অষ্টম অধ্যায়

স্থিতিবিদ্যা

Statics

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ 8.4 এর কাজ | পৃষ্ঠা-৩১৪

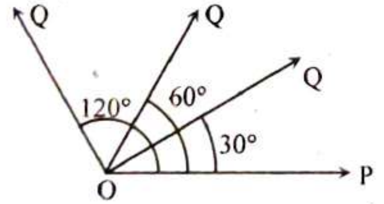
একটি সরলরেখা বরাবর দুইটি সমমানের বল কোন বস্তুর ওপর পরস্পর বিপরীতদিকে ক্রিয়া করলে ঐ ক্ষেত্রে বলদ্বয়ের লব্ধি শূন্য হবে।

যেমন: (i) রেল লাইনে অবস্থিত কোন রেল গাড়ীকে এর সামনে ও পিছনে দুইটি ক্রেন সমান বল প্রয়োগে টানতে থাকলে গাড়ীটির অবস্থানের কোন পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ এই ক্ষেত্রে ক্রেন দুইটি দ্বারা প্রযুক্ত বলের লব্ধি শূন্য হয়।

(ii) যদি একটি সোজা রাস্তার ওপর একটি কাঠের গুড়ি সরাতে দুইটি সমান ক্ষমতা সম্পন্ন ঘোড়া এমনভাবে ব্যবহার করা হয় যে, একটি ঘোড়া গুড়িটির এক প্রান্তে যে দিকে গুড়িটি টানে, অপর ঘোড়াটি গুড়িটির ঠিক বিপরীত প্রান্তে পূর্বোক্ত ঘোড়ার উল্টা দিকে সমান বলে টানে, তবে উভয় ঘোড়া দ্বারা প্রযুক্ত বলের লব্ধি শূন্য হবে এবং এ কারণে কাঠের গুড়িটির অবস্থানের কোন পরিবর্তন হবে না।

▶ অনুচ্ছেদ-8.4.3.1 | পৃষ্ঠা-৩১৭

1. (a)

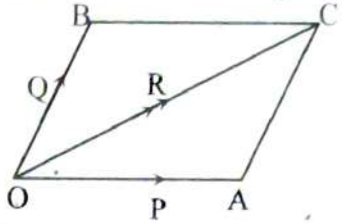


মনে করি, P ও Q বলের মধ্যবর্তী কোণ α তাহলে, লব্ধি $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

অর্থাৎ লব্ধির মান $\cos\alpha$ এর উপর নির্ভরশীল। আমরা জানি, $\alpha = [0, \pi]$ ব্যবধানে $\cos\alpha$ এর মান 1 থেকে -1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

সুতরাং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ যত বাড়ে $\cos\alpha$ এর মান তত কমে। সেকারণে লব্ধির মানও হ্রাস পায়। **(দেখানো হলো)**

(b) মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয় OACB সামান্তরিকের OA ও OB বাহু দ্বারা সূচিত; তাহলে এদের লব্ধি R সামান্তরিকটির OC কর্ণ দ্বারা সূচিত হয়।



ধরি, $P > Q$

$\therefore OA > OB$

বা, $OA > AC$ $[\because AC = OB]$

$\therefore \angle OCA > \angle COA$

বা, $\angle COB > \angle COA$ $[\because \angle OCA = \angle COB]$

বা, $\angle COA < \angle COB$

সুতরাং লব্ধি বল সর্বদাই বৃহত্তম বলের দিকে বেশি হেলানো থাকে। **(দেখানো হলো)**

2. মনে করি, P মানের দুইটি সমান বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ α.

প্রশ্নানুসারে, $P^2 = P^2 + P^2 + 2PP.\cos\alpha$

বা, $2P^2\cos\alpha = -P^2$

বা, $\cos\alpha = \frac{-P^2}{2P^2} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

3. মনে করি, বল দুইটি P ও Q.

তাহলে, $(2\sqrt{10})^2 = P^2 + Q^2$

$\therefore P^2 + Q^2 = 40$

এবং $(2\sqrt{7})^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 120°$

বা, $28 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{1}{2}\right)$

বা, $28 = 40 - PQ$ $[\because P^2 + Q^2 = 40]$

বা, $PQ = 12$

$(P + Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$

$= 40 + 2 \times 12 = 64$

বা, $P + Q = 8$ .... (i)

আবার, $(P - Q)^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ = 40 - 2 \times 12 = 16$

$\therefore P - Q = 4$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে

$P + Q + P - Q = 8 + 4$

বা, $2P = 12$

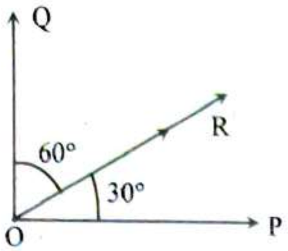
বা, $P = 6$

(i) এ P এর মান বসিয়ে

$6 + Q = 8$ বা, $Q = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বলদ্বয় 6N ও 2N. **(Ans.)**

▶ অনুচ্ছেদ-8.5.2 | পৃষ্ঠা-৩১৯



মনে করি, P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P ও Q বলের সাথে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে।

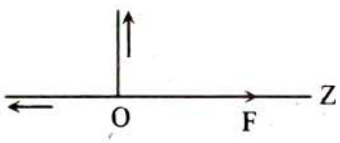
তাহলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = 30° + 60° = 90°.

$\therefore \tan 30° = \dfrac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{Q}{P+0}$ বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{Q}{P}$ .... (i)

বা, $\dfrac{P}{Q} = \sqrt{3}$ $\therefore P : Q = \sqrt{3} : 1$ **(Ans.)**

▶ অনুচ্ছেদ-8.5.3 | পৃষ্ঠা-৩২০



(i) যেহেতু F ও OZ এর মধ্যবর্তী কোণ 0°, সুতরাং OZ বরাবর F এর লম্বাংশ Fcos0° বা, F.

(ii) একইভাবে,

ZO বরাবর F এর লম্বাংশ Fcos180° বা, – F.

(iii) OZ এর উপর লম্ব বরাবর F এর লম্বাংশ, Fcos90° বা, 0

▶ অনুচ্ছেদ-8.5.4 | পৃষ্ঠা-৩২২

1. আমরা জানি, P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে, লব্ধি $R = \sqrt{Q^2 - P^2}$ এবং বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= \cos^{-1}\left(-\dfrac{P}{Q}\right)$ যেখানে, P < Q

প্রশ্নানুসারে, $P = 5\sqrt{3}$ N, Q = 10N

$\therefore$ লব্ধি, $R = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2}$ N

$= \sqrt{100 - 75}$ N

$= \sqrt{25}$ N

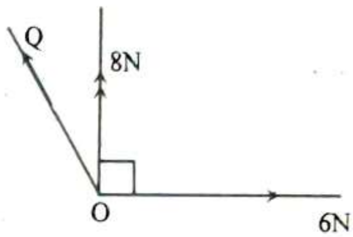
= 5N **(Ans.)**

এবং $\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{10}\right)$

$= \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

= 150° **(Ans.)**

2. মনে করি, অপর বলটি Q। তাহলে, 6 ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি 8 একক বলটি 6 একক বলের দিকে সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।



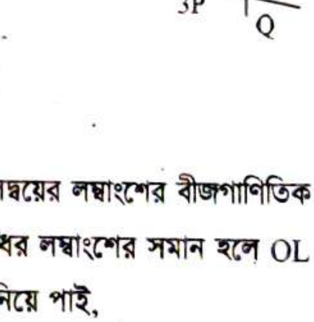
$\therefore Q = \sqrt{8^2 + 6^2}$

বা, $Q^2 = 100$

বা, Q = 10

$\therefore$ অপর বলটি 10N. **(Ans.)**

3. মনে করি O বিন্দু হতে OP ও OQ বরাবর যথাক্রমে 2P ও 3P বলদ্বয় ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি 4P, OR বরাবর ক্রিয়া করে। O বিন্দু থেকে PQ ছেদকের ওপর OL লম্বটানি।



OL বরাবর 2P ও 3P বলদ্বয়ের লম্বাংশের বীজগাণিতিক যোগফল একই দিকে লব্ধির লম্বাংশের সমান হলে OL বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

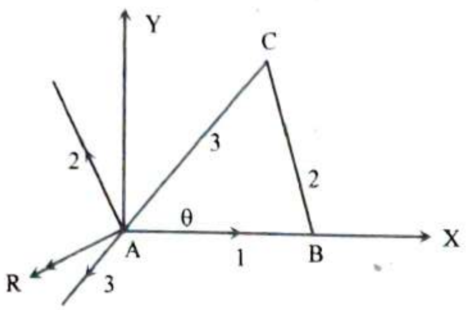
2P cosPOL + 3P cosQOL = 4P cosROL

বা, $2P\dfrac{OL}{OP} + 3P\dfrac{OL}{OQ} = 4P\dfrac{OL}{OR}$

$\therefore \dfrac{2}{OP} + \dfrac{3}{OQ} = \dfrac{4}{OR}$ **(দেখানো হলো)**

▶ অনুচ্ছেদ-8.6 | পৃষ্ঠা-৩২৩

মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ইহার A বিন্দুতে AB, BC ও CA বাহুর সমান্তরাল দিকে যথাক্রমে 1, 2 ও 3 একক বল ক্রিয়ারত আছে।



AB রেখাকে x-অক্ষ এবং AY কে y-অক্ষ বিবেচনা করি। ধরি, বলগুলির লব্ধি R, AX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, AX ও AY রেখা বরাবর বলগুলি ও তাদের লব্ধির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta = 1\cos0° + 2\cos120° + 3\cos240°$$
$$= 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$R\sin\theta = 1\sin0° + 2\sin120° + 3\sin240°$$
$$= 0 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2-3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \quad R = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}$$

এবং $\tan\theta = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan30°$

$= \tan(180° + 30°) = \tan 210°$

$\therefore\ \theta = 30°$ অথবা $210°$

যেহেতু $R\cos\theta$ ও $R\sin\theta$ এর মান ঋণাত্মক কাজেই θ এর মান 30° না হয়ে 210° হবে।

$\therefore\ \theta = 210°$.

সুতরাং বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{3}$ একক এবং 1 একক মানের বলের সাথে 210° কোণে ক্রিয়া করে। **(Ans.)**

অনুশীলনী-8(A) এর সমাধান

1. (i) মনে করি, P একক মানের দুইটি সমান বল O বিন্দুতে পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়ারত। এই বলদ্বয়ের লব্ধি $3\sqrt{3}$ একক হলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে আমরা পাই,

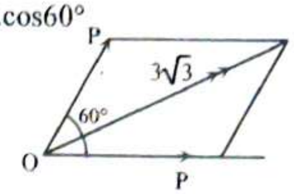
$(3\sqrt{3})^2 = P^2 + P^2 + 2P.P.\cos60°$

বা, $27 = 2P^2 + P^2$

বা, $27 = 3P^2$

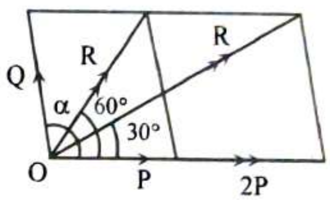
বা, $P^2 = 9$

$\therefore\ P = 3$



সুতরাং সমান বলদ্বয় 3 একক করে। **(Ans.)**

(ii) মনে করি, O বিন্দুতে P ও Q মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত এবং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α.



প্রশ্নানুসারে, $\tan60° = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ .... (i)

আবার, P- বলটিকে দ্বিগুণ করলে পাই,

$\tan30° = \dfrac{Q\sin\alpha}{2P + Q\cos\alpha}$ .... (ii)

এখন, (i) ÷ (ii)

$\dfrac{\tan60°}{\tan30°} = \dfrac{2P + Q\cos\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2P + Q\cos\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

বা, $3 = \dfrac{2P + Q\cos\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

বা, $3(P + Q\cos\alpha) = 2P + Q\cos\alpha$

বা, $P = -2Q\cos\alpha$ .... (3)

আবার (i) নং হতে পাই, $\tan60° = \dfrac{Q\sin\alpha}{-2Q\cos\alpha + Q\cos\alpha}$

$= \dfrac{Q\sin\alpha}{-Q\cos\alpha} = -\tan\alpha$

বা, $\tan\alpha = -\tan60° = \tan(180° - 60°) = \tan120°$

$\therefore\ \alpha = 120°$

সুতরাং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120° **(Ans.)**

(iii) মনে করি, P মানের দুইটি সমান বল O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত এবং বলদ্বয়ের লব্ধি R.

শর্তমতে, $R^2 = 3P.P = 3P^2$

তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$3P^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\alpha$

বা, $3P^2 = 2P^2 + 2P^2.\cos\alpha$

বা, $3P^2 - 2P^2 = 2P^2.\cos\alpha$

বা, $P^2 = 2P^2.\cos\alpha$

বা, $2\cos\alpha = 1$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos60°$ $\therefore \alpha = 60°$

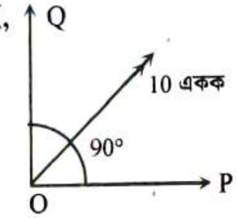
সুতরাং বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°. **(Ans.)**

(iv) মনে করি, P ও Q (যেখানে $P > Q$) মানের দুইটি বল O বিন্দুতে কার্যরত।

সুতরাং বৃহত্তম লব্ধি, $P + Q = 14$ একক।

এখন, বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে এদের লব্ধি = 10 একক।

বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে পাই,



$(10)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos90°$

বা, $100 = P^2 + Q^2 + 2PQ.0$

বা, $100 = P^2 + Q^2$

বা, $P^2 + Q^2 = 100$ .... (i)

বা, $(P + Q)^2 - 2PQ = 100$

বা, $(14)^2 - 2PQ = 100$

বা, $196 - 100 = 2PQ$

বা, $96 = 2PQ$

বা, $PQ = 48$ .... (ii)

আবার, $P^2 + Q^2 = 100$ [(i) নং হতে]

বা, $(P - Q)^2 + 2PQ = 100$

বা, $(P - Q)^2 + 2 \times 48 = 100$ [(ii)নং হতে]

বা, $(P - Q)^2 = 100 - 96$

বা, $(P - Q)^2 = 4$

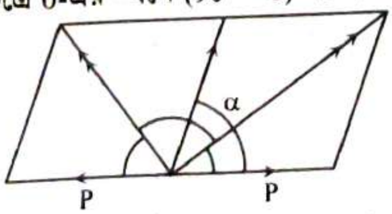
বা, $P - Q = 2$ একক

সুতরাং ক্ষুদ্রতম লব্ধি = 2 একক। **(Ans.)**

(v) মনে করি, P ও Q মানের দুইটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ α এবং লব্ধি P বলের দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ ... ... (i)

প্রশ্নমতে, একটি বলকে বিপরীতমুখী করলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α এর পরিবর্তে $(\pi - \alpha)$ হয় এবং সেক্ষেত্রে θ-এর স্থলে $(90° - \theta)$ হবে।



সুতরাং $\tan(90° - \theta) = \frac{Q\sin(\pi - \alpha)}{P + Q\cos(\pi - \alpha)}$

বা, $\cot\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P - Q\cos\alpha}$ ... ... (ii)

এখন, (i) কে (ii) দ্বারা গুণ করে পাই,

$\tan\theta.\cot\theta = \frac{(Q\sin\alpha)^2}{P^2 - (Q\cos\alpha)^2}$

বা, $1 = \frac{Q^2\sin^2\alpha}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}$

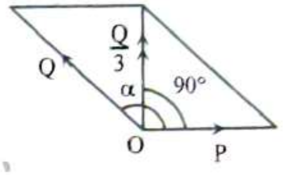
বা, $P^2 - Q^2\cos^2\alpha = Q^2\sin^2\alpha$

বা, $P^2 = Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$

বা, $P^2 = Q^2$ $\therefore P = Q$

অতএব বলদ্বয়ের মান সমান। **(প্রমাণিত)**

(vi) মনে করি, O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি $\frac{Q}{3}$, P বলের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। $(Q > P)$



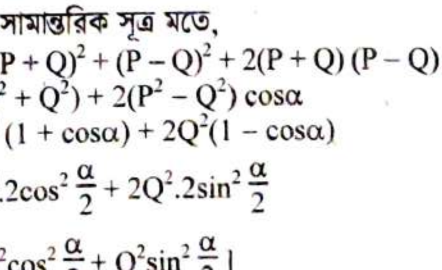
$\therefore \frac{Q}{3} = \sqrt{Q^2 - P^2}$

বা, $\frac{Q^2}{9} = Q^2 - P^2$

বা, $P^2 = Q^2 - \frac{Q^2}{9} = \frac{8Q^2}{9}$ বা, $\frac{Q^2}{P^2} = \frac{9}{8}$ বা, $\frac{Q}{P} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\therefore Q : P = 3 : 2\sqrt{2}$ **(প্রমাণিত)**

(vii) মনে করি, O বিন্দুতে P, Q $(P > Q)$ বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি $(P + Q)$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $(P - Q)$ যথাক্রমে OA এবং OB বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি R, OC বরাবর ক্রিয়া করে এবং লব্ধি R, OA রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle AOC = \theta$.



বলের সামান্তরিক সূত্র মতে,

$R^2 = (P + Q)^2 + (P - Q)^2 + 2(P + Q)(P - Q)\cos\alpha$

$= 2(P^2 + Q^2) + 2(P^2 - Q^2)\cos\alpha$

$= 2P^2(1 + \cos\alpha) + 2Q^2(1 - \cos\alpha)$

$= 2P^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2Q^2.2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$= 4[P^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + Q^2\sin^2\frac{\alpha}{2}]$

$\therefore R = 2\sqrt{P^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + Q^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ **(Ans.)**

আবার, $\tan\theta = \dfrac{(P-Q)\sin\alpha}{(P+Q)+(P-Q)\cos\alpha}$

$= \dfrac{(P-Q)\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha)+Q(1-\cos\alpha)}$

$= \dfrac{(P-Q)\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{P.2\cos^2\frac{\alpha}{2}+Q.\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2(P-Q)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2(P\cos^2\frac{\alpha}{2}+Q\sin^2\frac{\alpha}{2})}$

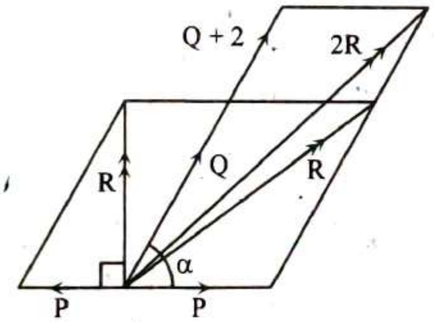
$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{(P-Q)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{P\cos^2\frac{\alpha}{2}+Q\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left\{\dfrac{(P-Q)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{P\cos^2\frac{\alpha}{2}+Q\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right\}$

$\therefore$ লব্ধি R, OA রেখার সাথে

$\tan^{-1}\left\{\dfrac{(P-Q)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{P\cos^2\frac{\alpha}{2}+Q\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right\}$ কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

(viii)



মনে করি, P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

তাহলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ ... ... (i)

Q কে 2 একক পরিমাণ বৃদ্ধি করলে লব্ধি দ্বিগুণ হয়।

$\therefore (2R)^2 = P^2 + (Q+2)^2 + 2P(Q+2)\cos\alpha$

বা, $4R^2 = P^2 + Q^2 + 4Q + 4 + 2PQ\cos\alpha + 4P\cos\alpha$

বা, $4R^2 = R^2 + 4(Q + P\cos\alpha + 1)$

বা, $3R^2 = 4(Q + P\cos\alpha + 1)$

বা, $Q + P\cos\alpha + 1 = \frac{3}{4}R^2$

$\therefore Q + P\cos\alpha = \frac{3}{4}R^2 - 1$ ... ... (ii)

আবার, P বিপরীতমুখী হলে লব্ধি, R, P বলের উপর লম্ব হয়।

$\therefore R^2 = Q^2 - P^2$ ... ... (iii)

(i) + (iii) করে পাই,

$2R^2 = 2Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $R^2 = Q(Q + P\cos\alpha)$

$\therefore Q + P\cos\alpha = \dfrac{R^2}{Q}$

(ii) নং এ $Q + P\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে পাই,

$\dfrac{R^2}{Q} = \frac{3}{4}R^2 - 1$

বা, $4R^2 = 3QR^2 - 4Q$

বা, $3QR^2 - 4R^2 = 4Q$

বা, $R^2(3Q-4) = 4Q$

বা, $R = \dfrac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{3Q-4}}$ **(প্রমাণিত)**

(ix) 8N ও 6N বলদ্বয় পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে।

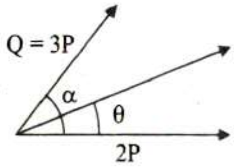
$\therefore$ লব্ধি, $R = \sqrt{8^2 + 6^2 + 2.8.6.\cos 120^\circ}$

$= \sqrt{64 + 36 + 96\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \sqrt{64 + 36 - 48} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\therefore$ লব্ধি $2\sqrt{13}$N **(Ans.)**

(x) মনে করি, 2P এবং Q = 3P মানের দুইটি বল α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি, 2P এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan\theta = \dfrac{3P\sin\alpha}{2P + 3P\cos\alpha}$

আবার, বলদ্বয় 4P এবং 3P + 6 হলে,

$\tan\theta = \dfrac{(3P+6)\sin\alpha}{4P + (3P+6)\cos\alpha}$

শর্তানুসারে, $\dfrac{3P\sin\alpha}{2P + 3P\cos\alpha} = \dfrac{(3P+6)\sin\alpha}{4P + (3P+6)\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{4P + (3P+6)\cos\alpha}{2P + 3P\cos\alpha} = \dfrac{(3P+6)\sin\alpha}{3P\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{4P + (3P+6)\cos\alpha - 2P - 3P\cos\alpha}{2P + 3P\cos\alpha} = \dfrac{(3P+6)\sin\alpha - 3P\sin\alpha}{3P\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{2P + 6\cos\alpha}{P(2 + 3\cos\alpha)} = \dfrac{6\sin\alpha}{3P\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{P + 3\cos\alpha}{2 + 3\cos\alpha} = 1$

বা, $P + 3\cos\alpha = 2 + 3\cos\alpha$

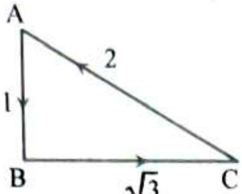
বা, $P = 2 + 3\cos\alpha - 3\cos\alpha$

$\therefore\ P = 2$

$\therefore\ Q = 3P = 3 \times 2 = 6$N **(Ans.)**

(xi) যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে তাই এদেরকে ক্রমান্বয়ে মান ও দিক অনুযায়ী ত্রিভুজ আকারে প্রকাশ করা যায়। ΔABC এর AB, BC, CA দ্বারা যথাক্রমে $1, \sqrt{3}$ ও 2 মানের বল প্রকাশ করা হল

$\therefore \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$



অর্থাৎ ABC সমকোণী ত্রিভুজ যেখানে $\angle ABC = 90°$

$\angle ACB = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$

এবং $\angle BAC = 90° - 30° = 60°$

$\therefore$ 1 ও $\sqrt{3}$ মানের বলের অন্তর্গত কোণ $180° - 90° = 90°$

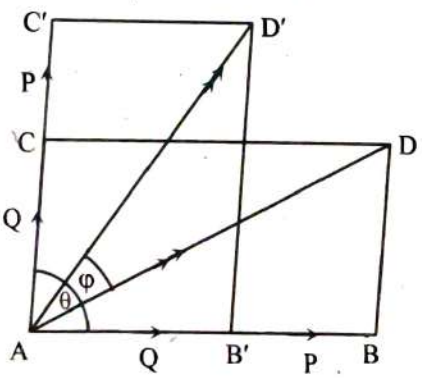
1 ও 2 " " " " $180° - 60° = 120°$

2 ও $\sqrt{3}$ " " " " $180° - 30° = 150°$

2(i). মনে করি, ABDC সামান্তরিকের AB ও AC বাহু দ্বারা P ও Q বলদ্বয় এবং ঐ সামান্তরিকের AD কর্ণ দ্বারা তাদের লব্ধি সূচিত করা হয়েছে।

P ও Q এর অবস্থান বিনিময় করলে AB বরাবর AB′ দ্বারা Q, AC বরাবর AC′ দ্বারা P এবং AB′D′C′ সামান্তরিকের AD′ কর্ণ দ্বারা তাদের লব্ধি সূচিত হয়েছে।

তাহলে $\angle DAD' = \varphi$ এবং $AD = AD'$



আবার $\angle BAD = \angle C'AD' = \frac{1}{2}(\theta - \varphi)$

$\therefore \quad \angle BAD' = \angle CAD = \frac{1}{2}(\theta - \varphi) + \varphi$

$= \frac{1}{2}(\theta + \varphi) = \angle BDA$

এখন, ΔBAD হতে পাই, $\frac{AB}{\sin BDA} = \frac{BD}{\sin BAD}$

বা, $\frac{P}{\sin\frac{1}{2}(\theta + \varphi)} = \frac{Q}{\sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi)}$

বা, $\frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta + \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi)}$

বা, $\frac{P - Q}{P + Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta + \varphi) - \sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta + \varphi) + \sin\frac{1}{2}(\theta - \varphi)}$

[বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{P - Q}{P + Q} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\theta.\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\theta.\cos\frac{1}{2}\varphi}$

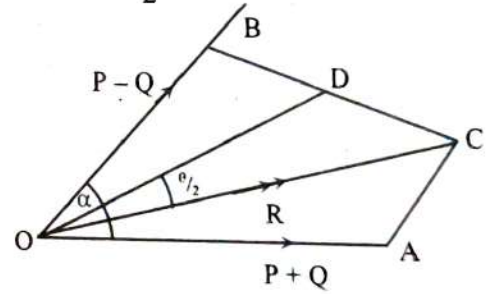
বা, $\frac{P - Q}{P + Q} = \cot\frac{1}{2}\theta.\tan\frac{1}{2}\varphi$

বা, $\frac{P - Q}{P + Q}\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\varphi}{2}$

$\therefore \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{P - Q}{P + Q}.\tan\frac{\theta}{2}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) মনে করি, P + Q ও P − Q মানের বলদুইটি যথাক্রমে OA ও OB রেখা বরাবর ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি R, OC রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল।

আবার, ধরি, $\angle AOB$- এর সমদ্বিখন্ডক রেখা OD এর সাথে OC রেখা $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে।



অর্থাৎ $\angle COD = \frac{\theta}{2}$ এবং $\angle AOD = \angle BOD = \frac{\alpha}{2}$.

তাহলে $\angle AOC = \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}$ এবং

$\angle BOC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2} = \angle OCA$

এখন, AOC ত্রিভুজ হতে বলের সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$\frac{P + Q}{\sin OCA} = \frac{P - Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin OAC}$

১ম ও ২য় অনুপাত নিয়ে, $\frac{P + Q}{\sin OCA} = \frac{P - Q}{\sin AOC}$

বা, $\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{\sin OCA}{\sin AOC} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$

বা, $\frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2P}{2Q} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\theta}{2}}$

বা, $\frac{P}{Q} = \tan\frac{\alpha}{2}.\cot\frac{\theta}{2}$

বা, $\frac{P}{Q} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}$

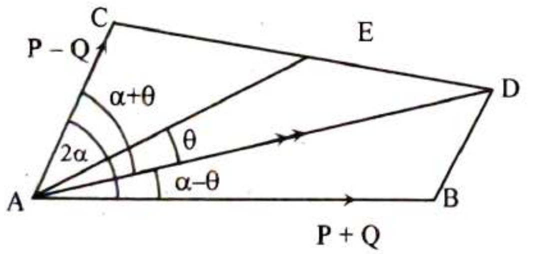
$\therefore$ $P : Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$. **(প্রমাণিত)**

(iii) মনে করি, $P + Q$ ও $P - Q$ মানের বলদ্বয় যথাক্রমে AB ও AC বরাবর 2α কোণে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি AD বরাবর ক্রিয়া করে।

আবার ধরি, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক রেখা AE এর সাথে লব্ধি AD রেখা θ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে $\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = \alpha - \theta$

এবং $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC = \alpha + \theta$



ΔABD হতে বলের সাইনের সূত্রের সাহায্যে পাই,

$\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin BAD}$

বা, $\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)}$

বা, $\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$

বা, $\frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2P}{2Q} = \frac{2\sin\alpha.\cos\theta}{2\cos\alpha.\sin\theta}$

বা, $\frac{P}{Q} = \tan\alpha.\cot\theta$ বা, $\frac{P}{Q} = \frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$

বা, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$. **(দেখানো হলো)**

(iv) মনে করি, OA এবং OB রেখাদ্বয় দ্বারা যথাক্রমে P ও Q বলদুইটি সূচিত হয় এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α অর্থাৎ $\angle AOB = \alpha$. যেহেতু বলদ্বয়ের লব্ধি $\sqrt{3}Q$

P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$\sqrt{3}Q \cos 30° = P\cos 0° + Q\cos\alpha$

বা $\sqrt{3}\, Q. \frac{\sqrt{3}}{2} = P + Q \cos\alpha$

$\therefore Q \cos\alpha = \frac{3}{2}Q - P$

আবার, সামান্তরিক সূত্রানুসারে,

$(\sqrt{3}Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $3Q^2 = P^2 + Q^2 + 2P\left(\frac{3}{2}Q - P\right)$

বা, $3Q^2 = P^2 + Q^2 + 3PQ - 2P^2$

বা, $P^2 - 3PQ + 2Q^2 = 0$

বা, $P^2 - PQ - 2PQ + 2Q^2 = 0$

বা, $P(P - Q) - 2Q(P - Q) = 0$

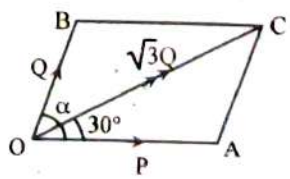
বা, $(P - Q)(P - 2Q) = 0$

$\therefore$ $P = Q$ অথবা $2Q$ **(দেখানো হলো)**

বিকল্প সমাধান: মনে করি, OA এবং OB রেখাদ্বয় দ্বারা যথাক্রমে P ও Q বল দুইটি সূচিত হয় এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α অর্থাৎ $\angle AOB = \alpha$.

$\therefore$ P ও $\sqrt{3}Q$ এর মধ্যবর্তী কোণ 30°

$\therefore$ Q ও $\sqrt{3}Q$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha - 30°$



$\therefore$ বলের সাইনের সূত্র হতে পাই,

$\frac{P}{\sin(\alpha - 30)} = \frac{Q}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}Q}{\sin(180° - \alpha)}$

২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই, $\frac{Q}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}Q}{\sin\alpha}$

বা, $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$ বা, $2 = \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$

বা, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60° = \sin(180° - 60°)$

$= \sin 120°$

$\therefore \alpha = 60°$ অথবা $120°$

১ম ও ২য় অনুপাত থেকে $\frac{P}{\sin(60° - 30°)} = \frac{Q}{\sin 30°}$

বা, $\frac{P}{\sin 30°} = \frac{Q}{\sin 30°}$ [যখন $\alpha = 30°$]

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

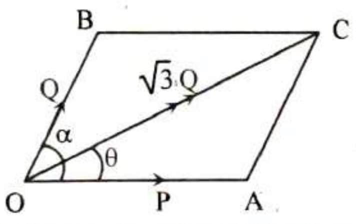
অথবা ১ম ও ২য় অনুপাত থেকে,

$\frac{P}{\sin(120° - 30°)} = \frac{Q}{\sin 30°}$ [যখন $\alpha = 120°$]

বা, $\frac{P}{\sin 90°} = \frac{Q}{\frac{1}{2}}$ বা, $\frac{P}{1} = 2Q$

$\therefore P = 2Q$. **(দেখানো হলো)**

বিকল্প সমাধান:



মনে করি, OA ও OB বরাবর যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয় ক্রিয়া করে। সুতরাং OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা লব্ধি বল $\sqrt{3}Q$ সূচিত হয়। লব্ধি OA এর সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন OAC ত্রিভুজ হতে কোসাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$$\cos 30° = \frac{(\sqrt{3}Q)^2 + P^2 - Q^2}{2.\sqrt{3}Q.P}$$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2Q^2 + P^2}{2\sqrt{3}PQ}$

বা, $P^2 + 2Q^2 = 3PQ$

বা, $P^2 - 3PQ + 2Q^2 = 0$

বা, $P^2 - 2PQ - PQ + 2Q^2 = 0$

বা, $P(P - 2Q) - Q(P - 2Q) = 0$

বা, $(P - 2Q)(P - Q) = 0$

বা, $P - 2Q = 0$ অথবা, $P - Q = 0$

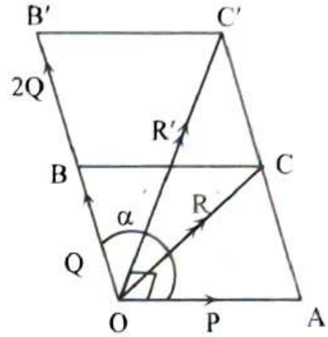
বা, $P = 2Q$ অথবা, $P = Q$ **(প্রমাণিত)**

(v) মনে করি, P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি R। যখন Q বলের মান দ্বিগুণ হয় তখন লব্ধি R′, P বলের সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে।

ধরি, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

তাহলে ১ম ক্ষেত্রে বলের সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ .... (i)



২য় ক্ষেত্রে, $\tan 90° = \frac{2Q.\sin\alpha}{P + 2Q.\cos\alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{P + 2Q.\cos\alpha}{2Q.\sin\alpha}$ বা, $0 = \frac{P + 2Q\cos\alpha}{2Q\sin\alpha}$

বা, $P + 2Q\cos\alpha = 0$ বা, $2Q\cos\alpha = -P$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $R^2 = P^2 + Q^2 - P^2$

বা, $R^2 = Q^2$

$\therefore R = Q$ **(দেখানো হলো)**

(vi) মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ α এবং বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{P + Q}{3}$

তাহলে আমরা পাই, $\left(\frac{P + Q}{3}\right)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos\alpha$

বা, $\left(\frac{P + Q}{3}\right)^2 - (P^2 + Q^2) = 2PQ.\cos\alpha$

বা, $\frac{(P + Q)^2 - 9(P^2 + Q^2)}{9} = 2PQ.\cos\alpha$

বা, $\frac{P^2 + 2PQ + Q^2 - 9P^2 - 9Q^2}{9} = 2PQ\cos\alpha$

বা, $\frac{2PQ - 8(P^2 + Q^2)}{9} = 2PQ\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \frac{PQ - 4(P^2 + Q^2)}{9PQ}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left\{\frac{PQ - 4(P^2 + Q^2)}{9PQ}\right\}$

সুতরাং বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\cos^{-1}\left\{\frac{PQ - 4(P^2 + Q^2)}{9PQ}\right\}$

(দেখানো হলো)

(vii) মনে করি, P মানের দুইটি সমান বল পরস্পর 2β কোণে ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি R

$\therefore \quad R = \{P^2 + P^2 + 2P.P.\cos2\beta\}^{\frac{1}{2}}$

$= (2P^2 + 2P^2\cos2\beta)^{\frac{1}{2}}$

$= \{2P^2.(1 + \cos2\beta)\}^{\frac{1}{2}} = \{4P^2\cos^2\beta\}^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \quad R = 2P\cos\beta$ .... (i)

আবার, বলদ্বয় পরস্পর 2α কোণে ক্রিয়ারত হলে

$2R = \{P^2 + P^2 + 2P.P.\cos2\alpha\}^{\frac{1}{2}}$

$= (2P^2 + 2P^2.\cos2\alpha)^{\frac{1}{2}} = (4P^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$

বা, $2.2P\cos\beta = 2P\cos\alpha$ [(i)নং হতে]

বা, $2\cos\beta = \cos\alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha = 2\cos\beta$ **(প্রমাণিত)**

(viii). মনে করি, α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q $(P > Q)$ মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R। ইহাদের বৃহত্তম লব্ধি F হলে $F = P + Q$ ...... (i)

এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি G হলে $G = P - Q$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$F + G = 2P$ বা, $P = \frac{1}{2}(F + G)$ .... (iii)

$\therefore$ এবং (i) নং হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$F - G = 2Q$ বা, $Q = \frac{1}{2}(F - G)$ .... (iv)

এখন, আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$= \left(\frac{F+G}{2}\right)^2 + \left(\frac{F-G}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{F+G}{2}\right)\left(\frac{F-G}{2}\right).\cos\alpha$

$= \frac{1}{4}(F + G)^2 + \frac{1}{4}(F - G)^2 + \frac{1}{2}(F^2 - G^2).\cos\alpha$

বা, $R^2 = \frac{1}{4}[2(F^2 + G^2) + 2(F^2 - G^2)\cos\alpha]$

$= \frac{1}{4}[2F^2(1 + \cos\alpha) + 2G^2(1 - \cos\alpha)]$

$= \frac{1}{4}\left[4F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]$

বা, $R^2 = F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore \quad R = \sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

অতএব লব্ধিমান $= \sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ **(প্রমাণিত)**

3.(i) θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ হলে আমরা পাই,

$\{(2m + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

বা, $(4m^2 + 4m + 1)(P^2 + Q^2) = (P^2 + Q^2) + 2PQ\cos\theta$

বা, $(P^2 + Q^2)(4m^2 + 4m + 1 - 1) = 2PQ\cos\theta$

বা, $(P^2 + Q^2).4m(m + 1) = 2PQ\cos\theta$ .... (i)

আবার, $(90° - \theta)$ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ হলে আমরা পাই,

$\{(2m - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(90° - \theta)$

বা, $(4m^2 - 4m + 1)(P^2 + Q^2) = (P^2 + Q^2) + 2PQ\sin\theta$

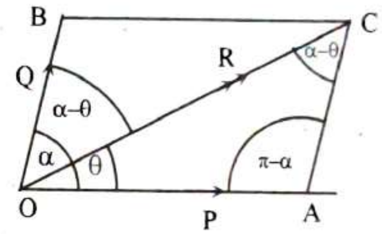
বা, $(P^2 + Q^2).4m(m - 1) = 2PQ\sin\theta$ .... (ii)

এখন (ii)নং সমীকরণকে (i)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে,

$\tan\theta = \frac{4m(m - 1)(P^2 + Q^2)}{4m(m + 1)(P^2 + Q^2)}$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{m - 1}{m + 1}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) α কোণে হেলানো OA এবং OB বরাবর P, Q বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে. এবং এদের লব্ধি R- এর মান ও দিক OC দ্বারা সূচিত।



এখন, OC রেখা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \quad \angle AOB = \alpha, \angle AOC = \theta$

তাহলে $\angle COB = \angle ACO = \alpha - \theta$

এবং $\angle OAC = 180° - \angle AOB = 180° - \alpha$

এখন OAC ত্রিভুজ হতে পাই,

$\frac{OC}{\sin OAC} = \frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC}$

বা, $\frac{OC}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{OA}{\sin(\alpha - \theta)}$

বা, $\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\alpha - \theta)}$

$\therefore \quad R = P.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \theta)}$ .... (i)

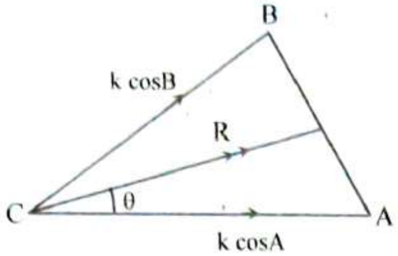
আবার, Q পরিবর্তিত হয়ে Q′ হলে R পরিবর্তিত হয়ে R′. হয়। তাহলে অনুরূপ ভাবে পাই, $R' = P.\frac{\sin}{\sin(\alpha - \theta')}$ .... (ii)

এখন, (ii) নং সমীকরণকে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{R'}{R} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{P} \times \frac{P}{\sin(\alpha - \theta')}$

$\therefore \quad \frac{R'}{R} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin(\alpha - \theta')}$ **(দেখানো হলো)**

(iii) মনে করি, ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বরাবর ক্রিয়ারত kcosA এবং kcosB বলদ্বয়ের লব্ধি R, kcosA এর সাথে θ কোণে আনত।



সুতরাং লব্ধি বল kcosB-এর সাথে C − θ কোণে আনত।

$\therefore R^2 = (k\cos A)^2 + (k\cos B)^2 + 2.k\cos A.k\cos B.\cos C$

বা, $R^2 = k^2\{\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\cos B.\cos C\}$ .... (i)

