আনুভূমিক বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তিসমূহকে একত্রে একটি সারি এবং উল্লম্ব বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তিসমূহকে একত্রে একটি কলাম বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা পর্যায় (order): কোনো ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা m এবং কলামের সংখ্যা n হলে $m \times n$ কে ম্যাট্রিক্সের ক্রম বলা হয়।

বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square matrix) : যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

একটি সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে **সারি ম্যাট্রিক্স (row matrix)** বা **সারি ভেক্টর (row vector)** বলা হয়। আবার, একটি কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে **কলাম ম্যাট্রিক্স (column matrix)** বা **কলাম ভেক্টর (column vector)** বলা হয়। যেমন, $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স।

মুখ্য কর্ণ (Principal diagonal) : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের a_{ij}, যেখানে $i = j$ ভুক্তিগুলি বরাবর কর্ণকে অর্থাৎ ১ম সারি ও ১ম কলামের সাধারণ (common) ভুক্তি বরাবর কর্ণকে মূখ্য কর্ণ বলা হয়। প্রধান কর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলির সমষ্টিকে ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস (Trace) বলা হয়। যেমন,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$$ মূখ্য কর্ণ অর্থাৎ a_{11}, a_{22}, a_{33} মূখ্য কর্ণের ভুক্তি এবং ট্রেস $= a_{11} + a_{22} + a_{33}$

কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal matrix) ঃ যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের অমূখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ এর প্রত্যেকে একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar matrix) : যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এর প্রত্যেকে একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity matrix or Unit matrix) : যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ 1 এবং অবশিষ্ট সকল ভুক্তি শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং n পর্যায় বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null matrix or Zero matrix) : যে ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি 3×3 পর্যায়ের শূন্য ম্যাট্রিক্স।

ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Triangular matrix): যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিচের অথবা উপরের ভুক্তিগুলি শূন্য তাকে ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে। ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স দুই ধরনের হয়। যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিচের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে **উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Upper triangular matrix)** এবং যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপরের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে **নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Lower triangular matrix)** বলে।

$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$ একটি উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ একটি নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স।

ট্রান্সপোজ বা রূপান্তরিত বা বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose matrix) : একটি ম্যাট্রিক্স A এর কলামকে সারিতে অথবা সারিকে কলামে পরিণত করে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এ ম্যাট্রিক্সকে A' বা A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ হলে $A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট: i. $\left(A^T\right)^T=A$ ii. $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$ iii. $(AB)^T=B^TA^T$

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এবং এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T পরস্পর সমান হলে তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে । প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- (i, j) ও (j,i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হবে যেখানে $i\neq j$। $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ হলে $A^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ অর্থাৎ $A=A^T$; সুতরাং A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew symmetric matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T এবং $A=-A^T$ হলে তাকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i\neq j$.

$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$ হলে $A^T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}=-A$ অর্থাৎ $A=-A^T$; সুতরাং A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub matrix): কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনো সংখ্যক সারি ও কলামের ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলে। $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ ইত্যাদি।

সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (Idempotent matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে যদি $A^2=A.A=A$ হয়। $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=A$; সুতরাং A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (Involutory matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে যদি $A^2=A.A=I$ হয়। $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ হলে $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$; সুতরাং A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (Nilpotent matrix): ক্ষুদ্রতম স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে যদি A^n শূন্য ম্যাট্রিক্স হয়। n কে শূন্যঘাতির সূচক (Index) বলে।

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; সুতরাং A শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স এবং শূন্যঘাতির সূচক 2.

২. ম্যাট্রিক্সের সমতা যোগ, বিয়োগ ও গুণ :

ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of Matrices) : দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B সমান হবে যদি ও কেবল যদি, তাদের ক্রম (order) সমান হয় এবং তাদের অনুরূপ ভুক্তিগুলি সমান হয়। অর্থাৎ $A = B$ যদি ও কেবল যদি, (i) A এবং B এর সমান সংখ্যক সারি থাকে , (ii) A এবং B এর সমান সংখ্যক কলাম থাকে ,(iii) A এর সারি বা কলামের যেকোনো ভুক্তি B এর সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তির সমান হয়।

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ যদি ও কেবল যদি, $a_1 = x_1, a_2 = x_2, a_3 = x_3,\ b_1 = y_1, b_2 = y_2, b_3 = y_3$

আবার, $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ যদি ও কেবল যদি, $2x + 3y = 4$ এবং $x - y = 7$.

ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ (Addition and subtraction of matrices) : দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগের বা বিয়োগের উপযোগী হবে যদি তাদের ক্রম **(order)** একই হয় অর্থাৎ সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান হয়। A ও B ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ ভুক্তিগুলিকে যোগ বা বিয়োগ করে ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যথাক্রমে যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যায়।

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$ উভয় ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×3 বলে তারা যোগের বা বিয়োগের জন্য উপযোগী এবং

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+10 & 2+11 & 3+12 \\ 4+13 & 5+14 & 6+15 \\ 7+16 & 8+17 & 9+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 \\ 23 & 25 & 27 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-10 & 2-11 & 3-12 \\ 4-13 & 5-14 & 6-15 \\ 7-16 & 8-17 & 9-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -9 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a matrix) : K একটি ধ্রুব (constant) সংখ্যা এবং A একটি ম্যাট্রিক্স হলে KA এমন একটি ম্যাট্রিক্স যার প্রত্যেকটি ভুক্তি A এর প্রতিসঙ্গী ভুক্তির K গুণ। অর্থাৎ কোনো ম্যাট্রিক্স A কে কোনো ধ্রুব সংখ্যা K দ্বারা গুণ করলে KA ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি ভুক্তিকে K দ্বারা গুণ করতে হবে। যেমন,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ হলে, } KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & Ka_{23} \\ Ka_{31} & Ka_{32} & Ka_{33} \end{bmatrix} \text{ হবে।}$$

ম্যাট্রিক্সের গুণনের যোগ্যতা এবং গুণনের প্রক্রিয়া : দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B গুণের যোগ্য হবে যদি প্রথম ম্যাট্রিক্স A এর কলাম সংখ্যা ও দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স B এর সারি সংখ্যা সমান হয়। A ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m \times n$ ও B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n \times l$ হলে AB যোগ্য হবে , কেননা A- এর কলাম সংখ্যা (n) এবং B- এর সারির সংখ্যার সমান। কিন্তু BA যোগ্য হবেনা, কেননা B এর কলাম সংখ্যা (l) A এর সারির সংখ্যা (m) এর সমান নয়।

বি.দ্র: AB এর ক্রম হবে $(m \times n).(n \times l) = m \times l$. অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা × B ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা

AB নির্ণয় ঃ B এর ১ম কলামের ভুক্তিসমূহের সাথে A এর ১ম সারির প্রতিসঙ্গী ভুক্তিসমূহের গুণফলের সমষ্টি হবে AB এর প্রথম কলামের প্রথম ভুক্তি । AB এর ১ম কলামের অন্যান্য ভুক্তি পাওয়া যাবে B এর ১ম কলামের ভুক্তিসমূহের সাথে A এর যথাক্রমে ২য়, ৩য় ,… সারির প্রতিসঙ্গী ভুক্তিসমূহের গুণফলের সমষ্টির সাহায্যে । একই পদ্ধতিতে AB এর ২য়, ৩য়,…কলাম নির্ণয় করা যাবে যথাক্রমে B এর ২য়, ৩য়,… কলামের সাহায্যে। যেমন,

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ হলে ,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$ হবে।

ম্যাট্রিক্সের সূচক (Power of matrix) : $n \in \mathbb{N}$ মাত্রার বর্গ ম্যাট্রিক্স A হলে, $A^2 = A \,.\, A$, $A^3 = A^2 \,.\, A$, $A^4 = A^3 \,.\, A, \cdots \cdots, A^{n+1} = A^n \,.\, A$ এবং $A^0 = I$; যখন I একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স। আবার, $I^n = I$.

