উচ্চতর গণিত সমাধান

দ্বিতীয় পত্র

একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণি

রচনায়

প্রফেসর অসীম কুমার সাহা
বিএসসি অনার্স (ফার্স্ট ক্লাস সেকেন্ড), এমএসসি ফলিত গণিত
(ফার্স্ট ক্লাস ফার্স্ট) ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়
বিসিএস (সাধারণ শিক্ষা) ১৪'শ বিসিএস-মেধাক্রম ০২
অধ্যক্ষ, সরকারি রাজেন্দ্র কলেজ, ফরিদপুর
প্রাক্তন অধ্যাপক, সহযোগী অধ্যাপক, সহকারী অধ্যাপক ও
প্রভাষক, গণিত বিভাগ,
সরকারি রাজেন্দ্র কলেজ, ফরিদপুর
সহযোগী অধ্যাপক, সরকারি বঙ্গবন্ধু কলেজ, গোপালগঞ্জ
সহকারী অধ্যাপক, সরকারি এম. এম. কলেজ, যশোর
প্রভাষক, সরকারি নাগরপুর কলেজ, টাঙ্গাইল
ও সরকারি সা'দত কলেজ, করটিয়া, টাঙ্গাইল
মাস্টার ট্রেইনার
(সৃজনশীল প্রশ্নপত্র প্রণয়ন, পরিশোধন ও উত্তরপত্র মূল্যায়ন)

মোঃ খলিলুর রহমান
প্রাক্তন সহকারী অধ্যাপক ও বিভাগীয় প্রধান
গণিত বিভাগ, হাবীবুল্লাহ বাহার কলেজ, ঢাকা

প্রফেসর ড. বি. এম. ইকরামুল হক
বিভাগীয় প্রধান, গণিত বিভাগ
খুলনা প্রকৌশল ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয় (কুয়েট)

মোঃ নূরুল ইসলাম
বিএসসি অনার্স (ফার্স্ট ক্লাস)
এমএসসি বিশুদ্ধ গণিত (ফার্স্ট ক্লাস সেকেন্ড)
ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়
বিসিএস (সাধারণ শিক্ষা) ২২তম বিসিএস-মেধাক্রম ০৩
সহযোগী অধ্যাপক, গণিত বিভাগ
বেগম বদরুন্নেসা সরকারি মহিলা কলেজ, ঢাকা
প্রাক্তন প্রভাষক ও সহকারী অধ্যাপক,
সরকারি পি.সি. কলেজ, বাগেরহাট
মাস্টার ট্রেইনার
(সৃজনশীল প্রশ্নপত্র প্রণয়ন, পরিশোধন ও উত্তরপত্র মূল্যায়ন)

অক্ষর-পত্র প্রকাশনী
৪৩, শিল্পাচার্য জয়নুল আবেদিন সড়ক
(পুরাতন ১৬ শান্তিনগর), ঢাকা

সূচিপত্র

মানবণ্টন

বিষয়: উচ্চতর গণিত (দ্বিতীয় পত্র)

পূর্ণমান-১০০{তত্ত্বীয় ৭৫ (৫০ + ২৫) এবং ব্যবহারিক ২৫} নম্বর

নম্বর বিভাজন ও প্রশ্ন প্রণয়ন নীতিমালা

❖ **প্রশ্নপত্র প্রণয়নের সাধারণ নির্দেশনা:**

- প্রতি পত্রে সৃজনশীল প্রশ্ন, বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এবং ব্যবহারিক অংশ থাকবে।
- শিখনফলের চাহিদা অনুসারে প্রশ্ন প্রণয়ন করতে হবে।
- প্রশ্নপত্র এমনভাবে প্রণয়ন করতে হবে যেন শিক্ষাক্রমের অন্তর্ভুক্ত সকল অধ্যায় মূল্যায়নের আওতাভুক্ত হয়।
- ব্যাপ্তি ও পরিধি (শিখনফল ও পিরিয়ড সংখ্যা) অনুসারে অধ্যায়ের প্রশ্নের সংখ্যা নির্ধারণ করতে হবে।
- একই শিখনফল/বিষয়বস্তু একইসাথে সৃজনশীল এবং বহুনির্বাচনি প্রশ্নের সাহায্যে মূল্যায়ন করা যাবে না।
- একাধিক অধ্যায়ের সমন্বয়ে সৃজনশীল প্রশ্ন করা যাবে। তবে এক্ষেত্রে বিষয়বস্তুর সামঞ্জস্যতা থাকতে হবে।
- সৃজনশীল প্রশ্নের সাহায্যে সূত্র, তত্ত্ব, নীতি ও ধারণার ব্যবহার ও প্রয়োগ করার সুযোগ রাখতে হবে।
- প্রশ্নের জন্য বরাদ্দকৃত নম্বর ও উত্তর প্রদানের সময় বিবেচনায় রেখে প্রশ্ন প্রণয়ন করতে হবে।
- বহুনির্বাচনি প্রশ্নের ক্ষেত্রে নির্দেশক ছক (specification grid) ব্যবহার / অনুসরণ করতে হবে।

❖ **বহুনির্বাচনি প্রশ্ন: ২৫ নম্বর**

- প্রতিটি বহুনির্বাচনি প্রশ্নের নম্বর ১।
- ২৫টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন থাকবে এবং সবকয়টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে।
- **বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি** থেকে ১০-১৫ এবং **জ্যামিতি, বলবিদ্যা ও পরিসংখ্যান** থেকে ১০-১৫ টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সন্নিবেশন করতে হবে।
- সকল অধ্যায় থেকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সন্নিবেশন করতে হবে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের ক্ষেত্রে চিন্তন দক্ষতার স্তরভিত্তিক (প্রয়োগ স্তর) বিভাজন নিম্নরূপ:

দক্ষতার স্তর (প্রয়োগ স্তর)	শতকরা হার	প্রশ্নের সংখ্যা
সহজমান	৩০%	০৮টি
মধ্যমমান	৫০%	১২টি
উচ্চমান/কঠিনমান	২০%	০৫টি

❖ **সৃজনশীল প্রশ্ন: ৫০ নম্বর**

- প্রতিটি সৃজনশীল প্রশ্নের নম্বর ১০।
- 'ক' বিভাগ (**বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি**) থেকে ৪টি, 'খ' বিভাগ (**জ্যামিতি, বলবিদ্যা ও পরিসংখ্যান**) থেকে ৪টি করে মোট ৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন থাকবে।
- প্রত্যেক বিভাগ থেকে কমপক্ষে ২টি করে মোট ৫টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে।
- **বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি:** (বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম, জটিল সংখ্যা, বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ, দ্বিপদী বিস্তৃতি, বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ)
- **জ্যামিতি, বলবিদ্যা ও পরিসংখ্যান:** (কণিক, স্থিতিবিদ্যা, সমতলে বস্তুকণার গতি, বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা)

সৃজনশীল প্রশ্নের নিয়ম অনুযায়ী প্রতিটি প্রশ্ন ৩টি অংশে বিভক্ত থাকবে। অংশগুলো এবং বরাদ্দকৃত নম্বর নিম্নরূপ:

অংশসমূহ	দক্ষতার স্তর (প্রয়োগ স্তর)	মোট নম্বর
অংশ ক	সহজমান	২
অংশ খ	মধ্যমমান	৪
অংশ গ	উচ্চমান/কঠিনমান	৪

❖ **ব্যবহারিক অংশ: ২৫ নম্বর**

- **পরীক্ষণ:** যন্ত্র/উপকরণ সংযোজন ও ব্যবহার/সঠিক প্রক্রিয়া অনুসরণ/উপাত্ত সংগ্রহ ও প্রক্রিয়াকরণ/পর্যবেক্ষণ/অঙ্কন/ শনাক্তকরণ/ অনুশীলন: ১৭ নম্বর
- ৫টি কার্যক্রম থাকবে। ২টি কার্যক্রম সম্পন্ন করতে হবে। ৮.৫ × ২ = ১৭ নম্বর (প্রত্যেক কার্যক্রমে পরিকল্পনা প্রণয়ন: ২ নম্বর; পরিকল্পনা বাস্তবায়ন/সঠিক প্রক্রিয়ায় উপস্থাপন: ২.৫ নম্বর; লেখচিত্র অঙ্কন/উপাত্ত বিশ্লেষণ: ২ নম্বর; ব্যাখ্যাসহ ফলাফল উপস্থাপন/ফলাফল উপস্থাপন ও পর্যালোচনা: ২ নম্বর)
- ব্যবহারিক খাতা (নোট বুক) উপস্থাপন: ৩ নম্বর।
- মৌখিক অভীক্ষা: ৫ নম্বর।

✓ **প্রতিটি ব্যবহারিক দ্বৈবচয়নের মাধ্যমে নির্বাচন করতে হবে।**

দ্রষ্টব্য: মানবণ্টন পরিবর্তনশীল; এর সাথে প্রশ্নের ধরনের তেমন সম্পর্ক নেই। মানবণ্টনের আপডেট দেখতে ব্রাউজারের অ্যাড্রেস বারে টাইপ করো– akkharpatra.com/hsc/hmtmdn21.pdf

মানবণ্টন

বিষয়: উচ্চতর গণিত (দ্বিতীয় পত্র)

পূর্ণমান-১০০{তত্ত্বীয় ৭৫ (৫০ + ২৫) এবং ব্যবহারিক ২৫} নম্বর
নম্বর বিভাজন ও প্রশ্ন প্রণয়ন নীতিমালা

❖ **প্রশ্নপত্র প্রণয়নের সাধারণ নির্দেশনা:**

- প্রতি পত্রে সৃজনশীল প্রশ্ন, বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এবং ব্যবহারিক অংশ থাকবে।
- শিখনফলের চাহিদা অনুসারে প্রশ্ন প্রণয়ন করতে হবে।
- প্রশ্নপত্র এমনভাবে প্রণয়ন করতে হবে যেন শিক্ষাক্রমের অন্তর্ভুক্ত সকল অধ্যায় মূল্যায়নের আওতাভুক্ত হয়।
- ব্যাপ্তি ও পরিধি (শিখনফল ও পিরিয়ড সংখ্যা) অনুসারে অধ্যায়ের প্রশ্নের সংখ্যা নির্ধারণ করতে হবে।
- একই শিখনফল/বিষয়বস্তু একইসাথে সৃজনশীল এবং বহুনির্বাচনি প্রশ্নের সাহায্যে মূল্যায়ন করা যাবে না।
- একাধিক অধ্যায়ের সমন্বয়ে সৃজনশীল প্রশ্ন করা যাবে। তবে এক্ষেত্রে বিষয়বস্তুর সামঞ্জস্যতা থাকতে হবে।
- সৃজনশীল প্রশ্নের সাহায্যে সূত্র, তত্ত্ব, নীতি ও ধারণার ব্যবহার ও প্রয়োগ করার সুযোগ রাখতে হবে।
- প্রশ্নের জন্য বরাদ্দকৃত নম্বর ও উত্তর প্রদানের সময় বিবেচনায় রেখে প্রশ্ন প্রণয়ন করতে হবে।
- বহুনির্বাচনি প্রশ্নের ক্ষেত্রে নির্দেশক ছক (specification grid) ব্যবহার / অনুসরণ করতে হবে।

❖ **বহুনির্বাচনি প্রশ্ন: ২৫ নম্বর**

- প্রতিটি বহুনির্বাচনি প্রশ্নের নম্বর ১।
- ২৫টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন থাকবে এবং সবকয়টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে।
- **বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি** থেকে ১০-১৫ এবং **জ্যামিতি, বলবিদ্যা ও পরিসংখ্যান** থেকে ১০-১৫ টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সন্নিবেশন করতে হবে।
- সকল অধ্যায় থেকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সন্নিবেশন করতে হবে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের ক্ষেত্রে চিন্তন দক্ষতার স্তরভিত্তিক (প্রয়োগ স্তর) বিভাজন নিম্নরূপ:

দক্ষতার স্তর (প্রয়োগ স্তর)	শতকরা হার	প্রশ্নের সংখ্যা
সহজমান	৩০%	০৮টি
মধ্যমমান	৫০%	১২টি
উচ্চমান/কঠিনমান	২০%	০৫টি

❖ **সৃজনশীল প্রশ্ন: ৫০ নম্বর**

- প্রতিটি সৃজনশীল প্রশ্নের নম্বর ১০।
- 'ক' বিভাগ (**বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি**) থেকে ৪টি, 'খ' বিভাগ (**জ্যামিতি, বলবিদ্যা ও পরিসংখ্যান**) থেকে ৪টি করে মোট ৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন থাকবে।
- প্রত্যেক বিভাগ থেকে কমপক্ষে ২টি করে মোট ৫টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে।
- **বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি:** (বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম, জটিল সংখ্যা, বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ, দ্বিপদী বিস্তৃতি, বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ)
- **জ্যামিতি, বলবিদ্যা ও পরিসংখ্যান:** (কণিক, স্থিতিবিদ্যা, সমতলে বস্তুকণার গতি, বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা)

সৃজনশীল প্রশ্নের নিয়ম অনুযায়ী প্রতিটি প্রশ্ন ৩টি অংশে বিভক্ত থাকবে। অংশগুলো এবং বরাদ্দকৃত **নম্বর** নিম্নরূপ:

অংশসমূহ	দক্ষতার স্তর (প্রয়োগ স্তর)	মোট নম্বর
অংশ ক	সহজমান	২
অংশ খ	মধ্যমমান	৪
অংশ গ	উচ্চমান/কঠিনমান	৪

❖ **ব্যবহারিক অংশ: ২৫ নম্বর**

- **পরীক্ষণ:** যন্ত্র/উপকরণ সংযোজন ও ব্যবহার/সঠিক প্রক্রিয়া অনুসরণ/উপাত্ত সংগ্রহ ও প্রক্রিয়াকরণ/পর্যবেক্ষণ/অঙ্কন/ শনাক্তকরণ/ অনুশীলন: ১৭ নম্বর
- ৫টি কার্যক্রম থাকবে। ২টি কার্যক্রম সম্পন্ন করতে হবে। ৮.৫ × ২ = ১৭ নম্বর (প্রত্যেক কার্যক্রমে পরিকল্পনা প্রণয়ন: ২ নম্বর; পরিকল্পনা বাস্তবায়ন/সঠিক প্রক্রিয়ায় উপস্থাপন: ২.৫ নম্বর; লেখচিত্র অঙ্কন/উপাত্ত বিশ্লেষণ: ২ নম্বর; ব্যাখ্যাসহ ফলাফল উপস্থাপন/ফলাফল উপস্থাপন ও পর্যালোচনা: ২ নম্বর)
- ব্যবহারিক খাতা (নোট বুক) উপস্থাপন: ৩ নম্বর।
- মৌখিক অভীক্ষা: ৫ নম্বর।

✓ **প্রতিটি ব্যবহারিক দ্বৈবচয়নের মাধ্যমে নির্বাচন করতে হবে।**

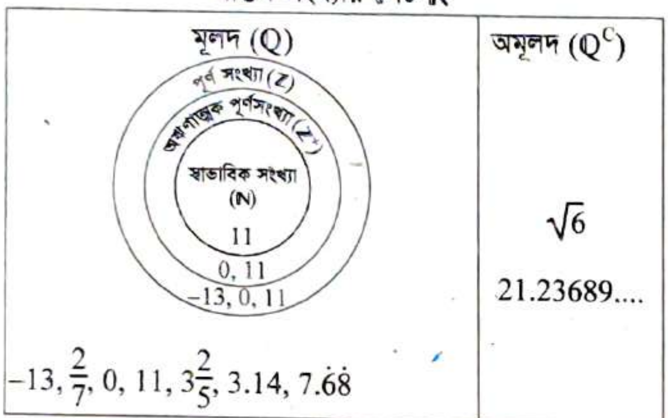
দ্রষ্টব্য: মানবণ্টন পরিবর্তনশীল; এর সাথে প্রশ্নের ধরনের তেমন সম্পর্ক নেই। মানবণ্টনের আপডেট দেখতে ব্রাউজারের অ্যাড্রেস বারে টাইপ করো– akkharpatra.com/hsc/hmtmdn21.pdf

বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা
Real numbers and Inequalities

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-1.1 | পৃষ্ঠা-৩

বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$

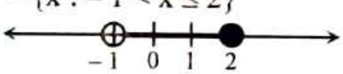


চিত্র

উপরের সংখ্যাগুলোকে বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন উপসেট এ সাজিয়ে দেখানো যায় যে, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

অনুচ্ছেদ-1.2.3 | পৃষ্ঠা-৮

$x \in (-1, 2] = \{x : -1 < x \leq 2\}$

সংখ্যারেখায়: 

অনুচ্ছেদ-1.2.4 | পৃষ্ঠা-১০

1. $(x + 1)(x - 3) < 0$ অসমতাটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $-1 < x < 3$ হয়

   $\therefore$ ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$ সুতরাং সুপ্রিমাম 3 এবং নিম্নসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ সুতরাং ইনফিমাম -1

2. এখানে, $S_1 = \left\{\frac{2.1 - 1}{1}, \frac{2.2 - 1}{2}, \frac{2.3 - 1}{3} \ldots\ldots\right\}$

   $= \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$

   এখানে, S_1 সেটের সদস্য 1 থেকে শুরু করে ক্রমান্বয়ে বাড়ছে। সুতরাং এটি নিম্নসীমিত সেট এবং এর গরিষ্ঠ নিম্নসীমা 1।

   আবার, $S_2 = \{-2, -1, -4, -3, -6, -5, -8, -7, -10, -9\}$

   $= \{\ldots\ldots -4, -3, -2, -1 \ldots\ldots\}$

   এখানে, S_2 এর প্রত্যেক সদস্য 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর আবার সেটটির বৃহত্তম সদস্য -1

   $\therefore$ সেটটি ঊর্ধ্বসীমিত সেট এবং এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা -1.

3. (i) $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ উপরোক্ত সেটের সকল উপাদানই a এর চেয়ে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা যেখানে, $a \in \mathbb{R}$. তাহলে ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা = a

   $\therefore$ সুপ্রিমাম = a **(দেখানো হলো)**

   (ii) $\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$

   উপরোক্ত সেটের সকল উপাদানই b এর চেয়ে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা, যেখানে, $b \in \mathbb{R}$ তাহলে বৃহত্তম নিম্নসীমা = b

   $\therefore$ ইনফিমাম = b **(দেখানো হলো)**

4. (i.) ধরি, $S_1 = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $5 < x \leq 12\}$

   এখানে, S_1 এর সুপ্রিমাম $= 12 \in S_1$

   এবং S_1 এর ইনফিমাম $= 5 \notin S_1$

   $\therefore$ S_1 সেটটির সুপ্রিমাম এর অন্তর্ভুক্ত হলেও ইনফিমাম এর অন্তর্ভুক্ত নয়।

   (ii) ধরি, $S_2 = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $-3 \leq x < 4\}$

   এখানে, S_2 এর ইনফিমাম $= -3 \in S_1$

   এবং S_2 এর সুপ্রিমাম $= 4 \notin S_2$

   $\therefore$ S_2 সেটটির ইনফিমাম এর অন্তর্ভুক্ত হলেও সুপ্রিমাম এর অন্তর্ভুক্ত নয়।

অনুচ্ছেদ-1.5 | পৃষ্ঠা-১৫

$x \leq 3$ অর্থাৎ 3 এর সমান বা 3 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা অসমতাটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং, এর অসীম সংখ্যক মান আছে।

$x \leq 3$ কে ব্যবধি আকারে $(\infty, 3]$ লেখা হয়।

অনুচ্ছেদ-1.5 | পৃষ্ঠা-১৫

যৌগিক অসমতার সংজ্ঞা হতে পাই, $a < x < b$ একটি যৌগিক অসমতা। কারণ এখানে দুইটি বাক্যের বর্ণনা আছে। একটি মান $x > a$ এবং অপরটি $x < b$

তাহলে $-1 < x < 5$ অসমতার ক্ষেত্রে একটি মান $x > -1$ এবং অপরটি $x < 5$

$\therefore -1 < x < 5$ একটি যৌগিক অসমতা।

উদাহরণ-1 এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৫

দেওয়া আছে, $4x - 3 > 2(x - 1)$

বা, $4x - 3 > 2x - 2$

বা, $4x - 3 + 3 > 2x - 2 + 3$

[উভয়পক্ষে 3 যোগ করে]

বা, $4x > 2x + 1$

বা, $4x - 2x > 2x + 1 - 2x$

[উভয়পক্ষে 2x বিয়োগ করে]

বা, $2x > 1$

$\therefore x > \frac{1}{2}$ [2 দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x > \frac{1}{2}$

উদাহরণ-2 এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৬

দেওয়া আছে, $2x + 5 \le \frac{x}{4} - 2$

বা, $2x + 5 - 5 \le \frac{x}{4} - 2 - 5$

বা, $2x \le \frac{x}{4} - 7$

বা, $2x - \frac{x}{4} \le \frac{x}{4} - 7 - \frac{x}{4}$

বা, $\frac{8x - x}{4} \le -7$

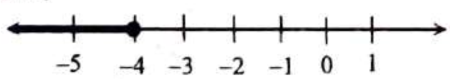
বা, $7x \le -7 \times 4$

$\therefore x \le -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \le -4$ এবং সমাধান সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R} : x \le -4\}$

সংখ্যারেখা:



উদাহরণ-3 এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৬

দেওয়া আছে, $\frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 0$

বা, $\frac{x(x-2)}{(x-3)} < 0$ ....(i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি x, $(x - 2)$ এবং $(x - 3)$ এই তিনটির মধ্যে তিনটির চিহ্নই ঋণাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং একটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

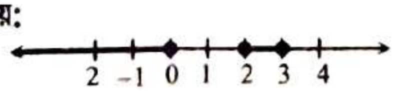
শর্ত	x এর চিহ্ন	$(x-2)$ এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$\frac{x(x-2)}{(x-3)}$ এর চিহ্ন
$x < 0$	–	–	–	–
$0 < x < 2$	+	–	–	+
$2 < x < 3$	+	+	–	–
$x > 3$	+	+	+	+

(i) নং সত্য হবে যদি $x < 0$ অথবা $2 < x < 3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট:

$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ-4 এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৭

দেওয়া আছে,

$|3 - 2x| \ge 7$

এখন $(3 - 2x)$ কে ধনাত্মক বিবেচনা করে পাই,

$(3 - 2x) \ge 7$

বা, $3 - 2x - 3 \ge 7 - 3$

বা, $-2x \ge 4$

বা, $2x \le -4$

$\therefore x \le -2$

আবার $(3 - 2x)$ কে ঋণাত্মক বিবেচনা করে পাই,

$-(3 - 2x) \ge 7$

বা, $-3 + 2x \ge 7$

বা, $-3 + 2x + 3 \ge 7 + 3$

বা, $2x \ge 10$

$\therefore x \ge 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $x \le -2$ অথবা $x \ge 5$

উদাহরণ-5 এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৭

প্রদত্ত অসমতা, $-2 < x < 8$

এখানে, $\frac{-2 + 8}{2} = 3$

অসমতা চিহ্নের প্রত্যেক পাশে 3 বিয়োগ করে পাই,

$-2 - 3 < x - 3 < 8 - 3$

বা, $-5 < x - 3 < 5$

$\therefore |x - 3| < 5$

উদাহরণ-6 এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৭

$\left|\frac{x}{2} - 1\right| \le \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} \le \frac{x}{2} - 1 \le \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 1 \le \frac{x}{2} - 1 + 1 \le \frac{1}{2} + 1$

বা, $\frac{-1 + 2}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{1 + 2}{2}$

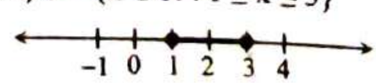
বা, $\frac{1}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{3}{2}$

$\therefore 1 \le x \le 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $1 \le x \le 3$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 3\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ-৪ এর কাজ | পৃষ্ঠা-১৮

