প্রশ্নমালা VI A

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

প্রমাণ : L.H.S. $= (\tan\theta + \sec\theta)^2$

$$= \left\{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}\right\}^2$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \text{R.H.S.}$$

1(b) $\dfrac{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta - 2}{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta + 2} = \left(\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$

L.H.S.$= \dfrac{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta - 2}{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta + 2}$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta} - 2}{\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta} + 2} = \frac{1 - 2\sin\theta\cos\theta}{1 + 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 1)^2}{\cos^2\theta(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1)^2}$$

$$= \frac{(\tan\theta - 1)^2}{(\tan\theta + 1)^2} = \frac{(1-\tan\theta)^2}{(1+\tan\theta)^2} = \left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2$$

= R.H.S. (Proved)

1(c) $1 - 4\sin^2\theta\ \cos^2\theta = \sin^4\theta(1 - \cot^2\theta)^2$

L.H.S. $= 1 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 - 2(\sin^2\theta)(\cos^2\theta)$

$= (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 = \{\sin^2\theta(1 - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta})^2\}$

$= \sin^4(1 - \cot^2\theta)^2 =$ R.H.S. (Proved)

1(d) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2$

L.H.S.$= (\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

$$= \sin^2\theta\left(1 + \frac{\sec\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \cos^2\theta\left(1 + \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2 .1$

$= (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2 =$ R.H.S. (Proved)

1(e) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

L.H.S.$= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$$= \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \frac{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

= R.H.S. (proved)

1(f) $\sin^2\theta(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 2$

L.H.S.$= \sin^2\theta(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta)$

$= \sin^2\theta + \sin^2\theta\cot^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta\tan^2\theta$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \sin^2\theta\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \cos^2\theta\,.\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$= 1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 + 1 = 2 =$ R.H.S.

1(g) $\dfrac{1 + 2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta)} = \sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

ত্রিকোণমিতি ফাংশনের লেখচিত্র

প্রশ্নমালা VI B

নিম্নের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

1.

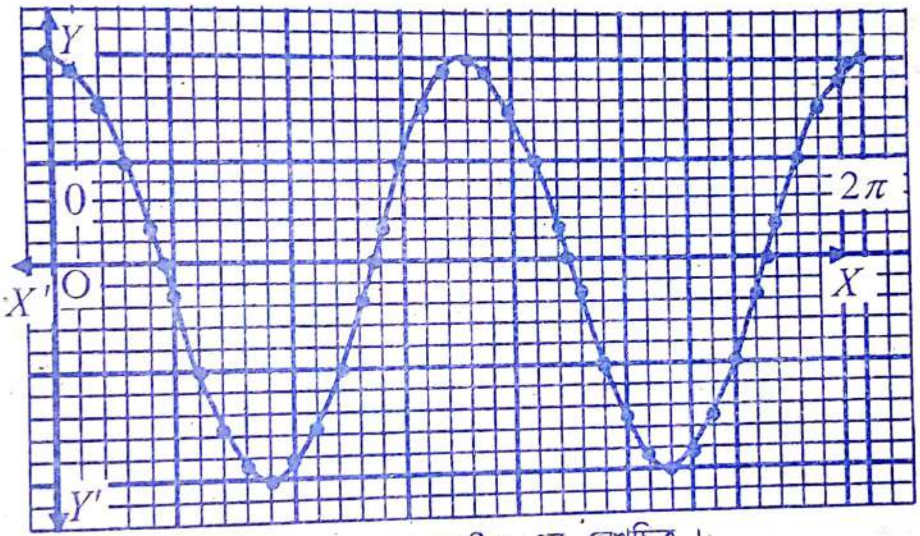
(a) $y = \cos 2x$, যখন $0 \le x \le 2\pi$

[ঢা.'১০,'১৪; চ.'০৯,'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0 , 2\pi]$ এর জন্য $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$4.5\times\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	1	0.94	0.77	0.5	0.17	0	−0.17	−0.5
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$17.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$28.\frac{\pi}{18}$	$36.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	−0.77	−0.93	−1.	−0.5	0.94	−0.17	0.94	1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X´OX ও YOY´ আঁকি ।



$y = \cos 2x$ এর লেখচিত্র ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 2x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

[কু. '০৯,'১২; রা.'১৪; দি.'১৩]

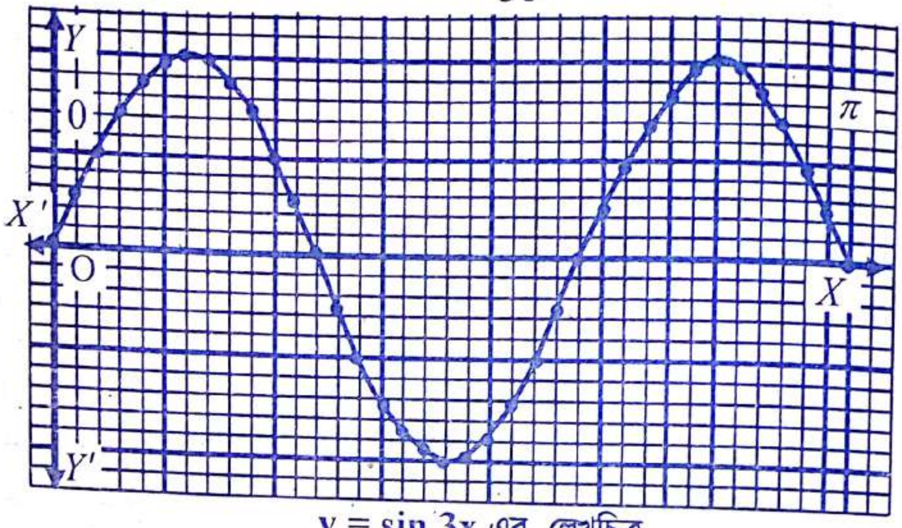
(b) $y = \sin 3x$, যখন $0 \le x \le \pi$

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0 , \pi]$ এর জন্য $y = \sin 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1	0.97
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0.87	0.71	0.5	0	−0.97	−0.5	0.87	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



y = sin 3x এর লেখচিত্র

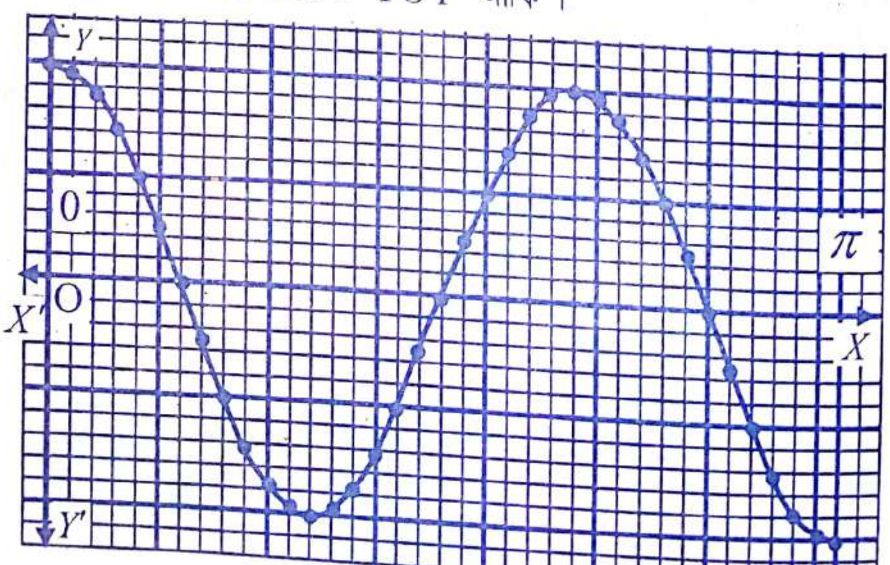
এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (c) $y = \cos 3x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [চ.'০১,'০৪; ঢা.'০৩; য.'০৫]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \cos 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	1	0·97	0.87	0·71	0·5	0·26	0	−0·26
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	−0·5	−0.71	−0.87	−1	−0.26	−0·5	0.5	−1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।



y = cos 3x এর লেখচিত্র

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

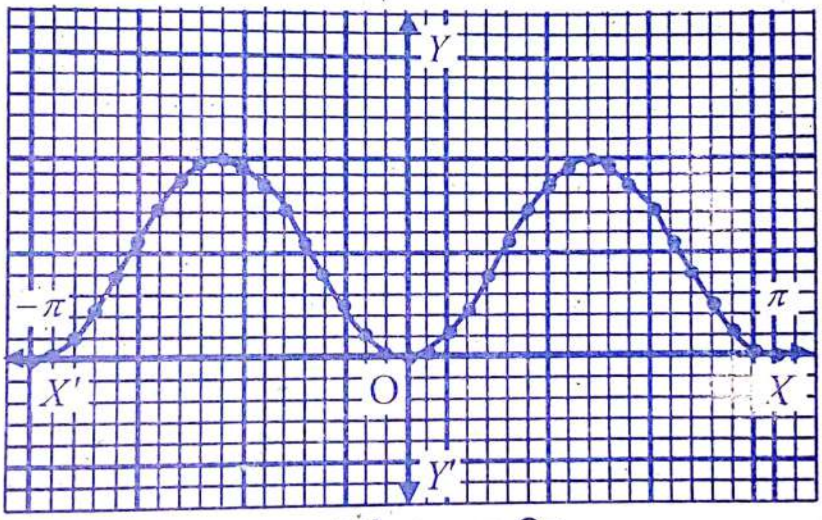
1. (d) $y = \sin^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$ [ব.'০১;সি.'১,'১০; ঢা.'০৪; কু.'১৩; চ.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0	0·03	0·117	0·25	0·41	0·59	0·75
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 16.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0·88	0.97	1	0.75	0.41	0·117	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1



$y = \sin^2 x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

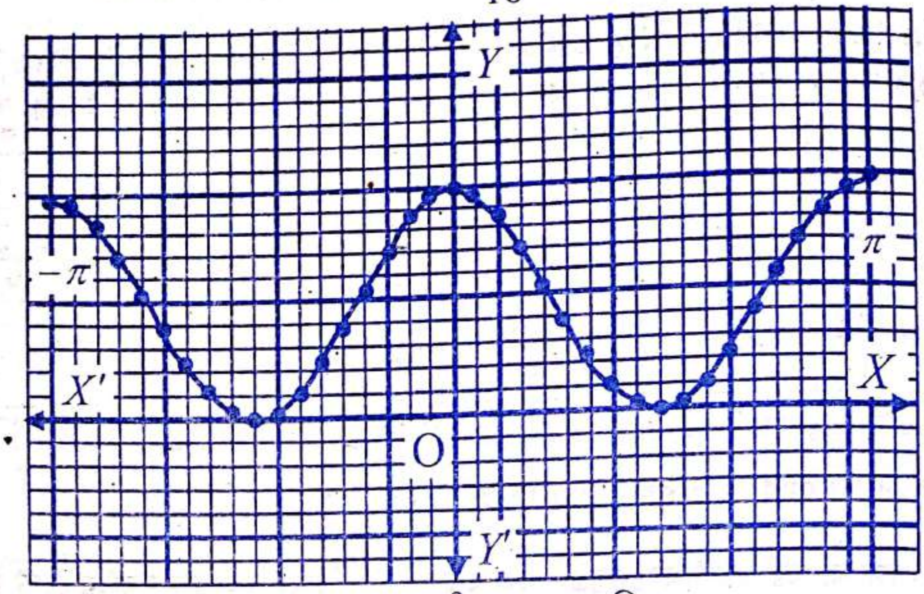
(e) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$ [রা.'০৩, '০৬,'০৯; ব.'০৫; চ.'০৫,'১১; য.'০৯,'১৩; ব.,দি.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \cos^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	1	0·97	0.88	0·75	0·59	0·41	0·25
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 10\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	0·12	0·03	0	0·97	0·25	0·75	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1



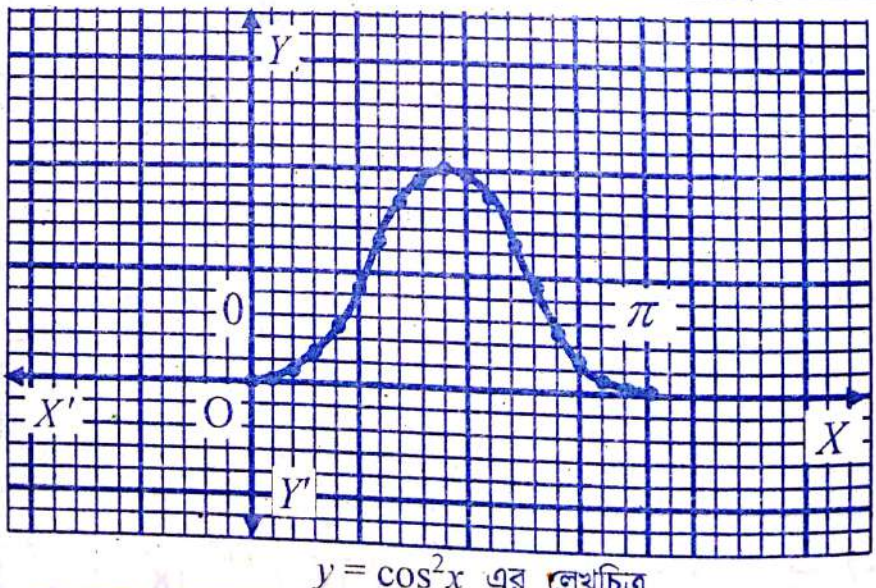
$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos^2 \mathbf{x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (f) $y = \sin^3 x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [য.'০০; চ. '০২]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^3 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0	0·005	0·04	0·13	0·27	0·45	0·65
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$14.\frac{\pi}{18}$	$16.\frac{\pi}{18}$	$18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0·83	0.96	1	0.65	0.27	0·04	0



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1

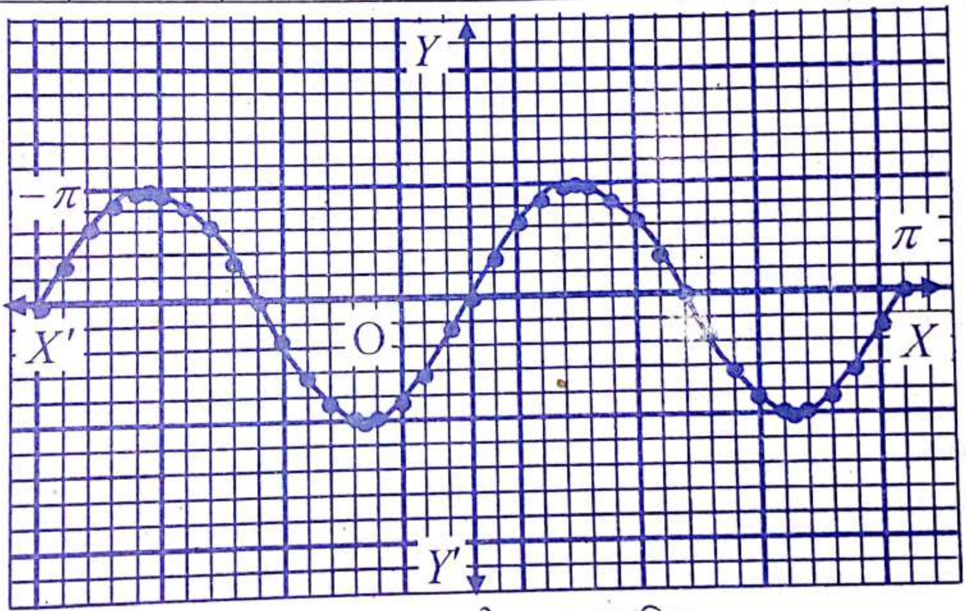
এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^3 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (g) $y = \sin x \cos x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$

সমাধান ঃ $y = \sin x \cos x \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	0	$\pm 0\cdot 17$	± 0.32	$\pm 0\cdot 43$	$\pm 0\cdot 49$	$\pm 0\cdot 5$	± 0.49
x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	$\pm 0\cdot 43$	± 0.32	± 0.17	0	∓ 0.49	$\mp 0\cdot 43$	0