ম্যাট্রিক্সের বহুপদী (Polynomial of matrix): $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ প্রত্যেকেই স্কেলার ধ্রুবক এর জন্য $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ একটি বহুপদী হলে $f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots\cdots + a_nA^n$ একটি ম্যাট্রিক্স বহুপদী।

উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **এবং** $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **হলে, (i) $3A - 2B$ এবং (ii) AB নির্ণয় কর ।**

সমাধান : (i) $$3A - 2B = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & 12 \\ 9 & -6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 12 & 2 & 12 \\ 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-(-2) & 3-(-4) & 3-(-2) \\ 6-12 & -9-2 & 12-12 \\ 9-10 & -6-20 & 9-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -11 & 0 \\ -1 & -26 & -1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(ii) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-1)+1.6+1.5 & 1(-2)+1.1+1.10 & 1(-1)+1.6+1.5 \\ 2(-1)+(-3)6+4.5 & 2(-2)+(-3)1+4.10 & 2(-1)+(-3)6+4.5 \\ 3(-1)+(-2)6+3.5 & 3(-2)+(-2)1+3.10 & 3(-1)+(-2)6+3.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+6+5 & -2+1+10 & -1+6+5 \\ -2-18+20 & -4-3+40 & -2-18+20 \\ -3-12+15 & -6-2+30 & -3-12+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 10 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(AB)C = A(BC)$

[রা.'০৯; য.'১১,'১৪; সি.'১৩; কু. '১০,'১৪,'১৫; চ.'১১,'১৪;'১৫; ব.'১৩; চুয়েট'০৪-০৫]

প্রমাণ: $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 3-0 & 0-1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$

বামপক্ষ $= (AB)C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+9-4 \\ 8+0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$ এবং

ডানপক্ষ $= A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11-8 \\ 0+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ হলে $f(A)$ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০১,'০৪,'১২,'১৪ ;কু.'০৪; ব.'১৪]

প্রমাণ : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad \therefore f(A) = A^3 - 2A^2 + A - 2I$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3 \\ 1-2+1 & 3+0-1 & 2-3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13 \\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7 \\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

এখন, $f(A) = A^3 - 2A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -2 & -26 \\ -10 & -6 & -14 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-18+1-2 & 14-2+3+0 & 34-26+2+0 \\ 18-10+2+0 & 8-6+0-2 & 26-14+3+0 \\ 4+0+1+0 & 0-4-1+0 & 6+0+1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ -4. $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $(x, y) = (\frac{16}{7}, \frac{1}{7})$

প্রমাণ : $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\therefore 2x + 3y = 5 \cdots\cdots$ (i), $x - 2y = 2 \cdots\cdots$ (ii)

$(i) - 2\times(ii) \Rightarrow 7y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{7}$

(ii) হতে, $x = 2 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$ $\therefore (x, y) = (\frac{16}{7}, \frac{1}{7})$ (Showed)

উদাহরণ 5. একটি দোকানের পরপর তিন দিনে কোকাকোলা, আরসি কোলা ও স্প্রাইট বিক্রয় নিম্নের তালিকায় দেওয়া হলঃ

বোতলের সংখ্যা			
	কোকাকোলা	আরসি কোলা	স্প্রাইট
প্রথম দিন	50	45	40
দ্বিতীয় দিন	45	50	45
তৃতীয় দিন	48	55	30
প্রতি বোতলে লাভ(টাকায়)	0.50	0.75	0.50

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে ঐ তিন দিনের মোট লাভ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বোতলের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$P = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$ এবং

$$\text{মোট লাভ} = P \times Q = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+33.75+20 \\ 22.50+37.50+22.50 \\ 24+41.25+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78.75 \\ 82.50 \\ 80.25 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ = (78 .75 + 82.50 + 80.25) টাকা = 241.50 টাকা। [অনুরূপ সমস্যা: প্রশ্নমালার 6]

প্রশ্নমালা IA

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স দুইটির সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর। **[দি.'১১]**

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, $7A - 5B$ নির্ণয় কর। **[কু.'০২]**

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় কর। **[য.'০৯]**

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $AB = BA = I_3$ **[চ.'১২; মা.'১১]**

(c) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ গুণন প্রক্রিয়ায় বিনিময়যোগ্য।[ঢা.'০৫; চ.'০৮]

3. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB ও BA নির্ণয় কর। [রা.'০৮ ; ব.'০৫; সি.'০৭,'১২,'১৪; চ.'১০; য.'১২;দি.'১৩; মা.'১২]

(ii) দেখাও যে, $AB \neq BA$ [ব.,য.'০৭;ঢা.'০৮; চ.'১১; সি.'১২; ব.,সি.,দি.'১৩]

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, AB নির্ণয় কর। [ব. '০৩]

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [ব., মা.'০৯; য.'১৩] (ii) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [য.'০৪]

4. (a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে,$(AB)C = A(BC)$ [য.'০৬; কু.'১৫]

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB এবং AC নির্ণয় কর। [সি.'০৭] (ii) দেখাও যে, $AB + AC = A(B + C)$. [য.'০৭; ব.'১১]

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ হলে,(i) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [কু.'১২]

(ii) (AB)C নির্ণয় কর। [চ.'০৫; রা.'০৬,'১১,'১৩ ;ব.,য.'১০; ঢা.'১১,'১৩,'১৫; কু.,দি.'১২]

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB \neq BA$. [দি.'১০]

5. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হলে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ব.'০৮ ; রা.'০৭,'১২; ঢা.'০৯; চ.'০৯; দি.'০৯,'১৪; মা.'১৩]

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর ; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ঢা.'০৭; সি.'০৯; ব.'১২]

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 4A - 5I$ নির্ণয় কর ; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ [সি.'১৫;মা.'১৪; ব.'১৫]

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - B^2$ নির্ণয় কর।

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ হলে, A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 3A - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [য.'১৫]

6. (a) ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নিম্নের তথ্য -তালিকা হতে বিক্রীত বইয়ের মোট লাভ নির্ণয় কর :

	গণিত	পদার্থ	রসায়ন
বইয়ের সংখ্যা	100	125	110
প্রতি বইয়ের ক্রয়মূল্য (টাকায়)	60.00	90.00	85.00
প্রতি বইয়ের বিক্রয়মূল্য (টাকায়)	70.00	102.00	96.00

(b) ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নিম্নের তথ্য -তালিকা হতে বিক্রীত কলমের মোট লাভ নির্ণয় কর :

	A প্রকারের কলম	B প্রকারের কলম	C প্রকারের কলম
ঢাকায় বিক্রীত কলমের সংখ্যা	140	155	132
রাজশাহীতে বিক্রীত কলমের সংখ্যা	130	100	148
প্রতি কলমে লাভ (টাকায়)	1.50	2.00	1.25

7. (a) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(b) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ এবং $A^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। [চুয়েট' ০৯-১০]

$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 6 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & a+b-3 \\ 3 & ab+2 \end{bmatrix} + 2I_2$ হলে a, b, x, y এর মান নির্ণয় কর।

উ: a = 1 অথবা 5, b = 5 অথবা 1, x = 7 , y = 4

(e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(AB+C)' = B'A' + C'$

(f) $\begin{bmatrix} x & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। উ: $x = -2$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 3x - 2y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

(b) ম্যাট্রিক্সের ক্রম এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$

(c) দেখাও যে, $C^2 + 3C - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। [য.'১৫]

উত্তরমালা I A

1. (a) $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix}$

2. (a) $AB = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ 3. (a) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) (*i*) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $BC = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ 4. (b) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$ (c) (ii) $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ 5.(a) $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

6. (a) 3710 (b) 1265

৩. নির্ণায়ক (DETERMINANT)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হচ্ছে $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এবং এর মান $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$.অর্থাৎ, কতগুলি সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে | | দ্বারা আবদ্ধ করলে নির্ণায়ক উৎপন্ন হয়। $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক। ইহা একটি নির্দিষ্ট মান।

8. নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক (Minor and Cofactor of determinant) : কোনো নির্ণায়ক D এর কোনো ভুক্তি যে সারি ও যে কলামে অবস্থিত সে সারি ও সে কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট ভুক্তি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে

(f) $\begin{bmatrix} x & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। উ: $x = -2$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

৪. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 3x - 2y \\ 2x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

(b) ম্যাট্রিক্সের ক্রম এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$

(c) দেখাও যে, $C^2 + 3C - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। [য.'১৫]

উত্তরমালা I A

1. (a) $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix}$

2. (a) $AB = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **3.** (a) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) (*i*) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $BC = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ **4.** (b) (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$ (c) (ii) $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ **5.** (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

6. (a) 3710 (b) 1265

৩. নির্ণায়ক (DETERMINANT)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক হচ্ছে $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এবং এর মান $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$.অর্থাৎ, কতগুলি সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে | | দ্বারা আবদ্ধ করলে নির্ণায়ক উৎপন্ন হয়। $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক। ইহা একটি নির্দিষ্ট মান।

৪. নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক (Minor and Cofactor of determinant)

(Minor and Cofactor of determinant) : কোনো নির্ণায়ক D এর কোনো ভুক্তি যে সারি ও যে কলামে অবস্থিত সে সারি ও সে কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট ভুক্তি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে

উক্ত ভুক্তির **অনুরাশি** বলা হয়। যেমন, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{11}, a_{12}, a_{13} এর অর্থাৎ $(1, 1), (1, 2),$ $(1, 3)$ –তম ভুক্তির অনুরাশি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

যথাযথ চিহ্নযুক্ত কোনো ভুক্তির অনুরাশিকে সে ভুক্তির **সহগুণক** বলা হয়। কোনো নির্ণায়কের (r, c) –তম সহগুণকের চিহ্ন হবে $(-1)^{r+c}$ অর্থাৎ $(r + c)$ জোড় হলে চিহ্ন '+' এবং $(r + c)$ বিজোড় হলে চিহ্ন '−' হবে। তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের চিহ্ন $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ অর্থাৎ কোণাকোণি অবস্থিত উপাদান ৫টির চিহ্ন ' + ' এবং অপর ৪ টির চিহ্ন ' − '।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের $(1, 1), (1, 2)$–তম ভুক্তির সহগুণক যথাক্রমে $\begin{vmatrix} b_{22} & c_{23} \\ b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{21} & c_{23} \\ a_{31} & c_{33} \end{vmatrix}$.