$|-11+7|-|2-|-3||+|-1-3|$
$=|-4|-|2-3|+|-4|$
$=4-|-1|+4$
$=8-1=7$

অনুশীলনী-1(A) এর সমাধান

1. (i) $|1+3|+|1-3|$
$=|4|+|-2|=4+2=6$ **(Ans.)**

(ii) $|-3-5|=|-8|=8$ **(Ans.)**

(iii) $\left||3-5|+|7-12|\right|$
$=\left||-2|+|-5|\right|=|2+5|=|7|=7$ **(Ans.)**

(iv) $||2-6|-|1-9||=||-4|-|-8||$
$=|4-8|=|-4|=4$ **(Ans.)**

(v) $|-1-8|+|3-1|$
$=|-9|+|2|=9+2=11$ **(Ans.)**

(vi) $||-2|-|-6||=|2-6|=|-4|=4$ **(Ans.)**

(vii) $|a-3a|-|5a-7a|$
$=|-2a|-|-2a|$
$=2a-2a=0$ **(Ans.)**

(viii) $||-9a|-|11a-2a|-7|$
$=|9a-9a-7|=|-7|=7$ **(Ans.)**

(ix) $||-16+3|+|-1-4|-3-|-1-7||$
$=||-13|+|-5|-3-|-8||$
$=|13+5-3-8|=|18-11|$
$=|7|=7$ **(Ans.)**

(x) $13+|-1-4|-3-|-8|$
$=13+|-5|-3-8$
$=13+5-3-8=7$ **(Ans.)**

2. (i) $|x|<3 \therefore -3<x<3$ **(Ans.)**

(ii) $|x+1|\le 2$
বা, $-2\le x+1\le 2$
বা, $-2-1\le x+1-1\le 2-1$ [(−1) যোগ করে]
$\therefore -3\le x\le 1$ **(Ans.)**

(iii) $|x-3|\le 7$
বা, $-7\le x-3\le 7$
বা, $-7+3\le x-3+3\le 7+3$ [3 যোগ করে]
$\therefore -4\le x\le 10$ **(Ans.)**

(iv) $\left|x-\frac{4}{3}\right|\le 5$
বা, $-5\le x-\frac{4}{3}\le 5$
বা, $-5+\frac{4}{3}\le x-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\le 5+\frac{4}{3}$ [$\frac{4}{3}$ যোগ করে]
$\therefore -\frac{11}{3}\le x\le \frac{19}{3}$ **(Ans.)**

(v) $\frac{1}{|1-4x|}\ge 3,\ x\ne \frac{1}{4}$
বা, $|1-4x|\le \frac{1}{3},\ x\ne\frac{1}{4}$
বা, $-\frac{1}{3}\le 4x-1\le\frac{1}{3},\ x\ne\frac{1}{4}$
বা, $\frac{2}{3}\le 4x\le\frac{4}{3}$, [1 যোগ করে] $x\ne\frac{1}{4}$
$\therefore \frac{1}{6}\le x\le\frac{1}{3},\ x\ne\frac{1}{4}$ **(Ans.)**

(vi) $1<|x|<5$
x অঋণাত্মক হলে, $1<x<5$
x ঋণাত্মক হলে,
$1<-x<5$
বা, $-1>x>-5$
বা, $-5<x<-1$
$\therefore 1<x<5$ অথবা $-5<x<-1$ **(Ans.)**

(vii) $|2x+3|<7$
বা, $-7<2x+3<7$
বা, $-7-3<2x+3-3<7-3$ [(−3) যোগ করে]
বা, $-10<2x<4$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]
$\therefore -5<x<2$ **(Ans.)**

(viii) $\frac{1}{|3x+1|}\ge 5,\ x\ne-\frac{1}{3}$
বা, $|3x+1|\le\frac{1}{5},\ x\ne-\frac{1}{3}$
বা, $-\frac{1}{5}\le 3x+1\le\frac{1}{5},\ x\ne-\frac{1}{3}$
বা, $-\frac{1}{5}-1\le 3x+1-1\le\frac{1}{5}-1,\ x\ne-\frac{1}{3}$
বা, $-\frac{6}{5}\le 3x\le-\frac{4}{5},\ x\ne-\frac{1}{3}$
$\therefore -\frac{6}{15}\le x\le-\frac{4}{15},\ x\ne-\frac{1}{3}$
$\therefore -\frac{2}{5}\le x\le-\frac{4}{15},\ x\ne-\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

3. (i) $-1<x<3$
বা, $-1-1<x-1<3-1$ [1 বিয়োগ করে]
বা, $-2<x-1<2$
$\therefore |x-1|<2$ **(Ans.)**

(ii) $-8\le x\le 2$
বা, $-8+3\le x+3\le 2+3$ [−3 বিয়োগ করে]
বা, $-5\le x+3\le 5$
$\therefore |x+3|\le 5$ **(Ans.)**

(iii) $-6 \le 5x \le 0$
বা, $-6 + 3 \le 5x + 3 \le 0 + 3$ [–3 বিয়োগ করে]
বা, $-3 \le 5x + 3 \le 3$
$\therefore |5x + 3| \le 3$ **(Ans.)**

(iv) $-2 < 3 - x < 8$
বা, $-2 - 3 < 3 - x - 3 < 8 - 3$ [3 বিয়োগ করে]
বা, $-5 < -x < 5$
বা, $|-x| < 5$
$\therefore |x| < 5$ **(Ans.)**

(v) $1 \le 3x + 7 \le 5$
বা, $1 - 3 \le 3x + 7 - 3 \le 5 - 3$ [3 বিয়োগ করে]
বা, $-2 \le 3x + 4 \le 2$
$\therefore |3x + 4| \le 2$ **(Ans.)**

(vi) $2 \le 2x + 3 \le 4$
বা, $2 - 3 \le 2x + 3 - 3 \le 4 - 3$ [3 বিয়োগ করে]
$\therefore |2x| \le 1$ **(Ans.)**

(vii) $-5 < x < 7$
বা, $-5 - 1 < x - 1 < 7 - 1$ [1 বিয়োগ করে]
বা, $-6 < x - 1 < 6$
$\therefore |x - 1| < 6$ **(Ans.)**

(viii) $2 \le x \le 8$
বা, $2 - 5 \le x - 5 \le 8 - 5$ [5 বিয়োগ করে]
বা, $-3 \le x - 5 \le 3$
$\therefore |x - 5| \le 3$ **(Ans.)**

(ix) $-7 < x < -1$
বা, $-7 + 4 < x + 4 < -1 + 4$ [–4 বিয়োগ করে]
বা, $-3 < x + 4 < 3$
$\therefore |x + 4| < 3$ **(Ans.)**

(x) $2x^2 + 5x < 0$
বা, $x^2 + \frac{5}{2}x < 0$
বা, $x^2 + 2.\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$
বা, $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$
$\therefore \left|x + \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4}$
যা নির্ণেয় পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ।
(Ans.)

(xi) $-1 < 2x - 3 < 5$
বা, $-1 - 2 < 2x - 3 - 2 < 5 - 2$ [2 বিয়োগ করে]
বা, $-3 < 2x - 5 < 3$
$\therefore |2x - 5| < 3$ **(Ans.)**

(xii) $-4 < 2x - 1 < 12$
বা, $-4 - 4 < 2x - 1 - 4 < 12 - 4$ [4 বিয়োগ করে]
বা, $-8 < 2x - 5 < 8$
$\therefore |2x - 5| < 8$ **(Ans.)**

(xiii) দেওয়া আছে, $-2 < 2x + 1 < 4$
বা, $-2 - 1 < 2x + 1 - 1 < 4 - 1$
$\left[\text{প্রত্যেক পক্ষে } \frac{4-2}{2} = 1 \text{ বিয়োগ করে পাই}\right]$
বা, $-3 < 2x < 3$ $\therefore |2x| < 3$ **(Ans.)**

(xiv) প্রদত্ত অসমতাটি $-1 \le x - 2 \le 11$
বা, $-1 \le x - 2 \le 11$
বা, $-1 - 5 \le x - 2 - 5 < 11 - 5$
$\left[\frac{11-1}{2} = 5 \text{ বিয়োগ করে}\right]$
বা, $-6 \le x - 7 \le 6$ $\therefore |x - 7| \le 6$ **(Ans.)**

4. দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$
প্রদত্ত অসমতাটি, $-2 < 2 - f(x) < 8$
বা, $-2 < 2 - x + 1 < 8$
বা, $-2 < 3 - x < 8$
বা, $-2 - 3 < 3 - 3 - x < 8 - 3$ [3 বিয়োগ করে]
বা, $-5 < -x < 5$
বা, $5 > x > -5$
বা, $-5 < x < 5$
$\therefore |x| < 5$ **(Ans.)**

5. (i) $|x - 1| \le 3$
বা, $-3 \le x - 1 \le 3$
বা, $-3 + 1 \le x - 1 + 1 \le 3 + 1$
বা, $-2 \le x \le 4$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-2 \le x \le 4$

(ii) $|x + 2| < 2$ এবং $x \in \mathbb{Z}$
বা, $-2 < x + 2 < 2$
বা, $-2 - 2 < x + 2 - 2 < 2 - 2$
বা, $-4 < x < 0$
যেহেতু $x \in \mathbb{Z}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -3, -2, -1$

(iii) $|x - 1| \le 2$ এবং $x \in \mathbb{N}$
বা, $-2 \le x - 1 \le 2$
বা, $-2 + 1 \le x - 1 + 1 \le 2 + 1$
বা, $-1 \le x \le 3$
যেহেতু $x \in \mathbb{N}$ সেহেতু x এর মান 1, 2, 3
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 1, 2, 3$

(iv) $|3x - 4| < 2$
বা, $-2 < 3x - 4 < 2$
বা, $-2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$
বা, $2 < 3x < 6$
বা, $\frac{2}{3} < x < 2$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{2}{3} < x < 2$

(v) $|x - 5| > 4$

$(x - 5)$ অঋণাত্মক হলে,

$x - 5 > 4$

$\therefore x > 9$ [উভয়পক্ষে 5 যোগ করে]

$(x - 5)$ ঋণাত্মক হলে,

$-(x - 5) > 4$

বা, $-x + 5 > 4$

বা, $-x > 4 - 5$ [উভয়পক্ষে (-5) যোগ করে]

বা, $-x > -1$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < 1$ বা $x > 9$

(vi) $|2x + 3| > 9$

$(2x + 3)$ অঋণাত্মক হলে,

$2x + 3 > 9$

বা, $2x > 9 - 3$ [উভয়পক্ষকে (-3) দ্বারা যোগ করে]

বা, $x > \frac{6}{2}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x > 3$

$(2x + 3)$ ঋণাত্মক হলে,

$-(2x + 3) > 9$

বা, $2x + 3 < -9$ [উভয়পক্ষে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2x < -9 - 3$ [উভয়পক্ষে (-3) যোগ করে]

বা, $2x < -12$

বা, $x < -\frac{12}{2}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x < -6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < -6$ বা $x > 3$

(vii) দেওয়া আছে, $|2x - 7| > 5$

$\therefore 2x - 7 > 5$ অথবা, $2x - 7 < -5$

বা, $2x > 5 + 7$ বা, $2x < -5 + 7$

বা, $2x > 12$ বা, $2x < 2$

বা, $x > \frac{12}{2}$ বা, $x < \frac{2}{2}$

$\therefore x > 6$ $\therefore x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x > 6$ অথবা $x < 1$

(viii) $|x - 1| = |3x - 4|$

বা, $|x - 1|^2 = |3x - 4|^2$ [বর্গ করে]

বা, $(x - 1)^2 = (3x - 4)^2$

বা, $x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 24x + 16$

বা, $9x^2 - x^2 - 24x + 2x + 16 - 1 = 0$

বা, $8x^2 - 22x + 15 = 0$

বা, $8x^2 - 12x - 10x + 15 = 0$

বা, $4x(2x - 3) - 5(2x - 3) = 0$

বা, $(2x - 3)(4x - 5) = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$

বিকল্প:

$|x - 1| = |3x - 4|$

$\Rightarrow x - 1 = \pm(3x - 4)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে,

$x - 1 = 3x - 4$

$\Rightarrow 2x = 3 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$

ঋণাত্মক চিহ্ন নিয়ে,

$x - 1 = -(3x - 4)$

$\Rightarrow 3x + x = 4 + 1$

$\Rightarrow 4x = 5 \quad \therefore x = \frac{5}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}$

(ix) $|x - 1| + |2x - 3| = 5$

$\Rightarrow \pm(x - 1) \pm (2x - 3) = 5$

(a) $x - 1 + 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 3$

(b) $x - 1 - (2x - 3) = 5 \Rightarrow x = -3$

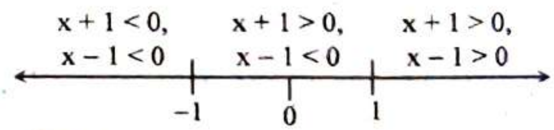
(c) $-(x - 1) + (2x - 3) = 5 \Rightarrow x = 7$

(d) $-(x - 1) - (2x - 3) = 5 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$x = -3$ এবং $x = 7$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 3, -\frac{1}{3}$

(x) $x + 1 = 0$ হলে $x = -1$ এবং $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$ সংখ্যারেখায় -1 ও 1 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।



বিন্দুদ্বয় সরলরেখাকে (1) $x < -1$ (ii) $-1 < x < 1$ এবং (iii) $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < -1$ হলে, $|x + 1| = -(x + 1)$

এবং $|x - 1| = -(x - 1)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা থেকে পাই,

$-(x + 1) + \{-(x - 1)\} \le 5$

$\Rightarrow -x - 1 - x + 1 \le 5$

$\Rightarrow -2x \le 5 \Rightarrow x \ge -\frac{5}{2}$

$-1 < x < 1$ হলে,

$|x + 1| = x + 1$ এবং $|x - 1| = -(x - 1)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা থেকে পাই,

$x + 1 + \{-(x - 1)\} \le 5$

$\Rightarrow x + 1 - x + 1 \le 5$

$\Rightarrow 2 \le 5$; যা সত্য।

$x > 1$ হলে, $|x + 1| = x + 1$

এবং $|x - 1| = x - 1$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই,

$x + 1 + x - 1 \le 5 \Rightarrow 2x \le 5 \Rightarrow x \le \frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x \ge -\frac{5}{2}$ এবং $x \le \frac{5}{2}$

অর্থাৎ $-\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{5}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$

বিকল্প:

$|x + 1| + |x - 1| \le 5$

$\Rightarrow \pm(x + 1) \pm (x - 1) \le 5$

(a) $x + 1 + (x - 1) \le 5$

$\Rightarrow 2x \le 5 \;\; \therefore x \le {}^5/_2$

(b) $x + 1 - (x - 1) \le 5$

$\Rightarrow 2 \le 5$ যা সত্য

(c) $-(x + 1) + (x - 1) \le 5$

$\Rightarrow -x - 1 + x - 1 \le 5$

$\Rightarrow -2 \le 5$ যা সত্য

(d) $-(x + 1) - (x - 1) \le 5$

$\Rightarrow -x - 1 - x + 1 \le 5$

$\Rightarrow -2x \le 5$

$\Rightarrow 2x \ge -5$

$\Rightarrow x \ge -\frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{-5}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

(xi) প্রথম অংশ : $|x + 1| < 2$

বা, $-2 < (x + 1) < 2$

বা, $-2 - 1 < x + 1 - 1 < 2 - 1$

$\therefore -3 < x < 1$

দ্বিতীয় অংশ : $|x - 2| < 3$

বা, $-3 < x - 2 < 3$

বা, $-3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2$

$\therefore -1 < x < 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\{-3 < x < 1\} \cap \{-1 < x < 5\}$

বা, $-1 < x < 1$

(xii) $|x - 1| < 2$ এবং $|x - 2| < 1$

$|x - 1| < 2$

$\Rightarrow -2 < x - 1 < 2$

$\Rightarrow -2 + 1 < x - 1 + 1 < 2 + 1$

$\therefore -1 < x < 3$

এবং $|x - 2| < 1$

$\Rightarrow -1 < x - 2 < 1$

$\Rightarrow -1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$

$\therefore 1 < x < 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\{-1 < x < 3\} \cap \{1 < x < 3\}$

বা, $1 < x < 3$

যা প্রদত্ত অসমতাদ্বয়ের প্রত্যেকটির জন্য সত্য।

6. (i) $|x| \le 4$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 4\}$

সংখ্যারেখা:

(ii) $|3 - x| \le 2$

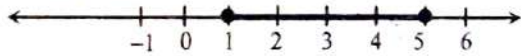
বা, $|x - 3| \le 2$

বা, $-2 \le x - 3 \le 2$

$\therefore 1 \le x \le 5$ [3 যোগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 5\}$

সংখ্যারেখা:



(iii) $|2x - 5| < 1$

বা, $-1 < 2x - 5 < 1$

বা, $-1 + 5 < 2x < 1 + 5$

[উভয় পক্ষে 5 যোগ করে]

বা, $4 < 2x < 6$

$\therefore 2 < x < 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$

সংখ্যারেখা: 

(iv) $|2x + 3| < 7$

বা, $-7 < 2x + 3 < 7$

বা, $-7 - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 - 3$

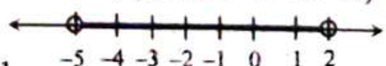
বা, $-10 < 2x < 4$

বা, $-\frac{10}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$

বা, $-5 < x < 2$

$\therefore -5 < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2\}$

সংখ্যারেখা: 

(v) $|2x + 5| < 1$

বা, $-1 < 2x + 5 < 1$

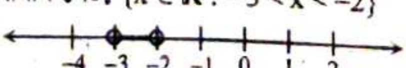
বা, $-1 - 5 < 2x + 5 - 5 < 1 - 5$;

[উভয় পক্ষকে (–5) যোগ করে]

বা, $-6 < 2x < -4$

$\therefore -3 < x < -2$; [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < -2\}$

সংখ্যারেখা: 

(vi) $|3x - 4| < 2$

বা, $-2 < 3x - 4 < 2$

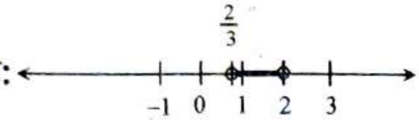
বা, $-2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$;

[উভয় পক্ষে 4 যোগ করে]

বা, $2 < 3x < 6$

$\therefore \frac{2}{3} < x < 2$; [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < 2\right\}$

সংখ্যারেখা:


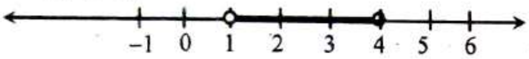
(vii) $|2x - 5| < 3$

বা, $-3 < 2x - 5 < 3$

বা, $2 < 2x < 8$ [5 যোগ করে]

$\therefore 1 < x < 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$

সংখ্যারেখা:


(viii) $|3x + 2| < 7$

বা, $-7 < 3x + 2 < 7$

বা, $-7 - 2 < 3x + 2 - 2 < 7 - 2$

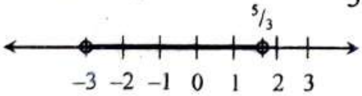
বা, $-9 < 3x < 5$

বা, $-\frac{9}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{5}{3}$

বা, $-3 < x < \frac{5}{3}$

$\therefore -3 < x < \frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < \frac{5}{3}\}$

সংখ্যারেখা:


(ix) $|2x - 1| < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x - 1 < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < 2x < \frac{1}{3} + 1$

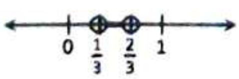
[সকল পক্ষে 1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{2}{3} < 2x < \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$

সংখ্যারেখা:


(Ans.)

(x) $\frac{1}{|5x - 1|} > \frac{1}{9}$ এবং $x \neq \frac{1}{5}$

বা, $|5x - 1| < 9$

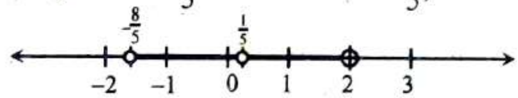
বা, $-9 < 5x - 1 < 9$

বা, $-8 < 5x < 10$

$\therefore -\frac{8}{5} < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট:

$\{x \in \mathbb{R} : -\frac{8}{5} < x < 2$ এবং $x \neq \frac{1}{5}\}$



(xi) $|x - 5| > 2$

$(x - 5)$ অঋণাত্মক হলে, $x - 5 > 2$

বা, $x - 5 + 5 > 2 + 5$

$\therefore x > 7$

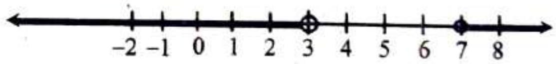
$(x - 5)$ ঋণাত্মক হলে, $-(x - 5) > 2$

বা, $(x - 5) < -2$

বা, $x - 5 + 5 < -2 + 5$

$\therefore x < 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : x < 3$ অথবা $x > 7\}$

সংখ্যারেখা:


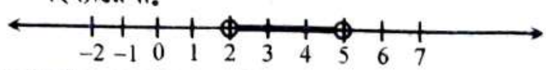
(xii) $|x - 5| < 3$ এবং $x < 5$

বা, $-3 < x - 5 < 3$ এবং $x < 5$

বা, $2 < x < 8$ এবং $x < 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{2 < x < 8\} \cap \{x < 5\}$

বা, $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 5\}$

সংখ্যারেখা:


(xiii) **প্রথম ক্ষেত্রে:** $|x - 2| \leq 1$

বা, $-1 \leq x - 2 \leq 1$

$\therefore 1 \leq x \leq 3$

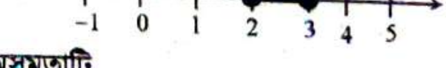
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে: $|x - 3| \leq 1$

বা, $-1 \leq x - 3 \leq 1$

$\therefore 2 \leq x \leq 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{1 \leq x \leq 3\} \cap 2 \leq x \leq 4\}$

বা, $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}$

সংখ্যারেখা:


(xiv) প্রদত্ত অসমতাটি,

$\frac{1}{|5x - 3|} \geq 2$; যেখানে $x \neq \frac{3}{5}$

বা, $|5x - 3| \leq \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} \leq 5x - 3 \leq \frac{1}{2}$

বা, $\frac{-1}{2} + 3 \leq 5x - 3 + 3 \leq \frac{1}{2} + 3$

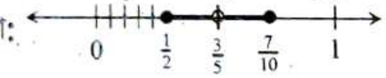
বা, $\frac{5}{2} \leq 5x \leq \frac{7}{2}$

বা, $\frac{5}{2 \times 5} \leq x \leq \frac{7}{2 \times 5}$

$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{10}$; যেখানে $x \neq \frac{3}{5}$

নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{10} \text{ এবং } x \neq \frac{3}{5} \right\}$

সংখ্যারেখা:



7. (i) দেওয়া আছে, $f(x) = 3x + 1$

$\therefore f(x - 2) = 3(x - 2) + 1$
$= 3x - 6 + 1 = 3x - 5$

এবং $2|f(x - 2)| \leq 1$

বা, $2|3x - 5| \leq 1$

বা, $|3x - 5| \leq \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} \leq 3x - 5 \leq \frac{1}{2}$

[$\because |a| \leq \alpha$ হলে $-\alpha \leq a \leq \alpha$]

বা, $-\frac{1}{2} + 5 \leq 3x - 5 + 5 \leq \frac{1}{2} + 5$ [5 যোগ করে]

বা, $\frac{-1 + 10}{2} \leq 3x \leq \frac{1 + 10}{2}$

বা, $\frac{9}{2} \leq 3x \leq \frac{11}{2}$

বা, $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{6}$ [3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{6}$

নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{6} \right\}$

সমাধান সেট নিম্নে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:

(ii) $|3 f(x) - 1| < 2$

বা, $|3(x - 1) - 1| < 2$

বা, $|3x - 3 - 1| < 2$

বা, $|3x - 4| < 2$

বা, $-2 < 3x - 4 < 2$

বা, $-2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$ [4 যোগ করে]

