দ্বিতীয় অধ্যায়

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

Linear Programming

রাশিয়ার গণিতবিদ ও অর্থনীতিবিদ লিওনিদ ভিতালিভিচ ক্যান্টোরোভিচ (Leonid Vitalyevich Kantorovich, 1912-1986) সর্বপ্রথম ব্যবসায়-বাণিজ্যের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের জন্য গাণিতিক মডেল প্রয়োগ করেন। 1939 খ্রিস্টাব্দে 'Mathematical Methods of Organizing and Planning Production' প্রবন্ধে তিনি বলেন, বিশ্লেষণী পদ্ধতি দ্বারা স্বল্প সময়ে ও স্বল্প ব্যয়ে সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা অর্জন সম্ভব। লিওনিদ যে মডেল তৈরি করেন তাই যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম। তাকে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের জনক বলা হয়।

বিংশ শতাব্দীর ৪০-এর দশকে নিত্য নতুন আবিষ্কার ও পণ্য উৎপাদনের প্রতিযোগিতা থেকে এরকম প্রোগ্রামের চিন্তাভাবনা শুরু হয়। এ সময়ে দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধ শুরু হলে সৈন্যদের ন্যূনতম সময়ে ও সর্বনিম্ন ব্যয়ে এবং শত্রুপক্ষের সর্বোচ্চ ক্ষতির জন্য সুনির্দিষ্ট পরিকল্পনার প্রয়োজন দেখা দেয়। আমেরিকান গণিতবিদ George Bernard Dantzig যুদ্ধের কৌশলে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করেন। যুদ্ধের কৌশলে ব্যবহৃত হওয়ায় তিনি 1947 সাল পর্যন্ত এটি গোপন রাখেন। বর্তমানে শিক্ষা-প্রতিষ্ঠান, সামরিক ও বেসামরিক প্রশাসনে, বৈজ্ঞানিক গবেষণায় ও সাংখ্যিক বিশ্লেষণে বিজ্ঞানী, গণিতবিদ ও অর্থনীতিবিদদের কাছে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি প্রধান হাতিয়ার। তাই বর্তমান সময়ে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে মানব জাতির তথা সভ্যতার বৈপ্লবিক উন্নতির চাবিকাঠি হিসেবে বিবেচনা করা হয়। কারণ এটি বিজ্ঞানসম্মত উপায়ে কর্মদক্ষতা, উদ্দেশ্য ও কর্মপদ্ধতি নির্ধারণ করে নির্দিষ্ট লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য পূরণে সর্বতোভাবে সহায়তা করে।

নাম : লিওনিদ ভিতালিভিচ ক্যান্টোরোভিচ (Leonid Vitalyevich Kantorovich)

জন্ম : ১৯ জানুয়ারি, ১৯১২

জন্মস্থান : সেন্ট পিটার্সবার্গ, রাশিয়া

নাগরিকত্ব : সোভিয়েত (বর্তমান রাশিয়া)

অবদান : যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং, ক্যান্টোরোভিচ থিওরেম, normed vector lattice (Kantorovich space), ক্যান্টোরোভিচ মেট্রিক, ক্যান্টোরোভিচ ইনইকুয়েলিটি, অ্যাপ্রোক্সিমেশন থিওরি, iterative methods, ফাংশনাল অ্যানালাইসিস, নিউমেরিক্যাল অ্যানালাইসিস, সায়েন্টিফিক কম্পিউটিং

উদ্ভাবন : যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের প্রতিষ্ঠাতা হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

উল্লেখযোগ্য পুরস্কার : ১৯৪৯ সালে স্ট্যালিন পুরস্কার এবং ১৯৭৫ সালে অর্থনীতিতে নোবেল পুরস্কার অর্জন করেন।

মৃত্যু : ৭ এপ্রিল, ১৯৮৬

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার ভিত্তিতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিমাত্রিক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিষয়ক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ ও ২ : যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম
- পাঠ-৩, ৪ ও ৫ : যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন, উদাহরণমালা
- পাঠ-৬, ৭ ও ৮ : অনুশীলনী-2
- পাঠ-৯ ও ১০ : ব্যবহারিক

পাঠ-১ ও ২

2.1 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear Programming)

2.1.1 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মৌলিক ধারণা (Fundamental Concept of Linear Programming)

মানব সমাজের একটি বিশেষ প্রচলিত প্রবাদ "পরিকল্পনা হলো কাজের অর্ধেক"। সৃষ্টি লগ্ন থেকেই মানুষ পরিকল্পনা করে এগিয়েছে। যে সকল মানবজাতি সঠিক পরিকল্পনা করতে পেরেছে তারা উন্নতির ধারা অব্যাহত রেখে এগিয়ে গেছে এবং যারা সঠিক পরিকল্পনা করতে পারেনি তারা ব্যর্থ হয়েছে। যেকোনো বিষয়ে পরিকল্পনা করার জন্য তিনটি মূখ্য বিষয় প্রথমেই চিন্তায় এসে যায়—

(i) আমি কী করতে চাই (অর্থাৎ উদ্দেশ্য কী)?

(ii) উদ্দেশ্য সফল করার জন্য মূলত কোন কোন জিনিসের ওপর নির্ভরশীল হতে হবে? এবং

(iii) আমার সীমাবদ্ধতা কী কী?

যেমন: আমি আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড-এ দেশকে চ্যাম্পিয়ন করার লক্ষ্যে একটি গণিত প্রশিক্ষণ একাডেমি করতে চাই। এই পরিকল্পনা সঠিকভাবে বাস্তবায়নের জন্য আমাকে প্রশিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের ওপর নির্ভর করতে হবে এবং এখানে যে সকল সীমাবদ্ধতা চিন্তা করতে হবে তা হলো অর্থের পরিমাণ, প্রশিক্ষক ও শিক্ষার্থীর সরবরাহ।

একাডেমি পরিচালনা করার ক্ষেত্রে যে ধারণা সর্বদা পোষণ করতে হবে তা হলো— সর্বনিম্ন পরিশ্রম বা বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা প্রাপ্তি বা সর্বোৎকৃষ্ট শিক্ষার্থী তৈরি অর্থাৎ Maximum profit for minimum cost এটা মানুষ মাত্রেরই সহজাত আকাঙ্ক্ষা।

যে সকল পরিকল্পনাকে গাণিতিকরূপ (মডেল) দেওয়া যায় বিজ্ঞানের ভাষায় তাদের সঠিক পরিকল্পনা বলে। এই ধরনের সমস্যাকে সর্বপ্রথম 1930 খ্রিস্টাব্দে গাণিতিক রূপ (মডেল) দেন পর্যায়ক্রমে রাশিয়ার গণিতবিদ ও অর্থনীতিবিদ লিওনিদ ক্যান্টোরোভিচ (Leonid Kantorovich) এবং আমেরিকান অর্থনীতিবিদ ওয়াসিলি লিওনটিফ (Wassily Leontief)। যা Linear Programming (যোগাশ্রয়ী বা রৈখিক প্রোগ্রাম) নামে খ্যাত। তাদের এই যুগান্তকারী আবিষ্কার ঐ সময়ে ব্যবসা ক্ষেত্রে, কারখানার উৎপাদনে এবং দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধে সৈন্যদের সঠিক ব্যবহার, সর্বনিম্ন খরচে তাদের রসদ যোগান ও প্রশিক্ষণ দানে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। Linear Programming কে কাজে লাগিয়ে Leonid Kantorovich সম্পদের অনুকূল বণ্টন (Optimum Allocation of Resources) তত্ত্ব আবিষ্কারের জন্য 1975 খ্রিস্টাব্দে অর্থনীতিতে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন। বর্তমান বিশ্বে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি অপরিহার্য হাতিয়ার। কেননা মানুষের দৈনন্দিন সঠিক খাদ্য গ্রহণ, প্রশিক্ষণ, শিল্প ও বাণিজ্য, উৎপাদন ও বিপণন, নির্মাণ এবং সমরক্ষেত্র সহ সকল পরিকল্পনারই সঠিক পদ্ধতি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

2.1.2 কতিপয় সংজ্ঞা (Some Definitions)

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear Programming): সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে (i) উদ্দেশ্য ফাংশন (Objective function) (ii) সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable) ও (iii) শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints) এই তিনটি তথ্যকে ক্যান্টোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear Programming)** বলা হয়।

অন্যকথায়, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হচ্ছে কোনো শর্তাধীনে ও সীমাবদ্ধতায় একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও অভীষ্ট ফাংশন গঠনের মাধ্যমে সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকগুলির নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগণিতীয় পদ্ধতি।

যেমন, A ও B দুই প্রকারের খাদ্যে প্রতি কিলোগ্রামে প্রোটিন ও শ্বেতসার এবং এর মূল্য নিম্নরূপ:

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	কিলোগ্রাম প্রতি মূল্য
A	2	5	40 টাকা
B	3	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	8	11	

সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক খাদ্যের প্রয়োজন মেটাতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করলে (2.2 অনুচ্ছেদ-এ আলোচনা করা হয়েছে) প্রোগ্রামটি দাঁড়ায়, Minimize $z = 40x + 50y$

শর্তসমূহ $2x + 3y \geq 8$, $5x + 3y \geq 11$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

এখানে, x, y চলক, রৈখিক অসমতা বা শর্ত $2x + 3y \geq 8$, $5x + 3y \geq 11$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ এবং

অভীষ্ট ফাংশন $z = 40x + 50y$

সিদ্ধান্ত চলক (Decision variables): সমস্যাটিতে যা নির্ণয় করতে বলা হয়েছে তার সাথে সংশ্লিষ্ট পরিবর্তনযোগ্য অজানা রাশিগুলিকে **সিদ্ধান্ত চলক** (decision variables) বলা হয়। কেবলমাত্র এই রাশিগুলিকেই বাড়ানো বা কমানোর স্বাধীনতা সিদ্ধান্তকারীর থাকে। সাধারণত x ও y কে সিদ্ধান্ত চলক ধরা হয়।

সিদ্ধান্ত চলকের মান ঋণাত্মক হয় না। যেমন: কোনো খেলাধুলার সামগ্রী প্রস্তুতকারী কোম্পানি দুই প্রকারের বল তৈরি করে, এক প্রকার হলো ফুটবল এবং অপরটি ক্রিকেট বল। ফুটবলকে x এবং ক্রিকেট বলকে y বিবেচনা করলে অবশ্যই $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ হবে। কেননা ঋণাত্মক পরিমাণ কোনো কিছু তৈরি করা যায় না।

উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন (Objective function): যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল উদ্দেশ্যই হলো কোনো কিছুকে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় (optimization) রূপদান। যার পরিমাণকে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করতে হবে তাকে উপর্যুক্ত চলক দ্বারা গাণিতিক ফাংশনে প্রকাশ করতে হবে, তাকে অভীষ্ট ফাংশন (objective function) বলা হয়। সাধারণত অভীষ্ট ফাংশন, $z = ax + by$ আকারের হয়ে থাকে।

শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints): যেকোনো কাজেই কিছু সীমাবদ্ধতা বা প্রতিবন্ধকতা থাকে, যেমন— অর্থের সীমাবদ্ধতা, যোগ্য লোকবলের সীমাবদ্ধতা, কাঁচামালের সীমাবদ্ধতা ইত্যাদি। এই সকল সীমাবদ্ধতাকে রৈখিক সমীকরণ বা অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করতে হয়। এগুলিকে একত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের **শর্ত** বা **সীমাবদ্ধতা** (constraints) বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, যেকোনো একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সীমাবদ্ধতার নমুনা: $a_1x + b_1y \leq c_1$, $a_2x + b_2y \leq c_2$, $x, y \geq 0$

সম্ভাব্য সমাধান এলাকা (Feasible solution region): যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সকল শর্ত অর্থাৎ অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকাকে **সম্ভাব্য সমাধান এলাকা** বলা হয়।

2.1.3 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার (Application of Linear Programming) [মাদ্রাসা: বো: ১৩]

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming) এর ব্যবহার ও ক্ষেত্র ব্যাপক।

ইতোমধ্যে 2.1.1 এ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার সম্পর্কে মোটামুটি একটি ধারণা দেওয়া হয়েছে।

এখানে সংক্ষিপ্ত পরিসরে বিভিন্ন নাম অনুযায়ী ব্যবহার বিষয়ে আলোচনা করা হলো।

i. **খাদ্য সমস্যা:** সুশিক্ষিত সভ্য এই আধুনিক সমাজের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা হলো খাদ্য সমস্যা। একজন অথবা কোনো জনগোষ্ঠী দৈনিক কী পরিমাণ খাদ্য গ্রহণ করলে তাদের সুষম খাদ্য গ্রহণ নিশ্চিত করা যায়। পুষ্টিগুণ বিবেচনায় সর্বনিম্ন খরচে সঠিক খাদ্য তালিকা তৈরি ও তা সরবরাহ করার জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

ii. **শিক্ষা বা প্রশিক্ষণ সমস্যা:** কোনো শিক্ষা প্রতিষ্ঠান অথবা প্রশিক্ষণ একাডেমি হতে সর্বনিম্ন ব্যয়ে সর্বাপেক্ষা বেশি (চাহিদা অনুযায়ী) সাফল্য প্রাপ্ত ছাত্র অথবা প্রশিক্ষণার্থী পাবার লক্ষ্যে বিভিন্ন তথ্য ও উপাত্ত (যেমন: একজন শিক্ষক বা প্রশিক্ষক কতজনকে শিক্ষা দিতে পারেন, তাদের মান অনুযায়ী বেতন ও ভাতা, পরীক্ষাগার ও অন্যান্য প্রশিক্ষণ যন্ত্রের সীমাবদ্ধতা, শিক্ষার্থী সরবরাহের সীমাবদ্ধতা ইত্যাদি) কাজে লাগিয়ে যে গাণিতিক মডেল তৈরি করা হয় সেটাও যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

iii. **উৎপাদন ও নির্মাণ সমস্যা:** কারখানা বা শিল্পপ্রতিষ্ঠানে সম্পদের সীমাবদ্ধতা, শ্রমিকের ভিন্নতা (যেমন: বিভিন্ন প্রকারের শ্রমিক থাকে যাদের কর্মদক্ষতা ও মজুরী কাঠামো ভিন্ন ভিন্ন হয়), যন্ত্রের কার্যক্ষমতা, সময়ের সীমাবদ্ধতা, উৎপাদিত পণ্যের চাহিদা ও যোগান নিশ্চিত করা অত্যন্ত জটিল কাজ। এই সমস্যার সম্পূর্ণ সঠিক সমাধান করতে পারলে তবেই সর্বনিম্ন ব্যয়ে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন সম্ভব। আর এই গুরুত্বপূর্ণ কাজেও ব্যবহার হয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

iv. **পরিবহন সমস্যা:** বাংলাদেশ হতে উৎপন্ন তৈরি পোশাক বিশ্বের বিভিন্ন দেশে ব্যবসার উদ্দেশ্যে পাঠাতে হয়। মনে করি, আমাদের কোনো কোম্পানির ঢাকা, খুলনা, রাজশাহী ও চট্টগ্রাম এই চারটি স্থানে কারখানা আছে। এখন ভারতে ঐ কোম্পানির উৎপাদিত পোশাক আকাশপথ বা পানিপথ বা সড়কপথ বিভিন্ন মাধ্যমে পাঠানো যায় এবং সেক্ষেত্রে খরচও ভিন্ন ভিন্ন। ভারতের চাহিদা অনুযায়ী পণ্য পাঠানো এবং খরচ সর্বনিম্ন রেখে ব্যবসার মুনাফা সর্বোচ্চ রাখার জন্যও গণিত অপরিহার্য। এক্ষেত্রে ব্যবহার হয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

v. **যুদ্ধক্ষেত্র:** রসদ ও সৈন্যবাহিনী এক স্থান হতে অন্য স্থানে স্থানান্তর, স্থান বিবেচনায় সৈন্য ব্যবহার ও সীমাবদ্ধতার সূক্ষ্ম হিসাব সূচারুরূপে পরিচালনার জন্যও যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

2.1.4 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সুবিধা (Advantages of L.P.)

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল সুবিধা হলো সর্বনিম্ন বিনিয়োগে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় রূপদান। বিষয়টি নিচে বর্ণনা করা হলো।

i. সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যন্ত্র দক্ষতার সাথে সঠিক ব্যবহার ও কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য অর্জন।

ii. তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।

iii. উৎপাদন ও বিপণনে সকল প্রকার দৃশ্যমান প্রতিবন্ধকতার সঙ্গে পরিচয় এবং তা অতিক্রমের পন্থা অবলম্বনের জ্ঞান অর্জন।

iv. অনাকাঙ্ক্ষিত প্রতিবন্ধকতা চিহ্নিত ও দূরীকরণের দ্বারা উৎপাদন বা বিপণন ব্যয় কমানো এবং মুনাফা বৃদ্ধি।

v. প্রাপ্ত তথ্য, উপাত্ত, সম্পদ, মূলধন ও সুবিধা-অসুবিধাকে বিবেচনা করে ভবিষ্যত পরিকল্পনাকে আরও টেকসই ও বেগবান করা।

পাঠ-৩, ৪ ও ৫

2.2 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন [Formulation of Linear Programming (L.P.)]

