# যোগজীকরণ

# ইন্টিগ্র্যাল ক্যালকুলাস

সূত্রাবলী ঃ **1**. মৌলিক ধর্মাবলী (**Fundamental Properties)ঃ**

**(i)** $\int\{f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \cdots \ldots \ldots \ldots . . \pm f_n(x)\}dx$

$=\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . . \pm f_n(x)dx$

**(ii)** $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

**2. Standard Integrals** :

**(i)** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ , **(ii)** $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$ , **(iii)** $\int dx = x + c$

**(iv)** $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$ , **(v)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ , **(vi)** $\int e^x dx = e^x + c$

**(vii)** $\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + c$, **(viii)** $\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e a} + c$ **(ix)** $\int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m} + c$ ,

**(x)** $\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + c$**(xi)** $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ , **(xii)** $\int \mathrm{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$

**(xiii)** $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$ , **(xiv)** $\int \mathrm{cosec} x \cot x dx = -\mathrm{cosec} x + c$

**3. Standard Integrals** :

**(i)** $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$

**(ii)** $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c = \ln|\sec x| + c$

**(iii)** $\int \cot x dx = \log|\sin x| + c = -\ln(\mathrm{cosec}\, x) + c$

$[log_e x = lnx]$

$\left[log_a x = \frac{1}{log_x a} = log_e x . log_a e = \frac{lnx}{lna}\right]$

**(iv)** $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c , (a \neq 0)$

**(v)** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, [|x| > |a|]$ **(vi)** $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c, [|x| < |a|]$

**(vii)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$ **(viii)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

**(ix)** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ **(x)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

**(xi)** $\int uv dx = u\int v dx - \int(\frac{du}{dx}\int v dx)dx$

(xvii) প্রমাণ কর যে , $\int \mathrm{cosec} x dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c = \log|\mathrm{cosec} x - \cot x| + c$

প্রমাণ ঃ $I = \int \frac{\mathrm{cosec} x(\mathrm{cosec} x-\cot x)}{\mathrm{cosec} x-\cot x} dx = \int \frac{\mathrm{cosec}^2 x+\mathrm{cosec} x.\cot x}{\mathrm{cosec} x-\cot x} dx$

since, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$ $\therefore \int \mathrm{cosec} x dx = \log|\mathrm{cosec} x - \cot x| + c$

again , $\mathrm{cosec} x - \cot x = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

$$\int \text{cosecx. dx} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c = \log|\text{cosecx} - \text{cotx}| + c$$

(xviii) প্রমাণ কর যে , $\int \text{secxdx} = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c = \log|\text{secx}+\text{tanx}| + c$

প্রমাণ ঃ $I = \int \frac{\text{secx(secx+tanx)}}{\text{secx+tanx}}dx = \int \frac{\text{secx+secx.tanx}}{\text{secx+tanx}}dx$

since, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c \quad \therefore \int \text{secxdx} = \log|\text{secx}+\text{tanx}| + c$

again ,$\text{secx} + \text{tanx} = \frac{1+\text{sinx}}{\text{cosx}} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{x}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \quad \therefore \int \text{secxdx} = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c = \log|\text{secx}+\text{tanx}| + c$

## TYPE-01

**মৌলিক সমাকলন সম্পর্কিত সমস্যাবলী ঃ**

**EXAMPLE – 01 :** $\int \sqrt{1-\sin 2x}\ dx.$

**SOLVE :** $I = \int \sqrt{1-\sin 2x}\ dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\ .\cos x}\ dx$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int \{\pm(\sin x - \cos x)\}dx$$

$$= \pm\left\{\int \sin x.dx - \int \cos x.dx\right\} = \pm\{\cos x + \sin x\} + c$$

[ বামবর্তী ও ডানবর্তী উভয় ক্ষেত্রে একই মান পাওয়া যায় ]

**EXAMPLE – 02 :** $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\ dx$

**SOLVE :** $I = \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\ dx = \int \cot\theta\ .\text{cosec}\ \theta.d\theta = -\text{cosec}\ \theta + c$ (**Ans:**)

**EXAMPLE – 03 :** $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$

**SOLVE :** $I = \int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \text{sce}^2\text{x}.dx = \frac{1}{2}\tan x + c$ (**Ans:**)

**EXAMPLE – 04 :** $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\ dx.$

**SOLVE :** $I = \int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\ dx = \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx = \int \tan^2.dx = \int(\text{sce}^2x - 1)dx$

$$= \int \text{sce}^2x\ .dx - \int dx = \tan x - x + c\ \ (\textbf{Ans:})$$

**EXAMPLE – 05 :** $\int \frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{1-\cos\theta}\, d\theta$

**SOLVE :** $I = \int \frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{1-\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{1-\cos\theta} d\theta$

$= \int \frac{\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{1-\cos\theta} d\theta = \int \left\{\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}\right\} d\theta$

$= \int \cos\theta \; d\theta + \int (1+\cos\theta) d\theta = \sin\theta + \theta + \sin\theta + c = \theta + 2\sin\theta + c$ (**Ans**: )

**EXERCISE :**

01. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx =?$ [**Ans**: $x + c$]

02. $\int \tan^2 x\, dx =?$ [**Ans**: $\tan x - x + c$ ]

03. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = ?$ [**Ans**: $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3}$ ]

04. $\int \sin x^\circ\, dx = ?$ [**Ans**: $\frac{-180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c$]

**EXAMPLE – 06 :** $\int \sin^4 x\, .\, dx$

**SOLVE :** $I = \int \sin^4 x\, .\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, .\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\, .2\sin^2 x\right)^2 . \, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}.2\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, .\, dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}.2\cos^2 2x\, .\, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c\, .$

**EXAMPLE – 07 :** $\int 4\sin^3 x dx$

**SOLVE:** $\int 4\sin^3 x\, dx = \int (3\sin x - \sin 3x) - 3\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + c = \frac{1}{3}\cos x - 3\cos x + c$

**EXAMPLE – 08 :** $\int 5\cos^2\frac{x}{2} dx =?$

**SOLVE:** $I = \int 5\cos^2\frac{x}{2} dx = \frac{5}{2}\int (1+\cos x) dx = \frac{5}{2}\int dx + \frac{5}{2}\int \cos x.\, dx = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}\sin x + c = \frac{5}{2}(x + \sin x) + c$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 09 :** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

**SOLVE :** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})} dx = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-x-2}$

$= -\int (\sqrt{x+1}) dx + \int \sqrt{x+2}\, .\, dx = -\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\left\{(x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$

EXAMPLE – 10 : $\int 5\sin 3x.\cos 2x.dx$

SOLVE : $\int 5\sin 3x.\cos 2x.dx = \frac{5}{2}\int 2\sin 3x.\cos 2x.dx$

$= \frac{5}{2}(\sin 5x + \sin x)dx = \frac{5}{2}\left\{\frac{1}{5}(-\cos 5x) - \cos x\right\} + c = -\frac{1}{2}\cos 5x - \frac{5}{2}\cos x + c$