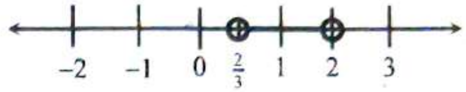
বা, $2 < 3x < 6$

বা, $\frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{6}{3}$ [3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{2}{3} < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < 2 \right\}$

নিম্নে সমাধান সেটকে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



(iii) দেওয়া আছে, $p = x - 5$

$\therefore \frac{1}{|p|} \geq 3$

বা, $\frac{1}{|x - 5|} \geq 3$

বা, $|x - 5| \leq \frac{1}{3}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $-\frac{1}{3} \leq x - 5 \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 \leq x - 5 + 5 \leq \frac{1}{3} + 5$ [5 যোগ করে]

বা, $\frac{15 - 1}{3} \leq x \leq \frac{1 + 15}{3}$

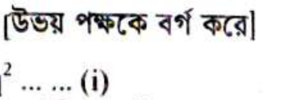
বা, $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$ এবং $x \neq 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট:

$\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3} \text{ এবং } x \neq 5 \right\}$ **(Ans.)**

সংখ্যারেখা:



8. (i) মনে করি, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা, তাহলে

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা, $q \neq 0$ এবং এদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক (1 ব্যতীত) নেই।]

বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $p^2 = 3q^2$ ... ... (i)

এখন, 3 দ্বারা $3q^2$ বিভাজ্য বিধায় 3 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হবে।

সুতরাং p নিজেই 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

ধরি, $p = 3c$ [যেখানে c একটি পূর্ণসংখ্যা]

বা, $p^2 = 9c^2$

বা, $3q^2 = 9c^2$ [(i) থেকে]

বা, $q^2 = 3c^2$

$\therefore$ 3 দ্বারা q^2 বিভাজ্য, অর্থাৎ 3 দ্বারা q বিভাজ্য।

সুতরাং, p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক হলো 3, যা প্রস্তাবনা বিরোধী।

$\therefore \sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। **(দেখানো হলো)**

(ii) মনে করি, $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

অর্থাৎ, $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$

[p ও q পূর্ণসংখ্যা, p ও q এর মধ্যে 1 ব্যতীত কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই এবং $q \neq 0$]

$\therefore \frac{p^2}{q^2} = 5$ [বর্গ করে]

বা, $p^2 = 5q^2$ ... ... (i)

যেহেতু (i) এর ডানপক্ষে একটি উৎপাদক 5 আছে, সুতরাং, এর বামপক্ষে p^2 এর একটি উৎপাদক 5 থাকবে। অতএব, p-এর একটি উৎপাদক 5 থাকবে।

ধরি, $p = 5c$, যেখানে c পূর্ণ সংখ্যা

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$25c^2 = 5q^2$ বা, $5c^2 = q^2$

$\therefore$ 5 দ্বারা q^2 বিভাজ্য, অর্থাৎ 5 দ্বারা q বিভাজ্য।

সুতরা p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক হলো 5, যা প্রস্তাবনা বিরোধী।

$\therefore \sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। **(দেখানো হলো)**

(iii) ধরি, $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{5} = r$ [যেখানে r একটি মূলদ সংখ্যা]

বা, $3 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5 = r^2$ [বর্গ করে]

বা, $-2\sqrt{3}\sqrt{5} = r^2 - 8$

$\therefore \sqrt{3}\sqrt{5} = \frac{8 - r^2}{2}$

8(i), (ii) হতে পাই, $\sqrt{3}$ ও $\sqrt{5}$ উভয়ই অমূলদ সংখ্যা।

$\therefore$ এদের গুণফল একটি অমূলদ সংখ্যা।

যেহেতু r কে মূলদ সংখ্যা ধরা হয়েছে। এতএব $\frac{8 - r^2}{2}$ মূলদ সংখ্যা।

একটি অমূলদ সংখ্যা অপর একটি মূলদ সংখ্যার সমান হতে পারে না।

$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা হতে পারে না।

$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা নয়। **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, x, y মূলদ এবং $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

যেহেতু, $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

বা, $x\sqrt{2} = y\sqrt{3}$

বা, $x\sqrt{2} . \sqrt{2} = y.\sqrt{3} . \sqrt{2}$

বা, $2x = y\sqrt{6}$ .... (i)

স্পষ্টতই, $y \neq 0$ হলে $\frac{2x}{y} = \sqrt{6}$

অর্থাৎ একটি মূলদ সংখ্যা = একটি অমূলদ সংখ্যা, যা সম্ভব নয়–

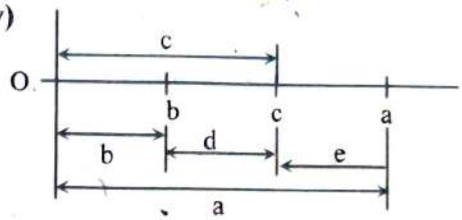
সুতরাং $y = 0$

এখন, (i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$x = 0$

$\therefore x = 0 = y$ **(দেখানো হলো)**

(v)



আমরা জানি, সংখ্যারেখার কতগুলো বিন্দু দ্বারা সব মূলদ সংখ্যা ও অপর বিন্দুগুলো দ্বারা সব অমূলদ সংখ্যা সূচিত করা যায়।

মনে করি, a ও b দুইটি মূলদ সংখ্যা $(a > b)$. এ দুইটি সংখ্যার নির্দেশক বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে একটি বিন্দু নেয়া হলো যা দ্বারা মূলদ সংখ্যা c নির্দেশ করে। যদি c নির্দেশক বিন্দু a নির্দেশক বিন্দুর বামদিকে e একক দূরত্বে এবং b নির্দেশক বিন্দুর ডানদিকে d একক দূরত্বে অবস্থান করে, তবে $a - b = d + e$ ... ... (i)

এখন ওপরের সংখ্যারেখা হতে

$c = b + d$ ... ... (ii) এবং $c = a - e$ ... ... (iii)

$\therefore$ (ii) এবং (iii) নং হতে,

$b + d = a - e$

বা, $a - b = d + e$ ... ... (iv)

সুতরাং (i) এবং (iv) থেকে বলা যায় a এবং b এর মধ্যে c আছে।

অর্থাৎ দুইটি ভিন্ন মূলদ সংখ্যার মধ্যে অন্য মূলদ সংখ্যা আছে। **(দেখানো হলো)**

(vi) দেওয়া আছে, $a < b$

$\Rightarrow ak < bk$ [$\because$ k ধনাত্মক]

$\Rightarrow a + ak < a + bk$

$\Rightarrow a(1 + k) < a + bk$

$\Rightarrow a < \frac{a + bk}{1 + k}$ ... ... (i)

আবার, $a < b$

$\Rightarrow a + bk < b + bk$

$\Rightarrow a + bk < b(1 + k)$

$\therefore \frac{a + bk}{1 + k} < b$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $a < \frac{a + bk}{1 + k} < b$ **(প্রমাণিত)**

9. **(i)** 0.66666 ... ...
মনে করি, $x = 0.666666 \ldots \ldots \ldots (1)$
$\therefore 10x = 6.6666 \ldots \ldots \ldots (2)$
এখন (2) হতে (1) বিয়োগ করে পাই,
$9x = 6$ বা, $x = \frac{6}{9}$ বা, $x = \frac{2}{3}$ $\therefore x = \frac{2}{3}$
অতএব 0.66666 ... ... একটি মূলদ সংখ্যা।
(দেখানো হলো)

(ii) 0.56666 ... ...
মনে করি, $x = 0.5666....$ বা, $10x = 5.6666... ... (1)$
$\therefore 100x = 56.6666 \ldots \ldots \ldots (2)$
এখন (2) হতে (1) বিয়োগ করে পাই,
$90x = 51$
বা, $x = \frac{51}{90}$
অতএব 0.5666 ... ... একটি মূলদ সংখ্যা।
(দেখানো হলো)

(iii) 9.727272 ... ...
মনে করি, $x = 9.727272 \ldots \ldots \ldots (1)$
$\therefore 100x = 972.7272 \ldots \ldots \ldots (2)$
এখন (2) হতে (1) বিয়োগ করে পাই,
$99x = 963$ বা, $x = \frac{963}{99}$ $\therefore x = \frac{107}{11}$
অতএব 9.727272 ... ... একটি মূলদ সংখ্যা।
(দেখানো হলো)

10. **(i)** ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
A এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$
A এর সুপ্রিমাম = 5 **(Ans.)**
A এর নিম্নসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$
$\therefore$ A এর ইনফিমাম = 1 **(Ans.)**

(ii) $A = \{1 - \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}\}$
$= \{1 - \frac{1}{3^1}, 1 - \frac{1}{3^2}, 1 - \frac{1}{3^3}, 1 - \frac{1}{3^4}, \ldots\}$
$= \{\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \frac{80}{81}, \ldots\ldots\}$
A এর নিম্নসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq {}^2/_3\}$
$\therefore$ A এর ইনফিমাম $= \frac{2}{3}$ **(Ans.)**
এখন $n \to \infty$ হলে $1 - \frac{1}{3^n} \to 1$ অর্থাৎ
1 এর চেয়ে কোনো ক্ষুদ্রতম সংখ্যা A এর ঊর্ধ্বসীমা হতে পারে না।
$\therefore$ A এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$
$\therefore$ A এর সুপ্রিমাম = 1 **(Ans.)**

(iii) $B = \{\frac{1}{5n}$, যখন $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
$= \{\ldots.., -\frac{1}{15}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots\}$
এখানে, B সেটের ঊর্ধ্বসীমা $= \frac{1}{5}$ এবং $\frac{1}{5}$ এর চেয়ে বৃহত্তর কোনো মান সেটের সুপ্রিমাম হতে পারে না।
$\therefore$ সুপ্রিমাম $= \frac{1}{5}$ **(Ans.)**
B সেটের নিম্নসীমা $= -\frac{1}{5}$ এবং $-\frac{1}{5}$ এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর কোন মান B সেটের ইনফিমাম হতে পারে না।
$\therefore$ ইনফিমাম $= -\frac{1}{5}$ **(Ans.)**

(iv) $C = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 3\}$
C এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$
$\therefore$ C এর সুপ্রিমাম = 3 **(Ans.)**
আবার C এর নিম্নসীমার সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -5\}$
$\therefore$ C এর ইনফিমাম = – 5 **(Ans.)**

(v) $D = \{x \in \mathbb{R} : x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$
যখন $n \to \infty$ তখন $x \to \infty$
এমন কোনো মান বিদ্যমান নাই যা ∞ এর চেয়ে বড়। $\therefore$ D সেটের সুপ্রিমাম বিদ্যমান নয়। আবার $n = 1$ বসালে D সেটের সর্বনিম্ন মান 2 পাওয়া যায়। D সেটের কোনো মান 2 এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। $\therefore$ D সেটের ইনফিমাম = 2. **(Ans.)**

(vi) ধরি, $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-2) \leq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0$ এবং $x - 2 \leq 0\}$
অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x - 1 \leq 0$ এবং $x - 2 \geq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \cap x \leq 2\}$
$\cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \cap x \geq 2\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \cap \{\ \}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$
A এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x : x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$
$\therefore$ A এর সুপ্রিমাম = 2 **(Ans.)**
A এর নিম্নসীমার সেট $= \{x : x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$
$\therefore$ A এর ইনফিমাম = 1 **(Ans.)**

(vii) ধরি, $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq 4\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x - 3 \leq 4\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : -4 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 4 + 3\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 7\}$
$= [-1, 7]$
$\therefore$ ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা sup A = 7 **(Ans.)**
এবং বৃহত্তম নিম্নসীমা Inf A = –1 **(Ans.)**

(viii) $S = \{x \in \mathbb{R} : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 5x^2 - 15x - x + 3 < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 5x(x-3) - 1(x-3) < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(5x-1) < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0$ এবং $5x - 1 < 0\}$
অথবা, $\{x \in \mathbb{R} : x - 3 < 0$ এবং $5x - 1 > 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \cap x < \frac{1}{5}\} \cup$
$\{x \in \mathbb{R} : x < 3 \cap x > \frac{1}{5}\}$
$= \{\ \} \cup \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{5} < x < 3\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{5} < x < 3\}$
S এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x : x \geq 3\}$
$\therefore$ S এর সুপ্রিমাম $= 3$ **(Ans.)**
S এর নিম্নসীমার সেট $= \{x : x \leq \frac{1}{5}\}$
$\therefore$ S এর ইনফিমাম $= \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

(ix) দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$
ধরি, $A = \{a : a \in$ পূর্ণসংখ্যা এবং $|g(a)| < 4\}$
এখন, $|g(a)| < 4 \Rightarrow |2a - 1| < 4$
বা, $-4 < 2a - 1 < 4$
বা, $-4 + 1 < 2a - 1 + 1 < 4 + 1$ ['1' যোগ করে]
বা, $-3 < 2a < 5$
বা, $-\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]
বা, $-1 \leq a \leq 2$ [$\therefore$ a পূর্ণসংখ্যা]
A এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{a \in \mathbb{Z} : a \geq 2\}$
$\therefore$ A এর সুপ্রিমাম $= 2$ **(Ans.)**
A এর নিম্নসীমার সেট $= \{a \in \mathbb{Z} : a \leq -1\}$
$\therefore$ A এর ইনফিমাম $= -1$ **(Ans.)**

(x) প্রদত্ত অসমতাটি, $-9 < 5x + 1 < 16$
বা, $-9 - 1 < 5x + 1 - 1 < 16 - 1$
বা, $-10 < 5x < 15 \therefore -2 < x < 3$
ধরি, $S = \{x : x \in \mathbb{R}, -9 < 5x + 1 < 16\}$
$= \{x : x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}$
ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$
$\therefore$ সুপ্রিমাম, $\text{Sup } S = 3$ **(Ans.)**
নিম্নসীমার সেট $= \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq -2\}$
$\therefore$ ইনফিমাম, $\text{Inf } S = -2$ **(Ans.)**

11. (i) বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতা: সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, একটি মাত্র $-a \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হবে। এখানে, $-a$ কে a এর যোগের বিপরীতক বলা হয়। আবার, সকল $a \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, এখানে, a^{-1} কে a এর গুণনের বিপরীতক বলা হয়।

(ii) সংজ্ঞা হতে, $a \geq 0$ হলে $|a| = a$
$\therefore \sqrt{a^2} = a = |a|$
$a < 0$ হলে, মনে করি $a = -n (n > 0)$
তাহলে $a^2 = (-n)^2$
বা, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-n)^2} = \sqrt{n^2} = n = |n| = |-a| = |a|$
সুতরাং n এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $\sqrt{a^2} = |a|$
(প্রমাণিত)

(iii) **প্রথম অংশ:** আমরা জানি, $(-a).0 = 0$
বা, $(-a)[(-b) + b] = 0$ [যোগের বিপরীতক]
বা, $(-a)(-b) + (-a)\, b = 0$ [বণ্টন বিধি]
বা, $(-a)(-b) + (-ab) = 0$
[$a, b \in \mathbb{R}$ হলে $(-a)b = -ab$]
বা, $(-a)(-b) + (-ab) + ab = 0 + ab$
[যোগের অনন্যতা]
বা, $(-a)(-b) + [(-ab) + ab] = 0 + ab$
[যোগের সংযোজন]
বা, $(-a)(-b) + 0 = 0 + ab$ [যোগের বিপরীতক]
বা, $(-a)(-b) = ab$ [যোগের অভেদক]

দ্বিতীয় অংশ:
$(a^{-1}b^{-1})(ab) = (ab)(a^{-1}b^{-1})$ [গুণনের বিনিময়]
$= (ba)(a^{-1}b^{-1})$ [গুণনের বিনিময়]
$= \{(ba)\, a^{-1}\}b^{-1}$ [গুণনের সংযোজন]
$= \{b\, (aa^{-1})\}b^{-1}$ [গুণনের সংযোজন]
$= (b.1)b^{-1}$ [গুণনের বিপরীতক]
$= b.b^{-1}$ [গুণনের অভেদক]
$= 1$ [গুণনের বিপরীতক]
আমরা প্রমাণ করেছি যে, $(a^{-1}b^{-1})\, ab = ab$
$(a^{-1}b^{-1}) = 1$
অর্থাৎ $b^{-1}a^{-1}$ হচ্ছে ab এর গুণনের বিপরীতক যা অনন্য।
সুতরাং $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ **(দেখানো হলো)**

(iv) $b \neq 0$ হলে b^{-1} অস্তিত্বশীল।
এখন, $ab = 0$ [কল্পনা করি]
বা, $(ab)\, b^{-1} = 0.b^{-1}$ [গুণের অনন্যতা বিধি]
বা, $(ab)\, b^{-1} = 0$ [$b^{-1} \in \mathbb{R}, \therefore 0.b^{-1} = 0$]

বা, $a(bb^{-1}) = 0$ [গুণের সংযোগ বিধি]
বা, $a.1 = 0$ [গুণের বিপরীতক]
$\therefore\ a = 0$ [গুণের অভেদক]
আবার, $a \neq 0$ হলে a^{-1} অস্তিত্বশীল
এখন, $ab = 0$ [কল্পনা করি]
বা, $a^{-1}(ab) = a^{-1}.0$ [গুণের অনন্যতা বিধি]
বা, $a^{-1}(ab) = 0$ [$a^{-1} \in \mathbb{R}, \therefore a^{-1}.\ 0 = 0$]
বা, $(a^{-1}a)\ b = 0$ [গুণের সংযোগ বিধি]
বা, $1.b = 0$ [গুণের বিপরীতক]
$\therefore\ b = 0$ [গুণের অভেদক]
$\therefore\ a = 0$ অথবা $b = 0$ **(দেখানো হলো)**

(v) $a + b = a + c$ [কল্পনা]
বা, $-a + (a + b) = -a + (a + c)$ [যোগের অনন্যতা বিধি]
বা, $(-a + a) + b = (-a + a) + c$ [যোগের সংযোগ বিধি]
বা, $0 + b = 0 + c$ [যোগের বিপরীতক]
$\therefore\ b = c$ [যোগের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

(vi) যেহেতু $c \neq 0$, সুতরাং c এর গুণাত্মক বিপরীতক
বা, c^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।
দেওয়া আছে, $ac = bc$
বা, $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]
বা, $a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ [সংযোজন যোগ্যতা বিধি অনুসারে]
বা, $a.1 = b.1$ [গুণের বিপরীতক]
$\therefore\ a = b$ [গুণের অভেদক] **(প্রমাণিত)**

(vii) এখনে, $(-a)\ b + ab$
$= \{(-a) + a\}b$ [বণ্টন বিধি]
$= 0.b$ [যোগের বিপরীতক]
$= 0$
$\therefore\ (-a)b + ab = 0$
বা, $(-a)b + ab + (-ab) = 0 + (-ab)$
বা, $(-a)b + 0 = 0 + \{-(ab)\}$ [যোগের বিপরীত]
$\therefore (-a)b = -(ab)$ [যোগের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

(viii) $(a + c) - (b + c)$
$= a + c - b - c$
$= (a - b) + (c - c)$ [যোগের বিনিময় বিধি]
$= a - b + 0$ [যোগের বিপরীতক বিধি]
$= a - b$, [যোগের অভেদক বিধি]
যা কল্পনা অনুসারে ধনাত্মক, কারণ $a > b$
সুতরাং $(a + c) - (b + c)$ ধনাত্মক।
অর্থাৎ, $(a - c) - (b + c) > 0$
$\therefore\ a + c > b + c$ **(দেখানো হলো)**

(ix) **প্রথম ক্ষেত্রে :** $c > 0$ হলে, যেহেতু $b > a$
$\therefore\ b - a > 0$
$\therefore\ c\ (b - a) > 0$ [গুণের অনন্যতা বিধি]
বা, $bc - ac > 0$ [বাম বণ্টন বিধি]
$\therefore\ bc > ac$
আবার, $b = a$ হলে $bc = ac$
$\therefore\ ac \leq bc$, যখন $c > 0$
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে : $c < 0$, অর্থাৎ c ঋণাত্মক হলে
$-c > 0$ অর্থাৎ $-c$ ধনাত্মক।
যেহেতু $b > a\ \therefore\ b - a > 0$
সুতরাং $(-c)\ (b - a) > 0$ [গুণের অনন্যতা বিধি]
বা, $-bc + ac > 0$ বা, $ac > bc$
আবার, $a = b$ হলে $ac = bc$
$\therefore\ ac \geq bc$ যখন $c < 0$ এবং $a \leq b$ **(দেখানো হলো)**

12. (i) $|x - 1| < \frac{1}{10}$
বা, $-\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10}$
বা, $-\frac{1}{10} + 1 < x < \frac{1}{10} + 1$ [1 যোগ করে]
বা, $\frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$
বা, $\frac{81}{100} < x^2 < \frac{121}{100}$ [বর্গ করে]
বা, $\frac{81}{100} - 1 < x^2 - 1 < \frac{121}{100} - 1$ [(−1) যোগ করে]
বা, $\frac{-19}{100} < x^2 - 1 < \frac{21}{100}$
বা, $\frac{-21}{100} < x^2 - 1 < \frac{21}{100}$ [$\because -\frac{21}{100} < -\frac{19}{100}$]
$\therefore |x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ [$\because\ -a < x < a = |x| < a$]
(দেখানো হলো)

বিকল্প পদ্ধতি:

দেওয়া আছে, $|x - 1| < \frac{1}{10}$ ...... (i)
$\therefore |x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + |2| < \frac{1}{10} + 2$
[$\because |a + b| \leq |a| + |b|$]
$\Rightarrow |x + 1| < \frac{21}{10}$ ...... (ii)
(i) নং কে (ii) নং দ্বারা গুণ করে পাই,
$|x - 1|\ |x + 1| < \frac{1}{10} \times \frac{21}{10}$
$\Rightarrow |(x - 1)(x + 1)| < \frac{21}{100}$ [$\because |ab| = |a|\ |b|$]
$\Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

এবং $a = 1, b = c = 0, |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$

তাহলে, $f(x) = x$

$\therefore \{f(x)\}^2 = x^2$

এখন, $|x - 1| < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} < x - 1 < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{11} + 1$ [1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{10}{11} < x < \frac{12}{11}$

$\Rightarrow \frac{100}{121} < x^2 < \frac{144}{121}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{100}{121} - 1 < x^2 - 1 < \frac{144}{121} - 1$ [1 বিয়োগ করে]

$\Rightarrow \frac{100 - 121}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{144 - 121}{121}$

$\Rightarrow -\frac{21}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$

$\Rightarrow -\frac{23}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$

$\left[\because -\frac{23}{121} < \frac{-21}{121}\right]$

$\therefore |\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ **(প্রমাণিত)**

(iii) $f(x) = |x - 3|$

$f(x^2 - 6) = |x^2 - 6 - 3| = |x^2 - 9|$

এখন, $f(x) < \frac{1}{5}$

বা, $|x - 3| < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} < x - 3 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{5} + 3$

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$

বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 9 < x^2 - 9 < \frac{256}{25} - 9$

বা, $-\frac{29}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$

বা, $-\frac{31}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$ $\left[\because -\frac{31}{25} < -\frac{29}{25}\right]$

বা, $|x^2 - 9| < \frac{31}{25}$

$\therefore f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$ **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $f(x) = |x - 3|$ এবং $f(x) < \frac{1}{7}$

$\therefore |x - 3| < \frac{1}{7}$

$\Rightarrow -\frac{1}{7} < x - 3 < \frac{1}{7}$

$\Rightarrow -\frac{1}{7} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{7} + 3$ [3 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{-1 + 21}{7} < x < \frac{1 + 21}{7}$

$\Rightarrow \frac{20}{7} < x < \frac{22}{7}$

$\Rightarrow \frac{400}{49} < x^2 < \frac{484}{49}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{400}{49} - 9 < x^2 - 9 < \frac{484}{49} - 9$

['– 9' যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{400 - 441}{49} < x^2 - 9 < \frac{484 - 441}{49}$

$\Rightarrow \frac{-41}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49} < \frac{-41}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

$\therefore |x^2 - 9| < \frac{43}{49}$ **(প্রমাণিত)**

(v) দেওয়া আছে, $|x - 3| < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} < x - 3 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 3 < x < \frac{1}{5} + 3$

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$

বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 8 < x^2 - 8 < \frac{256}{25} - 8$

বা, $\frac{-4}{25} < x^2 - 8 < \frac{56}{25}$

বা, $-\frac{56}{25} < x^2 - 8 < \frac{56}{25}$ $\left[\because -\frac{56}{25} < \frac{-4}{25}\right]$

বা, $|x^2 - 8| < \frac{56}{25}$ **(দেখানো হলো)**

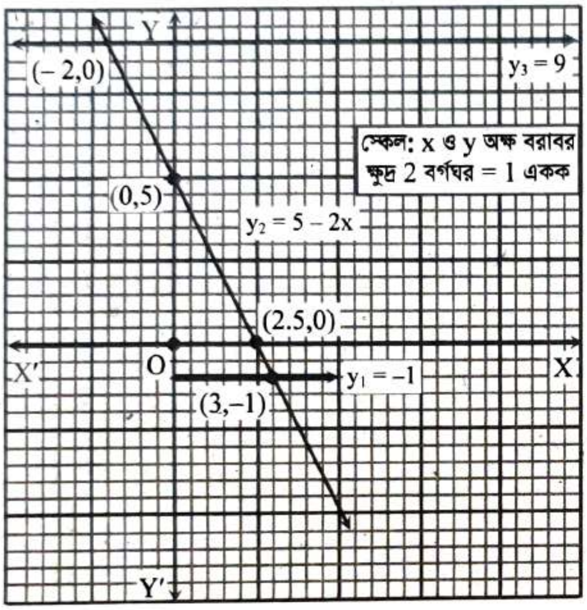
পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ উদাহরণ-2 এর কাজ | পৃষ্ঠা-২৪

সমাধান: ধরি $y_1 = -1$, $y_2 = 5 - 2x$ এবং $y_3 = 9$

y_1, y_2 এবং y_3 গ্রাফ কাগজে লেখচিত্র অঙ্কন করি। y_1, y_2 এবং y_3 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $x \in [-2, 3)$ এর জন্য y_2 এর মান y_1 এবং y_3 এর মধ্যে অবস্থিত।

নির্ণেয় সমাধান: $-2 \le x < 3$; যেখানে, $x \in \mathbb{R}$.



