সরলরেখা

প্রশ্নমালা III A

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হলে, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
- (i) $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব x-অক্ষ হতে $=|y|$ এবং y-অক্ষ হতে $=|x|$

  (ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

  (iii) $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

(i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $R(x, y)$ বিন্দু $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x}{x-x_2} = \dfrac{y_1-y}{y-y_2}$

বহির্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \dfrac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x_2}{x_2-x} = \dfrac{y_1-y_2}{y_2-y}$

(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(iii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{kx_2+x_1}{k+1}, \dfrac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক,

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)$$

$= (x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3)$ এবং $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}|\delta_{ABC}| = \dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$ বর্গ একক

5. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দুগুলি সমরেখ হলে, $(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3) = 0$.

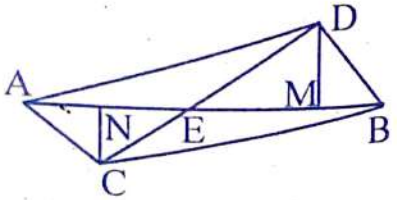
7. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1)|$

3. C ও D বিন্দুদ্বয় AB রেখার একই পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$ এবং বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$

). AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপতে বিভক্ত করলে $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.

প্রমাণ ঃ AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, ΔCNE ও ΔDME সদৃশ।

$\therefore \dfrac{CN}{DM} = \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2}$ $\quad \therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \dfrac{\frac{1}{2}\delta_{ABC}}{\frac{1}{2}\delta_{ABD}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \times CN}{\frac{1}{2}AB \times DM} = \dfrac{m_1}{m_2}$



$\therefore \quad x = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ এবং y

$= -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

খ. **সমাধানঃ** ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2\alpha)$.

$\therefore$ $(4, 3)$ বিন্দু হতে $(\alpha, 2\alpha)$ বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 10$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$ অথবা, $\alpha = 3$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(1, 2)$ বা, $(3, 6)$ (Ans.)

গ. মনে করি, $B(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ); যেখানে

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{4\pi}{3})$

এখন, $C(4, \frac{\pi}{4})$ ও $D(2, \frac{4\pi}{3})$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বই নির্ণেয় দূরত্ব।

$\therefore \quad CD = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2.4.2\cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$

$= \sqrt{16 + 2 - 16\cos(\frac{15\pi}{12})}$

$= \sqrt{20 - 16\cos(\frac{5\pi}{4})}$

$= \sqrt{20 - 16\cos(\pi + \frac{\pi}{4})}$

$= \sqrt{20 + 16\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{20 + 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{20 + 8\sqrt{2}}$

প্রশ্নমালা III B

1.(a) দেখাও যে, (2 – 2) এবং (– 1 , 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।

[সি.'০৫,'১৩; ব.'০৭ ; মা'০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ AB রেখাংশকে $P(\alpha, 0)$ বিন্দুতে $m : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \quad 0 = \frac{4m + 1 \times -2}{m+1} \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ x-অক্ষ AB রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

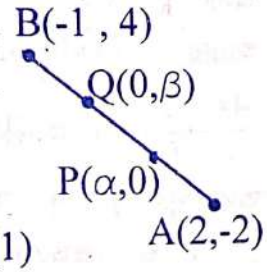
আবার, ধরি y-অক্ষ AB রেখাংশকে $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে $n : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \quad 0 = \frac{n \times -1 + 1 \times 2}{n+1} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n : 1 = 2 : 1$

অর্থাৎ y-অক্ষ AB রেখাংশকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ AB রেখাংশকে যথাক্রমে $P(\alpha, 0)$ ও $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{2-\alpha}{\alpha+1} = \frac{-2-0}{0-4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2AP = PB = PQ + QB$

$\Rightarrow PQ = 2AP - QB \cdots\cdots (1)$

আবার, $\frac{AQ}{QB} = \frac{2-0}{0+1} = \frac{-2-\beta}{\beta-4}, \Rightarrow \frac{AQ}{QP} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow AQ = 2QB \Rightarrow AP + PQ = 2\,QB$

$\Rightarrow AP + 2AP - QB = 2\,QB$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 3\,AP = 3\,QB \quad \therefore AP = QB$

$(1) \Rightarrow PQ = 2AP - AP = AP$

$\therefore AP = PQ = QB$

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

1(b) (7 , 5) ও (– 2 ,– 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব.'০৫; রা.'০৯,'১১]

সমাধান ঃ

ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় A(7, 5) ও B(−2, −1) এবং P ও Q সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয় AB রেখাংশকে যথাক্রমে 1 : 2 ও 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore \quad P \equiv \left(\frac{1\times -2+2\times 7}{1+2}, \frac{1\times -1+2\times 5}{1+2}\right) = (4, 3)$$

$$Q \equiv \left(\frac{2\times -2+1\times 7}{2+1}, \frac{2\times -1+1\times 5}{2+1}\right) = (1, 1)$$

$\therefore$ সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (4, 3) ও (1, 1)

1(c) (– 2 , 3) ও (4 , – 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

[চ.'০৭; মা.'০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত (– 2 , 3) ও (4 , – 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{k\times 4+1\times -2}{k+1}, \frac{k\times -7+1\times 3}{k+1}\right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{-7k+3}{k+1} = 0 \Rightarrow -7k+4 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{7}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 3 : 7$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভুজ

$$\frac{4k-2}{k+1} = 0 \Rightarrow 4k-2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 1 : 2$

$\therefore$ x ও y-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যথাক্রমে 3 : 7 এবং 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1(d) (2 , – 5) ও (2 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

[য.'০০]

সমাধান ঃ প্রদত্ত (2 , –5) ও (2 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{k\times 2+1\times 2}{k+1}, \frac{k\times 3+1\times -5}{k+1}\right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{3k-5}{k+1} = 0 \Rightarrow 3k-5 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 5 : 3$

$\therefore$ x-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক

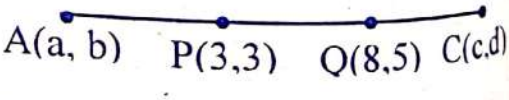
$$= \left(\frac{2.\frac{5}{3}+2}{\frac{5}{3}+1}, 0\right) = \left(\frac{10+6}{5+3}, 0\right) = (2, 0)$$

[MCQ এর ক্ষেত্রে , বিন্দু দুইটির সাধারন ভুজ 2 বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষরেখা (2, 0) বিন্দুতে এবং $\frac{-5-0}{0-3} = \frac{5}{3}$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।]

1(e) AB সরলরেখাটি P(3 , 3) এবং Q(8 , 5) বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখন্ডিত করা হয়, A, B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব.'১১]

সমাধান ঃ



ধরি, A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a,b) ও (c, d)

তাহলে, P, AQ এর মধ্যবিন্দু ।

$$\therefore \quad \frac{a+8}{2} = 3 \Rightarrow a = 6-8 = -2 \text{ এবং}$$

$$\frac{b+5}{2} = 3 \Rightarrow b = 6-5 = 1$$

আবার, Q, PC এর মধ্যবিন্দু ।

$$\therefore \quad \frac{3+c}{2} = 8 \Rightarrow c = 16-3 = 13 \text{ এবং}$$

$$\frac{3+d}{2} = 5 \Rightarrow d = 10-3 = 7$$

$\therefore$ A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2,1) ও (13, 7)

2.(a) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2, 4) ও (4, – 5). AB রেখাংশকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলে AB = 3BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু.'০৯; চ.'১১; দি'১২; সি.'১০; রা.'১৩; ঢা.'১৪]

সমাধান ঃ A(−2, 4) B(4,−5) C

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

দেওয়া আছে, $AB = 3BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$

B বিন্দু AC রেখাংশকে 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3x-2}{3+1}, \frac{3y+4}{3+1})$

প্রশ্নমতে, $\frac{3x-2}{4} = 4 \Rightarrow 3x - 2 = 16$

$\Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

এবং $\frac{3y+4}{4} = -5 \Rightarrow 3y + 4 = -20$

$\Rightarrow 3y = -24 \Rightarrow y = -8$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(6, -8)$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

দেওয়া আছে, $AB = 3BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 3$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{-2-4}{4-x} = \frac{4+5}{-5-y} = 3$

$\therefore \frac{-6}{4-x} = 3 \Rightarrow -6 = 12 - 3x \Rightarrow x = 6$ এবং

$\frac{9}{-5-y} = 3 \Rightarrow 9 = -15 - 3y \Rightarrow y = -8$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(6, -8)$ (Ans.)

2(b) A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q ও R বিন্দুদ্বয় 2 : 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু। Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ \times PR = PB^2$ [রা.'০০]

সমাধান ঃ $P \equiv (\frac{8+18}{2}, \frac{10+20}{2}) = (13, 15)$

$Q \equiv (\frac{36+24}{2+3}, \frac{40+30}{2+3}) = (\frac{60}{5}, \frac{70}{5}) = (12, 14)$

$R \equiv (\frac{36-24}{2-3}, \frac{40-30}{2-3}) = (-12, -10)$

$\therefore$ Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (12, 14) ও (− 12 , − 10)

এখন, $PQ = \sqrt{(13-12)^2 + (15-14)^2} = \sqrt{2}$

$PR = \sqrt{(13+12)^2 + (15+10)^2} = \sqrt{2 \times 25^2}$

$= 25\sqrt{2}$

$PB^2 = (13-18)^2 + (15-20)^2 = 50$

$\therefore PQ \times PR = \sqrt{2} \times 25\sqrt{2} = 50 = PB^2$

3. (a) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (2 , 7) ও (6 , 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6 , 4) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর। [সি.'০৪,'১২; মা.বো.'০৭; ব.'১০,'১২; চ.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ (2 , 7) , (6 , 1) ও (x, y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(\frac{2+6+x}{3}, \frac{7+1+y}{3})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{2+6+x}{3} = 6 \Rightarrow x + 8 = 18 \Rightarrow x = 10$

এবং $\frac{7+1+y}{3} = 4 \Rightarrow y + 8 = 12 \Rightarrow y = 4$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (10 , 4).

3(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_1^2, 2at_2)$এবং $(at_3^2, 2at_3)$. যদি এর ভরকেন্দ্র x–অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ [সি.'০৫; কু.'০৬; য.'০৯; মা.'০৯]

সমাধান ঃ ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$= (\frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3}, \frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3})$

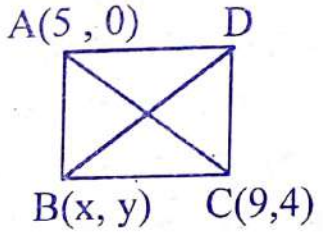
এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর কোটি শূন্য।

$\therefore \frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3} = 0$

$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = 0$ (Showed)

3(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(10 , 20) , B(20 , 30) এবং C(30 , 10). ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হলে GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.(প্রকৌশল ভর্তি পরীক্ষা)'০৪]

সমাধান:



মনে করি, ABCD বর্গের AC কর্ণের প্রান্তদ্বয় A(5, 0), C(9, 4) । B শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y) হলে,

$AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-0)^2 = (x-9)^2 + (y-4)^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 - 18x + 81 + y^2 - 8y + 16$

$\Rightarrow 8x + 8y = 72 \Rightarrow x + y = 9$

$\Rightarrow y = 9 - x \cdots\cdots$ (i)

আবার, $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 2AB^2 = AC^2$

$\Rightarrow 2(x^2 - 10x + 25 + y^2) = (5-9)^2 + (0-4)^2$

$\Rightarrow 2\{x^2 - 10x + 25 + (9-x)^2\} = 16 + 16$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + 81 - 18x + x^2 = 16$

$\Rightarrow 2x^2 - 28x + 90 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0$

$\Rightarrow (x-9)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5, 9$

(i) হতে পাই, $y = 9 - x = 4, 0$

$\therefore$ B শীর্ষের স্থানাঙ্ক (5, 4) অথবা (9, 0)

B শীর্ষের স্থানাঙ্ক (5, 4) হলে D শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(5 + 9 - 5, 0 + 4 - 4) = (9, 0)$

B শীর্ষের স্থানাঙ্ক (9, 0) হলে D শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(5 + 9 - 9, 0 + 4 - 0) = (5, 4)$

$\therefore$ বর্গটির অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় (5, 4) ও (9, 0).

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. (2,–4) ও (–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [ঢা.'০৯; রা. '০৪, '০৮; য. '০২]

সমাধান ঃ

ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় A(2 , – 4) ও B(– 3 , 6) এবং AB রেখাংশকে P বিন্দু $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore P \equiv \left(\frac{k \times -3 + 1 \times 2}{k+1}, \frac{k \times 6 + 1 \times -4}{k+1}\right)$ (১)

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$\frac{6k-4}{k+1} = 0$ (১)

$\Rightarrow 6k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভুজ

$\frac{-3k+2}{k+1} = 0$ (১)

$\Rightarrow -3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

$\therefore$ x ও y-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 এবং 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। (১)

6. A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 5 , 4) ও (3 , – 2). AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন 3AB = 2BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

দেওয়া আছে, $3AB = 2BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y).

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{-5-3}{3-x} = \frac{4+2}{-2-y} = \frac{2}{3}$ (১)

$\therefore \frac{-8}{3-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow -24 = 6 - 2x$

$\Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$ এবং

$\frac{6}{-2-y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 18 = -4 - 2y$

$\Rightarrow 2y = -22 \Rightarrow y = -11$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (15 , –11) (Ans.) (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. ΔABC এর দুইটি শীর্ষ A(–3, –2) ও B(6, 4) ।

(a) $(-1, \sqrt{3})$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ); যেখানে

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{2\pi}{3})$

(b) AB বাহুর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর সাথে C শীর্ষ যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র (3, 1) হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সি.'০৮; ঢা.'০৬; চ.'০৮; য.'০৯,'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(–3, – 2) ও B(6 , 4) এবং P ও Q সমত্রিখন্ডক বিন্দু দুইটি AB রেখাংশকে যথাক্রমে 1 : 2 ও 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ $P \equiv (\frac{1\times 6 + 2\times -3}{1+2}, \frac{1\times 4 + 2\times -2}{1+2})$

$= (\frac{6-6}{3}, \frac{4-4}{3}) = (0, 0)$

এবং $Q \equiv (\frac{2\times 6 + 1\times -3}{2+1}, \frac{2\times 4 + 1\times -2}{2+1})$

$= (\frac{12-3}{3}, \frac{8-2}{3}) = (3, 2)$

ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ ΔPQC এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(\frac{0+3+x}{3}, \frac{0+2+y}{3}) = (\frac{3+x}{3}, \frac{2+y}{3})$

প্রশ্নমতে, $\frac{3+x}{3} = 3 \Rightarrow x + 3 = 9 \Rightarrow x = 6$

এবং $\frac{2+y}{3} = 1 \Rightarrow y + 2 = 3 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক (6,1).

(c) AB এর মধ্যবিন্দু হতে $\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার ভুজ কোটির দ্বিগুণ।

সমাধান : AB এর মধ্যবিন্দু (ধরি) C –এর স্থানাঙ্ক

$(\frac{-3+6}{2}, \frac{-2+4}{2}) = (\frac{3}{2}, 1)$

ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $D(2\alpha, \alpha)$.

$\therefore$ $CD = \sqrt{(2\alpha - \frac{3}{2})^2 + (\alpha - 1)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(2\alpha - \frac{3}{2})^2 + (\alpha - 1)^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4\alpha^2 - 2.2\alpha.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 16\alpha^2 - 24\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 1$

$\Rightarrow 20\alpha^2 - 32\alpha + 12 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 8\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 5\alpha - 3\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha(\alpha - 1) - 3(\alpha - 1) = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 1)(5\alpha - 3) = 0$

$\therefore$ $\alpha = 1, \frac{3}{5}$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (2, 1) অথবা, $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$

প্রশ্নমালা III C

1. (a) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(– 3, – 2), B(– 3 , 9) এবং C(5 , – 8) ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪; য.'০৪,'১৩; চ.'০৮]

সমাধান : A(–3, – 2), B(– 3, 9) এবং C(5 , – 8) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\Delta ABC = \frac{1}{2}|\ (-3)9 + (-3)(-8) + 5(-2) - (-2)(-3) - 9(5) - (-8)(-3)|$

$[\frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1$

$- y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_4 - y_4x_1$ সূত্র দ্বারা]

[A(– 3, –2), B(– 3, 9), C(5 , – 8)]

$= \frac{1}{2}|-27 + 24 - 10 - 6 - 45 - 24|$

এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{2\pi}{3})$

(b) AB বাহুর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর সাথে C শীর্ষ যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র (3, 1) হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সি.'০৮; ঢা.'০৬; চ.'০৮; য.'০৯,'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(–3, – 2) ও B(6 , 4) এবং P ও Q সমত্রিখন্ডক বিন্দু দুইটি AB রেখাংশকে যথাক্রমে 1 : 2 ও 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ $P \equiv (\frac{1\times 6 + 2\times -3}{1+2}, \frac{1\times 4 + 2\times -2}{1+2})$

$= (\frac{6-6}{3}, \frac{4-4}{3}) = (0, 0)$

এবং $Q \equiv (\frac{2\times 6 + 1\times -3}{2+1}, \frac{2\times 4 + 1\times -2}{2+1})$

$= (\frac{12-3}{3}, \frac{8-2}{3}) = (3, 2)$

ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ ΔPQC এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(\frac{0+3+x}{3}, \frac{0+2+y}{3}) = (\frac{3+x}{3}, \frac{2+y}{3})$

প্রশ্নমতে, $\frac{3+x}{3} = 3 \Rightarrow x + 3 = 9 \Rightarrow x = 6$

এবং $\frac{2+y}{3} = 1 \Rightarrow y + 2 = 3 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক (6,1).

(c) AB এর মধ্যবিন্দু হতে $\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার ভুজ কোটির দ্বিগুণ।

সমাধান : AB এর মধ্যবিন্দু (ধরি) C –এর স্থানাঙ্ক

$(\frac{-3+6}{2}, \frac{-2+4}{2}) = (\frac{3}{2}, 1)$

ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $D(2\alpha, \alpha)$.

$\therefore$ $CD = \sqrt{(2\alpha - \frac{3}{2})^2 + (\alpha - 1)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(2\alpha - \frac{3}{2})^2 + (\alpha - 1)^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4\alpha^2 - 2.2\alpha.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 16\alpha^2 - 24\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 1$

$\Rightarrow 20\alpha^2 - 32\alpha + 12 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 8\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 5\alpha - 3\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha(\alpha - 1) - 3(\alpha - 1) = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 1)(5\alpha - 3) = 0$

$\therefore$ $\alpha = 1, \frac{3}{5}$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (2, 1) অথবা, $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$

প্রশ্নমালা III C

1. (a) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(– 3, – 2), B(– 3 , 9) এবং C(5 , – 8) ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪; য.'০৪,'১৩; চ.'০৮]

সমাধান : A(–3, – 2), B(– 3, 9) এবং C(5 , – 8) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\Delta ABC = \frac{1}{2}|\ (-3)9 + (-3)(-8) + 5(-2) - (-2)(-3) - 9(5) - (-8)(-3)|$

$[\frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1$

$- y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_4 - y_4x_1$ সূত্র দ্বারা]

[A(– 3, –2), B(– 3, 9), C(5 , – 8)]

$= \frac{1}{2}|-27 + 24 - 10 - 6 - 45 - 24|$

$= \frac{1}{2}|-88| = 44$ বর্গ একক।

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -3 & -3 & 5 & -3 \\ -2 & 9 & -8 & -2 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|-27+24-10-(6+45+24)|$$

$$= \frac{1}{2}|-13-75| = \frac{1}{2}|-88| = 44$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 44 বর্গ একক।

২য় অংশ ঃ ধরি, B হতে CA এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য d একক।

$$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2} \times CA \times d$$

$$\Rightarrow 44 = \frac{1}{2} \times \sqrt{(5+3)^2 + (-8+2)^2} \times d$$

$$\Rightarrow 88 = \sqrt{64+36} \times d \Rightarrow d = \frac{88}{10} = 8\frac{4}{5}$$

B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $8\frac{4}{5}$ একক।

1(b) দেখাও যে, (3, 5), (3 , 8) এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[কু.'০২]**

সমাধান ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(3, 5) ও B(3 , 8) এবং মূলবিন্দু O(0 , 0).

$$\therefore OA = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$OB = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

$$AB = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$$

এখানে , $OA + AB = \sqrt{34} + 3 > \sqrt{73} = OB$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু দুইটি এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়।

এখন, $\Delta ABO = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 5 \end{vmatrix}\right|$

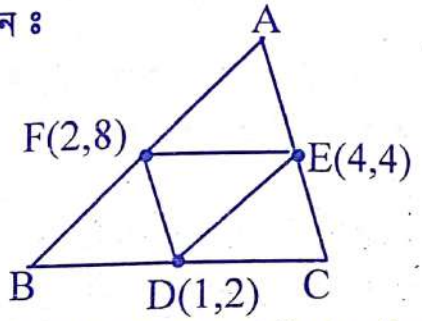
$$= \frac{1}{2}|24+0+0-(15+0+0)|$$

$$= \frac{1}{2}|24-15| = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

1(c) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু (1,2), (4,4) এবং (2 , 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০১]**

সমাধান ঃ



ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু D(1, 2), E(4, 4) এবং F(2 , 8).

$$\therefore \delta_{DEF} = (1-4)(4-8) - (2-4)(4-2)$$

$$= 12 + 4 = 16$$

$$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{2}|16| = 8$$

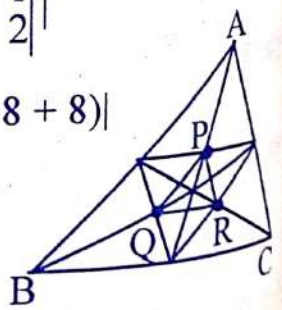
$$\therefore \Delta ABC = 4 \times \Delta DEF = 4 \times 8 = 32$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 32 বর্গ একক।

1(d) ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4 , 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু P(1, 2), Q(4, 4) এবং R(2 , 8).

$$\therefore \Delta PQR = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}\right|$$



$$= \frac{1}{2}|4+32+4-(8+8+8)|$$

$$= \frac{1}{2}|40-24|$$

$$= \frac{1}{2}|32| = 16$$

$$\therefore \Delta ABC = 16 \times \Delta DEF = 16 \times 8 = 128$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 128 বর্গ একক।

2. (a) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক (t + 1, 1), (2t + 1, 3), (2t + 2 , 2t) । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, t = 2 অথবা t = −1/2 হলে, বিন্দুগুলো সমরেখ হবে। **[কু. '১০; রা. '১০; ব.'১০]**

সমাধান ঃ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} t+1 & 2t+1 & 2t+2 & t+1 \\ 1 & 3 & 2t & 1 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|3t+3+4t^2+2t+2t+2-(2t+1+6t+6+2t^2+2t)|$

$= \frac{1}{2}|4t^2+7t+5-2t^2-10t-7|$

$= \frac{1}{2}|2t^2-3t-2|$ বর্গ একক।

$\therefore$ $t=2$ হলে,

$2t^2-3t-2 = 8-6-2 = 8-8 = 0$

এবং $t=-\frac{1}{2}$ হলে,

$2t^2-3t-2 = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2 = \frac{1+3-4}{2} = 0$

$\therefore$ $t=2$ বা $-\frac{1}{2}$ হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

2(b) (a, b), (b, a) এবং $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ ভিন্ন বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, দেখাও যে, $a+b=0$. [চ.'০২]

সমাধান ঃ যেহেতু বিন্দুগুলি সমরেখ,

$\begin{vmatrix} a & b & 1/a & a \\ b & a & 1/b & b \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow a^2+1+\frac{b}{a}-(b^2+1+\frac{a}{b}) = 0$

$\Rightarrow a^2-b^2+\frac{b}{a}-\frac{a}{b} = 0$

$\Rightarrow a^2-b^2+\frac{b^2-a^2}{ab} = 0$

$\Rightarrow (a^2-b^2)(1-\frac{1}{ab}) = 0$

$\Rightarrow (a-b)(a+b)(ab-1) = 0$

এখানে $a-b=0$ অর্থাৎ $a=b$ হলে অথবা $ab=1$ হলে বিন্দু তিনটি ভিন্ন হয় না।

$\therefore$ $a+b=0$ (Showed).

2(c) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$, $(a+2, a)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে ? [রা.'১২; য.'১২;দি.'১৪]

সমাধান ঃ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & a+1 & a+2 & 2 \\ -1 & a-3 & a & -1 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|2a-6+a^2+a-a-2-(-a-1+a^2-a-6+2a)|$

$= \frac{1}{2}|a^2+2a-8-a^2-7|$

$= \frac{1}{2}|2a-1|$ বর্গ একক। (Ans.)

এখন বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, $2a-1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

3(a) যদি $A(3, 4)$, $B(2t, 5)$ এবং $C(6, t)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। 15/2

[য.'০৩,'১৪; ঢা.'০৪; সি.'০৪; ব.'১৩; মা.'১৪]

সমাধানঃ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 2t & 6 & 3 \\ 4 & 5 & t & 4 \end{vmatrix}\right| = 19\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|15+2t^2+24-(8t+30+3t)| = \frac{39}{2}$

$\Rightarrow |2t^2-11t+9| = 39$

$\Rightarrow 2t^2-11t+9 = \pm 39$

'+' চিহ্ন নিয়ে পাই, $2t^2-11t+9-39 = 0$

$\Rightarrow 2t^2-11t-30 = 0$

$\Rightarrow 2t^2-15t+4t-30 = 0$

$\Rightarrow t(2t-15)+2(2t-15) = 0$

$\Rightarrow (t+2)(2t-15) = 0$

$\therefore$ $t=-2$ অথবা, $t = 15/2$

'–' চিহ্ন নিয়ে পাই, $2t^2-11t+48 = 0$

$(-11)^2-4.2.48 < 0$ বলে, t এর কোন বাস্তব মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হবেনা।

$\therefore$ t এর মান -2 বা, $15/2$.

3(b) দেখাও যে, (p , p – 2) , (p + 3 , p) এবং (p + 2, p + 2) বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [কু.'০৮; মা.বো.'০৪]

প্রমাণ : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$= \frac{1}{2} | (p - p - 3)(p - p - 2) -$

$(p - 2 - p)(p + 3 - p - 2) |$

$= \frac{1}{2} | (-3)(-2) - (-2).1 |$

$= \frac{1}{2} | 6 + 2 | = 4$ বর্গ একক; যা p বর্জিত।

$\therefore$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত ।

3(c) OPQ ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (0 , 0) , (A cosβ , – A sinβ) এবং (A sinα , A cosα); দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। [ব.'০৪; চ.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A\cos\beta & -A\sin\beta & 1 \\ A\sin\alpha & A\cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{2}(A^2 \cos\alpha \cos\beta + A^2 \sin\alpha \sin\beta)$

$= \frac{1}{2} A^2 \cos(\alpha - \beta)$; ইহা বৃহত্তম হবে যদি $\cos(\alpha - \beta)$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ,

$\cos(\alpha - \beta) = 1$ হয়।

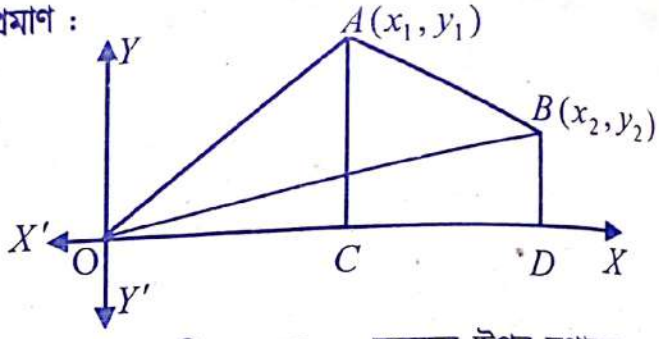
$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$

$\therefore \alpha = \beta$ (Showed)

বৃহত্তম মানটি $= \frac{1}{2} A^2$ বর্গ একক

3 (d) দুটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ বর্গ একক। [য.'০৫ ;ঢা.'০৯; দি.'১২]

প্রমাণ :



A ও B বিন্দু হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AC ও BD লম্ব আঁকি। তাহলে, $OC = x_1$, $OD = x_2$, $AC = y_1$, $BD = y_2$ এবং $CD = x_2 - x_1$, যখন $x_2 > x_1$

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ OAB হলে,

Δ OAB = OAC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম ACDB এর ক্ষেত্রফল – OBD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(OC \times AC) + \frac{1}{2}(AC + BD) \times CD - \frac{1}{2}(OD \times BD)$

$= \frac{1}{2}\{x_1 y_1 + (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - x_2 y_2\}$

$= \frac{1}{2}(x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_2)$

$\therefore \Delta OAB = \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)$

এখন, Δ OAB ধনাত্মক হবে যখন $x_2 y_1 > x_1 y_2$ এবং ঋণাত্মক হবে যখন $x_2 y_1 < x_1 y_2$. কিন্তু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না ।

$\therefore$ OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|x_2 y_1 - x_1 y_2|$ বর্গ একক।

4. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x , y) , B(2 ,– 4) ও C(– 3, 3) এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $7x + 5y + 24$ 0 অথবা, $7x + 5y - 12 = 0$. [ব.'০৬]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} | (x - 2)(-4 - 3) - (y + 4)(2 + 3) |$

$= \frac{1}{2}|-7x+14-5y-20|$

$= \frac{1}{2}|-7x-5y-6|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|-7x-5y-6| = 9$

$\Rightarrow 7x+5y+6 = \pm 18$

$\therefore\ 7x+5y+24=0$ অথবা, $7x+5y-12=0$

5.(a) Δ ABC এর A , B , C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 5) , (– 3 , 3) , (– 1,– 1) এবং BC , CA , AB এর মধ্যবিন্দু D , E , F হলে, ত্রিভুজ ABC এবং DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, Δ ABC = 4. Δ DEF. [ব.'০৫]

সমাধান: Δ ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(3+3)(3+1)-(5-3)(-3+1)|$

$= \frac{1}{2}|24+4| = \frac{1}{2}(28) = 14$ বর্গ একক।

BC এর মধ্যবিন্দু $D \equiv (\frac{-3-1}{2}, \frac{3-1}{2}) = (-2, 1)$

CA এর মধ্যবিন্দু $E \equiv (\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}) = (1, 2)$

AB এর মধ্যবিন্দু $F \equiv (\frac{3-3}{2}, \frac{5+3}{2}) = (0, 4)$

$\therefore$ Δ DEF এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(-2-1)(2-4)-(1-2)(1-0)|$

$= \frac{1}{2}|6+1| = \frac{7}{2}$ বর্গ একক।

$\therefore\ \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{14}{7/2} = 4.$

$\therefore\ \Delta ABC = 4.\Delta DEF$

5(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4 , – 3), (13 , 0) , (– 2 , 9) এবং D , E , F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এদের আনুপাত 3 : 1. [রা.'০২]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দু A(4 , – 3) , B (13 , 0) এবং C (– 2 , 9) এর নিশ্চায়ক,

$\therefore\ \delta_{ABC} = (4-13)(0-9)-(-3-0)(13+2)$
$= 81+45 = 126$

$\therefore\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|126|$ বর্গ একক $= 63$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BD:DC = 2:1$

তদ্রূপ CE : EA = 2:1, AF : FB = 2:1

$\therefore\ D \equiv (\frac{2\times-2+1\times13}{2+1}, \frac{2\times9+1\times0}{2+1})$

$= (\frac{-4+13}{3}, \frac{18}{3}) = (3, 6)$

$E \equiv (\frac{2\times4+1\times-2}{2+1}, \frac{2\times-3+1\times9}{2+1})$

$= (\frac{8-2}{3}, \frac{-6+9}{3}) = (2, 1)$

$F \equiv (\frac{2\times13+1\times4}{2+1}, \frac{2\times0+1\times-3}{2+1})$

$= (\frac{26+4}{3}, \frac{-3}{3}) = (10, -1)$

$\therefore\ \delta_{DEF} = (3-2)(1+1)-(6-1)(2-10)$
$= 2+40 = 42$

$\therefore\ \Delta DEF = \frac{1}{2}|42|$ বর্গ একক $= 21$ বর্গ একক

দ্বিতীয় অংশ ঃ Δ ABC: Δ DEF = 63 : 21 = 3 : 1

5(c) ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 1 , 2) , (2 , 3) ও (3, – 4) ; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, দেখাও যে, $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x-3y+7|}{22}$ [কু.'০৭]

প্রমাণ: $\delta_{PAB} = (x+1)(2-3)-(y-2)(-1-2)$
$= -x-1+3y-6 = -x+3y-7$

$\therefore\ \Delta PAB = \frac{1}{2}|-x+3y-7|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|x-3y+7|$ বর্গ একক

$\delta_{ABC} = (-1-2)(3+4)-(2-3)(2-3)$
$= -21-1 = -22$

$\therefore\ \Delta PAB = \frac{1}{2}|-22|$ বর্গ একক $= 11$ বর্গ একক

$\therefore\ \frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x-3y+7|}{22}$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(5, 6) , B(–9 , 1) এবং C(–3 , – 1) ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮; চ.'১০; য.'০৭; দি.০৯,'১০]

সমাধান ঃ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & -9 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}\right|$ (১)

$= \frac{1}{2}|5+9-18-(-54-3-5)|$ (১)

$= \frac{1}{2}|-4+62| = \frac{1}{2}|-4+62| = \frac{1}{2}(58) = 29$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= 29$ বর্গ একক।

২য় অংশ ঃ ধরি, A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য d একক।

$\therefore\ \Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times d$

$\Rightarrow 29 = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-9+3)^2 + (1+1)^2} \times d$ (১)

$\Rightarrow 58 = \sqrt{36+4} \times d$

$\Rightarrow d = \frac{58}{2\sqrt{10}} = \frac{29\sqrt{10}}{10}$

$\therefore$ A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক। (১)

7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x , y) , B(2 , 4) এবং C(–3 , 3) এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$. [রা.'১৩]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(x-2)(4-3) - (y-4)(2+3)|$ (১)

$= \frac{1}{2}|x-2-5y+20|$

$= \frac{1}{2}|x-y+18|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|x-5y+18| = 9$

$\Rightarrow x - 5y + 18 = \pm 18$

$\therefore\ x-5y=0$ অথবা, $x-5y+36=0$ (Showed) (১)

8. ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(3 , 2), B(2 , – 1), C(8, – 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৬]

১ম অংশ : ধরি, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক (x, y)

ABCD আয়তের AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{3+8}{2}, \frac{2-3}{2}) = (\frac{11}{2}, -\frac{1}{2})$ ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{2+x}{2}, \frac{y-1}{2})$ অভিন্ন। (১)

$\therefore\ \frac{2+x}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x = 11-2 = 9$

$\frac{y-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -1+1 = 0$

$\therefore$ চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক (9, 0). (১)

২য় অংশ : $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$ (১)

$BC = \sqrt{(2-8)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\therefore$ আয়তটির ক্ষেত্রফল $= AB \times BC$ বর্গ একক

$= \sqrt{10} \times 2\sqrt{10}$ বর্গ একক $= 20$ বর্গ একক।(১)

[বি.দ্র. : $D \equiv (8+3-2, -3+2+1) = (9,0)$]

9. ABCD চতুর্ভুজের A , B , C , D শীর্ষ চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1 , 2) , (– 5 , 6) , (7 , – 4) এবং (k , – 2); এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে k এর মান নির্ণয় কর। [য.'০২; সি.'০৮]

সমাধান ঃ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 & k & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ বর্গ একক (১)

$= \frac{1}{2}|(6+20-14+2k)-(-10+42-4k-2)|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|12+2k-30+4k|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|6k-18|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|6k-18| = 0 \Rightarrow 6k-18 = 0$

$\therefore k = 3$ (Ans.) (১)

10. যদি A(– 4, 6) , B(–1, –2) এবং C(*a* ,– 2) বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ একক হয়, তবে '*a*' এর মান এবং A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর । [প্র.ভ.প.'৯৫]

সমাধান ঃ $\delta_{ABC} = (-4+1)(-2+2) - (6+2)(-1-a) = 8(a+1)$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}|8(a+1)|$ বর্গ একক (১)

প্রশ্নমতে , $\frac{1}{2}|8(a+1)| = 16 \Rightarrow |a+1| = 4$

$\Rightarrow a+1 = \pm 4 \Rightarrow a = 3$ অথবা, $a = -5$

$\therefore$ *a* এর মান 3 বা, – 5 (১)

২য় অংশ: A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব d একক হলে,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BC \times d) = 16$ (১)

$\Rightarrow |-1-a| \times d = 32$

$\Rightarrow 4d = 32$ [$a = 3$ বা, -5 বসিয়ে]

$\therefore$ A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব 8 একক । (১)

11 (a) দেখাও যে, (3 , 90°) ও (3 , 30°) বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (3, 90°) ও (3 , 30°) এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3\cos 90°, 3\sin 90°) = (0,3)$ ও $(3\cos 30°, 3\sin 30°) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$. (১)

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(0,1) ও $B(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ এবং মূলবিন্দু O(0,0).

$\therefore$ $OA = \sqrt{0+3^2} = 3$,

$OB = \sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27+9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$

$AB = \sqrt{(0-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 + (3-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}$ (১)

$= \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$

OA, OB , AB এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং OA = OB = AB = 3.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। (১)

এখন, সমবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2$

$= \frac{9\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক (১)

11(b) দেখাও যে, C(– 2 , –1) এবং D(5 , – 4) বিন্দু দুইটি A(– 3 , 1) এবং B(1 , – 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত ?

সমাধান ঃ $\delta_{ABC} = (-3-1)(-1+1)-(1+1)(1+2)$

$= -6$ (১)

$\delta_{ABD} = (-3-1)(-1+4)-(1+1)(1-5)$

$= -12+8 = -4$

এখন, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} = -6 \times -4 > 0$ বলে C এবং D বিন্দুদ্বয় AB এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। (১)

দ্বিতীয় অংশ ঃ O(0 , 0) মূলবিন্দু হলে,

$\delta_{AB0} = (-3-1)(-1-0)-(1+1)(1-0)$

$= 4-2 = 2$

$\delta_{AB0} \times \delta_{ABC} = -6 \times 2 < 0$ বলে AB রেখার যে পার্শ্বে C ও D অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত। (১)

12. (–2, 3) , (–3 , – 4) , (5 , –1) ও (2, 2) বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\right|$ (১)

$= \frac{1}{2}|8+3+10+6-(-9-20-2-4|$

$= \frac{1}{2}|27+35| = 31$ বর্গ একক (Ans.) (১)

13(a) t এর মান কত হলে (2t + 1, t + 2), (2 – t , 2 – 5t) এবং (5 t , 7t) বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ?

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক $= (2t+1-2+t)$
$(2-5t-7t)-(t+2-2+5t)(2-t-5t)$
$= (3t-1)(2-12t)+6t(2-6t)$
$= (3t-1)(2-12t+12t) = 2(3t-1)$ (১)

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে, $2(3t-1)>0 \Rightarrow t>\frac{1}{3}$ (১)

13 (b) দেখাও যে, (t , 3t – 2), (1– 2t , 2 – 3t) এবং (– t , – t) বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি t > 1 হয়।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক $= (t-1+2t)$
$(2-3t+t)-(3t-2-2+3t)(1-2t+t)$
$= (3t-1)(2-2t)-(6t-4)(1-t)$
$= (1-t)(6t-2-6t+4) = 2(1-t)$ (১)

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে, $2(1-t)<0$

$\therefore$ $t>1$ (Showed) (১)

14. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি A(x, y), B(1, 3) ও C(3,1) হলে এবং x + y = 1 হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [KUET 07-08]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(x-1)(3-1)-(y-3)(1-3)|$ (১)

$= \frac{1}{2}|2x-2+2y-6| = \frac{1}{2}|2x+2y-8|$

$= |x+y-4| = |1-4| = 3$ বর্গ একক। (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

15. ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2 , 5), B(5 , 9) এবং D(6 , 8).

(a) t এর মান কত হলে (2t + 1, t + 2), (2 – t , 2 – 5t) এবং (5t , 7t) বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ?