EXAMPLE – 11 : $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x + e^{-x}} = ?$

SOLVE : $I = \int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^{4x}(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}}dx = \int e^{4x}.dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$ (**Ans**: )

EXERCISE :

01. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{2x+5}}-\sqrt{\mathbf{2x-3}}} = ?$ **Ans**: $\frac{1}{24}\{(2x+5)^{3/2} + (2x-3)^{3/2}\}$

02. $\int \cos^4 x\, dx = ?$ **Ans**: $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)$

03. $\int 7\cos^3 x\, dx = ?$ **Ans**: $\frac{21}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin 3x + c$

04. $\int \sin 2x \sin 4x.dx = ?$ **Ans**: $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 6x}{6}\right)$

05. $\int \cos ax \cos bx\, dx, (a > b)$ **Ans**: $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right]$

06. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = ?$ **Ans**: $\frac{1}{3}\{(x+3)^{3/2} + x^{3/2}\}$

## TYPE-02

### প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

চলকের পরিবর্তন : ধরি, $I = \int f(x)dx$ এবং $x = \emptyset(z)$

$\therefore \frac{dI}{dx} = f(x)$ এবং $\frac{dI}{dz} = \frac{dI}{dx}.\frac{dx}{dz} = f(x).\emptyset'(z) \therefore I = \int f\{(\emptyset(z)\}\emptyset'(z).dz$

EXAMPLE – 01 : $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = ?$

SOLVE : $I = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ awi, $e^x + e^{-x} = u$ Zvn‡j, $\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow e^x - e^{-x} = \frac{du}{dx} \Rightarrow (e^x - e^{-x})dx = du \therefore I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(e^x + e^{-x}) + c$ (**Ans**: )

EXAMPLE – 02 : $\int \frac{1}{e^x+1}dx = ?$

SOLVE : $I = \int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ awi, $1 + e^{-x} = u \Rightarrow$

$\frac{d}{dx}(1 + e^{-x}) = \frac{du}{dx} \Rightarrow o - e^{-x} = \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow e^{-x}.dx = -du \therefore I = \int \frac{-du}{u} = -\ln x + c = -\ln(1 + e^{-x}) + c = \ln \frac{1}{(1+e^{-x})}\Big\} + c$

**EXAMPLE – 03 :** $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = ?$

**SOLVE :** $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}du$

ধরি, $e^x = t$ তাহলে,

$\frac{d}{dx}e^x = \frac{dt}{dx} \Longrightarrow e^x.dx = dt \;\therefore I = \int \frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1}t + c = \tan^{-1}(e^x) + c$

**EXAMPLE – 04 :** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

**SOLVE :** ধরি, $x = a\sec\theta \Longrightarrow dx = a\sec\theta\,.\tan\theta.d\theta.$

$\therefore I = \int \frac{a\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{a\sec\theta.\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta.\tan\theta.}{a\sec\theta.a\tan\theta.}d\theta = \frac{1}{a^2}\int d\theta = \frac{1}{a^2}\theta = \frac{1}{a^2}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c.$

**EXAMPLE – 05 :** $\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx = ?$

**SOLVE :** ধরি, $\tan^{-1}x = z \Longrightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dz \Longrightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dz.$

$\therefore I = \int e^{mz}.dz = \frac{1}{m}e^z + c = \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{m} + c$

**EXAMPLE – 06 :** $\int \frac{\sin 2x.dx}{(a\sin^2 x+b\cos^2 x)^2} = ?$

**SOLVE :** ধরি, $a\sin^2 x + b\cos^2 x = z \Longrightarrow 2a\sin x\,.\cos x - 2b\sin x.\cos x\;\; dx = dz.$

$\Longrightarrow \sin 2x\,(a-b)dx = dz \Longrightarrow \sin 2x.dx = \frac{dz}{a-b}.$

$\therefore I = \int \frac{1}{z^2}.\frac{dz}{a-b} = \frac{-1}{a-b}.\frac{1}{z} + c = \frac{1}{b-a}.\frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x} + c.$

**EXAMPLE – 07 :** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = ?$

**SOLVE :** ধরি, $x = \sin\theta \Longrightarrow dx = \cos\theta\,.d\theta$

$\therefore I = \int \frac{\cos\theta.d\theta}{\sin\theta^2.\cos\theta} = \int \operatorname{cosec}^2\theta.d\theta = -\cot\theta + c = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c.$

**EXAMPLE – 08 :** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x} = ?$

**SOLVE :** ধরি, $\sqrt{x} = z \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz \Longrightarrow dx = 2\sqrt{x}.dz = 2z.dz.$

$\therefore I = \int \frac{2z.dz.}{z^2+z} = 2\int \frac{dz.}{z+1} = 2\ln|z+1| + c = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$

**EXAMPLE – 09 :** $\int \frac{x.dx}{x^4+1} = ?$

**SOLVE :** $I = \int \frac{x.dx}{x^4+1} = \int \frac{xdx}{(x^2)^2+1}$ awi, $x^2 = z$ তাহলে, $2x\,.dx = dz \Longrightarrow x.dx = \frac{1}{2}\,dz$

$\int \frac{x.dx}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}z + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2 + c$

**EXAMPLE – 10 :** $\int \frac{3e^{2x}}{1+e^{4x}}\ dx = ?$

**SOLVE :** $I = \int \frac{3e^{2x}}{1+e^{4x}}\ dx = 3\int \frac{e^{2x}}{1+(e^{2x})^2}$

ধরি, $e^{2x} = t$, তাহলে, $e^{2x}\,.2.\,dx = dt \Longrightarrow e^{2x}.\,dx = \frac{1}{2}dt \Longrightarrow 3e^{2x}.\,dx = \frac{3}{2}dt$

$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}\tan^{-1} t + c = \frac{3}{2}\tan^{-1} e^{2x} + c$

**EXAMPLE – 11 :** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \ ?$

$\int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}} + c$ (**Ans**:)

**EXAMPLE – 12 :** $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\ dx = ?$

**SOLVE :** ধরি, $x = a\tan^2 x\theta$, Zvn‡j, $dx = a\,2\tan\theta\,.\sec^2\theta.\,d\theta$

$\therefore I = \int \sin^{-1}\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a\sec^2\theta}}.\,2a\tan\theta\,.\sec^2\theta.\,d\theta = \int \sin^{-1}.\sin\theta\ \ 2a\tan\theta\,.\sec^2\theta\,.d\theta$

$= 2a\int \theta\,.\tan\theta.\sec^2\theta\,.d\theta$

$I = 2a\theta.\int \tan\theta\,.\sec^2\theta\,.d\theta - \int\left[\frac{d}{du}(2a\theta)\int \tan\theta\,.\sec^2\theta\,.d\theta\right]$