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin x \cos x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

2. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর ঃ

(a) $\sin x - \cos x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ [কু. '০৯; রা.'১৩; চ.'১২; য.'১৪; ব.'০৯; সি.'০৯; ঢা.'১২,'১৪; মা.'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$

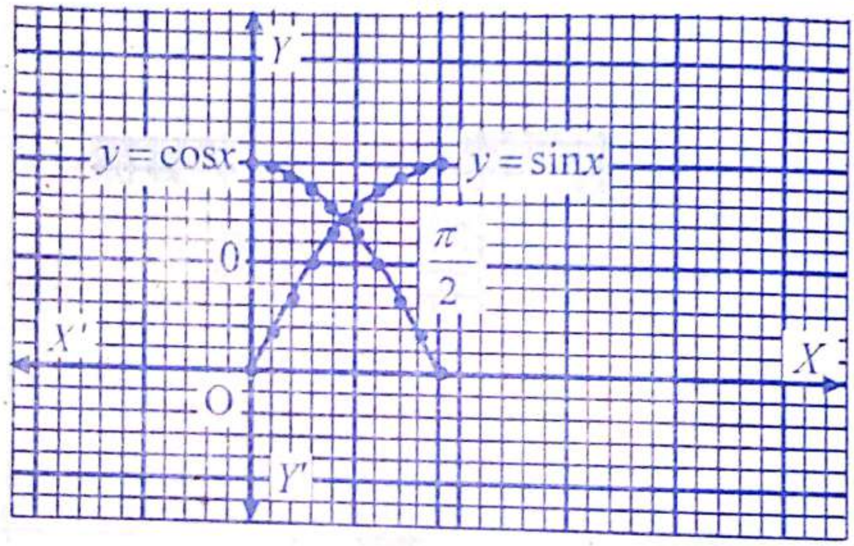
মনে করি, $y = \sin x = \cos x$ $\therefore y = \sin x$ এবং $y = \cos x$

নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$5.\frac{\pi}{18}$
y = sinx	0	0·17	0·34	0·5	0.64	0.71	0.77
y = cosx	1	0·98	0·94	0.87	0.77	0.71	0.64
x	$6.\frac{\pi}{18}$	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$			
y = sinx	0.87	0·94	0·98	1			
y = cosx	0·5	0·34	0·17	0			

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin x$ ও $y = \cos$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভু হচ্ছে $\frac{\pi}{4}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{4}$.

2. (b) $2\sin^2 x = \cos 2x \quad , -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ [য. '০৩,'০৮,'০৯]

সমাধান ঃ মনে করি, $y = 2\sin^2 x = \cos 2x \quad \therefore y = 2\sin^2 x$ এবং $y = \cos 2x$

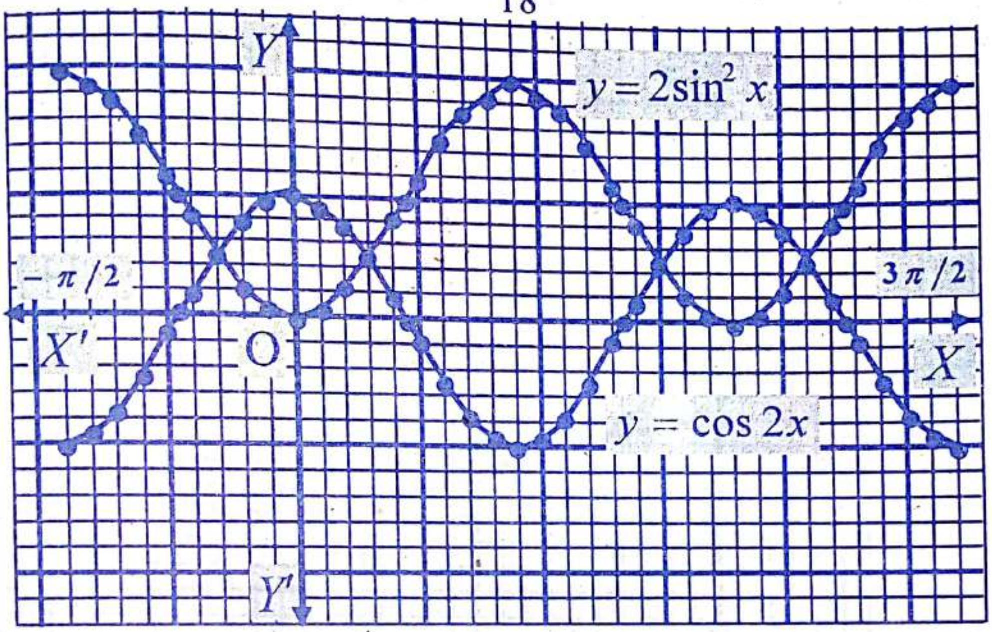
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি।

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm.\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	0	0·06	0·23	0·5	0.83	1	1.17
y = cos2x	1	0·94	0·77	0.5	0.17	0	−0·17

x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$21.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	1.5	1·77	1·94	2	0·5	0.5	2
$y = \cos 2x$	−0·5	-0·77	0·94	−1	0.5	0.5	-1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু = 1 .



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান , $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

2. (c) $5\sin x + 2\cos x = 5,\ 0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ **[য.'০৪; চ.'১০; রা.,ব.'১৪]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $5\sin x + 2\cos x = 5 \Rightarrow 2\cos x = 5(1 - \sin x)$

মনে করি , $y = 5(1 - \sin x) = 2\cos x \quad \therefore y = 5(1 - \sin x)$ এবং $y = 2\cos x$

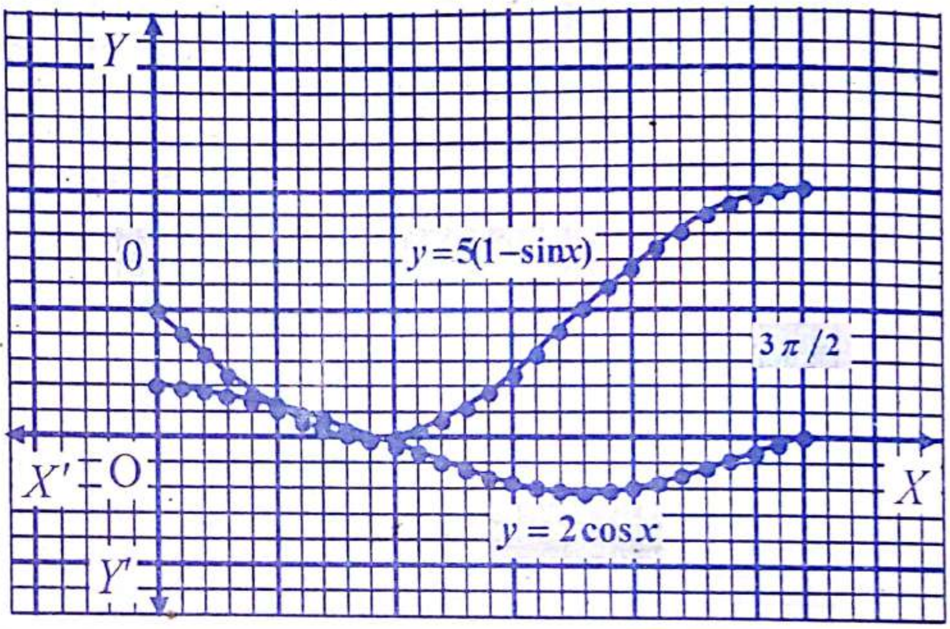
সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য , $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	5	4·13	3·29	2·5	1.79	1.17	0.67
$y = 2\cos x$	2	1·97	1·88	1.73	1.53	1·29	1
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$11.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$19.\frac{\pi}{18}$	$20.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	0·3	0·08	0	0.3	2·5	5.89	6.7
$y = 2\cos x$	·68	0·35	0	−0.68	-1.73	−1.97	−1.88

x	$21.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$23.\frac{\pi}{18}$	$24.\frac{\pi}{18}$	$25.\frac{\pi}{18}$	$26.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
y = 5(1 – sinx)	7·5	8·2	8.83	9.93	9·7	9.9	10
y = 2cosx	–·73	1·53	–1.29	–1	-0.68	–0.35	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = $\frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = 5(1 – sinx) ও y = 2cosx. ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $46.4° = \frac{2\cdot32}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান, $x = 46.4° = \frac{2\cdot32}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$

2. (d) $x - \tan x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[রা.'০৪,'০৯; ব.'০৪,'১১,'১৩.'০৫,'১০,'১২; কু. '০৭,'১০; দি.'১০,'১২; চ.'১১; ঢা.'১১; য.'১২

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $x - \tan x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

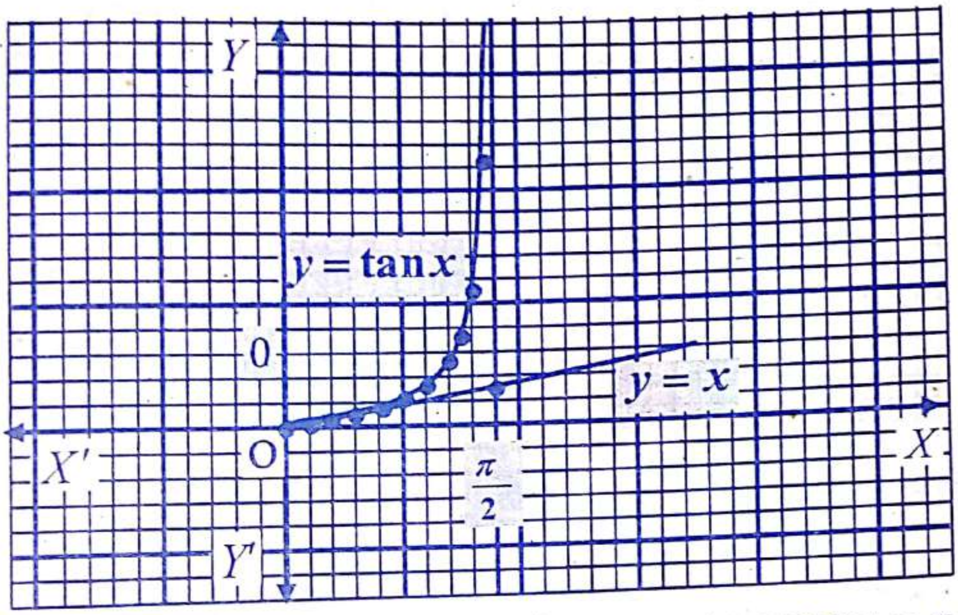
মনে করি , $y = x = \tan x$ $\therefore y = x$ এবং $y = \tan x$

নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য y = x ও y = tanx এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = tanx	0	0.18	0·36	0·58	0·84	1·19	1·73
x	$7\frac{\pi}{18}$	$7\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$8\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$		
y = tanx	2·75	3·73	5.67	11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = x ও y = tanx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজ হচ্ছে 0. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $x = 0$

[চ.'০২]

2. (e) $2x = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

সমাধান ঃ মনে করি , $y = 2x = \tan x$ $\therefore y = 2x$ এবং $y = \tan x$

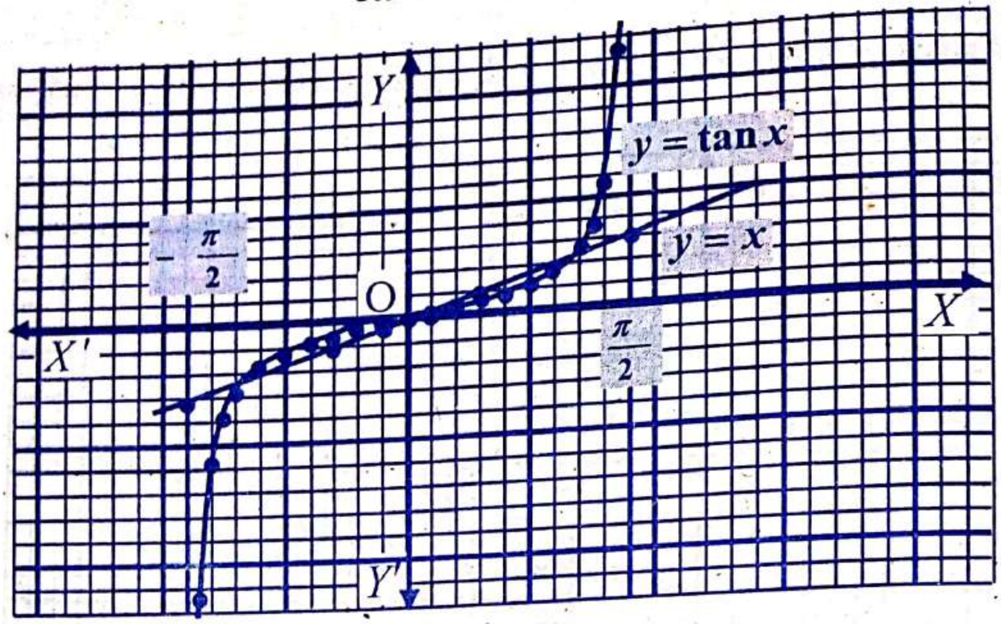
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
y = tanx	0	± 0.18	± 0·36	± 0·58	± 0·84	± 1·19	± 1·73
x	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 7\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$		
y = tanx	± 2·75	± 3·73	± 5.67	± 11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = 2x ও y = tanx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি।



লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $0 , -66° = -\frac{11\pi}{30}$,

$66° = \frac{11\pi}{30}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 0 , -\frac{11\pi}{30}, \frac{11\pi}{30}$

2. (f) $\cot x - \tan x = 2, \ 0 \le x \le \pi$ [য. '০৫ ; চ.'০২; সি.'০৩,'১১; ঢা.'০৬; রা.'১০,'১২;কু.'১২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $\cot x - \tan x = 2 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

মনে করি , $y = \sin 2x = \cos 2x \quad \therefore y = \sin 2x , y = \cos 2x$

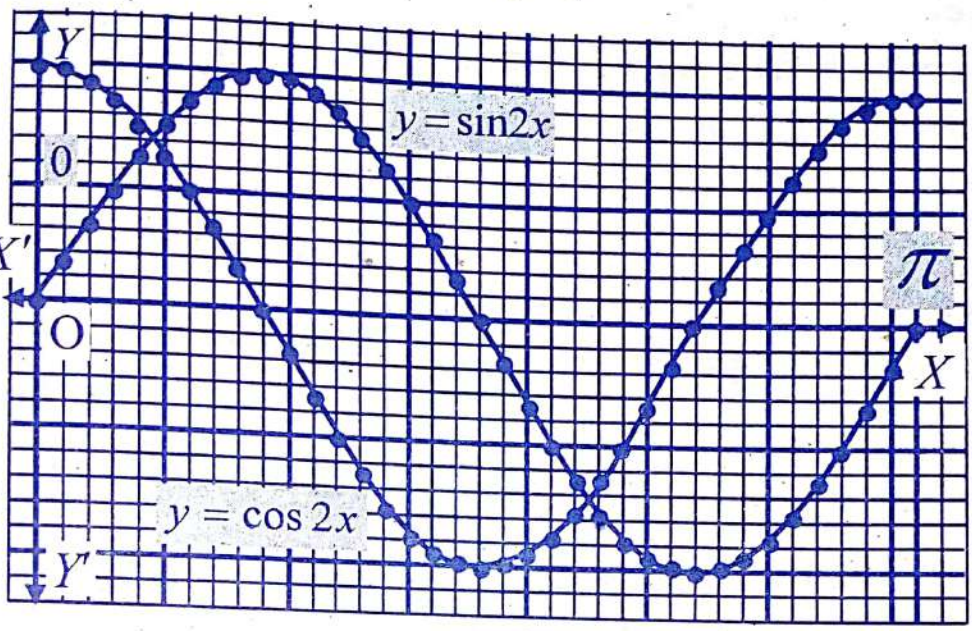
নিচের তালিকায় $x \in [0 , \pi]$ এর জন্য $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$
$y = \sin 2x$	0	0·17	0.34	0.5	0·64	0·77	0.87
$y = \cos 2x$	1	0·98	0.94	0.87	0·77	0·64	0.5
x	$7.\frac{\pi}{36}$	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$24.\frac{\pi}{36}$	$32.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
$y = \sin 2x$	0.94	0·98	1	0·98	−0.87	−0.64	0
$y = \cos 2x$	0.34	0·17	0	−0·17	−0.5	0.77	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল ,অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$.



ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত) ঃ

1. $\sin(4x+1)$ এর পর্যায় কত?
[RU 06-07;BUET 00-01]

Sol^n. : $4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ পর্যায়কাল = $\frac{\pi}{2}$

নিয়ম ঃ $\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ এর পর্যায় = 2π এবং $\tan x, \cot x$ এর পর্যায় = π .

2. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান– [SU 08-09]

Sol^n. : সর্বোচ্চ মান = $\sqrt{1+3} = 2$

বি.দ্র.ঃ $a\cos x + b\sin x$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x + \tan^{-1}\frac{b}{a})$$

$a\cos\theta + b\sin\theta$ সর্বোচ্চ হবে যদি $\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a})$ সর্বোচ্চ হয় অর্থাৎ $\sin(x+\tan^{-1}\frac{b}{a}) = 1$ হয়।

$\therefore$ $x = 90^0 - \tan^{-1}\frac{b}{a}$ এর জন্য $a\cos x + b\sin x$ এর সর্বোচ্চ মান = $\sqrt{a^2+b^2}$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে–
[CU 07-08]

Sol^n. : সর্বোচ্চ মান = $1 + \sqrt{(\pm1)^2+1} = 1+\sqrt{2}$

4. $f(x) = 2\cos|x|$ এর সীমা – [RU 03-04]

Sol^n. : $\cos|x|$ এর বিস্তার = $[-1,1]$

$\therefore \quad -2 \le f(x) \le 2$

5. $\cos^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$ **এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান হচ্ছে–**
[CU 03-04]

Sol^n. : বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 1 ও 0.

6. $\sin 2x - \cos x$ **এর সর্বনিম্ন মান – [IU 07-08]**

Sol^n. : $x = -45^0$ এর জন্য প্রদত্ত রাশির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় $-\sqrt{3}$.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. Sol^n : জ্যামিতিক কোণ ধনাত্মক এবং 360^0 এর ছোট হয়। $\therefore$ Ans. (b)

2. Sol^n : $\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{2r} = \pi$ $\therefore$ Ans. (c)

3. **Solⁿ** : $\sec\theta = \dfrac{OB}{OP}$ $\therefore$ Ans. (a)

4. **Solⁿ** : $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$\therefore$ Ans. (c)

5. **Solⁿ** : $\cot\theta$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে $\mathbb{R} - \{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}, \mathbb{R}$ $\therefore$ Ans.(d)

6. **Solⁿ** : $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান সবসময় -1 থেকে $+1$ $\therefore$ Ans. (c)

7. **Solⁿ** : কোণ $90°$ থেকে বেড়ে $180°$ হলে $\cos\theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হবে। $\therefore$ Ans. A

8. **Solⁿ** : সর্বোচ্চ মান $= 1+\sqrt{(\pm1)^2+1}$
$= 1+\sqrt{2}$ $\therefore$ Ans. (c)

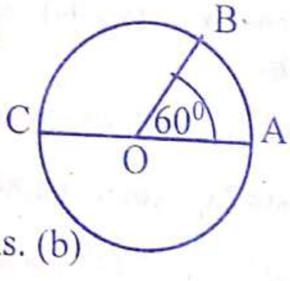
9. **Solⁿ** : ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}r^2\theta$

$= \dfrac{1}{2}\times 6^2 \times \dfrac{\pi}{6} = 3\pi$ $\therefore$ Ans.(c)

10. **Solⁿ** : $-1 \le \cos|x| \le 1$
$\Rightarrow -3 \le 3\cos|x| \le 3$
$\Rightarrow -3 \le f(x) \le 3$ $\therefore$ Ans.(b)

11. **Solⁿ** : সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

12. **Solⁿ** : AC = 10 cm
$\therefore$ OA = 5 cm
চাপ $AB = r\theta$



$= 5\times\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

13. **Solⁿ** : $x = 0$ এর জন্য $y = \sin 2x = 0$
এবং $x = \dfrac{\pi}{2}$ এর জন্য $y = \sin\pi = 0$.

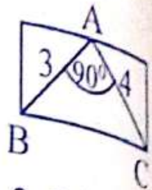
তাছাড়া, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ এর জন্য y এর মান ধনাত্মক। $\therefore$ Ans. (b)

14. **Solⁿ** : সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

15. **Solⁿ** : $4x = \pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \tan 4x$ পর্যায় $= \dfrac{\pi}{4}$ $\therefore$ Ans. (d)

16. **Solⁿ** : ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ,

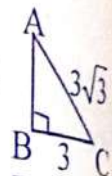


$BC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\therefore$ ΔABC পরিব্যাসার্ধ $= \dfrac{5}{2} = 2\cdot5$

$\therefore$ Ans. (c)

17. **Solⁿ** : $AB = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2}$



$AB = \sqrt{27-9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

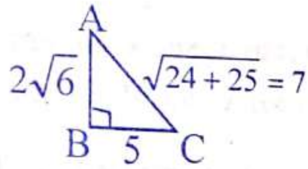
ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(3\times3\sqrt{2})$

$= \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ Ans. (c)

18. **Solⁿ** : $\cot\left(\dfrac{4\pi-2\theta}{2}\right)$

$= \cot(2\pi-\theta) = -\cot\theta$ $\therefore$ Ans. (d)

19. **Solⁿ** :



$\cot\theta = -\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$ এবং $\sin\theta$ ধনাত্মক বলে

$\sec\theta = -\dfrac{7}{5}$ $\therefore$ Ans. (a)

20. **Solⁿ** : নির্ণেয় কোণ $= \dfrac{|60h-11m|}{2}$ ডিগ্রি

$= \dfrac{|60\times8-11\times15|}{2}$ ডিগ্রি

$= \dfrac{|480-165|}{2}$ ডিগ্রি $= 157.5^0$

$\therefore$ Ans. (d)

21. **Sol^n :** $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এর জন্য $\cos\theta$ ঋণাত্মক। $\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ $\therefore$ Ans. (d)

22. **Sol^n :** $x = 0$ এর জন্য, $\cos^2(\frac{\pi}{2}+x) = 0$

$\therefore$ Ans. (d)

23. **Sol^n :** চাকাটির পরিধি $50\pi = 157$ সেমি., গতিবেগ 157×10 সে.মি./সে. $= 15.7$ মি./সে. $\therefore$ Ans. (d)

24. **Sol^n :** চাপ BE এর দৈর্ঘ্য $= r\theta$

$= \frac{AB}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{6}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ Ans. (a)

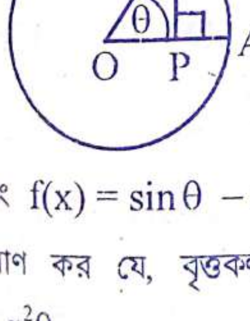
25. **Sol^n :** AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r^2\theta$

$= \frac{1}{2}(12^2 \times \frac{\pi}{6}) = 12\pi$ $\therefore$ Ans. (c)

26. **Sol^n :** θ কোণ 0^0 থেকে বেড়ে 90^0 হলে $\sin 0^0 = 0, \sin 90^0 = 1$ $\therefore$ Ans. (d)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

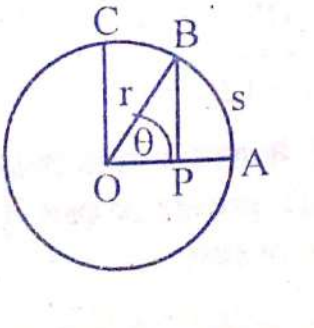
1. চিত্র:



এবং $f(x) = \sin\theta - \cos\theta$

(a) প্রমাণ কর যে, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2}$

প্রমাণ :



প্রমাণ : $OA \perp OC$ টানি।

$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$

$\Rightarrow$ বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{\pi/2} \times$ বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{2\theta}{\pi} \times \frac{1}{4} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{r^2\theta}{2}$

(b) লেখচিত্রের সাহায্যে $f(x) = 0$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ এর সমাধান কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VI B এর 2(a) দ্রষ্টব্য।

(c) $\theta = 60^0$, $r = 5$ cm হলে ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta = 60^0 = \frac{\pi}{3}$,

$OB = r = 5$ সে.মি.

OPB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $BP = OB$

$\sin 60^0 = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ সে.মি. এবং

$OP = OB \cos 60^0 = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ সে.মি.।

ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল − ত্রিভুজ OBP এর ক্ষেত্রফল

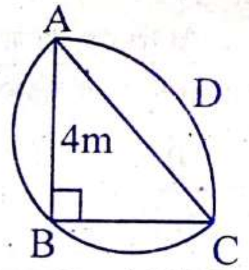
$= \frac{r^2\theta}{2} - \frac{1}{2}(OP \times BP)$

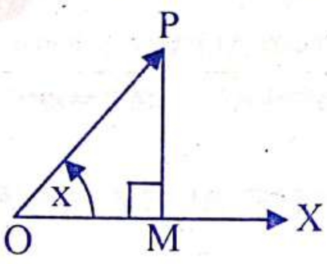
$= \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}(\frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{2})$

$= \frac{25\pi}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{25(4\pi - 3\sqrt{3})}{24}$ বর্গ সে.মি.।

2. চিত্র-১: চিত্র -২:





চিত্রে –১ এ, ABDC একটি বৃত্তকলা।

(a) ADC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রে, AB = BC 4 মিটার বলে ADC একটি বৃত্তাংশ।

$\therefore$ বৃত্তাংশ ADC এর দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle ABC$

$= 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$ মিটার।

(b) ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার।

$\therefore$ ABC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ মিটার

$\therefore$ ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল + (ABCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল − ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= \frac{1}{2}\pi \times (2\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4)$

$= 4\pi + (4\pi - 8) = 8(\pi - 1)$ বর্গ মিটার।

(c) চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{PM}{OP}$ দ্বারা যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রকাশ করে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর, যখন $-\pi \le x \le \pi$

সমাধান: চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{PM}{OP} = \sin x$. অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

3. $f(\theta) = k \tan \theta - \tan k\theta$ এবং $g(x) = \cos x$

(a) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 30 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $60°$ উৎপন্ন করলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 30$ সে.মি. বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 60° = \frac{60 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

আমরা জানি, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{30^2}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{900 \times 3.1416}{6}$

$= 471.24$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(b) $f(\theta) = 0$ হলে দেখাও যে,

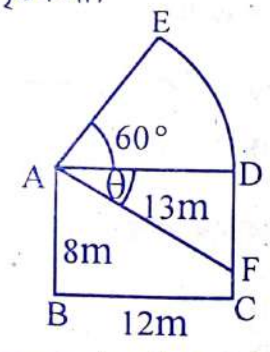
$$\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1)\sin^2 \theta}$$

সমাধান : প্রশ্নমালা VI A এর 2(d) দ্রষ্টব্য।

(c) $y = g(x)$, $-\pi \le x \le \pi$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-2 দ্রষ্টব্য।

4. চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং ADE একটি বৃত্তকলা।



(a) DE বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $r = AE = AD = BC = 12m$

$\theta_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ DE বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta_1 = 12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$ m

(b) AEDF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে, $DF = \sqrt{AF^2 - AD^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ m.

AEDF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

= AED বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল + ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

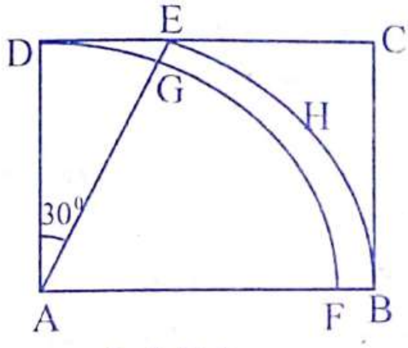
$= \frac{1}{2} \times \frac{12^2 \times 60\pi}{180} + (\frac{1}{2} \times 12 \times 5)$

$= 105.4$ বর্গ একক।

(c) $\frac{DE}{AF}$ অনুপাতটি θ কোণের যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্দেশ করে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর; যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

সমাধান: চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{DF}{AF} = \sin\theta$. অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

5. চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যার বাহুর দৈর্ঘ্য AB = 12m, BC = $6\sqrt{3}$ m. ADGF এবং ABHE দুইটি বৃত্তকলা ।



(a) DG বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ব্যাসার্ধ $r = AD = BC = 6\sqrt{3}$ m

$\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ DG বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta = 6\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6}$

$= \sqrt{3}\pi$ m

(b) GEBF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\angle BAE = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$= \frac{\pi}{3}$

AF = AD = $6\sqrt{3}$ m, AB = 12m

$\therefore$ ABHE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB^2 \times \angle BAE) = \frac{1}{2}(12^2 \times \frac{\pi}{3})$

$= 24\pi$ বর্গ মি.

AGF বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AF^2 \times \angle GAF) = \frac{1}{2}\{(6\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3}\}$

$= 18\pi$ বর্গ মি.

$\therefore$ GEBF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 24\pi - 18\pi = 6\pi$ বর্গ মি.।

(c) EC = 6m হলে, BHEC সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCE একটি ট্রাপিজিয়াম যার সমান্তরাল বাহু দুইটি AB = 12m, EC = 6m এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব BC = $6\sqrt{3}$ m.

$\therefore$ ABCE ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB + EC) \times BC$

$= \frac{1}{2}(12 + 6) \times 6\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ বর্গ একক

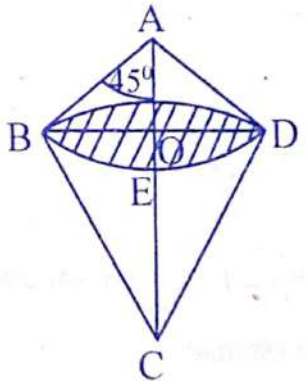
ABHE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= 24\pi$ বর্গ মি.