সমাধান : 13(a) দ্রষ্টব্য।

(b) OB সরলরেখা AD রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর; যেখানে O মূলবিন্দু।

সমাধান : $\frac{\delta_{OBA}}{\delta_{OBD}} = \frac{(0-5)(9-5)-(0-9)(5-2)}{(0-5)(9-8)-(0-9)(5-6)}$

$= \frac{(-5)4-(-9)3}{(-5).1-(-9)(-1)} = \frac{-20+27}{-5-9}$

$= -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} < 0$

$\therefore$ AD রেখাংশকে OB রেখাটি 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

(c) রম্বসটির কর্ণের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). ABCD একটি রম্বস বলে AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{x+2}{2}, \frac{y+5}{2})$ এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{11}{2}, \frac{17}{2})$ অভিন্ন।

$\therefore$ $\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x+2 = 11 \Rightarrow x = 9$

এবং $\frac{y+5}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow y+5 = 17 \Rightarrow y = 12$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9 , 12).

[বি.দ্র. : $C \equiv (6+5-2, 9+8-5) = (9,12)$]

$\therefore$ $AC = \sqrt{(2-9)^2+(5-12)^2} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(5-6)^2+(9-8)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AC \times BD)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(7\sqrt{2} \times \sqrt{2})$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক।

16. A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, –1), (15, 2), (–1, 2) এবং (4, – 5)।

(a) দেখাও যে, $(t, 3t-2)$, $(1-2t, 2-3t)$ এবং $(-t, -t)$ বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি $t>1$ হয়।

সমাধান: 13(b) দ্রষ্টব্য।

(b) মূলবিন্দু O এবং ΔACD এর ভারকেন্দ্র G হলে $OG^2 : \Delta ABD$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ΔACD এর ভারকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{0-1+4}{3}, \frac{-1+2-5}{3}\right) = \left(1, -\frac{4}{3}\right)$$

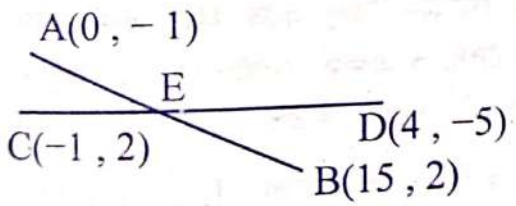
$$\therefore\ OG^2 = 1^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\Delta ABD = \frac{1}{2}|(0-75-4)-(-15+8+0)|$$

$$= \frac{1}{2}|-79+7| = 36 \text{ বর্গ একক।}$$

$$\therefore\ OG^2 : \Delta ABD = \frac{25}{9} : 36 = 25:324 \text{ (Ans.)}$$

(c) প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩]



ধরি, CD রেখাংশকে AB রেখাটি k : 1 অনুপাতে E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{4k-1}{k+1}, \frac{-5k+2}{k+1}\right)$

এখন A, E, B বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে তাদের নিশ্চায়ক, $\delta_{AEB} = 0$

$$\therefore\ 0 \times \frac{-5k+2}{k+1} + \frac{4k-1}{k+1} \times 2 + 15 \times (-1) - \left(-1 \times \frac{4k-1}{k+1} + \frac{-5k+2}{k+1} \times 15 + 2 \times 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8k-2}{k+1} - 15 - \frac{-4k+1-75k+30}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow 8k - 2 - 15k - 15 + 79k - 31 = 0$$

$$\Rightarrow 72k - 48 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ অর্থাৎ } k : 1 = 2:3$$

$\therefore$ CD রেখাংশকে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\delta_{ABC} = (0-15)(2-2) - (-1-2)(15+1)$$
$$= 0 + 48 = 48$$

$$\delta_{ABD} = (0-15)(2+5) - (-1-2)(15-4)$$
$$= -105 + 33 = -72$$

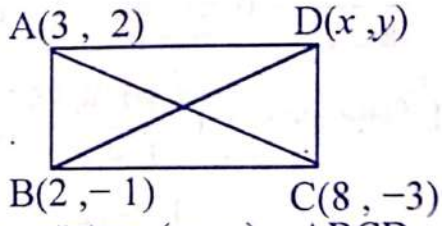
$$\therefore\ \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABd}} = \frac{48}{-72} = -\frac{2}{3} < 0$$

$\therefore$ C ও D , AB এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। অতএব CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

17. A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1) , (1,0) , (5, 1) এবং (– 10, –4) .

(a) ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(3, 2) , B(2, – 1), C(8, – 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). ABCD একটি আয়তক্ষেত্র বলে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$ এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ অভিন্ন।

$$\therefore\ \frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x + 2 = 11 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{এবং } \frac{y-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0$$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9 , 0) (Ans.)

(b) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান ঃ

$\delta_{CDA} = (5+10)(-4-1)-(1+4)(-10-3)$
$= -75+65 = -10$

$\delta_{CDB} = (5+10)(-4-0)-(1+4)(-10-1)$
$= -60+55 = -5$

$\therefore \dfrac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \dfrac{-10}{-5} = \dfrac{2}{1} > 0$

$\therefore$ C ও D , AB এর একই পাশে অবস্থিত এবং AB কে CD রেখাটি 2 : 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

(c) AD রেখাংশকে x-অক্ষ L বিন্দুতে এবং ΔACD এর ভরকেন্দ্র M হলে BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ AD রেখাংশকে ক k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\dfrac{k\times(-10)+1\times 3}{k+1}, \dfrac{k\times(-4)+1\times 1}{k+1})$

$= (\dfrac{-10k+3}{k+1}, \dfrac{-4k+1}{k+1})$

এ বিন্দুটি x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে বিন্দুটির কোটি = 0 হবে।

$\therefore \dfrac{-4k+1}{k+1} = 0 \Rightarrow -4k+1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\dfrac{-10/4+3}{1/4+1}, 0)$

$= (\dfrac{-10+12}{1+4}, 0) = (\dfrac{2}{5}, 0)$

ΔACD এর ভরকেন্দ্র M এর স্থানাঙ্ক

$= (\dfrac{3+5-10}{3}, \dfrac{1+1-4}{3}) = (\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-2}{3})$

$\therefore$ BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}|(1-\dfrac{2}{5})(0+\dfrac{2}{3})-(0-0)(\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3})|$

$= \dfrac{1}{2}|(-\dfrac{3}{5})(\dfrac{2}{3})-0| = \dfrac{1}{5}$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা III D

1(a) A(2, 3) এবং B(–1, 4) দুইটি স্থির বিন্দু। A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোন বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১; ব.'১২; ঢা.', কু.,য.'১৪]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু।

$\therefore PA = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

$PB = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$

প্রশ্নমতে, $PA : PB = 2 : 3 \Rightarrow \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow 9\,PA^2 = 4\,PB^2$

$\Rightarrow 9\{(x-2)^2+(y-3)^2\}$
$= 4\,(x+1)^2+(y-4)^2\}$

$\Rightarrow 9(x^2-4x+4+y^2-6y+9)$
$= 4\,(x^2+2x+1+y^2-8y+16)$

$\Rightarrow 9x^2-36x+9y^2-54y+117$
$= 4x^2+4y^2+8x-32y+68$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2-44x-22y+49 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

1(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x , y), B(– 6, – 3) এবং C(6 , 3). A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোন বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+y^2 = 25$ [চ.'০২]

সমাধান ঃ BC এর মধ্যবিন্দু D (ধরি) এর স্থানাঙ্ক =

$(\dfrac{-6+6}{2}, \dfrac{-3+3}{2}) = (0, 0)$

$\therefore$ AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2+y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক।

$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = 5$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 25$ (Showed)

1(c) A(0 , 4) ও B(0 , 6) দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৩ ; ঢা.'১০;রা.'১৪]

(b) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান ঃ

$\delta_{CDA} = (5+10)(-4-1)-(1+4)(-10-3)$
$= -75+65 = -10$

$\delta_{CDB} = (5+10)(-4-0)-(1+4)(-10-1)$
$= -60+55 = -5$

$\therefore \dfrac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \dfrac{-10}{-5} = \dfrac{2}{1} > 0$

$\therefore$ C ও D , AB এর একই পাশে অবস্থিত এবং AB কে CD রেখাটি 2 : 1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

(c) AD রেখাংশকে x-অক্ষ L বিন্দুতে এবং ΔACD এর ভরকেন্দ্র M হলে BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ AD রেখাংশকে ক k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\dfrac{k\times(-10)+1\times 3}{k+1}, \dfrac{k\times(-4)+1\times 1}{k+1})$

$= (\dfrac{-10k+3}{k+1}, \dfrac{-4k+1}{k+1})$

এ বিন্দুটি x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে বিন্দুটির কোটি = 0 হবে।

$\therefore \dfrac{-4k+1}{k+1} = 0 \Rightarrow -4k+1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\dfrac{-10/4+3}{1/4+1}, 0)$

$= (\dfrac{-10+12}{1+4}, 0) = (\dfrac{2}{5}, 0)$

ΔACD এর ভরকেন্দ্র M এর স্থানাঙ্ক

$= (\dfrac{3+5-10}{3}, \dfrac{1+1-4}{3}) = (\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-2}{3})$

$\therefore$ BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}|(1-\dfrac{2}{5})(0+\dfrac{2}{3})-(0-0)(\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3})|$

$= \dfrac{1}{2}|(-\dfrac{3}{5})(\dfrac{2}{3})-0| = \dfrac{1}{5}$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা III D

1(a) A(2, 3) এবং B(–1, 4) দুইটি স্থির বিন্দু। A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোন বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১; ব.'১২; ঢা.', কু.,য.'১৪]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু।

$\therefore PA = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

$PB = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$

প্রশ্নমতে, $PA : PB = 2 : 3 \Rightarrow \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow 9\,PA^2 = 4\,PB^2$

$\Rightarrow 9\{(x-2)^2+(y-3)^2\}$
$= 4\,(x+1)^2+(y-4)^2\}$

$\Rightarrow 9(x^2-4x+4+y^2-6y+9)$
$= 4\,(x^2+2x+1+y^2-8y+16)$

$\Rightarrow 9x^2-36x+9y^2-54y+117$
$= 4x^2+4y^2+8x-32y+68$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2-44x-22y+49 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

1(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x , y), B(– 6, – 3) এবং C(6 , 3). A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোন বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+y^2 = 25$ [চ.'০২]

সমাধান ঃ BC এর মধ্যবিন্দু D (ধরি) এর স্থানাঙ্ক =

$(\dfrac{-6+6}{2}, \dfrac{-3+3}{2}) = (0, 0)$

$\therefore$ AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2+y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক।

$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = 5$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 25$ (Showed)

1(c) A(0 , 4) ও B(0 , 6) দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৩ ; ঢা.'১০;রা.'১৪]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

$\therefore\ PA^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$
$= x^2 + y^2 - 8y + 16$

$PB^2 = (x-0)^2 + (y-6)^2$
$= x^2 + y^2 - 12y + 36$

$AB^2 = (0-0)^2 + (4-6)^2 = 4$

প্রশ্নমতে, P এর সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore\ PA^2 + PB^2 = AB^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 + x^2 + y^2 - 12y + 36 = 4$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 20y + 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

1(d) একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদান (2 , – 1) বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুটি $A(2, -1)$ এবং $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

$\therefore\ PA = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = |4|$

$\therefore\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

2. (a) y-অক্ষ হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব মূলবিন্দু হতে তার দূরত্বের অর্ধেক। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[প্র.ভ.প.'০৪; কু.'১২]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x, y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

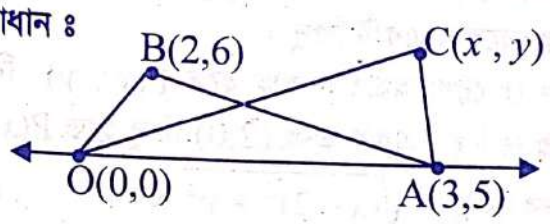
$\therefore$ y-অক্ষ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ একক এবং মূলবিন্দু (0,0) হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, $|x| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 4|x|^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 \quad \therefore y^2 = 3x^2$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

2 (b) B(2 , 6) ও C(x , y) বিন্দু দুইটি O(0 , 0) ও A(3 , 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। C(x , y) বিন্দুটি এমন একটি বিন্দু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য $\Delta OAC = 2\Delta OAB$. ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



$\delta_{OAB} = (0-3)(5-6) - (0-5)(3-2)$
$= 3 + 5 = 8$

$\delta_{OAC} = (0-3)(5-y) - (0-5)(3-x)$
$= -15 + 3y + 15 - 5x = 3y - 5x$

প্রশ্নমতে, $\Delta OAC = 2\Delta OAB$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|\delta_{OAC}| = 2.\ \frac{1}{2}|\delta_{OAB}|$

$\Rightarrow |\delta_{OAC}| = 2.\ |\delta_{OAB}|$

B ও C বিন্দু দুইটি O ও A বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত বলে δ_{OAB} ও δ_{OAC} একই চিহ্নযুক্ত হবে।

$\therefore\ \delta_{OAC} = 2\ .\delta_{OAB} \Rightarrow 3y - 5x = 2 \times 8$

$\therefore\ 5x - 3y + 16 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

3. k এর যেকোন মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ($2ak$, ak^2) . P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore\ 2ak = x \Rightarrow k = \frac{x}{2a}$ এবং

$ak^2 = y \Rightarrow a(\frac{x}{2a})^2 = y\ \ [\because k = \frac{x}{2a}]$

$\Rightarrow a\frac{x^2}{4a^2} = y$

$\therefore\ x^2 = 4ay$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

4. (a , b) বিন্দুগামী একটি পরিবর্তনশীল সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. (2 , 0) বিন্দু হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব $x = 0$ রেখা হতে তার দূরত্বের তিনগুণ। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা '০৯]

সমাধান ঃ মনে করি, $P(x , y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু ।

$\therefore$ $x = 0$ রেখা অর্থাৎ y-অক্ষ হতে $P(x , y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ একক এবং (2,0) বিন্দু হতে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ একক (১)

প্রশ্নমতে, $3|x| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 9|x|^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\Rightarrow 9x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\therefore y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ। (১)

6. t পরিবর্তনশীল হলে দেখাও যে, P(t + 2 , 3t) বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $3x - y = 6$.

প্রমাণ ঃ ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x , y).

$\therefore$ $t + 2 = x \Rightarrow t = x - 2$ এবং (১)

$3t = y \Rightarrow 3(x-2) = y$ [$\because t = x - 2$]

$\therefore$ $3x - y = 6$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন :

7. ABP ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(a, b)$, $B(0, b)$, $P(x, y)$ এবং $O(0,0)$ মূলবিন্দু।

(a) θ পরিবর্তনশীল হলে, $P(1 + 2\cos\theta , -2 + 2\sin\theta)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ $1 + 2\cos\theta = x \Rightarrow 2\cos\theta = x - 1$ এবং

$-2 + 2\sin\theta = y \Rightarrow 2\sin\theta = y + 2$

$\therefore$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

(b) ABO ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G, AB এর মধ্যবিন্দু D এবং $\angle GPD = 90^0$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ABO ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $G \equiv (\frac{a}{3}, \frac{2b}{3})$

AB এর মধ্যবিন্দু $D \equiv (\frac{a}{2}, b)$

$\therefore$ $PG^2 = (x - \frac{a}{3})^2 + (y - \frac{2b}{3})^2$

$= x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{a^2}{9} + y^2 - \frac{4b}{3}y + \frac{4b^2}{9}$

$PD^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + (y - b)^2$

$= x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - 2by + b^2$

$DG^2 = (\frac{a}{2} - \frac{a}{3})^2 + (b - \frac{2b}{3})^2 = (\frac{a}{6})^2 + (\frac{b}{3})^2$

$= \frac{a^2}{36} + \frac{b^2}{9}$

প্রশ্নমতে, $\angle GPD = 90^0$

$\therefore$ $PG^2 + PD^2 = DG^2$

$\Rightarrow x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{a^2}{9} + y^2 - \frac{4b}{3}y + \frac{4b^2}{9} +$

$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - 2by + b^2 = \frac{a^2}{36} + \frac{b^2}{9}$

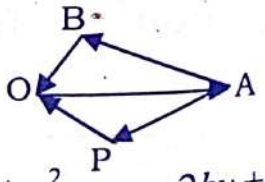
$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - (\frac{2a}{3} + a)x - (\frac{4b}{3} + 2b)y +$

$(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36})a^2 + (\frac{4}{9} + 1 - \frac{1}{9})b^2 = 0$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - \frac{5a}{3}x - \frac{10b}{3}y + \frac{1}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 = 0$

$\therefore$ $6(x^2 + y^2) - 5ax - 10by + a^2 + 4b^2 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

(c) B ও P বিন্দু OA এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\Delta OAP = 3.\Delta OAB$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।



উ: $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$

সমাধান ঃ $\delta_{OAP} = (0-a)(b-y) - (0-b)(a-x)$

$= -ab + ay + ab - bx = ay - bx$

$\delta_{OAB} = (0-a)(b-b)-(0-b)(a-0)$
$= 0 + ab = ab$

প্রশ্নমতে, $\Delta OAP = 3.\Delta OAB$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|\delta_{OAP}| = 3.\frac{1}{2}|\delta_{OAB}|$

$\Rightarrow |\delta_{OAP}| = 3.|\delta_{OAB}|$

B ও P বিন্দু দুইটি OA এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত বলে δ_{OAP} ও δ_{OAB} বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

$\therefore \delta_{OAP} = -3.\delta_{OAB}$

$\Rightarrow ay - bx = -3ab$

$\therefore ay - bx + 3ab = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত) :

1. কোন বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, \sqrt{3})$ হলে বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক– [JH,IU 07-08; CU 05-06; KU 03-04]

Sol^n.: $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}$

$= 180° - \tan^{-1}\sqrt{3} = 180° - 30° \therefore (2, 120°)$

2. (1, 4) এবং (9 , – 12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশ অন্তঃস্থভাবে যে বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হয় তার স্থানাংক– [DU, Jt.U 06-07, RU 07-08, 06-07; KUET 05-06]

Sol^n.: স্থানাংক $= (\frac{3+45}{8}, \frac{12-60}{8}) = (6,-6)$

3. (2, –4) ,(–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে– [RU 07-08]

Sol^n.: অনুপাত $= \frac{-4-0}{0-6} = \frac{2}{3}$

4. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,2) , (3,4) ও (5,6) হলে উক্ত ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র – [RU 07-08]

Sol^n.: $G = (\frac{2+3+5}{3}, \frac{2+4+6}{3}) = (\frac{10}{3}, 4)$

5. (x, y) , (2, 3) এবং (5, 1) একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে– [DU 05-06]

Sol^n. $(x-2)(3-1)-(y-3)(2-5) = 0$

$\Rightarrow 2x - 4 + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 13 = 0$

6. (2, 2–2x),(1,2) এবং (2,b–2x) বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, এর মান – [DU 06-07]

Sol^n.: $(2-1)(2-b+2x)-(2-2x-2)(1-2) = 0$

$\Rightarrow 2 - b + 2x - 2x = 0 \Rightarrow b = 2$

7. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ (–1, –2) , (2,5), (3,10) হলে, তার ক্ষেত্রফল– [DU 03-04]

Sol^n.: $\frac{1}{2}|(-3)(-5)-(-7)(-1)| = \frac{1}{2}(8) = 4$

8. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ (–4, 3) , (–1, –2), (3,–2) হলে, তার ক্ষেত্রফল– [Jt.U 08-09]

Sol^n.: $\frac{1}{2}|(-3).0 - 5(-4)| = \frac{1}{2}.20 = 10$

9. ABCD সামান্তরিকের A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1,2), (3,4), (1,0) হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল – [RU07-08

Sol^n.: সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2.\frac{1}{2}|\{(-2).4-(-2).2| = |-8+4| = 4$ বর্গ একক।

10. A(2,4), B(2,8) এবং C বিন্দুদ্বয় সমবাহু ত্রিভুজ গঠন কর । AB এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু , C তার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [RU 06-07]

Sol^n.: দুইটি শীর্ষের ভুজ সমান বলে C এর কোটি $= \frac{4+8}{2} = 6$ এবং ভুজ $= 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}|4-8| = 2 \pm 2\sqrt{3}$.

আবার, $2 > 0$ এবং বিন্দুটি মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে বিধায় C এর স্থানাঙ্ক $(2+\sqrt{3}, 6)$.

11. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ 2x + y =12, x – 2y = 1 এবং 4x –3y = 4 . ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [RU 05-06; KU 03-04]

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে শীর্ষত্রয় (5,2),(1,0), (4,4). $\therefore \Delta = \frac{1}{2}|4.(-4) - 2.(-3)| = 5$ বর্গ একক।

MODE 3 times 1 EQN 2 2 = 1 = 1

2 = 1 = – 2 = 1 = x =5 =

y =2

12. a এর কোন মানের জন্য $(a^2, 2)$, $(a, 1)$ এবং $(0,0)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে? **[BUET 05-06]**

Sol^n. $(a^2 - a)(1-0) - (2-1)(a-0) = 0$
$\Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2$

প্রশ্নমালা III E

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(a) ঢাল (m) ঃ **1.** একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল, $m = \tan\theta$

2. একটি সরলরেখা (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

3. একটি সরলরেখা মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1}{x_1}$.

(b) একটি রেখার সমীকরণ ঃ

1. y-অক্ষের, $x = 0$. **2.** x-অক্ষের, $y = 0$

3. y-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x- অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $x = a$.

4. x -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y = b$.

5. m ঢাল বিশিষ্ট এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y = mx$.

6. একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

7. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

8. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

$\Rightarrow (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$.

$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$

9. x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

10. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0$

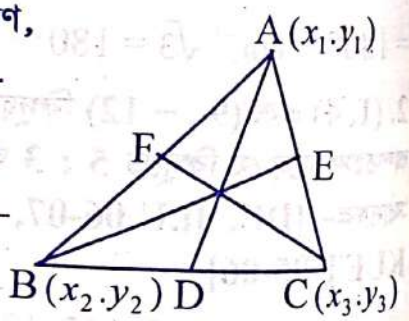
11. মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. AD মধ্যমার সমীকরণ,

$(2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y = (2y_1 - y_2 - y_3)x_1 - (2x_1 - x_2 - x_3)y_1$



2. $ax + by + c = 0$ দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ $= -c/a$, y -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/b$; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $= \sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}$; অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{c^2}{2|ab|}$.

3. একটি রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (α, β) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে তার সমীকরণ, $\dfrac{x}{2\alpha} + \dfrac{y}{2\beta} = 1$

4. মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, যেখানে $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

5. $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$,

12. a এর কোন মানের জন্য $(a^2, 2)$, $(a, 1)$ এবং $(0,0)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে? **[BUET 05-06]**

Sol^n. $(a^2 - a)(1-0) - (2-1)(a-0) = 0$
$\Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2$

প্রশ্নমালা III E

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(a) ঢাল (m) ঃ **1.** একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল, $m = \tan\theta$

2. একটি সরলরেখা (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

3. একটি সরলরেখা মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \dfrac{y_1}{x_1}$.

(b) একটি রেখার সমীকরণ ঃ

1. y-অক্ষের, $x = 0$. **2.** x-অক্ষের, $y = 0$

3. y-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x- অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $x = a$.

4. x -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y = b$.

5. m ঢাল বিশিষ্ট এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y = mx$.

6. একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

7. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

8. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

$\Rightarrow (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$.

$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$

9. x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

10. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0$

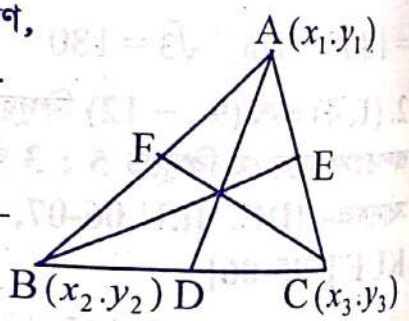
11. মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. AD মধ্যমার সমীকরণ,

$(2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y = (2y_1 - y_2 - y_3)x_1 - (2x_1 - x_2 - x_3)y_1$



2. $ax + by + c = 0$ দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ $= -c/a$, y -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/b$; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $= \sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}$; অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{c^2}{2|ab|}$.

3. একটি রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (α, β) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে তার সমীকরণ, $\dfrac{x}{2\alpha} + \dfrac{y}{2\beta} = 1$

4. মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, যেখানে $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

5. $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$,

$a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots(2)$ ও

$a_3x+b_3y+c_3=0 \cdots(3)$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =

$$\frac{\{c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\}^2}{2|(a_2b_3-a_3b_2)(a_1b_3-a_3b_1)(a_1b_2-a_2b_1)|}$$

6. (1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দুগামী এবং (3) এর সমান্তরাল ও লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ যথাক্রমে $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_2b_3-a_3b_2}$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}$$

1(i) (a) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: নির্ণেয় ঢাল = $\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) (3, −4) ও (4, −5) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রমকারী সরললেখার ঢাল = $\frac{-4-(-5)}{3-4}=\frac{1}{-1}=-1$

(c) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।

সমাধান: x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $y=-4$

(d) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত।

সমাধান: y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $x=5$

(e) x –অক্ষের সমান্তরাল ও (3, −4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x –অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y=k$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$y=k$ রেখাটি (3, −4) বিন্দুগামী।

$\therefore\ -4=k \Rightarrow k=-4.$

k এর মান বসিয়ে পাই, : $y=-4$ (Ans.)

(f) (a, b) এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করঃ

(g) (a, b) এবং $(a+b, a-b)$

সমাধান ঃ (a) (a, b) এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-a}{a+a}=\frac{y-b}{b+b}\Rightarrow\frac{x-a}{2a}=\frac{y-b}{2b}$

$\Rightarrow bx-ab=ay-ab \Rightarrow bx-ay=0$

$[(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=$

$(y_1-y_2)x_1-(x_1-x_2)y_1$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow (2b-a)x+by=2ab-a^2+b^2$

$\therefore\ (2b-a)x+by+a^2-2ab-b^2=0$

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদাংশ 5 একক।

সমাধান: ধরি, $\theta=\sin^{-1}(5/13)\Rightarrow\sin\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$\Rightarrow\ \tan\theta=\frac{5/13}{\sqrt{1-25/169}}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m=\frac{5}{12}$ এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c=5$ একক।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y=mx+c$

$\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+5 \Rightarrow 12y=5x+60.$ (Ans.)

3. (a) A(1, 1) , B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৬,'০৮;ঢা.'১১;কু.'১৪; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. তাহলে, $D\equiv(\frac{1+3}{2},\frac{1+4}{2})=(2,\frac{5}{2})$ এবং

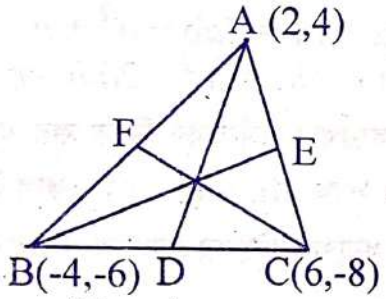
$E\equiv(\frac{1+5}{2},\frac{1-2}{2})=(3,-\frac{1}{2})$.

$\therefore$ DE রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-2}{2-3}=\dfrac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{2y-5}{6} \Rightarrow 6x-12=-2y+5$

$\therefore\ 6x+2y-17=0$ (Ans.)

3(b) (2 , 4) , (– 4 , – 6) এবং (6 , – 8) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । ত্রিভুজটির মধ্যমাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭] সমাধান ঃ



ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, 4), B(−4, −6) ও C(6 , − 8) এবং BC, CA , AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F.

$\therefore\ D\equiv(\dfrac{-4+6}{2},\dfrac{-6-8}{2})=(1,-7)$

$E\equiv(\dfrac{6+2}{2},\dfrac{-8+4}{2})=(4,-2)$

$F\equiv(\dfrac{2-4}{2},\dfrac{4-6}{2})=(-1,-1)$

$\therefore$ AD মধ্যমার সমীকরণ, $\dfrac{x-2}{2-1}=\dfrac{y-4}{4+7}$

$\Rightarrow 11x-22=y-4 \Rightarrow 11x-y-18=0$

BE মধ্যমার সমীকরণ, $\dfrac{x+4}{-4-4}=\dfrac{y+6}{-6+2}$

$\Rightarrow -4x-16=-8y-48$

$\Rightarrow -4x+8y+32=0 \Rightarrow x-2y-8=0$

CF মধ্যমার সমীকরণ, $\dfrac{x-6}{6+1}=\dfrac{y+8}{-8+1}$

$\Rightarrow -x+6=y+8 \Rightarrow x+y+2=0$

[MCQ এর জন্য, AD মধ্যমার সমীকরণ, $(8+6+8)x-(4+4-6)y=22\times2-2\times4=36$
$\Rightarrow 11x-y-18=0$]

3(c) A(h , k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর এবং B(k , h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি.'০৯; ঢা.,চ.'১২,'১৪; ব.'১০; রা.,য.'১১; সি.,য.'১৪]

সমাধান ঃ A(h , k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত । $\therefore\ 6h-k=1 \cdots\cdots (1)$

আবার, B(k , h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত । $\therefore\ 2k-5h=5 \cdots\cdots (2)$

$(1)\times2+(2) \Rightarrow 12h-5h=7 \Rightarrow h=1$

(1) হতে আমরা পাই, $6.1-k=1 \Rightarrow k=5$

$\therefore\ A\equiv(1,5)$ এবং $B\equiv(5,1)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-1}{1-5}=\dfrac{y-5}{5-1}$

$\Rightarrow 4x-4=-4y+20 \Rightarrow 4x+4y=24$

$\therefore\ x+y-6=0$ (Ans.)

3(d) যদি (a, b) , (a',b') , $(a-a',b-b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab'=a'b$. [কু.'০৯]

প্রমাণ: ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(a, b) , $B(a',b')$, $C(a-a',b-b')$. বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে,

AB রেখার ঢাল = AC রেখার ঢাল

$\Rightarrow \dfrac{b-b'}{a-a'}=\dfrac{b-b+b'}{a-a+a'} \Rightarrow \dfrac{b-b'}{a-a'}=\dfrac{b'}{a'}$

$\Rightarrow a'b-a'b'=ab'-a'b' \quad \therefore\ a'b'=ab'$

এখন, A(a, b) , $B(a',b')$ বিন্দুগামী রেখার সমীকণ

$\dfrac{x-a}{a-a'}=\dfrac{y-b}{b-b'} \Rightarrow (b-b')x-ab+ab'$

$=(a-a')y-ab+a'b$

$\Rightarrow (b-b')x-(a-a')y=0 \quad [\because a'b'=ab']$

যেহেতু সমীকরণটি ধ্রুবপদ মুক্ত, সুতরাং বিন্দুত্রয়ের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

4. (a) $x-4=0$, $y-5=0$, $x+3=0$ এবং $y+2=0$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন চর্তুভুজের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; চ.'০৫; কু.'০৯ ; ব.'১৪]

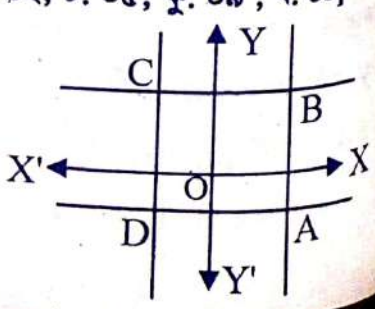
সমাধান :

ধরি, $AB\equiv x=4$

$DC\equiv x=-3$

$BC\equiv y=5$ এবং

$DA\equiv y=-2$ রেখা



চারটি ABCD চর্তুভুজের বাহু।

AB ও AD বাহুদ্বয় A(4 , − 2) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(4,5) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(−3,5) বিন্দুতে, CD ও DA বাহুদ্বয় D(−3, −2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+3}=\frac{y+2}{-2-5}$

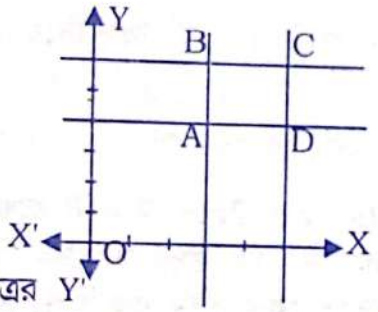
$\Rightarrow -x+4=y+2 \Rightarrow x+y-2=0$

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4+3}=\frac{y-5}{5+2}$

$\Rightarrow x-4=y-5 \Rightarrow x-y+1=0$

$\therefore$ কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ, $x-y+1=0, x+y-2=0$

4(b) $x=4$, $x=8$, $y=6$ এবং $y=10$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২]



সমাধান : ধরি,

$AB \equiv x=4$

$D \equiv x=8$

$BC \equiv y=10$ এবং

$AD \equiv y=6$ রেখা

চারটি ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহু।

AB ও AD বাহুদ্বয় A(4 , 6) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(4,10) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(8,10) বিন্দুতে, CD ও DA বাহুদ্বয় D(8, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ $\frac{x-4}{4-8}=\frac{y-6}{6-10}$

$\Rightarrow x-4=y-6 \Rightarrow x-y+2=0$

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4-8}=\frac{y-10}{10-6}$

$\Rightarrow x-4=-y+10 \Rightarrow x+y-14=0$

$\therefore$ কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ, $x-y+2=0, x+y-14=0$

5. (a) $3x+\sqrt{3}y+2=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x+\sqrt{3}y+2=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore \frac{\cos\alpha}{3}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{-p}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{-3p}{2}$ এবং $\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}p}{2}$

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\frac{-\sqrt{3}p}{2})^2+(\frac{-3p}{2})^2$

$\Rightarrow 1=\frac{3p^2}{4}+\frac{9p^2}{4} \Rightarrow 12p^2=4$

$\Rightarrow p^2=\frac{1}{3} \therefore p=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

(b) $3x-4y=12$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এবং α এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প '০৪]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x-4y=12$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore \frac{\cos\alpha}{3}=\frac{\sin\alpha}{-4}=\frac{p}{12}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{3p}{12}=\frac{p}{4}$ এবং $\sin\alpha=\frac{-p}{3}$

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\frac{p}{4})^2+(\frac{-p}{3})^2$

$\Rightarrow 1=\frac{p^2}{16}+\frac{p^2}{9} \Rightarrow \frac{p^2(9+16)}{16.9}=1$

$\Rightarrow p^2=\frac{144}{25} \therefore p=\frac{12}{5}$ (Ans.)

আবার, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-p/3}{p/4}=\frac{-4}{3}$

$\therefore \alpha=\tan^{-1}(\frac{-4}{3})=2\pi-\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ (Ans.)

6. (a) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α , β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪; দি.'১১]

সমাধান: ধরি, অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এরূপ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{\pm a}=1$

$\Rightarrow x\pm y=a \Rightarrow x+y=a$ অথবা, $x-y=a$

রেখাটি (α , β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$a=\alpha+\beta$ অথবা, $a=\alpha-\beta$

যখন O মূলবিন্দু। [কু.'০২; য.'০৪,'১২; ব.'০৫; ; রা., চ., দি.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots(1)$

এখানে, $a = OA$ এবং $b = OB$

প্রশ্নমতে, $OA - OB = 2 \Rightarrow a - b = 2$

$\Rightarrow a = b + 2 \cdots\cdots (2)$

(1) রেখাটি (3 ,2) বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow \frac{3}{b+2}+\frac{2}{b}=1$ [$\because a = b+2$]

$\Rightarrow \frac{3b+2b+4}{(b+2)b}=1 \Rightarrow b^2+2b=5b+4$

$\Rightarrow b^2-3b-4=0 \Rightarrow (b-4)(b+1)=0$

$\therefore$ $b = 4$ অথবা, $b = -1$

$(2) \Rightarrow a = 4+2 = 6$, যখন $b = 4$

অথবা, $a = -1+2 = 1$, যখন $b = -1$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow 2x+3y=12$

অথবা, $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1 \Rightarrow x-y=1$

8(d) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$.

[য. '০২; ব. '০২; সি.'০৩; কু.'০৭; ঢা.'১১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\Rightarrow \frac{x}{p/\cos\alpha}+\frac{y}{p/\sin\alpha}=1 \cdots\cdots (1)$

$\therefore$ (1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে $A(p/\cos\alpha, 0)$ এবং $B(0, p/\sin\alpha)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{p}{2\cos\alpha}, \frac{p}{2\sin\alpha})$

ধরি AB এর মধ্যবিন্দুর সেটের যেকোন একটি উপাদান (x, y).

$\therefore x=\frac{p}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{p}{2x}$ এবং

$y=\frac{p}{2\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{p}{2y}$

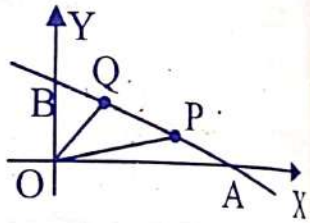
$\therefore \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=(\frac{p}{2x})^2+(\frac{p}{2y})^2$

$\Rightarrow 1=\frac{p^2}{4x^2}+\frac{p^2}{4y^2} \Rightarrow \frac{p^2(y^2+x^2)}{4x^2y^2}=1$

$\therefore p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$. (Showed)

9. $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের ত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৩, '০৭; ব.'০৭; য.'০৮; রা.'১০]

সমাধান: প্রদত্ত রেখা



$x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow x + 3y = 12$

$\Rightarrow \frac{x}{12}+\frac{y}{4}=1\cdots(1)$

$\therefore$ (1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে (ধরি) $A(12, 0)$ ও $B(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দু P ও Q এবং O মূলবিন্দু।

$\therefore P \equiv (\frac{1\times0+2\times12}{1+2}, \frac{1\times4+2\times0}{1+2}) = (8, \frac{4}{3})$

$Q \equiv (\frac{2\times0+1\times12}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}) = (4, \frac{8}{3})$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ, $y=\frac{4/3}{8}x$

$\Rightarrow y=\frac{1}{6}x \Rightarrow x=6y$ এবং

$\therefore$ OQ রেখার সমীকরণ, $y=\frac{8/3}{4}x$

$\Rightarrow y=\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x=3y$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $x=6y$ ও $2x=3y$

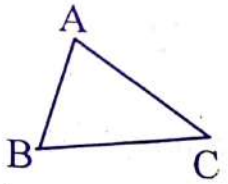
10. (a) $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৩]

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv x + 2y - 5 = 0 \cdots(1)$,

$BC \equiv 2x + y - 7 = 0 \cdots (2)$,

$CA \equiv x - y + 1 = 0 \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু ,

$A \equiv (\frac{2-5}{-1-2}, \frac{-5-1}{-2-1}) = (1, 2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$B \equiv (\frac{-14+5}{1-4}, \frac{-10+7}{1-4}) = (3, 1)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$C \equiv (\frac{1-7}{-2-1}, \frac{-7-2}{-2-1}) = (2, 3)$

$\therefore \ \delta_{ABC} = (1-3)(1-3) - (2-1)(3-2)$
$= 4 - 1 = 3$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} | \delta_{ABC} | = \frac{3}{2}$ বর্গ একক

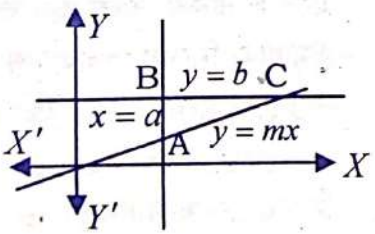
$\therefore$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}$ বর্গ একক।

$$[\Delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^2}{2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9^2}{2 \times 27} = \frac{3}{2}]$$

10(b) দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b-ma)^2$ বর্গ একক।

[য. '০৫; রা.'০৮; কু.'১২; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,



$AB \equiv x = a \cdots (1)$,

$BC \equiv y = b \cdots (2)$,

$AC \equiv y = mx \cdots (3)$

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $A \equiv (a, ma)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (a, b)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $C \equiv (\frac{b}{m}, b)$

$\therefore \ \delta_{ABC} = (a - a)(b - b) - (ma - b)(a - \frac{b}{m})$

$= -(ma - b)\frac{ma - b}{m} = -\frac{(b - ma)^2}{m}$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} | -\frac{(b - ma)^2}{m} |$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক। Showed)

11(a) দেখাও যে, (–3, 6) বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোন রেখাংশকে $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি সমদ্বিখণ্ডিত করে।

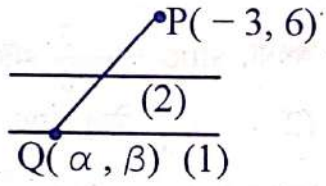
[সি.'০১; য.'০৫; ঢা.'০৯; চ.'১১; দি.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$x - 2y - 5 = 0 \cdots (1)$ ও

$x - 2y + 5 = 0 \cdots (2)$

এবং বিন্দুটি $P(-3, 6)$



(2) রেখার উপর $Q(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি বিন্দু নেই। তাহলে, $\alpha - 2\beta - 5 = 0 \cdots \cdots (3)$

এখন ইহা প্রমাণ করা যথেষ্ট যে , PQ এর মধ্যবিন্দু $(\frac{-3+\alpha}{2}, \frac{6+\beta}{2})$, $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

(1) এর বামপক্ষ $= x - 2y + 5$

$= \frac{-3+\alpha}{2} - 2\frac{6+\beta}{2} + 5$

$= \frac{1}{2}(\alpha - 3 - 12 - 2\beta + 10)$

$= \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta - 5) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$ [(3) দ্বারা]

$\therefore$ PQ এর মধ্যবিন্দু $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

(3) হতে পাই, $y = b$.