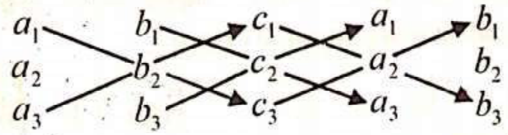
৫. নির্ণায়কের মান (The value of a determinant):

কোনো নির্ণায়কের যেকোনো সারি বা কলামের ভুক্তিসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহগুণকের গুণফলের সমষ্টিই নির্ণায়কের মান। 2×2 আকারের নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এর মান $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ । $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{11}, a_{12}, a_{13} ভুক্তিগুলির সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 হলে নির্ণায়কের মান হবে $a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\times(-)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

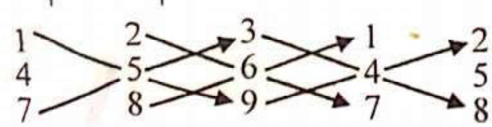
সারাসের চিত্রের মাধ্যমে নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expansion of Determinant using Sarrus Diagram) :

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির জন্য সারাসের চিত্র নিম্নরূপ:



একই তীর চিহ্ন বরাবর ভুক্তি তিনটি গুণ করতে হবে। উপর হতে নিচে তীর (↘) চিহ্ন বরাবর গুণফলের পূর্বে '+' চিহ্ন এবং নিচ হতে উপরে তীর (↗) চিহ্ন বরাবর গুণফলের পূর্বে ' − ' চিহ্ন বসিয়ে গুণফল ছয়টি যোগ করে নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়। উপরের নির্ণায়কটির মান = $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

যেমন, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান নির্ণয়ের জন্য সারাসের চিত্র:



নির্ণায়কটির মান = $45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0$

৬. নির্ণায়কের ধর্মবলি (Properties of determinant) ঃ

(i) যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রত্যেক ভুক্তি শূন্য হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন, $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

(ii) নির্ণায়কের সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(iii) নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের পরিবর্তন হয় না কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যেমন, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$

(iv) যদি কোনো নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি এক হয় বা একটি অন্যটির গুণিতক হয় অর্থাৎ দুইটি কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত সমান হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে। যেমন,

$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} ma_1 & na_1 & c_1 \\ ma_2 & na_2 & c_2 \\ ma_3 & na_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(v) নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রত্যেক ভুক্তিকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকেও সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়। $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে, $\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mA$

(vi) নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি অন্য একটি কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 - nc_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 - nc_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 - nc_3 & c_3 \end{vmatrix}$ তবে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{mn}\begin{vmatrix} ma_1 + b_1 & nb_1 - c_1 & c_1 \\ ma_2 + b_2 & nb_2 - c_2 & c_2 \\ ma_3 + b_3 & nb_3 - c_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি ভুক্তি দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} a_1+\beta_1 & b_1+\beta_2 & c_1+\beta_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের মান নির্ণয়ের কৌশল : প্রথমে প্রদত্ত নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের সব ভুক্তিকে একই বানাতে হবে। এর জন্য কোনো সারি বা কলামের প্রতিটি ভুক্তির সাথে অন্য সারি বা সারিসমূহ অথবা কলাম বা কলামসমূহের অনুরূপ ভুক্তি বা ভুক্তির প্রয়োজনীয় গুণিতকের যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। অত:পর সেই সারি বা কলামের সাধারণ মান common নিয়ে সারি বা কলামের সকল ভুক্তিকে 1 বানাতে হবে। তারপর সেই সারি বা কলামের দুইটি ভুক্তিকে শূন্য বানাতে হবে। সর্বশেষে সেই সারি বা কলাম বরাবর বিস্তার করতে হবে।

উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $D_1 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix}$

(a) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = 0$

(b) প্রমাণ কর যে, $D_1 = (a+b+c)^3$ [কু.'১৩;ঢা.'১৩; চ.'০৮; য.'১১]

(c) প্রমাণ কর যে, $D_2 = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$ [ঢা.'১৪; সি.'১৪, '১৫; ব.'১৫; দি.'১৩]

(a) প্রমাণ : $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix}$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix} = 1\times 0 = 0$$

(b) প্রমাণ: $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[c'_1 = c_1 - c_2$ এবং $c'_2 = c_2 - c_3]$

$= (a+b+c)1\{(a+b+c)^2 - 0\}$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে।]

$= (a+b+c)^3 =$ R.H.S. (Proved)

(c) প্রমাণ ঃ L.H.S.$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

[২য় ও ৩য় সারি পরস্পর বিনিময় করে।] [১ম ও ২য় সারি পরস্পর বিনিময় করে।]

$= (xyz-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (xyz-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix}$ $[c'_1 = c_1 - c_2,\ c'_2 = c_2 - c_3]$

$= (xyz-1)1.\{(x-y)(y^2-z^2) - (y-z)(x^2-y^2)\}$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে।]

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(y+z-x-y)$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x) =$ R.H.S. (Proved)

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$ **[কু.'০৩]**

প্রমাণ : L.H.S$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2-a^2 & a^2 \\ b^2-b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2 \\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$[c'_1 = c_1 - c_3, c'_2 = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (a+b+c)(c+a-b) & b^2 \\ (a+b+c)(c-a-b) & (a+b+c)(c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$

$[r'_3 = r_3 - (r_1 + r_2)]$

$= (a+b+c)^2\,\frac{ab}{ab}\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$

$= \frac{(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix} ab+ca-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & bc+ab-b^2 & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix} = \frac{(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix} ab+ca & a^2 & a^2 \\ b^2 & bc+ab & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$

$[c''_1 = c'_1 + c'_3,\ c''_2 = c'_2 + c'_3]$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{ab}.2\,a\,b\{(a\,b+c\,a)(\,b\,c+a\,b)-a^2b^2\}$$ [শেষ কলাম বরাবর বিস্তার করে ।]

$$= 2\,(a+b+c)^2.\,ab\{(b+c)(c+a)-ab\}$$

$$= 2ab\,(a+b+c)^2(\,bc+ab+c^2+ca-ab)$$

$$= 2ab\,(\,a+b+c\,)^2.c\,(\,a+b+c)=2\,a\,b\,c\,(\,a+b+c\,)^3 = \text{R.H.S.}\quad \text{(Proved)}$$

৭. ব্যতিক্রমী (Singular) ও অব্যতিক্রমী (Nonsingular) ম্যাট্রিক্স

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান অশূন্য তাকে অব্যতিক্রমী মাট্রিক্স বলে। যেমন –

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ একটি 2×2 ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স যেহেতু $|A| = -12 + 12 = 0$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ একটি 2×2 অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স যেহেতু $|B| = -12 - 12 = -24 \neq 0$ ।

উদাহরণ –3: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ **ব্যতিক্রমী হলে x এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(6-18) - 1(6x - 6x^2) + 9(6x - 2x^2) = 0$

$$\Rightarrow\quad -36 - 6x + 6x^2 + 54x - 18x^2 = 0 \Rightarrow -12\,x^2 + 48x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow\quad x^2 - 3x - x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)\,(\,x-1) = 0\ \therefore x = 1, 3\quad \text{(Ans.)}$$

৮. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse matrix of a square matrix) : $n\times n$ মাত্রার দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A ও B-এর জন্য যদি $AB = BA = I_n$ হয় তবে এদের একটিকে অপরটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$ । উল্লেখ্য যে, শুধু অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

৮.১ অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Adjoint matrix) : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকসমূহ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এ ম্যাট্রিক্সকে Adj A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ হলে,

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

যেখানে A_{ij} হচ্ছে (i, j) তম সহগুণক (a_{ij} তম ভুক্তির সহগুণক)

উদাহরণ –4: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ হলে,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix},\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix},\ A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix},\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1+0 & -(-2+0) & 2+1 \\ -(-4+2) & 1+2 & -(-1-4) \\ 0-2 & -(0+4) & 1-8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

বিকল্প পদ্ধতি: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+2 & 2+1 \\ -2+4 & 1+2 & 4+1 \\ 0-2 & -4-0 & 1-8 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

৮.২ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি (Different processes of determining inverse matrix):

(i) সমাধান পদ্ধতি (Solution method): $AX = B$ হলে $X = A^{-1}B$, যেখানে A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

উদাহরণ –5: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ হলে $\mathbf{A^{-1}}$ নির্ণয় কর। [ঢা.'১৫]

সমাধান : মনে করি, $AX = B$, যেখানে $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. তাহলে, $X = A^{-1}B$.