আবার, আমরা জানি, $A + B + C = \pi$ হলে

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$

$\therefore$ $\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 - \cos^2 C$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $R^2 = k^2(1 - \cos^2 C) = k^2.\sin^2 C$

$\therefore R = k.\sin C$

সুতরাং লব্ধি বল sinC-এর সমানুপাতিক।

এখন, CA এর লম্ব বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$k\sin C \sin\theta = k\cos A \sin 0^\circ + k\cos B \sin C$

বা, $\sin C \sin\theta = \cos B \sin C$

বা, $\sin\theta = \cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

বা, $\theta = \frac{\pi}{2} - B = \frac{A + B + C}{2} - B$

$\therefore$ $\theta = \frac{1}{2}(A - B + C)$

এবং $C - \theta = C - \frac{1}{2}(A - B + C) = \frac{1}{2}(C - A + B)$

সুতরাং লব্ধি বল C-কোণকে $\frac{1}{2}$ (C+ B − A)

এবং $\frac{1}{2}$(C+A−B) এই দুইটি অংশে বিভক্ত করে। **(প্রমাণিত)**

বিকল্প সমাধান: CA বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে

$R\cos\theta = k\cos A\cos 0^\circ + k\cos B\cos C$

$= k\cos A + k\cos B\cos C$

$= k\cos\{\pi - (B + C)\} + k\cos B\cos C$ $[\because A + B + C = \pi]$

$= -k\cos(B + C) + k\cos B\cos C$

$= -k(\cos B\cos C - \sin B\sin C) + k\cos B\cos C$

$= -k\cos B\cos C + k\sin B\sin C + k\cos B\cos C$

$= k\sin B\sin C$ ... ... (i)

CA রেখার ওপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে

$R\sin\theta = k\cos A\sin 0^\circ + k\cos B\sin C$

$= k\cos B\sin C$ ... ... (ii) $[\because \sin 0^\circ = 0]$

(ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে–

$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{k\cos B\sin C}{k\sin B\sin C}$

বা, $\tan\theta = \cot B = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} - B$ .... (iii)

(ii) এ $\theta = \frac{\pi}{2} - B$ বসিয়ে $R\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = k\cos B\sin C$

বা, $R\cos B = k\cos B\sin C$

বা, $R = k\sin C$

$\therefore R \propto \sin C$

$\therefore$ লব্ধি বল sin C এর সমানুপাতিক **(প্রমাণিত)**

(iii) হতে, $\theta = \frac{A + B + C}{2} - B$

$= \frac{A + B + C - 2B}{2}$ $[\because A + B + C = \pi]$

$= \frac{1}{2}(C + A - B)$ **(প্রমাণিত)**

$C - \theta = C - \frac{1}{2}(C + A - B)$

$= \frac{2C - C - A + B}{2} = \frac{1}{2}(C + B - A)$ **(প্রমাণিত)**

(iv) মনে করি, 3α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সহিত α কোণে নত। তাহলে লব্ধি বল R, Q বলের সহিত 2α কোণে ক্রিয়ারত।

$\therefore$ বলগুলিকে R বরাবর বিভাজন করে পাই,

$R\cos 0^\circ = P\cos(-\alpha) + Q.\cos 2\alpha$

বা, $R = P\cos\alpha + Q(2\cos^2\alpha - 1)$ .... (i)

আবার, $R\sin 0^\circ = P\sin(-\alpha) + Q\sin 2\alpha$

বা, $0 = -P\sin\alpha + Q.2\sin\alpha.\cos\alpha$

বা, $0 = (-P + 2Q\cos\alpha)\sin\alpha$

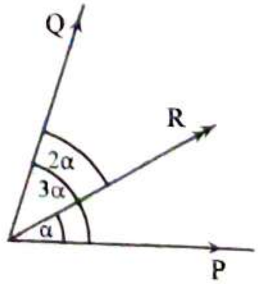
বা, $0 = -P + 2Q\cos\alpha$

বা, $2Q\cos\alpha = P$

বা, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q}$

$\therefore$ $\alpha = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

সুতরাং $3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$



এখন, (i) নং সমীকরণে $\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$R = P\left(\frac{P}{2Q}\right) + Q.\left\{2.\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$$

বা, $R = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q$

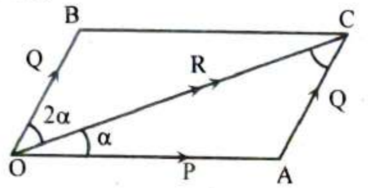
বা, $R = \frac{2P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2 - 2Q^2}{2Q}$

$\therefore \ R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

সুতরাং বলদ্বয়ের লব্ধি $= \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$। **(দেখানো হলো)**

বিকল্প সমাধান:



মনে করি, P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে OA ও OB বরাবর 3α কোণে ক্রিয়ারত এবং এদের লব্ধি R, OA রেখার সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \angle AOC = \alpha$ ফলে $\angle BOC = 2\alpha = \angle OCA$

এখন, AOC ত্রিভুজ হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই-

$$\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - 3\alpha)} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই

$\frac{P}{2\sin\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha}$ বা, $\frac{P}{2\cos\alpha} = Q$

বা, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q} \ \therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= 3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

(প্রমাণিত)

আবার, ২য় ও ৩য় অনুপাত হতে পাই

$\frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha}$ বা, $\frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$

বা, $\frac{R}{3 - 4\sin^2\alpha} = Q$ বা, $R = Q(3 - 4\sin^2\alpha)$

বা, $R = Q\{3 - 4(1 - \cos^2\alpha)\} = Q(4\cos^2\alpha - 1)$

বা, $R = Q\left(4.\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right) = Q\left(\frac{P^2}{Q^2} - 1\right)$

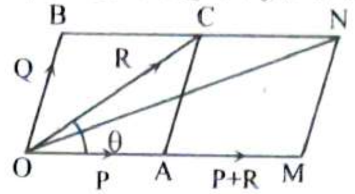
বা, $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ **(প্রমাণিত)**

(v) মনে করি, P ও Q বল দুইটির লব্ধি R যেখানে $OA = P, OB = Q$ এবং $OC = R$ ও $\angle COA = \theta$

এখন, OA-কে M পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন $AM = R = OC$ হয়।

$\therefore \ OM = P + R$

আবার, $P + R$ এবং Q বল দুইটির লব্ধি ON.



এখন $AM = CN$ [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$\therefore \ OC = CN$

অতএব, CON ত্রিভুজে, $OC = CN$

$\therefore \ \angle CON = \angle CNO$

আবার, $\angle CNO = \angle NOM$ [একান্তরকোণ]

$\therefore \ \angle CON = \angle NOM$

যেহেতু $\angle CON + \angle NOM = \angle COA = \theta$

বা, $\angle NOM + \angle NOM = \theta$

বা, $2\angle NOM = \theta$

$\therefore \ \angle NOM = \frac{\theta}{2}$

অর্থাৎ Q এবং $P + R$ বল দুইটির লব্ধি $P + R$ এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। **(দেখানো হলো)**

বিকল্প সমাধান: দেওয়া আছে, P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R ও P এর অন্তর্গত কোণ θ এবং $P + R$ ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি ও $(P + R)$ এর অন্তর্গত কোণ θ'। P ও Q এবং $P + R$ ও Q এর অন্তর্গত কোণ α

১ম ক্ষেত্রে, P এর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin\alpha$

বা, $Q\sin\alpha = R\sin\theta \ \ldots \ldots$ (i)

P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P + Q\cos\alpha = R\cos\theta \ \ldots \ldots$ (ii)

২য় ক্ষেত্রে, $\tan\theta' = \frac{Q\sin\alpha}{P + R + Q\cos\alpha}$

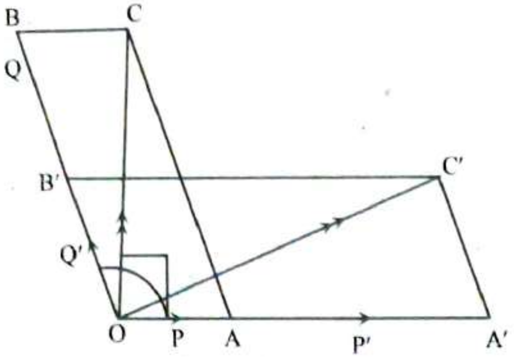
$= \frac{R\sin\theta}{R + R\cos\theta}$ [(i) ও (ii) হতে]

$= \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

অর্থাৎ $\tan\theta' = \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore \theta' = \frac{\theta}{2}$ **(দেখানো হলো)**

(vi) মনে করি, α কোণে OA এবং OB রেখা বরাবর P ও Q মানের বল দুইটি ক্রিয়ারত আছে এবং এদের লব্ধি P বলের সাথে লম্বভাবে অবস্থিত।



$\therefore$ P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P + Q\cos\alpha = 0$

বা, $Q.\cos\alpha = -P$

$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{P}{Q}$ .... (i)

আবার, Q′ বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $Q' + P'\cos\alpha = 0$

বা, $P'\cos\alpha = -Q'$ বা, $\cos\alpha = -\dfrac{Q'}{P'}$

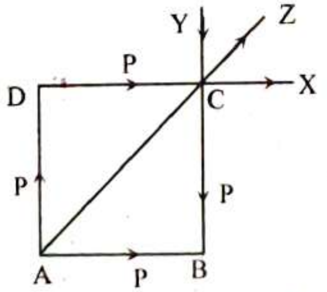
$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{Q'}{P'}$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii)নং সমীকরণ হতে পাই, $-\dfrac{P}{Q} = -\dfrac{Q'}{P'}$

বা, $-PP' = -QQ'$

$\therefore PP' = QQ'$ **(প্রমাণিত)**

4. (i) দেওয়া আছে, ABCD বর্গক্ষেত্রের AB, CB, AD ও DC বাহু বরাবর P মানের চারটি সমান বল ক্রিয়ারত। তাহলে AB ও AD বরাবর ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধি $= \sqrt{P^2 + P^2} = P\sqrt{2}$। এই লব্ধি বলটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ AC বরাবর ক্রিয়া করে।



এখন, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলগুলি হচ্ছে
CX বরাবর P বল, CB বরাবর P বল
এবং CZ বরাবর বল $P\sqrt{2}$.

এখন, যদি লব্ধি বল R, CX রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে বলের লম্বাংশের সূত্রানুসারে,

$R\cos\theta = P + P\sqrt{2}.\cos45° + P.\cos270°$
$= P + P + P.0 = P + P$

বা, $R\cos\theta = 2P$ .... (i)

আবার, $R\sin\theta = 0 + P\sqrt{2}.\sin45° + P.\sin270°$
$= P - P$

বা, $R\sin\theta = 0$ .... (ii)

তাহলে, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4P^2 + 0$
$\Rightarrow R^2 = 4P^2$

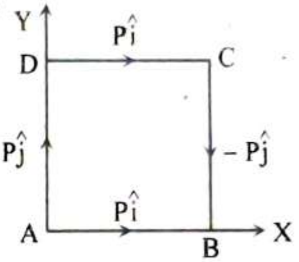
$\therefore R = 2P$

আবার, $(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{0}{2P} = 0$

$\therefore \theta = 0°$

সুতরাং লব্ধিবল 2P, CX রেখা অর্থাৎ DC রেখার সমান্তরালে ক্রিয়া করে। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

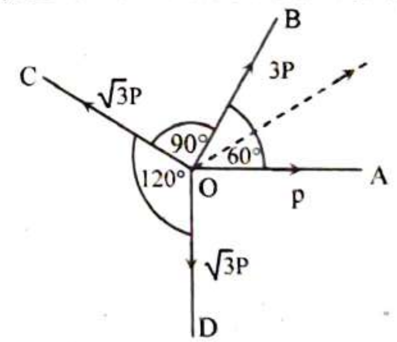


মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রের AB ও AD বাহু যথাক্রমে X ও Y অক্ষ বরাবর অবস্থিত। AB, CB, AD ও DC বাহু বরাবর ক্রিয়ারত সমান মানের বল চারটির ভেক্টর যথাক্রমে $P\hat{i}, -P\hat{j}, P\hat{j}$ ও $P\hat{i}$

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি $= P\hat{i} - P\hat{j} + P\hat{j} + P\hat{i} = 2P\hat{i}$

অর্থাৎ লব্ধির মান 2P এবং এটি X অক্ষের সমান্তরাল বা, AB রেখার সমান্তরালে ক্রিয়া করে। **(Ans.)**

(ii)



মনে করি, P, 3P, $\sqrt{3}P$ ও $\sqrt{3}P$ মানের বলগুলোর লব্ধি R, যা O বিন্দুতে OA এর সাথে θ কোণে ক্রিয়া করে। তাহলে OA বরাবর এবং এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = P\cos0° + 3P\cos60°$
$+ \sqrt{3}P\cos(90° + 60°) + \sqrt{3}P\cos270°$

$\Rightarrow R\cos\theta = P + 3P \times \dfrac{1}{2} - \sqrt{3}P\sin60° + 0$

$= P + \dfrac{3}{2}P - \sqrt{3}P.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $R\cos\theta = P$ ... ... (i)

এবং $R\sin\theta = P\sin0^\circ + 3P\sin60^\circ + \sqrt{3}P\sin(90^\circ + 60^\circ) + \sqrt{3}P\sin270^\circ$

$= 0 + 3P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}P - \sqrt{3}P$

$\therefore$ $R\sin\theta = \sqrt{3}P$ ... ... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = P^2 + 3P^2$

বা, $R^2 = 4P^2$ বা, $R = 2P$ (একক)

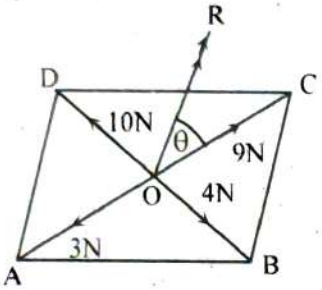
$(i) \Rightarrow R\cos\theta = P$

$\Rightarrow 2P\cos\theta = P \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \cos60^\circ$

$\therefore$ $\theta = 60^\circ$

সুতরাং লব্ধির মান = 2P যা OB বরাবর ক্রিয়াশীল। **(Ans.)**

(iii)



মনে করি, বলগুলোর লব্ধির মান R, যা O বিন্দুতে OC এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল।

এখন, OC এবং OD বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 9\cos0^\circ + 10\cos90^\circ + 3\cos180^\circ + 4\cos270^\circ$

$= 9 - 3$

$\therefore$ $R\cos\theta = 6$ .... (i)

এবং $R\sin\theta = 9\sin0^\circ + 10\sin90^\circ + 3\sin180^\circ + 4\sin270^\circ = 10 - 4$

$\therefore$ $R\sin\theta = 6$ .... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 6^2 + 6^2$

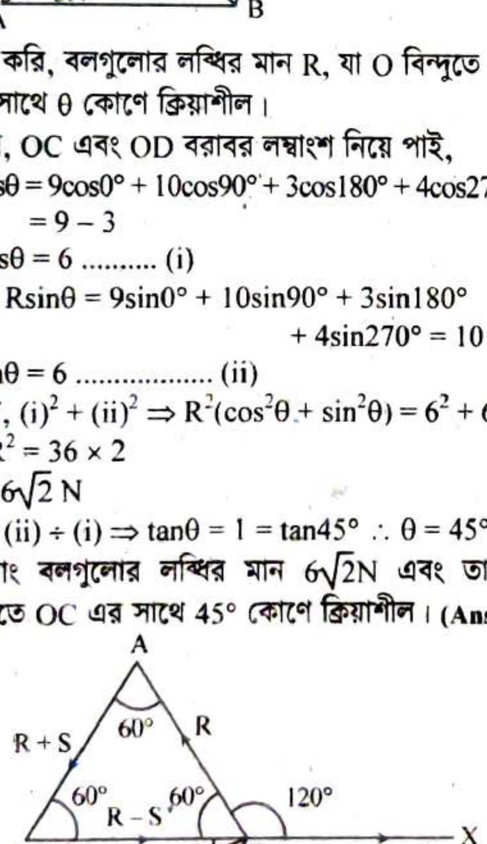
$\Rightarrow R^2 = 36 \times 2$

$\therefore$ $R = 6\sqrt{2}$ N

এবং $(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan45^\circ$ $\therefore \theta = 45^\circ$

সুতরাং বলগুলোর লব্ধির মান $6\sqrt{2}$N এবং তা O বিন্দুতে OC এর সাথে 45° কোণে ক্রিয়াশীল। **(Ans.)**

(iv)



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়ারত বলগুলির ক্রিয়াবিন্দু C.

$\therefore$ C বিন্দুতে CX বরাবর R – S, CA বরাবর R এবং CY বরাবর R + S বল ক্রিয়ারত বলে গণ্য করা যায়।

ধরি, বলগুলির লব্ধি F যা C বিন্দুতে CX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন CX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই।

$F\cos\theta = (R - S).\cos0^\circ + R.\cos120^\circ + (R + S).\cos240^\circ$

$= (R - S) - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}(R + S)$

$\therefore$ $F\cos\theta = -\frac{3}{2}.S$ .... (i)

এবং $F\sin\theta = (R - S).\sin0^\circ + R.\sin120^\circ + (R + S).\sin240^\circ$

$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}.R - \frac{\sqrt{3}}{2}(R + S)$

$\therefore$ $F\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.S$ .... (ii)

তাহলে $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$F^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{9}{4}.S^2 + \frac{3}{4}.S^2$

বা, $F^2 = 3.S^2 \Rightarrow F = \sqrt{3}S$ একক **(Ans.)**

(ii) নং কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan30^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ)$

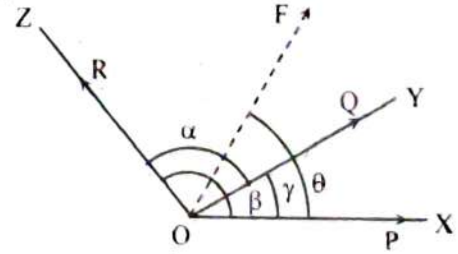
বা, $\tan\theta = \tan210^\circ$

$\therefore \theta = 210^\circ$ বা 30°

যেহেতু $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ উভয় ঋণাত্মক। সুতরাং $\theta = 210^\circ$

$\therefore$ লব্ধি R – S বলের সাথে 210° কোণে ক্রিয়াশীল। **(Ans.)**

(v)



মনে করি, P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি F বল OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, OX বরাবর এবং OX এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = P\cos0^\circ + Q.\cos\gamma + R\cos\beta$

$= P + Q\cos\gamma + R\cos\beta$ ... ... (1)

এবং $F\sin\theta = P\sin0° + Q\sin\gamma + R\sin\beta$

$= Q\sin\gamma + R\sin\beta$ ... ... (2)

এখন, $(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow$

$F^2 = (P + Q\cos\gamma + R\cos\beta)^2 + (Q\sin\gamma + R\sin\beta)^2$

$= P^2 + Q^2\cos^2\gamma + R^2\cos^2\beta + 2PQ\cos\gamma + 2PR\cos\beta + 2QR\cos\gamma.\cos\beta + Q^2\sin^2\gamma + R^2.\sin^2\beta + 2QR.\sin\gamma.\sin\beta$

$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ.\cos\gamma + 2PR\cos\beta + 2QR(\cos\gamma.\cos\beta + \sin\gamma.\sin\beta)$

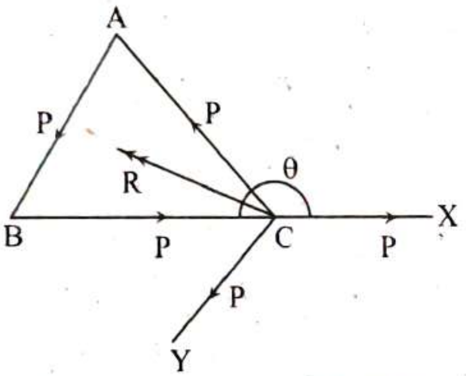
বা, $F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2PR\cos\beta + 2QR\cos(\beta - \gamma)$

বা, $F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2PR\cos\beta + 2QR\cos\alpha$

$\therefore F = [P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR\cos\alpha + 2RP\cos\beta + 2PQ\cos\gamma]^{\frac{1}{2}}$

(দেখানো হলো)

(vi)(a).



মনে করি, BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়ারত বলগুলির ক্রিয়াবিন্দু C.

$\therefore$ C বিন্দুতে CX, CA ও CY বরাবর P মানের বল ক্রিয়ারত।

ধরি, বলগুলির লব্ধি R, CX রেখা সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন CX রেখা এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই—

$R\cos\theta = P\cos0° + P\cos(\pi - C) + P\cos(\pi + B)$

$= P(1 - \cos C - \cos B)$ .... (i)

এবং $R\sin\theta = P\sin0° + P\sin(\pi - C) + P\sin(\pi + B)$

$= P(\sin C - \sin B)$ .... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$R^2 = P^2[(1 - \cos C - \cos B)^2 + (\sin C - \sin B)^2]$

$= P^2[3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(B + C)]$

$= P^2[3 - 2\cos C - 2\cos B + 2\cos(\pi - A)]$

বা, $R^2 = P^2[3 - 2(\cos C + \cos B + \cos A)]$

$\therefore R = P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

(প্রমাণিত)

(vi)(b)

4(vi) (a) হতে পাই

$R = p\sqrt{3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)}$..........(i)

এখন, $A + B + C = \pi$

$\therefore \cos A + \cos B + \cos C$

$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos C$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \sin\frac{C}{2}\right\}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A}{2} + \frac{3}{2}\right)\right]\right\}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right\}$

$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

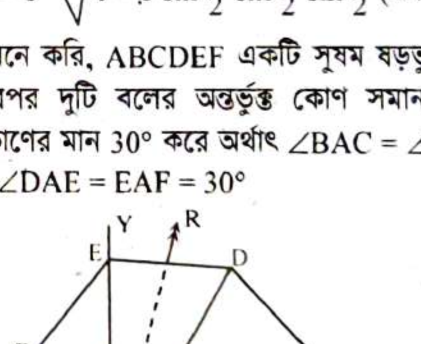
$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\therefore (i) \Rightarrow$

$R = P\sqrt{3 - 2(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})}$

$= P\sqrt{1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$ (প্রমাণিত)

(vii) মনে করি, ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। অতএব পরপর দুটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান এবং প্রতি কোণের মান 30° করে অর্থাৎ $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = EAF = 30°$



এখন, 1 ও 4 বল দুইটির ক্রিয়ারেখা AB এবং AE-কে যথাক্রমে AX এবং AY ধরি।

আবার, বলগুলির লব্ধি R, AX-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে AX এবং AY বরাবর বলগুলির এককে তাদের লব্ধির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 1.\cos0° + 2.\cos30° + 3.\cos60° + 4.\cos90° + 5.\cos120°$

$= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4(0) + 5\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 1 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}$

$\therefore R\cos\theta = \sqrt{3}$ .... (i)

এবং $R\sin\theta = 1.\sin0° + 2\sin30° + 3.\sin60° + 4.\sin90° + 5.\sin120°$

$= 1 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $R\sin\theta = 5 + 4\sqrt{3}$ .... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$R^2 = (\sqrt{3})^2 + (5 + 4\sqrt{3})^2$

$= 3 + 25 + 2.5.4\sqrt{3} + 3 \times 16 = 76 + 40\sqrt{3}$

$\therefore R^2 = 4(19 + 10\sqrt{3})$

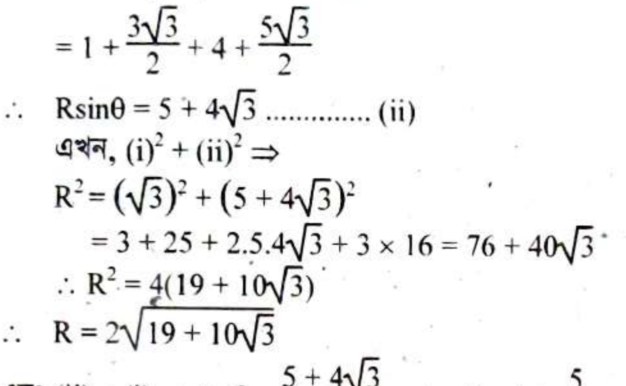
$\therefore$ $R = 2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$

এবং $(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = \frac{5 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = 4 + \frac{5}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(4 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore$ অতএব বলগুলির লব্ধির মান $= 2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\left(4 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ **(Ans.)**

(viii)



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত AD, BE, CF বরাবর যথাক্রমে kcosA, kcosB, kcosC বলত্রয় ক্রিয়াশীল। ধরি এদের লব্ধি F.

ধরি, $k\cos A = P$; $k\cos B = Q$; $k\cos C = R$

$\therefore P \wedge Q = \pi - C$; $Q \wedge R = \pi - A$ এবং $R \wedge P = \pi - B$

লব্ধি $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}$

$\therefore \vec{F}.\vec{F} = (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}).(\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R})$

$\Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2\vec{P}.\vec{Q} + 2\vec{Q}.\vec{R} + 2\vec{R}.\vec{P}$

$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos(\pi - C) + 2QR\cos(\pi - A) + 2RP\cos(\pi - B)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2QR\cos A - 2RP\cos B$

$= k^2\cos^2A + k^2\cos^2B + k^2\cos^2C - 2k^2\cos A\cos B\cos C - 2k^2\cos A\cos B\cos C - 2k^2\cos A\cos B\cos C$

$= k^2(\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C - 6\cos A\cos B\cos C)$

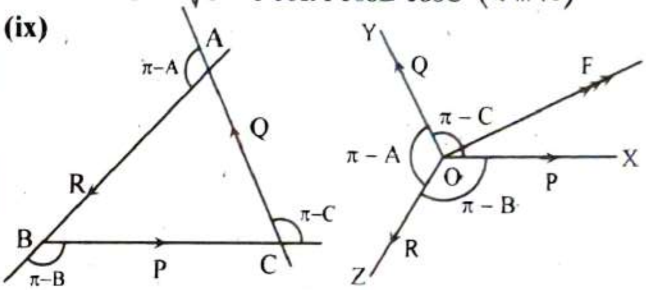
$= k^2(1 - 2\cos A\cos B\cos C - 6\cos A\cos B\cos C)$ [$\because \Delta ABC$-এ $A + B + C = \pi$ হলে $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$]

$\Rightarrow F^2 = k^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$

$\therefore F = k\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$

অর্থাৎ $F \propto \sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ (প্রমাণিত)

(ix)



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরালে OX, OY, OZ বরাবর যথাক্রমে একইক্রমে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R এবং এদের লব্ধি F.

প্রশ্নমতে, $P = k\cos A$, $Q = k\cos B$, $R = k\cos C$

এবং $P \wedge Q = \pi - C$; $Q \wedge R = \pi - A$ এবং

$R \wedge P = \pi - B$ লব্ধি, $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}$

ডট গুণন দ্বারা পাই,

$\vec{F}.\vec{F} = (\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}).(\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R})$

$\Rightarrow F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2\vec{P}.\vec{Q} + 2\vec{Q}.\vec{R} + 2\vec{R}.\vec{P}$

$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos(\pi - C) + 2QR\cos(\pi - A) + 2RP\cos(\pi - B)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2QR\cos A - 2RP\cos B$

$= k^2\cos^2A + k^2\cos^2B + k^2\cos^2C - 2k^2\cos A\cos B\cos C - 2k^2\cos A\cos B\cos C - 2k^2\cos A\cos B\cos C$

$= k^2(\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C - 6\cos A\cos B\cos C)$

$= k^2(1 - 2\cos A\cos B\cos C - 6\cos A\cos B\cos C)$

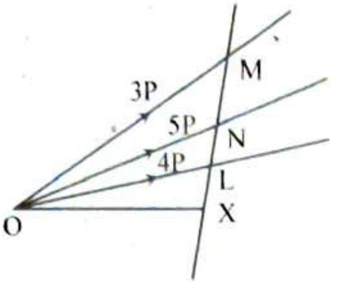
[$\because A + B + C = \pi$ হলে $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$]

$F^2 = k^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$

$\therefore F = k\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$

অর্থাৎ $F \propto \sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ (প্রমাণিত)

5.(i)



মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত 4P ও 3P বলদ্বয়ের লব্ধি 5P. ML ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে।

O বিন্দু হতে ছেদকের উপর OX লম্ব আঁকি। এখন OX বরাবর লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই।

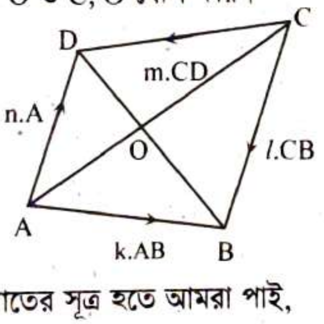
OX রেখা বরাবর 4P ও 3P বলের লম্বাংশের যোগফল একই রেখা বরাবর 5P-এর লম্বাংশের সমান।

$\therefore$ $4P\cos LOA + 3P\cos MOA = 5P.\cos NOA$

বা, $4P.\dfrac{OA}{OL} + 3P.\dfrac{OA}{OM} = 5P.\dfrac{OA}{ON}$

$\therefore$ $\dfrac{4}{OL} + \dfrac{3}{OM} = \dfrac{5}{ON}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) ABCD চতুর্ভুজের BD কর্ণের উপরস্থ একটি বিন্দু O নিই এবং A, O ও C, O যোগ করি।



তাহলে অনুপাতের সূত্র হতে আমরা পাই,

$k.\overrightarrow{AB} + n.\overrightarrow{AD} = (k+n).\overrightarrow{AO}$ ... ... (i)

$\therefore \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{n}{k}$

আবার, $l.\overrightarrow{CB} + m.\overrightarrow{CD} = (l+m)\overrightarrow{CO}$ ... ... (ii)

$\therefore \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{m}{l}$

এখন, যেহেতু ABCD চতুর্ভুজের AB, CB, CD এবং AD বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $k.\overrightarrow{AB}$, $l.\overrightarrow{CB}$, $m.\overrightarrow{CD}$ ও $n.\overrightarrow{AD}$ মানের চারটি বল সাম্যাবস্থায় রয়েছে।

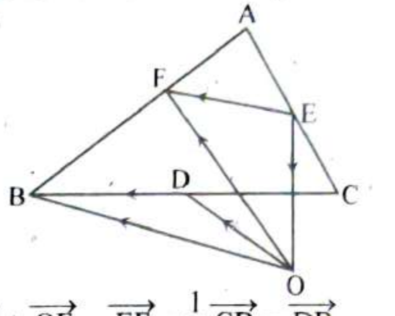
সুতরাং (i) ও (ii) নং থেকে প্রাপ্ত লব্ধিদ্বয়ের মান সমান ও একই রেখায় পরস্পর বিপরীতমুখী ক্রিয়াশীল হবে।

অর্থাৎ AO এবং CO একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{n}{k} = \dfrac{m}{l} \Rightarrow km = ln$. **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। একই সমতলে যেকোন বিন্দু O নিয়ে O, D; O, E; O, F; O, B এবং E, F যোগ করি।

বলগুলোকে ভেক্টরের সাহায্যে সূচিত করলে পাই,

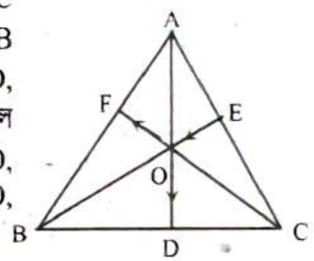


$\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB}$

সুতরাং $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$ এবং $\overrightarrow{EO}$ দ্বারা সূচিত বলগুলোর লব্ধি $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত হবে। **(প্রমাণিত)**

বিকল্প সমাধান: ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F একই সমতলে যেকোন বিন্দু O নিয়ে O, D; O, E; O, F; O, A; O, B; O, C যোগ করি।



$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ .... (i)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF}$ .... (ii)

$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{EO}$ .... (iii)

i, ii ও iii যোগ করে,

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO}\right) + 2\overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO}\right) = 2\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EO}\right)$$

বা, $\underline{0} + 2\overrightarrow{OB} + \underline{0} = 2\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EO}\right)$

বা, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EO}$

$\therefore \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB}$ **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

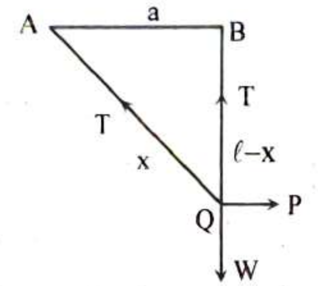
▶ অনুচ্ছেদ-৪.৪ | পৃষ্ঠা-৩৩০

মনে করি, P_1, P_2, ... কতগুলি সমতলীয় বল নির্দিষ্ট বিন্দু O তে ক্রিয়া করে। বলগুলির লব্ধি R এবং পরস্পর লম্বিক OX ও OY বরাবর বলগুলির লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি যথাক্রমে X ও Y দ্বারা সূচিত করা হলে, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

আমরা জানি, বলগুলি সাম্যবস্থায় থাকলে তাদের লব্ধির মান শূন্য হয়।
অর্থাৎ $R = 0$ বা $X^2 + Y^2 = 0$ হবে। কিন্তু X ও Y এর উভয়েই শূন্য (0) না হলে তাদের বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না। সুতরাং $X = 0, Y = 0$.
অতএব, সমতলীয় বলজোট সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হল লম্ব রেখা OX ও OY বরাবর তাদের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

▶ অনুচ্ছেদ-8.9.1 | পৃষ্ঠা-৩৩৫

1.



মনে করি, রশির টান T(যেহেতু আংটা অবাধে গড়িয়ে পড়তে পারে)
∴ উল্লম্ব রেখা BQ রেখার কার্যরত বল দুটির লব্ধি W−T, যা BQ বরাবর ক্রিয়াশীল।
ΔABQ এর BQ, QA ও AB এর সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে W−T, T ও P মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।
∴ সাম্যাবস্থায় বলের ত্রিভুজ সূত্র ও লামির উপপাদ্যের সমন্বয় হতে পাই,

$$\frac{W-T}{BQ} = \frac{T}{QA} = \frac{P}{AB}$$

$$= \frac{W-T+T}{BQ+QA} = \frac{W}{\ell} \; [\because BQ + QA = \text{সুতার দৈর্ঘ্য} = \ell]$$

অর্থাৎ $\frac{P}{AB} = \frac{W}{\ell}$ বা $P = \frac{W}{\ell}.AB$

$\therefore P = \frac{aW}{\ell}$ **(প্রমাণিত)**

আবার, $\frac{T}{QA} = \frac{W}{\ell}$ বা, $T = \frac{xW}{\ell}$

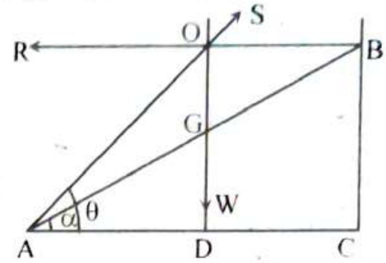
এখন সমকোণী ΔAQB এ, $AQ^2 = AB^2 + BQ^2$

বা, $x^2 = a^2 + (\ell - x)^2$

বা, $x^2 = a^2 + \ell^2 - 2\ell x + x^2 \quad \therefore x = \frac{a^2+\ell^2}{2\ell}$

$\therefore T = \frac{a^2+\ell^2}{2\ell} \cdot \frac{W}{\ell} \quad \therefore T = \frac{W(a^2+\ell^2)}{2\ell^2}$ **(প্রমাণিত)**

2. মনে করি, W ওজনের AB সমরূপ দন্ডটির ওজন এর মধ্যবিন্দু G তে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। মসৃণ BC দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R. দেওয়ালের ওপর B বিন্দুতে লম্বভাবে ক্রিয়া করে। W ও R বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হবে।



সুস্থিতির জন্য A বিন্দুতে কার্যরত কব্জার প্রতিক্রিয়া S অবশ্যই O বিন্দুগামী হবে। দন্ডটির ওজন W, AC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। বলত্রয় ΔOAD এর বাহুত্রয়ের সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়া করে বলে বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্রানুসারে এরা ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হবে।

$$\therefore \frac{R}{AD} = \frac{S}{OA} = \frac{W}{OD}$$

$$\therefore \frac{S}{OA} = \frac{W}{OD}$$

বা, $S = W.\frac{OA}{OD} = W\text{cosec}\theta$ [$\because \angle OAD = \theta$ ধরে]

$$= W\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$= W\sqrt{1+\left(\frac{AD}{OD}\right)^2}$$

$$= W\sqrt{1+\left(\frac{AD}{2GD}\right)^2} \; [\because \Delta BOG \cong \Delta ADG]$$

$$= W\sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\alpha} \; [\angle GAD = \alpha]$$

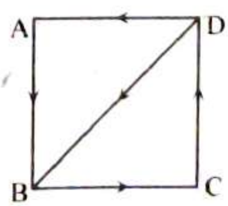
(দেখানো হলো)

এবং $\tan\theta = \frac{OD}{AD} = \frac{2GD}{AD} = 2\tan\alpha.$

∴ $\theta = \tan^{-1}(2\tan\alpha)$.
∴ কব্জার প্রতিক্রিয়া দেওয়ালের প্রতিক্রিয়ার সাথে $\tan^{-1}(2\tan\alpha)$ কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

? অনুশীলনী-8(B) এর সমাধান

1. (i)



ABCD বর্গক্ষেত্রের $2\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ বলসমূহ একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। তাহলে বলগুলোর ভেক্টর

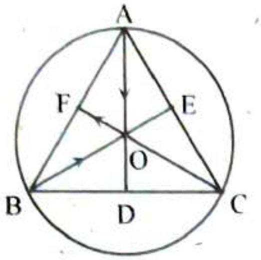
সমষ্টি $= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \left[\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}\right]$

$= 2.\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

সুতরাং বলগুলো ভারসাম্য সৃষ্টি করে। **(দেখানো হলো)**

(ii)



ΔABC এর পরিকেন্দ্র O থেকে BC, CA ও AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব।

সুতরাং D, E, F বিন্দুত্রয় BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।

ΔOBC-এ, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ .... (i)

ΔAOC-এ, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OE}$ .... (ii)

ΔOAB-এ, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF}$ .... (iii)

এখন, (1) + (2) + (3)

বা, $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

বা, $-\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

বা, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \underline{0}$

অর্থাৎ বলগুলোর লব্ধির মান শূন্য। সুতরাং বলগুলো সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। **(দেখানো হলো)**

(iii) মনে করি, প্রদত্ত বলত্রয় 4k, 7k ও 11k.

বলের ত্রিভুজ সূত্র হতে আমরা জানি, একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক একই ক্রমে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা গেলে তারা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। আবার যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হলে এদের দ্বারা ত্রিভুজ গঠিত হয় না।

এক্ষেত্রে, $P + Q = (4 + 7)k = 11k$, অর্থাৎ দুইটি বলের যোগফল তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর নয়। সুতরাং প্রদত্ত বল তিনটি কোন ত্রিভুজের বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায় না বলে তারা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।

বিশেষ ক্ষেত্রে :

মনে করি, বলত্রয়ের মান যথাক্রমে 4k, 7k এবং 11k.

এক্ষেত্রে, $4k + 7k = 11k$

প্রথম দুইটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান

$\therefore$ বলত্রয় একই রেখায় যদি এমনভাবে কাজ করে যে তৃতীয়টির দিক, প্রথম দুটির বিপরীত, তাহলে এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

(iv) যেহেতু, প্রদত্ত বলত্রয়ের অনুপাত $1 : 2 : 3$

মনে করি, বলগুলো k, 2k ও 3k.

আমরা জানি, একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক একই ক্রমে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা সূচিত করা গেলে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

আবার, যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হলে এদের দ্বারা ত্রিভুজ গঠিত হয় না।

এক্ষেত্রে, $1k + 2k = 3k$ অর্থাৎ দুইটি বলের যোগফল তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর নয়। সুতরাং প্রদত্ত বল তিনটিকে কোন ত্রিভুজের বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায় না বলে তারা সাম্যবস্থায় থাকতে পারে না।

বিশেষ ক্ষেত্রে :

মনে করি, বলত্রয়ের মান যথাক্রমে k, 2k এবং 3k.