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা গঠনের জন্য কেবলমাত্র তিনটি ধাপ (step) অতিক্রম করতে হয়। যা নিম্নরূপ :

প্রথম ধাপ: সিদ্ধান্ত চলক (Decision variables) খুঁজে বের করে তাদের গাণিতিক নামকরণ।

দ্বিতীয় ধাপ: উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন (Objective function) শনাক্তকরণ ও সিদ্ধান্ত চলকের দ্বারা গাণিতিক বাক্য রূপে প্রকাশ।

তৃতীয় ধাপ: শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints or restrictions) গুলোকে চিহ্নিত করে একঘাতিক (রৈখিক) সমীকরণ বা অসমতা আকারে রূপদান।

অতঃপর প্রথমে উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন, দ্বিতীয়ত শর্ত বা সীমাবদ্ধতা এবং সর্বশেষে সিদ্ধান্ত চলকের পরিচয় নির্দিষ্ট আকারে লিখলে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য: দ্বিতীয় ও তৃতীয় ধাপ এর যে কোনোটি আগে পরে করা যেতে পারে।

উদাহরণ: একজন ছাত্র 1500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 টি ফাঁকা সিডি ও 4টি বই এর সিডি ক্রয় করতে চায়। প্রতিটি ফাঁকা সিডির মূল্য 30 টাকা এবং প্রতিটি বই এর সিডির মূল্য 80 টাকা। সর্বোচ্চ সংখ্যক ফাঁকা সিডি ও বই এর সিডি ক্রয়ের জন্য একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম তৈরি কর।

সমাধান: প্রথম ধাপ (সিদ্ধান্ত চলক শনাক্তকরণ): মনে করি, ছাত্রটি x সংখ্যক ফাঁকা সিডি এবং y সংখ্যক বই এর সিডি ক্রয় করবে।

দ্বিতীয় ধাপ (অভীষ্ট বা উদ্দেশ্য ফাংশন শনাক্তকরণ): মনে করি, উদ্দেশ্য ফাংশন z তাহলে, $z = x + y$ যা সর্বোচ্চ হবে।

তৃতীয় ধাপ (শর্ত বা সীমাবদ্ধতা শনাক্তকরণ): শর্ত বা সীমাবদ্ধতা-1 : যেহেতু ফাঁকা সিডি কমপক্ষে 6 টি ও বই এর সিডি কমপক্ষে 4 টি ক্রয় করতে হবে কাজেই, $x \geq 6$ এবং $y \geq 4$.

শর্ত বা সীমাবদ্ধতা-2 : 1 টি ফাঁকা সিডির মূল্য 30 টাকা এবং 1টি বই এর সিডির মূল্য 80 টাকা, সুতরাং x সংখ্যক ফাঁকা ও y সংখ্যক বই এর সিডি ক্রয়ের জন্য খরচ হবে $(30x + 80y)$ টাকা যা 1500 টাকার চেয়ে বেশি হতে পারবে না, অর্থাৎ $30x + 80y \leq 1500$ বা $3x + 8y \leq 150$ এবার তিনটি ধাপকে একত্রে লিখলে পাই, Maximize, $z = x + y$

শর্তসমূহ: $3x + 8y \leq 150$

$x \geq 6, y \geq 4$ এটাই নির্ণেয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

দ্রষ্টব্য: উদ্দেশ্য ফাংশনকে সাধারণত z দ্বারা প্রকাশ করা হয় তবে অন্য অক্ষর যেমন P, F ইত্যাদি দ্বারাও প্রকাশ করা হয়ে থাকে। z এর মান সর্বোচ্চ নির্ণয়ের উদ্দেশ্যে থাকলে **Maximize z** বা সংক্ষেপে Max z অথবা z_{max} এবং সর্বনিম্ন নির্ণয়ের উদ্দেশ্যে থাকলে **Minimize z** বা সংক্ষেপে Min z অথবা z_{min} লিখা হয়। z কে capital বা small উভয় আকারেই লেখা হয়ে থাকে।

2.2.1 যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠনে শর্তাবলী বা প্রয়োজনীয়তা

(Conditions or Requirements to Formulate a L.P.)

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা গঠনে নিম্নের পাঁচটি শর্ত অবশ্যই পূরণ করতে হবে:

i. সমস্যার অভীষ্ট ফাংশন অবশ্যই থাকতে হবে এবং তা সিদ্ধান্ত চলকের রৈখিক (একঘাতিক) ফাংশন রূপে প্রকাশযোগ্য হতে হবে।

ii. উৎপাদনে বিকল্প কার্যক্রম থাকতে হবে, যাতে সুবিধাজনক কার্যক্রম বেছে নেয়া যায়। যেমন: কোনো পণ্য দুইটি পৃথক যন্ত্রের দ্বারা উৎপাদন করা যেতে পারে। এক্ষেত্রে কোনটিতে অধিক সুবিধা পাওয়া যায় তা নির্ণয় করতে হবে।

iii. সিদ্ধান্ত চলকগুলি একে অপরের সাথে সম্পর্কযুক্ত ও অঋণাত্মক হবে যাতে তাদের মধ্যে গাণিতিক সম্পর্ক তৈরি করা যায়। চলকগুলি ঋণাত্মক হবে না।

iv. সম্পদের বা উৎসের সীমাবদ্ধতা থাকতে হবে।

v. সীমাবদ্ধতা বা শর্তগুলি সিদ্ধান্ত চলকের দ্বারা রৈখিক সমীকরণ বা অসমতা আকারে প্রকাশযোগ্য হতে হবে।

2.2.2 লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিমাত্রিক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিষয়ক সমস্যার সমাধান

(Solutions of Two Dimensional L.P.P. by Graphical Method)

2.2-এ আমরা বাস্তব সমস্যাকে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যায় রূপান্তর করতে শিখেছি। L.P.P. বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। দ্বিমাত্রিক বা দুইচলক বিশিষ্ট L.P.P. সমাধানের জন্য অধিকতর সহজ পদ্ধতি হলো লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান। এখানে আমরা লেখচিত্র পদ্ধতি নিয়েই কেবল আলোচনা করব। এ পদ্ধতিতে সমাধানের জন্য—

i. প্রথমে অসমতাগুলি সমীকরণে রূপান্তর করে ছক কাগজে তাদের লেখচিত্র অঙ্কন করে অসমতাগুলির সম্ভাব্য সমাধান এলাকা (Feasible solution region) চিহ্নিত করতে হবে।

ii. সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করতে হবে।

iii. কৌণিক বিন্দুগুলিতে পর্যায়ক্রমে অভীষ্ট বা উদ্দেশ্য ফাংশনের মান নির্ণয় করতে হবে। অতঃপর মানসমূহের মধ্যে চূড়ান্ত মান (Optimum Value) অর্থাৎ সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানই যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান বলে বিবেচিত হবে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 5x + 7y$-এর সর্বোচ্চ মান বের কর।

সীমাবদ্ধতা: $x + y \leq 4$; $3x + 8y \leq 24$; $10x + 7y \leq 35$; $x \geq 0, y \geq 0$

[রা: বো: ০৫; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১০; ব: বো: ১১]

সমাধান: সর্বোচ্চকরণ, $z = 5x + 7y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \leq 4$; $3x + 8y \leq 24$; $10x + 7y \leq 35$; $x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

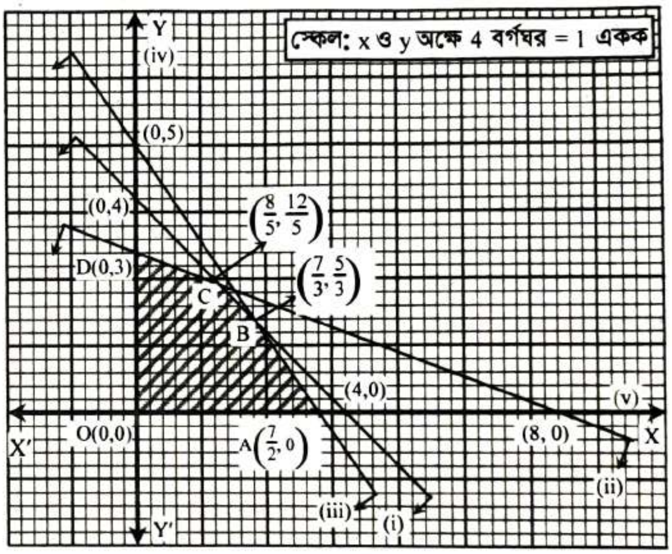
$x + y = 4 \quad \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... (i)

$3x + 8y = 24 \quad \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1$ ... ... (ii)

$10x + 7y = 35 \quad \Rightarrow \frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{5} = 1$ ... ... (iii)

$x = 0$ ... ... (iv)

$y = 0$ ... ... (v)



লেখচিত্রে, চিহ্নিত OABCD হলো সম্ভাব্য সমাধান এলাকা। কারণ এ এলাকায় অবস্থিত বিন্দুসমূহ সকল শর্ত সিদ্ধ করে। অভীষ্ট মান পাওয়া যাবে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কোন একটি কৌণিক বিন্দুতে। লেখচিত্র হতে পাই, O(0, 0)

A হচ্ছে (iii) এবং (v) এর ছেদবিন্দু। $\therefore A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

B হচ্ছে (i) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore B\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$

C হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore C\left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right)$

এবং D হচ্ছে (ii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু। $\therefore$ D (0, 3)

এখন, O (0,0) বিন্দুতে $z = (5 \times 0) + (7 \times 0) = 0$

$A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ " $z = \left(5 \times \frac{7}{2}\right) + (7 \times 0) = \frac{35}{2}$

$B\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$ " $z = \left(5 \times \frac{7}{3}\right) + \left(7 \times \frac{5}{3}\right) = \frac{70}{3}$

$C\left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right)$ " $z = \left(5 \times \frac{8}{5}\right) + \left(7 \times \frac{12}{5}\right) = \frac{124}{5}$

এবং D (0, 3) " $z = (5 \times 0) + (7 \times 3) = 21$

স্পষ্টত $C\left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

$\therefore x = \frac{8}{5}, y = \frac{12}{5}; z = \frac{124}{5}$

কাজ: লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 5x + 7y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।
শর্ত: $-x + 3y \le 9; 2x - y \le 12; x + y \ge 2; x, y \ge 0$

উদাহরণ-2. নিম্নলিখিত শর্তানুসারে $z = 2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর: $x + y \le 5; x + 2y \ge 8; x, y \ge 0$

[ঢা. বি. ১৫-১৬; ঢা: বো: ১৩; ব: বো: ১২, ০৬; চ: বো: ০৮; রা: বো: ১২, ০৯; কু: বো: ০৮, ০৬]

সমাধান: সর্বনিম্নকরণ, $z = 2x - y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 5; x + 2y \ge 8; x \ge 0, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

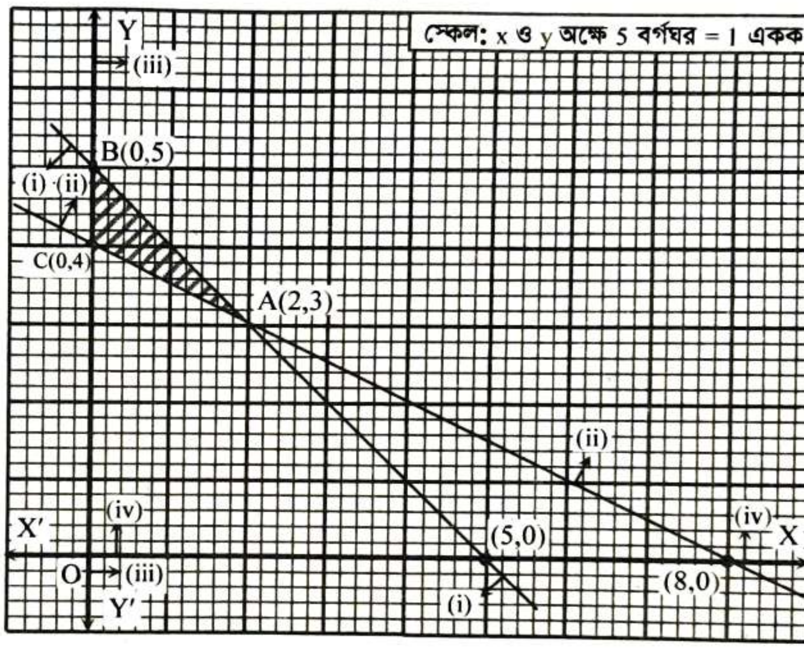
অতএব আমরা পাই, $x + y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ ... ... (i)

$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... (ii)

$x = 0$ ... ... (iii)

$y = 0$ ... ... (iv)

লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এর সকল বিন্দু এবং (i) এর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \leq 5$ সত্য। আবার (ii) এর সকল বিন্দু এবং (ii) এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + 2y \geq 8$ সত্য।



লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC [চিহ্নিত এলাকা]।

$\therefore$ A হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু।
B হচ্ছে (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু।
এবং C হচ্ছে (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore A(2, 3), B(0, 5)$ ও $C(0, 4)$

এখন $A(2, 3)$ বিন্দুতে $z = 2 \times 2 - 3 = 1$

$B(0, 5)$ " $z = 2 \times 0 - 5 = -5$

$C(0, 4)$ " $z = 2 \times 0 - 4 = -4$

স্পষ্টত $B(0, 5)$ এর জন্য z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore x = 0, y = 5; z = -5$

উদাহরণ-3. দুই প্রকার খাদ্য A ও B তে প্রোটিন ও স্টার্চ উপাদান বিদ্যমান। প্রত্যেক প্রকারের খাদ্যে প্রতি কেজিতে পুষ্টি উপাদানের পরিমাণ, খাদ্যের মূল্য ও চাহিদা এর পরিমাণ নিম্নরূপ:

খাদ্যের প্রকার	প্রোটিন	স্টার্চ	প্রতি কেজির মূল্য
A	**8 গ্রাম**	**10 গ্রাম**	**40 টাকা**
B	**12 গ্রাম**	**6 গ্রাম**	**50 টাকা**
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	**32 গ্রাম**	**22 গ্রাম**	

সবচেয়ে কম খরচে কীভাবে দৈনিক প্রয়োজন মিটানো যাবে তা নির্ণয় কর।

[রা: বো: ০৯; দি: বো: ১১, ০৯; কু: বো: ১৩, ১১, ০৯; য: বো: ১৪, ০৯; ব: বো: ০৯]

সমাধান: প্রথমে আমরা সমস্যটিকে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যায় রূপান্তরিত করব এবং অত:পর লেখচিত্র পদ্ধতিতে তা সমাধান করব।

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন: প্রথম ধাপ: (সিদ্ধান্ত চলক শনাক্তকরণ)

মনে করি, A প্রকারের x কেজি ও B প্রকারের y কেজি খাদ্য প্রতিদিন ক্রয় করলে দৈনন্দিন প্রয়োজন মিটানো যাবে। তাহলে $x \geq 0$ ও $y \geq 0$

দ্বিতীয় ধাপ: (সীমাবদ্ধতা সনাক্তকরণ) A ও B এই দুই প্রকারের খাদ্য হতে দৈনিক যে পরিমাণ প্রোটিন পাওয়া যায় তা হলো $8x + 12y$,

প্রশ্নানুযায়ী, $8x + 12y \geq 32$ [যেহেতু ন্যূনতম প্রয়োজন ছিল 32 গ্রাম] অর্থাৎ $2x + 3y \geq 8$

অনুরূপভাবে, স্টার্চ বিবেচনা করলে পাই, $10x + 6y \geq 22$ অর্থাৎ $5x + 3y \geq 11$

তৃতীয় ধাপ: (অভীষ্ট ফাংশন শনাক্তকরণ)

যেহেতু লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য হলো সবচেয়ে কম খরচে প্রয়োজন মিটানো কাজেই এই ফাংশনটি গঠন হবে খরচ কেন্দ্রিক।

মনে করি, অভীষ্ট ফাংশন z

এখানে মোট খরচ: (i) x কেজি A প্রকারের খাদ্য মূল্য $= 40x$ টাকা এবং (ii) y কেজি B প্রকারের খাদ্য মূল্য $= 50y$ টাকা

সুতরাং $z = 40x + 50y$

চূড়ান্ত ধাপ: উপরের তিনটি ধাপকে একত্রে লিখলে পাই,

সর্বনিম্নকরণ. $z = 40x + 50y$ [খরচ ন্যূনতম হওয়ার Minimize ব্যবহার করা হলো]

শর্তসমূহ: $2x + 3y \geq 8$

$5x + 3y \geq 11$

$x, y \geq 0$

এটিই নির্ণেয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

প্রোগ্রামের সমাধান: প্রথমে অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$2x + 3y \geq 8$ এর অনুরূপ সমীকরণ $2x + 3y = 8$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{8/3} = 1$ ... ... (i)