11(b) মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[মা.বো.'০৮]

সমাধান: নির্ণেয় রেখার সমীকরণ

$x \cos 120° + y \sin 120° = 5$

$\Rightarrow x(-\frac{1}{2}) + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \Rightarrow -x + \sqrt{3}\, y = 10$

$\therefore\ x - \sqrt{3}\, y + 10 = 0$ (Ans.)

12 (a) (2 , – 1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল – $\frac{3}{4}$. এ রেখার উপর (2 , – 1) বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore\ \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

(2 , – 1) বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, $\frac{x-2}{\cos\alpha} = \frac{y+1}{\sin\alpha} = 15$

$\therefore\ x - 2 = 15\cos\alpha \Rightarrow x = 15\cos\alpha + 2$ এবং

$y + 1 = 15\sin\alpha \Rightarrow y = 15\sin\alpha - 1$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 15 \times -\frac{4}{5} + 2 = -12 + 2 = -10$ এবং

$y = 15 \times \frac{3}{5} - 1 = 9 - 1 = 8$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

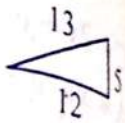
$x = 12 + 2 = 14$ এবং $y = -9 - 1 = -10$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (–10, 8) ও (14 , –10)

(b) A (3 , – $\frac{7}{2}$) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. রেখাটির উপরস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যেন AP = $\frac{13}{2}$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore\ \tan\alpha = \frac{5}{12}$



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

$\therefore$ A(3 , – $\frac{7}{2}$) বিন্দু হতে AP = $\frac{13}{2}$ একক দূরে অবস্থিত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে

$\frac{x-3}{\cos\alpha} = \frac{y+7/2}{\sin\alpha} = \frac{13}{2}$

$\therefore\ x - 3 = \frac{13}{2}\cos\alpha \Rightarrow x = \frac{13}{2}\cos\alpha + 3$ এবং

$y + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}\sin\alpha \Rightarrow y = \frac{13}{2}\sin\alpha - \frac{7}{2}$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ এর জন্য,

$x = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} + 3 = 6 + 3 = 9$ এবং

$y = \frac{13}{2} \times \frac{5}{13} - \frac{7}{2} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$

$\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ এর জন্য, $x = -6 + 3 = -3$ এবং $y = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -6$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (9, – 1) ও (–3 , – 6)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

13. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ ছেদ করে।

সমাধান: নির্ণেয় রেখার ঢাল, m= cot(± 30°) (১)

$= \pm \cot 30° = \pm\sqrt{3}$ এবং

y-অক্ষের ছেদক অংশ, c = 5 একক।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{3}\,x + 5$ (Ans.) (২)

14. একটি সরলরেখা (6 , – 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের গুণফল 1 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, $ab=1 \Rightarrow b=\frac{1}{a} \cdots\cdots (2)$ (১)

(1) রেখাটি $(6, -1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{6}{a}+\frac{-1}{b}=1 \Rightarrow \frac{6}{a}-a=1 \quad [\because \frac{1}{b}=a]$ (১)

$\Rightarrow 6-a^2=a \Rightarrow a^2+a-6=0$

$\Rightarrow (a+3)(a-2)=0 \therefore a=2, -3$ (১)

$\therefore b=\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{2}+2y=1 \Rightarrow x+4y=2$

অথবা, $\frac{x}{-3}-3y=1 \Rightarrow x+9y+3=0$ (১)

15. একটি সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি ও অন্তরফল যথাক্রমে 9 ও 5 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, $a+b=9 \Rightarrow b=9-a \cdots (2)$ (১)

এবং $|a-b|=5 \Rightarrow a-b=\pm 5$

$\Rightarrow a-9+a=\pm 5$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow 2a=12$ বা, $4 \therefore a=6$ বা, 2

$\therefore$ (2) হতে পাই, $b=9-6=3$, যখন $a=6$

$b=9-2=7$, যখন $a=2$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow x+2y=6$

অথবা, $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1 \Rightarrow 7x+2y=14$ (১)

16. $2x+y=3$ ও $3x-5y=-4$ রেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: x-অক্ষের সমীকরণ, $y=0$ (১)

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv 2x+y-3=0 \cdots (1)$,

$AC \equiv 3x-5y+4=0 \cdots (2)$

$BC \equiv y=0 \cdots (3)$,

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$A \equiv (\frac{4-15}{-10-3}, \frac{-9-8}{-10-3})=(\frac{11}{13}, \frac{17}{13})$ (১)

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু, $B \equiv (\frac{3}{2}, 0)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু, $C \equiv (-\frac{4}{3}, 0)$

$$\therefore \delta_{ABC}=\begin{vmatrix} 11/13 & 17/13 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (১)

$$=-\frac{17}{13}(\frac{3}{2}+\frac{4}{3})=-\frac{17}{13}\times\frac{17}{6}=-\frac{289}{78}$$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|-\frac{289}{78}|$ বর্গ একক

$=\frac{289}{156}$ বর্গ একক (Ans.) (১)

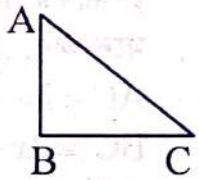
17. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x+2y=4$, $2x-y=3$ ও $x-y+2=0$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AB \equiv x+2y-4=0 \cdots (1)$,

$BC \equiv 2x-y-3=0 \cdots (2)$,

$CA \equiv x-y+2=0 \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$A \equiv (\frac{4-4}{-1-2}, \frac{-4-2}{-1-2})=(0, 2)$ (১)

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$B \equiv (\frac{-6-4}{-1-4}, \frac{-8+3}{-1-4})=(2, 1)$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$C \equiv (\frac{-2-3}{-2+1}, \frac{-3-4}{-2+1})=(5, 7)$

এখন, $AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ (১)

$BC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB^2 + BC^2 = 5 + 45$

$= 50 = CA^2$.

অতএব, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী যার $\angle B = 90^\circ$. (১)

২য় অংশ : ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$

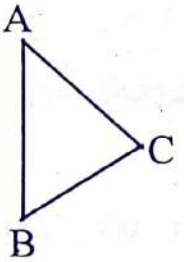
$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 3\sqrt{5})$ বর্গ একক $= 7\frac{1}{2}$ বর্গ একক (১)

$$[\ \Delta = \left|\frac{\{-4(-2+1) + 3(-1-2) + 2(-1-4)\}^2}{2(-2+1)(-1-2)(-1-4)}\right|$$

$$= \left|\frac{(4-9-10)^2}{2(-1)(-3)(-5)}\right| = \frac{15}{2}]$$

18. দেখাও যে, $2x + 7y = 14$ ও $2x - 7y = 14$ রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

সমাধান:



y-অক্ষের সমীকরণ , $x = 0$ (১)

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$AC \equiv 2x + 7y - 14 = 0 \cdots(1)$,

$BC \equiv 2x - 7y - 14 = 0 \cdots(2)$

$AB \equiv x = 0 \cdots(3)$,

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $A \equiv (0, 2)$ (১)

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু , $B \equiv (0, -2)$

$(1) + (2) \Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7$

$(1) \Rightarrow 14 + 7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু, $C \equiv (7, 0)$

এখন, $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ (১)

$BC = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

$CA = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $BC = \sqrt{53} = CA$

প্রদত্ত রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। (১)

19. $x + ay = a$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA = 3.OB হয়, যখন O মূলবিন্দু। P এর স্থানাঙ্ক (0 , – 9) হলে, AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $x + ay = a$

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{1} = 1 \cdots\cdots (1)$ (১)

$\therefore$ (1) রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A(a, 0) এবং B (0 ,1) বিন্দুতে ছেদ করে এবং OA = a ও OB = 1. (১)

প্রশ্নমতে, $OA = 3.OB \Rightarrow a = 3.1 = 3$ (১)

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3 , 0)

$\therefore$ AP এর সমীকরণ $\frac{x-3}{3-0} = \frac{y-0}{0+9}$

$\Rightarrow 9x - 27 = 3y \ \therefore 3x - y = 9$ (Ans.) (১)

20. t এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (t + 5 , 2t – 4) হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x , y)

$\therefore$ $t + 5 = x \Rightarrow t = x - 5 \ \therefore$ (1) এবং (১)

$2t - 4 = y \Rightarrow 2(x - 5) - 4 = y$ [(1) দ্বারা]

$\therefore$ $2x - y = 14$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। (১)

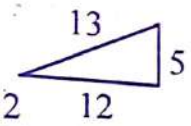
২য় অংশ ঃ $2x - y = 14 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-14} = 1$ (১)

$\therefore$ সঞ্চারপথটির x–অক্ষের খন্ডিতাংশ = 7 এবং y –অক্ষের খন্ডিতাংশ = –14. (১)

21. (– 1,1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. এ রেখার উপর (– 1 , 1) বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = \frac{5}{12}$



(১)

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ (১)

$(-1, 1)$ বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\frac{x+1}{\cos\alpha} = \frac{y-1}{\sin\alpha} = 26$ (১)

$\therefore x + 1 = 26\cos\alpha \Rightarrow x = 26\cos\alpha - 1$ এবং $y - 1 = 26\sin\alpha \Rightarrow y = 26\sin\alpha + 1$

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ এর জন্য,

$x = 26 \times \frac{12}{13} - 1 = 24 - 1 = 23$ এবং

$y = 26 \times \frac{5}{13} + 1 = 10 + 1 = 11$

$\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ এর জন্য, $x = -24 - 1 = -25$ এবং $y = -10 + 1 = -9$

$\therefore$ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(23, 11)$ ও $(-25, -9)$ (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

22. একটি সরলরেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A(a, 0) ও B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

(a) মূলবিন্দুগামী একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : মূলবিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ $y = x\tan 135^0$

$\Rightarrow y = x\tan(180^0 - 45^0)$

$\Rightarrow y = -x\tan 45^0 \Rightarrow y = -x \cdot 1$

$\therefore x + y = 0$

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A(a, 0) ও B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \cdots\cdots$ (i)

(i) A(a, 0) ও B(0, b) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{5\times 0 + 3\times a}{5+3}, \frac{5\times b + 3\times 0}{5+3}\right)$$

$$= \left(\frac{3a}{8}, \frac{5b}{8}\right)$$

প্রশ্নমতে, $\frac{3a}{8} = -4 \Rightarrow a = -\frac{32}{3}$ এবং

$\frac{5b}{8} = 3 \Rightarrow b = \frac{24}{5}$

(i) এ a ও b এর মান বসিয়ে পাই,

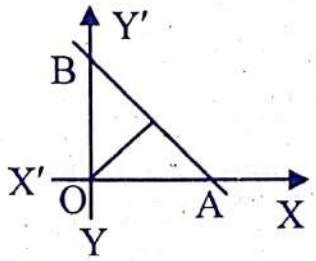
$$\frac{x}{-32/3} + \frac{y}{24/5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{-32} + \frac{5y}{24} = 1 \Rightarrow -9x + 20y = 96$$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $9x - 20y + 96 = 0$

(c) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান:



ধরি, রেখাটির সমীকরণ

$x\cos 45° + y\sin 45° = p$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = p \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} = 1 \cdots (1)$$

উত্তরঃ $9x - 20y + 96 = 0$

(1) রেখাটির x-অক্ষকে $A(\sqrt{2}p, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0, \sqrt{2}p)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রশ্নমতে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}(OA \times OB) = 8$

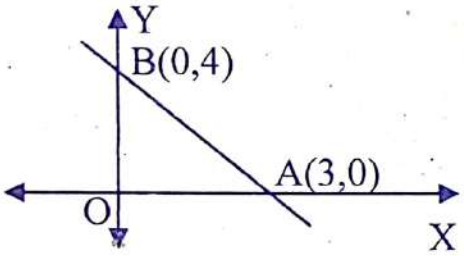
$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2}p \times \sqrt{2}p) = 16$

$\Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $x + y + 4\sqrt{2} = 0$

থবা, $x + y - 4\sqrt{2} = 0$

23.



(a) ΔAOB এর ভারকেন্দ্র G হলে AG নির্ণয় কর।

সমাধান : $G \equiv (\frac{0+0+3}{3}, \frac{0+4+0}{3}) = (1, \frac{4}{3})$

$AG = \sqrt{(3-1)^2 + (0-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{4 + \frac{16}{9}}$

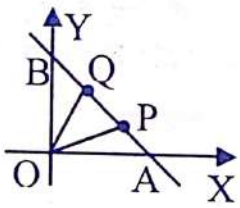
$= \sqrt{\frac{36+16}{9}} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ একক।

(b) P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করলে OP ও OQ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(\frac{1\times 0 + 2\times 3}{1+2}, \frac{1\times 4 + 2\times 0}{1+2})$

$= (2, \frac{4}{3})$



Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2\times 0 + 1\times 3}{2+1}, \frac{2\times 4 + 1\times 0}{2+1})$

$= (1, \frac{8}{3})$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ, $y = \frac{4/3}{2}x$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow 2x = 3y$ এবং

$\therefore$ OQ রেখার সমীকরণ, $y = \frac{8/3}{1}x$

$\Rightarrow y = \frac{8}{3}x \Rightarrow 3x = 8y$

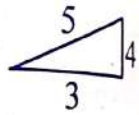
$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $2x = 3y$ ও $3x = 8y$

(c) AB রেখাস্থ A বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ AB রেখার ঢাল $= \frac{4-0}{0-3} = -\frac{4}{3}$

মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = -\frac{4}{3}$



$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

A(3, 0) বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y) হলে, $\frac{x-3}{\cos\alpha} = \frac{y-0}{\sin\alpha} = 10$

$\therefore x - 3 = 10\cos\alpha \Rightarrow x = 10\cos\alpha + 3$ এবং

$y = 10\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ এর জন্য,

$x = 10 \times (-\frac{3}{5}) + 3 = -6 + 3 = -3$ এবং

$y = 15 \times \frac{4}{5} = 12$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 6 + 3 = 9$ এবং $y = -12$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(-3, 12)$ ও $(9, -12)$

প্রশ্নমালা III F

1. k এর যেকোন অশূন্য মানের জন্য $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$.

2. (α,β) এবং $f(x,y)\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $g(x,y)\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\dfrac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)}=\dfrac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)}$

i.e., $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}=\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}$

3. $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\varphi=\pm\tan^{-1}\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$.

4. $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $m_1=m_2$ এবং $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$.

$ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল যেকোণ রেখার সমীকরণ $ax+by+k=0$; যেখানে k একটি ধ্রুবক

5. $ax+by+c=0$ রেখার সমান্তরাল এবং (α,β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $ax+by=a\alpha+b\beta$.

6. $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে, $m_1m_2=-1$ এবং $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে, $a_1a_2+b_1b_2=0$. $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব যেকোন রেখার সমীকরণ $bx-ay+k=0$; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

7. $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব এবং (α,β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $bx-ay=b\alpha-a\beta$.

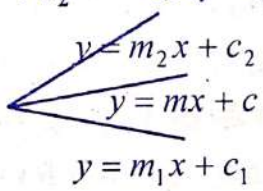
8. $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ ও $a_3x+b_3y+c_3=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

9.(a) $P(x_1,y_1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $A(h,k)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(2x_1-h, 2y_2-k)$.

(b) (x,y) বিন্দুর প্রতিবিম্ব x-অক্ষের সাপেক্ষে $(x,-y)$ এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে $(-x,y)$.

(c) $y=mx+c$ রেখার সাপেক্ষে $y=m_1x+c_1$ রেখার প্রতিবিম্ব $y=m_2x+c_2$ হবে, যদি $\dfrac{m_1-m}{1+m_1m}=\dfrac{m-m_2}{1+mm_2}$ হয়।



(d) x এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে $ax+by+c=0$ রেখার প্রতিবিম্ব যথাক্রমে $ax-by+c=0$ এবং $-ax+by+c=0$.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ
$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=(y_1-y_2)x_1-(x_1-x_2)y_1$$

2. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার সমান্তরাল এবং (x_3,y_3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ
$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y=(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3$$

3. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার লম্ব এবং (x_3,y_3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ
$$(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y=(x_1-x_2)x_3+(y_1-y_2)y_3$$

4. (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুগামী রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ
$$(x_1-x_2)x+(y_1-y_2)y=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)$$

5. $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ, $(a_1+mb_2)(a_1x+b_1y+c_1)-$

$y - 2 = m(x + 1) \cdots (1)$

$3x - y + 7 = 0$ রেখার ঢাল $= 3$

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \dfrac{m-3}{1+3m}$

$\Rightarrow 1 = \pm \dfrac{m-3}{1+3m} \Rightarrow 1 + 3m = \pm(m - 3)$

'+' নিয়ে, $2m = -4 \Rightarrow m = -2$

'–' নিয়ে $4m = 2 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y - 2 = -2(x + 1)$

$\Rightarrow y - 2 = -2x - 2 \Rightarrow 2x + y = 0$ (Ans.)

এবং $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$

$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$ (Ans.)

এখন, রেখা দুইটির ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -2.\dfrac{1}{2} = -1$

$\therefore$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে।

4(a) $(4, -3)$ বিন্দুগামী এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; মা.'০৪,'০৬]

সমাধান : ধরি, $2x + 11y - 2 = 0$ এর সমান্তরাল নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x + 11y + k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(4, -3)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 2 \times 4 + 11 \times -3 + k = 0 \Rightarrow k = 25$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x + 11y + 25 = 0$

[MCQ এর জন্য, $2x + 11y = 2 \times 4 + 11 \times -3 = -25$]

4(b) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০৪; ব.'০৪; মা.বো.'০৭; ব.'১০; দি.'১৪]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $2x - 3y + 4 + k(3x + 3y - 5) = 0$

$\Rightarrow (2 + 3k)x + (-3 + 3k)y + 4 - 5k = 0$

এ রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল বলে, y-এর সহগ $-3 + 3k = 0 \Rightarrow k = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $(2 + 3)x + 4 - 5 = 0$

$\therefore 5x - 1 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $3(2x - 3y + 4) - (-3)(3x + 3y - 5) = 0$]

4 (c) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[ব. '০১; কু. '০৭]**

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - 3y + 2 + k(x + y - 2) = 0$

$\Rightarrow (1 + k)x + (-3 + k)y + 2 - 2k = 0$

এ রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল বলে, x-এর সহগ $1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $-4y + 2 + 2 = 0$

$\therefore y - 1 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $1(x - 3y + 2) - 1(x + y - 2) = 0$]

5. (a) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। **[চ.'০৬; সি.'০৬; ব.'১৪]**

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x + 13y - 87 + k(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow (7 + 5k)x + (13 - 8k)y + 7k - 87 = 0$

ইহা অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগের সংখ্যামান সমান হবে।

$\therefore 7 + 5k = \pm(13 - 8k)$

'+' নিয়ে, $13k = 6 \Rightarrow k = \dfrac{6}{13}$

'+' নিয়ে, $3k = 20 \Rightarrow k = \dfrac{20}{3}$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ,

$7x + 13y - 87 + \dfrac{6}{13}(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow 91x + 169y - 1131 + 30x - 48y + 42 = 0$

$\Rightarrow 121x + 121y - 1089 = 0 \Rightarrow x + y - 9 = 0$

এবং $7x + 13y - 87 + \dfrac{20}{3}(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow 21x + 39y - 261 + 100x - 160y + 140 = 0$

$\Rightarrow 121x - 121y - 121 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

[MCQ এর জন্য, $(5 + 8)(7x + 13y - 87) - (7 - 13)(5x - 8y + 7) = 0$ এবং $(5 - 8)(7x + 13y - 87) - (7 + 13)(5x - 8y + 7) = 0$]

(b) যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাটি $2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হয় এবং $4x+3y-6=0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়, তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; রা.'১৩]

সমাধান : $2x-y-1=0$ ও $3x-4y+6=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\frac{-6-4}{-8+3},\frac{-3-12}{-8+3})=(2,3)$

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ রেখাটি $4x+3y-6=0$ রেখাটির সমান্তরাল এবং $(2,3)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{1/a}{4}=\frac{1/b}{3}\Rightarrow 4a=3b\Rightarrow a=\frac{3b}{4}$

এবং $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\Rightarrow\frac{8}{3b}+\frac{3}{b}=1\Rightarrow\frac{8+9}{3b}=1$

$\Rightarrow b=\frac{17}{3}\ \therefore a=\frac{3}{4}\times\frac{17}{3}=\frac{17}{4}$

উত্তর ঃ $a=\frac{17}{4}, b=\frac{17}{3}$

5(c) $3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০২]

সমাধান : ধরি,প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $3x-4y+1+k(5x+y-1)=0$

$\Rightarrow (3+5k)x+(-4+k)y+1-k=0$

ইহা অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগ সমান হবে।

$\therefore 3+5k=-4+k\Rightarrow 4k=-7\Rightarrow k=-\frac{7}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$3x-4y+1-\frac{7}{4}(5x+y-1)=0$

$\Rightarrow 12x-16y+4-35x-7y+7=0$

$\Rightarrow -23x-23y+11=0$

$\therefore 23x+23y=11$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য,
$(5-1)(3x-4y+1)-(3+4)(5x+y-1)=0$]

5(d) A(1 , 1) , B(3 , 4) ও C(5 , – 2) বিন্দুগুলো ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। এবং দেখাও যে, সরলরেখাটি BC এর সমান্তরাল।

[চ.,দি.'১০; ঢা.'১১]

সমাধান : ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

$\therefore D\equiv(\frac{1+3}{2},\frac{1+4}{2})=(2,\frac{5}{2})$ এবং

$E\equiv(\frac{1+5}{2},\frac{1-2}{2})=(3,-\frac{1}{2})$

$\therefore$ DE রেখা অর্থাৎ AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ $\frac{x-2}{2-3}=\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{2-3}=\frac{2y-5}{5+1}\Rightarrow 6x-12=-2y+5$

$\therefore 6x+2y=17$ (Ans.)

২য় অংশ : $6x+2y=17$ রেখার ঢাল $=-\frac{6}{2}=-3$

এবং BC রেখার ঢাল $=\frac{4+2}{3-5}=\frac{6}{-2}=-3$ পরস্পর সমান। অতএব, রেখাটি BC এর সমান্তরাল।

6(a) (4,–3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x+11y-2=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'১২; কু.'১৪; মা.'১২,'১৪]

সমাধান : ধরি, $2x+11y-2=0$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $11x-2y+k=0\cdots(1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি (4 , – 3) বিন্দুগামী।

$\therefore 11\times4-2\times-3+k=0\Rightarrow k=-50$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $11x-2y-50=0$

[MCQ এর জন্য, $11x-2y=11\times4-2\times-3=50$]

6(b) (2, 5) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x+12y=3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৫; চ.'১৪]

সমাধান : ধরি, $3x + 12y = 3$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $12x - 3y + k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি (2 , 5) বিন্দুগামী ।

$\therefore\ 12\times 2 - 3\times 5 + k = 0 \Rightarrow k = -9$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $12x - 3y - 9 = 0$

7.(a) মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখা এবং $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা পরস্পর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = b\,x_1$.

[চ.'০৩; রা.'০৪,'১৩; ব.'০৬; ঢা.'১৩]

প্রমাণ: ধরি, মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল m_1 এবং $(b,0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল m_2

$\therefore\ m_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$ এবং $m_2 = \dfrac{y_2 - 0}{x_2 - b} = \dfrac{y_2}{x_2 - b}$

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

$\therefore\ m_1\, m_2 = -1 \Rightarrow \dfrac{y_1}{x_1} \times \dfrac{y_2}{x_2 - b} = -1$

$\Rightarrow\ y_1y_2 = x_1x_2 + bx_1$

$\therefore\ x_1x_2 + y_1y_2 = b\,x_1$ (Proved)

7.(b) (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর $(x\ ,\ y)$ যেকোন একটি বিন্দু এবং রেখাটি (–1,2) ও (– 5, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $2x - y - 1 = 0$.

প্রমাণ: ধরি, (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল m_1 এবং (-1,2) ও (-5, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল m_2.

$\therefore\ m_1 = \dfrac{y-3}{x-2}$ [$\because$ (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর $(x\ ,\ y)$ যেকোন একটি বিন্দু ।]

এবং $m_2 = \dfrac{2-4}{-1+5} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

$\dfrac{y-3}{x-2} \times -\dfrac{1}{2} = -1 \Rightarrow -y + 3 = -2x + 4$

$\therefore\ 2x - y - 1 = 0$ (Proved)

7(c) A(1 , 1) , B(3 , 4) ও C(5 , – 2) বিন্দুগুলো ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ $y - 1 = -\dfrac{3-5}{4+2}(x-1)$

$\Rightarrow\ y - 1 = -\dfrac{-2}{6}(x-1)$

$\Rightarrow 3y - 3 = x - 1\ \therefore x - 3y + 2 = 0$ (Ans.)

8.(a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x-অক্ষের ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।[চ.'০২; ব.'০৫; কু.'০৮,'১০]

সমাধান : প্রদত্ত রেখা $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{-b} = 1 \Rightarrow$ $bx - ay = ab$, x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $ax + by = k \cdots \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) রেখাটি $(a, 0)$ বিন্দুগামী ।

$\therefore\ a.a + b.0 = k \Rightarrow k = a^2$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $a\,x + by = a^2$.

8(b) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 2y = 9$ ও $2x + 3y = 11$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথম রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান: $3x + 2y - 9 = 0 \cdots (1)$ ও

$2x + 3y - 11 = 0 \cdots (2)$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\dfrac{-22+27}{9-4}, \dfrac{-18+33}{9-4}\right) = (1, 3)$.

$\therefore$ (1, 3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ $2x - 3y = 2\times 1 - 3\times 3$

$\Rightarrow 2x - 3y = 2 - 9\ \therefore 2x - 3y + 7 = 0$

9. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1,2) ও (4, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঐ রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান:(1,2) ও (4, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\frac{3\times4+1\times1}{3+1},\frac{3\times5+1\times2}{3+1})=(\frac{13}{4},\frac{17}{4})$

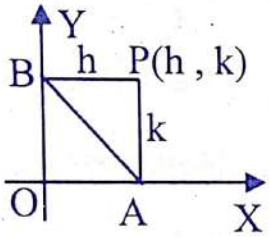
এখন, (1 , 2) ও (4 , 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের উপর লম্ব এবং $(\frac{13}{4},\frac{17}{4})$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(y-\frac{17}{4})=-\frac{1-4}{2-5}(x-\frac{13}{4})$

$\Rightarrow (y-\frac{17}{4})=-1(x-\frac{13}{4})$

$\Rightarrow 4y-17=-4x+13 \Rightarrow 4x+4y=30$

$\therefore\ 2x+2y=15$ (Ans.)

9(b) P(h , k) বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA ও PB লম্ব । P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: P(h , k) বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA ও PB লম্ব বলে A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (h , 0) ও (0 , k).

$\therefore$ P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ $y-k=-\frac{h-0}{0-k}(x-h)$

$\Rightarrow y-k=\frac{h}{k}(x-h)$

$\Rightarrow ky-k^2=hx-h^2$

$\therefore\ hx-ky=h^2-k^2$ (Ans.)

9 (c) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x+7y=11$ রেখার উপর লম্ব এবং y-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তন করে। [প্র.ভ.প.'৯০]

সমাধান: $4x+7y=11$ রেখার ঢাল $=-\frac{4}{7}$

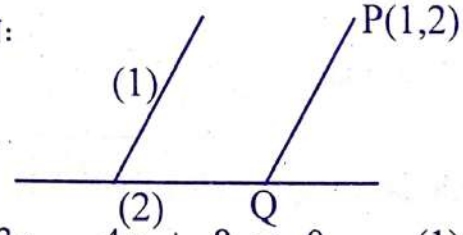
$\therefore\ 4x+7y=11$ এর উপর লম্ব রেখার ঢাল $=\frac{7}{4}$

$\therefore$ y-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তনকারী এবং $\frac{7}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ $y=\frac{7}{4}x\pm2$

$\Rightarrow 7x-4y\pm8=0$ (Ans.)

10. (a) $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x+y+4=0$ রেখা হতে (1 , 2) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা.'০২; য.'০৮]

সমাধান:



ধরি, $3x-4y+8=0\ \cdots$ (1) রেখার সমান্তরাল এবং P(1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখা $3x+y+4=0\ \cdots$ (2) রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ PQ রেখার সমীকরণ $3x-4y=3\times1-4\times2$

$\Rightarrow 3x-4y=-5 \Rightarrow 3x-4y+5=0\cdots(3)$

$(2)-(3)\Rightarrow 5y-1=0\Rightarrow y=\frac{1}{5}$.

(2) হতে পাই, $3x+\frac{1}{5}+4=0\Rightarrow 3x=-\frac{21}{5}$

$\Rightarrow x=-\frac{7}{5}$ $\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-\frac{7}{5},\frac{1}{5})$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব , $PQ=\sqrt{(1+\frac{7}{5})^2+(2-\frac{1}{5})^2}$

$=\sqrt{\frac{144+81}{25}}=\sqrt{\frac{225}{25}}=\sqrt{9}=3$ একক।

10(b) যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x+5y-11=0$ রেখা হতে (– 1, 1) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল এবং P(– 1, 1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y-1=(x+1)\tan\tan^{-1}(\frac{3}{4})$

$\Rightarrow y-1=\frac{3}{4}(x+1)\Rightarrow 4y-4=3x+3$

$\Rightarrow 3x-4y+7=0\cdots\cdots(1)$

ধরি, (1) রেখা $3x + 5y - 11 = 0 \cdots (2)$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $(1) - (2) \Rightarrow -9y + 18 = 0 \Rightarrow y = 2$

$\therefore\ (1) \Rightarrow 3x - 8 + 7 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

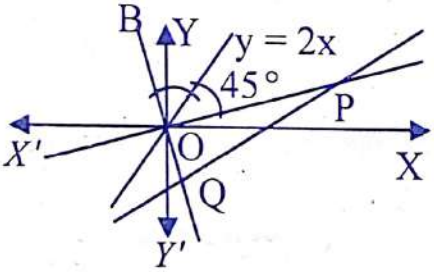
$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{3}, 2)$.

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব, $PQ = \sqrt{(-1-\frac{1}{3})^2 + (1-2)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{9}+1} = \sqrt{\frac{16+9}{9}} = \frac{5}{3}$ একক।

10(c) যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x - 4y = 15$ রেখা হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:



$y = 2x$ রেখার ঢাল (ধরি) $m_1 = 2$.

ধরি, যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল m_2 .

$\therefore\ \tan 45^0 = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 = \pm\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2}$

$\Rightarrow 1 + 2m_2 = \pm(2 - m_2)$

'+' নিয়ে, $1 + 2m_2 = 2 - m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}$ এবং

'–' নিয়ে, $1 + 2m_2 = -2 + m_2 \Rightarrow m_2 = -3$

ধরি, মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $\frac{1}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখা $y = \frac{1}{3}x \Rightarrow x = 3y \cdots (1)$, $3x - 4y = 15 \cdots (2)$ রেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ (2) হতে পাই, $9y - 4y = 15$ [$\because x = 3y$]

$\Rightarrow 5y = 15 \Rightarrow y = 5$ এবং $x = 15$.

$\therefore\ P \equiv (15,5)$ এবং $OP = \sqrt{5^2 + 15^2}$

$= \sqrt{5^2(1+3^2)} = 5\sqrt{10}$ একক।

আবার, ধরি মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং –3 ঢাল বিশিষ্ট রেখা $y = -3x \cdots (3)$, $3x - 4y = 15 \cdots (2)$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ (2) হতে পাই, $3x + 12x = 15$ [$\because y = -3x$]

$\Rightarrow 15x = 15 \Rightarrow x = 1$ এবং $y = -3$.

$\therefore\ Q \equiv (1, -3)$ এবং $OP = \sqrt{1^2 + 3^2}$

$= \sqrt{10}$ একক।

11. (a) (8 , 5) ও (– 4 , – 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'১২; ঢা.'০৬; কু.'০৬; সি.'০৯,'১৩; চ.'১২]

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{8-4}{2}, \frac{5-3}{2}) = (2, 1)$

$\therefore$ (8 , 5) ও (– 4 , – 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল $= \frac{5+3}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$\therefore$ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখার ঢাল $= -\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ,

$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 2)$

$\Rightarrow 2y - 2 = -3x + 6$

$\therefore\ 3x + 2y - 8 = 0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $(8 + 4)x + (5 + 3)y$

$= \frac{1}{2}(64 - 16 + 25 - 9) = 32$]

11(b) (2 , 1) ও (6 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}) = (4, 2)$

$\therefore$ (2 , 1) ও (6 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{2-6}{1-3} = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = -2(x - 4) \Rightarrow y - 2 = -2x + 8$

$\therefore\ 2x + y - 10 = 0$ (Ans.)

12. (a) (2 , 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

[য.'০৯; রা., সি.,ব.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৩]

সমাধান: (2 , 3) বিন্দুগামী এবং $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$3x - 4y = 3\times 2 - 4\times 3 = 6 - 12$

$\therefore\ 3x - 4y + 6 = 0$

$4x + 3y - 7 = 0$ ও

$3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{18-28}{-16-9}, \frac{-21-24}{-16-9})$

$=(\frac{-10}{-25}, \frac{-45}{-25}) = (\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

$\therefore$ অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

২য় অংশ : (2 , 3) বিন্দুটি হতে প্রদত্ত রেখার লম্ব-দূরত্ব $= \sqrt{(2-\frac{2}{5})^2 + (3-\frac{9}{5})^2}$

$= \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{100}}{5} = \frac{10}{5} = 2$ একক।

12(b) (2 ,– 1) বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।[য.'১২; সি.'০৭,'১২; ঢা.'০৮,'১৪; কু.'০৪; চ.'০৭,'১০; মা.বো.'০৮,'০৯; রা.'১২; দি.'১২]

সমাধান: (2, –1) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$4x + 3y = 4\times 2 + 3\times -1 = 8 - 3$

$\therefore\ 4x + 3y - 5 = 0$

$4x + 3y - 5 = 0$ ও

$3x - 4y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{15-20}{-16-9}, \frac{-15-20}{-16-9})$

$=(\frac{-5}{-25}, \frac{-35}{-25}) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

$\therefore$ অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

12(c) (3 , 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৫]

সমাধান: (3, 1) বিন্দুগামী এবং $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$x - 2y = 1\times 3 - 2\times 1 = 3 - 2$

$\therefore\ x - 2y - 1 = 0$

$x - 2y - 1 = 0$ ও

$2x + y - 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{6+1}{1+4}, \frac{-2+3}{1+4}) = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$

$\therefore$ অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{1}{5})$

12(d) P(h , k) বিন্দু হতে মূলবিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ব. '০৫]

সমাধান: ধরি, মূলবিন্দু (0 , 0) দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0 \cdots (1)$

P(h , k) বিন্দুগামী এবং (1) রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ, $x + my = h + mk \cdots \cdots (2)$

(1) হতে পাই, $m = \frac{y}{x}$

(2) নং সমীকরণে m–এর মান বসিয়ে পাই,

$x + \frac{y}{x}y = h + \frac{y}{x}.k$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = hx + ky$; যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

13(a) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু। [চ.'০১; য.'০২ ; কু.'০৫; ঢা.'০৭; ব.'০৮]

সমাধান: $4x + 3y - 6 = 0$ ও

$x - 2y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{-21-12}{-8-3}, \frac{-6+28}{-8-3}) = (\frac{-33}{-11}, \frac{22}{-11})$

$= (3 , -2)$

$\therefore$ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সঙ্গে সমবিন্দু নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y = -2 \Rightarrow y + 2 = 0$

13(b) $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। [য.'০৯,'১৩; দি.'১১; চ.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -2(2b - 3a) + 1(9 - 10) = 0$

$\Rightarrow -4b + 6a - 1 = 0 \Rightarrow 6a - 4b = 1$

14. (a) দেখাও যে, $x = t$, $y = 2t + 1$ এবং $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখা দুইটি পরস্পরকে $(-2, -3)$ বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। [ব.'১১]

প্রমাণ : $x = t$, $y = 2t + 1$ রেখাটিকে লেখা যায়–

$y = 2x + 1 \cdots (1)$; যার ঢাল $= 2$

আবার, $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখাটিকে লেখা যায়–

$y = -\frac{x}{2} - 4 \cdots (2)$; যার ঢাল $= -\frac{1}{2}$

$(1) - (2) \Rightarrow 0 = (2 + \frac{1}{2})x + 5$

$\Rightarrow \frac{5}{2}x = -5 \Rightarrow x = -2 \therefore y = -4 + 1 = -3$

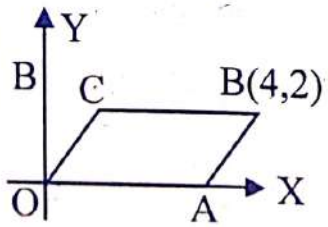
$\therefore$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(-2, -3)$.

আবার, রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= 2(-\frac{1}{2}) = -1$

$\therefore$ রেখা দুইটি পরস্পরকে $(-2, -3)$ বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। (Showed)

14(b) OABC একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$. A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৯,'১৩; য.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'০৮; চ.'১১; দি.'১৪; ব.'১৪]

সমাধান : OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত।



অতএব, O মূলবিন্দু । আবার, CB বাহু x-অক্ষের সমান্তরাল , সুতরাং B ও C শীর্ষের কোটি একই হবে।

ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2)$ যা $y = 2x$ রেখার উপর অবস্থিত ।

$\therefore 2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 1.$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(1, 2)$.

এখন, $OA = CB = |1 - 4| = 3$

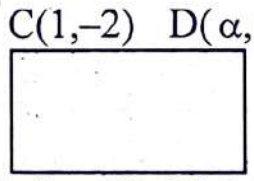
$\therefore$ A শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, 0)$

$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ $\frac{x-3}{3-1} = \frac{y-0}{0-2}$

$\Rightarrow x - 3 = -y \therefore x + y - 3 = 0$

14(c) A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$, $(-3, 0)$ ও $(5, 6)$. প্রমাণ কর যে, AB ও AC রেখদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য.'০৪]

প্রমাণ :



AB রেখার ঢাল $= \frac{-2-0}{1+3} = -\frac{1}{2}$

AC রেখার ঢাল $= \frac{-2-6}{1-5} = 2$

AB ও AC এর ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{1}{2}.2 = -1$

$\therefore$ AB ও AC রেখদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

ধরি, আয়তক্ষেত্রের চতুর্থ শীর্ষের $D(\alpha, \beta)$.

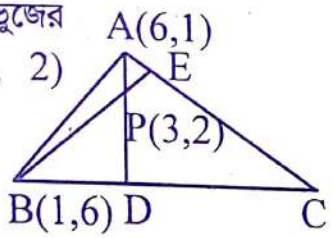
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের BC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{-3+5}{2}, \frac{0+6}{2}) = (1, 3)$ এবং AD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{-2+\beta}{2})$ একই হবে।

$\therefore \frac{1+\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 2 - 1 = 1$ এবং

$\frac{-2+\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 6 + 2 = 8$

$\therefore$ চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(1, 8)$.

