পাঠ-১

9.1 লিমিট (Limit)

গাণিতিক বিশ্লেষণে লিমিট একটি মৌলিক ধারণা। বিশেষ করে অন্তরকলন বিদ্যার ভিত্তি হচ্ছে লিমিট।

মনে করি, $f(x) = x^2$, সুতরাং, $f(1) = 1$, একে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান বলা হয়।

যদি $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $f(1) = \dfrac{0}{0}$, যা অনির্ণেয় এবং অর্থহীন। অন্যকথায়, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান বিদ্যমান নেই। যদি ফাংশনটিকে সরল করি অর্থাৎ $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} \Rightarrow f(x) = x + 1$ এবং তখন $x = 1$ বসালে $f(x)$ এর মান পাওয়া যায় কিন্তু $x = 1$ হলে $f(x)$ এর লব ও হরকে $x - 1$ অর্থাৎ, 0 (শূন্য) দ্বারা ভাগ করা বুঝায়, যা অর্থহীন এবং অসম্ভব। এই সমস্যা সমাধানকল্পে গণিতবিদগণ লিমিট (Limit) অবতারণা করেন। অর্থাৎ, $x = 1$ না ধরে 1 এর খুব কাছাকাছি মান নেওয়া হয়, তাহলে $x - 1$ এর মান অতীব ক্ষুদ্র বাস্তব সংখ্যা হলেও 0 (শূন্য) নয়, যা বাস্তব সংখ্যার নিয়মের ব্যতিক্রম ঘটে না।

যেমন: $x = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$ হলে, $f(x)$ এর মান যথাক্রমে $1.9, 1.99, 1.999, \ldots$ পাওয়া যায়। আবার, $x = 1.1, 1.01, 1.001, \ldots$ হলে, $f(x)$ এর মান যথাক্রমে $2.1, 2.01, 2.001, \ldots$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ, উভয় ক্ষেত্রেই চলরাশি x-এর মান নির্দিষ্ট সংখ্যা 1 এর সন্নিকটবর্তী হলে ফাংশন $f(x)$ এর মান নির্দিষ্ট সংখ্যা 2 এর সন্নিকটবর্তী হয়। এক্ষেত্রে 2 সংখ্যাটিকে প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর সীমাস্থ মান বা লিমিট বলা হয়।

চলরাশি x-এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর মান গ্রহণপূর্বক a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি একটি প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর সন্নিকটবর্তী হয়, তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের **লিমিট বা সীমাস্থ মান** বলা হয়। একে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

9.1.1 লিমিটের $(\varepsilon - \delta)$ সংজ্ঞা ($(\varepsilon - \delta)$ Defination of limit)

9.1 এর আলোচনা হতে পাই, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $x = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$ ইত্যাদির জন্য $f(x)$ ফাংশনের মানগুলি যথাক্রমে $1.9, 1.99, 1.999, \ldots \ldots$ ইত্যাদি। আবার, $x = 1.1, 1.01, 1.001, \ldots \ldots$ ইত্যাদির জন্য $f(x)$ ফাংশনের মানগুলি যথাক্রমে $2.1, 2.01, 2.001, \ldots$ ইত্যাদি।

স্পষ্টত : $x \to 1$ হলে, $f(x)$ এর সীমাস্থ মান 2.

অতএব, $|x - 1| = 0.1$ হলে, $|f(x) - 2| = 0.1$

$|x - 1| = 0.01$ হলে, $|f(x) - 2| = 0.01$

$|x - 1| = 0.001$ হলে, $|f(x) - 2| = 0.001$

এভাবে x-এর মান এবং 1 এর পার্থক্য যতই কমতে থাকবে $f(x)$ এর মান এবং 2 এর ব্যবধানও ততই কমতে থাকবে। এমতাবস্থায় $|f(x) - 2| < \varepsilon$ ধরলে (যেখানে ε পূর্ব নির্ধারিত ধনাত্মক ক্ষুদ্র রাশি) পাই,

$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow |x + 1 - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \delta$ যেখানে, $\delta = \varepsilon$.

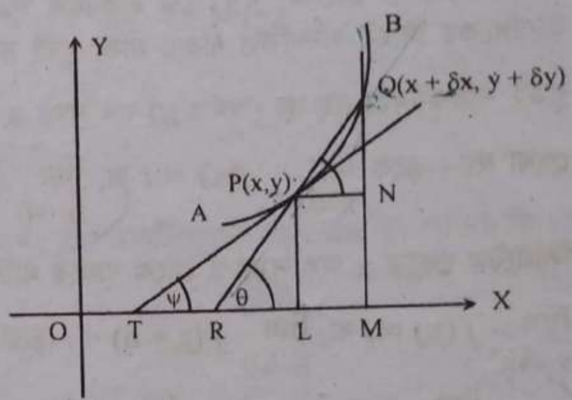
সুতরাং, কোনো ফাংশনের সীমাস্থ মানের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা প্রদান করা যায়।
পূর্ব নির্ধারিত কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি ε-এর জন্য যদি ε-এর ওপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি δ পাওয়া যায় যেন $|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta$, তবে l -কে $f(x)$ ফাংশনের সীমাস্থ মান বা লিমিট বলা হয়। একে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা: $|f(x) - l| < \varepsilon$
$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$
$\Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
$\Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

এবং $|x - a| < \delta$
$\Rightarrow -\delta < x - a < \delta$
$\Rightarrow a - \delta < x < a + \delta$
$\Rightarrow x \in (a - \delta, a + \delta)$

অর্থাৎ, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ বলতে বোঝায় $x \in (a - \delta, a + \delta)$ এর জন্য $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ হবে।

9.2 ঢাল (Slope)



মনে করি, $y = f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং AB বক্ররেখার লেখচিত্র। $P(x, y)$ ও $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ এই রেখার ওপর নিকটবর্তী দুইটি বিন্দু।
মনে করি, QP সরলরেখাকে বর্ধিত করলে তা x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle XRP = \theta$। এখন P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PL ও QM লম্ব আঁকি। আবার, P বিন্দু হতে QM এর ওপর PN লম্ব আঁকি।
এখন, $PN = LM = OM - OL = x + \delta x - x = \delta x$
এবং $NQ = MQ - MN = MQ - LP = y + \delta y - y = \delta y$

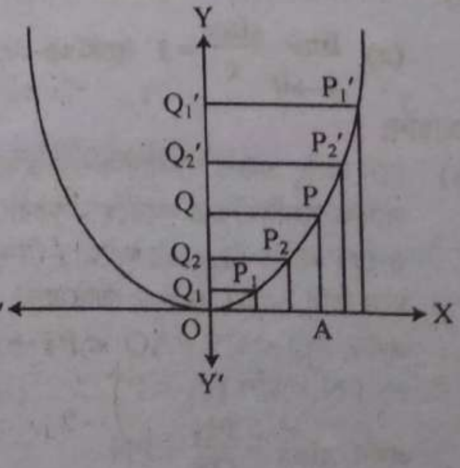
$$\angle NPQ = \angle XRP = \theta \;\therefore\; \tan\theta = \frac{NQ}{PN} = \frac{\delta y}{\delta x} \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

এখন যদি AB বক্ররেখার ওপর দিয়ে ক্রমশ $Q \to P$ হয়, তবে PQ জ্যা $\to$ PT স্পর্শক হবে। সেক্ষেত্রে $\delta x \to 0$ এবং $\theta \to \psi$ হবে, যেখানে $\psi = \angle XTP$.

$$\therefore \tan\psi = \lim_{Q \to P} \tan\theta = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \text{ [(i) নং দ্বারা]} = \frac{dy}{dx}$$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \tan\psi =$ AB বক্ররেখার $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল।

9.3 ফাংশনের লিমিট (উদাহরণ ও লেখচিত্রের সাহায্যে) (Limit of a function by example and graph)



(i) লিমিটের ধারণা আরও সুস্পষ্ট করার জন্য একটি ফাংশন $y = x^2$ নেওয়া হলো যার লেখচিত্র একটি অবিচ্ছিন্ন বক্ররেখা। $\lim\limits_{x \to 3} x^2$ নির্ণয় করা হলো। $y = x^2$ এর লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত। A বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(3, 0)$ হলে y-অক্ষের সমান্তরাল AP রেখা পরাবৃত্তকে $P(3, 9)$ বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষের সমান্তরাল PQ রেখা y-অক্ষকে $Q(0, 9)$ বিন্দুতে ছেদ করে। $x = 3$ হলে, $OQ(= AP = 9)$ ফাংশনের মান সূচিত করে।

পরাবৃত্তের উপরস্থ $P_1, P_2, \ldots \ldots$ বিন্দুগুলির ভুজ ও কোটি হতে দেখা যায় যে, চলমান বিন্দুটি বামদিক হতে A এর দিকে অগ্রসর হলে, (অর্থাৎ বামদিক হতে $x \to 3$) y-অক্ষের উপরস্থ বিন্দুগুলি নিচ থেকে উপরে Q এর দিকে অগ্রসর হয় অর্থাৎ ফাংশনের মান OQ (=9) এর দিকে অগ্রসর হয়। $\therefore \lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = 9$

আবার, $P_1', P_2', \ldots$ বিন্দুগুলির ভুজ ও কোটি হতে দেখা যায় যে, চলমান বিন্দুটি ডানদিক হতে A এর দিকে অগ্রসর হলে (অর্থাৎ ডানদিক হতে $x \to 3$) y-অক্ষের উপরস্থ বিন্দুগুলি উপর থেকে নিচে Q এর দিকে অগ্রসর হয়, অর্থাৎ ফাংশনের মান OQ (= 9) এর দিকে অগ্রসর হয়।

$\therefore \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 = 9$ যেহেতু $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = 9 = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2$,

সুতরাং নির্ণেয় সীমার অস্তিত্ব আছে এবং এর মান 9.

9.4 একদিকবর্তী লিমিট (One sided limit)

কখনও কখনও ফাংশন, $f(x)$ কে একাধিক সূত্র দ্বারা সূচিত করা হয়। ঐসব ক্ষেত্রে ফাংশনের বামদিকের এবং ডানদিকের লিমিট সম্পর্কিত ধারণা থাকা খুবই দরকার। ফাংশনের বামদিকের লিমিট বলতে বোঝায় x চলক a এর যতই সন্নিকটবর্তী হয় তা (অর্থাৎ x) সব সময় a থেকে ক্ষুদ্রতর থাকে। $f(x)$ এর বামদিকের লিমিটকে $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ লেখা হয়। একে $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ বা, $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তদ্রূপ $f(x)$ এর ডানদিকের লিমিটের ক্ষেত্রে x সব সময় a থেকে বৃহত্তর থাকে। ডানদিকের লিমিটকে $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। একে $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ বা, $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ হবে যখন $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$

9.4.1 কোনো বিন্দুতে লিমিটের অস্তিত্ব (Existance of limit at any point)

x = a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লিমিট বিদ্যমান থাকবে অর্থাৎ, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকবে যদি

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ হয়।

9.5 কতিপয় বিশেষ লিমিট (Some special limit)

(i) যদি x যোগবোধক সূক্ষ্মকোণ এবং রেডিয়ানে প্রকাশিত হয়, তবে

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ [বুয়েট ০৫-০৬; ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১৪; কু: বো: ০৯; সি. বো. ১৩; চ: বো: ০৫] **(b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

সমাধান:

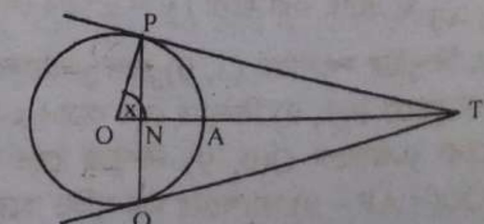
(a) মনে করি, একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PAQ বৃত্তের একটি চাপ। ধরি, ব্যাসার্ধ OA, PQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। সুতরাং, এটি PAQ চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। P ও Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় PT ও QT বর্ধিত OA এর সাথে T বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

মনে করি, $\angle AOP = x$ রেডিয়ান।

এখন, PQ < চাপ PAQ < PT + QT

$\Rightarrow$ PN < চাপ PA < PT ... ... (i); [প্রত্যেকের অর্ধেক নিয়ে]

এখন, $\sin x = \dfrac{PN}{OP} = PN$ $\quad [\because OP = 1]$



অনুরূপভাবে, $x = \frac{\text{চাপ } PA}{OP}$ = চাপ PA. এবং $\tan x = \frac{PT}{OP} = PT$

∴ (i) নং হতে পাই, $\sin x < x < \tan x$ ...... (ii)

$\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$; [sinx দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

x-এর মান যত ক্ষুদ্রই হোক না কেন এটি সত্য হবে। যখন x এর মান খুবই ক্ষুদ্র, তখন OP ও ON বিন্দুদ্বয় প্রকৃত পক্ষে একত্রে মিলিত হয়, তাহলে $\cos x = \frac{ON}{OP} = 1$

সুতরাং, যখন $x \to 0$, তখন $\cos x \to 1$

∴ যখন $x \to 0$, তখন $\frac{x}{\sin x}$ এর মান 1 এবং অন্য একটি সংখ্যা যা 1 এর খুব কাছাকাছি, এ দুইয়ের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(b) আবার, (ii) নং কে tanx দ্বারা ভাগ করে পাই, $\cos x < \frac{x}{\tan x} < 1$

যখন $x \to 0$, তখন $\cos x \to 1$. সুতরাং $\frac{x}{\tan x}$ এর মান 1 এবং অন্য একটি সংখ্যা যা 1 এর খুব কাছাকাছি, এ দুইয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1.}$

অনুসিদ্ধান্ত-1. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$

অনুসিদ্ধান্ত-2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\tan x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}} = \frac{1}{1} = 1.$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৮-০৯]

সমাধান: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left\{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 1\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left\{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \left\{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + x \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right\} = 1.$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1 + x)}{x}$ নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৮]

সমাধান: $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \left\{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - x \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right\} = 1.$

(iv) প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$; যেখানে n মূলদ সংখ্যা এবং $a > 0$.

সমাধান: ধরি, $x = a + h \quad \therefore x \to a$ হলে $h \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n - a^n}{a+h-a}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[a^n\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - a^n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^n}{h}\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - 1\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^n}{h}\left[\left\{1 + n.\frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{a^2} + \dots\right\} - 1\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^n}{h}\left\{\frac{nh}{a} + \frac{n(n-1)h^2}{2!\,a^2} + h \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right\}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0}\left\{\frac{n}{a} + \frac{n(n-1)h}{2!\,a^2} + h \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right\}$$

$$= a^n.\frac{n}{a} = na^{n-1}.$$

(v) প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

সমাধান: ধরি, $P = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore lnP = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots\right\}$$

$$= 1 = ln\, e$$

$\therefore P = e$ অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

9.6 অসীম বিন্দুতে লিমিট এবং অসীম লিমিট (Limit at infinite and infinite limit)

অসীম বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট বলতে বোঝায় যখন চলক x এর মান অসীমে বিস্তৃত অর্থাৎ $x \to \infty$ বা $x \to -\infty$। সুতরাং চলক x-এর জন্য অসীম মানের জন্য অর্থাৎ $x \to +\infty$ বা, $x \to -\infty$ এর জন্য $f(x)$ এর যে মান পাওয়া তাই অসীম বিন্দুতে ফাংশনের লিমিটের মান নির্দেশ করে। অসীম বিন্দুতে ফাংশনের লিমিটের মান অসীম বা সসীম হতে পারে।

(a) অসীম বিন্দুতে লিমিট (Limit at infinite)

(i) x এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেলে $f(x)$ এর মান ℓ_1 এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে একে $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) আবার x এর মান সীমাহীন ভাবে হ্রাস পেলে $f(x)$ এর মান ℓ_2 এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে একে $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell_2$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: (i) $\lim\limits_{x \to \infty} 2x = \infty$ (ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right) = 1$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) = -1$ (iv) $\lim\limits_{x \to \infty} (-2x) = -\infty$

(b) অসীম লিমিট (Infinite limit)

চলরাশি x নির্দিষ্ট সংখ্যা a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর মান গ্রহণপূর্বক a এর দিক অগ্রসর হয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায়—

(i) $f(x)$ এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেলে একে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) $f(x)$ এর মান সীমাহীনভাবে হ্রাস পেলে একে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: (i) $\lim\limits_{x \to \infty} 2x = \infty$ (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ (iv) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

(v) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{5}{x-3} = \infty$ (vi) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{5}{x-3} = -\infty$

বি.দ্র.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ বা, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ হলে x = a বিন্দুতে লিমিট বিদ্যমান হবে না, কারণ $+\infty$ ও $-\infty$ কোনো সংখ্যা নয় শুধু প্রতীক মাত্র।

9.7 লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি এবং এর প্রয়োগ (Fundamental properties of limit and its applications)

যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ হয়, তবে

(i) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \pm m.$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x). \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell m$

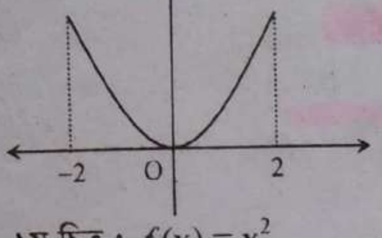
(iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{\ell}{m}$; যখন $m \neq 0$.

পাঠ-২

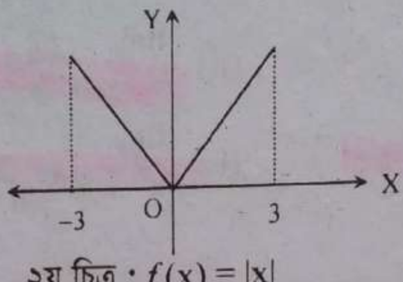
9.8 ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা (Continuity of function)

9.8.1 লেখচিত্রের মাধ্যমে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার ধারণা
(Concept of continuity of a function with the help of graph)

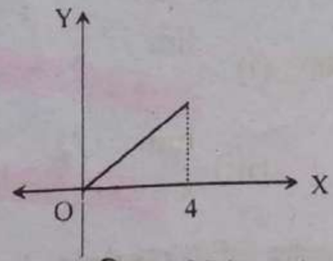
যদি $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র (a, b) ব্যবধির কোনো বিন্দুতে ফাঁকা বা লম্ফ না থাকে, তবে উক্ত ব্যবধিতে ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন বা ছেদহীন বলা হয়। অর্থাৎ, অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ক্ষেত্রে পেন্সিল না তুলে একটানে এর লেখচিত্র অংকন করা যায়।



১ম চিত্র : $f(x) = x^2$



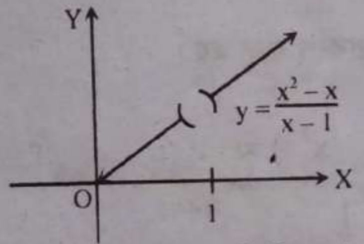
২য় চিত্র : $f(x) = |x|$

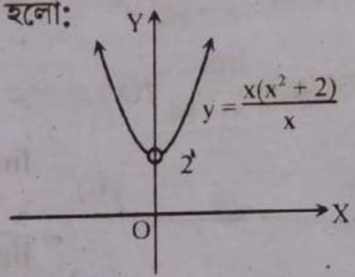


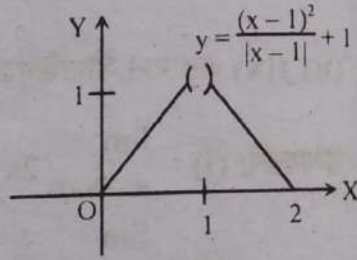
৩য় চিত্র : $f(x) = x$

১ম চিত্রে, $f(x) = x^2$ ফাংশনটি $(-2, 2)$ ব্যবধিতে, ২য় চিত্রে, $f(x) = |x|$ ফাংশনটি $(-3, 3)$ ব্যবধিতে এবং ৩য় চিত্রে, $f(x) = x$ ফাংশনটি $(0, 4)$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

কয়েকটি বিচ্ছিন্ন ফাংশনের চিত্র নিম্নে দেওয়া হলো:







9.8.2 অবিচ্ছিন্নতার গাণিতিক উপস্থাপন (Mathematical representation of continuity)

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ হয়।

সুতরাং $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(a - h) = f(a)$

9.8.3 কোনো ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্নতা (Continuity in an interval)

$[a, b]$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবে, যদি ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হয়। মনে করি, $[a, b]$ ব্যবধিতে c একটি বিন্দু এবং $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ হয় তবে $f(x)$ কে $[a, b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ যদি } x < 0 \\ x^2 - 1 \text{ যদি } x > 0 \end{cases}$ হলে, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর বিদ্যমান কী না?

সমাধান: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1)$

$= 1$ এবং $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ: যদি $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$ হয়, তবে (i) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{1-x}=\dfrac{2}{0-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{1-x}=\dfrac{2}{0+}=\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{1-x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{x(1/x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2}{1/x-1}=\dfrac{2}{0-1}=-2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{1-x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{x(1/x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{1/x-1}=\dfrac{2}{0-1}=-2$

9.8.4 স্যান্ডউইচ উপপাদ্য (The Sandwich theorem) [য: বো: ১৫]

যদি $0<|x-a|<\delta$ ব্যবধির অন্তর্গত x এর সকল মানের জন্য

$f(x)\le g(x)\le h(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ হয় তবে $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য স্কুইজিং (Squeezing) অথবা পিনচিং (Pinching) উপপাদ্য নামেও পরিচিত।

উদাহরণ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ প্রমাণ কর।

সমাধান: আমরা জানি, $-1\le \sin x\le 1$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{1}{x}\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow 0\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\le 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

কাজ: 1. (i) যদি $[0, 2]$ ব্যবধিতে $3x\le f(x)\le x^3+2$ হয় তবে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য জন্য যদি $4\le f(x)\le x^2+6x-3$ হয় তবে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

2. নিম্নলিখিত সীমার মান নির্ণয় কর:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\cos x}{x+3}$ ইঙ্গিত: $-1\le\cos x\le 1$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = 1$ বসালে সীমা $\dfrac{0}{0}$ আকার ধারণ করে।

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3.$$

উদাহরণ-2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}} = \dfrac{1}{3}$

উদাহরণ-3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৮; কু. বো. ১৩; চ: বো: ০৪; সি: বো: ০৬; ব: বো: ০৩]

সমাধান:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}$$

উদাহরণ-4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৯, ০৩]

সমাধান: মনে করি, $\sqrt{x} = y$ এবং $\sqrt{a} = b$ $\therefore$ যখন, $x \to a$ তখন, $y \to b$

5.1 5.1

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{y\to b} \frac{y^5-b^5}{y-b}$$
$$= \lim_{y\to b} \frac{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}{(y-b)}$$
$$= \lim_{y\to b}(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4) = 5b^4 = 5(\sqrt{a})^4 = 5a^2$$

বিকল্প পদ্ধতি: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ [মনে করি, $\sqrt{x} = y$ এবং $\sqrt{a} = b$ যখন, $x \to a$ তখন, $y \to b$]

$$= \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x})^5-(\sqrt{a})^5}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{y\to b} \frac{y^5-b^5}{y-b} = 5b^{5-1} \left[\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right] = 5(\sqrt{a})^4 = 5a^2$$

উদাহরণ-5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [বিআইটি ৯৬-৯৭; ঢা: বো: ১৬, ১৫, ১১, ০৪; কু: বো: ১০, ০৬; রা: বো: ০৯; সি: বো: ১১, ০৯, ০৭; চ: বো: ১১, ০৮; ব: বো: ১৪, ১১, ০৭, ০৪; মাদ্রাসা. বো. ১৩]

সমাধান: $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{1}{2}$$

$$=1\times 1\times 1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

উদাহরণ-6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ১২-১৩, য: বো: ১০, ০৬; কু: বো: ০৮]

সমাধান: মনে করি, $x=\frac{\pi}{2}+h$ $\therefore$ যখন, $x\to\frac{\pi}{2}$ তখন, $h\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

উদাহরণ-7. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin^{-1}\theta}{\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\sin^{-1}\theta=x\Rightarrow\sin x=\theta$ $\therefore$ যখন, $\theta\to 0$ তখন, $x\to 0$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^{-1}\theta}{\theta}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

উদাহরণ-8. নিম্নলিখিত ফাংশনটির $x=5$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{যখন } x\neq 5\\ 10 & \text{যখন } x=5\end{cases}$