▶ উদাহরণ-3 এর কাজ | পৃষ্ঠা-২৫

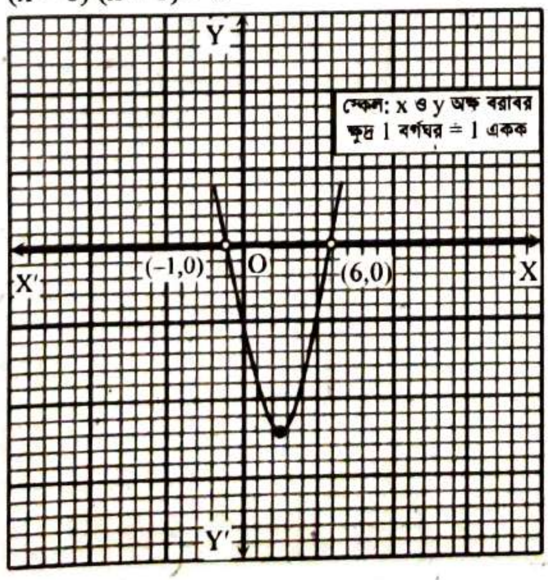
(i) $x^2 - 5x > 6$

বা, $x^2 - 5x - 6 > 0$

বা, $x^2 - 6x + x - 6 > 0$

বা, $x(x - 6) + 1(x - 6) > 0$

$\therefore$ $(x - 6)(x + 1) > 0$



লেখচিত্র হতে পাই,

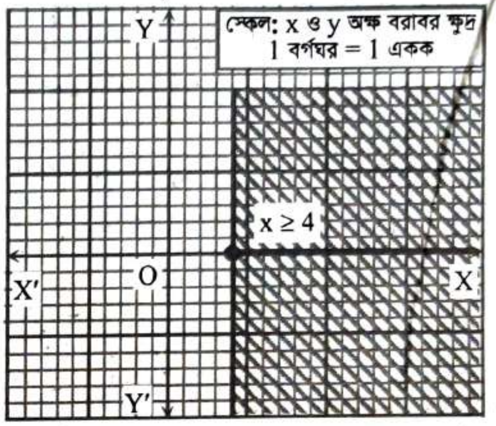
$x^2 - 5x > 6$ অসমতাটি সত্য হবে যখন $x < -1$ বা, $x > 6$ হয়

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(-\infty, -1)$ অথবা, $(6, \infty)$

(ii) $\dfrac{x}{x-2} \le 2$

বা, $2x - 4 \ge x$

বা, $x \ge 4$



লেখচিত্র হতে পাই,

$\dfrac{x}{x-2} \le 2$ অসমতাটি সত্য হবে যখন, $x \in [4, \infty)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $4 \le x < \infty$

▶ উদাহরণ-4 এর কাজ | পৃষ্ঠা-২৬

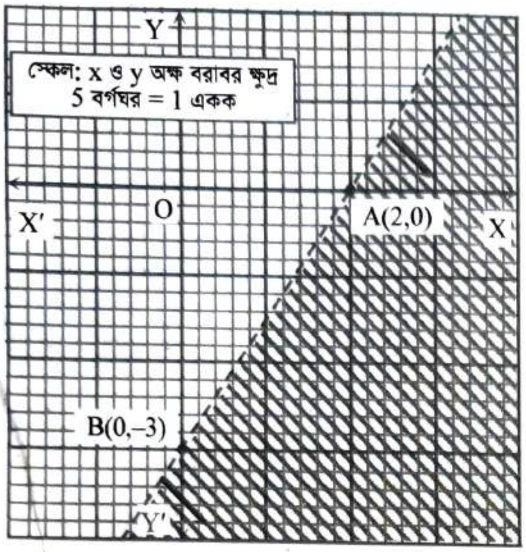
$3x - 2y - 6 > 0$ ও $3x - 2y - 6 < 0$ অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করতে $3x - 2y - 6 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ কল্পনা করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

এখানে, $3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 6$

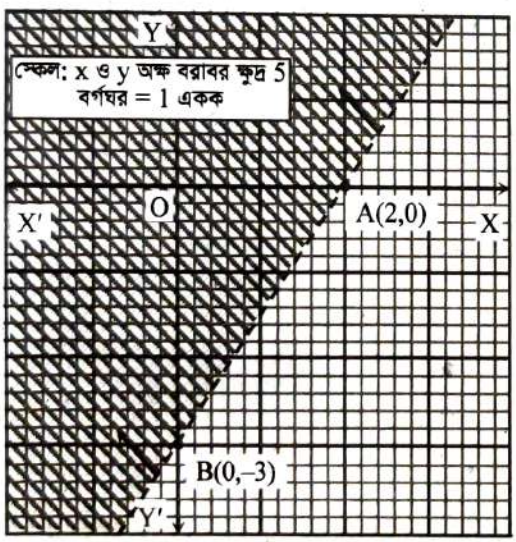
$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

$\left[\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \text{ আকারে সমীকরণটির প্রকাশিত রূপ}\right]$

উক্ত রেখা x-অক্ষকে A(2, 0) এবং y-অক্ষকে B(0, – 3) বিন্দুতে ছেদ করে। ছক কাগজের আনুভূমিক এবং উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি ছোট 5 বর্গাকার ঘর সমান 1 একক ধরে A(2, 0) এবং B(0, – 3) বিন্দু বসিয়ে যোগ করলে $3x - 2y - 6 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। $3x - 2y - 6 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র নির্ণয় করতে মূলবিন্দু (0, 0) উক্ত অসমতায় বসিয়ে পাই $-6 > 0$, যা সত্য নয়। সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র, $3x - 2y - 6 = 0$ সমীকরণ রেখাটির যে পাশে মূল বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।



আবার $3x - 2y - 6 < 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র নির্ণয় করতে মূলবিন্দু (0, 0) উক্ত অসমতায় বসিয়ে পাই $-6 < 0$, যা সত্য। অতএব, $3x - 2y - 6 < 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র, $3x - 2y - 6 = 0$ সমীকরণ রেখাটির যে পাশে মূল বিন্দু আছে, সে পাশের অঞ্চল।



উদাহরণ-5 এর কাজ | পৃষ্ঠা-২৬

প্রদত্ত অসমতা $2(x - 5) > 8$

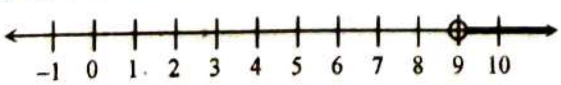
বা, $x - 5 > 4$ [অসমতা চিহ্নের উভয়পাশে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x > 4 + 5$

$\therefore x > 9$

$\therefore$ **সমাধান সেট:** $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 9\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



উদাহরণ-৪ এর কাজ | পৃষ্ঠা-২৯

সমাধান: প্রদত্ত অসমতাদ্বয়

$2x + y - 8 > 0$ .... (i)

$3x - 2y + 12 > 0$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই, $2x + y - 8 = 0$

বা, $2x + y = 8$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1 \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ আকারে}\right]$

(ii) নং হতে পাই, $3x - 2y + 12 = 0$

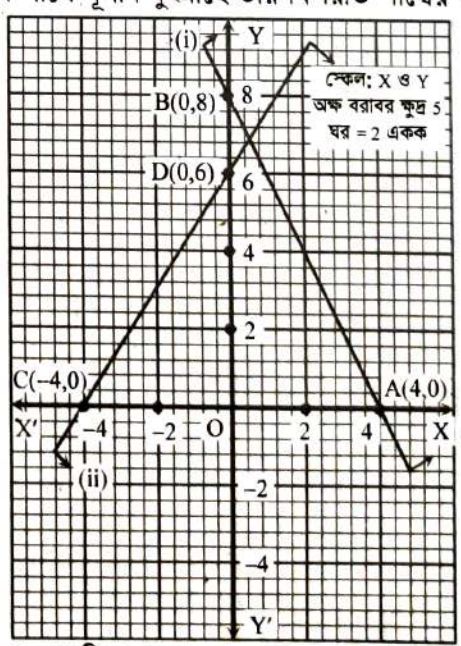
বা, $3x - 2y = -12$ বা, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$ $\therefore \frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক রেখা বরাবর XOX' কে x-অক্ষ এবং উলম্ব রেখা বরাবর YOY' কে y-অক্ষ ধরে ছক কাগজের প্রতি ছোট 5 বর্গঘর সমান 2 একক ধরে A(4, 0) এবং B(0, 8) বিন্দু স্থাপন করে যোগ করলে $2x + y - 8 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। আবার C(–4, 0) এবং D(0, 6) বিন্দু স্থাপন করে যোগ করলে $3x - 2y + 12 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।

(0, 0) বিন্দু $2x + y - 8 > 0$ অসমতায় বসিয়ে পাই,

$0 + 0 - 8 > 0$ বা $-8 > 0$ যা সত্য নয়।

$\therefore 2x + y - 8 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $2x + y - 8 = 0$ রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পার্শ্বের অঞ্চল।



আবার, (0, 0) বিন্দু $3x - 2y + 12 > 0$ অসমতায় বসিয়ে পাই,

$12 > 0$, যা সত্য।

$\therefore$ $3x - 2y + 12 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $3x - 2y + 12 = 0$ রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে, সে পার্শ্বের অঞ্চল। চিত্রে লেখচিত্র রেখাদ্বয় বাদে অসমতা দুইটির সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

অনুশীলনী-1(B) এর সমাধান

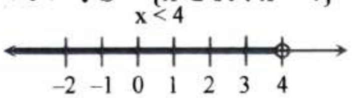
1. (i) $(x-2) < 2$

বা, $x - 2 + 2 < 2 + 2$ [অসমতার উভয় পাশে 2 যোগ করে]

বা, $x < 4$

নির্ণেয় সমাধান সেট : $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$

সংখ্যারেখা:



(ii) $7 + 6x - x^2 < 0$

বা, $-(x^2 - 6x - 7) < 0$

বা, $x^2 - 6x - 7 > 0$

বা, $x^2 - 7x + x - 7 > 0$

বা, $x(x-7) + 1(x-7) = 0$

বা, $(x-7)(x+1) > 0$ .... (i)

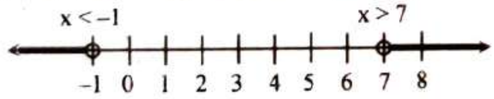
(i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-7)$ এবং $(x+1)$ উভয় ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

$x = -1$ ও 7 সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < 7$ ও $x > 7$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-7)$ এর চিহ্ন	$(x+1)(x-7)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−	+
$-1 < x < 7$	+	−	−
$x > 7$	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান সেট:

$S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 7\}$



(iii) প্রদত্ত অসমতা, $x^2 - 9x + 8 > 0$

বা, $x^2 - 8x - x + 8 > 0$

বা, $x(x-8) - 1(x-8) > 0$

বা, $(x-8)(x-1) > 0$.......... (i)

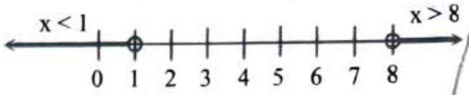
(i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-8)$ এবং $(x-1)$ এর মধ্যে প্রত্যেকটির চিহ্ন ধনাত্মক অথবা প্রত্যেকটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

$x = 1$ ও 8 সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 1$, $1 < x < 8$ ও $x > 8$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-8)$ এর চিহ্ন	$(x-8)(x-1)$ এর চিহ্ন
$x < 1$	−	−	+
$1 < x < 8$	+	−	−
$x > 8$	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1$ অথবা $x > 8\}$

সংখ্যারেখা:



(iv) প্রদত্ত অসমতা, $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

বা, $2x^2 - 2x - x + 1 \geq 0$

বা, $2x(x-1) - 1(x-1) \geq 0$

বা, $(x-1)(2x-1) \geq 0$ .... (i)

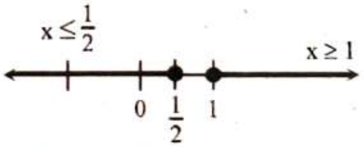
(i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-1)$ এবং $(2x-1)$ এর উভয় ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

$x = \frac{1}{2}$ ও 1 সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$ ও $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(2x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-1)(2x-1)$ এর চিহ্ন
$x < \frac{1}{2}$	−	−	+
$\frac{1}{2} < x < 1$	−	+	−
$x > 1$	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}$ অথবা $x \geq 1\}$

সংখ্যারেখা:



(v) $(2x+1)(x-1)(x-3) \leq 0$

$\Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-3) \leq 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-3) \leq 0$ .... (i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $(x-1)$ এবং $(x-3)$ এর তিনটির চিহ্নই ঋণাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

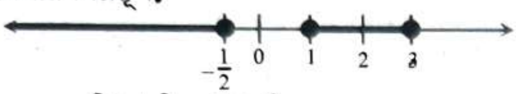
শর্ত	$\left(x + \frac{1}{2}\right)$ এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-3)$ এর চিহ্ন
$x < -\frac{1}{2}$	−	−	−	−
$-\frac{1}{2} < x < 1$	+	−	−	+
$1 < x < 3$	+	+	−	−
$x > 3$	+	+	+	+

$\therefore$ (i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $x \leq -\frac{1}{2}$ অথবা $1 \leq x \leq 3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \leq -\frac{1}{2}$ অথবা $1 \leq x \leq 3$

নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{2}$ অথবা, $1 \leq x \leq 3\}$

সংখ্যারেখায় নিম্নরূপ:



(vi) প্রদত্ত অসমতা $\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$

বা, $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{x+3}{x-1} < 0$

বা, $\frac{(2x^2+3x-2x-3)-(x^2-9)}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{2x^2+x-3-x^2+9}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{x^2+x+6}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{x^2+2.\frac{1}{2}.x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+6-\frac{1}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$ ……… (i)

এখানে, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4} > 0$

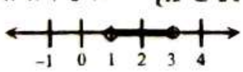
$\therefore$ $(x-3)$ ও $(x-1)$ এর মধ্যে একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হলে (i) অসমতাটির শর্ত সিদ্ধ করে।

শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$(x-3)(x-1)$ এর চিহ্ন
$x < 1$	$-$	$-$	$+$
$1 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ (i) অসমতাটি সত্য হবে যদি $1 < x < 3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$

সংখ্যারেখা:



(vii) দেওয়া আছে, $\frac{x-2}{x} > \frac{x+1}{x+2}$

বা, $\frac{x-2}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0$

বা, $\frac{(x-2)(x+2)-x(x+1)}{x(x+2)} > 0$

বা, $\frac{x^2-4-x^2-x}{x(x+2)} > 0$

বা, $\frac{-x-4}{x(x+2)} > 0$

প্রদত্ত অসমতাটি $x = 0$ এবং $x = -2$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত।

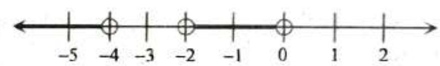
$x = -4, -2, 0$ সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -4$, $-4 < x < -2$, $-2 < x < 0$ এবং $x > 0$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$-x-4$ এর চিহ্ন	x এর চিহ্ন	$x+2$ এর চিহ্ন	$\frac{-x-4}{x(x+2)}$ এর চিহ্ন
$x < -4$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-4 < x < -2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-2 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x > 0$	$-$	$+$	$+$	$-$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < -4$ অথবা $-2 < x < 0, x \in \mathbb{R}$.

সমাধান সেট : $\{x : x \in \mathbb{R}, x < -4$ অথবা $-2 < x < 0\}$

সংখ্যারেখায়:



2. (i) $(x+2)\left(x+\frac{3}{4}\right) \geq 0$ ………………… (i)

$x = -2$ ও $-\frac{3}{4}$ সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -2$, $-2 < x < -\frac{3}{4}$ ও $x > -\frac{3}{4}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$(x+2)$ এর চিহ্ন	$(x+\frac{3}{4})$ এর চিহ্ন	$(x+2)(x+\frac{3}{4})$ এর চিহ্ন
$x < -2$	$-$	$-$	$+$
$-2 < x < -\frac{3}{4}$	$+$	$-$	$-$
$x > -\frac{3}{4}$	$+$	$+$	$+$

আবার $x = -2$ অথবা $x = -\frac{3}{4}$ হলে (1) নং অসমতা সত্য।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x \leq -2$ অথবা $x \geq -\frac{3}{4}$, সকল $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{x-4}{x-2} - \frac{x-6}{x-3} > 0$ ……… (i).

বা, $\frac{(x-4)(x-3)-(x-2)(x-6)}{(x-2)(x-3)} > 0$

বা, $\frac{x^2-4x-3x+12-x^2+8x-12}{(x-2)(x-3)} > 0$

বা, $\frac{x}{(x-2)(x-3)} > 0$

$x = 0, 2, 3$ সংখ্যাগুলি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x < 3$ এবং $x > 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	x এর চিহ্ন	(x – 2) এর চিহ্ন	(x – 3) এর চিহ্ন	$\frac{x}{(x-2)(x-3)}$ এর চিহ্ন
$x < 0$	–	–	–	–
$0 < x < 2$	+	–	–	+
$2 < x < 3$	+	+	–	–
$x > 3$	+	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান: $0 < x < 2$ অথবা $x > 3$, সকল $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\frac{(2x-3)(x-1)^2}{x+1} < 0$ .... (i)

(i) নং অসমতার (x – 1) রাশিটি পূর্ণ বর্গ হওয়ায় সর্বদাই $(x-1)^2 \geq 0$ কিন্তু (i) নং অসমতা < 0 হওয়ায় $x \neq 1$

(i) নং অসমতা সত্য হতে হলে অপর দুইটি রাশি (2x – 3) এবং (x + 1) এর যে কোন একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

$x = -1$ ও $\frac{3}{2}$ সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < \frac{3}{2}$ ও $x > \frac{3}{2}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	(2x – 3) এর চিহ্ন	(x + 1) এর চিহ্ন	(2x – 3) (x + 1) এর চিহ্ন
$x < -1$	–	–	+
$-1 < x < \frac{3}{2}$	–	+	–
$x > \frac{3}{2}$	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান, $-1 < x < \frac{3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ এবং $x \neq 1$

(iv) $\frac{2x+1}{3x-1} < \frac{3x+1}{2x-1}$

বা, $\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{3x+1}{2x-1} < 0$

বা, $\frac{(4x^2-1)-(9x^2-1)}{(3x-1)(2x-1)} < 0$

বা, $\frac{-5x^2}{(3x-1)(2x-1)} < 0$

বা, $\frac{5x^2}{(3x-1)(2x-1)} > 0$ .... (i)

$x = 0, \frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ সংখ্যাত্রয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 0$, $0 < x < \frac{1}{3}$, এ $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ ও $x > \frac{1}{2}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	x^2 এর চিহ্ন	(3x – 1) এর চিহ্ন	(2x – 1) এর চিহ্ন	$\frac{5x^2}{(3x-1)(2x-1)}$ এর চিহ্ন
$x < 0$	+	–	–	+
$0 < x < \frac{1}{3}$	+	–	–	+
$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$	+	+	–	–
$x > \frac{1}{2}$	+	+	+	+

$\therefore x < 0$ অথবা $0 < x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$ এর জন্য (1) নং অসমতা সত্য।

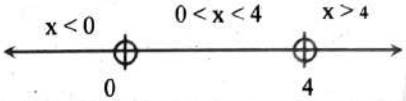
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < 0$ অথবা $0 < x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$

3. (i) প্রদত্ত অসমতা, $x^2 \leq 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x \leq 0$

$\Rightarrow x(x-4) \leq 0$ ... ... (i)

$x = 0, 4$ সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 0$, $0 < x < 4$ এবং $x > 4$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।



শর্ত	x-এর চিহ্ন	(x – 4) এর চিহ্ন	x(x – 4) এর চিহ্ন
$x < 0$	–	–	+
$0 < x < 4$	+	–	–
$x > 4$	+	+	+

$0 < x < 4$ ব্যবধিতে (i) নং অসমতাটি সত্য হয়

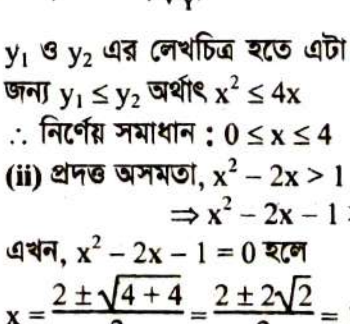
আবার, $x = 0$ এবং $x = 4$ এর জন্যও অসমতাটি সত্য।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $0 \leq x \leq 4$.

