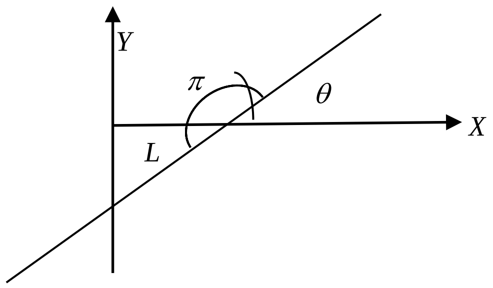
সরল রেখা

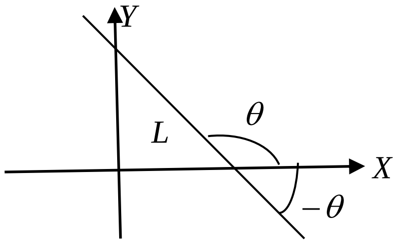
<u>সরল রেখা</u> ঃ একটি বিন্দু সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ দিক পরিবর্তন না করলে সে সঞ্চারপথকে সরল রেখা বলে। দুটি চলক x ও y এর একঘাত সমীকরণ দ্বারা সরলরেখাকে প্রকাশ করা যায়। যেমনঃ $ax + by + c = 0$

Part-01ঃ

TYPE-01

সরলরেখার ঢাল (m or tanθ) : x অক্ষের ধনাত্নক দিকের সাথে সরলরেখার যে কোন তৈরি করে তার ত্রিকোনমিতিক ট্যানজেন্টকে উক্ত রেখার ঢাল বলে। [বি.দ্র. রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল নয়] । একে m দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $m = \tan\theta$





চিত্র 1 হতে আমরা পাই, L রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে দুটো কোন উৎপন্ন করে একটি θ এবং অপরটি $\theta + \pi$ এই দুটি কোণকে বলে সরলরেখা L এর আনতি। কিন্তু সরলরেখার ঢাল অপরিবর্তিত থাকে কারণ $\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

$\therefore \overrightarrow{AB}$ রেখার ঢাল = $\overrightarrow{BA}$ রেখার ঢাল।

আমরা বলতে পারিঃ

(i) x অক্ষের বা অক্ষের সমান্তরাল রেখার, ঢাল = 0 যেহেতু $\tan 0^0 = 0$

(ii) y অক্ষ বা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার ঢাল = অসংঙ্গায়িত। কিন্তু এর আনতি x অক্ষের সাথে 90^0। [$\tan 90^0$ অসংঙ্গায়িত]

সুতরাং y অক্ষের সমান্তরাল রেখার ঢাল আলাদাভাবে নির্ণয় করা হয়।

যেমনঃ $\sin\theta = 1 = \sin 90^0 \Longrightarrow \theta = 90^0$

(iii) সরল রেখার ঢাল $0^0<\theta<90^0$ ব্যাবধিতে (+)ve হবে অর্থাৎ θ সূক্ষ্ম কোন হলে m (+)ve [Fig-1] এবং স্থুলকোণ হলে সরল রেখাটির ঢাল (-)ve হবে। [Fig-2]

Q. x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সরলরেখার নিমোক্ত কোন উৎপন্ন করে। এদের ঢাল নির্ণয় কর। $30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 180^0$ $0 < \theta < 90^\circ,\ 90^\circ < \theta < 180^\circ,\ 180^\circ < \theta < 270^\circ,\ 270^\circ < \theta < 360^\circ \rightarrow$ ব্যাবধির জন্য $\tan\theta$ দিয়ে সমাধান করবে ।

সমাধান ঃ $m = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m = \tan 45^0 = 1$, $m = \tan 60^0 = \sqrt{3}$, $m = \tan 90^0$ = অসংঙ্গায়িত [$\sin\theta = \pm 1$] ধরলে y- অক্ষের বা, x- অক্ষের সমান্তরাল রেখার x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যেকোণে আনত তা পাওয়া যাবে। $\cos\theta = \pm 1$ ধরলে x- অক্ষের বা, x- অক্ষের সমান্তরাল রেখায় আনত পাবে।

বিঃ দ্রঃ একটি রেখার ঢাল দিকে নির্দেশিত রেখার ঢাল নয়।

TYPE-02

একটি সরলরেখার উপর দুটি বিন্দু (x_1,y_2) ও (x_{21}, y_2) হলে রেখাটির ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ L রেখা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণে আনত।

সংঙ্গানুসারে, $m = \tan\theta$ একটি দিকে নির্দেশিত রেখাংশ। যেকোন $P_1 : (x_1,y_1)$ ও $P_2: (x_2, y_2)$ হতে পাই

যদি $\overline{P_1P_2}$এর পরিবর্তে P_2P_1 নেয়া হয় তবে $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

সুতরাং $\overline{P_1P_2}$ রেখার ঢাল = $\overline{P_2P_1}$ রেখার ঢাল= L রেখার ঢাল = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Note : A, B, C তিনটি বিন্দু সমরেখা হবে যদি ও কেবল যদি $\overline{AB}$ রেখার ঢাল = $\overline{AC}$ রেখার ঢাল হয়।

TYPE-03

সমান্তরাল ও লম্বরেখা ঃ

দুটি রেখা সমান্তরাল হওয়ার শর্ত ঃ যদি দুটি রেখার ঢাল সমান হয়।

ধরি, রেখা দুটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α_1 ও α_2 কোণ উৎপন্ন করে।

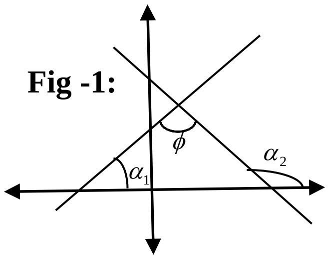
সমান্তরাল হলে $\alpha_1 = \alpha_2$ হবে, $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$, উল্টাভাবে, $m_1 = m_2$ হলে $\alpha_1 = \alpha_2$

দুটি রেখা লম্ব হওয়ার শর্ত ঃ দুটি লম্ব রেখা L_1 ও L_2 অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α_1 ও α_2 কোণে নত

$\therefore m_1 = \tan\alpha_1$ ও $m_2 = \tan\alpha_2$

আমারা জানি, ত্রিভুজের বহিঃস্থকোন অন্তঃস্থ দুরবর্তী কোনদ্বয়ের সমষ্টির সমান ।

Fig -1:



$\therefore \alpha_2 = \alpha_1 + {}^{\pi}/_{2} \Rightarrow \tan\alpha_2$, $= -\cot\alpha_1 = \frac{1}{\tan\alpha_1} \Rightarrow \tan\alpha_1\tan\alpha_2$

$= -1 \Rightarrow m_1 . m_2 = -1$ উল্টাভাবে, যদি, $m_1.m_2 = -1$ হয় তবে,

$\tan\alpha_1 . \tan\alpha_2 + 1 = 0 = \sin\alpha_1 . \sin\alpha_2 + \cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha_1, \sim\alpha_2) = 0 = \cos 90^0$, $\alpha_1, \sim\alpha_2 = 90^0$

পরস্পর দুটি লম্ব রেখার মধ্যে একটি রেখার ঢাল অন্য রেখার ঢালের ঋণাত্মক বিপরীত্বক ফলে তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$ উল্টাভাবেও সত্য।

অনুসিদ্ধান্তঃ

1.দুটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $m_1 = m_2$ হয় [কারণ $\emptyset = 0$ এর জন্য $\tan\emptyset = 0$হবে]

2. দুটি রেখা পরস্পর লম্ব হবে যদি $\emptyset = 90^0$ হয়। $\tan\emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2} = 0$ সুত্রটি এক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয় কারণ, $\tan 90°$ অসংঙ্গায়িত।$\sin\theta = \pm 1$ ধরে সমাধান করবে।

TYPE-04

অক্ষের সমান্তরাল রেখাঃ

$y -$ অক্ষের সমান্তরাল রেখা : $x = k$ [y =0] p(x,y) এর সঞ্চারপথ $x = k$

x – অক্ষের সমান্তরাল রেখা : $y = k$ $[x = 0]$ $p(x,y)$ এর সঞ্চারপথ $y = k$, যেখানে k হলো দিকে নির্দেশিত দূরত্ব

আয়তকার কার্তেসীয়ান স্থানাংক ব্যবস্থায় অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। $x = 0$, $y = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ $x = 2$, $y = -3$ বিন্দুটি প্লট কর। (রেখা যখন কোন অক্ষের সমান্তরাল নয়)

সমীকরণ নির্ণয়ের সুত্রঃ

TYPE-05

বিন্দু-ঢাল আকার ঃ $y - y_1 = m(x - x_1)$ যেখানে রেখার ঢাল (m) এবং রেখার উপর একটি নিদির্ষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) তাহলে উক্ত রেখা $p(x,y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ।

EXAMPLE – 01: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা$(4-8)$ বিন্দুগামী এবং যা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135^0 কোনে আনত।

SOLVE : রেখাটির সমীকরণ ঃ $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-8) = \tan 135^0 (x - 4) \Rightarrow y + 8 = -1(x - 4)$

$\Rightarrow y + 8 = -x + 4 \Rightarrow x + y + 4 = 0$

EXAMPLE – 02 : একটি সরলরেখার সমীকরণ বের কর যা $(3, -4)$ বিন্দুগামী এবং $(4,1)$ ও $(2,5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর লম্ব।

SOLVE : $(4,1)$ও$(2,5)$বিন্দু দুটি Aও B দ্বারা চিহ্নিত করি, তাহলে, $\overline{AB}$ রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{5-1}{2-4} = -2$ এবং

$\overline{PQ}$ রেখার ঢাল ধরি, m_2 ; শর্তানুযায়ী $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \overline{PQ}$ রেখার সমীকরণ ঃ $y - (-4) = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y + 8 = x - 3 \Rightarrow x - 2y - 11 = 0$

***ঢাল-ছেদ আকৃতিঃ $y = mx + c$ রেখাটি y অক্ষ হতে c পরিমাণ অংশ কর্তন করে।**

Note:

(i) যখন সরল রেখার L ঘুরে Yঅক্ষের সমান্তরাল হবে তখন এ সুত্র প্রযোজ্য নয়

(ii) রেখাটির বিন্দু-ঢাল আকারঃ $y - c = m(x - o)$ $\therefore$ $y = mx + c$

(iii) রেখাটি দুটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক m ও c সম্বলিত। সুতরাং m ও c জানা থাকলেই কেবল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করা সম্ভব।

Q. $y = mx + c$ সমীকরণ নিম্নোক্ত শর্তে কি প্রকাশ করে।

(i) যখন $m = 0$ এবং c কোণ ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

Ans: একটি সমান্তরাল রেখাগুচ্ছ যা x অক্ষের সমান্তরাল

(ii) যখন c $[\neq 0]$নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং m কোণ ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

Ans: এক বিন্দুগামী রেখাগুচ্ছ যা $(0,c)$ দিয়ে যায়।

(iii) যখন $c = 0$ এবং m কোণ ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

Ans: $(0,0)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা গুচ্ছ।

(iv) যখন m কোণ নির্দিষ্ট ধ্রুবক $(\neq 0)$ এবং c-ও কোণ নির্দিষ্ট ধ্রুবক।

Ans: একটি মাত্র সরলরেখা যার ঢাল m এবং y অক্ষের ছেদিতাংশ c

(v) যখন m ও c কোণ ইচ্ছামূলক ধ্রুবক ।

Ans: যে কোন সরলরেখা [xyতলে] যা y অক্ষের সমান্তরাল নয়।

EXAMPLE – 03: **একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3,4) এবং $(8, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায়।**

SOLVE : ধরি, রেখাটির সমীকরণঃ $y = mx + c$

তাহলে, $4 = 3m + c$ এবং $-15 = 8m + c$, $m = -\frac{19}{5}$, $c = \frac{77}{5}$ $\therefore y = -\frac{19}{5}x + \frac{77}{5} \Rightarrow 5y + 19x = 77$ যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।* তোমার ইচ্ছানুযায়ী বিভিন্নভাবে সমাধান করতে পার।