সমাধান: এখানে $f(5)=10$

$$\lim_{x\to 5^-}f(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}(x+5)=\lim_{h\to 0}(5-h+5)=\lim_{h\to 0}(10-h)=10$$

$$\lim_{x\to 5^+}f(x)=\lim_{x\to 5^+}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}(x+5)=\lim_{h\to 0}(5+h+5)=10$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)=f(5)$, কাজেই $x=5$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

কাজ: $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ ফাংশনের $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

পাঠ-৩

অনুশীলনী-9(A)

মান নির্ণয় কর: (1-14)

1. (i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ 2. (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\{ln(2x-1)-ln(x+5)\}$ [কুয়েট ০৪-০৫]

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+9}{x^2-7x+3}$ 3. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ [ব. বো. ১৩]

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ [রা: বো: ০৩; ব: বো: ০৯; সি: বো: ০৩] (iv) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}$

(v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}$ [দি: বো: ১০]

4. (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x\sin\dfrac{b}{2^x}$ [বুয়েট ০৯-১০, সি: বো: ০৫]

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ [চ: বো: ০৭] 6. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x}$ [রা: বো: ১৬] (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ [রা: বো: ১২]

7. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}$ [ঢা: বো: ০৬] (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ [রা: বো: ০৪]

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ [মাদ্রাসা বো: ১২] (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$ [কুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১০; রা: বো: ১০, ০৭, ০৫; য: বো: ০৮, ১২; চ: বো: ০৬; কু: বো: ১১, ০৪; সি: বো: ০৮, ১২; ব: বো: ০৮; দি: বো: ১১]

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ (vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ [ঢা: বো: ১২; চ: বো: ১৪; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৪; য: বো: ১১; কু: বো: ১৫]

(viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$ [ব: বো: ১০; রা. বো. ১৩; চ: বো: ০৯] (ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$ [কু: বো: ১৪; য: বো: ০৫]

8. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$ [বুয়েট ০৭-০৮; সি: বো: ১০; ঢা: বো: ০৫; য: বো: ০৩; কু: বো: ০৭]

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}$ [ঢা.বি. ১৫-১৬; দি: বো: ১২; চ: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১১]

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$ [বুয়েট ১৩-১৪; কুয়েট ০৩-০৪; য: বো: ০৯; চ. বো. ১৩; রা: বো: ১১]

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ [ব: বো: ১২; য. বো. ১৩] (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ [সি: বো: ০৪; কু: বো: ০৩]

9. (i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\sec x(\sec x-\tan x)\}$ [বুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ০৭] (ii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ [বুয়েট ০৮-০৯; চ: বো: ১০]

(iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ [বুয়েট ১১-১২; ঢা. বো. ১৩; রা: বো: ১৪; য: বো: ০৪; ব: বো: ০৬]

10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{scex - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$

11. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta}$ [কুয়েট ০৯-১০; কু: বো: ১২; চ: বো: ১৬, ১২; য: বো: ০৭; দি: বো: ১৫, ১৩, ০৯; ব: বো: ১৬, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ [বুয়েট ০৯-১০] 13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x}$

14. (i) $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$ [কুয়েট ০৪-০৫] (ii) $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{\tan x - \tan y}{x - y}$

15. (i) যদি $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 \text{ যখন } x < 1 \\ 4x^3 - 3x \text{ যখন } x > 1 \end{cases}$ হয় তবে $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ নির্ণয় কর (যদি বিদ্যমান থাকে)।

(ii) প্রমাণ কর $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + 1$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(iii) যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ যখন } x \neq 1 \\ 2 \text{ যখন } x = 1 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

(iv) দেখাও যে $f(x) = |x|$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(v) যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ যখন } x \neq 0 \\ 1 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$ দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

(vi) যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - |x|}{x} \text{ যখন } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$ হয় তবে $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

(vii) যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ যখন } x \leq 0 \\ x \text{ যখন } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ যখন } x \geq 1 \end{cases}$ হয় তবে ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কী না পরীক্ষা কর।

(viii) যদি $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x \text{ যখন } 0 \leq x < \dfrac{x}{2} \\ 2 + \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 \text{ যখন } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ হয় তবে $x = \dfrac{\pi}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

16. Sandwich উপপাদ্য ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, (i) $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\dfrac{1}{x^2} = 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2(\cos x + \sin^3 x)}{(x^2 + 1)(x - 5)} = 0$ (iv) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - \sin 2x}{x^2 + 5} = 3$ (v) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos^2 2x}{3 - 2x} = 0$

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) 3 **2.** (i) $ln2$ (ii) 2 **3.** (i) 2 (ii) 1 (iii) $\frac{5}{2}$ (iv) -2 (v) 0 **4.** (i) 1 (ii) b **5.** $7a^3$

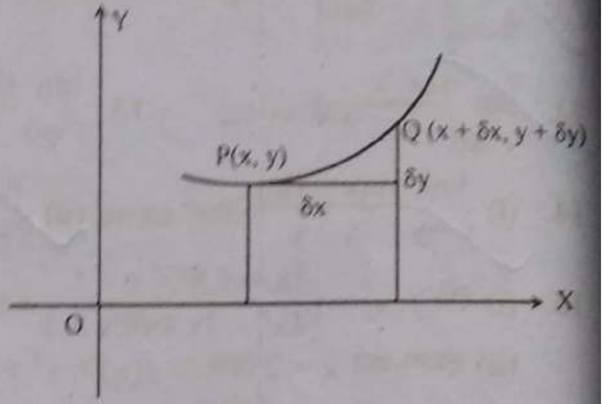
6. (i) 2 (ii) 0 (iii) 1 **7.** (i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{a^2}{b^2}$ (iii) 1 (iv) $\frac{1}{2}$; (v) $\frac{49}{6}$ (vi) $\frac{1}{2}$ (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) $\frac{1}{2}$ (ix) -1 **8.** (i) 2 (ii) 1 (iii) 2 (iv) $\frac{b^2 - a^2}{2}$; (v) $\frac{5}{2}$ **9.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (iii) 0 **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{3}{2}$ **12.** 1 **13.** $\frac{\pi}{180}$ **14.** (i) cosy (ii) $\sec^2 y$.

15. (i) 1; (vi) বিচ্ছিন্ন; (vii) অবিচ্ছিন্ন; (viii) অবিচ্ছিন্ন

পাঠ-৪ ও ৫

9.9 লিমিট হিসেবে অন্তরজ (Derivative as limit)

$y = f(x)$ রেখার (x, y) বিন্দুতে অন্তরজ $\frac{df(x)}{dx}$ বা $f'(x)$ দ্বারা স্পর্শকের ঢাল বোঝায় যা পরিবর্তনের হার নির্দেশ করে। একে লিমিটের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।



চিত্রে, P ও Q বিন্দুগামী রেখার ঢাল হচ্ছে

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{(x+\delta x)-x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

এখন Q বিন্দু ক্রমশ P এর দিকে অগ্রসর হতে থাকলে

অর্থাৎ $Q \to P$ হলে, $\delta x \to 0$

তখন P বিন্দুতে অন্তরজের মান লিমিটের সাহায্যে সংজ্ঞায়িত করা যায় $\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$

একে নিম্নোক্তভাবে লেখা হয় $f'(x)=\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$

উদাহরণ: $f(x)=x^2$ ফাংশনের অন্তরজ লিমিটের মাধ্যমে নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x)=x^2$ ফাংশনের জন্য

$$f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{(x+\delta x)^2-x^2}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{x^2+2(\delta x).x+\delta x^2-x^2}{\delta x}$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{2x(\delta x)+\delta x^2}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}(2x+\delta x)=2x$$

কাজ: $f(x)=\frac{1}{x}$ ফাংশনের অন্তরজ লিমিটের সাহায্য নির্ণয় কর।

9.9.1 অন্তরজ এর বিশ্লেষণমূলক সংজ্ঞা

মনে করি, $y = f(x)$ ফাংশনের x-এর ক্ষুদ্র বৃদ্ধি অর্থাৎ $\delta x \to 0$ এর জন্য y-এর বৃদ্ধি δy। তাহলে বৃদ্ধি হার $\frac{\delta y}{\delta x}$ এর সীমাস্থ মানকে (যদি বিদ্যমান থাকে) (x, y) বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে $y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরজ বলা হয়।

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} \quad \dots\dots (i)$$

যেহেতু, $y = f(x)$ এবং x-এর ক্ষুদ্র বৃদ্ধি δx এর জন্য y-এর বৃদ্ধি δy. কাজেই, $y+\delta y = f(x+\delta x)$

$\therefore y+\delta y-y=f(x+\delta x)-f(x) \Rightarrow \delta y=f(x+\delta x)-f(x)$

সুতরাং, $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ তাহলে, $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$

যদি x -এর ক্ষুদ্র বৃদ্ধি δx এর পরিবর্তে h ধরা হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

অথবা, $\frac{d}{dx}\{f(x)\}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ অথবা, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

আবার, $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরজ $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

অন্তরজ নির্ণয়ের এই পদ্ধতি মূল নিয়ম নামে পরিচিত।

9.9.2 অন্তরীকরণ ও অন্তরজ (Differentitation and Derivatives)

যে পদ্ধতিতে অন্তরজ নির্ণয় করা হয় তাকে অন্তরীকরণ বলা হয় এবং নির্ণীত ফলাফলকে অন্তরজ বলা হয়।

সংজ্ঞা বা মূল সূত্র (First Principle) হতে অন্তরজ নির্ণয়: সংজ্ঞা হতে কোনো ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে হলে নিম্নলিখিত ধাপগুলি মনে রাখা দরকার –

ধাপ-১: প্রদত্ত ফাংশনটিকে $f(x)$ ধরে x এর পরিবর্তে $x + h$ বসিয়ে $f(x + h)$ নির্ণয় করতে হবে।

ধাপ-২: $f(x + h)$ হতে $f(x)$ বিয়োগ করতে হবে।

ধাপ-৩: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ এর সীমা নির্ণয় করতে হবে। তাহলেই $f'(x)$ বা $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$ বা $D\{f(x)\}$ পাওয়া যাবে।

9.10 x^n এর অন্তরজ নির্ণয় (Derivative of x^n)

[ঢা: বো: ০৮, ১২; রা: বো: ১৪; চ. বো. ১৩; কু: বো: ১৪, ০৯; সি: বো: ০৯; ব: বো: ১৫, ১৪; মাদ্রাসা বো: ১০]

মনে করি, $f(x) = x^n \therefore f(x+h) = (x+h)^n$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n (1 + h/x)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h}[(1 + h/x)^n - 1]$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h}\left[\left\{1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{h^2}{x^2} + \cdots\right\} - 1\right]$$

[দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তার করে $\because h \to 0$, কাজেই $|h| < |x| \Rightarrow \left|\frac{h}{x}\right| < 1$]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n}{h}\left[\frac{nh}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \cdots\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + h \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right] = nx^{n-1}$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

9.11 বহুপদী ফাংশনের অন্তরীকরণ (Differentiation of polynomial function)

মূল নিয়মে $ax^2 + bx + c$ ফাংশনের অন্তরীকরণ:

ধরি, $f(x) = ax^2 + bx + c \therefore f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c$

মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

বা, $\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2ax + ah + b)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b) = 2ax + a.0 + b = 2ax + b$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b}$$

9.12 ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, সূচক ফাংশন এবং লগারিদমিক ফাংশনের অন্তরীকরণ
(Differentiation of Trigonometric exponential and Logarithmic function)

(i) sinx এর অন্তরজ নির্ণয়: [বুয়েট ১১-১২; কু: বো: ০৭, ০৪; চ: বো: ০৪; য: বো: ০৪; মাদ্রাসা বো: ১২]

মনে করি, $f(x) = \sin x \quad \therefore f(x+h) = \sin(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}; [\because h \to 0 \text{ হলে, } \frac{h}{2} \to 0 \text{ হয় ।}]$$

$$= (\cos x).1; \left[\because \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1\right] = \cos x$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

(ii) tan x এর অন্তরজ নির্ণয়: [ঢা: বো: ১০; সি: বো: ১৪, ০৪, ০৬; ব: বো: ০৪; রা: বো: ০৪]

মনে করি, $f(x) = \tan x \quad \therefore f(x+h) = \tan(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{\sin\{(x+h)-x\}}{\cos x\cos(x+h)} \quad [\because \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{\sin(x+h-x)}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{\sin h}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos x.\cos x}\left[\because \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1\right]$$

$$= \frac{1}{\cos x^2} = \sec^2 x$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

(iii) cosec x এর অন্তরজ নির্ণয়: [ঢা: বো: ০৪; রা: বো: ০৮; চ: বো: ১২, ০৯, ০৩; সি: বো: ১২; ব: বো: ০৫]

মনে করি, $f(x) = \text{cosec } x \quad \therefore f(x+h) = \text{cosec } (x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\{\text{cosec } (x+h) - \text{cosec } x\}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin x \sin(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left\{\frac{2\cos\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x-h}{2}\right)}{\sin x \sin(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left\{\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{\sin x \sin(x+h)}\right\}$$

$$= -\frac{\lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \times \lim_{\frac{h}{2}\to0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)}{\lim_{h\to0} \sin x \sin(x+h)} \quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta \text{ এবং } h \to 0 \text{ হলে, } \frac{h}{2} \to 0 \text{ হয়}]$$

$$= \frac{-\cos x \times 1}{\sin x \sin x} \quad \left[\because \lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1\right] = -\text{cosec } x \cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \cot x$$

(iv) e^x এর অন্তরজ নির্ণয়: [ঢা: বো: ০৩; রা: বো: ১০, ০৫; কু: বো: ০৬; য: বো: ০৯; সি: বো: ১১, ০৯, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

মনে করি, $f(x) = e^x \quad \therefore f(x+h) = e^{x+h}$.

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h\to0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to0} \frac{e^x.e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{e^x}{h}(e^h - 1) = \lim_{h\to0} \frac{e^x}{h}\left[\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{h\to0} e^x\left(1 + \frac{h}{2!} + h \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right)$$

$$= e^x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

(v) a^x এর অন্তরজ নির্ণয়: [বুটেক্স ১০-১১; ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ০৬; য: বো: ১৬, ০৮, ০৫; দি. বো. ১৩; সি: বো: ০৭, ০৩; চ: বো: ০৬; কু: বো: ০৮; ব: বো: ০৭, ০৪, ১২]

মনে করি, $f(x) = a^x \therefore f(x+h) = a^{x+h}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x . a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x}{h}(a^h - 1)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x}{h}\left[\left(1 + \frac{h}{1!} \ln a + \frac{h^2}{2!}(\ln a)^2 + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} a^x \left\{\ln a + \frac{h}{2!}(\ln a)^2 + h \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right\} = a^x \ln a$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

(vi) $\log_a x$ এর অন্তরজ নির্ণয়: [বুটেক্স ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৭, ১২; দি: বো: ১৪; চ: বো: ১৩, ০৮, ০৫; য: বো: ১৪, ১২; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: মনে করি, $y = f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x = \log_a e \times \ln x$

$\therefore \ f(x+h) = \log_a e \times \ln(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \ \frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a e \times \ln(x+h) - \log_a e \times \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a e \frac{[\ln(x+h) - \ln x]}{h}$$

$$= \log_a e \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \qquad \left[\because \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\right]$$

$$= \log_a e \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] = \log_a e \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots \cdots\right]$$

$$= \log_a e \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot h\left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots \cdots\right] = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e}$$

দ্রষ্টব্য: $\ln x$ কে $\log_e x$ লিখা যায়, কাজেই $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

কাজ: মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় কর। (i) $\ln 2x$ (ii) x^2

9.13 ফাংশনের যোগফল, গুণফল ও ভাগফলের অন্তরজ
(Derivative of addition, subtraction, product and division of function)

(i) যেকোনো ধ্রুবকের অন্তরজ শূন্য অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(c) = 0$

প্রমাণ: মনে করি, $f(x) = c$ (ধ্রুবক) $\therefore f(x+h) = c$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(c) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$ সুতরাং, $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(ii) কোনো ধ্রুবক এবং একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ, ঐ ধ্রুবক ও ঐ ফাংশনের অন্তরজের গুণফলের সমান।

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}\{c\,f(x)\} = c\frac{d}{dx}\{f(x)\}$.

প্রমাণ: মনে করি, $g(x) = cf(x)$ $\therefore g(x+h) = cf(x+h)$.

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{g(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{cf(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

(iii) দুইটি ফাংশনের যোগফলের অন্তরজ, ফাংশন দুইটির পৃথক পৃথক অন্তরজের যোগফলের সমান।

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} + \frac{d}{dx}\{g(x)\}$.

প্রমাণ: মনে করি, $F(x) = f(x) + g(x)$ $\therefore F(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{F(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} + \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

অন্যভাবে সূত্রটি নিম্নোক্তভাবেও উপস্থাপন করা যায়:

যদি u ও v প্রত্যেকেই x-এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

অনুরূপভাবে, $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

দ্রষ্টব্য: শেষোক্ত সূত্রদ্বয় দুইয়ের অধিক ফাংশনের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

(iv) দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

যদি u ও v উভয়েই x -এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

প্রমাণ: মনে করি, $u = f(x)$, $v = g(x)$ এবং $uv = F(x)$

$\therefore F(x) = f(x)\,g(x) \Rightarrow F(x+h) = f(x+h)\,g(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x+h)\,g(x)+f(x+h)\,g(x)-f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,\{g(x+h)-g(x)\}}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

সুতরাং, দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ = ১ম ফাংশন × ২য় ফাংশনের অন্তরজ + ২য় ফাংশন × ১ম ফাংশনের অন্তরজ।

দ্রষ্টব্য: দুইয়ের অধিক ফাংশনের গুণফলের ক্ষেত্রেও সূত্রটি প্রযোজ্য।

(v) দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ

যদি u ও v উভয়ই x-এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

প্রমাণ: মনে করি, $u = f(x)$, $v = g(x)$ এবং $\frac{u}{v} = F(x)$

$$\therefore F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \therefore F(x+h) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)}.$$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)\,g(x) - g(x+h)\,f(x)}{g(x)\,g(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) - g(x+h)\,f(x) + f(x)\,g(x)}{g(x)\,g(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x)\,g(x+h)}\left[\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h} - \frac{g(x+h)\,f(x) - f(x)\,g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x)\,g(x+h)}\left[g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x). \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{\{g(x)\}^2}\left[g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\} - f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\}\right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

সুতরাং, দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ $= \dfrac{\text{হর} \times \text{লবের অন্তরজ} - \text{লব} \times \text{হরের অন্তরজ}}{(\text{হর})^2}$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় কর:

(i) cosx [রা: বো: ০৭, য. বো. ১৩; ব: বো: ০৮, ০৩; দি: বো: ১০, ১২; কু: বো: ১০, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১১]

(ii) cot x [য: বো: ০৬]

(iii) sec x [য: বো: ১০, ০৭, ০০, কু: বো: ০১; সি: বো: ১০, ০২; ব: বো: ০৬, ০২]

সমাধান: (i) মনে করি, $f(x) = \cos x \quad \therefore f(x+h) = \cos(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right). \lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta \text{ এবং } h \to 0 \text{ হলে } \frac{h}{2} \to 0]$$

$$= -(\sin x).1; \left[\because \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right] = -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(ii) মনে করি, $f(x) = \cot x \quad \therefore f(x+h) = \cot(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cot(x+h)-\cot x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin x\cos(x+h) - \cos x\sin(x+h)}{\sin x\sin(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x-x-h)}{\sin x\sin(x+h)}\right\} \quad [\because \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(-h)}{\sin x\sin(x+h)}\right)\right\} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$= -1 \times \frac{1}{\sin x.\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

(iii) মনে করি, $f(x) = \sec x \quad \therefore f(x+h) = \sec(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h)-\sec x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{2\sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)} = 1 \times \frac{\sin x}{\cos x.\cos x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x$$

$$\therefore \mathbf{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x}$$

উদাহরণ-2. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

(i) $3x^5 + 5x^2 - 2x + 10$ (ii) $e^x + \log_a x$ (iii) $3a^x + x^a$

সমাধান: (i) $\frac{d}{dx}(3x^5 + 5x^2 - 2x + 10) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(5x^2) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(10)$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + 5\frac{d}{dx}(x^2) - 2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(10)$$

$$= 3.5x^4 + 5.2x - 2.1 + 0 = 15x^4 + 10x - 2$$

(ii) $\frac{d}{dx}(e^x + \log_a x) = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(\log_a x) = e^x + \frac{1}{x}\log_a e.$

(iii) $\frac{d}{dx}(3a^x + x^a) = 3\frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(x^a) = 3a^x\, ln a + ax^{a-1}.$

উদাহরণ-3. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

(i) $\sin x + 3\cos x$ (ii) $\sec\theta + \tan\theta$ (iii) $2e^t - \operatorname{cosec} t$ (iv) $5\ln x - \cot x$

সমাধান: (i) $\frac{d}{dx}(\sin x + 3\cos x) = \frac{d}{dx}(\sin x) + 3\frac{d}{dx}(\cos x) = \cos x - 3\sin x.$

(ii) $\frac{d}{d\theta}(\sec\theta + \tan\theta) = \frac{d}{d\theta}(\sec\theta) + \frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta = \sec\theta(\tan\theta + \sec\theta)$

(iii) $\frac{d}{dt}(2e^t - \operatorname{cosec} t) = 2\frac{d}{dt}(e^t) - \frac{d}{dt}(\operatorname{cosec} t) = 2e^t + \operatorname{cosec} t \cot t$

(iv) $\frac{d}{dx}(5\ln x - \cot x) = 5\frac{d}{dx}(\ln x) - \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{5}{x} + \operatorname{cosec}^2 x.$

উদাহরণ-4. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ কে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। [রা: বো: ১০, ০৫, কু: বো: ১১, ০৫; য: বো: ০৩; ব: বো: ১২]

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right\}$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x) = \frac{1}{2}.$$

উদাহরণ-5. $\log_a x \times \log_e x$ কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\log_a x \times \log_e x) = \log_a x\frac{d}{dx}(\log_e x) + \log_e x\frac{d}{dx}(\log_a x)$

$$= \log_a x.\frac{1}{x} + \log_e x.\frac{1}{x}\log_a e$$

$$= \frac{1}{x}\{\log_a x + \log_e x \log_a e\}$$

উদাহরণ-6. x-এর সাপেক্ষে $a^x x^a$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(a^x x^a) = a^x\frac{d}{dx}(x^a) + x^a\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.ax^{a-1} + x^a.a^x \ln a = a^x x^a\left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$

উদাহরণ-7. $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। [ঢা: বো: ১৩, ০৩; রা: বো: ০৯; চ: বো: ১২; দি: বো: ১৪; ব: বো: ০৭]

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x) - (1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$$= \frac{(1-\sin x)\cos x - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \sin x\cos x + \cos x + \sin x\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

উদাহরণ-8. x-এর সাপেক্ষে $\frac{x^n}{\ln x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৪]

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{\ln x}\right) = \frac{\ln x\frac{d}{dx}(x^n) - x^n\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x.\, nx^{n-1} - x^n.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x^{n-1}(n\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

অনুশীলনী-9(B)

মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় কর: (1-4)

1. (i) $\sqrt{x}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. (i) e^{mx} [ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ১৫, ০৩; কু. বো. ১৩; য: বো: ১১; দি: বো; ১৬, ১১; সি: বো: ১৫;ব: বো: ০৯, ০৫, ০৩]
(ii) lnx [ঢা: বো: ০৯; রা: বো: ০৯; দি: বো: ০৯, ১২; কু: বো: ১১; য: বো: ০৩; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১৬; চ: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৩]

3. (i) $\cos2x$ [ঢা: বো: ০৫; ব: বো: ১৩] (ii) $\sin2x$ [ঢা: বো: ০৫; চ: বো: ১৫; ব. বো. ১৩] (iii) $\cos 3x$ [রা: বো: ১১; সি: বো: ১৬]
(iv) $\tan3x$ (v) $\sec2x$ [চ: বো: ০৭] (vi) $\sec ax$ [চ: বো: ১০]

4. (i) $5x^2 - 2x + 9$ (ii) $2x^2 + 3x + 1$ (iii) $x^3 + 2x$

x-এর সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর:

