(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+9}{x^2-7x+3}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}$ [লব ও হরকে x^2 দ্বারা ভাগ করে]

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}=\dfrac{2+0+0}{1-0+0}=\dfrac{2}{1}=2$ **(Ans.)**

3.(i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{1+x}+1)$ দ্বারা গুণ করে]

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}+1)$

$=\sqrt{1}+1=1+1=2$ **(Ans.)**

(ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$ দ্বারা গুণ করে]

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\dfrac{2}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1$ **(Ans.)**

(iii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})$ দ্বারা গুণ করে]

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)-(1-3x)}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$=\dfrac{5}{1+1}=\dfrac{5}{2}$ **(Ans.)**

(iv) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x})}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})$ দ্বারা গুণ করে]

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}{(1+x-7+x)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}{2(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-(x-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})}{2(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}-\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{7-x})$

$=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+3}+\sqrt{7-3})=-\dfrac{1}{2}(2+2)$

$=-\dfrac{1}{2}\times4=-2$ **(Ans.)**

(v) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{x^2-1-x+1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{x(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{x}=\dfrac{\sqrt{1-1}-\sqrt{1-1}}{1}$

$=0$ **(Ans.)**

4.(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3^{-2x}}{1+3^{-2x}}$ [লব ও হরকে 3^x দ্বারা ভাগ করে]

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}=\dfrac{1-0}{1+0}$ $[\because \frac{1}{3^\infty}=\frac{1}{\infty}=0]$

$=1$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

(ii) $\frac{b}{2^x} = \theta \therefore 2^x = \frac{b}{\theta}$

$x \to \infty$ হলে $\theta \to 0$ হবে

$\therefore \lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{b}{2^x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{b}{\theta}\cdot\sin\theta$

$= b \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = b.1 = b$ **(Ans.)**

5. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{7}{2}} - a^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

ধরি, $\sqrt{x} = y$ এবং $\sqrt{a} = b$

$x \to a$ হলে $y \to b$

$= \lim_{y\to a}\frac{y^7 - b^7}{y - b}$

$= 7b^6 \left[\because \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$

$= 7(\sqrt{a})^6 = 7a^3$ **(Ans.)**

6. (i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...\right)-\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...\right)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2x + 2\frac{x^3}{3!}+...}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\left(1+\frac{x^2}{3!}+...\right)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} 2\left(1+\frac{x^2}{3!}+...\right)$

$= 2.1$

$= 2$ **(Ans.)**

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-2}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}+\cdots\cdots\right)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{x^3}{12}+\cdots\cdots\right) = 0$ **(Ans.)**

(iii) ধরি, $\sin x = z$

যখন $x \to 0, \sin x \to 0$ অর্থাৎ, $z \to 0$

সুতরাং, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$

$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z}$

$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...\right)-1\right]$

$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...\right)$

$= \lim_{z\to 0}\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...\right) = 1$ **(Ans.)**

7.(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b}\frac{\lim_{ax\to 0}\frac{\tan ax}{ax}}{\lim_{bx\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}$ $\left[x \to 0 \text{ হলে, } ax \to 0,\ bx \to 0\right]$

$= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1} = \frac{a}{b}$ **(Ans.)**

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}$

$= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\times a^2}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\times b^2}$

[$x \to 0$ হলে, $\frac{ax}{2}\to 0, \frac{bx}{2}\to 0$ হবে]

$= \frac{1.1.a^2}{1.1.b^2} = \frac{a^2}{b^2}$ **(Ans.)**

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0}(1+\sin x)}{\lim_{x\to 0}\cos x}$

$= \frac{1+0}{1} = 1$ **(Ans.)**

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}$ [$x\to 0$ হলে $\frac{x}{2}\to 0$ হবে]

$= \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{7x}{2}}{3x^2}$

$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= \frac{2}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ [$x \to 0$ হলে $\frac{7x}{2} \to 0$ হবে]

$= \frac{49}{6}$ **(Ans.)**

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2}$ [$x \to 0$ হলে $\frac{x}{2} \to 0$ হবে]

$= \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(vii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x}$

[লব ও হরকে sinx দ্বারা ভাগ করে]

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x . \sin^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x . \sin^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$

$\times \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{1\times 1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(viii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} . \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x\cos\frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{x} = \lim_{\frac{x}{2}\to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} . \frac{1}{2}$

$= 1 . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(ix) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos 2x) - 2\cos x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\cos^2 x - 2\cos x}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x(1-\cos x)}{x^2}$

$= -2 \lim_{x\to 0} (\cos x) . \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$= -2 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$= - \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$

$= -1 \times 1$

$= -1$ **(Ans.)**

8. (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 8x \sin x}{2\sin 4x \sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\times 4x)}{\sin 4x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 4x \cos 4x}{\sin 4x}$

$= 2 \lim_{x\to 0} \cos 4x$

$= 2.1$

$= 2$ **(Ans.)**

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin 3x}{2\sin 3x\cos 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x}{\cos 3x}=\frac{1}{1}=1$ **(Ans.)**

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}(\cos 2x+\cos x)\times\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$

$=(\cos 0+\cos 0)\times\frac{1}{1}=(1+1)=2$ **(Ans.)**

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{ax+bx}{2}\sin\frac{bx-ax}{2}}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{2\times\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\times\frac{(a+b)}{2}\times\frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}}\times\frac{(b-a)}{2}\right\}$

$=2\times\left\{\lim_{\frac{(a+b)x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\right\}$

$\times\left\{\lim_{\frac{(b-a)x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}}\right\}\times\frac{(a+b)}{2}\times\frac{(b-a)}{2}$

$=1\times 1\times\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$ **(Ans.)**

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{5}{2}$

$=\frac{5}{2}.1\times 1$ [$x\to 0$ হলে, $\frac{5x}{2}\to 0, \frac{x}{2}\to 0$ হবে]

$=\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

9. (i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{\sec x(\sec x-\tan x)\}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right\}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(ii) $\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ | ধরি $x=\frac{\pi}{2}+h$, $x\to\frac{\pi}{2}$ হলে $h\to 0$

$=\lim_{h\to 0}(-h)\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$

$=\lim_{h\to 0}(-h)(-\cot h)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\tan h}=1$ **(Ans.)**

(iii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)\cos x}$

[লব ও হরকে $(1+\sin x)$ দ্বারা গুণ করে]

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}$

$=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1+1}=0$ **(Ans.)**

10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\tan x}{\frac{\pi}{2}-x}$ | ধরি $x=\frac{\pi}{2}+h$, $x\to\frac{\pi}{2}$ হলে $h\to 0$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sec\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{cosec} h+\cot h}{(-h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h\sin h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h\sin h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}$

$=1\times 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}$ [$h\to 0$ হলে $\frac{h}{2}\to 0$ হবে]

$=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

11. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta}$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^3\theta} - \dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{\cos^2\theta \sin\theta}$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin^2\theta)\sin\theta}$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)\sin\theta}$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$= \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}(1+\sin\frac{\pi}{2})}$

$= \dfrac{1+1+(1)^2}{1(1+1)} = \dfrac{3}{2}$ **(Ans.)**

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1}x}{x}$

ধরি, $\tan^{-1}x = y$ বা, $x = \tan y$

$\therefore \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\tan y} = 1$ **(Ans.)**

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{180}}{x}$ $[\because x^\circ = \dfrac{\pi x^c}{180}]$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{180}}{\dfrac{\pi x}{180}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{180}}{\pi}$

$= \dfrac{\pi}{180} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{180}}{\dfrac{\pi x}{180}}\right) = \dfrac{\pi}{180}\cdot 1$

$= \dfrac{\pi}{180}$ **(Ans.)**

14. (i) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$

$= \lim\limits_{x\to y} \dfrac{2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}{x-y}$

$= \lim\limits_{x\to y} \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \lim\limits_{\frac{(x-y)}{2}\to 0} \dfrac{\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}$

[$x \to y$ হলে, $\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \to 0$]

$= \cos\left(\dfrac{y+y}{2}\right)\cdot 1 \left[\because \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$

$= \cos y$ **(Ans.)**

(ii) $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{\tan x - \tan y}{x-y} = \lim\limits_{x\to y} \dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin y}{\cos y}}{x-y}$

$= \lim\limits_{x\to y} \dfrac{\dfrac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y}}{x-y}$

$= \lim\limits_{x\to y} \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} \cdot \dfrac{1}{x-y}$

$= \lim\limits_{x-y\to 0} \dfrac{\sin(x-y)}{(x-y)} \cdot \lim\limits_{x\to y} \dfrac{1}{\cos x\cos y}$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{\cos y . \cos y}$

$= \sec^2 y$ **(Ans.)**

15. (i) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{যখন } x<1 \\ 4x^3-3x & \text{যখন } x>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3x-2) = 3-2 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(4x^3-3x) = 4-3 = 1$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2+1$

$\therefore f(2) = 2^2+1 = 5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)$

$= 2^2+1 = 5$

আবার, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+1) = 2^2+1 = 5$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

(iii) যখন $x = 1$ তখন $f(x) = 2$

$\therefore f(1) = 2$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x^2 = 1$

আবার, $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} x^2 = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) \neq f(1)$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়।

(iv) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = |x|$

$\therefore f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$x = 0$ হলে, $f(0) = 0$

এখন, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x) = 0$

আবার, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (-x) = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = f(0)$

$\therefore$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(v) $x = 0$ বিন্দুতে $f(x) = 1$

$\therefore f(0) = 1$

এখন, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$

আবার, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{x}$

$= \lim_{x\to0^-} (-1) = -1$

যেহেতু $\lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয়।

(vi) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

এখানে $x = 0$ হলে $f(x) = 1$

$\therefore f(0) = 1$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x - |x|}{x}$

$= \lim_{x\to0^-} \frac{x + x}{x} = \lim_{x\to0^-} (2) = 2$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x - |x|}{x}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{x - x}{x} = \lim_{x\to0^+} (0) = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to0^+} f(x) \neq \lim_{x\to0^-} f(x) \neq f(0)$

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

(vii) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{যখন } x \geq 1 \end{cases}$

$x = 1$ হলে, $f(x) = \frac{1}{x} \therefore f(1) = 1$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x = 1$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x} = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

(viii) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{যখন } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 0 = 2$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1 + \sin x) = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left\{2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right\} = 2 + 0 = 2$

যেহেতু $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

16.(i) $x \neq 0$ হলে, $\left|x \cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|$

$\Rightarrow -|x| \leq x\cos\frac{1}{x} \leq |x|$

এখন, $\lim_{x\to0} -|x| = \lim_{x\to0} |x| = 0$

স্যান্ডউইচের উপপাদ্য হতে পাই,

$\lim_{x\to0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (প্রমাণিত)

(ii) $\lim_{x\to0} x^2 \cos\frac{1}{x^2}$

আমরা জানি, $-1 \leq \cos\frac{1}{x^2} \leq 1$

বা, $-x^2 \leq x^2\cos\frac{1}{x^2} \leq x^2$

বা, $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 \le \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} \le \lim\limits_{x\to 0} x^2$

বা, $0 \le \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} \le 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} = 0$ (প্রমাণিত)

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(\cos x + \sin^3 x)}{(x^3+1)(x-5)}$

আমরা জানি, $-1 \le \cos x \le 1$ ……… (i)

এবং $-1 \le \sin x \le 1$

বা, $-1 \le \sin^3 x \le 1$ ……………… (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$-2 \le \cos x + \sin^3 x \le 2$

বা, $\frac{-2}{(x^2+1)(x-5)} \le \frac{\cos x + \sin^3 x}{(x^2+1)(x-5)} \le \frac{2}{(x^2+1)(x-5)}$

বা, $\frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-5)} \le \frac{x^2(\cos x + \sin^3 x)}{(x^2+1)(x-5)} \le \frac{2x^2}{(x^2+1)(x-5)}$

এখন, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^3-5x^2+x-5}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}$ [লব এবং হরকে x^3 দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{0}{1} = 0$

অনুরূপভাবে $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-5)} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-5)} = 0$

∴ স্যান্ডউইচ উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-5)} = 0$ (প্রমাণিত)

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 - \sin 2x}{x^2+5}$

আমরা জানি, $-1 \le -\sin 2x \le 1$

যেহেতু $x > 0$

$\therefore \frac{3x^2-1}{x^2+5} \le \frac{3x^2-\sin 2x}{x^2+5} \le \frac{3x^2+1}{x^2+5}$

এখন, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$

এবং $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}} = 3$

∴ স্যান্ডউইচ উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 - \sin 2x}{x^2+5} = 3$

(প্রমাণিত)

(v) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 2x}{3-2x}$

আমরা জানি, $-1 \le \cos 2x \le 1$

$\therefore 0 \le \cos^2 2x \le 1$

বা, $\frac{0}{3-2x} \ge \frac{\cos^2 2x}{3-2x} \ge \frac{1}{3-2x}$

[যখন $x\to\infty$ তখন $3-2x<$

বা, $\frac{1}{3-2x} \le \frac{\cos^2 2x}{3-2x} < 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3-2x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 2x}{3-2x} \le \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$

বা, $0 \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 2x}{3-2x} \le 0$

স্যান্ডউইচ উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 2x}{3-2x} = 0$ (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-9.9 | পৃষ্ঠা-৩৮০

প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = \lim\limits_{\delta x\to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

$= \lim\limits_{\delta x\to 0} \frac{\frac{1}{x+\delta x} - \frac{1}{x}}{\delta x}$

$= \lim\limits_{\delta x\to 0} \frac{x - x - \delta x}{x.(x+\delta x)\,\delta x}$

$= \lim\limits_{\delta x\to 0} \frac{-\delta x}{x(x+\delta x).\delta x}$

$= \lim\limits_{\delta x\to 0} \frac{-1}{x(x+\delta x)}$

$= \lim\limits_{\delta x\to 0} \frac{-1}{x^2 + x\delta x} = -\frac{1}{x^2}$ (Ans.)

অনুচ্ছেদ-9.12 | পৃষ্ঠা-৩৮৪

(i) মনে করি, $f(x) = \ell n(2x)$

$\therefore f(x+h) = \ell n 2(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$\frac{d}{dx} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ell n2(x+h) - \ell n2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ell n\frac{2x+2h}{2x}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ell n\frac{(x+h)}{x}\right]$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ell n\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots\right\}\right]$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - h \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right)$

$= \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি $f(x) = x^2$

$\therefore f(x+h)^2 = (x+h)^2$

সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^2) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)$

$= 2x + 0 = 2x$ **(Ans)**

অনুশীলনী-9(B) এর সমাধান

1.(i) মনে করি, $f(x) = \sqrt{x}$

$\therefore f(x+h) = \sqrt{x+h}$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{h}\left(1 + \frac{h}{2x} + \frac{h^2}{x^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} + \dots - 1\right)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{h}\left(\frac{h}{2x} - \frac{h^2}{8x^2} + \dots\right)$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{h}{8x^{\frac{3}{2}}} + \dots\right) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি: $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$

$\therefore f(x+h) = (x+h)^{-\frac{1}{2}}$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{h}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{h}\left(1 - \frac{h}{2x} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \dots - 1\right)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{h}\left(-\frac{h}{2x} + \frac{3}{8}\frac{h^2}{x^2} + \dots\right)$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{8}\frac{h}{x^{\frac{5}{2}}} + \dots\right) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ **(Ans.)**

2. (i) মনে করি, $f(x) = e^{mx}$

$\therefore f(x+h) = e^{m(x+h)}$

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{mx}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{m(x+h)} - e^{mx}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}.e^{mh} - e^{mx}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}(e^{mh} - 1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} e^{mx}.\frac{1}{h}\left\{\left(1 + \frac{mh}{1!} + \frac{m^2h^2}{2!} + \frac{m^3h^3}{3!} + \dots\right) - 1\right\}$

$= \lim_{h\to 0} e^{mx}.\frac{1}{h}\left(mh + \frac{m^2h^2}{2!} + \frac{m^3h^3}{3!} + \dots\right)$

$= \lim_{h\to 0} e^{mx}\left(m + \frac{m^2h}{2!} + \frac{m^3h^2}{3!} + ...\right)$

$= me^{mx}$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $f(x) = \ln x$

$\therefore f(x+h) = \ln(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

$= \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$ $\left[\because \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\right]$

$= \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$= \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\frac{h}{x}}{1} - \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^3}{3} - ....\right)$

$= \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3} - ....\right)$

$= \mathop{Lt}_{h\to 0} \frac{h}{h}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3} - ....\right)$

$= \mathop{Lt}_{h\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3} - ....\right)$

$= \frac{1}{x}, (x > 0)$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ **Ans.**

3.(i) মনে করি, $f(x) = \cos 2x$

$\therefore f(x+h) = \cos 2(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos 2x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{2x+2h+2x}{2}\right).\sin\left(\frac{2x-2x-2h}{2}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(2x+h)\sin(-h)}{h}$

$= -\lim_{h\to 0} 2\sin(2x+h) \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$

$= -2\sin(2x+0) \times 1$

$= -2\sin 2x$

(ii) মনে করি, $f(x) = \sin 2x$

$\therefore f(x+h) = \sin 2(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin 2x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[2\cos\left(\frac{2x+2h+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+2h-2x}{2}\right)\right]$

$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h}\, 2\cos(2x+h)\sin h\right]$

$= 2\left[\lim_{h\to 0}\cos(2x+h) \times \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$

$= 2\cos 2x\,.1 \left[\because \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1\right]$

$= 2\cos 2x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$ **(Ans.)**

(iii) মনে করি, $f(x) = \cos 3x$

$\therefore f(x+h) = \cos 3(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos 3(x+h) - \cos 3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[2\sin\left(\frac{3x+3h+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-3x-3h}{2}\right)\right]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[2\sin\left(3x+\frac{3h}{2}\right)\sin\left(-\frac{3h}{2}\right)\right]$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin\frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}}.3 \lim_{h\to 0}\sin\left(3x+\frac{3h}{2}\right)$