TYPE-07

দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি সরল রেখার সমীকরণঃ
$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ [$x_2 \neq x_1$এর জন্য] $x_2 = x_1$ হলে রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল হয়ে যায় বিধায় $x_2 \neq x_1$এর জন্য উক্ত সুত্র প্রযোজ্য নয়। নির্ণায়ক আকার ঃ $x(y_1 - y_2) + y\ (x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$

অর্থাৎ (x,y), (x_1, y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দু তিনটি একই সরল রেখার উপর হলে তাদের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে। যা পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে।

TYPE-08

ছেদক আকার ঃ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1[a, b \neq o]$ রেখাটির x অক্ষের ছেদিতাংশ a এবং ছেদবিন্দু (a,o), y অক্ষের ছেদিতাংশ b এবং ছেদবিন্দু (o,b)

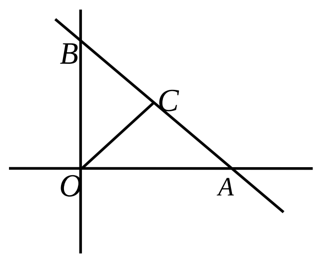
Note :

(i) যদি রেখাটি কোণ অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে এই সুত্র প্রযোজ্য হবে না.
(ii) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ সহজে গ্রাফ পেপারে আঁকা যায়। রেখাটি x অক্ষকে (4,0) ও y অক্ষকে(0,3) বিন্দুতে ছেদ করে।

TYPE-09

লম্ব আকারঃ xcosα + sinα = P এটা একটা রেখার সমীকরণ যার উপর মূল বিন্দু হতে অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য x এবং লম্বটি x অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে α কোণে আনত।

প্রমাণ ঃ $\overline{OC}$ রেখার ঢাল = $m_1 = \tan\alpha$, $\overline{AB}$রেখার ঢাল , $m_2 = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{m}$ $[\overline{OC} \perp \overline{AB}]$



বিন্দু ঢাল আকারঃ $y - p\sin\alpha = -\frac{1}{m}(x - p\cos\alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(x - p\cos\alpha)$

$= x\cos\alpha + y\sin\alpha = p\ (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = P \therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

পোলার আকার ঃ $r\cos(\theta - \alpha) = P$. যেখানে P এর পোলার স্থানাংক (r, θ)

সমদ্বিখন্ডক ত্রয়ের ছেদবিন্দু পরিকেন্দ্র একই সরলরেখায় থাকে ।

EXAMPLE –01: একাটি সরলবেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।

SOLVE : x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y = k$, যা $(0, -4)$ বিন্দুগামী $\therefore -4 = k$ $\therefore$নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y = -4 \Rightarrow y + 4 = 0$ (**Ans**)

EXAMPLE –02: $(2,4),(-4,-6)$ এবং $(6,-8)$ বিন্দু তিনটি ABC একটি ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভূটির মধ্যমাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A\ (2,4), B\ (-4,-6)$ এবং $C\ (6,-8)$

ধরি, AB, BC ও CA এর মধ্যবিন্দু তিনটি যথাক্রমে F, D ও E ; তাহলে, $D \equiv \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-6-8}{2}\right) \equiv (1,-7)$

$E = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{4-8}{2}\right) \equiv (4,-2)$; $F \equiv \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{4-6}{2}\right) \equiv (-1,-1)$

AD মধ্যমার সমীকরণ: $\frac{y-4}{4+7} = \frac{x-2}{2-1} \Rightarrow y-4 = \frac{11}{1}(x-2) \Rightarrow y-4 = 11x-22 \Rightarrow 11x-y-18 = 0$

BE মধ্যমার সমীকরণ :$\frac{y+6}{-6+2} = \frac{x+4}{-4-4} \Rightarrow y+6 = \frac{-4}{-8}(x+4) \Rightarrow y+6 = \frac{1}{2}(x+4)$

$\Rightarrow 2y+12 = x+4 \Rightarrow x-2y-8 = 0$

CF মধ্যমার সমীকরণ :$\frac{y+8}{-8+1} = \frac{x-6}{6+1} \Rightarrow y+8 = -x+6 \Rightarrow x+y+2 = 0$

$\therefore$ নির্ণয় মধ্যমা তিনটির সমীকরণ : $11x-y-18 = 0,\ x-2y-8 = 0,\ x+y+2 = 0$ (Ans)

EXAMPLE – 03 : $x-4 = 0, y-5 = 0, x+3 = 0$ এবং $y+2 = 0$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন চর্তুভূজের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, প্রদত্ত রেখা চরটি হল, $L_1 : x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$L_2 : y-5 = 0y = 5$; $L_3 : x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$; $L_4 : y+2 = 0 \Rightarrow y = -2$

চিত্র হতে, প্রদত্ত রেখা চারটির ছেদবিন্দু যথাক্রমে $A(4,5),\ B\ (-3,\ 5),\ C(-3,-2)$ এবং $D(4,-2)$ যাহারা $ABCD$ চতুর্ভূজের চারটি শীর্ষবিন্দু

তাহলে, কর্ণ AC এর সমীকরণ: $\frac{y-5}{5+2} = \frac{x-4}{4+3} \Rightarrow y-5 = \frac{7}{7}(x-4) \Rightarrow y-5 = x-4 \Rightarrow x-y+1 = 0$

এবং BD কর্ণের সমীকরণ: $\frac{y-5}{5+2} = \frac{x+3}{-3-4} \Rightarrow y-5 = -1(x-3) \Rightarrow y-5 = -x+3 \Rightarrow x+y-8 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণ দুইটির সমীকরণ : $x-y+1 = 0$ এবং $x+y-8 = 0$

EXAMPLE – 04 : একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, রেখাটির সমীকরণ : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

প্রশ্নমতে, $\pm a = \pm b$ [সমচিহ্ন ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হতে পারে] তাহলে, $\frac{x}{\pm b} + \frac{y}{b} = 1$ বা, $\pm x + y = b$

রেখাটি $(\alpha,\ \beta)$ বিন্দুগামী তাহলে, $\pm\alpha + \beta = b$ $\quad (+)$veএর জন্য $b = \alpha + \beta$

$(-)$veএর জন্য $\quad b = -\alpha + \beta$

তাহলে, $x + y = \alpha + \beta$ এবং $-x - y = -\alpha - \beta$ বা, $x - y = \alpha - \beta$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা দুটির সমীকরণ : $x + y = \alpha + \beta$ এবং $x - y = \alpha - \beta$ $\quad$ (**Ans**)

EXAMPLE – 05 : একটি সরলরেখা $(1, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভূজ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, রেখটি প্রথম চতূর্ভাগে x ও y অক্ষ মতে যথাক্রমে a ও b অংশ কর্তন করে।

তাহলে রেখাটির সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$

প্রশ্নমতে, (i) নং রেখাটি $(1, 4)$ বিন্দুগামী সুতরাং, $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow \frac{b+4a}{ab} = 1$

$\Rightarrow b + 4a = ab \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

আবার, প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}ab = 8 \Rightarrow ab = 16$ এবং $b = \frac{16}{a}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (iii)$

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{16}{a} + 4a = 16 \Rightarrow 4a^2 - 16a + 16 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2,\ 2.$

(iii) নং হতে, $b = 8$ a ও b এর মান (i) নং সমীকরনে বসিয়ে পাই, $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow 4x + y = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ : $4x + y = 8$

EXAMPLE – 06 : $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরি উক্ত খন্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফকল নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা, $x + 2y + 7 = 0 \Rightarrow x + 2y = -7 \Rightarrow \frac{x}{-7} + \frac{y}{\frac{-7}{2}} = 1$

তাহলে, রেখাটি x অক্ষকে $A(-7,\ 0)$ এবং y অক্ষকে $B\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক C হলে, $c \equiv \left(\frac{-7+0}{2}, \frac{0-\frac{7}{2}}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2} - \frac{7}{4}\right)$

AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0+7)^2 + \left(-\frac{7}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{7^2 + \frac{7^2}{4}} = 7\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{7\sqrt{5}}{2}$ একক.

AB বর্গের বাহু হলে বর্গটির ক্ষেত্রফল হবে $= AB^2 = \left(\frac{7\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{49\times 5}{4} = \frac{245}{4} = 61\frac{1}{4}$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ এবং ক্ষেত্রফল $61\frac{1}{4}$ বর্গ একক (Ans)

EXAMPLE – 07 : যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাত অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, রেখাটির x অক্ষকে $A(x, 0)$ এবং y অক্ষকে $B\,(0, y)$ বিন্দুতে ছেদ করে

প্রশ্নমতে,AB রেখাংশকে $(-4, 3)$ বিন্দু $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

তাহলে,$-4 = \frac{5\times 0 + 3\times x}{5+3} \Rightarrow -4 = \frac{3x}{8} \Rightarrow x = \frac{-32}{3}$ এবং $3 = \frac{5\times y + 3\times 0}{5+3} \Rightarrow y = \frac{24}{5}$

তাহলে, A বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{-32}{3}, 0\right)$ এবংB বিন্দু স্থানাংক $\left(0, \frac{24}{5}\right)$ AB রেখার সমীকরণ : $\frac{y-0}{0-\frac{24}{5}} = \frac{x+\frac{32}{3}}{\frac{-32}{3}-0}$

$\Rightarrow -\frac{32}{3}y = \frac{-24}{5}\left(x + \frac{32}{3}\right) \Rightarrow -160y = -72x - 768 \Rightarrow 72x - 160y + 768 = 0$

$\Rightarrow 9x - 20y + 96 = 0$ $\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ : $9x - 20y + 96 = 0$

EXAMPLE – 08 : একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভূজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

SOLVE : মনে করি, রেখাটি প্রথম চর্তুভাগে x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $A\,(a, o)$ ও $B\,(o, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, রেখাটির সমীকরণ : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}ab = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$

এবং $a = \frac{r}{\cos 45°} = OA$ এবং $b = \frac{r}{\sin 45°} = OB$

a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{1}{2} \times \frac{r}{\cos 45°} \times \frac{r}{\sin 45°} = 16$

$\Rightarrow r^2 . \frac{1}{\sin 90°} = 16 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$যা সবসময় ধনাত্মক

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $x\cos 45° + 4\sin 45° = 4 \Rightarrow x.\frac{1}{\sqrt{2}} + y.\frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow x + y = 4\sqrt{2}$

[**বি : দ্রঃ** x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোন উৎপন্নকারী সরলরেখা পাওয়া যায় মাত্র একটি]

EXAMPLE – 09 : একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষোত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভূজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

SOLVE : $\Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $x\cos 45° + y\sin 45° = 2\sqrt{2}$ $x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + y \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow x + y = 4$ (**Ans**:)

EXAMPLE – 10 : P ও Q বিন্দুদ্বয় x অক্ষের উপর এবং R ও S বিন্দুদ্বয় y অক্ষের উপর অবস্থিত। PR ও QS এর সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ ও $x + 2y - 1 = 0$ হলে, দেখাও যে, $PQ = RS$.