5. (i) $7x^3 - 2x$ (ii) $\frac{5}{x} + lnx$ (iii) $\sqrt{x^3}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}}$
(v) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (vi) $\frac{x^3 - x^7}{\sqrt{x}}$ (vii) $\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ (viii) $\frac{x^2 - 25}{x + 5}$

নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর:

6. (i) $t^3 + 10t^2 - 5t$ (ii) $y^3 + \frac{1}{y^3}$ (iii) $(x^2 + 2)(x - 1)$
(iv) $z(z+1)^3$ (v) $ax^4 - 4\log_a x$ (vi) $5e^x - 6a^x$

নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর: (7 ও 8)

7. (i) $5\cos x$ (ii) $9\sin\theta$ (iii) $2\cos\theta + 9\sec\theta$ (iv) $\sec x + \cot x$
(v) $8\cos t + ln(t) + 5t$ (vi) $\sqrt{\frac{1 - \cos2\theta}{1 + \cos2\theta}}$ (vii) $\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$
(viii) $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ [ঢা.বি. ১৫-১৬; ঢা: বো: ০৯; ব: বো: ০৯; য: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১১]

8. (i) $\tan^{-1}(\sec x + \tan x)$ [য: বো: ০৭; চ. বো. ১৩; সি: বো: ১৪, ০৩]
(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$ [ঢা: বো: ১৩, ০৫]
(iii) $\frac{\cos x - \cos2x}{1 - \cos x}$ [ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ১৬, ০৮, ০৩; য. বো. ১৩; কু: বো: ০৮; চ: বো: ১৫; ব: বো: ১০, ০৫]

নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: (9 ও 10)

9. (i) $x^2 lnx$ (ii) $x^4 e^x$ (iii) $x^5 \log_a x$ (iv) $5e^x \log_a x$ [কুয়েট ০৩-০৪; ব: বো: ০৮] (v) $e^x \log_a x$ [দি: বো: ১২]
(vi) $e^x \sin x$ (vii) $e^x \cos x$ (viii) $x^2\cos x$ (ix) $x^3 \tan x$ [মাদ্রাসা বো: ১০] (x) $(\log_a x)(lnx)$ [সি: বো: ০৫; কু: বো: ০৭]
(xi) $\sqrt[3]{x}\sin x$ (xii) $e^x \tan x$ (xiii) $\sin x \cos x$ (xiv) $x^2 e^x lnx$ (xv) $x^2\log_a x + 7e^x \cos x$ [সি: বো: ০৪]

10. (i) $\dfrac{3x+5}{2x^2-9}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ [ঢা: বো: ১৫; রা: বো: ১৪, ০৮; চ: বো: ১৩, ০৮; সি: বো: ১৬; কু: বো: ০৫, ১২; য: বো: ০৩, ১২]

(iii) $\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ (iv) $\dfrac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$ (v) $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ [কু: বো: ০৪] (vi) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ [দি: বো: ১০; ব. বো. ১৩]

(vii) $\dfrac{\cos x}{x^2+\sin x}$ (viii) $\dfrac{\sin x}{x^2+\cos x}$ [রা: বো: ১০; দি: বো: ১২]

(ix) $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$ [ঢা: বো: ০৮; রা. বো. ১৬, ১৩; কু: বো: ০৬; চ: বো: ১৪, ১১, ০৮, ০৪; দি: বো; ১৪; য: বো: ০৪; সি: বো: ১৪, ১০, ০৮; ব: বো: ১৪, ১১, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১২]

(x) $\dfrac{\tan x+\cot x}{3e^x}$ (xi) $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

উত্তরমালা

1. (i) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (ii) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ **2.** (i) me^{mx} (ii) $\dfrac{1}{x}$

3 (i) $-2\sin 2x$ (ii) $2\cos 2x$ (iii) $-3\sin 3x$ (iv) $3\sec^2 3x$ (v) $2\sec 2x\tan 2x$ (vi) $a\sec ax\tan ax$

4. (i) $10x-2$ (ii) $4x+3$ (iii) $3x^2+2$

5. (i) $21x^2-2$ (ii) $-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x}$ (iii) $\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ (iv) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ (v) $\dfrac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}\right)$ (vi) $\dfrac{1}{2}\left(5x^{\frac{3}{2}}-13x^{\frac{11}{2}}\right)$

(vii) $\dfrac{1}{3}\left(5x^{\frac{2}{3}}-4x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}\right)$ (viii) 1

6. (i) $3t^2+20t-5$ (ii) $3y^2-\dfrac{3}{y^4}$ (iii) $3x^2-2x+2$ (iv) $4z^3+9z^2+6z+1$ (v) $4ax^3-\dfrac{4}{x}\log_a e$

(vi) $5e^x-6a^x\,ln a$

7. (i) $-5\sin x$ (ii) $9\cos\theta$ (iii) $-2\sin\theta+9\sec\theta\tan\theta$ (iv) $\sec x\tan x-\operatorname{cosec}^2 x$

(v) $-8\sin t+\dfrac{1}{t}+5$ (vi) $\sec^2\theta$ (vii) $\cos\theta$ (viii) 0 **8.** (i) $\dfrac{1}{2}$ (ii) $-\dfrac{1}{2}$ (iii) $-2\sin x$

9. (i) $x(1+2ln x)$ (ii) $x^3e^x(x+4)$ (iii) $x^4(\log_a e+5\log_a x)$ (iv) $5e^x\left(\dfrac{1}{x}\log_a e+\log_a x\right)$

(v) $e^x\left(\dfrac{1}{x}\log_a e+\log_a x\right)$ (vi) $e^x(\sin x+\cos x)$ (vii) $e^x(\cos x-\sin x)$ (viii) $x(2\cos x-x\sin x)$

(ix) $x^2(x\sec^2 x+3\tan x)$ (x) $\dfrac{1}{x}(\log_a x+\log_a e\,ln x)$ (xi) $x^{\frac{1}{3}}\left(\cos x+\dfrac{\sin x}{3x}\right)$

(xii) $e^x(\sec^2 x+\tan x)$ (xiii) $\cos 2x$

(xiv) $xe^x(2ln x+x\,ln x+1)$ (xv) $x(\log_a e+2\log_a x)+7e^x(\cos x-\sin x)$

10. (i) $-\dfrac{6x^2+20x+27}{4x^4-36x^2+81}$ (ii) $\dfrac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ (iii) $\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$ (iv) $\dfrac{2(1-t^2)}{(1-t+t^2)^2}$

(v) $\dfrac{1+\sin x+\cos x}{(1+\cos x)^2}$ (vi) $\dfrac{-2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}$ (vii) $\dfrac{-(x^2\sin x+2x\cos x+1)}{(x^2+\sin x)^2}$

(viii) $\dfrac{x^2\cos x-2x\sin x+1}{(x^2+\cos x)^2}$ (ix) $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$

(x) $\dfrac{(\tan x+\cot x)(\tan x-\cot x-1)}{3e^x}$ (xi) $\dfrac{-2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}$

পাঠ-৬ ও ৭

9.14 সংযোজিত ফাংশনের এবং বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ (Derivative of Composite and Inverse Function)

(i) **সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ:** y যদি z এর ফাংশন এবং z যদি x-এর ফাংশন হয় তবে এ ধরনের ফাংশনকে সংযোজিত ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন বলে। এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ (চেইন রুল)

আবার y যদি z -এর ফাংশন, z যদি t-এর ফাংশন এবং t যদি x-এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

(ii) **বিপরীত ফাংশনের অন্তরীকরণ:** মনে করি, $u = F(y)$ এবং $y = f(x)$

তাহলে, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ ... ... (i)

ধরি, $u = x$ তাহলে, $\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$ (i) হতে পাই, $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

এখানে, y কে x এর ফাংশন ধরা হয়েছে। তাহলে, y এর বিপরীত ফাংশন হবে x। সুতরাং, y যদি x এর ফাংশন হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ কে x সাপেক্ষে y এর অন্তরজ বলা হয়। আবার, y এর বিপরীত ফাংশন যদি x হয় তবে, $\frac{dx}{dy}$ কে y সাপেক্ষে x এর অন্তরজ বলা হয়। সুতরাং, $y = f^{-1}(x)$ হলে $x = f(y)$ এবং $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ হবে।

(a) $\sin^{-1}x$ এর অন্তরজ নির্ণয়: মনে করি, $y = \sin^{-1}x \Rightarrow x = \sin y$

$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(b) $\cos^{-1}x$ এর অন্তরজ নির্ণয়: মনে করি, $y = \cos^{-1}x \Rightarrow x = \cos y$

$\therefore \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(c) $\tan^{-1}x$ এর অন্তরজ নির্ণয়: মনে করি, $y = \tan^{-1}x \Rightarrow x = \tan y$

$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}$ সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(d) $\cot^{-1}x$ এর অন্তরজ নির্ণয়: মনে করি, $y = \cot^{-1}x \Rightarrow x = \cot y$

$\therefore \frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec}^2 y = -(1 + \cot^2 y) = -(1 + x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{1 + x^2}$ সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

(e) **$\sec^{-1}x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:** মনে করি, $y = \sec^{-1}x \Rightarrow x = \sec y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec y \tan y = \sec y\sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \text{সুতরাং, } \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(f) **$\text{cosec}^{-1}x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:** মনে করি, $y = \text{cosec}^{-1}x \Rightarrow x = \text{cosec}\, y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = -\text{cosec}\, y \cot y = -\text{cosec}\, y\sqrt{\text{cosec}^2 y - 1} = -x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{সুতরাং, } \frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

জেনে রাখ

1. (i) $\sin(\sin^{-1}x) = x$ (ii) $\sin^{-1}(\sin x) = x$ (iii) $\cos(\cos^{-1}x) = x$ (iv) $\cos^{-1}(\cos x) = x$ (v) $\tan(\tan^{-1}x) = x$ (vi) $\tan^{-1}(\tan x) = x$
2. (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (iii) $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
3. $\tan^{-1}x \pm \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$ 4. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1 - x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1 + x^2} = \cos^{-1}\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. x -এর সাপেক্ষে $(2 - 3x)^{-\frac{2}{5}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $y = (2 - 3x)^{-\frac{2}{5}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{(2-3x)^{-\frac{2}{5}}\} = \frac{-2}{5}(2-3x)^{-\frac{2}{5}-1}\frac{d}{dx}(2-3x) = \frac{-2}{5}(2-3x)^{-\frac{7}{5}}(-3) = \frac{6}{5}(2-3x)^{-\frac{7}{5}}$$

উদাহরণ-2. x-এর সাপেক্ষে $ln(e^x + e^{-x})$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৮]

সমাধান: মনে করি, $y = ln(e^x + e^{-x})$

$$\therefore y = lnz \Rightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

ধরি, $z = e^x + e^{-x}$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$= e^x + e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) = e^x - e^{-x}$$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

উদাহরণ-3. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলিকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর:

(i) $\sin\sqrt{x}$ [সি: বো: ১২; কু. বো. ১৪, ১৩] **(ii) $\sqrt{\sin x}$** **(iii) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$** [ঢা: বো: ০৭, ০৫; চ: বো: ১৫; সি: বো: ০৭]

সমাধান: (i) মনে করি, $y = \sin\sqrt{x}$

$$\Rightarrow y = \sin z$$

ধরি, $z = \sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \cos z = \cos\sqrt{x}$$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(ii) মনে করি, $y=\sqrt{\sin x}$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin x})=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(iii) মনে করি, $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin\sqrt{x}})=\frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}.\cos\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$$

উদাহরণ-4. x-এর সাপেক্ষে $2x^\circ\cos 3x^\circ$ -এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৪, ০৭; চ: বো: ০৩; কু: বো: ১৩, ১০, ০৫; য: বো: ০৫, ১২; সি: বো: ১১, ০৮, ০৬; দি: বো: ১১, ০৯; ব: বো: ১৪, ০৭]

$180^\circ=\pi^c$

$\therefore 1^\circ=\frac{\pi^c}{180}$

$\therefore x^\circ=\frac{\pi x^c}{180}$

সমাধান: মনে করি, $y=2x^\circ\cos 3x^\circ$

$$=2.\frac{\pi x}{180}\cos\left(3.\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{\pi x}{90}\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{90}\cos\frac{\pi x}{60}\right)=\frac{\pi x}{90}\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{\pi x}{60}\right)+\cos\frac{\pi x}{60}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{90}\right)$$

$$=\frac{\pi x}{90}\left(-\sin\frac{\pi x}{60}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{60}\right)+\cos\frac{\pi x}{60}\cdot\frac{\pi}{90}$$

$$=-\frac{\pi x}{90}\sin\frac{\pi x}{60}\cdot\frac{\pi}{60}+\frac{\pi}{90}\cos\frac{\pi x}{60}=\frac{\pi}{90}\left(\cos\frac{\pi x}{60}-\frac{\pi x}{60}\sin\frac{\pi x}{60}\right)$$

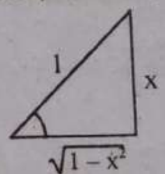
উদাহরণ-5. x-এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(e^x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৮; য: বো: ০৪; কু: বো: ০৪; ব: বো: ০৭]

সমাধান: মনে করি, $y=\tan^{-1}(e^x)$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(e^x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

উদাহরণ-6. x-এর সাপেক্ষে $\tan(\sin^{-1}x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ১০, ১২; সি. বো. ১৩; য: বো: ১০; রা: বো: ০৮; কু: বো: ১১, ০৮; চ: বো: ০৯; সি: বো: ১০; ব: বো: ০৯, ১২; মাদ্রাসা. বো. ১৩]

সমাধান: মনে করি, $y=\tan(\sin^{-1}x)$



$\therefore y=\tan\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ [পাশের চিত্র হতে]

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})}{(1-x^2)}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)}{(1-x^2)}=\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

উদাহরণ-7. x-এর সাপেক্ষে $x^2\sin^{-1}(1-x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১২; ব: বো: ০৮]

সমাধান: মনে করি, $y=x^2\sin^{-1}(1-x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=x^2\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(1-x)\}+[\sin^{-1}(1-x)]\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=x^2.\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)+[\sin^{-1}(1-x)].2x=2x\sin^{-1}(1-x)-\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

উদাহরণ-8. x-এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sin^{-1}x^5}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৫; ব: বো: ০৬, ০৪]

সমাধান : মনে করি, $y=\sqrt{\sin^{-1}x^5}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^5)=\frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}}\frac{d}{dx}(x^5)=\frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}$$

উদাহরণ-9. x-এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৬, ০৪; চ: বো: ০৯; সি: বো: ০৯; ব: বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, $y = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} = \tan^{-1}\frac{2.2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2}$ আবার, $2\sqrt{x} = \tan\theta \ \therefore \theta = \tan^{-1}(2\sqrt{x})$

$$\therefore y = \tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta \Rightarrow y = 2\tan^{-1}(2\sqrt{x})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}2\sqrt{x}) = 2.\frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2}\cdot\frac{d}{dx}(2\sqrt{x}) = \frac{2}{1+4x}\cdot\frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$$

উদাহরণ-10. x-এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\{2x\sqrt{1-x^2}\}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১০; কু: বো: ১০; য: বো: ১০; ব: বো: ১৬]

সমাধান: মনে করি, $y = \cos^{-1}\{2x\sqrt{1-x^2}\}$ এবং $x = \sin\theta \ \therefore \theta = \sin^{-1}x$

$$\therefore y = \cos^{-1}\{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\} = \cos^{-1}\{2\sin\theta\cos\theta\} = \cos^{-1}(\sin 2\theta) = \cos^{-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2\sin^{-1}x. \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

উদাহরণ-11. x-এর সাপেক্ষে $\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ১৪, ০৭; য: বো: ০৭, ০৫; সি: বো: ০৮, ০৪; কু: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১; ব: বো: ১৪]

সমাধান: মনে করি, $y = \cot^{-1}\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow y = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}1) - \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

? অনুশীলনী-9(C)

নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির নিজ নিজ পরিবর্তনশীল রাশির সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর : **(1-18)**

1. (i) $\sqrt[3]{3x^2+1}$ **(ii)** $\frac{1}{\sqrt[3]{4-3x}}$ **(iii)** $\sqrt{ax^2+bx+c}$

2. (i) $x\sqrt{x^2+a^2}$ **(ii)** $x\sqrt{\sin x}$ [ঢা: বো: ০৮] **(iii)** $x^n\, ln2x$ [চ: বো: ০৭]

3. (i) $\sin\frac{\theta}{2} + \cos 5\theta$ **(ii)** $\cos^4\theta$ **(iii)** $\sec\sqrt{x}$ [সি: বো: ০৩] **(iv)** $\sqrt{\tan\theta}$ **(v)** $\sqrt{\tan e^{x^2}}$ [য: বো: ০৯]
(vi) $\cos x^\circ$ [রা: বো: ০৪] **(vii)** $\cos^2 x^2$ **(viii)** $\sin^3 x^3$ [চ: বো: ০৯]

4. (i) $e^{\sqrt{x}}$ **(ii)** $\sqrt{\frac{1}{e^x}}$ **(iii)** $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ [কুয়েট ০৬-০৭; ঢা: বো: ০৯, ০৬; য. বো. ১৩; কু: বো: ০৪] **(iv)** $e^{\sin\sqrt{x}}$
(v) $e^{\sin 2x}$ [মাদ্রাসা বো: ১০]

5. (i) $ln(\cos 2\theta)$ [রা: বো: ১০] **(ii)** $ln(\sin 2x)$ [ঢা: বো: ১১; সি. বো. ১৩] **(iii)** $ln\sqrt{x}$ **(iv)** $(ln x)^2$
(v) $\log_{10}x$ [ঢা: বো: ১১; ব. বো. ১৩] **(vi)** $\log_{10}3x$ [য: বো: ১৩, ০৬]

6. $(1+\sin 2x)^2$ [চ: বো: ০৪] **7.** $2\text{cosec}\,2x\cos\{ln(\tan x)\}$ [রা: বো: ০৬] **8.** $ln(ax^2+bx+c)$

9. (i) $\sin^2[ln(\sec x)]$ [ঢা: বো: ১৬, ১২; দি. বো. ১৪, ১৩; রা: বো: ১৩, ০৭; য. বো. ১৩; কু: বো: ০৯; সি: বো: ০৯, ১২]
(ii) $\sin^2(ln\cos x)$ (মাদ্রাসা. বো. ১৩) **(iii)** $ln[\sin x^2]$ [রা: বো: ০৯, ১২] **(iv)** $[ln(\sin x^2)]^n$ [সি: বো: ০৬]
(v) $\sin^2\{ln(x^2)\}$ [ঢা: বো: ১৪; সি: বো: ১৪; য: বো: ০৮, ০৭; চ: বো: ১৩, ০৬]

10. $10^{ln(\sin x)}$ [সি: বো: ০৫; চ: বো: ০৭; য: বো: ১৫]

11. (i) $e^{2ln(\tan 5x)}$ [ঢা: বো: ০৪; দি: বো: ১৬; কু: বো: ০৭; সি: বো: ১৩, ১০; ব: বো: ১১, ০৬] (ii) $e^{5ln(\tan 5x)}$ [চ: বো: ১২]

12. $\cos(lnx) + ln(\tan x)$ [সি: বো: ০৬; ব: বো: ০৩] 13. $\frac{ln(\cos x)}{x}$ [ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ০৩; সি: বো: ১১, ০৯, ০৭; ব: বো: ১০]

14. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ [য: বো: ১০] 15.(i) $\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$ [কু: বো: ০৩] (ii) $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ [চ: বো: ০৭; য: বো: ০৬]

16. $x^{\circ}\cos x^{\circ}$ [চ: বো: ১০] 17. $\sin\{ln(\sec x)\}$ [চ: বো: ১১] 18. $\frac{e^x + lnx}{\log_a x}$ [দি: বো: ১১]

x-এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: (19-27)

19. (i) $\tan^{-1}\sqrt{x}$ (ii) $\cos^{-1}(1-2x)$ (iii) $\sin^{-1}(\sin\sqrt{x})$ (iv) $3^{\sin^{-1}x}$ (v) $(\sec^{-1}x)^2$

(vi) $\tan x \sin^{-1}x$ [ঢা: বো: ০৫] (vii) $\tan^{-1}(\sec x + \tan x)$ (viii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

20. (i) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (ii) $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ [কু: বো: ০৯; দি. বো. ১৩; চ: বো: ০৭; য: বো: ০৬; সি: বো: ১০; ব:বো: ০৩]

(iii) $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [ঢা: বো: ১৫, ০৭; কু: বো: ১২; য: বো: ০৮; চ: বো: ১৫, ১১, ০৬; সি: বো: ১১]

(iv) $\tan^{-1}\frac{6\sqrt{x}}{1-9x}$ [সি: বো: ১২] (v) $\tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}$ [কু: বো: ১৪; রা: বো: ০৪; চ: বো: ০৫; ব: বো: ১৪, ০৪]

(vi) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (vii) $\tan^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

(viii) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ [চুয়েট ১৩-১৪] (ix) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ [বিআইটি ৯৯-০০; সি: বো: ০৭, ০৫]

(x) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [রা: বো: ০৩] (xi) $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ [কুয়েট ০৩-০৪; বুটেক্স ০২-০৩]

21. $\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$ [চুয়েট ০৯-১০; কুয়েট ১১-১২; বিআইটি ৯৪-৯৫; রা: বো: ১১, ০৯; চ: বো: ০৮; দি: বো: ১৬, ১১, ০৯]

22. $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ [চ: বো: ০৩; রা: বো: ১৫; য: বো: ১৪, ১২]

23. (i) $\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ [য: বো: ০৯; চ: বো: ০৫, ০৩; ব: বো: ০৫]

24. (i) $\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ [চ: বো: ১০]

(ii) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ [বুয়েট ০৯-১০; কুয়েট ০৬-০৭, ১১-১২; রুয়েট ০৬-০৭; চুয়েট ১৩-১৪; সি: বো: ১৬; য: বো: ১১]

(iii) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}$ [ঢা: বো: ১১, ০৯; কু. বো. ১৩; রা: বো: ১২; চ: বো: ১২; ব: বো: ১৩, ০৯]

25. (i) $\sin^{-1}\{2x\sqrt{1-x^2}\}$ [ঢা: বো: ০৪; চ: বো: ১৪; কু: বো: ০৬] (ii) $\sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$ [কু: বো: ০৮; সি. বো. ১৩]

(iii) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$ (iv) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$

26. (i) $\sin^{-1}(\sqrt{xe^x})$ [ব: বো: ১০] (ii) $\sin^{-1}(\sin e^x)$ [চ: বো: ০৪] (iii) $\cos^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ [চ: বো: ০৯]

27. (i) $e^x\sin^{-1}x$ [য: বো: ০৪] (ii) $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$ [কু: বো: ১২; রা: বো: ১৫; য: বো: ১১] (iii) $e^{ax}\tan^2 x$ [রা: বো: ০৯]

উত্তরমালা

1. (i) $2x(3x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$ (ii) $\frac{1}{(4-3x)^{\frac{4}{3}}}$ (iii) $\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

2. (i) $\frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (ii) $\sqrt{\sin x}+\frac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (iii) $x^{n-1}\{1+n\,ln(2x)\}$

3. (i) $\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}-5\sin 5\theta$ (ii) $-4\cos^3\theta\sin\theta$ (iii) $\frac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (iv) $\frac{\sec^2\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}$

(v) $\frac{xe^{x^2}\sec^2 e^{x^2}}{\sqrt{\tan e^{x^2}}}$ (vi) $\frac{-\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$ (vii) $-2x\sin 2x^2$ (viii) $9x^2\sin^2 x^3\cos x^3$

4. (i) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (ii) $-\frac{1}{2\sqrt{e^x}}$ (iii) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$ (iv) $\frac{\cos\sqrt{x}\,e^{\sin\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (v) $2\cos 2x\,e^{\sin 2x}$

5. (i) $-2\tan 2\theta$ (ii) $2\cot 2x$ (iii) $\frac{1}{2x}$ (iv) $\frac{2}{x}\,ln x$ (v) $\frac{1}{x}\log_{10}e$ (vi) $\frac{1}{x}\log_{10}e$