14(d) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে **A(6, 1)** ও **B(1, 6)** এবং এর লম্ববিন্দু **P(3, 2)** ; অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]



সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের AD, BE লম্বদ্বয় P(3 , 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AP অর্থাৎ AD রেখার ঢাল $= \frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ AD এর উপর লম্ব BC রেখার ঢাল = 3

$\therefore$ BC বাহুর সমীকরণ $y - 6 = 3(x - 1)$

$\Rightarrow y - 6 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x + 3 \cdots(1)$

BP অর্থাৎ BE এর উপর লম্ব AC বাহুর ঢাল $= -\frac{3-1}{2-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ AC বাহুর সমীকরণ $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 6)$

$\Rightarrow 2y - 2 = x - 6$

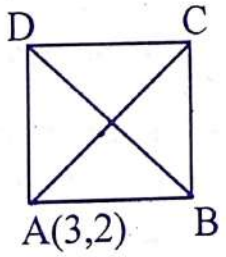
$\Rightarrow 2(3x + 3) - 2 = x - 6$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6x + 6 - x = -4 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $y = 3(-2) + 3 = -3$

$\therefore$ অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক $(-2, -3)$

15. (a) $4x + 7y - 12 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ (3 , 2) বিন্দুতে অবস্থিত । এ বিন্দুটি দিয়ে অতিক্রমকারী বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান : ধরি, ABCD বর্গের $4x + 7y - 12 = 0 \cdots\cdots(1)$ রেখাটি BD কর্ণ নির্দেশ করে এবং A(3 , 2) শীর্ষ দিয়ে অতিক্রমকারী বাহুর ঢাল m.

BD কর্ণের ঢাল $= -\frac{4}{7}$

$\therefore$ AC কর্ণের ঢাল $= \frac{7}{4}$ [$\because$ বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব]

AC কর্ণ AD ও AB বাহুর সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan 45° = \pm \frac{m - \frac{7}{4}}{1 + m.\frac{7}{4}} \Rightarrow 1 = \pm \frac{4m - 7}{4 + 7m}$

$\Rightarrow 4 + 7m = \pm(4m - 7)$

'+' নিয়ে, $3m = -11 \Rightarrow m = -\frac{11}{3}$

'−' নিয়ে, $11m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{11}$

$\therefore$ (3 , 2) শীর্ষ দিয়ে অতিক্রমকারী বাহুর সমীকরণ,

$y - 2 = -\frac{11}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -11x + 33$

$\Rightarrow 11x + 3y - 39 = 0$ এবং

$y - 2 = \frac{3}{11}(x - 3) \Rightarrow 11y - 22 = 3x - 9$

$\Rightarrow 3x - 11y + 13 = 0$

15(b) দেখাও যে, $2x + y + 5 = 0$ ও $x - 2y - 3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব। রেখা দুইটিকে কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে এবং অপর বাহু দুইটি (3 , 4) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ : $2x + y + 5 = 0 \cdots(1)$ রেখার ঢাল $= -2$

এবং $x - 2y - 3 = 0 \cdots (2)$ রেখার ঢাল $= \frac{1}{2}$

ঢাল দুইটির গুণফল $= -2 \times \frac{1}{2} = -1$ বলে প্রদত্ত রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ : রেখা দুইটিকে কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে অপর বাহু দুইটির একটি (1) রেখার সমান্তরাল এবং অপরটি (2) রেখার সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ (3 , 4) বিন্দুগামী এবং (1) রেখার সমান্তরাল বাহুটির সমীকরণ $2x + y = 2 \times 3 + 4$

$\Rightarrow 2x + y = 10$

এবং (3 , 4) বিন্দুগামী এবং (2) রেখার সমান্তরাল বাহুটির সমীকরণ $x - 2y = 3 - 2 \times 4$

$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

15(c) ABCD সামান্তরিকের AB , BC বাহু দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$

এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , – 4) হলে AD ও DC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCD সামান্তরিক বলে,

$BC \| AD$ এবং $AB \| DC$

$\therefore$ D(2, – 4) বিন্দুগামী

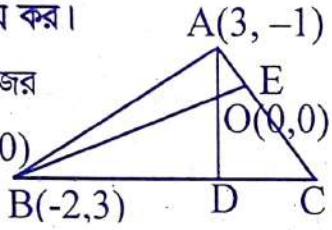
AD এর সমীকরণ $x - y = 2 - (-4)$

$\Rightarrow x - y = 6$ এবং

DC এর সমীকরণ $2x + y = 2 \times 2 + (-4)$

$\Rightarrow 2x + y = 0$

15(d) A(3, – 1), B(– 2, 3) বিন্দু দুইটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং তার লম্ব বিন্দুটি মূলবিন্দুতে। অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের AD, BE লম্বদ্বয় O(0 , 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AO অর্থাৎ AD রেখার ঢাল $= \frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ AD এর উপর লম্ব BC রেখার ঢাল = 3

$\therefore$ BC বাহুর সমীকরণ $y - 3 = 3(x + 2)$

$\Rightarrow y - 3 = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 9 \cdots(1)$

BO অর্থাৎ BE এর উপর লম্ব AC বাহুর ঢাল $= -\frac{-2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ AC বাহুর সমীকরণ $y + 1 = \frac{2}{3}(x - 3)$

$\Rightarrow 3y + 3 = 2x - 6$

$\Rightarrow 3(3x + 9) + 3 = 2x - 6$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 9x + 27 - 2x = -9 \Rightarrow 7x = -36$

$\Rightarrow x = -\frac{36}{7}$ $\therefore y = 3(-\frac{36}{7}) + 9 = -\frac{45}{7}$

$\therefore$ অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক $(-\frac{36}{7}, -\frac{45}{7})$

[MCQ এর জন্য, BC বাহুর সমীকরণ,
$(3-0)x + (-1-0)y = 3 \times -2 + (-1) \times 3$]

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

16. $4x - 3y - 1 = 0$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল $= \tan(\pm 45°) = \pm 1$ (১)

এখন, $4x - 3y - 1 = 0$ ও

$2x - 5y + 3 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{-9-5}{-20+6}, \frac{-2-12}{-20+6}) = (1, 1)$ (১)

$\therefore$ (1, 1) বিন্দুগামী এবং ± 1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y - 1 = \pm 1.(x - 1)$ (১)

'+' নিয়ে পাই, $y - 1 = x - 1 \Rightarrow x - y = 0$

'–' নিয়ে পাই, $y - 1 = -x + 1 \Rightarrow x + y = 2$

$\therefore 2x + 2y - 1 = 0$

উত্তর ঃ $x + y = 2, x - y = 0.$

17. $2x + 3y - 1 = 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ φ

আমরা জানি, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ φ হলে, $\tan\varphi = \pm \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$.

$\therefore \tan\varphi = \pm \frac{1.3 - 2(-2)}{2.1 + 3(-2)} = \pm\frac{3+4}{2-6} = \pm\frac{7}{4}$. (১)

'+' চিহ্ন নিয়ে পাই, $\varphi = \tan^{-1}\frac{7}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণের মান $\tan^{-1}\frac{7}{4}$ (১)

18. k-এর মান কত হলে $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান : $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\frac{5}{2} = \frac{4}{k}$ (১)

$\Rightarrow k = \frac{8}{5}$ (Ans.)

19. $5x - 3y - 7 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $13x - y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(5x-3y-7)+k(4x+y-9)=0$

$\Rightarrow (5+4k)x+(-3+k)y-7-9k=0\cdots(1)$ (১)

(1) রেখাটি $13x-y-1=0$ এর সমান্তরাল ।

$\therefore \frac{5+4k}{13}=\frac{-3+k}{-1}$ [$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ সূত্র দ্বারা] (১)

$\Rightarrow -39+13k=-5-4k \Rightarrow 17k=34$

$\Rightarrow k=2$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$(5+8)x+(-3+2)y-7-18=0$

$\Rightarrow 13x-y-25=0$ (Ans.) (১)

[MCQ এর জন্য,

$$\frac{5x-3y-7}{4x+y-9}=\frac{\begin{vmatrix}5 & -3\\13 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 1\\13 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-5+39}{-4-13}=-2\ ]$$

20. k এর মান কত হলে $2x-y+7=0$ ও $3x+ky-5=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে ?

সমাধান : $2x-y+7=0$ ও $3x+ky-5=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে,

$2\times3+(-1)\times k=0$ (১)

[$a_1a_2+b_1b_2=0$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow k=6$ (Ans.)

21. (2 , – 3) বিন্দুগামী এবং (5, 7) ও (– 6 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (2, –3) বিন্দুগামী এবং (5 ,7) ও (– 6, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্ব এরূপ সরলরেখার

সমীকরণ $y+3=-\frac{5+6}{7-3}(x-2)$ (৩)

$\Rightarrow y+3=-\frac{11}{4}(x-2)$

$\Rightarrow 4y+12=-11x+22$

$\therefore 11x+4y=10$ (Ans.)

[$(5+6)x+(7-3)y=11\times2+4\times-3=10$]

22. এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x+3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $6x-7y+8=0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান: $2x+3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর

স্থানাঙ্ক $=(\frac{-15-16}{8-9},\frac{12+10}{8-9})=(31,-22)$. (১)

$\therefore$ (31,–22) বিন্দুগামী এবং $6x-7y+8=0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$7x+6y=7\times31+6\times-22$ (২)

$\Rightarrow 7x+6y=217-132$

$\therefore 7x+6y-85=0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $\frac{2x+3y+4}{3x+4y-5}=\frac{2\times6+3\times-7}{3\times6+4\times-7}$]

23. (2 , 5) ও (5 , 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তা (– 4 , 5) ও (– 3 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব।

সমাধান: (2 , 5) ও (5 , 6) বিন্দুগামী সরলরেখার

সমীকরণ $\frac{x-2}{2-5}=\frac{y-5}{5-6}\Rightarrow\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-1}$ (১)

$\Rightarrow x-2=3y+9 \therefore x-3y+13=0\cdots(1)$

২য় অংশ : (1) রেখার ঢাল $=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$ (১)

(– 4 , 5) ও (– 3 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল $=\frac{5-2}{-4+3}=\frac{3}{-1}=-3$

ঢাল দুইটির গুণফল $=\frac{1}{3}\times-3=-1$ (১)

$\therefore$ (2 , 5) ও (5 , 6) বিন্দুগামী রেখাটি (– 4 , 5) ও (– 3 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব। (১)

24. (– 3 ,– 2) বিন্দুগামী এবং $2x+3y=3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুগামী এবং এই দুইটি রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখারও সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: (– 3 ,– 2) বিন্দুগামী এবং $2x+3y=3$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$3x-2y=3\times(-3)-2\times(-2)$ (২)

$\Rightarrow 3x-2y=-9+4 \therefore 3x-2y+5=0$

২য় অংশ: ধরি, $2x+3y-3=0$ ও $3x-2y+5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x + 3y - 3 + k(3x - 2y + 5) = 0$ (১)

$\Rightarrow (2 + 3k)x + (3 - 2k)y - 3 + 5k = 0$

এ রেখাটি মূলবিন্দুগামী বলে, ধ্রুবপদ $-3 + 5k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{3}{5}$. (১)

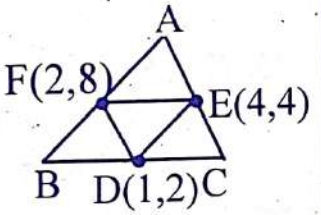
অতএব , নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$2x + 3y - 3 + \frac{3}{5}(3x - 2y + 5) = 0$

$\Rightarrow 10x + 15y - 15 + 9x - 6y + 15 = 0$

$\Rightarrow 19x + 9y = 0$ (Ans.) (১)

25. (1 , 2) , (4 , 4) , (2 , 8) বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু । বাহুগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজে BC , CA , AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(1, 2), E(4 , 4) , F(2 , 8).

$\therefore$ $BC \| FE$, $CA \| DF$ এবং $AB \| ED$. (১)

$\therefore$ BC রেখার ঢাল = FE রেখার ঢাল $= \frac{8-4}{2-4} = -2$ (১)

AC রেখার ঢাল = FD রেখার ঢাল $= \frac{8-2}{2-1} = 6$

AB রেখার ঢাল = ED রেখার ঢাল $= \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ D(1 , 2) বিন্দুগামী BC বাহুর সমীকরণ

$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$ (১)

E(4 , 4) বিন্দুগামী CA বাহুর সমীকরণ

$y - 4 = 6(x - 4) \Rightarrow 6x - y - 20 = 0$

এবং F(2 , 8) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ

$y - 8 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 24 = 2x - 4$

$\therefore$ $2x - 3y + 20 = 0$

[MCQ এর জন্য, BC বাহুর সমীকরণ,

$\Rightarrow (4 - 8)x - (4 - 2)y = -4 \times 1 - 2 \times 2$]

26. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে।

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সঙ্গে সমবিন্দু এরূপ রেখার সমীকরণ $2x + 3y - 1 + k(x - 2y + 3) = 0$

$\Rightarrow (2 + k)x + (3 - 2k)y - 1 + 3k = 0$ (১)

রেখাটি অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে বলে x ও y এর সহগের সংখ্যামান সমান।

$\therefore$ $2 + k = \pm(3 - 2k)$ (১)

$\therefore$ $2 + k = 3 - 2k \Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

অথবা, $2 + k = -3 + 2k \Rightarrow k = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$2x + 3y - 1 + \frac{1}{3}(x - 2y + 3) = 0$

$\Rightarrow 6x + 9y - 3 + x - 2y + 3 = 0$

$\Rightarrow 7x + 7y = 0 \Rightarrow x + y = 0$ (১)

অথবা, $2x + 3y - 1 + 5x - 10y + 15 = 0$

$\Rightarrow 7x - 7y + 14 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$ (১)

27. দুইটি সরলরেখা (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $x - 2y = 3$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান : ধরি, (3 , 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y - 2 = m(x - 3) \cdots (1)$ (১)

$x - 2y = 3$ রেখার ঢাল $= \frac{1}{2}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}$ (১)

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{2m - 1}{2 + m} \Rightarrow 2 + m = \pm(2m - 1)$

'+' নিয়ে, $2 + m = 2m - 1 \Rightarrow m = 3$

'–' নিয়ে $2 + m = -2m + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y - 2 = 3(x - 3)$

$\Rightarrow y - 2 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - y = 7$

এবং $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -x + 3$

$\Rightarrow x + 3y = 9$ (১)

28. দুইটি সরলরেখা (6, – 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y+\sqrt{3}x=1$ রেখার সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা.'০৫; দি.'০৯; কু.'১১]

সমাধান : ধরি, (6, –7) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ
$y+7=m(x-6)\cdots(1)$ (১)
$y+\sqrt{3}x=1$ রেখার ঢাল $=-\sqrt{3}$ (১)
প্রশ্নমতে, $\tan 60°=\pm\dfrac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$ (১)

$\Rightarrow \sqrt{3}=\pm\dfrac{m+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m}$
$\Rightarrow \sqrt{3}-3m=\pm(m+\sqrt{3})$
'+' নিয়ে, $\sqrt{3}-3m=m+\sqrt{3}\Rightarrow m=0$
'–' নিয়ে $\sqrt{3}-3m=-m-\sqrt{3}$
$\Rightarrow 2m=2\sqrt{3}\Rightarrow m=\sqrt{3}$
$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y+7=0(x-6)$
$\Rightarrow y+7=0$ (Ans.)
এবং $y+7=\sqrt{3}(x-6)$ (Ans.) (১)

29. দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3y=2x$ রেখার সঙ্গে $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান : ধরি, মূলবিন্দু (0 , 0) দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ $y=mx\cdots(1)$ (১)
$3y=2x$ রেখার ঢাল $=\dfrac{2}{3}$ (১)
প্রশ্নমতে, $\tan\tan^{-1}\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{m-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}m}$ (১)

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{3m-2}{3+2m}$
$\Rightarrow 3+2m=\pm(6m-4)$
'+' নিয়ে, $3+2m=6m-4$
$\Rightarrow 4m=7\Rightarrow m=\dfrac{7}{4}$
'–' নিয়ে, $3+2m=-6m+4$
$\Rightarrow 8m=1\Rightarrow m=\dfrac{1}{8}$
$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y=\dfrac{7}{4}x\Rightarrow 7x=4y$
এবং $y=\dfrac{1}{8}x\Rightarrow x=8y$ (১)

30. (1, 2) বিন্দুগামী এবং $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু.'০৪]

সমাধান : $3x-4y+8=0$ রেখার ঢাল $=\dfrac{3}{4}$ (১)
$\therefore$ (1 , 2) বিন্দুগামী এবং $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,
$y-2=\dfrac{3}{4}(x-1)\Rightarrow 4y-8=3x-3$
$\therefore 3x-4y+5=0$ (১)

31 (2, –3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x-3y=7$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু.'০১; য.'০৭; মা.'০৩]

সমাধান : ধরি, $2x-3y=7$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $3x+2y+k=0\cdots(1)$ (১)
প্রশ্নমতে (1) রেখাটি (2 , – 3) বিন্দুগামী ।
$\therefore 3\times2+2\times-3+k=0\Rightarrow k=0$
$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $3x+2y=0$ (১)

32. P(4 , 11) ও Q(– 2 , 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প. '০৪]

সমাধান: PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \dfrac{13}{2})$ (১)
$\therefore$ P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখার ঢাল $=-\dfrac{4+2}{11-2}=-\dfrac{2}{3}$ (২)
$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ,
$y-\dfrac{13}{2}=-\dfrac{2}{3}(x-1)$
$\Rightarrow \dfrac{2y-13}{2}=-\dfrac{2}{3}(x-1)$
$\Rightarrow 6y-39=-4x+4$
$\therefore 4x+6y-43=0$ (Ans.) (১)

33. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ

$$(a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$$

[ব.'০১]

প্রমাণ: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ (১)

$\therefore$ (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{a-c}{b-d}$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$$y-\frac{b+d}{2}=-\frac{a-c}{b-d}(x-\frac{a+c}{2}) \quad (১)$$

$$\Rightarrow (b-d)y-\frac{b^2-d^2}{2}$$

$$=-(a-c)x+\frac{a^2-c^2}{2}$$

$$\therefore (a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) \quad (১)$$

34. $2x+by+4=0$, $4x-y-26=0$, $3x+y-1=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -26 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$\Rightarrow 2(1+26)-b(-4+78)+4(4+3)=0$

$\Rightarrow 54-74b+28=0 \Rightarrow 74b=82$

$\therefore b=\frac{82}{74}=\frac{41}{37}$ (Ans.) (১)

35. $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a+b+c=0$. [সি.'০১, ঢা.'১৪]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (a+b+c)(ab-ca-b^2+bc-c^2+2ca-a^2)=0$ (১)

$\Rightarrow (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$ [-2 দ্বারা গুণ করে।]

$\Rightarrow (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

এখানে, $a \neq b \neq c$, $\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a+b+c=0$ (Showed) (১)

36. দেখাও যে, $2x=1-4t$, $y=1+t$ এবং $x=-2t$, $y=t-1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল।

প্রমাণ : $2x=1-4t$, $y=1+t$ রেখাটিকে লেখা যায়,

$2x=1-4(y-1) \Rightarrow 2x+4y=5 \cdots (1)$ (১)

আবার, $x=-2t$, $y=t-1$ রেখাটিকে লেখা যায়-

$x=-2(y+1) \Rightarrow x+2y+2=0 \cdots (2)$ (১)

(1) রেখাটির ঢাল $=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ এবং (১)

(2) রেখাটির ঢাল $=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ রেখা দুইটির ঢাল পরস্পর সমান বলে তারা সমান্তরাল। (Showed) (১)

প্রশ্নমালা III G

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax+by+c=0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.(i) $ax+by+c_1=0$ ও $ax+by+c_2=0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ii) $ax+by+c=0$ হতে d একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ $ax+by+c \pm d\sqrt{a^2+b^2}=0$

33. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ

$$(a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$$

[ব.'০১]

প্রমাণ: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ (১)

$\therefore$ (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{a-c}{b-d}$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডক রেখার সমীকরণ,

$$y-\frac{b+d}{2}=-\frac{a-c}{b-d}(x-\frac{a+c}{2}) \quad (১)$$

$$\Rightarrow (b-d)y-\frac{b^2-d^2}{2}$$

$$=-(a-c)x+\frac{a^2-c^2}{2}$$

$$\therefore (a-c)x+(b-d)y=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) \quad (১)$$

34. $2x+by+4=0$, $4x-y-26=0$, $3x+y-1=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -26 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$\Rightarrow 2(1+26)-b(-4+78)+4(4+3)=0$

$\Rightarrow 54-74b+28=0 \Rightarrow 74b=82$

$\therefore b=\frac{82}{74}=\frac{41}{37}$ (Ans.) (১)

35. $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a+b+c=0$. [সি.'০১, ঢা.'১৪]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (a+b+c)(ab-ca-b^2+bc-c^2+2ca-a^2)=0$ (১)

$\Rightarrow (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$ [-2 দ্বারা গুণ করে।]

$\Rightarrow (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

এখানে, $a \neq b \neq c$, $\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a+b+c=0$ (Showed) (১)

36. দেখাও যে, $2x=1-4t$, $y=1+t$ এবং $x=-2t$, $y=t-1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল।

প্রমাণ : $2x=1-4t$, $y=1+t$ রেখাটিকে লেখা যায়,

$2x=1-4(y-1) \Rightarrow 2x+4y=5 \cdots (1)$ (১)

আবার, $x=-2t$, $y=t-1$ রেখাটিকে লেখা যায়-

$x=-2(y+1) \Rightarrow x+2y+2=0 \cdots (2)$ (১)

(1) রেখাটির ঢাল $=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ এবং (১)

(2) রেখাটির ঢাল $=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ রেখা দুইটির ঢাল পরস্পর সমান বলে তারা সমান্তরাল। (Showed) (১)

প্রশ্নমালা III G

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax+by+c=0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.(i) $ax+by+c_1=0$ ও $ax+by+c_2=0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ii) $ax+by+c=0$ হতে d একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ $ax+by+c \pm d\sqrt{a^2+b^2}=0$

3. $f(x, y) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(i) $P(\alpha, \beta)$ বিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ '+' হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) > 0$

'–' হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) < 0$

(ii) মূলবিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ '+' অথবা '–' হবে যখন যথাক্রমে $c_1 \times c_2 > 0$ বা, < 0

(iii) $P(x', y')$ বিন্দুটি রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অথবা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হবে যখন যথাক্রমে $f(x', y') \times g(x' + y')$

$\times (a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ বা, < 0

(iv) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে, '+' স্থূলকোণের ও '–' সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ।

$a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে, '+' সূক্ষ্মকোণের ও '–' স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ।

4. ABC ত্রিভুজের $AB \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $AC \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $BC \equiv px + qy + r = 0$ হলে, $\angle A$ স্থূলকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হবে যদি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1a_2 + b_1b_2) > 0$, অথবা < 0 হয়।

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ হবে যদি যথাক্রমে $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) > 0$, অথবা < 0 হয়।

6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, অন্ত:ব্যাসার্ধ ,

$r = \frac{1}{a+b+c} |\delta_{ABC}|$ এবং অন্ত:কেন্দ্র $= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$; যখন $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ এবং $\delta_{ABC} = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)$ অর্থাৎ অন্ত:কেন্দ্রের

$$\text{ভুজ} = \frac{\sum x_1\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \text{ এবং}$$

$$\text{কোটি} = \frac{\sum y_1\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব =

$$\frac{|c_1\sqrt{a_2^2 + b_2^2} - c_2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

2. $f(x) \equiv ax + by + c = 0$ রেখা $g(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও AB রেখাদ্বয়ের অন্ত র্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডক হলে AB এর সমীকরণ

$(a^2 + b^2)g(x) - 2(aa_1 + bb_1)f(x) = 0$

3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখাটি N EMBED Equation.3 $|ax_1 + by_1 + c|$: $|ax_2 + by_2 + c|$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

প্রশ্নমালা III G

1 (a) (1, 2) বিন্দু হতে $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত হল। মূলবিন্দু থেকে এ লম্বের লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান : (1 , 2) বিন্দু হতে $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$\sqrt{3}x + y = \sqrt{3} \times 1 + 2$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0 \cdots \cdots (1)$

$\therefore$ মূলবিন্দুর থেকে (1) এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$

$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

(b) $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি হতে মূলবিন্দু সমদূরবর্তী । c এর ধনাত্মক

মান নির্ণয় কর। [রা.'০৮,'১২ ;চ.'০৬; য.'১০,'১৪; ঢা.'০৯]

সমাধান : $4x + 3y = c$ অর্থাৎ $4x + 3y - c = 0$ হতে

মূলবিন্দু দুরত্ব $= \frac{|-c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|c|}{5}$

আবার, $12x - 5y = 2(c + 3)$ অর্থাৎ $12x - 5y - 2(c + 3) = 0$ হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব

$= \frac{|-2(c+3)|}{\sqrt{144+25}} = \frac{|2(c+3)|}{13}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|2(c+3)|}{13} = \frac{|c|}{5} \Rightarrow \frac{2(c+3)}{13} = \pm\frac{c}{5}$

'+' নিয়ে, $10c + 30 = 13c \Rightarrow 3c = 30 \therefore c = 10$

'–' নিয়ে, $10c + 30 = -13c \Rightarrow 23c = -30$

$\Rightarrow c = -30/23$

$\therefore$ c এর ধনাত্মক মান 10. (Ans.)

(c) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$

[রা.'০১,'১০; সি.'০১; মা.'০৮; চ.'১৩]

প্রমাণ ঃ $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|3a-4b+1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3a-4b+1|}{5}$

আবার, $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|4a+3b+1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4a+3b+1|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|3a-4b+1|}{5} = \frac{|4a+3b+1|}{5}$

$\Rightarrow 3a - 4b + 1 = \pm(4a + 3b + 1)$

'+' নিয়ে, $3a - 4b + 1 - 4a - 3b - 1 = 0$

$\Rightarrow -a - 7b = 0 \Rightarrow a + 7b = 0$

'–' নিয়ে, $3a - 4b + 1 + 4a + 3b + 1 = 0$

$\Rightarrow 7a - b + 2 = 0$

$\therefore a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$

(d) মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ ও $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$ [চ.'০৩,'১১; রা.'০৪;য.'০৯]

প্রমাণ : মূলবিন্দু থেকে $x\sec\theta - y\operatorname{cosec}\theta - k = 0$ এর দূরত্ব $p = \left|\frac{-k}{\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta}}\right|$

মূলবিন্দু (0 , 0) থেকে $x\cos\theta - y\sin\theta - k\cos 2\theta = 0$ এর দূরত্ব ,

$$p' = \left|\frac{-k\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\right|$$

$$\text{L.H.S.} = 4p^2 + p'^2$$

$$= 4\frac{k^2}{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} + \frac{k\cos^2 2\theta}{1}$$

$$= \frac{4k^2}{1/\cos^2\theta + 1/\sin^2\theta} + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= \frac{4k^2(\sin^2\theta\cos^2\theta)}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= \frac{k^2(2\sin\theta\cos\theta)^2}{1} + k^2\cos^2 2\theta$$

$$= k^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$= k^2 . 1 = k^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

(e) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

[য.'০৩; ঢা.'০৬; ব.'০৮ ; কু.'১৩]

প্রমাণ : (4, 0) বিন্দু থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$$= \left|\frac{12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| = d_1 \text{ (ধরি)}$$

(– 4, 0) বিন্দু থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta - 15 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$$= \left|\frac{-12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right| = d_2 \text{ (ধরি)}$$

$\therefore$ লম্বদূরত্ব দুইটির গুণফল,

$$d_1 d_2 = \left|\frac{12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right|$$

$$\left|\frac{-12\cos\theta - 15}{\sqrt{9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta}}\right|$$

$= \left|\dfrac{225 - 144\cos^2\theta}{9\cos^2\theta + 25(1-\cos^2\theta)}\right|$

$= \left|\dfrac{9(25 - 16\cos^2\theta)}{(25 - 16\cos^2\theta)}\right| = 9$; যা θ মুক্ত।

$\therefore$ লম্ব দূরত্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত।

(f) (2, 3) বিন্দু এবং $4x + 37 - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫; কু.'১১]

সমাধান ঃ (2 , 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার দূরত্ব $= \dfrac{|4\times2 + 3\times3 - 7|}{\sqrt{16+9}}$

$= \dfrac{|8+9-7|}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$ একক

$\therefore$ (2 , 3) বিন্দু এবং প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2\times2 = 4$ একক

2(a) $3x-2y = 1$ এবং $6x-4y + 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [মা.'০৪,'০৬]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \cdots (1)$ এবং

$6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + \dfrac{9}{2} = 0 \cdots (2)$ $\therefore$

$= \dfrac{\left|-1-\frac{9}{2}\right|}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{\left|-\frac{11}{2}\right|}{\sqrt{13}} = \dfrac{11}{2\sqrt{13}}$ একক।

2(b) দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ ঃ ধরি, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপর $P(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি বিন্দু ।

$\therefore\ 4\alpha + 7\beta - 26 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{26 - 7\beta}{4}$

$3x + 4y - 12 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব

$= \dfrac{|3\alpha + 4\beta - 12|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{\left|3\dfrac{26-7\beta}{4} + 4\beta - 12\right|}{5}$

$= \dfrac{|78 - 21\beta + 16\beta - 48|}{5\times4} = \dfrac{|30 - 5\beta|}{5\times4}$

$= \dfrac{|6-\beta|}{4}$

$5x + 12y - 52 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব $=$

$\dfrac{|5\alpha + 12\beta - 52|}{\sqrt{25+144}} = \dfrac{\left|5\dfrac{26-7\beta}{4} + 12\beta - 52\right|}{13}$

$= \dfrac{|130 - 35\beta + 48\beta - 208|}{13\times4} = \dfrac{|-78 + 13\beta|}{5\times4}$

$= \dfrac{13|6-\beta|}{13\times4} = \dfrac{|6-\beta|}{4}$

$\therefore\ 4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

বিকল্প পদ্ধতি : প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $3x + 4y - 12 = 0 \cdots (1)$ ও

$5x + 12y - 52 = 0 \cdots (2)$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের একটি $4x + 7y - 26 = 0$

এখন,(1) ও (2) রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\dfrac{3x + 4y - 12}{\sqrt{9+16}} = \pm\dfrac{5x + 12y - 52}{\sqrt{25+144}}$

(1) ও (2) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$\Rightarrow \dfrac{3x + 4y - 12}{5} = \pm\dfrac{5x + 12y - 52}{13}$

$\Rightarrow 39x + 52y - 156 = \pm(25x + 60y - 260)$

'–' নিয়ে, $64x + 112y - 416 = 0$

$\Rightarrow 4x + 7y - 26 = 0$, যা একটি সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ।

3.(a) $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $x + 5y = 13 \cdots (1)$ রেখাস্থ বিন্দু (α, β) , $12x - 5y + 26 = 0 \cdots (2)$ রেখা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

$\therefore\ \alpha + 5\beta = 13 \Rightarrow \alpha = 13 - 5\beta \cdots (3)$ এবং

$\dfrac{|12\alpha - 5\beta + 26|}{\sqrt{144+25}} = 2$

$\Rightarrow 12\alpha - 5\beta + 26 = \pm 26$

'+' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta = 0$

$\Rightarrow 12(13-5\beta)-5\beta=0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156-60\beta-5\beta=0 \Rightarrow 65\beta=156$

$\Rightarrow \beta=\frac{156}{65}=\frac{12}{5} \therefore \alpha=13-5.\frac{12}{5}=1$

আবার, '–' নিয়ে, $12\alpha-5\beta+52=0$

$\Rightarrow 12(13-5\beta)-5\beta+52=0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156-60\beta-5\beta+52=0 \Rightarrow 65\beta=208$

$\Rightarrow \beta=\frac{208}{65}=\frac{16}{5} \therefore \alpha=13-5.\frac{16}{5}=-3$

$\therefore$ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $(1, \frac{12}{5}), (-3, \frac{16}{5})$

3(b) (x, y) বিন্দুটি $3x-4y+1=0$ ও $4x+3y+1=0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $x+7y=0$ অথবা, $7x-y+2=0$. [চ.'০২; সি.'০৮]

সমাধান ঃ $3x-4y+1=0$ রেখা হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $=\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|3x-4y+1|}{5}$ এবং

$4x+3y+1=0$ রেখা হতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $=\frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|4x+3y+1|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|3x-4y+1|}{5}=\frac{|4x+3y+1|}{5}$

$\therefore 3x-4y+1=\pm(4x+3y+1)$

'+' নিয়ে পাই, $3x-4y+1=4x+3y+1$

$\Rightarrow x+7y=0$

'–' নিয়ে পাই, $3x-4y+1=-4x-3y-1$

$\Rightarrow 7x-y+2=0$

4.(a) $12x-5y=7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১০ ; কু.'০৮; য.'১০,'১২; রা.'১৩; চ.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, $12x-5y=7$ অর্থাৎ $12x-5y-7=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $12x-5y+k=0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}}=2 \Rightarrow \frac{k+7}{13}=\pm 2$

$\Rightarrow k=\pm 26-7$

$\therefore k=19$ অথবা, $k=-33$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $12x-5y+19=0$

অথবা, $12x-5y-33=0$

4(b) $4x-3y=8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৭,'১৩; ঢা'১০,'১৩; য.'০৪; মা.'০৫; চ.'০৯; ব.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, $4x-3y=8$ অর্থাৎ $4x-3y-8=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x-3y+k=0$

এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}}=2 \Rightarrow \frac{k+8}{5}=\pm 2$

$\Rightarrow k=\pm 10-8$

$\therefore k=10-8=2$ এবং, $k=-10-8=-18$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x-3y+2=0$

এবং $4x-3y-18=0$

4(c) (7, 17) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1, 9) বিন্দু থেকে 6 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, (7, 17) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ, $y-17=m(x-7)$

$\Rightarrow mx-y-7m+17=0 \cdots\cdots (1)$

(1) রেখাটি থেকে (1, 9) বিন্দুর দূরত্ব

$=\left|\frac{m-9-7m+17}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\left|\frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|$

পশ্নমতে, $\left|\frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=6 \Rightarrow \left|\frac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=3$

$\Rightarrow (4-3m)^2=9(m^2+1)$

$\Rightarrow 16-24m+9m^2=9m^2+9$

$\Rightarrow 24m=7 \Rightarrow m=7/24$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y-17=\frac{7}{24}(x-7)$

$\Rightarrow 24y-408=7x-49$

$\Rightarrow 7x-24y+359=0$

5. (a) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল –1 এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

[কু.'০৬; সি.'০৯]

সমাধান ঃ ধরি, -1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y = -1.x + c \Rightarrow x + y - c = 0 \cdots(1)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|-c|}{\sqrt{2}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|-c|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow |c| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow c = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

5 (b) মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০৫; সি.'০৬,'১১; রা.' ০৯; দি.'০৯, '১১,'১২; ব.'১১; মা.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots \cdots (1)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|k|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k|}{\sqrt{16+9}} = 7 \Rightarrow \frac{k}{5} = \pm 7$

$= \pm 35$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x + 3y + 35 = 0$ এবং $4x + 3y - 35 = 0$

5(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত। [চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, রেখাটির সমীকরণ,

$y = x \tan 60° + c \Rightarrow y = \sqrt{3}x + c$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + c = 0 \cdots \cdots(1)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $= \frac{|c|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|c|}{2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|c|}{2} = 4 \Rightarrow \frac{c}{2} = \pm 4 \Rightarrow c = \pm 8$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$

অথবা, $\sqrt{3}x - y - 8 = 0$

5(d) একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে । মূল বিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর।

সমাধান ঃ ধরি, অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a \cdots(i)$, যেখানে $a > 0$.

মূল বিন্দু থেকে (i) এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$\frac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4 \Rightarrow |-a| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 4$, $[\because a > 0.]$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $x + y = 4\sqrt{2}$

6(a) $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডক y–অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

[রা.'১১,'১৪; সি.'০৫; ব.'১২;কু.'১৪; চুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান ঃ প্রদত্ত $y = 2x + 1$ অর্থাৎ $2x - y + 1 = 0$ ও $2y - x = 4$ অর্থাৎ $x - 2y + 4 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{4+1}} = \pm \frac{x - 2y + 4}{\sqrt{1+4}}$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = \pm(x - 2y + 4)$

'+' নিয়ে, $x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, যা y–অক্ষকে P(0 , 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

'–' নিয়ে, $2x - y + 1 = -x + 2y - 4$

$\Rightarrow 3x - 3y = -5 \Rightarrow \frac{x}{-5/3} + \frac{y}{5/3} = 1$, যা y–অক্ষকে Q(0 , $\frac{5}{3}$) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ PQ এর দূরত্ব $= |3 - \frac{5}{3}| = |\frac{4}{3}| = 1\frac{1}{3}$

6(b) দেখাও যে, (0,1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত। [রা.'০৬; সি.'০৮,'১৪; কু. '১১,'১৩; চ. '০৮; য.'১১; দি.'১৩]

প্রমাণ : প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদ্বয় হতে (0,1) বিন্দুটি সমদূরবর্তী ।

(1) থেকে (0,1) বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|0 - 5 + 1|}{\sqrt{144+25}}$ [ব.'১

$= \frac{|-4|}{13} = \frac{4}{13}$

(2) থেকে (0,1) বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{|0+12-16|}{\sqrt{25+144}}$

$= \frac{|-4|}{13} = \frac{4}{13}$

$\therefore$ পদত্ত রেখাদ্বয় হতে (0,1) বিন্দুটি সমদূরবর্তী ।

$\therefore$ (0,1) বিন্দুটি পদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ পদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{12x-5y+1}{\sqrt{144+25}} = \pm\frac{5x+12y-16}{\sqrt{25+144}}$$

$\Rightarrow 12x - 5y + 1 = \pm(5x + 12y - 16)$

'+' নিয়ে, $12x - 5y + 1 = 5x + 12y - 16$

$\Rightarrow 7x - 17y + 17 = 0 \cdots(1)$

ধরি, $f(x, y) \equiv 7x - 17y + 17 = 0$

'–' নিয়ে, $12x - 5y + 1 = -5x - 12y + 16$

$\Rightarrow 17x + 7y - 15 = 0 \cdots\cdots(2)$

ধরি, $g(x, y) \equiv 17x + 7y - 15 = 0$

এখন, $f(0, 1) = 7.0 - 17.1 + 17 = 0$ এবং

$g(0, 1) = 17.0 + 7.1 - 15 = -8$

$\therefore$ (0,1) বিন্দুটি (1) কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ (0,1) বিন্দুটি (1) দ্বারা সূচিত সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

6(c) $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০২; দি.'০৯]

সমাধান ঃ $4y - 3x = 3 \Rightarrow 3x - 4y + 3 = 0$ কে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর সাথে এবং $3y - 4x = 5$

$\Rightarrow 4x - 3y + 5 = 0$ কে $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 4 + (-4) \times (-3)$$
$$= 12 + 12 = 24 > 0$$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x-4y+3}{\sqrt{9+16}} = \frac{4x-3y+5}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 3x - 4y + 3 = 4x - 3y + 5$

$\Rightarrow -x - y - 2 = 0 \therefore x + y + 2 = 0$ (Ans.)

6(d) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০৬;ব.'০৯]**

সমাধান ঃ $3x + 4y = 11 \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0$ কে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এর সাথে এবং $12x - 5y - 2 = 0$ কে $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 12 + 4 \times (-5)$$
$$= 36 - 20 = 16 > 0$$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+4y-11}{\sqrt{9+16}} = -\frac{12x-5y-2}{\sqrt{144+25}}$

$\Rightarrow \frac{3x+4y-11}{5} = -\frac{12x-5y-2}{13}$

$\Rightarrow 39x + 52y - 143 = -60x + 25y + 10$

$\Rightarrow 99x + 27y - 153 = 0$

$\therefore 11x + 3y - 17 = 0$ (Ans.)