$= -3 \lim_{\frac{3h}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}}\right) \times \lim_{h\to 0}\sin\left(3x+\frac{3h}{2}\right)$

$= -3.1.\sin 3x = -3\sin 3x$

$= -3\sin 3x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos 3x) = -3\sin 3x$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $f(x) = \tan 3x$

$\therefore f(x+h) = \tan 3(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 3x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan 3(x+h) - \tan 3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin 3(x+h)}{\cos 3(x+h)} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin 3(x+h)\cos 3x - \cos 3(x+h)\sin 3x}{\cos 3(x+h)\cos 3x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin 3(x+h-x)}{\cos 3x \cos 3(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\sin 3h}{\cos 3x \cos 3(x+h)}$$

$$= 3 \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin 3h}{3h}}{\cos 3x \cos 3(x+h)}$$

$$= 3 \frac{\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 3h}{3h}\right)}{\lim_{h\to 0} \cos 3x \cos 3(x+h)}$$

$$= \frac{3}{\cos 3x . \cos 3x} \quad \left[\because \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1\right]$$

$= 3\sec^2 3x$ **(Ans.)**

(v) মনে করি, $f(x) = \sec 2x$

$\therefore f(x+h) = \sec(2x+2h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(2x+2h) - \sec 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(2x+2h)} - \frac{1}{\cos 2x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos 2x - \cos(2x+2h)}{\cos 2x . \cos(2x+2h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(\frac{2x+2x+2h}{2}\right) . \sin\left(\frac{2x+2h-2x}{2}\right)}{\cos 2x . \cos(2x+2h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2\sin(2x+h) . \sin h}{\cos 2x . \cos(2x+2h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\left[\frac{\sin(2x+h) . \sinh}{\cos 2x . \cos(2x+2h)}\right]$$

$$= 2 . \frac{\lim_{h\to 0} \sin(2x+h) . \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sinh}{h}\right)}{\lim_{h\to 0} \cos 2x . \cos(2x+2h)}$$

$$= 2 . \frac{\sin 2x . 1}{\cos 2x . \cos 2x}$$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x) = 2\tan 2x . \sec 2x$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, $f(x) = \sec ax$

$\therefore f(x+h) = \sec(ax+ah)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec ax) = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(ax+ah) - \sec ax}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(ax+ah)} - \frac{1}{\cos ax}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos ax - \cos(ax+ah)}{\cos ax . \cos(ax+ah)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(\frac{ax+ax+ah}{2}\right) . \sin\left(\frac{ax+ah-ax}{2}\right)}{\cos ax . \cos(ax+ah)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\left[\frac{\sin\left(ax+\frac{ah}{2}\right) . \sin\left(\frac{ah}{2}\right)}{\cos ax . \cos(ax+ah)}\right]$$

$$= a \lim_{h\to 0} \frac{2}{ah}\left[\frac{\sin\left(ax+\frac{ah}{2}\right) . \sin\left(\frac{ah}{2}\right)}{\cos ax . \cos(ax+ah)}\right]$$

$$= a . \frac{\lim_{h\to 0} \sin\left(ax+\frac{ah}{2}\right) . \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\right)}{\lim_{h\to 0} \cos ax . \lim_{h\to 0} \cos(ax+ah)}$$

$$= a . \frac{\sin ax . 1}{\cos ax . \cos ax}$$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sec ax) = a\tan ax . \sec ax$ **(Ans.)**

4.(i) ধরি, $f(x) = 5x^2 - 2x + 9$

$\therefore f(x+h) = 5(x+h)^2 - 2(x+h) + 9$

মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(5x^2 - 2x + 9)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)^2 - 2(x+h) + 9 - (5x^2 - 2x + 9)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 2x - 2h + 9 - 5x^2 + 2x - 9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10xh + 5h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(10x + 5h - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (10x + 5h - 2)$$

$= 10x + 5.0 - 2$

$= 10x - 2$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$f(x+h) = 2(x+h)^2 + 3(x+h) + 1$

মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 + 3(x+h) + 1 - (2x^2 + 3x + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h + 1 - 2x^2 - 3x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 3)$$

$= 4x + 0 + 3$

$= 4x + 3$ **(Ans)**

(iii) মনে করি, $f(x) = x^3 + 2x$

$\therefore f(x+h) = (x+h)^3 + 2(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^3 + 2x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - x^3 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - x^3 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2)$$

$= 3x^2 + 2$ **(Ans.)**

5. (i) $\frac{d}{dx}(7x^3 - 2x) = 7.3x^2 - 2.1 = 21x^2 - 2$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x} + \ln x\right) = 5.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{d}{dx}(\ln x)$

$= 5\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = -\frac{5}{x^2} + \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^5}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}\ x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}\ x^{\frac{3}{2}}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^{-3}}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{\frac{-3}{2}}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{3}{2}\ x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\ x^{\frac{1}{2}}$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{1}{3}\ x^{\frac{1}{3}-1} + \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1}$

$= \frac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}}\right)$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 - x^7}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^7}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{3-\frac{1}{2}} - x^{7-\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{13}{2}}\right)$

$= \frac{5}{2}\ x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{13}{2}\ x^{\frac{13}{2}-1}$

$= \frac{5}{2}\ x^{\frac{3}{2}} - \frac{13}{2}\ x^{\frac{11}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(5x^{\frac{3}{2}} - 13x^{\frac{11}{2}}\right)$ **(Ans.)**

(vii) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{2-\frac{1}{3}} - 2x^{1-\frac{1}{3}} + x^{\frac{-1}{3}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}}\right) - 2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{5}{3}\ x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}\ x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\ x^{-\frac{4}{3}}$

$= \frac{1}{3}\left(5x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{4}{3}}\right)$ **(Ans.)**

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 25}{x + 5}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)}\right\}$

$= \frac{d}{dx}(x - 5) = 1$ **(Ans.)**

6.(i) $\frac{d}{dt}(t^3 + 10t^2 - 5t) = \frac{d}{dt}(t^3) + 10\frac{d}{dt}(t^2) - 5\frac{d}{dt}(t)$

$= 3t^2 + 20t - 5$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dy}\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) = \frac{d}{dy}(y^3) + \frac{d}{dy}(y^{-3})$

$= 3y^2 - 3y^{-4} = 3y^2 - \frac{3}{y^4}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}\{(x^2+2)(x-1)\} = \frac{d}{dx}(x^3+2x-x^2-2)$
$= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(2)$
$= 3x^2 + 2 - 2x = 3x^2 - 2x + 2$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dz}\{z(z+1)^3\} = \frac{d}{dz}\{z(z^3+3z^2+3z+1)\}$
$= \frac{d}{dz}(z^4+3z^3+3z^2+z)$
$= 4z^3+9z^2+6z+1$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dx}(ax^4 - 4\log_a x)$
$= a\frac{d}{dx}(x^4) - 4\frac{d}{dx}(\log_e x \times \log_a e)$
$= 4ax^3 - 4.\frac{1}{x}.\log_a e = 4ax^3 - \frac{4}{x}.\log_a e$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{dx}(5e^x - 6a^x) = 5\frac{d}{dx}(e^x) - 6\frac{d}{dx}(a^x)$
$= 5e^x - 6a^x.\ln a = 5e^x - 6a^x \ln a$ **(Ans.)**

7(i) $\frac{d}{dx}(5\cos x) = 5\frac{d}{dx}(\cos x) = -5\sin x$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{d\theta}(9\sin\theta) = 9\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = 9\cos\theta$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{d\theta}(2\cos\theta + 9\sec\theta)$
$= 2\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) + 9\frac{d}{d\theta}(\sec\theta)$
$= -2\sin\theta + 9\sec\theta.\tan\theta$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}(\sec x + \cot x) = \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\cot x)$
$= \sec x.\tan x - \operatorname{cosec}^2 x$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dt}(8\cos t + \ln(t) + 5t) = -8\sin t + \frac{1}{t} + 5$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right)$
$= \frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \sec^2\theta$ **(Ans.)**

(vii) $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}\right)$

$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}.\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right)$
$= \frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$ **(Ans.)**

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\right)$
$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}}\right)$
$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}}\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$
$= \frac{d}{dx}(1) = 0$ **(Ans.)**

8.(i) ধরি, $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$
$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$
$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 1 + 2\sin x + \sin^2 x} \times \frac{\cos x.\cos x - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$
$= \frac{1}{2(1+\sin x)} \times \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{1}$
$= \frac{1}{2(1+\sin x)}.\frac{(1+\sin x)}{1} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

বা, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)$

বা, $y = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$

বা, $y = \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$

বা, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right)$

বা, $y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)$ [হর ও লবকে $\cos\frac{x}{2}$ দিয়ে ভাগ করে]

বা, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$

$\therefore \quad y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(iii) ধরি, $y = \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

বা, $y = \frac{\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{(1 - \cos x)}$ $[\because \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x]$

$= \frac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 - \cos x)}$

$= \frac{\cos x(1 - \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{(1 - \cos x)}$

$= \frac{(1 - \cos x)(\cos x + 1 + \cos x)}{(1 - \cos x)}$

$\therefore \; y = 2\cos x + 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\cos x + 1) = 2(-\sin x) + 0$

$= -2\sin x$ **(Ans.)**

9(i) $\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^2)$

$= \frac{x^2}{x} + 2x \ln x = x + 2x \ln x$

$= x(1 + 2\ln x)$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dx}(x^4 e^x) = x^4 \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \frac{d}{dx}(x^4)$

$= e^x x^4 + 4x^3 e^x = x^3 e^x (x + 4)$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}(x^5 \log_a x) = \frac{d}{dx}(x^5 \log_a e \times \log_e x)$

$= \log_a e \frac{d}{dx}(x^5 . \log_e x)$

$= \log_a e \left[x^5 . \frac{1}{x} + \log_e x . 5x^4\right]$

$= x^4 (\log_a e + 5\log_a e . \log_e x)$

$= x^4 (\log_a e + 5\log_a x)$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}(5e^x \log_a x) = \frac{d}{dx}\{5e^x . \log_a e . \ln(x)\}$

$= 5\log_a e \frac{d}{dx}\{e^x \ln(x)\}$

$= 5\log_a e \left\{\ln(x) e^x + e^x . \frac{1}{x}\right\}$

$= 5e^x \left\{\log_a e . \ln(x) + \frac{1}{x}\log_a e\right\}$

$= 5e^x \left(\log_a x + \frac{1}{x}\log_a e\right)$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dx}(e^x \log_a x)$

$= e^x . \frac{d}{dx}(\log_a x) + \log_a x \frac{d}{dx}(e^x)$

$= e^x \frac{d}{dx}(\ln x \log_a e) + \log_a x . e^x$

$= e^x \frac{\log_a e}{x} + e^x \log_a x$

$= e^x \left(\frac{1}{x}\log_a e + \log_a x\right)$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{dx}(e^x \sin x)$

$= e^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(e^x)$

$= e^x (\cos x + \sin x)$ **(Ans.)**

(vii) $\frac{d}{dx}(e^x \cos x)$

$= e^x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(e^x)$

$= -e^x \sin x + e^x \cos x$

$= e^x (\cos x - \sin x)$ **(Ans.)**

(viii) $\frac{d}{dx}(x^2 \cos x)$

$= x^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x^2)$

$= -x^2 \sin x + 2x \cos x$

$= x(2\cos x - x\sin x)$ **(Ans.)**

(ix) $\frac{d}{dx}(x^3 \tan x)$

$= x^3 \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(x^3)$

$= x^3 . \sec^2 x + 3x^2 \tan x$

$= x^2 (x\sec^2 x + 3\tan x)$ **(Ans.)**

(x) $\frac{d}{dx}\{(\log_a x)(\ln x)\}$

$= \log_a x . \frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x) . \frac{d}{dx}(\log_a x)$

$= \log_a x . \frac{1}{x} + \ln x . \frac{1}{x} \log_a e$

$= \frac{1}{x}(\log_a x + \log_a e \ln x)$ **(Ans.)**

(xi) $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x} \sin x)$

$= \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}} \sin x)$

$= x^{\frac{1}{3}} \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}})$

$= x^{\frac{1}{3}} \cos x + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} . \sin x$

$= \cos x \, x^{\frac{1}{3}} + \frac{\sin x}{3x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3}}\left(\cos x + \frac{\sin x}{3x}\right)$ **(Ans.)**

(xii) $e^x \tan x$

$$\frac{d}{dx}(e^x \tan x) = e^x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= e^x \sec^2 x + \tan x . e^x$$
$$= e^x(\sec^2 x + \tan x) \text{ (Ans.)}$$

(xiii) $\frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(2\sin x \cos x)$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x \,.\, 2 = \cos 2x \text{ (Ans.)}$$

(xiv) $\frac{d}{dx}(x^2 e^x \ln x)$

$$= x^2 \frac{d}{dx}(e^x \ln x) + e^x \ln x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2\left\{e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x)\right\} + e^x \ln x \,.\, 2x$$
$$= x^2 e^x . \frac{1}{x} + x^2 e^x \ln x + 2x e^x \ln x$$
$$= xe^x (2 \ln x + x \ln x + 1) \text{ (Ans.)}$$

(xv) ধরি, $y = x^2 \log_a x + 7e^x \cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \log_a x) + 7\frac{d}{dx}(e^x \cos x)$$
$$= x^2 \frac{d}{dx}(\log_a x) + \log_a x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$+ 7\{e^x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(e^x)\}$$
$$= x^2 \cdot \frac{1}{x} . \log_a e + \log_a x . (2x)$$
$$+ 7\{e^x(-\sin x) + \cos x\,(e^x)\}$$
$$= x(\log_a e + 2\log_a x) + 7e^x(\cos x - \sin x)$$
(Ans.)

10.(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+5}{2x^2-9}\right)$

$$= \frac{(2x^2-9)\frac{d}{dx}(3x+5) - (3x+5)\frac{d}{dx}(2x^2-9)}{(2x^2-9)^2}$$
$$= \frac{3(2x^2-9) - 4x(3x+5)}{4x^4 - 36x^2 + 81}$$
$$= \frac{6x^2 - 27 - 12x^2 - 20x}{4x^4 - 36x^2 + 81}$$
$$= \frac{-(6x^2 + 20x + 27)}{4x^4 - 36x^2 + 81} \text{ (Ans.)}$$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)\right\}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \text{ (Ans.)}$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)$

$$= \frac{(x^2+3)\frac{d}{dx}(x^2+1) - (x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2+1)}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 - 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{4x}{(x^2+3)^2} \text{ (Ans.)}$$

(iv) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1+t+t^2}{1-t+t^2}\right)$

$$= \frac{(1-t+t^2)\frac{d}{dt}(1+t+t^2) - (1+t+t^2)\frac{d}{dt}(1-t+t^2)}{(1-t+t^2)^2}$$
$$= \frac{(1-t+t^2)(2t+1) - (1+t+t^2)(2t-1)}{(1-t+t^2)^2}$$
$$= \frac{2t - 2t^2 + 2t^3 + 1 - t + t^2 - 2t - 2t^2 - 2t^3 + 1 + t + t^2}{(1-t+t^2)^2}$$
$$= \frac{2-2t^2}{(1-t+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1-t+t^2)^2} \text{ (Ans.)}$$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x) - (1+\sin x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{(1+\cos x)\cos x - (1+\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{1 + \sin x + \cos x}{(1+\cos x)^2} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$
$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{1+\sin x + \cos x}{(1+\cos x)^2} \quad \text{(Ans.)}$$

(vi) ধরি, $y = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)\frac{d}{d\theta}(1-\tan\theta) - (1-\tan\theta)\frac{d}{d\theta}(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)(-\sec^2\theta) - (1-\tan\theta)\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2\theta - \sec^2\theta\tan\theta - \sec^2\theta + \sec^2\theta\tan\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{-2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2} \textbf{ (Ans.)}$$

(vii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x^2+\sin x}\right)$

$$= \frac{(x^2+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(x^2+\sin x)}{(x^2+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(x^2+\sin x) - (2x+\cos x)\cos x}{(x^2+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-x^2\sin x - \sin^2 x - 2x\cos x - \cos^2 x}{(x^2+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(x^2\sin x + 2x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x)}{(x^2+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(x^2\sin x + 2x\cos x + 1)}{(x^2+\sin x)^2} \textbf{ (Ans.)}$$

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x^2+\cos x}\right)$

$$= \frac{(x^2+\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(x^2+\cos x)}{(x^2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(x^2+\cos x)\cos x - \sin x(2x-\sin x)}{(x^2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x^2\cos x + \cos^2 x - 2x\sin x + \sin^2 x}{(x^2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x^2\cos x - 2x\sin x + 1}{(x^2+\cos x)^2} \textbf{ (Ans.)}$$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(x\sin x) - x\sin x.\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(\sin x + x\cos x) - x\sin x.(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x + \sin x\cos x + x\cos x + x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x + \sin x\cos x + x\cos x + x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(x+\sin x) + 1(x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(x+\sin x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{x+\sin x}{1+\cos x} \textbf{ (Ans.)}$$

(x) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x + \cot x}{3e^x}\right)$

$$= \frac{3e^x\frac{d}{dx}(\tan x + \cot x) - (\tan x + \cot x)\frac{d}{dx}(3e^x)}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - \tan x - \cot x)}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan^2 x - 1 - \cot^2 x - \tan x - \cot x)}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x) - (\tan x + \cot x)}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x - 1)}{3e^x} \textbf{ (Ans.)}$$

(xi) $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right)$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)\frac{d}{d\theta}(1-\tan\theta) - (1-\tan\theta)\frac{d}{d\theta}(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)(-\sec^2\theta) - (1-\tan\theta)\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2\theta - \sec^2\theta\tan\theta - \sec^2\theta + \sec^2\theta\tan\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{-2\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)^2} \textbf{ (Ans.)}$$

