপরোক্ত বিন্দুসমূহ বসিয়ে সংযোগ করে পাশের লেখচিত্র পাই।

উদাহরণ-4. একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব 16 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষ বরাবর হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৫, ১২; রা: বো: ১৬, ০৭; দি: বো: ১৩; ব: বো: ১৬, ১৫, ১৩; চ: বো: ১৩, ১০]

সমাধান: মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots\cdots\cdots$ (i)

ধরি, আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 2a এবং উৎকেন্দ্রিকতা e; সুতরাং, উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm ae, 0)$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2ae = 16$

আবার, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{2}$

$\therefore 2a\sqrt{2} = 16 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

এখন, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 2 = 1 + \frac{b^2}{(4\sqrt{2})^2} \Rightarrow b^2 = 32$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 32$ এটিই নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

উদাহরণ-5. এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (1, 1), উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $2x + y = 1$. [ঢা: বো: ০৮, ০৪; য: বো: ০৮, ০৩; কু: বো: ০৯, ০৮, ০৪; দি: বো: ১১, ০৯; রা: বো: ১৫; চ: বো: ১৪, ১১; ব: বো: ১৪, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১১, ০৯]

সমাধান : মনে করি, P(x, y) অধিবৃত্তের ওপর যে কোনো বিন্দু।

$\therefore$ উপকেন্দ্র (1, 1) হতে P(x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

নিয়ামক হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= \frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}}$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হতে আমরা পাই, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{3} . \frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3\left(\frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow 5\{(x-1)^2 + (y-1)^2\} = 3(2x + y - 1)^2$

$\Rightarrow 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$ এটিই নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

উদাহরণ-6. S(− 2, 3), L(−2, 2), L′(− 2, − 4) কোনো সমতলের ওপর যেকোনো তিনটি বিন্দু।

ক. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. S উপকেন্দ্র ও $x - y + 7 = 0$ নিয়ামক রেখা এবং উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বিশিষ্ট কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. L ও L′ কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু হয় এবং $x + 5 = 0$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ বা, $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1 \quad \therefore a = 3, b = 4$

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{3^2}{4^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

অসীমতট রেখার সমীকরণ $y = \pm\frac{b}{a}x$ বা, $y = \pm\frac{4}{3}x \quad \therefore 3y = \pm 4x$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, P (x, y) উপবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু; উপকেন্দ্র S (−2, 3)

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$

এবং PM, নিয়ামক রেখা $x - y + 7 = 0$ এর ওপর লম্ব।

$\therefore$ $SP = e.PM$

বা, $\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x-y+7}{\sqrt{1+1}}$

বা, $(x+2)^2+(y-3)^2 = \frac{(x-y+7)^2}{6}$

বা, $6(x^2+4x+4+y^2-6y+9)-(x-y+7)^2 = 0$

বা, $6x^2+24x+24+6y^2-36y+54-x^2-y^2-49-14x+14y+2xy = 0$

বা, $5x^2+5y^2+2xy+10x-22y+29 = 0$

যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 2e.\ SZ$

এখন, $SZ = S(-2, 3)$ থেকে $x - y + 7 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব

$\therefore$ $SZ = \frac{-2-3+7}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2e.\ SZ = 2.\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

গ. দেওয়া আছে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $L(-2, 2)$ এবং $L'(-2, -4)$

LL' এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{-2-2}{2}, \frac{2-4}{2}\right) \equiv (-2, -1)$

এখন, $SP = PM$ এখন $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপরস্থ যে কোন বিন্দু

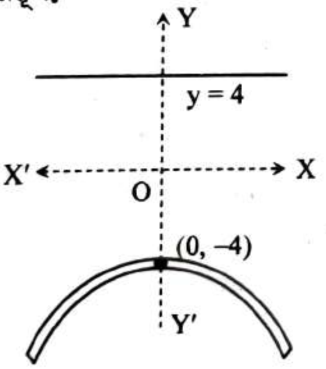
বা, $\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} = \left|\frac{x+5}{\sqrt{1^2+0^2}}\right|$

বা, $x^2+4x+4+y^2+2y+1 = (x+5)^2$

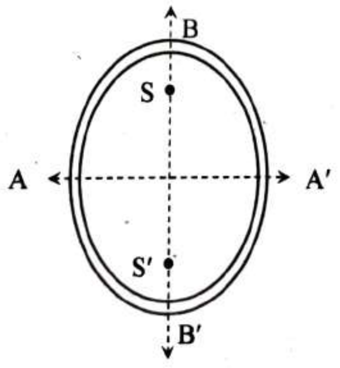
বা, $x^2+4x+4+y^2+2y+1 = x^2+10x+25$

বা, $y^2-6x+2y-20 = 0$

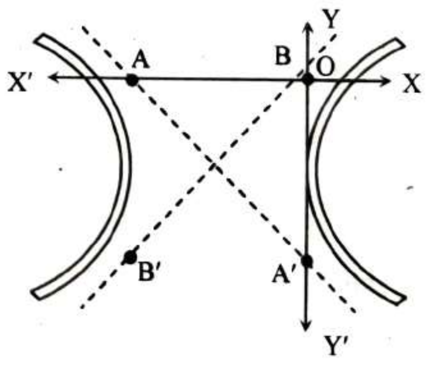
উদাহরণ-7. একজন স্থপতি ঢাকা শহরের তিনটি ফ্লাইওভারের মডেল দেন যাদের দ্বিমাত্রিক চিত্রের খণ্ডিত অংশ নিম্নরূপ:



১ম মডেলের খণ্ডিত অংশ



২য় মডেলের খণ্ডিত অংশ



৩য় মডেলের খণ্ডিত অংশ

ক. ১ম মডেলটির খণ্ডিত অংশের অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. ৩য় মডেলের খণ্ডিত অংশের সমীকরণ $4x^2 - 5y^2 + 40x - 30y - 45 = 0$ হলে AA' ও BB' সংযোগ সড়কদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. ২য় মডেলের খণ্ডিত অংশে S ও S' এর যেকোনো একটির স্থানাঙ্ক (0, 2), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং একটি নিয়ামকের সমীকরণ $y + 4 = 0$ হলে B ও B' পিলার দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. প্রথম ফ্লাইওভারের মডেলটির খণ্ডিত অংশ পরাবৃত্তাকার আকৃতির। $y = 4$ সরলরেখাটি পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা। পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা হবে $y = 4$ এর লম্বরেখা।

মনে করি, অক্ষরেখা $x = a$ ... ... (i)

(i) রেখাটি $(0, -4)$ বিন্দুগামী। $\therefore a = 0$

a এর মান বসিয়ে, অক্ষরেখার সমীকরণ, $x = 0$.

খ. $4x^2 - 5y^2 + 40x - 30y - 45 = 0$

বা, $4(x^2 + 10x) - 5(y^2 + 6y) - 45 = 0$

বা, $4\{(x + 5)^2 - 25\} - 5\{(y + 3)^2 - 9\} - 45 = 0$

বা, $4(x + 5)^2 - 100 - 5(y + 3)^2 + 45 - 45 = 0$

বা, $4(x + 5)^2 - 5(y + 3)^2 = 100$

বা, $\frac{4(x + 5)^2}{100} - \frac{5(y + 3)^2}{100} = 1$

বা, $\frac{(x + 5)^2}{25} - \frac{(y + 3)^2}{20} = 1$

বা, $\frac{(x + 5)^2}{5^2} - \frac{(y + 3)^2}{(2\sqrt{5})^2} = 1$

ইহা $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ আকৃতির।

যেখানে, $X = x + 5$, $Y = y + 3$

$a = 5$, $b = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ অসীমতটের সমীকরণ, $Y = \pm\frac{b}{a}X$

$\therefore y + 3 = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}(x + 5)$

গ. ২য় মডেলের খণ্ডিত অংশের ফ্লাইওভারের চিত্রটি উপবৃত্তাকার আকৃতির। BB′ এবং AA′ বরাবর রেখা দুইটি উপবৃত্তের অক্ষ।

মনে করি, $P(x, y)$ উপবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু উপকেন্দ্র $S(0,2)$, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{2}$

এবং PM, নিয়ামক রেখা $y + 4 = 0$ এর ওপর লম্ব।

$\therefore SP = ePM$

বা, $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y + 4}{\sqrt{1^2}}$ বা, $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{y + 4}{2}$

বা, $x^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{y + 4}{2}\right)^2$ বা, $x^2 + y^2 - 4y + 4 = \frac{y^2 + 8y + 16}{4}$

বা, $4x^2 + 4y^2 - 16y + 16 - y^2 - 8y - 16 = 0$ বা, $4x^2 + 3y^2 - 24y = 0$

বা, $\frac{4x^2}{3} + y^2 - 8y = 0$ বা, $\frac{4x^2}{3} + y^2 - 2.y.4 + 4^2 = 16$ বা, $\frac{4x^2}{3} + (y - 4)^2 = 16$

বা, $\frac{4x^2}{3 \times 16} + \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$ বা, $\frac{x^2}{12} + \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{(y - 4)^2}{4^2} = 1$ ... ... (ii)

উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{0}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{(y-4)^2}{4^2} = 1$$

বা, $(y-4)^2 = 4^2$

বা, $y - 4 = \pm 4$

$\therefore y = 8$ অথবা $y = 0$

$\therefore B(0, 8)$ এবং $B'(0, 0)$

$\therefore B$ ও B' এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(0-0)^2 + (8-0)^2} = 8$ একক

পাঠ-১৭ ও ১৮

অনুশীলনী-6(C)

Type-I

1. লেখচিত্র অঙ্কন কর: **(i)** $25x^2 - 16y^2 = 400$ **(ii)** $2x^2 - y^2 + 2 = 0$

Type-II

2. নিম্নের সমীকরণ দ্বারা সূচিত অধিবৃত্তের শীর্ষ, উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা, অক্ষদ্বয় ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144$ [সি: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৩] **(ii)** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ [রা: বো: ০৮; কু: বো: ০৫; মাদ্রাসা: বো: ১২]

3. কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে θ উপকেন্দ্রিক কোণ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে, পরামিতিক ও কার্তেসীয় সমীকরণ, অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) $(4 \sec\theta, 6 \tan\theta)$ **(ii)** $(8 \sec\theta, 6 \tan\theta)$ **(iii)** $(\sqrt{3} \sec\theta, 2 \tan\theta)$.