$= 2a\theta\,.\frac{1}{2}\tan^2\theta - \int 2a.\frac{1}{2}\tan^2.\,d\theta = a\theta\tan^2\theta - a\int(\sec^2\theta - 1)\,d\theta$

$= a\theta\,.\tan^2\theta - a(\tan\theta - 1) + c = a.\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\,.\frac{x}{a} - \sqrt{ax} + a + c$

$= x\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + a + c$ (**Ans**:)

**EXAMPLE – 13 :** $\int \frac{2x\tan^{-1}x^2}{1+x^4}\ dx = ?$

**SOLVE :** awi, $\tan^{-1}x^2 = u$ Zvn‡j, $\frac{1}{1+x^4}\ 2x.\,dx = du \Longrightarrow \frac{2x}{1+x^4}\ dx = du$

$\therefore I = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\tan^{-1}x^2)^2 + c$ (**Ans**:)

**EXAMPLE – 14 :** $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = ?$

**SOLVE :** $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\tan^2 + 4}$

ধরি, $\tan x = u$, তাহলে, $\sec^2 x.\,dx = du$

$= \int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) + c$

**EXAMPLE – 15 :** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x - 1}} = ?$

**SOLVE :** $I = \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x-1}} = \int \frac{\sec^2 x\,.dx}{\sqrt{\tan x-1}}$

ধরি, $\tan x - 1 = u \Longrightarrow \sec^2 x\,.\,dx$

$\therefore I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{\tan x - 1} + c$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 16 :** $\int \frac{dx}{1+\tan x} = ?$

**SOLVE :** $I = \int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{dx}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$

ধরি, $\cos x = l\frac{d}{dx}$ (হর) $+ m$ (হর)

$= l(\sin x + \cos x) + m(\cos x + \sin x) = (m - l)\sin x + (l + m)\cos x$

$\sin x$ I $\cos x$ এর সহগ সমীকৃত করে, $m - l = 0 \Longrightarrow m = l$

Ges $m + l = 1 \Longrightarrow 2m = 1 \Longrightarrow m = \frac{1}{2}\ \therefore l = \frac{1}{2}$

$\therefore I = \int \frac{\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)}dx + \frac{1}{2}\int dx$

$= \frac{1}{2}\ln(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}x + c$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 17 :** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

**SOLVE :** $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ awi, $x = a\tan\theta \Longrightarrow dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2 + a^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\ ; \tan\theta = \frac{x}{a}\ ; \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^3\sec^3\theta\, d\theta} = \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\,.\,d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta + c = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$

**EXAMPLE – 18 :** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = ?$

**SOLVE :** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}dx$ [ je I ni‡K $\sqrt{1+x}$ Øviv ¸Y K‡i]

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x - I' + c_1$$

এখানে, $I' = \int \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ awi, $1 - x^2 = u$ Zvn‡j, $-2x.dx = du \Longrightarrow x - dx = -\frac{1}{2}du$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + c_2$

$\therefore I = \sin^{-1}x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + c_1 + c_2 = \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 19 :** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = ?$

**SOLVE :** $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ awi, $x = \frac{1}{t}$ তাহলে, $dx = -\frac{1}{t^2}dt.$

$\therefore I = \int \frac{-\frac{1}{t^2}.dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^4}-1}} = \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{1-t^4}} = -\int \frac{t.dt}{\sqrt{1-t^4}}$ **পুনরায় ধরি,** $t^2 = u$ তাহলে, $2t.dt = du$

$\therefore I = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\sin^{-1}u + c$

$= -\frac{1}{2}\sin^{-1}t^2 + c = -\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{x^2} + c = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{x^2} + c$

**EXAMPLE – 20 :** $\int e^x \tan e^x \sec^2 e^x\,dx = ?$

**SOLVE :** g‡b Kwi, $I = \int e^x \tan e^x \sec^2 e^x\,dx$

ধরি, $z = \tan e^x \;\; \therefore dz = \sec^2 e^x\, e^x dx \implies I = \int z\,dx = \frac{1}{2}z^2 + c = \frac{1}{2}\;(\tan x)^2 + c.$

**EXAMPLE – 21 :** $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = ?$

**SOLVE :** $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x^2+6x+9)+16} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+(4)^2} = \frac{1}{4}\;\sin^{-1}\frac{x+3}{4} + c\;.$

**EXAMPLE – 22 :** $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}} = ?$

**SOLVE :** এখানে, 2 ও 4 এর ল.স.গু 4 . ধরি , $x = u^4 \Rightarrow dx = 4u^3du$

$I = \int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}} = \int \frac{4u^3du}{u^2-u} = 4\int \frac{u^2}{u-1}du = 4\int \frac{u(u-1)+(u-1)+1}{u-1}du$

$= 4\int u\,du + \int du + \int \frac{du}{u-1} = 2u^2 + u + \ln(u-1) + c$

$= 2\sqrt{x} + x^{1/4} + \ln\left(x^{1/4} - 1\right) + c$

**EXERCISE :**

01. $\int \frac{2x\,\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}} = ?$ **Ans**: $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2)^2$ 02. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin x)^2} = ?$ **Ans**: $\frac{1}{1-\sin x}$

03. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = ?$ **Ans**: $\ln|e^x + e^{-x}|$

04. $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)(e^x + \ln x)dx$ **Ans**: $\frac{1}{2}(e^x + \ln x)^2$

05. $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx = ?$ **Ans**: $5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \sqrt{5-x^2} + c$

06. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3+4}} = ?$ **Ans:** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3+4}-2}{\sqrt{x^3+4}+2}\right|$

07. $\int \frac{d}{16-4x^2} = ?$ **Ans:** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$

08. $\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx = ?$ **Ans:** $tan^{-1}(x^3) + c$

09. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}dx = ?$ **Ans:** $\frac{1}{3}ln(e^{3x}-1) + c$

## TYPE-03

### প্রমিত সমাকলন

$$\int \frac{dx}{(cx+d)\sqrt{ax+b}} = ? \quad [a \neq 0, \quad c \neq 0]$$

ধরি, $ax + b = z^2$ তারপর অগ্রসর হও।

$I = \frac{2}{c}\int \frac{z.dz}{\left(a\frac{z^2-d}{c}+b\right)z} = 2\int \frac{dz}{az^2+(bc-ad)}$

**EXAMPLE – 01 :** $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = ?$

**SOLVE :** ধরি, $1 + x = z^2 \Longrightarrow dx = 2z.dz.$ এবং $x + 2 = z^2 + 1$

$I = \int \frac{2z.dz}{(z^2+1)z} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(\sqrt{1+x}) + c$