এখন, $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0x + y + 2z = a \cdots\cdots (i) \\ x + 2y + 3z = b \cdots\cdots (ii) \\ 3x + y + z = c \cdots\cdots (iii) \end{array}$

$3\times(ii) - (iii) \Rightarrow 5y + 8z = 3b - c \cdots \cdots (iv)$

$5\times(i) - (iv) \Rightarrow 2z = 5a - 3b + c \Rightarrow z = \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c$

(i) হতে, $y + 5a - 3b + c = a \Rightarrow y = -4a + 3b - c$

(iii) হতে, $3x - 4a + 3b - c + \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c = c$

$\Rightarrow \quad 3x = (4 - \frac{5}{2})a + (-3 + \frac{3}{2})b + (2 - \frac{1}{2})c \Rightarrow 3x = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c \Rightarrow x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. কাজেই, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Adjoint matrix method): কোনো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকে তার নির্ণায়ক $|A|$ এর মান দ্বারা ভাগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় অর্থাৎ কোনো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকসমূহ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের কলামকে সারিতে এবং সারিকে কলামে পরিণত করে সৃষ্ট ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়ক $|A|$ এর মান দ্বারা ভাগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সুতরাং, ম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$.

উদাহরণ –6: $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। [কু.'১৫]

সমাধান : $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $|A| = 3(1+0) + 4(-2+0) + 2(2+1) = 3-8+6 = 1$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+2 & 2+1 \\ -2+4 & 3+2 & -4+3 \\ 0-2 & 4-0 & 3-8 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & -4 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

(iii) ব্লক ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Block matrix method): $A = (a_{ij})_{n\times n}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে ব্লক ম্যাট্রিক্স $[A \mid I_n]$ কে সমতুল্য ম্যাট্রিক্স $[I_n \mid B]$ তে পরিণত করা যায়, যেখানে $B = A^{-1}$ হবে।

উদাহরণ –7: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-r_3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

সত্যতা যাচাই : ম্যাট্রিক্স গুণনের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, $A.\ A^{-1} = A^{-1}.A = I_3$

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য: (i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iv) $(BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = B.$ (v) $I = I^{-1} = I^n$

(vi) $AB = C$ হলে $A = CB^{-1}$ এবং $B = A^{-1}C.$

[**MCQ এর জন্যঃ** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$]

৭. নির্ণায়কের সাহায্যে সরল সমীকরণ জোটের সমাধান (Cramer's Rule)

মনে করি, দ্বিচলক বিশিষ্ট দুইটি সরল সমীকরণ,

$a_1x + b_1y = c_1$ …… (1) এবং $a_2x + b_2y = c_2$ ……… (ii)

(i) $\times\ b_2 \Rightarrow a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$ ………(iii)

(ii) $\times\ b_1 \Rightarrow a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2$ ………(iv)

(iii) – (iv) $\Rightarrow x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2c_1 - b_1c_2$

$$\Rightarrow x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}$$, যখন $D \neq 0$

অনুরূপভাবে, (i) $\times\ a_2$ – (ii) $\times\ a_1 \Rightarrow y(a_2b_1 - a_1b_2) = c_1a_2 - c_2a_1$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}, \text{ যখন } D \neq 0$$

একই পদ্ধতিতে ত্রিচলক বিশিষ্ট $a_1x + b_1y + c_1z = d_1, a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ এবং $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ সরল সমীকরণ তিনটি সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$ [x, y , z এর সহগগুলো নিয়ে গঠিত নির্ণয়ক D]

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [D এর ১ম কলাম (x এর সহগ) ডানদিকের ধ্রুবপদ দ্বারা পতিস্থাপন করে।]

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [D এর ২য় কলাম (y এর সহগ) ডানদিকের ধ্রুবপদ দ্বারা পতিস্থাপন করে।]

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ [D এর ৩য় কলাম (z এর সহগ) ডানদিকের ধ্রুবপদ দ্বারা পতিস্থাপন করে।]

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D}, \; y = \frac{D_y}{D} \; \text{ এবং } \; z = \frac{D_z}{D}$$

নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের এরূপ সমাধান পদ্ধতিকে ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule) বলা হয়।

D = 0 হলে, সমীকরণ জোটের কোনো সমাধান থাকবে না, অন্যথায় অসংখ্য সমাধান থাকবে যা এই সূত্রের সাহায্যে পাওয়া যায় না।

উদাহরণ –7: নির্ণায়কের সাহায্যে (ক্রেমারের নিয়মে) এবং ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর ।

$\mathbf{2x + y - 2z = 10, \; 3x + 2y + 2z = 1, \; 5x + 4y + 3z = 4}$ **[ঢা.'০৫]**

নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান : ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-8) - 1(9-10) - 2(12-10) = -4 + 1 - 4 = -7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 10(6-8) - 1(3-8) - 2(4-8) = -20 + 5 + 8 = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-8) - 10(9-10) - 2(12-5) = -10 + 10 - 14 = -14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-4) - 1(12-5) + 10(12-10) = 8 - 7 + 20 = 21$$

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2,\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{21}{-7} = -3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, y = 2, z = -3$

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট হতে পাই,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ হলে $|A| = 2(6-8) - 1(9-10) - 2(12-10) = -4 + 1 - 4 = -7$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 6-8 & 10-9 & 12-10 \\ -8-3 & 6+10 & 5-8 \\ 2+4 & -6-4 & 4-3 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -10 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -20-11+24 \\ 10+16-40 \\ 20-3+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, y = 2, z = -3$

উদাহরণ -8: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & z & 2 \end{bmatrix}$

ক. $A + I = C$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

খ. $|2A^2|$ নির্ণয় কর।

গ. $AB = I$ হলে B নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. $A + I = C$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & z & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & z & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ (x, y, z) = (4, -1, 3)$ (Ans.)

খ. $2A^2 = 2A.A = 2\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 9+2+1 & 6+2-3 & -3+4-1 \\ 3+1-2 & 2+1+6 & -1+2+2 \\ -3+3-1 & -2+3+3 & 1+6+1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times12 & 2\times5 & 2\times0 \\ 2\times2 & 2\times9 & 2\times3 \\ 2\times(-1) & 2\times4 & 2\times8 \end{bmatrix}$

$\therefore \ |2A^2| = \begin{vmatrix} 2\times12 & 2\times5 & 2\times0 \\ 2\times2 & 2\times9 & 2\times3 \\ 2\times(-1) & 2\times4 & 2\times8 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 8\{12(72-12) - 5(16+3)\}$

$= 8(720 - 95) = 5000$ (Ans.)