অনুশীলনী-9(C) এর সমাধান

1. (i) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{3x^2+1}\right) = \frac{d}{dx}(3x^2+1)^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\cdot(3x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+1)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(3x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6x$$

$$= 2x(3x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \textbf{ (Ans.)}$$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4-3x}}\right) = \frac{d}{dx}(4-3x)^{\frac{-1}{3}}$

$= -\frac{1}{3}.(4-3x)^{\frac{-1}{3}-1}.(-3)$

$= (4-3x)^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{(4-3x)^{\frac{4}{3}}}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.(2ax+b)$

$= \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **(Ans.)**

2.(i) $\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)$

$= x\frac{d}{dx}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{x^2+a^2}\frac{d}{dx}(x)$

$= \frac{x.2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \sqrt{x^2+a^2}$

$= \frac{x^2+x^2+a^2}{\sqrt{x^2}+a^2} = \frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dx}(x\sqrt{\sin x}) = \sqrt{\sin x}.\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin x})$

$= \sqrt{\sin x}.1 + x.\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\frac{d}{dx}(\sin x)$

$= \sqrt{\sin x} + \frac{x}{2\sqrt{\sin x}}\cos x$

$= \sqrt{\sin x} + \frac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}(x^n ln 2x) = x^n\frac{d}{dx}\{ln(2x)\} + ln(2x)\frac{d}{dx}(x^n)$

$= x^n.\frac{1}{2x}.2 + ln(2x).nx^{n-1}$

$= \frac{x^n}{x} + ln(2x)\,nx^{n-1} = x^{n-1} + nx^{n-1}\,ln(2x)$

$= x^{n-1}\{1 + n\,ln(2x)\}$ **(Ans.)**

3.(i) $\frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos 5\theta\right) = \cos\frac{\theta}{2}.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin 5\theta\frac{d}{d\theta}(5\theta)$

$= \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 5\sin 5\theta$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{d\theta}(\cos^4\theta) = 4\cos^3\theta.\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$

$= -4\cos^3\theta\sin\theta$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}(\sec\sqrt{x}) = \sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}(\tan\theta)^{\frac{1}{2}-1}.\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)$

$= \frac{1}{2\sqrt{\tan\theta}}.\sec^2\theta = \frac{\sec^2\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan e^{x^2}}\right) = \frac{d}{dx}\{\tan e^{x^2}\}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}(\tan e^{x^2})^{-\frac{1}{2}}.\frac{d}{dx}(\tan e^{x^2})$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{\tan e^{x^2}}}.\sec^2 e^{x^2}.\frac{d}{dx}(e^{x^2})$

$= \frac{1}{2}.\frac{\sec^2 e^{x^2}}{\sqrt{\tan e^{x^2}}}.e^{x^2}.2x$

$= \frac{xe^{x^2}.\sec^2 e^{x^2}}{\sqrt{\tan e^{x^2}}}$ **(Ans.)**

(vi) ধরি, $y = \cos x°$

বা, $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ $[\because 1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin\frac{\pi x}{180}.\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$ **(Ans.)**

(vii) $\frac{d}{dx}(\cos^2 x^2) = 2\cos x^2.\frac{d}{dx}(\cos x^2)$

$= 2\cos x^2.-(\sin x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$

$= -4x\cos x^2\sin x^2$

$= -2x(2\sin x^2\cos x^2)$

$= -2x\sin 2x^2$ **(Ans.)**

(viii) $\frac{d}{dx}(\sin^3 x^3) = \frac{d}{dx}(\sin x^3)^3 = 3(\sin x^3)^2\frac{d}{dx}(\sin x^3)$

$= 3\sin^2 x^3.\cos x^3\frac{d}{dx}(x^3)$

$= 3\sin^2 x^3\cos x^3 \times 3x^2$

$= 9x^2\sin^2 x^3\cos x^3$ **(Ans.)**

4.(i) $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{e^x}}\right) = \frac{d}{dx}(e^{-x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(e^{-x})^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(e^{-x})$

$= \frac{1}{2\sqrt{e^{-x}}}.e^{-x}.(-1) = -\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}.e^x}$

$= -\frac{1}{2e^{-\frac{x}{2}+x}} = -\frac{1}{2\sqrt{e^x}}$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \cdot \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})$

$= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} . e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} . e^{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}(e^{\sin\sqrt{x}}) = e^{\sin\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})$

$= e^{\sin\sqrt{x}} . \cos\sqrt{x} . \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{\cos\sqrt{x}. e^{\sin\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $y = e^{\sin 2x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\sin 2x} . 2\cos 2x = 2\cos 2x\, e^{\sin 2x}$ **(Ans.)**

5. (i) $\frac{d}{d\theta}\{ln(\cos 2\theta)\} = \frac{1}{\cos 2\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\cos 2\theta)$

$= \frac{-\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(2\theta) = -2\tan 2\theta$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \ln(\sin 2x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 2x}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}(ln\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}.\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}(ln\, x)^2 = 2\, ln x . \frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{2\, ln x}{x}$ **(Ans.)**

(v) মনে করি, $y = \log_{10}x$

$\therefore y = \log_e x \times \log_{10}e$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \log_{10}e \frac{d}{dx}(\log_e x)$

$= \log_{10}e . \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\log_{10}e$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{dx}(\log_{10}3x) = \frac{d}{dx}(\log_e 3x \times \log_{10}e)$

$= \log_{10}e \frac{d}{dx}(\log_e 3x)$

$= \log_{10}e \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{d}{dx}(3x)$

$= \log_{10}e \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}\log_{10}e$ **(Ans.)**

6. $\frac{d}{dx}(1 + \sin 2x)^2 = 2(1 + \sin 2x)\frac{d}{dx}(1 + \sin 2x)$

$= 2(1 + \sin 2x) . \cos 2x \frac{d}{dx}(2x)$

$= 4\cos 2x(1 + \sin 2x)$ **(Ans.)**

7. মনে করি, $y = 2\text{cosec}2x \cos\{ln(\tan x)\}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2[\text{cosec}2x \frac{d}{dx}\cos\{ln(\tan x)\}$

$+ \cos\{ln(\tan x)\} \frac{d}{dx}(\text{cosec}2x)]$

$= 2[\text{cosec}2x\{-\sin ln(\tan x)\} \frac{d}{dx} ln(\tan x)$

$+ \cos\{ln(\tan x)\}\{-\text{cosec}2x \cot 2x \frac{d}{dx}(2x)\}]$

$= 2[-\text{cosec}2x. \sin\{ln(\tan x)\}.\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x$

$- 2\text{cosec}2x \cot 2x \cos\{ln(\tan x)\}]$

$= -2\text{cosec}2x [\frac{\sec^2 x}{\tan x}.\sin\{ln(\tan x)\}$

$+ 2\cot 2x.\cos\{ln(\tan x)\}]$ **(Ans.)**

8. $\frac{d}{dx}\{ln(ax^2 + bx + c)\}$

$= \frac{1}{ax^2 + bx + c}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)$

$= \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$ **(Ans.)**

9. (i) $\frac{d}{dx}[\sin^2\{ln(\sec x)\}]$

$= 2\sin\{ln(\sec x)\}. \frac{d}{dx}[\sin\{ln(\sec x)\}]$

$= 2\sin\{ln(\sec x)\}. \cos\{ln(\sec x)\} \times \frac{d}{dx}\{ln(\sec x)\}$

$= \sin\{2\, ln(\sec x)\}. \frac{1}{\sec x}. \sec x \tan x$

$= \tan x \sin\{2\, ln(\sec x)\}$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \sin^2(ln \cos x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\sin(ln \cos x)\frac{d}{dx}[\sin(ln \cos x)]$

$= 2\sin(ln \cos x)\cos(ln \cos x)\frac{d}{dx}\{ln(\cos x)\}$

$= 2\sin(ln \cos x)\cos(ln \cos x)\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$

$= 2\sin(ln \cos x)\cos(ln \cos x)(-\tan x)$

$= -\tan x \sin\{2\, ln(\cos x)\}$ $[\because \sin 2A = 2\sin A\cos A]$

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তরক সহগ, $-\tan x. \sin\{2\, ln(\cos x)\}$

(iii) $\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x^2)\} = \frac{1}{\sin x^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x^2)$

$= \frac{\cos x^2}{\sin x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = 2x\cot x^2$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $y = [\ln(\sin x^2)]^n$

$\therefore \frac{dy}{dx} = n[ln(\sin x^2)]^{n-1}\frac{d}{dx}\{ln(\sin x^2)\}$

$= n[ln(\sin x^2)]^{n-1}.\frac{1}{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)$

$= n[ln(\sin x^2)]^{n-1}.\frac{1}{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$= 2nx\cot x^2\cdot[ln(\sin x^2)]^{n-1}$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $y = \sin^2\{ln(x^2)\}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin\{ln(x^2)\}]^2$

$= 2\sin\{ln(x^2)\}\frac{d}{dx}\sin\{ln(x^2)\}$

$= 2\sin\{ln(x^2)\}\cos\{ln(x^2)\}\frac{d}{dx}\{ln(x^2)\}$

$= 2\sin\{ln(x^2)\}\cos\{ln(x^2)\}\frac{1}{x^2}.2x$

$= \frac{4\sin\{ln(x^2)\}\cos\{ln(x^2)\}}{x}$

$= \frac{2\sin 2ln(x^2)}{x}$ [$\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$]

$= \frac{2\sin(4lnx)}{x}$ **(Ans.)**

10. $\frac{d}{dx}(10^{ln\,\sin x}) = 10^{ln\,\sin x}\,ln10\frac{d}{dx}(ln\,\sin x)$

$= 10^{ln\,\sin x}.\,ln\,10.\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$

$= 10^{ln\,\sin x}.\,ln\,10\times\frac{\cos x}{\sin x}$

$= 10^{ln\,\sin x}.\,ln\,10\,.\cot x$ **(Ans.)**

11.(i) ধরি, $y = e^{2ln(\tan 5x)}$

বা, $y = e^{\ln(\tan 5x)^2}$

বা, $y = (\tan 5x)^2$ [$\because e^{\ln a} = a$]

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan 5x)^2$

বা, $\frac{dy}{dx} = 2\tan 5x\frac{d}{dx}(\tan 5x) = 2\tan 5x\sec^2 5x.5$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 10\tan 5x\sec^2 5x$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = e^{5\ln\tan 5x} = e^{\ln(\tan 5x)^5} = (\tan 5x)^5$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 5\tan^4 5x\frac{d}{dx}(\tan 5x) = 5\tan^4 5x.\sec^2 5x.5$

$= 25(\tan 5x)^4.\sec^2 5x$ **(Ans.)**

12. ধরি, $y = \cos(lnx) + ln(\tan x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin(lnx).\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}.\sec^2 x$

$= -\frac{1}{x}\sin(lnx) + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

$= -\frac{1}{x}\sin(lnx) + \frac{1}{\sin x\cos x}$

$= -\frac{1}{x}\sin(lnx) + \frac{2}{\sin 2x}$

$= -\frac{1}{x}\sin(lnx) + 2\text{cosec}2x$

$= 2\,\text{cosec}2x - \frac{1}{x}\sin(lnx)$ **(Ans.)**

13. ধরি, $y = \frac{ln(\cos x)}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}[ln(\cos x)] - ln(\cos x).\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$= \frac{x.\frac{1}{\cos x}(-\sin x) - ln(\cos x).1}{x^2}$

$= \frac{-x\tan x - ln(\cos x)}{x^2}$ **(Ans.)**

14. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = -\text{cosec}^2\frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \frac{-\text{cosec}^2\frac{x}{2}}{2} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} = -\frac{1}{1-\cos x}$ **(Ans.)**

15.(i) ধরি, $y = \left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = \frac{\sin^2 2x}{(1+\cos 2x)^2}$

$= \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{(2\cos^2 x)^2} = \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4\cos^4 x}$

$= \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x.\cos^2 x}$

$y = \tan^2 x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^2 x) = 2\tan x.\sec^2 x.$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

$\therefore y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x\sin x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\sin x}}$

$= \sin^2 x - \cos^2 x$

$= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -(-\sin 2x)\cdot 2 = 2\sin 2x$ **(Ans.)**

16. $\frac{d}{dx}(x^\circ \cos x^\circ)$

$\because 180^\circ = \pi$ রেডিয়ান

$\therefore 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\cos\frac{\pi x}{180}\right)$

$= \frac{\pi x}{180}\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{\pi x}{180}\right) + \cos\frac{\pi x}{180}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)$

$= -\frac{\pi x}{180}\sin\frac{\pi x}{180}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right) + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi x}{180}$

$= -\frac{\pi^2 x}{180^2}\sin\frac{\pi x}{180} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi x}{180}$

$= \frac{\pi}{180}\left(\cos\frac{\pi x}{180} - \frac{\pi x}{180}\sin\frac{\pi x}{180}\right)$ **(Ans.)**

17. $\frac{d}{dx}[\sin \ln(\sec x)] = \cos \ln(\sec x)\frac{d}{dx}[\ln(\sec x)]$

$= \cos \ln(\sec x).\frac{1}{\sec x}\frac{d}{dx}(\sec x)$

$= \cos \ln(\sec x).\frac{1}{\sec x}\sec x.\tan x$

$= \tan x \cos \ln(\sec x)$ **(Ans.)**

18. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + \ln x}{\log_a x}\right)$

$= \frac{\log_a x.\frac{d}{dx}(e^x + \ln x) - (e^x + \ln x)\frac{d}{dx}(\log_a x)}{(\log_a x)^2}$

$= \frac{\log_a x\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - (e^x + \ln x)\frac{1}{x}\log_a e}{(\log_a x)^2}$ **(Ans.)**

19.(i) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(1-2x)\} = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}.\frac{d}{dx}(1-2x)$

$= \frac{2}{\sqrt{1-1+4x-4x^2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2^2(x-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sin\sqrt{x})\} = \frac{d}{dx}\{\sin^{-1}\sin\sqrt{x}\}$

$= \frac{d}{dx}\{\sqrt{x}\} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}(3^{\sin^{-1}x}) = 3^{\sin^{-1}x}\,ln3\,\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$

$= 3^{\sin^{-1}x}.\ln 3.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3^{\sin^{-1}x}.\ln 3}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)^2 = 2\sec^{-1}x.\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)$

$= \frac{2\sec^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{dx}(\tan x \sin^{-1}x)$

$= \tan x.\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) + \sin^{-1}x.\frac{d}{dx}(\tan x)$

$= \tan x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x.\sec^2x$

$= \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x.\sec^2x$ **(Ans.)**

(vii) $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sec x + \tan x)\}$

$= \frac{1}{1+(\sec x + \tan x)^2}\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$

$= \frac{1}{1+\sec^2x+\tan^2x+2\sec x\tan x}(\sec x\tan x + \sec^2x)$

$= \frac{\sec x\tan x + \sec^2x}{\sec^2x+\sec^2x+2\sec x\tan x}$

$= \frac{\sec x\tan x + \sec^2x}{2(\sec^2x + \sec x\tan x)} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

(viii) $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\}$

$= \frac{1}{1+\frac{\cos^2x}{(1+\sin x)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$= \frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2x}.\frac{(1+\sin x)(-\sin x)-\cos x.\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$= \frac{-\sin x - \sin^2x - \cos^2x}{1+2\sin x+\sin^2x+\cos^2x}$

$= \frac{-\sin x-(\sin^2x+\cos^2x)}{2+2\sin x} = \frac{-(1+\sin x)}{2(1+\sin x)} = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

20.(i) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $y = \sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

$\therefore\ y = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

(iii) ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x} = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2} = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}) = \frac{2}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \frac{2}{1+x}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ **(Ans.)**

(iv) ধরি $y = \tan^{-1}\dfrac{6\sqrt{x}}{1-9x} = \tan^{-1}\dfrac{2.3\sqrt{x}}{1-(3\sqrt{x})^2}$

বা, $y = 2\tan^{-1}(3\sqrt{x})$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = 2.\dfrac{1}{1+9x}.3\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{\sqrt{x}(1+9x)}$ (Ans.)

(v) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\dfrac{4x}{1-4x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\dfrac{2.2x}{1-(2x)^2}\right\}$

$= \dfrac{d}{dx}(2\tan^{-1}2x) = 2\cdot\dfrac{1}{1+(2x)^2}.2 = \dfrac{4}{1+4x^2}$ (Ans.)

(vi) ধরি, $y = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ধরি, $x = \sin\theta \quad \therefore \theta = \sin^{-1}x$

$y = \tan^{-1}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = \sin^{-1}x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

(vii) ধরি, $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) = \tan^{-1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+1.\sqrt{x}}$

$= \tan^{-1}1 - \tan\sqrt{x}$

$= \tan^{-1}\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{x}$

[ধরি, $\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy} = \tan^{1}x - \tan^{-1}y$]

$= \dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= -\dfrac{1}{(1+x)}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ (Ans.)

(viii) ধরি, $y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

ধরি, $x = \tan\theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1}x$

$y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\dfrac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$ (Ans.)

(ix) ধরি, $y = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

$\therefore y = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

[ধরি, $x = \cos\theta \quad \therefore \theta = \cos^{-1}x$]

$= \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \tan^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\theta}{2}$

$\therefore y = \dfrac{1}{2}\cos^{-1}x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

(x) ধরি, $y = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

মনে করি, $x = \sec\theta, \theta = \sec^{-1}x$

$\therefore y = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\theta}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\cot\theta$

$= \tan^{-1}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore y = \dfrac{\pi}{2} - \sec^{-1}x.$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x)$

$= 0 - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (Ans.)

(xi) $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)\right] = \dfrac{d}{dx}(3\tan^{-1}x) = \dfrac{3}{1+x^2}$ (Ans.)