$\therefore$ BHEC সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 54\sqrt{3} - 24\pi = 93.53 - 75.4$

$= 18.13$ বর্গ মি. (প্রায়)

6. চিত্রে, ABCD একটি ঘুড়ি। BO = 4 cm, BC = 8 cm, ABED ও BCD দুইটি বৃত্তকলা।



(a) $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

প্রমাণ : প্রশ্নমালা VI B এর 8(d) দ্রষ্টব্য।

(b) দেখাও যে, $AB = 4\sqrt{2}$ এবং এর সাহায্যে BED বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ABCD ঘুড়ির কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। ABO একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore \sin 45^0 = \frac{OB}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{AB}$

$\Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$

এখন, $\angle BAD = 2\times 45^0 = 90^0 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ BED বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle BAD$

$= 4\sqrt{2}\times \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\pi$ একক।

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ABCD একটি ঘুড়ি বলে, $AB = AD = 4\sqrt{2}$, $BC = CD = 8$

BOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\sin BCO = \frac{OB}{OC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

$\Rightarrow \angle BCO = 30^0 \therefore \angle BCD = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

ABED বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB^2 \times \angle BAD) = \frac{1}{2}\{(4\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{2}\}$

$= 32\times \frac{\pi}{4} = 8\pi$ বর্গ একক

ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB\times AD)\sin 90^0$

$= \frac{1}{2}(4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2})\times 1 = 16$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(BC^2 \times \angle BCD) = \frac{1}{2}(8^2 \times \frac{\pi}{3})$

$= \frac{32\pi}{3}$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(BC\times CD)\sin 60^0$

$= \frac{1}{2}(8\times 8)\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ বর্গ একক।

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল

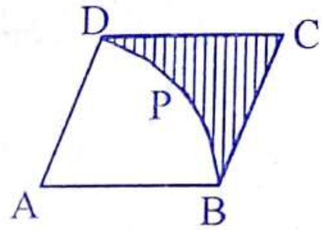
$= (8\pi - 16) + (\frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3})$

$= 25.13 - 16 + 33.51 - 27.71$

$= 58.64 - 43.71$

$= 14.93$ বর্গ একক।

7. 2 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট ABCD রম্বসের সূক্ষ্মকোণ $A = 60^0$। ABPD একটি বৃত্তকলা।



(a) $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\theta + \text{cosec}^n\theta = 2$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা 2(b) দ্রষ্টব্য।

(b) বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ABPD বৃত্তকলার BPD বৃত্তাংশ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = \angle BAD = 60^0 = \frac{\pi}{3}$,

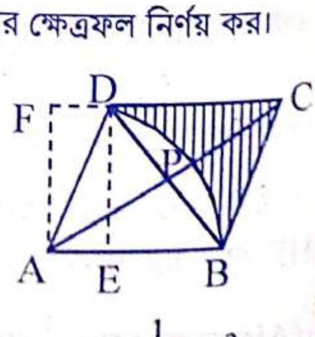
বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 2\times \frac{\pi}{3}$

$= 2{\cdot}1$ সে. মি. (প্রায়)।

(c) BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 2^2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 2^2$

$=2{\cdot}1$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$DE\perp AB$ ও $AF\perp CD$ অঙ্কন করি যা AB কে F বিন্দুতে ও CD এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ΔABD এ, $\angle A=60^0$ (সূক্ষ্মকোণ)

$\therefore BD^2=AB^2+AD^2-2.\ AB.AE$

$=AB^2+AD^2-2.\ AB.AD\cos A$

$=2^2+2^2-2\times 2\times 2\times\cos 60^0$

$=8-8\times\frac{1}{2}=4$

$\therefore BD=2$ সে.মি.।

আবার, Δ ACD, $\angle ADC=120^0$ (স্থূলকোণ)

$\therefore AC^2=AD^2+DC^2+2\,CD\times DF$

$=AD^2+DC^2+2\,CD\times AD\cos ADF$

$=AD^2+DC^2+2\,CD\times AD\cos 60^0$

$=2^2+2^2+2\times 2\times 2\times(\frac{1}{2})=12$

$\therefore AC=2\sqrt{3}$

এখন, ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল

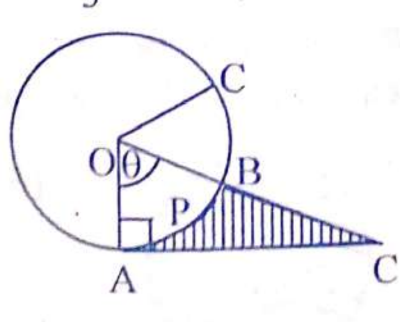
$=\frac{1}{2}(AC\times BD)$

$=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}\times 2)=2\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.।

$\therefore$ BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল − ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}=1{\cdot}37$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

৪.



O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

(a) প্রমাণ কর যে,

$$(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

প্রমাণ: 1(a) দ্রষ্টব্য।

(b) OC ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা হলে 5 সেকেন্ডে C বিন্দু কতটুকু বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান: ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা 60 সেকেন্ডে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore$ 5 সেকেন্ডে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, উৎপন্ন কোণ $\theta=30^0=\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান,

r = OC = 5 সে. মি. । ধরি, সেকেন্ডের কাঁটাটির C বিন্দু s সে.মি. বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে।

$\therefore\ s=r\theta=5\times\frac{\pi}{6}=5\times\frac{3{\cdot}1416}{6}=2{\cdot}618$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তাকার পথ $=2{\cdot}618$ সে. মি.।

(c) APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, r = 5 সে.মে. এবং

বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য = 6 সে.মি.

$\therefore\ r\theta=6\Rightarrow 5\theta=6\Rightarrow\theta=\frac{6}{5}$

$\therefore$ OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\theta r^2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times 5^2=15$ বর্গ সে.মি.।

এখন, AOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\tan\theta=\frac{AC}{OA}\Rightarrow AC=OA\tan\frac{6}{5}$

$\Rightarrow AC=5\times 2{\cdot}57=12{\cdot}85$ সে.মি.।

$\therefore$ AOC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(AC\times OA)$

$=\frac{1}{2}(12{\cdot}85\times 5)=32{\cdot}13$ বর্গ সে.মি.।

$\therefore$ APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=32{\cdot}13-15$
$=17{\cdot}13$ বর্গ সে.মি.।

9. একটি দোলক ঘড়ির নিচে ঝুলানো দোলকটির সর্বনিম্ন বিন্দুটি $y = 2\cos 2x$ সম্পর্ক মেনে চলে এবং প্রতিদিন সকাল 6 টা 45 মিনিটে এতে এলাম বাজে।

(a) প্রমাণ কর যে,

$$\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2 = 1$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - \tan^2)^2 = 1$

$\Rightarrow (\sec^2\theta)^2 + (\tan^2)^2 - 2\sec^2\theta\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sec^4\theta + \tan^4 = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$

(b) এলাম বাজার মুহূর্তে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ বৃত্তীয় পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

বৃত্তাকার ঘড়ি কেন্দ্রে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে।

প্রতি মিনিটে মিনিটের কাঁটার কৌণিক সরণ $\dfrac{360^0}{60} = 6^0$.

$\therefore$ 45 মিনিটে মিনিটের কাঁটার কৌণিক সরণ $= 45 \times 6^0 = 270^0$

$\therefore$ মিনিটে কাঁটা 360^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঘণ্টার কাঁটা $30°$ কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore$ মিনিটে কাঁটা 270^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঘণ্টার কাঁটা $\dfrac{30}{360} \times 270 = 22.5°$ কোণ উৎপন্ন করে

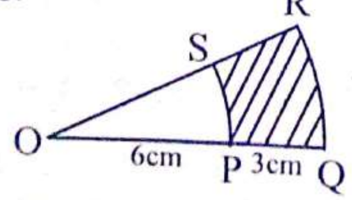
6 টা 45 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক সরণ $= 6 \times 30^0 + 22.5^0 = 202.5^0$

$\therefore$ 6 টা 45 মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $= 270^0 - 202.5^0 = 67.5^0 = \dfrac{67.5\pi}{180}$

(c) $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ ব্যবধিতে দোলকের গতির সম্পর্কটি লেখচিত্রে দেখাও।

সমাধান: নিজে চেষ্টা কর।

10. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $y = \cos x, -\pi < \theta < \pi$

(a) $(\tan\theta + \sec\theta)^2$ কে $\sin\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: $(\tan\theta + \sec\theta)^2$

$= \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \dfrac{(\sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{(\sin\theta+1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{(\sin\theta+1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

(b) দৃশ্যকল্প-১ এ OPS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক হলে রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $OP = OS = 6$ cm

ধরি, $\angle SOP = \theta$.

OPS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(OP^2)\theta$

$= \dfrac{1}{2}(6^2)\theta = 18\theta$

প্রশ্নমতে, $18\theta = 12 \Rightarrow \theta = \dfrac{2}{3}$

$\therefore$ OQR বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(OQ^2)\theta$

$= \dfrac{1}{2}(9^2)\dfrac{2}{3} = 27$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল $= 27 - 12 = 15$ বর্গ একক

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-2 দ্রষ্টব্য।

11. [ঢা.বো. ২০১৭]

ক) বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

সমাধান: এখানে, $r = 6\text{cm}, \theta = 42^0 = \frac{42\pi}{180}$

$\therefore$ বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{6^2 \times 42\pi}{180 \times 2}$

$= \frac{21\pi}{5} = 13.19$ sq. cm

খ) ABDC এর পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: বৃত্তাংশ BC এর দৈর্ঘ্য $= \frac{6 \times 42\pi}{180}$

$= \frac{7\pi}{5}\text{cm.}$

$\therefore$ ABDC এর পরিসীমা $= 6 + 6 + \frac{7\pi}{5}$

$= 16.4$ cm.

গ) ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ABDC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi \times 6^2$

$= 36\pi$ বর্গ সে.মি.

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 42^0$

$= 12.04$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$= 36\pi - 12.04 = 101.06$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

L.H.S.$= \dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\cot\theta+\tan\theta)}$

$= \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})}$

$= \dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta})}$

$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) =$ R.H.S.

1.(h) $3(\sin\Theta+\cos\Theta) - 2(\sin^3\Theta+\cos^3\Theta) = (\sin\Theta+\cos\Theta)^3$

L.H.S. $= 3(\sin\Theta+\cos\Theta)-2(\sin^3\Theta+\cos^3\Theta)$

$= 3(\sin\Theta+\cos\Theta)-2(\sin\Theta+\cos\Theta)(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta-\sin\Theta\cos\Theta)$

$= (\sin\Theta+\cos\Theta)\{3-2(1-\sin\Theta\cos\Theta)\}$

$= (\sin\Theta+\cos\Theta)(1+2\sin\Theta\cos\Theta)$

$=(\sin\Theta+\cos\Theta)(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta+2\sin\Theta\cos\Theta)$

$= (\sin\Theta+\cos\Theta)(\sin\Theta+\cos\Theta)^2$

$= (\sin\Theta+\cos\Theta)^3 =$ L.H.S. (Proved)

1(i) $1+\tan\Theta+\sec\Theta = \dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$

L.H.S.$= 1+\tan\Theta+\sec\Theta$

$= 1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta+1)(\cos\theta+\sin\theta-1)}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2-1}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)}$

$= \dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2}{\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta+\cos\theta-1)}$

$= \dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta} =$ R.H.S. (Proved)

2. (a) $a\cos\Theta - b\sin\Theta = c$ হলে দেখাও যে, $a\sin\Theta + b\cos\Theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a\cos\Theta - b\sin\Theta = c$

$\Rightarrow a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta - 2ab\sin\Theta\cos\Theta = c^2$

$\Rightarrow a^2(1-\sin^2\Theta) + b^2(1-\cos^2\Theta) - 2ab\sin\Theta\cos\Theta = c^2$

$\Rightarrow a^2 - a^2\sin^2\Theta + b^2 - b^2\cos^2\Theta - 2ab\sin\Theta\cos\Theta = c^2$

$\Rightarrow -\{(a\sin\Theta)^2 + (b\cos)^2\Theta + 2.a\sin\Theta.b\cos\Theta\} = c^2-a^2-b^2$

$\Rightarrow (a\sin\Theta + b\cos\Theta)^2 = a^2+b^2-c^2$

$\therefore a\sin\Theta + b\cos\Theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

2(b) $\sin\Theta + \operatorname{cosec}\Theta = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\Theta + \operatorname{cosec}^n\Theta = 2$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\Theta + \operatorname{cosec}\Theta = 2$

$\Rightarrow \sin\Theta + \dfrac{1}{\sin\theta} = 2 \Rightarrow \sin^2\Theta - 2\sin\Theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sin\Theta-1)^2 = 0 \Rightarrow \sin\Theta - 1 = 0 \therefore \sin\Theta = 1$

এখন, L.H.S.$= \sin^n\Theta + \operatorname{cosec}^n\Theta$

$= \sin^n\Theta + \dfrac{1}{\sin^n\theta} = 1^n + \dfrac{1}{1^n}$

$= 1+1 = 2 =$ R.H.S. (Proved)

2(c) $x\sin^3\Theta + y\cos^3\Theta = \sin\Theta\cos\Theta$ এবং $x\sin\Theta - y\cos\Theta = 0$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$x\sin^3\Theta + y\cos^3\Theta = \sin\Theta\cos\Theta$ ......(1) এবং

$x\sin\Theta - y\cos\Theta = 0 \Rightarrow x\sin\Theta = y\cos\Theta$

$\therefore x = y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ....(2)

(1) এ $x = y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ বসিয়ে পাই

$y\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}.\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\sin^2\theta\cos\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow y\cos\theta.1 = \sin\theta\cos\theta$

$\therefore y = \sin\theta$

(2) হতে পাই , $x = \sin\theta . \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\theta$.

এখন , $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$ (Showed)

2. (d) $k\tan\theta = \tan k\theta$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $k\tan\theta = \tan k\theta$

$\Rightarrow k\dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{1}{\cot k\theta} \Rightarrow k\cot k\theta = \cot\theta$

$\Rightarrow k^2(\cot^2 k\theta) = \cot^2\theta$

$\Rightarrow k^2(\text{cosec}^2 k\theta - 1) = \text{cosec}^2\theta - 1$

$\Rightarrow k^2\text{cosec}^2 k\theta = \text{cosec}^2\theta + k^2 - 1$

$\Rightarrow k^2\dfrac{1}{\sin^2 k\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} + k^2 - 1 = \dfrac{1+(k^2-1)\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta} = \dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta}$

$\therefore \dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$ (Proved)

2(e) $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ হলে , $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$

$\Rightarrow 3\sec^4\theta - 10\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\sec^4\theta - 6\sec^2\theta - 4\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow 3\sec^2\theta(\sec^2\theta - 2) - 4(\sec^2\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - 2)(3\sec^2\theta - 4) = 0 \Rightarrow \sec^2\theta = 2$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \tan^2\theta = 1 \therefore \tan\theta = \pm 1$

অথবা , $\sec^2\theta = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3} \therefore \tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan\theta = \pm 1 , \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2(f) $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2$ এবং θ সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক কোণ হলে, $\tan\theta$ এবং $\text{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ : $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)\tan\theta + 2ab = (a^2 + b^2)\sec\theta$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 2.(a^2 - b^2)\tan\theta.2ab + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2\sec^2\theta$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 2.(a^2 - b^2)\tan\theta.2ab + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2(1 + \tan^2\theta)$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + 4a^2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + b^2)^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow \{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2\}\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + 4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 = 0$

$\Rightarrow -4a^2b^2\tan^2\theta + 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 0$

$\Rightarrow 4a^2b^2\tan^2\theta - 4ab(a^2 - b^2)\tan\theta + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$\Rightarrow \{2ab\tan\theta - (a^2 - b^2)\}^2 = 0$

$\Rightarrow 2ab\tan\theta - (a^2 - b^2) = 0$

$\Rightarrow 2ab\tan\theta = a^2 - b^2$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$ (Ans.)

এখন , $\text{cosec}\theta = \sqrt{1 - \cot^2\theta}$ [$\because \theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ ।]

$= \sqrt{1 - \left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ (Ans.)