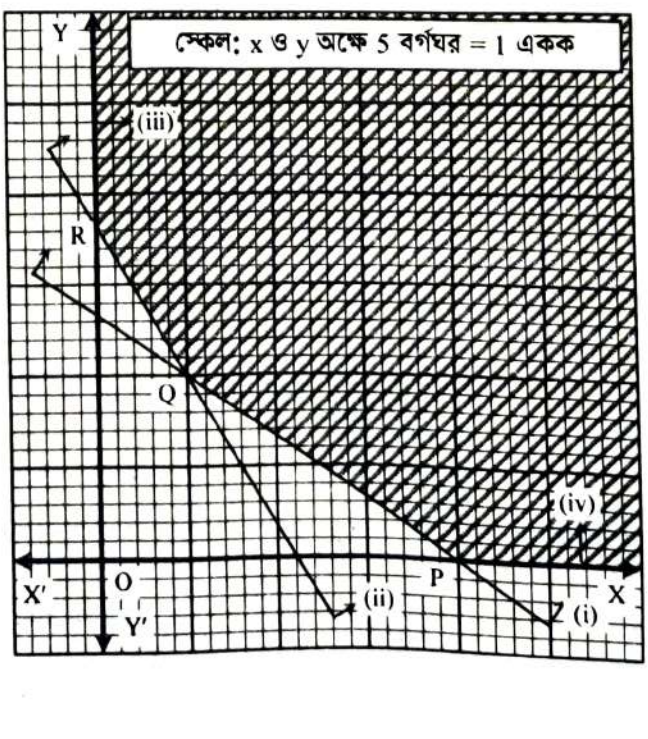
$5x + 3y \geq 11$ এর অনুরূপ সমীকরণ $5x + 3y = 11$ বা, $\frac{x}{11/5} + \frac{y}{11/3} = 1$ ... ... (ii)

$x \geq 0, y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0$ ... ... (iii)

এবং $y = 0$ ... ... (iv)

এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 5 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (i), (ii), (iii) ও (iv) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।

এবার $2x + 3y \geq 8$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 8$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রে ছক কাগজে (i) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $2x + 3y \geq 8$ অসমতার সমাধান।



পুনরায় $5x + 3y \geq 11$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 11$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (ii) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $5x + 3y \geq 11$ অসমতার সমাধান।

$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y-অক্ষের ওপর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়। এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।

লেখচিত্রের ছায়াঘেরা এলাকাকে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা বলা হয়।

লেখচিত্রানুসারে, এখানে সম্ভাব্য এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু আছে।

কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (i) ও (iv) নং এর ছেদ বিন্দু (4, 0); (i) ও (ii) নং এর ছেদ বিন্দু (1, 2); (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

মনে করি P(4, 0), Q(1, 2) এবং $R\left(0, \frac{11}{3}\right)$

কৌণিক বিন্দু	$z = 40x + 50y$
P(4,0)	$z = 40 \times 4 + 50 \times 0 = 160$
Q(1, 2)	$z = 40 \times 1 + 50 \times 2 = 140$
$R\left(0, \frac{11}{3}\right)$	$z = 40 \times 0 + 50 \times \frac{11}{3} = 183.3$

z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 140

সুতরাং দৈনিক A প্রকারের খাদ্য 1 কেজি ও B প্রকারের খাদ্য 2 কেজি গ্রহণ করলে, সবচেয়ে কম খরচে প্রয়োজন মিটে যাবে।

দ্রষ্টব্য: (i) লেখচিত্রে সরলরেখা অঙ্কন করার জন্য খন্ডিতাংশ পদ্ধতি বা সরলরেখার উপরস্থ যেকোনো দুইটি বিন্দু নির্ণয় করে তাদের সংযোগ পদ্ধতি প্রয়োগ করা তুলনামূলক সহজতর।

(ii) অসমতার দিক দেওয়ার ক্ষেত্রে মূল বিন্দুই ব্যবহার করতে হবে এমন নয়। ঐ অসমতাটি কোন একটি বিন্দু দিয়ে সিদ্ধ হলে, বিন্দুটি রেখার যে পার্শ্বে অবস্থিত ঐ দিকে '$\rightarrow$' চিহ্ন হবে। তবে মূল বিন্দু প্রয়োগ তুলনামূলক সহজতর। এক্ষেত্রে অসমতাটি সিদ্ধ হলে মূলবিন্দুর দিকে এবং সিদ্ধ না হলে বিপরীত দিকে চিহ্নটি দিতে হয়।

উদাহরণ-4. কোনো তেল শোধনাগারের ম্যানেজার সম্ভাব্য দুই ধরনের মিশ্রণ প্রক্রিয়ায় সর্বোচ্চ সুবিধার মিশ্রণ করার জন্য প্রতি উৎপাদন ক্রিয়ায় নিম্নের ছক অনুযায়ী যোগান এবং উৎপাদনের সিদ্ধান্ত নিল :

প্রক্রিয়া	যোগান (একক)		উৎপাদন (একক)	
	অশোধিত-1	অশোধিত-2	পেট্রোল (উন্নত)	পেট্রোল (সাধারণ)
A	10	6	10	16
B	12	15	12	12

প্রতিদিন দুই ধরনের অশোধিত তেলের পর্যাপ্ততা যথাক্রমে 400 ও 450 একক। বাজার চাহিদা অনুযায়ী দৈনিক 200 একক উন্নত এবং 240 একক সাধারণ মানের পেট্রোল প্রয়োজন। লাভ পর্যালোচনা করে দেখা যায় প্রতিবারে A প্রক্রিয়ায় 480 টাকা এবং B প্রক্রিয়ার 400 টাকা লাভ হয়। ম্যানেজার কোম্পানির দৈনিক সর্বোচ্চ লাভের জন্য সর্বোৎকৃষ্ট মিশ্রণ (Optimal production mix) করতে আগ্রহী। এ জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম তৈরি করে লেখচিত্রে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা দেখাও, সমাধান কর এবং চূড়ান্ত বিন্দু বা শীর্ষবিন্দুটি শনাক্ত কর।

সমাধান: মনে করি, A প্রক্রিয়া x বার ও B প্রক্রিয়া y বার প্রয়োগ করা হবে। তাহলে $x, y \geq 0$.

সুতরাং যোগানের সীমাবদ্ধতা: $10x + 12y \leq 400$ অর্থাৎ $5x + 6y \leq 200$

এবং $6x + 15y \leq 450$ অর্থাৎ $2x + 5y \leq 150$

উৎপাদনের সীমাবদ্ধতা: $10x + 12y \geq 200$ অর্থাৎ $5x + 6y \geq 100$

এবং $16x + 12y \geq 240$ অর্থাৎ $4x + 3y \geq 60$

অভীষ্ট ফাংশন z হলে, Maximize $z = 480x + 400y$ [$\because$ সর্বোচ্চ লাভই কাম্য]

উপরিউক্ত শর্তগুলি একত্রে লিখলে পাই,

সর্বনিম্নকরণ, $z = 480x + 400y$

শর্তসমূহ: $5x + 6y \leq 200$; $2x + 5y \leq 150$; $5x + 6y \geq 100$; $4x + 3y \geq 60$; $x, y \geq 0$

লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান নির্ণয়: অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর:

$5x + 6y \leq 200$ এর অনুরূপ সমীকরণ, $\frac{x}{40} + \frac{y}{100/3} = 1$ ... ... (i)

$2x + 5y \leq 150$ এর অনুরূপ সমীকরণ, $\frac{x}{75} + \frac{y}{30} = 1$ ... ... (ii)

$5x + 6y \geq 100$ এর অনুরূপ সমীকরণ $\frac{x}{20} + \frac{y}{50/3} = 1$ ... ... (iii)

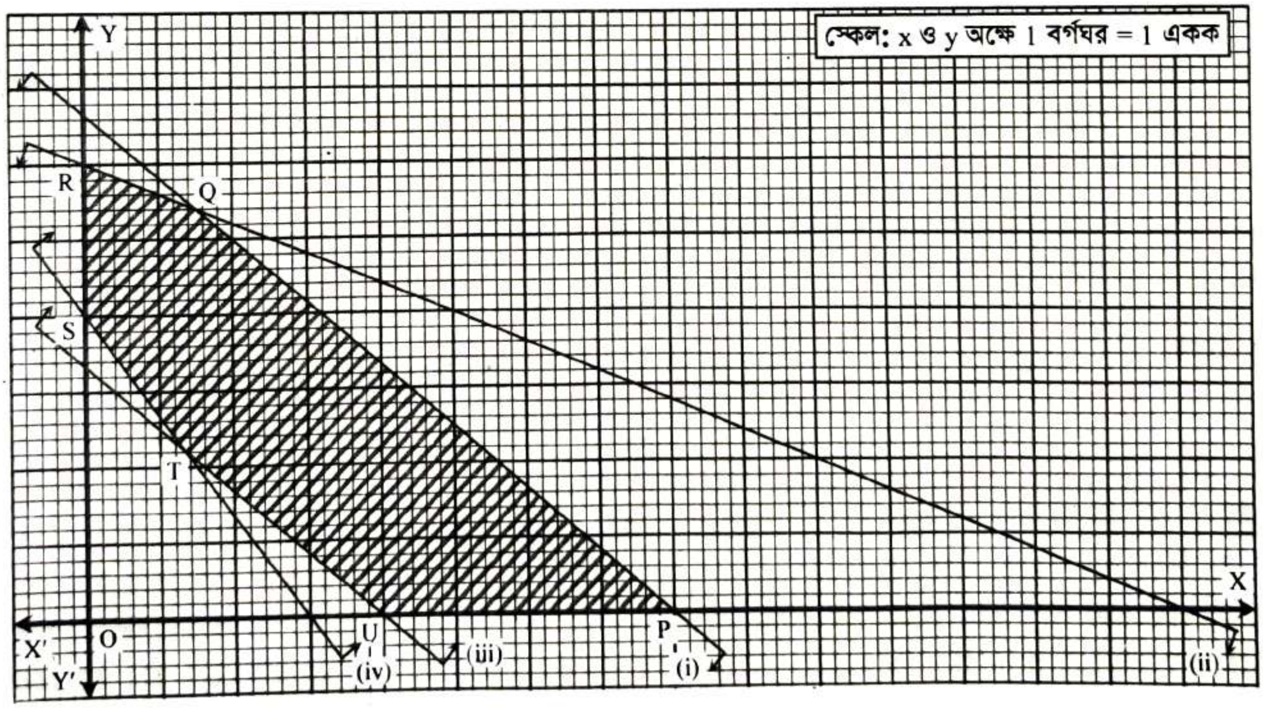
$4x + 3y \geq 60$ এর অনুরূপ সমীকরণ, $\frac{x}{15} + \frac{y}{20} = 1$ ... ... (iv)

$x \geq 0$ ও $y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0$ ... ... (v)

এবং $y = 0$ ... ... (vi)

এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i), (ii), (iii), (iv), (v) ও (vi) অঙ্কন করে এই সরলরেখাগুলির সাহায্যে (উদাহরণ-1 অনুযায়ী) অনুরূপ অসমতাগুলির দিক নির্ণয় করি।

লেখচিত্রে সকল অসমতাগুলি দ্বারা ছায়াঘেরা এলাকাটিকে চিহ্নিত করি। এই অংশকে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা বলা হয়।



এখানে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার পাঁচটি কৌণিক বিন্দু বিদ্যমান। বিন্দুগুলি যথাক্রমে,

(i) ও (vi) এর ছেদবিন্দু $P(40, 0)$

(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $Q\left(\frac{100}{13}, \frac{350}{13}\right)$

(ii) ও (v) এর ছেদবিন্দু $R(0, 30)$

(iv) ও (v) এর ছেদবিন্দু $S(0, 20)$

(iii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু $T\left(\frac{20}{3}, \frac{100}{9}\right)$

(iii) ও (vi) এর ছেদবিন্দু $U(20, 0)$

কৌণিক বিন্দু	$z = 480x + 400y$
P (40, 0)	$z = 480 \times 40 + 400 \times 0 = 19200$
$Q\left(\frac{100}{13}, \frac{350}{13}\right)$	$z = 480 \times \frac{100}{13} + 400 \times \frac{350}{13} = 14461.54$
R (0, 30)	$z = 480 \times 0 + 400 \times 30 = 12000$
S (0, 20)	$z = 480 \times 0 + 400 \times 20 = 8000$
$T\left(\frac{20}{3}, \frac{100}{9}\right)$	$z = 480 \times \frac{20}{3} + 400 \times \frac{100}{9} = 7644.44$
U (20, 0)	$z = 40 \times 20 + 5 \times 0 = 800$

z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা বড় মানটি হলো 19200;

সুতরাং A প্রক্রিয়া 40 বার এবং B প্রক্রিয়া সম্পূর্ণ বন্ধ রেখে তেল শোধন করলে কোম্পানির দৈনিক চূড়ান্ত (সর্বোচ্চ) লাভ হবে 19200 টাকা এবং চূড়ান্ত বিন্দু (শীর্ষ বিন্দু) হবে P (40, 0)

দ্রষ্টব্য: যে বিন্দুতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের চূড়ান্ত মান (Optimum value) অর্থাৎ সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় তাকে চূড়ান্ত বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু বলে।

উদাহরণ-5. একটি ব্যবসায় প্রতিষ্ঠান A ও B দুইটি পণ্য তৈরি করে এবং যথাক্রমে প্রতি একক পণ্যে 3 টাকা ও 4 টাকা লাভ করে। প্রতিটি পণ্য M_1 ও M_2 মেশিনে তৈরি হয়। A পণ্যটি M_1 ও M_2 মেশিনে তৈরিতে যথাক্রমে 1 মিনিট ও 2 মিনিট সময় লাগে এবং B পণ্যটি M_1 ও M_2 মেশিনে যথাক্রমে 1 মিনিট ও 1 মিনিটে তৈরি হয়। প্রতি কাজের দিনে M_1 মেশিন সর্বাধিক $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা ও M_2 মেশিন সর্বাধিক 10 ঘণ্টা ব্যবহার করা যাবে। A ও B পণ্য কী পরিমাণ তৈরি করলে সর্বাধিক লাভ হবে? যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের একটি মডেল তৈরি কর। [চ: বো: ০৫]

সমাধান: সমস্যাটিকে নিম্নোক্তভাবে সাজানো হলো:

পণ্য	M_1 মেশিন	M_2 মেশিন	প্রতি একক পণ্যে লাভ (টাকায়)
A	1	2	3
B	1	1	4
সর্বোচ্চ ব্যবহার (মিনিটে)	$7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বা, 450 মি.	10 ঘণ্টা বা, 600 মি.	

মনে করি, A পণ্য x টি এবং B পণ্য y টি তৈরি করতে হবে।

তাহলে, অভীষ্ট ফাংশন $z_{max} = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \leq 450; 2x + y \leq 600; x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

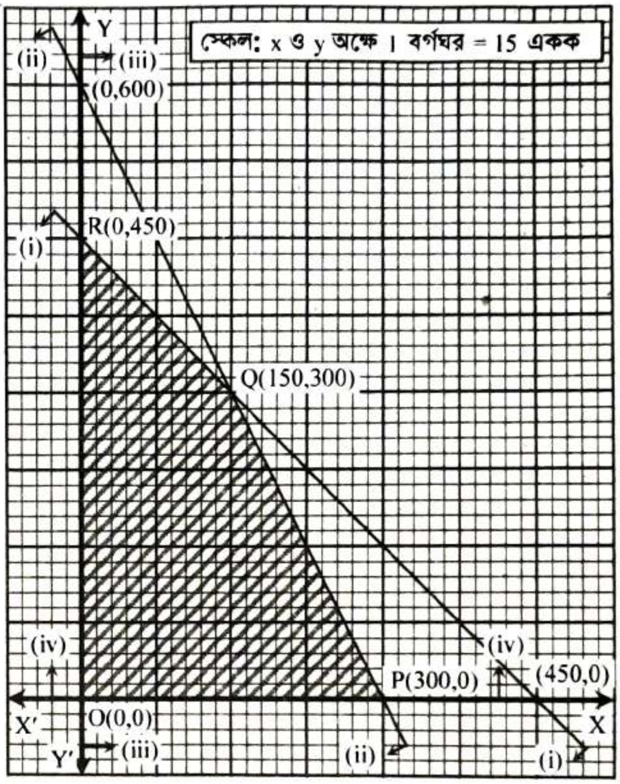
$$x + y = 450 \Rightarrow \frac{x}{450} + \frac{y}{450} = 1 \quad \dots\dots (i)$$

$$2x + y = 600 \Rightarrow \frac{x}{300} + \frac{y}{600} = 1 \quad \dots\dots (ii)$$

$$x = 0 \quad \dots\dots (iii)$$

$$y = 0 \quad \dots\dots (iv)$$

লেখচিত্রে দেখা যায়, (i), (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \leq 450$ এবং $2x + y \leq 600$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের ছায়াঘেরা এলাকা বা সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OPQR। O যেখানে মূলবিন্দু।



$\therefore O(0, 0)$.