গ. দেওয়া আছে, $AB = I$

$\therefore \ B = A^{-1}$

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-6) - 2(1+2) - 1(3+1) = -15 - 6 - 4 = -25$

$\therefore \ Adj(A) = \begin{bmatrix} 1-6 & -(1+2) & 3+1 \\ -(2+3) & 3-1 & -(9+2) \\ 4+1 & -(6+1) & 3-2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -5 & 2 & -11 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \\ 4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \ B = A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{-25}\begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \\ 4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

প্রশ্নমালা I B

1 প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$ [ঢা.'১২; রা.'১১; কু.'১৫; চ.'১৫; মা.'১৩,'১৫; বুয়েট'০৭-০৮]

(b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$ [ঢা.'০১;সি.'০৩]

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ [চুয়েট'০৫-০৬]

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$ [ব.'০১]

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ [চ.'০৫; ব. '১০]

(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ [চ.'১০]

(g) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

2. বিস্তার না করে প্রমাণ কর :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$ [রা.'১৫; ঢা.'০৯; য.'১৩; কুয়েট'০৯-১০]

(b) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ [চ.'১১]

(d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ [য.'১৫]

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ [য.'০৭; দি.'০৯,'১১; মা.'১৪; য.'১৫]

(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+x_3$ [সি.'০৮; মা.বো.'০৯;ব.'১২]

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$ [সি.'০৮; মা.'০৯,'১১,'১৫; ব.'১২]

(d) $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ [ঢা.'০১; বুয়েট'১০-১১]

(e) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$ [রা .'০৫]

(f) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [য.'০০]

(g) $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৫]

(h) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ [রা.'০৪; বুয়েট'১১-১২]

4. প্রমাণ কর যে, (a) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$ [ব.'১৩; কুয়েট'০৭-০৮; বুয়েট'০৯-১০; বুয়েট'১১-১২]

(b) $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ [ব.'০৩]

5. প্রমাণ কর যে, (a) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [চ.'০৪; সি.'০৬,'০৯; রা.'০৮]

(b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [কু.'০৪,'১২]

(c) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$ [য.'০৪, '০৮; রা.'১৩,'১৫]

(d) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$ [সি.'১০,'১৩;দি.'১৪; কুয়েট'১১-১২]

(e) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

[য.'১০, '১২,'১৪, ঢা.'১০,'১৫; দি., রা.,সি.'১২; চ.'১৩,'১৫.; ব. '১৪]

(f) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [চ.'০৬]

6. (a) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$ [ব.'১১]

(b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$. [য.'০১; কু.'০৮,'০৯]

8. মান নির্ণয় কর :

(a) $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [কু.'১১; চ.'১৪] উ: $4xyz$. (b) $\begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix}$ উ: $8abc$

9. সমাধান কর : (a) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$

[ঢা.'০৫,কু.,চ.'০৭] [কুয়েট'০৪-০৫]

উ: (a) $x = -9, \pm\sqrt{3}$ (b) $x = 2, 3, 6$ (c) $x = a$, b

10. যদি x, y, z অসমান এবং $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে $xyz + 1 = 0$.

11 (a) $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর। উ: $-6, 7$

(b) $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর। উ: $-1, 6$

12. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ [ব.'১৫]

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ [সি.'১৫]

উ: (a) $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$

(d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

13. নির্ণায়কের সাহায্যে ও ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর :

(a) $2x + 3y = 4$ উ: $x = 5, y = -2$
$x - y = 7$

(b) $x + y + z = 1$ উ: $x = 1, y = 1, z = -1$
$x + 2y + z = 2$

$$x + y + 2z = 0$$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ উ: $x = 2, y = 2, z = 1$

(সম্ভাব্য ধাপ (Step) সহ কিছু সমস্যা)

14. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix} = 0$ [প্র.ভ.প.'১৪] (২)

15. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = x^2(x + a + b + c)$ (8)

16. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$ (8)

17. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix} = (bc + ca + ab)^3$ (8)

(b) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$ (৫)

(ex-2) (c) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = abc\,(a + b + c)^3$ (৫)

(d) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b + c)(c + a)(a + b)$ (8)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

18. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর। উ: -1

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & -y & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

(c) $3\begin{bmatrix} s & v & w \\ x-y & x & v \\ w & u & s \end{bmatrix}$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। উ: $(x, y) = (0, -\frac{1}{3})$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x & -7 \end{bmatrix}$; $C = A + B$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (7, 7)$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & y \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

উ: $(x, y) = (2, -8)$

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ y & 3 & x \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। উ: $(4, -1)$

(g) $A = \begin{bmatrix} -5 & y & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। উ: $(2, -8)$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর। উ: $(x, y, z) = (-2, -9, 9)$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 7 & -3 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

উ: $a = -2, 10/3$

20. (a) সমাধান পদ্ধতিতে $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} নির্ণয় কর।

উ: $\begin{bmatrix} 5/11 & 1/11 & 3/11 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -3/22 & 3/11 & -2/11 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর। উ: $(x, y, z) = (\frac{28}{39}, \frac{83}{117}, -\frac{71}{117})$

21. (a) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ এবং $AB = BA = I$ হলে B নির্ণয় কর। উ: $B=\begin{bmatrix}13/27 & 2/27 & 5/27\\ -14/27 & 2/27 & 5/27\\ -8/27 & 5/27 & -1/27\end{bmatrix}$

(b) $\frac{x}{11}-\frac{2y}{11}+\frac{3z}{11}=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+\frac{z}{5}=\frac{x}{3}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1$ সমীকরণ জোটটি ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে সমাধান কর।

উ: $x=2, y=0, z=3$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}10 & 9 & 10\\ 0 & 33 & 0\\ 0 & 22 & 0\end{bmatrix}$ হলে B নির্ণয় কর। উ: $B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 1 & 6\\ 5 & 10 & 5\end{bmatrix}$

22. (a) $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3+3x^2-x$ হলে $f(A)=I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

(b) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3-4x^2-I$ হলে $f(A)=0$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

উ: (a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}25 & -4 & -6\\ 27 & 11 & 3\\ 24 & 12 & 3\end{bmatrix}$ (b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -7 & 6\\ 8 & 100 & -18\\ 2 & -25 & 23\end{bmatrix}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র/কৌশল:

1. AB ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা = A এর সারির সংখ্যা× B এর কলাম সংখ্যা।

2. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স = $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

3. কর্ণ ম্যাট্রিক্স একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

4. কর্ণ ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}1/a & 0\\ 0 & 1/b\end{bmatrix}$.

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে $A^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$

6. $A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$ হলে $A^n=\begin{bmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. A একটি $n\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে,
$Adj(AdjA)=|A|^{n-2}A$,
$|Adj(AdjA)|=A^{(n-1)^2}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি - [শি.ফ.- ১]

i. কর্ণ ম্যাট্রিক্স, ii. স্কেলার ম্যাট্রিক্স,
iii. অভেদক ম্যাট্রিক্স

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সত্য?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

2. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? [শি.ফ.-১]

ক. $\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix}b & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix}b & 0\\ -b & 0\end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix}0 & -b\\ 0 & b\end{bmatrix}$

21. (a) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ এবং $AB = BA = I$ হলে B নির্ণয় কর। উ: $B=\begin{bmatrix}13/27 & 2/27 & 5/27\\ -14/27 & 2/27 & 5/27\\ -8/27 & 5/27 & -1/27\end{bmatrix}$

(b) $\frac{x}{11}-\frac{2y}{11}+\frac{3z}{11}=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+\frac{z}{5}=\frac{x}{3}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1$ সমীকরণ জোটটি ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে সমাধান কর।

উ: $x=2, y=0, z=3$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}10 & 9 & 10\\ 0 & 33 & 0\\ 0 & 22 & 0\end{bmatrix}$ হলে B নির্ণয় কর। উ: $B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 1 & 6\\ 5 & 10 & 5\end{bmatrix}$

22. (a) $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3+3x^2-x$ হলে $f(A)=I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

(b) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3-4x^2-I$ হলে $f(A)=0$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

উ: (a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}25 & -4 & -6\\ 27 & 11 & 3\\ 24 & 12 & 3\end{bmatrix}$ (b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -7 & 6\\ 8 & 100 & -18\\ 2 & -25 & 23\end{bmatrix}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র/কৌশল:

1. AB ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা = A এর সারির সংখ্যা × B এর কলাম সংখ্যা।

2. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স = $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

3. কর্ণ ম্যাট্রিক্স একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

4. কর্ণ ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}1/a & 0\\ 0 & 1/b\end{bmatrix}$.

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে $A^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}, n\in\mathbb{N}$

6. $A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$ হলে $A^n=\begin{bmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{bmatrix}, n\in\mathbb{N}$.