7(a) $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের কোনটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

[য.'০২,'০৭,'১২

সমাধান: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ,

$$\frac{4x-4y+3}{\sqrt{16+16}} = \pm\frac{x+7y-2}{\sqrt{1+49}}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-4y+3}{4\sqrt{2}} = \pm\frac{x+7y-2}{5\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow 20x - 20y + 15 = \pm(4x + 28y - 8)$

'+' নিয়ে, $20x - 20y + 15 = 4x + 28y - 8$

$\Rightarrow 16x - 48y + 23 = 0 \cdots (1)$

'–' নিয়ে, $20x - 20y + 15 = -4x - 28y + 8$

$\Rightarrow 24x + 8y + 7 = 0 \cdots (2)$

২য় অংশ : (1) রেখার ঢাল $= -\frac{16}{-48} = \frac{1}{3}$

(2) রেখার ঢাল $= -\frac{24}{8} = -3$

এ ঢাল দুইটির গুণফল $= \frac{1}{3} \times -3 = -1$

$\therefore$ সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

৩য় অংশ ঃ প্রদত্ত রেখা দুইটির ধ্রুব পদ 3 ও −2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত বলে '−' চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত সমদ্বিখন্ডক সমীকরণ অর্থাৎ $24x + 8y + 7 = 0$, মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

7.(b) $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $12x + 5y + 13 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দু ধারণ কারে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৭]

সমাধান : প্রদত্ত রেখা দুইটির ধ্রুব পদ 2 ও 13 সমচিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{4x+3y+2}{\sqrt{16+9}} = \frac{12x+5y+13}{\sqrt{144+25}}$$

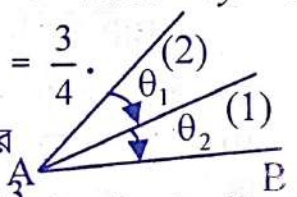
$$\Rightarrow \frac{4x+3y+2}{5} = \frac{12x+5y+13}{13}$$

$$\Rightarrow 60x + 25y + 65 = 52x + 39y + 26$$

$$\therefore 8x - 14y + 39 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7. (c) $x + y + 1 = 0$ রেখাটি $3x - 4y + 3 = 0$ ও AB রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটির সমদ্বিখন্ডক। AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB রেখার ঢাল m_2, $x + y + 1 = 0 \cdots(1)$ রেখার ঢাল, $m = -1$ এবং $3x - 4y + 3 = 0 \cdots(2)$ রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$.



(1), (2) ও AB রেখাত্রয়ের ছেদবিন্দু $= \left(\frac{3+4}{-4-3}, \frac{3-3}{-4-3}\right) = (-1, 0)$

(2) ও (1) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং (1) ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1 + mm_2}$ পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + mm_2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}+1}{1+(-1)\frac{3}{4}} = \frac{-1-m_2}{1-m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{4+3}{4-3} = \frac{-1-m_2}{1-m_2} \Rightarrow 7 = \frac{-1-m_2}{1-m_2}$$

$$\Rightarrow 7 - 7m_2 = -1 - m_2 \Rightarrow 6m_2 = 8$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$$

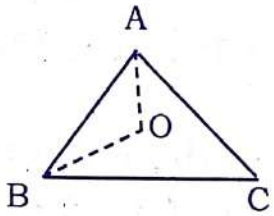
$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ $y - 0 = \frac{4}{3}(x + 1)$

$\Rightarrow 3y = 4x + 4 \therefore 4x - 3y + 4 = 0$ (Ans.)

[**MCQ এর জন্য,** $(1^2 + 1^2)(3x - 4y + 3) - 2(1 \times 3 + 1 \times -4)(x + y + 1) = 0$]

7(d) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O। AB ও AO এর সমীকরণ যথাক্রমে $x - 7y + 5 = 0$ ও $x + 3y - 2 = 0$ হলে AC বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান :



ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O।

$\therefore$ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক AO.

ধরি, AC বাহুর ঢাল m_2,

$AO \equiv x + 3y - 2 = 0 \cdots(1)$ এর ঢাল, $m = -\frac{1}{3}$ এবং $AB \equiv x - 7y + 5 = 0 \cdots(2)$ বাহুর ঢাল, $m_1 = \frac{1}{7}$.

(2) ও (1) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং (1) ও AC এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1 + mm_2}$ পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + mm_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{7}(-\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{1}{3}-m_2}{1+(-\frac{1}{3})m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{21-1} = \frac{-1-3m_2}{3-m_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1-3m_2}{3-m_2}$$

$$\Rightarrow 3 - m_2 = -2 - 6m_2 \Rightarrow 5m_2 = -5$$

$\Rightarrow m_2 = -1$

এখন, $(1) - (2) \Rightarrow 10y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{10}$

(1) হতে, $x = 7.\frac{7}{10} - 5 = \frac{49-50}{10} = -\frac{1}{10}$

A শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10})$

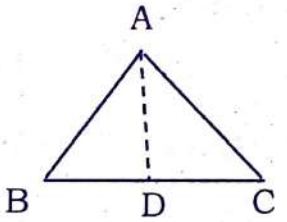
$\therefore$ $A(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10})$ বিন্দুগামী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট AC বাহুর সমীকরণ, $y - \frac{7}{10} = -1(x + \frac{1}{10})$

$\Rightarrow 10y - 7 = -10x - 1 \Rightarrow 10x + 10y = 6$

$\therefore 5x + 5y = 3$ (Ans.)

7(e) ABC ত্রিভুজে, BC এর উপর D একটি বিন্দু যেন AB : AC = BD : CD । AB ও AD এর সমীকরণ যথাক্রমে $3x - 2y - 4 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ হলে AC বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান :



ABC ত্রিভুজে AB : AC = BD : CD ।

$\therefore$ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক AD ।

ধরি, AC বাহুর ঢাল m_2,

$AD \equiv 4x + y - 9 = 0 \cdots(1)$ রেখার ঢাল, $m = -4$ এবং $AB \equiv 3x - 2y - 4 = 0 \cdots(2)$ রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{2}$.

(2) ও (1) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং

(1) ও AC এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1 + mm_2}$

পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + mm_2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2} + 4}{1 + \frac{3}{2}(-4)} = \frac{-4 - m_2}{1 + (-4)m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3+8}{2-12} = \frac{-4 - m_2}{1 - 4m_2} \Rightarrow \frac{11}{-10} = \frac{-4 - m_2}{1 - 4m_2}$$

$\Rightarrow 11 - 44m_2 = 40 + 10m_2 \Rightarrow 54m_2 = -29$

$\Rightarrow m_2 = -\frac{29}{54}$

এখন, $2 \times (1) + (2) \Rightarrow 8x - 18 + 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$

(1) হতে, $y = 9 - 8 = 1$

A শীর্ষের স্থানাঙ্ক (2, 1)

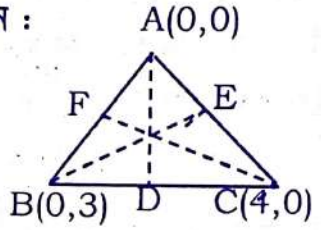
$\therefore$ A(2, 1) বিন্দুগামী এবং $-\frac{29}{54}$ ঢালবিশিষ্ট AC বাহুর সমীকরণ, $y - 1 = -\frac{29}{54}(x - 2)$

$\Rightarrow 54y - 54 = -29x + 58$

$\therefore 29x + 54y = 112$ (Ans.)

8. (a) (0 , 0) , (0 , 3) ও (4 , 0) বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তদ্বিখন্ডক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [কু.'১০; সি.'১১]

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি A(0,0), B(0, 3) ও C(4, 0) এবং AD, BE ও CF ত্রিভুজটির কোণগুলির অন্তর্দ্বিখন্ডক BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $AC = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

$AB = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

$\angle A$ এর অন্তর্দ্বিখন্ডক AD বলে, D বিন্দু BC কে AB: AC = 3 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।

$\therefore D \equiv (\frac{3.4 + 4.0}{3+4}, \frac{3.0 + 4.3}{3+4}) = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$

অনুরূপভাবে, $E \equiv (\frac{3.4 + 5.0}{3+5}, \frac{3.0 + 5.0}{3+5}) = (\frac{3}{2}, 0)$

$F \equiv (\frac{4.0 + 5.0}{4+5}, \frac{4.3 + 5.0}{4+5}) = (0, \frac{4}{3})$

$\therefore$ AD অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$y = \frac{12/7}{12/7}x \therefore y = x \cdots(1)$

BE অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(x-0)(0-0)-(y-3)(0-\frac{3}{2})=0$

$\Rightarrow 3x+\frac{3}{2}y-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow 6x+3y-9=0$

$\therefore 2x+y-3=0 \cdots (2)$

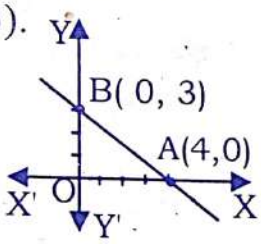
CF অন্তর্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(x-4)(0-\frac{4}{3})-(y-0)(4-0)=0$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}-4y=0 \Rightarrow -4x-12y+16=0$

$\therefore x+3y-4=0 \cdots (3)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, OAB ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি O(0,0), A(4, 0) ও B(0, 3).



স্পষ্টতঃ OA ও OB বাহু যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর।

$\therefore$ OA বাহুর সমীকরণ $y=0$

OB বাহুর সমীকরণ $x=0$

এবং AB বাহুর সমীকরণ $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

$\Rightarrow 3x+4y-12=0$

OAB ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$.

$\therefore \angle OAB$ ও $\angle OBA$ সূক্ষ্মকোণ।

স্পষ্টতঃ $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের ঢাল ধনাত্মক ।

অতএব, $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{y}{\sqrt{1^2}}=\frac{x}{\sqrt{1^2}} \quad \therefore y=x \cdots(1)$

BO ও BA বাহুর জন্য,

$a_1a_2+b_1b_2 = 1.3+0.4>0$

$\therefore \angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 3x+4y-12=-5x$

$\Rightarrow 8x+4y-12=0$

$\therefore 2x+y-3=0 \cdots\cdots (2)$

আবার, AO ও AB বাহুর জন্য,

$a_1a_2+b_1b_2 = 0.3+1.4>0$

$\therefore \angle OAB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{y}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 3x+4y-12=-5y$

$\Rightarrow 3x+9y-12=0$

$\therefore x+3y-4=0 \cdots (3)$

দ্বিতীয় অংশ : সমীকরণ (1) ও (2) সমাধান করে পাই,

$x=1, y=1$ যা সমীকরণ (৩) কেও সিদ্ধ করে ।

$\therefore \Delta ABC$ এর কোণগুলির অন্তর্দ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

8. (b) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $4x+3y-12=0$, $3x-4y+16=0$ এবং $4x-3y-12=0$ তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। **[সি.'০৩]**

সমাধান: ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$AB \equiv 4x+3y-12=0 \cdots(1)$ i.e., $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

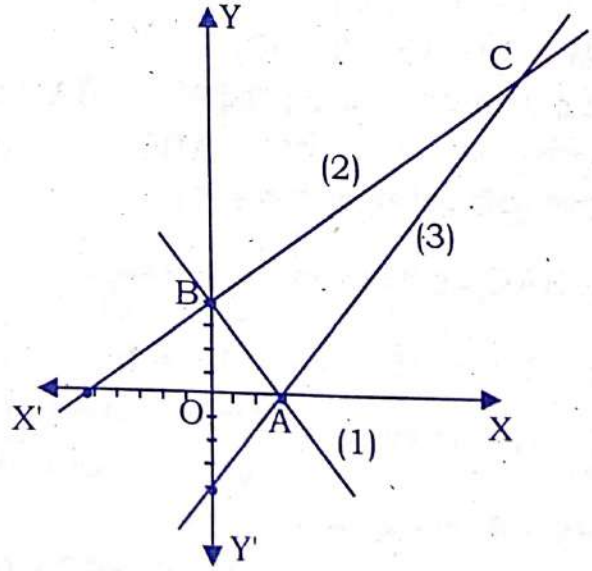
$BC \equiv 3x-4y+16=0 \cdots(2)$ i.e., $\frac{x}{\frac{-16}{3}}+\frac{y}{4}=1$

$CA \equiv 4x-3y-12=0 \cdots(3)$ i.e., $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ ' −' করে পাই,

$4x+3y-12=0, -3x+4y-16=0,$
$4x-3y-12=0$



$\angle ABC$ এবং $\angle BAC$ কোণ দুইটির মধ্যে মূলবিন্দু নাই। অতএব, $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{-3x+4y-16}{\sqrt{9+16}}$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 3x - 4y + 16$

$\Rightarrow x + 7y - 28 = 0 \cdots (4)$ এবং

$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4x-3y-12}{\sqrt{16+9}}$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = -4x + 3y + 12$

$\Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$

$\therefore (4) \Rightarrow 3 + 7y - 28 = 0 \Rightarrow y = \frac{25}{7}$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র $(3, \frac{25}{7})$.

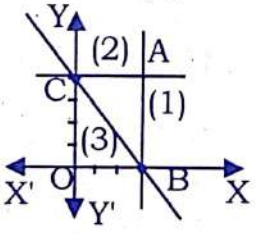
8. (c) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $x = 3, y = 4$ এবং $4x + 3y = 12$ তার কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $x = 3 \cdots (1)$

$y = 4 \cdots (2)$ ও

$4x + 3y = 12 \cdots (3)$

অর্থাৎ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ '−' করে পাই,

$x - 3 = 0 \cdots (1), y - 4 = 0 \cdots (2)$ এবং

$4x + 3y - 12 = 0 \cdots (3)$

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$\therefore \angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{x-3}{\sqrt{1}} = \frac{y-4}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow x - 3 = y - 4 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

$\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{x-3}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 5(x - 3) = -4x - 3y + 12$

$\Rightarrow 9x + 3y - 15 - 12 = 0 \Rightarrow 9x + 3y - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 9 = 0$

$\angle ACB$ এর সমদ্বিখন্ডক $\frac{y-4}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 5(y - 4) = -4x - 3y + 12$

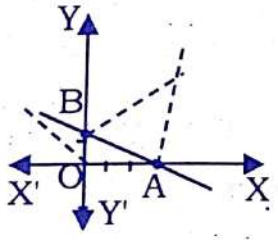
$\Rightarrow 5y - 20 + 4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 4x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ $x - y + 1 = 0$, $3x + y - 9 = 0$ এবং $x + 2y - 8 = 0$

8. (d) $5x + 12y = 15$ এবং অক্ষ দুইটি সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটির বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদুইটি সমন্বয়ে OAB ত্রিভুজ গঠন করে যার বাহু তিনটি

$OA \equiv y = 0 \cdots (1)$ $OB \equiv x = 0 \cdots (2)$ এবং

$AB \equiv 5x + 12y = 15 \cdots (3)$

i.e., $\frac{x}{3} + \frac{y}{5/4} = 1$

চিত্রে OAB ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$. অতএব, $\angle OAB$ ও $\angle OBA$ এর বহিঃস্থ কোণ দুইটি স্থূলকোণ এবং $\angle AOB$ এর বহির্দ্বিখন্ডকের ঢাল ঋণাত্মক।

$\therefore$ (1) ও (2) এর অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{x}{\sqrt{1}} = -\frac{y}{\sqrt{1}} \Rightarrow x + y = 0$

(1) ও (3) সমীকরণে x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 0 \times 5 + 1 \times 12 = 12 > 0$

$\therefore$ (1) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{5x+12y-15}{\sqrt{25+144}} = \frac{y}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13y$

$\Rightarrow 5x - y - 15 = 0$

আবার, (2) ও (3) সমীকরণে, x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 1 \times 5 + 0 \times 12 = 5 > 0$

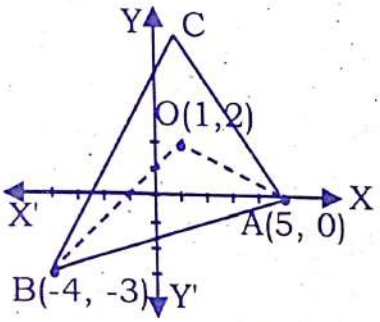
$\therefore$ (2) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{5x+12y-15}{\sqrt{25+144}}=\frac{x}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow 5x+12y-15=13x$

$\Rightarrow 8x-12y+15=0$

8. (e) ΔABC এর শীর্ষ দুইটি A(5 , 0), B(−4, −3) এবং অন্তঃকেন্দ্র (1, 2) হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র O(1, 2).

AB এর ঢাল $=\frac{0+3}{5+4}=\frac{1}{3}$

AO এর ঢাল $=\frac{0-2}{5-1}=-\frac{1}{2}$

BO এর ঢাল $=\frac{2+3}{1+4}=1$

AC রেখার ঢাল m_1 হলে,

$$\frac{m_1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m_1}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+(-\frac{1}{2}).\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{2m_1+1}{2-m_1}=\frac{-3-2}{8-3}\Rightarrow\frac{2m_1+1}{2-m_1}=-1$$

$\Rightarrow 2m_1+1=-2+m_1\Rightarrow m_1=-3$

$\therefore$ AC রেখার সমীকরণ, $y-0=-3(x-5)$

$\Rightarrow y=-3x+15 \cdots (1)$

আবার, BC রেখার ঢাল m_2 হলে,

$$\frac{m_2-1}{1+1.m_2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1.\frac{1}{3}}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2m_2-2=1+m_2\Rightarrow m_2=3$

$\therefore$ BC রেখার সমীকরণ, $y+3=3(x+4)$

$\Rightarrow y+3=3x+12$

$\Rightarrow -3x+15+3=3x+12$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $y=-3.1+15=12$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $C\equiv(1, 12)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র O(1, 2).

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5+4}=\frac{y-0}{0+3}$

$\Rightarrow x-5=3y\Rightarrow x-3y-5=0$

AO রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-1}=\frac{y-0}{0-2}$

$\Rightarrow -2x+10=4y\Rightarrow x+2y-5=0$

BO রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1+4}=\frac{y-2}{2+3}$

$\Rightarrow x-1=y-2\Rightarrow x-y+1=0$

এখন, AC ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক AO. অতএব, AC রেখার সমীকরণ,

$(1^2+2^2)(x-3y-5)-2\{1.1+(-3)(2)\}(x+2y-5)=0$

$\Rightarrow 5(x-3y-5)+10(x+2y-5)=0$

$\Rightarrow x-3y-5+2x+4y-10=0$

$\Rightarrow 3x+y-15=0\Rightarrow y=-3x+15\cdots(1)$

আবার, BA ও BC এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক BO. অতএব, BC রেখার সমীকরণ,

$(1^2+1^2)(x-3y-5)-2\{1.1+(-3)(-1)\}(x-y+1)=0$

$\Rightarrow x-3y-5-4(x-y+1)=0$

$\Rightarrow x-3y-5-4x+4y-4=0$

$\Rightarrow -3x+-3x+15-9=0$ [(1) দ্বারা]

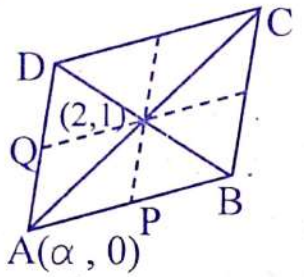
$\Rightarrow -6x=-6\Rightarrow x=1$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $y=-3.1+15=12$

$\therefore$ AC ও BC এর ছেদবিন্দু $C\equiv(1, 12)$

10. (d) ABCD রম্বসের দুইটি বাহু $x-y=5$ ও $7x-y=3$ এর সমান্তরাল, কর্ণদ্বয় (2, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে A এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, A এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x - y = 5$ এর সমান্তরাল $(2,1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = 2 - 1 = 1 \cdots$(i) এবং

$A(\alpha,0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = \alpha \cdots$(ii)

আবার, $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল $(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\times2 - 1$

$\Rightarrow 7x - y = 13 \cdots$ (iii) এবং $A(\alpha, 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\alpha \cdots$ (iv).

(i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু $P(\frac{7\alpha-1}{6}, \frac{7\alpha-7}{6})$

(ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $Q(\frac{13-\alpha}{6}, \frac{13-7\alpha}{6})$

$\therefore$ $AP = AQ$, [$\because$ ABCD একটি রম্বস]

$\Rightarrow AP^2 = AQ^2$

$\Rightarrow (\alpha - \frac{7\alpha-1}{6})^2 + (\frac{7\alpha-7}{6})^2 = (\alpha - \frac{13-\alpha}{6})^2 + (\frac{13-7\alpha}{6})^2$

$\Rightarrow (1-\alpha)^2 + 49(1-\alpha)^2 = 2(7\alpha - 13)^2$

$\Rightarrow 25(1-\alpha)^2 = (7\alpha - 13)^2$

$\Rightarrow 5(1-\alpha) = \pm(7\alpha - 13)$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = 7\alpha - 13 \Rightarrow \alpha = 3/2$

'–' চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = -7\alpha + 13 \Rightarrow \alpha = 4$

$\therefore$ A এর স্থানাঙ্ক $(4, 0)$ বা, $(3/2, 0)$.

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

9. দেখাও যে, $(-\frac{1}{2}, -2)$ বিন্দুটি $2x-3y+4=0$ ও $6x+4y-7=0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী। **[য.'০৬]**

প্রমাণ: $2x - 3y + 4 = 0$ রেখা হতে $(-\frac{1}{2}, -2)$ এর দূরত্ব $= \frac{|2\times-\frac{1}{2} - 3\times-2 + 4|}{\sqrt{2^2+3^2}}$ (১)

$= \frac{|-1+6+4|}{\sqrt{13}} = \frac{|9|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$

$6x + 4y - 7 = 0$ রেখা হতে $(-\frac{1}{2}, -2)$ এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|6\times-\frac{1}{2} + 4\times-2 - 7|}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{|-3-8-7|}{\sqrt{36+16}}$

$= \frac{|-18|}{\sqrt{52}} = \frac{18}{2\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু হতে রেখা দুইটি সমদূরবর্তী। (১)

10. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : ধরি, মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = mx$ (১)

অর্থাৎ $mx - y = 0 \cdots (1)$

$2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$

রেখার ঢাল যথাক্রমে $m_1 = -\frac{2}{3}$ এবং $m_2 = -\frac{3}{2}$ (১)

প্রদত্ত রেখাদ্বয় (1) রেখার সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে বলে, $\frac{m - m_1}{1 + mm_1} = \pm\frac{m - m_2}{1 + mm_2}$ (১)

$\Rightarrow \frac{m + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}m} = \pm\frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}m}$

$\Rightarrow \frac{3m+2}{3-2m} = \pm\frac{2m+3}{2-3m}$

$\Rightarrow$ '+' নিয়ে, $4 - 9m^2 = 9 - 4m^2$

$\Rightarrow 5m^2 = -5$, যা সম্ভব নয়।

'–' নিয়ে, $4 - 9m^2 = -9 + 4m^2$

$\Rightarrow 13m^2 = 13 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $x - y = 0$ বা, $x + y = 0$ (১)

11(a) $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এই লম্ব x - অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [কু.'০৭]

সমাধান : $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{|3 - 1 + 8|}{\sqrt{3+1}}$ (১)

$$= \frac{10}{2} = 5$$

২য় অংশ : প্রদত্ত রেখার ঢাল $= \sqrt{3}$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (১)

$\therefore$ লম্বরেখা x -অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাণ $= \tan^{-1}(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ (১)

$= 180^0 - \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 180^0 - 30^0 = 150^0$ (১)

11 (b) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দু দুটি হতে $bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$ [কু.'০৯]

প্রমাণ : $(c, 0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব $= \left|\dfrac{bc\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| = d_1$ (ধরি)(১)

এবং $(-c, 0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব

$$= \left|\frac{-bc\cos\theta - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}\right| = d_2 \text{ (ধরি)}$$

$$\therefore d_1 d_2 = \left|\frac{-(b^2c^2\cos^2\theta - a^2b^2)}{b^2\cos^2\theta + a^2 - a^2\cos^2\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{-b^2(c^2\cos^2\theta - a^2)}{(b^2 - a^2)\cos^2\theta + a^2}\right|$$

$$= \left|\frac{b^2(a^2 - c^2\cos^2\theta)}{-c^2\cos^2\theta + a^2}\right| \quad [\because a^2 = b^2 + c^2]$$

$\therefore$ লম্বদ্বয়ের গুণফল $= b^2$ (১)

12. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\dfrac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[দি.'১০; চ.'১২; য.'১৩; ঢা.'১৪; সি.'১৩; ব.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 4y + k = 0 \cdots\cdots (1)$ (১)

(1) রেখা হতে $(1,-2)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{|3 - 8 + k|}{\sqrt{9+16}}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|3 - 8 + k|}{\sqrt{9+16}} = 7\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{k-5}{5} = \pm\dfrac{15}{2}$ (১)

$\therefore$ $2k - 10 = 75 \Rightarrow k = 85/2$ এবং
$2k - 10 = -75 \Rightarrow k = -65/2$

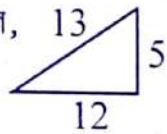
$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $3x + 4y + \dfrac{85}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x + 8y + 85 = 0$

এবং $3x + 4y - \dfrac{65}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 8y = 65$ (১)

13. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c = 5$ একক।

সমাধান: দেওয়া আছে, রেখার ঢাল,



$m = \tan\sin^{-1}(5/13)$ (১)

$= \tan\tan^{-1}\dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{12}$ এবং (১)

y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c = 5$ একক।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \dfrac{5}{12}x + 5 \Rightarrow 12y = 5x + 60$ (Ans.) (১)

14. (a) $(3,2)$ ও $(7,3)$ বিন্দু দুইটি $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু, ঠিক সে পার্শ্বে অবস্থিত?

সমাধান ঃ ধরি, $f(x, y) = 2x - 5y + 3 = 0$

$\therefore$ $f(3, 2) = 2 \times 3 - 5 \times 2 + 3 = -1,$ (১)
$f(7, 3) = 14 - 15 + 3 = 2,$
$f(0, 0) = 2 \times 0 - 5 \times 0 + 3 = 3$

$f(3, 2)$ ও $f(7, 3)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট বলে, বিন্দু দুইটি রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। (১)

আবার, $f(7, 3)$ ও $f(0, 0)$ একই চিহ্নবিশিষ্ট বলে, মূলবিন্দু ও $(7, 3)$ বিন্দু রেখাটির একই পার্শ্বে অবস্থিত। (১)

14. (b) দেখাও যে, মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv x - y + 4 = 0 \cdots (1)$

এবং $g(x, y) \equiv x + 2y - 4 = 0 \cdots (2)$

$\therefore$ $f(0,0) = 0 - 0 + 4 = 4$ (১)

$f(1, 6) = 1 - 6 + 4 = -1$

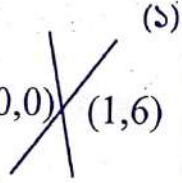
$f(0,0) \times f(1, 6) = 4 \times -1 < 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দু (1) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত। (১)

আবার, $g(0,0) = 0 + 0 - 4 = -4$

$g(1, 6) = 1 + 12 - 4 = 9$

$g(0,0) \times g(1, 6) = -4 \times 9 < 0$



$\therefore$ মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দু (2) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত। (১)

$\therefore$ মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত। (১)

14(c) দেখাও যে, মূলবিন্দু এবং (2, – 1) বিন্দুটি যথাক্রমে $2x - y - 4 = 0$ এবং $4x + 2y - 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত স্থূলকোণে এবং সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরি, $f(x, y) \equiv 2x - y - 4 = 0 \cdots (1)$

এবং $g(x, y) \equiv 4x + 2y - 9 = 0 \cdots (2)$

$\therefore$ $f(0,0) = -4, g(0, 0) = -9$ (১)

$f(2, -1) = 4 + 1 - 4 = 1$

$g(2, -1) = 8 - 2 - 9 = -3$

এবং $a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \times 4 + (-1) \times 2 = 6$

এখন, $f(0,0) \times g(0,0)(a_1a_2 + b_1b_2) = 216 > 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত স্থূলকোণে অবস্থিত। (১)

এবং $f(2,-1) \times g(2,-1)(a_1a_2 + b_1b_2) = -18 < 0$

$\therefore$ $(2, -1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত। (১)

15. $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $4x - 6y - 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভূক্ত যে কোণটি (1 , 2) বিন্দু ধারণ করে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $f(x, y) \equiv 2x + 3y + 5 = 0$

এবং $g(x, y) \equiv 4x - 6y - 7 = 0$

$f(1,2) \times g(1, 2) = (2 + 6 + 5)(4 - 12 - 7)$

$= 12 .(-15) < 0$ (১)

$\therefore$ (1,2) বিন্দু ধারণকারী সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x + 3y + 5}{\sqrt{4+9}} = -\frac{4x - 6y - 7}{\sqrt{16+36}}$$ (১)

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 5}{\sqrt{13}} = -\frac{4x - 6y - 7}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 5}{\sqrt{13}} = -\frac{4x - 6y - 7}{2\sqrt{13}}$$

$\Rightarrow 4x + 6y + 10 = -4x + 6y + 7$

$\Rightarrow 8x + 3 = 0$ (Ans.)

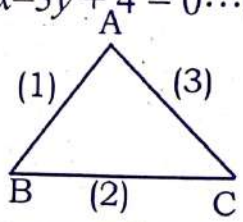
16. (a) $4x + 3y = 12$, $3x - 4y + 16 = 0$ ও $4x - 3y + 4 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$AB \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots (1)$

$BC \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots (2)$

$CA \equiv 4x - 3y + 4 = 0 \cdots (3)$



(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$$A \equiv \left(\frac{12 - 36}{-12 - 12}, \frac{-48 - 16}{-12 - 12}\right) = \left(1, \frac{8}{3}\right)$$ (১)

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$$B \equiv \left(\frac{48 - 48}{-16 - 9}, \frac{-36 - 64}{-16 - 9}\right) = (0, 4)$$

$\therefore$ $A(1, \frac{8}{3})$ বিন্দুগামী এবং BC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $4x + 3y = 4.1 + 3.\frac{8}{3}$ (২)

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0 \cdots (4)$

আবার , B(0, 4) বিন্দুগামী এবং AC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $3x + 4y = 3.0 + 4.4$

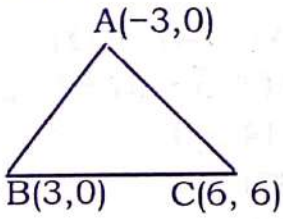
$\Rightarrow 3x + 4y - 16 = 0 \cdots (5)$

(4) ও (5) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-48+48}{16-9}, \frac{-36+64}{16-9}) = (0, 4)$, যা প্রদত্ত ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র (১)

16 (b) A(– 3 , 0) , B(3 , 0) ও C(6 , 6) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান :



A (−3,0) বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$(3-6)x + (0-6)y = -3\times -3 - 6\times 0$ (২)

$\Rightarrow -3x - 6y - 9 = 0$

$\Rightarrow x + 2y + 3 = 0 \cdots (1)$

B(3,0) বিন্দুগামী এবং AC রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$(-3-6)x + (0-6)y = -9.3 + (-6).0$

$\Rightarrow -9x - 6y + 27 = 0$

$\Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0 \cdots \cdots (2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $(\frac{-18-6}{2-6}, \frac{9+9}{2-6})$

$= (\frac{-24}{-4}, \frac{18}{-4}) = (6, -\frac{9}{2})$, যা ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র। (১)

এবং AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{3}{2}, 3)$. (১)

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{9}{2}, 3)$ দিয়ে যায় এবং BC এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$(3-6)x + (0-6)y = -3.\frac{9}{2} + (-6).3$

$\Rightarrow -3x - 6y = \frac{-27-36}{2} = \frac{-63}{2}$

$\Rightarrow -6x - 12y + 63 = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y - 21 = 0 \cdots (3)$

আবার, AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{3}{2}, 3)$ দিয়ে যায় এবং AC এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$(-3-6)x + (0-6)y = -9.\frac{3}{2} - 6.3$

$\Rightarrow -9x - 6y = \frac{-27-36}{2} = \frac{-63}{2}$

$\Rightarrow -18x - 12y + 63 = 0$

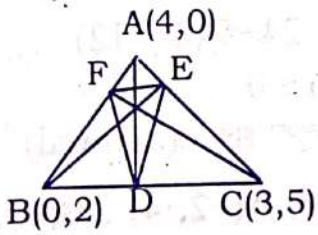
$\Rightarrow 6x + 4y - 21 = 0 \cdots \cdots (4)$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু $(\frac{-84+84}{8-24}, \frac{-126+42}{8-24})$

$= (\frac{0}{-16}, \frac{-84}{-16}) = (0, \frac{21}{4})$, যা ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র । (১)

16. (c) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষ তিনটি A(4 , 0), B(0 , 2) ও C(3 , 5) হলে, Δ ABC এর পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, Δ ABC এ AD , BE, CF যথাক্রমে BC, CA, AB এর উপর লম্ব ।



অতএব, Δ ABCএর পাদত্রিভুজ Δ DEF. (১)

BC এর উপর লম্ব AD এর সমীকরণ,

$(3-0)x + (5-2)y = 3\times 4 + 3\times 0$ (২)

$\Rightarrow 3x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow x + y - 4 = 0 \cdots (1)$

আবার, CA এর উপর লম্ব BE এর সমীকরণ,

$(4-3)x+(0-5)y=1\times0-5\times2$

$\Rightarrow x-5y+10=0 \cdots (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow 6y-14=0 \Rightarrow y=\frac{7}{3}$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x+\frac{7}{3}-4=0$

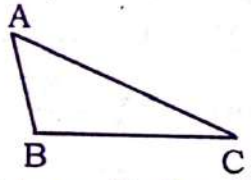
$\Rightarrow x+\frac{7-12}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$\therefore$ ΔABC এর লম্বকেন্দ্র $=(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$. (১)

$\therefore$ পাদত্রিভুজ ΔDEF পরিকেন্দ্র = ΔABC এর লম্বকেন্দ্র $=(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$ (Ans.) (১)

17. (a) ΔABC এর AB , BC , CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x+3y-12=0$, $x-4y+4=0$, $6x+5y-15=0$. দেখাও যে, $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

প্রমাণ :



AB , BC , CA বাহু তিনটির সমীকরণকে যথাক্রমে $a_1x+b_1y+c_1=0$,

$a_2x+b_2y+c_2=0$,

$px+qy+r=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1a_2+b_1b_2)$ (১)

$= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \{4.1+3.(-4)\}$

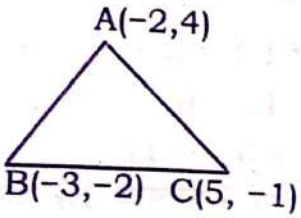
$=(20-16)(-24-5)(4-12)$ (১)

$=4(-29)(-8)>0$

$\therefore$ $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ। (Showed) (১)

17. (b) প্রমাণ কর যে, A(−2, 4) , B(−3, −2) ও C(5, −1) বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ ।

প্রমাণ ঃ



$AB=\sqrt{(-2+3)^2+(4+2)^2}$

$=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$ (১)

$BC=\sqrt{(-3-5)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{64+1}$

$=\sqrt{65}$

$CA=\sqrt{(5+2)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{49+25}$

$=\sqrt{74}$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর । অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে। (১)

এখন, $\angle A$ এর ক্ষেত্রে,

$(x_1-x_2)(x_2-x_3)+(y_1-y_2)(y_2-y_3)$

$=(-2+3)(-2-5)+(4+2)(4+1)$

$=-7+30=23>0$

$\therefore$ $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ।

$\angle B$ এর ক্ষেত্রে,

$(x_1-x_2)(x_2-x_3)+(y_1-y_2)(y_2-y_3)$

$=(-3+2)(-3-5)+(-2-4)(-2+1)$

$=8+6=14>0$

$\therefore$ $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ।

$\angle C$ এর ক্ষেত্রে,

$(x_1-x_2)(x_2-x_3)+(y_1-y_2)(y_2-y_3)$

$=(5+2)(5+3)+(-1-4)(-1+2)$

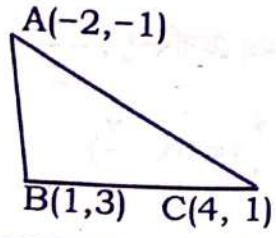
$=56-5=53>1$

$\therefore$ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।(১)

17. (c) প্রমাণ কর যে, (−2, −1), (1, 3) ও (4, 1) বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ ।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A(-2,-1), B(1,3)$ ও $(4,1)$.



$\therefore$ $AB=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-3)^2}$

$=\sqrt{9+16}=5$ (১)

$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$CA = \sqrt{(4+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর । অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার CA বৃহতম বহু।(১)

CA বৃহতম বহুর বিপরীত কোণ $\angle B$ এর ক্ষেত্রে,

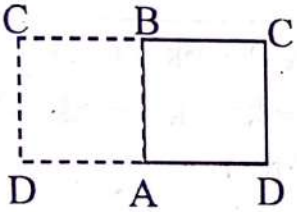
$(1-4)(1+2) + (3-1)(3+1)$

$\therefore$ $\angle B$ স্থূলকোণ। (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজেরশীর্ষ। (১)

18. (a) A(0, 7) এবং B(4,9) বিন্দুদ্বয় ABCD বর্গের শীর্ষবিন্দু হলে C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ



$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ (১)

AB বাহুর সমীকরণ

$(x-0)(7-9) - (y-7)(0-4) = 0$ (১)

$\Rightarrow -2x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow x - 2y + 14 = 0$

A(0,7) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব AD বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2\times 0 + 7$ (১)

$\Rightarrow 2x + y - 7 = 0 \cdots\cdots (1)$

B(4,9) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব BC বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2\times 4 + 9$

$\Rightarrow 2x + y - 17 = 0 \cdots\cdots (2)$

AB এর সমান্তরাল $2\sqrt{5}$ একক দূরবর্তী CD বাহুর সমীকরণ $x - 2y + 14 \pm 2\sqrt{5}\sqrt{1^2 + 2^2} = 0$ (১)

$\Rightarrow x - 2y + 14 \pm 10 = 0$

$\therefore x - 2y + 24 = 0 \cdots\cdots (3)$

$x - 2y + 4 = 0 \cdots\cdots (4)$

(1) ও (3) ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (–2 ,11) (১)

(2) ও (3) ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক (2 ,13)

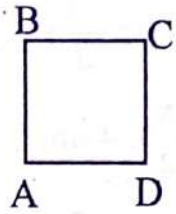
আবার, (1) ও (4) ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (2 ,3)

(2) ও (4) ছেদবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক (6 ,5)

$\therefore$ C(2,13) ও D (–2 ,11) অথবা, C(6 , 5) ও D(2 , 3) (১)

18. (b) (0, 7) ও (6 , 5) বিন্দুদ্বয় একটি বর্গের কর্ণের শীর্ষবিন্দু হলে অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ



ধরি, ABCD বর্গের AC কর্ণেও শীর্ষবিন্দু A(0, 7) ও C(6 , 5).

$= -9 + 8 = -1 < 0$

$\therefore$ $AC = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$ (১)

AC কর্ণের লম্বসমদ্বিখন্ডক BD কর্ণের সমীকরণ,

$(0-6)x + (7-5)y = \frac{1}{2}(0 + 49 - 36 - 25)$ (১)

$\Rightarrow -6x + 2y + 6 = 0$

$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \cdots\cdots (1)$

AC কর্ণের সমীকরণ $x + 3y = 0 + 3\times 7$

$\Rightarrow x + 3y - 21 = 0$

AC কর্ণের সমান্তরাল $2\sqrt{10}$ একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ সরলরেখার সমীকরণ,

$x + 3y - 21 \pm \sqrt{10}\sqrt{1^2 + 3^2} = 0$ (১)

$\Rightarrow x + 3y - 21 \pm 10 = 0$

$\therefore x + 3y - 11 = 0 \cdots\cdots (2)$ এবং

$x + 3y - 31 = 0 \cdots\cdots (3)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 9)

$\therefore$ অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 3) ও (4, 9) (১)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

19. (a) $(\sqrt{3}, -1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ ধরি, $(\sqrt{3}, -1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $(\sqrt{3}, -1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\frac{\pi}{6})$

(b) $(4, \frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ $(4, \frac{3\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (4\cos\frac{3\pi}{4}, 4\sin\frac{3\pi}{4})$

$= (4\cos(\pi - \frac{\pi}{4}), 4\sin(\pi - \frac{\pi}{4}))$

$= (-4\cos\frac{\pi}{4}, 4\sin\frac{\pi}{4})$

$= (-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (Ans.)