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি $4x + 3y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $x + 2y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ (ii)

(i) হতে পাই, $4x + 3y = -6 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-6}{4}} + \frac{y}{\frac{-6}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{-2} = 1$

(i) নং রেখাটি x অক্ষকে P $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে R $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

[যেহেতু x অক্ষের উপর দুটি বিন্দু Pও Q এবং y অক্ষের উপর দুটি বিন্দু R ও S]

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,$x + 2y = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$

(ii) নং রেখাটি x অক্ষকে Q $(1, 0)$ এবং y অক্ষকে S $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$PQ = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$; $RS = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$ $\therefore$ $PQ = RS$ (**Showed**)

EXAMPLE – 11 : এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু ।

SOLVE : ধরি, রেখাটি x অক্ষকে A (a, o) এবং y অক্ষকে B (o, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$ (i)

প্রশ্নমতে, (i) নং রেখাটি $(-2, -5)$ বিন্দুগামী $\therefore$ $\frac{-2}{a} + \frac{-5}{b} = 1$

$\Rightarrow -2b - 5a = ab \Rightarrow 5a + 2b = -ab \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ (ii)

এবং $OA + 2.OB = 0 \Rightarrow a + 2.b = 0 \Rightarrow a = -2b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ (iii)

(ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই, $5(-2b) + 2b = -(-2b).b$

$\Rightarrow -10b + 2b = 2b^2 \Rightarrow -8b = 2b^2 \Rightarrow -4 = b[\because b \neq 0] \therefore b = -4$

(iii) নং হতে, $a = -2(-4) = 8$; a ও b এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{x}{8} + \frac{y}{-4} = 1$

$\Rightarrow x - 2y = 8 \Rightarrow x - 2y - 8 = 0 \therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ : $x - 2y - 8 = 0$ (**Ans**)

EXAMPLE – 12 : এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$ হয়, যখন O মূলবিন্দু।

SOLVE : মনে করি, রেখাটির সমীকরণ :$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots..$ (i)

এবং রেখাটি x অক্ষকে $A(a, o)$ এবং y অক্ষকে $B\ (o, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে,$OA = a, OB = b$

প্রশ্নমতে, (i)নং রেখাটি $(3, 2)$ বিন্দুগামী, $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1 \Rightarrow 3b + 2a = ab \Rightarrow 3a + 3b = ab \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$(ii)

এবং $OA - OB = 2 \Rightarrow a - b = 2 \Rightarrow a = b + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (iii)

(ii) ও (iii) হতে পাই, $2(b + 2) + 3b = (b + 2)b.$

$\Rightarrow 2b + 4 + 3b = b^2 + 2b \Rightarrow b^2 - 3b - 4 = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + b - 4 = 0$

$\Rightarrow (b - 4)(b + 1) = 0 \Rightarrow b = 4, -1$

(iii) নং হতে, যখন $b = 4$ তখন, $a = 4 + 2 = 6$,যখন $b = -1$ তখন $a = -1 + 2 = 1$

(i) নং সমীকরণ $a = 6$, $b = 4$ বসিয়ে পাই, $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 12 \Rightarrow 2x + 3y - 12 = 0$

$a = 1, b = -1$ বসিয়ে পাই, $\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

EXAMPLE – 13 : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটি xও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীরকণ $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$.

SOLVE : প্রদত্ত রেখার সমীকরণ :$x \cos\alpha + y \sin\alpha = P$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{P}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{P}{\sin\alpha}} = 1$ তাহলে, A বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{P}{\cos\alpha}, 0\right)$ এবং B বিন্দু স্থানাংক $\left(0, \frac{P}{\sin\alpha}\right)$

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\frac{P}{2\cos\alpha}, \frac{P}{2\sin\alpha}$; $x = \frac{P}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{P}{2x}$, $y = \frac{P}{2\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{P}{2y}$

আমরা জানি, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{P}{2x}\right)^2 + \left(\frac{P}{2y}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \frac{P^2}{4x^2} + \frac{P^2}{4y^2} = 1$

$\Longrightarrow P^2\left(\frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}\right) = 1 \Rightarrow P^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$ $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরন, $P^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$

[$x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তের সাপেক্ষে এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ]

EXAMPLE – 14 : $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের ত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখাটির সমীকরণঃ $x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow x + 3y = 12 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{\frac{12}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$

$\therefore$ রেখটি x অক্ষকে $(12, 0)$ এবং y অক্ষকে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, $A(12, 0)$, $B(0, 4)$, $C(x_1, y_1)$ ও $D(x_2, y_2)$ যথাক্রমে AB রেখার দুটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু।

তাহলে, $C(x_1, y_1)$ বিন্দুটি AB রেখাকে $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, $\therefore x_1 = \frac{1\times0+2\times12}{1+2} = \frac{2\times12}{3} = 8$

$y_1 = \frac{1\times4+2\times0}{1+2} = \frac{4}{3} \therefore C(x_1, y_1) = C\left(8, \frac{4}{3}\right)$

আবার, $D(x_2, y_2)$ বিন্দুটি AB রেখাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে $\therefore x_2 = \frac{2\times0+1\times12}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$

$y_2 = \frac{2\times4+1\times0}{1+2} = \frac{8}{3} \therefore D(x_2, y_2) = D\left(4, \frac{8}{3}\right)$; O মূলবিন্দু অর্থাৎ $O(0,0)$

আমরা জানি মূল বিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণ, $y = mx \dots\dots\dots\dots (i)$

(i)নং রেখাটি $C\left(8, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুগামী হলে, $\frac{4}{3} = 8m \Rightarrow m = \frac{1}{6}$

$\therefore$ OC রেখার সমীকরণ , $y = \frac{1}{6}x \Rightarrow 6y = x \Rightarrow x - 6y = 0$

(i) নং রেখাটি $D\left(4, \frac{8}{3}\right)$ বিন্দুগামী হলে, $\frac{8}{3} = 4m \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

$\therefore$ OD রেখার সমীকরণ, $y = \frac{2}{3}x \Rightarrow 3y = 2x \Rightarrow 2x - 3y = 0$

EXERCISE :

01. $5x + 4y - 20 = 0$ রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের ত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [**Ans**: $5x - 8y = 0, 5x - 2y = 0$]

EXAMPLE – 15 : দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা তিনটি, $x = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$; $y = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$y = mx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ (iii)

(i) ও (ii) নং ছেদবিন্দু (a, b) ; (i) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু (a, ma)

(ii) ও(iii)নং রেখার ছেদবিন্দু $\left(\frac{b}{m}, b\right)$

তাহলে (a, b), (a, ma) ও $\left(\frac{b}{m}, b\right)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & ma & 1 \\ \frac{b}{m} & b & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left\{a\,(ma - b) - b\,\left(a - \frac{b}{m}\right) + 1\,(ab - ab)\right\} = \frac{1}{2}\left\{ma^2 - ab - ab + \frac{b^2}{m}\right\}$

$\therefore$ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2m}(m^2a^2 - 2abm + b^2) = \frac{1}{2m}\,\{(ma)^2 - 2.ma.b + b^2\} = \frac{1}{2m}\,(ma - b)^2$

$= \frac{1}{2|m|}\,(b - ma)^2$ বর্গ একক ।

[m এর মান a ও b এর উপর নির্ভরশীল । ফলে a ও b এর চিহ্নের পরিবর্তনে m এর চিহ্নের পরিবর্তন ঘটবে]

ক্ষেত্রফল ঘূর্ণনক্ষম বিধায় $|m|$ ব্যবহার করা হয়েছে। চিত্রে লক্ষ কর। $(a, b) \rightarrow (a, ma) \rightarrow \left(\frac{b}{m}, b\right) \leftarrow$ anticlockaise ফলে ক্ষেত্রের ঘূর্ণন হবে ধনাত্মক অনুরূপভাবে, $(a, b) \rightarrow \left(\frac{b}{m}, b\right) \rightarrow (a, ma)$ clockarise ফলে ক্ষেত্রের ঘূর্ণন হবে $(-)$ ঋনাত্বক।

EXERCISE :

01. দেখাও যে, $y = mx, y = m_1x$ এবং $y = b$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_1}\right)$ বর্গ একক।

EXAMPLE – 16 : দেখাও যে $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $(x - 2y - 5 = 0)$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোনো রেখাংশকে $(x - 2y + 5 = 0)$ রেখাটি সমদ্বিখন্ডিত করে।

SOLVE : $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য, $d_1 = \left|\frac{-3-2(6)+5}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right| = \left|\frac{-10}{\sqrt{5}}\right| = \frac{10}{\sqrt{5}}$

$(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব দূরত্বঃ $d_2 = \left|\frac{-3-2(6)-5}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right| = \left|\frac{-20}{\sqrt{5}}\right| = 2 \times \frac{10}{\sqrt{5}} = 20d_1$

$x - 2y - 5 = 0$রেখার উপর কোন বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে

$x^2 - 2y + 5 = 0$ রেখা $m_1 : m_2$ অনুপাতে (x_1, y_1) বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

$x_1 = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$, $y_1 = \frac{m_1x_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$ তাহলে, (x^1, y^1) বিন্দুটি $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত

$\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} - 2\frac{m_1x_1+m_2y_2}{m_1+m_2} + 5 = 0 \Rightarrow m_1x_1 + m_2x_2 - 2m_1y_1 - 2m_2y_2 + 5m_1 + 5m_2 = 0$

$\Rightarrow m_1(x_1 - 2y_1 + 5) + m_2(x_2 - 2y_2 + 5) = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = -\frac{x_2-2y_2+5}{x_1-2y_1+5} = \frac{-3-2\times6+5}{5+5}$

[$x_1 - 2y_1 - 5 = 0 \Rightarrow x_1 - 2y_1 = 5$ এবং$x_2 = -3,\ y_2 = 6$]

$= \frac{10}{10} = \frac{1}{1} \quad \therefore m_1 : m_2 = 1 : 1$

সুতরাং আমরা বলতে পারি,$(-3,\ 6)$বিন্দু থেকে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অংকিত সকল রেখা $x - 2y + 5 = 0$ রেখাদ্বায় সমদ্বিখন্ডিত হয়। (দেখানো হল)(Ans)

EXERCISE :

01. $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান $a, b,$ ও c এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। $\left[\textbf{Ans}: p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

EXAMPLE – 17 : $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি যথাক্রমে $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (i)$

এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ii)$; (i) হতে পাই, $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 1 \ldots\ldots. \quad (iii)$

(ii) নং হতে পাই, $\frac{x}{\frac{P}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{P}{\sin\alpha}} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots..(iv)$

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই $\frac{P}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3P}{2}$

এবং $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}P}{2}$; আমরা জানি, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{v3P}{2}\right)^2 + \left(\frac{3P}{2}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{3P^2}{4} + \frac{9P^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{12}{4}P^2 = 1 \Rightarrow P^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore P = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

PART-02

TYPE-01

L_1 ও L_2 দুটি সরলরেখার মধ্যকার কোন (∅) হলে, $\tan\emptyset = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$; যেখানে, m_1 ও m_2 যথাক্রমে L_1 ও L_2 সরলরেখার ঢাল।

L_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ [a_1, b_1 উভয়ই শূন্য নয়], L_2: $a_2x + b_2y + l_2 = 0$[a_2, b_2 উভয়ই শূন্য নয়]

$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$, $\therefore \tan\emptyset = \frac{-\frac{a_2}{b_2}-(-\frac{a_1}{b_1})}{1+(-\frac{a_2}{b_2})(-\frac{a_1}{b_1})} = \frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1b_2+a_1a_2}$ অনেক ক্ষেত্রে লেখা হয় $\tan\emptyset = \pm\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$

Q. $\tan\emptyset = (\pm)$ ve কেন ?

$\tan\emptyset$ ও $\tan(\pi-\emptyset)$ দুটি কোন পাওয়া যায় বিধায় $\pm$ চিহ্ন যুক্ত হয়েছে, L_1 থেকে L_2 তে ঘুরতে L_1 কে ∅ কোনে ঘুড়তে হবে। L_2 থেকে L_1 তে ঘুড়তে L_2 কে $\pi-\theta$ কোণে ঘুড়তে হবে। এজন্য কিছু লেখক $\tan\emptyset = \pm\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ সুত্র ব্যবহার করে।

শর্ত ঃ সমান্তরাল হওয়ার শর্তঃ $m_1 = m_2$ হবে, বা, $a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ $\therefore a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = k$ (ধরি) [$k \neq 0$] তাহলে, $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ $\therefore a_2x + b_2y + \frac{c_1}{k} = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল উল্টাভাবে, যদি $b_2 \neq 0$ হয়, তবে দুটি সরলরেখার ঢাল একই হবে যা $-{}^{a_2}/_{b_2}$;

যদি $b_2 = 0$ হয়,তখন $a \neq 0$ রেখাদ্বয় y অক্ষের সমান্তরাল হয়। এবং পরস্পর সমান্তরাল হয়।

<u>তত্ত্বঃ -01</u>: দুটি রেখা সমান্তরাল হলে তাদের সমীকরণঃ

$ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$

যেখানে, $c \neq c$, $'c = c'$ হলে রেখাদ্বয় মিলিত হয় বা সমাপতিত হয়।

(ii) লম্ব হওয়ার শর্তঃ $m_1m_2 = -1$ হবে$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, $\frac{a_2}{b_1} = -\frac{b_2}{a_2} = k \neq 0$ (ধরি) $a_2 = kb_1$, $b_2 = -ka_1$, $L_2 : b_1x - a_1y + {}^{c_2}/_{k} = 0$, $L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ উল্টাভাবে, যদি $b_1 \neq 0$ এবং $a_1 \neq 0$ তখন তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$ এবং রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