এখানে P হচ্ছে (ii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু

Q হচ্ছে (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু

এবং R হচ্ছে (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু

$\therefore P(300, 0), Q(150, 300)$,

এবং $R(0, 450)$

এখন $O(0, 0)$ বিন্দুতে $z = 0$

$P(300, 0)$ বিন্দুতে $z = (3 \times 300) = 900$

$Q(150, 300)$ বিন্দুতে

$z = (3 \times 150) + (4 \times 300) = 1650$

এবং $R(0, 450)$ বিন্দুতে

$z = 0 + (4 \times 450) = 1800$

দেখা যায়, $R(0, 450)$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় কিন্তু প্রতিষ্ঠানটি A ও B দুই প্রকারের জন্য তৈরি করে।

সুতরাং সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি $Q(150, 300)$।

$\therefore A = 150$ টি ও $B = 300$ টি।

কাজ: 1. একজন ফেরিওয়ালা দৈনিক 600টি সবুজ ও লাল চকোলেট কিনেন। প্রতিটি সবুজ ও লাল চকোলেটের ক্রয় মূল্য যথাক্রমে 1 টাকা ও 5 টাকা এবং প্রতিটি সবুজ ও লাল চকোলেটে লাভ হয় যথাক্রমে 1 টাকা ও 2 টাকা। তাঁর সংসারের প্রতিদিনের খরচ 600 টাকা এবং বিনিয়োগ করতে পারেন সর্বোচ্চ 1000 টাকা।

(i) সর্বোচ্চ লাভের জন্য তিনি প্রতিদিন কোন প্রকারের কতটি চকোলেট কিনবেন?

(ii) যদি সবুজ চকোলেটে লাভ 0.5 টাকা কমে যায় এবং লাল চকোলেটে লাভ 1 টাকা বেড়ে যায় তাহলে চকোলেট ফেরী করে তাঁর সংসার খরচ চালাতে পারবেন কি না?

উদাহরণ-6. 1944 সালে দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় কমপক্ষে 1000 সৈন্যের সুসজ্জিত একটি বৃটিশ বাহিনী আক্রমণের জন্য এগিয়ে গেল এবং জার্মান বর্ডারের নিকটে প্রত্যন্ত একটি অঞ্চলে তাঁবু টানিয়ে অবস্থান নেওয়ার সিদ্ধান্ত নিল। তারা দুই ধরনের তাঁবু বানিয়েছিল যার বড় গুলোতে সর্বোচ্চ 25 জন এবং ছোটগুলোতে সর্বোচ্চ 15 জন অবস্থান নিতে পারে। প্রতিটি বড় তাঁবু বানাতে 60 পাউন্ড এবং প্রতিটি ছোট তাঁবু বানাতে 20 পাউন্ড খরচ হয়েছিল। সৈন্যদের খাবারের জন্য চাল ও গম মিলিয়ে সর্বোচ্চ 7 টন সরবরাহ করা সম্ভব যার সর্বোচ্চ মূল্য 410 পাউন্ড।

ক. যুদ্ধ ক্ষেত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার আলোচনা কর।

খ. ছোট-বড় সব মিলিয়ে সর্বোচ্চ 52টি তাঁবু বানানো সম্ভব হলে কোন প্রকারের কতটি তাঁবু বানানো যাবে?

গ. প্রতি টন গমের দাম 50 পাউন্ড এবং প্রতি টন চালের দাম 80 পাউন্ড হলে, সৈন্যদের জন্য বরাদ্দকৃত সর্বোচ্চ গম ও চালের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. রসদ ও সৈন্যবাহিনী এক স্থান হতে অন্য স্থানে স্থানান্তর, স্থান বিবেচনায় সৈন্য ব্যবহার ও সীমাবদ্ধতার সূক্ষ্ম হিসাব সূচারুরূপে পরিচালনার জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

খ. মনে করি, বড় তাঁবু বানাতে হবে x টি এবং ছোট তাঁবু বানাতে হবে y টি

অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 60x + 20y$; $z_{min} = 60x + 20y$

শর্তসমূহ: $x + y \leq 52$

$25x + 15y \geq 1000$

$x, y \geq 0$

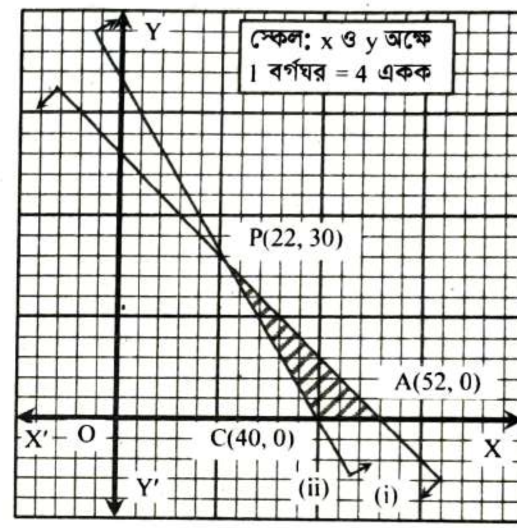
প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতার সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করি

$x + y = 52$

$\therefore \frac{x}{52} + \frac{y}{52} = 1$ ... ... (i)

এবং $25x + 15y = 1000$

$\therefore \frac{x}{40} + \frac{y}{200/3} = 1$ ... ... (ii)



এখন ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 4 একক ধরে (i) ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং লেখচিত্র হতে সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল বের করি।

লেখচিত্র হতে দেখা যায় CAP সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো C(40, 0), A(52, 0) এবং P(22, 30)

এখন, C(40, 0) বিন্দুতে, $z = 60 \times 40 + 20 \times 0 = 2400$

A(52, 0) বিন্দুতে, $z = 60 \times 52 + 20 \times 0 = 3120$

P(22, 30) বিন্দুতে, $z = 60 \times 22 + 20 \times 30 = 1920$

$\therefore$ P(22, 30) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ বড় তাঁবুর সংখ্যা 22টি এবং ছোট তাঁবুর সংখ্যা 30টি।

গ. ধরি, বরাদ্দকৃত গমের পরিমাণ x টন এবং বরাদ্দকৃত চালের পরিমাণ y টন

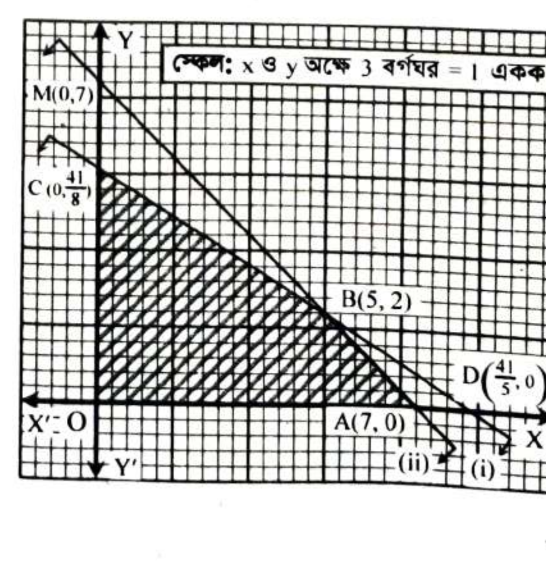
$z_{max} = x + y$

প্রদত্ত শর্তসমূহ: $50x + 80y \leq 410$, $x + y \leq 7$ এবং $x, y \geq 0$

এখন প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতার সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করি,

$50x + 80y = 410 \quad \therefore \frac{x}{\frac{41}{5}} + \frac{y}{\frac{41}{8}} = 1$ ... ... (i)

এবং $x + y = 7 \quad \therefore \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ... ... (ii)



এখন ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 3 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (i) ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং লেখচিত্র হতে সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল বের করি।

লেখচিত্র হতে দেখা যায় OABC সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো O(0, 0), A(7, 0), B (5, 2) ও $C(0, \frac{41}{8})$

এখন, O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0 + 0 = 0$

A(7, 0) বিন্দুতে $z = 7 + 0 = 7$

B(5, 2) বিন্দুতে $z = 5 + 2 = 7$

$C(0, \frac{41}{8})$ বিন্দুতে $z = 0 + \frac{41}{8} = 5.125$

এখন যেহেতু দুই প্রকার খাদ্যই বরাদ্দ করতে হবে। সেহেতু z এর সর্বোচ্চ মান B(5, 2) বিন্দুতে নির্ণেয়।

$\therefore$ গম 5 টন এবং চাল 2 টন।

উদাহরণ-7. $f(x, y) = x + y, g(x, y) = x - y, u(x, y) = -x + y, v(x, y) = -x - y$

ক. $||-1+2|-|-3|+|4-|-5+6|||$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. সমাধান কর: $\frac{f(x,1)}{g(x,1)} - \frac{u(x,1)}{v(x,1)} > 0$

গ. $f(x, y) \le 4, g(x, y) \le 4, u(x, y) \le 4$ এবং $v(x, y) \le 4$ অসমতাগুলি দ্বারা সীমাবন্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. দেওয়া আছে, $||-1+2|-|-3|+|4-|-5+6|||$

$= |1 - 3 + |4 - 1||$

$= |1 - 3 + 3|$

$= 1$

খ. দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + y, g(x, y) = x - y$

$u(x, y) = -x + y, v(x, y) = -x - y$

এখন, $\frac{f(x,1)}{g(x,1)} - \frac{u(x,1)}{v(x,1)} > 0$

বা, $\frac{x+1}{x-1} - \frac{-x+1}{-x-1} > 0$

বা, $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} > 0$

বা, $\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)(x-1)} > 0$

বা, $\frac{4x}{(x-1)(x+1)} > 0$

বা, $\frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$ .... (i)

(i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি x, (x − 1) এবং (x + 1) এই তিনটির মধ্যে তিনটি চিহ্নই ধনাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ঋণাত্মক এবং একটির চিহ্ন ধনাত্মক হয়।

শর্ত	x এর চিহ্ন	(x−1) এর চিহ্ন	(x+1) এর চিহ্ন	$\frac{x}{(x-1)(x+1)}$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−	−	−
$-1 < x < 0$	−	−	+	+
$0 < x < 1$	+	−	+	−
$x > 1$	+	+	+	+

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-1 < x < 0$ অথবা $x > 1$

গ. দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + y, g(x, y) = x - y$

$u(x, y) = -x + y, v(x, y) = -x - y$

আবার, $f(x, y) \le 4$, $g(x, y) \le 4$, $u(x, y) \le 4$ এবং $v(x, y) \le 4$

$\therefore x + y \le 4, x - y \le 4, -x + y \le 4$ এবং $-x - y \le 4$

প্রদত্ত অসমতা গুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অংকন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

$x + y = 4$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... (i)

$x - y = 4$

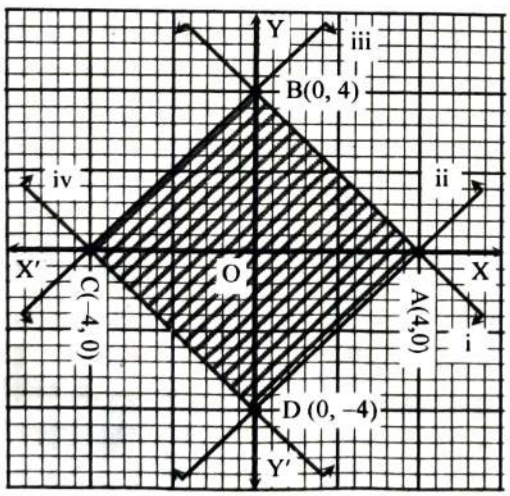
বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} = 1$ ... ... (ii)

$-x + y = 4$

বা, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... (iii)

এবং $-x - y = 4$

বা, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$ ... ... (iv)



লেখচিত্র হতে দেখা যায় সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD।

A বিন্দুর স্থানাংক (4, 0)

B বিন্দুর স্থানাংক (0, 4)

C বিন্দুর স্থানাংক (– 4, 0)

D বিন্দুর স্থানাংক (0, – 4)

লেখচিত্রে দেখা যায় সম্ভাব্য এলাকা একটি বর্গক্ষেত্র।

এখন বাহু, $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= AB^2 = (\sqrt{32})^2 = 32$ বর্গ একক।

পাঠ-৬, ৭ ও ৮

অনুশীলনী-2

Type-I

1. (i) সিদ্ধান্ত চলক, অভীষ্ট ফাংশন ও সীমাবদ্ধতা বলতে কী বোঝায়?
 (ii) যোগাশ্রয়ী প্রোগাম কী? যোগাশ্রয়ী প্রোগামের শর্ত ও সুবিধাগুলি বিস্তারিত আলোচনা কর।
 [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-২(ক); দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক); ঢা: বো: ১৬, ১২, ০৯, ০৬; কু: বো: ১৪, ১২, ০৭, ০৫; রা: বো: ১৫, ১৪, ১২, ১০, ০৭; চ: বো: ১৬, ১৫, ১৪, ১৩, ১১, ০৯; ব: বো: ১২, ১০, ০৮, ০৬; সি: বো: ১৩, ০৯, ০৬; য: বো: ১৫, ১৩, ১১, ১০, ১২, ০৮, ০৫; দি. বো: ১৩, ১২, ১১, ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১৪, ১৩, ১২, ১১, ১০]
 (iii) "আধুনিক উৎপাদন ও বন্টন ব্যবস্থায় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি অপরিহার্য হাতিয়ার"— ব্যাখ্যাসহ বুঝিয়ে লিখ।
 [রা: বো: ১৬; সি: বো: ১৫; দি: বো: ১১; চ: বো: ১২]
 (iv) কীভাবে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যা গঠন করা হয় তা বিস্তারিতভাবে বর্ণনা কর।
 [ঢা: বো: ০৭; য: বো: ১০; সি: বো: ১৪, ০৫; ব: বো: ১৪, ০৬; দি. বো: ১৩, ১১]
 (v) লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যা কীভাবে সমাধান করা যায়, তা ব্যাখ্যা কর। [য: বো: ১৩]
 (vi) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম কেন প্রয়োজন? [য: বো: ০৮]
 (vii) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার লিখ। [মাদ্রাসা: বো: ১৩]

Type-II

2. নিম্নলিখিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে সম্ভাব্য এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দু নির্ণয় করে সর্বোচ্চকরণ কর:
 (i) $z = 2x + 3y$; শর্তগুলি: $x + 2y \le 10, x + y \le 6, x \le 4, x, y \ge 0$ [ঢা: বো: ১১, ০৮; কু: বো: ১১, ০৫; রা: বো: ১১, ০৮, ০৬; য: বো: ০৮, ০৬; চ: বো: ১১, ০৯, ০৭; দি: বো: ১৪; সি: বো: ১৫, ১৩, ০৯, ০৭ ব: বো: ০৭]
 (ii) $z = 12x + 10y$; শর্তগুলি: $2x + y \le 90, x + 2y \le 80, x + y \le 50, x \ge 0, y \ge 0$
 [ঢা: বো: ০৬; কু: বো: ০৭; দি: বো: ১০]
 (iii) $z = 4x + 6y$, শর্তগুলি: $x + y = 5, x \ge 2, y \le 4, x, y \ge 0$ [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১১; ব: বো: ০৭]
 (iv) $z = 3x + 4y$, শর্তগুলি: $x + y \le 7, 2x + 5y \le 20, x, y \ge 0$
 [বুয়েট ০৪-০৫; চুয়েট ০৫-০৬; ঢা: বো: ১৫, ১২; চ: বো: ১৫, ১৩; য: বো: ১২; রা: বো: ১৫; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৫]
 (v) $z = 2x + y$, শর্তগুলি: $x + 2y \le 10, x + y \le 6, x - y \le 2, x - 2y \le 10, x, y \ge 0$ [সি: বো: ১৬; ব: বো: ১৩]
 (vi) $z = 3x + 2y$; শর্তগুলি: $2x + y \le 8, 2x + 3y \le 12, x, y \ge 0$ [ব: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৩]
 (vii) $z = 3x + 4y$; শর্তগুলি: $x + y \le 450, 2x + y \le 600, x \ge 0, y \ge 0$ [কু: বো: ০৯; য: বো: ১৪; চ: বো: ০৫]
 (viii) $z = 3x + 2y$; শর্তগুলি: $x + y \ge 1, y - 5x \le 0, 5y - x \ge 0, x - y \ge -1, x + y \le 6, x \le 3, x, y \ge 0$
 (ix) $z = 3x + y$; শর্তগুলি: $2x + y \le 8, 2x + 3y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$ [রা: বো: ১৩]
 (x) $F = y - 2x$; শর্তগুলি: $x + 2y \le 6, x + y \ge 4, x, y \ge 0$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ)]
 (xi) $Z = 2x + 3y$; শর্তগুলি: $x + 2y \le 8, x + y \le 6, x, y \ge 0$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

3. $a = 1, b = -1, c = 2, f(x) \ge 0, l = 1, m = 1, n = -4, g(x) \le 0$ এবং $x, y \ge 0$ হলে, $z = x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। যেখানে, $f(x) = ax + by + c, g(x) = lx + my + n$.
 [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ)]

4. $f \le 12, g \ge 15$ এবং $x, y \ge 0$ হলে লেখচিত্রের মাধ্যমে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি নির্বাচন কর। শর্তে কী পরিবর্তন করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি চতুর্ভুজ হবে? যেখানে $f = 2x + 3y, g = 5x + 3y$ এবং $x, y \in \mathbb{R}$
 [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ)]

Type-III

5. নিম্নের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দু নির্ণয় করে সর্বনিম্নকরণ কর:
 (i) $z = 2y - x$; শর্তগুলি: $3y - x \le 10, x + y \le 6, x - y \le 2, x, y \ge 0$
 [ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ১৫, ০৭; কু: বো: ১৩; য: বো: ১৩, ০৭; ব: বো: ১৫, ১৪, ১০; চ: বো: ১৪, ০৬; দি. বো: ১২; সি: বো: ১৪, ১২]
 (ii) $z = 2x - y$; শর্তগুলি : $x + 2y \le 8, 4x + 3y \ge 12, x + y \le 5, x, y \ge 0$
 [ঢা: বো: ০৫; ব: বো: ১৬, ০৬ য: বো: ০৯; দি: বো: ১৬; চ: বো: ১২, সি: বো: ১০, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]
 (iii) $z = -x + y$; শর্তগুলি: $3y - x \le 10, x + y \le 6, x - y \le 2, x, y \ge 0$ [ঢা: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১২]

(iv) $z = 4x - y$; শর্তগুলি: $x + y \le 5, x + 2y \le 8, 4x + 3y \ge 12, x, y \ge 0$ [কু: বো: ১৬, ১৫, ১০]

(v) $z = 3x_1 + 2x_2$; শর্তগুলি: $x_1 + 2x_2 \ge 4, 2x_1 + x_2 \ge 4, x_1 + x_2 \le 5, x_1, x_2 \ge 0$. [চ: বো: ১০]

(vi) $z = 3x + 5y$; শর্তগুলি: $x \le 2y + 2, x \ge 6 - 2y, y \le x, x \le 6, x, y \ge 0$.