2(g) $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে , $(\Sigma\tan A)^2 = \Sigma\tan^2 A$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $\cot A + \cot B + \cot C = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan B} + \dfrac{1}{\tan C} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B}{\tan A\tan B\tan C}=0$

$\Rightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C+ \tan C \tan A= 0$

$\Rightarrow 2(\tan A\tan B +\tan B\tan C + \tan C \tan A)= 0$

$\Rightarrow \tan^2A + \tan^2B +\tan^2C+2(\tan A\ \tan B + \tan B\ \tan C + \tan C\ \tan A) = \tan^2A + \tan^2B + \tan^2C$

$\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 = \tan^2A + \tan^2B + \tan^2C$

$\therefore \left(\sum \tan A\right)^2 = \sum \tan^2 A$ (Showed)

2(h) $\cos\theta + \sec\theta = \dfrac{5}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^n\theta + \sec^n\theta = 2^n + 2^{-n}$ [চ.,দি.'১৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\cos\theta + \sec\theta = \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta + \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \cos^2\theta + 1 = \dfrac{5}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$

$\Rightarrow 2\cos\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta - 2 = 0$ অথবা , $2\cos\theta - 1 = 0$

কিন্তু $\cos\theta - 2 \neq 0$ $[\because -1 \le \cos\theta \le 1]$

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \sec\theta = 2$

এখন, L.H.S. $= \cos^n\theta + \sec^n\theta$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + (2)^n = 2^n + 2^{-n} =$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (প্রমাণিত)

2(i) $a_1\sin\theta + b_1\cos\theta + c_1 = 0$ এবং $a_2\sin\theta + b_2\cos\theta + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে θ অপসারণ কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a_1\sin\theta + b_1\cos\theta + c_1 = 0$

$a_2\sin\theta + b_2\cos\theta + c_2 = 0$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে পাই,

$\dfrac{\sin\theta}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{\cos\theta}{a_2c_1 - a_1c_2} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\cos\theta = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

এখন, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 + \left(\dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2 = a_1b_2 - a_2b_1$

(j) $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ [রা.'১৫]

প্রমাণ: $\tan\theta + \sec\theta = x \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = x$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x \Rightarrow \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$

$\Rightarrow \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2 \Rightarrow \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = x^2$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{x^2}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta+1-\sin\theta} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{2\sin\theta}{2} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\therefore \sin\theta = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(k) $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে $\tan^4A - \tan^2 A = 1$ [য.'১৫]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

$\Rightarrow \sin^4 A = 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$

L.H.S. $= \tan^4A - \tan^2 A$

$= \dfrac{\sin^4 A}{\cos^4 A} - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \dfrac{\sin^4 A - \sin^2 A\cos^2 A}{\cos^4 A}$

$= \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A\cos^2 A}{\cos^4 A}$

$= \dfrac{\cos^2 A(1-\sin^2 A)}{\cos^4 A} = \dfrac{\cos^2 A.\cos^2 A}{\cos^4 A}$

$= 1 = R.H.S$

(*l*) $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। [মা'১৫]

সমাধান: $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sec\theta = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \sec^2\theta = \frac{25}{16} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{25}{16} - 1 = \frac{25-16}{16} = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{16-9}{16+9}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{7}{25}$ (Ans.)

(m) $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ [কু.,চ.'১৫]

প্রমাণ: $R.H.S. = 4\sqrt{mn}$

$= 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta(1-\cos^2\theta)}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta\sin^2\theta} = 4\tan\theta\sin\theta$

$= (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$

$= m^2 - n^2 = L.H.S.$

3. (a) একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত। এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটিকে যথাক্রমে রেডিয়ান ও ডিগ্রীতে প্রকাশ করলে এদের অনুপাত হয় $\pi : 90$; কোণগুলির পরিমাপকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর। [কু'১৫]

সমাধান: ধরি, কোণত্রয় $a - r$, a ও $a + r$ রেডিয়ান।

$\therefore a - r + a + a + r = \pi \Rightarrow 3a = \pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$

এখন, $(a - r)$ রেডিয়ান $= \frac{180(a-r)}{\pi}$ ডিগ্রি

প্রশ্নমতে, $a + r : \frac{180(a-r)}{\pi} = \pi : 90$

$\Rightarrow \frac{(a+r)\pi}{180(a-r)} = \frac{\pi}{90} \Rightarrow \frac{a+r}{2(a-r)} = 1$

$\Rightarrow 2a - 2r = a + r \Rightarrow 3r = a = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = \frac{\pi}{9}$

$\therefore$ কোণত্রয়, $a - r = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$ রেডিয়ান, $a = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান ও $a + r = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান।

(b) একটি বৃত্তচাপ 30 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'১৫]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 30$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 60° = \frac{60\times\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

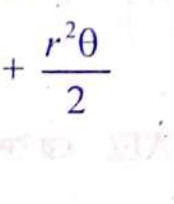
আমরা জানি, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $s = r\theta = 30 \times \frac{\pi}{3}$

$= 10 \times 3{\cdot}1416 = 31{\cdot}42$ সে.মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $\frac{r^2\theta}{2} = \frac{30^2}{2} \times \frac{3{\cdot}1416}{3}$

$= 471{\cdot}24$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

4. সমাধান :



$DE = s = r\theta = 8 \times \frac{30\pi}{180}$

$= 4.189$ মিটার (প্রায়)।

ABCDE সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

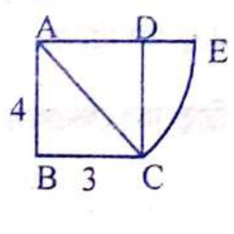
= ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= 8 \times 7 + \frac{r^2\theta}{2}$

$= 56 + \frac{8^2}{2} \times \frac{30\pi}{180}$

$= 56 + 16{\cdot}755 = 72{\cdot}755$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

5. সমাধানঃ এখানে $AD = BC = 3$ মিটার।

$DC = AB = 4$ মিটার।



$\therefore \tan CAD = \frac{DC}{AD} = \frac{4}{3}$

$= \tan(0{\cdot}927)$

ধরি, $\theta = \angle CAD = 0{\cdot}927$ রেডিয়ান।

$r = AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ মিটার।

বৃত্তাংশ CE এর দৈর্ঘ্য $= r\,\theta = 5 \times 0{\cdot}927$

$= 4{\cdot}635$ মিটার (প্রায়)

ত্রিভুজ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AD \times CD) = \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$ বর্গ মিটার।

ACE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{25 \times 0{\cdot}927}{2}$

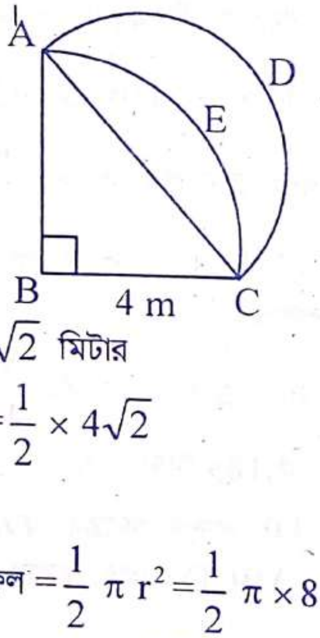
$= 11{\cdot}5875$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ CDE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (11{\cdot}5875 - 6)$

$= 5{\cdot}5875$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

6. সমাধানঃ AECB একটি বৃত্তকলা বলে

AB = BC = 4 মিটার।



$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার

ADC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$ মিটার

$\therefore$ ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \times 8$

$= 4\pi$ বর্গ মিটার।

বৃত্তাংশ AEC এর দৈর্ঘ্য $= r\,\theta = 4 \times \frac{\pi}{2}$

$= 2 \times 3{\cdot}1416 = 6{\cdot}2832$ মিটার।

AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{4^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$

$= 4\pi$ বর্গ মিটার।

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a^2 = \frac{1}{2} \times 4^2$

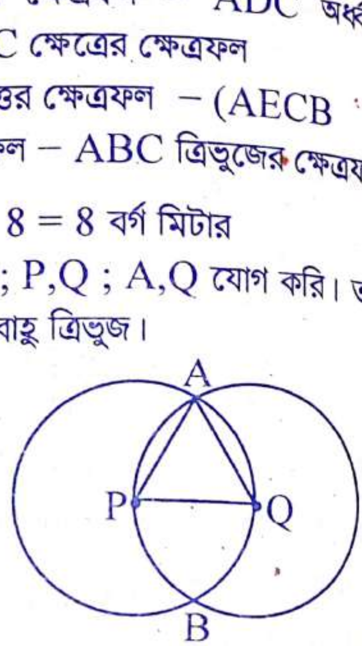
$= 8$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ AECD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − AEC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − (AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল − ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= 4\pi - 4\pi + 8 = 8$ বর্গ মিটার

7. সমাধান ঃ A, P ; P,Q ; A,Q যোগ করি। তাহলে APQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।

APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{1^2}{2} \times \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ বর্গ একক।

$\therefore$ APBQ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

$4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ বর্গ একক।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উত্তরসহ ঃ

1. $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান কোণের ষাটমূলক পদ্ধতিতে মান কত? **[CU 07-08]**

Soln. : $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান $= \frac{3 \times 180^0}{8} = 67^\circ 30'$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

3 × 1 8 0 ÷ 8 = 67.5 °''' 67°30'

2. $50^0 37' 30''$ = কত রেডিয়ান ? **[CU 05-06]**

Soln. : $50^0 37' 30'' = \frac{50.625 \times \pi}{180} = \frac{9\pi}{32}$

ত্রিকোণমিতি ফাংশনের লেখচিত্র

প্রশ্নমালা VI B

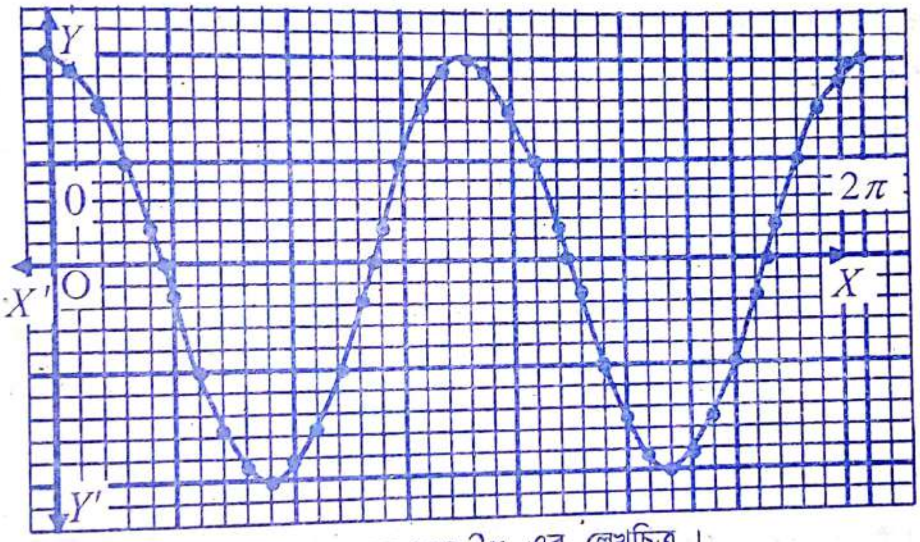
নিম্নের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

1.
(a) $y = \cos 2x$, যখন $0 \le x \le 2\pi$ [ঢা.'১০,'১৪; চ.'০৯,'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, 2\pi]$ এর জন্য $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$4.5\times\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	1	0.94	0.77	0.5	0.17	0	−0.17	−0.5
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$17.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$28.\frac{\pi}{18}$	$36.\frac{\pi}{18}$
y = cos2x	−0.77	−0.93	−1.	−0.5	0.94	−0.17	0.94	1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।



$y = \cos 2x$ এর লেখচিত্র ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 2x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

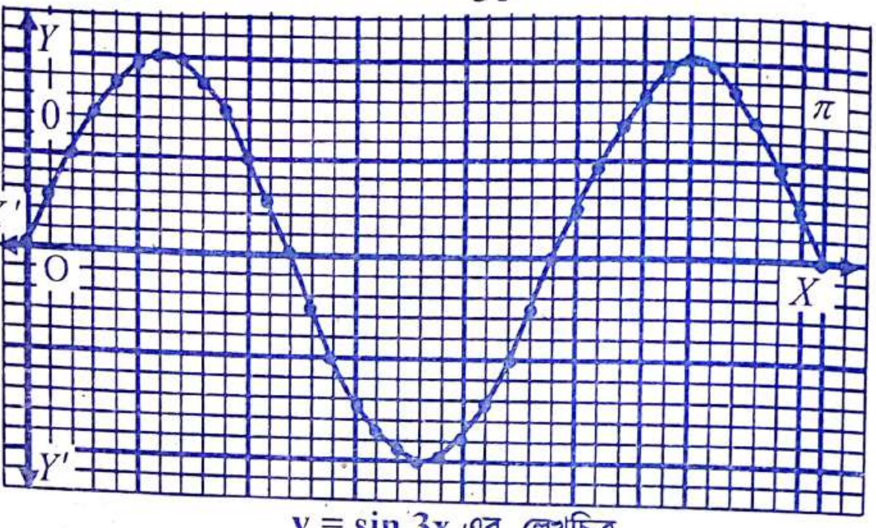
(b) $y = \sin 3x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [কু. '০৯,'১২; রা.'১৪; দি.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1	0.97
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = sin3x	0.87	0.71	0.5	0	−0.97	−0.5	0.87	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1



$y = \sin 3x$ এর লেখচিত্র

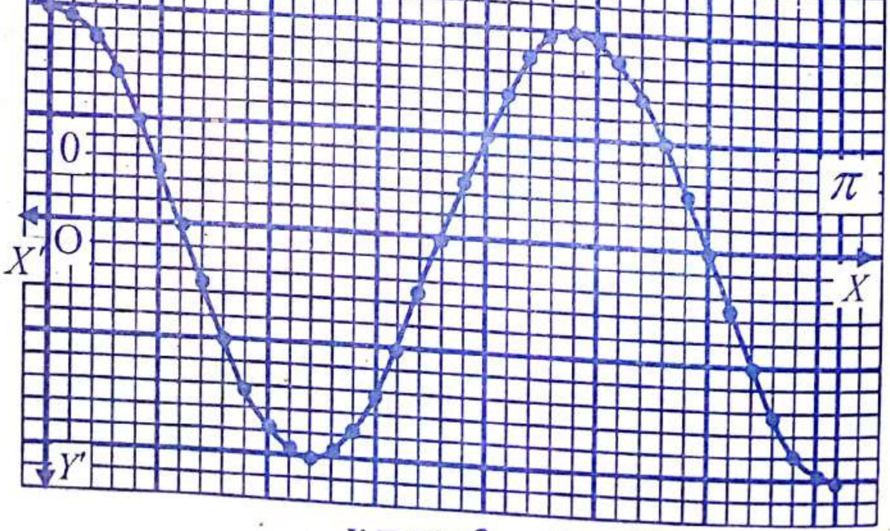
এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

1. (c) $y = \cos 3x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [চ.'০১,'০৪; ঢা.'০৩; য.'০৫]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \cos 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$	$7.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	1	0·97	0.87	0·71	0·5	0·26	0	−0·26
x	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$12.\frac{\pi}{36}$	$17.\frac{\pi}{36}$	$22.\frac{\pi}{36}$	$28.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = cos3x	−0·5	−0.71	−0.87	−1	−0.26	−0·5	0.5	−1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।



$y = \cos 3x$ এর লেখচিত্র

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

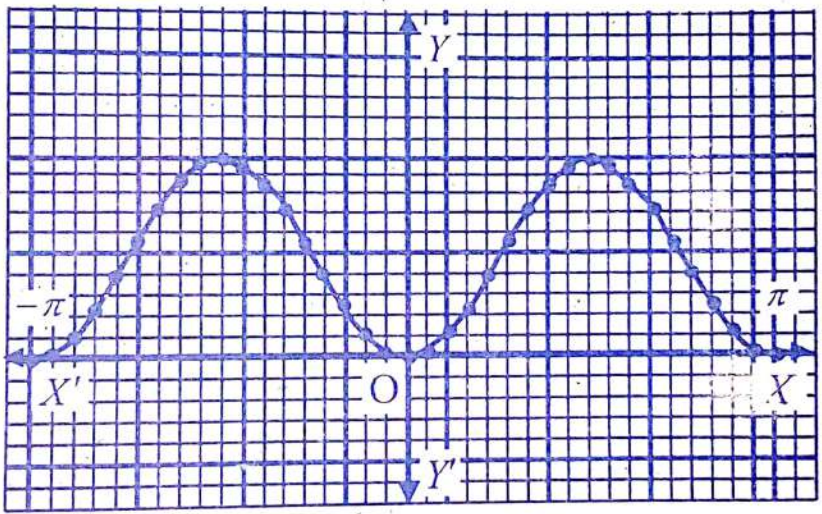
1. (d) $y = \sin^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$ [ব.'০১;সি.'১,'১০; ঢা.'০৪; কু.'১৩; চ.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0	0·03	0·117	0·25	0·41	0·59	0·75
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 16.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0·88	0.97	1	0.75	0.41	0·117	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু =1



$y = \sin^2 x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি । স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল ।