6. $4\cos 2x(1+\sin 2x)$ **7.** $-2\text{cosec}\,2x\left[\frac{\sec^2 x}{\tan x}\sin\{ln(\tan x)\}+2\cot 2x\cos\{ln(\tan x)\}\right]$ **8.** $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

9. (i) $\tan x\sin[2ln(\sec x)]$ (ii) $-\tan x\sin\{2ln(\cos x)\}$ (iii) $2x\cot x^2$

(iv) $2nx\cot x^2[\ell n(\sin x^2)]^{n-1}$ (v) $\frac{2}{x}\sin(4\,ln x)$

10. $\cot x.10^{ln(\sin x)}ln10$ **11.** (i) $10\tan 5x\sec^2 5x$ (ii) $25(\tan 5x)^4\sec^2 5x$

12. $2\text{cosec}2x-\frac{1}{x}\sin(ln x)$ **13.** $\frac{-x\tan x+ln(\cos x)}{x^2}$

14. $-\frac{1}{1-\cos x}$ **15.** (i) $2\tan x\sec^2 x$ (ii) $2\sin 2x$

16. $\frac{\pi}{180}\left(\cos\frac{\pi x}{180}-\frac{\pi x}{180}\sin\frac{\pi x}{180}\right)$ **17.** $\tan x\cos ln(\sec x)$

18. $\left\{\left(e^x+\frac{1}{x}\right)\log_a x-(e^x+ln x)\frac{1}{x}\log_a e\right\}\div(\log_a x)^2$

19. (i) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ (iii) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (iv) $\frac{3^{\sin^{-1}x}ln3}{\sqrt{1-x^2}}$

(v) $\frac{2\sec^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ (vi) $\sec^2 x\sin^{-1}x+\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$ (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) $-\frac{1}{2}$

20. (i) $\frac{2}{1+x^2}$ (ii) $\frac{2}{1+x^2}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ (iv) $\frac{3}{\sqrt{x}(1+9x)}$ (v) $\frac{4}{1+4x^2}$ (vi) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (vii) $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

(viii) $\frac{1}{2(1+x^2)}$ (ix) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (x) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (xi) $\frac{3}{1+x^2}$

21. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **22.** $\pm\frac{2}{1+x^2}$ **23.** (i) -1 (ii) $\frac{e^x\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ **24.** (i) $\frac{1}{1+x^2}$ (ii) $\frac{1}{1+x^2}$ (iii) $\frac{ab}{a^2+b^2x^2}$

25. (i) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ (iii) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (iv) $-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ **26.** (i) $\frac{(x+1)e^x}{2\sqrt{xe^x}\sqrt{1-xe^x}}$ (ii) e^x (iii) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

27. (i) $e^x\sin^{-1}x+e^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $2x\tan^{-1}x$ (iii) $e^{ax}\tan x(2\sec^2 x+a\tan x)$

পাঠ- ৮

9.15 স্বাধীন ও অধীন চলকের অন্তরজ

(Derivative of dependent and independent variable)

কোনো ফাংশনের পরিবর্তনের হার নির্ণয়ের পদ্ধতিই হলো অন্তরীকরণ। মনে করি, অধীন চলক y, স্বাধীন চলক x এর একটি ফাংশন অর্থাৎ $y = f(x)$ তাহলে স্বাধীন চলক x এর অন্তরক হচ্ছে $dx = \delta x$ (x এর পরিবর্তন); অধীন চলক y এর অন্তরক হচ্ছে $dy = f'(x)\, dx$. অধীন চলক y এর অন্তরজ $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ দ্বারা x-এর যে কোনো মানের জন্য ফাংশনের তাৎক্ষণিক (যেকোনো মূহূর্তে) পরিবর্তনের হারকে বুঝায়। এই অন্তরকও স্বাধীন চলক এর ফাংশন।

উদাহরণ: $y = f(x) = x^n$ হলে $\frac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$ বা, $dy = n.x^{n-1}dx$

এখানে dx হলো স্বাধীন চলক x-এর অন্তরক এবং $n.x^{n-1}\,dx$ হলো অধীন চলক y-এর অন্তরক।

9.15.1 নেপিয়ার / প্রাকৃতিক লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ নির্ণয়

চলকের সূচক ধ্রুবক হলে (অর্থাৎ x^n, x^{10} আকারের) পূর্বে আলোচিত পদ্ধতিসমূহ প্রয়োগ করে ফাংশনসমূহের অন্তরজ নির্ণয় করা যায়। কিন্তু যে সকল ফাংশনের সূচক নিজেই চলক বা চলক সমন্বিত ফাংশন বা দুই বা ততোধিক ফাংশনের গুণ বা ভাগ আকারের, তাদের অন্তরজ ঐ পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায় না।

যেমন: x^x, x^{x^x}, $(\tan x)^x$, $(ax - b)\sqrt[3]{x^2 - 5}$ প্রভৃতি। এদেরকে লগারিদমের সাহায্যে সরল করে (অর্থাৎ সূচককে সহগে পরিণত করে) অন্তরীকরণ করতে হয়। এ পদ্ধতিতে জটিল আকারের ফাংশনগুলি অন্তরীকরণ করা সুবিধাজনক।

উদাহরণ: x-এর সাপেক্ষে $ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [বুটেক্স ০৪-০৫; সি: বো: ০৩]

সমাধান : মনে করি, $y = ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$

$$\Rightarrow y = ln\, e^x + ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow y = x\, lne + \frac{3}{2}\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{3}{2}\{ln(x-1) - ln(x+1)\} \quad [\because lne = 1]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right\} = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{x+1-x+1}{x^2-1}$$

$$= 1 + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x^2-1+3}{x^2-1} = \frac{x^2+2}{x^2-1}$$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. x-এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৩, ১০, ০৫; রা: বো: ১৪, ১০, ০৭, ০৫; কু: বো: ১৩, ১০, ০৭, ০৩; য: বো: ১৪, ১০, ০৩; সি: বো: ০৮, ০৬; দি: বো: ১৫, ০৯; চ: বো: ১৪; ব: বো: ১০, ০৬, ০৩; মাদ্রাসা বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, $y = x^{\cos^{-1}x}$ $\therefore lny = ln(x^{\cos^{-1}x}) = \cos^{-1}x\, lnx$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1}x\frac{d}{dx}(lnx) + lnx\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[(\cos^{-1}x).\frac{1}{x} + (lnx)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right] = x^{\cos^{-1}x}\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{lnx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

উদাহরণ-2. x-এর সাপেক্ষে x^{x^x} এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

[বুয়েট ০৮-০৯; বুটেক্স ০৫-০৬; কু: বো: ০৫; য: বো: ১১, ০৯; সি: বো: ১৬, ০৪; রা: বো: ১৬, ০৮, ০৬]

সমাধান: মনে করি, $y = x^{x^x} \therefore \ln y = x^x \ln x$

পুনরায় ln নিয়ে পাই, $\ln(\ln y) = \ln x^x + \ln(\ln x) = x \ln x + \ln(\ln x)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\ln y \left[1 + \ln x + \frac{1}{x \ln x}\right]$$

$$= x^{x^x}.x^x \ln x \left[1 + \ln x + \frac{1}{x \ln x}\right]$$

$$= x^{x^x}.x^x \left[(1 + \ln x) \ln x + \frac{1}{x}\right]$$

উদাহরণ-3. x-এর সাপেক্ষে $\log_x a$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ১৩; য: বো: ০৮; চ: বো: ১৪, ০৬]

সমাধান: ধরি, $y = \log_x a = \frac{\ln a}{\ln x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \ln a \left\{-\frac{1}{(\ln x)^2}\right\} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

দ্রষ্টব্য: যদি লগারিদমের ভিত্তি x-এর ফাংশন বা x হয় তবে সেক্ষেত্রে নেপিয়ার লগারিদমে (ভিত্তি e) পরিণত করে অন্তরজ নির্ণয় করতে হয়।

অনুশীলনী-9(D)

x-এর সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর : **(1-7)**

1. **(i)** $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ [কু: বো: ১০, ০৩; চ: বো: ০৫; মাদ্রাসা. বো. ১৩] **(ii)** $\ln\{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}\}$

(iii) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ **(iv)** $\ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$ **(v)** $\ln\left[\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right]$ **(vi)** $\ln\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right]$

(vii) $\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [ঢা: বো: ০৭; কু: বো: ১৪; দি. বো. ১৩; রা: বো; ১১; য: বো: ১৫]

2. **(i)** $\left\{\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right\}^n$ **(ii)** $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ **(iii)** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ [রা: বো: ১১]

3. **(i)** $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ [বিআইটি ৯৬-৯৭; কু: বো: ০৯] **(ii)** $x^3\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}$

4. $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ **5. (i)** $\frac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$ **(ii)** $\frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **6.** $\frac{(x^2+1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$ [চ: বো: ১০; কু: বো: ১১]

7. **(i)** x^x [ঢা: বো: ০৯, ০৭; কু: বো: ১৬, ০৯, ০৬, ১২; চ: বো: ০৪; রা: বো: ১৩, ০৪; সি: বো: ১২; ব: বো: ০৮]

(ii) $x^{\frac{1}{x}}$ [ঢা: বো: ০৮; রা: বো: ০৩; চ: বো: ১৩, ০৬; য: বো: ০৮; সি: বো: ১৩, ০৯, ০৭; ব: বো: ০৪]

(iii) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ [চুয়েট ০৯-১০; বুয়েট ০৫-০৬; চ: বো: ১০; ব: বো: ০৫, ১২; কু: বো: ১১] **(iv)** $(1+x^2)^{2x}$ [য: বো: ০৬]

(v) $(1+x)^x$ [ব: বো: ১৩] **(vi)** $(x^x)^x$ [ঢা: বো: ১১; কু: বো: ১৪; রা: বো: ১২; দি: বো: ১১; ব: বো: ১৪, ১১; মাদ্রাসা বো. ১৩]

(vii) e^{e^x} [ব: বো: ১৬] **(viii)** x^{e^x} **(ix)** e^{x^x} [ঢা: বো: ১৪; দি: বো: ১৪] **(x)** $a^{\ln(\cos x)}$ [রা: বো: ০৫] **(xi)** $(\sin x)^x$ [মাদ্রাসা বো: ১১]

(xii) $x^{\cos x}$ [চ: বো: ১১] **(xiii)** $(\cot x)^{\tan x}$ [ঢা: বো: ০৩; চ: বো: ০৫; দি: বো: ১৬, ০৯; য: বো: ১২; ব: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১২]

(xiv) $(\sin x)^{\tan x}$ [বুটেক্স ০২-০৩; মাদ্রাসা বো: ১০] **(xv)** $x^x \ln x$ [দি: বো: ১০; কু: বো: ০৪; চ: বো: ১২; ব: বো: ১২]

(xvi) $x^{\ln x}$ [সি: বো: ১১] **(xvii)** a^{a^x} [দি: বো: ১২] **(xviii)** $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ [রা: বো: ১১]

(xix) $x^x + (\sin x)^{\ln x}$ **(xx)** $\log_{\cos x}\tan x$ **(xxi)** $x^{\sin x} + (\sin x)^x$ [য: বো: ০৭]

(xxii) $e^{x^2} + x^{x^2}$ [বুয়েট ১২-১৩; ঢা: বো: ০৬, ১২; সি: বো: ১৪] **(xxiii)** $\log_a x + \log_x a$

উত্তরমালা

1. (i) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (ii) $\frac{1}{2\sqrt{(x-2)(x+1)}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ (iv) $\frac{x^2}{x^2-1}$
(v) $\frac{2(1-x^2)}{1+x^2+x^4}$ (vi) $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ (vii) cosecx

2. (i) $\frac{n}{x\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right\}^n$ (ii) $\frac{-8x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$ (iii) $\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

3. (i) $\frac{(x+1)^2\sqrt{(x-1)}}{(x+4)^3 e^x}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1\right]$
(ii) $x^3\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}\left[\frac{3}{x}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{x}{x^2+3}\right]$

4. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cdot\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$

5. (i) $\frac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}\left[2x+\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}-\frac{x}{1+x^2}\right]$
(ii) $\frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}+\frac{x}{1-x^2}\right]$

6. $\frac{2}{3}\left(5x^{\frac{7}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{5}{3}}\right)$

7. (i) $x^x(1+ln x)$ (ii) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-ln x)$ (iii) $\frac{1}{4}(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}(2+ln x)$

(iv) $(1+x^2)^{2x}\left[\frac{4x^2}{1+x^2}+2\,ln(1+x^2)\right]$ (v) $(1+x)^{x-1}\{(1+x)\,\ell n(1+x)+x\}$

(vi) $x^{x^2}\{x(2\,ln x+1)\}$ (vii) $e^{e^x}.e^x$ (viii) $x^{e^x}.e^x\left(ln x+\frac{1}{x}\right)$ (ix) $e^{x^x}.x^x(1+ln x)$

(x) $-\,ln a.a^{ln(\cos x)}\tan x$ (xi) $(\sin x)^x\{x\cot x+ln(\sin x)\}$ (xii) $x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x\,(ln x)\right]$

(xiii) $(\cot x)^{\tan x}\sec^2 x\{\ell n(\cot x)-1\}$ (xiv) $(\sin x)^{\tan x}\{1+\sec^2 x\,\ell n(\sin x)\}$

(xv) $x^{x-1}\{1+x\,\ell n x(1+\ell n x)\}$ (xvi) $2x^{(ln x)-1}.\ell n(x)$ (xvii) $a^{a^x}.a^x(ln a)^2$

(xviii) $(\sin x)^{\cos x}\{\cos x\cot x-\sin x\,\ell n(\sin x)\}+(\cos x)^{\sin x}\{\cos x\,\ell n(\cos x)-\sin x\tan x\}$

(xix) $x^x(1+\ell n x)+(\sin x)^{ln x}\left\{\frac{\ell n(\sin x)}{x}+\cot x\,\ell n x\right\}$ (xx) $\frac{\sec x\,\mathrm{cosec}\,x\,\ell n(\cos x)+\tan x\,\ell n(\tan x)}{(\ell n\cos x)^2}$

(xxi) $x^{\sin x}\{x^{-1}\sin x+ln x\cos x\}+(\sin x)^x\{ln(\sin x)+x\cot x\}$

(xxii) $2xe^{x^2}+x^{x^2+1}(1+2\ln x)$ (xxiii) $\frac{(ln x)^2-(ln a)^2}{x(ln x)^2\,ln a}$

পাঠ-৯

9.15.2 অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় (Derivative of implicit functions)

যদি কোনো ফাংশন $f(x, y) = 0$ আকারের হয় এবং তাকে $y = f(x)$ অথবা $x = f(y)$ আকারে প্রকাশ করা না যায়, তবে এরূপ ফাংশনকে অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। যেমন- $x^3 + y^3 + 3axy = 0$, $x^2y^2 + 3x^3y + 2y^3 = 5$ ইত্যাদি অব্যক্ত ফাংশন। অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে x-কে পরিবর্তনশীল এবং y-কে x-এর ফাংশন বিবেচনা করে প্রত্যেক পদকে পৃথক পৃথক ভাবে অন্তরীকরণ করে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ: $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $12x^3 - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} + 6y^2\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (6y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy - 12x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 12x^3}{6y^2 - x^2} = \frac{-2x(6x^2 - y)}{-(x^2 - 6y^2)} = \frac{2x(6x^2 - y)}{x^2 - 6y^2}$

9.15.3 পরামিতিক সমীকরণের অন্তরজ (Derivative of parametric equation)

অনেক ক্ষেত্রে কাজের সুবিধার্থে সমীকরণের চলক x ও y-কে অপর একটি চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এ তৃতীয় চলককে পরামিতি (Parameter) এবং সমীকরণটিকে পরামিতিক সমীকরণ বলা হয়।
পরামিতিক সমীকরণের অন্তরজ নির্ণয় করতে পরামিতি অপসারণের প্রয়োজন হয় না

যেমন- যদি $x = \varphi(t)$ এবং $y = \psi(t)$ পরামিতিক সমীকরণ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

উদাহরণ: $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = a\cos^3\theta$ এবং $y = a\sin^3\theta$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$ $\qquad \therefore \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে $x^y = y^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১০-১১, বুয়েট ০৪-০৫; চ: বো: ০৩]

সমাধান: $x^y = y^x \therefore \ln x^y = \ln y^x$ [উভয় পক্ষে $\ln$ নিয়ে]

$\Rightarrow y\ln x = x\ln y$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\ln x.\frac{dy}{dx} + y.\frac{1}{x} = x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y$

$\Rightarrow \left(\ln x - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow \left(\frac{y\ln x - x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x\ln y - y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

উদাহরণ-2. $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ এবং $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৪-০৫; চুয়েট ০৮-০৯]

সমাধান: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ এবং $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$

$\Rightarrow x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}t$ $\qquad \Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}t$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} / \frac{2}{1+t^2} = 1.$

অনুশীলনী-9(E)

নিম্নলিখিত অব্যক্ত ফাংশনগুলির ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর : (1-8)

1. (i) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0$ (ii) $x^3y + xy^3 = 2$
2. (i) $y = \tan(x+y)$ (ii) $y = \sin(x+y)^2$ [রা: বো: ০৪; কু: বো: ০৭; য: বো: ১১]
(iii) $x \cos y = \sin(x+y)$ (iv) $x^2 + y^2 = \sin(xy)$ (v) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$
3. (i) $x^y y^x = 1$ [বুয়েট ০২-০৩; বিআইটি ০০-০১]
(ii) $x^m y^n = (x-y)^{m+n}$ [বুয়েট ১১-১২, ০৩-০৪]
(iii) $x^y = e^{x-y}$ [য: বো: ০৫]
4. (i) $(\sec x)^y = (\tan y)^x$ (ii) $x = y\,ln(xy)$
(iii) $ln(xy) = x + y$ [বিআইটি ৯৯-০০; ঢা: বো: ০৩; রা: বো: ০৫, ১২; দি: বো: ১৫; কু: বো: ০৬] (iv) $ln(xy) = x^2 + y^2$
5. $e^{xy} - 4xy = 2$
6. $x + y = \sin^{-1}\frac{y}{x}$
7. (i) $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ (ii) $x = at^2, y = 2at$
(iii) $x = e^t\cos t, y = e^t \sin t$ (iv) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$
(v) $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ (vi) $x = \frac{a\cos t}{t}, y = \frac{a\sin t}{t}$
(vii) $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$
8. $x^y + y^x = a^b$ [চুয়েট ০৭-০৮; রা: বো: ১১; য. বো. ১৩]

উত্তরমালা

1. (i) $-\frac{x(2x^2+y^2)}{y(x^2+2y^2)}$ (ii) $-\frac{y(3x^2+y^2)}{x(x^2+3y^2)}$
2. (i) $-\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$ (ii) $\frac{2(x+y)\sqrt{1-y^2}}{1-2(x+y)\sqrt{1-y^2}}$ (iii) $\frac{\cos y - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + x\sin y}$
(iv) $\frac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)}$ (v) $\frac{y\tan x + ln(\sin y)}{ln(\cos x) - x\cot y}$
3. (i) $-\frac{x\,ln y + y}{y\,ln x + x} \times \frac{y}{x}$ (ii) $\frac{y}{x}$ (iii) $\frac{ln x}{(1+ln x)^2}$
4. (i) $\frac{ln(\tan y) - y\tan x}{ln(\sec x) - x\sec^2 y\cot y}$ (ii) $\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$
(iii) $\frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ (iv) $\frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$
5. $-\frac{y}{x}$ 6. $\frac{y + x^2\cos(x+y)}{x - x^2\cos(x+y)}$
7. (i) $-\cot\theta$ (ii) $\frac{1}{t}$ (iii) $\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$ (iv) $\cot\frac{\theta}{2}$
(v) $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ অথবা $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ (vi) $\frac{\sin t - t\cos t}{t\sin t + \cos t}$ (vii) $\tan t$
8. $-\frac{yx^{y-1} + y^x ln\, y}{x^y\, ln\, x + xy^{x-1}}$

পাঠ-১০ ও ১১

9.16 পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ (Successive Derivatives)

যদি $y = f(x)$ একটি অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন হয় তবে এর অন্তরজও x এর ফাংশন হবে। একে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\frac{dy}{dx}$ একটি অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন হয় তবে এর অন্তরজও x এর একটি ফাংশন একে $\frac{d^2y}{dx^2}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অনুরূপভাবে $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ ... ... $\frac{d^ny}{dx^n}$ n সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করা যায়। এভাবে কোনো ফাংশনকে ধারাবাহিকভাবে অন্তরীকরণ করার প্রক্রিয়াকে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ বলা হয়।

9.17 অন্তরজের এর আদর্শ প্রতীক (Standard symbols of derivatives)

x-কে পরিবর্তনশীল ধরে $y = f(x)$ ফাংশনকে অন্তরীকরণ করলে প্রাপ্ত ফলকে ১ম পর্যায়ের অন্তরজ বলা হয়।
একে $y_1, y', \frac{dy}{dx}, Dy, f'(x)$ এর যে কোনো একটি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
১ম পর্যায়ের অন্তরজকে পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে ২য় পর্যায়ের অন্তরজ পাওয়া যায়।
একে $y_2, y'', \frac{d^2y}{dx^2}, D^2y, f''(x)$ এর যে কোনো একটি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
অনুরূপভাবে, প্রতি পর্যায়ে প্রাপ্ত ফলকে ক্রমাগতভাবে অন্তরীকরণ করে অন্যান্য পর্যায়ের অন্তরজগুলি পাওয়া যায়।

n-তম অন্তরজকে y_n বা, $\frac{d^ny}{dx^n}$ বা, D^ny বা $f^{(n)}(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

দ্রষ্টব্য: $D \equiv \frac{d}{dx}$ কে ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর বলা হয়।

9.17.1 কয়েকটি আদর্শ ফাংশনের অন্তরজ

(a) $y = x^n$ ফাংশনের n-তম অন্তরজ নির্ণয়: $\longrightarrow n!$

প্রদত্ত ফাংশন, $y = x^n$ ... ... (i)

(i) নং কে x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = y_1 = nx^{n-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = n(n-1)x^{n-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = y_3 = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে, n-তম অন্তরজ

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1 = n! \quad \text{... ... (ii)}$$

অর্থাৎ, $y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = D^n(x^n) = n!$

(b) $y = x^m, m > n$ হলে y_n নির্ণয়: প্রদত্ত ফাংশন, $y = x^m, m > n$ ... ... (i)

(i) নং কে x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = y_1 = mx^{m-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = m(m-1)x^{m-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = y_3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, n-তম অন্তরজ

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y_n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\cdots 3.2.1}{(m-n)(m-n-1)\cdots 3.2.1}\,x^{m-n}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}\,x^{m-n} \quad \text{... ... (ii)}$$

অর্থাৎ, $y_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^m) = D^n(x^m) = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, m > n$

বি.দ্র: $y = x^m$, $m < n$ হলে, স্পষ্টত $y_n = 0$. ... ... (iii)

সুতরাং (a) ও (b) হতে আমরা পাই,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^m) = \begin{cases} m! & \text{যখন, } m = n \\ 0 & \text{যখন, } m < n \\ \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & \text{যখন, } m > n \end{cases}$$

(c) $y = e^{ax}$ ফাংশনের n-তম অন্তরজ নির্ণয়

প্রদত্ত ফাংশন, $y = e^{ax} \Rightarrow y_1 = ae^{ax} \Rightarrow y_2 = a^2e^{ax} \Rightarrow y_3 = a^3.e^{ax}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $y_n = a^n e^{ax}$

অর্থাৎ $y_n = \frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}) = a^n e^{ax}$

কাজ: $e^y = \sin x$ হলে দেখাও যে, $\frac{d^3y}{dx^3} = 2\cot x \operatorname{cosec}^2 x$.

9.17.2 ম্যাকলরিনের উপপাদ্য (Maclaurin's theorem)

বর্ণনা: যদি $f(x)$ ফাংশনকে x-এর ক্রমবর্ধমান শক্তির একটি অসীম ধারায় বিস্তার করা যায় এবং ফাংশনটিকে x-এর সাপেক্ষে যে কোনো ক্রম পর্যন্ত অন্তরীকরণ করা যায়, তবে $f(x)$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়–

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots$$

এটিই ম্যাকলরিনের উপপাদ্য নামে পরিচিত।

প্রমাণ: যেহেতু $f(x)$ ফাংশনকে x-এর ক্রমবর্ধমান শক্তির অসীম ধারায় বিস্তার করা যায়, কাজেই

ধরি, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n +$ ... ... (i)

(i) নং কে x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$ ... ... (ii)

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots$ ... ... (iii)

$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4x + \cdots$ ... ... (iv)

... ...