21. ধরি, $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right\}$

[মনে করি, $x = \cos 2\theta$]

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right\}$

$= \sin\{2\tan^{-1}\tan\theta\} = \sin 2\theta$

$= \sqrt{1-\cos^2 2\theta} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

22. মনে করি, $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$ [$x = \tan\theta$ ধরে।]

$= \sin^{-1}\cos 2\theta$

$= \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\theta\right)$

$= \frac{\pi}{2} \pm 2\theta = \frac{\pi}{2} \pm 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\tan^{-1}x\right) = \pm 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$= \pm\frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

23.(i) $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{b\left(\frac{a}{b}\cos x - \sin x\right)}{b\left(\cos x - \frac{a}{b}\sin x\right)}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}\tan x\right]$

$\left[\because \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy} = \tan^{-1}x - \tan^{-1}y\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\frac{a}{b} - x\right]$

$= 0 - 1 = -1$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $y = \tan^{-1}(\sin e^x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sin^2 e^x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin e^x)$

$= \frac{1}{1+\sin^2 e^x}\cos e^x . e^x$

$= \frac{e^x\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ **(Ans.)**

24. (i) $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$

$= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}x$

$[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}]$

$= \tan^{-1}\tan\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{b-ax}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{a}{b}+x}{1-\left(\frac{a}{b}\right)x}\right\}$

$= \tan^{-1}\frac{a}{b} + \tan^{-1}x$

$[\because \tan^{-1}(a) + \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)]$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right\} + \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ **(Ans.)**

(iii) ধরি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\frac{bx}{a}}{1-\frac{bx}{a}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$ [ধরি, $\frac{bx}{a} = \tan\theta$]

$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$

$= \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{\pi}{4} + \left(\tan^{-1}\frac{bx}{a}\right)$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{bx}{a}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{bx}{a}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\cdot\frac{b}{a}$

$= \frac{a^2}{a^2+b^2x^2}\times\frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}$ **(Ans.)**

25.(i) ধরি, $x = \sin\theta$, $\therefore \theta = \sin^{-1}x$

$\therefore y = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{2\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$= 2\theta$

$= 2\sin^{-1}x$

এখন, $\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}\right]$

$= \frac{d}{dx}(2\sin^{-1}x) = 2\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$

$= 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$ ... ... (i)

এবং $ax = \sin\theta$ ... ... (ii)

(i) নং হতে পাই,

$y = \sin^{-1}\{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\}$ [(ii) নং হতে]

$= \sin^{-1}\{2\sin\theta\cos\theta\}$

$= \sin^{-1}\sin 2\theta = 2\theta$

$= 2\sin^{-1}(ax)$ [(ii) নং হতে]

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(ax)\} = \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ (Ans.)

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তরক সহগ, $\frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

(iii) মনে করি, $y = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

$\therefore y = \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$= \sin^{-1}\sin 3\theta$

$= 3\theta = 3\sin^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

ধরি, $x = \sin\theta$

$\therefore \theta = \sin^{-1}x$

(iv) মনে করি, $y = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

$\therefore y = \cos^{-1}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= \cos^{-1}\cos 3\theta$

$= 3\theta = 3\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

ধরি, $x = \cos\theta$

$\therefore \theta = \cos^{-1}x$

26.(i) ধরি, $y = \sin^{-1}(\sqrt{xe^x})$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sqrt{xe^x})\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{xe^x})$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}}\cdot\frac{(xe^x+e^x)}{2\sqrt{xe^x}}$

$= \frac{(x+1)e^x}{2\sqrt{xe^x}\sqrt{1-xe^x}}$ (Ans.)

(ii) মনে করি, $y = \sin^{-1}(\sin e^x) = e^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (Ans.)

(iii) ধরি, $y = \cos^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

ধরি, $x = \cos\theta$

$\therefore \theta = \cos^{-1}x$

$\therefore y = \cos^{-1}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \cos^{-1}\left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos^{-1}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

27. (i) $\frac{d}{dx}\{e^x\sin^{-1}x\}$

$= \sin^{-1}x.\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}.(\sin^{-1}x)$

$= e^x\sin^{-1}x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

(ii) ধরি, $y = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2+1)\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \tan^{-1}x\frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{d}{dx}(x)$

$= (x^2+1)\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x.2x - 1$

$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1 = 2x\tan^{-1}x$ (Ans.)

(iii) $\frac{d}{dx}(e^{ax}\tan^2x)$

$= e^{ax}\frac{d}{dx}(\tan^2x) + \tan^2x\frac{d}{dx}(e^{ax})$

$= e^{ax}.2\tan x.\frac{d}{dx}(\tan x) + \tan^2x.e^{ax}\frac{d}{dx}(ax)$

$= e^{ax}.2\tan x\sec^2x + ae^{ax}\tan^2x$

$= e^{ax}\tan x(2\sec^2x + a\tan x)$. (Ans.)

অনুশীলনী-9(D) এর সমাধান

1. (i) $\frac{d}{dx}\left[ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]$

$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\left\{1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}.2x\right\}$

$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left\{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\right\} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$ (Ans.)

(ii) $\frac{d}{dx}[ln\{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\}]$

$= \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})$

$= \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})}\times\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{(x-2)(x+1)}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{(x-2)(x+1)}}$ (Ans.)

(iii) $\frac{d}{dx}\left[ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[ln(1+\sqrt{x}) - ln(1-\sqrt{x})\right]$

$= \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\right\}$

$= \frac{2}{2\sqrt{x}(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{d}{dx}\left[ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\ln e^x + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}(x+1)\right]$

$= \frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

$= 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$

$= \frac{2x^2-2+x+1-x+1}{2(x^2-1)} = \frac{x^2}{x^2-1}$ **(Ans.)**

(v) $\frac{d}{dx}\left\{ln\left[\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right]\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left[ln(x^2+x+1) - ln(x^2-x+1)\right]$

$= \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$= \frac{2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$= \frac{2(1-x^2)}{x^4+x^2+1}$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{d}{dx}\left[ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[ln(\sqrt{x+1}-1) - ln(\sqrt{x+1}+1)\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left\{\frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}\right\}$

$= \frac{2}{2\sqrt{x+1}(x+1-1)} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ **(Ans.)**

(vii) ধরি, $y = ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = ln\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}$

$= ln\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = ln\tan\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$

$= \text{cosec}\, x$ **(Ans.)**

2. (i) $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right]^n$

$= n\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= n\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{n-1} \frac{(1+\sqrt{1-x^2})\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$

$= \frac{n \cdot x^{n-1}}{(1+\sqrt{1-x^2})^{n+1}} \cdot \left(1+\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \frac{n\, x^{n-1}}{(1+\sqrt{1-x^2})^{n+1}} \frac{(\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{n\, x^{n-1}}{(1+\sqrt{1-x^2})^{n+1}} \times \frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{n\, x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})^n}$

$= \frac{n}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ এবং $x = \tan\theta$ ... ... (i)

$\therefore y = \left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^2 = (\cos 2\theta)^2 = \cos^2 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = -4\cos 2\theta \sin 2\theta$

(i) নং থেকে $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-4\cos 2\theta\sin 2\theta}{\sec^2\theta}$

$= -4 \cdot \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{-8\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^3} = \frac{-8x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\right\}$

$= \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1+x)^{\frac{1}{2}}}{1+x}$

$= \frac{-1}{(1+x)}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1+x}}\right]$

$= -\frac{1-x+1+x}{2\sqrt{1-x^2}\,(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

3(i) ধরি, $y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$

$\therefore \ln y = \ln\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\right]$ [উভয় পক্ষে $\ln$ নিয়ে]

$= \ln\{(x+1)^2\sqrt{x-1}\} - \ln\{(x+4)^3 e^x\}$

$= \ln(x+1)^2 + \ln(\sqrt{x-1}) - [\ln(x+4)^3 + \ln e^x]$

$= 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x\ln e$

$\therefore \ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = 2\frac{d}{dx}\{\ln(x+1)\} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\{\ln(x-1)\}$
$- 3\frac{d}{dx}\{\ln(x+4)\} - \frac{d}{dx}(x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x-1} - 3.\frac{1}{x+4} - 1$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2\sqrt{(x-1)}}{(x+4)^3 e^x}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = x^3\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}$

$\therefore \ln(y) = \ln x^3 + \ln\sqrt{x^2+4} - \ln\sqrt{x^2+3}$

$= 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\ln(x^2+3)$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{3}{x} + \frac{2x}{2(x^2+4)} - \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+3)}$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{x}{x^2+3}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{x}{x^2+3}\right]$

$= x^3\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}\left[\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{x}{x^2+3}\right]$ **(Ans.)**

4. ধরি, $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

$= \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}}{(x-3)^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore \ln y = \ln(x-1)^{\frac{1}{2}} + \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} - \ln(x-3)^{\frac{1}{2}} - \ln(x-4)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \ln y = \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x-2)$
$- \frac{1}{2}\ln(x-3) - \frac{1}{2}\ln(x-4)$

x এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)$

(Ans.)

5.(i) ধরি, $y = \frac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \ln y = \ln e^{x^2} + \ln\tan^{-1}x - \ln\sqrt{1+x^2}$

$= x^2 + \ln\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = 2x + \frac{1}{\tan^{-1}x}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$
$- \frac{1}{2(1+x^2)}\frac{d}{dx}(1+x^2)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{\tan^{-1}x\,(1+x^2)} - \frac{2x}{2(1+x^2)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[2x + \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x} - \frac{x}{1+x^2}\right]$

$= \frac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}\left[2x + \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x} - \frac{x}{1+x^2}\right]$ **(Ans.)**

(ii) $y = \frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \ln y = \ln x + \ln\cos^{-1}x - \ln\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\ln(1-x^2)]$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}} - \frac{(-2x)}{2(1-x^2)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2}\right]$

$= \frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2}\right]$ **(Ans.)**

6. ধরি, $y = \frac{(x^2+1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$= x^{4-\frac{2}{3}} + 2x^{2-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore y = x^{\frac{10}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{10}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{3}x^{\frac{10}{3}-1} + 2.\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}} + \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(5x^{\frac{7}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{5}{3}}\right)$ **(Ans.)**

7.(i) মনে করি, $y = x^x$

তাহলে, $ln y = x\ ln x$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

এখন, x-এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x\ ln(x)]$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = ln(x)\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}[ln(x)]$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = ln(x) + x.\frac{1}{x}$

বা, $\frac{dy}{dx} = y[ln(x) + 1]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^x[lnx + 1]$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = x^{\frac{1}{x}}$

$\therefore ln y = \frac{1}{x} lnx$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(lnx) + ln(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + ln(x).(-1)\frac{1}{x^2}\right]$

$= x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}ln(x)\right] = x^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}[1 - ln(x)]$

$= x^{\frac{1}{x}-2}[1 - lnx]$ **(Ans.)**

(iii) মনে করি, $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$

তাহলে, $lny = ln\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $lny = \sqrt{x}\ ln\ x^{\frac{1}{2}}$

বা, $ln\ y = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ ln\ x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}ln\ x\right]$

বা, $\frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{2}\left[\sqrt{x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}lnx\right]$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2}ln\ x\right)\right]$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}\left[\frac{2 + lnx}{2}\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}[2 + lnx]$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $y = (1 + x^2)^{2x}$

বা, $lny = ln(1 + x^2)^{2x}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $lny = 2x\ ln(1 + x^2)$

x এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 2x.\frac{1}{1+x^2}.2x + ln(1 + x^2).2$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{1+x^2} + 2ln(1 + x^2)$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4x^2}{1+x^2} + 2ln(1 + x^2)\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{2x}\left[\frac{4x^2}{1+x^2} + 2ln(1 + x^2)\right]$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $y = (1 + x)^x$

বা, $\ln y = x\ln(1 + x)$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(1 + x) + \frac{x}{1+x}$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left\{\ln(1 + x) + \frac{x}{1+x}\right\}$

$= \frac{(1+x)^x}{1+x}\{(1 + x)\ln(1 + x) + x\}$

$= (1 + x)^{x-1}\{(1 + x)\ln(1 + x) + x\}$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, $y = (x^x)^x = x^{x^2}$

তাহলে, $ln\ y = ln\ x^{x^2}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $ln\ y = x^2\ ln\ x$

এখন x এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{d}{dx}(ln\ y) = \frac{d}{dx}(x^2\ ln\ x)$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{1}{x} + 2x.\ ln\ x$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x(1 + 2\ ln\ x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\{x(1 + 2\ ln\ x)\}$

বা, $\frac{dy}{dx} = (x^x)^x\{x(1 + 2\ ln\ x)\}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{x^2}\{x(1 + 2\ lnx)\}$ **(Ans.)**

(vii) ধরি, $y = e^{e^x}$

$\therefore \ln y = \ln e^{e^x} = e^x \ln e = e^x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = e^x$ বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = ye^x = e^{e^x}.e^x$ **(Ans.)**

(viii) ধরি, $y = x^{e^x}$

$\therefore \ln y = \ln x^{e^x} = e^x \ln x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(e^x \ln x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln x\right) = e^x\, x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ **(Ans.)**

(ix) মনে করি, $y = e^{x^x}$

তাহলে, $\ln y = x^x \ln e = x^x$ $[\because \ln e = 1]$

$\therefore \ln(\ln y) = x \ln x$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\ln x$

বা, $\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y \ln y\,(1 + \ln x) = e^{x^x}.\, x^x(1 + \ln x)$ **(Ans.)**

(x) মনে করি, $y = a^{\ln(\cos x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{a^{\ln(\cos x)}\} = a^{\ln(\cos x)}.\ln a.\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\}$

$= a^{\ln(\cos x)}.\ln a.\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x)$

$= a^{\ln(\cos x)}.\ln a.\frac{(-\sin x)}{\cos x}$

$= -a^{\ln(\cos x)}.\ln a.\tan x$ **(Ans.)**

(xi) ধরি, $y = (\sin x)^x$

$\therefore \ln y = \ln(\sin x)^x = x \ln \sin x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = x\frac{d}{dx}(\ln \sin x) + \ln \sin x\frac{d}{dx}(x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) + \ln \sin x$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x}{\sin x} + \ln \sin x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y(x\cot x + \ln \sin x)$

$= (\sin x)^x(x\cot x + \ln \sin x)$ **(Ans.)**

(xii) ধরি, $y = x^{\cos x}$

তাহলে, $\ln y = \cos x \ln x$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(\ln x)$

$= \ln x(-\sin x) + \cos x.\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[-\sin x(\ln x) + \frac{\cos x}{x}\right]$

$= x^{\cos x}\left[-\sin x(\ln x) + \frac{\cos x}{x}\right]$ **(Ans.)**

(xiii) মনে করি, $y = (\cot x)^{\tan x}$

$\therefore \ln y = \ln(\cot x)^{\tan x}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\ln y = \tan x \ln(\cot x)$

x-এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\tan x.\ln(\cot x)\}$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \tan x.\frac{d}{dx}\ln(\cot x) + \ln(\cot x).\frac{d}{dx}(\tan x)$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \tan x.\frac{1}{\cot x}.(-\text{cosec}^2 x) + \ln(\cot x).\sec^2 x$

বা, $\frac{dy}{dx} = y[\sec^2 x.\ln(\cot x) - \tan^2 x.\frac{1}{\sin^2 x}]$

বা, $\frac{dy}{dx} = (\cot x)^{\tan x}\left[\sec^2 x \ln(\cot x) - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (\cot x)^{\tan x}[\sec^2 x\{\ln(\cot x) - 1\}]$ **(Ans.)**

(xiv) ধরি, $y = (\sin x)^{\tan x}$

বা, $\ln y = \tan x \ln(\sin x)$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \tan x.\frac{1}{\sin x}.\cos x + \sec^2 x \ln(\sin x)$

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \tan x.\frac{1}{\tan x} + \sec^2 x \ln(\sin x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}\{(1 + \sec^2 x \ln(\sin x)\}$ **(Ans.)**

(xv) মনে করি, $y = x^x \ln x$

$\therefore y = x^x \ln x$

বা, $\ln y = \ln(x^x \ln x)$

বা, $\ln y = \ln x^x + \ln(\ln x)$

বা, $\ln y = x \ln x + \ln(\ln x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x.1 + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$

$= \frac{x\ln x + \ln x(x\ln x) + 1}{x\ln x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y.\frac{1 + x\ln x(1 + \ln x)}{x\ln x}$

$= x^x \ln x.\frac{1 + x\ln x(1 + \ln x)}{x\ln x}$

$= x^{x-1}\{1 + x\ln(x)(1 + \ln x)\}$ **(Ans.)**

(xvi) মনে করি, $y = (x)^{\ln x}$

তাহলে, $\ln(y) = \ln(x) \times \ln(x)$

$\therefore \ln(y) = \{\ln(x)\}^2$

এখন, x-এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{d}{dx}[\ln(y)] = \frac{d}{dx}[\{\ln(x)\}^2]$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 2\ln(x)\frac{d}{dx}[\ln(x)]$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\ln(x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}\ln(x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}(x)^{\ln x}\ln(x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x^{(\ln x)-1}.\ln(x)$ **(Ans.)**

(xvii) মনে করি, $y = a^{a^x}$

বা, $\ln y = \ln a^{a^x}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\ln y = a^x \ln a$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a\frac{d}{dx}(a^x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\ln a.a^x \ln a$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{a^x}.a^x(\ln a)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তরক সহগ, $a^{a^x}.a^x(\ln a)^2$ **(Ans.)**

(xviii) ধরি, $y_1 = (\sin x)^{\cos x}$ এবং $y_2 = (\cos x)^{\sin x}$

$\therefore ln y_1 = \cos x\, ln(\sin x)$ $\therefore ln y_2 = \sin x\, ln(\cos x)$

$\therefore \frac{d}{dx}(ln y_1) = \frac{\cos x}{\sin x}.\cos x - \sin x\, ln(\sin x)$

বা, $\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = \cot x.\cos x - \sin x\, ln(\sin x)$

বা, $\frac{dy_1}{dx} = y_1(\cot x.\cos x - \sin x\, ln(\sin x))$

$= (\sin x)^{\cos x}(\cot x.\cos x - \sin x\, ln(\sin x))$

এবং $\frac{d}{dx}(\ln y_2) = -\frac{\sin x}{\cos x}.\sin x + \cos x\, ln(\cos x)$

বা, $\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx} = -\tan x.\sin x + \cos x\, ln(\cos x)$

বা, $\frac{dy_2}{dx} = y_2(\cos x\, ln(\cos x) - \tan x.\sin x)$

$= (\cos x)^{\sin x}(\cos x\, ln(\cos x) - \tan x.\sin x)$

$\therefore \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\{\cot x.\cos x - \sin x\, ln(\sin x)\}$
$+ (\cos x)^{\sin x}\{\cos x\, ln(\cos x) - \tan x.\sin x\}$ **(Ans.)**

(xix) ধরি, $y_1 = x^x$

$\therefore ln y_1 = x ln x$

$\therefore \frac{d}{dx}(ln y_1) = \frac{x}{x} + \ln x$ বা, $\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = 1 + ln x$

$\therefore \frac{dy_1}{dx} = y_1(1 + ln x) = x^x(1 + ln x)$

ধরি, $y_2 = (\sin x)^{ln x}$

$ln y_2 = ln x\, ln\sin x$

$\therefore \frac{d}{dx}(ln y_2) = \frac{ln x}{\sin x}.\cos x + \frac{ln\sin x}{x}$

বা, $\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx} = ln x \cot x + \frac{ln\sin x}{x}$

$\therefore \frac{dy_2}{dx} = y(\cot x\, ln x + \frac{ln\sin x}{x})$

$= (\sin x)^{ln x}(\cot x\, ln x + \frac{ln\sin x}{x})$

$\therefore \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$

$= x^x(1 + ln x) + (\sin x)^{ln x}(\cot x\, ln x + \frac{ln\sin x}{x})$ (Ans.)