এক্ষেত্রে, $k + 2k = 3k$

এখানে দুইটি বলের যোগফল তৃতীয় বলের সমান

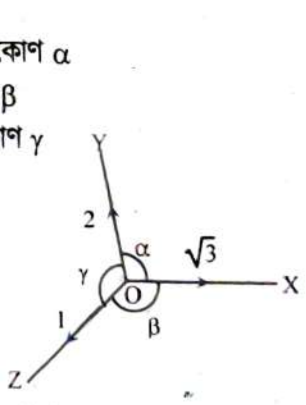
$\therefore$ বলত্রয় একই রেখায় যদি এমনভাবে কাজ করে যে তৃতীয়টির দিক, প্রথম দুটির বিপরীত, তাহলে এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

(v) মনে করি, $\sqrt{3}$, 2 এবং 1 মানের তিনটি বল O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ বরাবর ক্রিয়ারত হয়ে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

ধরি, $\sqrt{3}$ ও 2 এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\sqrt{3}$ ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ β

এবং 2 ও 1 এর মধ্যবর্তী কোণ γ



যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে সুতরাং যে কোন দুইটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীতমুখী

$1^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2.\sqrt{3}.2\cos\alpha$

বা, $1 = 3 + 4 + 4\sqrt{3}.\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{6}{4\sqrt{3}}$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\alpha = -\cos 30°$

বা, $\cos\alpha = \cos(180° - 30°)$

বা, $\cos\alpha = \cos 150°$

$\therefore \alpha = 150°$

এবং $(\sqrt{3})^2 = 2^2 + 1^2 + 2.2.1.\cos\gamma$

বা, $3 = 4 + 1 + 4\cos\gamma$

বা, $3 = 5 + 4\cos\gamma$

বা, $4\cos\gamma = -2$

বা, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\gamma = \cos 120°$, $\therefore \gamma = 120°$

$\beta = 360° - \alpha - \gamma$

$= 360° - 150° - 120° = 90°$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে তাই এদেরকে ক্রমান্বয়ে মান ও দিক অনুযায়ী ত্রিভুজের বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যায়। ΔABC এর AB, BC, CA দ্বারা যথাক্রমে $1, \sqrt{3}$ ও 2 মানের বল প্রকাশ করা হল

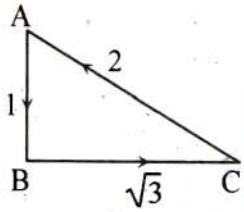
$\therefore \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

অর্থাৎ ABC সমকোণী ত্রিভুজ

যেখানে $\angle ABC = 90°$

$\angle ACB = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$

এবং $\angle BAC = 90° - 30° = 60°$



$\therefore$ 1 ও $\sqrt{3}$ মানের বলের অন্তর্গত কোণ $180° - 90° = 90°$

1 ও 2 ,, ,, ,, ,, $180° - 60° = 120°$

2 ও $\sqrt{3}$,, ,, ,, ,, $180° - 30° = 150°$

(vi) ধরি, O বিন্দুতে $1, 1$ ও $\sqrt{2}$ বলত্রয় যথাক্রমে OS, OT ও OU বরাবর ক্রিয়া করে।

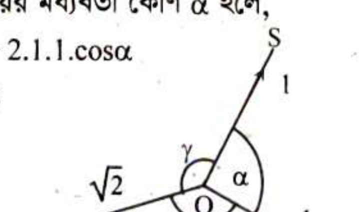
এখন, 1 ও 1 বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2 + 2.1.1.\cos\alpha$

বা, $2 = 2 + 2\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 90°$



আবার, 1 ও $\sqrt{2}$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ β হলে,

$1^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + 2.1.\sqrt{2}.\cos\beta$

বা, $1 = 1 + 2 + 2\sqrt{2}.\cos\beta$

বা, $2\sqrt{2}.\cos\beta = -2$ বা, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\beta = -\cos 45° = \cos(180° - 45°)$

বা, $\cos\beta = \cos 135°$ $\therefore \beta = 135°$

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তর্ভুক্ত কোণ যথাক্রমে 90° এবং 135° **(Ans.)**

(vii) মনে করি, P, Q, R বলত্রয় কোণ বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং প্রশ্নমতে, P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 90° এবং Q ও R বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 120°। সুতরাং R ও P বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ

$360° - (90° + 120°) = 150°$

এখন লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$\frac{P}{\sin 120°} = \frac{Q}{\sin 150°} = \frac{R}{\sin 90°}$

বা, $\frac{P}{\sin(90° + 30°)} = \frac{Q}{\sin(90° + 60°)} = \frac{R}{\sin 90°}$

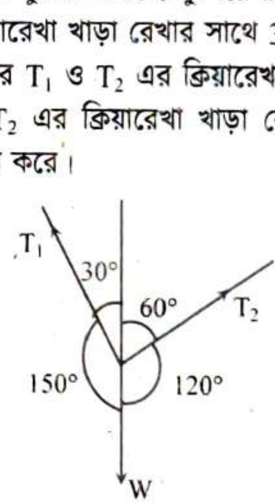
বা, $\frac{P}{\cos 30°} = \frac{Q}{\cos 60°} = \frac{R}{\sin 90°}$

বা, $\frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{1}$

বা, $\frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2}$

$\therefore P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2$

(viii) মনে করি, w ওজনের একটি বস্তুকে T_1 ও T_2 টান বিশিষ্ট দুইটি সুতার সাহায্যে ঝুলিয়ে রাখা হয়েছে। T_1 এর ক্রিয়ারেখা খাড়া রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। আবার T_1 ও T_2 এর ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণ 90° বলে T_2 এর ক্রিয়ারেখা খাড়া রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।



এখন, T_1, T_2 ও W বল তিনটি সাম্যাবস্থাা সৃষ্টি করেছে বিধায় লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই—

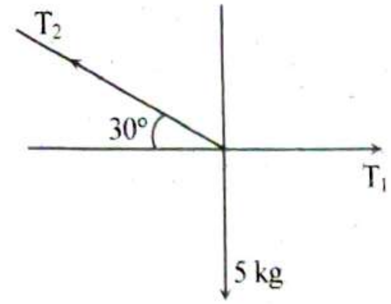
$\frac{T_1}{\sin 120°} = \frac{T_2}{\sin 150°} = \frac{W}{\sin 90°}$

বা, $\frac{T_1}{\sin(90° + 30°)} = \frac{T_2}{\sin(90° + 60°)}$

বা, $\frac{T_1}{\cos 30°} = \frac{T_2}{\cos 60°}$ বা, $\frac{T_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{T_2}{\frac{1}{2}}$

বা, $\frac{T_1}{\sqrt{3}} = \frac{T_2}{1}$ $\therefore T_1 : T_2 = \sqrt{3} : 1$

(ix)



মনে করি, অনুভূমিকের দিকে T_1 এবং অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে T_2 টানাবিশিষ্ট সুতার সাহায্যে 5 কেজি ওজনের বস্তুকে ভারসাম্যে রাখা হয়েছে।

সুতরাং লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই-

$$\frac{T_1}{\sin(90° + 30°)} = \frac{T_2}{\sin 90°} = \frac{5}{\sin(180° - 30°)}$$

বা, $\frac{T_1}{\sin 30°} = \frac{T_2}{\sin 90°} = \frac{5}{\sin 30°}$

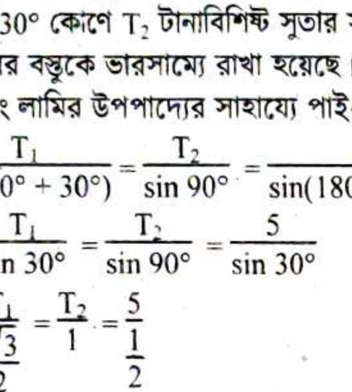
বা, $\frac{T_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{T_2}{1} = \frac{5}{\frac{1}{2}}$

বা, $\frac{T_1}{\sqrt{3}} = \frac{T_2}{2} = \frac{5}{1}$

$\therefore T_1 = 5\sqrt{3}$ ও $T_2 = 10$

$\therefore$ বলদ্বয় $5\sqrt{3}$ ও 10 কেজি ওজন।

(x) মনে করি, O বিন্দুগামী বৃত্তটি বল P, Q, R-এর ক্রিয়ারেখা OX, OY, OZ কে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে।



যেহেতু, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব লামির সূত্রানুযায়ী

$$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$$

বা, $\frac{P}{\sin(\pi - BOC)} = \frac{Q}{\sin(\pi - AOC)} = \frac{R}{\sin(\pi - ACB)}$

বা, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin ACB}$

[$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle XOY$ ও $\angle ACB$ পরস্পর সম্পূরক কোণ]

বা, $\frac{P}{\sin BAC} = \frac{Q}{\sin ABC} = \frac{R}{\sin ACB}$

বা, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$ ……… (i)

Δ ABC হতে পাই, $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ ……… (ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

বা, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

$\therefore$ বলগুলি ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির সমানুপাতিক।

(দেখানো হলো)

(xi) দেওয়া আছে, $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$

বা, $2P^2 = 2Q^2 = R^2 \therefore P = Q$

যেহেতু P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে,

সুতরাং P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এর সমান।

এখন, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $2P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = 0 \quad \therefore \alpha = 90°$ **(Ans.)**

আবার, R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ β হলে

$Q^2 = R^2 + P^2 + 2RP\cos\beta$

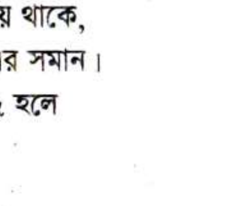
বা, $Q^2 = 2Q^2 + Q^2 + 2.\sqrt{2}Q.Q\cos\beta$

বা, $2\sqrt{2}Q^2.\cos\beta = -2Q^2$

বা, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 135°$

$\therefore \beta = 135°$ **(Ans.)**

2.(i) মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O-তে OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে।



তাহলে লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$$

বা, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$

(যেহেতু $\angle BOC = 2A$, $\angle COA = 2B$, $\angle AOB = 2C$, কারণ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ)

বা, $\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B.\cos B} = \frac{R}{2\sin C.\cos C}$

বা, $\frac{P}{\frac{2a}{R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{Q}{\frac{2b}{R}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)} = \frac{R}{\frac{2c}{R}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$

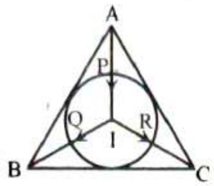
বা, $\dfrac{P}{\dfrac{2a^2(b^2+c^2-a^2)}{2abc}} = \dfrac{Q}{\dfrac{2b^2(a^2+c^2-b^2)}{2abc}}$

$$= \dfrac{R}{\dfrac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}}$$

$\therefore \dfrac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \dfrac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \dfrac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

(দেখানো হলো)

(ii) মনে করি, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I এবং IA, IB, IC রেখাত্রয় যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$- কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



$\therefore \quad \angle BIC = 180° - (\angle IBC + \angle ICB)$

$= 180° - \left(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}\right) = 180° - \left(90° - \dfrac{A}{2}\right)$

$= 90° + \dfrac{A}{2}$

$\left[\text{যেহেতু } A + B + C = 180°, \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = 90° - \dfrac{A}{2}\right]$

অনুরূপভাবে, $\angle CIA = 90° + \dfrac{B}{2}$, $\angle AIB = 90° + \dfrac{C}{2}$

এখন, লামির সূত্রানুসারে, P, Q, R বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করলে আমরা পাই, $\dfrac{P}{\sin BIC} = \dfrac{Q}{\sin CIA} = \dfrac{R}{\sin AIB}$

বা, $\dfrac{P}{\sin\left(90° + \dfrac{A}{2}\right)} = \dfrac{Q}{\sin\left(90° + \dfrac{B}{2}\right)} = \dfrac{R}{\sin\left(90° + \dfrac{C}{2}\right)}$

বা, $\dfrac{P}{\cos\dfrac{A}{2}} = \dfrac{Q}{\cos\dfrac{B}{2}} = \dfrac{R}{\cos\dfrac{C}{2}}$

বা, $\dfrac{P^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{Q^2}{\cos^2\dfrac{B}{2}} = \dfrac{R^2}{\cos^2\dfrac{C}{2}}$

বা, $\dfrac{P^2}{\dfrac{s(s-a)}{bc}} = \dfrac{Q^2}{\dfrac{s(s-b)}{ca}} = \dfrac{R^2}{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

বা, $\dfrac{bc.P^2}{s-a} = \dfrac{ca.Q^2}{s-b} = \dfrac{ab.R^2}{s-c}$

বা, $\dfrac{bc.P^2}{2s-2a} = \dfrac{ca.Q^2}{2s-2b} = \dfrac{ab.R^2}{2s-2c}$

বা, $\dfrac{bc.P^2}{a+b+c-2a} = \dfrac{ca.Q^2}{a+b+c-2b} = \dfrac{ab.R^2}{a+b+c-2c}$

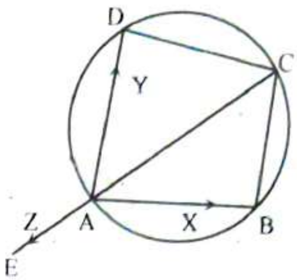
বা, $\dfrac{bc.P^2}{b+c-a} = \dfrac{ca.Q^2}{c+a-b} = \dfrac{ab.R^2}{a+b-c}$

বা, $\dfrac{P^2}{a(b+c-a)} = \dfrac{Q^2}{b(c+a-b)} = \dfrac{R^2}{c(a+b-c)}$

$\therefore P^2 : Q^2 : R^2 = a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$

(প্রমাণিত)

(iii) মনে করি, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও AD বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু A তে AB, AD, CA বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়ারত X, Y, Z বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। তাহলে লামির সূত্রানুসারে পাই,



$\dfrac{X}{\sin DAE} = \dfrac{Y}{\sin BAE} = \dfrac{Z}{\sin BAD}$

$\dfrac{X}{\sin(\pi - DAC)} = \dfrac{Y}{\sin(\pi - BAC)} = \dfrac{Z}{\sin BAD}$

বা, $\dfrac{X}{\sin DAC} = \dfrac{Y}{\sin BAC} = \dfrac{Z}{\sin BAD}$

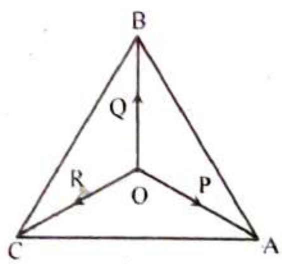
যেহেতু ABC ও ADC ত্রিভুজদ্বয়ের একই পরিবৃত্ত ও একই পরিব্যাসার্ধ r. সুতরাং $\sin DAC = \dfrac{DC}{2r}$, $\sin BAC = \dfrac{BC}{2r}$, $\sin BAD = \dfrac{BD}{2r}$ হবে।

$\therefore \quad \dfrac{X}{\dfrac{DC}{2r}} = \dfrac{Y}{\dfrac{BC}{2r}} = \dfrac{Z}{\dfrac{BD}{2r}}$

বা, $\dfrac{X}{DC} = \dfrac{Y}{BC} = \dfrac{Z}{BD}$

$\therefore \quad \dfrac{X}{DC} = \dfrac{Y}{BC} = \dfrac{Z}{BD}$ **(দেখানো হলো)**

(iv) সমান দৈর্ঘ্যের তিনটি একতলীয় সরলরেখা OA, OB, OC যারা O বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত নয়। P, Q, R বল তিনটি যথাক্রমে OA, OB, OC সরলরেখা বরাবর ক্রিয়াশীল।



দেওয়া আছে, $\dfrac{P}{\Delta OBC} = \dfrac{Q}{\Delta OCA} = \dfrac{R}{\Delta OAB}$

অর্থাৎ $\dfrac{P}{\frac{1}{2}.OB.OC \sin BOC} = \dfrac{Q}{\frac{1}{2}.OC.OA.\sin COA}$

$$= \dfrac{R}{\frac{1}{2}.OA.OB.\sin AOB}$$

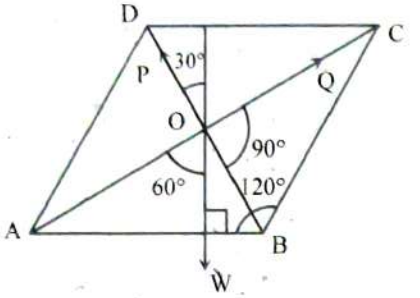
বা, $\dfrac{P}{\sin\angle BOC} = \dfrac{Q}{\sin\angle COA} = \dfrac{R}{\sin\angle AOB}$

$[\because OA = OB = OC]$

বা, $\dfrac{P}{\sin(\hat{Q\ R})} = \dfrac{Q}{\sin(\hat{R\ P})} = \dfrac{R}{\sin(\hat{P\ Q})}$

সুতরাং লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা অনুসারে বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করবে। **(দেখানো হলো)**

(v)



মনে করি, ABCD একটি রম্বস।

ইহার $\angle ABC = 120°$ এবং AB ও CD বাহু ভূমির সমান্তরাল। AC ও BD কর্ণ যোগ করি।

ধরি, কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু লব্ধি বৃহত্তম বলের দিকের সাথে নত। সুতরাং চিত্র হতে পাই, OD বরাবর P এবং OC বরাবর Q এবং O- তে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াশীল ফলকের ওজন W.

এই তিনটি বল ফলকটিকে সাম্যাবস্থায় রাখে এবং রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

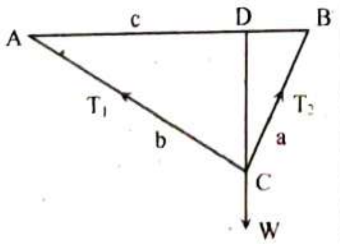
অতএব লামির সূত্রানুসারে পাই,

$\dfrac{P}{\sin(90° + 30°)} = \dfrac{Q}{\sin(90° + 60°)} = \dfrac{W}{\sin 90°}$

$\therefore \dfrac{P}{\cos 30°} = \dfrac{Q}{\cos 60°}$ বা, $\dfrac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{Q}{\frac{1}{2}}$ বা, $P = \sqrt{3}Q$

$\therefore\ P^2 = 3Q^2$ (বর্গ করে) **(দেখানো হলো)**

3.(i) ACB সুতার দুই প্রান্ত একই আনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। সুতার C বিন্দুতে বাঁধা W ওজন উল্লম্ব বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করে।



মনে করি, সুতার CA ও CB অংশের টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 যা W ওজনকে সুস্থিত রাখে।

যেহেতু T_1, T_2 ও W বলদ্বয় C বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করেছে, কাজেই লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$\dfrac{T_1}{\sin(\pi - BCD)} = \dfrac{T_2}{\sin(\pi - ACD)} = \dfrac{W}{\sin ACB}$

বা, $\dfrac{T_1}{\sin BCD} = \dfrac{T_2}{\sin ACD} = \dfrac{W}{\sin C}$

বা, $\dfrac{T_1}{\sin BCD} = \dfrac{W}{\sin C}$

বা, $T_1 = \dfrac{W \sin BCD}{\sin C} = \dfrac{W\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\sin C}$

$= \dfrac{W\cos B}{\sin C}$ ... ... (i)

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রফল

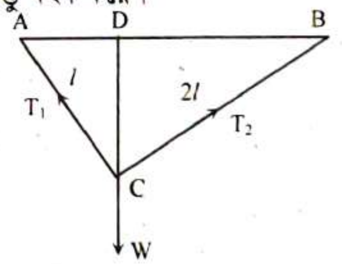
$\Delta = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ বা, $\sin C = \dfrac{2\Delta}{ab}$

এবং $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\therefore\ T_1 = \dfrac{W\cos B}{\sin C} = \dfrac{W\left(\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)}{\dfrac{2\Delta}{ab}}$

$= \dfrac{Wb(c^2 + a^2 - b^2)}{4c\Delta}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) AB আনুভূমিক রেখায় অবস্থিত A, B প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে l এবং $2l$ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট রশির প্রান্তদ্বয় আবদ্ধ আছে। অপর প্রান্তদ্বয় C বিন্দুতে বাঁধা আছে এবং W ওজনের বস্তু বহন করে।



ধরি, সুতাদ্বয়ের টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং C বিন্দুগামী খাড়া রেখা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। T_1, T_2, W বলত্রয় ভারসাম্যে আছে, তাই লামির সূত্রানুসারে,

$\dfrac{T_1}{\sin(\pi - BCD)} = \dfrac{T_2}{\sin(\pi - ACD)} = \dfrac{W}{\sin ACB}$ .... (1)

$\therefore \dfrac{T_1}{\sin BCD} = \dfrac{T_2}{\sin ACD} = \dfrac{T_3}{\sin ACB}$

AB ও CD পরস্পর লম্ব হওয়ায়

$\sin ACD = \sin(90° - CAD) = \cos CAD$ এবং

$\sin BCD = \sin(90° - CBD) = \cos CBD$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $\dfrac{T_1}{\cos CBD} = \dfrac{T_2}{\cos CAD} = \dfrac{W}{\sin ACB}$

$\cos CBD = \cos CBA = \dfrac{4l^2 + 4l^2 - l^2}{2.2l.2l} = \dfrac{7}{8}$

$$\therefore \quad \cos CAD = \cos CAB = \frac{4l^2 + l^2 - 4l^2}{2.2l.l} = \frac{1}{4}$$

$$\cos ACB = \frac{4l^2 + l^2 - 4l^2}{2.2l.l} = \frac{1}{4}$$

$$\because \quad AB = BC \therefore \cos CAB = \cos ACB = \frac{1}{4}$$

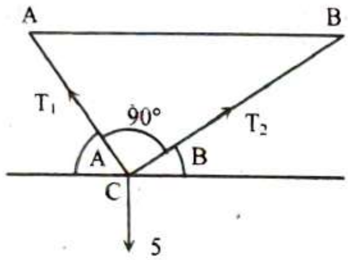
$$\therefore \quad \sin ACB = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{\frac{7}{8}} = \frac{T_2}{\frac{1}{4}} = \frac{W}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \text{ বা, } \frac{8T_1}{7} = \frac{4T_2}{1} = \frac{4W}{\sqrt{15}}$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{7W}{2\sqrt{15}}, T_2 = \frac{W}{\sqrt{15}}$$

সুতরাং রাশিদ্বয়ের টান যথাক্রমে $\frac{7W}{2\sqrt{15}}, \frac{W}{\sqrt{15}}$ **(Ans.)**

(iii)



31 সে.মি. দীর্ঘ ACB সুতার A প্রান্ত হতে 7 সে.মি. দূরে C বিন্দুতে 5 কেজি ওজনের বস্তু ঝুলানো আছে। সুতার প্রান্তদ্বয় 25 সে.মি. ব্যবধানে A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে।

$AC = 7 \therefore CB = 31 - 7 = 24$

$AC^2 + CB^2 = 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore \quad \angle ACB = 90°$

মনে করি, সূতার CA অংশের টান T_1 এবং CB অংশের টান T_2 তাহলে T_1, T_2 এবং 5 kg ওজন বলত্রয় ভারসাম্যে আছে।

লামির সূত্রানুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin(90° + B)} = \frac{T_2}{\sin(90° + A)} = \frac{5}{\sin 90°}$$

$$\text{বা, } \frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{T_1}{\frac{24}{25}} = \frac{T_2}{\frac{7}{25}} = 5$$

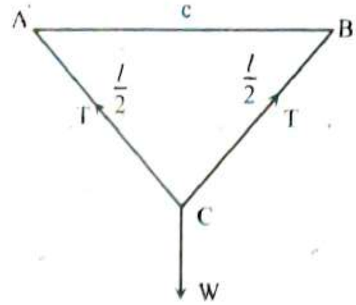
$$\therefore T_1 = \frac{5 \times 24}{25} = \frac{24}{5} \text{ কেজি}$$

$$\therefore T_2 = \frac{5 \times 7}{25} = \frac{7}{5} \text{ কেজি}$$

$\therefore$ নির্ণেয় টানদ্বয় $4\frac{4}{5}$ কেজি ওজন ও $1\frac{2}{5}$ কেজি ওজন।

(Ans.)

(iv)



মনে করি, একই আণুভূমিক রেখায় C দূরত্বে অবস্থিত A ও B দুইটি বিন্দু। ACB = l দৈর্ঘ্যের সুতার প্রান্তদ্বয় A ও B বিন্দুতে বাঁধা।

যেহেতু সুতার উপর দিয়ে W ওজন বহনকারী আংটিটি অবাধে গড়িয়ে চলাচল করতে পারে, কাজেই আংটির দুই পার্শ্বে সুতার টান সমান হবে।

এক্ষেত্রে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত সমান দুইটি বল T যা W ওজনকে ভারসাম্যে রাখে।

$$\therefore \; W = T^2 + T^2 + 2.T.T \cos C$$

$$= 2T^2 (1 + \cos C)$$

$$= 2T^2 \left(1 + \frac{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - c^2}{2.\frac{l}{2}.\frac{l}{2}}\right)$$

$$= 2T^2 \left(1 + \frac{\frac{l^2}{2} - c^2}{\frac{l^2}{2}}\right)$$

$$= 2T^2 \left(1 + \frac{l^2 - 2c^2}{2} \times \frac{2}{l^2}\right)$$

$$= 2T^2 \left(1 + \frac{l^2 - 2c^2}{l^2}\right)$$

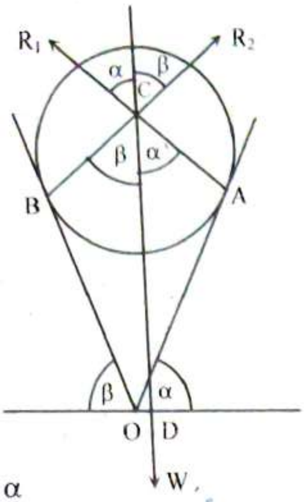
$$= 2T^2 \left(\frac{l^2 + l^2 - 2c^2}{l^2}\right)$$

$$= 2T^2 . \frac{2(l^2 - c^2)}{l^2}$$

$$\text{বা, } W = \frac{2T(l^2 - c^2)}{l}$$

$$\therefore \; T = \frac{lW}{2\sqrt{l^2 - c^2}} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(v) মনে করি, W ওজনের গোলকটি O বিন্দুতে মিলিত OA এবং OB তলদ্বয়ের মধ্যে স্থিরাবস্থায় আছে। OA এবং OB তলদ্বয় আনুভূমিকের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। A ও B বিন্দুতে তলের প্রতিক্রিয়া, তলের সাথে লম্বিক দিকে যথাক্রমে R_1 ও R_2 এবং C বিন্দুগামী খাড়া রেখা O বিন্দুগামী আনুভূমিক রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে।



তাহলে $\angle BCD = \beta$

অনুরূপভাবে $\angle ACD = \alpha$

C-বিন্দুতে ক্রিয়ারত R_1, R_2, W বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। তাই লামির সূত্রানুসারে,

$$\frac{R_1}{\sin(180° - \beta)} = \frac{R_2}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(\alpha + \beta)}$$

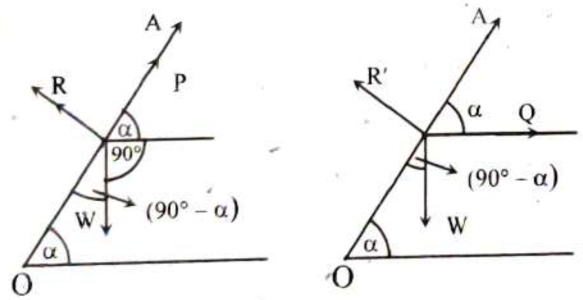
বা, $\dfrac{R_1}{\sin\beta} = \dfrac{R_2}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\sin(\alpha + \beta)}$

$\therefore \quad R_1 = \dfrac{W\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, R_2 = \dfrac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

$\therefore$ নির্ণেয় চাপদ্বয় $\dfrac{W\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \dfrac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ **(Ans.)**

বি.দ্র: দুইটি রেখার উপর অংকিত লম্ব রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।

(vi)



মনে করি, α কোণে হেলানো OA তলের উপর W ওজনকে স্থির রাখার জন্য P বল তল বরাবর ক্রিয়া করে। তখন প্রতিক্রিয়া বল R হলে W, P, R বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির উপপাদ্য হতে পাই,

$$\frac{W}{\sin 90°} = \frac{P}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{R}{\sin(90° + \alpha)}$$

বা, $\dfrac{W}{1} = \dfrac{P}{\sin\alpha}$ বা, $\dfrac{W^2}{P^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha$ ... ... (1) (বর্গ করে)

আবার, α কোণে হেলানো OA তলের উপর W ওজনের বস্তুকে ধরে রাখার জন্য Q বল ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়া করলে তলের প্রতিক্রিয়া R′ হয়। W, R′, Q বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করলে লামির উপপাদ্য হতে পাই,

$$\frac{W}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{Q}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{R'}{\sin 90°}$$

$\therefore \quad \dfrac{W}{\cos\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha}$ বা, $\dfrac{W}{Q} = \cot\alpha$

বা, $\dfrac{W^2}{Q^2} = \cot^2\alpha$ ... ... (2) [বর্গ করে]

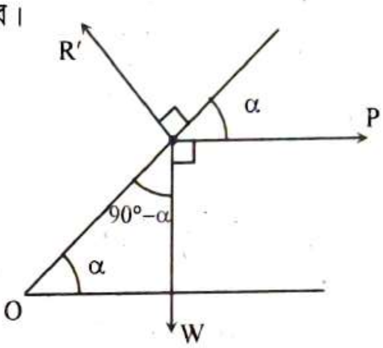
এখন, (1) − (2) করে পাই,

বা, $\dfrac{W^2}{P^2} - \dfrac{W^2}{Q^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha$

বা, $W^2\left(\dfrac{1}{P^2} - \dfrac{1}{Q^2}\right) = 1$ বা, $\dfrac{1}{P^2} - \dfrac{1}{Q^2} = \dfrac{1}{W^2}$

$\therefore \quad W = \dfrac{PQ}{\sqrt{Q^2 - P^2}}$ **(প্রমাণিত)**

(vii) মনে করি, α কোণে হেলানো তলের উপর W ওজনকে স্থির রাখার জন্য P বল আনুভূমিক বরাবর ক্রিয়া করে। তখন তলের প্রতিক্রিয়া বল R′ হলে W, R′, P ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



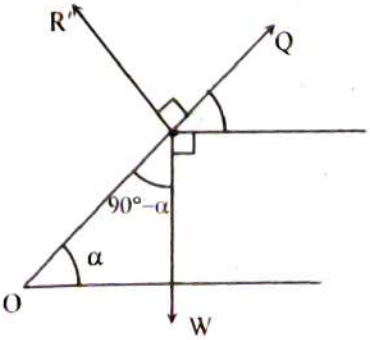
অতএব, লামির সূত্রানুসারে পাই,

$$\frac{W}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{R'}{\sin 90°} = \frac{P}{\sin(180° - \alpha)}$$

$\therefore \dfrac{W}{\cos\alpha} = \dfrac{R'}{1}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \dfrac{W}{R'}$ .... (i)

আবার, α কোণে হেলানো তলের উপর W ওজনের বস্তুকে ধরে রাখার জন্য Q বল হেলানো তল বরাবর ক্রিয়া করে। তলের প্রতিক্রিয়া বল R হলে W, R, Q ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



সুতরাং লামির উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{R}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{Q}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

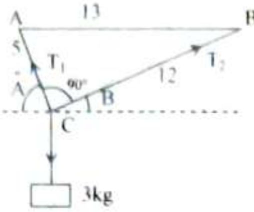
বা, $\frac{W}{1} = \frac{R}{\cos\alpha}$

বা, $\cos\alpha = \frac{R}{W}$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{W}{R'} = \frac{R}{W}$

$\therefore RR' = W^2$ **(প্রমাণিত)**

(viii) 17 সে.মি. দীর্ঘ ACB সুতার A প্রান্ত হতে 5 সে.মি. দূরে C বিন্দুতে 3kg ভরের একটি বস্তু ঝুলানো এবং অপর প্রান্ত A থেকে 13 সে.মি. দূরে একই সরলরেখা বরাবর B বিন্দুতে বাধা আছে।



$\therefore AB = 13, AC = 5$ এবং $BC = 12$

$AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = AC^2$

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$

মনে করি, CA অংশের টান T_1 এবং CB অংশের টান T_2। তাহলে T_1, T_2 ও 3kg ওজন বলত্রয় C বিন্দুতে ভারসাম্যে আছে।

লামির সূত্রানুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin(90^\circ + B)} = \frac{T_2}{\sin(90^\circ + A)} = \frac{3}{\sin 90^\circ}$$

বা, $\frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = 3$

বা, $\frac{T_1}{\frac{12}{13}} = \frac{T_2}{\frac{5}{13}} = 3$

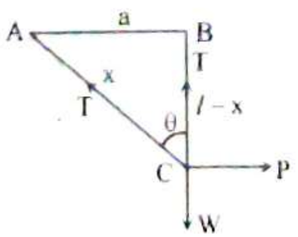
বা, $T_1 = \frac{12}{13} \times 3\text{kg}$

$\therefore T_1 = \frac{36}{13}$ kg **(Ans.)**

এবং $T_2 = \frac{5}{13} \times 3\text{kg}$

$\therefore T_2 = \frac{15}{13}$ kg **(Ans.)**

4. (i)



একই অনুভূমিক রেখায় a দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্যের একটি মসৃণ রশির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। B বিন্দুতে খাড়া নিচে W ওজনের একটি বস্তুকে অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত P বলের সাহায্যে স্থিরাবস্থায় রাখা হয়েছে। যেহেতু রাশির উপর দিয়ে আংটিটি অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে, কাজেই রশির দুই অংশে টান সমান হবে।

মনে করি, রশির টান T এবং $\angle ACB = \theta$.

ধরি, $AC = x \therefore CB = l - x$

যেহেতু বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি হয়েছে, কাজেই যে কোন দিক বরাবর তাদের লম্বাংশের সমষ্টি শূন্য হবে।

এখন P বলের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই—

$P\cos 0^\circ + T\cos 90^\circ + T\cos(90^\circ + \theta) + W\cos 270^\circ = 0$

বা, $P - T\sin\theta = 0$

বা, $P = T\sin\theta$ ....(i)

আবার, P বলের ক্রিয়াদিকের উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই

$P\sin 0^\circ + T\sin 90^\circ + T\sin(90^\circ + \theta) + W\sin 270^\circ = 0$

বা, $T + T\cos\theta - W = 0$

বা, $T(1 + \cos\theta) = W$

$$\therefore T = \frac{W}{1 + \cos\theta} = \frac{W}{1 + \frac{l - x}{x}} = \frac{Wx}{l}$$

কিন্তু $x^2 = (l - x)^2 + a^2 = l^2 - 2lx + x^2 + a^2$

বা, $2lx = a^2 + l^2$

$\therefore x = \frac{a^2 + l^2}{2l}$

$\therefore T = \frac{W}{l}\left(\frac{a^2 + l^2}{2l}\right) = \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2}$ **(প্রমাণিত)**

আবার, (i)নং হতে পাই,

$$P = T\sin\theta = \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2} \cdot \frac{a}{x}$$

$$= \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2} \cdot \frac{2al}{a^2 + l^2}$$

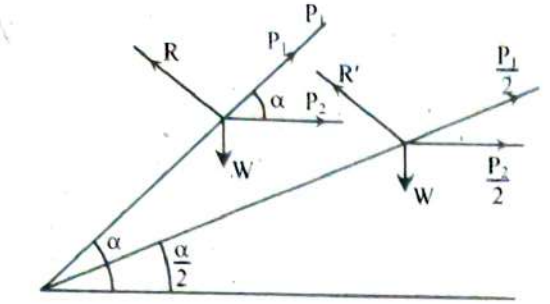
$= \frac{aW}{l}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) মনে করি, বস্তুটির ওজন W, উভয় ক্ষেত্রেই বস্তুটি তলের উপর স্থির অবস্থায় আছে। তাহলে তল বরাবর ক্রিয়াশীল বলগুলোর লম্বাংশ বিবেচনা করে পাই,

$P_1\cos 0^\circ + R\cos 90^\circ + W\cos(270^\circ - \alpha)$
$+ P_2\cos 360^\circ - \alpha) = 0$

বা, $W\sin\alpha = P_1 + P_2\cos\alpha$ .... (i)

এবং $W\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ .... (ii)



এখন, (i)- কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{P_1 + P_2\cos\alpha}{\frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

বা, $P_1\cos\frac{\alpha}{2} + P_2\cos^2\frac{\alpha}{2} = P_1 + P_2\cos\alpha$

বা, $P_1.\cos\frac{\alpha}{2} + P_2.\cos^2\frac{\alpha}{2} = P_1 + P_2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$

বা, $P_1\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) = P_2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$

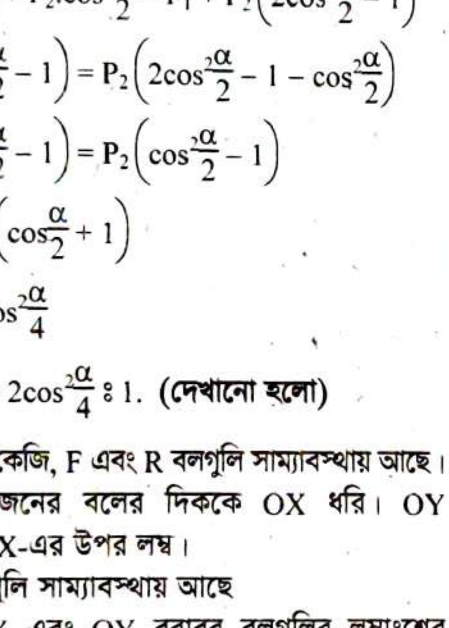
বা, $P_1\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right) = P_2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$

বা, $P_1 = P_2\left(\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)$

বা, $\frac{P_1}{P_2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4}$

$\therefore P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$. **(দেখানো হলো)**

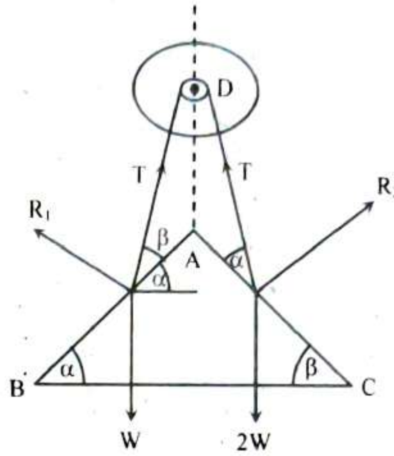
(iii) 10 কেজি, 5 কেজি, F এবং R বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে। 5 কেজি ওজনের বলের দিককে OX ধরি। OY সরলরেখা OX-এর উপর লম্ব।
যেহেতু, বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে
অতএব, OX এবং OY বরাবর বলগুলির লম্বাংশের যোগফল শূন্য হবে।



OX বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,
$5\cos0° + F\cos60° + R\cos150° + 10\cos270° = 0$
বা, $5 + \frac{1}{2}F - \frac{\sqrt{3}}{2}R = 0$
$\therefore \quad 10 + F - \sqrt{3}R = 0$ **(দেখানো হলো)**

OY বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,
$5\sin0° + F\sin60° + R\sin150° + 10\sin270° = 0$
বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}F + \frac{1}{2}R - 10 = 0$
$\therefore \quad \sqrt{3}F + R - 20 = 0$ **(দেখানো হলো)**

(iv)



α ও β কোণে আনত AB ও AC তলদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু A এর ঠিক উপরে D বিন্দুতে অবস্থিত একটি কপিকলের উপর দিয়ে অতিক্রান্ত রশির প্রান্তদ্বয়ে সংযুক্ত W ও 2W ওজনের দুইটি বস্তু যথাক্রমে AB ও AC তলের উপর স্থিরাবস্থায় আছে। রশির প্রান্তদ্বয় AB ও AC তলের সাথে যথাক্রমে β ও α কোণ উৎপন্ন করে। মনে করি, রশির টান T এবং AB ও AC তলদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_1 এবং R_2.