<u>তত্ত্ব- 02</u> ঃ পরস্পর দুটি লম্ব রেখার সমীকরণঃ $ax + by + c = 0$, $bx - ay + c' = 0$

x ও y এর সহগ স্থানান্তর করা হয়েছে এবং তাদের একটির চিহ্ন পরিবর্তন করা হয়েছে। c কে পরিবর্তন করা হয়েছে।

EXAMPLE – 01: দুইটি সরলরেখা $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, $(3, 4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীরকণ $y - 4 = m(x - 3) \ldots\ldots(1)$; ; এখানে m রেখাটির ঢাল। আবার, $x - y + 4 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-1} = 1$, [ঢাল = −x এর সহগ /y এর সহগ](1) রেখাটি প্রদত্ত রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore \tan 60° = \pm\frac{m-1}{1+m} \Rightarrow \sqrt{3} = \pm\frac{m-1}{1+m}$ "(+)" নিয়ে $m - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}m \Rightarrow (1-\sqrt{3})m = \sqrt{3} + 1$

$\Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{-2} = -(2+\sqrt{3})$

$\therefore$ (1) এ $m = -(2+\sqrt{3})$ বসিয়ে পাই, $y-4 = -(2+\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow y-4 = -(2+\sqrt{3})x + 6 + 3\sqrt{3} \Rightarrow (2+\sqrt{3})x + y = 10 + 3\sqrt{3}$

আবার, " $-$ " নিয়ে , $m-1 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}m \Rightarrow (\sqrt{3}+1)m = -(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = -\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = -(2-\sqrt{3})$

(1) এ $m = -(2-\sqrt{3})$ বসিয়ে পাই, $y-4 = -(2-\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow y-4 = -(2-\sqrt{3})x + 6 - 3\sqrt{3} \Rightarrow (2-\sqrt{3})x + y = 10 - 3\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণয় রেখা দুইটির সমীকরণ $(2+\sqrt{3})x + y = 10 + 3\sqrt{3}$ এবং $(2-\sqrt{3})x + y = 10 - 3\sqrt{3}$

EXAMPLE – 02 : দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বাভাবে অবস্থান করে।

SOLVE : মনে করি, রেখাটির ঢাল m। রেখাটি যেহেতু $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ : $y - 2 = m(x+1)$ ……………. (i)

প্রদত্ত রেখা $3x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x + 7$; রেখাটির ঢাল, $m_1 = \tan\theta = 3 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}3$.

$\theta = 45° + \tan^{-1}m$ [এখানে m (i) নং রেখার ঢাল]

$\Rightarrow \tan^{-1}m = \theta - 45° = \tan^{-1}3 - \tan^{1}1 = \tan^{-1}\frac{3-1}{1+3} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$. $m = \frac{1}{2}$

পূনরায়,$\theta^1 = \theta + 45° \Rightarrow \theta^1 = \tan^{-1}3 - \tan^{-1}1 = \tan^{-1}\frac{3+1}{1-3} = \tan^{-1}(-2)$

$\therefore \tan\theta^1 = -2$ঢাল $m^1 = -2$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরন $y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরন, $y - 2 = -2(x+2) \Rightarrow y - 2 = -2x - 4 \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা দুইটি $x - 2y - 5 = 0, 2x + y + 2 = 0$

নির্ণেয় রেখা দুটির ঢালদ্বয়ের গুণফল, $mm^1 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$ $\therefore$ রেখাদুটি পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

EXERCISE :

01. দুইটি সরলরেখা $(6,\ 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x + 4y = 11$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। $[\textbf{Ans}: x - 7y + 43 = 0.7x + y - 49 = 0]$

02.

EXAMPLE – 03: k এর মান কত হলে $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে ?

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি $5x + 4y - 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $2x + ky + 9 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) নং রেখা হতে পাই $4y = -5x + 6 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{6}{4}$

(i) নং রেখাটির ঢাল, m_1 হলে $m_1 = -\frac{5}{4}$

(ii) নং রেখা হতে পাই $ky = -2x - 9 \Rightarrow y = -\frac{2}{k}x - \frac{9}{k}$

(ii) নং রেখার ঢাল m_2 হলে $m_2 = -\frac{2}{k}$

রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরালে হলে, $m_1 = m_2$ হবে ।অর্থাৎ $-\frac{5}{4} = -\frac{2}{k} \Rightarrow k = \frac{8}{5}$

$\therefore$ k এর মান $\frac{8}{5}$ হলে প্রদত্ত রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।

EXAMPLE – 04 : y- অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $3x + 3y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যেকোন রেখার সমীকরণ, $2x - 3y + 4 + k(3x + 3y - 5) = 0 \Rightarrow (2 + 3k)x - (3 - 3k)y + 4 - 5k = 0$

$\Rightarrow y = \frac{(2+3k)}{3-3k}x + \frac{4-5k}{3-3k}$ [k এর সকল মানের জন্য রেখা দুইটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী]

রেখাটির ঢাল m হলে, $m = \frac{2+3k}{3-3k} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2+3k}{3-3k} \therefore \sin\theta = \frac{2+3k}{\sqrt{(2+3k)^2+(3-3k)^2}}$

$\Rightarrow \sin(\pm 90°) = \frac{2+3k}{\sqrt{(2+3k)^2+(3-3k)^2}}$ [y অক্ষের সমান্তরাল রেখা x অক্ষের সাথে $\pm 90°$ কোন তৈরী করে]

$\Rightarrow \pm 1 = \frac{2+3k}{(2+3k)^2+(3-3k)^2} \Rightarrow \sqrt{(2 + 3k)^2 + (3 - 3k)^2 = (2 + 3k)}$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow (2+3k)^2 + (3-3k)^2 = (2+3k)^2 \Rightarrow (3-3k)^2 = 0 \Rightarrow 3k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{3} \therefore k = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ; $2x - 3y + 4 + 1\,(3x + 3y - 5) = 0 \Rightarrow 5x - 1 = 0$

Poin of view : * তুমি দিকহীন মান দিয়ে solve করলে ভূল হবে।

* যেহেতু রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল সুতরাং রেখাটির ফরম বা আকার $x = k$ যেখানে k ধ্রুবক (নিদির্ষ্ট)।

* y থাকবে না সুতরাং সমীকরণ দুটি এভাবে সেট আপ করলে calculation এর কোনে প্রয়োজন হবে না। Admisnion type application এর জন্য observe করে অংকটি সমাধান করা যায়।

* k এর মান কেবল 1 হলে নির্ণেয় রেখায় y থাকবে না । [$y \neq 0$]

EXAMPLE – 05 : x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি, $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণ, $x - 3y + 2 + k(x + y - 2) = 0$ ……………… (i)

যেখানে k হলো ইচ্ছামূলক ধ্রুবক [নির্দিষ্ট নয়] k এর সকল মানের জন্য প্রদত্ত রেখাদুটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যাবে।

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $(1+k)x - (3-k)y + 2 - 2k = 0 \Rightarrow (3-k)y = (1+k)x + 2 - 2k \Rightarrow y = \frac{1+k}{3-k}x + \frac{2-2k}{3-k}$ এখানে রেখাটির ঢাল m হলে, $m = \frac{1+k}{3-k} = \tan\theta$

x অক্ষের সমান্তরাল রেখা x অক্ষের সাথে $0°$ কোন বা $180°$ কোনে আনত হয়।

$\cos\theta = \frac{3-k}{\sqrt{(1+k)^2 + (3+k)^2}}$ [$\cos 0° = 1, \cos 180° = -1$] $\Rightarrow \pm 1 = \frac{3-k}{\sqrt{(1+k)^2 + (3-k)^2}}$

$\Rightarrow (1+k)^2 + (3-k)^2 = (3-k)^2$ [বর্গ করে] $\Rightarrow (1+k)^2 = 0 \Rightarrow 1 + k = 0 \therefore k = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x - 3y + 2 + (-1)(x + y - 2) = 0 \Rightarrow -4y + 4 = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$ (**Ans**)

Point of view : দুইটি অংকের ক্ষেত্রে : সবচেয়ে ভালো Process নির্ণেয়কের সাহায্যে সমাধান করা।

তিনটি রেখাই একবিন্দুগামী হলে রেখা তিনটিকে concurrent বলে।

এক্ষেত্রে রেখা তিনটি কোন ত্রিভূজ গঠন করতে পারে না । ফলে তাদের দ্বারা গাঠিত ত্রিভূজের নির্ণয়ক শূণ্য হয়।

(4) এর জন্য $|S| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -87 \\ 3 & 3 & 7 \\ 2+3x & -3+3k & 7k-87 \end{vmatrix} = 0$ হবে। $k = 1$ পাওয়া যাবে

৫. এর জন্যও একই নিয়ম ঘটে

EXERCISE : x অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [**Ans**: $y - 1 = 0$]

EXAMPLE – 06 : দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$

রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি, $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরন.

$7x + 13y - 87 + k\,(5x - 8y + 7) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$ (i)

যেখানে k যেকোন ধ্রুবক (নির্দিষ্ট নয়) ; এখানে k এর সকল মানের জন্য (i) নং রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

(i) নং রেখাকে ছেদ আকারে রূপান্তর করি,

$(7 + 5k)x + (13 - 8k)y + 7k - 87 = 0 \Rightarrow (7 + 5k)\,x + (13 - 8k)y = 87 - 7k$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{87-7k}{7+5k}} + \frac{y}{\frac{87-7k}{13-8k}} = 1$ তাহলে উক্ত রেখাটি x ও y অক্ষ হতে যথাক্রমে $\frac{87-7k}{7+5k}$ ও $\frac{87-7k}{13-8k}$ পরিমাণ অংশ কর্তন করে।

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{87-7k}{7+5k}\right| = \left|\frac{7-7k}{13-8k}\right| \Rightarrow \frac{87-7k}{7+5k} = \pm\frac{87-7k}{13-8k}$

(+) ve এর জন্য , $\frac{87-7k}{7+5k} = \frac{87-7k}{13-8k} \Rightarrow 7 + 5k = 13 - 8k \Rightarrow 13k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{13}$

(−)ve এর জন্য, $\frac{87-7k}{7+5k} = -\frac{87-7k}{13-8k} \Rightarrow 7 + 5k = -13 + 8k \Rightarrow 3k = 20 \Rightarrow k = \frac{20}{3}$

$= \frac{6}{13}$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $7x + 13y - 87 + \frac{6}{13}(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow 91x + 169y - 1131 + 30x - 48y + 42 = 0 \Rightarrow 121x + 121y - 1089 = 0$

$\Rightarrow x + y - 9 = 0$; $k = \frac{20}{3}$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $7x + 13y - 87 + \frac{20}{3}(5x - 8y + 7) = 0$

$\Rightarrow 21x + 39y - 261 + 100x - 160y + 140 = 0 \Rightarrow 121x - 121y - 121 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

∴ নির্ণেয় রেখা দুটির সমীকরণ, $x + y - 9 = 0$; $x - y - 1 = 0$ (**Ans**)

EXAMPLE – 07 : $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : মনে করি, নির্ণেয় রেখার ঢাল $= m_1$

প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $2x + 11y - 2 = 0$ … … … … …. (i)

(i) নং রেখাকে ঢাল ছেদ আকারে পরিনত করি, $11y = -2x + 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{11}x + \frac{2}{11}$;

রেখার ঢাল m_2 হলে $m_2 = -\frac{2}{11}$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় রেখা ও প্রদত্ত রেখা দুটি একে অপরের উপর লম্ব। $\therefore$ রেখা দুটির ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$ হবে।

এক্ষেত্রে, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m_1 \times \left(-\frac{2}{11}\right) = -1 \Rightarrow m_1 = \frac{11}{2}$

তাহলে $(4, -3)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{11}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ হবে নির্ণেয় রেখার সমীকরণ :

সুতরাং নির্ণেয় রেখার সমীকরণ , $y - (-3) = \frac{11}{2}(x - 4)$

$\Rightarrow y + 3 = \frac{11}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y + 6 = 11x - 44 \Rightarrow 11x - 2y - 50 = 0 \therefore 11x - 2y - 50 = 0$

অথবা, $11x - 2y + k = 0$ রেখা যা $2x + 11y - 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(4, -3)$ বিন্দুগামী

$\therefore 11 \times 4 - 2(-3) + k = 0 \ \therefore k = -50$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $11x - 2y - 50$

EXAMPLE –08 : এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x অক্ষের ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ কে ঢাল ছেদ আকারে পরিনত করি,

$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} - 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x - b$; রেখাটির ঢালকে m_1 দ্বারা চিহ্নিত করলে, $m_1 = \frac{b}{a}$

নির্ণেয় রেখার ঢাল m_2 হলে, শর্তানুযায়ী, $m_1 \times m_2 = -1$ হবে করণ নির্ণেয় রেখা প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব

সুতরাং রেখা দুটির ঢালদ্বয়ের গুনফল -1 হবে, $\frac{b}{a} \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{a}{b}$.