(xx) $\frac{d}{dx}(\log_{\cos x}\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{ln \tan x}{ln \cos x}\right)$

$= \frac{ln(\cos x)\frac{d}{dx}\{ln(\tan x)\} - ln(\tan x)\frac{d}{dx}\{ln(\cos x)\}}{\{ln(\cos x)\}^2}$

$= \frac{ln(\cos x).\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x - ln(\tan x)\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\{ln(\cos x)\}^2}$

$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\cos x}{\sin x}ln(\cos x) + \tan x\, ln(\tan x)}{\{ln(\cos x)\}^2}$

$= \frac{\sec x.\operatorname{cosec} x\, ln(\cos x) + \tan x\, ln(\tan x)}{\{ln(\cos x)\}^2}$ (Ans.)

(xxi) মনে করি, $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$

$= e^{\ln x \sin x} + e^{\ln(\sin x)^x}$

$= e^{\sin x \ln x} + e^{x\ln(\sin x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x \ln x}) + \frac{d}{dx}(e^{x\ln(\sin x)})$

$= e^{\sin x \ln x} \times \left\{\sin x.\frac{1}{x} + \cos x.\ln x\right\}$
$+ e^{x\ln\sin x} \times \{\ln(\sin x) + x\cot x\}$

$= x^{\sin x}\{x^{-1}\sin x + \ln x\cos x\}$
$+ (\sin x)^x\{\ln(\sin x) + x\cot x\}$ (Ans.)

(xxii) ধরি, $y = e^{x^2} + x^{x^2}$

$= u + v$ [যেখানে, $u = e^{x^2}$ ও $v = x^{x^2}$]

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ……… (i)

এখন, $u = e^{x^2}$

উভয় পক্ষে ln নিয়ে পাই,

বা, $ln u = ln e^{x^2} = x^2 ln e = x^2$ [$\because ln e = 1$]

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 2x$ বা, $\frac{du}{dx}$

$\therefore \frac{du}{dx} = 2x.\ e^{x^2}$ [$\because u = e^{x^2}$]

আবার, $v = x^{x^2}$

বা, $ln v = ln\ x^{x^2} = x^2 ln x$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x^2.\frac{1}{x} + \ln x.2x$

বা, $\frac{dv}{dx} = v\,(x + 2x ln x)$

$= x^{x^2}(x + 2x ln x)$ [$\because v = x^{x^2}$]

$= x^{x^2}.x(1 + 2 ln x)$

$\therefore \frac{dv}{dx} = x^{x^2+1}(1 + 2 ln x)$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ হতে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x.\ e^{x^2} + x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$ **(Ans.)**

(xxiii) ধরি, $y = \log_a x + \log_x a = y_1 + y_2$

তাহলে, $y_1 = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\therefore \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x \ln a}$

আবার, $y_2 = \log_x a = \frac{\ln a}{\ln x}$

$\therefore \frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln a}{\ln x}\right) = \frac{\ln x.\ 0 - \ln a.\ \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-\ln a}{x(\ln x)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{x \ln a} - \frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

$= \frac{(\ln x)^2 - (\ln a)^2}{x \ln a\,(\ln x)^2}$ **(Ans.)**

অনুশীলনী-9(E) এর সমাধান

1. (i) দেওয়া আছে, $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore 4x^3 + 2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $2y(x^2 + 2y^2)\frac{dy}{dx} = -(4x^3 + 2xy^2)$

বা, $2y(x^2 + 2y^2)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x(2x^2 + y^2)}{y(x^2 + 2y^2)}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $x^3y + xy^3 = 2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore 3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $(x^3 + 3xy^2)\frac{dy}{dx} = -(3x^2y + y^3)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2y + y^3)}{x^3 + 3xy^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y(3x^2 + y^2)}{x(x^2 + 3y^2)}$ **(Ans.)**

2.(i) দেওয়া আছে, $y = \tan(x + y)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2(x + y)\frac{d}{dx}(x + y)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \sec^2(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \sec^2(x + y) + \sec^2(x + y)\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{dy}{dx} - \sec^2(x + y)\frac{dy}{dx} = \sec^2(x + y)$

বা, $\{1 - \sec^2(x + y)\}\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2(x + y)$

বা, $-\tan^2(x + y)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

বা, $-y^2\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{-y^2} = -\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \sin(x + y)^2$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)^2 .2(x + y).\left\{1 + \frac{dy}{dx}\right\}$

$= 2(x + y)\cos(x + y)^2 + 2(x + y)\cos(x + y)^2\frac{dy}{dx}$

বা, $\{1 - 2(x + y)\cos(x + y)^2\}\frac{dy}{dx} = 2(x + y)\cos(x + y)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2(x + y)\cos(x + y)^2}{1 - 2(x + y)\cos(x + y)^2}$

$= \frac{2(x + y)\sqrt{\{1 - \sin^2(x + y)^2\}}}{1 - 2(x + y)\sqrt{\{1 - \sin^2(x + y)^2\}}}$

$= \frac{2(x + y)\sqrt{1 - y^2}}{1 - 2(x + y)\sqrt{1 - y^2}}$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $x \cos y = \sin(x + y)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$x\cos y = \sin(x + y)$

$\therefore \cos y - x\sin y\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)\dfrac{d}{dx}(x+y)$

বা, $\cos y - x\sin y\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)$

বা, $\cos y - x\sin y\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \cos(x+y)\dfrac{dy}{dx}$

বা, $-\{x\sin y + \cos(x+y)\}\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y) - \cos y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos y - \cos(x+y)}{x\sin y + \cos(x+y)}$ **(Ans.)**

(iv) $x^2 + y^2 = \sin(xy)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = \cos(xy)\dfrac{d}{dx}(xy)$

বা, $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = \cos(xy)\left(x\dfrac{dy}{dx} + y\right)$

বা, $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = x\cos(xy)\dfrac{dy}{dx} + y\cos(xy)$

বা, $\{2y - x\cos(xy)\}\dfrac{dy}{dx} = -2x + y\cos(xy)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)}$ **(Ans.)**

(v) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

তাহলে, $ln(\cos x)^y = ln(\sin y)^x$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $y\, ln(\cos x) = x\, ln(\sin y)$

বা, $\dfrac{dy}{dx}.ln(\cos x) + y(-\tan x) = ln(\sin y) + x\cot y\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}[ln(\cos x) - x\cot y] = ln(\sin y) + y\tan x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ln(\sin y) + y\tan x}{ln(\cos x) - x\cot y}$ **(Ans.)**

3.(i) দেওয়া আছে, $x^y y^x = 1$

তাহলে, $ln(x^y y^x) = ln\,1$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $ln\,x^y + ln\,y^x = 0$

বা, $y\,ln\,x + x\,ln\,y = 0$

x এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{d}{dx}(y\,ln\,x) + \dfrac{d}{dx}(x\,ln\,y) = 0$

বা, $y\dfrac{d}{dx}(ln x) + ln x\dfrac{dy}{dx} + x\dfrac{d}{dx}(ln y) + ln y\dfrac{d}{dx}(x) = 0$

বা, $y.\dfrac{1}{x} + ln\,x\dfrac{dy}{dx} + x.\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} + ln\,y = 0$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-ln\,y - \dfrac{y}{x}}{ln\,x + \dfrac{x}{y}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x\,ln\,y + y}{y\,ln\,x + x}\times\dfrac{y}{x}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $x^m y^n = (x-y)^{m+n}$

$\therefore ln(x^m y^n) = ln(x-y)^{m+n}$

বা, $m\,lnx + n\,lny = (m+n)\,ln(x-y)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore \dfrac{m}{x} + \dfrac{n}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m+n}{x-y}\dfrac{d}{dx}(x-y)$

বা, $\dfrac{m}{x} + \dfrac{n}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m+n}{x-y}\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)$

বা, $\dfrac{n}{y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{m+n}{x-y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m+n}{x-y} - \dfrac{m}{x}$

বা, $\left(\dfrac{n}{y} + \dfrac{m+n}{x-y}\right)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mx+nx-mx+my}{x(x-y)}$

বা, $\dfrac{nx-ny+my+ny}{y(x-y)}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nx+my}{x(x-y)}$

বা, $\dfrac{nx+my}{y(x-y)}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{nx+my}{x(x-y)}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $x^y = e^{x-y}$

বা, $lnx^y = lne^{x-y}$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $y\,lnx = (x-y)\,lne$

বা, $y\,lnx = x - y$ $[\because lne = 1]$

বা, $y[1 + lnx] = x$ $\therefore y = \dfrac{x}{1+ln(x)}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + lnx - x\cdot\dfrac{1}{x}}{\{1+ln(x)\}^2} = \dfrac{lnx}{\{1+ln(x)\}^2}$ **(Ans.)**

4(i) দেওয়া আছে, $(\sec x)^y = (\tan y)^x$

$\therefore ln(\sec x)^y = ln(\tan y)^x$ [উভয় পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $y\,ln(\sec x) = x\,ln(\tan y)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $\dfrac{y}{\sec x}\sec x.\tan x + ln(\sec x)\dfrac{dy}{dx}$

$= \dfrac{x}{\tan y}\sec^2 y.\dfrac{dy}{dx} + ln(\tan y)$

বা, $y\tan x + ln(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = x\cot y.\sec^2 y\dfrac{dy}{dx} + ln(\tan y)$

বা, $\{ln(\sec x) - x\cot y.\sec^2 y\}\dfrac{dy}{dx} = ln(\tan y) - y\tan x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ln(\tan y) - y\tan x}{ln(\sec x) - x\cot y.\sec^2 y}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $x = y\,ln(xy)$

বা, $x = y\,lnx + y\,lny$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore 1 = \dfrac{y}{x} + ln\,x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{y}\dfrac{dy}{dx} + lny\dfrac{dy}{dx}$

বা, $1 - \dfrac{y}{x} = (lnx + lny + 1)\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\frac{x-y}{x} = (lnxy + 1)\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{x-y}{x} = \left(\frac{x}{y}+1\right)\frac{dy}{dx}$ $[\because x = y\ ln(xy)]$

বা, $\frac{x-y}{x} = \left(\frac{x+y}{y}\right)\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{y(x-y)}{x(x+y)} = \frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে,

$\ln(xy) = x + y$

বা, $ln(x) + ln(y) - x - y = 0$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}\{ln(x) + ln(y) - x - y\} = 0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - 1 - \frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{y}-1\right)\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$

বা, $\left(\frac{1-y}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}\cdot\frac{x-1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $ln(xy) = x^2 + y^2$

বা, $lnx + lny = x^2 + y^2$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$

বা, $\left(\frac{1}{y} - 2y\right)\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x}$

বা, $\left(\frac{1-2y^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$ **(Ans.)**

5. দেওয়া আছে, $e^{xy} - 4xy = 2$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $e^{xy}\frac{d}{dx}(xy) - 4y - 4x\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $e^{xy}.x\frac{dy}{dx} + e^{xy}.y - 4y - 4x\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $x(e^{xy} - 4)\frac{dy}{dx} = 4y - ye^{xy}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y(e^{xy}-4)}{x(e^{xy}-4)} = -\frac{y}{x}$ **(Ans.)**

6. দেওয়া আছে, $x + y = \sin^{-1}\frac{y}{x}$ বা, $\sin(x+y) = \frac{y}{x}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $\cos(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}$

বা, $x^2\cos(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = x\frac{dy}{dx} - y$

বা, $x^2\cos(x+y) + x^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} - y$

বা, $\{x^2\cos(x+y) - x\}\frac{dy}{dx} = -x^2\cos(x+y) - y$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y + x^2\cos(x+y)}{x - x^2\cos(x+y)}$ **(Ans.)**

7.(i) $x = a\cos\theta \quad \therefore \frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$

$y = a\sin\theta \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$ **(Ans.)**

(ii) $x = at^2 \quad \therefore \frac{dx}{dt} = 2at$

$y = 2at \quad \therefore \frac{dy}{dt} = 2a$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$ **(Ans.)**

(iii) $x = e^t\cos t \quad \therefore \frac{dx}{dt} = -e^t\sin t + e^t\cos t$

$y = e^t\sin t \quad \therefore \frac{dy}{dt} = e^t\cos t + e^t\sin t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t(\cos t + \sin t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$ **(Ans.)**

(iv) $x = a(\theta - \sin\theta)$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$

$y = a(1 - \cos\theta)$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$ **(Ans.)**

(v) $x = \frac{3at}{1+t^3}$

বা, $\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^3).3a - 3at.3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a + 3at^3 - 9at^3}{(1+t^3)^2}$

$= \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$

$y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^3).6at - 3at^2.3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6at + 6at^4 - 9at^4}{(1+t^3)^2}$

$= \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \times \frac{(1+t^3)^2}{3a(1-2t^3)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3})$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি: $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ...... (i), $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ...... (ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে,

$\frac{x}{y} = \frac{3at}{1+t^3} \times \frac{1+t^3}{3at^2}$ বা, $\frac{x}{y} = \frac{1}{t}$ $\therefore t = \frac{y}{x}$

(i) এ $t = \frac{y}{x}$ বসাই,

$x = \frac{3a.\frac{y}{x}}{1+\frac{y^3}{x^3}}$ বা, $x = \frac{3ay}{x} \times \frac{x^3}{x^3+y^3}$

বা, $x = \frac{3ax^2y}{x^3+y^3}$ বা, $x^3 + y^3 = 3ayx$ $[\because x \neq 0]$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(y.1 + x.\frac{dy}{dx}\right)$

বা, $x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = ay + ax\frac{dy}{dx}$

বা, $y^2\frac{dy}{dx} - ax\frac{dy}{dx} = ay - x^2$

বা, $\frac{dy}{dx}(y^2 - ax) = (ay - x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ **(Ans.)**

(vi) $x = \frac{a\cos t}{t}$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-at\sin t - a\cos t}{t^2}$

$y = \frac{a\sin t}{t}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{at\cos t - a\sin t}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at\cos t - a\sin t}{-at\sin t - a\cos t}$

$= \frac{t\cos t - \sin t}{-(t\sin t + \cos t)}$

$= \frac{\sin t - t\cos t}{t\sin t + \cos t}$ **(Ans.)**

(vii) $x = a(\cos t + t\sin t)$

$\therefore \frac{dx}{dt} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$

$y = a(\sin t - t\cos t)$

$\therefore \frac{dy}{dt} = a(\cos t + t\sin t - \cos t) = at\sin t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t$ **(Ans.)**

8. দেওয়া আছে, $x^y + y^x = a^b$

বা, $u + v = a^b$ ...... (i)

যেখানে, $u = x^y$ এবং $v = y^x$

এখন, $u = x^y$

বা, $\ln u = y\ln x$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = y.\frac{1}{x} + \ln x.\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{du}{dx} = x^y\left(\frac{y}{x} + \ln x.\frac{dy}{dx}\right)$ ...... (ii)

এবং $v = y^x$

বা, $\ln v = x\ln y$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x.\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} + \ln y$

বা, $\frac{dv}{dx} = y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y\right)$ ...... (iii)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(a^b)$

বা, $x^y\left(\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right) + y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y\right) = 0$

বা, $yx^{y-1} + x^y\ln x\frac{dy}{dx} + xy^{x-1}\frac{dy}{dx} + y^x\ln y = 0$

বা, $(x^y\ln x + xy^{x-1})\frac{dy}{dx} = -(yx^{y-1} + y^x\ln y)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} + y^x\ln y}{x^y\ln x + xy^{x-1}}$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-9.17.1 | পৃষ্ঠা-৩৬৩

$e^y = \sin x$

বা, $y\,\ell ne = \ell n(\sin x)$

বা, $y = \ell n(\sin x)$ $[\because \ell ne = 1]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}.\cos x$

বা, $\frac{dy}{dx} = \cot x$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cot x)$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)^2$

$= -2\operatorname{cosec} x \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)$

$= -2\operatorname{cosec} x(-\operatorname{cosec} x \cot x)$

$= 2\operatorname{cosec}^2 x.\cot x$

$= 2\cot x \operatorname{cosec}^2 x$ (দেখানো হলো)

অনুচ্ছেদ-9.17.2 | পৃষ্ঠা-৩৬৪

(i) মনে করি,

$f(x) = e^x \quad \therefore f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \quad \therefore f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \quad \therefore f''(0) = 1$

... ...