## TYPE-04

### অংশক্রমে সমাকলন

$\frac{d}{dx}(u\, v_1) = \frac{du}{dx}v_1 + u.\frac{dv_1}{dx}$ যেখানে , $u = f(x)$, $v_1 = g(x)$ সমাকলন করে,

$uv_1 = \int\left(\frac{du}{dx}v_1\right)dx + \int\left(u.\frac{dv_1}{dx}\right).dx$ ধরি, $\frac{dv_1}{dx} = v \Rightarrow v_1 = \int vdx$

$u\int vdx = \int\left(\frac{du}{dx}.\int udx\right)dx + \int uv.dx$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\int uv.dx = u\int v.dx - \int\left[\frac{du}{dx}\int vdx\right]dx}$$

$u \longrightarrow$ 1st function f(x) , $v \longrightarrow$ 2nd function g(x) , যেভাবে u ও v কে ধরবে:

LIATE ⟶ ৫ টা function - কে তাদের প্রথম অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

L⟶ Logarithmic, I⟶Inverse, A⟶Arithmatic ,T⟶ Trigometric, E ⟶ Exponential

LI হতে L⟶ u, I⟶ v , IA হতে I⟶ u, A⟶ v ; AT হতে A⟶ u, T⟶ v

TE হতে T⟶ u, E⟶ v ; LT ⟶? , IE⟶ ?, TI⟶?

**EXAMPLE – 01 :** (i) $\int xe^x dx$ এখানে , x $\longrightarrow$ Arithmatic$\rightarrow u = f(x) = x$

$e^x \longrightarrow$ Exponential $\longrightarrow v = g(x) = e^x$.

$$\therefore I = x\int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right]dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

**EXAMPLE – 02 :** $\int \ln x\,.\,dx$ এখানে $x^0 = 1 \longrightarrow v, \ln x \longrightarrow u$

$$= \ln x\int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\right]dx = x\ln x - \int\frac{1}{x}.x.dx = x\ln x - x + c$$

**EXAMPLE – 03 :** $\int \tan^{-1}x.dx. = \tan^{-1}x\int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int dx\right]dx$

$$= x\,\tan^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^2}dx. = x\,\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

**EXAMPLE – 04 :** $I = \int e^x \sec x\,(1+\tan x)dx$

**SOLVE :** $\int e^x \sec x.dx + \int e^x \sec x.\tan x\ .dx$

$$= \sec x\,.\,e^x - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sec x\,).\int e^x\ .dx\right\}dx + \int e^x\sec x\,.\tan x.dx$$

$$\left[\therefore\ \int uv.dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v.dx\right\}dx \text{ এখানে}, u = \sec x\,, v = e^x\right]$$

$$= e^x.\sec x\ - \int e^x\sec x\,.\tan x.dx + \int e^x\sec x\,.\tan x.dx = e^x.\sec x\ + c$$

[$c_1 + c_2 + c_3 \ldots\ldots\ldots..c_n = c$ যেখানে $c_1 + c_2 \ldots\ldots$ যেকোন ধ্রুবসংখ্যা এবং c তাদের সমষ্টি। ]

**EXAMPLE – 05 :** $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

**SOLVE :** $I = \int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx\ = \int e^x\left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

ধরি, $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\quad \therefore I = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + c = \frac{e^x}{(x+1)} + c$$

**EXAMPLE – 06 :** $\int e^x\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\ dx$

**SOLVE :** $I = \int e^x\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\ dx$

awi, $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-2x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{2x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x}{(x+1)^2}$

$\frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$ ; $2x = A(x+1) + B = Ax + A + B; A = 2,\ A + B = 0 \Longrightarrow B = -2$

$$I = \int e^x\left\{1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right\}dx = \int e^x\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right\}dx$$

ধরি, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ; $f'(x)=\frac{(x+1)(1-0)-(x-1)(1+0)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

$\therefore I=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^x f(x)+\mathbf{c}=e^x\frac{x-1}{x+1}+c$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 07 :** $\int e^x \cos x\,.\,dx$

**SOLVE :** $I=\int e^x\cos x\,.\,dx=\cos x\int e^x dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\cos x)\int e^x dx\right\}dx$

[ m~Î : $\int uv.\,dx=u\int v.\,dx-\int\left\{\frac{du}{dx}\int v.\,dx\int dx\right]$

$=\cos x\, e^x-\int -\sin\, x.\,e^x.\,dx=e^x.\cos x+\sin x\,.\int e^x.\,dx-\int\cos x.\,e^x.\,dx$

$=e^x\cos x+e^x.\sin x-I\Rightarrow 2I=e^x(\sin x+\cos x)\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c$

**EXAMPLE – 08 :** $\int e^{2x}\cos e^x\,.\,dx=?$

**SOLVE :** $\int e^{2x}\cos e^x\,.\,dx$ awi, $e^x=t,\ e^x=dx=dt$

$=\int t.\cos t\,.\,dt=t.\sin t-\int\left\{\frac{d}{dt}t\int\cos t\,.\,dt=t.\sin t-\int\sin t\,.\,dt\right.$

$=t.\sin t+\cos t+c=e^x\sin e^x+\cos e^x+c$

**EXERCISE :**

01. $\int e^{-2x}\left(\frac{1}{x}-2\ln x\right)dx=?$ **Ans**: $e^{-2x}\ln|x|+c$

02. $\int e^x\{\tan x-\ln(\cos x)\}dx=?$ **Ans**: $e^x\ln(\sec x)+c$

03. $\int\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}dx=?$ **Ans**: $\frac{e^x}{x+2}+c$

04. $\int e^{-x}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}dx$ **Ans**: $-\frac{e^{-2x}}{x}+c$

05. $\int e^x\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$ **Ans**: $\frac{e^{2x}}{x-1}+c$

## TYPE-05

$\int \sin^m x\cos^n x dx=?$

শর্ত ঃ (১) যখন m ও n উভয় বিজোড় ঃ sinx=u অথবা cosx=u ধরে অগ্রসর হবে ।

(২) যখন m জোড় ও n বিজোড় ঃ sinx=u ধরে অগ্রসর হবে ।

(৩) যখন m বিজোড় ও n জোড় ঃ cosx=u ধরে অগ্রসর হবে ।

(৪) যখন m ও n উভয় জোড়ঃ $\sin^m x\cos^n x$ কে গুনিতক কোনের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে পরিণত করিয়া অগ্রসর হবে।

**EXAMPLE – 01 :** $\int \sin^2x\cos^5x dx = ?$

**SOLVE :** $I = \int \sin^2x(1-\sin^2x)^2\cos x dx = \int(\sin^2x - 2\sin^4x + \sin^6x)d(\sin x)$

$= \frac{\sin^3x}{3} - \frac{2\sin^5x}{5} + \frac{\sin^7x}{7} + c$ [$\therefore$ dsinx= cosxdx]

## TYPE-06

**আংশিক ভগ্নাংশ**

**EXAMPLE – 01:** $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx = ?$

**SOLVE :** ধরি, $\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$ [ প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে ]