ঢাল পাওয়া গেছে এখন একটা বিন্দু প্রয়োজন যেদিক দিয়ে রেখাটি গমন করবে।

প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষকে (a, o) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $(a,\ o)$ বিন্দুগামী ও $\frac{-a}{b}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণই

হলো নির্ণেয় রেখার সমীকরণ : $y - o = -\frac{a}{b}(x - a) \Rightarrow by = -ax + a^2$

$\Rightarrow ax + by = a^2$(Ans)

EXAMPLE –09 : $(8,\ 5)$ ও $(-4, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুটি $A(8, 5)$ এবং $B(-4, -3)$

তাহলে, AB এর ঢাল, $m_{AB} = \frac{-3-5}{-4-8} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ এবং AB এর লম্বরেখার ঢাল, $m_{\perp AB}$ হলে $m_{\perp AB} \times m_{AB} = -1$ হবে।

অর্থাৎ, $m_{\perp AB} \times \frac{2}{3} = -1 \quad \Rightarrow m_{\perp AB} = -\frac{3}{2}$; AB এর মধ্যবিন্দু C হলে, $C \equiv \left(\frac{8-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \equiv (2,\ 1)$

AB এর লম্ব সমদ্বিখন্ডক AB এর মধ্যবিন্দু $C(2, 1)$ গামী এবং AB রেখার উপর লম্ব ফলে তার ঢাল $-\frac{3}{2}$

সুতরাং নির্ণেয় লম্বসমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 2)$

$\Rightarrow 2y - 2 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 2y - 8 = 0 \ \therefore\ 3x + 2y - 8 = 0$ $\quad$ (**Ans**)

EXERCISE :

01. $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর। $\left[\textbf{Ans}:\ \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)\right]$

02. $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।$\left[\textbf{Ans}:\ \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)\right]$.

EXAMPLE –10 : (f): $3x + 5y - 2 = 0,\ 2x + 3y = 0$ এবং $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা তিনটি, $3x + 5y - 2 = 0$;$2x + 3y + 0 = 0$, $ax + by + 1 = 0$

রেখা তিনটি সমবিন্দু গামী হওয়ার শর্ত, $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(3 - 0) - 5\ (2 - 0) - 2(2b - 3a) = 0$

$\Rightarrow 9 - 10 - 4b + 6a = 0 \Rightarrow 6a - 4b = 1$

EXERCISE :

01. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ সরলরেখা দইটির সঙ্গে সমবিন্দু। [**Ans**: $y + 2 = 0$]

02 $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 26 = 0, 3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এরমান নির্ণয় কর। [**Ans**: 41/ 37]

EXAMPLE –11 : OABC একটি সামান্তরিক। x অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$ A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্কএবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : OABC একটি সামন্তরিক। চিত্র হতে, $BE = CD$

$\therefore$ C বিন্দুর y স্থানাঙ্ক (কোটি) $=$ B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক (কোটি)$= 2$.

$y = 2$ হলে $y = 2x$রেখা হতে পাই, $2 = 2x \Rightarrow x = 1$ তাহলে C বিন্দুর স্থানাংক $(1, 2)$

আবার, $OA = BC = 4 - 1 = 3$ তাহলে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 0)$, A $(3, 0)$ও C$(1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের

সংযোজক রেখার সমীকরণই হলো AC কর্ণের সমীকরন, কর্ণ AC এর সমীকরন, $\frac{y-o}{0-2} = \frac{x-3}{3-1}$

$\Rightarrow \frac{y}{-2} = \frac{x-3}{2} \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow x + y - 3 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় A ও C বিন্দুর স্থানংক এবং AC কর্ণের সমীকরন যথাক্রমে

$(3, 0), (1, 2), x + y - 3 = 0$ (**Ans**:)

EXAMPLE –12 : একটি ত্রিভূজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(6, 1)$ ও B $(1, 6)$ এবং এর লম্ববিন্দু P (3.2) অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, ত্রিভূজটির তিনটি শীর্ষ $A(6, 1)$, B $(1, 6)$ এবং $C(x_1, y_1)$

AB রেখার ঢাল m_1 হলে,$m_1 = \frac{6-1}{1-6} = -1$ এর উপর লম্ব রেখার ঢাল m_2 হলে,

শর্তানুযায়ী, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow -1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = 1$

1 ঢাল বিশিষ্ট $(3, 2)$ বিন্দুগামী রেখা অর্থাৎ , PC রেখার সমীরকণ,

$y - 2 = 1\ (x - 3) \Rightarrow y - 2 = x - 3 \Rightarrow x - y - 1 = 0$ যা $C(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী

$\therefore x_1 - y_1 - 1 = 0$ ……………… (i)

AB রেখার ঢাল m_3 হলে এবং BC রেখার ঢাল m_4 হলে,

শর্তানুযায়ী, $m_3 \times m_4 = -1$ হবে,$\frac{1-2}{6-3} \times \frac{y_1-6}{x_1-1} = -1$

$\Rightarrow \frac{-1}{3} \times \frac{y_1-6}{x_1-1} = -1 \Rightarrow y_1 - 6 = 3x_1 - 3; 3x_1 - y_1 + 3 = 0$ ……………….. (ii)

(ii) − (i)হতে পাই,

$3x_1 - y_1 + 3 = 0$

$\underline{\pm x_1 \mp y_1 \mp 1 = 0}$

$2x_1 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow 2x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{2} = -2 \therefore x_1 = -2$

(i)সমীকরণে $x_1 = -2$ বসিয়ে পাই, $-2 - y_1 - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3 \therefore$ নির্ণেয় C বিন্দুর স্থানাংক $(-2, -3)$

EXERCISE :

01 $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। [**Ans**: $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$, 2]

02. $(2, -1)$ বিন্দু $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।[**Ans**: $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$]

03. AB ও AC রেখাা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ ও $y = 4x - 1$ । AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [**Ans**: $x + 2y = 7$]

PART-03

TYPE-01

একটি রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় এর পদ্ধতিঃ

01. যে কোন রেখা L: ax + by + c = 0 [c ≠ 0] তলকে দুটি ভাগে বিভক্ত করে। একটি হলো মূলবিন্দু ধারী যাকে L এর মুলবিন্দুর পার্শ্ব [origin side] এবং অপরটি মূলবিন্দুর পার্শ্ব নয়। (Non origin side)

02. যদি c ধনাত্মক হয় তবে মূল বিন্দুটি রেখাটির ধনাত্বক দিকে অবস্থিত এবং যদি c ঋনাত্মক হয়, তবে মূলবিন্দুটি রেখাটির ঋনাত্মক দিকে হবে।

03. (a) $p(x_1, y_1)$ বিন্দুটি L: $ax + by + c$ মূলবিন্দু যে পার্শ্বে সেই পার্শ্বে হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং c একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয়। আরো পরিস্কারভাবে ।

(i) যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং c উভয়ই ধনাত্বক হয় তবে p বিন্দুটি L এর ধনাত্বক দিকে হবে।

(ii) যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং c উভয়ই ঋনাত্মক হয় তবে p বিন্দুটি L এর ঋনাত্বক দিকে হবে।

(b) P: (x_1, y_1) বিন্দুটি L এর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে তার বিপরীত পার্শ্বে হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ এবং c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়। আরো পরিস্কার ভাবে,

(i) যদি c ধনাত্মক এবং $ax_1 + by_1 + c$ ঋনাত্মক চিহ্নযুক্ত হয় তবে p বিন্দুটি L এর ঋনাত্মক দিকে হবে।

(ii) যদি c ঋনাত্মক এবং $ax_1 + by_1 + c$ ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হয় তবে p বিন্দুটি L এর ধনাত্বক দিকে হবে।

04. দুটি বিন্দু P: (x_1, y_2) ও Q: (x_2,y_2) L: $ax + by + c = 0$ রেখার একই পার্শ্বে বা বিপরীত পার্শ্বে হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ একই চিহ্ন বা বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয়।

প্রমাণ ঃ $\overline{PQ}$ রেখাকে (x_1, y_1) বিন্দুটি $m_1:m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করলে বিন্দুটির স্থানাংক ঃ $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

যদি বিন্দুটি $ax + by + c =0$ রেখার উপর হয় তবে, $a\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2} + b\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2} + c = 0$

$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = -\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$

Note :(i) $\frac{m_1}{m_2}$ ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হলে P ও Q বিন্দু দুটি প্রদত্ত রেখা L এর বিপরীত পার্শ্বে হবে। অর্থাৎ অন্তরঃস্থভাবে রেখাটিকে বিভক্ত করবে।

(ii) $\frac{m_1}{m_2}$ ঋনাত্বক চিহ্নযুক্ত হলে P ও Q বিন্দু দুটি প্রদত্ত রেখা L এর একই পার্শ্বে হবে। অর্থাৎ বহিঃস্থভাবে রেখাটিকে বিভক্ত করবে।

পর্যবেক্ষণঃ যদি L: $ax + by + c = 0$ রেখা মূলবিন্দুগামী হয় তবে $c = 0$ এই রেখাও তলকে দুটি ভাগে বিভক্ত করে। এক্ষেত্রে P: (x_1, y_1) বিন্দুটি L এর ধনাত্মক পার্শ্বে হবে যদি $ax_1 + by_1 > 0$ হয়। এবং L এর ঋনাত্বক পার্শ্বে হবে যদি $ax_1 + by_1 < 0$ হয়।

TYPE-02

P : **(x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax +by + c= 0$ রেখার লম্ব দুরুত্ব, $d = \frac{ax_1+by_1+c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$ যখন $P(x_1,y_1)$ বিন্দুটি $ax + by + c =0$ রেখার উপরস্থ বিন্দু নয়।**

প্রমানঃ $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$লম্ব রেখাটির পাদবিন্দু (x_2, y_2) হলে,

$a(y_2 - y_1) - b(x_2 - x_1) = 0$........ (i)

এবং $ax_2 + by_2 + c = 0$ .... (ii)

(ii) $\Rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = -(ax_1 + by_1 + c)$ .... (iii)

[$ax_1 + by_1$ যোগ ও বিয়োগ করে] (i) ও (iii) $\Rightarrow (a_2 + b_2)\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\} = (ax_1 + by_1 + c)^2$

$\therefore d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}$

উদহারণ ঃ একটি ত্রিভুজের উচ্চতা বের কর যার তিনটি শীর্ষ (2,0), (3,5)ও (−1,2) **.**

সমাধানঃ AD লম্বের দৈর্ঘ্য ঃ $d_1 = \frac{|3\times2-4\times0+11|}{5} = \frac{17}{5}$ একক, BF লম্বের দৈর্ঘ্যঃ $d_2 = \frac{|5(-1)-2-10|}{\sqrt{26}} = \frac{17}{\sqrt{26}}$ একক

CF লম্বের দৈর্ঘ্যঃ $d_3 = \frac{5}{\sqrt{13}}$

TYPE-03

দুটি রেখার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণঃ $\frac{\mathbf{ax_1+by_1+c}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}} = \pm\frac{\mathbf{a'x_1+b'y_1+c'}}{\sqrt{(\mathbf{a'})^2+(\mathbf{b'})^2}}$