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \ldots$$

$$\therefore e^x = 1 + x.1 + \frac{x^2}{2!}.1 + \frac{x^3}{3!}.1 + \ldots + \frac{x^n}{n!}.1 + \ldots$$

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ (Ans.)}$$

(ii) মনে করি,

$f(x) = a^x \quad \therefore f(0) = 1$

$f'(x) = a^x\, lna \quad \therefore f'(0) = lna$

$f''(x) = a^x (lna)^2 \quad \therefore f''(0) = (lna)^2$

$f'''(x) = a^x (lna)^3 \quad \therefore f'''(0) = (lna)^3$

... ...

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots\ldots$$

$$\therefore a^x = 1 + \frac{x}{1!}(lna) + \frac{x^2}{2!}(lna)^2 + \frac{x^3}{3!}(lna)^3 + \ldots \text{ (Ans.)}$$

(iii) মনে করি, $f(x) = \sin x \quad \therefore f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad \therefore f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad \therefore f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad \therefore f'''(0) = -1$

$f^{iv}(x) = \sin x \quad \therefore f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = \cos x \quad \therefore f^{v}(0) = 1$

... ...

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \text{ (Ans.)}$$

(iv) মনে করি, $f(x) = \cos x \quad \therefore f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \quad \therefore f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \quad \therefore f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \quad \therefore f'''(0) = 0$

$f^{iv}(x) = \cos x \quad \therefore f^{iv}(0) = 1$

$f^{v}(x) = -\sin x \quad \therefore f^{v}(0) = 0$

$f^{vi}(x) = -\cos x \quad \therefore f^{vi}(0) = 0 = -1$

....

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \cos x = 1 + x.0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}.0 + \frac{x^4}{4!}.1 + \frac{x^5}{5!}.0 + \frac{x^6}{6!}(-1) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

যা x এর সকল মানের জন্য প্রযোজ্য। **(Ans.)**

(v) মনে করি, $f(x) = \tan^{-1}x \quad \therefore f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \therefore f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \therefore f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x).2(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4}$

$\therefore f'''(0) = -2$

... ...

ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots$$

বা, $\tan^{-1}x = 0 + x.1 + \frac{x^2}{2!}.0 + \frac{x^3}{3!}.(-2) + \ldots$

বা, $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, $f(x) = e^{\cos x}$, $\therefore f(0) = e^{\cos 0} = e^1 = e$

$$f'(x) = e^{\cos x}(-\sin x) = -\sin x\, e^{\cos x}$$
$$\therefore f'(0) = -\sin 0 . e^{\cos 0} = 0$$
$$f''(x) = -\{\cos x . e^{\cos x} + e^{\cos x}(-\sin x). \sin x\}$$
$$= -\{\cos x.\, e^{\cos x} - \sin^2 x\, e^{\cos x}\}$$
$$\therefore f''(0) = -\{\cos 0 . e^{\cos 0} - \sin^2 0 . e^{\cos 0}\}$$
$$= -\{e^1 - 0\}$$
$$= -e$$
$$f'''(x) = -\{e^{\cos x}.(-\sin x) + \cos x . e^{\cos x}(-\sin x)\}$$
$$+ 2\sin x \cos x . e^{\cos x} + \sin^2 x . e^{\cos x}(-\sin x)$$
$$= \{e^{\cos x} \sin x + \sin x \cos x\, e^{\cos x}\}$$
$$+ \sin 2x . e^{\cos x} - \sin^3 x\, e^{\cos x}$$
$$\therefore f'''(0) = 0$$

... ...

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$
$$= e + 0 + \frac{x^2}{2!}(-e) + 0 + \ldots \ldots \ldots$$
$$= e - \frac{x^2}{2!} e + \ldots$$
$$\therefore e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) \text{ (Ans.)}$$

অনুশীলনী-9(F) এর সমাধান

1. দেওয়া আছে, $y = 5x^4 - 3x^3 + 5x + 2$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y_1 = 20x^3 - 9x^2 + 5$$
$$\therefore y_2 = 60x^2 - 18x \ldots \ldots \text{(i)}$$
$$y_3 = 120x - 18 \quad \ldots \ldots \text{(ii)}$$

$\therefore x = 2$ হলে,

(i) নং হতে, $y_2 = 60(2)^2 - 18(2) = 60 \times 4 - 36$
$= 240 - 36 = 204$ **(Ans.)**

এবং (ii) নং হতে, $y_3 = 120 \times 2 - 18$
$= 240 - 18 = 222$ **(Ans.)**

2. দেওয়া আছে, $y = x^2 \ln x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = x^2 . \frac{1}{x} + \ln x . 2x$

বা, $y_1 = x + 2x \ln x$

বা, $y_2 = 1 + 2x . \frac{1}{x} + \ln x . 2$

বা, $y_2 = 3 + 2\ln x$

বা, $y_3 = 2 . \frac{1}{x}$

$\therefore y_3 = \frac{2}{x}$ **(Ans.)**

3. দেওয়া আছে, $y = px + \frac{q}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = p - \frac{q}{x^2}$$
$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2q}{x^3}$$

এখন, বামপক্ষ $= x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}$

$$= x . \frac{2q}{x^3} + 2\left(p - \frac{q}{x^2}\right)$$
$$= \frac{2q}{x^2} + 2p - \frac{2q}{x^2}$$
$$= 2p$$

= ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

4. দেওয়া আছে, $y = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} . (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = -x$

বা, $(1-x^2)\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1-x^2} = -xy$

$\therefore (1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (দেখানো হলো)

5. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

বা, $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

বা, $\sqrt{x}\, y = x + 1$

x এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}y) = \frac{d}{dx}(x+1)$$
$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y . \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

$\therefore 2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ (প্রমাণিত)

6. দেওয়া আছে, $y = \ln(\sin x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} = \frac{1}{\sin x} . \cos x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cot x$$
$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\cot x)$$
$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2 x$$
$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^2 x)$$

$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = -2\text{cosec}x.(-\text{cosec}x \cot x)$

$= 2\text{cosec}^2x \cot x = \frac{2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ (দেখানো হলো)

7. দেওয়া আছে, $y = (x^2-1)^n$ ... ... (i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = n(x^2-1)^{n-1}.2x$

বা, $y_1 = \frac{2xn(x^2-1)^n}{(x^2-1)}$

বা, $(x^2-1)y_1 = 2xny$ [(i) নং হতে]

বা, $(x^2-1)y_2 + y_1 2x = 2n(xy_1 + y)$

বা, $(x^2-1)y_2 + 2xy_1 - 2n.xy_1 - 2ny = 0$

বা, $(x^2-1)y_2 - 2xy_1(n-1) - 2ny = 0$

$\therefore (x^2-1)y_2 - 2(n-1)xy_1 - 2ny = 0$ (প্রমাণিত)

8. দেওয়া আছে, $y = x^m \ln x$ ..... (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = x^m.\frac{1}{x} + \ln(x).m.x^{m-1}$

বা, $y_1 = \frac{x^m}{x} + m.\ln(x).\frac{x^m}{x}$

$\therefore xy_1 = my + x^m$ [$\because y = x^m \ln x$] (দেখানো হলো)

9. দেওয়া আছে, $y = \tan x$ ...... (i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = \sec^2 x$

বা, $y_2 = 2\sec x.\sec x \tan x$

বা, $y_2 = 2\tan x \sec^2 x$

বা, $y_2 = 2\tan x(1+\tan^2 x)$

বা, $y_2 = 2y(1+y^2)$ [(i) নং হতে]

$\therefore y_2 = 2y(1+y^2)$ (প্রমাণিত)

10. দেওয়া আছে, $y = \sin x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = \cos x$

বা, $y_2 = -\sin x$

বা, $y_3 = -\cos x$

বা, $y_4 = \sin x$

বা, $y_4 = y$

$\therefore y_4 - y = 0$ (দেখানো হলো)

11. দেওয়া আছে, $y = a\cos x + b\sin x$ .....(i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = a(-\sin x) + b\cos x$

বা, $y_2 = -a\cos x - b\sin x$

বা, $y_3 = a\sin x - b\cos x$

বা, $y_4 = a\cos x + b\sin x$

বা, $y_4 = y$ [(i) নং হতে]

$\therefore y_4 - y = 0$ (দেখানো হলো)

12. দেওয়া আছে, $y = \sec x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$\therefore y_1 = \sec x \tan x$

বা, $y_2 = \sec x.\frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x.\frac{d}{dx}(\sec x)$

$= \sec x.\sec^2 x + \tan x.\tan x.\sec x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$

$= \sec x(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$

$= \sec x(2\sec^2 x - 1)$

$\therefore y_2 = y(2y^2 - 1)$ (দেখানো হলো)

13. দেওয়া আছে, $y = \tan x + \sec x$

$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$

$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)$

$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x + 1) - (\sin x + 1)\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos x.\cos x - (\sin x + 1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin x}$

আবার, $y_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 - \sin x}\right)$

$= \frac{(1 - \sin x)\frac{d}{dx}(1) - 1\frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$

$= \frac{(1 - \sin x).0 + \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

$\therefore y_2 = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ (দেখানো হলো)

14. দেওয়া আছে, $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = \frac{d}{dx}\{a\cos(\ln x)\} + \frac{d}{dx}\{b\sin(\ln x)\}$

বা, $y_1 = a\{-\sin(\ln x)\} \times \frac{1}{x} + b\{\cos(\ln x)\} \times \frac{1}{x}$

বা, $y_1 = \frac{-a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)}{x}$

বা, $xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$

বা, $\frac{d}{dx}(xy_1) = -a\frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\} + b\frac{d}{dx}\{\cos(\ln x)\}$

বা, $xy_2 + y_1 = -a \times \{\cos(\ln x)\} \times \frac{1}{x} + b\{-\sin(\ln x)\} \times \frac{1}{x}$

বা, $xy_2 + y_1 = -\frac{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)}{x}$

বা, $xy_2 + y_1 = -\frac{y}{x}$

বা, $x^2 y_2 + xy_1 = -y$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (প্রমাণিত)

15. দেওয়া আছে, $y = \cos\{\ln(1+x)\}$......(i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = -\sin\{\ln(1+x)\}.\frac{1}{1+x}$

বা, $(1+x)y_1 = -\sin\{\ln(1+x)\}$

বা, $(1+x)y_2 + y_1 = -\cos\{\ln(1+x)\}.\frac{1}{1+x}$

বা, $(1+x)^2y_2 + y_1(1+x) = -y$ [(i) নং হতে]

$\therefore (1+x)^2y_2 + (1+x)y_1 + y = 0$ (দেখানো হলো)

16. দেওয়া আছে, $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = A\frac{d}{dx}(e^{mx}) + B\frac{d}{dx}(e^{-mx})$

বা, $y_1 = Ame^{mx} - Bme^{-mx}$

বা, $y_2 = Am\frac{d}{dx}(e^{mx}) - Bm\frac{d}{dx}(e^{-mx})$

বা, $y_2 = Am.me^{mx} - Bm.(-m)e^{-mx}$

বা, $y_2 = Am^2e^{mx} + Bm^2e^{-mx}$

বা, $y_2 = m^2(Ae^{mx} + Be^{-mx})$

বা, $y_2 = m^2y$

$\therefore y_2 - m^2y = 0$ (প্রমাণিত)

17. দেওয়া আছে, $y = \frac{\ln x}{x}$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\frac{d}{dx}(1-\ln x) - (1-\ln x)\frac{d}{dx}(x^2)}{x^4}$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - 2x(1-\ln x)}{x^4}$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4}$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x(2\ln x - 3)}{x^4}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ (দেখানো হলো)

18. (i) দেওয়া আছে, $y = e^x \cos x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x(-\sin x) + e^x\cos x$

[x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$= e^x\cos x - e^x\sin x$

$= y - e^x\sin x$ [(i) নং হতে]

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - (e^x\sin x + e^x\cos x)$

[x এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে]

$= \frac{dy}{dx} - e^x\sin x - y$ [(i) নং হতে]

$= \frac{dy}{dx} - (y - \frac{dy}{dx}) - y$ [$\because \frac{dy}{dx} = y - e^x\sin x$]

$= \frac{dy}{dx} - y + \frac{dy}{dx} - y$

$= 2\frac{dy}{dx} - 2y$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (প্রমাণিত)

(ii) দেওয়া আছে, $y = e^x\cos x$ ... (i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dy}{dx} = e^x(-\sin x) + e^x\cos x$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = -(e^x\sin x + e^x\cos x) + (e^x\cos x - e^x\sin x)$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2e^x\sin x$

বা, $\frac{d^3y}{dx^3} = -2[e^x\sin x + e^x\cos x]$

বা, $\frac{d^3y}{dx^3} = -2e^x\sin x - 2e^x\cos x$

বা, $\frac{d^4y}{dx^4} = -2(e^x\sin x + e^x\cos x) - 2(e^x\cos x - e^x\sin x)$

বা, $\frac{d^4y}{dx^4} = -2e^x\sin x - 2e^x\cos x - 2e^x\cos x + 2e^x\sin x$

বা, $\frac{d^4y}{dx^4} = -4e^x\cos x$

বা, $\frac{d^4y}{dx^4} = -4y$ [(i) নং হতে]

$\therefore \frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$ (প্রমাণিত)

19. (i) দেওয়া আছে, $y = (e^x + e^{-x}) \sin x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = (e^x + e^{-x}) \cos x + (e^x - e^{-x}) \sin x$

বা, $y_2 = (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \sin x$

বা, $y_2 = 2(e^x - e^{-x}) \cos x$

বা, $y_3 = 2[(e^x - e^{-x})(-\sin x) + (e^x + e^{-x}) \cos x]$

বা, $y_4 = 2[-\{(e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \sin x\} + (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x}) \cos x]$

বা, $y_4 = 2[-(e^x - e^{-x}) \cos x - (e^x + e^{-x}) \sin x - (e^x + e^{-x}) \sin x + (e^x - e^{-x}) \cos x]$

বা, $y_4 = -2.2(e^x + e^{-x}) \sin x$

বা, $y_4 = -4y$

$\therefore y_4 + 4y = 0$ (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

বা, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left\{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right\}^2$ [বর্গ করে]

$= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}\{(e^x + e^{-x})^2 - 4.e^x.e^{-x}\}$

$= \left\{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right\}^2 - 1 = y^2 - 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$ (দেখানো হলো)

20. দেওয়া আছে, $y = (p + qx)e^{-2x}$

x এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = (p + qx)e^{-2x}.(-2) + e^{-2x}.q$

$\therefore y_1 = (-2p + q - 2qx)e^{-2x}$

এবং $y_2 = (-2p + q - 2qx)e^{-2x}.(-2) + e^{-2x}.(-2q)$

$= (4p - 4q + 4qx)e^{-2x}$

এখন $y_2 + 4y_1 + 4y = (4p - 4q + 4qx)e^{-2x} + 4(-2p + q - 2qx)e^{-2x} + 4(p + qx)e^{-2x}$

$= 4(p - q + qx - 2p + q - 2qx + p + qx)e^{-2x}$

$= 4.0.e^{-2x} = 0$

$\therefore y_2 + 4y_1 + 4y = 0$ (দেখানো হলো)

21.(i) দেওয়া আছে, $y = \sin^{-1}x$

বা, $y_1 = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$ [x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ বা, $y_1\sqrt{1-x^2} = 1$

$\therefore y_1^2(1 - x^2) = 1$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{d}{dx}\{y_1^2(1 - x^2)\} = \frac{d}{dx}(1)$

বা, $(1 - x^2)\frac{d}{dx}(y_1^2) + y_1^2\frac{d}{dx}(1 - x^2) = 0$

বা, $(1 - x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 0$

বা, $2y_1\{(1 - x^2)y_2 - xy_1\} = 0$

$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $y = \tan^{-1}x$

বা, $y_1 = \frac{1}{1 + x^2}$

বা, $(1 + x^2)y_1 = 1$

বা, $(1 + x^2)\frac{d}{dx}(y_1) + y_1\frac{d}{dx}(1 + x^2) = 0$

$\therefore (1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$ (দেখানো হলো)

22. দেওয়া আছে, $y = a\sin^{-1}x + b\cos^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$y_1 = a.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + b.\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_1 = a - b$

বা, $y_2(\sqrt{1-x^2}) + y_1\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$

বা, $y_2(1 - x^2) - xy_1 = 0$

$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (প্রমাণিত)

23.(i) দেওয়া আছে, $\sin\sqrt{y} = x$

বা, $\sqrt{y} = \sin^{-1}x$

বা, $y = (\sin^{-1}x)^2$ [বর্গ করে]

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$y_1 = 2\sin^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_1 = 2\sin^{-1}x$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_2 + y_1\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = 2.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $\cos\sqrt{y} = x$

বা, $\sqrt{y} = \cos^{-1}x$

বা, $y = (\cos^{-1}x)^2$ [বর্গ করে]

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = \frac{-2\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $\sqrt{1-x^2}\, y_1 = -2\cos^{-1}x$

বা, $(1 - x^2)(y_1)^2 = 4(\cos^{-1}x)^2$ [বর্গ করে]

বা, $(1 - x^2)(y_1)^2 = 4y$

বা, $(1 - x^2).2.y_1 + (y_1)^2(-2x) = 4y_1$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (দেখানো হলো)

(iii) দেওয়া আছে, $2y = (\tan^{-1}x)^2$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $2.y_1 = 2.\tan^{-1}x.\frac{1}{1+x^2}$