বিকল্প সমাধান:

প্রদত্ত অসমতা, $x^2 \leq 4x$

ধরি, $y_1 = x^2$ এবং $y_2 = 4x$



y_1 ও y_2 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $x \in [0, 4]$ এর জন্য $y_1 \leq y_2$ অর্থাৎ $x^2 \leq 4x$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $0 \leq x \leq 4$

(ii) প্রদত্ত অসমতা, $x^2 - 2x > 1$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0$

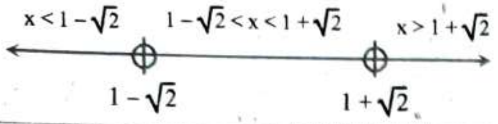
এখন, $x^2 - 2x - 1 = 0$ হলে

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\Rightarrow \{x - (1+\sqrt{2})\}\{x - (1-\sqrt{2})\} > 0$

এখন, $x = 1 + \sqrt{2} = 2.4142$ ও $x = 1 - \sqrt{2} = -0.4142$

সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 1 - \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ এবং $x > 1 + \sqrt{2}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে



শর্ত	$\{x-(1+\sqrt{2})\}$ এর চিহ্ন	$\{x-(1-\sqrt{2})\}$ এর চিহ্ন	$\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}$ এর চিহ্ন
$x < 1-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$+$
$1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$	$-$	$+$	$-$
$x > 1+\sqrt{2}$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ $x < 1 - \sqrt{2}$ অথবা $x > 1 + \sqrt{2}$ হলে (ii) নং অসমতাটি সত্য হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < 1 - \sqrt{2}$ অথবা, $x > 1 + \sqrt{2}$

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা $x^2 - 2x > 1$

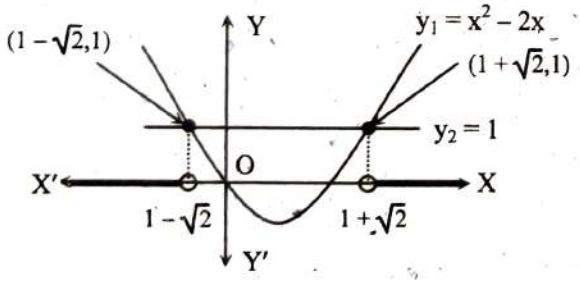
ধরি, $y_1 = x^2 - 2x$ এবং $y_2 = 1$

এখন, $y_1 = y_2$ হবে যখন

$x^2 - 2x = 1$

বা, $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$



y_1 ও y_2 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $x < 1 - \sqrt{2}$ অথবা $x > 1 + \sqrt{2}$ এর জন্য $y_1 > y_2$ অর্থাৎ $x^2 - 2x > 1$ বা, $x^2 - 2x$ এর লেখচিত্র $y = 1$ এর লেখচিত্রের ওপরে অবস্থিত।

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান :** $x < 1 - \sqrt{2}$ **অথবা** $x > 1 + \sqrt{2}$

(iii) প্রদত্ত অসমতা: $x^2 + 4 \le 4x$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 \le 0$$
$$\Rightarrow (x-2)^2 < 0$$

এখানে, $(x-2)^2 < 0$ **সম্ভব নয়, কারণ বর্গ সর্বদাই অঋণাত্মক।**

$\therefore (x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান** $x = 2$.

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা, $x^2 + 4 \le 4x$

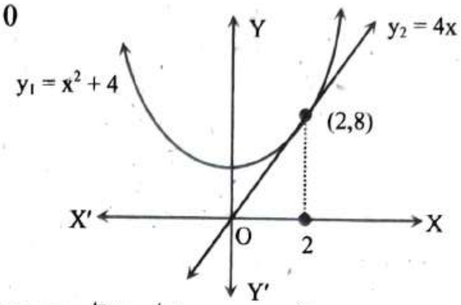
ধরি, $y_1 = x^2 + 4$ এবং $y_2 = 4x$

এখন, $y_1 = y_2$ হবে, যখন

$x^2 + 4 = 4x$

বা, $(x-2)^2 = 0$

$\therefore x = 2, 2$



y_1 ও y_2 এর লেখ হতে এটা স্পষ্ট যে, $y_1 = x^2 + 4$ পরাবৃত্তের লেখ কখনই $y_2 = 4x$ রেখার লেখের নিচে অবস্থান করে না। এবং $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং $y_1 \le y_2$ অর্থাৎ $x^2 + 4 \le 4x$ লেখের সমাধান $x = 2$

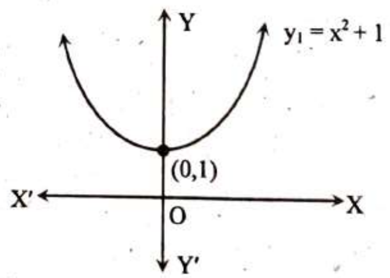
(iv) প্রদত্ত অসমতা, $x^2 + 1 < 0 \Rightarrow x^2 < -1$

কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং অসমতাটির কোন বাস্তব সমাধান নাই।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান = { }

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা, $x^2 + 1 < 0$



ধরি, $y_1 = x^2 + 1$, $y_2 = 0$

$y_1 = x^2 + 1$ এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $y_1 = x^2 + 1$ পরাবৃত্তের লেখের কোনো অংশই $y_2 = 0$ এর নিচে অবস্থিত নয়।

সুতরাং $y_1 < y_2$ অর্থাৎ $x^2 + 1 < 0$ অসমতার সমাধান নেই।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: { }

(v) প্রদত্ত অসমতা, $2x^2 \le 4 - x$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 4 \le 0$$

এখন, $2x^2 + x - 4 = 0$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.2(-4)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

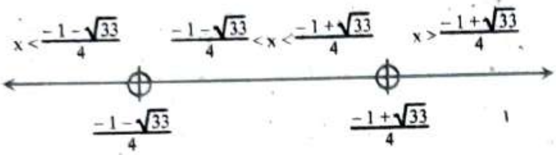
$\therefore 2x^2 + x - 4 \le 0$

$$\Rightarrow \left\{x - \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{33})\right\}\left\{x - \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{33})\right\} \le 0 \ldots \text{(i)}$$

এখন, $x = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{4} = -1.6861$

ও $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} = 1.1861$

সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$, $\frac{-1-\sqrt{33}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ এবং $x > \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।



শর্ত	$\left\{x-\frac{1}{4}(-1+\sqrt{33})\right\}$ এর চিহ্ন	$\left\{x-\frac{1}{4}(-1-\sqrt{33})\right\}$ এর চিহ্ন	$\left\{x-\frac{1}{4}(-1+\sqrt{33})\right\}\left\{x-\frac{1}{4}(-1-\sqrt{33})\right\}$ এর চিহ্ন
$x < \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$	−	−	+
$\frac{-1-\sqrt{33}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$	−	+	−
$x > \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$	+	+	+

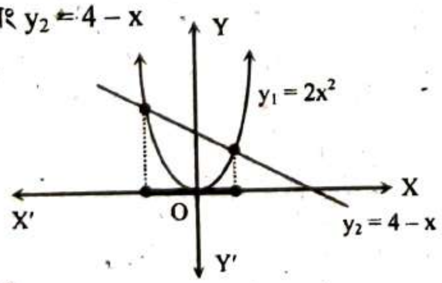
$\frac{-1-\sqrt{33}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ এর জন্য (i) নং অসমতাটি সত্য।

আবার, $x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ ও $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ এর জন্যও অসমতাটি সত্য।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{-1-\sqrt{33}}{4} \le x \le \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা, $2x^2 \le 4 - x$

ধরি, $y_1 = 2x^2$ এবং $y_2 = 4 - x$



এখন, $y_1 = y_2$ হবে,

যখন $2x^2 = 4 - x$

বা, $2x^2 + x - 4 = 0$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.2(-4)}}{2.2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$

y_1 ও y_2 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, সকল $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right]$ এর জন্য $y_1 \le y_2$ অর্থাৎ $2x^2 \le 4 - x$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{-1-\sqrt{33}}{4} \le x \le \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(vi) প্রদত্ত অসমতা: $x^2 \ge |x|$

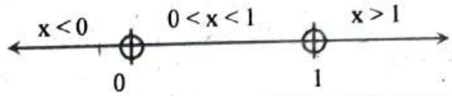
$x \ge 0$ হলে, $|x| = x$

$\therefore$ অসমতাটি, $x^2 \ge x$

$\Rightarrow x^2 - x \ge 0$

$\Rightarrow x(x-1) \ge 0$ ... ... (i)

$x = 0$ ও 1 সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < 0, 0 < x < 1$ এবং $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।



শর্ত	x এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$x(x-1)$ এর চিহ্ন
$x < 0$	−	−	+
$0 < x < 1$	+	−	−
$x > 1$	+	+	+

$\therefore x < 0$ অথবা $x > 1$ হলে (i) নং অসমতাটি সত্য হয়।

আবার, $x = 0$ ও $x = 1$ হলেও অসমতাটি সত্য হয়।

$\therefore$ এক্ষেত্রে সমাধান: $x \le 0$ অথবা, $x \ge 1$

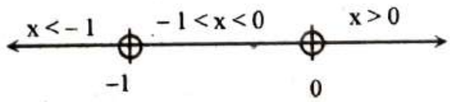
আবার, $x < 0$ হলে, $|x| = -x$

$\therefore$ অসমতাটি, $x^2 \ge -x$

$\Rightarrow x^2 + x \ge 0$

$\Rightarrow x(x+1) \ge 0$ ... ... (ii)

$x = 0$ এবং $x = -1$ সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < 0$ এবং $x > 0$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে



শর্ত	x এর চিহ্ন	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$x(x+1)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−	+
$-1 < x < 0$	−	+	−
$x > 0$	+	+	+

$x < -1$ অথবা, $x > 0$ হলে (ii) নং অসমতাটি সত্য হয়।

আবার, $x = -1$ এবং $x = 0$ হলেও অসমতাটি সত্য হয়।

$\therefore$ এক্ষেত্রে সমাধান: $x \le -1$ অথবা, $x \ge 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান:

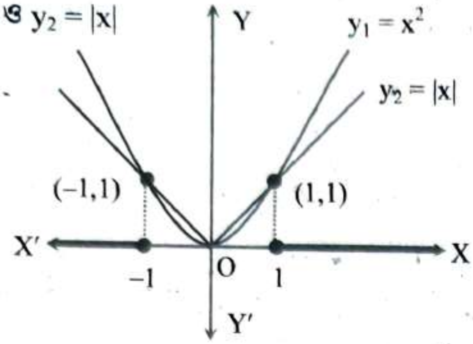
$\{x \le 0$ অথবা, $x \ge 1\} \cup \{x \le -1$ অথবা, $x \ge 0\}$

$= \{x \le -1\} \cup \{x = 0\} \cup \{x \ge 1\}$

$= (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা, $x^2 \geq |x|$

ধরি, $y_1 = x^2$ ও $y_2 = |x|$



লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $x \in (-\infty, -1]$, $x \in [1, \infty)$ এবং $x = 0$ হলে $y_1 \geq y_2$ অর্থাৎ $x^2 \geq |x|$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতার সমাধান: $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$

(vii) প্রদত্ত অসমতা, $5x^2 - 6x - 3 \leq |8x|$

$8x \geq 0$ হলে, অসমতাটি

$5x^2 - 6x - 3 \leq 8x$

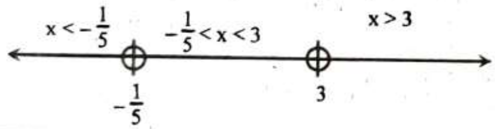
$\Rightarrow 5x^2 - 14x - 3 \leq 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 15x + x - 3 \leq 0$

$\Rightarrow 5x(x - 3) + 1(x - 3) \leq 0$

$\Rightarrow (x - 3)(5x + 1) \leq 0$ ... ... (i)

$x = -\frac{1}{5}$ ও $x = 3$ সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5} < x < 3$ এবং $x > 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।



শর্ত	$(5x + 1)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)(5x + 1)$ এর চিহ্ন
$x < -\frac{1}{5}$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{1}{5} < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

$-\frac{1}{5} < x < 3$ ব্যবধিতে (i) নং অসমতাটি সত্য

আবার, $x = -\frac{1}{5}$ ও $x = 3$ এর জন্যও অসমতাটি সত্য।

$\therefore$ এক্ষেত্রে সমাধান: $-\frac{1}{5} \leq x \leq 3$.

আবার, $8x < 0$ হলে, অসমতাটি

$5x^2 - 6x - 3 \leq -8x$

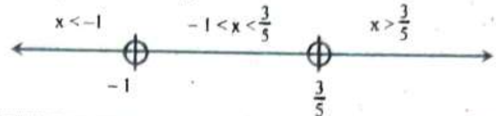
$\Rightarrow 5x^2 + 2x - 3 \leq 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 5x - 3x - 3 \leq 0$

$\Rightarrow 5x(x + 1) - 3(x + 1) \leq 0$

$\Rightarrow (x + 1)(5x - 3) \leq 0$ ... ... (ii)

$x = -1$ ও $\frac{3}{5}$ সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < \frac{3}{5}$ এবং $x > \frac{3}{5}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।



শর্ত	$(x + 1)$ এর চিহ্ন	$(5x - 3)$ এর চিহ্ন	$(x + 1)(5x - 3)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	$-$	$-$	$+$
$-1 < x < \frac{3}{5}$	$+$	$-$	$-$
$x > \frac{3}{5}$	$+$	$+$	$+$

$-1 < x < \frac{3}{5}$ ব্যবধিতে (i) নং অসমতাটি সত্য।

আবার, $x = -1$ ও $x = \frac{3}{5}$ এর জন্যও অসমতাটি সত্য।

$\therefore$ এক্ষেত্রে সমাধান: $-1 \leq x \leq \frac{3}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\left\{-\frac{1}{5} \leq x \leq 3\right\} \cup \left\{-1 \leq x \leq \frac{3}{5}\right\}$

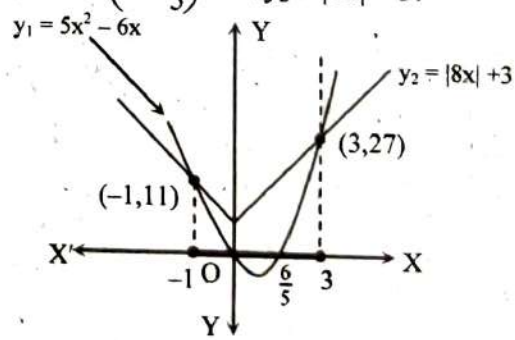
$= -1 \leq x \leq 3$

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা $5x^2 - 6x - 3 \leq |8x|$

বা, $5x^2 - 6x \leq |8x| + 3$

বা, $5x\left(x - \frac{6}{5}\right) \leq |8x| + 3$

ধরি, $y_1 = 5x\left(x - \frac{6}{5}\right)$ এবং $y_2 = |8x| + 3$.



y_1 ও y_2 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $x \in [-1, 3]$ এর জন্য $y_1 \leq y_2$ অর্থাৎ $5x\left(x - \frac{6}{5}\right) \leq |8x| + 3$

বা, $5x^2 - 6x - 3 \leq |8x|$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $-1 \leq x \leq 3$.

(viii) প্রদত্ত অসমতা, $2x - x^2 \geq |x - 1| - 1$

$x - 1 \geq 0$ বা, $x \geq 1$ হলে, $|x - 1| = x - 1$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা, $2x - x^2 \geq x - 1 - 1$

$\Rightarrow 2x - x^2 \geq x - 2$

$\Rightarrow x^2 - 2x \leq -x + 2$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 \le 0$
$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 \le 0$
$\Rightarrow x(x-2) + 1(x-2) \le 0$
$\Rightarrow (x-2)(x+1) \le 0$ ... ... (i)
$x > 1$ এর জন্য দুটি ব্যবধি যথা $1 < x < 2$ এবং $x > 2$ পাওয়া যায়।

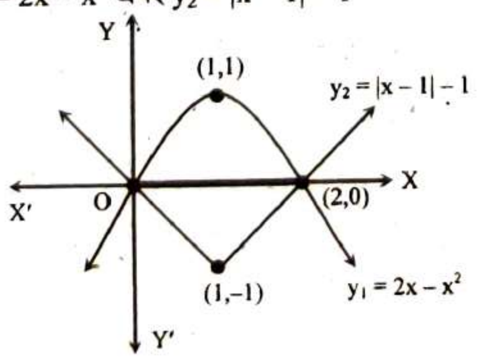
শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-2)$ এর চিহ্ন	$(x+1)(x-2)$ এর চিহ্ন
$1 < x < 2$	+	−	−
$x > 2$	+	+	+

$1 < x < 2$ ব্যবধিতে (i) নং অসমতাটি সত্য হয়।
আবার, $x = 1$ ও 2 এর জন্যও অসমতাটি সত্য হয়।
$\therefore$ এক্ষেত্রে সমাধান: $1 \le x \le 2$
$x - 1 < 0$ বা, $x < 1$ হলে $|x-1| = -(x-1)$
$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা: $2x - x^2 \ge -(x-1) - 1$
$\Rightarrow 2x - x^2 \ge -x$
$\Rightarrow x^2 - 2x \le x$
$\Rightarrow x^2 - 3x \le 0$
$\Rightarrow x(x-3) \le 0$ ... ... (ii)
$x < 1$ এর জন্য দুটি ব্যবধি যথা $x < 0$ এবং $0 < x < 1$ পাওয়া যায়।

শর্ত	x এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$x(x-3)$ এর চিহ্ন
$x < 0$	−	−	+
$0 < x < 1$	+	−	−

$0 < x < 1$ ব্যবধিতে (ii) নং অসমতাটি সত্য হয়।
আবার, $x = 0$ ও $x = 1$ এর জন্যও অসমতাটি সত্য হয়।
$\therefore$ এক্ষেত্রে সমাধান: $0 \le x \le 1$
$\therefore$ প্রদত্ত অসমতাটির সমাধান $= \{1 \le x \le 2\} \cup \{0 \le x \le 1\}$
$= 0 \le x \le 2$

বিকল্প সমাধান: প্রদত্ত অসমতা, $2x - x^2 \ge |x-1| - 1$
ধরি, $y_1 = 2x - x^2$ এবং $y_2 = |x-1| - 1$



y_1 ও y_2 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, সকল $x \in [0, 2]$ এর জন্য $y_1 \ge y_2$ অর্থাৎ $2x - x^2 \ge |x-1| - 1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $0 \le x \le 2$.

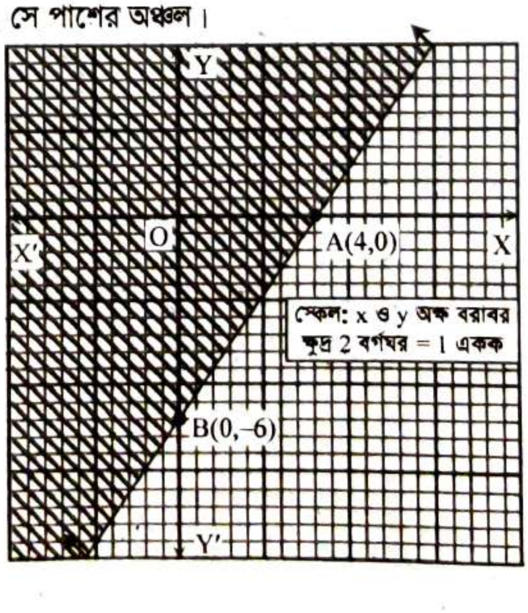
4. $f(x) \le 0$
বা, $x^2 - x \le 0$
বা, $x(x-1) \le 0$ ... ... (i)
(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি x এবং $(x-1)$ এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

$x<0$ | $0<x<1$ | $x>1$
0 1 2

শর্ত	x এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$x(x-1)$ এর চিহ্ন
$x < 0$	−	−	+
$0 < x < 1$	+	−	−
$x > 1$	+	+	+

$\therefore 0 < x < 1$ ব্যবধিতে (i) নং অসমতাটি সত্য হয়।
আবার, $x = 0$ ও $x = 1$ হলেও অসমতাটি সত্য হয়।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $0 \le x \le 1$
$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$

5. (i) প্রদত্ত অসমতা $3x - 2y - 12 \le 0$
উপরের অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন করতে $3x - 2y = 12$ একটি সরলরেখা কল্পনা করে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।
এখানে, $3x - 2y = 12$
বা, $\frac{3x}{12} - \frac{2y}{12} = 1$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$
উক্ত রেখা x অক্ষকে A (4, 0) এবং y অক্ষকে B(0, − 6) বিন্দুতে ছেদ করে। ছক কাগজের আনুভূমিক এবং উলম্ব রেখা বরাবর ক্ষুদ্র 2 বর্গাকার ঘর সমান 1 একক ধরে A(4, 0) এবং B(0, − 6) বিন্দু বসিয়ে যোগ করে $3x - 2y = 12$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।
$3x - 2y \le 12$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র নির্ণয় করতে মূলবিন্দু (0, 0) উক্ত অসমতায় বসিয়ে পাই $0 \le 12$, যা সত্য। সুতরাং উপরোক্ত অসমতা দ্বারা সমাধান সেট হবে $3x - 2y = 12$ রেখাটির লেখচিত্রসহ এর যে পাশে মূলবিন্দু আছে, সে পাশের অঞ্চল।



(ii) প্রদত্ত অসমতা $y - 2x \leq 0$

উপরোক্ত অসমতাকে $y - 2x = 0$ সমীকরণ আকারে লিখে $y = 2x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

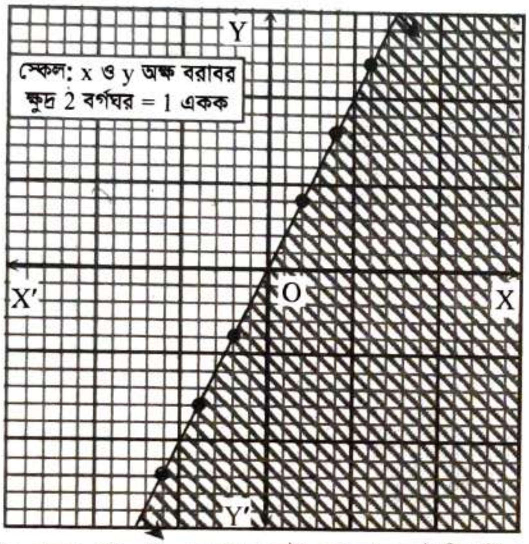
ছক নির্ধারণ :

x	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
y	− 6	− 4	− 2	0	2	4	6

স্কেল নির্ধারণ:

1. x -অক্ষ বরাবর প্রতি ছোট 2 বর্গাকার ঘর = 1 একক
2. y -অক্ষ বরাবর প্রতি ছোট 2 বর্গাকার ঘর = 1 একক

ছক হতে (− 3, − 6), (− 2, − 4), (− 1, − 2), ..., (3, 6) ..... ইত্যাদি বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করে $y = 2x$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।



(1, 0) এবং (0, 1) লেখের দুই পাশের দুইটি বিন্দু নিয়ে অসমতার দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল নির্ণয় করি।

এখন (1, 0) বিন্দুর জন্য $0 - 2.1 \leq 0$ বা, $-2 \leq 0$ যা সত্য এবং (0, 1) বিন্দুর জন্য $1 - 2.0 \leq 0$ বা, $1 \leq 0$, যা সত্য নয়।

$\therefore$ (1, 0) বিন্দুটি $y = 2x$ রেখার যে পাশে অবস্থিত রেখাটিসহ সে পাশের অঞ্চলই উপরোক্ত অসমতার সমাধানকৃত সেটের অংশ।

(iii) প্রদত্ত অসমতা $x - 3y < 0$

উপরোক্ত অসমতাকে সমীকরণ $x - 3y = 0$ আকারে লিখে $x = 3y$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

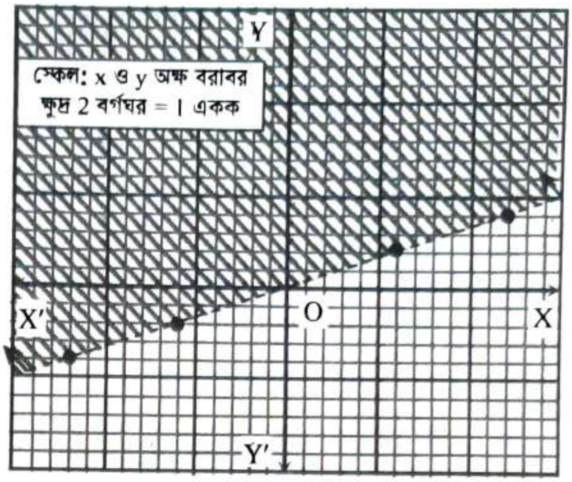
ছক নির্ধারণ :

x	− 6	− 3	0	3	6
y	− 2	− 1	0	1	2

স্কেল নির্ধারণ:

1. x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম প্রতি 2 বর্গাকার ঘর = 1 একক।
2. y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম প্রতি 2 বর্গাকার ঘর = 1 একক।