R_1 ও R_2 বলদ্বয় যথাক্রমে AB ও AC তলের সাথে লম্বিক দিকে ক্রিয়াশীল। যেহেতু W, T, R_1 বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। তাই যেকোন দিকে তাদের লম্বাংশের সমষ্টি শূন্য হবে।

এখন, বলগুলো BA বরাবর বিভাজিত করে
$T\cos\beta + W\cos(270° - \alpha) + R_2\cos90° = 0$
বা, $T\cos\beta - W\sin\alpha = 0$
বা, $T = \frac{W\sin\alpha}{\cos\beta}$ ... . (i)

আবার, 2W বলের ভারসাম্য হতে অনুরূপভাবে CA বরাবর বিভাজিত করে
$T\cos\alpha + 2W\cos(270° - \beta) + R_2\cos90° = 0$
বা, $T\cos\alpha - 2W\sin\beta = 0$
বা, $T = \frac{2W\sin\beta}{\cos\alpha}$ .... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
$\frac{W\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{2W\sin\beta}{\cos\alpha}$

বা, $\sin\alpha.\cos\alpha = 2.\sin\beta.\cos\beta$

বা, $\frac{1}{2}.2\sin\alpha.\cos\alpha = 2\sin\beta.\cos\beta$

বা, $\frac{1}{2}.\sin2\alpha = \sin2\beta$

$\therefore$ $\sin2\alpha = 2\sin2\beta$. **(প্রমাণিত)**

বিকল্প সমাধান:

যেহেতু W, T, R_1 বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। কাজেই লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$$\frac{T}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° - \beta)} = \frac{R_1}{\sin(90° + \alpha + \beta)}$$

বা, $\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\beta}$ ... ... (i)

আবার, 2W, T ও R_2 বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, কাজেই লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$$\frac{T}{\sin(180° - \beta)} = \frac{2W}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{R_2}{\sin(90° + \alpha + \beta)}$$

বা, $\frac{T}{\sin\beta} = \frac{2W}{\cos\alpha}$ ... ... (ii)

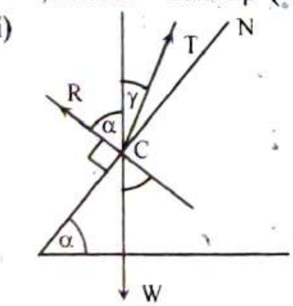
(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cos\beta}$

বা, $\sin\alpha \cos\alpha = 2\sin\beta \cos\beta$

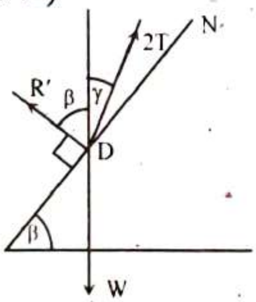
বা, $2\sin\alpha \cos\alpha = 2.2\sin\beta \cos\beta$

বা, $\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$ **(প্রমাণিত)**

5.(i)



১ নং চিত্র



২ নং চিত্র

(১)নং চিত্র হতে: মনে করি, রশির টান T এবং প্রতিক্রিয়া বল R যখন ভূমির সাথে মসৃণ তলের নতি α এবং দড়ি উলম্বের সাথে γ কোণ উৎপন্ন করে। যেহেতু C বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল W, T এবং R সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব লামির সূত্র হতে পাই,

$$\frac{W}{\sin RCT} = \frac{T}{\sin RCW} = \frac{R}{\sin WCT} \text{ ... ... (i)}$$

এখন, $\angle RCT = \alpha + \gamma$

$\angle RCW = 180° - \alpha$

(i) নং হতে পাই,

$$\frac{W}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{T}{\sin\alpha} \text{ ... ... (ii)}$$

অনুরূপ বিবেচনায় (২) নং চিত্র হতে পাই,

$$\frac{W}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{2T}{\sin\beta} \text{ ... ... (iii)}$$

এখন, (ii) ÷ (iii) $\Rightarrow \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha}$

বা, $2\sin(\beta + \gamma).\sin\alpha = \sin(\alpha + \gamma).\sin\beta$

বা, $2(\sin\beta.\cos\gamma + \cos\beta.\sin\gamma)\sin\alpha = (\sin\alpha.\cos\gamma + \cos\alpha.\sin\gamma)\sin\beta$

বা, $2\sin\beta.\cos\gamma.\sin\alpha + 2\cos\beta.\sin\gamma.\sin\alpha$
$= \sin\alpha.\cos\gamma.\sin\beta + \cos\alpha.\sin\gamma.\sin\beta$

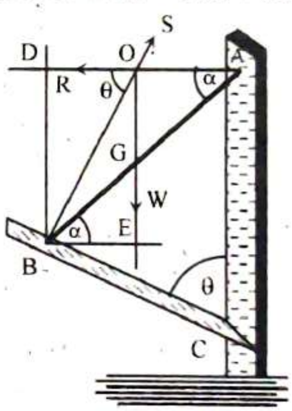
বা, $2\cot\gamma + 2\cot\beta = \cot\gamma + \cot\alpha$

[উভয়পক্ষকে $\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cot\gamma + 2\cot\beta = \cot\alpha$

$\therefore$ $\cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta$ **(প্রমাণিত)**

(ii) খাড়া দেয়ালের স্পর্শ বিন্দু A তে দেয়ালের প্রতিক্রিয়া R (ধরি) আনুভূমিক রেখায় কার্যরত। দন্ডের মধ্যবিন্দু G বিন্দুগামী উলম্ব রেখা, R বলের ক্রিয়ারেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করলে, B বিন্দুতে দন্ডের অপর প্রান্তে মসৃণ তলের প্রতিক্রিয়া (ধরি, S) BO বরাবর কার্যরত হবে; যেখানে BO রেখা CB তলের উপর লম্ব।



প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী, $\angle BCA = \theta$ এবং $\angle ABE$ কোণ তথা $\angle DAB = \alpha$.

B বিন্দু হতে AO এর উপর BD লম্ব আঁকি।

BD এবং OG উভয়ে উলম্ব বলে এরা পরস্পর সমান্তরাল এবং যেহেতু G বিন্দুটি AB দন্ডের মধ্যবিন্দু, সে জন্য O বিন্দু AD রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

কাজেই, $OD = OA = \frac{1}{2} AD$

OACB চতুর্ভুজের $\angle OAC$ এবং $\angle OBC$ প্রত্যেকেই এক সমকোণ বলে এর অপর কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ।

$\therefore$ $\angle AOB + \theta$ = দুই সমকোণ = $\angle AOB + \angle BOD$

কাজেই, $\angle BOD = \theta$

BOD সমকোণী ত্রিভুজে,

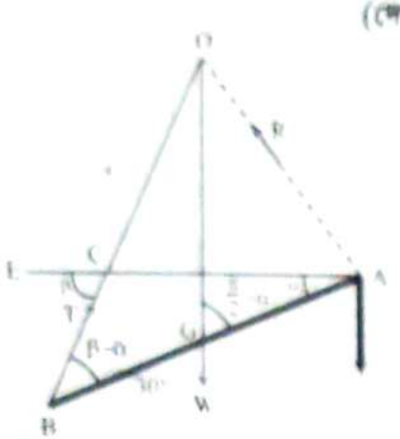
$\tan\theta = \frac{BD}{OD} = \frac{BD}{\frac{1}{2}AD}$ বা, $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}\tan\theta$ ...... (i)

ABAD সমকোণী ত্রিভুজে, $BD/AD = \tan\alpha$ ...... (ii)

(i) ও (ii) হতে আমরা পাই, $\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\theta$

(দেখানো হলো)

(iii)



মনে করি, AB দণ্ডের মধ্যবিন্দু G।

G বিন্দুগামী উলম্বরেখা এবং রশির টানের ক্রিয়ারেখা BC পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিলে, সাম্যাবস্থার জন্য দণ্ডের প্রান্ত A বিন্দুতে লম্ব বরাবর কার্যরত প্রতিক্রিয়া R, O বিন্দুগামী হবে।

এইক্ষেত্রে, আনুভূমিকের সাথে দণ্ডের নতি $\angle BAC = \alpha$ এবং আনুভূমিক রেখার সাথে তারের নতি, $\angle BCE = \beta$.

$\therefore \angle CBA = \beta - \alpha$ এবং $\angle AGO = \frac{\pi}{2} - \alpha'$

যেহেতু R বলের ক্রিয়ারেখা AO, AB দণ্ডের উপর লম্ব;

$\angle OAG = 90°$. OAG সমকোণী ত্রিভুজে,

$\frac{OA}{AG} = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$

অথবা, $OA = AG\cot\alpha = \frac{1}{2}AB.\cot\alpha$ .... (1)

OAB সমকোণী ত্রিভুজে, $OA = AB\tan(\beta - \alpha)$ ...... (2)

(1) ও (2) হতে পাই, $\frac{1}{2}AB\cot\alpha = AB\tan(\beta - \alpha)$

বা, $\cot\alpha = 2\tan(\beta - \alpha)$

বা, $\cot\alpha = 2 \times \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$

বা, $\cot\alpha + \tan\beta = 2\tan\beta - 2\tan\alpha$

বা, $\cot\alpha + 2\tan\alpha = \tan\beta$

$\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$ **(প্রমাণিত)**

(iv) মনে করি, ABC ত্রিভুজের সমতলে O যেকোনো একটি বিন্দু। O, A; O, B; O, C ও O, D যোগ করি। AD মধ্যমা। D বিন্দুটি BC এর মধ্যবিন্দু।

(m, n) উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে,

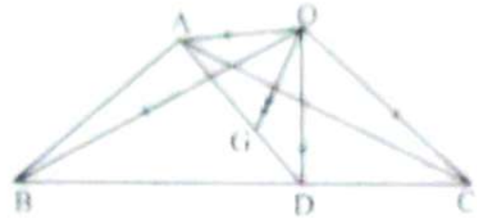
$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OD}$

বা, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{OD}$

বা, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 1.\vec{OA} + 2\vec{OD}$

$= (1 + 2)\vec{OG}$ [(m, n) উপপাদ্য]

$= 3\vec{OG}$ [$\because AG : DG = 2 : 1$]



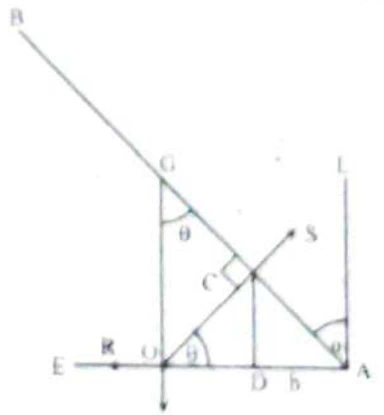
যেহেতু $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে,

$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \underline{0}$ বা, $3\vec{OG} = \underline{0}$

$\therefore \vec{OG} = \underline{0}$, অর্থাৎ O এবং G একই বিন্দু

$\therefore$ O, ΔABC এর মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু **(প্রমাণিত)**

6.(i)



AB দণ্ডের A প্রান্ত একটি খাড়া মসৃণ দেওয়ালের সংস্পর্শে আছে, ফলে দেয়ালের প্রতিক্রিয়া বল R, আনুভূমিক রেখা AE বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

ধরি, AB দণ্ডের মধ্যবিন্দু G-তে খাড়া রেখায় কার্যরত দণ্ডের ওজনের (ধরি, W) ক্রিয়ারেখা, R বলের ক্রিয়ারেখার সাথে O বিন্দুতে মিলিত হয়। দণ্ডটির C বিন্দুতে দণ্ডের উপর লম্ব বরাবর কার্যরত মসৃণ খুঁটির প্রতিক্রিয়া S সাম্যাবস্থার জন্য O বিন্দুগামী হবে। খাড়া দেওয়াল AL এর সহিত AB দণ্ড θ কোণ সৃষ্টি করলে,

$\angle CAD = 90° - \theta$ এবং $AG = BG = a$

$b = AD = AC\cos(90° - \theta)$ [ΔADC হতে]

$= OA\cos(90° - \theta).\sin\theta$ [ΔOAC হতে]

$= AG\cos(90° - \theta).\sin\theta.\sin\theta$

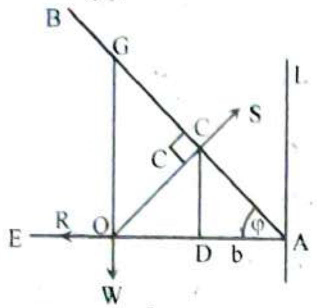
$= a\sin\theta.\sin\theta.\sin\theta$ [ΔAOG হতে]

$= a\sin^3\theta$

$\therefore \ \frac{b}{a} = \sin^3\theta$ বা, $\sin\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ **(প্রমাণিত)**

(ii)



AB দণ্ডের A প্রান্ত একটি খাড়া মসৃণ দেওয়ালের সংস্পর্শে আছে, ফলে দেয়ালের প্রতিক্রিয়া R, আনুভূমিক রেখা AE বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

ধরি, AB দণ্ডের মধ্যবিন্দু G তে খাড়ারেখায় কার্যরত দণ্ডের ওজনের ক্রিয়ারেখা R বলের ক্রিয়া রেখার সাথে O বিন্দুতে মিলিত হয়। দণ্ডটির C বিন্দুতে দণ্ডের উপর লম্ব বরাবর কার্যরত মসৃণ খুঁটির প্রতিক্রিয়া S (ধরি) সাম্যাবস্থার জন্য O বিন্দুগামী হবে। এখন, ভূমি তথা আনুভূমিক রেখা AE বরাবর AB দণ্ডের নতি $\angle CAD = \varphi$

CD উলম্ব বলে ΔCAD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore \ b = AD = AC\cos\varphi = OA\cos\varphi.\cos\varphi$

[ΔOCA সমকোণী ত্রিভুজ হতে]

বা, $b = AG\cos\varphi\cos\varphi\cos\varphi$ [ΔGOA হতে]

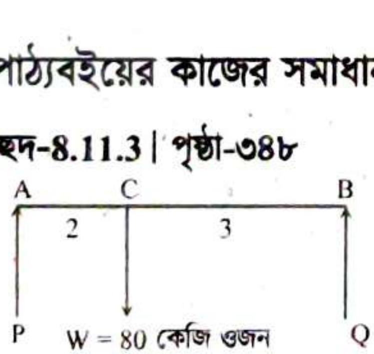
বা, $b = a\cos^3\varphi$ বা, $\frac{b}{a} = \cos^3\varphi$

$\therefore \ \cos\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \therefore \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-8.11.3 | পৃষ্ঠা-৩৪৮

1.



মনে করি, AB তক্তার A প্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে C বিন্দুতে তক্তার ওপর 80 কেজি ওজনের একজন লোক দাঁড়িয়েছে এবং A ও B খুঁটির ওপর প্রযুক্ত চাপ যথাক্রমে P ও Q;

তাহলে, $P.AC = Q.BC$

বা, $P.2 = Q.3$

বা, $P = \frac{3Q}{2} = 1.5Q$

আবার, $W = P + Q = 80$

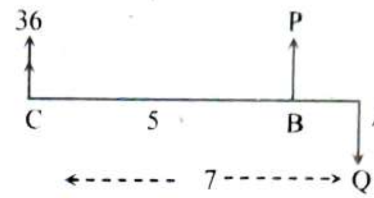
বা, $1.5Q + Q = 80$

বা, $Q = \frac{80}{2.5} = 32$

এবং $P = \frac{3}{2}Q = \frac{3}{2} \times 32 = 48$

সুতরাং A বিন্দুতে 48 কেজি ওজন এবং B বিন্দুতে 32 কেজি ওজন প্রযুক্ত হয়। **(Ans.)**

2.



মনে করি, P ও Q (যেখানে $P > Q$) মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল B ও A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এই বলদ্বয়ের লব্ধি বল, $W = 36$ ডাইন C বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। যেখানে, $AC = 7$ সে.মি. এবং $BC = 5$ সে.মি.

$\therefore \ Q.AC = P.BC$

বা, $Q.7 = P.5$

বা, $P = \frac{7Q}{5}$

আবার,

বলদ্বয়ের লব্ধি, $W = P - Q$ [$\because P > Q$]

বা, $36 = \frac{7Q}{5} - Q = \frac{2Q}{5}$

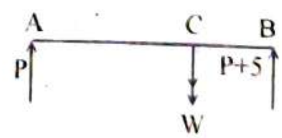
$\therefore \ Q = 90$ ডাইন।

এবং $P = \frac{7}{5} \times 90$

$= 126$ ডাইন

সুতরাং প্রযুক্ত বলদ্বয় যথাক্রমে 126 ডাইন ও 90 ডাইন। **(Ans.)**

3. মনে করি A বিন্দুতে P কিলোগ্রাম ওজনের চাপ ক্রিয়া করে। তবে, B বিন্দুতে (P + 5) কিলোগ্রাম ওজন চাপ ক্রিয়া করবে। ধরি, C বিন্দুতে W ওজন ঝুলছে। দেওয়া আছে, $AC = 3BC$



$\therefore \ P.AC = (P + 5).BC$

বা, $P.3BC = (P + 5).BC$

বা, $3P = P + 5$

বা, $2P = 5$

$\therefore \ P = \frac{5}{2}$

এখন, চাপদ্বয়ের লব্ধি,

$W = P + P + 5$

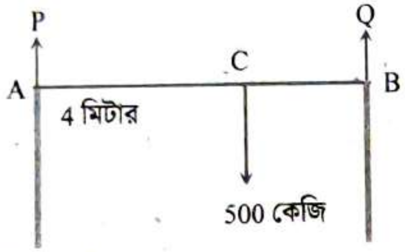
$= 2P + 5 = 2.\frac{5}{2} + 5$

$\therefore W = 10$

$\therefore$ C বিন্দুতে 10 কিলোগ্রাম ওজন ঝুলছে। **(Ans.)**

অনুশীলনী-8(C) এর সমাধান

1.(i) (a) মনে করি, AB দন্ডের A ও B প্রান্তে খুঁটি দ্বয়ের প্রতিক্রিয়া P ও Q এবং C বিন্দুতে 500 কেজি ওজন খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াশীল।



$P + Q = 500 \cdots\cdots$ (i)

$AC = 4$ মিটার

$BC = AB - AC = 5 - 4 = 1$ মিটার

$P.AC = Q.BC$

বা, $P.4 = Q.1$

বা, $Q = 4P \cdots\cdots$ (ii)

(i) এ $Q = 4P$ বসিয়ে, $P + 4P = 500$

বা, $5P = 500$

$\therefore P = 100$ কেজি ওজন

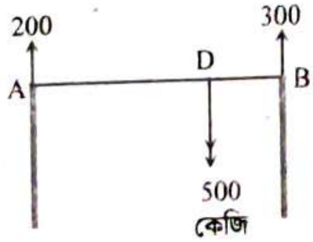
(ii) এ P এর মান বসিয়ে

$Q = 4 \times 100 = 400$ কেজি।

A প্রান্তের খুঁটিতে 100 কেজি এবং B প্রান্তের খুঁটিতে 400 কেজি ওজন ক্রিয়া করে। **(Ans.)**

(b) যদি A প্রান্তের খুঁটি A বিন্দুতে 200 কেজি ওজন সহ্য করে তবে B প্রান্তের খুঁটিতে চাপ = (500 – 200) কেজি = 300 কেজি।

মনেকরি A প্রান্ত হতে x মিটার দূরে D বিন্দুতে 500 কেজি ওজন ঝুলানো আছে।



$200 \times AD = 300 \times BD$

বা, $2AD = 3BD$

বা, $2AD = 3(AB - AD)$

বা, $2x = 3(5 - x)$

বা, $5x = 15$

বা, $x = 3$

$\therefore BD = AB - AD = 5 - 3 = 2$

$\therefore$ বস্তুটি অপর প্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে ঝুলানো যাবে। **(Ans.)**

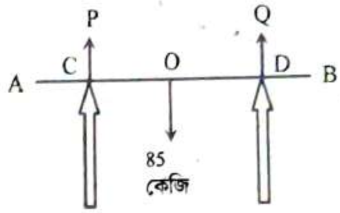
(ii) মনে করি, AB দন্ডের C ও D বিন্দুতে দুইজন লোক যথাক্রমে P ও Q ওজন বহন করে। সুষম দন্ডটির ওজন 85 কেজি AB এর মধ্যবিন্দু O-তে ক্রিয়া করে।

$AB = 5$ মিটার

$AC = \frac{1}{2}$ মিটার

$BD = \frac{1}{4}$ মিটার

$AO = BO = \frac{5}{2}$ মিটার



$P + Q = 85$

$P.CO = Q.DO$

বা, $P(AO - AC) = Q(BO - BD)$

বা, $P\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = Q\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right)$

বা, $2P = Q.\frac{9}{4}$ বা, $8P = 9Q$

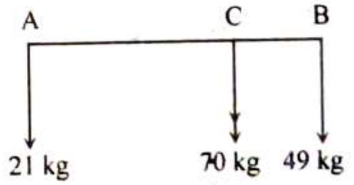
বা, $\frac{P}{9} = \frac{Q}{8} = \frac{P+Q}{9+8} = \frac{85}{17} = 5$

$\therefore P = 45$ কেজি

$Q = 40$ কেজি।

$\therefore$ C বিন্দুতে লোকটি 45 কেজি এবং D বিন্দুতে লোকটি 40 কেজি ওজন বহন করবে। **(Ans.)**

(iii)



মনে করি, AB হালকা দণ্ডের দৈর্ঘ্য 3.5 মিটার এবং A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 21 কেজি ও 49 কেজি ওজনের বস্তুদ্বয় ঝুলানো আছে।

আরও মনে করি, লোকটি দণ্ডের C বিন্দুতে ধরে বস্তুদ্বয়কে সমভাবে বহন করতে পারে।

সুতরাং 21 কেজি ও 49 কেজি ওজন বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C।

$\therefore 21 \times AC = 49 \times BC$

বা, $21 \times AC = 49\,(AB - AC)$

বা, $(21 + 49)AC = 49 \times AB$

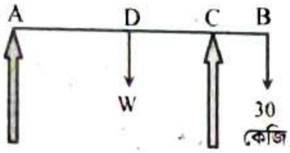
বা, $70 \times AC = 49 \times 3.5$

$\therefore AC = \frac{49 \times 3.5}{70} = 2.45$

$\therefore$ 21 কেজি ওজন ঝুলানো প্রান্ত হতে 2.45 মিটার দূরে ধরতে হবে।

আবার, লোকটিকে বহন করতে হয় $(21 + 49) = 70$ ওজন।

(iv) মনে করি, সুষম তক্তাটির ওজন W, AB এর মধ্যবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে। B বিন্দুতে সর্বোচ্চ 30 কেজি ওজন ঝুলালে A বিন্দুতে কোনো বল থাকবে না। C খুঁটিটির ওপর W ও 30 কেজি ওজনদ্বয় ক্রিয়া করবে।



$W.CD = 30.CB$

$AB = 6$ মিটার

$AD = BD = \frac{6}{2} = 3$ মিটার

$CB = 1$ মিটার

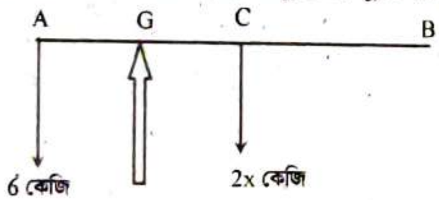
$CD = BD - BC = 3 - 1 = 2$ মিটার।

$\therefore \quad W.2 = 30.1$

বা, $W = 15$

$\therefore$ তক্তাটির ওজন 15 কেজি। **(Ans.)**

(v) মনে করি, AB দন্ডের দৈর্ঘ্য x মিটার। তাহলে তার ওজন 2x কিলোগ্রাম দন্ডটির মধ্যবিন্দু C বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।



ধরি, A বিন্দুতে 6 কেজি ওজন ঝুলানো হলে G বিন্দুতে দন্ডটির ভারসাম্য হয়। তাহলে AG = 2 মিটার। C বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2x কিলোগ্রাম ওজন এবং A বিন্দুতে ক্রিয়ারত 6 কিলোগ্রাম ওজনের লব্ধি G বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হবে।

$\therefore \quad 2x.CG = 6.AG$

বা, $2x\left(\frac{x}{2} - 2\right) = 6.2\left[\because CG = AC - AG = \frac{x}{2} - 2\right]$

বা, $x^2 - 4x = 12$ বা, $x^2 - 4x - 12 = 0$

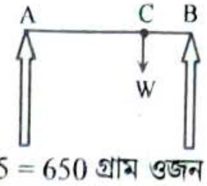
বা, $x^2 - 6x + 2x - 12 = 0$ বা, $(x - 6)(x + 2) = 0$

$\therefore \quad x = 6 \quad$ [কারণ $x + 2 \neq 0$]

সুতরাং দন্ডটির দৈর্ঘ্য = 6 মিটার। **(Ans.)**

(vi) মনে করি, AB দন্ডটির প্রান্তদ্বয় A ও B খুঁটির ওপর অবস্থিত। C বিন্দুতে W ওজনের বস্তু ঝুলানো হলো। A বিন্দুতে চাপ p হলে B বিন্দুতে চাপ = p + 325

$\therefore \quad W = p + p + 325 = 2p + 325$



$p.AC = (p + 325).BC$

বা, $p.3BC = (p + 325)BC$

বা, $3p = p + 325$

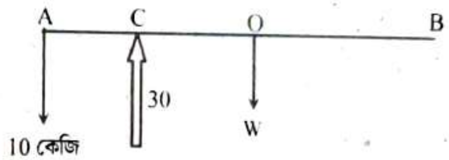
বা, $2p = 325.$

$\therefore \quad W = 2p + 325 = 325 + 325 = 650$ গ্রাম ওজন

$\therefore$ বস্তুটির ওজন 650 গ্রাম। **(Ans.)**

(vii) মনে করি, AB সুষম রডের মধ্যবিন্দু O এবং ওজন W কেজি যা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। A প্রান্তে 10 কেজি ওজন ঝুলানো হলে A হতে 1 মিটার দূরে C বিন্দুতে একটি খুঁটির উপর রডটি আনুভূমিকভাবে স্থির থাকে এবং ঐ খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 30 কেজি ওজন হয়। $\therefore AC = 1$ মিটার।

এবং $10 + W = 30$ বা $W = 20$ কেজি।



আবার, W ও 10 সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

তাই $10.AC = W.CO = 20.(AO - AC)$

বা, $10.1 = 20.(AO - 1)$

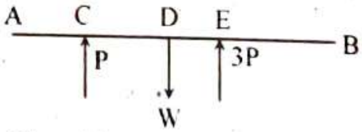
বা, $10 + 20 = 20.AO$

বা, $AO = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ মিটার

$\therefore \quad AB = 2AO = \frac{3}{2} \times 2 = 3$ মিটার।

সুতরাং রডটির ওজন 20 কেজি এবং দৈর্ঘ্য 3 মিটার।

(viii)



10 মিটার দীর্ঘ AB বারের ওজন W, বারের মধ্যবিন্দু D- তে খাঁড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। মনে করি, বারটি C ও E বিন্দুতে স্থাপিত দুইটি পেরেকের উপর সুস্থিত রয়েছে। যেখানে AC = 2 মিটার। আরও মনে করি, C বিন্দুতে চাপের পরিমাণ P, সুতরাং E বিন্দুতে চাপের পরিমাণ 3P।

এখানে, $AB = 10$ মি, $AD = BE = 5$ মি,

$AC = 2$ মি, $\therefore CD = AD - AC = 5 - 2 = 3$ মি.

এক্ষেত্রে, $W = P + 3P$ বা, $W = 4P$

এবং $P.CD = 3P.ED$

বা, $CD = 3.ED$ বা, $ED = \frac{1}{3}CD = 1$ মি.

$\therefore$ পেরেকদ্বয়ের দূরত্ব = CD + DE

$= 3 + 1 = 4$ মি. **(Ans.)**

(ix) মনে করি, AB দন্ডের B বিন্দুতে ওজন W, A বিন্দুতে লোকটির হাতের সাহায্যে নীচের দিকে চাপ T এবং তার কাঁধের উপর C বিন্দুতে চাপ R হলে,

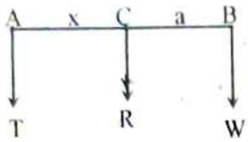
$R = T + W$ ... ... (1)

আবার, T ও W বলদ্বয়ের লব্ধি R হওয়ায়,

$T.AC = W.BC$ [এখানে $AC = x$, $BC = a$]

বা, $T.x = W.a$

$\therefore T = \frac{Wa}{x}$

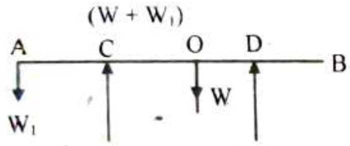


এখন, (1)নং সমীকরণে T-এর মান বসিয়ে পাই,

$R = \frac{Wa}{x} + W = W\left(1 + \frac{a}{x}\right)$

$\therefore R = W\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ **(প্রমাণিত)**

(x)



মনে করি, $AB = 2a$ দৈর্ঘ্যের তক্তাটি C ও D বিন্দুতে দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপিত যেখানে $CD = b$ এবং এর ওজন W যা এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। সুতরাং $AO = BO = \frac{2a}{2} = a$.

তক্তাটি না উল্টিয়ে A প্রান্তে সর্বাধিক W_1 ওজন ঝুলানো যায়। তখন D বিন্দুতে চাপ শূন্য এবং A ও O তে কার্যরত ওজনের লব্ধি $(W + W_1)$, C তে ক্রিয়া করে।

$\therefore W_1 \times AC = W \times OC$

$\Rightarrow \frac{AC}{OC} = \frac{W}{W_1}$

$\Rightarrow \frac{AC + OC}{OC} = \frac{W + W_1}{W_1}$ [যোজন করে]

$\Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{W + W_1}{W_1}$

$\Rightarrow OC = \frac{W_1}{W + W_1} . a$ ... ... (i)

আবার, B প্রান্তে সর্বাধিক W_2 ওজন স্থাপন করলে C বিন্দুতে চাপ শূন্য এবং O ও B তে কার্যরত ওজনের লব্ধি $(W + W_2)$, D তে ক্রিয়া করে।

$\therefore W \times OD = W_2 \times BD$

$\Rightarrow \frac{BD}{OD} = \frac{W}{W_2}$

$\Rightarrow \frac{BD + OD}{OD} = \frac{W + W_2}{W_2}$ [যোজন করে]

$\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{W + W_2}{W_2}$

$\Rightarrow \frac{a}{OD} = \frac{W + W_2}{W_2}$

$\therefore OD = \frac{W_2}{W + W_2} . a$ ... ... (ii)

(i) + (ii) করে পাই,

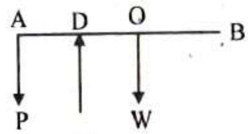
$OC + OD = \frac{W_1}{W + W_1} a + \frac{W_2}{W + W_2} a$

$\Rightarrow CD = a\left(\frac{W_1}{W + W_1} + \frac{W_2}{W + W_2}\right)$

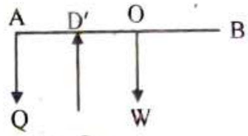
$\Rightarrow b = a\left(\frac{W_1}{W + W_1} + \frac{W_2}{W + W_2}\right)$

$\therefore \frac{W_1}{W + W_1} + \frac{W_2}{W + W_2} = \frac{b}{a}$ **(প্রমাণিত)**

(xi)



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, তক্তার দৈর্ঘ্য l এবং ওজন = W যেহেতু তক্তাটি সমরূপ, কাজেই ইহার ওজন মধ্যবিন্দু O-তে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করবে।

১ম চিত্রে, তক্তাটির প্রান্তবিন্দু A- তে স্থাপিত P ওজনের জন্য A বিন্দু হতে a দূরত্বে D বিন্দুতে স্থাপিত খুঁটির উপর সুস্থিত থাকে। কাজেই P ও W ওজনের বলদ্বয়ের লব্ধিবল খুঁটির প্রতিক্রিয়া দ্বারা প্রশমিত হবে।

$\therefore W.OD = P.AD$

বা, $W(AO - AD) = P.AD$

বা, $W\left(\frac{l}{2} - a\right) = Pa$ ... (i) [$\because AD = a, OA = \frac{l}{L}$]

২য় চিত্রে, A বিন্দুতে ওজন স্থাপন করলে A বিন্দু হতে b দূরত্বে একটি খুটির উপর তক্তাটি সুস্থিত থাকে। সুতরাং অনুরূপভাবে আমরা পাই—

$W\left(\frac{l}{2} - a\right) = Qb$ ....(ii)

(i) ÷ (ii) $\frac{\frac{l}{2} - a}{\frac{l}{2} - b} = \frac{Pa}{Qb}$

বা, $\frac{l - 2a}{l - 2b} = \frac{Pa}{Qb}$ বা, $(l - 2b) Pa = (l - 2a) = Qb$

বা, $l.Pa - l.Qb = 2ab.P - 2ab.Q$

বা, $l = \frac{2ab(P - Q)}{Pa - Qb}$ **(প্রমাণিত)**

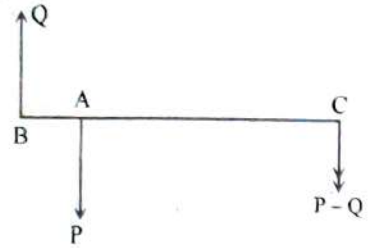
আবার, l-এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে

$$W\left\{\frac{ab(p-Q)}{Pa-Qb}-a\right\}=Pa$$

বা, $W\left(\frac{abP-abQ-a^2P-abQ}{Pa-Qb}\right)=Pa$

$\therefore W=\frac{Pa(Pa-Qb)}{Pa(b-a)}=\frac{Pa-Qb}{b-a}$ (প্রমাণিত)

(xii)



মনে করি, P, Q (P > Q) বিপরীতমুখী বলদ্বয় যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে 12 ডাইন মানের লব্ধি সৃষ্টি করে।

$\therefore P-Q=12$ ....(i)

এবং $P.AC=Q.BC$

বা, $3P=4Q$ $[\because AC=3$ এবং $BC=4]$

বা, $P=\frac{4Q}{3}$ ....(ii)

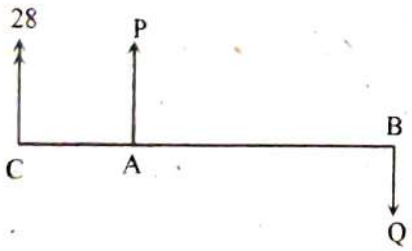
P-এর মান (i)নং এ বসিয়ে,

$\frac{4Q}{3}-Q=12\Rightarrow Q=36$

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow P=\frac{4}{3}\times 36=48$

$\therefore$ বলদ্বয় 48 ডাইন ও 36 ডাইন **(Ans.)**

(xiii)



মনে করি, P ও Q (P > Q) বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে, যেখানে AB = 14 সে.মি. বলদ্বয়ের লব্ধি 28 গ্রাম ওজন যা বৃহত্তর বল P হতে 6 সে.মি. দূরে C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore AC=6$ সে.মি.।

যখন, $P.AC=Q.BC$

বা, $P\times 6=Q(AC+AB)$

বা, $6P=Q(6+14)$

বা, $6P=20Q$ বা, $P=\frac{10}{3}Q$..................(i)

আবার, $P-Q=28$

বা, $\frac{10Q}{3}-Q=28$

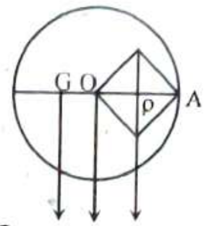
বা, $\frac{7Q}{3}=28$

$\therefore Q=\frac{28\times 3}{7}=12$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow P=\frac{10}{3}\times 12=40$

$\therefore$ নির্ণেয় বলদ্বয় 40 গ্রাম ওজন ও 12 গ্রাম ওজন **(Ans.)**

(xiv)



মনে করি, বৃত্তাকার পাতের ব্যাসার্ধ OA, বর্গাকার ছিদ্রের কোণাকুণি দুই প্রান্তের দূরত্ব অর্থাৎ একটি কর্ণের সমান যা $\frac{a}{2}$

যদি ঘনত্ব ρ হয় তবে, বৃত্তাকার পাতের ওজন

$=\frac{\pi a^2}{4}\rho$ এবং বর্গাকার ছিদ্রের জন্য প্রযুক্ত পাতের ওজন

$=\frac{a^2}{8}\rho$

$\therefore$ অবশিষ্ট অংশের ওজন $=\rho a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\right)$

এখন,

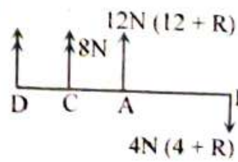
সমান্তরাল বল সূত্রমতে,

$\frac{a^2}{8}.\rho.\frac{a}{4}=\rho a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\right).OG$

বা, $OG=\frac{a}{4(2\pi-1)}$

$\therefore OG=\frac{a}{8\pi-4}$ **(দেখানো হলো)**

2.(i) মনে করি, 12N ও 4N মানের বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল দুইটি AB সরলরেখার উপর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যেখানে AB = 32 সে.মি.



মনেকরি, বলদ্বয়ের লব্ধি BA এর বর্ধিতাংশের উপর C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

তাহলে, $12.AC=4.BC$

বা, $12AC=4.(AB+AC)$

বা, $12AC=4AB+4.AC$

বা, $12AC-4.AC=4.AB$

বা, $8AC=4\times 32$

বা, $8AC=128$

$\therefore AC=\frac{128}{8}=16$ সে.মি.

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুতে R পরিমাণ বল যোগ করা হলে A বিন্দুতে $(12 + R)$ বল এবং B বিন্দুতে $(4 + R)$ বল দুইটির লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়। যেখানে, $CD = 6$ সে.মি.

$\therefore AD = AC + CD$

$= 16 + 6 = 22$ সে.মি.

$\therefore \quad (12 + R).AD = (4 + R).BD$

বা, $(12 + R)AD = (4 + R)BD$

বা, $(12 + R) \times 22 = (4 + R) \times (BA + AD)$

বা, $(12 + R) \times 22 = (4 + R) \times (32 + 22)$

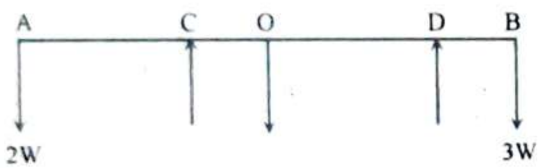
বা, $264 + 22R = 216 + 54R$

বা, $32R = 48$

$\therefore \quad R = 1.5$

$\therefore$ প্রত্যেক বলের সাথে 1.5N বল বৃদ্ধি করা হয়েছে। **(Ans.)**

(ii) মনে করি, C ও D বিন্দুতে পেরেকদ্বয় স্থাপন করে AB লাঠির A ও B প্রান্তে 2W ও 3W ওজনদ্বয় পরস্পর স্থাপন করলে পেরেকদ্বয়ের উপর চাপ সমান পড়ে। সুতরাং ইহার মধ্যবিন্দু O তে লব্ধি ওজন কাজ করে।



সুতরাং $AB = 20$ সে.মি.

$\therefore \quad CD = 10$ সে.মি. এবং $CO = OD = 5$ সে.মি.