(i) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $a_0 = f(0)$;

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $a_1 = f'(0)$

(iii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $f''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$

(iv) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $f'''(0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0)$

অনুরূপভাবে, $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ এবং একইভাবে আরও অগ্রসর হওয়া যায়।

এখন, $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots$$

উদাহরণ: ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে $\boldsymbol{ln(1+x)}$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তার কর। [ঢা: বো: ১৩, ০৩; রা: বো: ০৯, ০৫, ০৩; কু: বো: ১০, ০৮, ০৬, ০৪; দি. বো. ১৩; য: বো: ১৩, ০৮, ০৪; চ: বো: ০৯, ০৪, ১২; সি: বো: ১১, ০৭; ব: বো: ০৫, ১২; মাদ্রাসা বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, $f(x) = ln(1+x)$ $\qquad \therefore f(0) = ln1 = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \therefore f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad \therefore f''(0) = -1$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad \therefore f'''(0) = 2$$

$$\Rightarrow f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \qquad \therefore f^{iv}(0) = -6$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \qquad \dots \dots \dots \dots$$

ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা জানি, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \dots$

$\Rightarrow ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ যখন $-1 < x < 1$

কাজ: নিম্নলিখিত ফাংশনগুলিকে ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে অনন্ত ধারায় বিস্তার কর:
(i) e^x **(ii)** a^x **(iii)** $\sin x$ **(iv)** $\cos x$ **(v)** $\tan^{-1}x$ **(vi)** $e^{\cos x}$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $\boldsymbol{y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}}}$ হলে, দেখাও যে, $\boldsymbol{2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0}$ [ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ১৩, ০৬; কু: বো: ০৯, ০৬; য: বো: ১৪, ০৫, ১২; দি: বো: ১৪, ১১; চ: বো: ১৩, ১১; সি: বো: ১৩, ১০; মাদ্রাসা বো: ১৩, ০৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} = ax^2 + bx^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore y_1 = 2ax - \frac{1}{2}bx^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow y_2 = 2a + \frac{3}{4}bx^{\frac{-5}{2}}$$

$$\text{বামপক্ষ} = 2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 2x^2\left(2a + \frac{3}{4}bx^{\frac{-5}{2}}\right) - x\left(2ax - \frac{1}{2}bx^{\frac{-3}{2}}\right) - 2y$$

$$= 4ax^2 + \frac{3}{2}bx^{\frac{-1}{2}} - 2ax^2 + \frac{1}{2}bx^{\frac{-1}{2}} - 2y$$

$$= 2ax^2 + 2bx^{\frac{-1}{2}} - 2y = 2(ax^2 + bx^{\frac{-1}{2}}) - 2y$$

$$= 2y - 2y = 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ-2. $\boldsymbol{y = \sin(\sin x)}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2x = 0}$
[ঢা: বো: ১৪; কু: বো: ১৩, ০৭; সি: বো: ১১, ০৬; য: বো: ০৫; ব: বো: ১৪, ০৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = \sin(\sin x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(\sin x).\cos x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(\sin x)\cos^2x - \cos(\sin x).\sin x = -y\cos^2x - \cos(\sin x).\sin x$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2x$$

$$= -y\cos^2x - \cos(\sin x).\sin x + \cos(\sin x).\cos x.\tan x + y\cos^2x$$

$$= -y\cos^2x - \cos(\sin x).\sin x + \cos(\sin x).\sin x + y\cos^2x = 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

অনুশীলনী-9(F)

1. $y = 5x^4 - 3x^3 + 5x + 2$ হলে, $x = 2$ বিন্দুতে y_2 ও y_3 এর মান নির্ণয় কর।
2. $y = x^2\, lnx$ হলে, y_3 নির্ণয় কর।
3. $y = px + \dfrac{q}{x}$ হলে, দেখাও যে, $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 2p$ [ঢা: বো: ০৯; য: বো: ০৯; চ: বো: ০৫]
4. $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ [য: বো: ০৪]
5. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2x\dfrac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ [বুয়েট ০৪-০৫; ঢা: বো: ০৭, ০৩; য: বো: ০৭; কু: বো: ০৮]
6. $y = \ln(\sin x)$ হলে, দেখাও যে, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$ [চ: বো: ০৯]
7. যদি $y = (x^2-1)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(x^2-1)y_2 - 2(n-1)\,xy_1 - 2ny = 0$
8. যদি $y = x^m\, lnx$ হয়, তবে দেখাও যে, $xy_1 = my + x^m$
9. $y = \tan x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = 2y(1+y^2)$
10. $y = \sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$ [রা: বো: ০৪; ব: বো: ০৪]
11. $y = a\cos x + b\sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$
12. $y = \sec x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2-1)$
[চুয়েট ০৭-০৮; রা: বো: ০৭; য: বো: ১১, ০৮; চ: বো: ১৪, ০৮, ০৬, ০৪; কু: বো: ১০; সি: বো: ০৭; ব: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১২]
13. $y = \tan x + \sec x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 = \dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ [রা: বো: ১৪, ১০, ০৫; সি. বো. ১৩; কু: বো: ০৩]
14. $y = a\cos(lnx) + b\sin(lnx)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$
[চুয়েট ১৩-১৪; বুটেক্স ০৬-০৭; বিআইটি ০২-০৩; ঢা: বো: ০৯; রা. বো. ১৩; চ: বো: ০৭; সি: বো: ১৪]
15. $y = \cos\{ln(1+x)\}$ হলে, দেখাও যে, $(1+x)^2 y_2 + (1+x)y_1 + y = 0$
[য: বো: ০৭; দি: বো: ১০; ব: বো: ১৩, ০৮; সি: বো; ১১]
16. $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 - m^2y = 0$
[ঢা: বো: ০৬; চ: বো: ০৪; দি: বো: ০৯; ব: বো: ০৭]
17. $y = \dfrac{lnx}{x}$ হলে, দেখাও যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2lnx - 3}{x^3}$
18. $y = e^x\cos x$ হলে, প্রমাণ কর যে,
[রা: বো: ০৩; ব. বো. ১৩; দি: বো: ১০; চ: বো: ১২; সি. বো. ০৫, ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৪]
   (i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
   (ii) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$
[ঢা: বো: ১০, ০৪; দি: বো: ১২; ব: বো: ০৬]
19. (i) $y = (e^x + e^{-x})\sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 + 4y = 0$ [চ: বো: ০৩]
   (ii) $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ হলে, দেখাও যে, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$ [ব: বো: ০৯; দি. বো. ১৩]
20. $y = (p+qx)e^{-2x}$ হলে, দেখাও যে, $y_2 + 4y_1 + 4y = 0$ [ঢা: বো: ১৬; রা: বো: ১৫; সি: বো: ০৫]
21. (i) $y = \sin^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ [কু: বো: ০৫; মাদ্রাসা. বো. ১৩]
   (ii) $y = \tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$
22. $y = a\sin^{-1}x + b\cos^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$
23. (i) $x = \sin\sqrt{y}$ বা, $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$
[ঢা: বো: ০৮; রা: বো: ১১, ০৩; কু: বো: ১৩, ০৮, ০৩; ব: বো: ০৮, ০৫, ১২; চ: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১০]

(ii) $x = \cos\sqrt{y}$ অথবা, $y = (\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

[বুয়েট ০৮-০৯; কুয়েট ১৩-১৪; ঢা: বো: ১১, ০৪, ১২; রা: বো: ০৯, ০৭, ০৪; কু: বো: ১০; দি: বো: ১৩, ১২; য: বো: ০৮, ০৬, ০৩, ১২; চ: বো: ১৩, ৬, ০৩; সি: বো: ১৪, ১০, ০৮, ০৪; ব: বো: ১০, ০৬]

(iii) $2y = (\tan^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1 + x^2)^2 y_2 + 2(1 + x^2) xy_1 = 1.$

24. (i) $ln y = a \sin^{-1}x$ অথবা, $y = e^{a \sin^{-1}x}$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$

[ঢা: বো: ১৪, ১১, ০৭, ০৩; রা: বো: ১৪; কু: বো: ১২; য: বো: ০৯; চ: বো: ০৫; সি: বো: ০৯, ০৭, ০৪; ব: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১২]

(ii) $ln y = m \cos^{-1} x$ অথবা, $y = e^{m \cos^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$

(iii) $x = \cos\left(\frac{1}{m} ln y\right)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = m^2y.$

(iv) $ln y = \tan^{-1}x$ অথবা, $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$

[চুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ১৫, ১২; কু: বো: ১১; চ: বো: ১৫; ব: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১১]

25. (i) $y = \sin(m \sin^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

[বুয়েট ০০-০১; বুয়েট ০৭-০৮; চুয়েট ০৪-০৫; ঢা: বো: ১০, ০৫; রা: বো: ১৩, ০৯; কু: বো: ১৬; চ: বো: ০৮; সি: বো: ০৩; য: বো: ১৫; দি: বো: ১৪; ব: বো: ১১, ০৩]

(ii) $y = \cos(m \sin^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

(iii) $y = \tan(m \tan^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 - 2(my - x)y_1 = 0$

[সি: বো: ০৬; ঢা. বো. ১৩; কু: বো: ০৭, ০৪, ১২; চ: বো: ১২; য: বো: ১১]

26. $y = \sqrt{4 + 3 \sin x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$

[ঢা: বো: ০৮; রা: বো: ১৬, ০৮, ১২; চ: বো: ০৯, ০৭; সি: বো: ১০, ১২; কু: বো: ১৫, ১৪, ১১, ০৯, ০৫; য: বো: ১৩, ০৬; দি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১১]

27. $y = ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(a^2 + x^2)y_2 + xy_1 = 0$ [চ: বো: ১৪, ১০; য: বো: ১৪, ০৩; মাদ্রাসা বো: ১০]

28. $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

[য: বো: ১০; সি: বো: ১২; চ: বো: ০৯; ব: বো: ১৪, ১০]

29. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির n-তম অন্তরজ নির্ণয় কর:

(i) $\cos ax$ **(ii)** $\frac{1}{x}$ **(iii)** $2 \sin 3x \cos 2x$ **(iv)** $4 \sin^3 x$ **(v)** $\cos^3 x$ **(vi)** $ln x$ [সি: বো: ১৬] **(vii)** $(ax + b)^{-m}$

উত্তরমালা

1. 204, 222; **2.** $\frac{2}{x}$

29. (i) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$ (ii) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

(iii) $5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

(iv) $3 \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

(v) $\frac{1}{4}\left[3 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) + 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right]$

(vi) $(-1)^{n-1}. \underline{|n-1}\, x^{-n}$

(vii) $\frac{(-1)^n (m + n - 1)!\, a^n}{(m - 1)!\, (ax + b)^{m+n}}$

পাঠ-১২

9.17.3 পরিবর্তনের হার হিসেবে অন্তরজ (Derivative as a rate of change)

অন্তরজের সংজ্ঞা হতে আমরা পাই, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$.এখানে δx হলো x-এর ক্ষুদ্রতর বৃদ্ধি এবং δy হলো x-এর ক্ষুদ্রতর বৃদ্ধি δx এর জন্য y-এর বৃদ্ধি। কাজেই $\frac{dy}{dx}$ বলতে x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার বোঝায়। অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা অনির্ভরশীল চলক x-এর সাপেক্ষে নির্ভরশীল চলক y-এর পরিবর্তনের হার বোঝায়।

অন্তরজের মাধ্যমে বেগ ও ত্বরণের প্রকাশ:

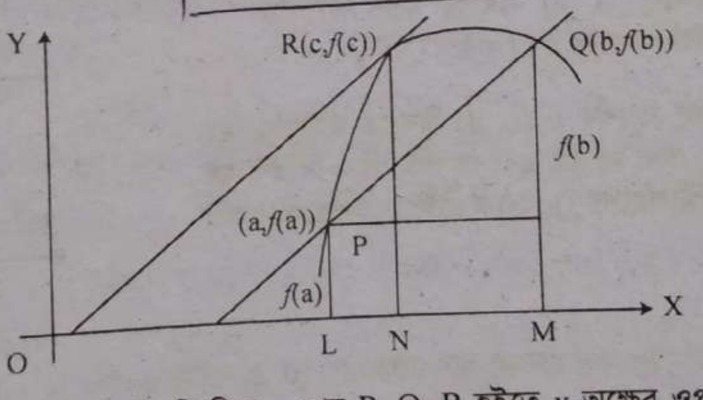
t সময়ে কোনো কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব s হলে $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা কণাটির সরণের পরিবর্তনের হার বোঝায়। যেহেতু সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে, ফলে কণাটির বেগ, $v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t}$.

আবার, t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে কণাটি v বেগ প্রাপ্ত হলে $\frac{dv}{dt}$ দ্বারা কণাটির বেগের পরিবর্তনের হার বোঝায়। যেহেতু বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে, ফলে কণাটির ত্বরণ, $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$.

9.17.4 গড়মান উপপাদ্য (ল্যাগ্রাঞ্জের আকার) (Mean value theorem; Lagrange's form)

বর্ণনা: যদি $f(x)$ ফাংশন [a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে a ও b এর মধ্যে অন্ততঃপক্ষে x এর এমন একটি মান c পাওয়া যাবে যাতে, $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ হয়।

উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা:



মনে করি $y = f(x)$ রেখার উপরস্থ P, Q, R তিনটি বিন্দু। এখন P, Q, R হইতে x-অক্ষের ওপর PL, QM এবং RN লম্ব অঙ্কন করি।

ধরি, OL = a, OM = b এবং ON = c, তাহলে PL = $f(a)$, QM = f(b) এবং RN = $f(c)$

∴ স্থানাংক $P(a, f(a))$ এবং স্থানাঙ্ক $Q(b, f(b))$

∴ PQ রেখার ঢাল $= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ... ... (i)

R বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= f'(c)$ ... ...(ii)

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন [a, b] বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য, কাজেই c ভূজ বিশিষ্ট P এবং Q এর মধ্যবর্তী রেখার অংশে এমন একটি বিন্দু R পাওয়া যাবে যেখানে R বিন্দুর স্পর্শক PQ ছেদকের সমান্তরাল হবে।

∴ R বিন্দুর স্পর্শকের ঢাল = PQ রেখার ঢাল

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$; (i) নং এবং (ii) নং দ্বারা।

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

উদাহরণ: $(0, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = 2x - x^2$ ফাংশনের জন্য গড় মান উপপাদ্যটির সত্যতা নিরূপণ কর।
গড় মান উপপাদ্য হতে আমরা জানি, $(b - a) f'(c) = f(b) - f(a)$
এখানে $f(x) = 2x - x^2$ একটি বহুপদী ফাংশন। কাজেই x-এর সকল সালের জন্য ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন ও অন্তরীকরণযোগ্য।

যেখানে $a < c < b$

$f(x) = 2x - x^2$

$f'(x) = 2 - 2x \ldots \ldots \ldots (i)$

এখানে, $a = 0, b = 1, 0 < c < 1$

$f(0) = 0$ এবং $f(1) = 2.1 - 1 = 1$

$(b - a) f'(c) = f(b) - f(a)$ বা, $(1 - 0) f'(c) = 1 - 0$ বা, $f'(c) = 1$

(i) হতে $f'(c) = 2 - 2c \quad \therefore 2 - 2c = 1$ বা, $2c = 1$ বা, $c = \frac{1}{2}$

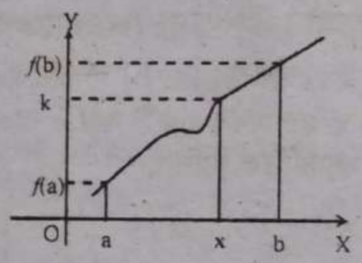
$\therefore \; 0 < \frac{1}{2} < 1$ যা $0 < x < 1$ অর্থাৎ $(0, 1)$ ব্যবধির মধ্যে অবস্থিত।

গড়মান উপপাদ্যটি সত্যতা প্রমাণিত হলো।

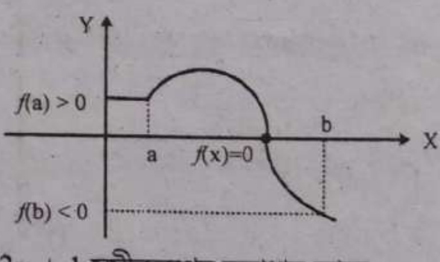
কাজ: $[0, 1]$ ব্যবধিতে $f(x) = e^x$ ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

9.17.5 মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (Intermediate value theorem)

যদি $[a, b]$ আবদ্ধ ব্যবধিতে f অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয় এবং k যে কোনো একটি সংখ্যা $f(a)$ ও $f(b)$ এর মধ্যে অবস্থিত হয় তাহলে $[a, b]$ ব্যবধির মধ্যে কমপক্ষে একটি সংখ্যা থাকবে যেখানে $f(x) = k$



প্রতিজ্ঞা: যদি কোন ফাংশন f, $[a, b]$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $f(a)$ ও $f(b)$ শূন্য না হয় এবং বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের (a, b) ব্যবধিতে কমপক্ষে একটি সমাধান থাকবে।



উদাহরণ: মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে, $[0, 2]$ ব্যবধিতে $x^3 = 3x + 1$ সমীকরণের সমাধান আছে।
সমাধান: $f(x) = x^3 - 3x - 1$ একটি বহুপদী ফাংশন। তাই $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।
আবার, $f(0) = 0^3 - 3.0 - 1 = -1$

$f(2) = 2^3 - 3.2 - 1 = 1$

$\because$ $f(0)$ ও $f(2)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট তাই $f(x)$ এর সমাধান $[0, 2]$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

কাজ: $[-2, 0]$ ব্যবধিতে $x^3 + x + 1 = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য যাচাই কর।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. সরলরেখায় চলমান কোনো কণার t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত। 2 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ এবং থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৪; ব. বো. ১৩]

সমাধান: এখানে, $s = 63t - 6t^2 - t^3 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=2} = 63 - 24 - 12 = 27$$

$\therefore$ 2 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ 27 একক/সেকেন্ড।

বেগ শূন্য হলে কণাটি থেমে যাবে। অর্থাৎ $\frac{ds}{dt} = 0$

$\Rightarrow 63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 + 4t - 21 = 0$

$\Rightarrow t^2 + 7t - 3t - 21 = 0 \Rightarrow t(t+7) - 3(t+7) = 0$

$\Rightarrow (t+7)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -7, 3$

$t \neq -7$ কেননা সময় ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore t = 3$ অর্থাৎ কণাটি থামার পূর্বে 3 সেকেন্ড সময় চলেছিল।

সুতরাং, $t = 3$ হলে, $s = 63 \times 3 - 6 \times 3^2 - 3^3 = 189 - 54 - 27 = 108$.

$\therefore$ থামার পূর্বে কণাটি 108 একক দূরত্ব অতিক্রম করে।

উদাহরণ-2. যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক। [রা: বো: ১৪; চ: বো: ০৮, ১২; কু: বো: ০৪; ব: বো: ০৬; দি: বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= A$ এবং ব্যাসার্ধ $= r$

$\therefore$ ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার $= \frac{dr}{dt}$. যেহেতু ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার ধ্রুবক, কাজেই ধরি, $\frac{dr}{dt} = k$ (ধ্রুবক)

বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার, $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \pi \frac{d}{dt}(r^2) = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi r.k = (2\pi k)r$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} \propto r \quad [\because 2\pi k \text{ ধ্রুবক}]$$

সুতরাং, ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক।

অনুশীলনী-9(G)

1. (i) সরলরেখায় চলমান কোনো কণার t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ সম্পর্ক দ্বারা প্রকাশিত। গতি শুরুর 5 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।
(ii) একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে? [ঢা: বো: ১৪, ০৬; দি. বো. ১৩; রা: বো: ০৯; কু: বো: ১১, ০৫; চ: বো: ০৭; ব: বো: ০৭] [বুয়েট ১৩-১৪]

2. একটি কণা সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন t সময়ে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \sqrt{t}$. দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ ঋণাত্মক এবং বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

3. সরলরৈখিক পথে চলমান কোনো কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে a, b, c ধ্রুবক। t সময়ে কণার বেগ v হলে, দেখাও যে, $v^2 - b^2 = 4a(s - c)$. [কু: বো: ১৪; চ: বো: ০৫; য: বো: ০৫; দি: বো: ০৯]

4. যদি একটি কণা এমনভাবে চলে যে এর দূরত্ব, অনুরূপ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক, তবে দেখাও যে, বেগ সময়ের সমানুপাতিক এবং বেগ পরিবর্তনের হার ধ্রুবক।

5. (a) (0, 1) ব্যবধিতে $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।
(b) উল্লেখিত ব্যবধিতে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।
(i) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$; [0, 4] (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; [2, 4] (iii) $f(x) = \ell nx$; [1, e]

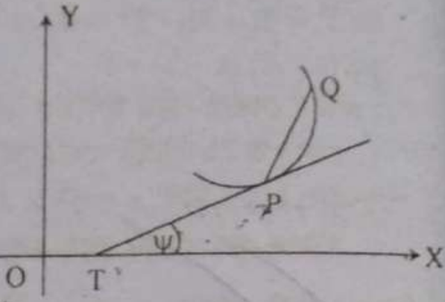
6. মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে, নিম্নোক্ত সমীকরণগুলির উল্লেখিত ব্যবধিতে কমপক্ষে একটি করে সমাধান আছে। (i) $x^3 - 4x + 1 = 0$; [1, 2] (ii) $x^3 + x^2 - 2x = 1$; [−1, 1] (iii) $x^3 - x - 1 = 0$; [1, 2]

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{103}{2}$ একক/সেকেন্ড, 17 একক/সেকেন্ড² (ii) 78 মিটার/সেকেন্ড।

পাঠ-১৩

9.18 স্পর্শকের নতি হিসেবে অন্তরজ (Derivative as a slope of tangent)



মনে করি, $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta, y + \delta y)$ দুইটি নিকটবর্তী বিন্দু। যদি Q বিন্দুটি বক্ররেখার উপর দিয়ে P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হতে থাকে অর্থাৎ $Q \rightarrow P$ হয়, তবে P এবং Q বিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থানকে P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক বলা হয়। Q বিন্দুটি P বিন্দুর যে কোন পার্শ্বে থেকে স্পর্শক হতে পারে।

$\therefore$ P এবং Q বিন্দুগামী PQ সরলরেখার সমীকরণ

$Y - y = \dfrac{y + \delta y - y}{x + \delta x - x}(X - x)$; যখন (X, Y) বক্ররেখার উপর চলমান বিন্দু।

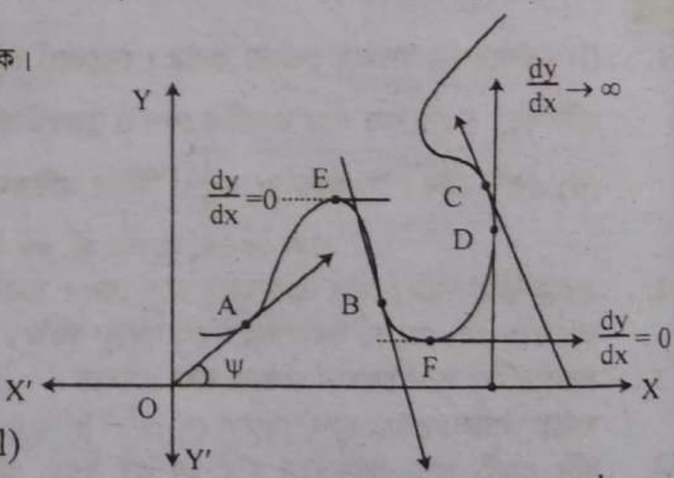
বা, $Y - y = \dfrac{\delta y}{\delta x}(X - x)$

যখন $Q \rightarrow P$ হয় অর্থাৎ $\delta x \rightarrow 0$ হয়, তবে PQ ছেদকটি সীমাস্থ অবস্থায় P বিন্দুতে PT স্পর্শক হবে। অতএব $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y - y = \lim\limits_{\delta x \rightarrow 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}(X - x)$ বা, $Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x)$