Type-III

4. **(i)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৫(ক); ঢা: বো: ১৫, ১১, ০৭; রা: বো: ০৬, ১২; দি: বো: ১২, চ: বো: ১৫; য: বো: ১০, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১০]

(ii) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৫; য: বো: ১২; সি: বো: ০৮]

(iii) $16x^2 - 25y^2 = 400$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু: বো: ০৫; রা: বো: ০৮; সি: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৫]

(iv) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

(v) $16x^2 - 9y^2 = 144$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৯]

(vi) $4y^2 - 5x^2 = 20$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৭]

(vii) $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(viii) $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$ অধিবৃত্তের উপকন্দ্রের অবস্থান এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ix) $9x^2 - 4y^2 = 36$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[চট্টগ্রাম ও সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

(x) $x^2 - 2y^2 - 2x + 8y - 13 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত কণিকের প্রকৃতি নির্ণয় কর। উহার কেন্দ্র, অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

(xi) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত কণিকের প্রকৃতি নির্ণয় কর। অতঃপর কণিকটির কেন্দ্র, শীর্ষ ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। [চুয়েট ১০-১১; কু: বো: ১৩, ১১; সি: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(xii) $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y - 9 = 0$ সমীকরণটি প্রমিত আকারে প্রকাশ করে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

Type-IV

5. অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং θ উপকেন্দ্রিক কোণ বিশিষ্ট বিন্দুতে পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন:
   (i) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 5, 0)$
   (ii) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $(0, \pm 13)$ [য: বো: ০৯; কু: বো: ১৪, ০৭]

6. অধিবৃত্তের আড় অক্ষকে x-অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষকে y-অক্ষ বিবেচনা করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। যখন অধিবৃত্তটির
   (i) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 3 এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 11
   (ii) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 10
   (iii) নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

7. **অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর যার:**
   (i) উপকেন্দ্র $(\pm 3\sqrt{3}, 0)$ ও উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
   (ii) উপকেন্দ্র $(0, \pm 4)$ ও উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{3}$
   (iii) উপকেন্দ্র $(\pm 4, 2)$ ও উৎকেন্দ্রিকতা 2
   (iv) উপকেন্দ্রদ্বয় $(4, 2)$ ও $(8, 2)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2
   (v) সমীকরণ: $25y^2 - 9x^2 + 200y + 36x - 140 = 0$
   (vi) $16y^2 - 9x^2 = 144$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৫(ক)]

8. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার :
   (i) উপকেন্দ্র $(1, -8)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $3x - 4y = 10$
   [ঢা: বো: ১৬, ১০, ০৬; চ: বো: ১৬, ০৬; রা: বো: ১১, ০৯, ০৫; য: বো: ১৫, ১৪, ০৬; কু: বো: ০৬; সি: বো: ১৫, ০৭; ব: বো: ১০, ০৫; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা: বো: ১৪]
   (ii) উপকেন্দ্র $(2, 3)$ এবং অনুরূপ নিয়ামকের সমীকরণ $x + 2y = 1$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$

9. (i) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(4, 2)$, $(8, 2)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2. [সি: বো: ১১]
   (ii) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(\pm 5, 0)$ ও উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$
   [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(গ)]
   (iii) একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি $(6, 1)$ ও $(10, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3 হলে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৫(গ)]
   (iv) একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটি $(6, 1)$ ও $(10, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3 হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [বরিশাল বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৫(গ)]

Type-V

10. (i) একটি অধিবৃত্তের আড় অক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র মূল বিন্দুতে। অধিবৃত্তটি $(4, 6)$ এবং $(-1, -3)$ বিন্দুগামী হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y-অক্ষ ধরে $(2, 1)$ এবং $(3, -2)$ বিন্দুগামী অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৬; ব: বো: ০৯]

(iii) কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং y-অক্ষ বরাবর আড় অক্ষবিশিষ্ট যে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 36 এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 24, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iv) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(0, 0)$, আড় অক্ষ y-অক্ষ বরাবর, উৎকেন্দ্রিকতা $2\sqrt{3}$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 18 একক।

11. (i) $3x^2 - 2y^2 + 6 = 0$ অধিবৃত্তের $(2, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) $y = k - 2x$ সরলরেখাটি $xy = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

(iv) দেখাও যে, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = p$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{p}$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

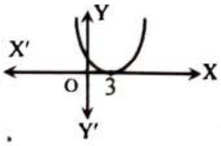
1. $x^2 = -3y$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি?

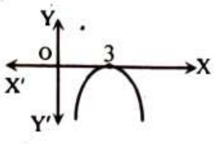
ক. $(0, 3)$ খ. $(0, -3)$ গ. $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$ ঘ. $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

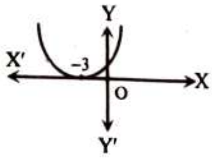
2. পরাবৃত্ত ও এর অক্ষরেখার ছেদবিন্দুকে কি বলা হয়?

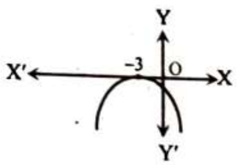
ক. উপকেন্দ্রিক লম্ব খ. কেন্দ্র গ. শীর্ষবিন্দু ঘ. উপকেন্দ্র

3. নিচের কোনটি $y = -(x - 3)^2$ এর লেখচিত্র?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

4. $(x + 1) - (y - 2)^2 = 15$ সমীকরণটি কী বর্ণনা করে?

ক. বৃত্ত খ. উপবৃত্ত গ. পরাবৃত্ত ঘ. অধিবৃত্ত

5. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের আড়অক্ষ নিচের কোনটি?

ক. x-অক্ষ খ. y-অক্ষ গ. x-অক্ষের সমান্তরাল ঘ. y-অক্ষের সমান্তরাল

6. $5x^2 + 16y^2 = 80$ উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য কত?

ক. 5 খ. $2\sqrt{5}$ গ. 4 ঘ. 16

7. কোন কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা $e > 1$ হলে তার আদর্শ সমীকরণ হবে?

ক. $y^2 = 4ax$ খ. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ গ. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ঘ. $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

8. $(x - 8)^2 + (y - 16)^2 = 36$ কণিকের সমীকরণের উৎকেন্দ্রিকতা কত হবে?

ক. $e = 1$ খ. $e > 1$ গ. $0 < e < 1$ ঘ. $e = 0$

9. $x^2 = 16y$ সমীকরণের উৎকেন্দ্রিকতা কত হবে?

ক. $e = 1$ খ. $e = 0$ গ. $e > 1$ ঘ. $0 < e < 1$

10. $16x^2 + 25y^2 = 400$ উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি?

ক. $(5\cos\theta, 4\sin\theta)$ খ. $(5\sin\theta, 4\cos\theta)$ গ. $(4\cos\theta, 5\sin\theta)$ ঘ. $(4\sin\theta, 5\cos\theta)$

11. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের সমীকরণটির অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য কত একক?

ক. 4 খ. 5 গ. 8 ঘ. 10

12. অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(5\sec\theta, 4\tan\theta)$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে—

ক. $4x^2 - 5y^2 = 20$ খ. $25y^2 - 16x^2 = 400$

গ. $25x^2 - 16y^2 = 400$ ঘ. $16x^2 - 25y^2 = 400$

13. $2y = 3kx + 4$ সরলরেখাটি $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান কত?

ক. $\frac{-8}{3}$ খ. $\frac{-4}{3}$ গ. $\frac{8}{3}$ ঘ. $\frac{16}{3}$

14. $y = mx + 6$ রেখাটি $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করলে সরলরেখাটির ঢাল কত?

ক. $\frac{13\sqrt{2}}{5}$ খ. $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ গ. $\frac{26}{5}$ ঘ. $\frac{13}{5}$

15. নিচের কোনটি অধিবৃত্তের সমীকরণ?

ক. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ খ. $-\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ গ. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ ঘ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

16. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি?

ক. $(-2, 0)$ খ. $(2, 0)$ গ. $(0, -2)$ ঘ. $(0, 2)$

17. $x^2 = 4y + 3$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ক. $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ খ. $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$ গ. $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ ঘ. $\left(\frac{-3}{4}, 0\right)$

18. $x^2 + 8x + 2y + 7 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ক. $\left(4, \frac{9}{2}\right)$ খ. $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ গ. $\left(\frac{9}{2}, -4\right)$ ঘ. $\left(\frac{-9}{2}, 4\right)$

19. $4x^2 + 5y^2 = 20$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?

ক. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. $\sqrt{5}$

20. $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ কী হবে?

ক. $x = \pm 4$ খ. $y = \pm 4$ গ. $x = \pm 5$ ঘ. $y = \pm 5$

21. $\frac{(x-5)^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{64} = 1$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব কত একক?

ক. 3 খ. 6 গ. 12 ঘ. 24

22. $16x^2 + 9y^2 = 144$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

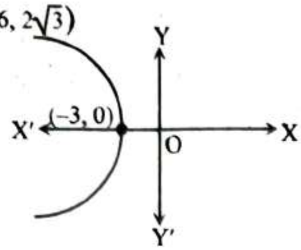
ক. $\frac{32}{3}$ একক খ. $\frac{9}{2}$ একক গ. $\frac{16}{3}$ একক ঘ. $\frac{9}{4}$ একক

23. $9x^2 + 5y^2 = 45$ উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

ক. 9 খ. 6 গ. 5 ঘ. $2\sqrt{5}$

24. $16x^2 - 25y^2 = 400$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $y = \pm\frac{4}{5}x$ খ. $y = \pm\frac{5}{4}x$ গ. $x = \pm\frac{4}{5}y$ ঘ. $x = \pm\frac{5}{4}y$

25. 

চিত্রটির সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $y^2 = -4(x-3)$ খ. $y^2 = -4(x+3)$
গ. $x^2 = -4(y-3)$ ঘ. $x^2 = -4(y+3)$

26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (b > a)$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $x = 0$ খ. $y = 0$ গ. $x = a$ ঘ. $y = b$

27. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কত?

ক. $(4\sec\theta, 5\tan\theta)$ খ. $(\sqrt{5}\sec\theta, 2\tan\theta)$
গ. $(5\sec\theta, 4\tan\theta)$ ঘ. $(2\sec\theta, \sqrt{5}\tan\theta)$

28. একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব 16 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$, অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ x-অক্ষের স্থানাঙ্কের লম্ব বরাবর হলে সমীকরণটি নিচের কোনটি?

ক. $x^2 - y^2 = 16$ খ. $y^2 - x^2 = 16$ গ. $x^2 - y^2 = 32$ ঘ. $y^2 - x^2 = 32$

29. $y^2 = 4ax (a > 0)$ পরাবৃত্তের—

i. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a, 0)$
ii. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = a$
iii. দিকাক্ষ রেখার সমীকরণ, $y + a = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের সমীকরণ হলে—

i. অক্ষরেখার সমীকরণ, $x = 0$
ii. শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ, $y = 0$
iii. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, a)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ উপবৃত্তটির—

i. উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$
ii. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $\left(0, \pm\frac{24}{5}\right)$
iii. দিকাক্ষ দুটির দূরত্ব 25

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

32. $y^2 = 3x$ পরাবৃত্তটি $y = mx + c$ রেখাকে স্পর্শ করলে-

i. $c = \frac{3}{4m}$

ii. পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সমীকরণ উভয়েই মূলবিন্দুগামী

iii. স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{4m^2}, \frac{3}{2m}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (33 ও 34) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2 - 6y - 4x + 25 = 0$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

33. দিকাক্ষের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত হবে?