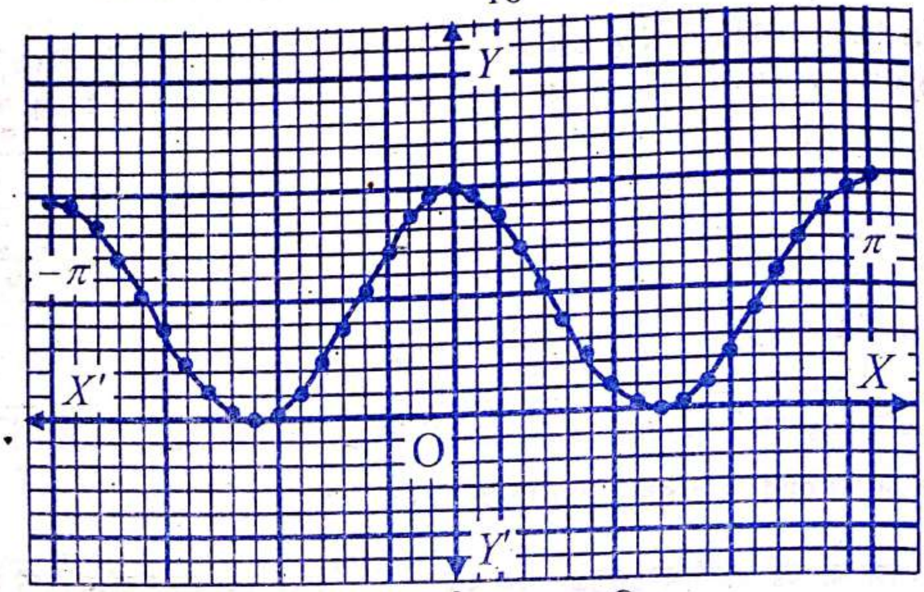
(e) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$ [রা.'০৩, '০৬,'০৯; ব.'০৫; চ.'০৫,'১১; য.'০৯,'১৩; ব.,দি.'১৩]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \cos^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	1	0·97	0.88	0·75	0·59	0·41	0·25
x	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 10\frac{\pi}{18}$	$\pm 12.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	0·12	0·03	0	0·97	0·25	0·75	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



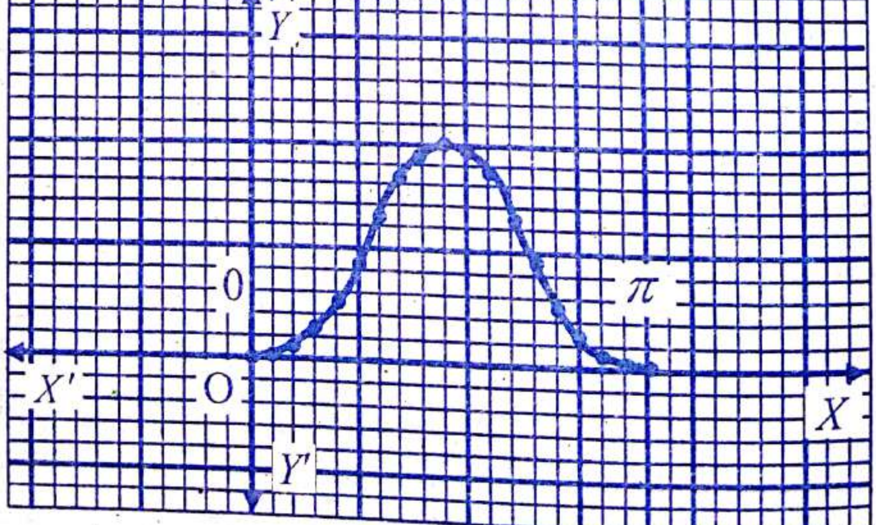
$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos^2 \mathbf{x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (f) $y = \sin^3 x$, যখন $0 \le x \le \pi$ [য.'০০; চ.'০২]

সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^3 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0	0·005	0·04	0·13	0·27	0·45	0·65
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$12.\frac{\pi}{18}$	$14.\frac{\pi}{18}$	$16.\frac{\pi}{18}$	$18.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0·83	0.96	1	0.65	0.27	0·04	0



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

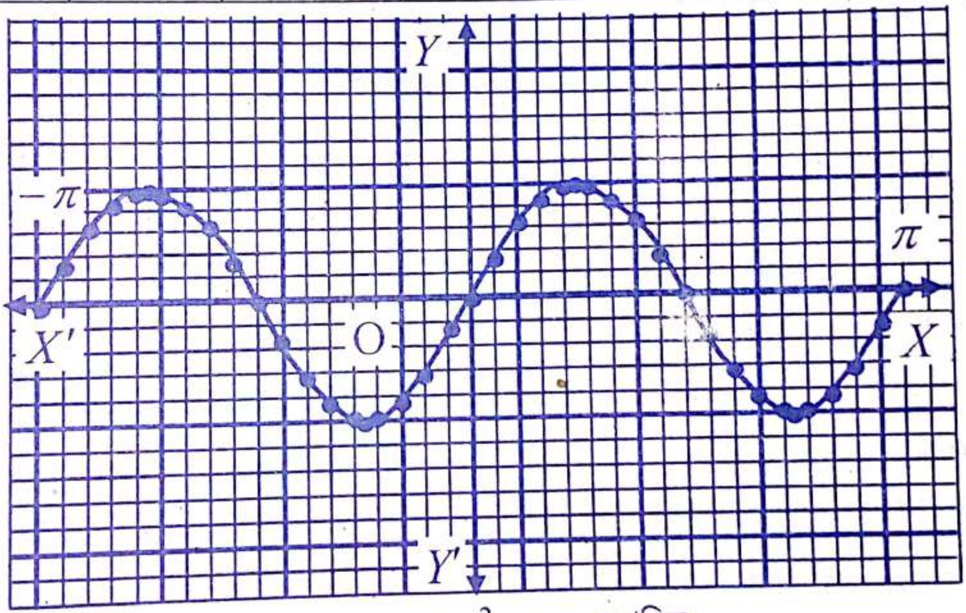
এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^3 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

1. (g) $y = \sin x \cos x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$

সমাধান ঃ $y = \sin x \cos x \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	0	$\pm 0 \cdot 17$	± 0.32	$\pm 0 \cdot 43$	$\pm 0 \cdot 49$	$\pm 0 \cdot 5$	± 0.49
x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$\pm 14.\frac{\pi}{18}$	$\pm 15.\frac{\pi}{18}$	$\pm 18.\frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	$\pm 0 \cdot 43$	± 0.32	± 0.17	0	∓ 0.49	$\mp 0 \cdot 43$	0



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধরিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin x \cos x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

2. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর ঃ

(a) $\sin x - \cos x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ [কু. '০৯; রা.'১৩; চ.'১২; য.'১৪; ব.'০৯; সি.'০৯; ঢা.'১২,'১৪; মা.'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$

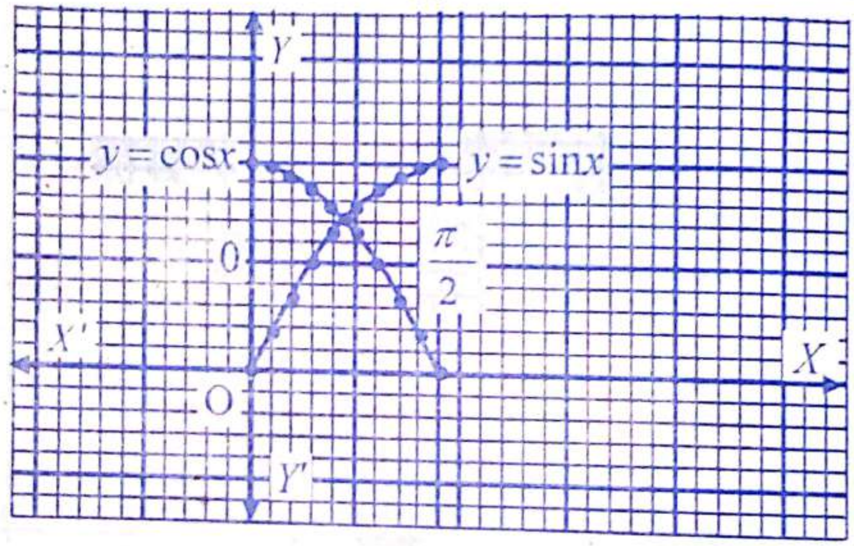
মনে করি, $y = \sin x = \cos x$ $\therefore y = \sin x$ এবং $y = \cos x$

নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$5.\frac{\pi}{18}$
$y = \sin x$	0	0·17	0·34	0·5	0.64	0.71	0.77
$y = \cos x$	1	0·98	0·94	0.87	0.77	0.71	0.64
x	$6.\frac{\pi}{18}$	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$			
$y = \sin x$	0.87	0·94	0·98	1			
$y = \cos x$	0·5	0·34	0·17	0			

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভুজ হচ্ছে $\frac{\pi}{4}$. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $x = \frac{\pi}{4}$.

2. (b) $2\sin^2 x = \cos 2x \;\; , -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ [য.'০৩,'০৮,'০৯]

সমাধান : মনে করি , $y = 2\sin^2 x = \cos 2x \;\; \therefore y = 2\sin^2 x$ এবং $y = \cos 2x$

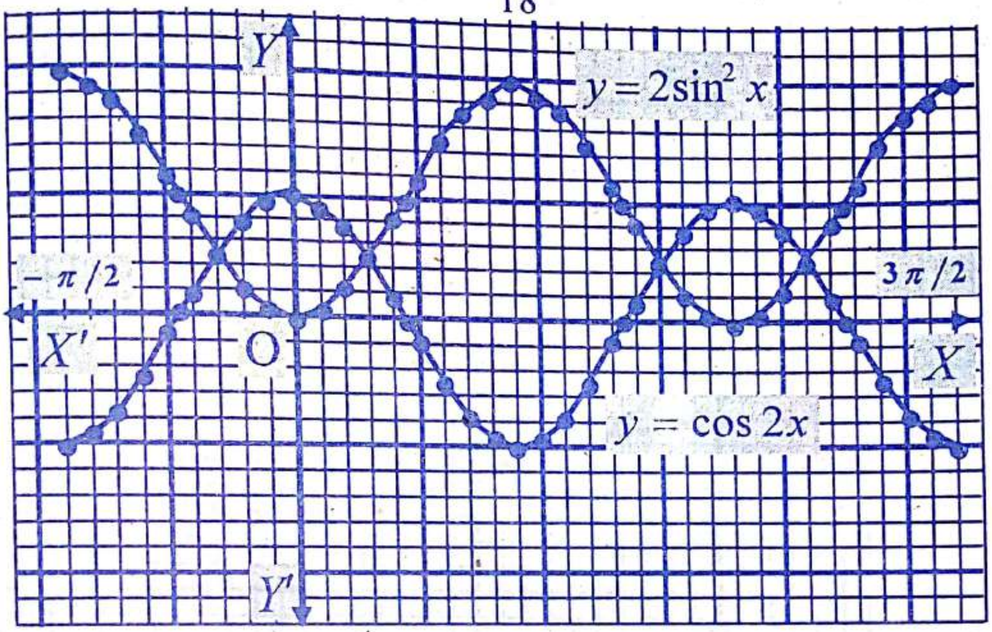
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি।

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm.\frac{\pi}{4}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	0	0·06	0·23	0·5	0.83	1	1.17
$y = \cos 2x$	1	0·94	0·77	0.5	0.17	0	−0·17

x	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$	$\pm 7.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$21.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	1.5	1·77	1·94	2	0·5	0.5	2
$y = \cos 2x$	−0·5	-0·77	0·94	−1	0.5	0.5	-1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু = 1 .



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান , $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

2. (c) $5 \sin x + 2 \cos x = 5 , 0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ **[য.'০৪; চ.'১০; রা.,ব.'১৪]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $5 \sin x + 2 \cos x = 5 \Rightarrow 2\cos x = 5(1 - \sin x)$

মনে করি , $y = 5(1 - \sin x) = 2\cos x$ $\therefore y = 5(1 - \sin x)$ এবং $y = 2\cos x$

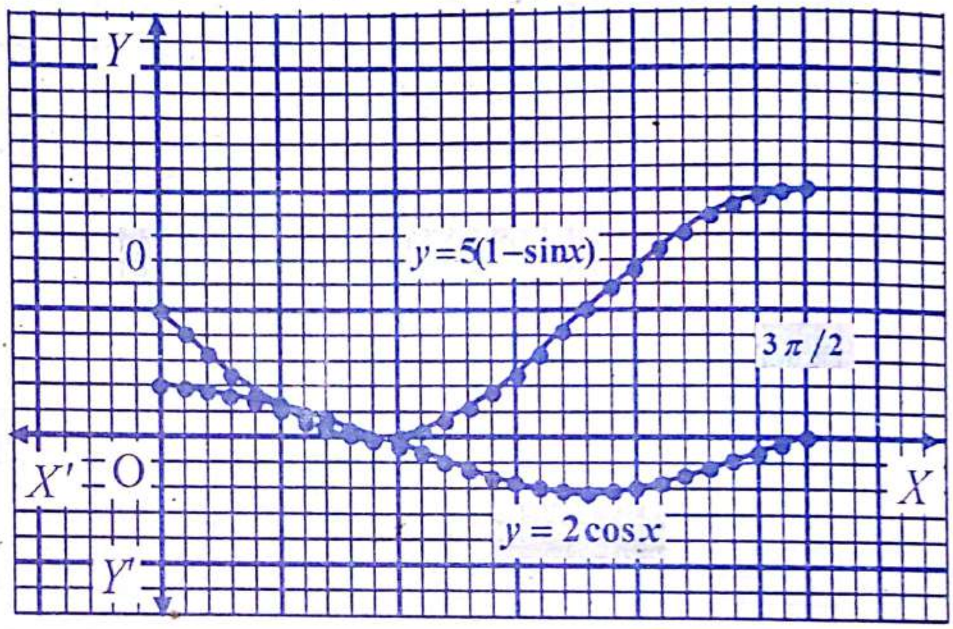
সমাধান ঃ নিচের তালিকায় $x \in [0 , \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য , $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	5	4·13	3·29	2·5	1.79	1.17	0.67
$y = 2\cos x$	2	1·97	1·88	1.73	1.53	1·29	1
x	$7.\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$	$11.\frac{\pi}{18}$	$15.\frac{\pi}{18}$	$19.\frac{\pi}{18}$	$20.\frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	0·3	0·08	0	0.3	2·5	5.89	6.7
$y = 2\cos x$	·68	0·35	0	−0.68	-1.73	−1.97	−1.88

x	$21.\frac{\pi}{18}$	$22.\frac{\pi}{18}$	$23.\frac{\pi}{18}$	$24.\frac{\pi}{18}$	$25.\frac{\pi}{18}$	$26.\frac{\pi}{18}$	$27.\frac{\pi}{18}$
y = 5(1 – sinx)	7·5	8·2	8.83	9.93	9·7	9.9	10
y = 2cosx	–·73	1·53	–1.29	–1	-0.68	–0.35	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = 5(1 – sinx) ও y = 2cosx. ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $46.4° = \frac{2\cdot32}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান, $x = 46.4° = \frac{2\cdot32}{9}\pi, 90° = \frac{\pi}{2}$

2. (d) $x - \tan x = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[রা.'০৪,'০৯; ব.'০৪,'১১,'১৩.'০৫,'১০,'১২; কু. '০৭,'১০; দি.'১০,'১২; চ.'১১; ঢা.'১১; য.'১২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $x - \tan x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