সুতরাং $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x)$ এবং স্পর্শকের নতি বা ঢাল $\dfrac{dy}{dx}$

দ্রষ্টব্য: স্পর্শকের বিভিন্ন অবস্থান

চিত্রে A বিন্দুতে যখন ψ সূক্ষ্মকোণ হবে তখন $\dfrac{dy}{dx}$ $(= \tan\psi)$ ধনাত্মক, তখন x এর বৃদ্ধির সাথে y বৃদ্ধি পায়। আবার B ও C বিন্দুতে ψ ঋণাত্মক বা স্থূলকোণ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক।

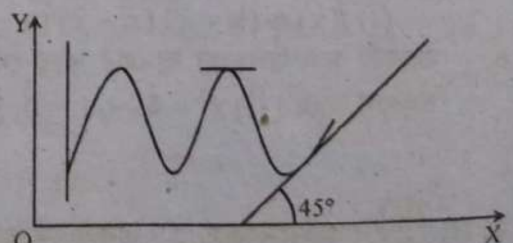


আবার কোন বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = 0$ হলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয় (E ও F বিন্দুতে)। কোন বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ বা $\dfrac{dx}{dy} \rightarrow 0$ হলে সেই বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল (D বিন্দুতে) বা x-অক্ষের উপর লম্ব হয়।

9.18.1 স্পর্শক ও অভিলম্ব (Tangent and normal)

স্পর্শক: উপরের আলোচনা হতে আমরা পাই, $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থিত (x, y) বিন্দুতে বৃদ্ধি হার $\dfrac{dy}{dx}$, ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ট্যানজেন্টের সমান।

কাজেই, $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x, y) তে—



(i) যদি $\dfrac{dy}{dx} = 0$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয়।

(ii) যদি $\dfrac{dy}{dx} = \tan 90°$ বা, $\dfrac{dx}{dy} = \cot 90°$ বা, $\dfrac{dx}{dy} = 0$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব হয়।

(iii) যদি $\frac{dy}{dx} = 1$ হয়, তবে ঐ বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

আবার, যেহেতু $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্দেশ করে, কাজেই উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, যেখানে (X, Y) চলবিন্দু।

অভিলম্ব: স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বকে অভিলম্ব বলে। যেহেতু স্পর্শক ও অভিলম্ব পরস্পর লম্ব, কাজেই স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx}$ হলে অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x) \Rightarrow X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$

বি: দ্র: $y = f(x)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}(x - x_1)$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ: $x - x_1 + \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}(y - y_1) = 0$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $\mathbf{x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0}$ **বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [কু: বো: ০৮; সি: বো: ১৬, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১০; চ: বো: ১৬; ব: বো: ১৫, ১৪, ১১]

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ, $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ ... ... (i)

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $3x^2 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 6x + 4 + 5\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (2xy + 5)\frac{dy}{dx} = -3x^2 - y^2 + 6x - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - y^2 + 6x - 4}{2xy + 5}$

$(1, -1)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{-3 - 1 + 6 - 4}{-2 + 5} = \frac{-2}{3}$

$\therefore (1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y + 1 = \frac{-2}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y + 3 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$

অভিলম্বের সমীকরণ: $(x - 1) - \frac{2}{3}(y + 1) = 0 \Rightarrow 3x - 3 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 5 = 0$

উদাহরণ-2. $\mathbf{x^2 + 2ax + y^2 = 0}$ **বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের ওপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** [চুয়েট ০৯-১০; ঢা. বো. ১৩; কু: বো: ০৬; য: বো: ০৮, ০৩; সি: বো: ১৫; চ: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৭, ০৪; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ, $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ ... ... (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(x + a)}{y}$

যেহেতু স্পর্শকগুলি x-অক্ষের ওপর লম্ব। অর্থাৎ,

$\frac{dy}{dx} = \tan 90° \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cot 90° = 0 \Rightarrow -\frac{y}{(x + a)} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow x(x + 2a) = 0 \therefore x = 0, -2a.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় $(0, 0)$ ও $(-2a, 0)$.

উদাহরণ-3. a-এর মান কত হলে $y = ax(1 + x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে? [বুয়েট ১১-১২; চুয়েট ১৩-১৪; ঢা: বো: ০৪; দি: বো: ১৬; য: বো: ০৭; কু: বো: ০৬; চ: বো: ১২; ব: বো: ০৬, ০৮]

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = ax(1 + x) = ax + ax^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a + 2ax$

মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = a$ ... ... (i)

যেহেতু, স্পর্শক মূলবিন্দুতে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, $\frac{dy}{dx} = a = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

অনুশীলনী-9(H)

1. নিম্নলিখিত বক্ররেখাসমূহের উল্লিখিত বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার $(2, 4)$ বিন্দুতে। [চ: বো: ১৪, ০৮; ব: বো: ০৩; সি: বো: ১১]

(ii) $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে [ঢা: বো: ০৭]

(iii) $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে। [বিআইটি ০০-০১; রা: বো: ০৬]

(iv) $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে। [ঢা: বো: ১২; সি. বো. ১৩]

(v) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$ বৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে। [সি: বো: ০৫]

(vi) $x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$ বৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে [রা: বো: ১১]

(vii) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে। [বুয়েট ১১-১২; দি: বো: ১১]

(viii) $y(x-1)(x-2) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে উক্ত বিন্দুতে। [ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১৪; য: বো: ১০]

2. **(i)** $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ সকল বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ১০; দি. বো. ১৩; কু: বো: ১০, ০৫; সি: বো; ১১]

(ii) $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৩; চ: বো: ০৩]

(iii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [য: বো: ০৪]

(iv) $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 1, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. **(i)** $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iii) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটির $(1, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৩]

4. নিম্নলিখিত বক্ররেখাসমূহের যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

(i) $y = x^3 - 3x + 2$ [রা: বো: ১০, ০৫; দি: বো: ১২; য: বো: ০৯] **(ii)** $y = (x-3)^2(x-2)$ [কুয়েট ০৬-০৭; ঢা: বো: ০৫]

(iii) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ [ব. বো. ১৩] **(iv)** $y^3 = x^2(2a - x)$ [বুয়েট ০৭-০৮; চ: বো: ০৯]

5. নিম্নলিখিত বক্ররেখাসমূহের যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব (y-অক্ষের সমান্তরাল) তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর: **(i)** $y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ [ঢা: বো: ১০; রা. বো. ১৩; চ: বো: ১১; সি: বো: ১২; য. বো. ১৩; ব: বো: ১৪]

(ii) $x^2 + 4y^2 = 8$ [কু: বো; ১১; য: বো: ০৬; দি: বো: ০৯] **(iii)** $y^2 = x^2(a - x)$ **(iv)** $x^2 + 4x + y^2 = 0$ [কু: বো: ০৩]

6. **(i)** $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভুজ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৮, ১২; দি: বো: ১০; কু: বো: ১৩, ০৭; সি: বো: ০৮, ০৪; চ. বো. ১৩; য: বো: ১৬, ০৩, ১২]

(ii) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে? [ঢা.বি. ১৫-১৬; ঢা: বো: ১৪; কু: বো: ১২; য: বো: ১১; রা: বো: ০৯; সি: বো: ১৪; ব: বো: ১২; দি: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১০, ১২]

7. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক কর্তৃক অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের যোগফল ধ্রুবক। [রা: বো: ১৪; কু: বো: ০৯]

উত্তরমালা

1. **(i)** $4x - y - 4 = 0; x + 4y - 18 = 0$ **(ii)** $9x - y - 20 = 0; x + 9y + 16 = 0$
(iii) $4x + 3y + 7 = 0; 3x - 4y + 24 = 0$ **(iv)** $4x + 3y - 7 = 0; 3x - 4y - 24 = 0$
(v) $2x + 3y = 8; 3x - 2y + 1 = 0$ **(vi)** $8x + y - 10 = 0, x - 8y + 15 = 0.$
(vii) $x - 20y = 7, 20x + y = 140$ **(viii)** $x - 2y - 3 = 0; 2x + y - 6 = 0$

2. **(i)** $8, -4, 8$; **(ii)** 1; **(iii)** $\frac{1}{t}$; **(iv)** $(2, -4), \left(\frac{-4}{3}, \frac{302}{27}\right)$

3. **(i)** $yy_1 = 2a(x + x_1)$ **(ii)** $(y - y_1)(x_1^2 - ay_1) = (x - x_1)(y_1^2 - ax_1)$ **(iii)** $x - 1 = 0$

4. **(i)** $(1, 0), (-1, 4)$ **(ii)** $(3, 0), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ **(iii)** $(1, 2), (1, -2)$ **(iv)** $(0, 0), \left(\frac{4}{3}a, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a\right)$

5. **(i)** $(-1, 1), (1, 1)$ **(ii)** $(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0)$ **(iii)** $(0, 0), (a, 0)$ **(iv)** $(-4, 0), (0, 0)$

6. **(i)** $1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ **(ii)** $\sqrt{3}$

পাঠ- ১৪

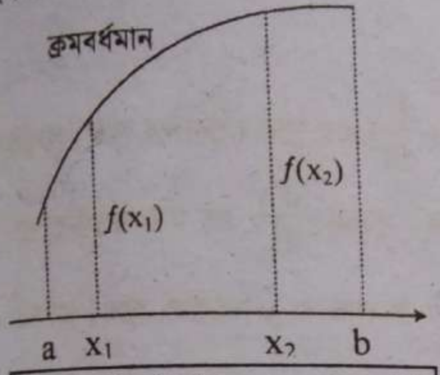
9.19 ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Increasing and decreasing function)

সংজ্ঞা: মনে করি, (a, b) ব্যবধিতে $f(x)$ একটি সংজ্ঞায়িত ফাংশন এবং x_1 ও x_2 উক্ত ব্যবধিতে যেকোনো দুইটি সংখ্যা। তাহলে উক্ত ব্যবধিতে

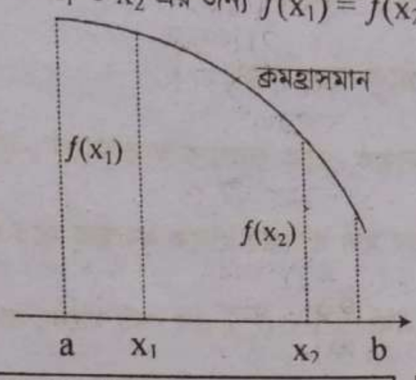
(a) $f(x)$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন হবে যদি $f(x_1) < f(x_2)$ হয় যখন $a < x_1 < x_2 < b$

(b) $f(x)$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন হবে যদি $f(x_1) > f(x_2)$ হয়, যখন $a < x_1 < x_2 < b$

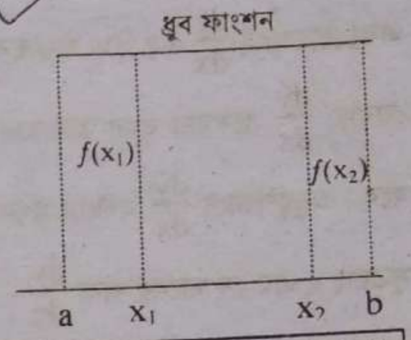
(c) $f(x)$ একটি ধ্রুবক ফাংশন হবে যদি সকল x_1 ও x_2 এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হয়।



$f(x_1) < f(x_2)$ যখন $a < x_1 < x_2 < b$



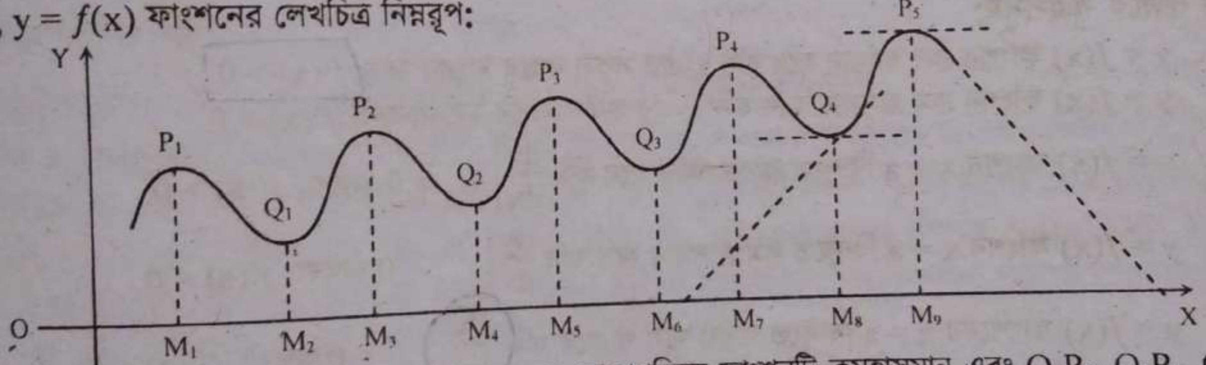
$f(x_1) > f(x_2)$ যখন $a < x_1 < x_2 < b$



$f(x_1) = f(x_2)$ সকল x_1 ও x_2 এর জন্য

9.19.1 লেখচিত্রের সাহায্যে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Increasing and decreasing function graphically)

মনে করি, $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র নিম্নরূপ:



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4 অংশগুলিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান এবং Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, Q_4P_5 অংশগুলিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান। এখানে, $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4, P_5$ বিন্দুগুলিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রম হ্রাসমান নয়। এই বিন্দুগুলিতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বা সর্বনিম্ন মান (চরম মান) রয়েছে।

যেহেতু P_1 বিন্দুর উভয় দিকে (বাম ও ডান দিকে) একটি ক্ষুদ্র ব্যবধি বিবেচনা করা যায় যার প্রত্যেক বিন্দু হতে P_1 বিন্দুতে ফাংশনের মান P_1M_1 বেশী। কাজেই সংজ্ঞানুসারে P_1 বিন্দুতে ফাংশনের সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান। অন্যান্য সর্বোচ্চ মানের বিন্দুগুলি P_2, P_3, P_4 ও P_5 অনুরূপভাবে Q_1, Q_2, Q_3 ও Q_4 বিন্দুগুলিতে ফাংশনের সর্বনিম্ন মান রয়েছে।

চিত্র হতে আরও স্পষ্টত যে কোনো বিন্দুতে সর্বোচ্চমান অপর কোনো বিন্দুর সর্বনিম্ন মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। ফলে সর্বোচ্চ মানকে বৃহত্তম মান না বলে আপেক্ষিক বৃহত্তম মান বা সর্বোচ্চ মান বলা হয়। অনুরূপভাবে সর্বনিম্ন মানকে আপেক্ষিক ক্ষুদ্রতম মান বা সর্বনিম্ন মান বলা হয়।

কোটি বা y এর (i) Q_1 হতে P_2, Q_2 হতে P_3, Q_3 হতে P_4 এবং Q_4 হতে P_5 পর্যন্ত ফাংশনের মান ক্রমবর্ধমান এবং ঐ বক্ররেখার ঐ সকল শাখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ φ উৎপন্ন করে, সুতরাং $\tan\varphi$ বা $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক হয়।

(ii) P_1 হতে Q_1, P_2 হতে Q_2, P_3 হতে Q_3 এবং P_4 হতে Q_4 পর্যন্ত ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান এবং বক্ররেখার ঐ সকল শাখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে স্থূলকোণ α উৎপন্ন করে, সুতরাং $\tan\alpha$ বা $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক হয়।

(iii) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 বিন্দুতে ফাংশনটির বৃদ্ধি বন্ধ হলে এ সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং $\tan\alpha$ বা $\frac{dy}{dx} = 0$. এরূপ বিন্দুতে ফাংশনকে সর্বোচ্চ বলা হয়। সুতরাং যেখানে ফাংশন সর্বোচ্চ সেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং তারপরই $\frac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হয়।

(iv) অনুরূপভাবে Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 বিন্দুতে ফাংশনের হ্রাস পাওয়া বন্ধ হয় ঐ এ সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং $\frac{dy}{dx} = 0$. এরূপ বিন্দুতে ফাংশনকে সর্বনিম্ন বলা হয়। সুতরাং যেখানে ফাংশন সর্বনিম্ন সেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং তারপরই $\frac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হয়।

আবার, $\frac{dy}{dx}$ হ্রাসমান যখন তার মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হতে থাকে। সুতরাং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (শূন্য না হলে) ঋণাত্মক হবে। অনুরূপভাবে $\frac{dy}{dx}$ বর্ধমান যখন তার মান ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হতে থাকে। সুতরাং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান ধনাত্মক হবে।

সুতরাং x এর যে মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, x এর সেই মানের জন্য ঐ ফাংশন বা y সর্বোচ্চ হবে। আবার x এর যে মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, x এর সেই মানের জন্য ঐ ফাংশন বা y সর্বনিম্ন হবে।

দ্রষ্টব্য: আপেক্ষিক বৃহত্তর মান বা সর্বোচ্চ মানকে গুরুমান (Maxima) এবং আপেক্ষিক ক্ষুদ্রতর মান বা সর্বনিম্ন মানকে লঘুমানও (Minima) বলা হয়।

এক নজরে সূত্রসমূহ:

(i) $y = f(x)$ ফাংশন ক্রম বর্ধমান হবে যদি x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $\boxed{f'(x) > 0.}$

(ii) $y = f(x)$ ফাংশন ক্রম হ্রাসমান হবে যদি x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x) < 0$.

(iii) $y = f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে ক্রম বর্ধমান হবে যদি $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} > 0$ অথবা, $f'(a) > 0$.

(iv) $y = f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে ক্রম হ্রাসমান হবে যদি $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} < 0$ অথবা, $f'(a) < 0$.

(v) $y = f(x)$ ফাংশনের $x = a$ বিন্দুতে গরিষ্ঠ মান থাকবে যদি $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a} < 0$ অথবা, $f''(a) < 0$.

(vi) $y = f(x)$ ফাংশনের $x = a$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ মান থাকবে যদি $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a} > 0$ অথবা, $f''(a) > 0$.

উদাহরণ: যে সকল ব্যবধিতে $f(x) = \cos x, 0 < x < 2\pi$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায় এবং হ্রাস পায় সে সকল ব্যবধি নির্ণয় কর।

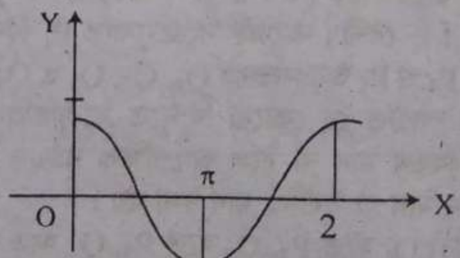
সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন:

$f(x) = \cos x, 0 < x < 2\pi$

$\therefore \quad f'(x) = -\sin x$

এখন $f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin x = 0$

$\therefore \quad x = \pi$



$x = \pi$ বিন্দুটি $0 < x < 2\pi$ ব্যবধিকে $0 < x < \pi$ এবং $\pi < x < 2\pi$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$0 < x < \pi$ ব্যবধিতে, $\sin x > 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

সুতরাং $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন হ্রাস পায়।

$\pi < x < 2\pi$ ব্যবধিতে, $\sin x < 0$, কাজেই $f'(x) > 0$ সুতরাং $\pi < x < 2\pi$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

কাজ: $f(x) = \sin x; 0 \le x \le 2\pi$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

9.20 চরম বিন্দু (Extreme Point)

$y = f(x)$ বক্ররেখার x এর মান পরিবর্তনের সাথে $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ মান পরিবর্তন হয়। বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ অর্থাৎ স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল সেগুলি চরমবিন্দু।

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান $f(a)$ সর্বোচ্চ হবে যদি $x \in (a - h, a + h)$ যেখানে h ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা এর জন্য $f(x) < f(a)$ হয়

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান $f(a)$ কে সর্বনিম্ন হবে $x \in (a - h, a + h)$ যদি যেখানে h ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা এর জন্য $f(x) > f(a)$ হয়। সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানকে ফাংশনের চরম মান বলা হয়।

উদাহরণ: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ফাংশনটির চরম বিন্দুগুলি নির্ণয় কর এবং মানগুলিও নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \text{ এবং } \boxed{f''(x) = 12x - 6}$$

আমরা জানি, চরম বিন্দুতে $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \therefore x = -1, 2$

এখন, $f''(-1) = -18$ এবং $f''(2) = 18$

$\therefore x = -1$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান এবং $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান।

অর্থাৎ $x = -1$ ও $x = 2$ চরম বিন্দুসমূহ, যেখানে চরমমান সমূহ $f(-1) = 7$ এবং $f(2) = -20$

9.21 ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (Maximum and minimum value of a function)

ক্যালকুলাস এ কোনো ফাংশন $f(x)$ এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান বলতে বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মানকে বোঝায় না। $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মানকে সর্বোচ্চ বলা হবে, যদি $x = a$ বিন্দুর নিকটস্থ যে কোনো মানের চেয়ে $f(a)$ বড় হয়। অনুরূপভাবে, $x = b$ এর সন্নিকটস্থ x-এর যে কোনো মানের জন্য $f(x)$ এর মানের তুলনায় $f(b)$ এর মান যদি ক্ষুদ্র হয় তবে ঐ মানকে সর্বনিম্ন মান বলা হয়। স্মরণ রাখতে হবে যে কোনো ফাংশনে একাধিক সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান থাকতে পারে এবং সর্বনিম্ন মান সর্বোচ্চ মানের চেয়ে বড় হতে পারে।

গাণিতিকভাবে: $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান $f(a)$ কে সর্বোচ্চ বলা হয়, যদি যে কোনো $x \in (a - h, a + h)$, যেখানে h ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা এর জন্য $f(x) < f(a)$ হয়।

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান $f(a)$ কে সর্বনিম্ন বলা হয়, যদি যে কোনো $x \in (a - h, a + h)$, যেখানে h ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা এর জন্য $f(x) > f(a)$ হয়।

9.21.1 চরম মান নির্ণয়ের পদ্ধতি

(i) দেওয়া ফাংশনটিকে $f(x)$ ধরতে হবে।

(ii) $f'(x)$ এবং $f''(x)$ নির্ণয় করতে হবে।

(iii) $f'(x) = 0$ ধরে, x-এর মান (ধরি x এর মানগুলি a, b, c ইত্যাদি) নির্ণয় করতে হবে।

(iv) $x = a$ এর জন্য $f''(a)$ বের করতে হবে। যদি $f''(a) > 0$ হয় তবে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান বা লঘুমান থাকবে এবং যদি $f''(x) < 0$ হয় তবে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বা গুরুমান থাকবে।

(v) অনুরূপভাবে $x = b, c$ ইত্যাদির জন্য চরম মান নির্ণয় করতে হবে।

দ্রষ্টব্য: $f''(x) = 0$ হলে ফাংশনের কোনো চরমমান থাকবে না। $f''(a) = 0$ হলে পরবর্তী পর্যায়ের অন্তরক সহগ নির্ণয় করে ফাংশনের চরম মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ **এর সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।**

[ঢা: বো: ০৯, ০৪, ১২; রা: বো: ১৩, ০৭; কু: বো: ০৭; য: বো: ০৯; চ: বো: ০৩; সি: বো: ০৬; দি: বো:, ব: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১৪]

সমাধান: $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$ এবং $f''(x) = 12x - 42$

সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের জন্য,

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 42x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - x + 6 = 0$

$\Rightarrow x(x-6) - 1(x-6) = 0 \Rightarrow (x-6)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 6, 1$

এখন $f''(6) = 72 - 42 = 30 > 0$

সুতরাং $x = 6$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান আছে এবং উক্ত মান

$f(6) = 2.6^3 - 21.6^2 + 36.6 - 20 = -128$

আবার, $f''(1) = 12 - 42 = -30 < 0$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান আছে এবং উক্ত মান $f(1) = 2 - 21 + 36 - 20 = -3$

উদাহরণ-2. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ **এর কোনো সর্বনিম্ন বা সর্বোচ্চ মান নেই।**

[ঢা: বো: ১৬; য: বো: ১৪, ০৬; কু. বো. ১৩; সি: বো: ০৯, ০৩; ব: বো: ১৪, ১১]