$\Rightarrow 2x-1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)$

$\Rightarrow 2x-1 = A(x^2-3x+2) + B(x^2-2x) + C(x^2-x)$

$= (A+B+C)x^2 - (3A+2B+C) + 2A$

$2A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$

x এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $-(3A+2B+C) = 2$

$$\Rightarrow -3\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 2B - C = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - 2B - C = 2 \Rightarrow -C - 2B = 2 - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -C - 2B = \frac{4-3}{2} \Rightarrow -C - 2B = \frac{1}{2} \Rightarrow -C = \frac{1}{2} + 2B \Rightarrow C = -\frac{1}{2} - 2B$$

$x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A+B+C = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + B - \frac{1}{2} - 2B = 0$

$$\Rightarrow -B - 1 = 0 \Rightarrow B = -1 \quad \therefore C = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

$\therefore \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2} \therefore \int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2}$

$\therefore \int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx = -\frac{1}{2}\ln x - \ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x-2) + c$

**EXAMPLE – 02:** $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$ এর মান নির্ণয় কর।

**SOLVE :** ধরি, $I = \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$ এবং $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\therefore x \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)(A+B)x^2 - (B-C)x + A - C \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i) এর $(x-1) = 0$ অর্থাৎ $x = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 = A(1+1) + 0 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

আবার, $x = 0$ বসিয়ে আমরা পাই, $0 = A - C \Rightarrow C = A = \frac{1}{2}$

(i) এর উভয়পক্ষ থেকে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{2}$

$\therefore I = \int \left\{\frac{\frac{1}{2}}{X-1} + \frac{\frac{-x}{2}+\frac{1}{2}}{(x^2+1)}\right\} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c.$

**EXAMPLE – 03:** $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$

**SOLVE** : ধরি, $I = \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$ Ges $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+2)}$

$\Longrightarrow x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$

$= A(x^2+x-2) + Bx + 2B + C(x^2-2x+1)$

$= (A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + C$

সহগ সমীকৃত করে পাই, $-2A + 2B + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$A + B - 2C = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$A + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (iii)$

$\Longrightarrow A = \frac{2}{9} \therefore B == \frac{1}{3} \;\therefore C = -\frac{2}{9}$

$\therefore I = \int \frac{x}{(x-1)^2(x-2)} dx = \int \frac{\frac{2}{9}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-\frac{2}{9}}{x+2} dx$

$= \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} - \frac{2}{9}\ln|x+2| + c = \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)} + c$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 04:** $\int \frac{x^2-1}{x^2-4} dx = ?$

**SOLVE:** $I = \int \frac{x^2-1}{x^2-4} dx = \int \frac{x^2-4+3}{x^2-4} dx = \int \frac{x^2-4}{x^2-4} dx + \int \frac{3}{x^2-4} dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2-2^2}$

$= x + \frac{3}{2.2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c = x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ (**Ans**: )

**EXERCISE :**

01. $\int \frac{x^2dx}{x^2-4} = ?$ **Ans**: $x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

02. $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx = ?$ **Ans**: $3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$

03. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)} = ?$ **Ans**: $\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

04. $\int \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)} dx = ?$ **Ans**: $\frac{5}{6}\ln|1-2x| - \frac{4}{3}\ln|1+x|$

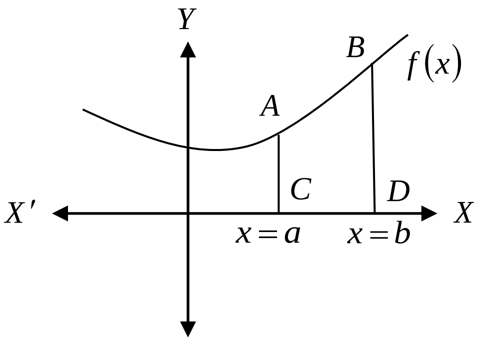
## wbw`©ó

➔ **নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল (Difinite Integral)ঃ**

জ্যামিতিক, প্রয়োজনে এবং ইন্টিগ্রাল নির্ণয় প্রক্রিয়ার প্রয়োগকালে অনেক সময় স্বাধীন চলকের দুইটি মানের জন্য একটি ফাংশনের ইন্টিগ্রালের পার্থক্য নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়। ধরি, স্বাধীন চলক $x$ এর দুইটির মান $a$ ও $b$ এবং $f(x)$ একটি ইন্টিগ্রেশন যোগ্য ফাংশন, যাহার $\int f(x)dx = \emptyset(x)$ অর্থাৎ $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $\emptyset(x)$.এখন $\emptyset(a)$ এবং $\emptyset(b)$ যথাক্রমে $x = a$ এবং $x = b$ বিন্দুতে $\emptyset(x)$ অর্থাৎ $\int f(x)dx$ এর দুইটি মান । এই পার্থক্য $[\emptyset(b) - \emptyset(a)]$ কে $[a,b]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল বলা হয় । ইহা বুঝাবার সংক্ষিপ্ত প্রতীক নিম্নরূপ ঃ $\int_b^a f(x)dx = [\emptyset(x)]_b^a = \emptyset(a) - \emptyset(b)$, এখানে $a$ নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালের নিম্নসীমা এবং $b$ উহার উর্ধ্বসীমা নামে পরিচিত।

**নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল বলা হয় কেন ?**

যদি $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $\emptyset(x) + c$ হয়, তবে $\int_b^a f(x)dx = [\emptyset(x) + c]_b^a = \emptyset(b) + c - \emptyset(a) - c = \emptyset(b) - \emptyset(a)$ এখানে দেখা যাচ্ছে যে, অনির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালের মত নির্দিষ্ট কোন ধ্রুবক পদ যোগ করা হয়নি। ইহাতে $c$ অপসারিত হয়েছে। সুতরাং $\int_b^a f(x)dx = \emptyset(a) - \emptyset(b)$ নির্দিষ্ট বলিয়া ইহাকে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল বলা হয়।




**$\int_b^a f(x)dx$ এর জ্যামিতিক তাৎপর্য ঃ**

**$y = 0$ বা, $x$ – অক্ষ, $x = a$, $x = b$ সরলরেখ তিনিট এবং**

**$y = f(x)$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে**

$\int_b^a f(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়

সুতরাং ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_b^a f(x)dx$

$\int f(x)dx$ এর মান নির্ণয় করতে নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হইতে হবে।

(i) প্রথমে $\int f(x)dx$ অনির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল নির্ণয় করতে হইবে, ধরি উহা $\emptyset(x)$ ।

(ii) এখন $\emptyset(x)$ এ $x$ এর পরিবর্তে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালের উর্ধ্বমীমা $b$ বসাইয়া $\emptyset(b)$ এবং $x$ এর পরিবর্তে নিম্নসীমা $a$ বসাইয়া $\emptyset(a)$ নির্ণয় করতে হবে।