(vii) $z = 4x + 2y$; শর্তগুলি: $4x + y \ge 16, 4x + 7y \ge 40, x, y \ge 0$. [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(viii) $z = 3x + 4y$; শর্তগুলি: $x + y - 7 \le 0, x - 2y - 4 \ge 0, x, y \ge 0$. [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ)]

(ix) $z = 3x + 2y$; শর্তগুলি: $x + 2y \ge 4, 2x + y \ge 4, x + y \le 5$ ও $x, y \ge 0$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(গ)]

Type-IV

6. (i) জনৈক ভদ্রলোক সর্বোচ্চ 100 টাকা ব্যয় করে কিছুসংখ্যক কলম ও পেন্সিল কিনতে চান। প্রতিটি কলম ও পেন্সিলের ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 12 টাকা ও 8 টাকা। তিনি অন্তত: 1টি কলম কিনবেন কিন্তু 8 টির অধিক পেন্সিল কিনবেন না। ঐ ভদ্রলোক কোন্ প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন? [ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১৫, ০৮; রা: বো: ০৮; য: বো: ০৭, ০৫; সি: বো: ১১, ০৮; ব: বো: ১৫ (অনুরূপ), ০৫]

(ii) একজন লোক সর্বাধিক 500 টাকা ব্যয়ে কয়েকটি কাপ ও প্লেট কিনতে চান। প্রতিটি কাপের দাম 30 টাকা ও প্লেটের দাম 20 টাকা। অন্যূন 3টি প্লেট ও অনধিক 6টি কাপ কেনার শর্তে ঐ টাকায় কোন প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে তিনি মোট সর্বাধিক জিনিস কিনতে পারবেন? [ঢা: বো: ১৪; সি: বো: ১৬ (অনুরূপ)]

(iii) এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা গামছা এবং 4 খানা তোয়ালে কিনতে চান। প্রতিখানা গামছার মূল্য 30 টাকা এবং প্রতিখানা তোয়ালের মূল্য 40 টাকা। প্রত্যেক প্রকারের কতখানা জিনিস কিনলে সে প্রদত্ত শর্তাধীনে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন? [ঢা: বো: ১০, ০৫; কু: বো: ১৪, ১২; রা: বো: ১৪, ০৬; দি: বো: ১৩; সি: বো: ১০, ০৬; ব: বো: ০৭; য: বো: ১২; চ: বো: ০৮]

(iv) একজন ফল বিক্রেতা আম ও পেয়ারা বিক্রয় করেন। প্রতি ঝুড়ি আম ও পেয়ারার মূল্য যথাক্রমে 50 টাকা এবং 25 টাকা। ঐ বিক্রেতা তার দোকানে 12টির বেশি ঝুড়ি রাখতে পারেন না। প্রতি ঝুড়ি আম ও পেয়ারা বিক্রয়ে লাভ যথাক্রমে 10 টাকা ও 6 টাকা হলে 500 টাকা মূলধন ব্যয়ে কত ঝুড়ি আম ও পেয়ারা কিনলে ঐ বিক্রেতা সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন? [রা: বো: ১৩, ১০; কু: বো: ০৬; দি: বো: ১৫; সি: বো: ০৭]

(v) এক ব্যক্তি তার বাগানে কমপক্ষে 12 টি নারকেলের চারা এবং 8 টি আমের চারা লাগাতে চান। প্রতিটি নারকেলের চারা ও আমের চারার মূল্য যথাক্রমে 20 টাকা ও 30 টাকা। ঐ ব্যক্তি 600 টাকার বেশি ব্যয় না করে প্রত্যেক প্রকারের কতগুলি চারা কিনতে পারেন যাতে মোট চারার সংখ্যা সর্বাধিক হয়? [দি বো: ১০]

(vi) একজন পোলট্রি মালিক 800 টাকার মধ্যে কিছু হাঁস ও মুরগীর বাচ্চা কিনতে চান। প্রতিটি মুরগীর বাচ্চার দাম 40 টাকা এবং প্রতিটি হাঁসের বাচ্চার দাম 20 টাকা। তিনি কোন প্রকারের কতগুলি বাচ্চা কিনতে পারবেন, যাতে তাঁর হাঁস ও মুরগীর মোট বাচ্চার সংখ্যা সর্বাধিক 25 এর বেশি না হয়। [ব: বো: ১৩]

(vii) একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য রেডিও ও টেলিভিশন মিলে 100 সেট কিনতে পারেন। রেডিও সেট ও টেলিভিশন সেট প্রতিটির ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 40 ডলার ও 120 ডলার। প্রতি রেডিও ও টেলিভিশন সেটে লাভ যথাক্রমে 16 ডলার ও 32 ডলার। সর্বোচ্চ 10400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করতে পারেন? [চুয়েট ০৭-০৮; কুয়েট ০৮-০৯; ঢা: বো: ১৩; কু: বো: ১৬, ১০; চ: বো: ১০; দি: বো: ১৪; ব: বো: ১৬, ১১; সি: বো: ১২]

(viii) এক ব্যক্তি 1200 টাকার মধ্যে মাছের পোনা কিনতে চান। 100 রুই মাছের পোনার দাম 60 টাকা এবং 100 কাতল মাছের পোনার দাম 30 টাকা হলে, তিনি কোন মাছের কত পোনা কিনতে পারবেন যার মোট পোনার সংখ্যা সর্বাধিক 3000 এর বেশি না হয়। [ঢা: বো: ০৫]

(ix) একজন কৃষক ধান ও গম চাষ করতে গিয়ে, দেখলেন যে, প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের খরচ যথাক্রমে 1200 টাকা এবং 800 টাকা। প্রতি হেক্টর জমিতে ধান ও গম চাষের জন্য যথাক্রমে 4 জন ও 6 জন করে শ্রমিকের প্রয়োজন হয়। সর্বোচ্চ 26 জন শ্রমিক নিয়োগ করে এবং 4800 টাকা বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ কত হেক্টর জমি তিনি চাষ করতে পারবেন?

(x) একটি বাগানে সর্বোচ্চ 23 বর্গমিটার জমিতে পেয়ারা এবং সুপারির চারা লাগাতে হবে। একটি পেয়ারার চারার জন্য 2 বর্গমিটার এবং একটি সুপারির চারার জন্য 1 বর্গমিটার জায়গা বরাদ্দ করা হয়। প্রতি পেয়ারার চারার মূল্য 0.40 টাকা এবং প্রতি সুপারির চারার মূল্য 1.20 টাকা। যদি মোট 11.60 টাকার বেশি ব্যয় না করা হয়, তবে সর্বোচ্চ কত সংখ্যক গাছ লাগানো যাবে?

(xi) দুই প্রকার খাদ্য F_1 এবং F_2 তে ভিটামিন A ও C পাওয়া যায়। এক একক F_1 খাদ্যে 7- একক ভিটামিন A ও 3-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। আবার প্রতি একক F_2 খাদ্যে 2-একক ভিটামিন A ও 5-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। F_1 ও F_2 খাদ্যের প্রতি এককের দাম যথাক্রমে 25 টাকা ও 18 টাকা। একজন লোকের দৈনিক ন্যূনতম 45 একক ভিটামিন A এবং 60-একক ভিটামিন C প্রয়োজন। সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন-এর চাহিদা মেটানোর জন্য একটি যোগাশ্রয়ী সমস্যা গঠন কর।

[বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ)]

(xii) জনাব দবির মিয়া তাঁর দোকানে বিক্রির জন্য মোবাইল ও কম্পিউটার মিলে 50 সেট কিনতে পারেন। প্রতিটা কম্পিউটারের ক্রয়মূল্য, মোবাইলের ক্রয়মূল্যের তিনগুণ এবং প্রতিটা কম্পিউটারে লাভ মোবাইলের লাভের দ্বিগুণ। প্রতিটা মোবাইল সেটের ক্রয়মূল্য 20 ডলার এবং লাভ 8 ডলার। দবির মিয়ার সর্বোচ্চ 5200 ডলার বিনিয়োগের মাধ্যমে সর্বোচ্চ লাভের জন্য একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর।

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(গ)]

Type-V

7. (i) A এবং B দুই ধরনের খাদ্যে প্রতি কিলোতে প্রোটিন ও ফ্যাট নিম্নরূপ:

খাদ্য	প্রোটিন	ফ্যাট	কিলো প্রতি মূল্য
A	1	3	2 টাকা
B	3	2	3 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	9	12	—

সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক খাদ্যের প্রয়োজন কিভাবে মিটানো যাবে তা নির্ণয় কর। সমস্যাটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যায় প্রকাশ করে লেখচিত্রের সাহায্যে এর সমাধান কর।

[ঢা: বো: ১৫(অনুরূপ), ১১, ০৮; য: বো: ১৬, ০৬; চ: বো: ০৭]

(ii) F_1 ও F_2 দুই ধরনের খাদ্যের প্রতি কিলোতে ভিটামিন C ও D পাওয়া যায় নিম্নরূপ:

খাদ্য	ভিটামিন C	ভিটামিন D	কিলো প্রতি মূল্য
F_1	2	3	5 টাকা
F_2	5	6	3 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	50	60	

সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন C ও D এর চাহিদা কিভাবে মেটানো যাবে তা নির্ণয়ের জন্য একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা তৈরি কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর। [রা: বো: ১১]

(iii) এক ব্যক্তি A ও B দুই রকমের খাদ্য গ্রহণ করেন, যাতে তিন প্রকারের পুষ্টি N_1, N_2, N_3 এর পরিমাণ, খাদ্যের দাম ও দৈনিক ন্যূনতম পুষ্টির প্রয়োজন দেওয়া হলো তা নিম্নরূপ:

দাম (প্রতি একক)	A	B	দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন
	1.00 টাকা	3.00 টাকা	
N_1	30	12	60
N_2	15	15	60
N_3	6	18	36

সর্বনিম্ন খরচে খাদ্যের দৈনিক প্রয়োজন কীভাবে মিটানো যায় তা যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের দ্বারা লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর। [সি: বো: ০৫]

(iv) নিচের প্রদত্ত তালিকা থেকে সর্বনিম্ন ব্যয়ে প্রয়োজনীয় পুষ্টি সমন্বিত খাদ্যের সর্বোৎকৃষ্ট সমন্বয় করে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ও লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

প্রতি একক খাদ্যের মূল্য	খাদ্য-A	খাদ্য-B	ন্যূনতম প্রয়োজন
	মূল্য 1.00 টাকা	মূল্য 2.00 টাকা	
পুষ্টি I	20	8	40
পুষ্টি II	10	10	40
পুষ্টি III	4	12	24

(v) একটি পানীয় তৈরির কারখানায় দুইটি শাখা I এবং II এর উভয়েই কোকাকোলা, ফানটা এবং স্প্রাইট বোতলজাত করে। শাখা দুইটির দৈনিক উৎপাদন ক্ষমতা নিম্নরূপ:

শাখা	কোকাকোলা	ফানটা	স্প্রাইট
I	3000	1000	2000
II	1000	1000	6000

কোকাকোলা, ফান্টা, স্প্রাইটের মাসিক চাহিদা যথাক্রমে 24000, 16000 ও 48000 বোতল। I ও II শাখার দৈনিক কার্যপরিচালনার ব্যয় যথাক্রমে 600 টাকা ও 400 টাকা। মাসে কোন শাখা কতদিন চালু রাখলে তা সর্বনিম্ন কার্যপরিচালনা ব্যয়ে পানীয়ের মাসিক চাহিদা পূরণ করতে পারবে? সর্বনিম্ন ব্যয় কত হবে?

(vi) F_1 ও F_2 খাদ্যের প্রতি কেজিতে ভিটামিন C ও D এর পরিমাণ ও তাদের মূল্যের একটি ছক:

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-২(খ ও গ)]

খাদ্য	ভিটামিন C	ভিটামিন D	প্রতি কেজির মূল্য
F_1	6	2	3
F_2	3	5	5

দৈনিক ভিটামিন C ও ভিটামিন D এর ন্যূনতম চাহিদা যথাক্রমে 60 একক ও 50 একক হলে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন চাহিদা মেটানোর একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে প্রাপ্ত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি সমাধান করে দৈনিক সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয় কর।

(vii) M ও N দুই প্রকার খাবারে প্রতি কেজিতে নিচের ছক অনুযায়ী প্রোটিন ও ফ্যাট আছে।

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-১(গ)]

খাবার	প্রোটিন	ফ্যাট	প্রতি কেজির মূল্য
M	2	4	20 টাকা
N	6	3	30 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	36	48	

সবচেয়ে কম খরচে কিভাবে দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন মেটানো সম্ভব?

(viii) A ও B দুই ধরনের খাবার আছে যার মধ্যে প্রোটিন ও শ্বেতসার নিম্নরূপ:

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ ও গ)]

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি এককের দাম
A	4	5	40 টাকা
B	6	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	16	11	

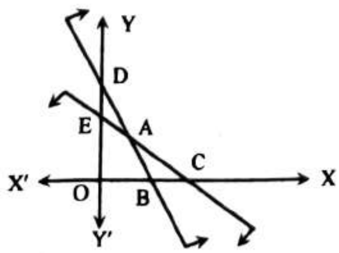
সমস্যাটির একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমাধান কর।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $2x + y \leq 7; 3x + 5y \leq 21; x \geq 0, y \geq 0$ শর্তাবলী বিশিষ্ট যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের অভীষ্ট ফাংশন, $Z = x + y$ এর সর্বোচ্চ মান কত?

ক. 2 খ. 3.5 গ. 4.2 ঘ. 5

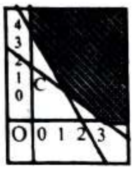
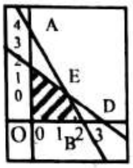
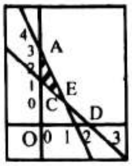
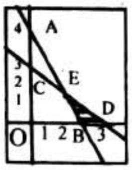
2.



উপরের চিত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের অনুকূল এলাকা কোনটি?

ক. ADC খ. ABC গ. EABO ঘ. ADE

3. $2x + y \geq 4, x + y \leq 3; x, y \geq 0$; নিচের কোন চিত্রের আবদ্ধক্ষেত্রটি সকল শর্ত সিদ্ধ করে?

ক.  খ.  গ.  ঘ. 

4. $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 5y \leq 25, -x + 6y \geq 7$ শর্তানুসারে $z = x - 2y$ এর সর্বনিম্ন মান কত?

ক. -2 খ. -4 গ. -5 ঘ. -10

5. $10x + 7y \leq 14$ অসমতাটির সমাধান অঞ্চল কোথায়?

ক. মূলবিন্দুর বিপরীত দিকে খ. মূলবিন্দুর দিকে

গ. x-অক্ষের উপর ঘ. y-অক্ষের উপর

6. $x + 3y \leq 6, x \geq 4; x, y \geq 0$ শর্তাধীনে অভীষ্ট ফাংশন, $z = 2x - y$ এর সমাধান অঞ্চলটি কেমন হবে?