ক. (3, 4) খ. (3, 3) গ. (3, 2) ঘ. (3, 1)

34. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ কী হবে?

ক. $x - 4 = 1$ খ. $y - 3 = 1$ গ. $x - 3 = 1$ ঘ. $y - 4 = 1$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

উপরের তথ্যের আলোকে (35 ও 36) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

35. ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব কত একক?

ক. $2\sqrt{13}$ খ. $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ গ. $\sqrt{13}$ ঘ. $\frac{\sqrt{13}}{3}$

36. অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $x = 0$ খ. $y = 0$ গ. $x = 3$ ঘ. $y = 2$

নিচের তথ্যের আলোকে (37 ও 38) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$25x^2 - 16y^2 = 400$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

37. দিকাক্ষরেখার সমীকরণ কোনটি?

ক. $y = \pm\frac{20}{\sqrt{41}}$ খ. $y = \pm\frac{25}{\sqrt{41}}$ গ. $x = \pm\frac{20}{\sqrt{41}}$ ঘ. $x = \pm\frac{16}{\sqrt{41}}$

38. শীর্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক?

ক. 10 খ. 9 গ. 8 ঘ. 4

$4x^2 + 36y^2 = 144$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

উপরের তথ্যের আলোকে (39 ও 40) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

39. উৎকেন্দ্রিকতা কত?

ক. $2\sqrt{2}$ খ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ গ. $\frac{2}{3}$ ঘ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

40. নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক?

ক. $9\sqrt{2}$ খ. $\frac{9}{\sqrt{2}}$ গ. $\frac{9}{2}$ ঘ. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

নিচের তথ্যের আলোকে (41 ও 42) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - 8x - y + 19 = 0$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

41. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?

ক. (4, 3) খ. (– 4, 3) গ. (4, – 3) ঘ. (– 4, – 3)

42. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত একক?

ক. 4 একক খ. 2 একক গ. 1 একক ঘ. $\frac{1}{4}$ একক

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (43 ও 44) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$।

43. বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য কত একক?

ক. $\sqrt{5}$ খ. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ গ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

44. উপবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?

ক. $3x^2 + 5y^2 = 5$ খ. $4x^2 + 3y^2 = 5$ গ. $2x^2 + 3y^2 = 5$ ঘ. $4x^2 + 5y^2 = 5$

নিচের তথ্যের আলোকে (45 ও 46) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$qx^2 + y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দুগামী।

45. উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত?

ক. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 2

46. নিয়ামকরেখা দুইটির সমীকরণ হবে—

ক. $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ খ. $y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ গ. $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

47. $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [ঢা. বি. ১৯-২০, ১৭-১৮]

ক. $\frac{2}{3}$ খ. $\frac{4}{5}$ গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. $\frac{3}{5}$

48. $y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ কোনটি? [নো. বি. প্র. বি. ১৯-২০]

ক. $y = 0$ খ. $y + 2 = 0$ গ. $6x - 7 = 0$ ঘ. $x = 0$

49. $y^2 = 4p(x - 2)$ পরাবৃত্তটি $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে p এর মান কত? [খু. বি. ১৯-২০]

ক. -4 খ. 1 গ. 2 ঘ. 4

50. $y = ax - 1$ রেখাটি $y = x^2 + 3$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, a এর মান কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. ± 4 খ. $\sqrt{2}$ গ. $-4\sqrt{2}$ ঘ. $4\sqrt{2}$

51. $y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮; বুয়েট: ৯-১০]

ক. $x = 1$ খ. $x + 1 = 0$ গ. $y + 2 = 0$ ঘ. $x - 2 = 0$

52. $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। b এর মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. 5 গ. -2 ঘ. 2

53. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\left(\frac{2}{m^2}, \frac{4}{m}\right)$ খ. $\left(\frac{4}{m^2}, \frac{21}{m}\right)$ গ. $\left(\frac{2}{m}, \frac{4}{m^2}\right)$ ঘ. $\left(\frac{4}{m}, \frac{2}{m^2}\right)$

54. $y^2 = 8px$ পরাবৃত্তটি $(4, -8)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে— [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $(16, 0)$ খ. $(0, 16)$ গ. $(4, 0)$ ঘ. $(0, 4)$

55. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ— [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $y = \pm\frac{a}{b}x$ খ. $y = \frac{b}{a}x^2$ গ. $y = \pm\frac{b}{a}x$ ঘ. $y = -\frac{a}{b}x^2$

56. একটি অধিবৃত্ত $(6, 4)$ ও $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হবে— [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $5x^2 - y^2 = 36$ খ. $5x^2 - 9y^2 = 36$ গ. $5x^2 + y^2 = 36$ ঘ. $5x^2 + 9y^2 = 36$

57. $y^2 = 6y + 3x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [চ. বি. ১৭-১৮]

ক. $(-3, 3); \left(\frac{3}{4}, 3\right)$ খ. $(3, -3); \left(\frac{3}{4}, -3\right)$ গ. $(-3, 3); \left(-\frac{9}{4}, 3\right)$ ঘ. $(3, -3); \left(-\frac{3}{4}, -3\right)$

58. একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(-1, 1)$ এবং দিকাক্ষ $x - 2y + 6 = 0$ হলে, তার অক্ষরেখার সমীকরণ কত? [ই. বি. ১৭-১৮]

ক. $x - 2y + 1 = 0$ খ. $2x + y + 1 = 0$ গ. $2x - y + 1 = 0$ ঘ. $x + 2y - 1 = 0$

59. $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তকে $2x + y - 10 = 0$ রেখাটি— [ই. বি. ১৭-১৮]

ক. ছেদ করবে খ. ছেদ করবে না গ. শুধু স্পর্শ করবে ঘ. সমান্তরাল থাকবে

60. অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4}{\cos\theta}, \frac{6}{\cot\theta}\right)$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ কোনটি হবে? [ই. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ খ. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ গ. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5} = 1$ ঘ. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

61. 4 একক বৃহৎ অক্ষবিশিষ্ট উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 1, 0)$ এবং যা $(1, c)$ বিন্দু দিয়ে যায়। c এর মান কত? [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. $\pm\frac{15}{4}$ খ. $\pm\frac{3}{2}$ গ. $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ ঘ. $\pm\frac{15}{2}$

62. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? [মেরিন ১৭-১৮]

ক. $3x + 2 = 0$ খ. $3x \pm 5 = 0$ গ. $2x + 70 = 0$ ঘ. $x \pm 2 = 0$

63. কোন কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা $0 < e < 1$ হলে, ঐ কণিকের আদর্শ সমীকরণ কোনটি? [পা. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. $y^2 = 4ax$ খ. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ গ. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ঘ. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

64. $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হবে— [ঢা. বি. ১৭; ১২-১৩; ০৫-০৬]

ক. $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$ খ. $\left(-\frac{9}{4}, -1\right)$ গ. $(0, 2)$ ঘ. $(2, 0)$

65. $y^2 - 9x = 0$ পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ— [ঢা. বি. ১৬-১৭, ১৪-১৫]

ক. $4x + 9 = 0$ খ. $4x - 9 = 0$ গ. $x + 9 = 0$ ঘ. $2x + 3 = 0$

66. $4x^2 + y^2 = 2$ উপবৃত্তটির বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে— [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. 4 এবং 2 খ. 2 এবং 4 গ. $\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{2}$ ঘ. $2\sqrt{2}$ এবং $\sqrt{2}$

67. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্ত -এর নিয়ামক রেখা (Directrix)-এর সমীকরণ কোনটি? [জ. বি. ১৫-১৬]

ক. $5x = 16$ খ. $x = 16$ গ. $5x = 48$ ঘ. $5x = \pm 16$

68. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [ঢা. বি. ০৯-১০]

ক. $(4, 4)$ খ. $(-4, -4)$ গ. $(4, -4)$ ঘ. $(-4, 4)$

69. $\frac{(x+4)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [ঢা. বি. ০৭-০৮]

ক. 1 খ. $\frac{3}{5}$ গ. $\frac{5}{3}$ ঘ. $\frac{4}{5}$

70. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত? [বুয়েট ১২-১৩, ১০-১১]

ক. 9.50 খ. 18.25 গ. 10.50 ঘ. 20.25

71. কোন উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক হলে উৎকেন্দ্রিকতা— [বুয়েট ১১-১২, ০৮-০৯]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ. 2 ঘ. $\sqrt{2}$

72. কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান হলে উৎকেন্দ্রিকতা কত? [বুয়েট ১০-১১]

ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ. $\sqrt{2}$ ঘ. $\frac{1}{2}$

73. কোন উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 একক এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [বুয়েট ০৯-১০]

ক. 12.5 খ. 15.3 গ. 19.2 ঘ. 18

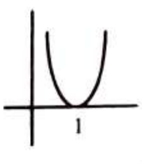
74. $y = 2x + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে c এর মান কত? [বুয়েট ০৯-১০]

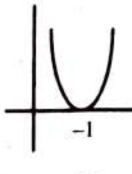
ক. 7 খ. 19 গ. 25 ঘ. কোনটিই নয়

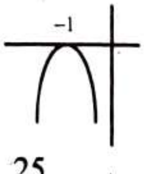
75. $3x^2 + 5y^2 = 15$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [ঢা. বি. ১২-১৩]

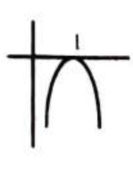
ক. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ খ. $\sqrt{\frac{5}{3}}$ গ. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ঘ. $\sqrt{\frac{5}{2}}$

76. $y = -(x-1)^2$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র কোনটি? [বুয়েট ১০-১১]

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

77. একটি উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় $(0, \pm 5)$ ও নিয়ামকদ্বয় $y = \pm \frac{25}{3}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ হলো— [কুয়েট ১৩-১৪]

ক. $16x^2 + 25y^2 = 400$ খ. $9x^2 + 25y^2 = 225$

গ. $25x^2 + 16y^2 = 400$ ঘ. $9x^2 + 16y^2 = 144$

78. $5y = x + 50$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, তার ফোকাস হলো— [কুয়েট ১২-১৩]

ক. $(1, 0)$ খ. $(10, 0)$ গ. $(2, 0)$ ঘ. $(5, 0)$

79. $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? [কুয়েট ১০-১১]

ক. 10 খ. 11 গ. 12 ঘ. 13

80. $y^2 = -4ax$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? [বুয়েট ১২-১৩]

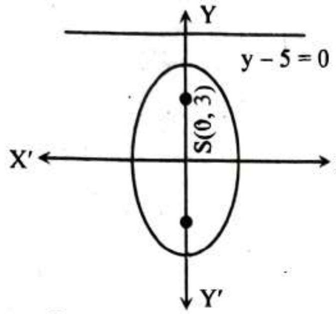
ক. $x + a = 0$ খ. $x - a = 0$ গ. $y + a = 0$ ঘ. $y - a = 0$

81. একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0, 2) অক্ষ রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ কোনটি? [বুটেক্স ১২-১৩]

ক. $4x^2 = 3(y + 2)$ খ. $3x^2 = 12(y - 2)$ গ. $3x^2 = 4(y - 2)$ ঘ. $4x^2 = 3(y - 2)$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1.