সমাধান: মনে করি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3\{(x-1)^2 + 1\}$ যা সর্বদাই ধনাত্মক।

সুতরাং, x-এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $f'(x)$ শূন্য হতে পারে না।

কাজেই ফাংশনটির কোনো সর্বোচ্চ মান বা সর্বনিম্ন মান নেই।

উদাহরণ-3. $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x \,;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ **ফাংশনটির সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

$\therefore f'(x) = 6\sin x \cos x - 8\cos x \sin x = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$

সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0$ অথবা π সুতরাং, $x = 0$ অথবা $\frac{\pi}{2}$

আবার, $f''(x) = -2\cos 2x \quad \therefore f''(0) = -2 < 0$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান আছে এবং উক্ত মান $f(0) = 0 + 4 = 4$

আবার, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\pi = 2 > 0$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান আছে এবং উক্ত মান $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 0 = 3$

উদাহরণ-4. $(0, 9)$ **ব্যবধিতে** $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ **ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$

$f'(x) = 3x^2 - 36x + 96$

$f''(x) = 6x - 36$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য $f'(x) = 0$

$3x^2 - 36x + 96 = 0$ বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$ বা, $x^2 - 4x - 8x + 32 = 0$

বা, $x(x-4) - 8(x-4) = 0$ বা, $(x-4)(x-8) = 0 \quad \therefore x = 4, 8$

যখন $x = 4$ তখন $f''(x) = f''(4) = 6 \times 4 - 36 = -12 < 0$

$\therefore$ ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ।

$\therefore f(4) = 4^3 - 18(4)^2 + 96 \times 4 = 64 - 288 + 384 = 160$

যখন $x = 8$ তখন $f''(x) = f''(4) = 6 \times 8 - 36 = 48 - 36 = 12 > 0$

$\therefore$ ফাংশনটির মান সর্বনিম্ন।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $f(8) = 8^3 - 18 \times 8^2 + 96 \times 8 = 512 - 1152 + 768 = 128$

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান 160 এবং সর্বনিম্ন মান 128

উদাহরণ-5. $y = 3x^2 - 2x - 4$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

ক. x এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের বক্ররেখার বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ও হ্রাসপ্রাপ্ত অঞ্চল নির্ণয় পূর্বক চরম মান নির্ণয় কর। ৪

গ. বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + 10y - 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব। ৪

সমাধান: ক. ধরি, $y = x^{\sin^{-1}x}$ $\therefore \ln y = \sin^{-1}x \ln x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right\} = x^{\sin^{-1}x}\left\{\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$ **(Ans.)**

খ. প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ, $y = 3x^2 - 2x - 4$ .... (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x - 2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6$

এখন, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$ বিন্দুটি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < \frac{1}{3}$ ও $x > \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে $\frac{dy}{dx} < 0$ $\therefore x < \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়।

আবার, $x > \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে $\frac{dy}{dx} > 0$ $\therefore x > \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

এখানে, $x = \frac{1}{3}$ অবস্থানসূচক বিন্দুটি সন্ধিবিন্দু। এখন, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{1}{3}} = 6 > 0$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ অবস্থানসূচক বিন্দুতে ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান এবং উক্ত লঘিষ্ঠমান

$= 3.\frac{1}{9} - 2.\frac{1}{3} - 4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 4 = \frac{1-2-12}{3} = \frac{-13}{3}$

গ. প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ, $y = 3x^2 - 2x - 4$ .... (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x - 2$

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল $= 6x - 2$

আবার, $x + 10y - 7 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{1}{10}$

শর্তমতে, $-\frac{1}{10}(6x - 2) = -1 \Rightarrow 6x - 2 = 10 \Rightarrow 6x = 12$ $\therefore x = 2$

(i) নং এ x এর মান বসিয়ে, $y = 3 \times 4 - 2 \times 2 - 4 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শক $x + 10y - 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব হবে।

$\therefore$ (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= 6.2 - 2 = 10$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 4 = 10(x - 2) \Rightarrow 10x - y - 16 = 0$ **(Ans.)**

উদাহরণ-6. দৃশ্যকল্প—১: $\tan\theta = \frac{a+bx}{a-bx}$ এবং দৃশ্যকল্প—২: $f(x) = \cos x$

ক. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\frac{d\theta}{dx}$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $y = f(2\sin^{-1}x)$ হলে, দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ ৪

সমাধান: ক. মনে করি, $x = \frac{\pi}{2} + h$ $\therefore$ যখন, $x \to \frac{\pi}{2}$ তখন, $h \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

খ. দেওয়া আছে, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\frac{bx}{a}}{1-\frac{bx}{a}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)$ [ধরি, $\frac{bx}{a} = \tan\alpha$]

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}\right) = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{4} + \left(\tan^{-1}\frac{bx}{a}\right)$$

এখন, $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{bx}{a}\right) = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{bx}{a}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\cdot\frac{b}{a} = \frac{a^2}{a^2+b^2x^2} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}$

গ. দেওয়া আছে, $y = f(2\sin^{-1}x)$

বা, $y = \cos(2\sin^{-1}x)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = -\sin(2\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(2\sin^{-1}x)$

বা, $y_1 = -\sin(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_1^2 = \sin^2(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{4}{1-x^2}$

বা, $(1-x^2)y_1^2 = 4\{1-\cos^2(2\sin^{-1}x)\}$

$\therefore (1-x^2)y_1^2 = 4(1-y^2)$

x-এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = -4.2yy_1$

বা, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = -4y$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ]

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ **(দেখানো হলো)**

পাঠ-১৫ ও ১৬

অনুশীলনী-9(I)

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির সর্বনিম্ন মান ও সর্বোচ্চ মান (লঘিষ্ঠ মান ও গরিষ্ঠ মান) নির্ণয় কর:
   (i) $x^3-3x^2-45x+13$ [ঢা: বো: ১৩, ০৩; কু: বো: ১২; রা: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১১, ০৯; সি: বো: ০৮; ব: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১১]
   (ii) $x^4-8x^3+22x^2-24x+5$ [কু: বো: ০৪]
   (iii) x^3-6x^2+9x+5 [চ: বো: ০৪; সি. বো. ১৩]
   (iv) $x(12-2x)^2$ [বুয়েট ১২-১৩; চ: বো: ১৬; য: বো: ০৫]
   (v) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$ [য: বো: ০৭]
   (vi) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ [সি: বো: ০৬; চ. বো. ১৩; ব: বো: ০৩]
   (vii) $2x^3-9x^2+12x+5$ [রা: বো: ১১]
   (viii) x^3-5x^2+3x+2 [মাদ্রাসা: বো: ১২]
2. দেখাও যে, $x^3-6x^2+24x+4$ ফাংশনের আপেক্ষিক লঘুমান বা গুরুমান নেই। [য: বো: ১১]
3. $(0, 2)$ ব্যবধিতে $3x^4-2x^3-6x^2+6x+1$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। [দি: বো: ১০]
4. দেখাও যে, $\dfrac{l\text{n}x}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\dfrac{1}{e}$ [ঢা: বো: ০৭; কু: বো: ০৯]
5. দেখাও যে, $\dfrac{x}{l\text{n}x}$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান e [বুয়েট ০১-০২; য. বো ১৩]
6. দেখাও যে, $4e^x+9e^{-x}$ ফাংশনের আপেক্ষিক ক্ষুদ্রতম মান 12
   [কু: বো: ১০; রা: বো: ০৮, ০৩, ১২; চ: বো: ১৪; দি: বো: ১৫, ১৪; সি: বো: ১২; ব: বো: ১০, ০৫]
7. দেখাও যে, $x+\dfrac{1}{x}$ ফাংশনের গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
   [কুয়েট ০৯-১০; ঢা: বো: ১১, ০৫; চ: বো: ১৫, ১০; সি: বো: ১৪, ১০; য: বো: ১০, ১২; রা: বো: ১৫, ০৬; কু: বো: ০৮, ০৩; ব: বো: ১৬, ০৯]
8. $1+2\sin x+3\cos^2 x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান ও সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। [কুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ০৮]
9. দেখাও যে, $x=\frac{\pi}{6}$ বিন্দুতে $\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান এবং উক্ত মান নির্ণয় কর।
10. (i) $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $\sin x+\cos 2x$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।
    (ii) $[0, 3]$ ব্যবধিতে $x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।
11. দেখাও যে, $x=\frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে $\sin x\,(1+\cos x)$ ফাংশনটির আপেক্ষিক বৃহত্তম মান রয়েছে।
12. (i) দেখাও যে, $f(x)=x^3-3x^2+18x+15$ একটি x এর ক্রমবর্ধমান ফাংশন।
    (ii) দেখাও যে, $f(x)=1-x-x^3$ একটি x এর ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।
    (iii) যে সকল ব্যবধিতে $f(x)=x^3-3x+5$ ফাংশনটি বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়, সেই সকল ব্যবধি নির্ণয় কর।
    (iv) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+30$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।
    (v) $f(x)=3x^2-2x+4,\ -1\le x\le 2$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়, কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=$ কত?
   ক. $\frac{5}{2}$ খ. $\frac{5}{3}$ গ. $\frac{5}{4}$ ঘ. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^5})=$ কত?
   ক. $10x^9$ খ. $10x^{11}$ গ. $\frac{5}{2}x^{\frac{9}{2}}$ ঘ. $\dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5}}$

3. $y = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ = কত?

ক. $\frac{1}{4}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. 1

4. $y = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ = কত?

ক. $\frac{1}{1+x^2}$ খ. $-\frac{1}{1+x^2}$ গ. $\frac{2}{1+x^2}$ ঘ. $\frac{-2}{1+x^2}$

5. $y = \tan^{-1}(\sin e^x)$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ = কত?

ক. $\frac{\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ খ. $-\frac{\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ গ. $\frac{e^x \cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ ঘ. $-\frac{e^x \cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$

6. $x^2 + xy + y^2 = 1$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ = কত?

ক. $\frac{x+2y}{y+2x}$ খ. $\frac{2x+y}{x+2y}$ গ. $\frac{-2x-y}{x+2y}$ ঘ. $\frac{-x-2y}{y+2x}$

7. $y = \cos x + \sin x$ হলে, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ = কত?

ক. $\cos x - \sin x$ খ. $-\cos x - \sin x$ গ. $\cos x + \sin x$ ঘ. $\cos^2 x - \sin^2 x$

8. $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx}$ = ?

ক. $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ খ. $\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ ঘ. $\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

9. $y = \sin x$ হলে $y_4 - y$ = কত?

ক. 0 খ. 1 গ. $\sin x$ ঘ. $\cos x$

10. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ এর চরম বিন্দু কোনটি?

ক. $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$ খ. $\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$ গ. $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ ঘ. $\left(\frac{1}{3}, \frac{19}{3}\right)$

11. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে ঢাল কত?

ক. -2 খ. $-\frac{4}{3}$ গ. -1 ঘ. $\frac{3}{4}$

12. $y = x^3 - 7x^2 + 5x$ বক্ররেখার $(5, 4)$ বিন্দুতে ঢাল কত?

ক. 14 খ. 12 গ. 10 ঘ. 9

13. $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার $(2, 3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢাল কত?

ক. -4 খ. $-\frac{1}{4}$ গ. $\frac{1}{4}$ ঘ. 4

14. নিচের কোন বিন্দুতে $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ বক্ররেখার স্পর্শকের ঢাল 1?

ক. $(-1, 1)$ খ. $(2, -3)$ গ. $(2, -4)$ ঘ. $(3, -5)$

15. $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে নিচের কোন বিন্দুতে ছেদ করে?

ক. $(2, 1)$ খ. $(4, 5)$ গ. $(5, 0)$ ঘ. $(7, 0)$

16. নিচের কোন ফাংশনটির জন্য $f(x) = f'(x)$?

ক. $5e^x$ খ. $\frac{x \sin x}{1+\cos x}$ গ. $\frac{\ln x}{x}$ ঘ. $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

17. t সময়ে কোনো কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = t^3 - 12t^2 + 6t + 8$. যখন কণাটির ত্বরণ শূন্য তখন এর বেগ কত?
ক. -48 খ. -42 গ. 42 ঘ. 48

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ ফাংশনটি কোন ধরনের?
ক. ক্রমবর্ধমান খ. ক্রমহ্রাসমান গ. ধ্রুব ঘ. অভেদ

19. $f(x) = \sin x$ ও $g(x) = x$ হলে—
i. $\lim\limits_{x \to 0} (fog)(x) = 0$ ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ iii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{(gof)(x)} = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

20. $y = x^5$ এবং $z = \log_a x$ হলে—
i. $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ ii. $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e$ iii. $\frac{d}{dx}(yz) = 5x^3 \log_a e$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

21. $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ বক্ররেখার উপর $A(-1, 0)$ একটি বিন্দু হলে—
i. A বিন্দুতে ঢাল $= 8$
ii. A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $8x + y + 8 = 0$
iii. A বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের সমীকরণ, $x + 8y + 1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. $y = \sin e^x$ হলে—
i. $\frac{dy}{dx} = \cos e^x$ ii. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} y) = e^x$ iii. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} y) = \frac{e^x \cos e^x}{1 + \sin^2 e^x}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. $f(x) = px + \frac{q}{x}$ হলে—
i. $f'(x) = p - \frac{q}{x^2}$ ii. $f''(x) = \frac{2q}{x^3}$ iii. $f'''(x) = \frac{6q}{x^4}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $y = x^3 + 2x^2 + 4$ বক্ররেখার—
i. ঢাল $= 3x^2 + 4x$
ii. $(1, 2)$ বিন্দুতে ঢাল 7
iii. $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $7x - y + 5 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$ হলে,
i. $f'(x) = 2e^{2x}$ ii. $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ iii. $\frac{d}{dx}\{(gof)(x)\} = 2$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (26 ও 27) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = 5x^4 - 3x^3 + 5x + 2$

26. $y_2 =$ কত?

ক. $4x^3 - 9x^2 + 5$ খ. $20x^2 + 60x$ গ. $60x^2 - 18x$ ঘ. $9x^2 + 5$

27. $x = 2$ বিন্দুতে $y_3 =$ কত?

ক. 204 খ. 222 গ. 258 ঘ. 276

নিচের তথ্যের আলোকে (28 ও 29) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = \lambda x(1 - x)$ একটি বক্ররেখা।

28. বক্ররেখাটির ঢাল কত?

ক. $2\lambda x$ খ. $4\lambda x$ গ. $\lambda - 2\lambda x$ ঘ. $\lambda - 4\lambda x$

29. মূলবিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করলে $\lambda =$ কত?

ক. $-\sqrt{3}$ খ. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\sqrt{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে (30 ও 31) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = 3\sin^2x + 4\cos^2x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

30. $f'(x) =$ কত?

ক. $-2in2x$ খ. $-\sin 2x$ গ. $\frac{1}{2}\sin 2x$ ঘ. $7\sin 2x$

31. $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান কত?

ক. -2 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

নিচের তথ্যের আলোকে (32 ও 33) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$Z = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

32. $\sqrt{Z} =$ কত?

ক. $\tan\frac{x}{2}$ খ. $\cot\frac{x}{2}$ গ. $\tan x$ ঘ. $\cot x$

33. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{Z}) =$ কত?

ক. $\frac{1}{4}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. 1

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

34. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\cos x}}{\cos x}$ এর মান কত? [DU 16-17]

ক. e খ. 1 গ. $\frac{1}{e}$ ঘ. 0

35. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$ কত? [DU 16-17]

ক. 1 খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. 0

36. $y = \ln(ax^2)$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? [DU 16-17]

ক. $\frac{1}{ax^2}$ খ. $\frac{2a}{x}$ গ. $\frac{a}{x^2}$ ঘ. $\frac{2}{x}$

37. যদি $y = \sin^{-1}(\sin x)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [DU 16-17]

ক. $\sin x$ খ. $\cos x$ গ. x ঘ. 1

38. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য? *[DU.16-17, 13-14, 10-11]*

ক. $\pm\frac{3}{2}$ খ. ± 2 গ. ± 1 ঘ. 1

39. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$ = কত? [DU 15-16]

ক. $\frac{7}{6}$ খ. $-\frac{7}{6}$ গ. 1 ঘ. -1

40. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 6x}{2x^2 + 5}$ এর মান কত? *[DU. 14-15]*

ক. 0 খ. $\frac{3}{2}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 1

41. $x = 0$ বিন্দুতে $y = x + e^x$ এর লেখচিত্রে স্পর্শকের সমীকরণ হবে কোনটি? *[DU. 14-15]*

ক. $y = x$ খ. $y = x + 1$ গ. $y = 2x + 1$ ঘ. $y = 2x$

42. $e^{xy+1} = 5$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? *[DU. 14-15]*

ক. $\frac{\ln 5}{xy}$ খ. $\frac{\ln 5}{-x^2}$ গ. $-\frac{y}{x}$ ঘ. $\frac{\ln 5}{y}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ এর মান কত? *[DU. 13-14]*

ক. 1 খ. -1 গ. $1/2$ ঘ. $-1/2$

44. $\sin(ax + b)$ এর n-তম অন্তরজ কোনটি? *[DU. 12-13]*

ক. $a^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$ খ. $a^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$

গ. $(-1)^n a^n \sin(ax + b)$ ঘ. $(-1)^n a^n \cos(ax + b)$

45. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\ln(1 + x)}{x \sin x}$ এর মান- *[DU. 10-11]*

ক. 0 খ. 1 গ. -1 ঘ. ∞

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+1}}{5^n - 7^n}$ এর মান কত? *[BUET. 12-13]*

ক. $\frac{1}{5}$ খ. -5 গ. $\frac{1}{7}$ ঘ. -7

47. $y = x^{\ln x}$ হলে $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ এর মান কত? *[BUET. 12-13]*

ক. $\frac{2\ln x}{x}$ খ. $\frac{y}{x}(2\ln x)$ গ. $2\ln x$ ঘ. $2y\ln x$

48. $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ হলে $2x^2y'' - xy'$ কত হবে? *[BUET. 12-13]*

ক. 0 খ. y গ. $2y$ ঘ. $2y^2$

49. x এর মান কত হলে $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে? *[BUET. 12-13]*

ক. $-\frac{1}{e}$ খ. $\frac{1}{e}$ গ. $-e$ ঘ. e

50. $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$ হবে $\frac{dy}{dx}$ = কত? *[BUET. 12-13]*

ক. 1 খ. −1 গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 2

51. $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1, (a > 0)$ এর $x = p$ এবং $x = q$ বিন্দুতে যথাক্রমে স্থানীয় গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান আছে। $p^2 = q$ হলে a এর মান কত? *[BUET. 11-12]*

ক. 2 খ. 3 গ. 5 ঘ. 6

52. c এর মান কত হলে $y = cx(1 + x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে তার স্পর্শক অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করবে? *[BUET. 11-12; RUET. 11-12]*

ক. $\sqrt{3}$ খ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ গ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

53. $f(x) = 2^{-4x}$ হলে $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ এর মান কত হবে? *[BUET. 11-12]*

ক. $-4 \times 2^{-4x} \log_e 2$ খ. $4 \times 2^{-4x} \log_e 2$ গ. $2^{-4x} \log_e 2$ ঘ. $-4x.2^{-4x-1}$

54. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\log_e(1 + x)}$; $0 < x < 1$ এর মান কত? *[BUET. 10-11]*

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. $\frac{1}{3}$

55. $y = \sin^{-1}\left[\frac{4\sqrt{x}}{1 + 4x}\right]$ হলে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4, 2)}$ এর মান হচ্ছে— *[BUET. 10-11]*

ক. 4 খ. $\frac{1}{9}$ গ. $\frac{1}{17}$ ঘ. কোনটিই নয়

56. x এর যে মানের জন্য $f(x) = \sin^3 x \cos x$, $(0 < x < \pi)$ এর মান বৃহত্তম হবে তা হচ্ছে— *[BUET. 10-11]*

ক. $\frac{\pi}{12}$ খ. $\frac{\pi}{6}$ গ. $\frac{\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{3}$

57. k এর কোন মানের জন্য $\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2e^{-4x} + kx}{x^2} = -15$ হবে? *[KUET. 13-14]*

ক. 0 খ. −3 গ. −20 ঘ. সবগুলি

58. $y = \sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? *[KUET 13-14]*

ক. −1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 2

59. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 3^{-x} - 2x \log_e 3}{x - \sin x}$ এর মান কোনটি? *[KUET 12-13]*

ক. $2(\log_e 3)^3$ খ. $2(\log_e 3)^2$ গ. $(2\log_3 e)^3$ ঘ. $(2\log_3 e)^2$

60. $y = x^2 \log x$ হলে y_3 এর মান হলো— *[KUET 12-13, 06-07, 05-06]*

ক. 7x খ. $\frac{7}{x}$ গ. 2x ঘ. $\frac{2}{x}$

61. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ এর মান কোনটি? *[KUET 10-11]*

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

62. $x = \tan(\ln y)$ হলে $\frac{y_2}{y_1}$ এ মান কোনটি? *[KUET 10-11]*

ক. $\frac{1 + x^2}{2x - 1}$ খ. $\frac{2x - 1}{1 + x^2}$ গ. $\frac{1 + x^2}{2x - 1}$ ঘ. $\frac{1 - 2x}{1 + x^2}$

63. x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? *[KUET 10-11; CUET. 10-11]*

ক. $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ খ. $\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x\cos\sqrt{x}}}$ গ. $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sqrt{\sin\sqrt{x}}}}$ ঘ. None

64. $y=\frac{1}{x}$ হলে y এর 20 তম অন্তরীকরণ কত? *[KUET 10-11, CUET 10-11]*

ক. $\frac{20!}{x^{20}}$ খ. $\frac{20!}{x^{21}}$ গ. $\frac{21!}{x^{21}}$ ঘ. None

65. নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সরলরেখায় চলমান বস্তুর সরণ $s=6-2t+3t^3$ হলে $t=1$ sec পর বস্তুর ত্বরণ কত হবে? *[RUET. 14-15]*

ক. 12 খ. 16 গ. 18 ঘ. 20

66. $f(x)=x(2a-x)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? *[RUET 13-14]*

ক. a খ. 2a গ. a^2 ঘ. $2a^2$

67. $y=\sqrt{\sec x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কোনটি? *[RUET 13-14]*

ক. $\frac{y\tan x}{2}$ খ. $\frac{\tan x}{2}$ গ. cot x ঘ. $\frac{\cot x}{2}$

68. $f(\theta)=\cos\theta+\sin\theta$ হলে θ এর কোন মানের জন্য $f'(\theta)=0$ হবে? *[RUET 12-13]*

ক. 0 খ. 1 গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. $\frac{\pi}{4}$

69. $y=x^2(1-x)$ এর সর্বোচ্চ মান কত? *[RUET 12-13]*

ক. $\frac{1}{27}$ খ. $\frac{2}{27}$ গ. $\frac{4}{27}$ ঘ. None

70. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ এর মান কত? *[RUET 11-12]*

ক. $-\frac{1}{2}$ খ. $-\frac{1}{3}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. $\frac{1}{2}$

71. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$ এর মান কোনটি? *[RUET 11-12]*

ক. $-\frac{1}{8}$ খ. $-\frac{1}{4}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ এর মান কত? *[RUET 10-11]*

ক. $-\infty$ খ. ∞ গ. e ঘ. $\frac{1}{e}$

73. $f(x)=x+\sin x$ হলে x এর কোন মানের জন্য $f'(x)=0$ হবে? *[BUTEX 12-13]*

ক. $\frac{\pi}{5}$ খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. π

74. $y=\frac{2}{x}$ বক্ররেখার $x=\frac{1}{3}$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? *[BUTEX 12-13]*

ক. −16 খ. 16 গ. −18 ঘ. 18

75. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ এর মান— *[BUTEX 12-13]*

ক. −1 খ. 0 গ. 1 ঘ. e

76. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 7x}$ এর মান— *[BUTEX 11-12]*

ক. $\frac{5}{7}$ খ. $\frac{7}{5}$ গ. 0 ঘ. $\frac{25}{7}$

77. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x})$ এর মান কোনটি? *[BUTEX 11-12]*

ক. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ খ. $\frac{1}{2x}$ গ. $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$ ঘ. $2\sqrt{x}$

78. $y = 10^{\log(\sin x)}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? *[CUET 11-12]*

ক. $10^{\log(\sin x)}\log_e 10\cot x$ খ. $10^{\log(\sin x)}\log_e 10\sin x$
গ. $10^{\log(\sin x)}\log_e 10$ ঘ. None

79. $\lim_{x\to\infty}\{\ell n(3x-1)-\ell n(2x+7)\}$ = কত?*[Ch. U. 14-15]*

ক. $\frac{3}{2}$ খ. $\ln\frac{3}{2}$ গ. $\ln\frac{5}{2}$ ঘ. $\ln\frac{7}{4}$

80. x কে পরিবর্তনশীল ধরে $\log(x-\sqrt{x^2-1})$ এর অন্তরজ কোনটি? *[KU. 14-15]*

ক. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ খ. $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$ গ. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x}$ ঘ. $2x\sqrt{x^2-1}$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. একটি বৈদ্যুতিক তারের মোট আয়তন V। খুঁটিতে ঝুলন্ত অবস্থায় টান খাওয়ার কারণে তারের দৈর্ঘ্য (L) বেড়ে যায় এবং তারের ব্যাসার্ধ r হ্রাস পায়। এছাড়া বৈদ্যুতিক তারের রোধ R, দৈর্ঘ্য (L) এর সাথে সমানুপাতে এবং ব্যাসার্ধের সাথে বর্গের ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়।

ক. $V = 1$ ঘন মি. এবং তারটির ব্যাস $\frac{1}{50}$ মি. হলে তারের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. r এর সাপেক্ষে দৈর্ঘ্যের একটি ফাংশন L(r) বের করে $\left(\frac{d^nL}{dr^n}\right)$ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, রোধ পরিবর্তনের হার $\frac{dR}{dL}\propto L$.