ছক হতে (− 6, − 2), (− 3, − 1), (0, 0), (3, 1) (6, 2) ইত্যাদি বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজে বসিয়ে যোগ করে $x - 3y = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। (1, 0) এবং (0, 1) লেখের দুই পাশে দুইটি বিন্দু নিয়ে অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল নির্ণয় করি।



এখন (1, 0) বিন্দুর জন্য $1 - 3.0 < 0 \Rightarrow 1 < 0$, যা সত্য নয়।

আবার (0, 1) বিন্দুর জন্য $0 - 3.1 < 0 \Rightarrow -3 < 0$, যা সত্য।

সুতরাং (0, 1) বিন্দুটি লেখের যে পাশে আছে, $x - 3y = 0$ রেখাটির লেখচিত্রে বিন্দুগুলো দ্বারা সংযুক্ত সরলরেখা বাদে সে দিকের অঞ্চল টুকুই প্রদত্ত অসমতার সমাধান অঞ্চল।

6. (i) প্রদত্ত অসমতাদ্বয়,

$5x + 2y - 11 > 0$ ... ... (1)

এবং $7x - 2y - 3 > 0$ ... ... (2)

প্রদত্ত অসমতাদ্বয়কে সমতা আকারে লিখে লেখচিত্র অঙ্কন করি

(1) হতে পাই, $5x + 2y - 11 = 0$

বা, $5x + 2y = 11$

বা, $\frac{5x}{11} + \frac{2y}{11} = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{2}} = 1$ $\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ আকারে}\right]$

(2) হতে পাই,

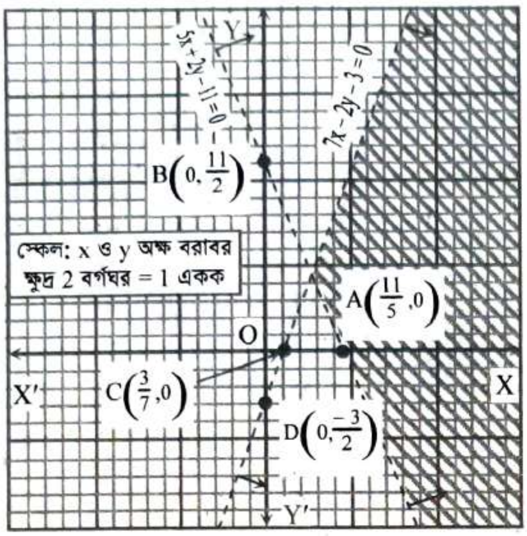
বা, $7x - 2y - 3 = 0$

বা, $7x - 2y = 3$

বা, $\frac{7x}{3} - \frac{2y}{3} = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{3}{7}} + \frac{y}{\frac{-3}{2}} = 1$

উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক এবং উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি ছোট 2 বর্গাকার ঘর = 1 একক ধরে $A\left(\frac{11}{5}, 0\right)$ এবং $B\left(0, \frac{11}{2}\right)$ বিন্দু স্থাপন করে যোগ করে $5x + 2y - 11 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। আবার $C\left(\frac{3}{7}, 0\right)$ এবং $D\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ বিন্দু স্থাপন করে যোগ করে $7x - 2y - 3 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। (0, 0) বিন্দুর জন্য $5.0 + 2.0 - 11 > 0$ বা, $-11 > 0$, যা সত্য নয়।



$\therefore$ $5x + 2y - 11 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $5x + 2y - 11 = 0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, তার বিপরীত পাশের অঞ্চল। $(0, 0)$ বিন্দুর জন্য

$7.0 - 2.0 - 3 > 0$ বা, $-3 > 0$ যা সত্য নয়।

$\therefore$ $7x - 2y - 3 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $7x - 2y - 3 = 0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।

অতএব, অসমতা দুইটির সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধান সেটের লেখচিত্র।

(ii) প্রদত্ত অসমতাদ্বয়

$5x - 3y > 9$ ... ... (1)

$3x - 2y - 5 \geq 0$ ... ... (2)

প্রদত্ত অসমতাদ্বয়কে সমতা আকারে লিখে লেখচিত্র অঙ্কন করি

(1) হতে পাই, $5x - 3y = 9$

$$\text{বা, } \frac{5x}{9} - \frac{y}{3} = 1 \text{ বা, } \frac{x}{\frac{9}{5}} + \frac{y}{-3} = 1$$

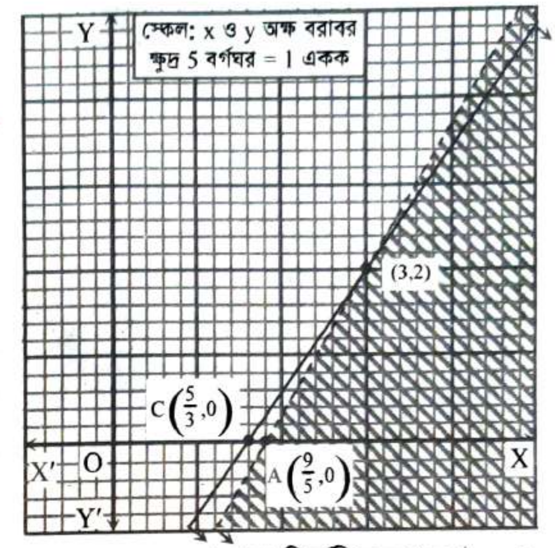
(2) হতে পাই, $3x - 2y - 5 = 0$

$$\text{বা, } 3x - 2y = 5$$

$$\text{বা, } \frac{3x}{5} - \frac{2y}{5} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{-\frac{5}{2}} = 1$$

উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক ও উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি ছোট 5 বর্গাকার ঘর = 1 একক ধরে $A\left(\frac{9}{5}, 0\right)$ এবং $B(0, -3)$ বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $5x - 3y = 9$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। আবার $C\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ এবং $\left(0, \frac{-5}{2}\right)$ বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $3x - 2y - 5 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। $(0, 0)$ বিন্দুর জন্য $5.0 - 3.0 > 9$ বা, $0 > 9$, যা সত্য নয়।



$\therefore$ $5x - 3y > 9$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $5x - 3y = 9$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটি বাদে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।

আবার, $(0, 0)$ বিন্দুর জন্য $3.0 - 2.0 - 5 \geq 0 \Rightarrow -5 \geq 0$, যা সত্য নয়। $\therefore$ $3x - 2y - 5 \geq 0$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $3x - 2y - 5 = 0$ রেখাটিসহ এর যে পাশে মূলবিন্দু আছে, তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।

অতএব, লেখচিত্রে অসমতা দুইটি দ্বারা সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই উপরোক্ত অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

(iii) প্রদত্ত অসমতাদ্বয় $x - 3y < 6$ ... ... (1)

এবং $3x + y < -2$ ... ... (2)

প্রদত্ত অসমতাদ্বয়কে সমতা আকারে লিখে লেখচিত্র অঙ্কন করি

(1) হতে পাই, $x - 3y = 6$

$$\text{বা, } \frac{x}{6} - \frac{3y}{6} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$$

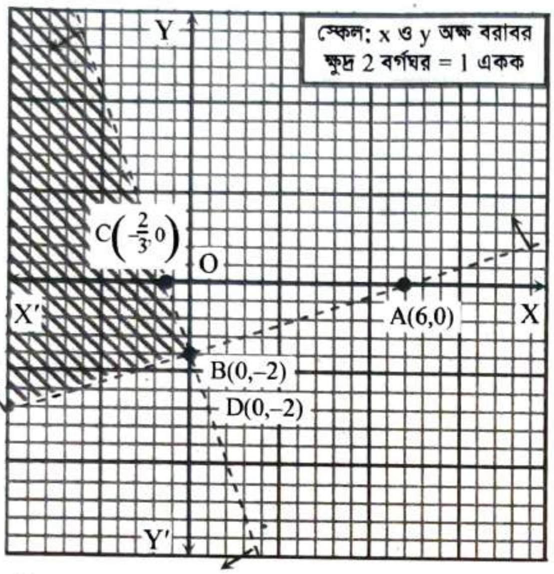
$$\text{বা, } \frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1 \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ আকারে}\right]$$

(2) হতে পাই, $3x + y = -2$

$$\text{বা, } \frac{3x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1 \text{ বা, } \frac{x}{\frac{-2}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$$

উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য লেখ কাগজের আনুভূমিক ও উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি ছোট 2 বর্গাকার ঘর = 1 একক ধরে $A(6, 0)$ এবং $B(0, -2)$ বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $x - 3y = 6$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। আবার $C\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ এবং $D(0, -2)$

বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $3x + y = -2$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। B এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক মূলত একই বিন্দু।



(0, 0) বিন্দুর জন্য $0 - 3.0 < 6$ বা, $0 < 6$, যা সত্য

$\therefore$ $x - 3y < 6$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $x - 3y = 6$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে রেখাটি বাদে সে পাশের অঞ্চল।

আবার, (0, 0) বিন্দুর জন্য $3.0 + 0 < -2$ বা, $0 < -2$, যা সত্য নয়।

$\therefore$ $3x + y < -2$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $3x + y = -2$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে রেখাটি বাদে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল। অতএব লেখচিত্রে অসমতা দুইটি দ্বারা সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই উপরোক্ত অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

(iv) প্রদত্ত অসমতাদ্বয়

$2x - 3y \geq 1$ .... (1)

এবং $2x + 3y \leq 7$ .... (2)

(1) হতে পাই, $2x - 3y = 1$

বা, $\frac{2x}{1} - \frac{3y}{1} = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1$

(2) হতে পাই, $2x + 3y = 7$

বা, $\frac{2x}{7} + \frac{3}{7}y = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{\frac{7}{3}} = 1$

উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক ও উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি 6 বর্গ ঘর সমান 1 একক ধরে $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং $B\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $2x - 3y = 1$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। আবার $C\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ এবং $D\left(0, \frac{7}{3}\right)$ বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $2x + 3y = 7$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।

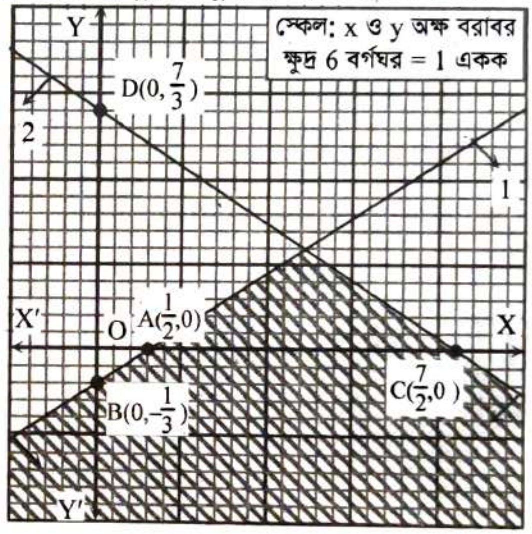
(0, 0) বিন্দুর জন্য $2.0 - 3.0 \geq 1$ বা, $0 \geq 1$ যা সত্য নয়।

$\therefore$ $2x - 3y \geq 1$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $2x - 3y = 1$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটিসহ তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।

আবার, (0, 0) বিন্দুর জন্য $2.0 + 3.0 \leq 7$ বা, $0 \leq 7$, যা সত্য।

$\therefore$ $2x + 3y \leq 7$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $2x + 3y = 7$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটি সহ সেই পাশের অঞ্চল।

অতএব, লেখচিত্রে অসমতা দুইটি দ্বারা সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই উপরোক্ত অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।



▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর

1. **ক; ব্যাখ্যা:** $0.\dot{1}\dot{2}$ সংখ্যাটি $\frac{4}{33}$ আকারে লেখা যায় যা মূলদ সংখ্যা।
2. **খ; 3. গ;**
4. **ঘ; ব্যাখ্যা:** সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সেটকে বাস্তব সংখ্যার সেট বলা হয়। $\therefore$ $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
5. **ঘ; ব্যাখ্যা:** বৃত্তের পরিধি = $2\pi \times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ। যেহেতু, বৃত্তের ব্যাসার্ধ স্বাভাবিক সংখ্যা, সেহেতু বৃত্তের ব্যাসার্ধের সাথে π (অমূলদ সংখ্যা) গুণ করলে সবসময় অমূলদ সংখ্যাই পাওয়া যাবে।
6. **ঘ; 7. ক; 8. গ;**
9. **গ; ব্যাখ্যা:** $|3x - 7| \leq 5$

   বা, $-5 \leq 3x - 7 \leq 5$

   বা, $2 \leq 3x \leq 12$ $\therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 4$
10. **গ;**
11. **খ; ব্যাখ্যা:** $\big||6 - 11| - 5 + |7 - 4|\big|$

    $= |5 - 5 + 3| = |3| = 3$

12. ঘ; ব্যাখ্যা: $5x - 3 \leq 3x + 5$ বা, $2x \leq 8 \therefore x \leq 4$

13. ক; ব্যাখ্যা: $e^{\ln 5}.e^{\ln 4} = 5.4 = 20$

14. গ; ব্যাখ্যা: $\ln e = 1$; মূলদ সংখ্যা

15. গ; ব্যাখ্যা: 4.27522752 ....

$= 4.\dot{2}75\dot{2} = \frac{42752 - 4}{9999} = \frac{42748}{9999}$

16. খ; 17. ঘ; 18. ঘ;

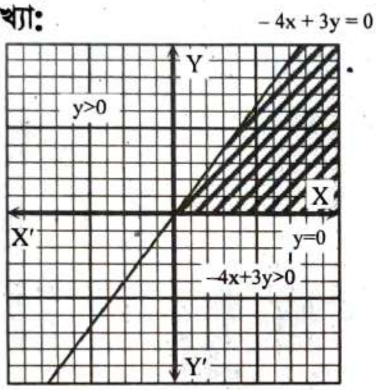
19. গ; ব্যাখ্যা: $|x - 3| < 7$

বা, $-7 < x - 3 < 7$

$\therefore -4 < x < 10$

20. খ; 21. খ;

22. ক; ব্যাখ্যা:



23. গ; 24. খ; 25. ক; 26.ক; 27. ঘ; 28. গ;

29. গ; ব্যাখ্যা: (ii) সঠিক নয়। কারণ, P এর ইনফিমাম 2. ফলে এর নিম্নসীমা অবশ্যই 2 অথবা 2 এর থেকে ছোট হবে।

30. গ;

31. গ; ব্যাখ্যা: (i) সঠিক নয়। কারণ, A সেটের সুপ্রিমাম নেই কিন্তু B সেটের সুপ্রিমাম 1।

32. ক; 33. ঘ;

34. গ; ব্যাখ্যা: (ii) সঠিক নয়। কারণ, প্রদত্ত সেটের ইনফিমাম = $\sqrt[3]{8} = 2$।

35. ঘ; 36. খ;

37. ক; ব্যাখ্যা: $x^2 - 10x + 21 < 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x - 3x + 21 < 0$

$\Rightarrow (x - 7)(x - 3) < 0$

$\therefore 3 < x < 7$

$\therefore S = (3, 7)$

$\therefore \text{Inf } S = 3$ এবং $\sup S = 7$

38. ক;

39. ঘ; ব্যাখ্যা: $3x^2 - 16x + 5 < 0$

বা, $(x - 5)(3x - 1) < 0$

$\therefore x - 5 < 0$ এবং $3x - 1 > 0$

বা, $x < 5$ এবং $x > \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3} < x < 5$

40. খ;

41. ঘ; ব্যাখ্যা: $|2x + 5| > 6$ অসমতাটির ক্ষেত্রে,

$\therefore 2x + 5 > 6$	$2x + 5 < -6$
বা, $2x > 1$	বা, $2x < -11$
$\therefore x > \frac{1}{2}$	$\therefore x < -\frac{11}{2}$

নির্ণেয় সমাধান: $x < -\frac{11}{2}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$

42. ক;

43. গ; ব্যাখ্যা: $|2x - 6| > 2x$

$(2x - 6)$ ঋণাত্মক হলে $|2x - 6| > 2x$ হবে।

$-(2x - 6) > 2x$

বা, $2x - 6 < -2x$

বা, $2x + 2x < 6$

বা, $x < \frac{6}{4} \therefore x < 1.5$

44. ক; ব্যাখ্যা: $|2x - 6| < x + 3$

$\Rightarrow -(x + 3) < 2x - 6 < x + 3$

$\Rightarrow -x - 3 + 6 < 2x < x + 3 + 6$

$\Rightarrow -x + 3 < 2x < x + 9$

হয়, $2x > -x + 3$ অথবা, $2x < x + 9$

$\Rightarrow 3x > 3$ বা, $2x - x < x - x + 9$

$\therefore x > 1$ $\therefore x < 9$

45. গ; 46. ঘ;

47. ক; ব্যাখ্যা: সংখ্যারেখা হতে পাই,

$-1 < x < 4$

$\Rightarrow -1 - \frac{3}{2} < x - \frac{3}{2} < 4 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

$\therefore \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{5}{2}$

48. গ; 49. ঘ; 50. ঘ; 51.ঘ; 52.ক; 53.ঘ;

54. খ; ব্যাখ্যা: $|5 - 2x| \geq 4$

বা, $5 - 2x \geq 0$ হলে, $5 - 2x \geq 4$

বা, $-2x \geq -1 \therefore x \leq \frac{1}{2}$

আবার, $5 - 2x < 0$ হলে, $-(5 - 2x) \geq 4$

বা, $5 - 2x \leq -4 \therefore x \geq \frac{9}{2}$

$\therefore$ সমাধান সেট = $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}$ অথবা $x \geq \frac{9}{2}\}$

$= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$

55. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{x + 4}{x + 3} - \frac{x - 6}{x - 7} > 0$

বা, $\frac{(x + 4)(x - 7) - (x - 6)(x + 3)}{(x + 3)(x - 7)} > 0$

বা, $\frac{-10}{(x + 3)(x - 7)} > 0$

বা, $(x + 3)(x - 7) < 0$

$\therefore -3 < x < 7$

56. গ; ব্যাখ্যা: $|3x - 1| < 2$
বা, $-2 < 3x - 1 < 2$
বা, $-2 + 1 < 3x < 2 + 1$
বা, $-1 < 3x < 3$
$\therefore\ -\frac{1}{3} < x < 1$ বা, $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

57. ক; ব্যাখ্যা: $\left|2x - \frac{1}{3}\right| < 2$
বা, $-2 < 2x - \frac{1}{3} < 2$
বা, $-2 + \frac{1}{3} < 2x < 2 + \frac{1}{3}$
বা, $-\frac{5}{3} < 2x < \frac{7}{3}$
$\therefore\ -\frac{5}{6} < x < \frac{7}{6}$ বা, $\left(-\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)$

58. খ; ব্যাখ্যা: $|2x - 5| < 3$
বা, $-3 < 2x - 5 < 3$
বা, $-3 + 5 < 2x < 3 + 5$
বা, $2 < 2x < 8\ \therefore 1 < x < 4$

59. গ; ব্যাখ্যা: $-3 < x < 9$ এখানে, $\frac{9-3}{2} = 3$
বা, $-3 - 3 < x - 3 < 9 - 3$ [3 বিয়োগ করে]
বা, $-6 < x - 3 < 6\ \therefore |x - 3| < 6$

60. খ; ব্যাখ্যা: $(x^2 - 1)(x - 2) > 0$
যখন $-1 < x < 1$ হয়, $x^2 - 1 < 0$ এবং $x - 2 < 0$
বা, $(x^2 - 1)(x - 2) > 0$
আবার, যখন $x > 2$ হয়, $x^2 - 1 > 0$ এবং $x - 2 > 0$
বা, $(x^2 - 1)(x - 2) > 0$
$\therefore\ -1 < x < 1, x > 2$

61. গ; ব্যাখ্যা: $A = \{x : 0 < x \le 10\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$B = \{x : 3x + 1 \le 20\}$
$= \{x : -20 \le 3x + 1 \le 20\}$
$= \{x : -21 \le 3x \le 19\} = \{x : -7 \le x \le \frac{19}{3}\}$
$\therefore\ B = \{x : -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
এবং $C = \{x : x^2 > 31\}$
অর্থাৎ $x = 5$, হলে, $x^2 < 31$ এবং $x = 6$ হলে, $x^2 = 36 > 31$
$\therefore\ C = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\dots\dots\}$
$\therefore\ A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10 \dots\} = \{6\}$

62. ক; ব্যাখ্যা: $\log_5 (2 - x) = 2$
বা, $2 - x = 5^2$ বা, $x = 2 - 5^2$
$\therefore\ x = 2 - 25 = -23$

63. খ; ব্যাখ্যা: 30 হতে 80 এর মধ্যে বৃহত্তম মৌলিক সংখ্যা 79 এবং ক্ষুদ্রতম মৌলিক সংখ্যা 31।
এদের ব্যবধান $= 79 - 31 = 48$

64. ক; ব্যাখ্যা: $S = \{x : x \le 1\} = (-\infty, 1]$
এর লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা 1।

65. ক; ব্যাখ্যা: $|x^2 + 1| < 10 \Rightarrow -10 < x^2 + 1 < 10$
$\Rightarrow -10 - 1 < x^2 < 10 - 1 \Rightarrow -11 < x^2 < 9$
$\therefore -3 < x < 3$

66. গ; ব্যাখ্যা: $\left|5 - \frac{2}{3x}\right| < 1 \Rightarrow -1 < 5 - \frac{2}{3x} < 1$
$\Rightarrow -1 - 5 < -\frac{2}{3x} < 1 - 5$
$\Rightarrow -6 < -\frac{2}{3x} < -4 \Rightarrow 6 > \frac{2}{3x} > 4$
$\Rightarrow 3 > \frac{1}{3x} > 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < 3x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{9} < x < \frac{1}{6}$

67. ঘ; ব্যাখ্যা: $(x - 1)(x - 3) \ge 0$
$x \ge 3$ অথবা $x \le 1$ অর্থাৎ, $[3, +\infty)$ অথবা $(-\infty, 1]$

68. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > \frac{43}{60} \Rightarrow \frac{5x}{6} > \frac{43}{60}$

69. খ. ব্যাখ্যা: $|3 - 2x| \le 1$
বা, $-1 \le 3 - 2x \le 1$ বা, $-1 - 3 \le 3 - 2x - 3 \le 1 - 3$
বা, $-4 \le -2x \le -2$ বা, $4 \ge 2x \ge 2$
$\therefore 2 \ge x \ge 1$ বা, $1 \le x \le 2$

70. খ. ব্যাখ্যা: $|7 - 3x| \le 5$ বা, $-5 \le 7 - 3x \le 5$,
বা, $-12 \le -3x \le -2$ বা, $4 \ge x \ge \frac{2}{3}\ \therefore \frac{2}{3} \le x \le 4$

71. গ. ব্যাখ্যা: $\frac{1}{|2x - 3|} > 5$; $2x - 3 \ne 0$, $\therefore x \ne \frac{3}{2}$
বা, $|2x - 3| < \frac{1}{5}$ বা, $-\frac{1}{5} < 2x - 3 < \frac{1}{5}$
বা, $\frac{14}{5} < 2x < \frac{16}{5}$ বা, $\frac{7}{5} < x < \frac{8}{5}$
$\therefore$ সমাধান: $\left(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right)$

72. গ. ব্যাখ্যা: $5x - x^2 - 6 > 0$
বা, $x^2 - 5x + 6 < 0$ বা, $(x - 3)(x - 2) < 0$
$\therefore 2 < x < 3$

73. ঘ. ব্যাখ্যা: $\frac{1}{|3x + 1|} \ge 5$; $3x + 1 \ne 0\ \therefore x \ne -\frac{1}{3}$
বা, $|3x + 1| \le \frac{1}{5}$ বা, $-\frac{1}{5} \le 3x + 1 \le \frac{1}{5}$
বা, $\frac{-6}{5} \le 3x \le \frac{-4}{5}$ বা, $\frac{-2}{5} \le x \le \frac{-4}{15}$
$\therefore\ \left[-\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

74. খ. ব্যাখ্যা: $|5 - 2x| \le 4$
বা, $-4 \le 5 - 2x \le 4$ বা, $-9 \le -2x \le -1$
বা, $\frac{9}{2} \ge x \ge \frac{1}{2}$ বা, $\frac{1}{2} \le x \le \frac{9}{2}$

75. খ. 76. খ.

▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = 3x + 2$

প্রশ্নমতে, $g\left(\frac{-8}{3}\right) \leq \frac{g(2x) - f(x)}{2} \leq f(0)$

বা, $3\left(\frac{-8}{3}\right) + 2 \leq \frac{3.2x + 2 - x}{2} \leq 0$

বা, $-6 \leq \frac{5x}{2} + 1 \leq 0$

বা, $-6 + 3 \leq \frac{5x}{2} + 1 + 3 \leq 0 + 3$ [3 যোগ করে]

বা, $-3 \leq \frac{5x}{2} + 4 \leq 3$ বা, $-3 \leq \frac{5x + 8}{2} \leq 3$

বা, $-6 \leq 5x + 8 \leq 6$

$\therefore$ $|5x + 8| \leq 6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = |x - 2|$ এবং $P < \frac{1}{5}$

বা, $|x - 2| < \frac{1}{5}$ [$\because P = |x - 2|$]

বা, $-\frac{1}{5} < x - 2 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 2 < x - 2 + 2 < \frac{1}{5} + 2$

বা, $\frac{-1 + 10}{5} < x < \frac{1 + 10}{5}$

বা, $\frac{9}{5} < x < \frac{11}{5}$

বা, $\frac{81}{25} < x^2 < \frac{121}{25}$

বা, $\frac{81}{25} - 4 < x^2 - 4 < \frac{121}{25} - 4$

বা, $\frac{81 - 100}{25} < x^2 - 4 < \frac{121 - 100}{25}$

বা, $\frac{-19}{25} < x^2 - 4 < \frac{21}{25}$

বা, $\frac{-21}{25} < \frac{-19}{25} < x^2 - 4 < \frac{21}{25}$

বা, $\frac{-21}{25} < x^2 - 4 < \frac{21}{25}$

$\therefore$ $|x^2 - 4| < \frac{21}{25}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = 3x + 2$

এখানে, $f(x)\,g(x) \leq 1$

বা, $x(3x + 2) \leq 1$

বা, $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

বা, $3x^2 + 3x - x - 1 \leq 0$

বা, $3x(x + 1) - 1(x + 1) \leq 0$

বা, $(x + 1)(3x - 1) \leq 0$ .... (i)

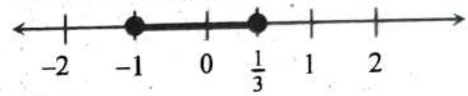
(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x + 1)$ এবং $(3x - 1)$ এর একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x + 1)$ এর চিহ্ন	$3x - 1$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−
$-1 < x < \frac{1}{3}$	+	−
$x > \frac{1}{3}$	+	+

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq \frac{1}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায় $f(x)\,g(x) \leq 1$ নিম্নরূপ :



2. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

প্রশ্নমতে, $4 < f(x + 1) < 10$

বা, $4 < x + 1 - 1 < 10$

বা, $4 < x < 10$

বা, $4 - 7 < x - 7 < 10 - 7$ $\left[\frac{4 + 10}{2} = 7 \text{ বিয়োগ করে}\right]$

বা, $-3 < x - 7 < 3$

$\therefore$ $|x - 7| < 3$ **(Ans.)**

খ $\frac{x}{x^2 + 1} < \frac{1}{x + 1}$

বা, $\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x + 1} < 0$

বা, $\frac{x(x + 1) - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)} < 0$

বা, $\frac{x^2 + x - x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} < 0$

বা, $\frac{x - 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} < 0$ ... ... (i)

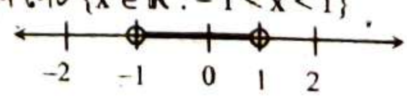
যেহেতু $(x^2 + 1)$ সর্বদা ধনাত্মক সেহেতু (i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x - 1)$ এবং $(x + 1)$ এর একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x - 1)$ এর চিহ্ন	$(x + 1)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−
$-1 < x < 1$	−	+
$x > 1$	+	+

$\therefore$ (i) নং সত্য হবে যদি $-1 < x < 1$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$

সংখ্যারেখা :



গ দেওয়া আছে, $|f(x)| < \frac{1}{f(11)}$

বা, $|x-1| < \frac{1}{11-1}$ বা, $|x-1| < \frac{1}{10}$

বা, $-\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10}$

বা, $-\frac{1}{10} + 1 < x < \frac{1}{10} + 1$ [1 যোগ করে]

বা, $\frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$ বা, $\frac{81}{100} < x^2 < \frac{121}{100}$

বা, $\frac{81}{100} - 1 < x^2 - 1 < \frac{121}{100} - 1$ [(–1) যোগ করে]

বা, $\frac{-19}{100} < x^2 - 1 < \frac{21}{100}$

বা, $\frac{-21}{100} < x^2 - 1 < \frac{21}{100}$ [$\because -\frac{21}{100} < -\frac{19}{100}$]

বা, $|x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ [$\because -a < x < a \Rightarrow |x| < a$]

বা, $|(x+1)(x-1)| < \frac{21}{100}$

বা, $|(x+2-1)(x-1)| < \frac{21}{100}$

$\therefore$ $|f(x+2) f(x)| < \frac{21}{100}$ **(দেখানো হলো)**

3. **ক** $|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \le |a-b|$

$\Rightarrow |a-b| \ge |a| - |b|$ ....(i)

আবার, $|b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$,

[$\because |b-a| = |-(a-b)| = |a-b|$]

$\Rightarrow |a-b| \ge |b| - |a|$ $\Rightarrow |a-b| \ge -(|a| - |b|)$

$\Rightarrow -|a-b| \le |a| - |b|$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$-|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|$

$\Rightarrow ||a| - |b|| \le |a-b|$

$\Rightarrow ||a-3+3| - |b-3+3|| \le |a-b-3+3|$

$\therefore ||f(a-3)| - |f(b-3)|| \le f(a-b-3)$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x + 3$

$\therefore$ $f(a) = a + 3$

শর্তমতে, $|f(a) - 8| < \frac{1}{2}$

বা, $|a+3-8| < \frac{1}{2}$ বা, $|a-5| < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} < a - 5 < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 5 < a - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

[প্রত্যেক পক্ষে 5 যোগ করে]

বা, $\frac{-1+10}{2} < a < \frac{1+10}{2}$

বা, $\frac{9}{2} < a < \frac{11}{2}$ বা, $\left(\frac{9}{2}\right)^3 < a^3 < \left(\frac{11}{2}\right)^3$

বা, $\frac{729}{8} < a^3 < \frac{1331}{8}$

বা, $729 < 8a^3 < 1331$ [প্রত্যেক পক্ষকে 8 দ্বারা গুণ করে]

বা, $729 + 29 < 8a^3 + 29 < 1331 + 29$

[প্রত্যেক পক্ষে 29 যোগ করে]

বা, $758 < 8a^3 + 29 < 1360$

বা, $-1360 < 758 < 8a^3 + 29 < 1360$

$\therefore$ $|8a^3 + 29| < 1360$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x + 3$

প্রদত্ত অসমতা, $|g(x)| < |f(x-4)|$

বা, $|2x+3| < |x+3-4|$

বা, $|2x+3| < |x-1|$

বা, $(|2x+3|)^2 < (|x-1|)^2$ [বর্গ করে]

বা, $(2x+3)^2 < (x-1)^2$

বা, $4x^2 + 12x + 9 < x^2 - 2x + 1$

বা, $4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 2x - 1 < 0$

বা, $3x^2 + 14x + 8 < 0$

বা, $3x^2 + 12x + 2x + 8 < 0$

বা, $3x(x+4) + 2(x+4) < 0$

বা, $(x+4)(3x+2) < 0$

বা, $3(x+4)\left(x+\frac{2}{3}\right) < 0$

বা, $(x+4)\left(x+\frac{2}{3}\right) < 0$ ....(i)

(i) নং সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x+4)$ এবং $\left(x+\frac{2}{3}\right)$ এর যেকোনো একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

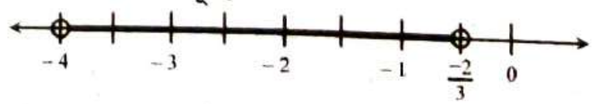
শর্ত	$(x+4)$ এর চিহ্ন	$\left(x+\frac{2}{3}\right)$ এর চিহ্ন	$(x+4)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ এর চিহ্ন
$x < -4$	–	–	+
$-4 < x < \frac{-2}{3}$	+	–	–
$x > -\frac{2}{3}$	+	+	+

সুতরাং (i) নং সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $-4 < x < \frac{-2}{3}$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-4 < x < -\frac{2}{3}$

এবং সমাধান সেট $= \left\{x \in \mathbb{R} ; -4 < x < -\frac{2}{3}\right\}$ **(Ans.)**

সংখ্যারেখায় নিম্নরূপ:



4. ক দেওয়া আছে, $g(x) = x - 1$

প্রশ্নমতে, $g(-5) \le g(x+1) \le g(0)$

বা, $-5 - 1 \le x + 1 - 1 \le 0 - 1$

বা, $-6 \le x \le -1$

বা, $-6 + \frac{7}{2} \le x + \frac{7}{2} \le -1 + \frac{7}{2}$ $\left[\frac{7}{2} \text{ যোগ করে}\right]$

বা, $\frac{-12+7}{2} \le x + \frac{7}{2} \le \frac{-2+7}{2}$

বা, $\frac{-5}{2} \le x + \frac{7}{2} \le \frac{5}{2}$

বা, $-5 \le 2x + 7 \le 5$

$\therefore$ $|2x + 7| \le 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{1-4x}$

এখানে, $\frac{1}{|f(x)|} \ge 3$ $\left[\text{যেখানে, } x \ne \frac{1}{4}\right]$

বা, $\frac{1}{\left|\frac{1}{1-4x}\right|} \ge 3$

বা, $\left|\frac{1}{1-4x}\right| \le \frac{1}{3}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{1}{|1-4x|} \le \frac{1}{3}$

বা, $|1 - 4x| \ge 3$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $|-(4x-1)| \ge 3$

বা, $|4x - 1| \ge 3$ .... (i)

$(4x - 1)$ অঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$4x - 1 \ge 3$

বা, $4x \ge 3 + 1$

বা, $4x \ge 4$

$\therefore$ $x \ge 1$

$(4x - 1)$ ঋণাত্মক হলে (i) হতে পাই,

$-(4x - 1) \ge 3$

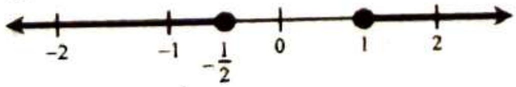
বা, $4x - 1 \le -3$

বা, $4x \le -2$

$\therefore$ $x \le -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$

সংখ্যারেখা:



গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{1-4x}$ এবং $g(x) = x - 1$

এখানে, $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$

বা, $\frac{x-1}{1/(1-4x)} > 0$

বা, $(x - 1)(1 - 4x) > 0$

বা, $-(x - 1)(4x - 1) > 0$

বা, $(x - 1)(4x - 1) < 0$

বা, $(x - 1)\left(x - \frac{1}{4}\right) < 0$ .... (i)

(i) নং সত্য হবে যদি $(x - 1)$ এবং $(4x - 1)$ এর মধ্যে, একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$4x - 1$ এর চিহ্ন	$x - 1$ এর চিহ্ন	$(4x-1)(x-1)$ এর চিহ্ন
$x < \frac{1}{4}$	–	–	+
$\frac{1}{4} < x < 1$	+	–	–
$x > 1$	+	+	+

(i) নং সত্য হবে যদি $\frac{1}{4} < x < 1$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{4} < x < 1$

5. ক $|x| > x$ সত্য হবে যদি x ঋণাত্মক অর্থাৎ $x < 0$ হয়।

এই শর্তে পাই, $-x > x$

বা, $-x - x > 0$ বা, $-2x > 0$

বা, $-x > 0$ $\therefore x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

খ $T = \{x \in \mathbb{R} : 7 + 6x - x^2 < 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -(x^2 - 6x - 7) < 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x - 7 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + x - 7 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x(x - 7) + 1(x - 7) > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : (x - 7)(x + 1) > 0\}$

$\therefore$ $(x - 7)(x + 1) > 0$ ... ... (i)

অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x - 7)$ এবং $(x + 1)$ উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-7)$ এর চিহ্ন	$(x+1)(x-7)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	–	–	+
$-1 < x < 7$	+	–	–
$x > 7$	+	+	+

নির্ণেয় সমাধান সেট

$T = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 7\}$

সেটটি ঊর্ধ্বসীমিত বা নিম্নসীমিত নয়। অর্থাৎ সেটটির সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নাই **(Ans.)**

গ এখানে, $S = \{x \in \mathbb{R} : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$

প্রদত্ত অসমতাটি

$5x^2 - 16x + 3 < 0$

বা, $5x^2 - 15x - x + 3 < 0$

বা, $5x(x - 3) - 1(x - 3) < 0$

বা, $(x - 3)(5x - 1) < 0$ ... ... (i)

অসমতা (i) সত্য হবে যদি ও কেবল যদি, $(x - 3)$ এবং $(5x - 1)$ এর যে কোনো একটির চিহ্ন ধণাত্মক ও অন্যটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$(5x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-3)(5x-1)$ এর চিহ্ন
$x < \frac{1}{5}$	−	−	+
$\frac{1}{5} < x < 3$	−	+	−
$x > 3$	+	+	+

∴ অসমতা (i) সত্য হবে যদি $\frac{1}{5} < x < 3$ হয়

এখানে, $\dfrac{\frac{1}{5} + 3}{2} = \frac{8}{5}$

অসমতাটির প্রতি অংশে $\left(-\frac{8}{5}\right)$ যোগ করে পাই,

$\frac{1}{5} - \frac{8}{5} < x - \frac{8}{5} < 3 - \frac{8}{5}$

$\Rightarrow -\frac{7}{5} < \frac{5x - 8}{5} < \frac{7}{5}$

$\Rightarrow -\frac{7}{5} \times 5 < \frac{5x - 8}{5} \times 5 < \frac{7}{5} \times 5$

$\Rightarrow -7 < 5x - 8 < 7$

∴ $|5x - 8| < 7$ **(Ans.)** [∵ $-a < x < a$ হলে $|x| < a$]

6. **ক** $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$

[∵ $|a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|$]

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

[∵ $|ab| \geq ab$]

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$

$\Rightarrow |a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

∴ $|a + b| \leq |a| + |b|$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $A = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n+1}\right\}$

$B = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}\right\}$,

∴ $A \cup B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n+1}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}\right\}$

$(A \cup B)$ সেটের প্রথম অংশের নিম্নসীমা 0 এবং উর্ধ্বসীমা $\frac{1}{2}$ এবং দ্বিতীয় অংশের নিম্নসীমা $\frac{1}{2}$ এবং উর্ধ্বসীমা 1

∴ $(A \cup B)$ সেটের সুপ্রিমাম 1 এবং ইনফিমাম 0 **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$ এবং $|f(x)| < \frac{1}{2}$

∴ $|x - 1| < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 1 < x < \frac{1}{2} + 1$

বা, $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

বা, $\frac{1}{8} < x^3 < \frac{27}{8}$

বা, $\frac{1}{8} - 1 < x^3 - 1 < \frac{27}{8} - 1$

বা, $\frac{-7}{8} < x^3 - 1 < \frac{19}{8}$

বা, $-\frac{19}{8} < x^3 - 1 < \frac{19}{8}$ $\left[∵ -\frac{19}{8} < -\frac{7}{8}\right]$

বা, $|x^3 - 1| < \frac{19}{8}$

কিন্তু প্রশ্নমতে, $|x^3 - 1| < p$

∴ $p = \frac{19}{8}$ **(Ans.)**

7. **ক** $||2 - 6| - 10 + |7 - 3||$

$= ||-4| - 10 + |4||$

$= |4 - 10 + 4|$

$= |8 - 10| = |-2| = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

এখন $x f(x) > 0$

$\frac{x(x+1)}{x-2} > 0$ ... ... (i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি x, $(x + 1)$ এবং $(x - 2)$ এই তিনটির মধ্যে তিনটির চিহ্নই ধনাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ঋণাত্মক এবং একটির চিহ্ন ধনাত্মক হয়।

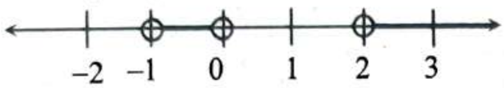
শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	x এর চিহ্ন	$(x-2)$ এর চিহ্ন	$x(x+1)/(x-2)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-1 < x < 0$	$+$	$-$	$-$	$+$
$0 < x < 2$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$

(i) নং সত্য হবে যদি $-1 < x < 0$ অথবা $x > 2$ হয়

নির্ণেয় সমাধান সেট:

$\{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$

সংখ্যারেখায়:



গ দেওয়া আছে, $g(x) = x - \frac{1}{3}$

এখানে, $\frac{1}{|g(x)|} \geq 3, x \neq \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1}{\left|x - \frac{1}{3}\right|} \geq 3$ বা, $\left|x - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{3}$ [ব্যস্তকরণ করে]

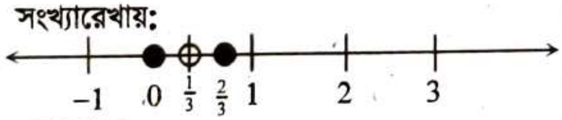
বা, $-\frac{1}{3} \leq x - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \leq x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$\therefore\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, x \neq \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, x \neq \frac{1}{3}\right\}$

$\therefore$ সংখ্যারেখায়:



8. **ক** দেওয়া আছে,

$a < b$

বা, $a - b < b - b$ [উভয়পক্ষে $-b$ যোগ করে]

বা, $a - b < 0$

বা, $a - b + c < 0 + c$ [উভয়পক্ষে c যোগ করে]

বা, $a - b + c < c$

বা, $a - b + c + b < b + c$ [উভয়পক্ষে b যোগ করে]

বা, $a + b + (-b) + c < b + c$

বা, $a + 0 + c < b + c$

$\therefore a + c < b + c$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x$ যেখানে $x \in \mathbb{R}$

$\therefore f(a) = a, f(b) = b$

$\therefore$ প্রমাণ করতে হবে যে, $|a + b| \leq |a| + |b|$

$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$

$[\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$ $[\because |ab| \geq ab]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$

বা, $(|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$

বা, $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\therefore\ |f(a) + f(b)| \leq |a| + |b|$ **(প্রমাণিত)**

গ $\because f(x) = x$

$\therefore f(2x) = 2x$ এবং $f(x^2) = x^2$

এখন, প্রদত্ত অসমতা,

$|f(2x) - 1| < \frac{1}{9}$

বা, $|2x - 1| < \frac{1}{9}$ ... ... (i)

$|2x - 1| + |2| < \frac{1}{9} + |2|$

বা, $|2x - 1 + 2| < \frac{1}{9} + 2$

বা, $|2x + 1| < \frac{1 + 18}{9}$

$\therefore\ |2x + 1| < \frac{19}{9}$ ... ... (ii)

(i) $\times$ (ii) করে পাই,

$|2x - 1||2x + 1| < \frac{1}{9} \times \frac{19}{9}$

বা, $|4x^2 - 1| < \frac{19}{81}$

$\therefore\ |4f(x^2) - 1| < \frac{19}{81}$ **(দেখানো হলো)**

9. **ক** $|-5 - 7| - |-2 + 9| + |-3|$

$= |-12| - |7| + |-3|$

$= 12 - 7 + 3$

$= 8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 4$

শর্তমতে, $\frac{1}{|f(x)|} \geq 5$

বা, $\frac{1}{|3x - 4|} \geq 5$ যখন $x \neq \frac{4}{3}$

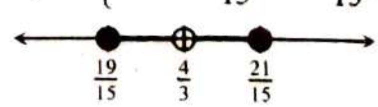
বা, $|3x - 4| \leq \frac{1}{5}$ বা, $-\frac{1}{5} \leq 3x - 4 \leq \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 4 \leq 3x - 4 + 4 \leq \frac{1}{5} + 4$

বা, $\frac{19}{5} \leq 3x \leq \frac{21}{5}$ $\therefore \frac{19}{15} \leq x \leq \frac{21}{15}$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{19}{15} \leq x \leq \frac{21}{15}, x \neq \frac{4}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায়:



গ দেওয়া আছে,

$f(x) = 3x - 4$ এবং $g(x) = 5x + 6$

শর্তমতে, $\frac{(x-1)f(x)}{g(x)} < 0$

$\therefore \frac{(x-1)(3x-4)}{5x+6} < 0$ ... (i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x - 1)$, $(3x - 4)$ এবং $(5x + 6)$ এই তিনটির সবগুলোই ঋণাত্মক অথবা যেকোনো দুইটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(5x+6)$ এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(3x-4)$ এর চিহ্ন	$(x-1)(3x-4)/(5x+6)$ এর চিহ্ন
$x < \frac{-6}{5}$	−	−	−	−
$\frac{-6}{5} < x < 1$	+	−	−	+
$1 < x < \frac{4}{3}$	+	+	−	−
$x > \frac{4}{3}$	+	+	+	+

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < \frac{-6}{5}$ অথবা $1 < x < \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

10. ক দেওয়া আছে,

$f(x) = |x + 1|$ এবং $g(x) = |x - 1|$

$\therefore f(x) + g(x) = |x + 1| + |x - 1| \geq |x + 1 + x - 1|$

বা, $f(x) + g(x) \geq |2x|$

$\therefore f(x) + g(x) \geq |2x|$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |x + 1|$ এবং $g(x) = |x - 1|$

$f(x) + g(x) \leq 3$

বা, $|x + 1| + |x - 1| \leq 3$ .... (i)

আবার, $|(x + 1) + (x - 1)| \leq |x + 1| + |x - 1|$ ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$|(x + 1) + (x - 1)| \leq 3$

বা, $|2x| \leq 3$

বা, $-3 \leq 2x \leq 3$

$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

$\therefore$ সমাধান সেট $= \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) \leq g(x)$

বা, $|x + 1| \leq |x - 1|$

$\therefore |x + 1| - |x - 1| \leq 0$

$x + 1 = 0$ হলে, $x = -1$ এবং $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

সংখ্যারেখার উপর -1 ও 1 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করি।

বিন্দু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x < -1$, (ii) $-1 \leq x \leq 1$ এবং (iii) $x > 1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

(i) $x < -1$ হলে,

$|x + 1| = -(x + 1)$ এবং $|x - 1| = -(x - 1)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $-(x + 1) - \{-(x - 1)\} \leq 0$

বা, $-x - 1 + x - 1 \leq 0$

$\therefore -2 \leq 0$; যা সত্য

(ii) $-1 \leq x \leq 1$ হলে, $|x + 1| = x + 1$

এবং $|x - 1| = -(x - 1)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই,

$x + 1 - \{-(x - 1)\} \leq 0$

বা, $x + 1 + x - 1 \leq 0$

বা, $2x \leq 0$

$\therefore x \leq 0$

(iii) $x > 1$ হলে $|x + 1| = x + 1$ এবং $|x - 1| = x - 1$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $x + 1 - (x - 1) \leq 0$

বা, $x + 1 - x + 1 \leq 0$

$\therefore 2 \leq 0$; যা সত্য নয়।

অর্থাৎ $x > 1$ এর জন্য প্রদত্ত অসমতাটি সত্য নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x \leq 0$ **(Ans.)**

11. ক $a - c = (a - b) + (b - c)$

$\therefore \quad |a - c| = |(a - b) + (b - c)|$

$\leq |a - b| + |b - c| \quad [\because |a + b| \leq |a| + |b|]$

$\therefore \quad |a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ যেখানে, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x\left(\frac{x-4}{x-5}\right)$

এবং $f(x) < 0$

$\therefore x\left(\frac{x-4}{x-5}\right) < 0$ ... ... (i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি x, $(x - 4)$ এবং $(x - 5)$ এই তিনটির মধ্যে তিনটির চিহ্নই ঋণাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং একটির চিহ্ন ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	x এর চিহ্ন	$(x-4)$ এর চিহ্ন	$(x-5)$ এর চিহ্ন	$\frac{x(x-4)}{(x-5)}$ এর চিহ্ন
$x < 0$	−	−	−	−
$0 < x < 4$	+	−	−	+
$4 < x < 5$	+	+	−	−
$x > 5$	+	+	+	+

(i) নং সত্য হবে যদি $x < 0$ অথবা $4 < x < 5$ হয়।
নির্ণেয় সমাধান সেট:
$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 4 < x < 5\}$
সংখ্যারেখায়:

গ দেওয়া আছে, $B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$= \left\{1 - 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, ...\right\}$

$= \left\{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$

$= \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, ... \frac{2n}{2n+1}\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, ... \frac{2n+1}{2n}\right\}$

B সেটের ১ম অংশের নিম্নসীমা 0 এবং ঊর্ধ্বসীমা 1

আবার B সেটের ২য় অংশের ঊর্ধ্বসীমা $\frac{3}{2}$ এবং নিম্নসীমা 1.