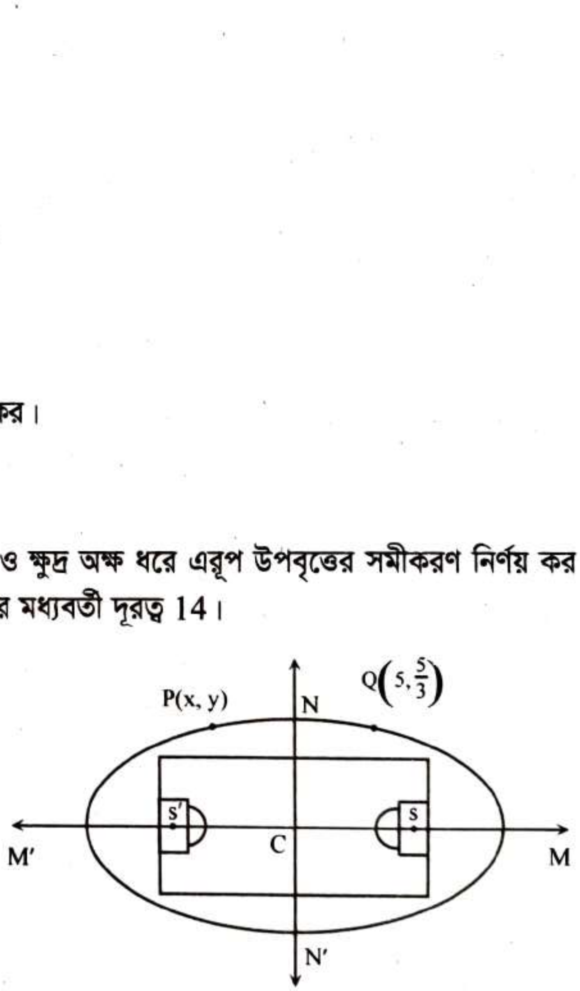


ক. $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$ কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{4}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের নিয়ামক রেখা ও y অক্ষকে যথাক্রমে বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 এবং নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 14।

2. চিত্রে একটি উপবৃত্তাকার ফুটবল স্টেডিয়াম দেখানো হলো যার সেন্টার পয়েন্ট C, প্যানাল্টি সুট-আউট স্পট যথাক্রমে S(5, 0) এবং S′(1, 0), বিন্দুতে অবস্থিত। পরিধির যেকোন বিন্দু P(x, y) থেকে S′ ও S এর দূরত্বের সমষ্টি সর্বদা সমান থাকে।

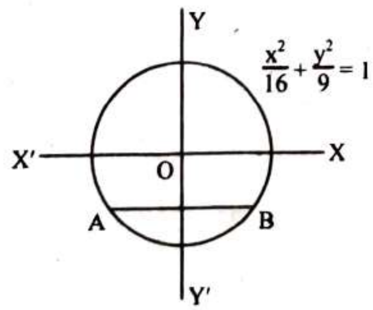


ক. (SQ + S′Q) নির্ণয় কর।

খ. NN′ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3.



ক. $y = mx - 1$ রেখাটি $x^2 = 2y$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে m এর মান নির্ণয় কর।

খ. $AB = 2\sqrt{7}$ বৃহৎ অক্ষের সমান্তরাল হলে ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

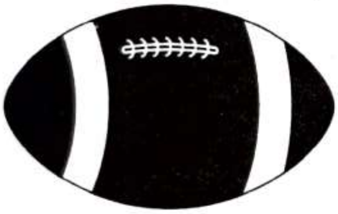
গ. $x - y = 5$ সরলরেখাটি উদ্দীপকের উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. দৃশ্যকল্প-১: উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও তার নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 12 সে.মি.।
দৃশ্যকল্প-২: $25x^2 - 16y^2 = 400$.
ক. $(\sqrt{3}\sec\theta, 2\tan\theta)$ পরামিতিক স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ এর উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{5}$ হলে অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর কণিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. একটি স্প্রিংকে y পরিমাণ প্রসারিত বা সংকুচিত করলে তাতে x পরিমাণ শক্তি সঞ্চিত হয় যা সংকোচন বা প্রসারণ দৈর্ঘ্যের বর্গের সমানুপাতিক। এই সমানুপাতিক ধ্রুবকের মান $\frac{1}{12}$ হলে সম্পর্কটি একটি পরাবৃত্তাকার বক্ররেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।
ক. $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
খ. পরাবৃত্তের এমন একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + 2y - 1 = 0$ রেখার ওপর লম্ব।
গ. 2 উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকন্দ্রেদ্বয় প্রদত্ত পরাবৃত্ত এবং $x = 3$ রেখার ছেদ বিন্দুতে অবস্থিত।

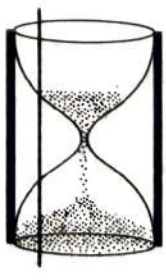
6. একটি ইটের টুকরাকে উঁচু একটি টাওয়ারের চূড়া থেকে বাধাহীনভাবে ফেলে দেওয়া হলে, ফেলে দেওয়া বিন্দু থেকে x দূরত্ব অতিক্রম করার পর তার বেগ y হয় যা $y^2 = 2gx$ পরাবৃত্তকার শর্তটি অনুসরণ করে। এখানে $g = 10$ মিটার/সেকেন্ড^2।
ক. $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
খ. পরাবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 25 হলে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কত?
গ. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $x = 20$, শীর্ষবিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের উপরে অবস্থিত এবং পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে।

7.



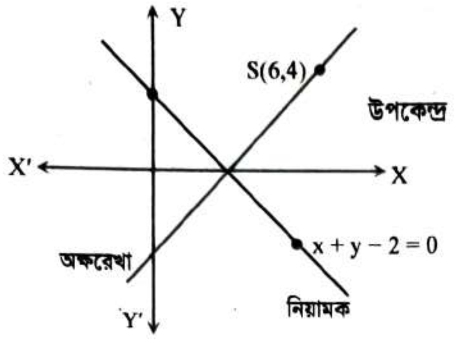
রাগবী বলের লম্বচ্ছেদ উপবৃত্তাকার একটি কণিকের আকৃতি ধারণ করে। লম্বচ্ছেদটির অর্ধ বৃহদাক্ষ a, অর্ধ ক্ষুদ্রাক্ষ b এবং ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্বের সমান।
ক. $y^2 - 2x^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
খ. উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে, $3a^2 = 4b^2$
গ. উপকেন্দ্রিক লম্ব 10 হলে লম্বচ্ছেদটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. চিত্রের স্যান্ডওয়াচটি একটি সরলরেখা বরাবর কাটলে অধিবৃত্ত উৎপন্ন হয় যেখানে আড় অক্ষ, x-অক্ষকে নির্দেশ করে। অধিবৃত্তের কেন্দ্র (1, 0) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 2 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$.



ক. $x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
খ. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
গ. অধিবৃত্তটির আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 1 এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $\sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্তটির অসীমতট রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$

9\.



একটি পরাবৃত্তের নিয়ামক, অক্ষরেখা, উপকেন্দ্র নির্দেশ করা হলো।

ক. $y^2 = 4a_1x$ এবং $x^2 = 4a_2y$ সমীকরণদ্বয়কে দুটি সরল চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন কর যখন a_1 ধনাত্মক এবং a_2 ঋণাত্মক।

খ. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

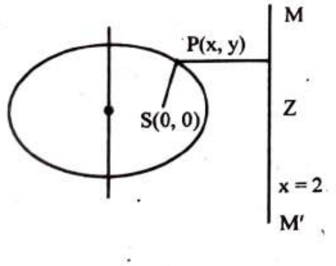
10\. সৌরজগতের গ্রহ, উপগ্রহসমূহ সাধারণত উপবৃত্তাকার পথে ভ্রমণ করে। দুইটি উপগ্রহ তাদের ফোকাস S(9, 0) বিন্দুতে একটি গ্রহকে রেখে প্রদক্ষিণ করছে। একটি উপগ্রহের সঞ্চারপথের উপকেন্দ্র এবং তার নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 16 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$।

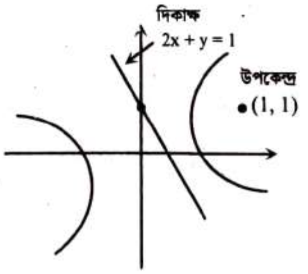
ক. $x^2 - 10y = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

খ. প্রথম উপগ্রহের সঞ্চারপথ যে উপবৃত্ত গঠন করে তার অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. দ্বিতীয় উপগ্রহটির উপবৃত্তাকার গতিপথের দিকাক্ষের সমীকরণ $x = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ হলে গতিপথটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

11\.



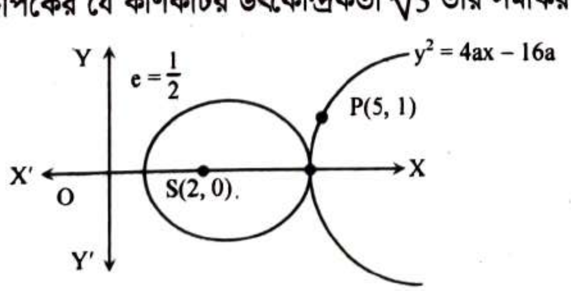


ক. $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটি (0, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। c এর মান নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের যে কণিকটির উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

12\.

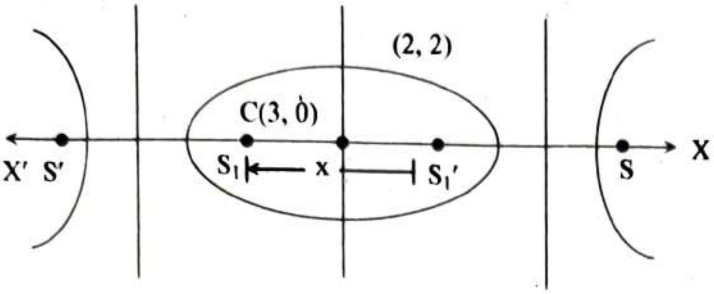


ক. $Px^2 + 4y^2 = 1$ পরাবৃত্তটি (1, 0) বিন্দু দিয়ে যায় P এর মান নির্ণয় কর।

খ. নিয়ামক y-অক্ষ ও S বিন্দুটি উপকেন্দ্র হলে, উপবৃত্তকে আদর্শ সমীকরণ রূপে প্রকাশ কর।

গ. পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13.