(c) (6 , 0) এবং (0 , 6) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (0-x)^2 + (6-y)^2 = (x-6)^2 + (y-0)^2$

$\Rightarrow x^2 + 36 - 12y + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2$

$\Rightarrow -12y = -12x \Rightarrow y = x \cdots\cdots (1)$

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow 6^2 + 6^2 = x^2 + 36 - 12y + y^2$

$\Rightarrow 72 = x^2 + 36 - 12x + x^2 \quad [\because y = x]$

$\Rightarrow 2x^2 - 12x - 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 18 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4.1.(-18)}}{2.1}$

$\frac{6 \pm \sqrt{36+72}}{2.1} = \frac{6 \pm 6\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{3}$

$\therefore y = 3 + 3\sqrt{3}$, যখন $x = 3 + 3\sqrt{3}$ এবং

$y = 3 - 3\sqrt{3}$, যখন $x = 3 - 3\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3+3\sqrt{3}, 3+3\sqrt{3})$ বা, $(3-3\sqrt{3}, 3-3\sqrt{3})$

(d) কোনো বিন্দুর কোটি 5 এবং (4, 5) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 3 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x, 5).

$\therefore$ (4, 5) হতে (x, 5) বিন্দুটির দূরত্ব $= |x - 4|$

প্রশ্নমতে, $|x - 4| = 3 \Rightarrow x - 4 = \pm 3$

$\Rightarrow x = 4 \pm 3 \quad \therefore x = 7, 1$

$\therefore$ বিন্দুটির ভুজ 7 অথবা 1 ।

(e) x-অক্ষ এবং (2, 3) বিন্দু থেকে (5, k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ x- অক্ষ হতে (5, k) বিন্দুর দূরত্ব = k

(2, 3) বিন্দু থেকে (5, k) বিন্দুটির দূরত্ব

$= \sqrt{(2-5)^2 + (3-k)^2}$

$= \sqrt{9 + 9 - 6k + k^2} = \sqrt{18 - 6k + k^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{18 - 6k + k^2} = k$

$\Rightarrow 18 - 6k + k^2 = k^2 \Rightarrow 6k = 18$

$\therefore k = 3$ (Ans.)

(f) (2, –3) ও (4 , 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ প্রদত্ত (2, –3) ও (4 , 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির

স্থানাঙ্ক $= (\frac{k \times 4 + 1 \times 2}{k+1}, \frac{k \times 6 + 1 \times (-3)}{k+1})$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$\frac{6k - 3}{k+1} = 0 \Rightarrow 6k - 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ $k : 1 = 1 : 2$ (Ans.)

(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (–2, 9) ও (3, –1) এবং এর ভরকেন্দ্র (2, 2) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore$ (–2, 9), (3, –1) ও (x, y) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-2+3+x}{3}, \frac{9-1+y}{3}) = (\frac{1+x}{3}, \frac{8+y}{3})$

প্রশ্নমতে, $\frac{1+x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6 - 1 = 5$

$\frac{8+y}{3}=2 \Rightarrow 8+y=6 \Rightarrow y=6-8=-2$

ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(5, -2)$

(h) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ (2, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ,

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \cdots\cdots$ (i) , যা x-অক্ষকে A(a, 0) এবং y-অক্ষকে B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2})$

প্রশ্নমতে, $\frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4$, $\frac{b}{2}=5 \Rightarrow y=10$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{10}=1$ (Ans.)

(i) $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা এবং $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এর সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x-4y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $(-1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$3x-4y=3\times(-1)-4\times2$

$\Rightarrow 3x-4y=-3-8 \Rightarrow 3x-4y+11=0$

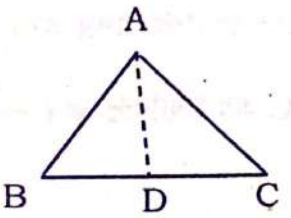
$\therefore$ $3x - 4y + 1 = 0$ ও $3x - 4y + 11 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব $=\frac{|1-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$=\frac{|-10|}{5}=\frac{10}{5}=2$ একক।

20. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(-4, -1)$, $B(-1, 3)$ এবং $C(8, -6)$.

(a) $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:



$\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ BD : CD = AB : AC

$=\sqrt{(-4+1)^2+(-1-3)^2} : \sqrt{(-4-8)^2+(-1+6)^2}$

$=\sqrt{9+16} : \sqrt{144+25} = 5 : 13$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{5\times8+13\times(-1)}{5+13}, \frac{5\times(-6)+13\times3}{5+13})$

$=(\frac{40-13}{18}, \frac{-30+39}{18})=(\frac{27}{18}, \frac{9}{18})=(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

(b) অক্ষদ্বয় দ্বারা BC রেখার মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখার সমীকরণ,

$(x + 1)(3 + 6) - (y-3)(-1 - 8) = 0$

$\Rightarrow 9(x + 1) + 9(y-3) = 0$

$\Rightarrow x + 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$, যা x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}$

$=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ (Ans.)

(c) অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখার সমীকরণ,

$(x + 1)(3 + 6) - (y-3)(-1 - 8) = 0$

$\Rightarrow 9(x + 1) + 9(y-3) = 0$

$\Rightarrow x + 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

$\therefore$ অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}(2\times2)=2$ বর্গ একক।

(d) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{-4-1}{2}, \frac{-1+3}{2}) = (-\frac{5}{2}, 1)$

AC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{-4+8}{2}, \frac{-1-6}{2})$

$= (2, -\frac{7}{2})$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$(x + \frac{5}{2})(1 + \frac{7}{2}) - (y - 1)(-\frac{5}{2} - 2) = 0$

$\Rightarrow \frac{9}{2}(x + \frac{5}{2}) + \frac{9}{2}(y - 1) = 0$

$\Rightarrow x + \frac{5}{2} + y - 1 = 0 \Rightarrow x + y + \frac{5-2}{2} = 0$

$\Rightarrow 2x + 2y + 3 = 0$ (Ans.)

(e) A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধানঃ BC রেখার সমীকরণ,

$(x + 1)(3 + 6) - (y-3)(-1 - 8) = 0$

$\Rightarrow x + 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

∴ A(– 4 , – 1) হতে BC এর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|-4-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$ একক।

(f) অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধানঃ BC রেখার সমীকরণ,

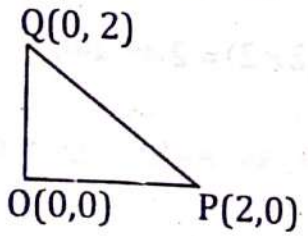
$(x + 1)(3 + 6) - (y-3)(-1 - 8) = 0$

$\Rightarrow 9(x + 1) + 9(y-3) = 0$

$\Rightarrow x + 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$, যা x-অক্ষকে (ধরি) P(2, 0) এবং y-অক্ষকে Q(0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ OPQ এর শীর্ষত্রয় O(0, 0), P(2, 0), Q(0, 2).



এখন, $a = PQ = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $b = OQ = 2$, $c = OP = 2$

∴ অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র

$\equiv (\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c})$

$= (\frac{2\sqrt{2}\times 0 + 2\times 2 + 2\times 0}{2\sqrt{2}+2+2}, \frac{2\sqrt{2}\times 0 + 2\times 0 + 2\times 2}{2\sqrt{2}+2+2})$

$= (\frac{4}{2(2+\sqrt{2})}, \frac{4}{2(2+\sqrt{2})})$

$= (\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}, \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})})$

$= (\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2}, \frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2})$

$= (2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ (Ans.)

(g) B ও C বিন্দুগামী সরলরেখা একটি বর্গের কর্ণ হলে A বিন্দুগামী বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ বর্গটির একটি কর্ণের ঢাল,

$m_1 = \frac{3+6}{-1-8} = -1$.

ধরি, A(– 4 , – 1) বিন্দুগামী বর্গটির বাহুর সমীকরণ $y + 1 = m(x + 4)$ ..... (i), যা কর্ণের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

∴ $\tan(\pm 45^0) = \frac{m - m_1}{1 + mm_1} = \frac{m+1}{1-m}$

$\Rightarrow \pm 1 = \frac{m+1}{1-m}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $1 - m = m + 1 \Rightarrow m = 0$

∴ A(– 4, –1) বিন্দুগামী বর্গটির একটি বাহুর সমীকরণ $y + 1 = 0(x + 4) \Rightarrow y + 1 = 0$

আবার, A(– 4, –1) বিন্দুগামী এবং $y + 1 = 0$ বাহুর উপর লম্ব অপর বাহুর সমীকরণ $x + 4 = 0$

(h) BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ BC এর মধ্যবিন্দু $\equiv (\frac{-1+8}{2}, \frac{3-6}{2})$

$= (\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$

BC এর ঢাল $= \frac{3+6}{-1-8} = -1$

$\therefore$ BC এর লম্বরেখার ঢাল $= 1$

BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$y - (-\frac{3}{2}) = 1(x - \frac{7}{2}) \Rightarrow 2y + 3 = 2x - 7$

$\Rightarrow 2x - 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{-5} = 1$, যা y-অক্ষকে $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

21. (a) একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (α, β), $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(-4-8)(8+4) - (13-8)(8-13)|$

$= \frac{1}{2}|(-12)(12) - (5)(-5)|$

$= \frac{1}{2}|-144 + 25| = \frac{119}{2}$ বর্গ একক।

$\therefore$ সামান্তরিকটির নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{119}{2}$

$= 119$ বর্গ একক।

(b) ABCD রম্বসের $A(-1, 2)$, $B(\alpha, 0)$ এবং $C(3, 5)$। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, D শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+5}{2}) = (1, \frac{7}{2})$

এবং ঢাল $= \frac{2-5}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = m_1$ (ধরি)

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{\alpha+x}{2}, \frac{y}{2})$ এবং

ঢাল $= \frac{y}{x-\alpha} = m_2$ (ধরি)

ABCD রম্বসের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী, $(1, \frac{7}{2})$ ও $(\frac{\alpha+x}{2}, \frac{y}{2})$ বিন্দুদ্বয় অভিন্ন।

$\therefore \frac{\alpha+x}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + x = 2 \ldots.$ (i)

$\frac{y}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow y = 7$

আবার, $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{y}{x-\alpha} \times \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow 2(\alpha - x) = 7$

$\Rightarrow \alpha - x = \frac{7}{2} \ldots..$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2\alpha = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{4}$

(i) + (ii) $\Rightarrow 2x = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$\therefore B \equiv (\alpha, 0) = (\frac{11}{4}, 0)$, $D \equiv (-\frac{3}{4}, 7)$

(c) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সাথে উক্ত বিন্দুতে 45^0 কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, যা x-অক্ষকে $A(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB রেখাংশকে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু $(\frac{2\times0+3\times a}{2+3}, \frac{2\times b+3\times0}{2+3}) = (\frac{3a}{5}, \frac{2b}{5})$ ও $(6, 2)$ অভিন্ন।

$\therefore \frac{3a}{5} = 6 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10$

$\frac{2b}{5} = 2 \Rightarrow b = 5$

$\therefore$ AB এর ঢাল $= -\frac{b}{a} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

AB এর সাথে 45^0 উৎপন্নকারী রেখার ঢাল m হলে,

$$\tan(\pm 45^0) = \frac{m+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}m} = \frac{2m+1}{2-m}$$

$\Rightarrow \pm 1 = \frac{2m+1}{2-m}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $2m + 1 = 2 - m$

$\Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $2m + 1 = -2 + m$

$\Rightarrow m = -3$

$\therefore$ (6, 2) বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 6) \Rightarrow x - 3y = 0$

অথবা, $y - 2 = -3(x - 6) \Rightarrow 3x + y = 20$

(d) $3x + 4y - 2 = 0$ রেখার উপর $(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\frac{x-2}{\cos\alpha} = \frac{y+1}{\sin\alpha} = 15$

$\therefore x - 2 = 15\cos\alpha \Rightarrow x = 15\cos\alpha + 2$ এবং

$y + 1 = 15\sin\alpha \Rightarrow y = 15\sin\alpha - 1$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 15 \times -\frac{4}{5} + 2 = -12 + 2 = -10$ এবং

$y = 15 \times \frac{3}{5} - 1 = 9 - 1 = 8$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য,

$x = 12 + 2 = 14$ এবং $y = -9 - 1 = -10$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(-10, 8)$ ও $(14, -10)$

(e) $(1, 2)$, $(-4, -10)$ বিন্দুগামী রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $(1, 2)$, $(-4, -10)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$(x - 1)(2 + 10) - (y - 2)(1 + 4) = 0$

$\Rightarrow 12x - 12 - 5y + 10 = 0$

$\Rightarrow 12x - 5y - 2 = 0 \cdots\cdots(1)$

ধরি, $x + 5y = 13 \cdots \cdots (2)$ রেখাস্থ বিন্দু (α, β), (1) রেখা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত।

$\therefore \alpha + 5\beta = 13 \Rightarrow \alpha = 13 - 5\beta \cdots (3)$ এবং

$$\frac{|12\alpha - 5\beta - 2|}{\sqrt{144+25}} = 2$$

$\Rightarrow 12\alpha - 5\beta - 2 = \pm 26$

'+' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta - 28 = 0$

$\Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta - 28 = 0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta - 28 = 0 \Rightarrow 65\beta = 128$

$\Rightarrow \beta = \frac{128}{65}$

$\therefore \alpha = 13 - 5.\frac{128}{65} = \frac{845-640}{65} = \frac{205}{65}$

আবার, '–' নিয়ে, $12\alpha - 5\beta + 52 = 0$

$\Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta + 24 = 0$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta + 24 = 0 \Rightarrow 65\beta = 180$

$\Rightarrow \beta = \frac{180}{65} = \frac{36}{13}$

$\therefore \alpha = 13 - 5.\frac{36}{13} = \frac{169-180}{13} = -\frac{11}{13}$

$\therefore$ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $(\frac{205}{65}, \frac{128}{65})$, $(-\frac{11}{13}, \frac{36}{13})$

(f) $(-1, 1)$, $(3, 4)$ বিন্দুগামী রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(-1, 1)$, $(3, 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$(x+1)(1-4)-(y-1)(-1-3)=0$

$\Rightarrow -3x-3+4y-4=0$

$\Rightarrow 3x-4y+7=0 \cdots\cdots (1)$

ধরি, (1) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $4x+3y+k=0 \cdots\cdots (2)$

মূলবিন্দু (0,0) থেকে (1) এর দূরত্ব $=\frac{|k|}{\sqrt{16+9}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k|}{\sqrt{16+9}}=7 \Rightarrow \frac{k}{5}=\pm 7=\pm 35$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ $4x+3y+35=0$ এবং $4x+3y-35=0$

(g) $3x+4y=11$ এবং $12x-5y-2=0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x+4y=11 \Rightarrow 3x+4y-11=0$ কে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এর সাথে এবং $12x-5y-2=0$ কে $a_2x+b_2y+c_2=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1a_2+b_1b_2=3\times 12+4\times(-5)$

$=36-20=16>0$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+4y-11}{\sqrt{9+16}}=-\frac{12x-5y-2}{\sqrt{144+25}}$

$\Rightarrow \frac{3x+4y-11}{5}=-\frac{12x-5y-2}{13}$

$\Rightarrow 39x+52y-143=-60x+25y+10$

$\Rightarrow 99x+27y-153=0$

$\Rightarrow 11x+3y=17$

$\Rightarrow \frac{x}{17/11}+\frac{y}{17/3}=1 \cdots\cdots (1)$, যা অক্ষদ্বয়কে $(\frac{17}{11},0)$ ও $(0,\frac{17}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ (1) রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(\frac{17/11}{3}, \frac{17/3}{3})=(\frac{17}{33}, \frac{17}{9})$ (Ans.)

22. $AB \equiv 4x+3y-8=0$,

$AC \equiv x+y-1=0$

(a) মূলবিন্দু ও A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x \cdots$ (i)

$4x+3y-8=0 \Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

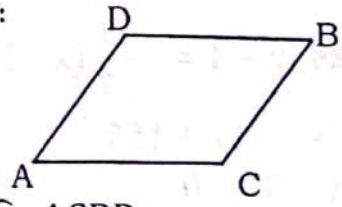
$\therefore A \equiv (5,-4)$

$\therefore$ মূলবিন্দু (0, 0) ও A(5, – 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y=\frac{-4}{5}x \Rightarrow 4x+5y=0$ (Ans.)

(b) রম্বসের একটি বাহু AC এবং একটি কর্ণ AB হলে A বিন্দুগামী অপর বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ACBD রম্বসের

$AB \equiv 4x+3y-8=0 \cdots\cdots$ (i)

$AC \equiv x+y-1=0 \cdots\cdots$ (ii)

$\therefore$ $\angle DAC$ এর সমদ্বিখন্ডক AB.

ধরি, AD বাহুর ঢাল m_2,

(i) এর ঢাল, $m=-\frac{4}{3}$ এবং (ii) বাহুর ঢাল, $m_1=-1$.

(ii) ও (i) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1-m}{1+m_1m}$ এবং

(i) ও AD এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m-m_2}{1+mm_2}$

পরস্পর সমান।

$\therefore \frac{m_1-m}{1+m_1m}=\frac{m-m_2}{1+mm_2}$

$\Rightarrow \frac{-1+\frac{4}{3}}{1+(-1)(-\frac{4}{3})}=\frac{-\frac{4}{3}-m_2}{1+(-\frac{4}{3})m_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{3+4}=\frac{-4-3m_2}{3-4m_2}\Rightarrow\frac{1}{7}=\frac{-4-3m_2}{3-4m_2}$

$\Rightarrow 3-4m_2=-28-21m_2\Rightarrow 17m_2=-31$

$\Rightarrow m_2=-\frac{31}{17}$

এখন, $x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\cdots\cdots$ (i)

$4x+3y-8=0\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore A\equiv(5,-4)$

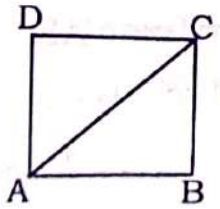
$\therefore$ A(5, −4) বিন্দুগামী এবং $-\frac{31}{17}$ ঢালবিশিষ্ট AD বাহুর সমীকরণ, $y+4=-\frac{31}{17}(x-5)$

$\Rightarrow 17y+68=-31x+155$

$\Rightarrow 31x+17y-87=0$

(c) বর্গের একটি কর্ণ AC হলে A বিন্দুগামী বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি, ABCD বর্গের AC কর্ণের সমীকরণ $x+y-1=0$, যা A বিন্দুগামী বাহু AB ও AD এর সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

AC কর্ণের ঢাল=−1. A বিন্দুগামী বাহুর ঢাল m হলে,

$\tan(\pm 45^0)=\frac{m+1}{1+m(-1)}\Rightarrow\frac{m+1}{1-m}=\pm 1$

'+' নিয়ে পাই, $m+1=1-m\Rightarrow 2m=0$

$\Rightarrow m=0$

এখন, $x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\cdots\cdots$ (i)

$4x+3y-8=0\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore$ A(5, −4) বিন্দুগামী এবং 0 ঢাল বিশিষ্ট একটি বাহুর সমীকরণ $y+4=m(x-5)\Rightarrow y+4=0$ এবং এ বাহুর উপর লম্ব এবং A(5, −4) বিন্দুগামী অপর বাহুর সমীকরণ, $x=5$.

(d) A বিন্দুগামী AC এর লম্বরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ AC বাহুর সমীকরণ,

$x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\cdots$ (i)

AB বাহুর সমীকরণ,

$4x+3y-8=0$

$\Rightarrow 4x+3(1-x)-8=0$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4x+3-3x-8=0$

$\therefore x=5, y=1-5=-4$

$\therefore$ AB ও AC এর ছেদবিন্দু A(5, −4)

$\therefore$ A বিন্দুগামী AC এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

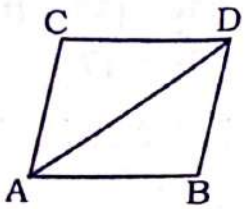
$x-y=5-(-4)\Rightarrow x-y=9$

$\Rightarrow \frac{x}{9}+\frac{y}{-9}=1$

এর রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|(9)(-9)|=\frac{81}{2}$ বর্গ একক।

(e) ABDC সামান্তরিকের AB ও AC দুইটি বাহু। D≡(1, 1) হলে BC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



AC বাহুর সমীকরণ,

$x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x \cdots$ (i)

BC বাহুর সমীকরণ,

$4x + 3y - 8 = 0$

$\Rightarrow 4x + 3(1 - x) - 8 = 0$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 4x + 3 - 3x - 8 = 0$

$\therefore x = 5, y = 1 - 5 = -4$

$\therefore$ AB ও AC এর ছেদবিন্দু A(5, −4)

$\therefore$ AD এর মধ্যবিন্দু স্থানাঙ্ক

$= (\frac{5+1}{2}, \frac{-4+1}{2}) = (3, -\frac{3}{2})$, যা BC কর্ণের উপর অবস্থিত।

AB বাহুর সমান্তরাল D(1, 1) শীর্ষগামী CD বাহুর সমীকরণ $4x + 3y = 4 \times 1 + 3 \times 1$

$\Rightarrow 4x + 3y = 7 \cdots\cdots$ (ii)

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$4x + 3(1 - x) = 7 \Rightarrow 4x + 3 - 3x = 7$

$\therefore x = 4, y = 1 - 4 = -3$

$\therefore$ AC ও CD এর ছেদবিন্দু C(4, − 3)

$\therefore$ BC কর্ণের সমীকরণ,

$(x-4)(-3 + \frac{3}{2}) - (y + 3)(4 - 1) = 0$

$\Rightarrow (x-4)(-\frac{3}{2}) - (y + 3).3 = 0$

$\Rightarrow -x + 4 - 2y - 6 = 0$

$\therefore x + 2y + 2 = 0$ (Ans.)

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. **Sol^n.:** সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

2. **Sol^n.** C বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$(\sqrt{1+1}, \tan^{-1}\frac{1}{-1}) = (\sqrt{2}, \pi - \frac{\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ $\therefore$ Ans. (c)

3. **Sol^n.:** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

4. **Sol^n.:** অনুপাত $= |7| : |-5| = 7 : 5$

5. **Sol^n.:** ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

$= \frac{1}{2}|3 \times (-8) - 5 \times 3|$

$= \frac{1}{2}|-24 - 15| = \frac{39}{2} = 19.5$ বর্গ একক।

$\therefore$ Ans. (c)

6. **Sol^n.:** $\theta = \tan^{-1}(\frac{4\sqrt{3}}{-4}) = 180^0 - 60^0$

$= 120^0$ $\therefore$ Ans. (b)

7. **Sol^n.:** রেখাটির সমীকরণ, $x = a \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ Ans. (c)

8. **Sol^n.:** $y = mx + c$ সমীকরণে c হচ্ছে y-অক্ষের ছেদক অংশ। $\therefore$ Ans. (d)

9. **Sol^n.:** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

10. **Sol^n.:** রেখার সমীকরণ

$3x + 4y = 3 \times 5 + 4 \times (-3) = 3$ $\therefore$ Ans. (a)

11. **Sol^n.:** লম্বদূরত্ব $= \frac{|-12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{12}{5}$ $\therefore$ Ans.(b)

12. **Sol^n.:** সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

13. **Sol^n.:** $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ Ans. (c)

14. **Sol^n.:** সরলরেখার সমীকরণ

$7x - 3y = 7 \times 2 - 3 \times 1 = 11$ $\therefore$ Ans.(b)

15. **Sol^n.:** $y = 6$ ও $x = 5$ এর ছেদবিন্দু A(5, 6)

$y^2 = 6(x - 7)$ এ $y = 6$ বসিয়ে পাই,

$36 = 6(x - 7) \Rightarrow x = 6 + 7 = 13$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13, 6)

$\therefore$ $AB = |13 - 5| = 8$ $\therefore$ Ans. (c)

16. **Sol^n.:** AC কর্ণের ঢাল $= \frac{-1-6}{-2-5} = 1$

$\therefore$ AC এর উপর লম্ব BD কর্ণের ঢাল $= -1$

$\therefore$ Ans. (d)

17. **Sol^n.:** $D \equiv (-2 + 5 - 1, -1 + 6 - 3)$

$= (2, 2)$ $\therefore$ Ans. (a)

18. **Sol^n.:** AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

$\Rightarrow 2x + 3y = 6$ $\therefore$ Ans. (a)

19. Sol^n.: OC রেখার ঢাল $= -\dfrac{0-3}{2-0} = -\dfrac{-3}{2}$

$\dfrac{3}{2}$, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(3\times 2) = 3$

ব.একক এবং B(0, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$(\sqrt{0+2^2}, \cot^{-1}\dfrac{0}{2}) = (2, 90^0)$ $\therefore$ Ans. (b)

20. Sol^n.: নির্ণেয় বিন্দু $(\dfrac{3.9+5.1}{3+5}, \dfrac{3.12+5.4}{3+5})$

$= (3,7)$ $\therefore$ Ans. (b)

21. Sol^n.: $\dfrac{1}{2}|6.0 - 8.4| = 16$ $\therefore$ Ans. (b)

22. নির্ণেয় বিন্দু $(\dfrac{3.5-4.3}{3-4}, \dfrac{3.2-4.(-1)}{3-4})$

$= (-3,-10)$ $\therefore$ Ans. (d)

23. Sol^n.: $(2-a-1)(a-3-a) -$
$(-1-a+3)(a+1-a-2) = 0$

$\Rightarrow (1-a)(-3) - (2-a)(-1) = 0$

$\Rightarrow -3+3a+2-a = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

বিকল্প পদ্ধতি: ১ম শীর্ষকে শূন্য বানাতে ভুজ হতে 2 বিয়োগ ও কোটির সাথে 1 যোগ করি।

$(2,-1), (a+1, a-3), (a+2, a)$

$(0,0), (a-1, a-2), (a, a+1)$

$\therefore (a-1)(a+1) - a(a-2) = 0$

$\Rightarrow a^2 - 1 - a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 1/2$

$\therefore$ Ans. (d)

24. Sol^n.: $P \equiv (\sqrt{3+9}, \tan^{-1}\dfrac{-3}{-\sqrt{3}})$

$\equiv (2\sqrt{3}, \pi + \dfrac{\pi}{3}) \equiv (2\sqrt{3}, \dfrac{4\pi}{3})$

$\therefore$ $Q \equiv (2\sqrt{3}, \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}) \equiv (2\sqrt{3}, \dfrac{7\pi}{6})$ $\therefore$ Ans. (c)

25. Sol^n.: P বিন্দুটি (x, 0) হলে,

$x^2 + 2^2 = (x-6)^2 + 4^2$

$\Rightarrow x^2 + 4 = x^2 - 12x + 36 + 16$

$\Rightarrow 12x = 48 \Rightarrow x = 4$ $\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক (4, 0).

$\therefore$ Ans. (d)

26. Sol^n.: $r = a\sin\theta \Rightarrow r^2 = a\, r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 =$ $\therefore$ Ans. (c)

27. Sol^n.: $y = -5x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি

$= -\dfrac{1}{-5} = \dfrac{1}{5}$ $\therefore$ Ans. (c)

28. Sol^n.: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -2(2b-3a) + 1(9-10) = 0$

$\Rightarrow -2(2b-3a) - 1 = 0 \Rightarrow 6a - 4b - 1 = 0$

$\therefore$ Ans. (c)

29. Sol^n.: (1, 2) বিন্দু হতে $x = \sqrt{3}y + 4$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বরেখার সমীকরণ,

$\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}\times 1 + 2$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ (0, 0) বিন্দু হতে দূরত্ব $= \dfrac{|\sqrt{3}.0 + 0 - 2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ Ans. (b)

30. নিয়ম: $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং (x_1, y_1) বিন্দু হতে d একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ

$ax + by = ax_1 + by_1 \pm d\sqrt{a^2 + b^2}$

Sol^n.: $3x + 4y = 3\times 1 + 4\times(-2) \pm 7.5(\sqrt{3^2 + 4^2})$

$\Rightarrow 3x + 4y = 3 - 8 \pm 37.5$

$\Rightarrow 3x + 4y = 32.5, -42.5$

$\therefore$ Ans. (d)

31. Sol^n.: $\frac{c}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{2(c+3)}{\sqrt{12^2+5^2}}$

$\Rightarrow 13c = \pm(10c+30)$

$\therefore\ 13c = 10c+30 \Rightarrow c = 10,$

$13c = -10c-30 \Rightarrow c = -30/23$

$\therefore$ Ans. (c)

32. Sol^n.: x অক্ষকে (6/4,0) =(3/2, 0) কোন বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore$ Ans. (a)

33. Sol^n.: উদ্দীপক সরলরেখাটির ঢাল $= -\frac{4}{-2} = 2$ $\therefore$ Ans. (a)

34. Sol^n.: $(-1,\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক

$= (\sqrt{1+3}, \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}) = (2, \pi - \frac{\pi}{3})$

$= (2, \frac{2\pi}{3})$

$\therefore$ Ans. (d)

35. Sol^n.: $(-1,\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক

$= (\sqrt{1+3}, \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1}) = (2, \pi - \frac{\pi}{3})$

$= (2, \frac{2\pi}{3})$ $\therefore$ Ans. (b)

36. Sol^n.: $y = -7x+9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি

$= = -\frac{1}{-7} = \frac{1}{7}$ $\therefore$ Ans. (a)

37. Sol^n.: $B \equiv (0, \frac{12}{-4}) = (0,-3)$ $\therefore$ Ans. (c)

38. Sol^n.: প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব এবং (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$4x+3y = 4\times1+3\times2$

$\Rightarrow 4x+3y = 10$ $\therefore$ Ans. (b)

39. Sol^n.: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$ $\therefore$ Ans. (d)

40. Sol^n.: $4x-3y+5=0$ রেখাটির ঢাল

$= -\frac{a}{b} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

41. Sol^n.: (1, 1) বিন্দুগামী $2x-3y-5=0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$3x+2y = 3\times1+2\times1$

$\Rightarrow 3x+2y = 5$ $\therefore$ Ans. (a)

42. Sol^n.: (1,−1) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক =

$(\sqrt{1+1}, \tan^{-1}\frac{-1}{1}) = (\sqrt{2}, 360^0 - 45^0)$

$= (\sqrt{2}, 315^0)$ $\therefore$ Ans. (d)

43. Sol^n.: $3x-2y+6=0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= -\frac{c}{a} = -\frac{6}{3} = -2$ $\therefore$ Ans. (b)

44. Sol^n.: x- অক্ষের উপর লম্বরেখার সমীকরণে y অনুপস্থিত থাকে।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x+y-y+x = 6-2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ Ans. (a)

45. Sol^n.: $3x+4y+1=0$ রেখার ঢাল

$= -\frac{a}{b} = -\frac{3}{4}$ $\therefore$ Ans. (b)

46. মূল বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব $\therefore$ Ans. (c)

47. AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক

$= (\frac{-c}{2a}, \frac{-c}{2a}) = (-\frac{12}{8}, -\frac{12}{6}) = (-\frac{3}{2}, -2)$

$\therefore$ Ans. (a)

48. AB সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$

$\Rightarrow 5x-3y = -15$

$\Rightarrow 5x-3y+15 = 0$ $\therefore$ Ans. (a)

49. OAB ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(\frac{0+0-3}{3}, \frac{0+0+5}{3}) = (-1, \frac{5}{3})$

$\therefore$ Ans. (c)

50. $3x-5y+1=0$ সরলরেখার ঢাল $=-\frac{3}{-5}=\frac{3}{5}$

$\therefore$ Ans. (d)

51. $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$=(\sqrt{2+2},\tan^{-1}\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}})$

$=(2,\pi+\frac{\pi}{4})=(2,\frac{5\pi}{4})$ $\therefore$ Ans. (c)

52. নির্ণেয় বিন্দু $(\frac{2.(-8)+1.1}{2+1},\frac{2.1+1.(-2)}{2+1})$

$=(-5,0)$ $\therefore$ Ans. (d)

53. $D\equiv(\frac{-3+7}{2},\frac{-3-1}{2})=(2,-2)$

$\therefore$ $CD=\sqrt{(5-2)^2+(2+2)^2}=5$

$\therefore$ Ans. (d)

54. $(-3,-3)$ $(7,-1)$ $(5,2)$
$(0,0)$ $(10,2)$ $(8,5)$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(10\times5-2\times8)$

$=\frac{1}{2}(50-16)=17$ $\therefore$ Ans. (c)

55. x অক্ষের উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x=0$ $\therefore$ Ans. (a)

56. $x-y-2=0$ এবং $2x-2y+4=0\Rightarrow x-y+2=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{|-2-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ Ans. (c)

57. $y=-2x$ এবং $2y=x\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল $=-1$

$\therefore$ তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90^0 . $\therefore$ Ans. (a)

58. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাংকের কোণটি 90^0 হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংকের ভুজ, $x=r\cos 90^0=0$

$\therefore$ Ans. (b)

59. AB সরলরেখার সমীকরণ,

$x\cos60^0+y\sin60^0=3$

$\Rightarrow x.\frac{1}{2}+y.\frac{\sqrt{3}}{2}=3\Rightarrow x+\sqrt{3}y=6$

$\therefore$ Ans. (b)

60. $OA=6$

$\therefore$ ΔOAC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(OA\times OC)\sin60^0$

$=\frac{1}{2}(6\times3).\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ Ans. (d)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত):

1. $y=3x+7$ এবং $3y-x=8$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ – [DU 08-09]

Sol^n : এখানে $m_1=3$, $m_2=\frac{1}{3}$

$\tan\theta=|\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3.\frac{1}{3}}|=\frac{8}{6}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

2. $2x-3y+6=0$ রেখার উপর লম্ব এবং (1,-1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ–[DU, 02-03, 97-98; RU 06-07]

Sol^n : রেখার সমীকরণ $3x+2y=3-2=1$

3. $5x-2y+4=0$ এবং $4x-3y+5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী রেখার সমীকরণ – [DU 05-07; Jt.U 07-08]

Sol^n : সমীকরণ $5(5x-2y)-4(4x-3y)=0$

$\Rightarrow 25x-10y-16x+12y=0$

$\Rightarrow 9x+2y=0$

4. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (2,3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। রেখাটির সমীকরণ– [DU04-05]

Sol^n : রেখার সমীকরণ $\frac{x}{2\times2}+\frac{y}{2\times3}=1$

$\Rightarrow 3x+2y=12$

5. সরলরেখা $3x+4y-12=0$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য– [DU 03-04]

Sol^n : দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(12/3)^2+(12/4)^2}$

$=\sqrt{16+9}=5$

6. $2x - 5y + 10 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল– **[DU 99-00]**

Sol^n : $\frac{1}{2}.\frac{10^2}{2\times 5} = 5$

7. একটি সরলরেখা (3,5) বিন্দু দিয়ে যায় অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট অংশ ছেদ করে।সরলরেখাটির সমীকরণ কি? **[DU 98-99]**

Sol^n : সমীকরণ, $x-y = 3-5 \Rightarrow x - y + 2=0$

8. α এর কোন মানের জন্য $(\alpha-1)x + (\alpha+1)y = 7$ রেখাটি $3x + 5y + 7 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? **[DU 01-02]**

Sol^n : $\frac{\alpha-1}{3} = \frac{\alpha+1}{5} \Rightarrow 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4$

9. $5x-5\sqrt{3}\,y + 2=0$ এবং $3\sqrt{3}\,x+3y=4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে– **[BUET 06-07]**

Sol^n : এখানে , $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m_2 = -\sqrt{3}$

$m_1 m_2 = -1$ $\therefore$ অন্তর্ভুক্ত কোণ $= 90°$

10. (2,3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব বিন্দুর দূরত্ব –**[BUET 06-07]**

Sol^n : দূরত্ব $= 2\frac{|8+9-7|}{\sqrt{16+9}} = \frac{2.10}{5} = 4$

11. মূলবিন্দু হতে $3x + 4y = 10$ রেখটির লম্বদূরত্ব **[DU 07-08, Jt.U 07-08]**

Sol^n : লম্বদূরত্ব $= \frac{|-10|}{\sqrt{9+16}} = 2$

12. (4, −2) বিন্দু হতে $5x + 12y = 3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য – **[DU 06-07, 04-05; RU 06-07, 05-06; CU 02-03]**

Sol^n : লম্বদূরত্ব $= \frac{|20-24-3|}{\sqrt{25+144}} = \frac{7}{13}$

13. α সূক্ষ্মকোণ হলে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 4$ এবং $4x + 3y = 5$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব– **[DU 06-07**

Sol^n : সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব =

$$\left|\frac{-4}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} - \frac{-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$$
$= 4-1 = 3$

14. (1, −1) এবং (2,4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ– **[DU 04-05]**

Sol^n : লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$(1-2)x + (-1-4)y = \frac{1}{2}(1^2+1^2-2^2-4^2)$

$\Rightarrow -x - 5y + 10 = 0 \Rightarrow x + 5y - 10 = 0$

15. (−5,7) ও (3,−1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ–**[DU00-01;RU06-07]**

Sol^n : $-8x + 8y = \frac{1}{2}(25+49-9-1) = 32$

$\Rightarrow x - y + 4 = 0$

16. $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ বক্ররেখা x- অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y - অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB রেখার সমীকরণ – **[DU 07-08, Jt.U 08-09]**

Sol^n : $2y + xy = 2 + x + 1$

$\Rightarrow x - 2y + 3 = 0$ [$\because$ সরলরেখায় xy থাকেনা]

17. x এর কোন মানের জন্য (1, −x), (1, x) এবং (x^2, −1) বিন্দু তিনটি একই রেখায় অবস্থান করবে? **[BUET 12-13]**

Sol^n : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^2 & 1 \\ -x & x & -1 & -x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x-1-x^3 - (-x + x^3 - 1) = 0$

$\Rightarrow x-1-x^3 + x - x^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow -2x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 1, -1$

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(a) মূলবিন্দু ও প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x - y + 1 + k(x - 2y + 4) = 0 \cdots$ (i) ; যা মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ 2\times 0 - 0 + 1 + k(0 - 2\times 0 + 4) = 0$

$\Rightarrow 4k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $2x - y + 1 - \frac{1}{4}(x - 2y + 4) = 0$

$\Rightarrow 8x - 4y + 4 - x + 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow 7x - 2y = 0$ (Ans.)

(b) রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডক y – অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা III G এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

(c) মূলবিন্দু থেকে $\sqrt{5}$ একক দূরত্বে এবং $2y - x = 4$ রেখার উপর লম্ব রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $2y - x = 4 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ,

$2x + y + k = 0$

মূলবিন্দু (0,0) হতে (i) এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 5$

$\therefore$ রেখাসমূহের সমীকরণ, $2x + y \pm 5 = 0$

2. A(1, 1) , B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(a) A শীর্ষগামী ABC ত্রিভুজের মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: BC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{3+5}{2}, \frac{4-2}{2}) = (4, 1)$

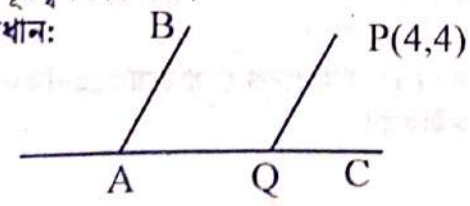
A(1, 1) শীর্ষগামী নির্ণেয় মধ্যমার সমীকরণ,

$(x - 4)(1-1) - (y-1)(4-1) = 0$

$\therefore y - 1 = 0$ (Ans.)