ক. আয়তাকার খ. বর্গাকার গ. ত্রিভুজাকৃতি ঘ. ট্রাপিজিয়াম

7. একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান অঞ্চলের বিন্দুগুলি A(8, 0), B(6, 4) এবং C(0, 4) এবং $z = 10x + 4y$ হলে, $z_{max} = ?$

ক. 16 খ. 76 গ. 80 ঘ. 88

8. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে প্রয়োজন হয়—

i. দ্বিঘাত সমীকরণ

ii. অঋণাত্মক চলক

iii. একঘাত বিশিষ্ট অসমতা

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

9. $-2x + 4y \leq 32, x \leq 4, y \geq 5; x, y \geq 0$ শর্তাধীনে অভিষ্ট ফাংশন, $F = 3y - x$ হলে-

i. সমাধান এলাকা একটি চতুর্ভুজ

ii. সর্বোচ্চ মান = 26

iii. ক্ষুদ্রতম মান = 10

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

10. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম এর সুবিধা হলো—

i. ভবিষ্যৎ কালের ব্যবস্থাপকের উৎপাদনের জ্ঞান ও দক্ষতা বৃদ্ধি

ii. সকল প্রতিবন্ধকের সাথে পরিচিত হওয়া সম্ভব

iii. কাঙ্ক্ষিত পরিমাণ পণ্য উৎপাদন ও বিপণনের স্বল্প ব্যয় নিশ্চিত করে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

11. উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশনের মাধ্যমে পাওয়া যায়—

i. সর্বোচ্চ মান

ii. সর্বনিম্ন মান

iii. সমাধান বিন্দু

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

12. $x + 2y \le 10$, $5x + 3y \le 36$; $x, y \ge 0$ শর্তাধীনে—

i. সমাধান অঞ্চলের প্রান্তিক বিন্দুগুলি

(0, 0), (7.2, 0), (6, 2) ও (0, 5)

ii. $3x + 4y$ এর সর্বোচ্চ মান = 26

iii. $x - y$ এর সর্বনিম্ন মান = – 5

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

13. $z = 3x + 2y$, শর্ত: $x + 2y \le 8$, $2x + y \le 10$, $x, y \ge 0$ হলে—

i. z এর সর্বোচ্চ মান 16

ii. z এর সর্বনিম্ন মান 0

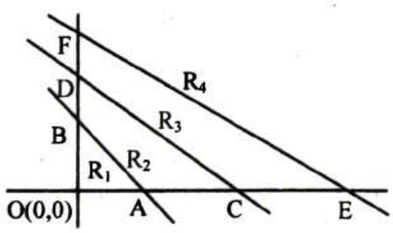
iii. z এর সর্বোচ্চ মানের জন্য (8, 0) প্রদত্ত শর্তের সমাধান বিন্দু

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (14 ও 15) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + y \le 5$, $x + y \le 7$, $4x + 3y \ge 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ শর্তাবলী: অভীষ্ট ফাংশন, $z = 2y - x$



14. কোন ক্ষেত্রটি এর সমাধান এলাকা?

ক. R_1 খ. R_2 গ. R_3 ঘ. R_4

15. Z এর সর্বোচ্চ মান কোনটি?

ক. 0 খ. 6 গ. 8 ঘ. 10

নিচের তথ্যের আলোকে (16 ও 17)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$z = 7x + 13y$, শর্ত: $x + y \le 10$, $7x + 3y \le 42$, $x, y \ge 0$

16. কোন বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ?

ক. (0, 14) খ. (0, 10) গ. (3, 7) ঘ. (10, 0)

17. z এর সর্বনিম্ন মান কত?

ক. – 21 খ. 0 গ. 28 ঘ. 49

নিচের তথ্যের আলোকে (18 ও 19) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

শর্ত: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \ge 4$ এবং $3x + y \ge 6$ অভীষ্ট ফাংশন, $z = 3x + y$

18. নিচের কোন বিন্দুটি সমাধান এলাকার বিন্দু?

ক. (3, 2) খ. (1, 3) গ. (2, 4) ঘ. (1, 6)

19. কোন বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান সর্বোচ্চ?

ক. (2, 0) খ. (1, 3) গ. (4, 0) ঘ. (0, 4)

নিচের তথ্যের আলোকে (20 ও 21) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

খাদ্য	ভিটামিন C	ভিটামিন D	মূল্য (টাকা)
F_1	3	2	7 টাকা
F_2	8	5	5 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	40	30	

ন্যূনতম খরচে দৈনিক চাহিদা মেটাতে হবে।

20. F_1 ও F_2 খাদ্য x ও y কেজি হলে অভীষ্ট ফাংশন নিচের কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়?

ক. $z = 7x + 5y$ খ. $z = 2x + 5y$ গ. $z = 3x + 8y$ ঘ. $z = 5x + 7y$

21. দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন মেটাতে ভিটামিন D এর অসমতা নিচের কোনটি দ্বারা প্রকাশ পায়?

ক. $2x + 5y \leq 30$ খ. $2x + 5y \geq 30$ গ. $3x + 8y \geq 40$ ঘ. $3x + 2y \geq 30$

নিচের তথ্যের আলোকে (22 ও 23) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

সর্বোচ্চকরণ, $z = 3x + 4y$; শর্ত: $5x + 2y \leq 120$, $2x + 5y \leq 90$, $x, y \geq 0$

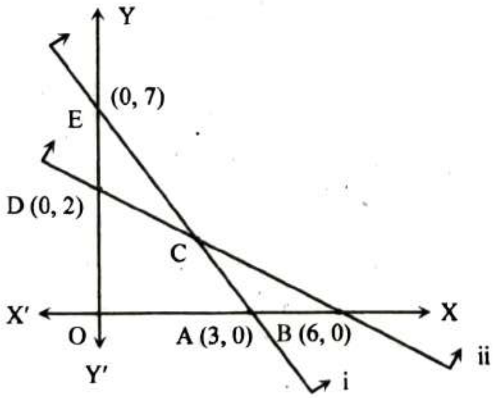
22. কোন বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে?

ক. (0, 0) খ. (0, 18) গ. (20, 10) ঘ. (24, 0)

23. z এর সর্বোচ্চ মান কত?

ক. 72 খ. 100 গ. 135 ঘ. 240

চিত্রের আলোকে (24 ও 25) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



24. (i) নং সরলরেখাকে অসমতায় প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে?

ক. $x + y \leq 6$ খ. $7x + 3y \geq 21$ গ. $3x + 7y \geq 21$ ঘ. $2x + 6y \leq 12$

25. প্রদত্ত শর্তের আলোকে সমাধান অঞ্চল নিচের কোন বিন্দুগুলো দ্বারা নির্দেশিত?

ক. OACD খ. ABC গ. CDE ঘ. BCE

নিচের তথ্যের আলোকে (26 ও 27) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি লোক সর্বাধিক 500 টাকা ব্যয় করে অন্তত 3টি থালা ও সর্বোচ্চ 7টি গ্লাস কিনতে চান। প্রতিটি থালার দাম 30 টাকা ও গ্লাসের দাম 20 টাকা। তিনি সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে চান।

26. যদি লোকটি xটি থালা ও yটি গ্লাস কিনতে চান তবে নিচের কোনটি দ্বারা অভীষ্ট ফাংশন প্রকাশ পায়?

ক. $z = x + y$ খ. $z = 3x + 6y$ গ. $z = 3x + y$ ঘ. $z = 30x + 20y$

27. প্রদত্ত শর্তমতে গ্লাসের অসমতা নিচের কোনটি?

ক. $y < 7$ খ. $y > 7$ গ. $y \leq 7$ ঘ. $y \geq 7$

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

28. $x + y \leq 2, x + 4y \leq 4, x, y > 0$ শর্তসাপেক্ষে $z = 3x + 6y$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? *[CU. 19-20]*

ক. 8 খ. 10 গ. 12 ঘ. 18

29. $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x \leq 4, x, y \geq 0$ শর্তাধীনে $z = 2x + 3y$ এর সর্বোচ্চ মান— [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. 14 খ. 15 গ. 16 ঘ. 18

30. $x + y \leq 7, 2x + 5y \leq 20; x, y \geq 0$ শর্তাধীনে $Z = 3x + 4y$ এর গরিষ্ঠ মান কোন বিন্দুতে? [ঢা. বি. ০৯-১০]

ক. (5, 2) খ. (7, 0) গ. (10, 0) ঘ. (0, 7)

31. $2x + y \geq 5, 2x + 5y \geq 10, x + y \leq 5; x, y \geq 0$ শর্তাবলী দ্বারা গঠিত সমাধানের সম্ভাব্য অঞ্চলের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটি হবে নিচের কোনটি? [বুয়েট ১৩-১৪]

ক. ত্রিভুজ খ. চতুর্ভুজ গ. ট্রাপিজিয়াম ঘ. পঞ্চভুজ

32. A ও B ধরনের প্রতিটি দ্রব্য তৈরিতে যথাক্রমে 10 ও 6 একক শ্রম, 6 ও 18 একক কাঁচামাল লাগে এবং 10 ও 12 টাকা লাভ করা যায়। একটি কোম্পানি সর্বোচ্চ 480 একক শ্রম ও 864 একক কাঁচামাল যোগান দিতে সক্ষম হলে, কোম্পানিটি সর্বোচ্চ যে লাভ করতে পারে তা কত টাকা? [কুয়েট ১৫-১৬]

ক. 576 খ. 480 গ. 1380 ঘ. 720

33. A ও B প্রকার খেলনা তৈরিতে যথাক্রমে 5 ও 3 একক শ্রম এবং 3 ও 4 একক কাঁচামাল লাগে। A প্রকারের প্রতিটি থেকে 10 টাকা ও B প্রকারের প্রতিটি থেকে 12 টাকা লাভ করা সম্ভব হয় এবং কোম্পানিটি 165 একক শ্রম ও 132 একক কাঁচামাল যোগান দিতে পারে, তবে সর্বোচ্চ যে লাভ হবে তা হলো— [কুয়েট ১৪-১৫]

ক. 330 taka খ. 360 taka গ. 420 taka ঘ. 448 taka

34. সিদ্ধান্ত চলক নিচের কোন ধরনের হয়? [কুয়েট ১৩-১৪]

ক. ধনাত্মক খ. ঋণাত্মক গ. অঋণাত্মক ঘ. শূন্য

35. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা এমনভাবে গঠিত যেন অঙ্কদ্বয়ের যোগফল কমপক্ষে 12 হয়। আবার অঙ্কদ্বয়ের যে কোনটির সাথে 2 যোগ করলেও সেটি এক অঙ্ক বিশিষ্ট থাকে। এরূপ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নিচের কোনটি? [কুয়েট ০৭-০৮]

ক. 57 খ. 67 গ. 77 ঘ. 87

36. $x + y \geq 6, 2x + y \geq 8, x \geq 0, y \geq 0$ শর্তাধীনে, $z = 2x + 3y$ এর সর্বনিম্ন মান কত? [ঢা. বি. ০৬-০৭, জা. বি. ১৬-১৭]

ক. 12 খ. 4 গ. −5 ঘ. 16

37. $x_1 + x_2 \leq 1; x_2 \leq 1; x_1, x_2 \geq 0$ শর্তাবলি সাপেক্ষে $3x_1 + 7x_2$ এর সর্বোচ্চ মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. 3 খ. 7 গ. 20 ঘ. 28

38. Information and communication Engineering বিভাগের একজন ছাত্র Computer Science and Engineering বিভাগের একজন ছাত্রকে একটি শর্ত দিলেন যা নিম্নরূপ: $x + 2y \leq 8, 2x + y \leq 10, x, y \geq 0$ এবং $z = 7x + 9y$ এর সর্বোচ্চ মান কত? [ই. বি. ১৬-১৭]

ক. 45 খ. 46 গ. 47 ঘ. 48

39. $x + y \leq 5, x \geq 2, y \leq 4$ শর্তে, $z = 6x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান— [কু. বি. ১৬-১৭; ঢা. বি. ০৭-০৮]

ক. 12 খ. 20 গ. 18 ঘ. 30

40. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5, x + 2y \geq 8$ শর্তানুসারে, $z = 2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান কত? [ঢা. বি. ১৫-১৬]

ক. 1 খ. −1 গ. −4 ঘ. −5

41. $5x_1 + 10x_2 \leq 50, x_1 + x_2 \geq 1, x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ শর্তাধীনে $2x_1 + 7x_2$ এর সর্বনিম্ন মান কত? [ঢা. বি. ০৮-০৯]

ক. 5 খ. 7 গ. 2 ঘ. 12

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. দৃশ্যকল্প-১: $-x + y \le 11; x + y \le 27;$
$2x + 5y \le 90; x, y \ge 0$
দৃশ্যকল্প-২: একজন ফেরিওয়ালা দৈনিক সর্বোচ্চ 600টি সবুজ ও লাল চকোলেট কিনেন। প্রতিটি সবুজ ও লাল চকোলেটের ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 1 টাকা ও 2 টাকা এবং প্রতিটি সবুজ ও লাল চকোলেটে লাভ হয় যথাক্রমে 1 টাকা ও 2 টাকা। তিনি সর্বোচ্চ বিনিয়োগ করতে পারেন 1000 টাকা।
ক. "পরিকল্পনা হলো কাজের অর্ধেক"— যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের গুরুত্বের আলোকে উক্তিটি ব্যাখ্যা কর।
খ. দৃশ্যকল্পে-১ এ বর্ণিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হতে $z = 4x + 6y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।
গ. সর্বোচ্চ লাভের জন্য দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত ফেরিওয়ালাটি প্রতিদিন কোন প্রকারের কতটি চকোলেট কিনবেন?

2. দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় একটি বিশেষ মিশনে প্রেরিত বৃটিশ বাহিনীর মালামাল সরবরাহ সংক্রান্ত দুইটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের শর্তসমূহ:
শর্ত ১ : $x + 2y \le 10, x + y \le 6, x - y \le 2, x - 2y \le 10; x, y \ge 0$
শর্ত ২: $3y - x \le 10, x + y \le 6, x - y \le 2; x, y \ge 0$
ক. যুদ্ধক্ষেত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার সংক্ষেপে লিখ।
খ. ১নং শর্ত সাপেক্ষে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সম্ভাব্য সমাধান বিন্দুগুলো নির্ণয় কর।
গ. ২নং শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর যখন $z = 2x + y$

3. মাংস ও চাল প্রতি কেজিতে প্রোটিন ও কার্বহাইড্রেটের পরিমাণ ও তার মূল্য নিচের চার্টে দেওয়া হল।

খাদ্যের নাম	প্রোটিন	কার্বহাইড্রেট	প্রতি কেজির মূল্য
চাল	8	16	30 টাকা
মাংস	12	6	40 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32	22	-

ক. খাদ্য সমস্যায় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার লিখ।
খ. সবচেয়ে কম খরচে কিরূপে দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন মেটানো যাবে?
গ. প্রোটিন ও কার্বোহাইড্রেটে উভয়ের দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন যদি 18 একক করে বেড়ে যায় তবে ন্যূনতম প্রয়োজন মেটাতে কি পরিমাণ চাল ও মাংসের প্রয়োজন হবে?

4. একটি কোম্পানি A এবং B দুইটি পণ্য উৎপাদন করে এবং প্রতি একক দ্রব্যের লাভ যথাক্রমে 3 টাকা এবং 5 টাকা। প্রতিটি পণ্য একটি নির্দিষ্ট মেশিনে সংযোগ করতে A দ্রব্যের প্রতি এককের জন্য 12 মিনিট এবং B দ্রব্যের প্রতিটি এককের জন্য 25 মিনিট সময়ের প্রয়োজন। কোম্পানি মেশিনটির রক্ষণাবেক্ষণের জন্য সপ্তাহে 30 ঘন্টা ফলপ্রসূ কাজ করে।
প্রযুক্তিগত সীমাবদ্ধতা বলতে প্রতি 5 একক A দ্রব্য উৎপাদনের জন্য কমপক্ষে 2 একক B দ্রব্য উৎপাদন করে।
ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সুবিধাগুলো বর্ণনা কর।
খ. কোম্পানিটির সাপ্তাহিক সর্বোচ্চ লাভ নির্ণয় কর।
গ. যদি কোম্পানি অতিরিক্ত আরও একটি মেশিন ভাড়া করে তা হলে কার্য ক্ষমতার সময় দ্বিগুণ হয়। এক্ষেত্রে প্রতি সপ্তাহে সর্বোচ্চ অতিরিক্ত কত টাকা লাভ করবে?