সুতরাং B সেটের সুপ্রিমাম $\frac{3}{2}$ এবং ইনফিমাম 0। **(Ans.)**

12. **ক** যেহেতু $q \neq 0$, সুতরাং q এর গুণাত্মক বিপরীতক বা, q^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।
কল্পনানুসারে, $pq = rq$
বা, $(pq)q^{-1} = (rq)q^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]
বা, $p(qq^{-1}) = r(qq^{-1})$ [সংযোজন যোগ্যতা বিধি অনুসারে]
বা, $p.1 = r.1$ [গুণের বিপরীতক]
$\therefore$ $p = r$ [গুণের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 2$
$\therefore f(x-2) = 3(x-2) - 2 = 3x - 6 - 2 = 3x - 8$

$\therefore \frac{1}{|f(x-2)+3|} > 3$

বা, $\frac{1}{|3x - 8 + 3|} > 3$

বা, $\frac{1}{|3x - 5|} > 3$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{3}$ যখন $x \neq \frac{5}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} < 3x - 5 < \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{3} + 5$

বা, $\frac{-1+15}{3} < 3x < \frac{1+15}{3}$

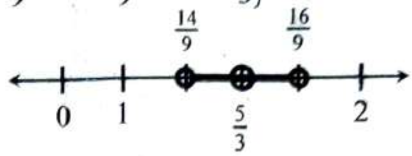
বা, $\frac{14}{3} < 3x < \frac{16}{3}$

বা, $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}$ [উভয় পক্ষকে $\left(\frac{1}{3}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট,
$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{9} < x < \frac{16}{9} \text{ এবং } x \neq \frac{5}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায় :



গ দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 2$
$\therefore$ $f(2x) = 3(2x) - 2 = 6x - 2$
এবং $f(2y) = 3(2y) - 2 = 6y - 2$
এখন, $|x + y| < \frac{7}{3}$ বা, $\frac{-7}{3} < x + y < \frac{7}{3}$

বা, $\frac{-6 \times 7}{3} < 6(x+y) < 6 \times \frac{7}{3}$

[উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $-14 < 6x + 6y < 14$
বা, $-14 - 4 < 6x + 6y - 4 < 14 - 4$
[উভয় পক্ষে 4 বিয়োগ করে]
বা, $-18 < 6x - 2 + 6y - 2 < 10$
বা, $-10 < f(2x) + f(2y) < 10$ [$\because -18 < -10$]
$\therefore$ $|f(2x) + f(2y)| < 10$ **(দেখানো হলো)**

13. **ক** $|x - 2| < 5$ বা, $-5 < x - 2 < 5$
বা, $-5 + 2 < x - 2 + 2 < 5 + 2$
$\therefore -3 < x < 7$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = 2x - y - 5$ এবং $\frac{1}{|Q|} > 2$

বা, $\frac{1}{|2x - y - 5|} > 2$

বা, $\frac{1}{|3x - 5|} > 2$ [$\because y = -x$]

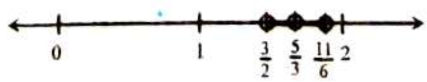
বা, $|3x - 5| < \frac{1}{2}$ [বিপরীত করে] যখন, $x \neq \frac{5}{3}$

বা, $-\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

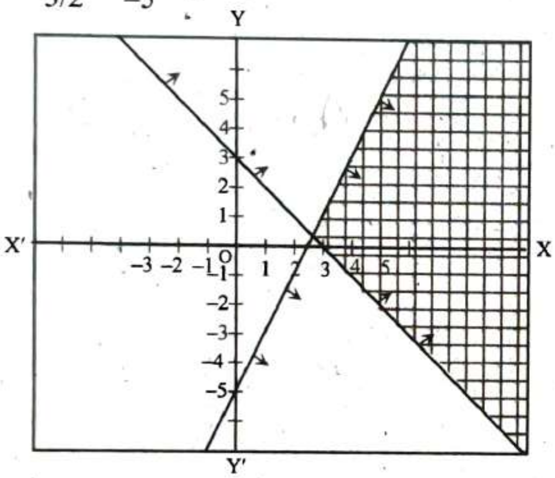
বা, $-\frac{1}{2} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

বা, $\frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2}$ বা, $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$



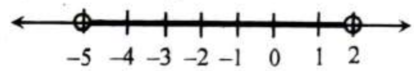
গ প্রদত্ত শর্তসমূহ $P > 0$ এবং $Q > 0$
দেওয়া আছে, $P = x + y - 3$ এবং $Q = 2x - y - 5$
$\therefore\ x + y - 3 > 0$ ... ... (i)
এবং $2x - y - 5 > 0$ ... ... (ii)
(i) নং কে সরলরেখার সমীকরণ ধরে পাই,
$x + y = 3$
$\therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$
(ii) নং কে সরলরেখার সমীকরণ ধরে পাই,
$2x - y = 5$
$\therefore \frac{x}{5/2} + \frac{y}{-5} = 1$



লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক রেখা বরাবর XOX′ কে x-অক্ষ এবং উলম্ব রেখা বরাবর YOY′ কে y-অক্ষ ধরে ছক কাগজের প্রতি ছোট 1 বর্গ ঘর সমান 1 একক ধরে A(3, 0) এবং B(0, 3) বিন্দু স্থাপন করে যোগ করে $x + y - 3 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।
আবার C(5/2, 0) এবং D(0, –5) বিন্দু স্থাপন করে যোগ করে $2x - y - 5 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।
(0, 0) মূলবিন্দু (i) এবং (ii) নং এ বসিয়ে পাই,
(i) হতে $-3 > 0$, অসত্য
(ii) হতে $-5 > 0$, অসত্য
সুতরাং $x + y - 3 > 0$ এবং $2x - y - 5 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল (i) এবং (ii) নং এর যে পাশে মূলবিন্দু আছে, তার বিপরীত পার্শ্বের অঞ্চল নির্দেশ করে।
চিত্রে লেখচিত্র রেখাদ্বয় বাদে অসমতা দুইটির সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

14. ক দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 3$ এবং $g(x) = \sqrt{x}$
এখানে, $f = g^2$
বা, $f(x) = \{g(x)\}^2$
বা, $(2x + 3) = (\sqrt{x})^2$
বা, $2x + 3 = x$
বা, $2x - x = -3$
$\therefore\ x = -3$
$\therefore\ x = -3$ হলে $f = g^2$ হবে। **(Ans.)**

খ এখানে, $|f(x)| < 7$
$|2x + 3| < 7$
বা, $-7 < 2x + 3 < 7$
বা, $-7 - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 - 3$
বা, $-10 < 2x < 4$
বা, $-\frac{10}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$
$\therefore -5 < x < 2$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2\}$
সংখ্যারেখা:



গ দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{x}$
$\therefore\ g(3) = \sqrt{3}$
মনে করি, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা, তাহলে
$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা, $q \neq 0$ এবং এদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক (1 ব্যতীত) নেই]
বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $p^2 = 3q^2$ ... ... (i)
এখন, 3 দ্বারা $3q^2$ বিভাজ্য বিধায় 3 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হবে।
সুতরাং p নিজেই 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।
ধরি, $p = 3c$ [যেখানে c একটি পূর্ণসংখ্যা]
বা, $p^2 = 9c^2$
বা, $3q^2 = 9c^2$ [(i) থেকে]
বা, $q^2 = 3c^2$
$\therefore$ 3 দ্বারা q^2 বিভাজ্য, অর্থাৎ 3 দ্বারা q বিভাজ্য।
সুতরাং, p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক হলো 3, যা প্রস্তাবনা বিরোধী।
$\therefore \sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। **(প্রমাণিত)**

15. ক $|a|^2 = a^2$ বা a এর সকল ধনাত্মক, ঋণাত্মক মান এবং শূন্যের জন্য সত্য।
$\therefore\ |a| = \pm\sqrt{a^2}$
যেহেতু $|a| \geq 0$ কাজেই ঋণাত্মক মান বর্জন করে পাই,
$|a| = \sqrt{a^2}$
$\therefore \sqrt{a^2} = |a|$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $P(x) = x - 4$

$Q(y) = y - 3$

$\therefore\ Q(x) = x - 3$

প্রদত্ত অসমতা, $\dfrac{P(x)}{x+2} + \dfrac{x+6}{Q(x)} > 0$

বা, $\dfrac{x-4}{x+2} + \dfrac{x+6}{x-3} > 0$

বা, $\dfrac{(x-4)(x-3) + (x+6)(x+2)}{(x+2)(x-3)} > 0$

বা, $\dfrac{x^2 - 7x + 12 + x^2 + 8x + 12}{(x+2)(x-3)} > 0$

বা, $\dfrac{2x^2 + x + 24}{(x+2)(x-3)} > 0$

বা, $\dfrac{2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8} + 24}{(x+2)(x-3)} > 0$

বা, $\dfrac{2\left\{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} + \frac{191}{8}}{(x+2)(x-3)} > 0$

বা, $\dfrac{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{8}}{(x+2)(x-3)} > 0$ ……… (i)

এখানে, $2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{8} > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতাটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $(x + 2)$ ও $(x - 3)$ এর উভয়টি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়।

$x + 2 = 0$ হলে, $x = -2$

$x - 3 = 0$ হলে, $x = 3$

শর্ত	$(x + 2)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)$ এর চিহ্ন
$x < -2$	$-$	$-$
$-2 < x \le 3$	$+$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$

$\therefore$ (i) নং সত্য হবে যদি $x < -2$ অথবা $x > 3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : x < -2$ অথবা $x > 3\}$

গ প্রদত্ত অসমতাটি, $\dfrac{Q(x) - P(x)}{|3P(x) - Q(x)|} \le \dfrac{P(7)}{Q(5)}$

$\Rightarrow \dfrac{x - 3 - x + 4}{|3x - 12 - x + 3|} \le \dfrac{7-4}{5-3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|2x - 9|} \le \dfrac{3}{2}$ যেখানে $x \ne \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2} \le \dfrac{1}{2x - 9} \le \dfrac{3}{2}$

এখানে, $\dfrac{1}{2x-9} \le \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ 2x - 9 \ge \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow\ 2x \ge \dfrac{2}{3} + 9$

$\Rightarrow\ 2x \ge \dfrac{29}{3}$

$\therefore\ x \ge \dfrac{29}{6}$

অথবা $-\dfrac{3}{2} \le \dfrac{1}{2x-9}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2x-9} \ge \dfrac{-3}{2}$

$\Rightarrow 2x - 9 \le \dfrac{-2}{3}$

$\Rightarrow 2x \le \dfrac{-2}{3} + 9$

$\Rightarrow 2x \le \dfrac{25}{3}$

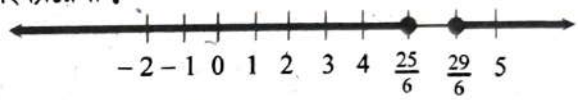
$\therefore x \le \dfrac{25}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $= x \le \dfrac{25}{6}$ অথবা $x \ge \dfrac{29}{6}$

নির্ণেয় সমাধান সেট,

$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x \le \dfrac{25}{6}\right.$ অথবা $\left. x \ge \dfrac{29}{6}\right\}$

সংখ্যারেখা :



16. **ক** সকল $p, q \in \mathbb{R}$ এর জন্য আমরা জানি,

$|p|^2 = p^2$ এবং $|q|^2 = q^2$

এখন, $p^2 . q^2 = |p|^2 . |q|^2$

বা, $(pq)^2 = (|p|\ |q|)^2$

বা, $|pq|^2 = (|p|\ |q|)^2$

$\therefore |pq| = |p|\ |q|$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $x = a + 5$

বা, $a = x - 5$

শর্তমতে, $|a| < \dfrac{1}{13}$

বা, $|x - 5| < \dfrac{1}{13}$

বা, $-\dfrac{1}{13} < x - 5 < \dfrac{1}{13}$

বা, $5 - \dfrac{1}{13} < x < 5 + \dfrac{1}{13}$

বা, $\dfrac{64}{13} < x < \dfrac{66}{13}$

বা, $\dfrac{64^2}{13^2} < x^2 < \dfrac{66^2}{13^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\dfrac{64^2}{13^2} - 25 < x^2 - 25 < \dfrac{66^2}{13^2} - 25$

বা, $\dfrac{-129}{169} < x^2 - 25 < \dfrac{131}{169}$

বা, $\dfrac{-131}{169} < \dfrac{-129}{169} < x^2 - 25 < \dfrac{131}{169}$

বা, $\dfrac{-131}{169} < x^2 - 25 < \dfrac{131}{169}$

$\therefore |x^2 - 25| < \dfrac{131}{169}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x = a + 5$

শর্তমতে, $\frac{a+5}{a^2+10a+26} < \frac{1}{a+6}$

বা, $\frac{x}{a^2+2.5.a+5^2+1} < \frac{1}{a+5+1}$

বা, $\frac{x}{(a+5)^2+1} < \frac{1}{x+1}$ বা, $\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} < 0$

বা, $\frac{x(x+1)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} < 0$

বা, $\frac{x^2+x-x^2-1}{(x^2+1)(x+1)} < 0$

$\therefore \frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)} < 0 \ldots (i)$

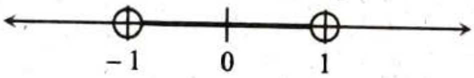
এখানে সর্বদাই $x^2 + 1 > 0$. অতএব, (i) নং অসমতা সত্য হবে যদি $(x - 1)$ ও $(x + 1)$ এর যেকোনো একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$\frac{(x-1)}{(x^2+1)(x+1)}$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−	+
$-1 < x < 1$	+	−	−
$x > 1$	+	+	+

$\therefore$ (i) নং অসমতা সত্য হবে যদি $-1 < x < 1$ হয়।

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$

সংখ্যারেখায়:



17. **ক** $|x + 2| < 2$ এবং $x \in \mathbb{Z}$

বা, $-2 < x + 2 < 2$

বা, $-2 - 2 < x + 2 - 2 < 2 - 2$

বা, $-4 < x < 0$

যেহেতু $x \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -3, -2, -1$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত অসমতা $\frac{x+2}{x+1} > \frac{x-3}{x-4}$

বা, $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-3}{x-4} > 0$

বা, $\frac{(x+2)(x-4)-(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-4)} > 0$

বা, $\frac{(x^2+2x-4x-8)-(x^2-3x+x-3)}{(x+1)(x-4)} > 0$

বা, $\frac{x^2-2x-8-x^2+2x+3}{(x+1)(x-4)} > 0$

বা, $\frac{-5}{(x+1)(x-4)} > 0$

বা, $\frac{5}{(x+1)(x-4)} < 0 \ldots\ldots (i)$

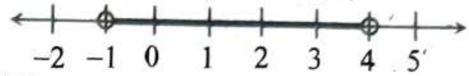
এখানে $(x + 1)$ এবং $(x - 4)$ এর মধ্যে একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হলে (i) নং অসমতাটি সিদ্ধ করবে।

শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-4)$ এর চিহ্ন	$(x+1)(x-4)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−	+
$-1 < x < 4$	+	−	−
$x > 4$	+	+	+

সুতরাং (i) নং শর্ত সত্য হবে যদি $-1 < x < 4$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 4\}$

সংখ্যারেখায়:



গ দেওয়া আছে,

x, y মূলদ এবং $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

যেহেতু, $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

বা, $2x - y\sqrt{2}\sqrt{3} = 0 \times \sqrt{2}$ [উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করে].

বা, $2x - y\sqrt{6} = 0 \cdots\cdots\cdots (i)$.

$2x$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং $y\sqrt{6}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। কাজেই এদের বিয়োগফল একটি অমূলদ সংখ্যা।

আবার ডানপক্ষ একটি মূলদ সংখ্যা।

কিন্তু একটি মূলদ সংখ্যা = একটি অমূলদ সংখ্যা, যা সম্ভব নয়।

সুতরাং $y = 0$ হলেই কেবল (i) সত্য হয়।

এখন, (i) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = 0$

$\therefore x = y = 0$ **(দেখানো হলো)**

18. **ক** দেওয়া আছে, $a + b = a + c$

বা, $-a + (a + b) = -a + (a + c)$ [যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $(-a + a) + b = (-a + a) + c$ [যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $0 + b = 0 + c$ [যোগের বিপরীতক বিধি]

$\therefore b = c$ [যোগের অভেদক বিধি] **(প্রমাণিত)**

খ বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য = 4

কর্ণ = $4\sqrt{2}$

$\therefore$ বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $\frac{4}{2} = 2$

এখানে, অর্ন্তবৃত্ত এবং বর্হিবৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 2 এবং $2\sqrt{2}$

বৃত্তদ্বয়ের অভ্যন্তরে যে বৃত্তগুলো আঁকা যায় তাদের ব্যাসার্ধ $2 < r < 2\sqrt{2}$

এখানে, $\frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

$\therefore 2 - 1 - \sqrt{2} < r - 1 - \sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$

বা, $-\sqrt{2} + 1 < r - 1 - \sqrt{2} < \sqrt{2} - 1$

বা, $-(\sqrt{2} - 1) < r - \sqrt{2} - 1 < (\sqrt{2} - 1)$

$\therefore |r - \sqrt{2} - 1| < \sqrt{2} - 1$ **(Ans.)**

গ অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times 2^2$ $[\because r = 2]$
$= 4\pi$
বহির্বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi(2\sqrt{2})^2$ $[\because r = 2\sqrt{2}]$
$= 8\pi$
যেহেতু মধ্যবর্তী বৃত্তগুলোর ক্ষেত্রফল A, সুতরাং অসমতাটি দাড়ায় $4\pi < A < 8\pi$

এখানে, $\frac{4\pi + 8\pi}{2} = 6\pi$

বা, $4\pi - 6\pi < A - 6\pi < 8\pi - 6\pi$
বা, $-2\pi < A - 6\pi < 2\pi$
বা, $|A - 6\pi| < 2\pi$ .... (1)
বা, $|A - 6\pi| + 12\pi < 2\pi + 12\pi$
$\therefore |A + 6\pi| < 14\pi$ .... (2)
(1) ও (2) নং সমীকরণ গুণ করে পাই,
$|A - 6\pi||A + 6\pi| < 2\pi \times 14\pi$
$|A^2 - 36\pi^2| < 28\pi^2$ **(প্রমাণিত)**

19. ক দেওয়া আছে, $g(x) = x - 2$ এবং $|g(x)| < 5$
বা, $|x - 2| < 5$
$\therefore -5 < x - 2 < 5$ $[\because |x| < a$ হলে $-a < x < a]$
বা, $-5 + 2 < x - 2 + 2 < 5 + 2$
বা, $-3 < x < 7$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 7\}$ **(Ans.)**

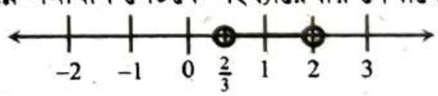
খ দেওয়া আছে, $f(x) = x(x + 1)$ এবং $g(x) = x - 2$
$\because f(x) > g(x)$
বা, $x(x + 1) > x - 2$
বা, $x^2 + x - x + 2 > 0$ বা, $x^2 + 2 > 0$
বা, $x^2 > -2$ ... ... (i)
x এর সকল বাস্তব মানের জন্য (i) নং অসমতাটি সত্য।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $\mathbb{R}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) < g(x) + 2$
বা, $x(x + 1) < x - 2 + 2$
বা, $x^2 + x < x$ বা, $x^2 < 0$
কিন্তু x এর কোন বাস্তব মানের জন্যই অসমতাটি সত্য হতে পারে না। অর্থাৎ অসমতার কোনো সমাধান নেই।
$\therefore f(x) < g(x) + 2$ এর কোনো বাস্তব সমাধান নেই।
(দেখানো হলো)

20. ক দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$
$\therefore -2 < 2 - f(x) < 8$
বা, $-2 < 2 - x + 1 < 8$ বা, $-2 < 3 - x < 8$
বা, $-2 - 3 < 3 - 3 - x < 8 - 3$
[প্রত্যেক পার্শ্বের সংখ্যার সাথে (– 3) যোগ করে পাই]
বা, $-5 < -x < 5$ বা, $5 > x > -5$
বা, $-5 < x < 5$ $\therefore |x| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$
$\therefore f(x + 2) = x + 2 - 1 = x + 1$
এখন, $|f(x)| < \frac{1}{10}$ বা, $|x - 1| < \frac{1}{10}$
বা, $-\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10}$
বা, $-\frac{1}{10} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{10} + 1$
বা, $\frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$ বা, $\frac{81}{100} < x^2 < \frac{121}{100}$
বা, $\frac{81}{100} - 1 < x^2 - 1 < \frac{121}{100} - 1$
বা, $\frac{81 - 100}{100} < x^2 - 1 < \frac{121 - 100}{100}$
বা, $-\frac{19}{100} < (x + 1)(x - 1) < \frac{21}{100}$
বা, $-\frac{21}{100} < f(x) f(x + 2) < \frac{21}{100}$ $\left[\because \frac{-19}{100} > \frac{-21}{100}\right]$
$\therefore |f(x) f(x + 2)| < \frac{21}{100}$ **(দেখানো হলো)**

গ $|3f(x) - 1| < 2$
বা, $|3(x - 1) - 1| < 2$
বা, $|3x - 3 - 1| < 2$ বা, $|3x - 4| < 2$
বা, $-2 < 3x - 4 < 2$
বা, $-2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$
[প্রত্যেক পার্শ্বে 4 যোগ করে]
বা, $2 < 3x < 6$
বা, $\frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{6}{3}$ [প্রত্যেক পার্শ্বকে 3 দ্বারা ভাগ করে]
$\therefore \frac{2}{3} < x < 2$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < 2\right\}$
নিম্নে সমাধান সেটকে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



21. ক দেওয়া আছে, $|2x - 7| > 5$
$\therefore 2x - 7 > 5$ অথবা, $2x - 7 < -5$
বা, $2x > 5 + 7$ বা, $2x < -5 + 7$
বা, $2x > 12$ বা, $2x < 2$
বা, $x > \frac{12}{2}$ বা, $x < \frac{2}{2}$
$\therefore x > 6$ $\therefore x < 1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x > 6$ অথবা $x < 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $L = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 5x < 0\}$
এখানে, $2x^2 + 5x < 0$ বা, $x^2 + \frac{5}{2}x < 0$
বা, $x^2 + 2.\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$.
বা, $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$ $\therefore \left|x + \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4}$
যা নির্ণেয় পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ। **(Ans.)**

গ অনুশীলনী 1(B) এর 4 নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