আবার, যেহেতু 2W ও 3W বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore \quad 2W.OA = 3W.BO$

বা, $2(AC + CO) = 3(OD + BD)$

বা, $2AC + 2CO = 3.OD + 3BD$

বা, $2AC + 2.5 = 3.5 + 3.BD$

বা, $2.AC - 3.BD = 15 - 10$

$\therefore \quad 2AC - 3BD = 5 \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $AB = 20$

বা, $AC + CD + BD = 20$

বা, $AC + BD = 20 - CD$

$\therefore \quad AC + BD = 20 - 10 = 10 \ldots\ldots\ldots (ii)$

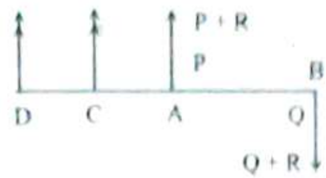
এখন, $(ii) \times 3 + (i) \Rightarrow 5.\ AC = 35$

$\therefore \quad AC = 7$

AC-এর মান (ii) নং সমীকরণে বসালে $BD = 3$

$\therefore$ A প্রান্ত হতে 7 সে.মি. দূরে একটি পেরেক এবং B প্রান্ত হতে 3 সে.মি. দূরে অপর পেরেকটি অবস্থিত। **(Ans.)**

(iii) মনে করি, দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P এবং $Q(P > Q)$ যথাক্রমে AB সরলরেখার উপর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি BA এর বর্ধিতাংশে অবস্থিত C-বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।



$\therefore \quad P.AC = Q.BC = Q(AB + AC) = Q.AB + Q.AC$

বা, $(P - Q).AC = Q.AB \ldots\ldots\ldots (1)$

আবার, বলদ্বয়কে R পরিমাণ বৃদ্ধি করা হলে, ধরি, তাদের লব্ধি

$(P + R) - (Q + R) = P - Q$ বল D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়। তাহলে $(P + R).AD = (Q + R).BD$

$= (Q + R).(AB + AD)$

বা, $(P + R).AD - (Q + R).AD = (Q + R).AB$

বা, $(P - Q).AD = (Q + R).AB \ldots\ldots\ldots (2)$

(2)নংকে (1)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে,

$$\frac{(P - Q)AD}{(P - Q)AC} = \frac{(Q + R)AB}{Q.AB}$$

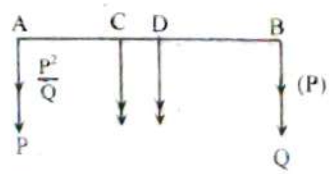
বা, $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{Q + R}{Q} = 1 + \dfrac{R}{Q}$

$\therefore \quad \dfrac{AD}{AC} > 1 \qquad [\because R > 0, Q > 0]$

$\therefore \quad AD > AC$

সুতরাং, প্রদত্ত বলদ্বয়ের মান সমপরিমান বৃদ্ধি করলে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে। **(প্রমাণিত)**

3.(i) মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুগামী।



$\therefore \quad P.AC = Q.BC$

বা, $\dfrac{AC}{Q} = \dfrac{BC}{P} = \dfrac{AC + BC}{Q + P} = \dfrac{AB}{P + Q}$

বা, $\dfrac{AC}{Q} = \dfrac{AB}{P + Q}$

বা, $AC = Q.\dfrac{AB}{P + Q}$

$\therefore \quad AC = \dfrac{Q}{P + Q}.AB \ldots\ldots\ldots (1)$

আবার, A-বিন্দুতে $\frac{P^2}{Q}$ এবং B বিন্দুতে P ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে,

$\therefore \frac{P^2}{Q}.AD = P.BD$

বা, $\frac{P}{Q}.AD = BD$

বা, $\frac{AD}{Q} = \frac{BD}{P} = \frac{AD + BD}{P + Q} = \frac{AB}{P + Q}$

বা, $AD = \frac{Q}{P + Q}.AB$ ... ... (2)

এখন, (1) ও (2) নং সমীকরণ থেকে পাই, $AC = AD$ অর্থাৎ C ও D বিন্দুর অবস্থান একই।

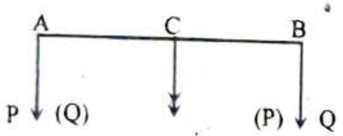
সুতরাং উভয়ক্ষেত্রে লব্ধির অবস্থান একই হবে।

(দেখানো হলো)

(ii) মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে P ও Q মানের সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুগামী।

$\therefore P \times AC = Q \times BC$ ... ... (i)

শর্তানুসারে, A বিন্দুতে Q এবং B বিন্দুতে P কার্যরত হলে এদের লব্ধি পুনরায় C বিন্দুগামী হবে।



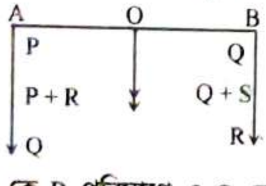
$\therefore Q \times AC = P \times BC$ ... ... (ii)

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P}$

$\Rightarrow P^2 = Q^2$

$\therefore P = Q$. **(প্রমাণিত)**

(iii) মনে করি, P, Q সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে A, B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে এবং তাদের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাহলে $P.AO = Q.BO$ ... ... (1)



আবার, P কে R পরিমাণে ও Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore (P + R). AO = (Q + S). BO$ ... ... (2)

P, Q এর বদলে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore Q.AO = R.BO$ ... ... (3)

এখন, (1) নং সমীকরণকে (3) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে পাই, $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P - Q}{Q - R}$ ... ... (4)

আবার, (2) নং সমীকরণ হতে (1) নং বিয়োগ করে পাই, $R.AO = S.BO$ ... ... (5)

তাহলে (3)নং সমীকরণকে (5)নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{Q}{R} = \frac{R}{S} = \frac{Q - R}{R - S}$ ... ... (6)

এখন, (4) এবং (6) নং হতে পাই, $\frac{P - Q}{Q - R} = \frac{Q - R}{R - S}$

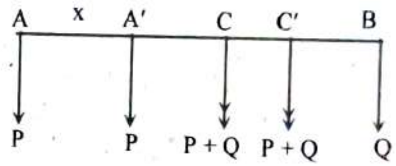
বা, $(R - S)(P - Q) = (Q - R)^2$

বা, $R - S = \frac{(Q - R)^2}{P - Q}$

$\therefore S = R - \frac{(Q - R)^2}{P - Q}$ **(দেখানো হলো)**

(iv) মনে করি, AB সরলরেখায় A ও B বিন্দুতে সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় P ও Q ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে

$P.AC = Q.BC$ ... ... (1)



আবার, P বলকে Q বলের দিকে x পরিমাণ দূরে সরালে ধরি A′ বিন্দুতে P বল এবং C′ বিন্দুতে লব্ধি (P + Q) বল ক্রিয়া করে।

$\therefore P.A'C' = Q.BC'$

বা, $P.(A'C + CC') = Q.(BC - CC')$

বা, $P.A'C + P.CC' = Q.BC - Q.CC'$

বা, $P.A'C + P.CC' + Q.CC' = Q.BC$

বা, $(P + Q).CC' = Q.BC - P.A'C$

$= P.AC - P.(AC - AA')$ [(1 নং হতে]

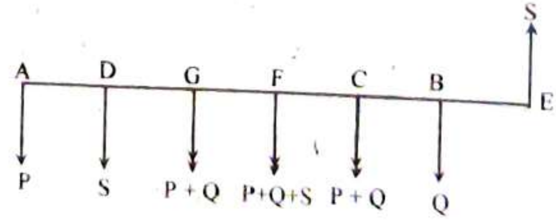
$= P.AA'$

বা, $(P + Q).CC' = Px$

$\therefore CC' = \frac{Px}{P + Q}$

সুতরাং লব্ধি $\frac{Px}{P + Q}$ দূরে সরে যাবে। **(দেখানো হলো)**

(v) মনে করি, AB রেখার A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি (P + Q), C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।



আবার, D ও E বিন্দুতে S মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। এখন D বিন্দুতে S এবং C বিন্দুতে (P + Q) বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + S), F বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$(P + Q).CF = S.DF$ ……… (1)

আবার, F বিন্দুতে (P + Q + S) এবং E বিন্দুতে S মানের বিপরীত মুখী বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q), G বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore$ $(P + Q + S).GF = S.EG$

বা, $(P + Q).GF = S.EG - S.GF = S.(EG - GF)$

বা, $(P + Q).GF = S.EF$ ……… (2)

এখন, (1) ও (2)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$(P + Q).CF + (P + Q).GF = S.DF + S.EF$

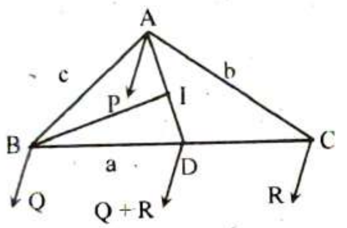
বা, $(P + Q)(CF + GF) = S.(DF + EF)$

বা, $(P + Q).CG = S.DE$ [এখানে DE = b]

বা, $(P + Q).CG = Sb \quad \therefore CG = \dfrac{Sb}{P+Q}$

সুতরাং লব্ধি $\dfrac{Sb}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। **(দেখানো হলো)**

4(i)



মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দুতে ক্রিয়ারত সমমুখী সমান্তরাল বলগুলোর মান যথাক্রমে ka, kb, kc. অর্থাৎ P = ka, Q = kb এবং R = kC.

B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলের লব্ধির (Q + R) বলটি BC বাহুস্থ D বিন্দুতে হলে,

$\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{R}{Q} = \dfrac{kc}{kb} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{AB}{AC}$ .... (i)

অতএব AD রেখা A কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

আবার,

A ও D বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও (Q + R) সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + R) বলটি AD রেখাস্থ I বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে,

$\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{Q+R}{P} = \dfrac{kb+kc}{ka} = \dfrac{b+c}{a}$ ……… (ii)

কিন্তু $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$ [(1) নং হতে]

$= \dfrac{AB+AC}{BD+CD} = \dfrac{AB+AC}{BC} = \dfrac{b+c}{a}$ ……… (iii)

তাহলে (ii) ও (iii)নং হতে $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AI}{ID}$

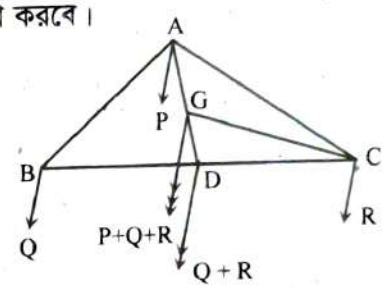
$\therefore$ BI রেখাটি B কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সুতরাং I বিন্দুটি A ও B কোণের অন্তঃসমদ্বিখন্ডকের ছেদবিন্দু।

অর্থাৎ I বিন্দুতে ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। তাই বলদ্বয়ের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করে।

(দেখানো হলো)

(ii) মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C তিনটি কৌণিক বিন্দুতে P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বলগুলি ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত। যেহেতু A বিন্দুতে P বল এবং G বিন্দুতে লব্ধি বল R + P + Q ক্রিয়াশীল সুতরাং B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি BC ও AGD- এর ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore$ $Q.BD = R.CD$ ……… (1)

যেহেতু AD মধ্যমা। $\therefore BD = CD$ ……… (2)

(1)নং সমীকরণকে (2)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করি,

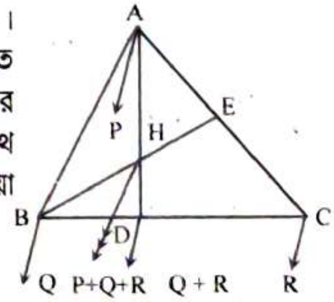
$Q = R$ ……… (3)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $P = Q$ ……… (4)

$\therefore$ (3) ও (4) নং সমীকরণ হতে পাই $P = Q = R$

(দেখানো হলো)

(iii) (a) ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র H, বর্ধিত AH রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলদ্বয়ের লব্ধি BC রেখার উপরস্থ কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



আবার বল তিনটির লব্ধি (P + Q + R), H বিন্দুতে এবং P বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়া করে। কাজেই Q এবং R এর লব্ধি (Q + R) বলটি

BC এবং AHD রেখার ছেদবিন্দু D- তে ক্রিয়া করবে।

$\therefore$ $Q.BD = R.CD$

বা, $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{CD/AD}{BD/AD} = \dfrac{\cot C}{\cot B} = \dfrac{\tan B}{\tan C}$

বা, $\frac{Q}{R}=\frac{\tan B}{\tan C}$ বা, $\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$ ……… (1)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}$ …… (2)

তাহলে (1) ও (2)নং হতে পাই,

$\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$ **(প্রমাণিত)**

(b) আবার, $\frac{P}{\frac{\sin A}{\cos A}}=\frac{Q}{\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{R}{\frac{\sin C}{\cos C}}$

বা, $\frac{P\cos A}{\sin A}=\frac{Q\cos B}{\sin B}=\frac{R\cos C}{\sin C}$

বা, $\frac{P\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a}=\frac{Q\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)}{b}$

$=\frac{R\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c}\left[\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\right]$

বা, $\frac{P(b^2+c^2-a^2)}{2abc}=\frac{Q(c^2+a^2-b^2)}{2abc}$

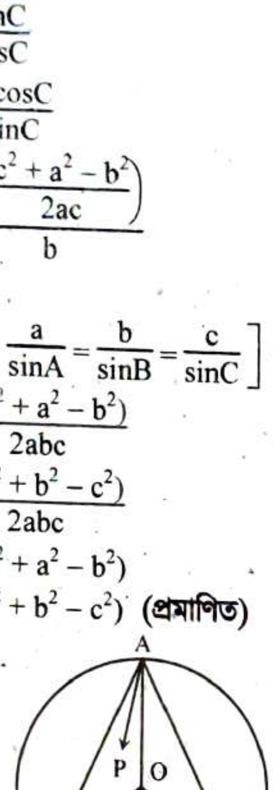
$=\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

বা, $P(b^2+c^2-a^2)=Q(c^2+a^2-b^2)$

$=R(a^2+b^2-c^2)$ **(প্রমাণিত)**

(iv)

মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।
B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R এর লব্ধি BC রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।



আবার, তিনটি বলের লব্ধি O বিন্দুগামী এবং P বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়ারত, কাজেই Q এবং R এর লব্ধি BC এবং AOD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়ারত হবে।

$\therefore$ $Q.BD=R.CD$

বা, $\frac{Q}{R}=\frac{CD}{BD}=\frac{CD/OD}{BD/OD}$ ……… (1)

ΔCOD হতে পাই,

$\frac{CD}{\sin COD}=\frac{OD}{\sin OCD}$

বা, $\frac{CD}{OD}=\frac{\sin COD}{\sin OCD}$ ……… (2)

অনুরূপভাবে ΔBOD এ $\frac{BD}{OD}=\frac{\sin BOD}{\sin OBD}$

(1)নং সমীকরণে উপরোক্ত মান বসিয়ে পাই,

$\frac{Q}{R}=\frac{CD/OD}{BD/OD}=\frac{\frac{\sin COD}{\sin OCD}}{\frac{\sin BOD}{\sin OBD}}$ ……… (3)

আবার, যেহেতু $OB=OC=$ পরিব্যাসার্ধ,

সুতরাং $\angle OCD=\angle OBD$ বা, $\sin OCD=\sin OBD$.

(3) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{Q}{R}=\frac{\sin COD}{\sin BOD}=\frac{\sin(\pi-AOC)}{\sin(\pi-AOB)}=\frac{\sin AOC}{\sin AOB}$

আবার, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে, $\angle AOC=2B$, এবং $\angle AOB=2C$

$\therefore$ $\frac{Q}{R}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

বা, $\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$ ……… (4)

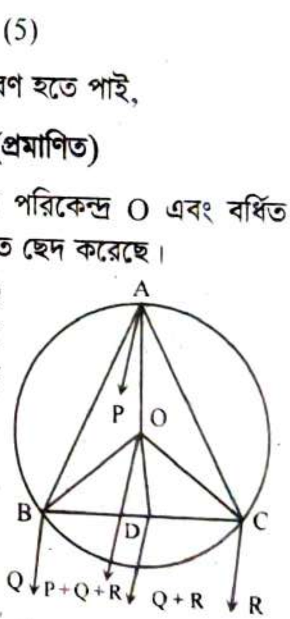
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=$ ……… (5)

তাহলে (4) ও (5)নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$ **(প্রমাণিত)**

(v) মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।
B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q এবং R এর লব্ধি BC রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।



আবার তিনটি বলের লব্ধি O বিন্দুতে এবং P বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে, Q এবং R এর লব্ধি BC এবং AOD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়ারত হবে।

$\therefore$ $\frac{Q}{R}=\frac{CD}{BD}$ ……… (1)

এখন, BOD ত্রিভুজে

$\frac{BD}{\sin BOD}=\frac{BO}{\sin BDO}$

এবং COD ত্রিভুজে $\frac{CD}{\sin COD}=\frac{CO}{\sin CDO}$

কিন্তু $BO=CO$ এবং $\sin BDO=\sin CDO$

$[\because BDO=\pi-CDO]$

$\therefore \dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{CD}{\sin COD}$

বা, $\dfrac{\sin COD}{\sin BOD} = \dfrac{CD}{BD}$

বা, $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{\sin COD}{\sin BOD}$ ... ... (2)

বা, $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{\sin COD}{\sin BOD}$ [(i)নং হতে]

বা, $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{\sin(180° - COA)}{\sin(180° - AOB)} = \dfrac{\sin COA}{\sin AOB}$

বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে $\angle COA = 2B$ এবং $\angle AOB = 2C$

$\therefore \dfrac{Q}{R} = \dfrac{\sin 2B}{\sin 2C} = \dfrac{2\sin B.\cos B}{2\sin C.\cos C}$

বা, $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{b\cos B}{c\cos C}$ ... ... (3) $\left[\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}\right]$

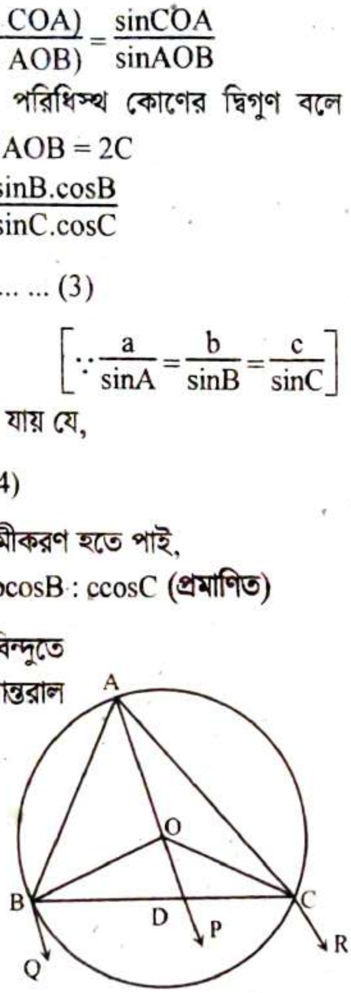
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\dfrac{P}{Q} = \dfrac{a\cos A}{b\cos B}$ ... ... (4)

সুতরাং (3) ও (4)নং সমীকরণ হতে পাই,

$P : Q : R = a\cos A : b\cos B : c\cos C$ **(প্রমাণিত)**

(vi) মনে করি, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয় Q ও R.



এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Q ও R এর লব্ধি BC রেখার উপরস্থ কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার, লব্ধি বল AO বরাবর ক্রিয়া করে কাজেই Q এবং R এর লব্ধি (Q + R) বলটি AO অর্থাৎ AOD রেখার উপরস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

অতএব $Q.BD = R.CD$

বা, $\dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{CD/OD}{BD/OD}$ ... ... (1)

এখন, COD ত্রিভুজ হতে, $\dfrac{CD}{\sin COD} = \dfrac{OD}{\sin OCD}$

বা, $\dfrac{CD}{OD} = \dfrac{\sin COD}{\sin OCD}$

আবার, BOD ত্রিভুজ হতে, $\dfrac{BD}{\sin BOD} = \dfrac{OD}{\sin OBD}$

$\therefore \dfrac{BD}{OD} = \dfrac{\sin BOD}{\sin OBD}$ ... ... (2)

(1) নং সমীকরণে উপরোক্ত মানগুলো বসিয়ে পাই,

$\dfrac{Q}{R} = \dfrac{CD/OD}{BD/OD} = \dfrac{\sin COD/\sin OCD}{\sin BOD/\sin OBD}$ ... ... (3)

যেহেতু OB = OC = পরিব্যাসার্ধ

সুতরাং $\angle OCD = \angle OBD$

$\therefore \sin OCD = \sin OBD$ হলে,

(3) নং সমীকরণ হতে পাই,

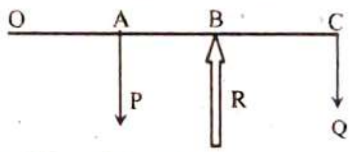
$\dfrac{Q}{R} = \dfrac{\sin COD}{\sin BOD} = \dfrac{\sin(\pi - AOC)}{\sin(\pi - AOB)} = \dfrac{\sin AOC}{\sin AOB}$

আবার, বৃত্তের কেন্দ্রেস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে, $\angle AOC = 2B$ এবং $\angle AOB = 2C$

$\therefore \dfrac{Q}{R} = \dfrac{\sin 2B}{\sin 2C}$

$\therefore Q : R = \sin 2B : \sin 2C$ **(দেখানো হলো)**

(vii) মনে করি, OC দন্ডের O প্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে অবস্থিত A বিন্দুতে P বল, 6 মিটার দূরে B বিন্দুতে R বল এবং 8 মিটার দূরে C বিন্দুতে Q বলক্রিয়া করে।



$\therefore AB = OB - OA = 6 - 2 = 4$

এবং $BC = OC - OB = 8 - 6 = 2$

যেহেতু তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

$\therefore$ P ও Q এর লব্ধি R এর সমান এবং P, Q এর ক্রিয়াদিকের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে।

$\therefore R = P + Q$ ... ... (1)

এবং $P.AB = Q.BC$

বা, $P.4 = Q.2$

বা, $Q = 2P$ ... ... (2)

এখন, Q-এর মান (1)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$R = P + 2P = 3P$ বা, $\dfrac{R}{P} = \dfrac{3}{1}$

$\therefore \dfrac{R}{3} = \dfrac{P}{1}$ ... ... (3)

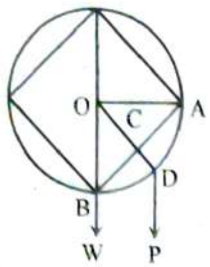
আবার, (2) নং সমীকরণ হতে পাই, $\dfrac{Q}{2} = \dfrac{P}{1}$ ... ... (4)

সুতরাং (3) ও (4)নং সমীকরণ হতে পাই,

$\dfrac{P}{1} = \dfrac{Q}{2} = \dfrac{R}{3}$

$\therefore P : Q : R = 1 : 2 : 3$ **(দেখানো হলো)**

5(i)



মনে করি,

AB বৃত্তাকার চাপের মধ্যবিন্দু D এবং সর্বাধিক P বল প্রয়োগ করলে টেবিলটি উল্টিয়ে যাবে।

এখন,

প্রয়োজনীয় বল P হলে, C বিন্দুতে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$P.\,CD > W.\,OC$

বা, $P(OD - OC) > W.\,OC$

বা, $P(OA - OA\sin 45°) > W.\,OA\sin 45°$

বা, $P\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \frac{W}{\sqrt{2}}$

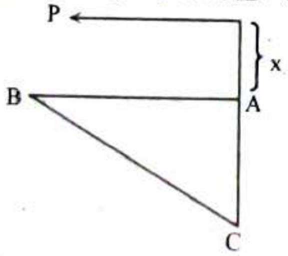
বা, $P > \frac{W}{\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

বা, $P > \frac{W}{\sqrt{2} - 1}$

বা, $P > \frac{W(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}$

$\therefore$ $P > W(\sqrt{2} + 1)$ **(দেখানো হলো)**

(ii) যেহেতু ভ্রামকের মান সবগুলিই ধনাত্মক সেহেতু বলটির একই পাশে A, B, C বিন্দু তিনটির অবস্থান। আবার যেহেতু A ও B দুটি বিন্দুতে ভ্রামক সমান সুতরাং বলটি AB এর সমান্তরাল হবে। A ও B বিন্দুতে ভ্রামকের মান C বিন্দুতে ভ্রামকের মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং বলের ক্রিয়া রেখাটি C অপেক্ষা AB এর নিকটবর্তী।



মনে করি,

A বিন্দু হতে P বলের দূরত্ব x মিটার

$\therefore$ $Px = 12$ ...... (i) ও $P(x + 6) = 18$ ...... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{x + 6}{x} = \frac{18}{12}$

বা, $\frac{x + 6}{x} = \frac{3}{2}$

বা, $2x + 12 = 3x$

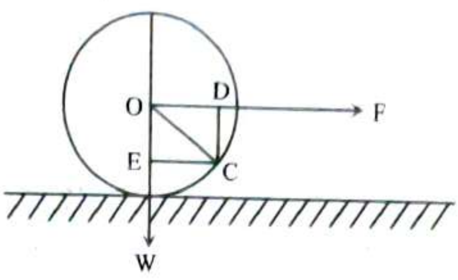
বা, $3x - 2x = 12$

$\therefore$ **$x = 12$ মিটার**

$\therefore$ নির্ণেয় বল $P = \frac{12}{12} = 1$ কেজি $= 9.8$ নিউটন

$\therefore$ নির্ণেয় বলের মান 1 কেজি ওজনের সমতুল্য বা 9.8 নিউটন এবং তার গতিপথ A বিন্দু থেকে 12 মিটার দূরে AB এর সমান্তরাল **(Ans.)**

(iii)



মনে করি,

চাকাটি 8 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি খাড়া প্রতিবন্ধকতা পার হওয়ার জন্যে প্রয়োজনীয় বলের পরিমাণ F

$CD = OE = (15 - 8)$ ইঞ্চি $= 7$ ইঞ্চি

$\therefore$ $CE = \sqrt{15^2 - 7^2} = 4\sqrt{11}$

C বিন্দুর চারদিকে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$F.CD > W.CE$

বা, $F > \frac{W.CE}{CD}$ বা, $F > \frac{W.4\sqrt{11}}{7}$

$\therefore$ $F > \frac{4\sqrt{11}}{7}W$

$\therefore$ ন্যূনতম বল $\frac{4\sqrt{11}}{7}W$ একক **(Ans.)**

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর

1. ক. **ব্যাখ্যা:** লব্ধি = 17

আমরা জানি,

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $17^2 = 6^2 + 11^2 + 132\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = 1$

$\alpha = 0°$

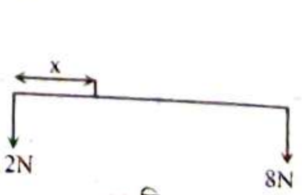
2. ঘ. **ব্যাখ্যা:** দেওয়া আছে, $P = Q = R$

এখন, $P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \alpha = 120°$

3. গ. **4.** ক.

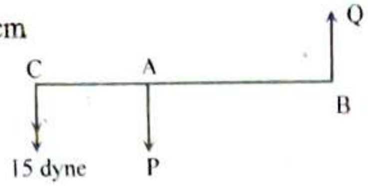
5. খ. **ব্যাখ্যা:** মনে করি, লব্ধি 12N বল থেকে x দূরত্বে অবস্থিত।



$12 \times x = 8(15 - x)$

$\therefore x = 6$ মি.

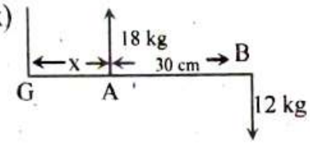
6. ক. **ব্যাখ্যা:** $AC = 3cm$
$BC = 5cm$
$P.AC = Q.BC$
$P.3 = Q.5$
বা, $3P = 5Q$ ... (i)



প্রশ্নমতে, $P - Q = 15 \Rightarrow P = 15 + Q$
(i) এ $P = 15 + Q$ বসিয়ে
$3(15 + Q) = 5Q$
বা, $45 + 3Q = 5Q$ বা, $45 = 2Q$ বা, $Q = 22.5$ dyne
$\therefore P = 15 + Q = 15 + 22.5 = 37.5$ dyne

7. গ; **8.** খ; **9.** ক;

10. ক; ব্যাখ্যা: মনে করি 18 kg এবং 12 kg ভরের বিসদৃশ বল দুইটি A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এখানে AB = 30 cm। ধরি, লব্ধি G বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং AG = x
শর্তমতে, $18.x = 12.(30 + x)$
বা, $18x = 360 + 12x$
বা, $6x = 360$
$\therefore x = 60$



11. গ; **12.** গ; **13.** গ; **14.** গ; **15.** গ; **16.** গ; **17.** গ; **18.** ক; **19.** ঘ; **20.** গ;

21. ঘ; **22.** ক; **23.** ঘ; **24.** ঘ; **25.** ক;

26. খ. **ব্যাখ্যা:** $S + T = 10$
$S - T = 4$
$\therefore S = 7N$

27. ঘ. **ব্যাখ্যা:** $S = 7N, T = 3N$
$R^2 = 7^2 + 3^2 + 2 \times 7 \times 3 \cos 60°$
$\therefore R = \sqrt{79}N$

28. ক; ব্যাখ্যা: $S^2 + T^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52$
এবং $S + T = 10$
বা, $S^2 + T^2 + 2ST = 100$ বা, $ST = 24$
এখন, $(S - T)^2 = (S + T)^2 - 4ST = 100 - 4.24 = 4$
$\therefore S - T = 2 =$ বলদ্বয়ের ক্ষুদ্রতম লব্ধি

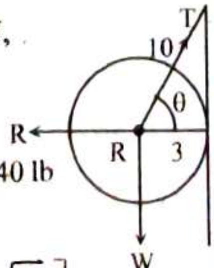
29. ঘ; ব্যাখ্যা: বলদ্বয়ের অনুপাত $= 6 : 4 = 3 : 2$

30. ক; **31.** ঘ; **32.** খ; **33.** গ; **34.** ক; **35.** ক; **36.** গ; **37.** খ; **38.** ক;

39. গ; **ব্যাখ্যা:** লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{W}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{T}{\sin 90°}$$

বা, $T = \frac{W}{\sin\theta} = \frac{10000}{\frac{4\sqrt{10}}{13}} = 10277.40$ lb



$\left[\text{এখানে, } \sin\theta = \frac{\sqrt{13^2 - 3^2}}{13} = \frac{4\sqrt{10}}{13}\right]$

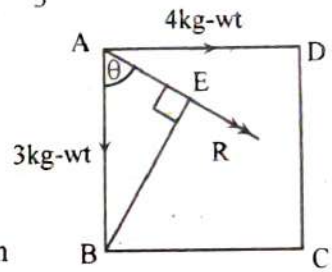
40. ক;

41. গ; **ব্যাখ্যা:** আমরা জানি, $x = \frac{p - q}{p + q} \times d = \frac{8 - 6}{8 + 6} \times 21$
$= 3$ একক

42. ঘ; **ব্যাখ্যা:** 8N ও 5N এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,
$7^2 = 8^2 + 5^2 + 2.8.5 \cos\theta$
বা, $\cos\theta = \frac{49 - 64 - 25}{2.8.5}$
$= -\frac{1}{2} = \cos 120°$
$\therefore \theta = 120°$

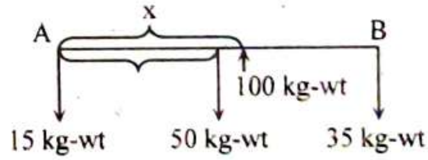
43. ক;

44. খ; **ব্যাখ্যা:** AB ও AD লম্ব রেখা বরাবর যথাক্রমে 3kg ও 4kg বলদ্বয় এর লব্ধি $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$kg যা AE বরাবর এবং BE রেখা AE এর উপর লম্ব।
$\angle BAE = \theta$ হলে, $\tan\theta = \frac{4}{3}$
বা, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ এবং
$\therefore \frac{BE}{AB} = \sin\theta$
$BE = AB \sin\theta$
$= 5 \times \frac{4}{5} = 4m$



45. খ;

46. ঘ; **ব্যাখ্যা:** A বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক,
$15 \times 0 + 50 \times 6 + 35 \times 12 = 100x$
বা, $x = \frac{720}{100} = \frac{36}{5}$ মিটার



47. ক; ব্যাখ্যা: বলের পার্থক্য $14 - 10 = 10 - 6 = 4$
$\therefore$ লব্ধির মান $= \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$ units

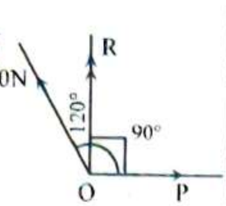
48. খ; 49. ঘ;

50. খ; **ব্যাখ্যা:** $(\sqrt{10})^2 = P^2 + (\sqrt{2})^2 + 2P.\sqrt{2}\cos 45°$
বা, $10 = P^2 + 2 + 2P.\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $10 = P^2 + 2P + 2$ বা, $P^2 + 2P - 8 = 0$
বা, $P^2 + 4P - 2P - 8 = 0$
বা, $P(P + 4) - 2(P + 4) = 0$
বা, $(P - 2)(P + 4) = 0$ $\therefore P = 2N$.

51. খ; **ব্যাখ্যা:** $\cos 120° = -\frac{P}{10} = -\frac{1}{2}$

$\therefore P = 5$ N.

$\therefore R = \sqrt{10^2 - 5^2}$
$= 5\sqrt{3}$N

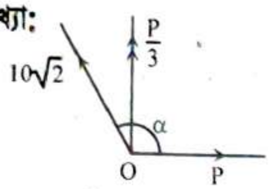


52. ক; **ব্যাখ্যা:** যেহেতু লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে

$\therefore \frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8}$ বা, $4P = 2P + 8$

$\therefore P = 4$

53. খ; **ব্যাখ্যা:**



$\therefore \tan 90° = \frac{10\sqrt{2}\sin\alpha}{P + 10\sqrt{2}\cos\alpha} = \frac{1}{0}$

$\therefore P + 10\sqrt{2}\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow 10\sqrt{2}\cos\alpha = -P$

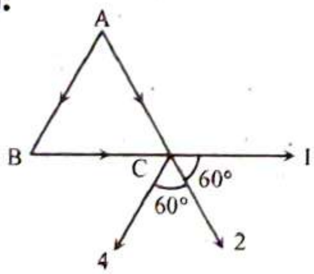
আবার, $\left(\frac{P}{3}\right)^2 = P^2 + (10\sqrt{2})^2 + 2.P.10\sqrt{2}\cos\alpha$

$\frac{P^2}{9} = P^2 + 200 + 2P(-P)$

বা, $\frac{P^2}{9} + P^2 = 200$ বা, $10P^2 = 1800$

$\therefore P^2 = 180 \therefore P = 6\sqrt{5}$

54. ক; **ব্যাখ্যা:**



মনে করি, লব্ধি R এবং BC এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$R\cos\theta = 1\cos 0° + 2\cos 60° + 4\cos 120° = 0$

$R\sin\theta = 1\sin 0° + 2\sin 60° + 4\sin 120° = 3\sqrt{3}$.

$\therefore R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = 0 + (3\sqrt{3})^2$

বা, $R^2 = (3\sqrt{3})^2 \quad \therefore R = 3\sqrt{3}$.

55. ক; **ব্যাখ্যা:** $3\sqrt{7} = \sqrt{12^2 - p^2}$

বা, $63 = 144 - p^2$

বা, $P^2 = 144 - 63$

বা, $P^2 = 81 \quad \therefore P = 9$ N

56. খ; **ব্যাখ্যা:** $\frac{9}{2\cos\frac{60°}{2}} = \frac{9}{2\cos 30°} = 3\sqrt{3}$ N.

57. খ; **ব্যাখ্যা:** শর্তমতে, $P + Q = 17$

$\therefore Q = 17 - P$ ....(i)

$R^2 = P^2 + Q^2$ [$\because \alpha = 90°$]

বা, $13^2 = P^2 + (17-P)^2$

বা, $169 = P^2 + 289 - 34P + P^2$

বা, $2P^2 - 34P + 120 = 0$

বা, $P^2 - 17P + 60 = 0$

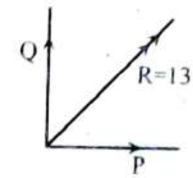
বা, $P^2 - 12P - 5P + 60 = 0$

বা, $(P-12)(P-5) = 0$

$\therefore P = 12$N অথবা $P = 5$N

সুতরাং $Q = 5$N অথবা $Q = 12$N

অতএব, লব্ধির ক্ষুদ্রতর মান $= (12 - 5)$ N $= 7$N



58. খ; **ব্যাখ্যা:** $45.\ AC = 15.\ BC$

বা, $45 \times 5 = 15.(AB + AC)$

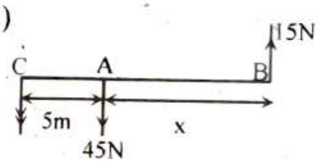
বা, $225 = 15(x + 5)$

বা, $15 = x + 5$

বা, $x = 15 - 5$

$\therefore x = 10$

$\therefore AB = 10$ m



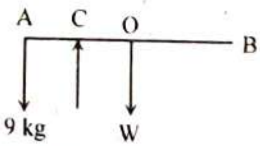
59. ক; **ব্যাখ্যা:**

$2.\ BD = P.\ CD$ ....(i)

এবং, $BD = CD$.......... (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, $2.BD = P.\ BD \therefore P = 2$

60. গ; **ব্যাখ্যা:**



এখানে, $AB = 12$ m $\therefore AO = BO = 6$ m

$AC = 5.25$ m

$\therefore OC = AO - AC = 6 - 5.25 = 0.75$m

এখন, $9 \times AC = W \times OC$ বা, $9 \times 5.25 = W \times 0.75$

বা, $W = \frac{9 \times 5.25}{0.75} = 63$ kg

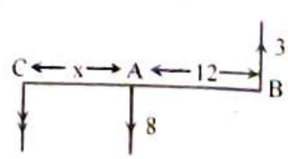
61. খ; **ব্যাখ্যা:** $8.\ AC = 3.\ BC$

বা, $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{8}$

বা, $\frac{x}{12 + x} = \frac{3}{8}$

বা, $8x = 36 + 3x$

বা, $5x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7{\cdot}2$



$\therefore BC = AB + AC = 12 + 7{\cdot}2 = 19{\cdot}2$

62. গ; **ব্যাখ্যা:** $R^2 = (3P)^2 + (2P)^2 + 2.3P.\ 2P\cos\alpha$

বা, $R^2 = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha$ ...... (i)

আবার, $(2R)^2 = (6P)^2 + (2P)^2 + 2.6P.2P\cos\alpha$

বা, $4R^2 = 40P^2 + 24P^2\cos\alpha$ .... (ii)

বা, $R^2 = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$

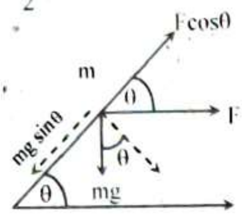
বা, $13P^2 + 12P^2\cos\alpha = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$

বা, $13 + 12\cos\alpha = 10 + 6\cos\alpha$

বা, $6\cos\alpha = -3$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\ \therefore \alpha = 120°$

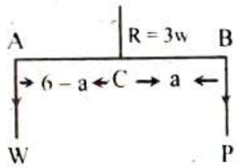
63. ঘ; **ব্যাখ্যা:**



$mg\sin\theta = F\cos\theta\ \therefore F = mg\tan\theta$

64. খ; **ব্যাখ্যা:** ধরি, B প্রান্তে হাতের চাপ P এবং A প্রান্তে বোঝার ওজন W. কাঁধের উপর প্রযুক্ত চাপ R = 3W.

কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব = a



$\therefore R = W + P$

বা, $3W = W + P$

$\therefore P = 2W$

$\therefore W.AC = P.BC$

বা, $W.(6 - a) = 2W.BC$

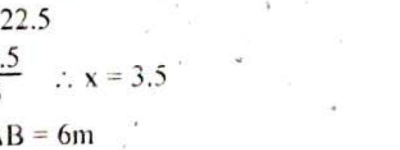
বা, $6 - a = 2BC$ বা, $6 - a = 2a$ বা, $3a = 6$

$\therefore a = 2$

$\therefore BC = 2$ ফুট

65. খ; **66.** ক;

67. গ; **ব্যাখ্যা:**



$10.5x = 24.5(5 - x)$

বা, $10.5x = 122.5 - 24.5x$

বা, $10.5x + 24.5x = 122.5$

বা, $35x = 122.5$

বা, $x = \frac{122.5}{35}\quad \therefore x = 3.5$

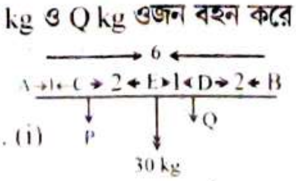
68. ক; **ব্যাখ্যা:** $AB = 6m$

$AE = BE = 3m$

$AC = 1m\quad \therefore CE = AE - AC = 3 - 1 = 2m$

$BD = 2m\quad \therefore DE = BE - BD = 3 - 2 = 1m$

C ও D বিন্দুতে লোকদ্বয় P kg ও Q kg ওজন বহন করে



$\therefore P.CE = Q.DE$

বা, $P.2 = Q.1$

$\therefore Q = 2P$ .... (i)

এবং $P + Q = 30\ kg$ .... (ii)

বা, $P + 2P = 30$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $3P = 30\ \therefore P = 10\ kg$

(i) নং এ $P = 10\ kg$ বসিয়ে পাই, $Q = 20\ kg$

$P = 10\ kg$ এবং $Q = 20\ kg$

69. খ; **ব্যাখ্যা:** ধরি, সমান বলদ্বয় P এবং ইহাদের লব্ধি বল $R = \sqrt{3}P$. ধরি ইহাদের অন্তর্গত কোণ α.

$\therefore P = \dfrac{\sqrt{3}P}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

বা, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos30°$

বা, $\frac{\alpha}{2} = 30°$

$\therefore \alpha = 60°$

70. ক; **ব্যাখ্যা:** $(P\sqrt{2+\sqrt{2}})^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

বা, $P^2(2 + \sqrt{2}) = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $2 + \sqrt{2} = 2 + 2\cos\alpha$

বা, $2\cos\alpha = \sqrt{2}$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos45°\quad \therefore \alpha = 45°$

$\therefore$ যে কোন একটির সাথে লব্ধির নতি $= \frac{\alpha}{2} = 22.5°$

71. ক;

72. ক; **ব্যাখ্যা:** ধরি, অজানা বল P

পীথাগোরাসের উপপাদ্য হতে,

$P^2 = R^2 + 9^2$

বা, $P^2 = \left(\frac{2P}{3}\right)^2 + 81$

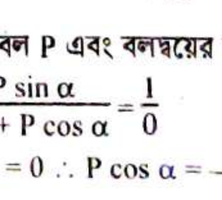
বা, $9P^2 = 4P^2 + 729$

বা, $5P^2 = 729$

$\therefore P = \frac{27}{\sqrt{5}}$ একক

73. ক;

74. গ; **ব্যাখ্যা:**



মনে করি, অজানা বল P এবং বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α.