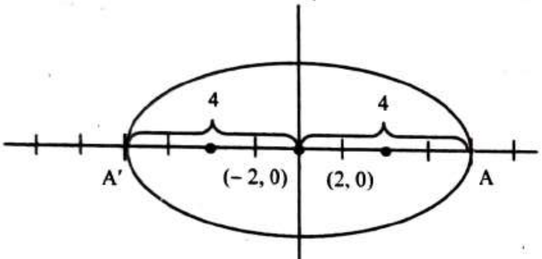


ক. মুক্ত হস্তে $(x + 1)^2 = 4y$ এর চিত্র অঙ্কন করে শীর্ষবিন্দু সনাক্ত কর।

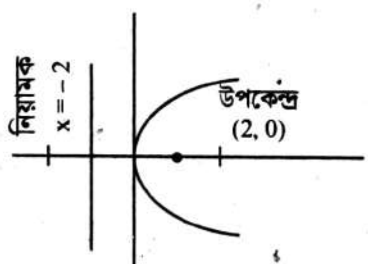
খ. C বিন্দুটি উপবৃত্তের কেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

গ. অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় এবং $SS' = 32$ ও উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14.



চিত্র-১



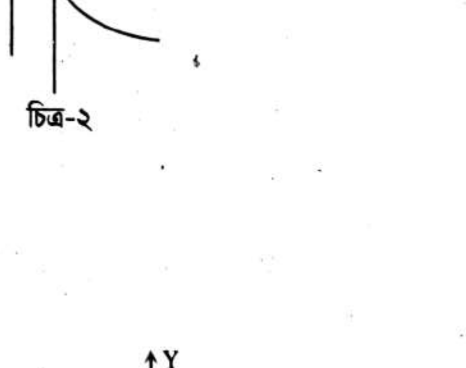
চিত্র-২

ক. $x^2 = -16y$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

খ. চিত্র-১ এর উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. চিত্র-২ এর পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

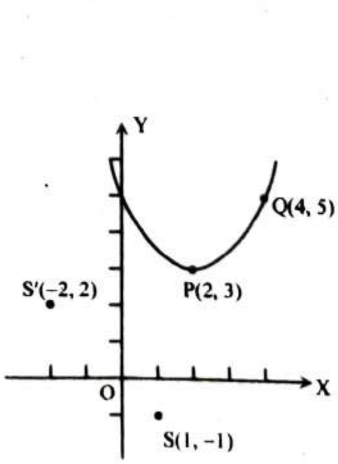
15. ক. কোনো উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।



খ. S ও A যথাক্রমে কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. S ও A যথাক্রমে কোনো উপবৃত্তের বৃহদাক্ষের প্রান্তবিন্দু যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং ঐ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

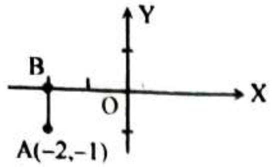
16. ক. $x + 2y - 4 = 0$ রেখার উপর লম্ব যেকোনো রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।



খ. চিত্রের পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. কোনো উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক এবং উপকেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে S ও S′ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

17.

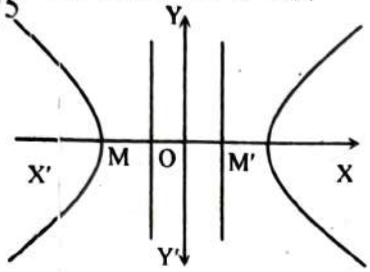


ক. AB দৈর্ঘ্যের সমমানের দুইটি মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

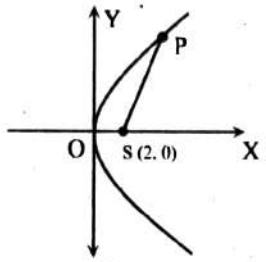
খ. কোনো পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং শীর্ষবিন্দু A তার নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. যে উপবৃত্তের ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য AB দৈর্ঘ্যের সমান, অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

18.



চিত্র-১



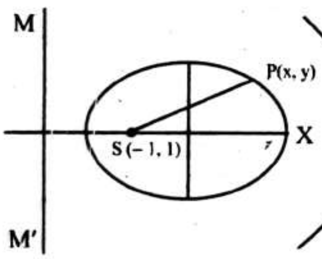
চিত্র-২

ক. $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

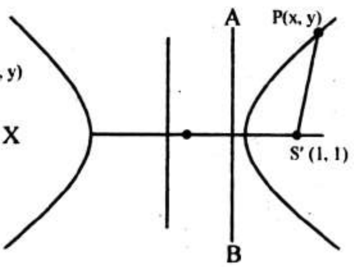
খ. চিত্র-১ এর কণিকের ক্ষেত্রে $MM' = 4$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ হলে এটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. চিত্র-২ এর ক্ষেত্রে S উপকেন্দ্র এবং $SP = 8$ হলে P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

19.



চিত্র-১



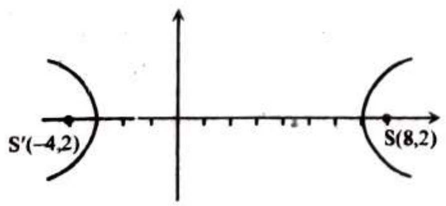
চিত্র-২

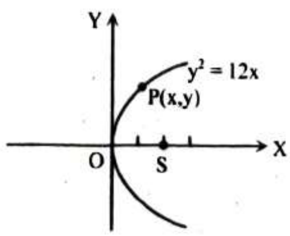
ক. $y^2 = 4x + 4y - 8$ এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

খ. চিত্র-১-এ $MM' \equiv x - y + 3 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ হলে P এর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

গ. চিত্র-২-এ $AB \equiv 2x + y = 1$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ হলে P এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

20.





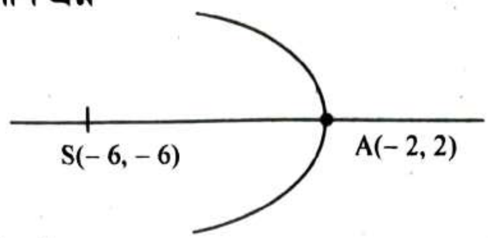
ক. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 6 একক, ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

খ. পরাবৃত্তের P বিন্দুর ভুজ 3 হলে বিন্দুটির উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

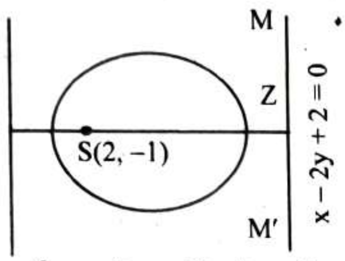
গ. উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{2}$ এবং S ও S′ উপকেন্দ্র হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

21. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



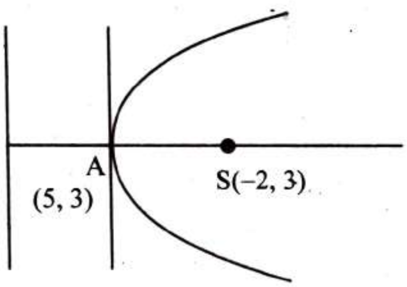
[ঢাকা বোর্ড-২০১৯]

ক. $3x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ S উপকেন্দ্র এবং A শীর্ষবিন্দু হলে, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$, S উপকেন্দ্র এবং MZM′ নিয়ামক।

22. দৃশ্যকল্প-১:



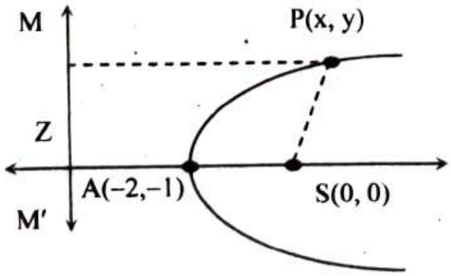
দৃশ্যকল্প-২: উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও তার নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 14 সে.মি.। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]

ক. $16y^2 - 9x^2 = 144$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{4}$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

23.



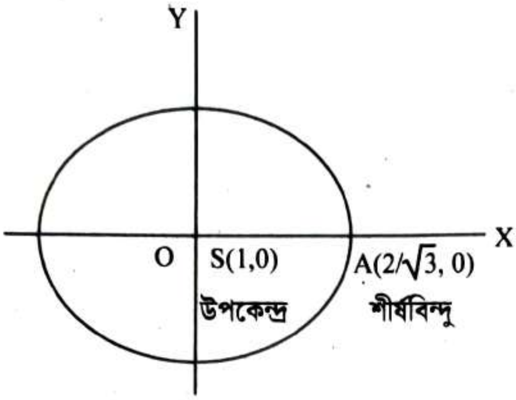
[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]

ক. $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

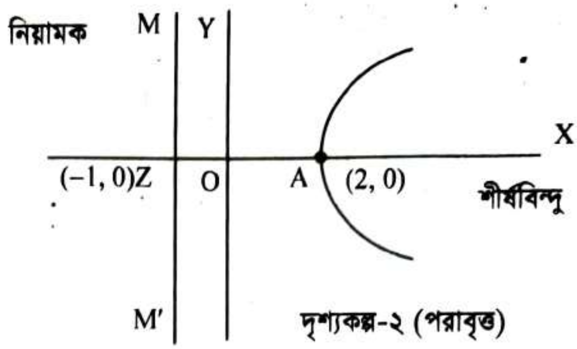
খ. কনিকটি পরাবৃত্ত হলে MZM′ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. SP : PM = 1 : 3 এবং MZM′ এর সমীকরণ $x + y - 2 = 0$ হলে, কনিকটি চিহ্নিত করে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

24.



দৃশ্যকল্প-১ (উপবৃত্ত)



দৃশ্যকল্প-২ (পরাবৃত্ত)

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

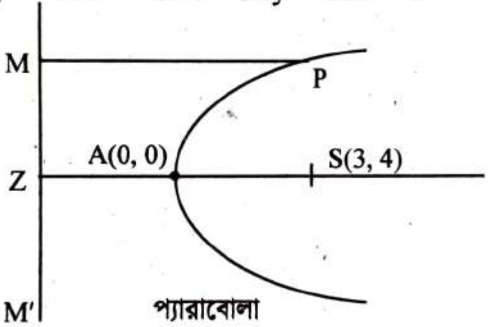
ক. $E = \{0, 1, 2\}$ সেটটি হতে নিরপেক্ষভাবে একটি সংখ্যা উত্তোলন করলে সেটি দৃশ্যকল্প-২ এর উৎকেন্দ্রিকতা হওয়ার সম্ভাবনা কত নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

25. দৃশ্যকল্প-১: $9y^2 - 16x^2 - 64x - 54y - 127 = 0$

দৃশ্যকল্প-২:



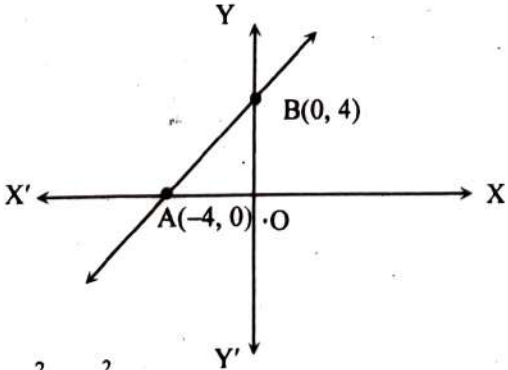
[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

ক. $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে MZM′ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

26.