7. A একটি $n\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে,
$Adj(AdjA)=|A|^{n-2}A$,
$|Adj(AdjA)|=A^{(n-1)^2}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি - [শি.ফ.- ১]

i. কর্ণ ম্যাট্রিক্স, ii. স্কেলার ম্যাট্রিক্স,
iii. অভেদক ম্যাট্রিক্স

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সত্য?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

2. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? [শি.ফ.-১]

ক. $\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix}b & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix}b & 0\\ -b & 0\end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix}0 & -b\\ 0 & b\end{bmatrix}$

3. a এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & a \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? [শি.ফ.-১]

ক. 4 খ. 0 গ. −1 ঘ. − 4

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 4 ও 5 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. p এর কোন মানের জন্য $|A| = B$ হবে? [শি.ফ.-১]

ক. − 5 খ. − 1 গ. 1 ঘ. 5

5. A ম্যাট্রিক্সকে বিপ্রতিসম (Skew symmetric) করতে যা করা প্রয়োজন- [শি.ফ.-১]

i. 2 এর পরিবর্তে −2 ii. মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য

iii. 3 এর পরিবর্তে −2

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. i, ii ঘ. ii, iii

6. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ একটি- [শি.ফ.-১]

ক. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স খ. প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

গ. কর্ণ ম্যাট্রিক্স ঘ. স্কেলার ম্যাট্রিক্স

7. $A = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$; b> 1 হলে A একটি - [শি.ফ.-১]

i. বর্গ ম্যাট্রিক্স ii. একক ম্যাট্রিক্স iii. স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

8. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ একটি - [শি.ফ.-১]

i. অভেদ ম্যাট্রিক্স ii. কর্ণ ম্যাট্রিক্স

iii. প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. iii

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি- [শি.ফ.-১]

i. স্কেলার ম্যাট্রিক্স ii. কর্ণ ম্যাট্রিক্স

iii. অভেদক ম্যাট্রিক্স

কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$ হলে [শি.ফ.- ২]

$(x, y, z) = ?$

ক. (3, 3, 4) খ. (3, 4, 3)

গ. (3, −3, 4) ঘ. (1, −3,−1)

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ এবং

$AX = B$ হলে $(x, y) = ?$ [শি.ফ.-২]

ক. (0, 0) খ. (1, 2) গ. (2, 1) ঘ. (1, 1)

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 = ?$ [শি.ফ.-২]

ক. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 13 ও 14 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$\left.\begin{matrix} 2x - 5y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{matrix}\right\} \text{ এবং } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. সমীকরণ জোটের সহগ ম্যাট্রিক্স কোনটি?

ক. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

14. $AB = ?$ [শি.ফ.-২]

ক. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 15-16 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. AB এর ক্রম নিচের কোনটি? [শি.ফ.- ২]

ক. 2×2 খ. 2×3 গ. 3×2 ঘ. 3×3

16. **i.** A ম্যাট্রিক্সটির ভুক্তির সংখ্যা 4,
ii. B ম্যাট্রিক্সটির ক্রম 3×2, iii. $|A| = 2$.
নিচের কোনটি সত্য? [শি.ফ.- ১,8)]
ক. i খ. iii গ. i, iii ঘ. i, ii , iii

17. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ এর মান হবে– [শি.ফ.- 8]
ক. -96 খ. -22 গ. 0 ঘ. 40

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 18 – 19 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{vmatrix} 0 & p & 0 \\ 8 & 5 & 4 \\ 3 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

18. p এর কোন মানের জন্য $|A| = B$ হবে? [শি.ফ.-8]
ক. 2 খ. -2 গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. $-\frac{1}{2}$

19. A ম্যাট্রিক্সকে বিপ্রতিসম (Skew symmetric) করতে যা করা প্রয়োজন- [শি.ফ.-১]
i. 9 এর পরিবর্তে -9 ii. মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য
iii. 5 এর পরিবর্তে 3
কোনটি সঠিক?
ক. i খ. ii গ.i, ii ঘ. ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 20-21 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

20. A – 2B নিচের কোনটি? [শি.ফ.- ২]
ক. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
গ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. A ও B ম্যাট্রিক্স এর ক্ষেত্রে-
i. $|A| = -6$, **ii.** B একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স ,
iii. $2|A| = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ [শি.ফ.- ১, ২, 8]
নিচের কোনটি সত্য?
ক. i খ. iii গ. i , iii ঘ. i, ii , iii

22. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ এবং
$C = \begin{bmatrix} a-4 & 0 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ হলে,
i. $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ii. $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$
iii. C ব্যতিক্রমীর ক্ষেত্রে $a = -4, 2$
নিচের কোনটি সঠিক ? [শি.ফ.-২, ৭, ৮]
ক. i খ. ii গ. i, ii ঘ. i , ii, iii

23. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ নির্ণয়কটিতে– [শি.ফ.-8,৫]
i. a এর সহগুণক d ii. b এর অনুরাশি c
iii. নির্ণায়কের মান $ad - bc$
কোনটি সঠিক?
ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 24 – 25 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

24. 4AB = কত? [শি.ফ.-২]
ক. $[4]$ খ. $[12]$ গ. $[-12]$ ঘ. অনির্ণেয়

25. উদ্দীকের ক্ষেত্রে - i. $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ii. $|C| = -4$
iii. C এর Adjoint matrix $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
কোনটি সঠিক? [শি.ফ.-৮]
ক. i খ. iii গ. i, iii ঘ. i, ii, iii

26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 6 & 7 & -5 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক কত? [শি.ফ.-৫]
ক. -19 খ. 19 গ. -38 ঘ. 38

27. $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে det(A) এর মান কত?

[শি.ফ.-৪]

ক. −1 খ. 1 গ. 5 ঘ. − 5

28. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের - i. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক −2 ii. (2, 2) তম ভুক্তির অনুরাশি 3 iii. মান −6 [শি.ফ.-৪,৫]

কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে,

(AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম কত? [শি.ফ.-২]

ক. 2×3 খ. 2×1 গ. 3×2 ঘ. 3×1

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে,

$A^T - B^T =$ কত? [শি.ফ.-৮]

ক. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিতে- [শি.ফ.-৫]

i. 1 এর সহগুণক 4

ii. 2 এর অনুরাশি 3 iii. এর মান 2

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

32. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1} নিচের কোনটি? [শি.ফ.- ৮]

ক. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ খ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

গ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ঘ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 33 ও 34 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

33. $|4(C + I_2)| =$ কত? [শি.ফ. ১, ২]

ক. −32 খ. −8 গ. 8 ঘ. 32

34. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে- i. $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ii. $|C| = -3$ iii. C একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. i, ii ঘ. i, ii, iii

35. $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ এর Adjoint matrix কোনটি?

[শি.ফ.-৮]

ক. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -5 \\ 7 & 6 & -8 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক কত? [শি.ফ.-৫]

ক. −19 খ. 19 গ. − 95 ঘ. 95

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি- i. স্কেলার ম্যাট্রিক্স

ii. কর্ণ ম্যাট্রিক্স iii. সমঘাতি ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক? [শি.ফ.-১]

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

38. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে det(A) এর মান কত?

[শি.ফ.-৪]

ক. −1 খ. 1 গ. 5 ঘ. − 5

39. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = ?$ [শি.ফ.-৪]

ক. − 8 খ. 0 গ. 8 ঘ. 12

40. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কত?

ক. -63 খ. -1 গ. 1 ঘ. 63

41. a এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & a \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? [শি.ফ.-১]

ক. 4 খ. 0 গ. -1 ঘ. -4

42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ হলে $AB = ?$ [শি.ফ.-২]

ক. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$

43. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কোনটি? [শি.ফ.-২]

ক. 1×1 খ. 3×3 গ. 3×1 ঘ. 1×3

44. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ নির্ণয়কের - [শি.ফ.-৪]

i. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক -2

ii. (2,2) তম ভুক্তির অনুরাশি 1 iii. মান 5

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 45 ও 46 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & x \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$$

45. x এর কোন মানের জন্য A ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে? [শি.ফ.-৭]

ক. 35 খ. -35 গ. 70 ঘ. -70

46. $B^{-1} = ?$ [শি.ফ.-৮]

ক. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$ খ. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

গ. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ঘ. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 47 ও 48 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও: [শি.ফ.-৫]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

47. (AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম কত? [শি.ফ.-২]

ক. 2×3 খ. 2×1 গ. 2×1 ঘ. অনির্ণেয়

48. A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? [শি.ফ.-৮]

ক. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ খ. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

গ. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ঘ. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি? [শি.ফ.-৫]

ক. -2 খ. -1 গ. 1 ঘ. 2

50. কোনটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ? [শি.ফ.-৭]

ক. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 51 ও 52 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

51. AB = কত? [শি.ফ.-২]

ক. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

52. $A^T - B^T =$ কত? [শি.ফ.-৮]

ক. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

53. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এবং $AX = B$ হলে $(x, y) = ?$

ক. (0, 0) খ. (1,2) গ. (2, 1) ঘ. (1, 1)

54. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 = ?$ [শি.ফ.-২]

ক. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

55. $\begin{bmatrix} 2 & x+y \\ x-y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) কত? [শি.ফ.-২]

ক. (3,1) খ. (2,0) গ. (1, 3) ঘ. (0, 2)

56. m এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} m-2 & 6 \\ 2 & m-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে? [শি.ফ.-৭]