$\therefore \tan 90° = \frac{P\sin\alpha}{12 + P\cos\alpha} = \frac{1}{0}$

বা, $12 + P\cos\alpha = 0\ \therefore P\cos\alpha = -12$

আবার, $\left(\frac{P}{2}\right)^2 = 12^2 + P^2 + 2.12.\ P\cos\alpha$

বা, $\frac{P^2}{4} = 144 + P^2 + 24(-12)$

বা, $\frac{P^2}{4} - P^2 = 144 - 288$

বা, $-\frac{3P^2}{4} = -144$

বা, $P^2 = \frac{144 \times 4}{3} = 192$

$\therefore P = \sqrt{192} = \sqrt{64 \times 3} = 8\sqrt{3}$ একক

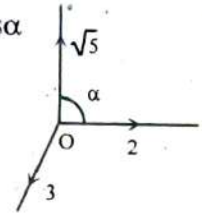
75. খ; **ব্যাখ্যা:** ধরি, প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α.

$\therefore\ 3^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 + 2.2.\sqrt{5}\cos\alpha$

বা, $4\sqrt{5}\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0 = \cos 90°$

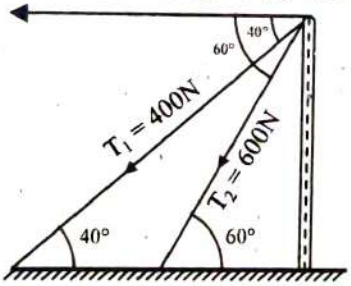
$\therefore\ \alpha = 90°$



▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. **ক** **বলের লম্বাংশের উপপাদ্য:** কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের কোনো নির্দিষ্ট দিকের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ বলদ্বয়ের লব্ধির একই দিকে লম্বাংশের সমান।

খ টানা তার দুইটির আনুভূমিক উপাংশের যোগফলই হবে নির্ণেয় সর্বোচ্চ আনুভূমিক ধাক্কা

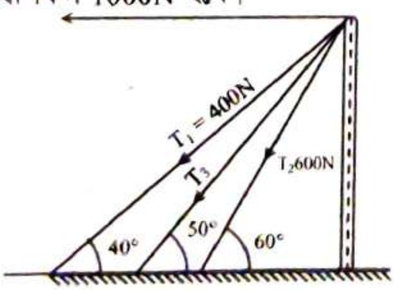


আনুভূমিক উপাংশদ্বয়ের যোগফল $= T_1\cos 40° + T_2\cos 60° = 400 \times 0.766 + 600 \times 0.5$
$= 306.42 + 300 = 606.42$ N

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ ধাক্কা = 606.42N **(Ans.)**

গ বাতাস 1000N বলে ধাক্কা দেয়।

$\therefore$ টানা তার তিনটির টানের আনুভূমিক উপাংশের যোগফল 1000N হবে।



$\therefore\ T_1\cos 40° + T_2\cos 60° + T_3\cos 50° = 1000$

বা, $400\cos 40° + 600\cos 60° + T_3\cos 50° = 1000$

বা, $606.42 + T_3\cos 50° = 1000$

বা, $T_3\cos 50° = 393.58$

বা, $T_3 = \frac{393.58}{\cos 50°}$

$\therefore\ T_3 = 612.30$N **(Ans.)**

2. **ক** মনে করি, সমান্তরাল বলদ্বয় P ও Q নিউটন $[P > Q]$

$\therefore$ বলদ্বয়ের সদৃশ লব্ধি $= (P + Q)$N

এবং অসদৃশ লব্ধি $= (P - Q)$N

প্রশ্নমতে, $P + Q = 14$ .... (i)

$P - Q = 2$ .... (ii)

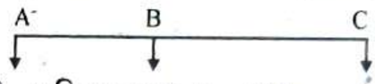
(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2P = 16$

$\therefore\ P = 8$

$\therefore\ Q = 14 - 8 = 6$

$\therefore$ বলদ্বয়ের মান 8N ও 6N **(Ans.)**

খ



ধরি, A বিন্দুতে ভর, P = 40 kg

C বিন্দুতে ভর, Q = 10 kg

A বিন্দু হতে খুঁটির (B) দূরত্ব = x মিটার

দেওয়া আছে, দণ্ডের মোট দৈর্ঘ্য = 20 মিটার

যেহেতু P ও Q বলের লব্ধি B বিন্দুতে ক্রিয়া করবে,

$\therefore\ P.AB = Q.CB$

বা, $40x = 10(20 - x)$

বা, $40x = 200 - 10x$

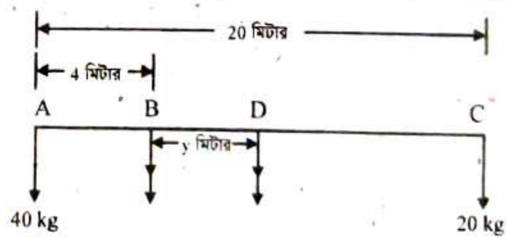
বা, $40x + 10x = 200$

বা, $50x = 200$

$\therefore\ x = 4$

$\therefore$ খুঁটির অবস্থান A বিন্দু হতে 4 মিটার ডানে। **(Ans.)**

গ



বাম প্রান্তে ওজন; P = 40kg

ডান প্রান্তে ওজন, $Q' = (10 + 10)$ kg
$= 20$ kg

'খ' হতে পাই, খুঁটির আগের অবস্থান A হতে 4 মিটার ডানে।

ধরি, খুঁটিটিকে y মিটার ডানে D বিন্দুতে সরাতে হবে।

$\therefore\ P.AD = Q'.CD$

বা, $40(4 + y) = 20(20 - 4 - y)$

বা, $160 + 40y = 400 - 80 - 20y$

বা, $40y + 20y = 400 - 80 - 160$

বা, $60y = 160$

বা, $y = \frac{160}{60}$

$\therefore$ $y = 2.67$

$\therefore$ খুঁটিটিকে 2.67 মিটার ডানে সরাতে হবে। **(Ans.)**

3. **ক** দেওয়া আছে, মোট ওজন তথা লব্ধি = 100 kg

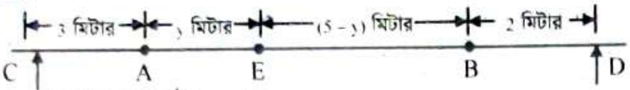
সম্মুখ বেয়ারার বহন করতে পারে, P = 40 kg

$\therefore$ পেছনের বেয়ারা বহন করতে হবে, Q = 100 – P

= (100 – 40) kg

= 60 kg **(Ans.)**

খ



'ক' হতে পাই,

প্রথম বেয়ারার বহনকৃত ওজন, P = 40 kg

দ্বিতীয় বেয়ারার বহনকৃত ওজন, Q = 60 kg

ধরি, রাজকন্যাকে সম্মুখ প্রান্ত A হতে y মিটার দূরত্বে E বিন্দুতে বসতে হবে।

অর্থাৎ P ও Q ওজনের লব্ধি E বিন্দুতে।

$\therefore$ CE = (3 + y) মিটার

DE = (2 + 5 – y) মিটার

= (7 – y) মিটার

$\therefore$ P . CE = Q . DE

বা, $40(3 + y) = 60(7 - y)$

বা, $120 + 40y = 420 - 60y$

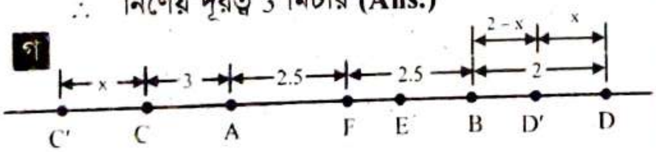
বা, $40y + 60y = 420 - 120$

বা, $100y = 300$

$\therefore$ $y = \frac{300}{100} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব 3 মিটার **(Ans.)**

গ



ধরি, পালকির মধ্যবিন্দু F

এবং বেয়ারা দুইজনকে বামদিকে x মিটার সরে যেতে হয়। বেয়ারা দুইজনের নতুন অবস্থান যথাক্রমে C' ও D'।

$\therefore$ C'F = (x + 3 + 2.5) মিটার = (5.5 + x) মিটার

D'F = (2 – x + 2.5) মিটার = (4.5 – x) মিটার

এখন, $P \times C'F = Q \times D'F$

বা, $40(5.5 + x) = 60 \times (4.5 - x)$

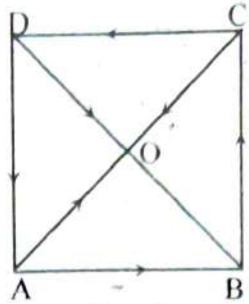
বা, $220 + 40x = 270 - 60x$

বা, $40x + 60x = 270 - 220$

বা, $100x = 50$ $\therefore x = 0.5$

$\therefore$ বামদিকে 0.5 মিটার সরে যেতে হবে। **(Ans.)**

4. **ক**



মনে করি, ABCD বর্গের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O.

$\therefore \vec{AB} + 2\vec{BC} + 2\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{DB}$

$= \vec{AB} + 2\vec{BC} + 2\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{CA} + \vec{AC}$

$[\because \vec{CA} + \vec{AC} = 0]$

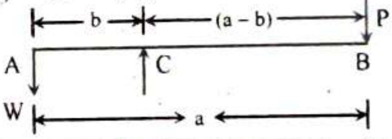
$= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) + (\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DB}) + (\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AC})$

$= \underline{0} + \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ [বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে]

খ মনে করি, AB হাতলের দৈর্ঘ্য = a ফুট

হাতলের ঠেস বিন্দু থেকে ভার বিন্দুর দৈর্ঘ্য (AC) = b ফুট

$\therefore$ হাতলের ভার বিন্দু থেকে বলবিন্দুর দৈর্ঘ্য (CB) = (a – b) ফুট



B বিন্দুতে বলবাহুর শেষপ্রান্তের বল = P kg

A বিন্দুতে ভারবাহুর পানির ওজন = W kg

সদৃশ সমান্তরাল বলের সূত্রানুসারে,

$P \times BC = W \times AC$

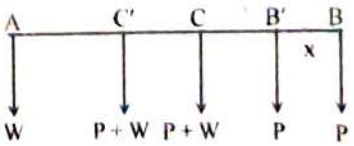
বা, $P \times (a - b) = W \times b$ বা, $W = \frac{P(a-b)}{b}$

বা, $W = P\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{b}\right)$

$\therefore W = P\left(\frac{a}{b} - 1\right)$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, AB সরলরেখায় A ও B বিন্দুতে সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় W ও P ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে

W. AC = P. BC ... ... (1)



P বলকে W বলের দিকে x পরিমাণ দূরে সরালে ধরি B' বিন্দুতে P বল এবং C' বিন্দুতে P + W বল ক্রিয়া করে।

$\therefore$ $W.AC' = P.B'C'$

বা, $W.(AC - CC') = P.(B'C + CC')$

বা, $W.AC - W.CC' = P.B'C + P.CC'$

বা, $(P + W).CC' = W.AC - P.B'C$

$= W.AC - P.(BC - BB')$

$= P.BC - P.BC + P.BB'$ [(i) নং হতে]

$= Px$ [$\because BB' = x$]

$\therefore$ $CC' = \dfrac{Px}{P + W}$

সুতরাং লব্ধি $\dfrac{Px}{P + W}$ দূরে সরে যাবে।

$\therefore$ ঠেস বিন্দুর অবস্থান $\dfrac{Px}{P + W}$ দূরত্ব সরালে W ওজনের পানি তোলা যাবে।

5. **ক** R বল বরাবর P বলের উপাংশ

$= P\cos(-\alpha) = P\cos\alpha$.........(i)

এবং R বল বরাবর Q বলের উপাংশ

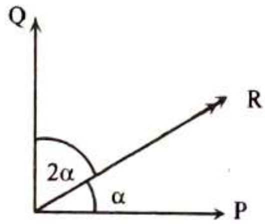
$= Q\cos2\alpha$.......(ii)

শর্তমতে, $P\cos\alpha = Q\cos2\alpha$

$\therefore \dfrac{P}{Q} = \dfrac{\cos2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \sqrt{3}Q$

বলের সাইনের সূত্র হতে পাই,



$\dfrac{P}{\sin2\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}Q}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha} = 1$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos30°$

$\therefore \alpha = 30°$ **(Ans.)**

গ বলগুলিকে R বল এবং R বলের লম্ব বরাবর বিভাজন করে পাই, $R\cos0° = P\cos(-\alpha) + Q\cos2\alpha$

বা, $R = P\cos\alpha + Q(2\cos^2\alpha - 1)$ ....(i)

আবার, $R\sin0° = P\sin(-\alpha) + Q\sin2\alpha$

বা, $0 = -P\sin\alpha + Q.\ 2\sin\alpha.\cos\alpha$

বা, $0 = (-P + 2Q\cos\alpha)\sin\alpha$

বা, $0 = -P + 2Q\cos\alpha$ [$\sin\alpha \neq 0$]

বা, $2Q\cos\alpha = P$ বা, $\cos\alpha = \dfrac{P}{2Q}$

(i) নং এ $\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে,

$R = P.\dfrac{P}{2Q} + Q\left\{2\dfrac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$

বা, $R = \dfrac{P^2}{2Q} + \dfrac{P^2}{2Q} - Q$

বা, $mP = \dfrac{2P^2}{2Q} - Q$ [$\because R = mP$]

বা, $m = \dfrac{P^2}{PQ} - \dfrac{Q}{P}$ $\therefore \dfrac{P}{Q} - \dfrac{Q}{P} = m$ **(দেখানো হলো)**

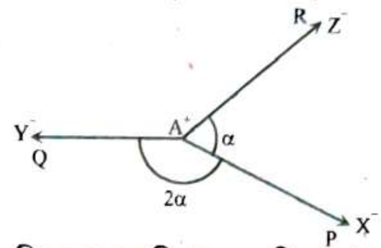
6. **ক** এখানে, $P = 1N$, $Q = 3N$ এবং $\alpha = 60°$

P ও Q মানের বল কোন বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{1^2 + 3^2 + 2 \times 1 \times 3 \times \cos60°}N$

$= \sqrt{13}N$ **(Ans.)**

খ



A বিন্দুতে অবস্থিত একটি ধনাত্মক চার্জকে ঘিরে তিনটি ঋণাত্মক চার্জ X, Y ও Z অবস্থানে অবস্থান করছে। ফলে A বিন্দুর চার্জটি AX, AY ও AZ বরাবর যথাক্রমে P, Q ও R মানের বল অনুভব করছে।

A বিন্দুতে যথাক্রমে AX, AY, AZ বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় ভারসাম্য আছে। মনে করি P ও R এর অন্তর্গত কোণ α; তাহলে শর্তানুসারে P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 2α.

যেহেতু বলত্রয় ভারসাম্যে আছে,

তাই লামির সূত্রানুসারে, $\dfrac{P}{\sin(360° - 3\alpha)} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin2\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{-\sin3\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

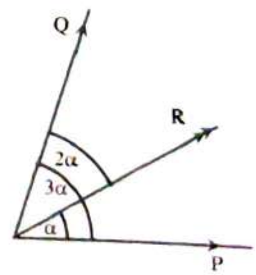
বা, $\dfrac{P}{4\sin^2\alpha - 3} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{4(1 - \cos^2\alpha) - 3} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha} = \dfrac{Q - P}{4\cos^2\alpha}$

বা, $\dfrac{Q.(Q - P)}{4\cos^2\alpha} = \left(\dfrac{R}{2\cos\alpha}\right)^2$ $\left[\because Q = \dfrac{R}{2\cos\alpha}\right]$

বা, $R^2 = Q(Q - P)$ **(প্রমাণিত)**

গ P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে বলে মনে করি, 3α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সহিত α কোণে নত। তাহলে লব্ধি বল R, Q বলের সহিত 2α কোণে ক্রিয়ারত।



$\therefore$ বলগুলিকে R বরাবর বিভাজন করে পাই,

$R\cos0° = P\cos(-\alpha) + Q.\cos2\alpha$

বা, $R = P\cos\alpha + Q(2\cos^2\alpha - 1)$ .... (i)

আবার, $R\sin0° = P\sin(-\alpha) + Q\sin2\alpha$

বা, $0 = -P\sin\alpha + Q.2\sin\alpha.\cos\alpha$

বা, $0 = (-P + 2Q\cos\alpha)\sin\alpha$

বা, $0 = -P + 2Q\cos\alpha$

বা, $2Q\cos\alpha = P$ বা, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

সুতরাং $3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

এখন, (i) নং সমীকরণে $\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে পাই,

$R = P\left(\frac{P}{2Q}\right) + Q.\left\{2.\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$

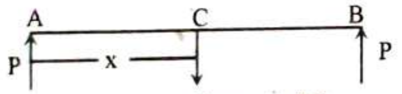
বা, $R = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2}{2Q} - Q$ বা, $R = \frac{2P^2 - 2Q^2}{2Q}$

$\therefore \quad R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

সুতরাং বলদ্বয়ের লব্ধি $= \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$। **(দেখানো হলো)**

7. ক



মনে করি, A ও B বিন্দুতে খুঁটিদ্বয়ের ওপর সমান চাপের পরিমাণ P ও P.

A বিন্দু হতে x দূরত্বে বস্তুটি C বিন্দুতে ঝুলানো হলো।

AB = 5

AC = x

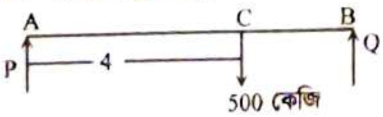
BC = 5 – x

P.AC = P.BC

বা, $x = 5 - x$ বা, $2x = 5$ বা, $x = \frac{5}{2}$

সুতরাং বস্তুটিকে মধ্য বিন্দুতে ঝুলালে খুঁটিদ্বয়ের ওপর সমান চাপ পড়বে। **(Ans.)**

খ



মনে করি, A ও B বিন্দুতে খুঁটিদ্বয়ের ওপর চাপের পরিমাণ যথাক্রমে P ও Q এবং A প্রান্ত হতে 4 মিটার দূরে C বিন্দুতে 500 কেজি ওজন ঝুলানো হলো।

AB = 5 মিটার

AC = 4

BC = 5 – 4 = 1

P + Q = 500 ....(i)

P.AC = Q.BC

বা, P.4 = Q.1

বা, Q = 4P ....(ii)

(i) এ Q = 4P বসিয়ে

P + 4P = 500

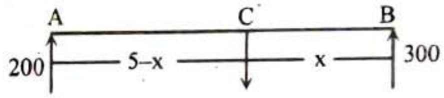
বা, 5P = 500 বা, P = 100 কেজি

(ii) এ P এর মান বসিয়ে

$Q = 4 \times 100 = 400$ কেজি

A বিন্দুতে খুঁটির ওপর বস্তুটির চাপের পরিমাণ 100 কেজি এবং B বিন্দুতে খুঁটির ওপর বস্তুটির চাপের পরিমাণ 400 কেজি। **(Ans.)**

গ মনে করি, A প্রান্তের খুঁটিটি 200 কেজি চাপ সহ্য করতে পারে। তাহলে B প্রান্তের খুঁটিটি (500 – 200) = 300 কেজি চাপ সহ্য করবে।



মনে করি, অপর খুঁটি অর্থাৎ B বিন্দুতে অবস্থিত খুঁটি থেকে x দূরত্বে C বিন্দুতে বস্তুটি ঝুলানো হলো।

200.AC = 300.BC

বা, 200(5 – x) = 300x

বা, 2(5 – x) = 3x

বা, 10 – 2x = 3x

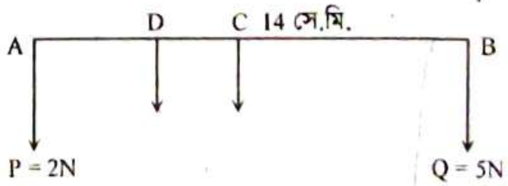
বা, 5x = 10

বা, x = 2

অপর খুঁটি হতে সর্বোচ্চ 2 মিটার দূরে উক্ত বস্তুটি ঝুলানো যাবে। **(Ans.)**

8. ক 2N ও 5N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি 2N + 5N = 7N, যা P ও Q বলদ্বয়ের সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়া করে। **(Ans.)**

খ



মনে করি, A ও B বিন্দুতে 2N ও 5N বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

2.AC = 5.BC

বা, 2AC = 5(AB – AC)

বা, 2AC + 5AC = 5.AB

বা, $7AC = 5 \times 14$

বা, $AC = \frac{5 \times 14}{7} = 10$ সে.মি.

2N ও 5N পরস্পর স্থান বিনিময় করলে A বিন্দুতে 5N এবং B বিন্দুতে 2N বলদ্বয়ের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$5.AD = 2.BD$

বা, $5.AD = 2(AB - AD)$

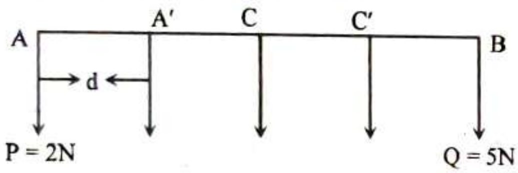
বা, $7.AD = 2 \times 14$

বা, $AD = \frac{2 \times 14}{7} = 4$ সে.মি.

নির্ণেয় দূরত্ব, $CD = AC - AD = 10$ সে.মি. $- 4$ সে.মি. $= 6$ সে.মি. **(Ans.)**

গ AB সরলরেখায় A ও B বিন্দুগামী সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় 2N ও 5N ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $2.AC = 5.BC$.................... (i)

আবার, 2N বলকে 5N বলের দিকে d পরিমাণ দূরত্বে সরালে ধরি, A′ বিন্দুতে 2N বল এবং C′ বিন্দুতে $(2+5) = 7N$ লব্ধি বল ক্রিয়া করে।



$2.A'C' = 5.BC'$

বা, $2(A'C + CC') = 5(BC - CC')$

বা, $2A'C + 2CC' = 5.BC - 5.CC'$

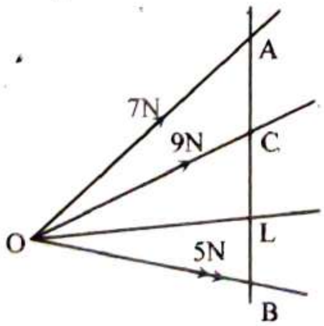
বা, $7CC' = 5.BC - 2A'C$

$= 2.AC - 2(AC - AA')$ [(i) নং হতে]

$= 2AA' = 2d$

$\therefore CC' = \frac{2d}{7}$ **(দেখানো হলো)**

9. ক



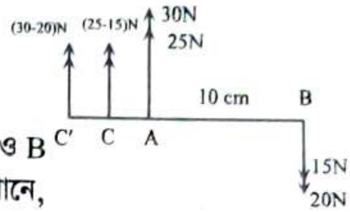
মনে করি O বিন্দু হতে OA ও OB বরাবর যথাক্রমে 7N ও 5N বলদ্বয় ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি 9N, OC বরাবর ক্রিয়া করে। O বিন্দু থেকে AB ছেদকের ওপর OL লম্বটানি। OL বরাবর 7N ও 5N বলদ্বয়ের লম্বাংশের বীজগাণিতিক যোগফল ঐ দিকে লব্ধির লম্বাংশের সমান হলে OL বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$7N \cos AOL + 5N \cos BOL = 9N \cos COL$

বা, $7N \frac{OL}{OA} + 5N \frac{OL}{OB} = 9N \frac{OL}{OC}$

$\therefore \frac{7}{OA} + \frac{5}{OB} = \frac{9}{OC}$ **(দেখানো হলো)**

খ মনে করি, 25N ও 15N মানের বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় AB রেখার A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যেখানে,



$AB = 10cm$

ধরি, লব্ধি AB এর বর্ধিতাংশের উপর C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বিসদৃশ সমান্তরাল বলের সূত্রানুসারে,

$25.AC = 15.BC$

বা, $25AC = 15(AB + AC)$

বা, $25AC - 15AC = 15AB$

বা, $10AC = 15AB$

বা, $AC = \frac{15 \times 10}{10} = 15cm$

$\therefore AC = 15$ cm

ধরি, প্রত্যেকের সাথে 5N বল যোগ করলে নতুন লব্ধি C′ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়।

$\therefore$ বিসদৃশ সমান্তরাল বলের সূত্রানুসারে,

$30 AC' = 20 BC'$

বা, $30AC' = 20(AB + AC')$

বা, $10AC' = 20AB$

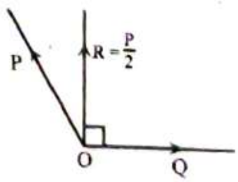
বা, $AC' = 2 \times 10 = 20$ cm

$\therefore$ নতুন লব্ধি $AC' - AC = CC' = (20 - 15)$ cm

$= 5$cm দূরে সরে যায়

Ans. 5cm

গ মনে করি, O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি $\frac{P}{2}$, Q বলের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \frac{P}{2} = \sqrt{P^2 - Q^2}$

বা, $\frac{P^2}{4} = P^2 - Q^2$

বা, $Q^2 = P^2 - \frac{P^2}{4} = \frac{3P^2}{4}$

বা, $\frac{P^2}{Q^2} = \frac{4}{3}$ বা, $\frac{P}{Q} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore P : Q = 2 : \sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

10. ক মনে করি, T_1 ও T_2 বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α_1

$W^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos\alpha_1$

বা, $7^2 = 5^2 + 8^2 + 2.5.8 \cos\alpha_1$

বা, $49 - 89 = 80\cos\alpha_1$

বা, $-40 = 80\cos\alpha_1$

বা, $\cos\alpha_1 = \frac{-40}{80} = -\frac{1}{2} = \cos120°$

$\therefore \alpha_1 = 120°$

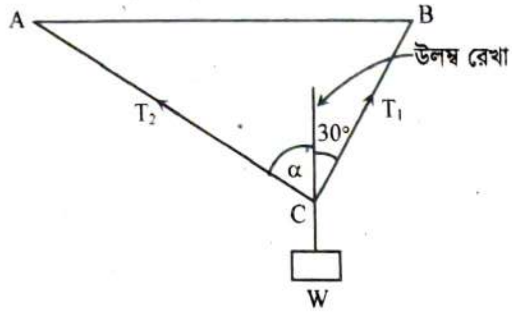
$\therefore \alpha + 30° = \alpha_1$

বা, $\alpha + 30° = 120°$

বা, $\alpha = 120° - 30°$

$\therefore \alpha = 90°$ **(Ans.)**

খ



মনে করি, CB বরাবর টান T_1, CA বরাবর টান T_2 এবং W ওজন খাড়াভাবে নিচের দিকে ক্রিয়া করে। বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে বলে লামির উপপাদ্য থেকে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin(T_2\Lambda W)} = \frac{T_2}{\sin(T_1\Lambda W)} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$$

$$\therefore \frac{T_2}{\sin(T_1\Lambda W)} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$$

বা, $\frac{T_2}{\sin(180° - 30°)} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

বা, $\frac{T_2}{\sin30°} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

বা, $T_2 = \frac{W\sin30°}{\sin(\alpha + 30°)} = \frac{W}{2\sin(\alpha + 30°)}$

T_2 এর মান সর্বনিম্ন হয় যদি $\sin(\alpha + 30°) = 1$ হয়

$\therefore \sin(\alpha + 30°) = 1$

বা, $\sin(\alpha + 30°) = \sin90°$

বা, $\alpha + 30° = 90°$ বা, $\alpha = 60°$ **(Ans.)**

গ লামীর উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin(T_2\Lambda W)} = \frac{T_2}{\sin(T_1\Lambda W)} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$$

বা, $\frac{T_1}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{T_2}{\sin(180° - 30°)} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

বা, $\frac{T_1}{\sin\alpha} = \frac{T_2}{\sin30°} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

$\therefore \frac{T_1}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

বা, $T_1 = \frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha + 30°)} = \frac{W\sin30°}{\sin(30° + 30°)}$ [যখন $\alpha = 30°$]

$$= \frac{W.\frac{1}{2}}{\sin60°} = \frac{10.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ N } \textbf{(Ans.)}$$

আবার, $\frac{T_2}{\sin30°} = \frac{W}{\sin(\alpha + 30°)}$

বা, $T_2 = \frac{W\sin30°}{\sin(\alpha + 30°)} = \frac{W.\frac{1}{2}}{\sin(30° + 30°)}$

$$= \frac{10.\frac{1}{2}}{\sin60°} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{N } \textbf{(Ans.)}$$

বিকল্প সমাধান: দেওয়া আছে, $\alpha = 30°$ এবং T_1, T_2 ও $W = 10N$ সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে

$\therefore T_1$ ও T_2 এর লব্ধি W এর সমান ও বিপরীতমুখী হবে এবং প্রশ্নানুসারে T_1 ও T_2 এর অন্তর্গত কোণ 60° এর সমদ্বিখণ্ডক হবে।

$$\therefore T_1 = T_2 = \frac{W}{2\cos\frac{60°}{2}} = \frac{W}{2.\cos 30°}$$

$$= \frac{10}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \textbf{ (Ans.)}$$

11. ক 8N ও 6N বলদ্বয় পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে।

$\therefore$ লব্ধি, $R = \sqrt{8^2 + 6^2 + 2.8.6.\cos120°}$

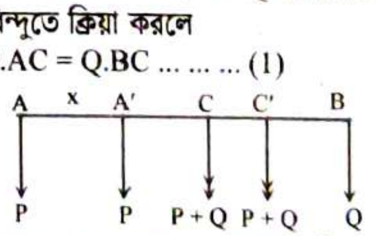
$$= \sqrt{64 + 36 + 96\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{64 + 36 - 48} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$\therefore$ লব্ধি $2\sqrt{13}$N **(Ans.)**

খ মনে করি, AB সরলরেখার A ও B বিন্দুতে সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় P ও Q ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করলে

P.AC = Q.BC ... ... (1)



আবার, P বলকে Q বলের দিকে x পরিমাণ দূরে সরালে ধরি A′ বিন্দুতে P বল এবং C′ বিন্দুতে লব্ধি (P + Q) বল ক্রিয়া করে।

$\therefore \quad P.A'C' = Q.BC'$

বা, $P.(A'C + CC') = Q.(BC - CC')$

বা, $P.A'C + P.CC' = Q.BC - Q.CC'$

বা, $P.A'C + P.CC' + Q.CC' = Q.BC$

বা, $(P + Q).CC' = Q.BC - P.A'C$

$= P.AC - P.(AC - AA')$ [(1 নং হতে)]

$= P.AA'$

বা, $(P + Q).CC' = Px$

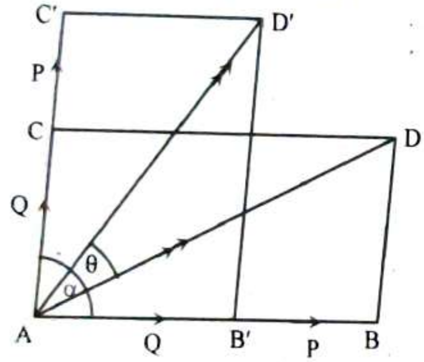
বা, $CC' = \frac{Px}{P+Q} \quad \therefore CC' = \frac{Px}{P+Q}$

সুতরাং লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে। **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, ABDC সামান্তরিকের AB ও AC বাহু দ্বারা P ও Q বলদ্বয় এবং ঐ সামান্তরিকের AD কর্ণ দ্বারা তাদের লব্ধি সূচিত করা হয়েছে।

P ও Q এর অবস্থান বিনিময় করলে AB বরাবর AB′ দ্বারা Q, AC বরাবর AC′ দ্বারা P এবং AB′D′C′ সামান্তরিকের AD′ কর্ণ দ্বারা তাদের লব্ধি সূচিত হয়েছে।

তাহলে $\angle DAD' = \theta$ এবং $AD = AD'$



আবার $\angle BAD = \angle C'AD' = \frac{1}{2}(\alpha - \theta)$

$\therefore \angle BAD' = \angle CAD = \frac{1}{2}(\alpha - \theta) + \theta$

$= \frac{1}{2}(\alpha + \theta) = \angle BDA$

এখন, ΔBAD হতে পাই,

$$\frac{AB}{\sin BDA} = \frac{BD}{\sin BAD}$$

বা, $\frac{P}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)} = \frac{Q}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$ বা, $\frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$

বা, $\frac{P-Q}{P+Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta) - \sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta) + \sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$

[বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{P-Q}{P+Q} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha.\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\theta}$

বা, $\frac{P-Q}{P+Q} = \cot\frac{1}{2}\alpha.\tan\frac{1}{2}\theta$

বা, $\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}.\tan\frac{\alpha}{2}$ **(প্রমাণিত)**

12. **ক** আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

এখানে, $R = 4N$, $\alpha = 120°$

এবং $P = Q$ [∵ বলদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore 4^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos 120°$

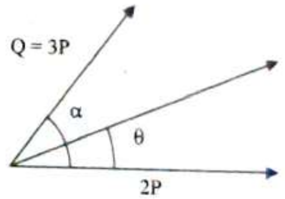
বা, $16 = 2P^2 + 2P^2\left(\frac{-1}{2}\right)$

বা, $2P^2 - P^2 = 16$

বা, $P^2 = 16$

$\therefore \quad P = 4N$ **(Ans.)**

খ মনে করি, 2P এবং Q = 3P মানের দুইটি বল α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি, 2P এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan\theta = \frac{3P\sin\alpha}{2P + 3P\cos\alpha}$

আবার, বলদ্বয় 4P এবং 3P + 6 হলে,

$\tan\theta = \frac{(3P+6)\sin\alpha}{4P + (3P+6)\cos\alpha}$

শর্তানুসারে, $\frac{3P\sin\alpha}{2P + 3P\cos\alpha} = \frac{(3P+6)\sin\alpha}{4P + (3P+6)\cos\alpha}$

বা, $\frac{4P + (3P+6)\cos\alpha}{2P + 3P\cos\alpha} = \frac{(3P+6)\sin\alpha}{3P\sin\alpha}$

বা, $\frac{4P + (3P+6)\cos\alpha - 2P - 3P\cos\alpha}{2P + 3P\cos\alpha}$

$= \frac{(3P+6)\sin\alpha - 3P\sin\alpha}{3P\sin\alpha}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2P + 6\cos\alpha}{P(2 + 3\cos\alpha)} = \frac{6\sin\alpha}{3P\sin\alpha}$ বা, $\frac{P + 3\cos\alpha}{2 + 3\cos\alpha} = 1$

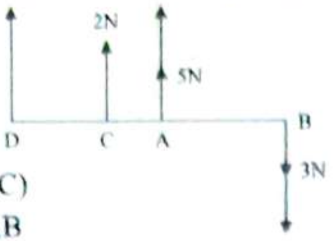
বা, $P + 3\cos\alpha = 2 + 3\cos\alpha$

বা, $P = 2 + 3\cos\alpha - 3\cos\alpha$

$\therefore \quad P = 2$

$\therefore \quad Q = 3P = 3 \times 2 = 6N$ **(Ans.)**

গ মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 5N ও 3N বলদ্বয়ের লব্ধি বলটি বর্ধিত BA এর উপরস্থ C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



$\therefore$ লব্ধি $= (5 - 3)$ N
$= 2$N
$\therefore 5AC = 3BC$
বা, $5AC = 3(AB + AC)$
বা, $5AC - 3AC = 3AB$
বা, $2AC = 3AB \therefore AC = \frac{3}{2}AB$

এখন, প্রত্যেক বলের মান 3N বৃদ্ধি করলে, A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল হবে $(5 + 3) = 8$N এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল হবে $(3 + 3) = 6$N এবং তাদের লব্ধি $(8 - 6) = 2$N বলটি বর্ধিত BA এর ওপরস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $8AD = 6BD$
বা, $8AD = 6(AB + AD)$
বা, $8AD - 6AD = 6AB$
বা, $2AD = 6AB$
$\therefore AD = 3AB$
$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= CD = AD - AC = 3AB - \frac{3}{2}AB$
$= \left(3 - \frac{3}{2}\right)AB = \frac{3}{2}AB$
$= \frac{3}{2} \times 10 = 15$ সে.মি. **(Ans.)**

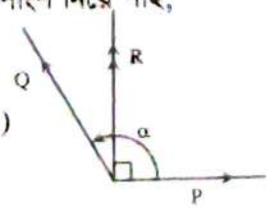
13. **ক** দুটি বল P ও Q সমান এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α হলে এবং লব্ধি R ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

সুতরাং কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। **(প্রমাণিত)**

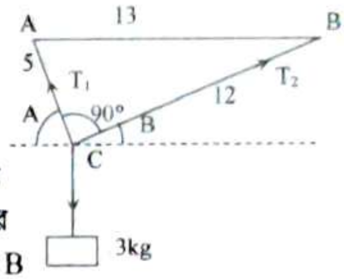
খ দেওয়া আছে, R = 15N
শর্তমতে, $P + Q = 25$ …… (i)
চিত্রানুসারে লব্ধি P এর সাথে $\theta = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে।
$\therefore$ আনুভূমিক বরাবর বলের উপাংশ নিয়ে পাই,



$P + Q\cos\alpha = R\cos\theta$
বা, $P + Q\cos\alpha = 15 \times \sin 90°$
বা, $P + Q\cos\alpha = 0$ ……… (ii)
বা, $\cos\alpha = \frac{-P}{Q}$ …… (iii)

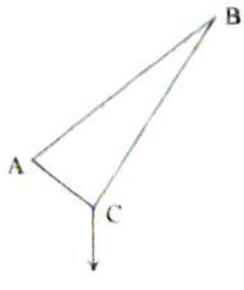
লব্ধি $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$
বা, $15^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(\frac{-P}{Q}\right)$
[(iii) নং থেকে মান বসিয়ে]
বা, $225 = P^2 + Q^2 - 2P^2$ বা, $Q^2 - P^2 = 225$
বা, $(Q + P)(Q - P) = 225$
বা, $Q - P = \frac{225}{Q + P}$ বা, $Q - P = \frac{225}{25}$
বা, $Q - P = 9$ …… (iv)
(i) ও (iv) যোগ করে পাই,
$2Q = 25 + 9$ বা, $Q = \frac{34}{2} = 17$
(i) নং এ Q এর মান বসিয়ে পাই,
$P + 17 = 25$ বা, $P = 25 - 17 = 8$
$\therefore$ বলদ্বয় P = 8N এবং Q = 17N **(Ans.)**

গ 17 সে.মি. দীর্ঘ ACB সুতার A প্রান্ত হতে 5 সে.মি. দূরে C বিন্দুতে 3kg ভরের একটি বস্তু ঝুলানো এবং অপর প্রান্ত A থেকে 13 সে.মি. দূরে একই সরলরেখা বরাবর B বিন্দুতে বাধা আছে।

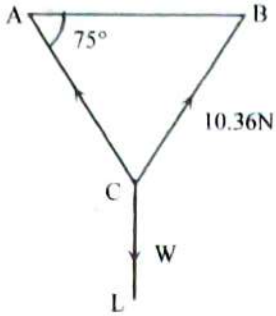


$\therefore AB = 13, AC = 5$ এবং $BC = 12$
$AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = AC^2$
$\therefore \angle ACB = 90°$
মনে করি, CA অংশের টান T_1 এবং CB অংশের টান T_2। তাহলে T_1, T_2 ও 3kg ওজন বলত্রয় C বিন্দুতে ভারসাম্যে আছে।
লামির সূত্রানুসারে, $\frac{T_1}{\sin(90° + B)} = \frac{T_2}{\sin(90° + A)} = \frac{3}{\sin 90°}$
বা, $\frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A} = 3$ বা, $\frac{T_1}{\frac{12}{13}} = \frac{T_2}{\frac{5}{13}} = 3$
বা, $T_1 = \frac{12}{13} \times 3$kg $\therefore T_1 = \frac{36}{13}$ kg **(Ans.)**
এবং $T_2 = \frac{5}{13} \times 3$kg $\therefore T_2 = \frac{15}{13}$ kg **(Ans.)**

14. **ক** ১ নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভেতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে সেটি উপরের চিত্র অনুসারে C বিন্দুতে ঝুলবে।



খ চিত্রে A ও B বিন্দুতে দড়ির দুইপ্রান্ত বাধা। W ওজনের বস্তু রশির C বিন্দুতে ঝুলন্ত অবস্থায় আছে। যেহেতু বস্তুটি অবাধে গড়িয়ে চলে তাই সেটি AB দড়ির মাঝ বরাবর অবস্থান করবে এবং CA ও CB বরাবর সমমানের টান বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় ঝুলন্ত রাখে।



$\because$ CB বরাবর টান 10.36N

$\therefore$ CA বরাবর টান 10.36N

আবার, ΔABC-এ $AC = BC$ হওয়ায়

$\angle CAB = \angle CBA = 75°$

$\therefore \angle ACB = 180° - \angle CAB - \angle CBA$
$= 180° - 75° - 75° = 30°$

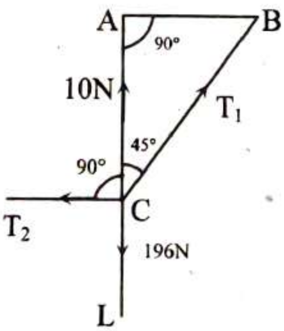
এখন, CA ও CB বরাবর দুটি সমমানের বল ক্রিয়া করে C বিন্দুতে W মানের ওজনকে সাম্যাবস্থায় রাখে।

$\therefore$ CA ও CB বরাবর বলদ্বয়ের লব্ধি হবে W এর সমান।

$\therefore W = \sqrt{(10.36)^2 + (10.36)^2 + 2 \times 10.36 \times 10.36 \times \cos 30°}$
$= \sqrt{107.3296 + 107.3296 + 185.9003}$
$= 20.014N$ **(Ans.)**

গ 20 kg ভরের বস্তুর ওজন $= 20 \times 9.8$ N = 196N

C বিন্দুতে 20 kg ভরের তথা 196N ওজনের বস্তুকে T_1, T_2 ও 10N বল তিনটি সাম্যাবস্থায় ধরে রেখেছে। 10N বলটি বস্তুর ওজনের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করায় T_1 ও T_2 বলদ্বয়ের সম্মিলিত টান $= (196 - 10)N = 186N$



ধরি, W = 186N

তাহলে, T_1 ও T_2 বলদ্বয় C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রেখেছে।

T_1 ও T_2 টানদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 90° + 45° = 135°$

T_2 ও W টানদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 90°$

T_1 ও W টানদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 180° - 45° = 135°$

তাহলে, লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin 90°} = \frac{T_2}{\sin 135°} = \frac{W}{135°}$$

বা, $T_1 = \dfrac{T_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{186}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

বা, $T_1 = \sqrt{2}T_2 = 186\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}\, T_2 = 186\sqrt{2}$ এবং $T_1 = 186\sqrt{2}$ N

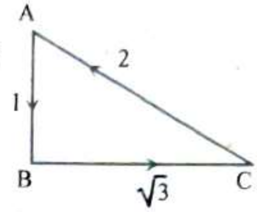
$\therefore T_2 = 186N$

$\therefore$ বস্তুটিকে ঝুলানোর জন্য $T_1 = 186\sqrt{2}$ N এবং $T_2 =$ 186N হওয়া প্রয়োজন। **(Ans.)**

15. **ক** যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে তাই এদেরকে ক্রমান্বয়ে মান ও দিক অনুযায়ী ত্রিভুজ আকারে প্রকাশ করা যায়। ΔABC এর AB, BC, CA দ্বারা যথাক্রমে 1, $\sqrt{3}$ ও 2 মানের বল প্রকাশ করা হল

$\therefore \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

অর্থাৎ ABC সমকোণী ত্রিভুজ যেখানে $\angle ABC = 90°$



$\angle ACB = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30°$

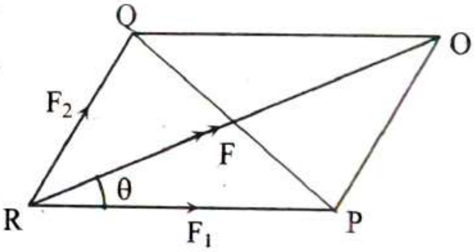
এবং $\angle BAC = 90° - 30° = 60°$

$\therefore$ 1 ও $\sqrt{3}$ মানের বলের অন্তর্গত কোণ $180° - 90° = 90°$

1 ও 2 ,, ,, ,, ,, $180° - 60° = 120°$

2 ও $\sqrt{3}$,, ,, ,, ,, $180° - 30° = 150°$

খ দৃশ্যকল্প-১ এ OPRQ সামান্তরিকটি পূর্ণ করি।



ধরি, $F_1 = K \cos P$

$F_2 = K \cos Q$

F_1 ও F_2 এর মধ্যবর্তী কোণ R এবং লব্ধি F.