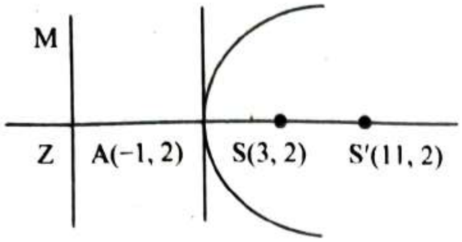
[সিলেট বোর্ড-২০১৯]

ক. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + 1 = 0$ কণিকের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. O কে উপকেন্দ্র এবং AB কে শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ধরে অংকিত পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. O কে কেন্দ্র এবং AB কে নিয়ামক ধরে অংকিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

27.



[যশোর বোর্ড-২০১৯]

ক. $y^2 - 2x^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?

খ. A এবং S-কে যথাক্রমে পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্র ধরে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. S এবং S′ উপকেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 2।

28. দৃশ্যকল্প-১: $y^2 = 4px$.

দৃশ্যকল্প-২: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটি (6, 1) ও (10, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3। [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

ক. $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ নির্দেশিত পরাবৃত্তটির (3, −2) বিন্দুগামী হলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, নিয়ামকের সমীকরণ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. দৃশ্যকল্প-১ : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

দৃশ্যকল্প-২ : $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y - 9 = 0$ [ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড-২০১৮]

ক. $x^2 = -12y$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ বের কর।

খ. $x - y - 5 = 0$ রেখাটি দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকটিকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটি প্রমিত আকারে প্রকাশ করে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

30. দুটি সমীকরণ: (i) $x^2 + 6x + 3y = 0$. (ii) $4x + 3y - 5 = 0$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]

ক. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

খ. (i) নং সমীকরণের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (− 1, 1), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং (ii) নং সমীকরণ যার দিকাক্ষ।

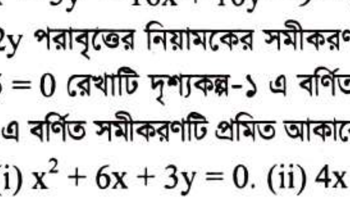
31. $16x^2 + 25y^2 = 400$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৭; দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

ক. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(0, 2\sqrt{2})$ ও (− 3, 0) বিন্দু দিয়ে যায়।

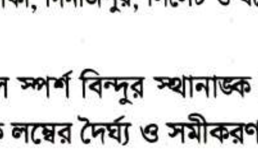
খ. উৎকেন্দ্রিকতাসহ উদ্দীপকের কণিকটির শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, ফোকাস ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. চিত্র অংকন পূর্বক উদ্দীপকের কণিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয় ও নিয়ামকদ্বয় এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

32. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]

ক. $y^2 + 6y - 4x = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লেখিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

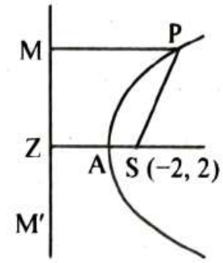
33. S এর স্থানাঙ্ক (7, 3) এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 1, 3). [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]

ক. $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 10; বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের S ও A বিন্দুকে যথাক্রমে উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু ধরে একটি কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা = 1

গ. উদ্দীপকের SA রেখাংশকে বৃহদাক্ষ ধরে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34.



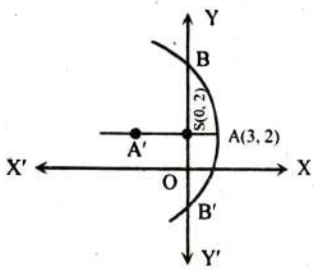
চিত্রটি একটি কণিক নির্দেশ করে যার নিয়ামক রেখা MZM′। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

ক. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

খ. A(1, −2) হলে MZM′ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. SP : PM = 1 : 2 এবং MZM′ রেখার সমীকরণ $3x + 4y = 1$ হলে কণিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

35.



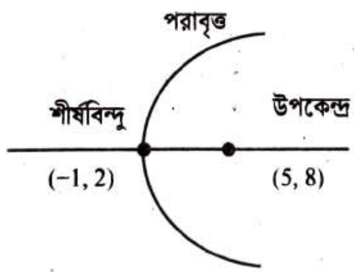
[সিলেট বোর্ড-২০১৭]

ক. $9x^2 - 4y^2 = 36$ কণিকের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. A কে শীর্ষবিন্দু এবং S কে উপকেন্দ্র ধরে অঙ্কিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকে OB′ = 4 এবং AS = A′S হলে BB′ কে বৃহৎ অক্ষ এবং AA′ কে ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে অঙ্কিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

36. দৃশ্যকল্প-১: [যশোর বোর্ড-২০১৭]



দৃশ্যকল্প-২: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি (6, 1) ও (10, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3.

ক. $3x^2 + 5y^2 = 1$ এর উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

37. দৃশ্যকল্প-১: কণিকের উপকেন্দ্র S(5, 2) এবং শীর্ষবিন্দু A(3, 4),

দৃশ্যকল্প-২: $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$ একটি সমীকরণ। [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]

ক. $x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ কণিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে সনাক্ত কর।

খ. e = 1 হলে দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ বের কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

2. (i) $(\pm 4, 0), (\pm 5, 0), \frac{5}{4}; 8, 6, \frac{9}{2}, 5x = \pm 16$

(ii) $(0, \pm 5), \left(0, \pm\sqrt{41}\right), \frac{\sqrt{41}}{5}, 10, 8, \frac{32}{5}, \sqrt{41}\, y = \pm 25$

3. (i) $x = 4\sec\theta, y = 6\tan\theta; \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1; (\pm 4, 0); \frac{\sqrt{13}}{2}; y = 0, x = 0; 13x = \pm 8\sqrt{13}$

(ii) $x = 8\sec\theta, y = 6\tan\theta; \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1; (\pm 8, 0); \frac{5}{4}; y = 0, x = 0, 5x = \pm 32$

(iii) $x = \sqrt{3}\sec\theta, y = 2\tan\theta; \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1; (\pm\sqrt{3}, 0); \sqrt{\frac{7}{3}}; y = 0, x = 0; 7x = \pm 3\sqrt{7}$

4. (i) $(\pm 5, 0), 5x = \pm 9$ (ii) $\frac{13}{12}, (\pm 13, 0)$

(iii) $\frac{\sqrt{41}}{5}, \left(\pm\sqrt{41}, 0\right)$ (iv) $(0, 0), \left(\pm\sqrt{41}, 0\right), \frac{1}{4}\sqrt{41}$

(v) $(\pm 5, 0), \frac{5}{3}, x = \pm\frac{9}{5}$ (vi) $\frac{3}{\sqrt{5}}, (0, \pm 3), 3y = \pm 5$

(vii) $(0, 0), \left(\pm\sqrt{2}, 0\right), \left(\pm\frac{3}{2}, 0\right), 3x = \pm 4$ (viii) $(0, \pm 4), 4y = \pm 9$ (ix) $\frac{\sqrt{13}}{2}; \sqrt{13}x = \pm 4$

(x) অধিবৃত্ত; $(1, 2), y - 2 = 0, x - 1 = 0, 2\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}$

(xi) $(1, -2); (5, -2), (-3, -2); (6, -2), (-4, -2)$

(xii) $\frac{8}{\sqrt{5}}; x - 5 = 0, x + 1 = 0$

5. (i) $9x^2 - 16y^2 = 144; (4\sec\theta, 3\tan\theta)$ (ii) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1; (12\tan\theta, 5\sec\theta)$

6. (i) $9x^2 - 112y^2 = 252$ (ii) $9x^2 - 16y^2 = 144$ (iii) $x^2 - y^2 = 8$

7. (i) $y = \pm\frac{\sqrt{23}}{2}x$ (ii) $y = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}x$ (iii) $y - 2 = \pm\sqrt{3}x$ (iv) $y - 2 = \pm\sqrt{3}(x - 6)$ (v) $y + 4 = \pm\frac{3}{5}(x - 2)$

(vi) $y = \pm\frac{3}{4}x$;

8. (i) $4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x - 225 = 0$ (ii) $2x^2 - 7y^2 - 12xy - 14x - 18y + 62 = 0$

9. (i) $\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ (ii) $4x^2 - y^2 = 20$ (iii) $\frac{(x-8)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{32}{9}} = 1$ (iv) $3x^2 - 5y^2 = 7$

(v) $\frac{(x-8)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{32}{9}} = 1$

10. (i) $5y^2 - 9x^2 = 36$ (ii) $3y^2 - x^2 = 108$ (iii) $121y^2 - 11x^2 = 81$

11. (i) $x - y + 1 = 0$; (ii) $\pm 2\sqrt{2}$; (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{40}{9}\right)$

বহুনির্বাচনি

1. গ	2. গ	3. খ	4. গ	5. খ	6. খ	7. খ	8. ঘ	9. ক	10. ক	11. গ	12. ঘ	13. গ	14. খ
15. গ	16. খ	17. খ	18. খ	19. ক	20. ক	21. গ	22. খ	23. খ	24. ক	25. খ	26. ক	27. খ	28. গ
29. ক	30. ঘ	31. গ	32. গ	33. খ	34. ক	35. ক	36. খ	37. ঘ	38. গ	39. খ	40. ক	41. ক	42. গ
43. ক	44. ঘ	45. ক	46. খ	47. ঘ	48. খ	49. ঘ	50. ক	51. গ	52. ঘ	53. ক	54. গ	55. গ	56. খ
57. গ	58. খ	59. খ	60. ক	61. খ	62. খ	63. গ	64. ক	65. ক	66. ঘ	67. ঘ	68. ঘ	69. খ	70. খ
71. খ	72. ক	73. গ	74. ঘ	75. গ	76. ঘ	77. গ	78. গ	79. গ	80. খ	81. গ			