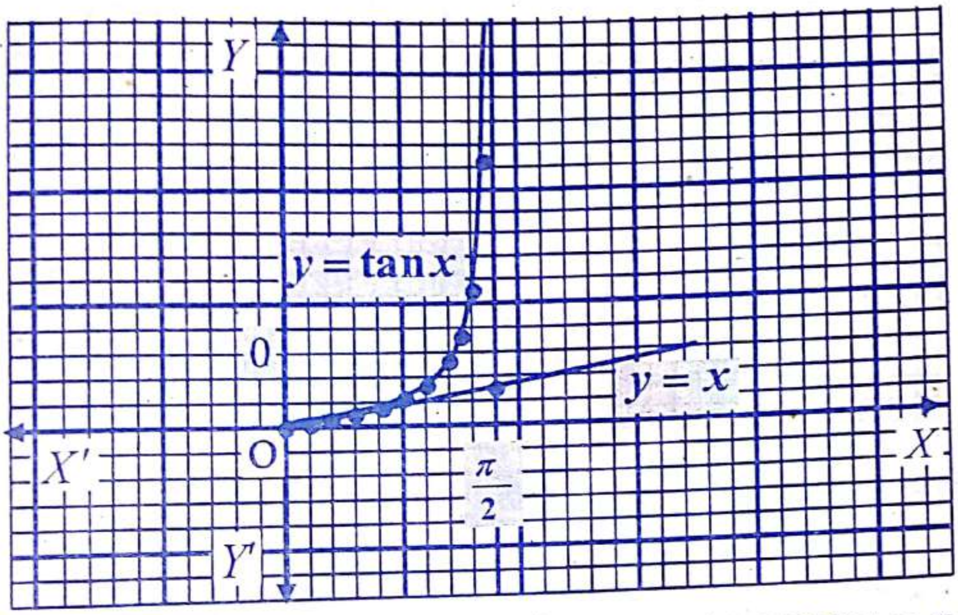
মনে করি , $y = x = \tan x$ $\therefore y = x$ এবং $y = \tan x$

নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য y = x ও y = tanx এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2.\frac{\pi}{18}$	$3.\frac{\pi}{18}$	$4.\frac{\pi}{18}$	$5.\frac{\pi}{18}$	$6.\frac{\pi}{18}$
y = tanx	0	0.18	0·36	0·58	0·84	1·19	1·73
x	$7\frac{\pi}{18}$	$7\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$8.\frac{\pi}{18}$	$8\cdot5\times\frac{\pi}{18}$	$9.\frac{\pi}{18}$		
y = tanx	2·75	3·73	5.67	11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = x ও y = tanx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজ হচ্ছে 0. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $x = 0$

[চ.'০২]

2. (e) $2x = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

সমাধান ঃ মনে করি , $y = 2x = \tan x$ $\therefore y = 2x$ এবং $y = \tan x$

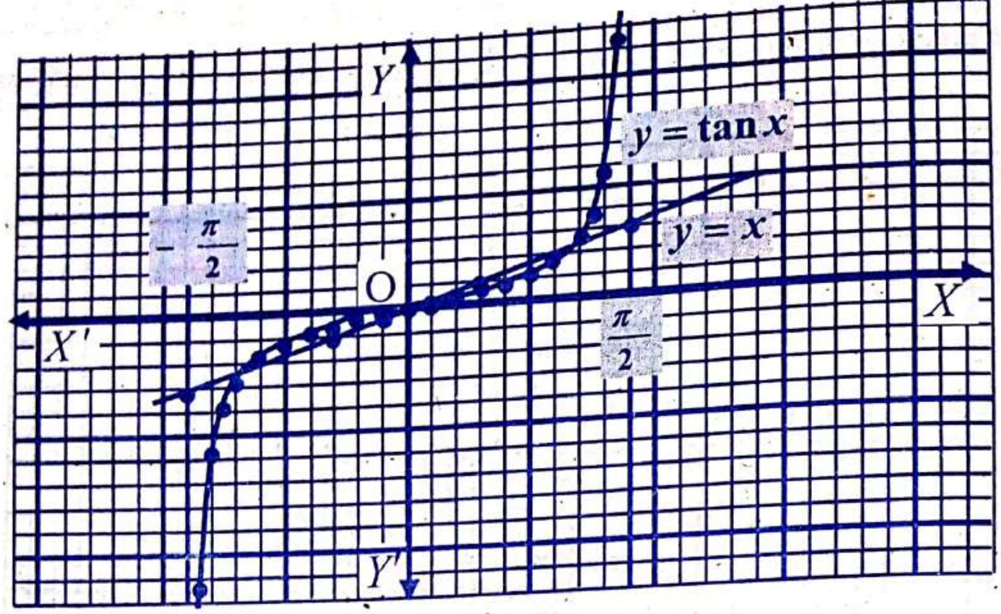
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\pm\frac{\pi}{18}$	$\pm 2.\frac{\pi}{18}$	$\pm 3.\frac{\pi}{18}$	$\pm 4.\frac{\pi}{18}$	$\pm 5.\frac{\pi}{18}$	$\pm 6.\frac{\pi}{18}$
y = tanx	0	± 0.18	± 0 · 36	± 0 · 58	± 0 · 84	± 1 · 19	± 1 · 73
x	$\pm 7\frac{\pi}{18}$	$\pm 7 \cdot 5\times\frac{\pi}{18}$	$\pm 8.\frac{\pi}{18}$	$\pm 8 \cdot 5\times\frac{\pi}{18}$	$\pm 9.\frac{\pi}{18}$		
y = tanx	± 2 · 75	± 3 · 73	± 5 . 67	± 11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে y = 2x ও y = tanx ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি।



লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে 0 , $-66° = -\frac{11\pi}{30}$, $66° = \frac{11\pi}{30}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 0 , -\frac{11\pi}{30}, \frac{11\pi}{30}$

2. (f) $\cot x - \tan x = 2, \ 0 \le x \le \pi$ [য. '০৫ ; চ.'০২; সি.'০৩,'১১; ঢা.'০৬; রা.'১০,'১২;কু.'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে , $\cot x - \tan x = 2 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

মনে করি , $y = \sin 2x = \cos 2x \ \therefore y = \sin 2x , y = \cos 2x$

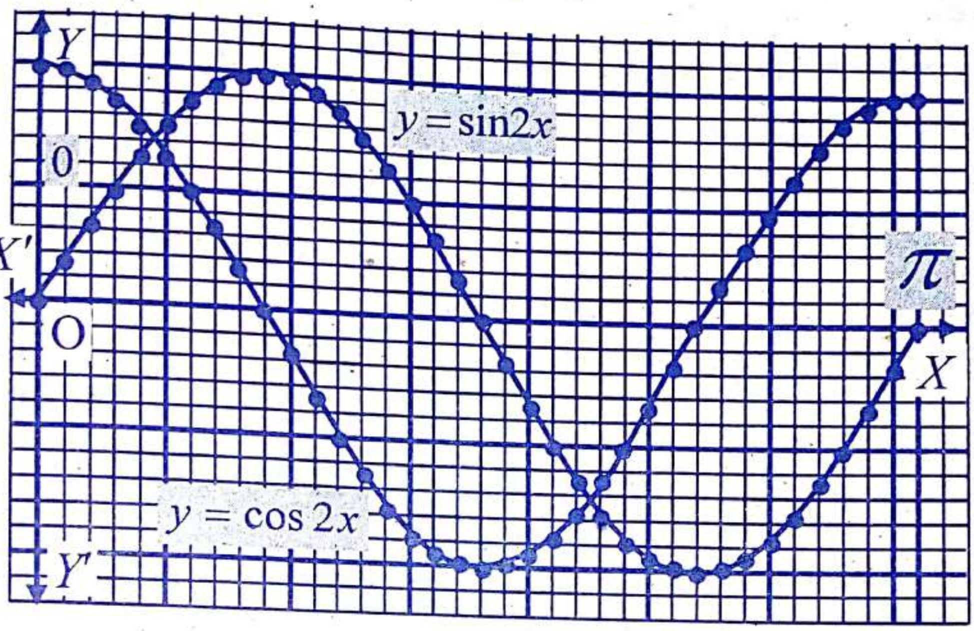
নিচের তালিকায় $x \in [0 , \pi]$ এর জন্য $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2.\frac{\pi}{36}$	$3.\frac{\pi}{36}$	$4.\frac{\pi}{36}$	$5.\frac{\pi}{36}$	$6.\frac{\pi}{36}$
y = sin2x	0	0·17	0.34	0.5	0·64	0·77	0.87
y = cos2x	1	0·98	0.94	0.87	0·77	0·64	0.5
x	$7.\frac{\pi}{36}$	$8.\frac{\pi}{36}$	$9.\frac{\pi}{36}$	$10.\frac{\pi}{36}$	$24.\frac{\pi}{36}$	$32.\frac{\pi}{36}$	$36.\frac{\pi}{36}$
y = sin2x	0.94	0·98	1	0·98	− 0.87	− 0.64	0
y = cos2x	0·34	0·17	0	− 0·17	− 0.5	0.77	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$.



ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত) ঃ

1. $\sin(4x+1)$ এর পর্যায় কত? [RU 06-07;BUET 00-01]

Sol^n.: $4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ পর্যায়কাল $= \frac{\pi}{2}$

নিয়ম ঃ $\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ এর পর্যায় $= 2\pi$ এবং $\tan x, \cot x$ এর পর্যায় $= \pi$.

2. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান– [SU 08-09]

Sol^n.: সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{1+3} = 2$

বি.দ্র.ঃ $a\cos x + b\sin x$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x + \tan^{-1}\frac{b}{a})$$

$a\cos\theta + b\sin\theta$ সর্বোচ্চ হবে যদি $\sin(x + \tan^{-1}\frac{b}{a})$ সর্বোচ্চ হয় অর্থাৎ $\sin(x + \tan^{-1}\frac{b}{a}) = 1$ হয়।

$\therefore$ $x = 90^0 - \tan^{-1}\frac{b}{a}$ এর জন্য $a\cos x + b\sin x$ এর সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{a^2+b^2}$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে– [CU 07-08]

Sol^n.: সর্বোচ্চ মান $= 1 + \sqrt{(\pm1)^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$

4. $f(x) = 2\cos|x|$ এর সীমা – [RU 03-04]

Sol^n.: $\cos|x|$ এর বিস্তার $= [-1,1]$

$\therefore$ $-2 \le f(x) \le 2$

5. $\cos^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$ এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান হচ্ছে– [CU 03-04]

Sol^n.: বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 1 ও 0.

6. $\sin 2x - \cos x$ এর সর্বনিম্ন মান – [IU 07-08]

Sol^n.: $x = -45^0$ এর জন্য প্রদত্ত রাশির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় $-\sqrt{3}$.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. Sol^n : জ্যামিতিক কোণ ধনাত্মক এবং 360^0 এর ছোট হয়। $\therefore$ Ans. (b)
2. Sol^n : $\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{2r} = \pi$ $\therefore$ Ans. (c)

3. **Sol^n :** $\sec\theta = \dfrac{OB}{OP}$ $\quad\therefore$ Ans. (a)

4. **Sol^n :** $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$\therefore$ Ans. (c)

5. **Sol^n :** $\cot\theta$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে $\mathbb{R} - \{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}, \mathbb{R}$ $\quad\therefore$ Ans.(d)

6. **Sol^n :** $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান সবসময় -1 থেকে $+1$ $\quad\therefore$ Ans. (c)

7. **Sol^n :** কোণ $90°$ থেকে বেড়ে $180°$ হলে $\cos\theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হবে। $\therefore$ Ans. A

8. **Sol^n :** সর্বোচ্চ মান $= 1+\sqrt{(\pm1)^2+1}$
$= 1+\sqrt{2}$ $\quad\therefore$ Ans. (c)

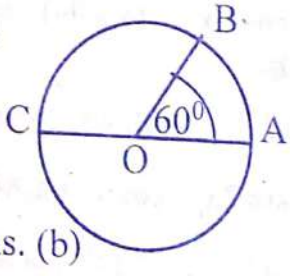
9. **Sol^n :** ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}r^2\theta$

$= \dfrac{1}{2}\times 6^2 \times \dfrac{\pi}{6} = 3\pi$ $\quad\therefore$ Ans.(c)

10. **Sol^n :** $-1 \le \cos|x| \le 1$
$\Rightarrow -3 \le 3\cos|x| \le 3$
$\Rightarrow -3 \le f(x) \le 3$ $\therefore$ Ans.(b)

11. **Sol^n :** সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

12. **Sol^n :** AC = 10 cm
$\therefore$ OA = 5 cm
চাপ $AB = r\theta$



$= 5\times\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

13. **Sol^n :** $x = 0$ এর জন্য $y = \sin 2x = 0$

এবং $x = \dfrac{\pi}{2}$ এর জন্য $y = \sin\pi = 0.$

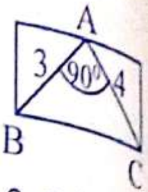
তাছাড়া, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ এর জন্য y এর মান ধনাত্মক। $\therefore$ Ans. (b)

14. **Sol^n :** সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

15. **Sol^n :** $4x = \pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \tan 4x$ পর্যায় $= \dfrac{\pi}{4}$ $\therefore$ Ans. (d)

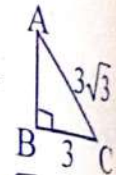
16. **Sol^n :** ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ,
$BC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$



$\therefore$ ΔABC পরিব্যাসার্ধ $= \dfrac{5}{2} = 2\cdot5$

$\therefore$ Ans. (c)

17. **Sol^n :** $AB = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2}$
$AB = \sqrt{27-9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

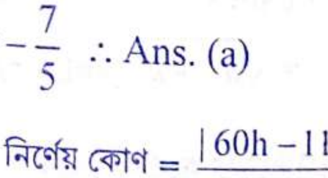


ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(3\times3\sqrt{2})$

$= \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore$ Ans. (c)

18. **Sol^n :** $\cot\left(\dfrac{4\pi - 2\theta}{2}\right)$
$= \cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$ $\therefore$ Ans. (d)

19. **Sol^n :**



$\cot\theta = -\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$ এবং $\sin\theta$ ধনাত্মক বলে

$\sec\theta = -\dfrac{7}{5}$ $\quad\therefore$ Ans. (a)

20. **Sol^n :** নির্ণেয় কোণ $= \dfrac{|60h - 11m|}{2}$ ডিগ্রি

$= \dfrac{|60\times8 - 11\times15|}{2}$ ডিগ্রি

$= \dfrac{|480 - 165|}{2}$ ডিগ্রি $= 157.5^0$

$\therefore$ Ans. (d)

21. **Sol^n :** $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ এর জন্য $\cos\theta$ ঋণাত্মক। $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$ $\therefore$ Ans. (d)

22. **Sol^n :** x =0 এর জন্য, $\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=0$

$\therefore$ Ans. (d)

23. **Sol^n :** চাকাটির পরিধি $50\pi = 157$ সেমি., গতিবেগ 157×10 সে.মি./সে. $= 15.7$ মি./সে. $\therefore$ Ans. (d)

24. **Sol^n :** চাপ BE এর দৈর্ঘ্য $= r\theta$

$=\frac{AB}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{6}{2}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ Ans. (a)

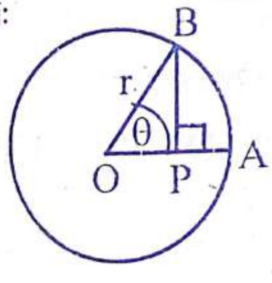
25. **Sol^n :** AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}r^2\theta$

$=\frac{1}{2}(12^2\times\frac{\pi}{6})=12\pi$ $\therefore$ Ans. (c)

26. **Sol^n :** θ কোণ 0^0 থেকে বেড়ে 90^0 হলে $\sin 0^0=0, \sin 90^0=1$ $\therefore$ Ans. (d)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

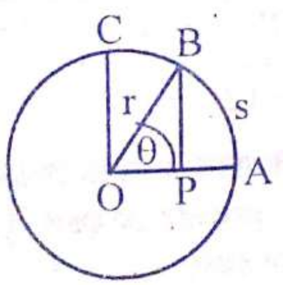
1. চিত্র:



এবং $f(x)=\sin\theta-\cos\theta$

(a) প্রমাণ কর যে, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $=\frac{r^2\theta}{2}$

প্রমাণ :



প্রমাণ : OA ⊥ OC টানি।

$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$

$\Rightarrow$ বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $=\frac{\theta}{\pi/2}\times$ বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{2\theta}{\pi}\times\frac{1}{4}\times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$=\frac{\theta}{2\pi}\times\pi r^2=\frac{r^2\theta}{2}$

(b) লেখচিত্রের সাহায্যে $f(x)=0,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ এর সমাধান কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VI B এর 2(a) দ্রষ্টব্য।

(c) $\theta=60^0$, r = 5 cm হলে ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta=60^0=\frac{\pi}{3}$,

OB = r = 5 সে.মি.