ক. 1, 6 খ. −1, 6 গ. 1, −6 ঘ. − 1, −6

57. কোনটি নির্ণায়ক ? [শি.ফ.-৩]

ক. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ খ. $\begin{vmatrix} a_2 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

গ. $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}$ ঘ. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 58 ও 59 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

58. A এর ক্ষেত্রে- i. (1, 1) তম অনুরাশি 4

ii. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ iii. $2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক? [শি.ফ.-২, ৫, ৮]

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

59. $A^{-1} =$ কত? [শি.ফ.-৮]

ক. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ খ. $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

60. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, [শি.ফ.-২]

i. $AB = BA$ ii. $B^T = I_3$ iii. $AB = A$

নিচের কোনটি সঠিক? [শি.ফ.-২,৮]

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

61. $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ x+1 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $A = B$ হলে x এর মান কত? [শি.ফ.-২]

ক. 6 খ. 7 গ. 8 ঘ. 9

62. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ একটি– [শি.ফ.-১,৩]

i. আয়তাকার ম্যাট্রিক্স ii. নির্ণায়ক আকারে প্রকাশ যোগ্য ম্যাট্রিক্স iii. 3×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. iii গ. i, iii ঘ. i, ii, iii

63. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ হলে A^T এর ক্রম কত? [শি.ফ.-৮]

ক. 2×3 খ. 3×3 গ. 3×2 ঘ. 2×2

64. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে কোনটি নির্ণয়যোগ্য? [শি.ফ.-২]

ক. AB খ. B + A গ. A − C ঘ. CB

65. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1} হবে - [শি.ফ.-৮]

ক. $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ খ. $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

গ. $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ঘ. $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

66. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ এর − i. মান = 0 ii. (1, 2) তম অনুরাশি = −6 iii. (1, 2) তম সহগুণক = −6

নিচের কোনটি সঠিক? [শি.ফ.-৫]

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

67. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ হলে AB এর ক্রম কোনটি? [শি.ফ.-২]

ক. 2×1 খ. 1×2 গ. 3×1 (d) 2×3

68. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি? [শি.ফ.-৫]

ক. $a_2c_3 - a_3c_2$ খ. $a_3c_2 - a_2c_3$

গ. $b_1c_3 - b_3c_1$ ঘ. $b_3c_1 - b_1c_3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 69 ও 70 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

69. $|A|$ এ -6 এর অনুরাশির মান কত? [শি.ফ.-৫]

ক. 3 খ. 0 গ. -1 ঘ. -5

70. $|A|$ এর মান কত? [শি.ফ.-৪]

ক. 1 খ. -1 গ. 2 ঘ. -2

71. $A=\begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে যা নির্ণয়যোগ্য– [শি.ফ.-২]

i. AB ii. BA iii. A^TB^T

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. iii

72. $\left.\begin{matrix} 2x-3y=2 \\ 2y-x=-1 \end{matrix}\right\}$ সমীকরণ জোটের ম্যাট্রিক্স আকার কোনটি? [শি.ফ.-১]

ক. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

খ. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

73. নিচের কোন ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্সের যোগ্যতা আছে? [শি.ফ.-৮]

ক. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

74. $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, A B=? [DU 14-15]

ক. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} m-2 & 6 \\ 2 & m-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে যদি m এর মান - [DU 12-12]

ক. 6,–1 খ. – 4,6 গ. – 6,4 ঘ. 1,–6

76. $A=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1}? [DU 08-09]

ক. $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

77. যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ হয় তবে, XA^2 হবে- **[BUET 11-12]**

ক. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ ঘ. কোনটিই নয়

78. A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = -7$ হলে $|(2A)^{-1}|$ এর মান হবে - **[BUET 12-13]**

ক. $\frac{1}{14}$ খ. $-\frac{1}{56}$ গ. $-\frac{8}{7}$ ঘ. $-\frac{2}{7}$

79. A একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং I একটি একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে AI^3 এর মান কোনটি? [BAU 14-15]

ক. 3A খ. A গ. 3AI ঘ. $-A$

বিভিন্ন বোর্ডের প্রশ্ন (প্রযোজ্য ক্ষেত্রে সংশোধনসহ)

80. A ও B বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এর ক্ষেত্রে

i. A অব্যতিক্রমী হলে এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকবে

ii. A ও B অব্যতিক্রমী হলে, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

iii. $|A|$ এর অনুরূপ সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে এর মানের পরিবর্তন হয়।

নিচের কোনটি সঠিক? [দি.বো. ২০১৭]

(ক) i ,ii (খ) i , iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii , iii

81. $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? [দি.বো.'১৭]

ক. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2&4\\1&-3\end{bmatrix}$ খ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix}$

গ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-4\\-1&2\end{bmatrix}$ ঘ. $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix}$

82. $\begin{vmatrix}p&2&q+r\\q&2&r+p\\r&2&p+q\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত? [দি.বো.'১৭]

ক. 0 খ. 1 গ. pqr ঘ. p+q+r

83. A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×4 এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 4×3 হলে, AB এর ক্রম কোনটি? [ঢা.বো. '১৭]

ক. 8×12 খ. 2×3 গ. 3×2 ঘ. 4×4

84. $\begin{bmatrix}5&0&1\\-3&2&3\\6&7&-1\end{bmatrix}$ এর নির্ণায়কে (2, 1) তম ভূক্তির সহগুণক কত? [ঢা.বো. '১৭]

ক. -15 খ. -7 গ. 7 ঘ. 15

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 85 এবং 86 নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ-

$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

[ঢা.বো. '১৭]

85. A একটি-

i. প্রতিসম ম্যাট্রিক্স *ii.* স্কেলার ম্যাট্রিক্স

iii. কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ,ii খ. i , iii গ. ii, iii ঘ. i, ii , iii

86. নিচের কোনটি A^{-1}? [ঢা.বো. ২০১৭]

ক. $\dfrac{1}{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}}$ খ. $\frac{1}{60}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

গ. $60\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ ঘ. $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

87. A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3 এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 4×2 হলে BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম কত? [সি. বো.'১৭]

ক. 2×4 খ. 3×4 গ. 4×3 ঘ. 3×2

88. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ একটি [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

i. বর্গ ম্যাট্রিক্স *ii.* স্কেলার ম্যাট্রিক্স *iii.* কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ,ii খ. i , iii গ. ii, iii ঘ. i, ii , iii

89. $A=\begin{bmatrix}8&-5\\-6&4\end{bmatrix}$ হলে $A^{-1}=$ কত? [চ.বো' ১৭]

ক. $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&5\\6&8\end{bmatrix}$ খ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8&5\\6&4\end{bmatrix}$

গ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 5\\6 & 8\end{bmatrix}$ ঘ. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -6\\-5 & 8\end{bmatrix}$

90. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -2\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ এর (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি? [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

ক. -4 খ. -2 গ. 2 ঘ. 4

91. a-এর মান কত হলে $\begin{bmatrix}-4 & -3 & -2\\b & 5 & a\\-2 & 4 & -4\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে $(a, b) = ?$ [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

ক. $(-3, 4)$ খ. $(3, -4)$
গ. $(4, -3)$ ঘ. $(-4, 3)$

92. $\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ একটি- [য .বো.'১৭]

i. বর্গ *Matrix* *ii.* কর্ণ *Matrix*
iii. স্কেলার *Matrix*
নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i ,iii গ. ii, iii ঘ. i, ii, iii

93. $\begin{vmatrix}3 & -1\\-2 & -1\end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? [য .বো.'১৭]

ক. -5 খ. -1 গ. 1 ঘ. 5

94. $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ এবং $AX = B$ হলে $(x, y) =$ কত? [রা.বো.'১৭]

ক. (2, 0) খ (6, −7) গ. (3, −5) ঘ. (4, -3)

95. p এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & p\\3 & 4 & 0\end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে? [রা.বো.'১৭]

ক. $-\frac{3}{5}$ খ. $\frac{3}{5}$ গ. -3 ঘ 3

96. $A = \begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\4 & 0 & 2\\1 & 6 & 4\end{vmatrix}$ হলে $A - 2I^{-1} = ?$ [রা.বো.'১৭]

ক. $\begin{vmatrix}5 & 5 & 1\\4 & 2 & 2\\1 & 6 & 6\end{vmatrix}$ খ. $\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\4 & -2 & 2\\1 & 6 & 2\end{vmatrix}$

গ. $\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\4 & 2 & 2\\-1 & 6 & 4\end{vmatrix}$ ঘ. $\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\2 & -2 & 0\\-1 & 4 & 2\end{vmatrix}$

97. A ও B ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের ক্রম যথাক্রমে 4×5 এবং 5×4 হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম- [রা.বো.'১৭]

ক. 4×5 খ. 5×4 গ. 4×4 ঘ. 5×5

98. $A = \begin{bmatrix}a & 0\\0 & a\end{bmatrix}$ একটি- [কু.বো.'১৭]

i বর্গ ম্যাট্রিক্স *ii.* অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
iii. স্কেলার ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?