বা, $y_1(1+x^2) = \tan^{-1}x$

বা, $y_2(1+x^2) + 2xy_1 = \frac{1}{1+x^2}$

বা, $y_2(1+x^2)^2 + 2(1+x^2)xy_1 = 1$

$\therefore (1+x^2)^2y_2 + 2(1+x^2)xy_1 = 1$ **(দেখানো হলো)**

24.(i) দেওয়া আছে, $lny = a\sin^{-1}x$

বা, $y = e^{a\sin^{-1}x}$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_1(\sqrt{1-x^2}) = ae^{a\sin^{-1}x}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_1 = ay$

বা, $(1-x^2)y_1^2 = a^2y^2$ [বর্গ করে]

বা, $(1-x^2)2y_1y_2 + (-2x)y_1^2 = a^2.2y\,y_1$

উভয়পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে,

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $lny = m\cos^{-1}x$

বা, $y = e^{m\cos^{-1}x}$ ...... (i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = e^{m\cos^{-1}x}.m\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_1 = -my$ [(i) হতে]

বা, $(1-x^2)y_1^2 = m^2y^2$

বা, $(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2m^2yy_1$

বা, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে, $x = \cos\left(\frac{1}{m}lny\right)$

বা, $\frac{1}{m}ln\,y = \cos^{-1}x$

বা, $lny = m\cos^{-1}x$

বা, $y = e^{m\cos^{-1}x}$ ...... (i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = e^{m\cos^{-1}x}.m\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_1 = -my$ [(i) নং হতে]

বা, $(1-x^2)y_1^2 = m^2y^2$

বা, $(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2m^2yy_1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$ **(প্রমাণিত)**

(iv) দেওয়া আছে, $y = e^{\tan^{-1}x}$

বা, $lny = ln\,e^{\tan^{-1}x}$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $lny = \tan^{-1}x$ [$\because lne = 1$]

বা, $\frac{d}{dx}(ln\,y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ বা, $\frac{1}{y}\cdot y_1 = \frac{1}{1+x^2}$

বা, $y_1(1+x^2) = y$ বা, $\frac{d}{dx}\{y_1(1+x^2)\} = \frac{d}{dx}(y$

বা, $(1+x^2)\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d}{dx}(1+x^2) = y_1$

বা, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = y_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

25.(i) দেওয়া আছে, $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = \frac{d}{dx}\{\sin(m\sin^{-1}x)\}$

বা, $y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_1^2 = \cos^2(m\sin^{-1}x).\frac{m^2}{(1-x^2)}$ [বর্গ করে]

বা, $y_1^2(1-x^2) = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$

বা, $y_1^2(1-x^2) = m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$

বা, $y_1^2(1-x^2) = m^2(1-y^2)$

বা, $(1-x^2)2y_1.y_2 - 2xy_1^2 = -2m^2yy_1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ **(প্রমাণিত)**

(ii) দেওয়া আছে, $y = \cos(m\sin^{-1}x)$ ...... (i)

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = -\sin(m\sin^{-1}x).m\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})y_1 = -\sin(m\sin^{-1}x).m$

বা, $y_2(\sqrt{1-x^2}) - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}y_1$

$= -\cos(m\sin^{-1}x).\frac{m.m}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_2(1-x^2) - xy_1 = -m^2.y$ [(i) নং হতে]

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে, $y = \tan(m\tan^{-1}x)$

বা, $y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x)\frac{m}{1+x^2}$

বা, $(1+x^2)y_1 = m\sec^2(m\tan^{-1}x)$

বা, $(1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

বা, $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$

বা, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = m(2yy_1)$

বা, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 - 2my\,y_1 = 0$

$\therefore (1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

26. দেওয়া আছে, $y = \sqrt{4 + 3 \sin x}$

বা, $y^2 = 4 + 3 \sin x$ [বর্গ করে]

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4 + 3 \sin x)$

বা, $2y \frac{dy}{dx} = 3 \cos x$

বা, $2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -3 \sin x$

বা, $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y \frac{d^2y}{dx^2} = 4 - y^2$

$\therefore 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ (প্রমাণিত)

27. দেওয়া আছে, $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + x^2}} 2x\right)$

বা, $y_1 = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \times \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

বা, $\sqrt{a^2 + x^2} \cdot y_1 = 1$

বা, $(a^2 + x^2)y_1^2 = 1$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(a^2 + x^2)2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 0$

$\therefore (a^2 + x^2) y_2 + xy_1 = 0$ (প্রমাণিত)

28. দেওয়া আছে, $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1 + x^2})^m$

বা, $y_1 = m(x + \sqrt{1 + x^2})^{m-1} \cdot \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1 + x^2})$

বা, $y_1 = m(x + \sqrt{1 + x^2})^{m-1}\left\{1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x\right\}$

বা, $y_1 = m(x + \sqrt{1 + x^2})^{m-1}\left\{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right\}$

বা, $y_1 = m(x + \sqrt{1 + x^2})^{m-1}\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$

বা, $y_1 = \frac{m(x + \sqrt{1 + x^2})^m}{\sqrt{1 + x^2}}$

বা, $y_1 = \frac{my}{\sqrt{1 + x^2}}$ [$\because y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$]

বা, $(1 + x^2)y_1^2 = m^2y^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

আবার, $\frac{d}{dx}\{(1 + x^2)y_1^2\} = m^2\frac{d}{dx}(y^2)$

বা, $(1 + x^2)\frac{d}{dx}(y_1^2) + y_1^2\frac{d}{dx}(1 + x^2) = m^2.2yy_1$

বা, $(1 + x^2)\, 2y_1y_2 + y_1^2 . 2x = 2m^2yy_1$

বা, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 = m^2y$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore (1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ (প্রমাণিত)

29. (i) ধরি, $y = \cos ax$ ... ... (i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$y_1 = -a \sin ax = a \cos\left(\frac{\pi}{2} + ax\right)$

$y_2 = -a^2 \cos ax = a^2 \cos\left(2.\frac{\pi}{2} + ax\right)$

$y_3 = a^3 \sin ax = a^3 \cos\left(3.\frac{\pi}{2} + ax\right)$

$y_4 = a^4 \cos ax = a^4 \cos\left(4.\frac{\pi}{2} + ax\right)$

... ...

$y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\therefore y_1 = (-1)\, x^{-2}$

$\therefore y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2\, 2!\, x^{-3}$

$\therefore y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3\, 3!\, x^{-(3+1)}$

... ...

$\therefore y_n = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}$

$y_n = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$ **(Ans.)**

(iii) ধরি, $y = 2 \sin 3x \cos 2x = \sin 5x + \sin x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$\therefore y_1 = 5 \cos 5x + \cos x = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$y_2 = -5^2 \sin 5x - \sin x = 5^2 \sin\left(\frac{2\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$

$y_3 = -5^3 \cos 5x - \cos x = 5^3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

$y_4 = 5^4 \sin 5x + \sin x = 5^4 \sin\left(\frac{4\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right)$

... ...

$y_n = 5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ **(Ans.)**

(iv) ধরি, $y = 4\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$\therefore y_1 = 3\cos x - 3\cos 3x = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$

$y_2 = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$

$= 3\sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) - 3^2\sin\left(\frac{2\pi}{2} + 3x\right)$

$y_3 = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) - 3^3 \cos\left(\frac{2\pi}{2} + 3x\right)$

$= 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3^3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$

... ...

$y_n = 3 \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $y = \cos^3 x = \frac{1}{4}[\cos 3x + 3\cos x]$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$$\therefore y_1 = \frac{1}{4}[-3\sin 3x - 3\sin x]$$
$$= \frac{1}{4}\left[3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]$$
$$y_2 = \frac{1}{4}\left[-3^2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[3^2\cos\left(\frac{2\pi}{2} + 3x\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)\right]$$
$$y_3 = \frac{1}{4}\left[-3^3\sin\left(\frac{2\pi}{2} + 3x\right) - 3\sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[3^3\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right) + 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right]$$

... ...

$$\therefore \quad y_n = \frac{1}{4}\left[3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + 3\cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right] \text{ (Ans.)}$$

(vi) দেওয়া আছে, $y = \ln x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = (-1)\,x^{-2}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = (-1)(-2)\,x^{-3} = (-1)^2\,\underline{|2}\,x^{-3}$$
$$= (-1)^{3-1}.\,\underline{|3-1}\,.x^{-3}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = (-1)^{4-1}.\,\underline{|4-1}\,.\,x^{-4}$$

... ...

... ...

অনুরূপভাবে, $\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}.\,\underline{|n-1}\,.\,x^{-n}$

(vii) $y = (ax + b)^{-m}$

$\therefore y_1 = -m(ax + b)^{-m-1}.a = (-1)\,ma(ax + b)^{-m-1}$

$\Rightarrow y_2 = -m(-m-1)\,(ax + b)^{-m-2}.a^2 = (-1)^2\,m(m+1)\,a^2\,(ax + b)^{-m-2}$

$\Rightarrow y_3 = (-1)^2\,m(m+1)(-m-2)\,a^3\,(ax + b)^{-m-3} = (-1)^3\,m(m+1)(m+2)\,a^3\,(ax + b)^{-m-3}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$y_n = (-1)^n\,m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)\,a^n\,(ax + b)^{-m-n}$

$$= \frac{(-1)^n.1.2.3\cdots(m-1)m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)a^n}{1.2.3\cdots(m-1)}(ax+b)^{-m-n}$$
$$= \frac{(-1)^n\,(m+n-1)!\,a^n}{(m-1)!\,(ax+b)^{m+n}}$$

অর্থাৎ, $y_n = D^ny = D^n\,(ax + b)^{-m} = \frac{d^n}{dx^n}[(ax + b)^{-m}]$
$$= \frac{(-1)^n\,(m+n-1)!\,a^n}{(m-1)!\,(ax+b)^{m+n}}$$

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-9.17.4 | পৃষ্ঠা-৩৬৮

ল্যাগ্রাঞ্জের উপপাদ্য হতে আমরা জানি,

$(b-a)\,f'(c) = f(b) - f(a)$, যেখানে $a < c < b$

$f(x) = e^x$

$\therefore f'(x) = e^x$ .... (i)

এখানে $a = 0,\ b = 1,\ 0 < c < 1$

$f(0) = 1,\ f(1) = e^1 = e$

এখন, $(b-a)\,f'(c) = f(b) - f(a)$

বা, $(1-0)\,f'(c) = e - 1$ বা, $f'(c) = e - 1$

(i) নং হতে $f'(c) = e^c$

$\therefore e - 1 = e^c$ বা, $\ln e^c = \ln(e-1)$ $\therefore c = 0.5$

$\therefore$ $0 < 0.54 < 1$ যা $0 < c < 1$ অর্থাৎ $(0, 1)$ ব্য মধ্যে অবস্থিত।

ল্যাগ্রাঞ্জের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করা হলো।

অনুচ্ছেদ-9.17.5 | পৃষ্ঠা-৩৬৮

প্রদত্ত সমীকরণ, $x^3 + x + 1 = 0$

এখন $f(x) = x^3 + x + 1$ একটি বহুপদী ফাংশন।

সুতরাং $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

আবার, $f(-2) = -8 - 2 + 1 = -9$ এবং $f(0) =$

$\therefore f(-2)$ ও $f(0)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট তাই $f(x)$-এর সমাধান $[-2, 0]$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য যাচাই করা হলো।

অনুশীলনী-9(G) এর সমাধান

1.(i) দেওয়া আছে, $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

$$\therefore v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}.3t^2 + 2t + 4 \quad \left[\because v = \frac{ds}{dt}\right]$$

$t = 5$ সেকেন্ড হলে বেগ, $v = \frac{1}{2} \times 3(5)^2 + 2(5) +$
$$= \frac{1}{2} \times 75 + 10 + 4 = \frac{75 + 20 + 8}{2}$$
$$= \frac{103}{2} \text{ একক/সেকেন্ড}$$

আবার, $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t^2 + 2t + 4\right) = \frac{3}{2}.2t + 2 = 3t + 2$

এখন $t = 5$ সেকেন্ড হলে

ত্বরন, $f = 3 \times 5 + 2 = 17$ একক / সেকেন্ড^2

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে $\frac{103}{2}$ একক / সে. ও 17 একক / সে.^{2} **(Ans.)**

(ii) আমরা পাই, $s = 3t + \frac{1}{8}t^2$ মিটার

$\therefore \frac{ds}{dt} = 3 + \frac{1}{8}.2t = 3 + \frac{1}{4}t$

$\therefore$ বেগ, $v = 3 + \frac{1}{4}t \quad [\because v = \frac{ds}{dt}]$

যখন, $t = 5$ মিনিট $= (5 \times 60)$ সেকেন্ড $= 300$ সেকেন্ড

$\therefore$ বেগ, $v = 3 + \frac{1}{4} \times 300 = 3 + 75 = 78$ মিটার/সেকেন্ড

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ, 78 মিটার / সেকেন্ড (Ans.)

2. এখানে, $s = \sqrt{t}$

বা, $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}$

বা, $v = \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} \quad [\because v = \frac{ds}{dt}]$

বা, $v^3 = \frac{1}{8t^{\frac{3}{2}}}$ [ঘন করে]

বা, $v = \frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}$ ...... (i)

বা, $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}}$

বা, $f = -\frac{1}{4}.\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad [\because f = \frac{dv}{dt}]$

$\therefore f = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ ...... (ii)

সুতরাং, (ii) নং হতে দেখা যাচ্ছে, ত্বরণ ঋণাত্মক।

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে,

$-4f = 8v^3$ বা, $f = -2v^3$

সুতরাং, ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

(দেখানো হলো)

3. দেওয়া আছে, $s = at^2 + bt + c$

বা, $\frac{ds}{dt} = 2at + b$

বা, $v = 2at + b$

$\therefore v^2 = 4a^2t^2 + 4atb + b^2$ [বর্গ করে]

$\therefore v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt) = 4a(s - c)$। (দেখানো হলো)

4. মনে করি, দূরত্ব s, সময় = t

যেহেতু, দূরত্ব অনুরূপ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক, $s \propto t^2$

বা, $s = kt^2$ [যেখানে, k সমানুপাতিক ধ্রুবক]

বা, $\frac{ds}{dt} = k.2t$ [t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $v = 2k.t$ ... (i) $[\because \frac{ds}{dt} = v]$

$\therefore v \propto t$ [$\because$ 2k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক]

$\therefore$ বেগ সময়ের সমানুপাতিক। (দেখানো হলো)

আবার, (i) নং হতে, $v = 2k.t$

বা, $\frac{dv}{dt} = 2k$. [যেখানে, 2k একটি ধ্রুবক পদ]

$\therefore$ বেগ পরিবর্তনের হার ধ্রুবক। (দেখানো হলো)

5(a). গড় মান উপপাদ্য হতে আমরা জানি,

$(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$ যেখানে $a < c < b$

$f(x) = 3 + 2x - x^2$

$f'(x) = 2 - 2x$ .... (i)

এখানে, $a = 0, b = 1, 0 < c < 1$

$f(0) = 3$

$f(1) = 3 + 2 - 1 = 4$

এখন, $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$

বা, $(1 - 0)f'(c) = 4 - 3$

বা, $f'(c) = 1$

(i) হতে $f'(c) = 2 - 2c$

$\therefore 2 - 2c = 1$ বা, $2c = 1$ বা, $c = \frac{1}{2}$

$\therefore 0 < \frac{1}{2} < 1$ যা $0 < c < 1$ অর্থাৎ (0, 1) ব্যবধির মধ্যে অবস্থিত। গড়মান উপপাদ্যটি সত্যতা প্রমাণিত হলো।

(b) (i) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f(x)$ ফাংশন বহুপদী হওয়ায় x এর সকল মানের জন্য অবিচ্ছিন্ন। কাজেই [0, 4] ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। আবার সকল $x \in (0, 4)$ এর জন্য $f'(x)$ বিদ্যমান বলে $f(x)$ ফাংশন (0, 4) ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

যেহেতু $f(x)$ গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পূরণ করে, কাজেই অন্তত:পক্ষে একটি $c \in (0, 4)$ পাওয়া যাবে যাহাতে—

$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$

বা, $3c^2 - 12c + 11 = \frac{3.2.1 - (-1)(-2)(-3)}{4}$

বা, $3c^2 - 12c + 11 = 3$

বা, $3c^2 - 12c + 8 = 0$

$\therefore c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$

$= \frac{12 - 4\sqrt{3}}{6} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

স্পষ্টতঃ $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 4)$

সুতরাং ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো এবং $c = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$\therefore f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

প্রত্যেক $x \in [2, 4]$ এর জন্য $f(x)$ এর একক ও নির্দিষ্ট মান বিদ্যমান, কাজেই $f(x)$ ফাংশন $[2, 4]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

আবার, প্রত্যেক $x \in (2, 4)$ এর জন্য $f'(x)$ বিদ্যমান। কাজেই $f(x)$ ফাংশন $(2, 4)$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পূরণ করে, কাজেই অন্ততঃপক্ষে একটি $c \in (2, 4)$ পাওয়া যাবে যেন—

$f'(c) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$

বা, $\frac{c}{\sqrt{c^2-4}} = \frac{\sqrt{12} - 0}{2}$ বা, $\frac{c^2}{c^2-4} = \frac{12}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $3(c^2 - 4) = c^2$ বা, $2c^2 = 12$ বা, $c^2 = 6$

$\therefore c = \pm\sqrt{6}$

স্পষ্টত $-\sqrt{6} \notin (2, 4)$ কিন্তু $\sqrt{6} \in (2, 4)$

সুতরাং ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো এবং $c = \sqrt{6}$.