(b) AB রেখার সমান্তরাল বরাবর (4, 4) বিন্দু হতে AC এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:



AB বাহুর ঢাল $= \frac{1-4}{1-3} = \frac{3}{2}$

AB এর সমান্তরাল এবং P(4, 4) বিন্দুগামী PQ রেখার সমীকরণ, $y - 4 = \frac{3}{2}(x - 4)$

$\Rightarrow 2y - 8 = 3x - 12$

$\Rightarrow 3x - 2y - 4 = 0 \cdots\cdots$ (i)

AC বাহুর সমীকরণ,

$(x - 1)(1+2) - (y-1)(1-5) = 0$

$\Rightarrow 3(x - 1) + 4(y-1) = 0$

$\Rightarrow 3x - 3 + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

(ii) – (i) $\Rightarrow 6y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

(i) হতে, $3x - 2.\frac{1}{2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{5}{3}, \frac{1}{2})$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব , $PQ = \sqrt{(4 - \frac{5}{3})^2 + (4 - \frac{1}{2})^2}$ $\cdots\cdots$ (i)

$= \sqrt{(\frac{7}{3})^2 + (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{49}{4}}$

$= 7\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = 7\sqrt{\frac{4+9}{36}} = \frac{7\sqrt{13}}{6}$ একক।

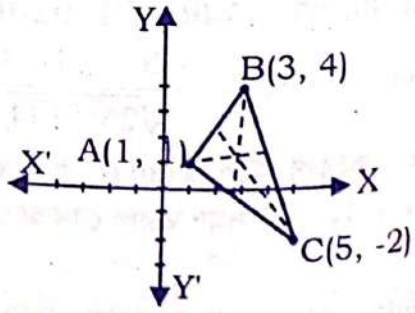
(b) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা III E এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

[কু.'০৬,'০৮;ঢা.'১১;কু.'১৪; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

(c) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর ।

সমাধান:



$a = BC = \sqrt{(3-5)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36}$

$= 2\sqrt{10}$

$b = CA = \sqrt{(1-5)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$c = AB = \sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{10}.1 + 5.3 + \sqrt{13}.5}{\sqrt{10}+5+\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{10}.1 + 5.4 + \sqrt{13}.(-2)}{\sqrt{10}+5+\sqrt{13}}\right)$$

$$= \left(\frac{15 + 2\sqrt{10} + 5\sqrt{13}}{5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}}, \frac{20 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{13}}{5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}}\right)$$

বিকল্প পদ্ধতি: AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে,

$(x-1)(1-4) - (y-1)(1-3) = 0$

$\Rightarrow -3x + 3 + 2y - 2 = 0$

$\Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \cdots \cdots (1)$

$(x-3)(4+2) - (y-4)(3-5) = 0$

$\Rightarrow 6x - 18 + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 13 = 0 \cdots \cdots (2)$ এবং

$(x-1)(1+2) - (y-1)(1-5) = 0$

$\Rightarrow 3x - 3 + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0 \cdots \cdots (3)$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$AB = 3x - 2y - 1 = 0 \cdots \cdots (1)$

$BC = 3x + y - 13 = 0$

$CA = 3x + 4y - 7 = 0$

$\therefore$ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{9+4}} = \frac{3x+4y-7}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = \frac{3x+4y-7}{5}$$

$\Rightarrow 15x - 10y - 5 = 3\sqrt{13}\,x + 4\sqrt{13}\,y - 7\sqrt{13}$

$\Rightarrow (15 - 3\sqrt{13})\,x - (10 + 4\sqrt{13})\,y - 5 + 7\sqrt{13} = 0$

$\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{3x-2y-1}{\sqrt{9+4}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{9+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2y-1}{\sqrt{13}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow 3\sqrt{13}\,x + \sqrt{13}\,y - 13\sqrt{13} = -3\sqrt{10}\,x + 2\sqrt{10} + \sqrt{10}$

$\Rightarrow (3\sqrt{13} + 3\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{10})y - 13\sqrt{13} - \sqrt{10} = 0$

$\angle ACB$ এর সমদ্বিখন্ডক

$$\frac{3x+4y-7}{\sqrt{9+16}} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{9+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4y-7}{5} = -\frac{3x+y-13}{\sqrt{10}}$$

$\Rightarrow 15x + 5y - 65 = -3\sqrt{10}\,x - 4\sqrt{10}\,y + 7\sqrt{10}$

$\Rightarrow (15 + 3\sqrt{10})x + (5 + 4\sqrt{10})y - 65 - 7\sqrt{10} = 0$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

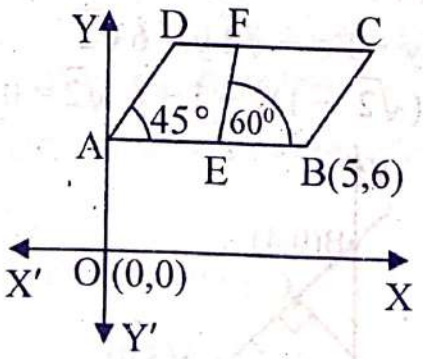
$(15 - 3\sqrt{13})x - (10 + 4\sqrt{13})y - 5 + 7\sqrt{13} = 0,$

$(3\sqrt{13} + 3\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{10})y - 13\sqrt{13} - \sqrt{10} = 0$ এবং

$(15 + 3\sqrt{10})x + (5 + 4\sqrt{10})y - 65 - 7\sqrt{10} = 0$

ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখন্ডত্রয়ের যেকোনো দুইটির ছেদবিন্দু হবে ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

3. চিত্রে, ABCD সামান্তরিকে AB বাহু x অক্ষের সমান্তরাল। AB এর মধ্যবিন্দু E.



(a) AD বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AD বাহুর ঢাল $m = \tan 45° = 1$,

y অক্ষের ছেদাংশ c = B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক = 6

$\therefore$ AD বাহুর সমীকরণ $y = mx + c$

$\Rightarrow y = x + 6 = x + 6 \Rightarrow x - y + 6 = 0$

(b) EF রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 6)

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক

$(\frac{0+5}{2}, \frac{6+6}{2}) = (\frac{5}{2}, 6)$

EF রেখার ঢাল, $m = \tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\therefore$ EF রেখার সমীকরণ $y - 6 = \sqrt{3}(x - \frac{5}{2})$

$\Rightarrow 2y - 12 = 2\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$

$\therefore 2\sqrt{3}x - 2y + 12 - 5\sqrt{3} = 0$

(c) $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। x অক্ষের সমান্তরাল এবং B(5, 6) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y = 6$.

সমাধান: ABCD সামান্তরিক বলে, $AD || BC$.

$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \tan 45^0 = 1$

$\therefore$ B(5, 6) বিন্দুগামী BC বাহুর সমীকরণ

$y - 6 = 1(x - 5) \Rightarrow x - y + 1 = 0$

আবার, x-অক্ষের সমান্তরাল B(5, 6) বিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y = 6 \Rightarrow y - 6 = 0$

এখান, $\angle ABC$ এর ক্ষেত্রে,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 1 \times 0 + (-1) \times 1 = -1 < 0$

$\therefore \angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

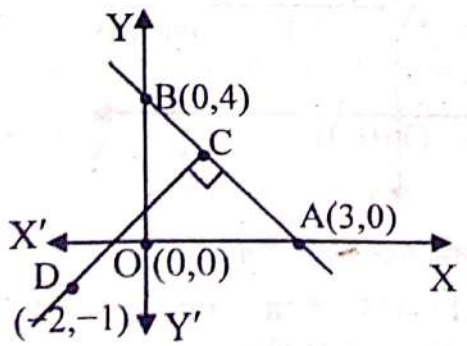
$\therefore$ ABC কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{x - y + 1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{y+6}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow x - y + 1 = -\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}$

$\therefore x + (\sqrt{2} - 1)y + 1 + 6\sqrt{2} = 0$

4.



(a) AB বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$

$\therefore$ AB বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল $= AB^2 = 5^2$

$= 25$ বর্গ একক।

(b) C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0 \cdots \cdots (i)$

আবার, AB এর উপর লম্ব এবং D (−2, −1) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y = 3 \times (-2) - 4 \times (-1) = -6 + 4$

$\Rightarrow 3x - 4y + 2 = 0 \cdots \cdots (ii)$

$(i) \times 4 + (ii) \times 3 \Rightarrow 16x + 9x = 48 - 6$

$\Rightarrow 25x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{25}$

(i) হতে, $4 \times \frac{42}{25} + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 3y = 12 - \frac{168}{25} = \frac{300 - 168}{25} = \frac{132}{25}$

$\Rightarrow y = \frac{44}{25}$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{42}{25}, \frac{44}{25})$

(c) (1, −1) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, (1, −1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$y + 1 = m(x - 1) \cdots (1)$

AB রেখার ঢাল $= \frac{4-0}{0-3} = -\frac{4}{3}$

প্রশ্নমতে, $\tan 45° = \pm \frac{m - (-\frac{4}{3})}{1 + m(-\frac{4}{3})}$

$\Rightarrow 1 = \pm \frac{3m + 4}{3 - 4m} \Rightarrow 3 - 4m = \pm(3m + 4)$

'+' নিয়ে, $3 - 4m = 3m + 4 \Rightarrow 7m = -1$

$\Rightarrow m = -\frac{1}{7}$

নিয়ে $3 - 4m = -3m - 4 \Rightarrow m = 7$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ, $y + 1 = -\frac{1}{7}(x - 1)$

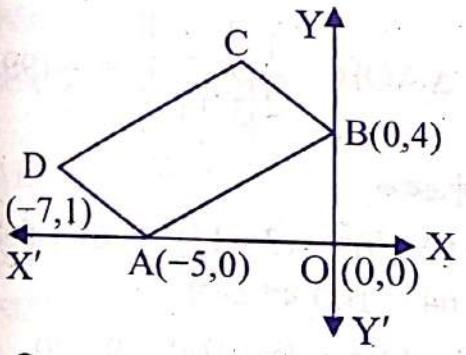
$\Rightarrow x + 7y + 6 = 0$ এবং

$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$

$\Rightarrow y + 1 = 7(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 7x - 7$

$\therefore 7x - y - 8 = 0$

5. চিত্রে, ABCD একটি সামান্তরিক।



(a) D বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow 4x - 5y = -20 \Rightarrow 4x - 5y + 20 = 0$

$D(-7, 1)$ বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|4 \times (-7) - 5 \times 1 + 20|}{\sqrt{16 + 25}}$

$= \frac{|-28 - 5 + 20|}{\sqrt{41}} = \frac{|-13|}{\sqrt{41}} = \frac{13}{\sqrt{41}}$ একক

(b) AC বাহু বিবেচনা করে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

ABCD একটি সামান্তরিক বলে, BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{0-7}{2}, \frac{4+1}{2})$ অর্থাৎ $(\frac{-7}{2}, \frac{5}{2})$ এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{-5+x}{2}, \frac{0+y}{2})$ একই হবে।

$\therefore \frac{-5+x}{2} = \frac{-7}{2} \Rightarrow x = -7 + 5 = -2$ এবং

$\frac{y}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 5$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 5)$

এখন, $AC = \sqrt{(-5+2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\therefore$ AC বাহু বিবেচনা করে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল $= AC^2 = (\sqrt{34})^2 = 34$ বর্গ একক।

(c) B বিন্দু হতে DA এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর

সমাধান: AD রেখার সমীকরণ $\frac{x+7}{-7+5} = \frac{y-1}{1-0}$

$\Rightarrow x + 7 = -2y + 2$

$\Rightarrow x + 2y + 5 = 0 \cdots \cdots$(i)

আবার, AD এর উপর লম্ব এবং B (0, 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x - y = 2 \times 0 - 4$

$\Rightarrow 2x - y + 4 = 0 \cdots \cdots$ (ii)

(i) + (ii) $\times 2 \Rightarrow x + 4x = -5 - 8$

$\Rightarrow 5x = -13 \Rightarrow x = -\frac{13}{5}$

(ii) হতে, $2 \times (-\frac{13}{5}) - y + 4 = 0$

$\Rightarrow y = 4 - \frac{26}{5} = \frac{20-26}{5} = -\frac{6}{5} \Rightarrow y = -\frac{6}{5}$

$\therefore$ লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-\frac{13}{5}, -\frac{6}{5})$

6. A(1, 1), B(−4, 13), C(8, 8) এবং D বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু।

(a) AC কর্ণ দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: AC কর্ণের সমীকরণ $\frac{x-1}{1-8} = \frac{y-1}{1-8}$

$\Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow x - y = 0$; যা মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

$\therefore$ AC কর্ণ দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য 0

(b) BD কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AC কর্ণের ঢাল $= \frac{1-8}{1-8} = 1$

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

$\therefore$ BD কর্ণের ঢাল $= -1$

$\therefore$ B(– 4, 13) বিন্দুগামী BD কর্ণের সমীকরণ

$y - 13 = -1(x+4) \Rightarrow y - 13 = -x - 4$

$\therefore$ $x + y - 9 = 0$ (Ans.)

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে $\angle ABC$ এর মান নির্ণয় কর.

সমাধান: $\overrightarrow{BA} = (1+4)\hat{i} + (1-13)\hat{j}$

$= 5\hat{i} - 12\hat{j}$

এবং $\overrightarrow{BC} = (8+4)\hat{i} + (8-13)\hat{j} = 12\hat{i} - 5\hat{j}$

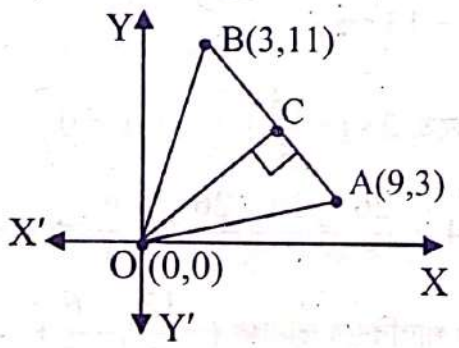
$$\therefore \cos ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$

$$= \frac{(5\hat{i}-12\hat{j})\cdot(12\hat{i}-5\hat{j})}{|5\hat{i}-12\hat{j}||12\hat{i}-5\hat{j}|}$$

$$= \frac{60+60}{\sqrt{25+144}\sqrt{25+144}} = \frac{120}{169}$$

$$\therefore \angle ABC = \cos^{-1}\left(\frac{120}{169}\right)$$

7.



(a) $3x + 5y = 11$ দ্বারা x - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x + 5y = 11 \Rightarrow \frac{3x}{11} + \frac{5y}{11} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{11/3} + \frac{y}{11/5} = 1$$

$\therefore$ x - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $= \frac{11}{3}$

(b) OC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল $= \frac{11-3}{3-9} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

AB রেখার উপর লম্ব OC রেখার ঢাল

$= -(-\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$

মূলবিন্দুগামী এবং $\frac{3}{4}$ ঢালবিশিষ্ট OC রেখার সমীকরণ

$y = mx \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \therefore 4y = 3x$ (Ans.)

(c) $\Delta AOB : AB^2$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\Delta AOB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(99-9)$

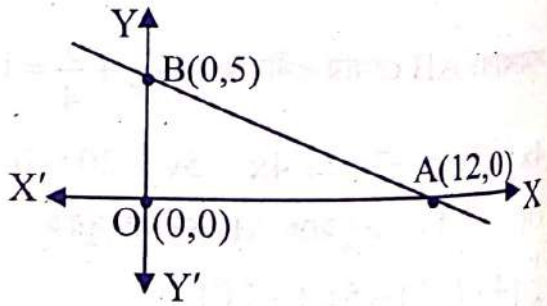
$= 45$ বর্গ একক

$AB^2 = (9-3)^2 + (3-11)^2 = 6^2 + (-8)^2$

$= 36 + 64 = 100$ বর্গ একক

$\therefore$ $\Delta AOB : AB^2 = 45 : 100 = 9 : 20$

8.



(a) উদ্দীপকে উল্লেখিত OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(OA \times OB)$

$= \frac{1}{2}(12 \times 5) = 30$ বর্গ একক।

(b) AB রেখাংশকে 5 : 12 অনুপাতে অন্ত:র্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখাংশকে 5 : 12 অনুপাতে অন্ত:র্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$(x_1, y_1) = (\frac{5\times0+12\times12}{5+12}, \frac{5\times5+12\times0}{5+12})$

$= (\frac{144}{17}, \frac{25}{17})$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ, $xy_1 - yx_1 = 0$

$\Rightarrow x.\frac{25}{17} - y.\frac{144}{17} = 0$

$\therefore 25x - 144y = 0$ (Ans.)

(c) ΔOAB এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: OA রেখার সমীকরণ, $y = 0 \cdots\cdots$ (i)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1$

$\Rightarrow 5x + 12y = 60 \Rightarrow 5x + 12y - 60 = 0 \cdots$ (ii)

এখানে, $\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণ এবং

$a_1a_2 + b_1b_2 = 5.0 + 12.1 > 0$

$\therefore$ $\angle A$ সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{5x+12y-60}{\sqrt{5^2+12^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 5x + 12y - 60 = 13y \therefore 5x - y - 60 = 0$ (Ans.)

9. $3x - 4y + 12 = 0 \cdots\cdots$ (i), $7x + \sqrt{15}y - 14 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

(a) (i) নং রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = -12$

$\Rightarrow \frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = 12 \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 12$

$\therefore$ x ও y -অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $|-4| = 4$ ও $|3| = 3$.

(b) (i) রেখাস্থ ও মূলবিন্দু হতে 10 একক দূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, (i) রেখাস্থ বিন্দুটি $P(\alpha, \beta)$.

$\therefore 3\alpha - 4\beta + 12 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4\beta-12}{3}$

মূলবিন্দু O এবং $P(\alpha, \beta)$বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$OP = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |10|$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 100 \cdots\cdots$ (i)

$\Rightarrow (\frac{4\beta-12}{3})^2 + \beta^2 = 100$

$\Rightarrow 16\beta^2 - 96\beta + 144 + 9\beta^2 = 900$

$\Rightarrow 25\beta^2 - 96\beta - 756 = 0$

$\Rightarrow \beta = \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 4\times25(-756)}}{2\times25}$

$= \frac{96 \pm \sqrt{84816}}{2\times25} = \frac{96 \pm 2\sqrt{21204}}{2\times25}$

$= \frac{48 \pm \sqrt{21204}}{25}$

$= \frac{48+\sqrt{21204}}{25}, \frac{48-\sqrt{21204}}{25}$

$\therefore \alpha = \frac{4\beta-12}{3} = \frac{1}{3}(\frac{192+4\sqrt{21202}}{25} - 12)$

$= \frac{1}{3}(\frac{192+4\sqrt{21202}-300}{25})$

$= \frac{4\sqrt{21202}-108}{75}$, যখন $\beta = \frac{48+\sqrt{21204}}{25}$

$\alpha = \frac{-4\sqrt{21202}-108}{75}$, যখন $\beta = \frac{48-\sqrt{21204}}{25}$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে 10 একক দূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(\frac{4\sqrt{21202}-108}{75}, \frac{48+\sqrt{21204}}{25})$

$(\frac{-4\sqrt{21202}-108}{75}, \frac{48-\sqrt{21204}}{25})$

(c) (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মূলবিন্দুধারী সমদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - 4y + 12 = 0 \cdots\cdots$ (i),

$7x + \sqrt{15}y - 14 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ধ্রুবক পদদ্বয় বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{\sqrt{7^2+(\sqrt{15})^2}}$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{\sqrt{7^2+(\sqrt{15})^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{\sqrt{25}} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{\sqrt{49+15}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-4y+12}{5} = -\frac{7x+\sqrt{15}y-14}{8}$$

$$\Rightarrow 24x-32y+96=-35x-5\sqrt{15}y+70$$

$$\Rightarrow 59x-(32-5\sqrt{15})y+26=0$$

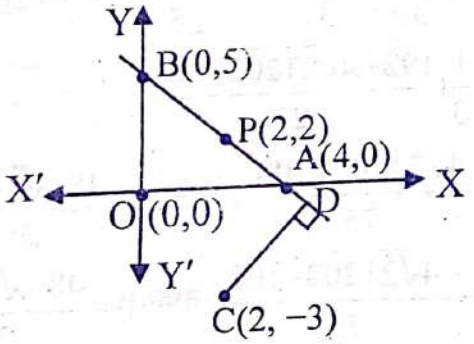
$$\Rightarrow 59x-(32-5\sqrt{15})y+26=0$$

$$\Rightarrow (32-5\sqrt{15})y=59x+26$$

$$\Rightarrow y=\frac{59}{32-5\sqrt{15}}x+\frac{26}{32-5\sqrt{15}}$$

$\therefore$ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $=\frac{59}{32-5\sqrt{15}}$

10.



(a) P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: P(2, 2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2^2+2^2}, \tan^{-1}\frac{2}{2})$$

$$= (2\sqrt{2}, \tan^{-1}1) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

(b) AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এবং (2, −1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{5-0}{0-4} = -\frac{5}{4}$

ধরি, (2, −1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y + 1 = m(x-2)$, যা AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \frac{m-m_1}{1+mm_1} = \tan(\pm 45^0) \Rightarrow \frac{m+\frac{5}{4}}{1-\frac{5}{4}m} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{4m+5}{4-5m} = \pm 1 \Rightarrow 4m+5 = \pm(4-5m)$$

'+' নিয়ে, $4m + 5 = 4 - 5m$

$$\Rightarrow 9m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{9}$$

'−' নিয়ে, $4m + 5 = -4 + 5m$

$$\Rightarrow -m = -9 \Rightarrow m = 9$$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$y + 1 = -\frac{1}{9}(x-2) \Rightarrow 9y + 9 = -x + 2$$

$\Rightarrow x + 9y + 7 = 0$ এবং

$y + 1 = 9(x-2) \Rightarrow 9x - 9 = y + 1$

$\Rightarrow 9x - y - 10 = 0$

(c) CD এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow 5x + 4y = 20 \cdots \text{(i)}$$

AB রেখার উপর লম্ব এবং C(2, −3) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$4x - 5y = 4\times 2 - 5\times(-3)$

$\Rightarrow 4x - 5y = 8 + 15$

$\Rightarrow 4x - 5y = 23 \cdots\cdots \text{(ii)}$

$(i)\times 5 + (ii)\times 4 \Rightarrow 25x + 16x = 100 + 92$

$$\Rightarrow 41x = 192 \Rightarrow x = \frac{192}{41}$$

(i) হতে, $5\times\frac{192}{41} + 4y = 20$

$$\Rightarrow \frac{240}{41} + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{240}{41} = -\frac{35}{41}$$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{192}{41}, -\frac{35}{41})$

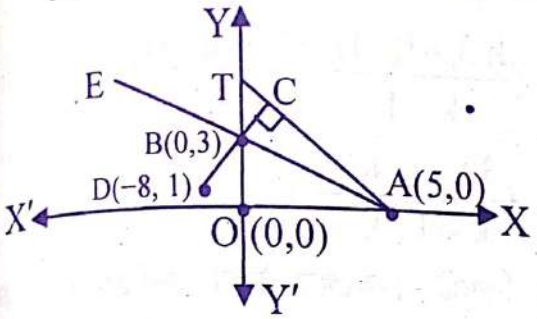
$\therefore$ CD এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{2+\frac{192}{41}}{2}, \frac{-3-\frac{35}{41}}{2})$$

$=(\frac{82+192}{84},\frac{-123-35}{84})$

$=(\frac{274}{82},\frac{-158}{82})=(\frac{137}{41},\frac{-79}{41})$

11.



(a) P(− 2, 3) ও Q(4, −1) বিন্দুগামী রেখাংশকে y - অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, P(− 2, 3) ও Q(4, −1) বিন্দুগামী রেখাংশকে y - অক্ষ k : 1 অনুপাতে R বিন্দুতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\frac{k.4+1.(-2)}{k+1},\frac{k.(-1)+1.3}{k+1})$

$=(\frac{4k-2}{k+1},\frac{-k+3}{k+1})$

R বিন্দু y - অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর x - স্থানাঙ্ক শূন্য হবে।

$\therefore \frac{4k-2}{k+1}=0 \Rightarrow 4k-2=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k:1=1:2$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত 1 : 2 (Ans.)

(b) AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: B(0,3) ও D(−8, 1) বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$(x-0)(3-1)-(y-3)(0+8)=0$

$\Rightarrow 2x-8y+24=0 \Rightarrow x-4y+12=0$

CD রেখার উপর লম্ব AC রেখার সমীকরণ,

$4x+y+k=0$; যা A(5, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 4.5-0+k=0 \Rightarrow k=-20$

$\therefore$ AC রেখার সমীকরণ, $4x+y-20=0$

(c) দেখাও যে, AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমাধান: A(5,0) ও B(0,3) বিন্দুগামী AE রেখার সমীকরণ, $(x-5)(0-3)-(y-0)(5-0)$

$\Rightarrow -3x+15-5y=0$

$\Rightarrow 3x+5y-15=0 \cdots$ (i)

OT অর্থাৎ y অক্ষের সমীকরণ, $x=0 \cdots$ (ii) AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ, $\frac{3x+5y-15}{\sqrt{3^2+5^2}}=\pm\frac{y}{\sqrt{1^2}}$

$\Rightarrow 3x+5y-15=\pm\sqrt{34}y$

$\Rightarrow 3x+(5\pm\sqrt{34})y-15=0$

$\therefore 3x+(5+\sqrt{34})y-15=0,$

$3x+(5-\sqrt{34})y-15=0$

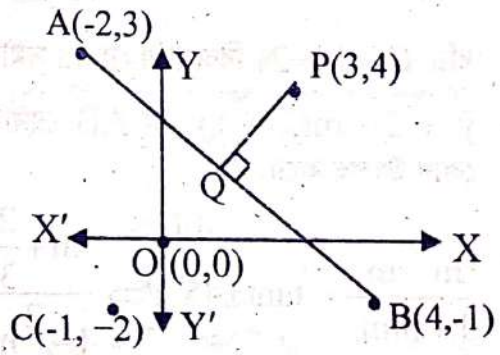
এ সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের ক্ষেত্রে,

$a_1a_2+b_1b_2=3\times3+(5+\sqrt{34})(5-\sqrt{34})$

$=9+25-34=34-34=0$

$\therefore$ AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

12.



(a) AB রেখাকে y-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখাকে P বিন্দু k : 1 অনুপাতে বিভক্ত করলে এর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{k.4+1(-2)}{k+1},\frac{k.(-1)+1.3}{k+1})$

P বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর x-স্থানাঙ্ক শূন্য হবে।

$\therefore \frac{4k-2}{k+1}=0 \Rightarrow 4k-2=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k:1=1:2$

(b) Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: A(-2,3) ও B(4,-1) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ,

$(x+2)(3+1)-(y-3)(-2-4)=0$

$\Rightarrow 4(x+2)+6(y-3)=0$

$\Rightarrow 2x+4+3y-9=0$

$\Rightarrow 2x+3y=5 \cdots\cdots (i)$

AB রেখার উপর লম্ব এবং P(3, 4) বিন্দুগামী PQ রেখার সমীকরণ, .

$3x-2y=3.3-2.4=9-8$

$\Rightarrow 3x-2y=1 \cdots\cdots (ii)$

$(i)\times 2+(ii)\times 3 \Rightarrow 4x+9x=10+3$

$\Rightarrow 13x=13 \Rightarrow x=1$

(i) হতে, $3y=5-2x=5-2\times 1$

$\Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1)

(c) C বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল, $m_1=\frac{3+1}{-2-4}=\frac{4}{-6}=\frac{2}{3}$

ধরি, C(−1, −2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ ,

$y+2=m(x+1)$; যা AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$$\frac{m-m_1}{1+mm_1}=\tan(\pm 45^0) \Rightarrow \frac{m+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}m}=\pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{3m+2}{3-2m}=\pm 1 \Rightarrow 3m+2=\pm(3-2m)$$

'+' নিয়ে, $3m+2=3-2m$

$\Rightarrow 5m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{5}$

'−' নিয়ে, $3m+2=-3+2m \Rightarrow m=-5$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ,

$y+2=\frac{1}{5}(x+1) \Rightarrow 5y+10=x+1$

$\Rightarrow x-5y-9=0$ এবং

$y+2=-5(x+1) \Rightarrow y+2=-5x-5$

$\Rightarrow 5x+y+7=0$

13. ΔABC এর বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(−1, −1), E(3, 1), F(0, 3)

(a) DE রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় কর।

সমাধান: DE রেখাংশ যে বিন্দুতে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার স্থানাঙ্ক

$$=\left(\frac{k.3+1(-1)}{k+1},\frac{k.1+1(-1)}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{3k-1}{k+1},\frac{k-1}{k+1}\right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, এর y স্থানাঙ্ক $\frac{k-1}{k+1}=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow k:1=1:1$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, এর x স্থানাঙ্ক $\frac{3k-1}{k+1}=0 \Rightarrow 3k-1=0$

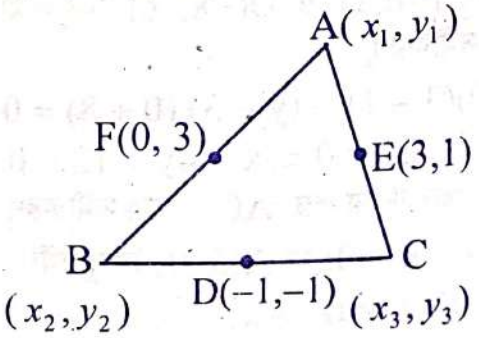
$\Rightarrow k=\frac{1}{3} \Rightarrow k:1=1:3$

$\therefore$ DE রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা 1 : 1 অনুপাতে এবং y-অক্ষ দ্বারা 1 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

(b) ক্ষেত্রফলের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$\Delta ABC=4\,\Delta DEF$

প্রমাণ: মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ও $C(x_3,y_3)$ এবং BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(−1, −1), E(3 , 1) ও F(0, 3)



$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=0 \Rightarrow x_1+x_2=0 \cdots\cdots (1)$

$y_1+y_2=6 \cdots (2)$, $x_2+x_3=-2 \cdots (3)$

$y_2+y_3=-2 \cdots (4)$, $x_3+x_1=6 \cdots (5)$

$y_3+y_1=2 \cdots (6)$

$(1)+(3)-(5) \Rightarrow 2x_2 = -8 \Rightarrow x_2 = -4$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x_1 = 4$ এবং (3) হতে পাই $x_3 = 2$

আবার, $(2)+(4)-(6) \Rightarrow 2y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 1$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $y_1 = 5$ এবং (4) হতে পাই $y_3 = -3$

$\therefore$ শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $A(4, 5), B(-4, 1), C(2, -3)$

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}|(4+4)(1+3)-(5-1)(-4-2)|$

$= \frac{1}{2}|(8)(4)-(4)(-6)| = \frac{1}{2}|32+24|$

$= \frac{1}{2}|32+24| = 28$ বর্গ একক

$\Delta DEF = \frac{1}{2}|(-1-3)(1-3)-(-1-1)(3-0)|$

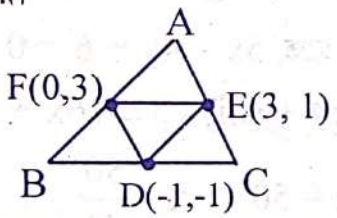
$= \frac{1}{2}|(-4)(-2)-(-2)(3)|$

$= \frac{1}{2}|8+6)| = 7$ বর্গ একক

$\therefore \Delta ABC = 28 = 4 \times 7 = 4\,\Delta DEF$

(c) D, E , F এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ΔABC এর পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, ABC ত্রিভুজে BC , CA ; AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(-1, -1)$, $E(3, 1)$, $F(0, 3)$.

$\therefore$ $BC \| FE$, $CA \| DF$ এবং $AB \| ED$.

$\therefore$ BC রেখার ঢাল = FE রেখার ঢাল $= \frac{3-1}{0-3} = -\frac{2}{3}$

AC রেখার ঢাল = FD রেখার ঢাল $= \frac{3+1}{0+1} = 4$

$\therefore$ $D(-1, -1)$ বিন্দুগামী BC বাহুর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y+1 = \frac{3}{2}(x+1)$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}(x+1) - 1 = \frac{3x+3-2}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{2} \ldots\ldots$ (i)

$E(3, 1)$ বিন্দুগামী CA বাহুর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $y - 1 = -\frac{1}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y - 4 = -x + 3$

$\Rightarrow 4 \times \frac{3x+1}{2} - 4 = -x + 3$, [(i) দ্বারা]

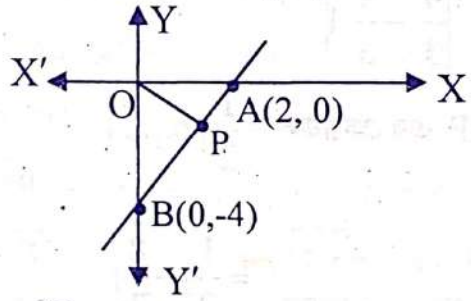
$\Rightarrow 6x + 2 - 4 = -x + 3$

$\Rightarrow 7x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

(i) হতে, $y = \frac{3 \times \frac{5}{7} + 1}{2} = \frac{15+7}{14} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$

$\therefore$ ΔABC এর পরিকেন্দ্র $(\frac{5}{7}, \frac{11}{7})$

14.



(a) $x - \sqrt{3}y = 5$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $x - \sqrt{3}y = 5 \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 5$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^0 \therefore \theta = 30^0$ (Ans.)

(b) AB এর উপর লম্ব এবং A বিন্দুগামী রেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

$\Rightarrow 2x - y = 4$

AB এর লম্বরেখার সমীকরণ, $x + 2y + k = 0$; যা $A(2, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

(b) যদি E বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু এবং F, AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তাহলে ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: AC এর মধ্যবিন্দু মধ্যবিন্দু এর স্থানাঙ্ক

$$E = (\frac{-3+3}{2}, \frac{5-7}{2}) = (0,-1)$$

AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু

F এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3.6-2.(-3)}{3-2}, \frac{3.5-2.5}{3-2})$

$$= (\frac{18+6}{1}, \frac{15-10}{1}) = (24,5)$$

$$\delta_{AEF} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -24 & -6 & 0 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 18 + 144 = 162$

$\therefore$ ΔAEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\delta_{AEF}| = \frac{1}{2}|162|$

$= 81$ বর্গ একক।

(c) C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: A(–3,5), B(6,5) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ,

$(x + 3)(5 - 5) - (y - 5)(-3 - 6) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0 \cdots \cdots$ (i)

(i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x + k = 0$; যা C(3, –7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$

C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখার সমীকরণ,

$x - 3 = 0$; যা y- অক্ষের সমান্তরাল।

y- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোণ 90^0 উৎপন্ন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ 90^0.

18. $2x + 5y - 6 = 0 \cdots \cdots$ (i)

(a) (i) নং রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: $2x + 5y - 6 = 0 \Rightarrow 5y = -2x + 6$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$

$\therefore$ (i) নং রেখার ঢাল $= -\frac{2}{5}$

(b) মূলবিন্দু ও (i) নং রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $2x + 5y - 6 = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 6$

$\Rightarrow \frac{2x}{6} + \frac{5y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{6/5} = 1$; যা x-অক্ষকে A(3, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, \frac{6}{5})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3+0}{2}, \frac{0+\frac{6}{5}}{2})$

$= (\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$

$\therefore$ মূলবিন্দু (0, 0) ও $(\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$ বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = \frac{3/5}{3/2}x \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$

$\Rightarrow 2x = 5y$ (Ans.)

(c) (2, –1) বিন্দু হতে (i) নং রেখার উপর যে লম্বরেখার সমীকরণ পাওয়া যায় তা এবং প্রদত্ত রেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় কর ক্রেমারের নিয়মে।

সমাধান: প্রদত্ত রেখা $2x + 5y = 6 \cdots$ (i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ,

$5x - 2y + k = 0 \cdots \cdots$ (ii) ; যা (2, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $5.2 - 2.(-1) + k = 0$

$\Rightarrow 10 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -12$

(ii) হতে, $5x - 2y = 12 \cdots \cdots$ (iii)

(i) ও (iii) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 25 = -29$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 60 = -72$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 30 = -6$$

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-72}{-29} = \frac{72}{29}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-29} = \frac{6}{29}$$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{72}{29}, \frac{6}{29})$

19. $3x - 4y + 18 = 0 \cdots \cdots$ (i)
$4x - 3y - 5 = 0 \cdots \cdots$ (ii)
$5x + 12y + 13 = 0 \cdots \cdots$ (iv)
$y = 1 \cdots \cdots \cdots$ (iv)

(a) (i) নং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - 4y + 18 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = -18$

$$\Rightarrow \frac{3x}{-18} + \frac{-4y}{-18} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{9/2} = 1$$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2}|(-6) \times \frac{9}{2}|$

$= \frac{1}{2}|-27| = \frac{27}{2}$ বর্গ একক।

(b) y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে বিন্দু দুইটি হতে (i) নং রেখা সমদূরবর্তী মূলবিন্দু হতে তাদের দূরত্বের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, y-অক্ষের উপর অবস্থিত $(0,\alpha)$ ও $(0, \beta)$ বিন্দু দুইটি হতে $3x-4y+18=0 \cdots$(i) নং রেখা সমদূরবর্তী, যেখানে $\alpha \neq \beta$।

$$\therefore \quad \frac{0 - 4\alpha + 18}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{0 - 4\beta + 18}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$\Rightarrow -4\alpha + 18 = \pm(-4\beta + 18)$

'+' নিয়ে, $-4\alpha + 18 = -4\beta + 18$

$\Rightarrow -4(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$ কিন্তু $\alpha \neq \beta$

'–' নিয়ে, $-4\alpha + 18 = 4\beta - 18$

$\Rightarrow -4\alpha + 18 = 4\beta - 18$

$\Rightarrow -4(\alpha + \beta) = -36 \Rightarrow \alpha + \beta = 9$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে বিন্দু দুইটির দূরত্বের সমষ্টি $= \alpha + \beta = 9$

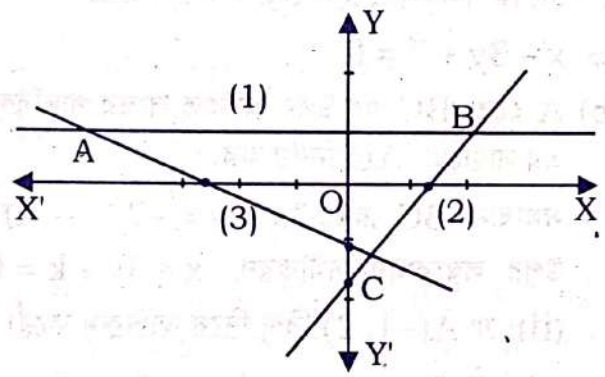
(c) (ii), (iii) ও (iv) রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি
$AB \equiv y - 1 = 0 \cdots (1)$,
$BC \equiv 4x - 3y - 5 = 0 \cdots (2)$

i.e., $\frac{x}{5/4} + \frac{y}{-5/3} = 1$

এবং $CA \equiv 5x + 12y + 13 = 0 \cdots\cdots (3)$

i.e., $\frac{x}{-13/5} + \frac{y}{-13/12} = 1$.



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির প্রতিটি কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে।

এখন,(1) ও (2) রেখার ধ্রুবক পদের চিহ্ন একই বলে $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{y-1}{\sqrt{1}} = \frac{4x - 3y - 5}{\sqrt{16+9}}$$

$\Rightarrow 5y - 5 = 4x - 3y - 5 \Rightarrow 4x - 8y = 0$

$\Rightarrow x - 2y = 0 \cdots\cdots (4)$

আবার, (1) ও (3) রেখার ধ্রুবক পদের চিহ্ন বিপরীত বলে $\angle BAC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{y-1}{\sqrt{1}} = -\frac{5x + 12y + 13}{\sqrt{25+144}}$$

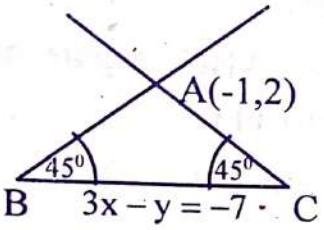
$\Rightarrow 13y - 13 = -5x - 12y - 13$

$\Rightarrow 5x + 25y = 0 \Rightarrow x + 5y = 0 \cdots\cdots (5)$

(4) এবং (5) রেখা সমাধান করে পাই,
$x = 0$ ও $y = 0$.

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র $(0, 0)$.

20.



(a) $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রানুসারে, $\angle B = \angle C = 45^0$

$\therefore$ $A(-1, 2)$ শীর্ষগামী এবং BC বাহুর উপর লম্বরেখা হবে $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x - 3y = -1 - 3.2$

$\Rightarrow x - 3y + 7 = 0$

(b) A হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু D এর সাহায্যে AD নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখা $3x - y = -7 \cdots\cdots$(i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $x + 3y + k = 0 \cdots$ (ii); যা $A(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $-1 + 3.2 + k = 0 \Rightarrow k = -5$

$\therefore$ (ii) হতে, $x + 3y - 5 = 0$

$\Rightarrow x = 5 - 3y \cdots \cdots$ (iii)

(i) হতে, $3(5 - 3y) - y = -7$

$\Rightarrow 15 - 9y - y = -7$

$\Rightarrow -10y = -22 \Rightarrow y = \frac{11}{5}$ এবং

(iii) হতে, $x = 5 - 3 \times \frac{11}{5} = \frac{25-33}{5}$

$\Rightarrow x = \frac{-8}{5}$

$\therefore$ A হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক $(\frac{-8}{5}, \frac{11}{5})$

$\therefore$ $AD = \sqrt{(-1+\frac{8}{5})^2 + (2-\frac{11}{5})^2}$

$= \sqrt{(\frac{-5+8}{5})^2 + (\frac{10-11}{5})^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ (Ans.)