$\therefore F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos R$
$= K^2 \cos^2 P + K^2 \cos^2 Q + 2 K \cos P . K \cos Q . \cos R$
$= K^2 \cos^2 P + K^2 \cos^2 Q + 2K^2 \cos P . \cos Q . \cos R$
$= K^2 (\cos^2 P + \cos^2 Q + \cos^2 R$
$+ 2 \cos P . \cos Q . \cos R - \cos^2 R)$
$= K^2 (1 - \cos^2 R)$ [$\because P + Q + R = \pi$ হলে, $\cos^2 P + \cos^2 Q + \cos^2 R + 2 \cos P . \cos Q . \cos R = 1$]
$= K^2 \sin^2 R$

$\therefore F = K \sin R$

RP এর লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$F_1 \sin 0° + F_2 \sin R = F \sin\theta$

বা, $K \cos Q \sin R = K \sin R \sin\theta$

বা, $\cos Q = \sin\theta$ [K sinR দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - Q\right) = \sin\theta$ বা, $\frac{\pi}{2} - Q = \theta$

বা, $\frac{P+Q+R}{2} - Q = \theta \quad [\because P+Q+R = \pi]$

বা, $\theta = \frac{P+Q+R}{2} - Q$

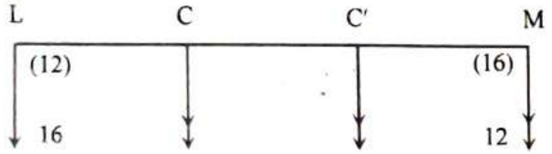
$\therefore R - \theta = R - \left(\frac{P+Q+R}{2} - Q\right)$

$= R - \frac{P+Q+R}{2} + Q$

$= \frac{2R - P - Q - R + 2Q}{2}$

$= \frac{1}{2}(R + Q - P)$ **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, L ও M বিন্দুতে 16N ও 12N মানের দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করছে।



$\therefore \quad 16.LC = 12.MC$

বা, $16.LC = 12.(LM - LC)$

বা, $(16 + 12).LC = 12.LM$

বা, $LC = \frac{12.LM}{28}$

$\therefore \quad LC = \frac{3}{7}.LM \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যদি লব্ধি C′ বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তাহলে-

$12.LC' = 16.MC'$

বা, $12.LC' = 16.(LM - LC')$

বা, $(12 + 16).LC' = 16.LM$

বা, $LC' = \frac{4}{7}.LM \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) থেকে পাই, $CC' = LC' - LC = \frac{4}{7}LM - \frac{3}{7}$

$LM = \frac{1}{7}.LM$

$\therefore$ LM বরাবর লব্ধির সরণ $\frac{1}{7}$LM **(Ans.)**

16. **ক** S মানের দুইটি সমান বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধি

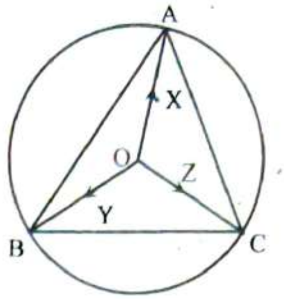
$R = \sqrt{S^2 + S^2 + 2S^2.\cos 120°}$

$= \sqrt{2S^2 + 2S^2 \cos 120°} = \sqrt{2S^2 + 2S^2\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \sqrt{2S^2 - S^2}$

$= \sqrt{S^2} = S$ **(Ans.)**

খ মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত একতলীয় X, Y, Z বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



তাহলে লামির সূত্র হতে পাই,

$\frac{X}{\sin BOC} = \frac{Y}{\sin COA} = \frac{Z}{\sin AOB}$

বা, $\frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C}$

(যেহেতু $\angle BOC = 2A$, $\angle COA = 2B$, $\angle AOB = 2C$, কারণ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ)

বা, $\frac{X}{2\sin A\cos A} = \frac{Y}{2\sin B.\cos B} = \frac{Z}{2\sin C.\cos C}$

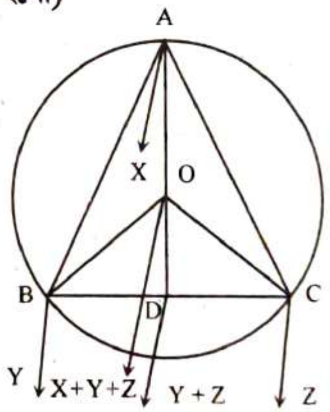
বা, $\frac{X}{a\cos A} = \frac{Y}{b\cos B} = \frac{Z}{c\cos C}$

$\left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\right]$

অর্থাৎ $X : Y : Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$

(দেখানো হলো)

গ



মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Y ও Z এর লব্ধি BC রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

আবার, তিনটি বলের লব্ধি O বিন্দুগামী এবং X বলটি A বিন্দুতে ক্রিয়ারত, কাজেই Y এবং Z এর লব্ধি AO রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত হবে।

অতএব Y ও Z এর লব্ধি BC এবং AOD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়ারত হবে।

$\therefore \quad Y.BD = Z.CD$

বা, $\frac{Y}{Z} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/OD}{BD/OD} \ldots\ldots\ldots (1)$

ΔCOD হতে পাই,

$$\frac{CD}{\sin COD} = \frac{OD}{\sin OCD}$$

বা, $\frac{CD}{OD} = \frac{\sin COD}{\sin OCD}$ ……… (2)

অনুরূপভাবে ΔBOD এ $\frac{BD}{OD} = \frac{\sin BOD}{\sin OBD}$

(1)নং সমীকরণে উপরোক্ত মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{Y}{Z} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{\frac{\sin COD}{\sin OCD}}{\frac{\sin BOD}{\sin OBD}} \text{ ……… (3)}$$

আবার, যেহেতু OB = OC = পরিব্যাসার্ধ,

সুতরাং $\angle OCD = \angle OBD$ বা, $\sin OCD = \sin OBD$.

(3) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\sin COD}{\sin BOD} = \frac{\sin(180 - AOC)}{\sin(180 - AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB}$$

আবার, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে, $\angle AOC = 2B$, এবং $\angle AOB = 2C$

$\therefore$ $\frac{Y}{Z} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$ বা, $\frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C}$ ……… (4)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \text{ …… (5)}$$

তাহলে (4) ও (5)নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C}$$

$\therefore$ $X \operatorname{cosec} 2A = Y \operatorname{cosec} 2B = Z \operatorname{cosec} 2C$ **(দেখানো হলো)**

17. ক দেওয়া আছে, $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$

বা, $2P^2 = 2Q^2 = R^2$ $\therefore P = Q$

যেহেতু P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে,

সুতরাং P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এর সমান।

এখন, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $2P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = 0$ $\therefore \alpha = 90°$ **(Ans.)**

আবার, R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ β হলে

$Q^2 = R^2 + P^2 + 2RP\cos\beta$

বা, $Q^2 = 2Q^2 + Q^2 + 2.\sqrt{2}Q.Q\cos\beta$

বা, $2\sqrt{2}Q^2.\cos\beta = -2Q^2$

বা, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 135°$

$\therefore \beta = 135°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\alpha}{3}$

$\therefore \alpha = 3\theta$

মনে করি, 3θ কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সহিত θ কোণে নত। তাহলে লব্ধি বল R, Q বলের সহিত 2θ কোণে ক্রিয়ারত।

$\therefore$ বলগুলিকে R বরাবর বিভাজন করে পাই,

$R\cos 0° = P\cos(-\theta) + Q.\cos 2\theta$

বা, $R = P\cos\theta + Q(2\cos^2\theta - 1)$ ……… (i)

আবার, $R\sin 0° = P\sin(-\theta) + Q\sin 2\theta$

বা, $0 = -P\sin\theta + Q.2\sin\theta.\cos\theta$

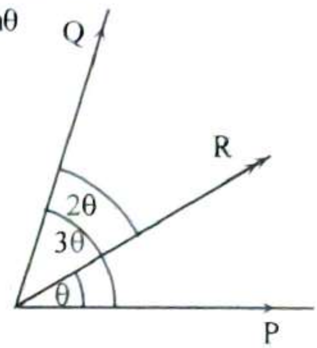
বা, $0 = (-P + 2Q\cos\theta)\sin\theta$

বা, $0 = -P + 2Q\cos\theta$

বা, $2Q\cos\theta = P$

বা, $\cos\theta = \frac{P}{2Q}$

$\therefore$ $\theta = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$



সুতরাং $3\theta = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q} = \alpha$

এখন, (i) নং সমীকরণে $\cos\theta$ এর মান বসিয়ে পাই,

$R = P\left(\frac{P}{2Q}\right) + Q.\left\{2.\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$

বা, $R = \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2}{2Q} - Q$

বা, $R = \frac{2P^2 - 2Q^2}{2Q}$

$\therefore$ $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

সুতরাং বলদ্বয়ের লব্ধি $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$। **(Ans.)**

গ মনে করি, α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R। ইহাদের বৃহত্তম লব্ধি F হলে $F = P + Q$ …… (i)

এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি G হলে $G = P - Q$ ………… (ii)

এখন, (i) ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$F + G = 2P$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}(F + G)$ ……….. (iii)

$\therefore$ এবং (i) নং হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$F - G = 2Q$

$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}(F - G)$ .... (iv)

এখন, আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$= \left(\frac{F+G}{2}\right)^2 + \left(\frac{F-G}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{F+G}{2}\right)\left(\frac{F-G}{2}\right).\cos\alpha$

$= \frac{1}{4}(F+G)^2 + \frac{1}{4}(F-G)^2 + \frac{1}{2}(F^2 - G^2).\cos\alpha$

বা, $R^2 = \frac{1}{4}[2(F^2 + G^2) + 2(F^2 - G^2)\cos\alpha]$

$= \frac{1}{4}[2F^2(1+\cos\alpha) + 2G^2(1-\cos\alpha)]$

$= \frac{1}{4}\left[4F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]$

বা, $R^2 = F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore R = \sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ **(Ans.)**

18. **ক** **বর্ণনা:** কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটি বলের ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

খ মনে করি, O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি $R = \frac{2}{3}Q$, P বলের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \left(\frac{2}{3}Q\right)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos\alpha$

বা, $\frac{4}{9}Q^2 - Q^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $-\frac{5Q^2}{9} = P^2 + 2PQ\cos\alpha$ ... ... (i)

আবার, $\tan 90° = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ বা, $Q\cos\alpha + P = 0$

বা, $\cos\alpha = -\frac{P}{Q}$ ... ... (ii)

সুতরাং (i) $\Rightarrow \frac{-5Q^2}{9} = P^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right)$

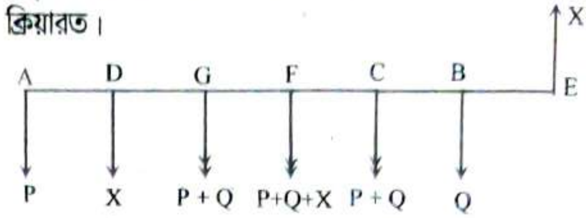
বা, $\frac{-5Q^2}{9} = P^2 - 2P^2$

বা, $5Q^2 = 9P^2$ বা, $\frac{P^2}{Q^2} = \frac{5}{9}$

বা, $\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore P : Q = \sqrt{5} : 3$ **(Ans.)**

গ মনে করি, AB রেখার A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি (P + Q), C বিন্দুতে ক্রিয়ারত।



আবার, D ও E বিন্দুতে X মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। এখন D বিন্দুতে X এবং C বিন্দুতে (P + Q) বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + X), F বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$(P + Q).CF = X.DF$ ... ... (1)

আবার, F বিন্দুতে (P + Q + X) এবং E বিন্দুতে X মানের বিপরীত মুখী বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q), G বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore (P + Q + X).GF = X.EG$

বা, $(P + Q).GF = X.EG - X.GF = X.(EG - GF)$

বা, $(P + Q).GF = X.EF$ ... ... (2)

এখন, (1) ও (2)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$(P + Q).CF + (P + Q).GF = X.DF + X.EF$

বা, $(P + Q)(CF + GF) = X.(DF + EF)$

বা, $(P + Q).CG = X.DE$ [এখানে DE = r]

বা, $(P + Q).CG = Xr$ $\therefore CG = \frac{Xr}{P+Q}$

সুতরাং লব্ধি $\frac{rX}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। **(দেখানো হলো)**

19. **ক** মনে করি, P একক মানের দুইটি সমান বল O বিন্দুতে পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়ারত। এই বলদ্বয়ের লব্ধি R একক হলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে আমরা পাই,

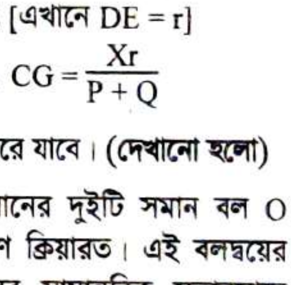
$R^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P\cos 60°$

$R = \sqrt{2P^2 + 2P^2 . \frac{1}{2}}$

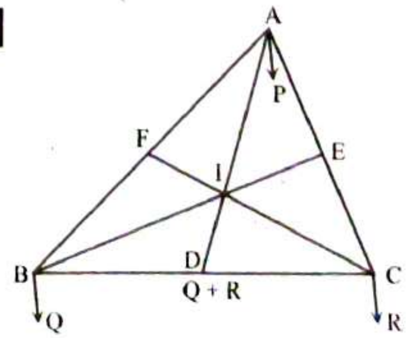
$= \sqrt{2P^2 + P^2}$

$= \sqrt{3P^2}$

$= \sqrt{3}P$ একক **(Ans.)**



খ



ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। A, B, C কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, I হলো, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলের লব্ধি (Q + R) বলটি BC রেখাস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার, বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুগামী। সুতরাং, I বিন্দু AD রেখার ওপর অবস্থান করবে। AD রেখা A কোণের সমদ্বিখণ্ডক বলে।

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ……… (i)

কিন্তু Q ও R এর লব্ধি D বিন্দুগামী হওয়ায়,

Q.BD = R.CD

বা, $\frac{BD}{CD} = \frac{R}{Q}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{R}{Q} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}$

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$ বা, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ ………… (iii)

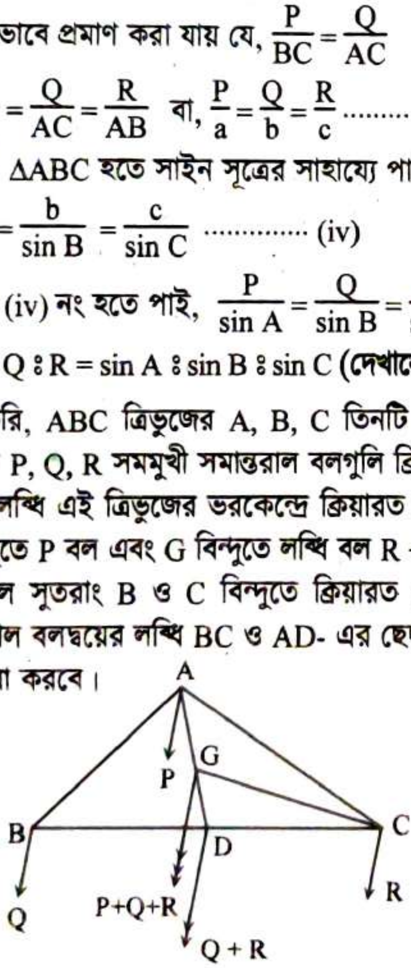
আবার, ΔABC হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ………… (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে পাই, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$

বা, P ঃ Q ঃ R = sin A ঃ sin B ঃ sin C **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C তিনটি কৌণিক বিন্দুতে P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বলগুলি ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি এই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত। যেহেতু A বিন্দুতে P বল এবং G বিন্দুতে লব্ধি বল R + P + Q ক্রিয়াশীল সুতরাং B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি BC ও AD- এর ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



∴ Q.BD = R.CD ……… (1)

যেহেতু AD মধ্যমা। ∴ BD = CD ……… (2)

(1)নং সমীকরণকে (2)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করি,

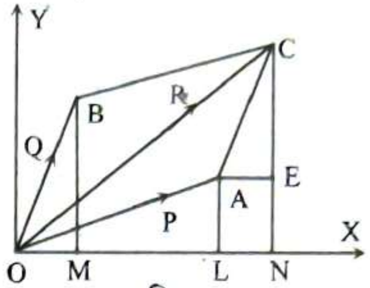
Q = R ……… (3)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, P = Q ……… (4)

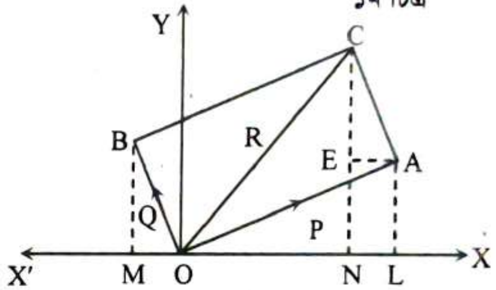
∴ (3) ও (4) নং সমীকরণ হতে পাই P = Q = R

ইহাই P, Q এবং R বলের মধ্যে নির্ণেয় সম্পর্ক।

20. **ক** **বর্ণনা:** কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের কোনো নির্দিষ্ট দিকের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকের বলদ্বয়ের লব্ধির লম্বাংশের সমান।



১ম চিত্র



২য় চিত্র

প্রমাণ: মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটি যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত। তাহলে OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি R সূচিত হবে।

ধরি, OX রেখাটি নির্দিষ্ট দিক নির্দেশ করে, অর্থাৎ OX বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নির্ণয় করতে হবে।

A, B ও C বিন্দু থেকে OX বা OX' (২য় চিত্রে) এর ওপর যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে OX বরাবর P, Q এবং R বলের লম্বাংশ যথাক্রমে OL, OM এবং ON হবে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OL + OM = ON

এখন A হতে CN এর উপর AE লম্ব অংকন করি।

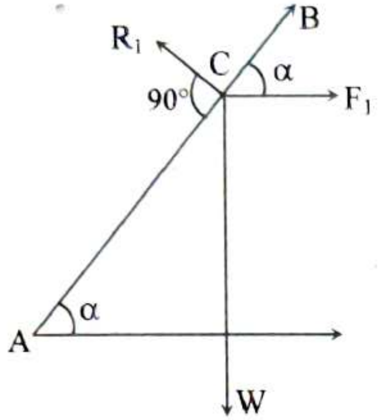
ΔACE ও ΔOBM সর্বসম। কারণ ΔOBM ও ΔACE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে OB = AC সামান্তরিকের বিপরীতবাহু এবং অনুরূপ কোণ ∠BOM = ∠CAE [∵ AE ∥ OX] ∴ OM = AE = LN

১ম চিত্রে, OX বরাবর সকল লম্বাংশগুলিই ধনাত্মক কিন্তু ২য় চিত্রে, Q এর লম্বাংশ ঋণাত্মক যা '–OM' এর সমান। সুতরাং ১ম চিত্রানুসারে, OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি = OL + OM

$= OL + LN = ON$, যা, OX বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ। ২য় চিত্রানুসারে, OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি $= OL - OM = OL - LN = ON$, যা OX বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ।

অতএব কোনো নির্দিষ্ট দিকে দুইটি বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।

খ



চিত্র-১

১ম চিত্রে, α কোণে হেলানো ডাল AB এর ওপর C বিন্দুতে W ওজনের কাঁঠালকে ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত F_1 বল স্থির অবস্থায় রাখে। হেলানো ডালটির ওপর কাঁঠালটির চাপ R_1 ধরা হলে বল R_1, F_1, W ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।

R_1 চাপ AB এর সাথে লম্বিক দিকে হবে।

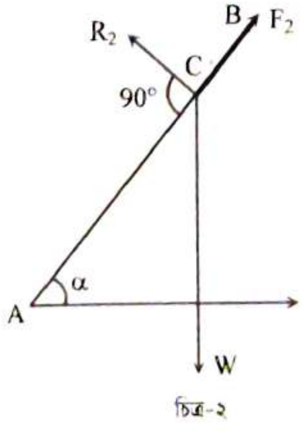
লামির সূত্রানুযায়ী,

$$\frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{F_1}{\sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

বা, $\frac{R_1}{1} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$

$\therefore F_1 = \frac{W\sin\alpha}{\cos\alpha}$ বা, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{W}{F_1}$

বা, $\cot^2\alpha = \frac{W^2}{F_1^2}$ ... (i)



চিত্র-২

২য় চিত্রে,

হেলানো ডালটির দৈর্ঘ্যের দিকে F_2 বল, ঝুলন্ত W ওজনের কাঁঠালটিকে হেলানো ডালটির ওপর স্থির অবস্থায় রাখে। এ কাঁঠালটির চাপ R_2 ধরলে R_2, F_2, W বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে এবং R_2 চাপ হেলানো তলের সাথে লম্বিক দিকে ক্রিয়াশীল থাকবে।

লামির সূত্রানুযায়ী,

$$\frac{R_2}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{F_2}{\sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha)} = \frac{W}{\sin 90^\circ}$$

বা, $\frac{R_2}{\cos\alpha} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{W}{1}$

$\therefore F_2 = W\sin\alpha$

বা, $\frac{F_2}{\sin\alpha} = W$

বা, $\frac{W}{F_2} = \text{cosec}\alpha$

বা, $\frac{W^2}{F_2^2} = \text{cosce}^2\alpha$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\frac{W^2}{F_2^2} - \frac{W^2}{F_1^2} = \text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha$

বা, $W^2\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right) = 1$

বা, $\frac{1}{W^2} = \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}$

বা, $\frac{1}{W^2} = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_1^2F_2^2}$

$\therefore W = \frac{F_1F_2}{\sqrt{F_1^2 - F_2^2}}$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, 42 কেজি ওজনের AB সমরূপ তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। একটি খুঁটি A বিন্দুতে এবং অপর খুঁটি B বিন্দু থেকে 2 মিটার ভিতরে C বিন্দুতে অবস্থিত।

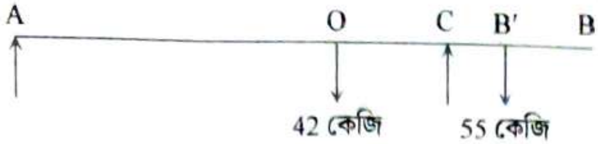
$AB = 8$ মিটার, $AO = BO = \frac{8}{2} = 4$ মিটার

$BC = 2$ মিটার

$OC = OB - BC = 4 - 2 = 2$ মিটার

$AC = AO + OC = 4 + 2 = 6$ মিটার

বালকটির ওজন 55 কেজি, যা B′ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। ধরি, বালকটি C বিন্দু থেকে B প্রান্তের দিকে অগ্রসর হয়ে x দূরত্ব অতিক্রম করে তক্তাটি না উল্টিয়ে B′ বিন্দুতে পৌছাতে সক্ষম হয়। তক্তাটি সুস্থিত থাকবে যদি ওজনদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং A বিন্দুতে তক্তার উপর কোণ চাপ থাকবে না।



$42.OC = 55.B'C$

বা, $B'C = \frac{42 \times 2}{55}$

$\therefore x = 1.53$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ বালকটি তক্তাটিকে না উল্টিয়ে C বিন্দু থেকে B প্রান্তের দিকে প্রায় 1.53 মিটার যেতে পারবে। **(Ans.)**

অথবা, বালকটি তক্তাটিকে না উল্টিয়ে A বিন্দু থেকে B প্রান্তের দিকে $(6 + 1.53) = 7.53$ মিটার যেতে পারবে। **(Ans.)**

21. **ক** মনে করি, বলদ্বয় যথাক্রমে P ও Q, লব্ধি R এবং বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α.

তাহলে, $P = 100N$

$Q = 70N$

$\alpha = 62°$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(100)^2 + (70)^2 + 2 \times 100 \times 70 \times \cos 62°}$$
$$= \sqrt{21472.60188}$$
$$= 146.535N \textbf{ (Ans.)}$$

ধরি, বল P, লব্ধি R এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে।

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

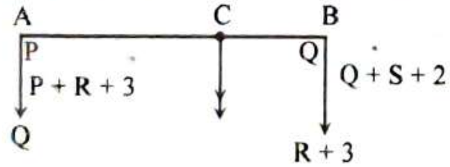
বা, $\tan\theta = \frac{70 \sin 62°}{100 + 70 \cos 62°}$

বা, $\theta = \tan^{-1}(0.465)$

$\therefore \theta = 24.94°$

লব্ধি P বলের সাথে 24.94° কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

খ



মনে করি, P, Q সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় যথাক্রমে A, B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে এবং লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

তাহলে, $P.AC = Q.BC$ ... ... (i)

আবার, P কে $(R + 3)$ পরিমাণে ও Q কে $(S + 2)$ পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore (P + R + 3).AC = (Q + S + 2).BC$ ... ... (ii)

আবার, P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, $(R + 3)$ ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore Q.AC = (R + 3)BC$ ... ... (iii)

এখন, (i) নং সমীকরণকে (iii) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{R+3} = \frac{P-Q}{Q-R-3}$ ... ... (iv)

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $(R + 3)AC = (S + 2)BC$ ... ... (v)

এখন, (iii) নং সমীকরণকে (v) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2} = \frac{Q-R-3}{R+3-S-2} = \frac{Q-R-3}{R-S+1} \text{ ... (vi)}$$

এখন, (iv) ও (vi) নং হতে পাই, $\frac{P-Q}{Q-R-3} = \frac{Q-R-3}{R-S+1}$

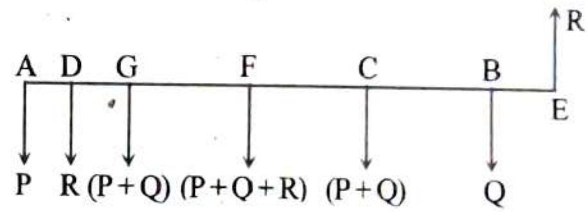
বা, $(P - Q)(R - S + 1) = (Q - R - 3)^2$

বা, $R - S + 1 = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q}$

বা, $R = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} + S - 1$

$\therefore R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, AB রেখার A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি $(P + Q)$, C বিন্দুতে ক্রিয়ারত। আবার, D ও E বিন্দুতে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। এখন, D বিন্দুতে R এবং C বিন্দুতে $(P + Q)$ বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + Q + R)$, F বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore (P + Q).CF = R.DF$ ... ... (i)

আবার, F বিন্দুতে $(P + Q + R)$ এবং E বিন্দুতে R মানের অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + Q)$, G বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore (P + Q + R).GF = R.EG$

বা, $(P + Q).GF = R.EG - R.GF = R(EG - GF)$

বা, $(P + Q).GF = R.EF$ ... ... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$(P + Q).CF + (P + Q).GF = R.DF + R.EF$

বা, $(P + Q)(CF + GF) = R.(DF + EF)$

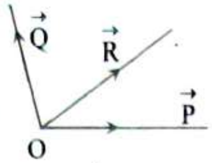
বা, $(P + Q).CG = R.DE$

বা, $(P + Q)CG = R.x$ [এখানে, $DE = x$]

বা, $CG = \frac{xR}{P+Q}$

সুতরাং লব্ধি $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে **(প্রমাণিত)**

22. **ক** কোনো বস্তুকণার উপর একই সময়ে একাধিক বল কার্যরত হলে, এদের সম্মিলিত ক্রিয়াফল, যদি বস্তুকণার উপর নির্দিষ্ট দিকে একটি মাত্র বলের ক্রিয়াফলের সমান হয়, তবে ঐ একটিমাত্র বলকে উপরোক্ত একাধিক বলের লব্ধি বলে এবং একাধিক বলের প্রত্যেকটিকে লব্ধি বলের অংশক বা উপাংশ বলে। চিত্রে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বল দুইটির সম্মিলিত ক্রিয়াফল একটি মাত্র $\vec{R}$ বলের ক্রিয়াফলের সমান হলে, $\vec{R}$ কে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি এবং $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ কে $\vec{R}$ এর অংশক বা উপাংশ বলে।



ভেক্টর সংকেতে লব্ধি $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

খ দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে AC বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে যেহেতু OACB একটি সামান্তরিক।

প্রশ্নমতে, লব্ধির মান $= \frac{\sqrt{5}\,P}{2}$

$\therefore$ P ও $\frac{1}{2}$P বল দুইটির লব্ধি $= \frac{\sqrt{5}\,P}{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{5}\,P}{2}\right)^2 = P^2 + \left(\frac{1}{2}P\right)^2 + 2.P.\frac{1}{2}P\cos\alpha$$

বা, $\frac{5P^2}{4} = P^2 + \frac{P^2}{4} + P^2\cos\alpha$

বা, $\frac{5P^2}{4} = \frac{5P^2}{4} + P^2\cos\alpha$

বা, $P^2\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0 \quad \therefore \alpha = 90°$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 90°$ **(Ans.)**

ধরি, লব্ধি, P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{P}{2}\sin\alpha}{P + \frac{P}{2}\cos\alpha}$$

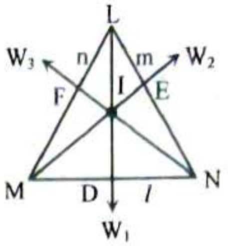
$$\text{বা, } \tan\theta = \frac{\frac{P}{2}\sin 90°}{P + \frac{P}{2}\cos 90°} = \frac{\frac{P}{2}}{P+0} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{P}$$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6°$

$\therefore$ লব্ধি P বলের সাথে 26.6° কোণ উৎপন্ন করে। **(Ans.)**

গ



LMN ত্রিভুজের L, M, N কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত তিনটি বল W_1, W_2, W_3 এর লব্ধি শূন্য।

লামির সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{W_1}{\sin FIE} = \frac{W_2}{\sin DIF} = \frac{W_3}{\sin EID}$$

$$\text{বা, } \frac{W_1}{\sin(\pi - L)} = \frac{W_2}{\sin(\pi - M)} = \frac{W_3}{\sin(\pi - N)}$$

$$\text{বা, } \frac{W_1}{\sin L} = \frac{W_2}{\sin M} = \frac{W_3}{\sin N} \;\ldots\ldots\ldots (i)$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{l}{\sin L} = \frac{m}{\sin M} = \frac{n}{\sin N} \;\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{W_1}{l} = \frac{W_2}{m} = \frac{W_3}{n}$

আবার, দেওয়া আছে, $l = m = n$

$\therefore W_1 = W_2 = W_3$ **(প্রমাণিত)**

23. **ক** দুটি বল P ও Q এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α হলে এবং লব্ধি R ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

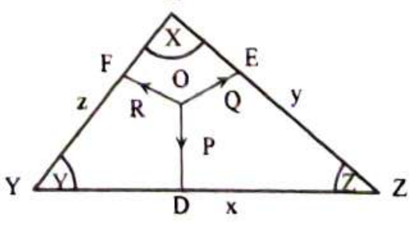
$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

সুতরাং কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। **(প্রমাণিত)**

খ



ΔXYZ-এর লম্বকেন্দ্র O বিন্দু থেকে YZ, ZX, XY বাহুর উপর OD, OE, OF লম্ব তিনটি বরাবর ক্রিয়াশীল

তিনটি বল যথাক্রমে P, Q, R। বলত্রয় সাম্যবস্থায় থাকলে লামির সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin EOD}$$

বা, $\frac{P}{\sin(\pi - X)} = \frac{Q}{\sin(\pi - Y)} = \frac{R}{\sin(\pi - Z)}$

বা, $\frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z}$ ...... (i)

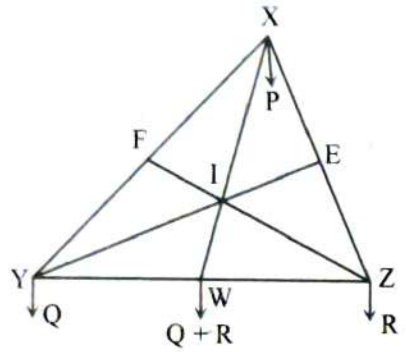
ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে,

$$\frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y} = \frac{z}{\sin Z}$$

(i) থেকে পাই, $\frac{P}{x} = \frac{Q}{y} = \frac{R}{z}$

$\therefore P : Q : R = x : y : z$ **(প্রমাণিত)**

গ



XYZ ত্রিভুজের X, Y, Z বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। X, Y, Z কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, I হলো, XYZ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

এখন, Y ও Z বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলের লব্ধি (Q + R) বলটি YZ রেখাস্থ W বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার, বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুগামী। সুতরাং, I বিন্দু XW রেখার ওপর অবস্থান করবে। অর্থাৎ, XW রেখা X কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

$\therefore \frac{YW}{ZW} = \frac{XY}{XZ}$ .... (i)

কিন্তু লব্ধি W বিন্দুগামী হওয়ায়, $Q.YW = R.ZW$

বা, $\frac{YW}{ZW} = \frac{R}{Q}$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{R}{Q} = \frac{XY}{XZ}$ বা, $\frac{Q}{XZ} = \frac{R}{XY}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{YZ} = \frac{Q}{XZ}$

$\therefore \frac{P}{YZ} = \frac{Q}{XZ} = \frac{R}{XY}$ বা, $\frac{P}{x} = \frac{Q}{y} = \frac{R}{z}$

$\therefore P : Q : R = x : y : z$ **(প্রমাণিত)**

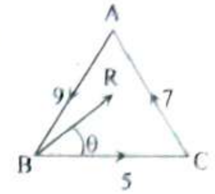
24. ক দেওয়া আছে, 8N ও 5N মানের বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ 60°।

বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে, $R = \sqrt{8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ}$

$= \sqrt{64 + 25 + 80 \times \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{64 + 25 + 40} = \sqrt{129}$N **(Ans.)**

খ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরালে ক্রিয়ারত যথাক্রমে 5, 7 ও 9 একক মানের বল তিনটির লব্ধি R বল 5 একক মানের বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



এখন 5 একক মানের বল বরাবর এবং এর উপর লম্বরেখা বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 5\cos 0^\circ + 7\cos(180^\circ - 60^\circ) + 9\cos(180^\circ + 60^\circ)$

$= 5 - 7\cos 60^\circ - 9\cos 60^\circ$

$= 5 - 7.\frac{1}{2} - 9.\frac{1}{2} = -3$ .... (i)

এবং $R\sin\theta = 5\sin 0^\circ + 7\sin(180^\circ - 60^\circ) + 9\sin(180^\circ + 60^\circ)$

$= 7\sin 60^\circ - 9\sin 60^\circ$

$= 7.\frac{\sqrt{3}}{2} - 9.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ ...... (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2$ থেকে পাই,

$R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (-3)^2 + (-\sqrt{3})^2$

বা, $R^2 = 9 + 3$ বা, $R^2 = 12$ $\therefore R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

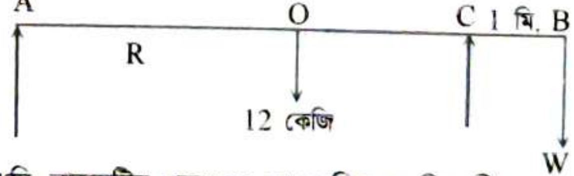
$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি, $R = 2\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ মনে করি, 12 কেজি ওজনের AB সমরূপ তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। একটি খুঁটি A বিন্দুতে এবং অপর B বিন্দু থেকে 1 মিটার ভিতরে C বিন্দুতে অবস্থিত।

$\therefore$ AB = 8 মিটার, AO = BO = $\frac{8}{2}$ = 4 মিটার

BC = 1 মিটার।

OC = OB − BC = 4 − 1 = 3 মিটার।



ধরি, বালকটির ওজন W, যা B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। যেহেতু বালকটি তক্তাটিকে না উল্টিয়ে B বিন্দুতে পৌছাতে সক্ষম। তক্তাটি সুস্থিত থাকবে যদি 12 কেজি ও W ওজনদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

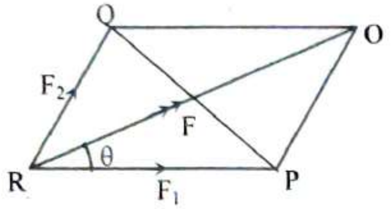
$\therefore$ 12.OC = W.BC বা, 12 × 3 = W.1 বা, W = 36 কেজি

$\therefore$ বালকটির ওজন 36 কেজি। **(Ans.)**

25. **ক** **লম্বাংশ:** কোন নির্দিষ্ট বলকে যদি পরস্পর লম্ব দুটি রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল দুটি বলের অংশে বিভক্ত করা হয় তবে অংশ দুইটির প্রতিটি ঐ নির্দিষ্ট বলের লম্বাংশ।

x অক্ষের সাথে α কোণে ক্রিয়ারত কোনো বল F এর লম্বাংশ যথাক্রমে $F\cos\alpha$ ও $F\sin\alpha$.