(iii) শেষে $\emptyset(a)$ বিয়োগ করলেই $\int_b^a f(x)dx$ নির্ণয় হবে।

**নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালের সাধারণ ধর্ম**

নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মগুলো নিম্নে আলোচনা করা হলঃ (i) $\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(u)du$

প্রমাণ ঃ ধরি, $\int f(x)dx = F(x)$ এবং $\int_b^a f(u)du = F(u)$

$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$ এবং

$\int_b^a f(u)du = [F(u)]_a^b = F(b) - F(a) \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

সুতরাং (i) ও (ii) হতে পাই , $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(u)du$ (প্রমাণিত )

(iii) $\int_b^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

প্রমাণঃ ধরি, a – x = u বা, x = a –u $\therefore dx = -du$ যখন x = 0 তখন u = a সুতরাং

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-u)(-du) = -\int_a^0 f(a-u)du = \int_0^a f(a-u)du$ [(ii) এর সাহায্য ]

$= \int_0^a f(a-x)dx$[(i) এর সাহায্য হয়। ]

সমাধান ঃ

**EXAMPLE – 01 :** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর ।

**SOLVE :** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cos x \sqrt{\sin x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x).\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$

মনেকরি, $\sin x = z \therefore \cos x\,dx = dz$ . $x = 0$ n‡j, $z = \sin 0 = 0$ ; $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^1 (1-z^2)\sqrt{z}\,dx = \int_0^1 \left(\sqrt{z} - z^{5/2}\right)\sqrt{z}dx = \left[\frac{(z)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(z)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}\{(1)^{3/2} - (0)^{3/2}\} - \frac{2}{7}\{(1)^{7/2} - (0)^{7/2}\} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$ (Ans: )

**EXAMPLE – 02 :** $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর|

**SOLVE :** $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \int_1^{e^2} \frac{1}{(1+\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}dx$

$= \int_1^{e^2} \frac{1}{(1+\ln x)^2} d(1+\ln x) = \left[\frac{1}{(1-2)(1+\ln x)^{2-1}}\right]_1^{e^2}$

$= -\left[\frac{1}{1+\ln x}\right]_1^{e^2} = -\left\{\frac{1}{1+\ln e^2} - \frac{1}{1+\ln 1}\right\} = -\left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+0}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (Ans: )

**EXAMPLE – 03 :** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx = ?$

**SOLVE :** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}.\sin^2 x.\sin x.dx$

$= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{\frac{1}{2}}.(1-\cos^2 x)\sin x.dx = \int_0^{\pi/2}\left(\cos^{\frac{1}{2}}x - \cos^{\frac{5}{2}}x\right)\sin x.dx$

awi, $\cos x = u \Longrightarrow -\sin x.dx = du \therefore \sin x\,dx = -dx$

hLb, $x = 0$, $u = 1$; আবার hLb, $x = \frac{\pi}{2}$ , $u = 0$

$\therefore I = -\int_1^0 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}\right) du = -\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]_1^0 = -\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}\right]_1^0$

$= -\left[0 - 0 - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} \times 1^{\frac{7}{2}}\right] = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$ (**Ans**: )

EXERCISE :

01. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = ?$ $\left[\textbf{Ans}: \mathbf{1\frac{3}{5}}\right]$

EXAMPLE – 04 : $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{9-2x^2}} = ?$

SOLVE : ধরি, $I = \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{9-2x^2}}$

ধরি, $9 - 2x^2 = u$ তাহলে, $(0 - 4x)dx = du \Longrightarrow x.dx = -\frac{1}{4}\, du$

যখন $x = 0,\ u = 9$ আবার যখন $x = 2\ , u = 1$

$\therefore I = \int_9^1 \frac{-\frac{1}{4}du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\int_9^1 u^{-\frac{1}{2}}\, du = -\frac{1}{4}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_9^1 = -\frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}\right]_9^1 = -\frac{1}{2}\,[1-3] = 1$ (**Ans**: )

EXERCISE :

01. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}dx = ?$ $\left[\textbf{Ans}: \mathbf{\frac{7}{18}}\right]$

EXAMPLE – 05 : $\int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = ?$

SOLVE : ধরি, $I = \int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$, পুনরায় ধরি, $1 + e^x = u$

তাহলে, $(0 + e^x)dx = du \Longrightarrow e^x.dx = du$

যখন $x = 0,\ u = 2$ আবার, যখন $x = \ln 2\ , u = 3$

তাহলে, $I = \int_2^3 \frac{du}{u} = [\ln u]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$ (Ans: )

EXAMPLE – 06 : $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}\, dx = ?$

SOLVE : awi, $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}\, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\sin^7 x} \cos x\, .\, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^7 x} \cos x\, .\, dx$

পুনরায় ধরি, $\sin x = u$ ; তাহলে, $\cos x\, dx = du$

যখন $x = \frac{\pi}{3},\ u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ আবার, যখন $x = \frac{\pi}{2}\ , u = 1$

$\therefore I = \int_{\sqrt{3}/2}^1 \left(\frac{1-2u^2+u^4}{u^7}\right) du = \int_{\sqrt{3}/2}^1 (u^{-7} - 2u^{-5} + u^{-3})du = \left[\frac{u^{-6}}{-6} - 2\frac{u^{-4}}{-4} + \frac{u^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1$

$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-6} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{32}{27} - 1 \times \frac{8}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{162}$ (**Ans**: )

**EXAMPLE – 07 :** $\int_1^{\sqrt{3}} x\ \tan^{-1} x dx = ?$

**SOLVE :** ধরি, $I = \int_1^{\sqrt{3}} x\ \tan^{-1} x dx$

পুনরায় ধরি,$x = v, \tan^{-1} x = u$ ; Zvn‡j, $I' = \int uv\, dx = u \int udx - \int \left\{\frac{du}{dx} \int v.dx\right\} dx$

$= \tan^{-1} x . \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2} . \frac{x^2}{2} . dx$

$= \frac{1}{2} x\ \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx. = \frac{1}{2} x\ \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\ \tan^{-1} x + c$

তাহলে, $I = [I']_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}[x \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x + 2c]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} . \tan^{-1}\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} . \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 1\right]$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(2\sqrt{3}-1)\pi}{6} - \left(\sqrt{3}+1\right)\right\}$ (Ans: )

**EXAMPLE – 08 :** $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

**SOLVE :** ধরি, $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ; তাহলে, $dx = a \cos\theta . d\theta$

যখন, $x = 0,\ \ \theta = 0$ আবার, $x = a,\ \ \theta = \frac{\pi}{2}$

তাহলে,$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta} . a \cos\theta . d\theta = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} a\sqrt{1 - \sin^2\theta} . a \cos\theta . d\theta$