প্রমানঃ $L_1 : ax + by + c= 0, L_2 : a'x + b'y + c' = 0$

(i) c ও c′ ধনাত্নক হলে L_1 ও L_2 মূলবিন্দু যে পার্শ্বে সেই পার্শ্বে হবে যাকে ধনাত্নক পার্শ্ব বলা হয়।

(ii) L_1 ও L_2 এর ছেদবিন্দু A. AL ও Ak দুটি সমদ্বিখন্ডক যারা L_1 ও L_2 এর মধ্যবর্তী কোনকে সমদ্বিখন্ডিত করছে। সুক্ষকোণের সমদ্বিখন্ডককে অন্তর্দ্বিখন্ডক এবং স্থুল কোণের সমদ্বিখন্ডককে বহিঃদ্বিখন্ডক বলে।

(iii) $\overline{PM} = \overline{PN}, \overline{PM} = \pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}; \overline{PN} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(a^1)+(b^1)^2}}$

(iv) সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক $\overline{Ak}$ যা মূলবিন্দুধারী । $\overline{Ak}$ রেখার উপর যে কোন বিন্দু p (x,y) মূলবিন্দু যে পার্শ্বে সেই পার্শ্বে হবে L_1 ও L_2 উভয় রেখার জন্য অথবা p (x,y) বিন্দুটি মূলবিন্দুটি যে পার্শ্বে তার বিপরীত পার্শ্বে হবে L_1 ও L_2 উভয় রেখার জন্য ।

সুতরাং $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ সমচিহ্ন বিশিষ্ট হবে। [(+)ve or (−) ve]

$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a'x_1+b'y_1c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$ যা সুক্ষ্ম কোণের সমদ্বিখন্ডিকের সমীকরণ যা মূলবিন্দুধারী।

(iv) অন্য সমদ্বিখন্ডক $\overline{AL}$.P যেকোন বিন্দু এমন যে মূলবিন্দু ও P বিন্দু L_1 এর বিপরীত পার্শ্বে ও L_2এর একই পার্শ্বে অথবা তারা L_1 এর একই পার্শ্বে ও L_2 এর বিপরীত পার্শ্বে। এক্ষেত্রে $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ অবশ্যই বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক ।

[সকল ক্ষেত্রের c ও c′ ধনাত্নক ধরা হয়েছে।]

∴দুটি রেখার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণঃ $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a'x_1+b'y_1+c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$

EXAMPLE −01: y অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে $3y = 4x - 10$ রেখার লম্বদূরত্ব 4 একক হয় তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত সরলরেখা, $3y = 4x - 10 \Rightarrow 4x - 3y - 10 = 0 \ldots\ldots\ldots. (1)$

মনে করি, y অক্ষের উপর নির্ণেয় বিন্দুর স্থানঙ্ক $(0, \alpha)$ ∴ (1) রেখাটি হতে $(0, \alpha)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-3\alpha-10|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3\alpha+10|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|3\alpha+10|}{5} = 4 \Rightarrow |3\alpha + 10| = 20 \Rightarrow 3\alpha + 10 = \pm 20$

" + " চিহ্ন নিয়ে পাই, $3\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = \frac{10}{3}$ এবং " − " চিহ্ন নিয়ে পাই, $3\alpha = -30 \Rightarrow \alpha = -10$

∴ নির্ণেয় বিন্দুর স্থনাঙ্ক $(0 , -10)$ এবং $\left(0, \frac{10}{3}\right)$

EXERCISE :

01. দেখাও যে, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ বিন্দু দুইটি হতে $2xcos\alpha - 3y\ cos\alpha - 3y\ sin\alpha = 6$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল α মুক্ত হবে।

02. $2x + y + 3 = 0$ ও $3x - 4y + 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভূক্ত সূক্ষকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [**Ans**: $\left(2\sqrt{5} + 3\right)\mathrm{x} + \left(\sqrt{5} - 4\right)\mathrm{y} + 3\sqrt{5} + 7 = 0$]

03. $y = 1, 3x - 4y = 5$ ও $5x + 12y + 13 = 0$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভূজের অন্তকেন্দ্র নির্ণয় কর। [**Ans**: $(0, 0)$]

EXAMPLE –02 : $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2\ (c + 3)$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি , $4x + 3y = c$বা $\Rightarrow c - 4x - 3y = 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $12x - 5y = 2\ (c + 3)$ বা $2\ (c + 3) - 12x + 5y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (ii)$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ হতে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব, $\left|\frac{c-4\times0-3\times0}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}\right| = \left|\frac{c}{5}\right|$

আবার, মূলবিন্দু $(0,\ 0)$ হতে (ii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $\left|\frac{2(c+3)-12\times0+5\times0}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}\right| = \left|\frac{2(c+3)}{13}\right|$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{c}{5}\right| = \left|\frac{2(c+3)}{13}\right| \Rightarrow \frac{c}{5} = \pm\frac{2(c+3)}{13}$;(+)ve নিয়ে $\frac{c}{5} = \frac{2(c+3)}{13} \Rightarrow 13c = 10c + 30 \Rightarrow 3c = 30$

$\therefore c = 10$ (–)ve নিয়ে $\frac{c}{5} = -\frac{2(c+3)}{13} \Rightarrow 13c = -10c - 30 \Rightarrow 23c = -30 \Rightarrow c = \frac{-30}{23}$

$c = 10$ একক , $\frac{-30}{23}$ একক (**Ans**)

EXAMPLE –03 : মূলবিন্দু থেকে $x\ sec\theta - y\ cosec\theta = k$ ও $x\ cos\theta - ysin\theta = kcos^2 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি, $xsec\theta - ycosec\theta = k$ বা $k - xsec\theta + ycosec\theta = 0 \ldots\ldots\ldots. (i)$

এবং $xcos\theta - ysin\theta = kcos2\theta$ বা $kcos2\theta - xcos\theta + ysin\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.. \ (ii)$

মূলবিন্দু থেকে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $P = \left|\frac{k-0\times sec\theta+0\times cosec\theta}{\sqrt{(sec\theta)^2+(cosec\theta)^2}}\right| = \frac{k}{\sqrt{\frac{cos^2\theta+sin^2\theta}{cos^2\theta.\ sin^2\theta}}}$

$= |(k\ cos\theta.\ sin\theta)| = \frac{1}{2}|k\ sin2\theta|\ \ [\therefore sin^2\theta + cos^2\theta = 1]$

$\Rightarrow |k \sin 2\theta| = 2p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ (iii)

আবার, মূলবিন্দু থেকে (ii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব, $p' = \left|\frac{k\cos 2\theta - 0\times\cos\theta + 0\times\sin\theta}{\sqrt{(-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}\right|$

$= |k\cos 2\theta|$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \Rightarrow |k\cos 2\theta| = p' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$ (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরনকে বর্গকরে যোগকরে পাই, $k^2\sin^2 2\theta + k^2\cos^2 2\theta = 4p^2 + p'^2$

$\Rightarrow k^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = 4p^2 + p'^2 \Rightarrow k^2.1 = 4p^2 + p'^2 \Rightarrow k^2 = 4p^2 + p'^2$

$\therefore \quad 4p^2 + p'^2 = k^2$(Proved)

EXERCISE :

01. দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

EXAMPLE -04 : $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি $12x - 5y + 26 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $x + 5y - 13 = 0 \ldots\ldots..$ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) কে যোগ করে পাই,$13x + 13 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $-1 + 5y - 13 = 0 \Rightarrow y = \frac{14}{5}$ $\therefore$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(-1, \frac{14}{5}\right)$

(ii) নং রেখার ঢাল ছেদ আকার $y = -\frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$

রেখাটির ঢাল, $m = \tan\theta = -\frac{1}{5}$তাহলে, $\cos\theta = \mp\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}$

ধরি, $A\left(-1, \frac{14}{5}\right)$ বিন্দু হতে 2 একক দুরে $-\frac{1}{5}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার উপর দুটো বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)

তাহলে, $\frac{x_1-(-1)}{\cos\theta} = \frac{y_1 - \frac{14}{5}}{\sin\theta} = 2 \therefore x_1 = -1 + 2\times\frac{5}{\sqrt{26}}$ [রেখা বরাবর নিম্ন দিকে]

$y_1 = \frac{14}{5} + 2\times\frac{-1}{\sqrt{26}} = \frac{14\sqrt{26}-10}{5\sqrt{26}}$ রেখা বরাবর উর্ধ্বদিকে, $\frac{x_2-(-1)}{\cos\theta} = \frac{y_2-\frac{14}{5}}{\sin\theta} = 2$

$\therefore x_2 = -1 + 2 \times \frac{-5}{\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}+10}{\sqrt{26}}$; $y_2 = \frac{14}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{14\sqrt{26}+10}{5\sqrt{26}}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু দুটি $\left(\frac{10-\sqrt{26}}{\sqrt{26}}, \frac{14\sqrt{26}-10}{5\sqrt{26}}\right)$ এবং $\left(\frac{10+\sqrt{26}}{\sqrt{26}}, \frac{14\sqrt{26}+10}{5\sqrt{26}}\right)$ (***Ans***)

Note : (i). যদি প্রথম রেখার উপর দুটি বিন্দু হতে দ্বিতীয় রেখার উপর একই লম্ব দূরত্ব $\left(\frac{2\sqrt{26}}{5}\right)$ একক হয় তবে দ্বিতীয় রেখার উপর দুটি বিন্দুর স্থানাংক অর্থাৎ, লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু দুটি নির্ণেয় কর।

(ii) $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে $\left(\frac{2\sqrt{26}}{5}\right)$ একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাংক নির্ণয় কর। $\left[\textbf{Ans}: \left(1, \frac{12}{5}\right), \left(-3, \frac{16}{5}\right)\right]$

EXERCISE :

01 $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Ans**: $12x - 5y + 19 = 0, 12x - 5y - 33 = 0$]

02. $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Ans**: $4x - 3y + 2 = 0, 4x - 3y - 18 = 0$]

EXAMPLE –05 : এমন সরলরেখার সমীরকণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

SOLVE : নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \tan^{1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135°$

ধরি, রেখাটি x অক্ষকে (a, o) ও $(-a, o)$ বিন্দুতে ছেদকরে। এবং y অক্ষকে (o, a) ও (o, b) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, রেখাটির ছেদ আকার $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটিকে ঢাল ছেদ আকারে পরিণত করি।

$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + b$ এখানে রেখাটির ঢাল m হলে, $m = -\frac{b}{a}$

প্রশ্নমতে, $m = -1 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow a = b$ অনুরূপ ভাবে রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1 \Rightarrow$ $y = -\frac{b}{a}x - b$ এখানে রেখাটির ঢাল $= -\frac{b}{a}$

প্রশ্নমতে, $-1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow a = b$

উভয় ক্ষেত্রে, $a = b$ চিত্র হতে মূলবিন্দু হতে নির্ণয় রেখার উপর অংকিত লম্ব x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোন তৈরী করে।

তাহলে, $\cos 45° = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow a = 4\sqrt{2} = b$ ∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1$

$\Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{2}} + \frac{y}{4\sqrt{2}} = \pm 1 \Rightarrow x + y = \pm 4\sqrt{2}$

অথবা, সরল রেখার লম্ব আকার হতে জানি, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

এখানে, রেখাটির ঢাল $= \tan\theta = -1 \therefore \theta = 135°$

$\alpha = 180° - 135° = 45°$এবং $\alpha = 180° + 45° = 225°$

$\therefore x \cos 45° + y \sin 45° = 4$ [$p = 4$ একক]

$\Rightarrow x.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow x + y = 4\sqrt{2}$ এবং $x\cos(225°) + y\sin(225°) = 4$

$\Rightarrow \frac{x}{-\sqrt{2}} + \frac{y}{-\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow x + y = -4\sqrt{2}$ ∴ নির্ণেয় রেখা দুটি, $x + y = \pm 4\sqrt{2}$ (**Ans**)