(c) উদ্দীপকের সাহায্যে AB ও AC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: BC রেখা $3x - y = -7$ এর ঢাল,

$m_1 = -\frac{3}{-1} = 3$

ধরি, $C(-1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = m(x + 1)$; যা AB ও AC রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ $\frac{m - m_1}{1 + mm_1} = \tan(\pm 45^0) \Rightarrow \frac{m-3}{1+3m} = \pm 1$

$\Rightarrow m - 3 = \pm(1 + 3m)$

'+' নিয়ে, $m - 3 = 1 + 3m$

$\Rightarrow -2m = 4 \Rightarrow m = -2$

'–' নিয়ে, $m - 4 = -1 - 3m \Rightarrow 4m = 2$

$m = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

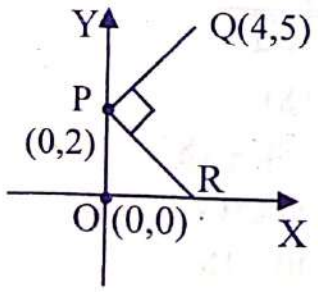
$y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -2x - 2$

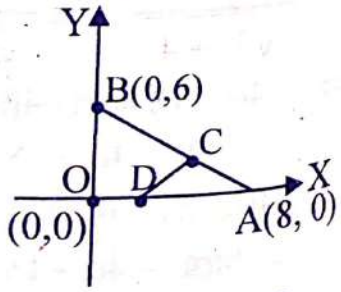
$\Rightarrow 2x + y = 0$ এবং

$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$

$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

21.





$AC : BC = 1:2$

(a) P(0,2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: P(0,2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (r\cos\theta, r\sin\theta)$

এখানে, $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+2^2} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{y} = \cot^{-1}\frac{0}{2} = 90^0$

$\therefore$ P(0,2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (2\cos 90^0, 2\sin 90^0)$

(b) PR রেখার সমীকরণ থেকে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: PQ রেখার ঢাল $= \frac{5-2}{4-0} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ PQ এর লম্ব PR রেখার ঢাল $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ P (0, 2) বিন্দুগামী PR রেখার সমীকরণ,

$y - 2 = -\frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow 3y - 6 = -4x$

$\Rightarrow 4x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{3/2} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{2}, 0)$

(c) $\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডক BD হলে, ΔDAC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: AC : BC = 1 : 2

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{1\times0+2\times8}{1+2}, \frac{1\times6+2\times0}{1+2})$

$= (\frac{16}{3}, \frac{6}{3}) = (\frac{16}{3}, 2)$

$\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডক BD বলে,

$OD : DA = OB : AB = 6 : \sqrt{6^2+8^2}$

$= 6 : 10 = 3 : 5$

$\therefore D \equiv (\frac{3\times8+5\times0}{3+5}, \frac{3\times0+5\times0}{3+5}) = (3, 0)$

$\therefore \Delta DAC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 16/3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{-2(3-8)\} = \frac{1}{2}\{-2(-5)\}$

= 5 বর্গ একক।

22. A(3,5), B(7, 5), C(−3, 7), D(−4, −10)

(a) D বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: D(−4, −10) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (r\cos\theta, r\sin\theta)$

এখানে, $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-4)^2+(-10)^2}$

$= \sqrt{16+100} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-10}{-4} = \pi + \tan^{-1}\frac{10}{4}$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{5}{2}$

$\therefore$ D(−4, −10) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক

$= (2\sqrt{29}\cos\theta, 2\sqrt{29}\sin\theta)$, যেখানে

$\theta = \pi + \tan^{-1}\frac{5}{2}$

(b) যদি E বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু, F, AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এবং G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র হয়, তাহলে ΔEFG এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: AC এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3-3}{2}, \frac{5+7}{2}) = (0,6)$

AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু F এর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3\times7-2\times3}{3-2}, \frac{3\times5-2\times5}{3-2})$

$= (\frac{21-6}{1}, \frac{15-10}{1}) = (15,5)$

ΔABC এর ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{3+7-3}{3}, \frac{5+5+7}{3}) = (\frac{7}{3}, \frac{17}{3})$

$\therefore \Delta EFG$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(0-15)(5-\frac{17}{3}) - (6-5)(15-\frac{7}{3})|$

$= \frac{1}{2}|(-15)(-\frac{2}{3}) - \frac{38}{3})|$

$= \frac{1}{2}|\frac{30-38}{3}| = \frac{1}{2}|\frac{-8}{3}| = \frac{4}{3}$ বর্গ একক।

(c) C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: A(3,5), B(7, 5) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $(x-3)(5-5) - (y-5)(3-7) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0$

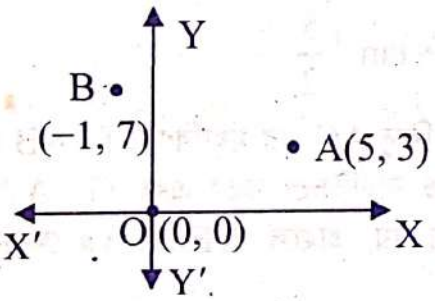
$y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ $x + k = 0$, যা C(−3, 7) বিন্দুগামী।

$\therefore -3 + k = 0 \Rightarrow k = 3$

$\therefore$ C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখার সমীকরণ $x + 3 = 0 \cdots\cdots$ (i) , যা x-অক্ষের উপর লম্ব।

$\therefore$ C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 90^0 কোণ উৎপন্ন করে।

23.



(a) y-অক্ষ AB রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, y-অক্ষ AB রেখাংশকে P বিন্দুতে k: 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{k.(-1)+1.5}{k+1}, \frac{k.7+1.3}{k+1})$;

যা y- আক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{k.(-1)+1.5}{k+1} = 0 \Rightarrow -k + 5 = 0$

$\Rightarrow k = 5 \Rightarrow k : 1 = 5 : 1$

$\therefore$ y-অক্ষ AB রেখাংশকে 5 : 1অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

(b) B বিন্দুগামী OACB সামান্তরিকের OC কর্ণের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, OACB সামান্তরিকের C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α, β).

সামান্তরিকটির AB কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{5-1}{2}, \frac{3+7}{2})$ $= (2,5)$ এবং OC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2})$ অভিন্ন।

$\therefore \frac{\alpha}{2} = 2 \Rightarrow \alpha = 4, \frac{\beta}{2} = 5 \Rightarrow \beta = 10$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (4,10)

$\therefore$ OC কর্ণের সমীকরণ, $y = \frac{10}{4}x$

$\Rightarrow y = \frac{5}{2}x \Rightarrow 5x = 2y \Rightarrow 3x - 2y = 0$

$\therefore$ B(−1, 7) বিন্দুগামী OC কর্ণের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $2x + 3y = 2.(-1) + 3.7$

$\Rightarrow 2x + 3y = -2 + 21$

$\Rightarrow 2x + 3y - 19 = 0$ (Ans.)

(c) $x - y = 0$ রেখার সমান্তরাল বরবার O হতে AB এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $x - y = 0 \Rightarrow y = x \cdots\cdots$ (i)

A(5, 3) ও B(−1, 7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরন,

$(x-5)(3-7) - (y-3)(5+1)\} = 0$

$\Rightarrow -4x + 20 - 6y + 18 = 0$

$\Rightarrow -4x - 6y + 38 = 0$

$\Rightarrow 2x + 3y - 19 = 0$

$\Rightarrow 2x + 3y = 19$, [(i) দ্বারা]

$\Rightarrow 5x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{5}, y = \frac{19}{5}$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা ও এর ছেদবিন্দু $Q(\frac{19}{5}, \frac{19}{5})$ (ধরি)।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= OQ = \sqrt{(0-\frac{19}{5})^2 + (0-\frac{19}{5})^2}$

$= \sqrt{2(\frac{19}{5})^2} = \frac{19\sqrt{2}}{5}$ একক।

24. দৃশ্যকল্প-I: $3x-4y+12=0$.

দৃশ্যকল্প-II: $8x+15y-12=0$.[ঢা.বো. '১৭]

(a) $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি লম্ব কিনা যাচাই কর। ২

সমাধান: $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$

$=2+2+3=7\neq 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি লম্ব নয়।

(b) দৃশ্যকল্প- II নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $8x+15y-12=0$ $\cdots$ (i) সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ,

$8x+15y+k=0$ $\cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

$=\dfrac{|k+12|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\dfrac{|k+12|}{17}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|k+12|}{17}=2\Rightarrow k+12=\pm 34$

$\Rightarrow k=22,-46$

(ii) হতে, $8x+15y+22=0$,

$8x+15y-46=0$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে এ সরলরেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব

$=\dfrac{|0.x+0.y+22|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\dfrac{22}{17}$ এবং

$\dfrac{|0.x+0.y-46|}{\sqrt{8^2+15^2}}=\dfrac{46}{17}$

(c) দৃশ্যকল্প-I এবং দৃশ্যকল্প-II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখন্ডক x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $3x-4y+12=0$ ও

$8x+15y-12=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$\dfrac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\dfrac{8x+15y-12}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{3x-4y+12}{5}=\pm\dfrac{8x+15y-12}{17}$

$\Rightarrow 17(3x-4y+12)=\pm 5(8x+15y-12)$

$\therefore\ 51x-68y+204=40x+75y-60$

$\Rightarrow 11x-143y+264=0\cdots\cdots(1)$ এবং

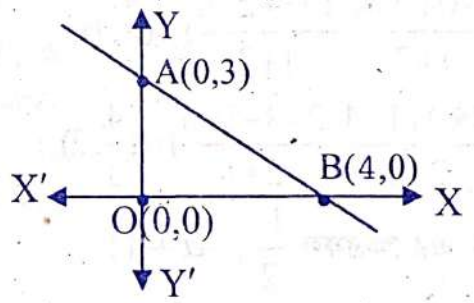
$51x-68y+204=-40x-75y+60$

$\Rightarrow 91x+7y+144=0\cdots\cdots(2)$

(1) নং সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $=\dfrac{11}{143}>0$, x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং (2) নং সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $=-\dfrac{91}{7}<0$, x অক্ষের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $=\dfrac{11}{143}=\dfrac{1}{13}$

25. দৃশ্যকল্প : [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]



(a) (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর। ২

সমাধান: (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার ঢাল $=\dfrac{5-7}{3-6}=\dfrac{-2}{-3}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল $-\dfrac{1}{2/3}=-\dfrac{3}{2}$

(b) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$

$\Rightarrow 3x+4y=12\Rightarrow 3x+4y-12=0\cdots(i)$

ধরি, (i) রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 4y + k = 0 \cdots$(ii)

$\therefore \quad \dfrac{|k+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3 \Rightarrow k+12 = \pm 15$

$\Rightarrow k = 3, -27$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$3x + 4y + 3 = 0$ এবং $3x + 4y - 27$

(c) দৃশ্যকল্পের $P(\alpha, 0)$ বিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 8

সমাধান: মনে করি, AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় C ও D.

C বিন্দু AB রেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, D বিন্দু AB রেখাংশকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।

$\therefore \quad C \equiv (\dfrac{1\times0+2\times4}{1+2}, \dfrac{1\times3+2\times0}{1+2}) = (\dfrac{8}{3}, 1),$

$D \equiv (\dfrac{2\times0+1\times4}{2+1}, \dfrac{2\times3+1\times0}{2+1}) = (\dfrac{4}{3}, 2)$

$\therefore \quad \Delta PCD$ এর ক্ষেত্রফল $\dfrac{1}{2}|-\alpha+4|$

$= \dfrac{1}{2}|(\alpha - \dfrac{8}{3})(1-2) - (0-1)(\dfrac{8}{3} - \dfrac{4}{3})|$

$= \dfrac{1}{2}|-\alpha + \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}| = \dfrac{1}{2}|-\alpha+4|$

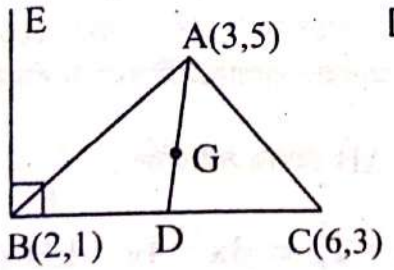
প্রশ্নমতে, $\dfrac{1}{2}|-\alpha+4| = 3$

$\Rightarrow -\alpha + 4 = \pm 6$

$\Rightarrow \alpha = 4 + 6$ অথবা $4 - 6 = 10$ অথবা -2

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (10, 0) অথবা (−2, 0) একক।

26. [য.বো.'১৭]



চিত্রে : G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র ; D, BC এর মধ্যবিন্দু, $EB \perp BC$।

(a) কী শর্তে A, B, C(2t, t−1) বিন্দু তিনটি ধনাত্মক ক্রমে থাকবে?

সমাধান: A(3, 5) , B(2, 1), C(2t, t−1) বিন্দু তিনটি ধনাত্মক ক্রমে থাকার নির্ণেয় শর্ত

$(3-2)(1-t+1) - (5-1)(2-2t) > 0$

$\Rightarrow 2 - t - 8 + 8t > 0$

$\Rightarrow 7t - 6 > 0 \Rightarrow t > \dfrac{6}{7}$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}(-2+16)$

$= 7$ বর্গ একক।

(b) দেখাও যে, G বিন্দুটি AD রেখাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

সমাধান: BC এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক $(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{1+3}{2}) = (4, 2)$

ΔABC এর ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক $(\dfrac{3+2+6}{3}, \dfrac{5+1+3}{3}) = (\dfrac{11}{3}, 3)$

আবার, G বিন্দুটি AD রেখাকে k:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে,

G এর স্থানাঙ্ক $= (\dfrac{k\times4+1\times3}{k+1}, \dfrac{k\times2+1\times5}{k+1})$

$= (\dfrac{4k+3}{k+1}, \dfrac{2k+5}{k+1})$

$\therefore \quad \dfrac{4k+3}{k+1} = \dfrac{11}{3} \Rightarrow 12k + 9 = 11k + 11$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow k : 1 = 2 : 1$

আবার, $\dfrac{2k+5}{k+1} = 3 \Rightarrow 2k + 5 = 3k + 3$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow k : 1 = 2 : 1$

$\therefore$ G বিন্দুটি AD রেখাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে

(c) $\angle EBC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: B(2, 1) ও C(6, 3) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ,

$(x-2)(1-3)-(y-1)(2-6)=0$

$\Rightarrow -2(x-2)+4(y-1)=0$

$\Rightarrow -(x-2)+2(y-1)=0$

$\Rightarrow -x+2+2y-2=0 \Rightarrow x-2y=0$

B(2, 1) বিন্দুগামী BC এর উপর লম্বরেখা BE এর সমীকরণ, $2x+y=2.2+1$

$\Rightarrow 2x+y-5=0$

$\therefore$ $\angle EBC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{x-2y}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\frac{2x+y-5}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$\Rightarrow x-2y=\pm(2x+y-5)$

$\therefore x-2y=2x+y-5$

$\Rightarrow x+3y=5$ এবং

$x-2y=-2x-y+5 \Rightarrow 3x-y=5$

ব্যবহারিক অনুশীলন

1. পরীক্ষণের নাম ঃ A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

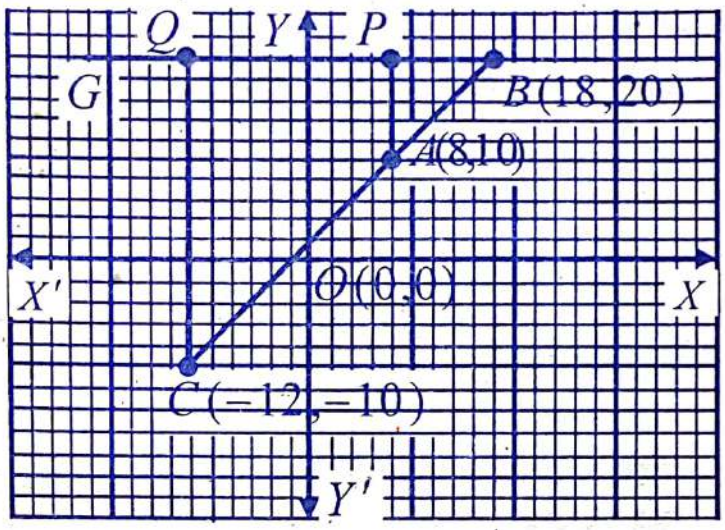
মূলতত্ত্বঃ $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস।

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

(ii) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুদ্বয়কে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে AB রেখাংশ লেখচিত্রে উপস্থাপন করি।



(iii) B বিন্দু দিয়ে x অক্ষের সমান্তরাল BG রেখার উপর যেকোন দুইটি বিন্দু P ও Q নেই যেন. PQ : BQ = 2 : 3 হয়। (এখানে, B থেকে 15 বর্গ দূরে Q এবং P থেকে 10 বর্গ দূরে Q বিন্দু অবস্থিত।)

(iv) P, A যোগ করি এবং PA এর সমান্তরাল QC রেখা অঙ্কন করি যা BA এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ফল সংকলন ঃ

C এর স্থানাঙ্ক	
গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান
(-12,-10)	$\left(\frac{2\times18-3\times8}{2-3}, \frac{2\times20-3\times10}{2-3}\right)$ $=\left(\frac{36-24}{-1}, \frac{40-30}{-1}\right)$ $=(-12,-10)$

ফলাফল ঃ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-12,-10)$.

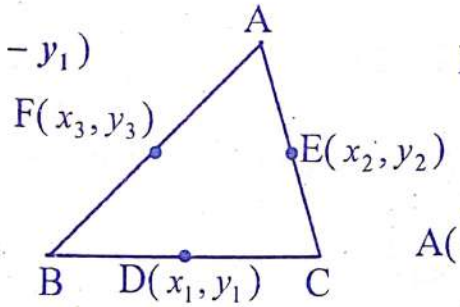
$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$$

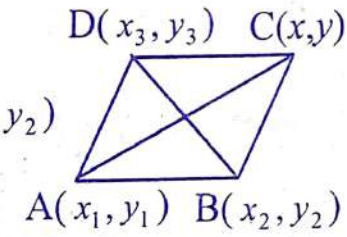
ক্রম ভিন্ন বলে অনুপাত ঋণাত্মক হবে। অতএব, অনুপাত (+) হলে বহির্বিভক্ত করবে এবং (–) হলে অন্তর্বিভক্ত করবে।

MCQ এর জন্য, 1. $A \equiv (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

$B \equiv (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$

$C \equiv (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$





2. ABCD সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$(x, y) = (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

3. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 - \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right)$ বা, $\left(\frac{x_1 + x_2 - \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right)$

প্রশ্নমালা III A

1. x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ । x- অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

$\therefore$ x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\beta|$ এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\alpha|$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $|\beta| = 4 \Rightarrow \beta = \pm 4$ এবং

$|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow 2|\alpha| = 4$

$\Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 2$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, 4)$ অথবা, $(-2, -4)$

2(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$

(a) $(-1, -\sqrt{3})$ (b) $(1, -\sqrt{3})$

সমাধান ঃ (a) ধরি, $(-1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore$ $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ এবং

$\theta \in [0, 2\pi[$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= \pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{4\pi}{3})$ অথবা, $(2, -\frac{2\pi}{3})$.

(b) ধরি, $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore$ $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$

$= -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$

$= 2\pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\frac{\pi}{3})$.

বা, $(2, \frac{5\pi}{3})$

(ii) পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর ঃ

(a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ (b) $(-2, 120°)$ (c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$

2(ii) সমাধান ঃ (a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$

(b) $(-2, 120°)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (-2\cos 120^0, -2\sin 120^0)$

$= (-2\cos(90^0+30^0), -2\sin(90^0+30^0))$

$= (2\sin 30^0, -2\cos 30^0)$

$= (2\cdot\frac{1}{2}, -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = (1, -\sqrt{3})$

(c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (1, -1)$

3. পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর ঃ

(a) $y = x\cot\alpha$ (b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

সমাধান : **(a)** $y = x\cot\alpha$

$\Rightarrow r\sin\theta = r\cos\theta\cot\alpha$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}-\alpha$ (Ans.)

(b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\Rightarrow r^2 = a^2(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2})$

$[\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$\Rightarrow (r^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

$\therefore (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (Ans.)

4(a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}, 90°)$, $(2, 120°)$ এবং $(2, 60°)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(2\sqrt{3}, 90°)$, $B(2, 120°)$ ও $C(2, 60°)$

$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2.2\sqrt{3}.2\cos(90^0-120^0)}$

$= \sqrt{12+4-8\sqrt{3}\cos 30^0} = \sqrt{16-8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \sqrt{16-12} = 2$

$BC = \sqrt{4+4-8\cos 60^0} = \sqrt{8-8.\frac{1}{2}} = 2$

$CA = \sqrt{4+12-8\sqrt{3}\cos 30^0}$

$= \sqrt{16-8\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{16-12} = 2$

AB,BC,CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং AB = CA = CA = 2.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4(b) P(4 , 0) এবং Q(0 , 4) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (0-x)^2 + (4-y)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$

$\Rightarrow x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

$\Rightarrow -8y = -8x \Rightarrow y = x \cdots\cdots (1)$

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow 4^2 + 4^2 = x^2 + 16 - 8y + y^2$

$\Rightarrow 32 = x^2 + 16 - 8x + x^2 \quad [\because y = x]$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$

$\therefore \; x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{16-(-32)}}{2.1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$

$= \dfrac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$

$\therefore \; y = 2 + 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 + 2\sqrt{3}$ এবং

$y = 2 - 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 - 2\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$ বা, $(2 - 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$

[বি.দ্র.: MCQ এর ক্ষেত্রে ,তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক =

$\left(\dfrac{4+0+\sqrt{3}(0-4)}{2}, \dfrac{0+4-\sqrt{3}(4-0)}{2}\right)$ বা,

$\left(\dfrac{4+0-\sqrt{3}(0-4)}{2}, \dfrac{0+4+\sqrt{3}(4-0)}{2}\right)$ অর্থাৎ

$(2-2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$ বা, $(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$]

4(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (3 , 6) । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $C(x, y)$. $\therefore \; AB^2 = BC^2 = CA^2$

এখন, $BC^2 = CA^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (3-x)^2 + (6-y)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$\Rightarrow (6-y)^2 - (y-4)^2 = 0$

$\Rightarrow (6-y+y-4)(6-y-y+4) = 0$

$\Rightarrow 2(-2y + 10) = 0 \Rightarrow y = 5 \cdots\cdots (1)$

$AB^2 = BC^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow |4-6|^2 = (3-x)^2 + (6-y)^2$

$\Rightarrow 4 = 9 - 6x + x^2 + (6-5)^2 \quad [\because y = 5]$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$\therefore \; x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{36-24}}{2.1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$

$= \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$

A ও B বিন্দুর ভুজ 3 এবং C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত বলে, C এর ভুজ 3 অপেক্ষা বেশী হবে।

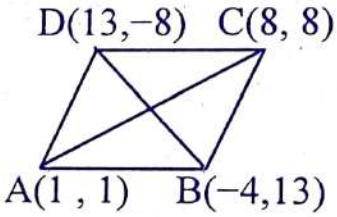
$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3 + \sqrt{3}, 5)$

[বি. দ্র. MCQ এর ক্ষেত্রে , তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$= \left(\dfrac{3+3-\sqrt{3}(4-6)}{2}, \dfrac{4+6+\sqrt{3}(3-3)}{2}\right)$

$= (3 + \sqrt{3}, 5)$]

5(a)দেখাও যে, (1,1), (−4, 13), (8, 8) এবং (13, − 4) বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু। [দি.'১১]



প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(1 , 1), B(−4, 13), C (8 , 8) ও D(13, − 4).

$\therefore AB = \sqrt{(1+4)^2 + (1-13)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(-4-8)^2 + (13-8)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$CD = \sqrt{(8-13)^2 + (8+4)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$DA = \sqrt{(13-1)^2 + (-4-1)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$AC = \sqrt{(1-8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{2 \times 49} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(-4-13)^2 + (13+4)^2} = 17\sqrt{2}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ AB = BC = CD = DA = 13 .

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু।

5(b) দেখাও যে, A (a,b), B (a + α , b + β), C (a+α + p,b + β + q) এবং D(a + p,b + q) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কি শর্তে ABCD (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্বস তা নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-a-\alpha)^2+(b-b-\beta)^2}$

$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$BC = \sqrt{(-p)^2+(-q)^2} = \sqrt{p^2+q^2}$

$CD = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$DA = \sqrt{p^2+q^2}$

$AC = \sqrt{(\alpha+p)^2+(\beta+q)^2}$

$BD = \sqrt{(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD$ এবং $BC = DA$.

$\therefore$ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(i) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হলে, কর্ণ দুইটি পরস্পর সমান হবে। $\therefore AC = BD \Rightarrow AC^2 = BD^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2+(\beta+q)^2 = (\alpha-p)^2+(\beta-q)^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2-(\alpha-p)^2 = (\beta-q)^2-(\beta+q)^2$

$\Rightarrow 4\alpha p = -4\beta q \quad \therefore \alpha p+\beta q = 0$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

(ii) ABCD একটি রম্বস হলে, বাহু চারটি সমান হবে।

$\therefore AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = p^2+q^2$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

6(a) কোনো বিন্দুর কোটি 6 এবং (5,6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

[ব.'০৩;কু.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$.

$\therefore$ (5 , 6) বিন্দু হতে $(\alpha, 6)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |5-\alpha|$

প্রশ্নমতে, $|5-\alpha| = 4 \Rightarrow 5-\alpha = \pm 4$

$\Rightarrow \alpha = 5 \pm 4 = 9, 1$

$\therefore$ বিন্দুটির ভুজ 1 বা, 9 (Ans.)

6(b) দেখাও যে, a এর যেকোন মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-\sqrt{3})^2+(a-3\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{a^2-2\sqrt{3}a+3+a^2-2.a.3\sqrt{3}+27}$

$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$

এবং $AC = \sqrt{(a-3\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$

$\therefore$ a এর যেকোন মানের জন্য $AB = AC$.

২য় অংশ ঃ

$BC = \sqrt{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)^2+(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24}$

এখন ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে,

$\sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30} = \sqrt{24}$

$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+30 = 24$

$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+6 = 0 \Rightarrow a^2-4\sqrt{3}a+3 = 0$

$\Rightarrow (a-2\sqrt{3})^2 = -3+12 = 3^2$

$\Rightarrow a-2\sqrt{3} = \pm 3 \quad \therefore a = 2\sqrt{3} \pm 3$ (Ans.)

6(c) y-অক্ষ এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

[রা.'১০; য.'০৬,'১০; কু.'০৭; চ.'১০; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ y-অক্ষ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |a|$

এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$

প্রশ্নমতে, $|a| = \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$

$\Rightarrow a^2 = a^2-14a+49+9$

$\Rightarrow 14a = 58 \Rightarrow a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7}$ (Ans.)

6(d) x -অক্ষ এবং (−5 , −7) বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৯; মা.বো.'১৩]

সমাধান ঃ x–অক্ষ থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব = | k |

এবং (–5 , –7) বিন্দু থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব

$$=\sqrt{(-5-4)^2+(-7-k)^2}$$

$$=\sqrt{81+49+14k+k^2}=\sqrt{130+14k+k^2}$$

প্রশ্নমতে, $|k|=\sqrt{130+14k+k^2}$

$\Rightarrow k^2=130+14k+k^2 \therefore k=-\frac{130}{14}=-\frac{65}{7}$

7.(a) (5,7) , (–1, –1) ও (–2 , 6) বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত । এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O(x , y) এবং এর পরিধিস্থ বিন্দু তিনটি A(5,7) , B(–1, –1) ও C(–2 , 6)।

$\therefore$ OA = OB = OC, [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]

OA = OB অর্থাৎ $OA^2=OB^2$ হতে পাই,

$(x-5)^2+(y-7)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$

$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2-14y+49=$
$x^2+2x+1+y^2+2y+1$

$\Rightarrow 12x+16y=72 \Rightarrow 3x+4y-18=0\cdots(i)$

OB = OC অর্থাৎ $OB^2=OC^2$ হতে পাই,

$(x+1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-6)^2$

$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1=$
$x^2+4x+4+y^2-12y+36$

$\Rightarrow 2x-14y+38=0 \Rightarrow x-7y+19=0\cdots(ii)$

$(i)-3\times(ii) \Rightarrow 4y+21y-18-57=0$

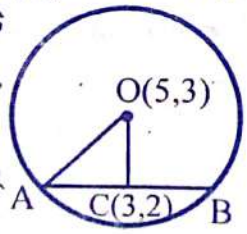
$\Rightarrow 25y=75 \Rightarrow y=3$

(ii) হতে পাই, $x=21-19=2$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2,3) ।

7(b) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5,3) ; এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[কু. '১০; চ.'১৩]**

সমাধানঃ ধরি, O(5, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু C(3 , 2)। তাহলে,



$OC\perp AB$, ব্যাসার্ধ OA = 5 এবং

$OC^2=(5-3)^2+(3-2)^2=5$

OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে

পাই, $OA^2=AC^2+OC^2$

$\Rightarrow 5^2=AC^2+5$

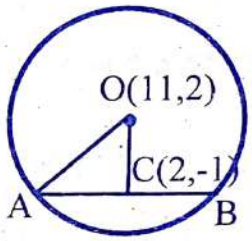
$\Rightarrow AC^2=25-5=20 \Rightarrow AC=2\sqrt{5}$

$\therefore AB=2\times AC=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{5}$ একক।

7. (c) B কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান:



ধরি, O(11, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু C(2 , –1)।

তাহলে, $OC\perp AB$,ব্যাসার্ধ OA =10 এবং

$OC^2=(11-2)^2+(2+1)^2$
$=81+9=90$

OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$OA^2=AC^2+OC^2$

$\Rightarrow 10^2=AC^2+90$

$\Rightarrow AC^2=100-90=10 \Rightarrow AC=\sqrt{10}$

$\therefore AB=2\times AC=2\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$ একক।

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা

8. P বিন্দুর কোটি – 6 । x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , – 6) . (১)

$\therefore$ x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = | – 6 | = 6 এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = $|x|$ (১)

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $6=\frac{1}{2}|x|$ (১)

$\Rightarrow |x| = 12 \Rightarrow x = \pm 12$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(12, -6)$ বা, $(-12, -6)$ (১)

9. (1, 1) ও $(-\sqrt{3}, 1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

সমাধান: মনে করি , (1, 1) এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ এবং (১)

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$. (১)

$\therefore$ (1, 1) এর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (১)

ধরি, $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং (১)

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}}$ (১)

$= \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (১)

$\therefore (-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{5\pi}{6})$ (১)

10. $(4, \frac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

$(4, \frac{\pi}{3})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $= (4\cos\frac{\pi}{3}, 4\sin\frac{\pi}{3})$ (১)

[$\because (r, \theta)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(r\cos\theta, r\sin\theta)$]

$= (4 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = (2, 2\sqrt{3})$ (১)

এবং $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{3\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{3\pi}{4}))$ (১)

$= (\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi - \frac{\pi}{4}), -\sqrt{2}\sin(\pi - \frac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$ (১)

$= (-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$ (১)

11. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।

সমাধান : $x^2 - y^2 = a^2$

$\Rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = a^2$ (১)

$[\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2$

$\Rightarrow r^2 \cos 2\theta = a^2$ (Ans.) (১)

এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

$\Rightarrow r^2 . 2\sin\theta\cos\theta = 2a^2$ (১)

$\Rightarrow 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2a^2$

$\Rightarrow 2xy = 2a^2 \therefore xy = a^2$ (Ans.) (১)

12. দেখাও যে, (3, 8) , (8 , 3) এবং (– 2 , 3) বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(3 , 8), B(8 , 3) ও C (– 2 , 3).

$\therefore AB = \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$ (১)

$BC = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$

$CA = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = 5\sqrt{2}$

AB , BC, CA এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (১)

13. দেখাও যে, (4 , 4) , (5 , 2) এবং (1 , 0) বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রমাণঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(4 , 4) , B(5 , 2) ও C (1 , 0).

$\therefore AB = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{(1-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (১)

AB,BC,CA এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর বলে বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজ গঠন করে। (১)

আবার, $AB^2 + BC^2 = 5 + 20 = 25 = CA^2$.

অতএব, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যার $\angle B = 90^0$. (১)

২য় অংশ ঃ

ত্রিভুটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$ $[\because \angle B = 90^0]$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 5$ বর্গ একক। (১)

14. দেখাও যে, A (– 3 , 2) , B (– 7 , – 5) , C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ABCD চতুর্ভুজে,

$AB = \sqrt{(-3+7)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(-7-5)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{144+81}$

$= \sqrt{225} = 15$

$CD = \sqrt{(5-9)^2 + (4-11)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$DA = \sqrt{(9+3)^2 + (11-2)^2} = \sqrt{144+81} = 15$

(১)

এখানে AB = CD এবং BC = DA অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান।

∴ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। (১)

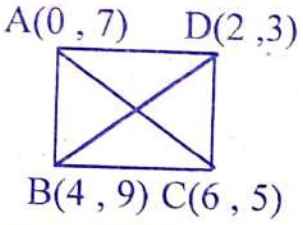
[বি.দ্র.: বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ও রম্বস প্রত্যেকে সামান্তরিক । সুতরাং , সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান ও অসমান উভয়েই হতে পারে।]

15. দেখাও যে, (0 , 7), (4 , 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(0 , 7) , B(4, 9), C (6 , 5) ও D(2, 3).

∴ $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2}$ (১)

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



$BC = \sqrt{(4-6)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$CD = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$DA = \sqrt{(2-0)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(0-6)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(4-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{5}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 2\sqrt{10}$.

∴ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি বর্গের কৌনিক বিন্দু। (১)

16. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0 , 2) এবং (6, 4) এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

∴ P বিন্দু থেকে (0 , 2) এর দূরত্ব $= \sqrt{\alpha^2 + 4}$ এবং P বিন্দু থেকে (6, 4) এর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-6)^2 + 16}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\alpha^2 + 4} = \sqrt{(\alpha-6)^2 + 16}$

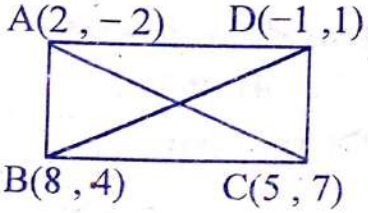
$\Rightarrow \alpha^2 + 4 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 16$

$\Rightarrow 12\alpha = 48 \Rightarrow \alpha = 4$

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0). (Ans.) (১)

17. দেখাও যে, (2 , – 2) , (8 , 4) , (5 , 7) এবং (– 1 , 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(2 , – 2) , B(8, 4), C (5 , 7) , D(– 1, 1).



$\therefore\ AB = \sqrt{(2-8)^2 + (4+2)^2}$ (১)

$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(5+1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(8+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD = 6\sqrt{2}$, $BC = DA = 3\sqrt{2}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 3\sqrt{10}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু। (১)

18. $(a+b, b-a)$ এবং $(a-b, a+b)$ বিন্দু থেকে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$.

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A(x, y)$, $B(a+b, b-a)$, $C(a-b, a+b)$

প্রশ্নমতে, $AB = AC \Rightarrow AB^2 = AC^2$

$\Rightarrow (x-a-b)^2 + (y-b+a)^2 = (x-a+b)^2 + (y-a-b)^2$ (১)

$\Rightarrow (x-a-b)^2 - (x-a+b)^2 = (y-a-b)^2 - (y-b+a)^2$

$\Rightarrow (x-a-b-x+a-b)(x-a-b+x-a+b) = (y-a-b-y+b-a)(y-a-b+y-b+a)$

$\Rightarrow -2b.2(x-a) = -2a.2(y-b)$

$\Rightarrow bx - ab = ay - ab$

$\therefore\ bx - ay = 0$ (Showed) (১)

19. কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (5, 2) ও (–3 , – 4) হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের ব্যাসটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $A(5,2)$ ও $B(-3, -4)$. তাহলে,

বৃত্তটির ব্যাস $= AB = \sqrt{(5+3)^2 + (2+4)^2}$ (১)

$= \sqrt{64+36} = 10$ একক।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \frac{10}{2} = 5$ একক। (১)

20. দেখাও যে, (a, a), $(-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(a, a)$, $B(-a, -a)$ এবং $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

$\therefore\ AB = \sqrt{(a+a)^2 + (a+a)^2} = \sqrt{8a^2}$ (১)

$BC = \sqrt{(-a+a\sqrt{3})^2 + (-a-a\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{2\{(-a)^2 + (a\sqrt{3})^2\}}$

$= \sqrt{2(a^2+3a^2)} = \sqrt{8a^2}$

$CA = \sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2 + (\sqrt{3}a-a)^2}$

$= \sqrt{2\{(-a)^2 + (a\sqrt{3})^2\}}$

$= \sqrt{2(a^2+3a^2)} = \sqrt{8a^2}$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = CA = \sqrt{8a^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (১)।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

21. $A(4, 3)$, $B(-1, -\sqrt{3})$ ও $C(4, \frac{\pi}{4})$ তিনটি বিন্দু।

ক. $(-4, \frac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

খ. A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ। **[রা.'০৭; মা.বো.'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]**

গ. B এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ করে BC নির্ণয় কর।

ক. **সমাধানঃ** মনে করি, $(-4, \frac{\pi}{4})$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore \quad x = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ এবং y

$= -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

খ. **সমাধানঃ** ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2\alpha)$.

$\therefore$ $(4, 3)$ বিন্দু হতে $(\alpha, 2\alpha)$ বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 10$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$ অথবা, $\alpha = 3$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(1, 2)$ বা, $(3, 6)$ (Ans.)

গ. মনে করি, $B(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ); যেখানে

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{4\pi}{3})$

এখন, $C(4, \frac{\pi}{4})$ ও $D(2, \frac{4\pi}{3})$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বই নির্ণেয় দূরত্ব।

$\therefore \quad CD = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2.4.2\cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$

$= \sqrt{16 + 2 - 16\cos(\frac{15\pi}{12})}$

$= \sqrt{20 - 16\cos(\frac{5\pi}{4})}$

$= \sqrt{20 - 16\cos(\pi + \frac{\pi}{4})}$

$= \sqrt{20 + 16\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{20 + 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{20 + 8\sqrt{2}}$

প্রশ্নমালা III B

1.(a) দেখাও যে, (2 – 2) এবং (– 1 , 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।

[সি.'০৫,'১৩; ব.'০৭ ; মা'০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ AB রেখাংশকে $P(\alpha, 0)$ বিন্দুতে $m : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \quad 0 = \frac{4m + 1 \times -2}{m+1} \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ x-অক্ষ AB রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

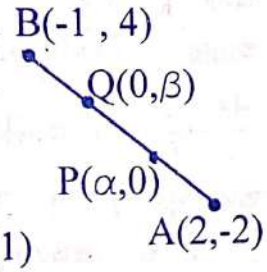
আবার, ধরি y-অক্ষ AB রেখাংশকে $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে $n : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \quad 0 = \frac{n \times -1 + 1 \times 2}{n+1} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n : 1 = 2 : 1$

অর্থাৎ y-অক্ষ AB রেখাংশকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ AB রেখাংশকে যথাক্রমে $P(\alpha, 0)$ ও $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{2-\alpha}{\alpha+1} = \frac{-2-0}{0-4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2AP = PB = PQ + QB$

$\Rightarrow PQ = 2AP - QB \cdots\cdots (1)$

আবার, $\frac{AQ}{QB} = \frac{2-0}{0+1} = \frac{-2-\beta}{\beta-4}, \Rightarrow \frac{AQ}{QP} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow AQ = 2QB \Rightarrow AP + PQ = 2\,QB$

$\Rightarrow AP + 2AP - QB = 2\,QB$ [(1) দ্বারা]

$\Rightarrow 3\,AP = 3\,QB \quad \therefore AP = QB$

$(1) \Rightarrow PQ = 2AP - AP = AP$