সৃজনশীল

1. ক. 4; খ. $16x^2 + 7y^2 - 6y - 81 = 0$; গ. $\frac{x^2}{21} + \frac{(y-5)^2}{12} = 1$;
2. ক. 6; খ. 3; গ. $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$;
3. ক. $\pm\sqrt{2}$; খ. $\frac{9}{4}\sqrt{7}$ বর্গ একক; গ. $\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$;
4. ক. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$; খ. $\frac{80}{7}$ সে.মি., $\frac{16\sqrt{21}}{7}$ সে.মি.; গ. $(\pm\sqrt{41}, 0)$;
5. ক. $\frac{4}{5}$; খ. $4x - 2y + 3 = 0$; গ. $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{27} = 1$;
6. ক. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; খ. (20, 20), (20, – 20); গ. $\frac{(x-20)^2}{15^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$;
7. ক. $\sqrt{\frac{3}{2}}$; গ. $x^2 + 2y^2 = 100$
8. ক. $\sqrt{\frac{2}{3}}$; খ. $4x^2 - 2y^2 - 8x + 3 = 0$
9. খ. (4, 2) গ. $(x - y)^2 - 20x - 12y + 100 = 0$
10. ক. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$; খ. 30 একক ও 24 একক গ. $3x^2 + 4y^2 - 72x + 324 = 0$
11. ক. 5 খ. $9x^2 + 25y^2 + 64x - 64 = 0$ গ. $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$
12. ক. 1 খ. $\frac{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ গ. $4x - 15 = 0$
13. খ. $x = 3\sqrt{2}$ গ. $x^2 - y^2 = 128$
14. ক. (0, – 4) খ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ গ. $y^2 = 8x$
15. ক. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ খ. $y^2 - 6y + 20x - 71 = 0$ গ. $20\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 36(y-3)^2 = 125$
16. ক. $2x - y + 1 = 0$ খ. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
    গ. $55x^2 + 55y^2 + 18xy + 46x - 46y - 713 = 0$
17. ক. $x^2 - 2x + 1 = 0$ খ. $2x + y + 10 = 0$ গ. $16x^2 + 20y^2 = 5$

18. ক. 4 খ. $x^2 - y^2 = 8$ গ. $(6, \pm 4\sqrt{3})$
19. ক. $(1, 2)$ খ. $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$
গ. $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$
20. ক. $(4, 4\sqrt{2}), (4, -4\sqrt{2})$ খ. 6 গ. $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{20} = 1$
21. ক. $\sqrt{\frac{2}{5}}$; খ. $4x^2 + y^2 + 104x + 148y - 4xy - 124 = 0$; গ. $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 44x + 28y + 46 = 0$
22. ক. $y = \pm\frac{3}{4}x$; খ. $y^2 - 6y + 28x - 131 = 0$; গ. 21 একক
23. ক. $\frac{\sqrt{13}}{3}$; খ. $2x + y + 10 = 0$; গ. $17x^2 + 17y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$
24. ক. $\frac{1}{3}$; খ. $3x^2 + 12y^2 = 4$; গ. $y^2 - 12x + 24 = 0$
25. ক. $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; খ. $(-2, -2), (-2, 8), 10, \frac{9}{2}$; গ. $3x + 4y + 25 = 0$
26. ক. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য = 10
অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 6
খ. $x - y + 8 = 0$; গ. $(1, -1)$ এবং $(-1, 1)$
27. ক. $\sqrt{\frac{3}{2}}$; খ. $y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$; গ. $\frac{(x-7)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1$
28. $(0, 0)$; খ. $3x - 1 = 0, 3x + 1 = 0, \frac{4}{3}$; গ. $\frac{9(x-8)^2}{4} - \frac{9(y-1)^2}{32} = 1$
29. ক. $y - 3 = 0$; খ. $\left(\frac{16}{5}, \frac{-9}{5}\right)$; গ. $\frac{8}{\sqrt{5}}, x + 1 = 0$
30. ক. $\frac{5}{3}$; খ. $(-3, 3), \left(-3, \frac{9}{4}\right), 3$; গ. $84x^2 + 91y^2 - 24xy + 240x - 170y + 175 = 0$
31. ক. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$; খ. $\frac{3}{5}$; $(\pm 5, 0)$; $(\pm 3, 0)$; $\frac{32}{5}$; গ. $x = \pm 3$; $x = \pm\frac{25}{3}$;
32. ক. 4; খ. $(\pm\sqrt{7}, 0)$; $\sqrt{7}\,x = \pm 16$; গ. $4x^2 - y^2 = 4$;
33. ক. $(2, \pm 8)$; খ. $(y-3)^2 = 32(x+1)$; গ. $x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 29 = 0$;
34. ক. $\frac{\sqrt{13}}{2}$; খ. $3x - 4y - 36 = 0$; গ. $91x^2 + 84y^2 - 24xy + 406x - 392y + 799 = 0$;
35. ক. $\sqrt{13}x = \pm 4$; খ. $(y-2)^2 = -12(x-3)$; গ. $y - 2 = \pm 3\sqrt{3}$
36. ক. $\sqrt{\frac{2}{5}}$; খ. $x^2 + y^2 - 2xy - 42x - 54y + 57 = 0$;
গ. $\frac{(x-8)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{32}{9}} = 1$;
37. ক. অধিবৃত্ত; খ. $x^2 + y^2 - 30x + 2y + 2xy + 33 = 0$;
গ. $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(3, -\frac{1}{2}\right)$; $2y - 7 = 0$; $2y + 5 = 0$;

পাঠ-১৯ ও ২০

ব্যবহারিক

6.27 প্যারাবোলা/পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন (Drawing the graph of Parabola)

পরীক্ষণ নং 6.27	পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন।	**তারিখ:** ... ...

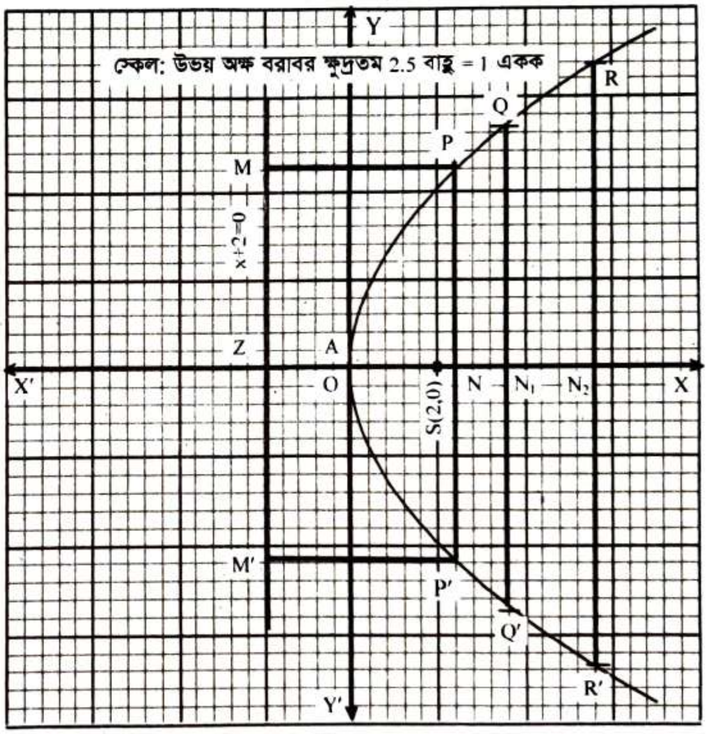
সমস্যা: পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে যার উপকেন্দ্র $(2, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x + 2 = 0$

সমাধান: তত্ত্ব: পরাবৃত্তের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব নিয়ামকের লম্ব দূরত্ব সমান। অর্থাৎ উপকেন্দ্র S, নিয়ামক MM′ এবং P হতে নিয়ামকের লম্ব দূরত্ব PM হলে, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{SP}{PM} = 1$

$\therefore SP = PM.$

উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) গ্রাফ পেপার (v) পেন্সিল কম্পাস।

কার্যপদ্ধতি:



i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. এখন x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ ধরে উপকেন্দ্র $S(2, 0)$ স্থাপন করি এবং নিয়ামক $MM'(x + 2 = 0)$ আঁকি।

iii. মনে করি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(2, 0)$ এবং নিয়ামক MM′ এর সমীকরণ $x + 2 = 0$। নিয়ামকের উপর SZ লম্ব আঁকি যেখানে Z নিয়ামকের উপরস্থ যে কোনো বিন্দু। ZS কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি যেন ZA = AS হয়। এখানে A পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু।

iv. AS রেখার বর্ধিতাংশের উপর N যে কোনো একটি বিন্দু নেই। N থেকে ZS অক্ষের উপর PNP′ লম্ব অঙ্কন করি।

v. S কে কেন্দ্র করে ZN এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন তা PNP′ কে P এবং P′ বিন্দুতে ছেদ করে।

vi. P এবং P′ হতে MZM′ নিয়ামকের উপর PM এবং P′M′ দুইটি লম্ব অঙ্কন করি। অঙ্কনানুসারে, SP = SP′ = ZN = PM পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে P, P′ পরাবৃত্তের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু।

vii. অনুরূপভাবে AS এর বর্ধিতাংশের উপর N_1, N_2 .... ইত্যাদি বিন্দু নিয়ে এদের সাপেক্ষে পরাবৃত্তের ওপর Q, Q′, R, R′; .... ইত্যাদি বিন্দু পাওয়া যায়। এই বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখা দ্বারা যোগ করলে একটি পরাবৃত্তের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

কাজ: একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -2)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x + y + 2 = 0$ হলে পরাবৃত্তটি অঙ্কন কর।

6.28 উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রিকতা দেওয়া থাকলে উপবৃত্ত অঙ্কন
(Drawing the ellipse when focus, directrix and ecentricity are provided)

পরীক্ষণ নং 6.28	উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রিকতা দেওয়া থাকলে উপবৃত্ত অঙ্কন	তারিখ: ... ...