EXAMPLE –06 : মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

রেখাটির ঢাল m_1 হলে, $m_1 = \frac{3}{4}$

রেখাটির উপর লম্ব রেখার ঢাল m_2 হলে, $m_1 \times m_2 = -1$ হবে $\frac{3}{4} \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{4}{3}$

নির্ণেয় রেখার ঢাল $m_2 = \tan\theta = -\frac{4}{3}$ নির্ণেয় রেখাটির লম্ব আকার হতে পাই,$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

এখানে, $\tan\theta = -\frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

$\theta = 90° + \alpha \Rightarrow \alpha = \theta - 90° = 180° - \tan^{-1}\frac{4}{3} - 90° = 90° - \tan^{-1}\frac{4}{3}$

প্রথম চতুর্থভাগের জন্য, $\alpha = 90° - \cos^{-1}\frac{3}{5} = 90° - \sin^{-1}\frac{4}{5}$

তৃতীয় চতুর্থভাগের জন্য, $\alpha = 180° + 90° - \cos^{-1}\frac{3}{5} = 270° - \cos^{-1}\frac{3}{5} = 270° - \sin^{-1}\frac{4}{5}$

∴ নির্ণেয় রেখাটির সমীকরণ, $x\cos\left(90° - \sin^{-1}\frac{4}{5}\right) + y\sin\left(90° - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = 7$

$\Rightarrow x\sin.\sin^{-1}\frac{4}{5} + y\cos.\cos^{-1}\frac{3}{5} = 7 \Rightarrow x.\frac{4}{5} + y\frac{3}{5} = 7 \Rightarrow 4x + 3y = 35$

আবার, রেখাটির সমীকরণ, $x\cos\left(270° - \sin^{-1}\frac{4}{5}\right) + y\sin\left(270° - \cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = 7$

$\Rightarrow x\left(-\sin.\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) + y\left(-\cos.\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = 7 \Rightarrow -\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} = 7 \Rightarrow 4x + 3y = -35$

EXERCISE :

01. দেখাও যে, $(0,1)$ বিন্দুটি $12x - 5y - 2 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণগুলোর একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

02. $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটি অন্তর্ভূক্ত স্থুলকোণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

    [**Ans**: $y + x + 2 = 0$]

EXAMPLE –07 : $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভূক্ত রেখা দুইটির অন্তভূক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। এবং দেখাও যে, সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের কোনটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।

SOLVE : প্রদত্ত রেখা দুটি $L_1: 4x - 4y + 3 = 0$

$L_2 : x + 7y - 2 = 0$ উক্ত চিত্রে L' ও L'' যথাক্রমে L_1 ও L_2 রেখার সূক্ষ্মকোন ও স্থুলকোনের দুটি সমদ্বিখন্ডক।

সমদ্বিখন্ডক দুটির সমীকরণ, $\frac{4x-4y+3}{\sqrt{4^2+(-4)^2}} = \pm\frac{x+7y-2}{\sqrt{1^2+7^2}} \Rightarrow \frac{4x-4y+3}{4\sqrt{2}} = \pm\frac{x+7y-2}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{4x-4y+3}{4} = \pm\frac{x+7y-2}{5}$

$(+)$ve নিয়ে $20x - 20y + 15 = 4x + 28y - 8 \Rightarrow 16x - 48y + 23 = 0$

যা L' রেখা $(-)$ve নিয়ে $20x - 20y + 15 = -4x - 28y + 8$

$\Rightarrow 24x + 8y + 7 = 0$ যা L'' রেখা কোনটি সূক্ষ্মকোনের এবং কোনটি স্থুলকোনের সমদ্বিখন্ডক। $4 \times 1 + (-4) \times 7 = -24 < 0$ $(+)$ve নিলে সূক্ষ্মকোনের সমদ্বিখন্ডক এবং $(-)$ ve নিলে স্থুলকোনের সমদ্বিখন্ডক পাওয়া যাবে।

L' রেখা হতে পাই, $16x - 48y + 23 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{48}$ এখানে L' রেখাটির দাল m' হলে $m' = \frac{1}{3}$; L'' রেখা হতে পাই, $24x + 8y + 7 = 0 \Rightarrow y = -3x - \frac{7}{24}$ এখানে L'' রেখাটির ঢাল m'' হলে, $m'' = -3$

এখন $m' \times m'' = \frac{1}{3}(-3) = -1$ যেহেতু ঢাল দ্বয়ের গুণফল -1 সুতরাং প্রদত্ত রেখাদুটির সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। $c_1 = 3$, $c_2 = -2$ যেহেতু c_1 ও c_2বিপরীত চিহ্ন যুক্ত সুতরাং মূলবিন্দুধারী কোনের সমদ্বিখন্ডকটি হবে স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক অর্থাৎ, $24x + 8y + 7 = 0$ রেখাটি মূলবিন্দধারী

EXAMPLE –০৪ : যে ত্রিভূজের বাহুগুলোর সমীকরণ $4x + 3y - 12 = 0,\ 3x - 4y + 16 = 0$

এবং $4x - 3y - 12 = 0$ তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত বাহুতিনটির সমীকরন,

$4x + 3y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$

$3x - 4y + 16 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(ii)$

$4x - 3y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(iii)$

PROCESS – 01 : (i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে, সূক্ষকোনের সমদ্বিখন্ডক

$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4x-3y-12}{4^2+(-3)^2}$ [$\therefore 4 \times$

$4 + 3(-3) = 7 \angle 0$] $\Rightarrow 4x + 3y - 12 == -4x + 3y + 12 \quad \Rightarrow 8x = 24$

$x = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$ (iv) [স্থুলকোনের সমদ্বিখন্ডক অবশ্যই $y = 0$ হবে]

আবার, (i) ও (ii) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, সূক্ষ কোনের সমদ্বিখন্ডক,

$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm \frac{3x-4y+16}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$ [$4 \times 3 - 3 \times 4 = 0$] পরস্পর লম্ব সুতরাং কোন চিহ্ন নিলেই হবে

$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 3x - 4y + 16 \Rightarrow x + 7y - 28 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(v)$

(v) নং এ $x = 3$ বসিয়ে পাই, $3 + 7y - 28 = 0 \Rightarrow y = \frac{25}{7}$ $\therefore$ নির্ণেয় অন্তকেন্দ্র $\left(3\,,\ \frac{25}{7}\right)$

PROCESS – 02 :

(i) নং হতে $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$; (ii) নং হতে $\frac{x}{-\frac{16}{3}} + \frac{y}{4} = 1$; (iii) নং হতে $\frac{y}{3} + \frac{y}{-4} = 1$

(i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু (x অক্ষের উপর) $C\ (3, 0)$

(i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু (y অক্ষের উপর) $B\ (0, 4)$

(ii) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু $A\ (x, y)$হলে $\frac{x}{48+48} = \frac{-y}{-36-64} = \frac{1}{-9+16} \Rightarrow x = \frac{2\times48}{7} = \frac{96}{7} \Rightarrow \quad y = \frac{100}{7}$

$\therefore$ A বিন্দু স্থানাংক $\left(\frac{96}{7}, \frac{100}{7}\right)$ ধরি অন্তকেন্দ্র $I\ (x, y)$ তহলে, $x = \frac{0\times CA+3\times AB+\frac{96}{7}\times BC}{CA+AB+BC}$

$y = \frac{4\times CA+0\times AB+\frac{100}{7}\times BC}{CA+AB+BC}$

EXERCISE :

01. $(0,0), (0,3)$ ও $(4,0)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভূজের কোণগুলির অন্তদ্বিখন্ডক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে তারা সমবিন্দু। [**Ans**: $y = x, x + 3y - 4 = 0$]

PART 04

Type-01: দুটি রেখার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণঃ $\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x_1+b'y_1+c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$

প্রমানঃ $L_1 : ax + by + c= 0$, $L_2 : a'x + b'y + c' = 0$

(i) c ও c′ ধনাত্মক হলে L_1 ও L_2 মূলবিন্দু যে পার্শ্বে সেই পার্শ্বে হবে যাকে ধনাত্মক পার্শ্ব বলা হয়।

(ii) L_1 ও L_2 এর ছেদবিন্দু A. AL ও Ak দুটি সমদ্বিখন্ডক যারা L_1 ও L_2 এর মধ্যবর্তী কোনকে সমদ্বিখন্ডিত করছে। সুক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডককে অন্তর্দ্বিখন্ডক এবং স্থুল কোণের সমদ্বিখন্ডককে বহিঃদ্বিখন্ডক বলে।

(iii) $\overline{PM} = \overline{PN}$, $\overline{PM} = \pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\overline{PN} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{(a^1)+(b^1)^2}}$

(iv) সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক $\overline{Ak}$ যা মূলবিন্দুধারী । $\overline{Ak}$ রেখার উপর যে কোন বিন্দু p (x,y) মূলবিন্দু যে পার্শ্বে সেই পার্শ্বে হবে L_1 ও L_2 উভয় রেখার জন্য অথবা p (x,y) বিন্দুটি মূলবিন্দুটি যে পার্শ্বে তার বিপরীত পার্শ্বে হবে L_1 ও L_2 উভয় রেখার জন্য ।

সুতরাং $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ সমচিহ্ন বিশিষ্ট হবে। [(+)ve or (−) ve]

$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a'x_1+b'y_1c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$ যা সুক্ষ্ম কোণের সমদ্বিখন্ডিকের সমীকরণ যা মূলবিন্দুধারী।

(iv) অন্য সমদ্বিখন্ডক $\overline{AL}$.P যেকোন বিন্দু এমন যে মূলবিন্দু ও P বিন্দু L_1 এর বিপরীত পার্শ্বে ও L_2এর একই পার্শ্বে অথবা তারা L_1 এর একই পার্শ্বে ও L_2 এর বিপরীত পার্শ্বে। এক্ষেত্রে $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ অবশ্যই বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক ।

[সকল ক্ষেত্রের c ও c′ ধনাত্মক ধরা হয়েছে।]

∴ দুটি রেখার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণঃ $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a'x_1+b'y_1+c'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$

EXAMPLE –01: **একটি ত্রিভূজের অভ্যন্তরে অংকিত বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, ত্রিভূজের তিনটি শীর্ষঃ** A : (1,2) ; B: (25,8) এবং C : (9, 21)

সমাধানঃ $\overline{AB}$: x − 4y + 7 = 0 , $\overline{BC}$: 13x + 16y − 453 = 0, $\overline{CA}$: 19x − 8y −3 = 0,
ধ্রুবক (±)ve ধরে সমীকরণ তিনটি আবার লিখি

$\overline{AB}$: 7 + x − 4y = 0 , $\overline{BC}$: 453 −13x − 16y = 0 এবং $\overline{CA}$: 3 − 19x + 8y = 0

$\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$ এর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ যা মূলবিন্দু ধারী। ∴ $\frac{453-13x-16y}{\sqrt{13^2+16^2}} = \frac{3-19x-8y}{\sqrt{19^2+8^2}}$

$\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$এর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ যা মূলবিন্দু ধারী।

$\therefore \frac{3-19x-8y}{\sqrt{19^2+8^2}} = +\frac{x-4y+7}{\sqrt{1^2+4^2}}$ ∴ $\frac{453-13x-16y}{5\sqrt{17}} = \frac{19x-8y-3}{5\sqrt{17}} = \frac{x-4y+7}{\sqrt{17}}$

* সমাধান করে, (x,y) : $\left(\frac{13}{2}, 11\right)$ যা ABC ত্রিভুজের অন্তবৃত্তের কেন্দ্র বা অন্তকেন্দ্র অথবা $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

নিজে চেষ্টা করঃ

(i) 13x − 9y = 10 ও x + 3y = 6 রেখা দ্বয়ের মধ্যবর্তী সুক্ষ্ম ও স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans: সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক: 2x −6y + 5 = 0 এবং স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক: 9x + 3y = 20 ।

(ii) একটি ত্রিভূজের বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $7x - y + 11= 0$, $x + y - 15 = 0$ এবং $7x + 17y + 65 = 0$ অন্তকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। Ans: (5,1)

<u>Type-02</u>: সরল রেখার পরামিতিক সমীকরণ

$x = x_1 + r\cos\theta$; $y = y_1 + r\sin\theta$ .... (i)

$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$ .... (ii)

এখানে r হলো পরামিতি কারণ [x_1ও y_1 **জানা, শুধু** r অজানা রাশি]

|(i) ও (ii) একত্রে পরামিতিক সমীকরণ প্রকাশ করে।

(i) হলো রেখাটির উপর চলমান বিন্দু p (x,y) এর পরামিতিক স্থানাংক, $\overline{AP} = r, r\cos\theta = x - x_1$, $r\sin\theta = y - y_1$

Note :

সমস্যা solve করার সময় আমরা θ ও $\pi + \theta$ এর জন্য নির্ণয় করব কারণ নিদির্ষ্ট বিন্দু A (x_1ও y_1) হতে p বিন্দু ডানদিকে r দুরত্বে অথবা বামদিকে r দুরত্বে থাকতে পারে।

EXAMPLE –01 : **-1ঃ A: $(-5,-3)$এবং B বিন্দুটি $x - 3y - 1= 0$ রেখার উপর। $\overline{AB}$ X- অক্ষের সাথে সুক্ষ্মকোণ তৈরি করে যার ট্যানজেন্ট $\frac{5}{12}$ । AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ ধরি, B (x,y) বিন্দুটি $x - 3y - 1 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত । এবং $|\overline{AB}| = r$

A $(-5, -3)$ বিন্দু হতে B (x, y) বিন্দুর দুরত্ব r হলে,

$x = -5 + r\cos\theta = -5 + r.\frac{12}{13}$, $y = -3 + r\sin\theta = -3 + \frac{5}{13}r$.