খ দৃশ্যকল্প-১ এ OPRQ সামান্তরিকটি পূর্ণ করি।



ধরি, $F_1 = K\cos P$

$F_2 = K\cos Q$

F_1 ও F_2 এর মধ্যবর্তী কোণ R এবং লব্ধি F.

$$\therefore F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos R$$
$$= K^2\cos^2P + K^2\cos^2Q + 2K\cos P.K\cos Q.\cos R$$
$$= K^2\cos^2P + K^2\cos^2Q + 2K^2\cos P.\cos Q.\cos R$$
$$= K^2(\cos^2P + \cos^2Q + \cos^2R + 2\cos P.\cos Q.\cos R - \cos^2R)$$
$$= K^2(1 - \cos^2R)$$ [$\because P + Q + R = \pi$ হলে, $\cos^2P + \cos^2Q + \cos^2R + 2\cos P.\cos Q.\cos R = 1$]
$$= K^2\sin^2R$$
$$\therefore F = K\sin R$$

RP এর লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$$F_1\sin 0° + F_2\sin R = F\sin\varphi$$

বা, $K\cos Q\sin R = K\sin R\sin\varphi$

বা, $\cos Q = \sin\theta$ [$K\sin R$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - Q\right) = \sin\theta$ বা, $\frac{\pi}{2} - Q = \varphi$

বা, $\frac{P+Q+R}{2} - Q = \varphi$ [$\because P + Q + R = \pi$]

বা, $\varphi = \frac{P+Q+R}{2} - Q$

$$\therefore R - \varphi = R - \left(\frac{P+Q+R}{2} - Q\right)$$
$$= R - \frac{P+Q+R}{2} + Q$$
$$= \frac{2R - P - Q - R + 2Q}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(R + Q - P)$$ **(দেখানো হলো)**

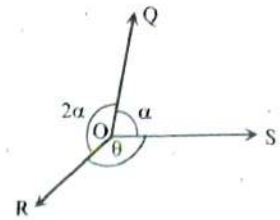
গ ধরি, $\angle QOS = \alpha$

$\angle QOR = 2\alpha$

$\angle ROS = \theta$

এখানে, $\theta + \alpha + 2\alpha = 2\pi$

বা, $\theta = 2\pi - 3\alpha$



যেহেতু Q, R, S বলত্রয় O বিন্দুতে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, সেহেতু লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$$

বা, $\frac{Q}{\sin(2\pi - 3\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{-\sin 3\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{-(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin 2\alpha}$

বা, $\frac{Q}{\sin\alpha(4\sin^2\alpha - 3)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\frac{Q}{4\sin^2\alpha - 3} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha} = \frac{R - Q}{4 - 4\sin^2\alpha}$

বা, $R = \frac{S}{2\cos\alpha} = \frac{R - Q}{4\cos^2\alpha}$

বা, $R^2 = \frac{S^2}{4\cos^2\alpha} = \frac{R(R-Q)}{4\cos^2\alpha}\left[\because R = \frac{S}{2\cos\alpha}\right]$

$\therefore S^2 = R(R - Q)$ **(দেখানো হলো)**

26. **ক** 4N মানের বল বরাবর $2\sqrt{3}$N বলের লম্বাংশ

$$F_1 = 2\sqrt{3}\cos 30° = 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3N$$

$\therefore$ 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি

$= 4N + 3N$

$= 7N$ **(Ans.)**

খ L ও M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি 51 গ্রাম ওজন

যেহেতু ABC ত্রিভুজে $25^2 + 60^2 = 65^2$

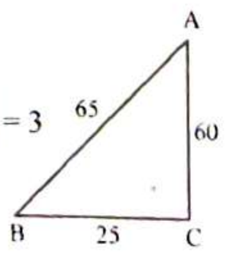
বা, $BC^2 + CA^2 = AB^2$

$\therefore \Delta ABC$ এর $\angle C = 90°$

যেহেতু বলগুলি সুস্থিত এবং ΔABC এর বাহুগুলির সমান্তরাল কাজেই লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা হতে পাই

$$\frac{L}{25} = \frac{M}{60} = \frac{N}{65}$$

বা, $\frac{L}{5} = \frac{M}{12} = \frac{N}{13} = \frac{L + M}{5 + 12} = \frac{51}{17} = 3$



$\therefore L = 15$ গ্রাম ওজন

$M = 36$ গ্রাম ওজন

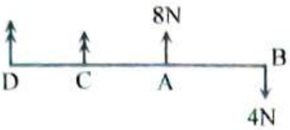
এবং $N = 39$ গ্রাম ওজন **(Ans.)**

গ মনে করি একটি 20 সে.মি. সুষম হালকা দণ্ডের A ও B প্রান্তে 8N ও 4N মানের বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করা হলো।

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি $(8-4)N = 4N$ বর্ধিত BA এর উপরস্থ C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

তাহলে $8 \times AC = 4 \times BC$

বা, $8AC = 4(AB + AC)$



বা, $8AC = 4(20 + AC)$

বা, $8AC = 80 + 4AC$

বা, $4AC = 80$

$AC = \frac{80}{4} = 20$ cm

এখন A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলের মান 4N বৃদ্ধি করা হলে মনে করি লব্ধি D বিন্দুতে সরে যায়।

$\therefore (8+4)AD = (4+4)BD$ বা, $12AD = 8(AB + AD)$

বা, $12AD = 8(20 + AD)$ বা, $12AD = 160 + 8AD$

বা, $4AD = 160$ $\therefore AD = \frac{160}{4} = 40$ cm

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু সরে যাবে DC দূরত্বের সমান

$\therefore DC = AD - AC = 40 - 20 = 20$ cm **(Ans.)**

27. **ক** মনে করি, কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল R, P, Q। P, Q এর মধ্যবর্তী কোন 45°। বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে R হবে P ও Q বলের লব্ধির সমান এবং এর দিক হবে P ও Q বলের লব্ধির বিপরীত দিক।

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos45°$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ.\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + \sqrt{2}PQ$

ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক। **(Ans.)**

খ মনে করি, P এবং 3P বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\theta = \frac{3P\sin\alpha}{P + 3P\cos\alpha}$

আবার, বলদ্বয় 4P এবং 3P + 18 হলে,

$\tan\theta = \frac{(3P + 18)\sin\alpha}{4P + (3P + 18)\cos\alpha}$

শর্তমতে,

$$\frac{3P\sin\alpha}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{(3P + 18)\sin\alpha}{4P + (3P + 18)\cos\alpha}$$

বা, $\frac{3P}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{3P + 18}{4P + 18\cos\alpha + 3P\cos\alpha}$

বা, $\frac{4P + 18\cos\alpha + 3P\cos\alpha}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{3P + 18}{3P}$

বা, $\frac{4P + 18\cos\alpha + 3P\cos\alpha - P - 3P\cos\alpha}{P + 3P\cos\alpha}$

$= \frac{3P + 18 - 3P}{3P}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{3P + 18\cos\alpha}{P + 3P\cos\alpha} = \frac{18}{3P}$

বা, $\frac{3P + 18\cos\alpha}{P(1 + 3\cos\alpha)} = \frac{18}{3P}$

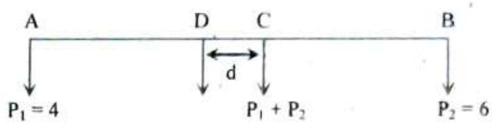
বা, $\frac{3P + 18\cos\alpha}{1 + 3\cos\alpha} = 6$

বা, $3P + 18\cos\alpha = 6 + 18\cos\alpha$

বা, $3P = 6$

$\therefore P = 2$ **(Ans.)**

গ



A বিন্দুতে $P_1 = 4$ একক ও B বিন্দুতে $P_2 = 6$ একক বল ক্রিয়া করছে।

ধরি, তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত যার মান $P_1 + P_2$

$\therefore P_1 AC = P_2 BC.$

বা, $4AC = 6BC.$

$\therefore 2AC = 3BC$ ... ... (i)

আবার, P_1 ও P_2 বলদ্বয়ের সাথে 2 একক বল যোগ করা হলে নতুন বলদ্বয় হবে, 6 একক ও 8 একক।

ধরি, এর ফলে বল দুইটির লব্ধি C বিন্দু হতে d দূরত্বে D বিন্দুতে সরে যায়।

$\therefore CD = d$

$\therefore 6AD = 8BD.$

বা, $6(AC - CD) = 8(BC + CD)$

বা, $6(AC - d) = 8(BC + d)$

বা, $6AC - 6d = 8BC + 8d$

বা, $6AC - 8BC = 8d + 6d$

বা, $3.\ 2AC - 8BC = 14d$

বা, $3.\ 3BC - 8BC = 14d.$ [(i) নং হতে]

বা, $9BC - 8BC = 14d$

বা, $BC = 14d$

$\therefore d = \frac{BC}{14}$ ... ... (ii)

আবার, (i) হতে পাই,

$2AC = 3BC$

বা, $2(AB - BC) = 3BC$

বা, $2AB - 2BC = 3BC$

বা, $2AB = 5BC$

$\therefore BC = \frac{2}{5} AB$

এই মান (ii) এ বসিয়ে,

$d = \frac{BC}{14} = \frac{1}{14} \times \frac{2}{5} AB = \frac{AB}{35}$

$= \frac{\text{বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{35}$

$\therefore$ লব্ধির সরণ $= \frac{\text{বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{35}$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-8.12 | পৃষ্ঠা-৩৭২

পরীক্ষণ নং 8.12.2.1	কাজের নাম: লৈখিক পদ্ধতিতে কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত 52° কোণে 10N এবং 7N বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে এবং আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত 52° কোণে 10N এবং 7N বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে এবং আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: যদি P ও Q বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ α এবং লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ এবং

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, পেন্সিল কম্পাস, চাঁদা, ক্যালকুলেটর ও গ্রাফ কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

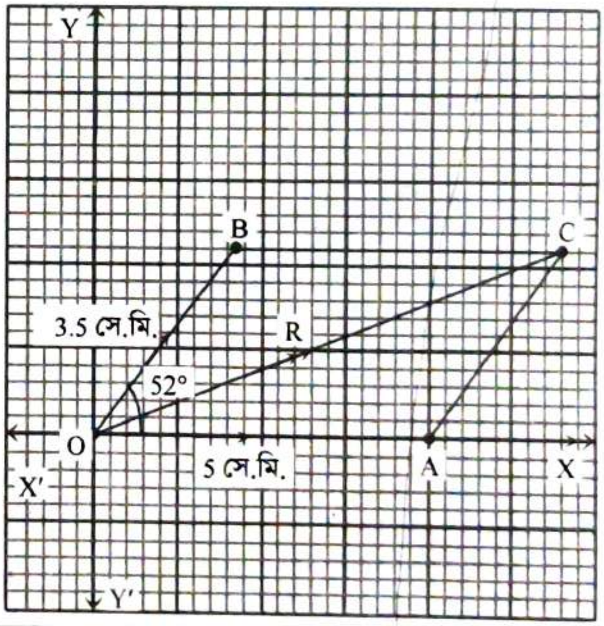
i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর সমান 1 সে.মি. সমান 2N বল ধরে OX রেখা বরাবর OA = 5 সে.মি. দৈর্ঘ্য নিই।

iii. OX রেখার সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 52° কোণে নত সরলরেখা বরাবর OB = 3.5 সে.মি. দৈর্ঘ্য কেটে নিই।

iv. OA এবং OB সরলরেখা দুইটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি। OA এবং OB বল দুইটির লব্ধি হচ্ছে কর্ণ OC.

v. স্কেল দ্বারা কর্ণ OC এর দৈর্ঘ্য এবং চাঁদা দ্বারা ∠COA- এর মান নির্ণয় করি।



ফল সংকলন:

P	Q	α	$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$	OC এর দৈর্ঘ্য (স্কেল দ্বারা মেপে)	লব্ধির মান (অঙ্কন থেকে)
10	7	52°	$\sqrt{10^2 + 7^2 + 2.10.7\cos52°} = 15.34$	7.7 সে.মি.	$7.7 \times 2 = 15.4$

ভুলের পরিমাণ = 15.4 − 15.34 = 0.06

P	Q	α	$\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$	চাঁদার মাপে θ-এর পরিমাণ।
10	7	52°	$\tan^{-1}\frac{7\sin52°}{10 + 7\cos52°} = 21.08°$	21°

ভুলের পরিমাণ = 21.08° − 21° = 0.08°

মন্তব্য: স্কেল ও চাঁদার মাধ্যমে ডাটা নেওয়ায় ত্রুটির জন্য সামান্য পার্থক্য হয়েছে।

পরীক্ষণ নং 8.12.2.2(i)	কাজের নাম: লৈখিক পদ্ধতিতে কোন কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল 48° কোণে 15 সে.মি./ সে. এবং 27 সে.মি./সে. বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে। আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে কোন কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল 48° কোণে 15 সে.মি./ সে. এবং 27 সে.মি./সে. বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে। আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: যদি একই সময়ে কোন কণার ওপর α কোণে ক্রিয়ারত u ও v মানের দুইটি বেগের লব্ধির মান W হয় এবং লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি u এর ক্রিয়া রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে,

$W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, পেন্সিল কম্পাস, চাঁদা, ক্যালকুলেটর ও গ্রাফ কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

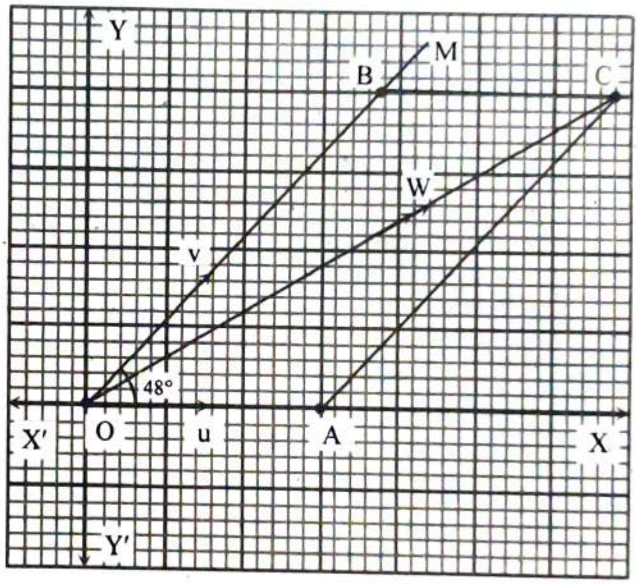
i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. OX রেখার সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 48° কোণে আনত সরল রেখাংশ OM আঁকি।

iii. গ্রাফ কাগজে বেগদ্বয়কে রেখার মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ বাহু = 1 সে.মি./সে. বেগ দ্বারা সূচিত করি।

iv. OX হতে 15 সে.মি./সে. বেগকে প্রকাশের জন্য মূলবিন্দু O থেকে OA = 15 বর্গ বাহু কেটে নিই এবং 27 সে.মি./সে. বেগকে প্রকাশের জন্য OM হতে OB = 27 বর্গ বাহু কেটে নিই।

v. OA এবং OB সরলরেখা দুইটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি এবং OC কর্ণ আঁকি। মনে করি OC, OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে OC কর্ণ এবং θ দ্বারা যথাক্রমে লব্ধির মান ও দিক সূচিত করে।



vi. স্কেল দ্বারা কর্ণ OC এর দৈর্ঘ্য এবং চাঁদা দ্বারা $\angle AOC = \theta$ এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

u	v	α	লব্ধির মান w নির্ণয়		লব্ধির দিক θ নির্ণয়	
			গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে চাঁদার মাধ্যমে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
15	27	48°	W = OC = 39 সে.মি./সে.	$W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ $= \sqrt{15^2 + 27^2 + 2.15.27\cos48°}$ = 38.68 সে.মি./সে.	চাঁদার সাহায্যে নির্ণীত কোণ $\angle AOC = \theta = 31°$	$\theta = \tan^{-1}\dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ $= \tan^{-1}\dfrac{27\sin48°}{15 + 27\cos48°}$ = 31.25°

ফলাফল:

∴ নির্ণেয় লব্ধির মান = 39 সে.মি./সে. এবং লব্ধির দিক = 31°

মন্তব্য: লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

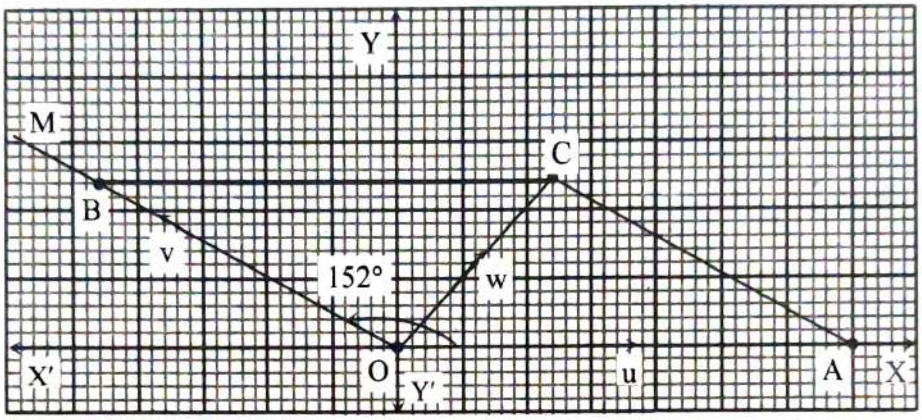
পরীক্ষণ নং 8.12.2.2(ii)	কাজের নাম: লৈখিক পদ্ধতিতে কোন কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল 152° কোণে 175 মি./সে. এবং 130 মি./সে. বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে। আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে কোন কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল 152° কোণে 175 মি./সে. এবং 130 মি./সে. বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে। আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: যদি একই সময়ে কোন কণার ওপর α কোণে ক্রিয়ারত u ও v মানের দুইটি বেগের লব্ধির মান W হয় এবং লব্ধির ক্রিয়ারেখা যদি u এর ক্রিয়া রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে

$W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, পেন্সিল কম্পাস, স্কেল, চাঁদা, ক্যালকুলেটর ও গ্রাফ কাগজ।



কার্যপদ্ধতি:

i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. OX রেখার সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 152° কোণে আনত OM রেখাংশ আঁকি।

iii. গ্রাফ কাগজে বেগদ্বয়কে রেখার মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গবাহু = 5 মি./সে. বেগ দ্বারা সূচিত করি।

iv. 175 মি./সে. বেগকে প্রকাশের জন্য OX এর O থেকে OA = 175 ÷ 5 = 35 বর্গ বাহু কেটে নিই এবং 130 মি./সে. বেগকে প্রকাশের জন্য OM হতে OB = 130 ÷ 5 = 26 বর্গ বাহু কেটে নিই।

v. OA এবং OB সরলরেখা দুইটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করি এবং OC কর্ণ আঁকি। মনে করি OC, OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে OC কর্ণ এবং θ দ্বারা যথাক্রমে লব্ধির মান ও দিক সূচিত করে।

vi. স্কেল ও পেন্সিল কম্পাস দ্বারা কর্ণ OC এর দৈর্ঘ্য এবং চাঁদার দ্বারা $\angle AOC = \theta$ এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

u	v	α	লব্ধির মান w নির্ণয়		লব্ধির দিক θ নির্ণয়	
			গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
175 মি./সে.	130 মি./সে.	152°	w = OC = 17.1 ঘর = 17.1 × 5 =85.5 মি./সে.	$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ $= \sqrt{(175)^2 + (130)^2 + 2.175.130\cos152°}$ = 85.74	চাঁদার সাহায্যে নির্ণীত কোণ $\angle AOC = \theta = 45°$	$\theta = \tan^{-1}\dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ $= \tan^{-1}\dfrac{130\sin152°}{175 + 130\cos152°}$ = 45° (প্রায়)

ফলাফল: নির্ণেয় লব্ধির মান = 85.5 মি./সে., এর লব্ধির দিক = 45°

মন্তব্য: লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিক ভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান।

অতএব ফলাফল সঠিক।

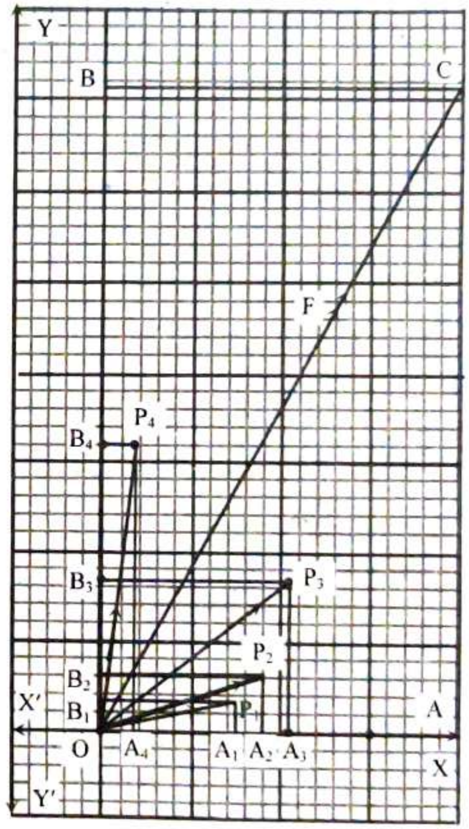
পরীক্ষণ নং 8.12.2.3	**কাজের নাম:** একই সময়ে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত চারটি বল 20N, 30N, 50N ও 80N এবং উক্ত বিন্দুগামী কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সাথে বলগুলি যথাক্রমে 20°, 35°, 52° এবং 84° কোণ উৎপন্ন করে। লৈখিক পদ্ধতিতে বলগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে ও সত্যতা যাচাই করতে হবে।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: একই সময়ে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত চারটি বল 20N, 30N, 50N ও 80N এবং উক্ত বিন্দুগামী কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সাথে বলগুলি যথাক্রমে 20°, 35°, 52° এবং 84° কোণ উৎপন্ন করে। লৈখিক পদ্ধতিতে বলগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে ও সত্যতা যাচাই করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: OX ও OY পরস্পর লম্ব রেখার ওপর বল চারটির লম্ব অভিক্ষেপ যে সব রেখাংশ দ্বারা প্রকাশিত হবে তাদের দৈর্ঘ্যের বীজগাণিতিক সমষ্টি যথাক্রমে OA ও OB হলে, OACB আয়তক্ষেত্রের কর্ণ OC বল চারটির লব্ধিকে প্রকাশ করবে এবং OX এর সাথে লব্ধির দিক হবে $\angle AOC$.

প্রয়োজনীয় উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, পেন্সিল কম্পাস, চাঁদা, ক্যালকুলেটার ও গ্রাফ কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:



i. গ্রাফ পেপারে পরস্পর লম্ব XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. এখন গ্রাফ পেপারের x ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ বাহু = 4N ধরে OX রেখার সাথে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে যথাক্রমে 20°, 35°, 52°, 84° কোণে নত সরলরেখা বরাবর যথাক্রমে $P_1 = 20N$ (5 ঘর), $P_2 = 30N$ (7.52 ঘর), $P_3 = 50N$ (12.5 ঘর), $P_4 = 80N$ (20 ঘর) বল সমূহকে মানে ও দিকে প্রকাশ করি।

iii. OX রেখার উপর $P_1A_1, P_2A_2, P_3A_3, P_4A_4$ লম্ব চারটি আঁকি।
$\therefore$ OX বরাবর OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 দ্বারা বলগুলোর লম্বাংশ প্রকাশ করে।

iv. OY রেখার উপর $P_1B_1, P_2B_2, P_3B_3, P_4B_4$ লম্ব চারটি আঁকি।
$\therefore$ OY বরাবর OB_1, OB_2, OB_3, OB_4 দ্বারা বলগুলোর লম্বাংশ প্রকাশ করে।

v. OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি
$OA = OA_1 + OA_2 + OA_3 + OA_4$
= 4.8 ঘর + 6.1 ঘর + 7.8 ঘর + 2 ঘর = 20.7 ঘর
$\therefore OA = 20.7 \times 4N = 82.8N$

vi. OY বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি
$OB = OB_1 + OB_2 + OB_3 + OB_4$
= 1.75 ঘর + 4.2 ঘর + 9.9 ঘর + 19.95 ঘর
= 35.8 ঘর
$\therefore OB = (35.8 \times 4N) = 143.2N$

vii. OA ও OB কে দুটি বিপরীত বাহু ধরে OACB আয়তক্ষেত্র আঁকি ও O, C যোগ করি। তাহলে OC কর্ণই বল চারটির লব্ধির মান সূচিত করে।

viii. পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে OC এর দৈর্ঘ্য বের করে তা O বিন্দু থেকে OX বরাবর বসিয়ে গ্রাফ পেপারের ক্ষুদ্রতম কত বর্গ বাহুর সমান তা নির্ণয় করি এবং চাঁদার সাহায্যে লব্ধির দিক $\angle AOC = \theta$ নির্ণয় করি।

হিসাব: এখানে, $\alpha_1 = 20, \alpha_2 = 35°, \alpha_3 = 52°, \alpha_4 = 84°$
$P_1 = 20N, P_2 = 30N, P_3 = 50N, P_4 = 80N$
OX বরাবর লম্বাংশগুলোর সমষ্টি
$X = F\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + P_4\cos\alpha_4$
বা, $X = 20\cos20° + 30\cos35° + 50\cos52° + 80\cos84°$
বা, $X = 18.79 + 24.57 + 30.78 + 8.36$
$\therefore X = 82.5N$

OY বরাবর লম্বাংশগুলোর সমষ্টি $Y = F\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + P_4\sin\alpha_4$

$= 20\sin20° + 30\sin35° + 50\sin52° + 80\sin84° = 6.84 + 17.21 + 39.40 + 79.56$

$\therefore\ Y = 143.01$

$\therefore$ লব্ধির মান $F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{6806.25 + 20451.86} = \sqrt{27258.11}$

$\therefore$ লব্ধি F = 165.10N (প্রায়) এবং লব্ধির দিক $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X} = \tan^{-1}\frac{143.01}{82.5} = \tan^{-1} 1.733$

$\therefore\ \theta = 60°$ (প্রায়)

ফল সংকলন: **লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়**

লব্ধির মান F নির্ণয়		লব্ধির দিক θ নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
F = OC এর দৈর্ঘ্য = ক্ষুদ্রতম 41.3 ঘর = 41.3 × 4N = 165N (প্রায়)	F = 165N (প্রায়)	$\theta = \angle AOC = 60°$	$\theta = 60°$ (প্রায়)

ফলাফল: নির্ণেয় লব্ধির মান = 165N (প্রায়) এবং লব্ধির দিক = 60° (প্রায়)

মন্তব্য: লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

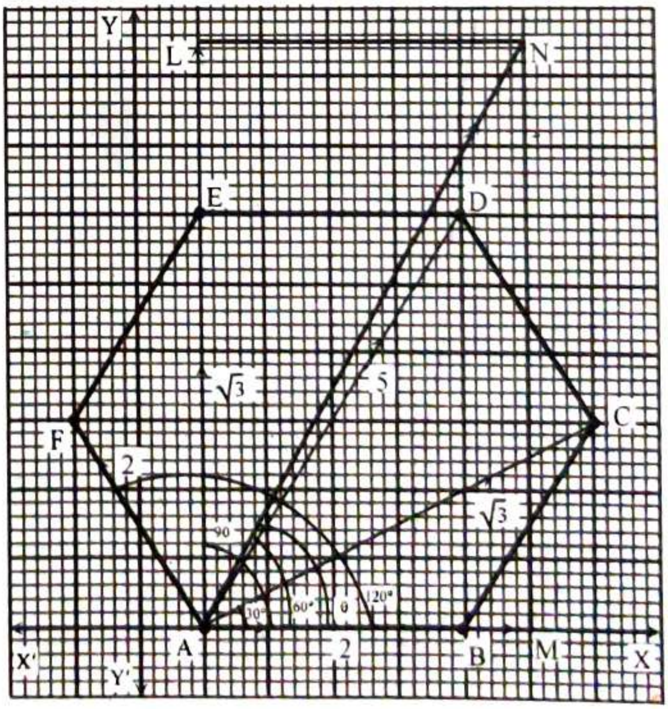
পরীক্ষণ নং 8.12.2.4	**কাজের নাম:** ABCDEF সুষম ষড়ভুজের A বিন্দুতে AB, AC, AD, AE ও AF বরাবর 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ ও 2 কেজি ওজনের বলগুলি ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। লেখচিত্র অঙ্কন করে যথার্থতা প্রমাণ কর।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: ABCDEF সুষম ষড়ভুজের A বিন্দুতে AB, AC, AD, AE ও AF বরাবর 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ ও 2 কেজি ওজনের বলগুলি ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে। লেখচিত্র অঙ্কন করে যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $X = \sum F_1\cos\theta_1$; $Y = \sum F_1\sin\theta_1$, $R = \sqrt{X_2 + Y_2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, পেন্সিল কম্পাস, চাঁদা, ক্যালকুলেটর ও গ্রাফ কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:



i. ABCDEF সুষম ষড়ভুজ অঙ্কন করে AC, AD, AE যোগ করি। ষড়ভুজের প্রত্যেক কোণ 120°; তাই AC, AD, AE দ্বারা A কোণটি চারটি কোণে বিভক্ত যাদের প্রত্যেকের পরিমাণ 30°।

ii. প্রদত্ত শর্তানুসারে AB বরাবর 2, AC বরাবর $\sqrt{3}$, AD বরাবর 5, AE বরাবর $\sqrt{3}$ এবং AF বরাবর 2 কেজি ওজনের বল ক্রিয়ারত আছে। AB বরাবর AX এবং AX এর সাথে লম্ব AY রেখাদ্বয় অঙ্কন করি।

iii. AX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ যোগ করে X নির্ণয় করি।

iv. AY বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ যোগ করে Y নির্ণয় করি।

v. গ্রাফ কাগজের ক্ষুদ্র 5 বর্গ = 1 কেজি ওজন স্কেলে X ও Y এর মান নির্দেশক দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি এবং AX ও AY হতে যথাক্রমে ঐ AM ও AL অংশদ্বয় কেঁটে নেই।

vi. ALNM সামান্তরিক অঙ্কন করি। বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে AN কর্ণ লব্ধি বলের মান ও দিক সূচিত করে।

vii. নির্ধারিত স্কেলে AN এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি এবং চাঁদার সাহায্যে AN ও AX এর অন্তর্গত θ কোণ পরিমাপ করি।

হিসাব:

ফল সংকলন: AX বরাবর লম্বাংশগুলোর যোগফল

$= 2\cos0° + \sqrt{3}\cos30° + 5\cos60° + \sqrt{3}\cos90° + 2\cos120° = 5$ কেজি ওজন।

AY বরাবর লম্বাংশগুলোর যোগফল $= 2\sin0° + \sqrt{3}\sin30° + 5\sin60° + \sqrt{3}\sin90° + 2\sin120°$

$= 5\sqrt{3}$ কেজি ওজন।

5 ক্ষুদ্র বর্গ = 1 কেজি ওজন স্কেলে, AM = 25 ক্ষুদ্রবর্গ ও AL = 43.3 বর্গ।

লব্ধির মান নির্ণয়:

$X = \sum F_1\cos\theta_1$	$Y = \sum F_1\sin\theta_1$	$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$	AM	AL	$AN = \sqrt{AM^2 + AL^2}$	প্রকৃত মাপে AN
5 কেজি ওজন	$5\sqrt{3}$ কেজি ওজন	$\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ = 10 কেজি ওজন	25 বর্গ	43.3 বর্গ	$\sqrt{25^2 + 43.3^2}$ = 49.99 বর্গ = 10 কেজি ওজন (প্রায়)	5 বর্গ = 10.2 কেজি ওজন

তিনটি ভিন্ন পদ্ধতিতে লব্ধির একই মান পাওয়া গেল।

লব্ধির দিক নির্ণয়:

X	Y	$\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$	AM	AL	$\theta = \tan^{-1}\frac{AL}{AM}$	প্রকৃত মাপে θ কোণ
5	$5\sqrt{3}$	$\tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{5}\right) = 60°$	25 বর্গ	43.3 বর্গ	$\tan^{-1}\left(\frac{43.3}{25}\right) = 59.99°$	60°

ফলাফল: তিনটি ভিন্ন পদ্ধতিতে θ কোণের একই মান পাওয়া গেল। সুতরাং প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধি 10 কেজি ওজন এবং তার দিক AB এর সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

পরীক্ষণ নং 8.12.2.5	**কাজের নাম:** কোন কণার ওপর একই সময়ে 55° কোণে কার্যরত 180 মিটার/সেকেন্ড ও 110 মিটার/সেকেন্ড বেগদ্বয়ের মান লৈখিক পদ্ধতি আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করে যথার্থতা প্রকাশ কর।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: কোন কণার ওপর একই সময়ে 55° কোণে কার্যরত 180 মিটার/সেকেন্ড ও 110 মিটার/সেকেন্ড বেগদ্বয়ের মান লৈখিক পদ্ধতি আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করে যথার্থতা প্রকাশ করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: একই সময়ে কোনো কণার ওপর α কোণে কার্যরত u ও v বেগদ্বয়ের লব্ধির মান w হয় এবং লব্ধির ক্রিয়ারেখা u বেগের দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল, (ii) চাঁদা (iii) স্কেল (iv) পেন্সিল কম্পাস (v) ইরেজার (vi) গ্রাফ কাগজ (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

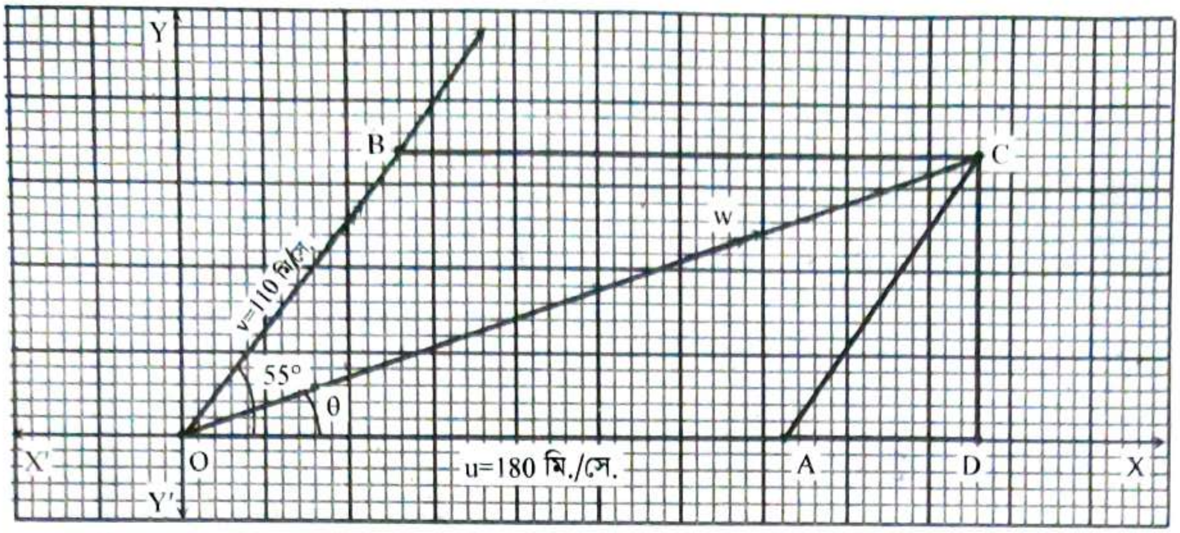
i. গ্রাফ পেপারে বেগদ্বয়ের মান ও দিক সূচিত করার জন্য উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গবাহু = 5 মিটার/সেকেন্ড বেগ নির্ধারণ করি।

ii. OX রশ্মি হতে 180 মিটার/সেকেন্ড বেগকে প্রকাশের জন্য (180 ÷ 5 = 36) গ্রাফ পেপারে O বিন্দু থেকে 36 বর্গ বাহুঘর কেটে নিই এবং OY হতে OB = 110 মিটার/সেকেন্ড বেগকে প্রকাশের জন্য (110 ÷ 5) = 22 বর্গ ঘর পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে OB অংশ কেটে নিই।

iii. OA এবং OB দুইটি সন্নিহিত বাহু বিশিষ্ট OACB সামান্তরিক আঁকি এবং OC কর্ণ যোগ করি যা লব্ধি w প্রকাশ করে। ধরি OC রেখাটি OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

iv. পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে OC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করার জন্য O বিন্দু হতে OX বরাবর গ্রাফপেপারে OD চিহ্নিত করে ক্ষুদ্রতম কত বর্গ বাহুর সমান তা নির্ণয় করি।

v. C বিন্দু হতে OX এর ওপর CD লম্ব আঁকি। OD ও CD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



ফলাফল সংকলন:

u	v	α	লব্ধির মান নির্ণয় $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$		লব্ধির দিক নির্ণয়	
			গ্রাফ পেপার থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান
180 মি./সে.	110 মি./সে.	55°	w = OC এর দৈর্ঘ্য = 51.9 ঘর = 51.9×5 = 259.5 মি./সে.	$w = \sqrt{(180)^2 + (110)^2 + 2.180°.110\cos55°}$ = 259.26 মি./সে.	OD = 48 CD = 17.8 $\theta = \tan^{-1}\frac{CD}{OD}$ $\tan^{-1}\frac{17.8}{48} = 20.35°$	$\theta = \tan^{-1}\frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ $= \tan^{-1}\frac{110\sin 55°}{180 + 110\cos55°}$ = 20.34°

ফলাফল: নির্ণেয় লব্ধির মান = 259.26 মিটার/সেকেন্ড এবং লব্ধির দিক = 20.34°

মন্তব্য: লেখচিত্র হতে প্রাপ্ত মান এবং সূত্র হতে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

▶ মৌখিক প্রশ্নের উত্তর

1. কোনো এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলকে মানে এবং দিকে যদি একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দিয়ে প্রকাশ করা যায় তবে বল দুইটির লব্ধিকে মানে এবং দিকে উক্ত সন্নিহিত বাহু দুইটির ছেদ বিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা প্রকাশ করা যাবে।
2. কোনো বলকে যখন কোনো দুইটি নির্দিষ্ট দিক বরাবর দুইটি অংশে ভাগ করা হয় যাদের লব্ধি প্রদত্ত বলের সমান তখন অংশ দুইটির প্রতিটিকে প্রদত্ত বলের অংশক বলা হয়।
   যখন পরস্পর লম্ব দিক বরাবর কোনো বলের অংশক বের করা হয় তখন অংশগুলোকে লম্বাংশক বলে।
3. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক যদি একই ক্রমে গৃহীত একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায় তবে বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।
4. যদি দুই বা ততোধিক নির্দিষ্ট বল একই সময়ে একই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল হয় এবং এমন একটি বল নির্ণয় করা যায়, ঐ বস্তুর ওপর যার ক্রিয়াফল নির্দিষ্ট বলগুলোর মিলিত ক্রিয়াফলের সমান হয়, তাহলে শেষোক্ত বলকে নির্দিষ্ট বলগুলোর লব্ধি বল বলে।
5. লব্ধির মান $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ এবং দিক $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$
6. কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি একতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।
7. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বলের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হলে এবং কোনটিই অপর দুইটির লব্ধির সমান না হলে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।