ক. *i, ii* খ. *i ,iii* গ. *ii, iii* ঘ. *i, ii, iii*

99. $A = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\\alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2\\-\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3\end{vmatrix}$ এর মান [কু.বো.'১৭]

i. $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3\\\beta_1 & -\beta_2 & \beta_3\\\gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3\end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix}\alpha_1 + c\beta_1 & \beta_1 & \gamma_1\\\alpha_2 - c\beta_2 & -\beta_2 & \gamma_2\\-\alpha_3 + c\beta_3 & \beta_2 & -\gamma_3\end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_3\\-\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3\\\alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক *i* খ. *i ,ii.* গ. *ii. iii.* ঘ. *i ,ii. iii.*

100. $A = \begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix}; \forall s \in \mathbb{R}$ এবং $s \neq 0$ হলে A^{-1} কোনটি? [কু.বো.'১৭]

ক. $\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\0 & s\end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$

গ. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}$

101. নিচের কোনটি নির্ণায়কের মান শূন্য? [ব.বো.'১৭]

ক. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ খ. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

গ. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ ঘ. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

102. যদি I_3 একটি তিন ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে $(I_3)^{-1} = ?$ [ব.বো.'১৭]

ক. 0 খ. I_3 গ. $\frac{1}{3}I_3$ ঘ. $3I_3$

103. A ও B দুইটি 3 × 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে $|A-B| = 0$ এর সমার্থক-

ক. $A = 0$ বা $B = 0$

খ. $|A| = 0$ বা $|B| = 0$

গ. $|A| = 0$ এবং $|B| = 0$

ঘ. $A = 0$ এবং $B = 0$

104. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ হলে [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

i. $|A|$ এর মান -7

ii. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক 5

iii. (2, 1) তম ভুক্তির অণুরাশি 3

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i , ii (b) i, iii (c) ii, iii (d)i, ii, iii

1(ঘ) 2(ক) 3(ক) 4(ঘ) 5(খ) 6(খ)
7(খ) 8(গ) 9(ঘ) 10(খ) 11(খ) 12(গ)
13(ঘ) 14(গ) 15(খ) 16(গ) 17(গ) 18(ক)
19(খ) 20(ঘ) 21(ক) 22(গ) 23(ঘ) 24(খ)
25(ঘ) 26(ক) 27(গ) 28(গ) 29(খ) 30(ঘ)
31(ক) 32(ক) 33(ক) 34(গ) 35(ঘ) 36(ক)
37(ঘ) 38(গ) 39(খ) 40(ঘ) 41(ক) 42(খ)
43(খ) 44(গ) 45(ক) 46(গ) 47(খ) 48(ক)
49(ক) 50(খ) 51(গ) 52(ঘ) 53(ঘ) 54(গ)
55(ক) 56(খ) 57(ঘ) 58(ক) 59(গ) 60(ঘ)
61(ক) 62(ক) 63(গ) 64(ক) 65(ক) 66(খ)
67(গ) 68(খ) 69(খ) 70(খ) 71(গ) 72(ক)
73(ঘ) 74(ঘ) 75(ক) 76(গ) 77(ঘ) 78(খ)
79(খ) 73(ঘ) 80(ক) 81(খ) 82(ক) 83(খ)
84(গ) 85(খ) 86(ঘ) 87(গ) 88(খ) 89(গ)
90(গ) 91(গ) 92(ঘ) 93(ক) 94(ক) 95(ঘ)
96(খ) 97(গ) 98(ঘ) 99(খ) 100(খ)
101(গ) 102(খ) 103(খ) 104(খ)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ক. AB নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

গ. A^{-1} নির্ণয় কর।

2. $C = \begin{bmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{bmatrix}$

ক. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর।

খ. C ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।

গ. $x = 1$ এবং $DC = \begin{bmatrix} -7 & -5 & 1 \\ 15 & 15 & 14 \end{bmatrix}$ হলে D নির্ণয় কর।

3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{bmatrix}$.

ক. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 + A$ নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $|A^{-1}| = p(p-1)^2(p^2-1)$

গ. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

$A^{-1} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$, যখন $p = 2$.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

ক. $|A^T|$ নির্ণয় কর।

খ. $f(A)$ নির্ণয় কর।

গ. A^{-1} নির্ণয় কর।

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ক. A বিপরীত যোগ্য কিনা তা দেখাও।

খ. $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & y \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$ হলে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

গ. $A + B$ এর এ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ক. A সমঘাতি কিনা যাচাই কর।

খ. $AB + 4C - I$ নির্ণয় কর।

গ. $(C^T)^{-1}$ নির্ণয় কর।

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} a+5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

খ. $|(2AB)^{-1}|$ নির্ণয় কর।

গ. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর:

$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [5 \quad 7 \quad 11]^T$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$

ক. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী কিনা প্রমাণ কর।

খ. $AB = BA = I$ হলে B নির্ণয় কর।

গ. $f(A) = I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

ক. $(A + B)^T$ নির্ণয় কর।

খ. $|3(B^2 + I)|$ নির্ণয় কর।

গ. $(AB)^{-1}$ নির্ণয় কর।

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং

$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ক. $BC = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

খ. $B^2 + 3C + I$ নির্ণয় কর।

গ. $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর।

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ক. $A^{-1}B$ নির্ণয় যোগ্য কিনা যাচাই কর।

খ. A নির্ণয় কর।

গ. $A^{-1}X = B$ হলে ক্রেমারেরর নিয়মানুসারে x, y, z নির্ণয় কর।

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

খ. প্রমাণ কর যে, $D = (1 - a + a^2)^2 (a+1)^2$

[রুয়েট'১২-১৩]

গ. A^3 নির্ণয় কর এবং তা থেকে A^{-1} কত হবে তা সিদ্ধান্ত নাও।

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ক. A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী কিনা যাচাই কর।

খ. $A^2 + 4B - I$ নির্ণয় কর।

গ. B^{-1} নির্ণয় কর।

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

খ. প্রমাণ কর যে, $D = 2(a+b+c)^3$

গ. A নির্ণয় কর।

15. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

ক. $|A|$ এর (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় কর।

খ. $A^2 - 5A + 4I$ নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $D = (c-a)(a^2 + b^2 + c^2)$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ক. B ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, P এর মান নির্ণয় কর।

খ. A^{-1} নির্ণয় কর।

গ. $AX = C$ হলে ক্রেমার এর নিয়মানুসারে y এর মান নির্ণয় কর।

17. $D = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = I$ হলে, B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদ ম্যাটিক্স।

খ. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিসমূহ নির্ণয় কর। [বুয়েট' ০৯-১০]

গ. প্রমাণ কর যে, $D = (a+1)(b+1)(c+1)\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1\right)$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

ক. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} = 0$

খ. প্রমাণ কর যে, $D = (a^3 - 1)^2$

গ. এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর যেন, $AB = BA = I$ হয়।

19. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [দি.২০১৭]

ক. $\begin{bmatrix} 2 & -x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

খ. $M^2 - 3M + MI$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স।

গ. M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ [ঢা.বো. '১৭]

ক. $A \times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর। ২

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. $A \times B = C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর।

21. দৃশ্যকল্প-১: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$ [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

দৃশ্যকল্প-২ :

$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = \frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর :

$\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0$ ২

খ. $A = B + C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। ৪

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = A', f(x) = x^2 - 4x.$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

ক. $g(x) = \frac{1}{2x-3}$ ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর।২

খ. $f(B)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। ৪

23. $x + y + z = 1 ....(i)$ [য .বো.'১৭]

$lx + my + nx = k........(ii)$

$l^2x + m^2y + n^2z = k^2.......(iii).$

ক. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

খ. সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে,

$\det(A) = (l-m)(m-n)(n-l).$ ৪

গ. x, y, z এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1, m = 2, n = -1$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ [কু.বো.'১৭]

ক. x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর।

খ. $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর।

গ. D^{-1} নির্ণয় কর।

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ [ব.বো.'১৭]

ক. p এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে?

খ. উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

গ. উদ্দীপকের আলোকে, $AX = B$ হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে x, y নির্ণয় কর।