OPB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, BP = OB

$\sin 60^0=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ সে.মি. এবং

$OP=OB\cos 60^0=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ সে.মি.।

ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল − ত্রিভুজ OBP এর ক্ষেত্রফল

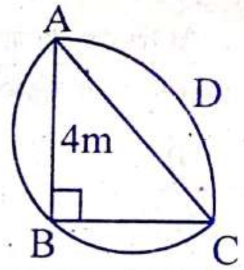
$=\frac{r^2\theta}{2}-\frac{1}{2}(OP\times BP)$

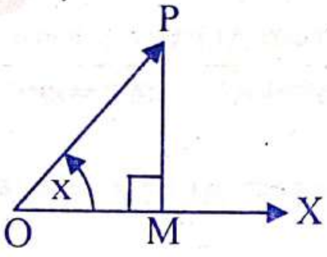
$=\frac{1}{2}\times5^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{2})$

$=\frac{25\pi}{6}-\frac{25\sqrt{3}}{8}$

$=\frac{25(4\pi-3\sqrt{3})}{24}$ বর্গ সে.মি.।

2. চিত্র-১: চিত্র -২:





চিত্রে –১ এ, ABDC একটি বৃত্তকলা।

(a) ADC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রে, AB = BC 4 মিটার বলে ADC একটি বৃত্তাংশ।

$\therefore$ বৃত্তাংশ ADC এর দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle ABC$

$= 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$ মিটার ।

(b) ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার ।

$\therefore$ ABC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ মিটার

$\therefore$ ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল + (ABCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= \frac{1}{2}\pi \times (2\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4)$

$= 4\pi + (4\pi - 8) = 8(\pi - 1)$ বর্গ মিটার ।

(c) চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{PM}{OP}$ দ্বারা যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রকাশ করে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর, যখন $-\pi \leq x \leq \pi$

সমাধান: চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{PM}{OP} = \sin x$. অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

3. $f(\theta) = k \tan \theta - \tan k\theta$ এবং $g(x) = \cos x$

(a) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 30 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $60°$ উৎপন্ন করলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 30$ সে.মি. বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 60° = \frac{60 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

আমরা জানি, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{30^2}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{900 \times 3{\cdot}1416}{6}$

$= 471{\cdot}24$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(b) $f(\theta) = 0$ হলে দেখাও যে,

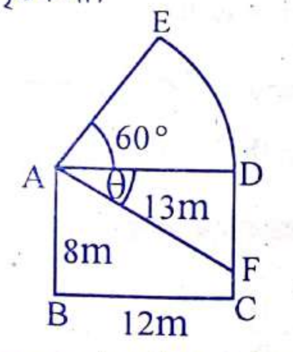
$$\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1)\sin^2 \theta}$$

সমাধান : প্রশ্নমালা VI A এর 2(d) দ্রষ্টব্য।

(c) $y = g(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর ।

সমাধান : প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-2 দ্রষ্টব্য।

4. চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং ADE একটি বৃত্তকলা।



(a) DE বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $r = AE = AD = BC = 12m$

$\theta_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ DE বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta_1 = 12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$ m

(b) AEDF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে, $DF = \sqrt{AF^2 - AD^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ m.

AEDF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

= AED বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল + ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

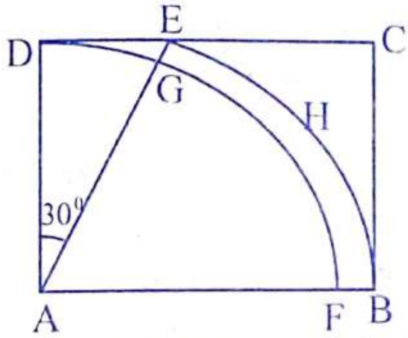
$= \frac{1}{2} \times \frac{12^2 \times 60\pi}{180} + (\frac{1}{2} \times 12 \times 5)$

$= 105.4$ বর্গ একক।

(c) $\frac{DE}{AF}$ অনুপাতটি θ কোণের যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্দেশ করে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর; যেখানে $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

সমাধান: চিত্র -২ অনুযায়ী, $\frac{DF}{AF} = \sin\theta$. অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

5. চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যার বাহুর দৈর্ঘ্য AB = 12m, BC = $6\sqrt{3}$ m. ADGF এবং ABHE দুইটি বৃত্তকলা ।



(a) DG বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ব্যাসার্ধ $r = AD = BC = 6\sqrt{3}$ m

$\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ DG বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta = 6\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6}$

$= \sqrt{3}\pi$ m

(b) GEBF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\angle BAE = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$= \frac{\pi}{3}$

$AF = AD = 6\sqrt{3}$ m, AB = 12m

$\therefore$ ABHE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB^2 \times \angle BAE) = \frac{1}{2}(12^2 \times \frac{\pi}{3})$

$= 24\pi$ বর্গ মি.

AGF বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AF^2 \times \angle GAF) = \frac{1}{2}\{(6\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3}\}$

$= 18\pi$ বর্গ মি.

$\therefore$ GEBF সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 24\pi - 18\pi = 6\pi$ বর্গ মি.।

(c) EC = 6m হলে, BHEC সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCE একটি ট্রাপিজিয়াম যার সমান্তরাল বাহু দুইটি AB = 12m, EC = 6m এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব BC = $6\sqrt{3}$ m.

$\therefore$ ABCE ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB + EC) \times BC$

$= \frac{1}{2}(12 + 6) \times 6\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ বর্গ একক

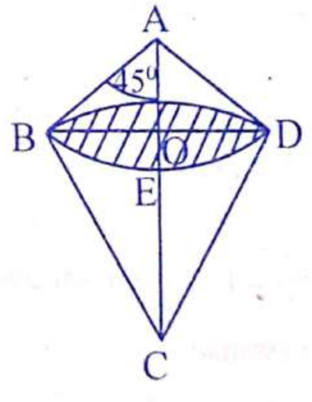
ABHE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= 24\pi$ বর্গ মি.

$\therefore$ BHEC সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 54\sqrt{3} - 24\pi = 93.53 - 75.4$

$= 18.13$ বর্গ মি. (প্রায়)

6. চিত্রে, ABCD একটি ঘুড়ি। BO = 4 cm, BC = 8 cm, ABED ও BCD দুইটি বৃত্তকলা।



(a) $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

প্রমাণ : প্রশ্নমালা VI B এর 8(d) দ্রষ্টব্য।

(b) দেখাও যে, $AB = 4\sqrt{2}$ এবং এর সাহায্যে BED বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ABCD ঘুড়ির কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। ABO একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore \sin 45^0 = \dfrac{OB}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{AB}$

$\Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$

এখন, $\angle BAD = 2\times 45^0 = 90^0 = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ BED বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= AB \times \angle BAD$

$= 4\sqrt{2}\times \dfrac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\pi$ একক।

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ABCD একটি ঘুড়ি বলে, $AB = AD = 4\sqrt{2}$, $BC = CD = 8$

BOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\sin BCO = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = \sin 30^0$

$\Rightarrow \angle BCO = 30^0 \;\therefore \angle BCD = 60^0 = \dfrac{\pi}{3}$

ABED বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}(AB^2 \times \angle BAD) = \dfrac{1}{2}\{(4\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{2}\}$

$= 32\times\dfrac{\pi}{4} = 8\pi$ বর্গ একক

ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}(AB\times AD)\sin 90^0$

$= \dfrac{1}{2}(4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2})\times 1 = 16$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}(BC^2\times\angle BCD) = \dfrac{1}{2}(8^2\times\dfrac{\pi}{3})$

$= \dfrac{32\pi}{3}$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}(BC\times CD)\sin 60^0$

$= \dfrac{1}{2}(8\times 8)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ বর্গ একক।

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল

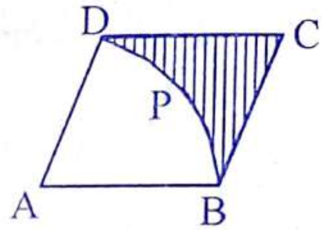
$= (8\pi - 16) + (\dfrac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3})$

$= 25.13 - 16 + 33.51 - 27.71$

$= 58.64 - 43.71$

$= 14.93$ বর্গ একক।

7. 2 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট ABCD রম্বসের সূক্ষ্মকোণ $A = 60^0$। ABPD একটি বৃত্তকলা।



(a) $\sin\theta + \text{cosec}\,\theta = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\theta + \text{cosec}^n\theta = 2$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা 2(b) দ্রষ্টব্য।

(b) বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ABPD বৃত্তকলার BPD বৃত্তাংশ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = \angle BAD = 60^0 = \dfrac{\pi}{3}$,

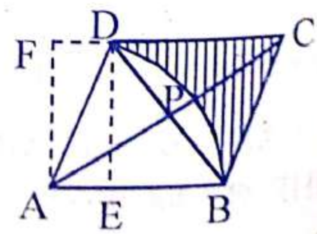
বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 2\times\dfrac{\pi}{3}$

$= 2\cdot 1$ সে. মি. (প্রায়)।

(c) BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\theta r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2$

$= 2 \cdot 1$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$DE \perp AB$ ও $AF \perp CD$ অঙ্কন করি যা AB কে F বিন্দুতে ও CD এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ΔABD এ, $\angle A = 60^0$ (সূক্ষ্মকোণ)

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2. AB.AE$

$= AB^2 + AD^2 - 2. AB.AD \cos A$

$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 60^0$

$= 8 - 8 \times \frac{1}{2} = 4$

$\therefore BD = 2$ সে.মি.।

আবার, Δ ACD, $\angle ADC = 120^0$ (স্থূলকোণ)

$\therefore AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2 CD \times DF$

$= AD^2 + DC^2 + 2 CD \times AD \cos ADF$

$= AD^2 + DC^2 + 2 CD \times AD \cos 60^0$

$= 2^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times (\frac{1}{2}) = 12$

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$

এখন, ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল

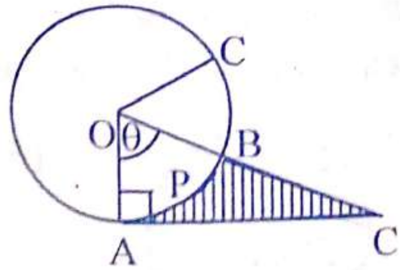
$= \frac{1}{2}(AC \times BD)$

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3} \times 2) = 2\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.।

$\therefore$ BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল − ABPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot 37$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

৪.



O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

(a) প্রমাণ কর যে,

$$(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

প্রমাণ: 1(a) দ্রষ্টব্য।

(b) OC ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা হলে 5 সেকেন্ডে C বিন্দু কতটুকু বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান: ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা 60 সেকেন্ডে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore$ 5 সেকেন্ডে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান,

r = OC = 5 সে. মি. । ধরি, সেকেন্ডের কাঁটাটির C বিন্দু s সে.মি. বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে।

$\therefore s = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times \frac{3 \cdot 1416}{6} = 2 \cdot 618$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তাকার পথ $= 2 \cdot 618$ সে. মি.।

(c) APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, r = 5 সে.মে. এবং

বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য = 6 সে.মি.

$\therefore r\theta = 6 \Rightarrow 5\theta = 6 \Rightarrow \theta = \frac{6}{5}$

$\therefore$ OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times 5^2 = 15$ বর্গ সে.মি.।

এখন, AOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\tan\theta = \frac{AC}{OA} \Rightarrow AC = OA \tan\frac{6}{5}$

$\Rightarrow AC = 5 \times 2 \cdot 57 = 12 \cdot 85$ সে.মি.।

$\therefore$ AOC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AC \times OA)$

$= \frac{1}{2}(12 \cdot 85 \times 5) = 32 \cdot 13$ বর্গ সে.মি.।

$\therefore$ APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 32 \cdot 13 - 15$

$= 17 \cdot 13$ বর্গ সে.মি.।

9. একটি দোলক ঘড়ির নিচে ঝুলানো দোলকটির সর্বনিম্ন বিন্দুটি $y = 2\cos 2x$ সম্পর্ক মেনে চলে এবং প্রতিদিন সকাল 6 টা 45 মিনিটে এতে এলাম বাজে।

(a) প্রমাণ কর যে,

$$\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2 = 1$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - \tan^2)^2 = 1$

$\Rightarrow (\sec^2\theta)^2 + (\tan^2)^2 - 2\sec^2\theta\tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sec^4\theta + \tan^4 = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$

(b) এলাম বাজার মুহূর্তে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ বৃত্তীয় পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

বৃত্তাকার ঘড়ি কেন্দ্রে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে।

প্রতি মিনিটে মিনিটের কাঁটার কৌণিক সরণ $\frac{360^0}{60} = 6^0$.

$\therefore$ 45 মিনিটে মিনিটের কাঁটার কৌণিক সরণ $= 45 \times 6^0 = 270^0$

$\therefore$ মিনিটে কাঁটা 360^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঘণ্টার কাঁটা $30°$ কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore$ মিনিটে কাঁটা 270^0 কোণ উৎপন্ন করলে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{30}{360} \times 270 = 22.5°$ কোণ উৎপন্ন করে

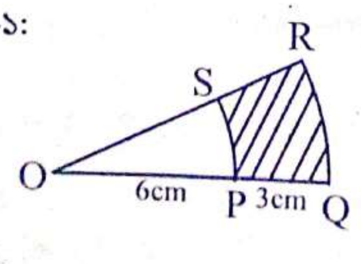
6 টা 45 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক সরণ $= 6 \times 30^0 + 22.5^0 = 202.5^0$

$\therefore$ 6 টা 45 মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $= 270^0 - 202.5^0 = 67.5^0 = \frac{67.5\pi}{180}$

(c) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ ব্যবধিতে দোলকের গতির সম্পর্কটি লেখচিত্রে দেখাও।

সমাধান: নিজে চেষ্টা কর।

10. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $y = \cos x, \; -\pi < \theta < \pi$

(a) $(\tan\theta + \sec\theta)^2$ কে $\sin\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: $(\tan\theta + \sec\theta)^2$

$= (\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta})^2 = \frac{(\sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta}$

$= \frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(\sin\theta+1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \frac{(\sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(\sin\theta+1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

(b) দৃশ্যকল্প-১ এ OPS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক হলে রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $OP = OS = 6$ cm

ধরি, $\angle SOP = \theta$.

OPS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OP^2)\theta$

$= \frac{1}{2}(6^2)\theta = 18\theta$

প্রশ্নমতে, $18\theta = 12 \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}$

$\therefore$ OQR বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OQ^2)\theta$

$= \frac{1}{2}(9^2)\frac{2}{3} = 27$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত এলাকার ক্ষেত্রফল $= 27 - 12 = 15$ বর্গ একক

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ-2 দ্রষ্টব্য।

11. [ঢা.বো. ২০১৭]

ক) বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

সমাধান: এখানে, $r = 6cm, \theta = 42^0 = \frac{42\pi}{180}$

$\therefore$ বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{6^2 \times 42\pi}{180 \times 2}$

$= \frac{21\pi}{5} = 13.19$ sq. cm

খ) ABDC এর পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: বৃত্তাংশ BC এর দৈর্ঘ্য $= \frac{6 \times 42\pi}{180}$

$= \frac{7\pi}{5}$ cm.

$\therefore$ ABDC এর পরিসীমা $= 6 + 6 + \frac{7\pi}{5}$

$= 16.4$ cm.

গ) ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ABDC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi \times 6^2$

$= 36\pi$ বর্গ সে.মি.

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 42^0$

$= 12.04$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$= 36\pi - 12.04 = 101.06$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)