সমস্যা: উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র S(3, 4), একটি নিয়ামকের সমীকরণ $y + 5 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ দেওয়া আছে। উপবৃত্তটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মনে করি, উপবৃত্তটির একটি উপকেন্দ্র S, উৎকেন্দ্রিকতা e এবং এর উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু P থেকে নিয়ামকের লম্ব-দূরত্ব PM তাহলে, $\frac{SP}{PM} = e$ [যেখানে $e < 1$]

উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

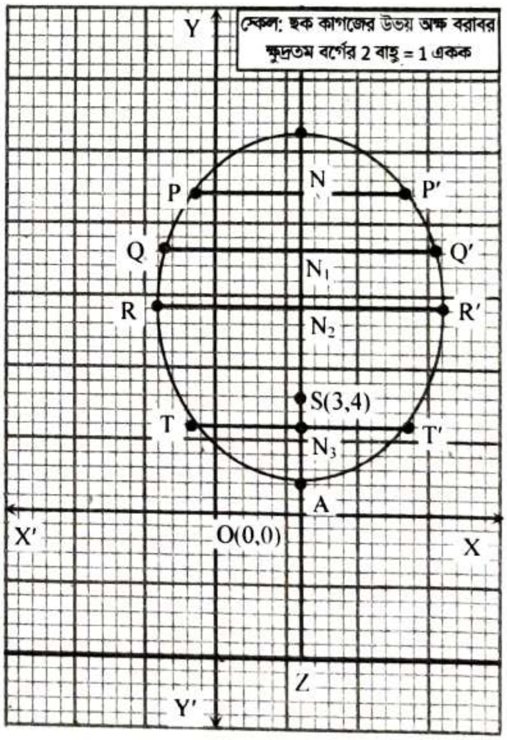
i. ছক কাগজ নিয়ে XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় আঁকি।

ii. **স্কেল:** ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরি।

iii. নির্বাচিত স্কেলে উপকেন্দ্র S(3, 4) কে স্থাপন করি।

iv. নিয়ামকের সমীকরণ $y = -5$, যা O থেকে OY′ এর দিকে 5 একক দূরত্বে X-অক্ষের সমান্তরাল। নির্বাচিত স্কেলে নিয়ামকটি আঁকি।

v. S থেকে নিয়ামকের ওপর SZ লম্ব অঙ্কন করে ZS কে A ও A′ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করি। তাহলে, $\frac{SA}{AZ} = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{SA'}{A'Z} = \frac{1}{2}$ সুতরাং A ও A′ উপবৃত্তের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু।



vi. AA′ ওপর যেকোনো বিন্দু N নিয়ে PNP′ লম্ব আঁকি এখন S কে কেন্দ্র করে $\frac{1}{2}$ZN এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি, যা PNP′ কে যথাক্রমে P ও P′ বিন্দুতে ছেদ করে S, P এবং S, P′ যোগ করি এবং দিকাক্ষের ওপর PM ও P′M′ লম্বদ্বয় আঁকি।

$$\therefore \frac{SP}{PM} = \frac{\frac{1}{2}ZN}{ZN} = \frac{1}{2} \text{ এবং } \frac{SP'}{P'M'} = \frac{1}{2}$$

অতএব P ও P′ বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত।

vii. AA′ এর ওপর N_1, N_2, N_3 বিন্দু নিয়ে কার্যপদ্ধতি (vi) এর মত অগ্রসর হয়ে উপবৃত্তের ওপর Q ও Q′; R ও R′; T ও T′ বিন্দুগুলি পাওয়া যায়।

viii. প্রাপ্ত বিন্দুগুলির সংযোগে আঁকা সুষম বক্ররেখাটি উদ্দিষ্ট উপবৃত্ত।

কাজ: কোনো উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 2) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y - 6 = 0$ হলে উপবৃত্তটি অঙ্কন কর।

6.29 হাইপারবোলা/অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রিকতা দেওয়া থাকলে হাইপারবোলা/অধিবৃত্ত অঙ্কন (Drawing the Hyperbola when focus, directrix and eccentricity are provided)

পরীক্ষণ নং 6.29	অধিবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র, একটি নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রিকতা দেওয়া থাকলে অধিবৃত্ত অঙ্কন	তারিখ: ... ...

সমস্যা: (4, 6) বিন্দুটি একটি উপকেন্দ্র একটি $x + 2y = 6$ নিয়ামক এবং 2 উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট অধিবৃত্তের চিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মনে করি অধিবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র S (4, 6) একটি নিয়ামক MZN যার সমীকরণ $x + 2y = 6$ এবং অধিবৃত্তের উপরস্থ P একটি বিন্দু P থেকে নিয়ামকের লম্ব দূরত্ব PM হলে,

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP}{PM} \Rightarrow \frac{SP}{PM} = 2$

উপকরণ: **(i)** সরু শীষযুক্ত পেন্সিল **(ii)** স্কেল **(iii)** ইরেজার **(iv)** ছক কাগজে ও **(v)** Scientific ক্যালকুলেটার।

নিয়ামকের সমীকরণ $x + 2y = 6$ এর জন্য ছক নির্ধারণ

x	0	6
y	3	0

কার্যপদ্ধতি: i. ছক কাগজ নিয়ে XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় আঁকি।

ii. উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গঘর = 1 একক স্কেল নির্ধারণ করি।

iii. উপরের স্কেল নির্ধারণ অনুযায়ী লেখ কাগজে S(4, 6) বিন্দু স্থাপন করি যা অধিবৃত্তের একটি উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক।

iv. নিয়ামক $x + 2y = 6$ এর জন্য অঙ্কনের ছক অনুযায়ী বসিয়ে (0, 3) ও (6, 0) বিন্দুদ্বয় সংযোজন করলে MZN নিয়ামক পাওয়া যায়।

v. উপকেন্দ্র S থেকে নিয়ামকের উপর SZ লম্ব অঙ্কন করি। SZ রেখাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে A এবং A′ বিন্দু চিহ্নিত করি। অর্থাৎ SA = 2AZ এবং SA′ = 2A′Z

vi. A ও A′ বিন্দু দুইটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত এবং AA′ এর মধ্যে বিন্দু C নির্ণয় করি। CA′ কে বর্ধিত করে CS এর সমান করে CS′ কেটে নিই। তাহলে S′ হল অধিবৃত্তের দ্বিতীয় উপকেন্দ্র।

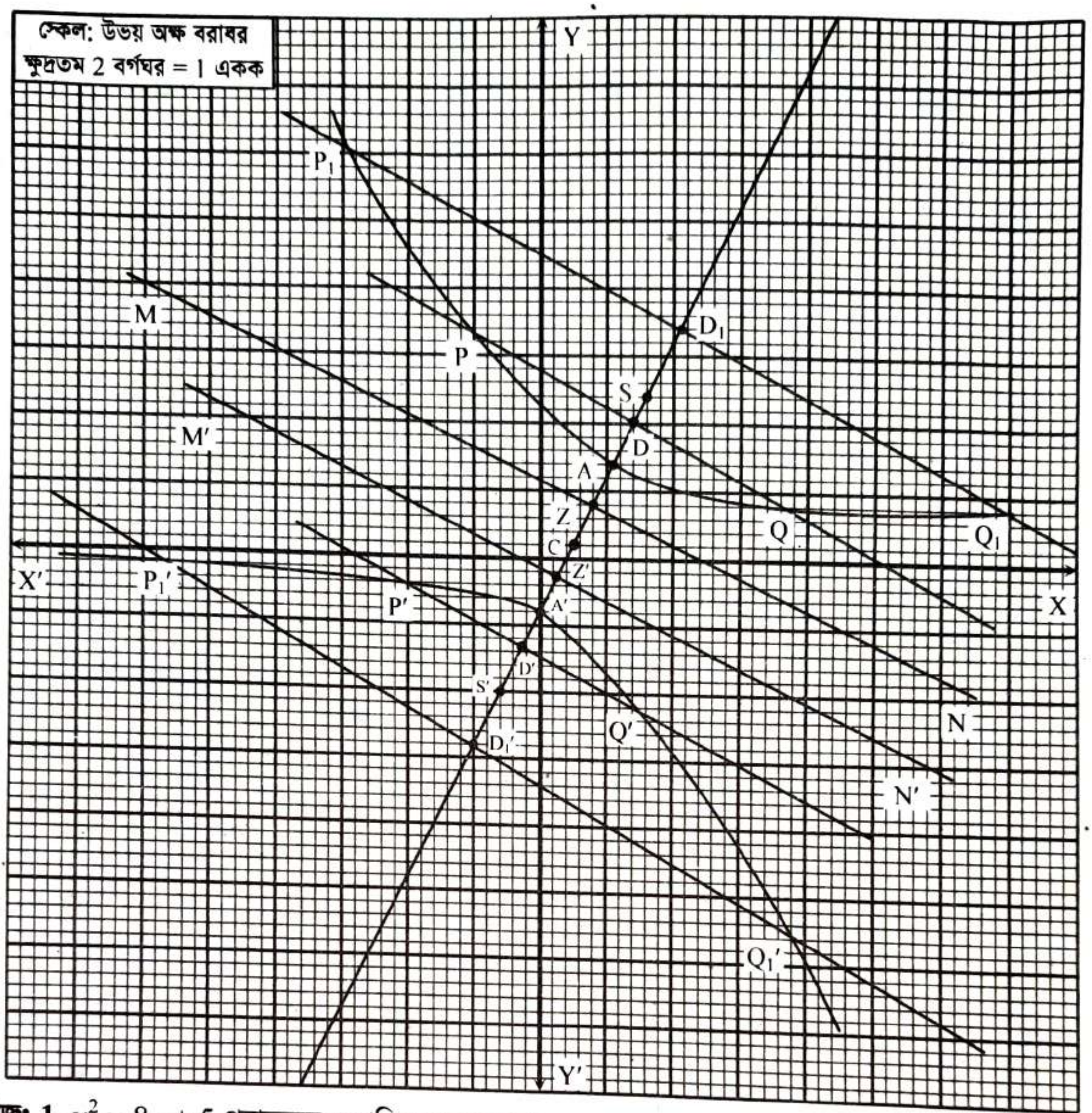
vii. CZ এর সমান করে CZ′ কেটে নিই।

viii. AS এর উপর যে কোন বিন্দু D নেই। D বিন্দুতে PDQ লম্ব অঙ্কন করি। এখন S কে কেন্দ্র করে 2ZD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ আঁকি। যাহা PDQ কে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে।

ix. A′S′ রেখার উপর D′ বিন্দু নিয়ে P′D′Q′ লম্ব আঁকি। S′ কে কেন্দ্র করে 2Z′D′ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। যাহা P′D′Q′ কে যথাক্রমে P′ এবং Q′ বিন্দুতে ছেদ করে।

x. কার্যধারা (viii) এর অনুরূপ করে SS′ এর উপর D_1 এবং D_1' বিন্দু নিয়ে অগ্রসর হয়ে P_1Q_1 এবং $P_1'Q_1'$ বিন্দু দুইটির অবস্থান নির্ণয় করি।

xi. P_1, P, A, Q, Q_1 এবং P_1', P′, A′, Q′, Q_1' বিন্দুগুলি সংযোজন করি, তাহলে প্রাপ্ত লেখচিত্রই হবে S(4, 6) উপকেন্দ্র $x + 2y = 6$ নিয়ামক এবং 2 উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট অধিবৃত্তের লেখ চিত্র।



কাজ: 1. $y^2 = 8x + 5$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

2. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(1, 1)$, শীর্ষ $(6, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ হলে উপবৃত্তটি অঙ্কন কর।

3. কোন অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $x - 2y - 6 = 0$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 2)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{3}$ হলে অধিবৃত্তটি অঙ্কন কর।

4. একটি পরাবৃত্ত অঙ্কন কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তদ্বয় $(3, 5)$ ও $(3, -5)$

মৌখিক প্রশ্ন

1. কণিক কী?
2. পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ কোনটি?
3. উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে উপবৃত্তের অবস্থা কী হবে?
4. উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ কোনটি?
5. অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ কী?
6. অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কী?
7. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ কোনটি?