5. A এবং B দুই ধরনের খাদ্যে প্রতি কিলোতে প্রোটিন ও ফ্যাট নিম্নরূপ:

খাদ্য	প্রোটিন	ফ্যাট	কিলোপ্রতি মূল্য
A	1	3	2 টাকা
B	3	2	3 টাকা

ক. কীভাবে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করা হয় সংক্ষেপে লিখ।

খ. প্রোটিন ও ফ্যাটের ন্যূনতম প্রয়োজন যথাক্রমে 6 ও 9 হলে সম্ভাব্য সমাধানের অঞ্চল চিহ্নিত কর।

গ. প্রোটিন ও ফ্যাটের ন্যূনতম চাহিদা বেড়ে গিয়ে সম্ভাব্য সমাধানের কৌণিক বিন্দুগুলো $(9, 0)$, $\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ এবং $(0, 6)$ হলে কিভাবে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক চাহিদা মেটানো যাবে?

▶ সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্ন

6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার এককের অঙ্ককে 3 গুণ এবং দশকের অঙ্ককে 2 গুণ করলে সংখ্যাটির মান 72 এর সমান অথবা বড় হয়। *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $\frac{1}{|3x-1|} > \frac{1}{9}$ এবং $x \neq \frac{1}{3}$ কে পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর।

খ. একক ও দশক স্থানীয় অঙ্ক যথাক্রমে 2 এবং 3 এর সমান অথবা বড় হলে উপরোক্ত অসমতাটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সাহায্যে প্রকাশ করে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা চিহ্নিত কর।

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে সংখ্যাটি সর্বনিম্ন কত হতে পারে নির্ণয় কর।

7. এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা রুমাল এবং 4 খানা টিস্যু বক্স কিনতে চান। প্রতিখানা রুমালের মূল্য 30 টাকা এবং প্রতিখানা টিস্যু বক্সের মূল্য 40 টাকা। x খানা রুমাল এবং y খানা টিস্যু বক্স কিনলে সর্বাপেক্ষা পণ্যের সংখ্যা হলো $z = x + y$ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. উৎপাদন ও নির্মাণ সমস্যায় কিভাবে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহৃত হয়?

খ. $y = x + 5$ হলে $|z| < 1$ অসমতাটিকে x-এর জন্য সমাধান করে সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. প্রত্যেক প্রকারের কতখানা জিনিস কিনলে ঐ ব্যক্তি সর্বাপেক্ষা জিনিস কিনতে পারবেন?

8. $f(x) = ab - ax$, $f(y) = by$, $x \leq 6$, $y \leq 6$. *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $S = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 5\}$ সেটের সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর।

খ. $a = 3, b = 2$ হলে, $\frac{1}{|f(x)|} > a \ (x \neq 2)$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় প্রকাশ কর।

গ. $a = b = 8$ এবং $f(y) \leq f(x)$ হলে $z = 6x + 7y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

9. দৃশ্যকল্প-১: $p, q, r \in \mathbb{R}$ এবং $A = p + q$, $B = p + r$ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প-২ $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x, y \geq 0$.

ক. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $|A| \leq |p| + |q|$

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $A = B$ হলে প্রমাণ কর যে, $q = r$

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে $z = 3x + 4y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

10. দৃশ্যকল্প 1 : $f(x) = x - 5$, $g(x) = x - 2$, $p(x) = x - 6$ এবং $q(x) = x - 3$

দৃশ্যকল্প 2 : একজন ফার্মের মালিক প্রতিদিন সর্বোচ্চ 500 মুরগীর বাচ্চা বিক্রি করেন। বড় মুরগীর বাচ্চা ও ছোট মুরগীর বাচ্চা যথাক্রমে 10 টাকা ও 6 টাকায় বিক্রয় করেন। একটি ছোট মুরগীর বাচ্চায় লাভ 2 টাকা। তিনি সর্বোচ্চ 4,000 টাকার বিক্রয় করতে পারেন। *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $f(2) \leq f(10 - 2x) \leq f(12)$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ কর।

খ. $\frac{p(x)}{q(x)} < \frac{f(x)}{g(x)}$ হলে, এর সমাধান নির্ণয় কর।

গ. প্রতিটি বড় মুরগীর বাচ্চায় ছোট মুরগীর বাচ্চার তুলনায় $\frac{3}{2}$ গুণ লাভ হলে সর্বোচ্চ লাভের জন্য তিনি কোন প্রকারের কতগুলো বাচ্চা উৎপাদন করবেন।

11. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{1}{|5x-1|} > \frac{1}{9}$ যখন $x \neq \frac{1}{5}$ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প-২ : মিরপুরের হামিদ সাহেব একটি পোলট্রি ফার্মের মালিক। তিনি 800 টাকায় কিছু হাঁস-মুরগীর বাচ্চা কিনতে চান। প্রতিটি মুরগীর বাচ্চার দাম 40 টাকা এবং প্রতিটি হাঁসের বাঁচ্চার দাম 20 টাকা। তিনি তার ফার্মে সর্বাধিক 25টি বাচ্চা রাখতে পারবেন।

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে পরিকল্পনা বলতে কী বোঝ?

খ. দৃশ্যকল্প ১ এ বর্ণিত অসমতাটি সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. হামিদ সাহেব কোন প্রকারের কতগুলি বাচ্চা পালন করতে পারবেন যাতে মোট বাচ্চার সংখ্যা সর্বাধিক হয়।

12. $f(x) = 3x - x^2 + 4$ এবং শর্তাবলী: $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x \leq 4, x, y \geq 0$ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. $19 - f(x) > f(2) + x^2 + 7x - 1$ অসমতার সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

খ. $f(x + 1) > 0$ অসমতাকে পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

গ. উদ্দীপকের শর্তের আলোকে $z = 3x + y$ এর সর্বোচ্চকরণ কর।

13. দৃশ্যকল্প ১ : $s = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প ২: উৎপল সর্বাধিক 500 টাকা ব্যয় করে কয়েকটি কাপ প্লেট কিনতে চায়। প্রতিটি কাপের দাম 30 টাকা ও প্লেটের দাম 20 টাকা। কমপক্ষে 3টি প্লেট ও অনধিক 6টি কাপ কিনতে হবে।

ক. $|a + 3a| - |5a - 7a|$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প ১ বর্ণিত s এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প ২ এ বর্ণিত উৎপল কোন প্রকারের কতগুলো জিনিস কিনলে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন?

14. দৃশ্যকল্প 1: $\frac{x(x+1)}{x-2} > 0$ একটি অসমতার সমীকরণ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প 2: মিজান সাহেব জামা ও পায়জামা তৈরি করেন। প্রতিটি জামা কাটতে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা এবং সেলাই করতে 20 মিনিট সময় লাগে। আবার প্রতিটি পায়জামা কাটতে 15 মিনিট এবং সেলাই করতে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় লাগে। প্রতিটি জামায় মুজুরী 40 টাকা এবং প্রতিটি পায়জামায় মুজুরী 50 টাকা। তিনি প্রতি দুই দিনের চক্রে (cycle) প্রথম দিন সর্বোচ্চ আট ঘণ্টা সময় ধরে জামা ও পায়জামা কাটেন এবং পরের দিন সর্বোচ্চ আট ঘণ্টা সময় ধরে কাটা জামা ও পায়জামাগুলো সেলাই করেন।

ক. $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$ সেটটির লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প 1 এর উদ্দীপকটিকে সমাধান করে সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. মিজান সাহেব কতটি জামা ও কতটি পায়জামা তৈরি করলে তিনি সর্বোচ্চ মুজুরী পাবেন?

15. (i) $|x - 1| < \frac{1}{3}$; (ii) $x - y \geq 0; 0 \leq x \leq 20; 3 \leq y \leq 12$ *[অধ্যায়-১ ও ২ এর সমন্বয়ে]*

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সুবিধা আলোচনা কর।

খ. (i) হতে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 1| < \frac{7}{9}$.

গ. (ii) এর শর্তগুলি ব্যবহার করে লেখের সাহায্যে $z = 8x + 9y$ এর সর্বোচ্চমান নির্ণয় কর।

আরও সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

16. $f(x) = |5x - 3|$, যেখানে $x \neq \frac{3}{5}$ এবং $z = 3x + 2y, x + 2y \geq 4, 2x + y \geq 4, x + y \leq 5$ ও $x, y \geq 0$.

[ঢাকা বোর্ড-২০১৯]

ক. $-7 < x < -1$ কে পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $\frac{1}{f(x)} \geq 2$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে z এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

17. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 2x + 1$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]

দৃশ্যকল্প-২: জনাব দবির মিয়া তাঁর দোকানে বিক্রির জন্য মোবাইল ও কম্পিউটার মিলে 50 সেট কিনতে পারেন। প্রতিটা কম্পিউটারের ক্রয়মূল্য, মোবাইলের ক্রয়মূল্যের তিনগুণ এবং প্রতিটা কম্পিউটারে লাভ মোবাইলের লাভের দ্বিগুণ। প্রতিটা মোবাইল সেটের ক্রয়মূল্য 20 ডলার এবং লাভ 8 ডলার।

ক. $-2 < f(x) < 4$ কে পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. বাস্তব সংখ্যারেখায় অসমতা $\left|\frac{1}{f(x)-4}\right| > \frac{1}{10}$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর, যেখানে $x \neq \frac{3}{2}$।

গ. দবির মিয়ার সর্বোচ্চ 5200 ডলার বিনিয়োগের মাধ্যমে সর্বোচ্চ লাভের জন্য একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর।

18. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = |x - 3|$ যেখানে $x \in \mathbb{R}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

দৃশ্যকল্প-২: $z = px + qy$

সীমাবদ্ধতা : $x + y \leq 6, x + 2y \leq 10, x, y \geq 0$

ক. পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর : $-1 < 2x - 3 < 5.$

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে যদি $f(x) < \frac{1}{5}$ হয় তবে দেখাও যে, $|x^2 - 8| < \frac{56}{25}$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $p = 3, q = 4$ হলে, z এর সর্বোচ্চ মান লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

19. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{1}{|3x-4|} > 2 \left[\text{এখানে, } x \neq \frac{4}{3}\right]$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

দৃশ্যকল্প-২: অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 2y$

শর্ত: $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6$

$x \geq 4, x, y \geq 0$

ক. $S \subset \mathbb{R}$ এর ক্ষেত্রে $S = \left[\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right]$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ প্রদত্ত অসমতাটিকে সমাধান করে সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

20. F_1 ও F_2 খাদ্যের প্রতি কেজিতে ভিটামিন C ও D এর পরিমাণ ও তাদের মূল্যের একটি ছক:

খাদ্য	ভিটামিন C	ভিটামিন D	প্রতি কেজির মূল্য
F_1	6	2	3
F_2	3	5	5

[ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড-২০১৮]

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম এর দুটি সুবিধা উল্লেখ কর।

খ. দৈনিক ভিটামিন C ও ভিটামিন D এর ন্যূনতম চাহিদা যথাক্রমে 60 একক ও 50 একক হলে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন চাহিদা মেটানোর একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর।

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে (খ) এ প্রাপ্ত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি সমাধান করে দৈনিক সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয় কর।

21. দৃশ্যকল্প-১: M ও N দুই প্রকার খাবারে প্রতি কেজিতে নিচের ছক অনুযায়ী প্রোটিন ও ফ্যাট আছে।

খাবার	প্রোটিন	ফ্যাট	প্রতি কেজির মূল্য
M	2	4	20 টাকা
N	6	3	30 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	36	48	

দৃশ্যকল্প-২: $(2x + 1)(x - 1)(x - 3) \leq 0.$ [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]

ক. $|2x + 3| < 7$ কে পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর।

খ. দৃশ্যকল্প-২ এর অসমতাটি সমাধান কর ও সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে সবচেয়ে কম খরচে কিভাবে দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন মেটানো সম্ভব?

22. দৃশ্যকল্প-১: $p = x - 5, x \in \mathbb{R}$. [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]
দৃশ্যকল্প-২: $f = 2x + 3y, g = 5x + 3y$ যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$.
ক. বাস্তব সংখ্যায় বিপরীত এর অস্তিত্ব ব্যাখ্যা কর।
খ. $\frac{1}{|p|} \geq 3$ হলে $(x \neq 5)$ সমাধান সেট নির্ণয় করে সংখ্যারেখায় দেখাও।
গ. দৃশ্যকল্প ২ এর আলোকে $f \leq 12, g \geq 15$ এবং $x, y \geq 0$ হলে লেখচিত্রের মাধ্যমে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি নির্বাচন কর। শর্তে কী পরিবর্তন করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি চতুর্ভুজ হবে?

23. A ও B দুই ধরনের খাবার আছে যার মধ্যে প্রোটিন ও শ্বেতসার নিম্নরূপ: [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি এককের দাম
A	4	5	40 টাকা
B	6	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	16	11	

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বলতে কি বুঝ?
খ. সমস্যাটির একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর।
গ. লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমাধান কর।

24. $f(x) = ax + by + c, g(x) = lx + my + n$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]
ক. $|2x - 1| < \frac{1}{3}$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।
খ. উদ্দীপকে $a = 1, b = c = 0, |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$
গ. $a = 1, b = -1, c = 2, f(x) \geq 0, l = 1, m = 1, n = -4, g(x) \leq 0$
এবং $x, y \geq 0$ হলে, $z = x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

25. দৃশ্যকল্প-১ : $f(x) = |x - 3|$ [সিলেট বোর্ড-২০১৭]
দৃশ্যকল্প-২ : $4x + y \geq 16, 4x + 7y \geq 40, x, y \geq 0$.
ক. $-4 < 2x - 1 < 12$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।
খ. $f(x) < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 4x + 2y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

26. দৃশ্যকল্প-১: দুই প্রকার খাদ্য F_1 এবং F_2 তে ভিটামিন A ও C পাওয়া যায়। এক একক F_1 খাদ্যে 7- একক ভিটামিন A ও 3-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। আবার প্রতি একক F_2 খাদ্যে 2-একক ভিটামিন A ও 5-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। F_1 ও F_2 খাদ্যের প্রতি এককের দাম যথাক্রমে 25 টাকা ও 18 টাকা। একজন লোকের দৈনিক ন্যূনতম 45 একক ভিটামিন A এবং 60-একক ভিটামিন C প্রয়োজন।
দৃশ্যকল্প-২: দুই চলকের যোগাশ্রয়ী
অসমতা: $x + y - 7 \leq 0$
$x - 2y - 4 \geq 0$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]
ক. 1 এর ঘনমূল নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $x, y \geq 0$ শর্তে $z = 3x + 4y$ এর সর্বনিম্ন মান লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন-এর চাহিদা মেটানোর জন্য একটি যোগাশ্রয়ী সমস্যা গঠন কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

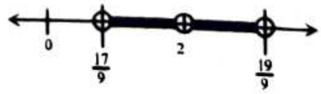
2. **(i)** $z_{max} = 16$; **(ii)** $z_{max} = 580$; **(iii)** $z_{max} = 26$; **(iv)** $z_{max} = 23$; **(v)** $z_{max} = 10$; **(vi)** $z_{max} = 13$; **(vii)** $z_{max} = 1800$; **(viii)** $z_{max} = 15$; **(ix)** $z_{max} = 12$; **(x)** $F_{max} = -2$; **(xi)** $Z_{max} = 14$;
3. $z_{max} = 7$;
4. ত্রিভুজ; $g \leq 15$;
5. **(i)** $z_{min} = -2$; **(ii)** $z_{min} = -4$; **(iii)** $z_{min} = -2$; **(iv)** $z_{min} = -4$; **(v)** $z_{min} = \frac{20}{3}$; **(vi)** $z_{min} = 16$
   (vii) $z_{min} = 20$; **(viii)** $z_{min} = 12$; **(ix)** $\frac{20}{3}$;
6. **(i)** 3টি কলম ও 8টি পেন্সিল; **(ii)** প্লেট 16 টি এবং কাপ 6টি। **(iii)** গামছা 11 খানা এবং তোয়ালে 4 খানা; **(iv)** আম 8 ঝুড়ি এবং পেয়ারা 4 ঝুড়ি, **(v)** নারকেলের চারা 18টি এবং আমের চারা 8টি। **(vi)** হাঁসের বাচ্চা 10টি এবং মুরগীর বাচ্চা 15টি **(vii)** 2880 ডলার। **(viii)** রুই মাছের পোনা 1000 টি এবং কাতল মাছের পোনা 2000 টি **(ix)** 5 হেক্টর **(x)** সুপারি গাছ 7 টি এবং পেয়ারা গাছ 8 টি. **(xi)** $z_{min} = 25x + 18y$; $7x + 2y \geq 45$; $3x + 5y \geq 60$; $x, y \geq 0$; $z_{min} = 267.41$ টাকা **(xii)** $z_{max} = 16x + 8y$; $x + y \leq 50$; $60x + 20y \leq 5200$; $x, y \geq 0$; সর্বোচ্চ লাভের জন্য 50টিই কম্পিউটার কিনতে হবে এবং সর্বোচ্চ লাভ 800 ডলার
7. **(i)** A প্রকারের $\frac{18}{7}$ কেজি, B প্রকারের $\frac{15}{7}$ কেজি এবং সর্বনিম্ন খরচ $\frac{81}{7}$ টাকা।
   (ii) সর্বনিম্ন খরচ 30 টাকা, F_1 প্রকারের খাবার 0 কেজি ও F_2 প্রকারের খাবার 10 কেজি।
   (iii) A প্রকারের খাবার 3 একক; B প্রকারের খাবার 1 একক এবং সর্বনিম্ন খরচ 6 টাকা।
   (iv) খাদ্য A = 3 একক; খাদ্য B = 1 একক এবং সর্বনিম্ন খরচ 5 টাকা।
   (v) I শাখা মাসে 4 দিন, II শাখা মাসে 12 দিন এবং সর্বনিম্ন খরচ 7200 টাকা।
   (vi) $Z = 3x + 5y$, সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $6x + 3y \geq 60$, $2x + 5y \geq 50$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; $Z_{min} = 56.25$
   (vii) M প্রকার 10 কেজি ও N প্রকার $\frac{8}{3}$ কেজি
   (viii) $z_{min} = 40x + 50y$; সীমাবদ্ধতাসমূহ: $2x + 3y \geq 8$, $5x + 3y \geq 11$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; A খাদ্য 1 কেজি, B খাদ্য 2 কেজি; $z_{min} = 140$