2. $f(x) = \sqrt{x}$

ক. $\frac{d}{dx}e^{\sin\{f(x)\}}$ এর মান কত?

খ. দেখাও যে, $\frac{2\ln\{f(x)\}}{\{f(x)\}^2}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{e}$.

গ. দেখাও যে, $f(x)+f(y)=f(a)$ বক্ররেখার যে কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক কর্তৃক অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের যোগফল ধ্রুবক।

3. একটি বক্ররেখার সমীকরণ $y = 4x^3+3x^2-6x+1$

ক. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. [−1, 2] ব্যবধিতে গড় মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

4. $u = a(\theta + \sin\theta)$, $v = a(1 - \cos\theta)$ এবং $z = \ell n\,[x + \sqrt{a^2 + x^2}]$

ক. $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \ldots\ldots \infty}}}$ হলে $(2y - 1)\dfrac{dy}{dx} + \sin x =$ কত?

খ. $\left.\dfrac{d^2v}{du^2}\right|_{\theta = 0}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $(a^2 + x^2)\dfrac{d^2z}{dx^2} + x\dfrac{dz}{dx} = 0$

5. $f(x) = \cos x$ একটি বৃত্তীয় ফাংশন।

ক. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{\sin^{-1} x^6})$ বের কর।

খ. দেখাও যে, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - 1}{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$

গ. $y = \sin\left\{f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right\}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx}\tan x + y\{f(x)\}^2 = 0$

6. $g(x) = (x + 2)(x - 2)$ এবং $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

ক. মূল নিয়মে $(x + 2)^2$এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. $g(x)$ বক্ররেখা ও x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $h(x)$ ফাংশনের বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

7. সরলরৈখিক পথে চলমান কোনো কণা t সময়ে $s = pt^2 + qt + r$ দূরত্ব অতিক্রম করে, যেখানে p, q, r ধ্রুবক।

ক. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin^{-1}\theta}{\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. t সময়ে কণার বেগ v ও ত্বরণ f হলে দেখাও যে, $ft - v + q = 0$

গ. $s_1 = st$ হলে কণাটি থেমে যাবার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর, যেখানে $p = -1, q = -6$ ও $r = 63$।

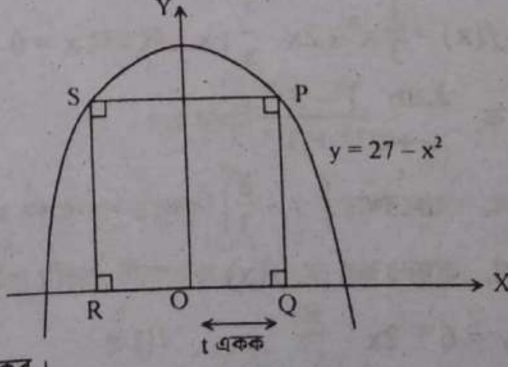
8. $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$ একটি ফাংশন এবং $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x - 5y + 2 = 0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

ক. দেখাও যে, $\dfrac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$

খ. $f(x)$ এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

গ. (1, 1) বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9.



চিত্রে $y = 27 - x^2$ বক্ররেখার সমীকরণের একটি অংশ দেখানো হয়েছে। PQRS আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A.

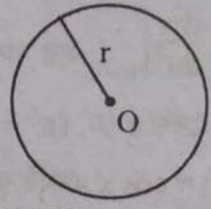
ক. $g(x) = 7x^3 - 2x + \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ হলে $g''(x)$ নির্ণয় কর।

খ. $\dfrac{dA}{dt} = 0$ হলে t এর মান নির্ণয় কর।

গ. (0, 1) ব্যবধিতে বক্ররেখার সমীকরণটির গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা নিরূপণ কর।

10. দৃশ্যকল্প-১ : a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি বর্গাকার পাতের কোণাগুলো হতে সমান আকারের চারটি বর্গক্ষেত্র কাটার পর একটি মুখখোলা আয়তাকার বাক্স তৈরি করা হলো।

দৃশ্যকল্প-২ : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির ক্ষেত্রফল A, পরিসীমা C এবং $\frac{dA}{dt}$ = ধ্রুবক।



ক. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4^x - 4^{-x}}{4^x + 4^{-x}}$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প ২ হতে দেখাও যে, $\frac{dC}{dt} \propto \frac{1}{r}$

গ. ছিন্ন বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত হলে দৃশ্যকল্প ১ অনুযায়ী বাক্সের আয়তন সর্বোচ্চ হবে?

11. $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \sin^{-1}(bx)$ এবং $p(x) = \{f(x)\}^{g(x)}$

ক. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan mx}{\tan nx}$ নির্ণয় কর।

খ. $p'(a)$ নির্ণয় কর।

গ. $a = e$ এবং $f(y) = bg\left(\frac{x}{b}\right)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - b^2y = 0$.

12. $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$ যেখানে x হলো উভয় ক্ষেত্রে চলক।

ক. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ নির্ণয় কর।

খ. $\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. মূল নিয়মে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{f(2x)}$ এর অন্তরীকরণ কর।

13. $\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{q}\right)^3 = 2$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ এবং $r(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

ক. $x = at^2$ ও $y = 2at$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

খ. বক্ররেখার (p, q) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. (0, 2) ব্যবধিতে r(x) ফাংশনটির গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

14. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}$ এবং $x > 0$

ক. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ নির্ণয় কর।

খ. বক্ররেখার $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $f(x)$ ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

15. $y = 6 + 2x - \frac{8}{x^2}$ ... ... (i) ও

$x^3 - 3x^2 - 45x + 102 = 0$......(ii) বক্ররেখাদ্বয়ের একটি সাধারণ বিন্দু P(2, 8)

ক. (i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুসমূহের স্থানাংক নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে P বিন্দুতে (i) নং বক্ররেখার অভিলম্বের সমীকরণ $x + 4y = 34$

গ. (ii) নং বক্ররেখার চরম মান নির্ণয় কর।

16. $g_1(x) = x^{\cos^{-1}x}$ এবং $g_2(x) = x^{\frac{1}{x}}$.
ক. $\ln x^n$ এর ২য় অন্তরজ নির্ণয় কর।
খ. $(1, 2)$ বিন্দুতে $g_2(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
গ. $g_1(x)$ কে অন্তরীকরণ কর।

17. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ .... (i)

$y = x + \frac{1}{x}$ .... (ii)

ক. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ নির্ণয় কর।
খ. (i) হতে $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. (ii) হতে দেখাও যে, y এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

18. $f(x) = e^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন।
ক. x এর সাপেক্ষে $f(e^x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।
খ. $y = \left\{f(x) + \frac{1}{f(x)}\right\}\sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 + 4y = 0$.
গ. প্রমাণ কর যে, $4f(x) + \frac{9}{f(x)}$ ফাংশনের আপেক্ষিক ক্ষুদ্রতম মান 12.

19. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x, প্রস্থ y, পরিসীমা P এবং ক্ষেত্রফল A।
ক. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{1}{4}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পরে তার বেগ কত হবে?
খ. দেখাও যে, নির্দিষ্ট P এর জন্য A_{max}. পাওয়া যাবে যখন আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।
গ. দেখাও যে, নির্দিষ্ট A এর জন্য P_{min}. হবে যখন আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।

20. $6y = (2x - 3)^3 - 4x$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ। L_1 একটি স্পর্শক যা বক্ররেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে স্পর্শ করে।
ক. $y = x^2$ রেখার মূলবিন্দুতে ঢাল কত?
খ. x এর ব্যবধি নির্ণয় করো যেখানে বক্ররেখাটি ক্রমবর্ধমান।
গ. L_1 রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

21. $p = \tan x - \sin x$ ও $q = x^2$
ক. θ এর সাপেক্ষে $\sin\theta^\circ$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।
খ. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{p}{qx}$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. দেখাও যে, $y = p + \sec x + \sin x$ হলে $y_2 = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

22. দৃশ্যকল্প-১ : $y = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

দৃশ্যকল্প-২ : $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

ক. অন্তরীকরণ কর: $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$
খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত ফাংশনটির সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_2 + m^2y = 0$

23. $f(x) = x$ একটি ফাংশন

ক. $\frac{d}{dx}(\log_{10}x)$ নির্ণয় কর।

খ. মূল নিয়মে $[f(x)]^n$ এর অন্তরজ বের কর।

গ. $z = [f(x) + \sqrt{1 + \{f(x)\}^2}]^m$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)z_2 + xz_1 - m^2z = 0$

24. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = x$ দুইটি ফাংশন।

ক. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1}$ এর মান বের কর।

খ. দেখাও যে, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - f(x)}{\left\{g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2}$ এর মান $\frac{1}{2}$

গ. $f(3x)$ এর মূল নিয়মে অন্তরজ বের কর।

25. একটি অব্যক্ত বক্র রেখার সমীকরণ $x^3 + 2y^3 = 3xy$

ক. $\tan^{-1}(e^x)$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

খ. $x = az$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dz} = \frac{ay - a^3z^2}{2y^2 - az}$

গ. মূলবিন্দু ব্যতিত এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যে বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল।

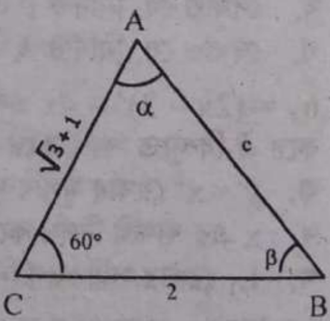
26. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ । *[অধ্যায় ৭ ও ৯ এর সমন্বয়ে]*

ক. দেখাও যে, $\frac{2}{\sqrt{2 + 2g(2x)}} = \sec x$

খ. দেখাও যে, $\{f(x)\}^3 + \{f(x + 120°)\}^3 + \{f(x + 240°)\}^3 = -\frac{3}{4}\sin 3x$

গ. $y = \sqrt{4 + 3f(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $2yy_2 + 2{y_1}^2 + y^2 = 4$

27. ABC একটি ত্রিভুজ এবং $x^2 + y^2 - 4x - 7 = 0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ। *[অধ্যায় ৭ ও ৯ এর সমন্বয়ে]*



ক. ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো y-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. α, β ও c এর মান নির্ণয় কর।

28. **দৃশ্যকল্প-০১:** $f: x \to \begin{cases} 3 + 3x; & \text{যখন } \frac{-3}{2} \le x < 0 \\ 3 - 2x; & \text{যখন } 0 \le x < \frac{3}{2} \\ 3 + 2x; & \text{যখন } x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$

দৃশ্যকল্প-০২: $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ । *[অধ্যায় ৮ ও ৯ এর সমন্বয়ে]*

ক. $f\left(\frac{2}{5}\right)$ ও $f\left(\frac{5}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

গ. দৃশ্যকল্প-০২ এ বর্ণিত বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

29. $f(x) = \frac{2x}{1+x}$, $g(x) = x^2 + 1$ [অধ্যায় ৮ ও ৯ এর সমন্বয়ে]

ক. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $g^{-1}[-1, 65]$ এর মান নির্ণয় কর

গ. প্রমাণ কর যে, $fog(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।

30. $x^2 + y^2 - 12x + 8y - 69 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ [অধ্যায় ৪, ৮ ও ৯ এর সমন্বয়ে]

ক. $(-3, 8)$ বিন্দু থেকে প্রদত্ত বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

31. $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$. [অধ্যায় ৬, ৭ ও ৯ এর সমন্বয়ে]

ক. $4g(\theta) = 3$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

খ. $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $y = 3f(\alpha) + 4g(\alpha)$ ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

গ. $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

32. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$ ও $h(x) = \tan x$ তিনটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন। [অধ্যায় ৬, ৭ ও ৯ এর সমন্বয়ে]

ক. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x) - f(x)}{\{f(x)\}^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $\frac{2}{\sqrt{2 + 2f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}} = \frac{2}{\sqrt{2 + 2g\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = \sec x$

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে $0 \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $g(x) - f(x) = 0$ এর সমাধান নির্ণয় কর।

33. $M(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ [অধ্যায় ৬, ৭ ও ৯ এর সমন্বয়ে]

ক. দেখাও যে, $\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2}\cos 20°$

খ. $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $M(x)$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

গ. $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে $M(x) = 0$ সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

34. দৃশ্যকল্প-I : $y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$ [ঢা. বো. ১৭]

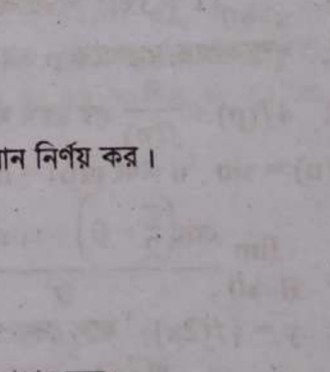
দৃশ্যকল্প-II : $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

ক. $y = \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$.

খ. দৃশ্যকল্প-I এর বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-II এর ফাংশনের চরমমান নির্ণয় কর।

35. [রা. বো. ১৭]



ক. x-এর সাপেক্ষে $x^3\sin(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের সাহায্যে মান নির্ণয় কর: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

গ. উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

36. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, $h(x) = x$ /রা. বো. ১৭/

ক. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

খ. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $h(x) + \frac{1}{h(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

37. $A, B \subset \mathbb{R}, B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, g : A \to B, g(x) = \frac{x - 5}{3x + 1}$ এবং $h(x) = x^2 + 1$ /দি. বো. ১৭/

ক. $\sin e^{\sqrt{1 - x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $(hog)(1) - (goh)(2) = 2$.

গ. অস্তিত্ব যাচাইপূর্বক $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

38. $y = 4x(6 - x)^2$ এবং $f(x) = e^{\tan^{-1}x}$ /কু. বো. ১৭/

ক. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. y-এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2) f''(x) + (2x - 1) f'(x) = 0$

39. দৃশ্যকল্প: $f(p) = e^{-2p}$ /চ. বো. ১৭/

ক. $\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{\frac{5}{x}}$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্পের আলোকে p এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে $f(p)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

গ. $4f(p) + \frac{9}{f(p)}$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

40. $f(u) = \sin^{-1}u$ এবং $g(u) = \ln u$ দুইটি ফাংশন। /সি. বো. ১৭/

ক. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\theta^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $y = \{f(2x)\}^2$ হলে দেখাও যে, $(1 - 4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$.

গ. দেখাও যে, $\frac{g(2x)}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{2}{e}$।

41. $f(x) = x^{\tan^{-1}x}$, $g(x) = \log_x a$, $h(x) = \sqrt{a + b\cos x}$. /য. বো. ১৭/

ক. $\lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

গ. $y = h(x)$ হলে, দেখাও যে, $2y.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$.

42. দৃশ্যকল্প-১: ABC ত্রিভুজে $a = \sqrt{3}b$ এবং $A = 2B$

দৃশ্যকল্প-২: $\ln y = bz$. /ব. বো. ১৭/

ক. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cosec}x - \cot x)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ABC ত্রিভুজের কোণগুলো নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\cos z = x$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = b^2y$.

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

উত্তরমালা

1. (i) সর্বনিম্ন মান $= -162$, সর্বোচ্চ মান $= 94$ (ii) সর্বনিম্ন মান $= -4$, সর্বোচ্চ মান $= -3$
(iii) সর্বনিম্ন মান $= 5$, সর্বোচ্চ মান $= 9$ (iv) সর্বনিম্ন মান $= 0$, সর্বোচ্চ মান $= 128$
(v) সর্বনিম্ন মান $= 25$, সর্বোচ্চ মান $= 1$ (vi) সর্বনিম্ন মান $= \frac{2}{3}$, সর্বোচ্চ মান $= \frac{43}{2}$
(vii) সর্বনিম্ন মান $= 9$, সর্বোচ্চ মান $= 10$ (viii) সর্বনিম্ন মান $= -7$, সর্বোচ্চ মান $= \frac{67}{27}$.

3. সর্বনিম্ন মান $= 2$, সর্বোচ্চ মান $= \frac{39}{16}$ **8.** সর্বনিম্ন মান $= 3$, সর্বোচ্চ মান $= \frac{13}{3}$ **9.** সর্বোচ্চ মান $2\sqrt{3}$

10. (i) সর্বনিম্ন মান $= 0$, সর্বোচ্চ মান $= \frac{9}{8}$ (ii) সর্বোচ্চ মান $= \frac{23}{48}$, সর্বনিম্ন মান $= \frac{1}{3}$

12. (iii) $x < -1$ ও $1 < x$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি এবং $-1 < x < 1$ ব্যবধিতে হ্রাস।
(iv) $x < -1$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি এবং $-1 < x < 2$ ব্যবধিতে হ্রাস
(v) $-1 \le x < \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং $\frac{1}{3} < x \le 2$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়।

▶ বহুনির্বাচনি

1. গ; **2.** ঘ; **3.** খ; **4.** গ; **5.** গ; **6.** গ; **7.** খ; **8.** ঘ; **9.** ক; **10.** গ; **11.** খ; **12.** গ; **13.** খ; **14.** গ; **15.** ঘ; **16.** ক; 17. খ; **18.** ক; **19.** ঘ; **20.** ক; **21.** খ; **22.** গ; **23.** ক; **24.** ক; **25.** ঘ; **26.** গ; **27.** খ; **28.** গ; **29.** ঘ; **30.** খ; 31. গ; **32.** ক; **33.** খ; **34.** ক; **35.** ক; **36.** ঘ; **37.** ঘ; **38.** গ; **39.** গ; **40.** গ; **41.** গ; **42.** গ; **43.** ঘ; **44.** ক; 45. খ; **46.** ঘ; **47.** গ; **48.** গ; **49.** ঘ; **50.** খ; **51.** ক; **52.** ঘ; **53.** ক; **54.** গ; **55.** গ; **56.** ঘ; **57.** ক; **58.** খ; 59. ক; **60.** ঘ; **61.** গ; **62.** ঘ; **63.** ঘ; **64.** খ; **65.** গ; **66.** গ; **67.** ক; **68.** ঘ; **69.** গ; **70.** ঘ; **71.** ক; **72.** ঘ; 73. ঘ; **74.** গ; **75.** ঘ; **76.** ক; **77.** খ; **78.** ক; **79.** খ; **80.** খ;

▶ সৃজনশীল

1. ক. 3183 মিটার (প্রায়); খ. $\frac{v}{\pi}(-1)^n (n+1)!\, r^{-(n+2)}$

2. ক. $\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sin\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$;

3. ক. $\frac{1}{3}$; খ. $(-1, 6)$ ও $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$;

4. ক. 0; খ. $\frac{1}{4a}$; **5.** ক. $\frac{3x^5}{\sqrt{\sin^{-1} x^6}\,.\,\sqrt{1-x^{12}}}$;

6. ক. $2(x+2)$; খ. $4x - y - 8 = 0$; গ. 8;

7. ক. 1; গ. 108 একক;

8. খ. গুরুমান $= \frac{3}{4}$ ও লঘুমান $= -6$; গ. $2x - 3y + 1 = 0$ ও $3x + 2y - 5 = 0$;

9. ক. $42x$; খ. 3 একক; **10.** ক. 1; গ. $\frac{a}{6}$ একক;

11. ক. $\frac{m}{n}$; খ. $\frac{1}{a} . \log_a e . \sin^{-1}(ab)$;

12. ক. 0; **খ.** $\frac{x - \sin x \cos x}{1 + \cos x}$; **গ.** $2\sec^2 2x$;

13. ক. $\frac{1}{t}$; **খ.** $qx + py - 2pq = 0$; **গ.** গরিষ্ঠ মান $= \frac{39}{16}$, লঘিষ্ঠ মান $= 2$;

14. ক. 1; **খ.** $3y + 8 = 0$; **15. ক.** $(1, 0), (-2, 0)$; **গ.** সর্বোচ্চ মান $= 183$; সর্বনিম্ন মান $= -73$;

16. ক. $-\frac{n}{x^2}$; **খ.** 1; **গ.** $x^{\cos^{-1}x}\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$;

17. ক. 0; **খ.** -1; **18. ক.** $e^{e^x} e^x$;

19. ক. 153 মিটার/সেকেন্ড;

20. ক. 0; **খ.** $x < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ ও $x > \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$; **গ.** $6y + 27 = 50x$

21. ক. $\frac{\pi}{180} \cos \frac{\theta\pi}{180}$; **খ.** $\frac{1}{2}$;

22. ক. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$; **খ.** সর্বনিম্ন মান $= 3$ এবং সর্বোচ্চ মান $= \frac{13}{3}$;

23. ক. $\log_{10}e.\frac{1}{x}$; **খ.** nx^{n-1}; **24. ক.** 1; **গ.** $3 \cos 3x$; **25. ক.** $\frac{e^x}{1 + e^{2x}}$; **গ.** $(1, 1)$

27. ক. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ বর্গ একক; **খ.** $(2, \sqrt{11})$ ও $(2, -\sqrt{11})$; **গ.** $\alpha = 45°, \beta = 75°, c = \sqrt{6}$;

28. ক. $\frac{11}{5}$, 8; **খ.** অবিচ্ছিন্ন নয়; **গ.** $(0, 0)$ ও $(-2a, 0)$;

29. ক. 1; **খ.** $\{x \in \mathbb{R} : -8 \le x \le 8\}$;

30. ক. $2\sqrt{26}$; **খ.** $y + 15 = 0$ এবং $y - 7 = 0$; **গ.** ডোমেন, $D_f = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$; রেঞ্জ, $R_f = [0, \infty)$;

31. খ. লঘুমান $= 3$, গুরুমান $= 4$; **32. ক.** $\frac{1}{2}$; **গ.** $0, \frac{\pi}{3}, \pi$;

33. খ. গরিষ্ঠ মান $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$; **গ.** $0, \pi, 2\pi.$;

34. খ. $x - 30y - 4 = 0, 30x + y = 120$; **গ.** সর্বোচ্চ মান $= 8$, সর্বনিম্ন মান $= -19$

35. ক. $x^2\{\cos(\ln x) + 3\sin(\ln x)\}$; **খ.** 1; **গ.** 20.76 বর্গ মি. (প্রায়)

36. ক. 6; **খ.** $\sec x \tan x$

37. ক. $\frac{-e^{\sqrt{1-x}}\cos e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$; **গ.** $\frac{x+5}{1-3x}$

38. ক. 0; **খ.** 128

39. ক. e^{15}; **খ.** $-2e^{-2p}$; **গ.** 12

40. ক. 0;

41. ক. 0; **খ.** $x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$; $\frac{-\ln a}{x(\ln x)^2}$;

42. ক. 0; **খ.** $A = 60°, B = 30°, C = 90°$;