রেখাটিতে বসিয়ে, $\therefore -5 + \frac{12}{13}r - 3(-3 + \frac{5}{13}r) - 1 = 0 \Rightarrow -65 + 12r + 117 - 15r - 13 = 0$

$\Rightarrow -3r + 39 = 0 \Rightarrow 3r = 39 \therefore r = 13$ একক , AB = 13একক

EXAMPLE –02 : **একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$ । এ রেখার উপর $(2,-1)$ বিন্দু হতে 15 একক দুরত্বে বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ ধরি, রেখাটির উপর 15 একক দুরত্বে p (x, y) ও p_1 (x_1, y_1) দুটি বিন্দু।

$\tan\theta = \frac{-3}{4}$১ম ক্ষেত্রঃ $\cos\theta = \frac{-4}{5}$; $\sin\theta = \frac{3}{5}$, ২য় ক্ষেত্রঃ $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\sin\theta = \frac{-3}{5}$

১ম ক্ষেত্রঃ $x = 2 + 15\cos\theta + = 2 + 15 \times \left(\frac{4}{5}\right) = 2 - 12 = -10$

$y = -1 + 15\sin\theta = -1 + 15 \times \left(\frac{3}{5}\right) = -1 + 9 = 5$

২য় ক্ষেত্রে ঃ $x_1 = 2 + 15 \times \left(\frac{4}{5}\right) = 2 + 12 = 14$, $y_1 = -1 + 15 \times (-\frac{3}{5}) = -1 - 9 = -10$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু দুটির স্থানাংক ঃ $(-10, 8)$ অথবা $(14, -7)$

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{3}{4}$ যা P: $(-2,-5)$ বিন্দুগামী

Q: (x, y) বিন্দুটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হলে Q বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।[PQ = 10 units]

Ans: (6,1) অথবা $(-10,-11)$

(ii) (1,2) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা বিন্দুটি হতে $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ একক দুরত্বে $x + y = 4$ রেখাকে ছেদ করে। রেখাটির দিক নির্ণয় কর। Ans: 15^0 অথবা 75^0

<u>Type- 03</u> : রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

(A) ax+by+c=0 রেখার সাপেক্ষে $(\mathbf{x^1}, \mathbf{y^1})$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয়ঃ

পদ্ধতি- ০১ঃ (x^1, y^1) বিন্দু হতে ax+by+c=0 রেখার দুরত্ব, d= $\frac{ax^1+by^1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

০২ঃ প্রতিচ্ছবি 2d দুরত্বে ax+by+c=0 রেখার অপর পার্শ্বে অবস্থিত । ধরি, বিন্দুটি (x_1', y_1'), (x^1, y^1) ও(x_1', y_1') বিন্দুদ্বয়ের সংযোজন রেখা উপর অবস্থিত যা ax+by+c=0 রেখার উপর লম্ব।

$\therefore$ax+by+c=0 রেখার লম্ব রেখার ঢাল= $\frac{a}{b}$ তাহলে, $x_1' = x' + (2d)\cos\theta$, $y_1' = y' + (2d)\sin\theta$,

যেখানে, $\tan\theta = \frac{b}{a}$ $\therefore \cos\theta = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\therefore x_1' = x' + 2 . \frac{ax^1+by^1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \left(\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$ $x' \pm \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax' + by' + c)$, $y'_1 = y' \pm \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}(ax' + by' + c)$

Cheeck: 1) কোন চতুর্ভাগে বিন্দুটি অবস্থিত । সে অনুযায়ী x_1' ও y_1' নির্ণয় করতে হবে।

২) লক্ষ রাখতে হবে বিন্দু ও তার প্রতিচ্ছবি যেন ax+by+c=0 রেখার বিপরীত পার্শ্বে হয়। বিন্দু ও তার প্রতিচ্ছবি বিন্দু রেখাটির বাম পাশে বা ax+by+c এ বসালে বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হবে।

EXAMPLE –01 : **3x + 2y + 12 = 0 রেখার সাপেক্ষে (-3,-4) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।**

ধরি, প্রতচ্ছবি বিন্দু (x', y'), (-3,-4) বিন্দু হতে, 3x + 2y + 12 = 0 রেখার লম্ব দুরত্ব, d= $\frac{3(-3)+2(-4)+12}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$ একক. 3x + 2y + 12 = 0 রেখার লম্ব রেখার ঢাল = $\frac{3}{2}$, তাহলে $\frac{3}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট (-3,-4) বিন্দুগামী রেখার উপরস্থ বিন্দু (x', y'). $\therefore x' = -3 + (2d)\cos\theta = -3 + \frac{2\times5}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{\sqrt{13}} = -3 + \frac{30}{13} = \frac{-39+30}{13} = \frac{-9}{13}$

$y' = -4 + (2d)\sin\theta = -4 + \frac{2\times5}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = -4 + \frac{30}{13} = \frac{-52+20}{13} = \frac{-32}{13}$

নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংকঃ $\left(-\frac{9}{13}, \frac{-32}{13}\right)$

Cheeck : $3 \times \frac{-9}{13} + 2 \times \frac{-32}{13}$ +12 = 5 (+)ve , 3×(-3) + 2 (-4) + 12 = -5 (-) ve $\therefore$ উত্তর সঠিক।

০২। ax+by+c=0 রেখার সাপেক্ষে $a_1x + b_1y$ +c = 0 রেখার প্রতিচ্ছতি নির্ণয়।

পদ্ধতি -০১ঃ প্রদত্ত রেখার দ্বয়ের ছেদ বিন্দু ও মধ্যবর্তি সুক্ষকোন নির্ণয় করি।০২ ax+by+c= 0 রেখা x অক্ষের সাথে α কোণে আনত এবং $a_1x + b_1y$ +c= 0 রেখা x অক্ষের সাথে θ কোণে আনত হলে, প্রতিচ্ছবি রেখা x অক্ষের সাথে $(2\alpha - \theta)$ কোণ তৈরী করবে। ঢাল ছেদ আকৃতি হতে প্রতিচ্ছবি রেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$ নির্ণয় করা যাবে যেখানে, $m = \tan(2\alpha - \theta)$

EXAMPLE –02 : **$x - \sqrt{3y} - 2 + 3\sqrt{3} = 0$ রেখার সাপেক্ষে $\sqrt{3}x - y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।**

সমাধানঃ ছেদবিন্দু = (2,3) $x - \sqrt{3}y - 2 + 3\sqrt{3} = 0$ রেখার ঢাল , $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0$

$\sqrt{3}x - y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$ রেখার ঢাল, $\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^0$ $\therefore$ রেখার দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$\theta = 60^0 - 30^0 = 30^0$,প্রতিচ্ছবি রেখা x – অক্ষের সাথে $(2 \times 30^0 - 60^0) = 0^0$

কোন তৈরী করে। সুতরাং রেখাটির ঢাল : m = 0 , প্রতিচ্ছবি রেখাটির সমীকরনঃ y- 3= 0

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) প্রমাণ কর যে, y = x রেখার সাপেক্ষে (x´, y´) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (y´, x´)

Note: y = x রেখার সাপেক্ষে (5,4) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (4,5)

(ii) প্রমাণ কর যে, y = x রেখার সাপেক্ষে ax+by+c= 0 রেখার প্রতিচ্ছবি bx+ay+c=0

Note: y = x রেখার সাপেক্ষে 13x+ 7y+4=0 **রেখার প্রতিচ্ছবি** 7x+13y+4=0

EXAMPLE –03 : **x+2y+-3=0 রেখার সাপেক্ষে A(-3,-2) বিন্দুর এবং B(7,3) ও C(10,-1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছতি নির্ণয়।**

সমাধান ঃ x+2y+-3=0 ....(i) রেখার ঢাল = $-\frac{1}{2}$ এর উপর লম্ব রেখার ঢাল= 2 ।

ধরি, (i) এর সাপেক্ষে A (-3,-2) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি Á (h,k) AÁ এর মধ্যেবিন্দু ($\left(\frac{h-3}{2}, \frac{k-2}{2}\right)$, (i) এর উপর অবস্থিত এবং AÁ ঢাল = $\frac{k+2}{h+3} = 2$

$\therefore$ (i) হতে পাই , $\frac{h-3}{2} + 2\times\frac{k-2}{2} - 3 = 0 \Rightarrow$ h-3+2k-4-6=0$\Rightarrow$h+2k-13=0..... (ii)

এবং 2h+6=k+2$\Rightarrow$4h+2k+8=0......... (iii)

(ii)+ (iii)$\Rightarrow$5h-5=0$\Rightarrow$h=1, (ii) হতে 1+2k-3=0$\Rightarrow$k=6

$\therefore$x+2y-3=0 রেখার সাপেক্ষে A(-3,-2) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (1,6) ।

সূত্রের সাহায্যেঃ A(-3,-2) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি = $\left(\frac{(b^2-a^2)h-2a(bk+c)}{a^2+b^2}, \frac{(a^2-b^2)k-2b(ah+c)}{a^2+b^2}\right)$

$=\left(\frac{(2^2-1^2)\times(-3)-2\times1\times(2\times-2-3)}{1^1+2^2}, \frac{(1^1-2^2)\times(-2)-2\times2(1\times-3-3)}{1^1+2^2}\right)$

$=\left(\frac{-9-2(-4-3)}{5}, \frac{(-3)\times(-2)-2\times2(-6)}{5}\right) = \left(\frac{-9+14}{5}, \frac{6+24}{5}\right) = (1,6)$

B(7,3) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি = $\left(\frac{3\times7-2(2\times3-3)}{5}, \frac{-3\times3-4(1\times7-3)}{5}\right) = \left(\frac{21-6}{5}, \frac{-9-16}{5}\right) = (3,-5)$

C(10,-1) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি = $\left(\frac{30\times10-2(2\times-1-3)}{5}, \frac{-3\times-1-4(1\times10-3)}{5}\right) = \left(\frac{30+10}{5}, \frac{3-28}{5}\right) = \left(\frac{40}{5}, \frac{-25}{5}\right) =$ (8,5)

ফলাফলঃ x+2y+-3=0 রেখার সাপেক্ষে A(-3,-2) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (1,6) এবং B(7,3) ও (10,-1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি (3,-5) ও (8,-5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ।

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) $y = x$ সলর রেখা ভিত্তিক $p(-3,-6)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি কত ? [**Ans**: $(-\mathbf{6}, -\mathbf{3})$]

(ii) $y = -x$ সলর রেখা ভিত্তিক $p(-3,-2)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি কত ? [**Ans**: $(\mathbf{2}, \mathbf{3})$]