$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ . \cos\theta . d\,\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\ \ d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times 0 - 0\right] = \frac{a^2\pi}{4}$ (Ans: )

**EXERCISE :**

01. $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। $\quad$ [**Ans**: **4 π**]

02. $\int_0^4 y\sqrt{4 - y}\, dy$ এর মান নির্ণয় কর| $\quad$ $\left[\textbf{Ans}: \frac{\mathbf{128}}{\mathbf{15}}\right]$

03. $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4 - x^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর| $\quad$ $\left[\textbf{Ans}: \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right]$

**EXAMPLE – 09 :** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x} = ?$

ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}$ ……………. (i) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\cos x + \sin x}$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\cos x + \sin x}$

বা, $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ বা, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ বা, $I = \pi/4$ অর্থাৎ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x} = \pi/4$

## wbw`©ó †hvMR Gi

ফিরে দেখা অংশ :

কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঃ

মনে করি, $y = f(x), x -$অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ কোটি দ্বারা আবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A_1$; $A_1$এর মান নির্ণয় করতে হবে। $f(x)$ফাংশনটি $(a , b)$ব্যবধিতে সীমিত মানের একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন। $y = f(x)$বক্ররেখা x-অক্ষ, কোটি QLএবং PN-দ্বারা আবদ্ধ QLNP=A-এর ক্ষেত্রফল বিবেচনা করি। OL= a একটি নির্দিষ্ট রাশি এবং ON = x রাশিটি পরিবর্তনশীল । যেহেতু, x একটি পরিবর্তনশীল রাশি, $A_1$ সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলও পরিবর্তনশীল এবং এর মান x এর মানের উপর নির্ভরশীল।

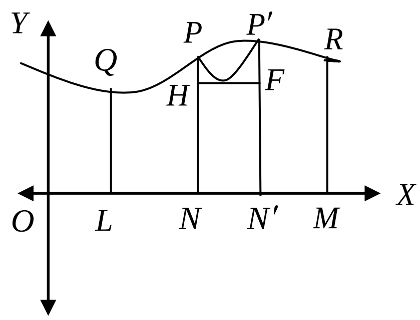
যখন x -এর মান $\delta x (= NN')$পরিমাণ বৃদ্ধি পায়

তখন A- এর মানের আনুষঙ্গিক বৃদ্ধি $\delta A = PNN'P'$

যদি $\delta x$ ব্যবধিতে $f(x_1)$ এবং $f(x_2)$যথাক্রমে

বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোটি হয় তবে

$x \le x_1 \le x + \delta x$ এবং $x \le x_2 \le x + \delta x$ ;




স্পষ্টতই,$\delta A$ এর ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্র $HN'$অপেক্ষা বৃহত্তর ও আয়তক্ষেত্র $FN'$অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।অর্থাৎ $f(x_2)\delta x < \delta A < f(x_1).\delta x \Rightarrow f(x_2) < \frac{\delta A}{\delta x} < f(x_1)$

যখন, $\delta x \longrightarrow 0, f(x_1) \longrightarrow f(x)$ ও $f(x_2) \longrightarrow f(x)$ এবং $\underset{\delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{dA}{dx}$

অতএব, $\frac{dA}{dx} = f(x)$, যোগজীকরণ করে পাই, $A = \int f(x)dx = F(x) + C$

এখন, $x = a$ হলে, $A = 0$ এবং $x = b$ হলে, $A = A_1 \therefore A_1 = F(b) + C$

এবং $0 = F(a) + C \therefore A_1 = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$

অতএব, নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx , y = f(x)$ বক্ররেখা,

x- অক্ষ ও দুইটি নির্দিষ্ট কোটি $x = a$ এবং $x = b$ এর দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে ।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ একই প্রকারে দেখানো যায় যে, $\int_a^b xdy$ নির্দিষ্ট যোগজটি, যে কোনো বক্ররেখা, y- অক্ষ এবং দুইটি প্রদত্ত কোটি $y = c$, $y = d$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

**EXAMPLE – 01** :$4x^2 + 9y^2 = 36$ অথবা $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রেফল নির্ণয় কর।

$= 4\int_0^3 ydx = 4\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\, dx = \frac{8}{3}\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}dx$ এখন, $x = 3\sin\theta$ হলে,

$dx = 3\cos\theta\, d\theta$ এবং $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2\theta} = 3\cos\theta , x = 0$ হলে,

$\theta = 0$ এবং $x = 3$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} 3\cos\theta . 3\cos\theta\, d\theta = 12\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= 12\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = 6\pi$ (**Ans**:)

**EXAMPLE – 02:** $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = a^2 \implies y^2 = a^2 - x^2 \implies y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

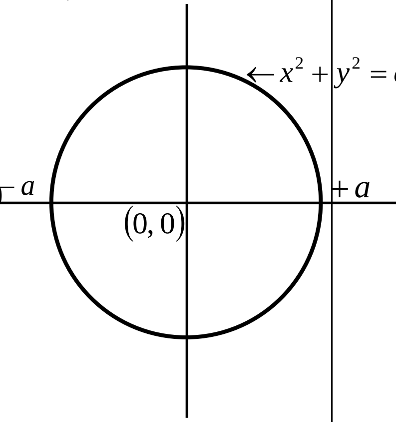
ফাংশনটি অব্যাক্ত ফাংশন সুতরাং আমরা একে প্রথমে ফাংশনে পরিণত করব।

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ; $|x| \leqslant a$ এর জন্য এটা একটা ফাংশন, ফাংশনটির ব্যাবধি $-a \leq x \leq a$

প্রথমে চর্তুভাগে ফাংশনটি ব্যাবধি $0 \leqslant x \leqslant a$

তাহলে আমরা বলতে পারি,

$A_1 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx$ যা প্রথম চুর্তভাগে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, এরূপ চারটা চর্তুভাগে চারটা সমান আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টিই হবে উক্ত বৃত্তদ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।




ধরি, $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ ; তাহলে, $dx = a\cos\theta\,.\,d\theta$

যখন, $x = 0,\ \ \theta = 0$ আবার, $x = a,\ \ \theta = \frac{\pi}{2}$

তাহলে,$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.\,a\cos\theta\,.\,d\theta = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} a\sqrt{1 - \sin^2\theta}\,.\,a\cos\theta.\,d\theta$

$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ .\cos\theta\,.\,d\,\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\ \ d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\theta)d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times 0 - 0\right] = \frac{a^2\pi}{4}$ (Ans:)

তাহলে, $A = 4A_1 = 4 \times \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^2$ বর্গ একক ।

**EXAMPLE – 03 :** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত ফাংশন, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যা একটি অব্যাক্ত ফাংশন ।

$\therefore y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ; তাহলে, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