বহুনির্বাচনি

1. ঘ	2. খ	3. ঘ	4. ঘ	5. খ	6. গ	7. গ	8. গ	9. ক	10. ঘ	11. ক	12. ঘ
13. ক	14. খ	15. ঘ	16. খ	17. খ	18. খ	19. গ	20. ক	21. খ	22. গ	23. খ	24. খ
25. ঘ	26. ক	27. গ	28. ক	29. গ	30. ক	31. ক	32. ঘ	33. গ	34. গ	35. ক	36. ক
37. খ	38. খ	39. ঘ	40. ঘ	41. গ							

সৃজনশীল

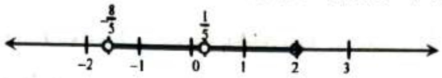
1. **খ.** 132 **গ.** সবুজ চকোলেট 200টি ও লাল চকোলেট 400টি
2. **খ.** (0, 0), (2, 0), (4, 2), (2, 4) ও (0, 5) **গ.** $z_{max} = 10$
3. **খ.** চাল $\frac{1}{2}$ কেজি এবং মাংস $\frac{7}{3}$ কেজি **গ.** মাংসের পরিমাণ $\frac{5}{4}$ কেজি এবং চালের পরিমাণ $\frac{10}{3}$ কেজি
4. **খ.** সর্বোচ্চ 408.9 টাকা **গ.** অতিরিক্ত লাভ = 409.4 টাকা
5. **খ.** $(6, 0), \left(\frac{15}{7}, \frac{9}{7}\right)$ ও $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ **গ.** $\frac{18}{7}$ একক A এবং $\frac{15}{7}$ একক B
6. **ক.** $-\frac{8}{3} < x < \frac{1}{3}$ অথবা $\frac{1}{3} < x < \frac{10}{3}$ **গ.** 34
7. **খ.** $-3 < x < -2$, সংখ্যারেখায়: 

গ. রুমাল 11 খানা ও টিস্যুবক্স 4 খানা।
8. **ক.** সুপ্রিমাম = 5, ইনফিমাম = 2 **খ.** $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{17}{9} < x < \frac{19}{9}, x \neq 2\right\}$, সংখ্যারেখায়: 

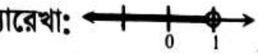
   গ. সর্বোচ্চ মান = 78
9. **গ.** সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 23$

10. ক. $|3 - 2x| \le 5$ **খ.** $x < 2$ অথবা $x > 3$

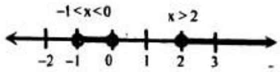
গ. ছোট মুরগী 250টি এবং বড় মুরগী 250টি উৎপাদন করলে সর্বোচ্চ 1250 টাকা লাভ করবেন।

11. খ. $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{8}{5} < x < 2$ এবং $x \ne \frac{1}{5}\}$, 

গ. 10 টি হাঁসের বাচ্চা ও 15টি মুরগীর বাচ্চা

12. ক. $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ সংখ্যারেখা:  **খ.** $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{5}{2}$ **গ.** $z_{max} = 14$ যখন $x = 4; y = 2$

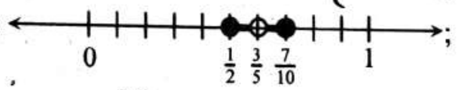
13. ক. $|2a|$ **খ.** সুপ্রিমাম $= 3$, ইনফিমাম $= \frac{1}{5}$ **গ.** প্লেট 16 টি ও কাপ 6 টি

14. ক. 3; **খ.** $-1 < x < 0$ অথবা $x > 2$, সংখ্যারেখায়: 

গ. 12টি জামা এবং 8টি পায়জামা তৈরি করলে সর্বোচ্চ 880 টাকা মজুরী পাবেন।

15. গ. সর্বোচ্চ মান 268

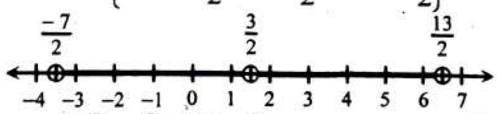
16. ক. $|x + 4| < 3$; **খ.** নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{ x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{10}\right.$ এবং $\left. x \ne \frac{3}{5} \right\}$

সংখ্যারেখা: ;

গ. সর্বনিম্ন মানটি $z_{min} = \frac{20}{3}$

17. ক. $|2x| < 3$;

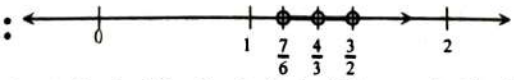
খ. নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-7}{2} < x < \frac{13}{2}\right.$ এবং $\left. x \ne \frac{3}{2}\right\}$

সংখ্যারেখায়: 

গ. সর্বোচ্চ লাভের জন্য 50টি কম্পিউটার কিনতে হবে এবং সর্বোচ্চ লাভ 800 ডলার।

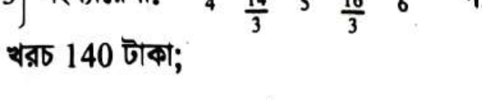
18. ক. $|2x - 5| < 3$; **গ.** সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 22$

19. ক. 0; **খ.** নির্ণেয় সমাধান: $\frac{7}{6} < x < \frac{3}{2}$ এবং $x \ne \frac{4}{3}$

সংখ্যারেখায় :  **গ.** সর্বোচ্চ মান, $z_{max} = 18$

20. খ. $z = 3x + 5y; 6x + 3y \ge 60; 2x + 5y \ge 50; x, y \ge 0$; **গ.** দৈনিক সর্বনিম্ন খরচ 56.25 একক

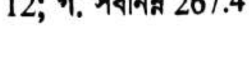
21. ক. $-5 < x < 2$

খ. সমাধান: $x \le -\frac{1}{2}$ অথবা $1 \le x \le 3$, সংখ্যারেখা: 

গ. দৈনিক 10 কেজি পরিমাণ M এবং $\frac{8}{3}$ কেজি পরিমান N খাদ্য গ্রহণে সর্বনিম্ন 280 টাকা খরচে নূন্যতম প্রয়োজন মেটানো সম্ভব।

22. খ. সমাধান সেট, $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{3} \le x \le \frac{16}{3}\right.$ এবং $\left. x \ne 5\right\}$ সংখ্যারেখা: **গ.** $g \le 15$

23. গ. A খাদ্য 1 একক; B খাদ্য 2 একক; মোট সর্বনিম্ন খরচ 140 টাকা;

24. ক. সমাধান সেট, $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$ সংখ্যারেখা:  **গ.** 7;

25. ক. $|2x - 5| < 8$; **গ.** $z_{min} = 20$;

26. ক. $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$; **খ.** 12; **গ.** সর্বনিম্ন 267.41 টাকা;

পাঠ-৯ ও ১০

ব্যবহারিক

2.3. লৈখিক পদ্ধতিতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিষয়ক সমস্যার সমাধান।

পরীক্ষণ নং 2.3.1	লৈখিক পদ্ধতিতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিষয়ক সমস্যার সমাধান।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: $2x + 7y \geq 22, x + y \geq 6, 5x + y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0$ শর্তাধীনে $z = 2x + 3y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব: প্রদত্ত কোনো অসমতার রূপান্তরিত সমীকরণ (যা একটি সরলরেখা) সিদ্ধ করে না এমন যে কোনো বিন্দু [সাধারণত মূলবিন্দু (0, 0)] ঐ অসমতায় প্রয়োগের ফলে উহা সিদ্ধ হলে বিন্দুটি সরলরেখার যে দিকে আছে ঐ দিকে এবং সিদ্ধ না হলে উল্টা দিকের সকল বিন্দুই উক্ত অসমতার সমাধান।

(i) সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকাই সম্ভাব্য সমাধান এলাকা।

(ii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি z এ বসিয়েই কাঙ্ক্ষিত ফলাফল পাওয়া যায়।

উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, ছক কাগজ ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

(i) $2x + 7y = 22$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্য উক্ত সমীকরণ থেকে দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। ধরি, বিন্দু দুইটি হলো (11, 0) ও $\left(0, \frac{22}{7}\right)$। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে ছক কাগজে বিন্দুগুলি স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে তাদের সংযোজন করে AB সরলরেখা অঙ্কন করি। একই পদ্ধতিতে $x + y = 6$ সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত (6, 0) ও (0, 6) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে তাদের সংযোজন করে CD সরলরেখা অঙ্কন করি এবং $5x + y = 10$ সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত (2, 0) ও (0, 10) বিন্দু দুইটি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে তাদের সংযোজন করে EF সরলরেখা অঙ্কন করি।

(ii) এখন মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগের দ্বারা যথাক্রমে AB, CD, EF, x-অক্ষ ও y-অক্ষের প্রত্যেক সরলরেখায় '→' চিহ্ন ব্যবহার করে প্রদত্ত সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা চিহ্নিত করি।

(iii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি চিহ্নিত করি। এখানে কৌণিক বিন্দুগুলিকে A, G, H ও F দ্বারা নামকরণ করা হলো।

(iv) ছেদ বিন্দু নির্ণয়ের কৌশল প্রয়োগ করে A(11, 0), G(4, 2), H(1, 5) ও F(0, 10) নির্ণয় করি।

ফল সংকলন: কৌণিক বিন্দুগুলি অভীষ্ট ফাংশনে বসিয়ে z এর মান নির্ণয় করি:

A(11, 0)-তে, $z = 2(11) + 3(0) = 22$

G(4, 2)-তে, $z = 2(4) + 3(2) = 14$

H(1, 5)-তে, $z = 2(1) + 3(5) = 17$

এবং F(0, 10)-তে, $z = 2(0) + 3(10) = 30$

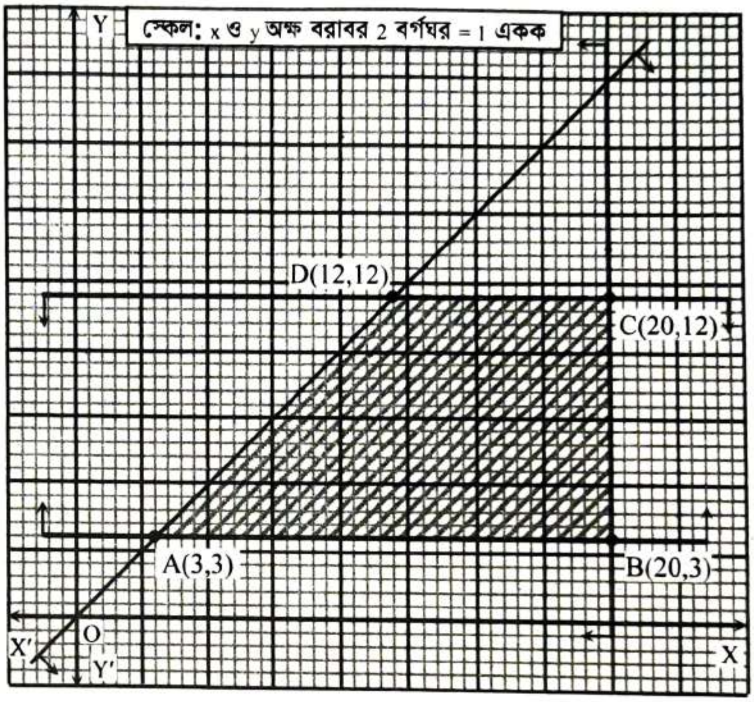
ফলাফল: z এর সর্বনিম্ন মান 14 এবং চূড়ান্ত বা শীর্ষবিন্দু (4, 2)।

পরীক্ষণ নং 2.3.2	লৈখিক পদ্ধতিতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিষয়ক সমস্যার সমাধান।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: $x - y \geq 0, 0 \leq x \leq 20$ এবং $3 \leq y \leq 12$ শর্তাধীনে $z = 2x + 3y$ এর সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চমান ও সংশ্লিষ্ট চূড়ান্ত বিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব : (i) প্রদত্ত কোনো অসমতার রূপান্তরিত সমীকরণ (যা একটি সরলরেখা) সিদ্ধ করে না এমন যে কোনো বিন্দু (সাধারণত মূলবিন্দু (0, 0)) ঐ অসমতায় প্রয়োগের ফলে এটি সিদ্ধ হলে বিন্দুটি সরলরেখার যে দিকে আছে ঐ দিকে এবং সিদ্ধ না হলে উল্টো দিকের সকল বিন্দুই উক্ত অসমতার সমাধান।

(ii) সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকাই সম্ভাব্য সমাধান এলাকা।
(iii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি z এ বসিয়েই কাঙ্খিত ফলাফল পাওয়া যায়।
উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, ছক কাগজ ইত্যাদি।
কার্যপদ্ধতি:
(i) $x - y = 0$, $x = 20$, $y = 3$ ও $y = 12$ সরলরেখাগুলি ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 2 বর্গঘরের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে অঙ্কন করি।
(ii) $x - y = 0$ রেখার সাথে $y = 3$ ও $x = 20$ এবং $y = 12$ রেখার ছেদবিন্দুকে যথাক্রমে A, B ও D দ্বারা $x = 20$ ও $y = 12$ রেখার ছেদবিন্দুকে C দ্বারা চিহ্নিত করি।
(iii) এখন মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগের দ্বারা AB, BC, CD, DA। x-অক্ষ ও y-অক্ষের প্রত্যেক সরলরেখায় '→' চিহ্ন ব্যবহার করে প্রদত্ত সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা চিহ্নিত করি।
(iv) লেখচিত্র হতে প্রাপ্ত শীর্ষবিন্দুগুলি A(3, 3), B(20,3), C(20, 12) ও D(12,12) নির্ণয় করি।



ফল সংকলন: কৌণিক বিন্দুগুলি অভীষ্ট ফাংশনে বসিয়ে z এর মান নির্ণয় করি:
A(3, 3) বিন্দুতে $z = 2 \times 3 + 3 \times 3 = 15$
B(20, 3) বিন্দুতে $z = 2 \times 20 + 3 \times 3 = 49$
C(20, 12) বিন্দুতে $z = 2 \times 20 + 3 \times 12 = 76$
এবং D(12, 12) বিন্দুতে $z = 2 \times 12 + 3 \times 12 = 60$
ফলাফল: A(3, 3) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান = 15 এবং C(20, 12) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 76।
সতর্কতা: (i) প্রদত্ত অসমতাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা চিহ্নিত করণে ও দিক নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।
(ii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকায় কৌণিক বা শীর্ষবিন্দু নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

কাজ: 1. লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 10x + 7y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $0 \leq x \leq 60$; $0 \leq y \leq 45$; $5x + 6y \leq 420$

2. লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 3x + 2y$ এর সর্বোচ্চকরণ কর।
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \leq 4$; $x - y \leq 1$; $x \geq 0, y \geq 0$

3. এক ব্যক্তির কিছু ফাইল কেবিনেট প্রয়োজন। প্রতিটি A ফাইল কেবিনেটের দাম 10 ডলার। প্রতিটি ফাইল কেবিনেট রাখতে 6 বর্গফুট জায়গার প্রয়োজন এবং এতে 8 ঘনফুট ফাইল ধরে। আবার প্রতিটি B ফাইল কেবিনেটের দাম 20 ডলার। এর জন্য 8 বর্গফুট জায়গার প্রয়োজন এবং এতে 12 ঘনফুট ফাইল ধরে। ফাইল কেবিনেট কিনতে সর্বোচ্চ বরাদ্দ 140 ডলার। অফিস কক্ষে ফাইল কেবিনেটের জন্য 72 বর্গফুট জায়গা বরাদ্ধ করা হয়েছে। সর্বাধিক কত আয়তনের ফাইল কেবিনেট কিনতে পারবে?

মৌখিক প্রশ্ন

1. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বলতে কী বুঝ?
2. অভীষ্ট ফাংশন কাকে বলে?
3. কী প্রয়োজনে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের উদ্ভাবন হয়?
4. বর্তমানে কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম প্রয়োগ করা হচ্ছে?
5. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং এর সুবিধাসমূহ কী কী?
6. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামে চলকের বৈশিষ্ট্য কী?