যা $|x| \leqslant a$ এর জন্য y একটি ফাংশন যার ব্যাবধি প্রথম দুই চর্তুভাগে $-a \leq x \leq a$ অর্থাৎ প্রথম চতুর্ভাগে ০ থেকে a

$A_1 = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

ধরি, $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ ; তাহলে, $dx = a\cos\theta\,.\,d\theta$

যখন, $x = 0,\ \ \theta = 0$ আবার, $x = a,\ \ \theta = \frac{\pi}{2}$

তাহলে,$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,.\,a\cos\theta\,.\,d\theta = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} a\sqrt{1 - \sin^2\theta}\,.\,a\cos\theta.\,d\theta$

$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ .\cos\theta\,.\,d\,\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\ \ d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\theta)d\theta$

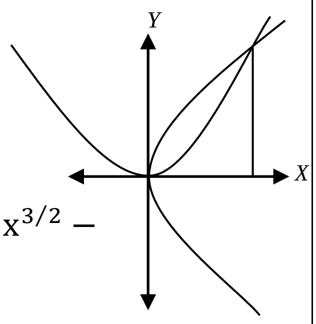
$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times 0 - 0\right] = \frac{a^2\pi}{4}$

$A_1 = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\,.\frac{a^2\pi}{4} = \frac{ab\pi}{4}$

তাহলে চারটি চতুর্ভাগে উক্ত ফাংশন চারটি সমান ক্ষেত্রফল তৈরী করে। ফলে মোট আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$A = 4A_1 = 4.\frac{ab\pi}{4} = ab\pi$ বর্গএকক।

**EXAMPLE – 04:** দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}\, a^2$ .




**SOLVE :** $x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a}$ হতে y এর মান $y^2 = 4ax$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64a^3x \Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a$

এখানে x এর সীমা ০ থেকে 4a এবং $y_1 = 2\sqrt{a}\,\sqrt{x}$ এবং $y_2 = \frac{1}{4a}x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a}(y_1 - y_2)dx = \int_0^{4a}\left(2\sqrt{a}\,\sqrt{x} - \frac{1}{4a}x^2\right)dx = \left[2\sqrt{a}\,.\frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{1}{4a}\,.\frac{x^2}{3}\right]_0^{4a}$

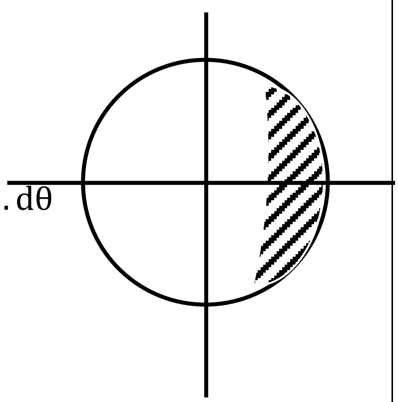
$= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{3/2} - \frac{1}{12a}\,.64a^3 = \frac{4\sqrt{a}}{3} \times 8a\sqrt{a} - \frac{16}{3}a^2 = \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

**EXAMPLE – 05 :** $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 25$

যার কেন্দ্র $(0\,,0)$এবং ব্যাসার্ধ ৫ একক এবং রেখার সমীকরণ, $x = 3$ চিত্র হতে, $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

$x = 3$ এবং $x = 5$ ব্যাবধির মধ্যে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র মোট দুটি প্রথম চর্তুভাগে ও চতুর্থ চর্তুভাগে। বৃত্ত ও রেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = 2A_1 = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}$



ধরি, $x = 5\sin\theta$ ; তাহলে, $dx = 5\cos\theta\ .d\theta$

যখন, $x = 3, \quad \theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ ; যখন, $x = 5, \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore A = 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\sin^2\theta}\,.5\cos\theta\,.d\theta = 2 \times 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,.d\theta$

$= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos^2\theta\,)d\theta = 25\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 25\left[\frac{\pi}{2} + 0 - \sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\,.\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}\right] = 25\ \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{12}{25}\right]$ বর্গএকক

**EXAMPLE –06 :** $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4x \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$

এবং সরল রেখার সমীকরণ, $y = x \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

(i) ও (ii) সমাধান করে, $x = 0, 4$; তাহলে নির্ণেয় ব্যাবধি $[0, 4]$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = পরাবৃত্তের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$\therefore A = \int_0^4[\sqrt{4x} - x]dx = \left[2.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{3} \times 8 - 8 = \frac{32-24}{3} = \frac{8}{3}$ বর্গএকক।

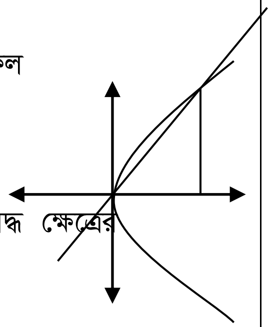
**EXAMPLE –07 :** $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4x \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$

এবং সরল রেখার সমীকরণ, $y = 2x \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

$(i)$ ও $(ii)$ সমাধান করে, $x = 0, 1$; তাহলে নির্ণেয় ব্যাবধি $[0, 1]$

নির্ণেয় আবদ্ধ ক্ষেত্রফল = পরাবৃত্তের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$= \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x)dx = \left[2.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{4}{3} - 1 - 0 + 0\right) = \frac{1}{3}$ বর্গ একক।

**EXAMPLE – ০৪ :** দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{6}\ a^2$ .

**SOLVE :** প্রদত্ত অধিবৃত্ত, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

স্থানাংকের অক্ষদুটি সমীকরণ, $x = 0,\ y = 0$ ; $x = 0$ হলে, $y = a$ ; $y = 0$ হলে, $x = a$

অধিবৃত্তের সমীকরণ হতে পাই, $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Longrightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$ [ বর্গ করে ]

তাহলে, প্রথম চর্তুভাগে, অধিবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^a (a + x - 2\sqrt{ax})dx$

$= \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a}\,.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a = a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{a}\,.a^{\frac{3}{2}} = \frac{3a^2}{2} - \frac{4a^2}{3} = \frac{(9-8)a^2}{6} = \frac{1}{6}a^2$ **(Showed)**

**EXERCISE :**

০১. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: 16π বর্গ একক]**

০২. $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: 6π বর্গ একক]**

০৩. $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্ত এবং $x = 5$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটি ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**Ans:** $\mathbf{2\left[9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{1} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}\right]}$

০৪. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**[Ans: $\frac{128}{3}$ বর্গ একক]**

০৫. $y^2 = x^2$ বক্ররেখা, x- অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 7$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**[Ans: 114 বর্গ একক]**

০৬. x- অক্ষ এবং $y = \sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**[Ans: 2 বর্গ একক]**

০৭. $y = 3\,x$ সরলরেখা, x- অক্ষ এবং কোটি $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।।

**[Ans: 6 বর্গ একক]**

০৮. $y = 4x^2$ ও $y = 4$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: $\frac{16}{3}$]**

০৯. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**[Ans: $\frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক]**