(iii) প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \ln x$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

যেহেতু $\ln x$ ফাংশনটি সকল $x > 0$ এর জন্য অবিচ্ছিন্ন, কাজেই $f(x)$ ফাংশন $[1, e]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

আবার, প্রত্যেক $x \in (1, e)$ এর জন্য $f'(x)$ বিদ্যমান বিধায় $f(x)$ ফাংশন $(1, e)$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পূরণ করে, কাজেই অন্ততঃপক্ষে একটি $c \in (1, e)$ বিদ্যমান যাহাতে-

$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}$

বা, $\frac{1}{c} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1}$ বা, $\frac{1}{c} = \frac{1 - 0}{e - 1}$ বা, $c = e - 1$

যেহেতু $2 < e < 3$

$\therefore 1 < e - 1 < 2$ বা, $1 < c < e$

$\therefore c \in (1, e)$

সুতরাং ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো এবং $c = e - 1$.

6.(i) ধরি, $f(x) = x^3 - 4x + 1$ যা একটি বহুপদী ফাংশন। তাই $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

আবার, $f(1) = 1^3 - 4.1 + 1 = -2$,

$f(2) = 2^3 - 4.2 + 1 = 1$

$\therefore f(1)$ ও $f(2)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট। তাই $f(x)$ এর সমাধান $[1, 2]$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

(ii) $x^3 + x^2 - 2x = 1$ বা, $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

ধরি, $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ যা একটি বহুপদী ফাংশন। তাই $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

আবার, $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 1$

$f(1) = 1^3 + 1^2 - 2.1 - 1 = -1$

$\therefore f(-1)$ ও $f(1)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট তাই $f(x)$ এর সমাধান $[-1, 1]$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

(iii) ধরি, $f(x) = x^3 - x - 1$ যা একটি বহুপদী ফাংশন তাই $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

আবার, $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$

$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$

$\therefore$ $f(1)$ ও $f(2)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট তাই $f(x)$ এর সমাধান $[1, 2]$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

অনুশীলনী-9(H) এর সমাধান

1. (i) দেওয়া আছে, $y = x^3 - 2x^2 + 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$(2, 4)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)} = 12 - 8 = 4$

সুতরাং $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 4 = 4(x - 2)$

বা, $y - 4 = 4x - 8$

$\therefore$ $4x - y - 4 = 0$ **(Ans.)**

$\therefore$ ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$(y - 4) = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)}}(x - 2)$$

বা, $(y - 4) = -\frac{1}{4}(x - 2)$

বা, $(x - 2) + 4(y - 4) = 0$

$\therefore$ $x + 4y - 18 = 0$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $y = x^3 - 3x + 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$ [x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$(2, -2)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 3(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$

$\therefore (2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y + 2 = 9(x - 2)$

বা, $y + 2 = 9x - 18$

$\therefore$ $9x - y - 20 = 0$ **(Ans.)**

এবং $(2, -2)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$y + 2 = \frac{-1}{9}(x - 2)$

বা, $9y + 18 = -x + 2$

বা, $9y + x + 16 = 0$

$\therefore$ $x + 9y + 16 = 0$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $x^2 - y^2 = 7$

বা, $2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$\therefore$ $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{-4}{3}$

$\therefore$ $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 4)$

বা, $3y - 9 = -4x - 16$

$\therefore$ $4x + 3y + 7 = 0$ **(Ans.)**

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 3 = -\frac{1}{-\frac{4}{3}}(x + 4)$

বা, $y - 3 = \frac{3}{4}(x + 4)$

বা, $4y - 12 = 3x + 12$

$\therefore$ $3x - 4y + 24 = 0$ **(Ans.)**

(iv) $x^2 - y^2 = 7$

বা, $2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$\therefore$ $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$

বা, $3y + 9 = -4x + 16$

$\therefore$ $4x + 3y - 7 = 0$ **(Ans.)**

এবং অভিলম্বের সমীকরণ,

$y + 3 = -\frac{1}{-\frac{4}{3}}(x - 4)$

বা, $y + 3 = \frac{3}{4}(x - 4)$

বা, $4y + 12 = 3x - 12$

$\therefore$ $3x - 4y - 24 = 0$ **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 10\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $x + y\frac{dy}{dx} - 3 - 5\frac{dy}{dx} = 0$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{dy}{dx}(y - 5) = 3 - x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 - x}{y - 5}$

এখন $(1, 2)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 1}{2 - 5}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{-3}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 2 = \left(\frac{-2}{3}\right)(x - 1)$

বা, $3y - 6 = -2x + 2$

$\therefore$ $2x + 3y = 8$ **(Ans.)**

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - 1) + \left(\frac{-2}{3}\right)(y - 2) = 0$

বা, $3x - 3 - 2y + 4 = 0$

$\therefore$ $3x - 2y + 1 = 0$ **(Ans.)**

(vi) দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 6 - 3\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx}(2y - 3) = -(6 + 2x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(6 - 2x)}{2y - 3}$

এখন, $(1, 2)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6 + 2.1}{2.2 - 3}\right) = \frac{-8}{1} = -8$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 2 = -8(x - 1)$

বা, $y - 2 = -8x + 8$

$\therefore$ $8x + y - 10 = 0$ **(Ans.)**

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - 1) - 8(y - 2) = 0$

$\therefore$ $x - 8y + 15 = 0$ **(Ans.)**

(vii) দেওয়া আছে, $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$

x অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর y এর স্থানাঙ্ক 0;

(i) নং হতে, $-x + 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

অতএব, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(7, 0)$

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx}(x - 2)(x - 3) + y(x - 2).1 + y(x - 3).1 - 1 = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y(x - 2) - y(x - 3) + 1}{(x - 2)(x - 3)}$

$\therefore$ $(7, 0)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(7 - 2)(7 - 3)} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ $(7, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 0 = \frac{1}{20}(x - 7)$

বা, $20y = x - 7$

$\therefore$ $x - 20y = 7$ **(Ans.)**

এবং $(7, 0)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$(y - 0) + 20(x - 7) = 0$

বা, $y + 20x - 140 = 0$

$\therefore$ $20x + y = 140$ **(Ans.)**

(viii) দেওয়া আছে, $y(x-1)(x-2)-x+3=0$

x-অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0;

অর্থাৎ $y=0$

অতএব, $-x+3=0 \quad \therefore x=3$

অতএব, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 0)

দেওয়া আছে, $y(x-1)(x-2)-x+3=0$

বা, $y(x^2-3x+2)-x+3=0$

$\therefore \quad y(2x-3)+(x^2-3x+2)\dfrac{dy}{dx}-1=0$

বা, $(x^2-3x+2)\dfrac{dy}{dx}=1-y(2x-3)$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y(2x-3)}{x^2-3x+2}$

$\therefore$ (3, 0) বিন্দুতে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-0(2.3-3)}{3^2-3.3+2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$

অতএব, (3, 0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-0=\frac{1}{2}(x-3)$$

বা, $2y=x-3$

$\therefore \quad x-2y-3=0$ **(Ans.)**

অভিলম্বের সমীকরণ, $(x-3)+\dfrac{1}{2}(y-0)=0$

বা, $x-3+\dfrac{y}{2}=0$

বা, $2x-6+y=0$

$\therefore 2x+y-6=0$ **(Ans.)**

2. (i) দেওয়া আছে, $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ ...... (i)

যেহেতু (i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করে; সেহেতু $y=0$

$\therefore (x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1, 1, 3$

অতএব ছেদবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক (–1, 0), (1, 0), (3, 0)

আবার, $y=(x+1)(x-1)(x-3)$

বা, $y=(x^2-1)(x-3)$

বা, $y=x^3-3x^2-x+3$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=3x^2-6x-1$ [x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

এখন,

(–1, 0) বিন্দুতে ঢাল, $\dfrac{dy}{dx}=3(-1)^2-6(-1)-1=8$

(1, 0) বিন্দুতে ঢাল, $\dfrac{dy}{dx}=3(1)^2-6(1)-1=-4$

(3, 0) বিন্দুতে ঢাল, $\dfrac{dy}{dx}=3(3)^2-6(3)-1=8$

$\therefore$ নির্ণেয় ঢাল = 8, –4, 8 **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $x^2+xy+y^2=4$

বা, $2x+x\dfrac{dy}{dx}+y+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

বা, $x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=-(2x+y)$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$

$\therefore$(2, –2) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $=-\dfrac{2.2+(-2)}{2+2(-2)}$

$=-\dfrac{4-2}{2-4}=-\dfrac{2}{-2}$

$=1$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $y^2=4ax$

বা, $2y\dfrac{dy}{dx}=4a$ বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2a}{y}$

$\therefore$ $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2a}{2at}=\dfrac{1}{t}$

$\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $=\dfrac{1}{t}$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $y=x^3-x^2-7x+6$ ...... (i)

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=3x^2-2x-7$

যেহেতু, স্পর্শকের ঢাল 1

$\therefore 3x^2-2x-7=1$

বা, $3x^2-2x-8=0$

বা, $3x^2-6x+4x-8=0$

বা, $3x(x-2)+4(x-2)=0$

বা, $(x-2)(3x+4)=0$

$\therefore x=2, -\dfrac{4}{3}$

$x=2$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$y=(2)^3-(2)^2-7\times2+6=8-4-14+6$

$\therefore y=-4$

আবার, $x=-\dfrac{4}{3}$ (i) নং এ বসিয়ে,

$y=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3-\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2-7\left(-\dfrac{4}{3}\right)+6$

$=-\dfrac{64}{27}-\dfrac{16}{9}+\dfrac{28}{3}+6$

$\therefore y=\dfrac{302}{27}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(2,-4), \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{302}{27}\right)$ **(Ans.)**

3. (i) দেওয়া আছে, $y^2=4ax$

বা, $2y\dfrac{dy}{dx}=4a$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2a}{y}$

এখন, (x_1, y_1) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y_1}$

অতএব, পরাবৃত্তটির (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$

বা, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

বা, $yy_1 = 2ax + y_1^2 - 2ax_1$

বা, $yy_1 = 2ax + 2ax_1 \quad [\because y_1^2 = 4ax_1]$

$\therefore yy_1 = 2a(x + x_1)$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

বা, $3x^2 - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

[x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $x^2 - ay - (ax - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$(x - x_1) + \frac{x_1^2 - ay_1}{ax_1 - y_1^2}(y - y_1) = 0$

বা, $(x - x_1)(ax_1 - y_1^2) + (x_1^2 - ay_1)(y - y_1) = 0$

$\therefore (y - y_1)(x_1^2 - ay_1) = (x - x_1)(y_1^2 - ax_1)$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে,

$x^3 - 3xy + y^3 = 3$

বা, $\frac{d}{dx}(x^3) - 3\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(3)$

বা, $3x^2 - 3\left[x\frac{dy}{dx} + y.1\right] + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $3x^2 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $x^2 - x\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} - y = 0$

বা, $(y^2 - x)\frac{dy}{dx} = y - x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$

$(1, -1)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1(-1)^2}{(-1)^2 - 1} = \frac{-2}{0}$

এখন, $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y + 1 = \frac{dy}{dx}(x - 1)$

বা, $y + 1 = \frac{-2}{0}(x - 1)$

$\therefore x - 1 = 0$ **(Ans.)**

4. (i) দেওয়া আছে, $y = x^3 - 3x + 2$ ...... (i)

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

যেহেতু, স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল।

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $3x^2 - 3 = 0$

বা, $x^2 - 1 = 0$

বা, $x^2 = 1$

$\therefore x = \pm 1$

(i) নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে,

$y = (1)^3 - 3(1) + 2$

বা, $y = 1 - 3 + 2$

$\therefore y = 0$

আবার, (i) নং সমীকরণে $x = -1$ বসিয়ে,

$y = (-1)^3 - 3(-1) + 2$

বা, $y = -1 + 3 + 2$

$\therefore y = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুসমূহ, $(1, 0), (-1, 4)$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $y = (x - 3)^2(x - 2)$ ...... (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x - 3)^2\frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}(x - 3)^2$

বা, $\frac{dy}{dx} = (x - 3)^2 \cdot 1 + (x - 2)2(x - 3) \cdot 1$

বা, $\frac{dy}{dx} = (x - 3)^2 + 2(x - 2)(x - 3)$

$= (x - 3)\{(x - 3) + 2(x - 2)\}$

$= (x - 3)(x - 3 + 2x - 4)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x - 3)(3x - 7)$

$\therefore$ স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$

বা, $(x - 3)(3x - 7) = 0$

$\therefore x - 3 = 0$

$\therefore x = 3$

অথবা

$3x - 7 = 0$

$\therefore x = \frac{7}{3}$

(i) নং এ $x = 3$ বসিয়ে পাই, $y = 0$

আবার, (i) নং এ $x = \frac{7}{3}$ বসিয়ে পাই,

$y = \left(\frac{7}{3} - 3\right)^2\left(\frac{7}{3} - 2\right) = \left(\frac{7 - 9}{3}\right)^2\left(\frac{7 - 6}{3}\right)$

$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো, $(3, 0), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে,

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ...... (i)

বা, $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0$ ...... (ii)

স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$2x + 2y.0 - 2 = 0$

বা, $2x - 2 = 0$

বা, $x - 1 = 0$

$\therefore$ $x = 1$

x-এর মান সমীকরণ (i) নং এ বসিয়ে,

$(1)^2 + y^2 - 2(1) - 3 = 0$

বা, $1 + y^2 - 2 - 3 = 0$

বা, $y^2 - 4 = 0$

বা, $y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো, (1, 2), (1, −2) **(Ans.)**

(iv) $y^3 = x^2(2a - x)$

$y^3 = 2ax^2 - x^3$ ... ... (i)

বা, $3y^2 \frac{dy}{dx} = 4ax - 3x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4ax - 3x^2}{3y^2}$

যেহেতু স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল; সেহেতু $\frac{dy}{dx} = 0$

অর্থাৎ $\frac{4ax - 3x^2}{3y^2} = 0$

বা, $4ax - 3x^2 = 0$

বা, $x(4a - 3x) = 0$

হয়, $x = 0$ অথবা, $4a - 3x = 0$

বা, $3x = 4a \therefore x = \frac{4a}{3}$

(i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$x = 0$ বসালে $y = 0$

এবং $x = \frac{4a}{3}$ বসালে $y^3 = 2a\left(\frac{4a}{3}\right)^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^3$

$= \frac{32a^3}{9} - \frac{64a^3}{27} = \frac{32}{27}a^3$

বা, $y = \left(\frac{32\,a^3}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{8 \times 4a^3}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore y = \frac{2a}{3}\sqrt[3]{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুসমূহ (0, 0), $\left(\frac{4}{3}a, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a\right)$ **(Ans.)**

5. (i) দেওয়া আছে,

$y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

বা, $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2}(1 - x^2)^{\frac{-1}{2}}.(-2x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2x\sqrt{1 - x^2} - x}$

স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব হলে,

$\frac{dx}{dy} = 0$

বা, $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{2x\sqrt{1 - x^2} - x} = 0$

বা, $\sqrt{1 - x^2} = 0$

বা, $1 - x^2 = 0$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 = 1$

$\therefore$ $x = \pm 1$

$\therefore$ $x = 1$ হলে, $y = 1^2 + \sqrt{1 - 1^2}$

$= 1 + 0 = 1$

আবার, $x = -1$ হলে, $y = (-1)^2 + \sqrt{1 - (-1)^2}$

$= 1 + \sqrt{1 - 1}$

$= 1 + 0 = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক, (1, 1), (− 1, 1) **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $x^2 + 4y^2 = 8$ ... ... (i)

বা, $2x + 8y.\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y}$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$

বা, $\frac{dx}{dy} = \frac{-4y}{x}$

স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

বা, $\frac{-4y}{x} = 0$

বা, $-4y = 0$

বা, $y = 0$

y-এর মান (i) নং-এ বসিয়ে,

$x^2 = 8$

বা, $x^2 - 8 = 0$

বা, $(x)^2 - (2\sqrt{2})^2 = 0$

বা, $(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0$

$\therefore$ $x = -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক, $(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0)$ (Ans.)

(iii) দেওয়া আছে, $y^2 = x^2(a-x)$ ... ... (i)

বা, $y^2 = ax^2 - x^3$

বা, $2y\frac{dy}{dx} = 2ax - 3x^2$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax-3x^2}{2y}$

বা, $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2ax-3x^2}$

স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব হলে

$\frac{dx}{dy} = 0$

বা, $\frac{2y}{2ax-3x^2} = 0$

বা, $2y = 0 \therefore y = 0$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$0 = x^2(a-x)$

বা, $x^2(a-x) = 0$

$\therefore x = 0, a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক, (0, 0), (a, 0) **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে,

$x^2 + 4x + y^2 = 0$ ... ... (i)

বা, $2x + 4 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $x + 2 + y\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x-2}{y}$

বা, $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-(x+2)}$

স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব হলে,

$\frac{dx}{dy} = 0$

বা, $\frac{y}{-(x+2)} = 0$

বা, $y = 0$

y-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$x^2 + 4x + 0 = 0$

বা, $x(x+4) = 0$

$\therefore x = 0, x = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক, (0, 0), (– 4, 0) **(Ans.)**

6. (i) দেওয়া আছে, $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$

যেহেতু স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = \pm 1$

$\frac{dy}{dx} = 1$ হলে, $3x^2 - 6x - 2 = 1$

বা, $3x^2 - 6x - 3 = 0$

বা, $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\frac{dy}{dx} = -1$ হলে, $3x^2 - 6x - 2 = -1$

বা, $3x^2 - 6x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভুজ, $1 \pm \sqrt{2}$, $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $y = ax(1-x) = ax - ax^2$

$\frac{dy}{dx} = a - 2ax$

এখন, মূলবিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখায় অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল,

$\frac{dy}{dx} = a - 2.a.0 = a$

প্রশ্নানুসারে, $a = \tan 60° = \sqrt{3} \therefore a = \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\sqrt{3}$ **(Ans.)**

7. দেওয়া আছে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ... ... (i)

বা, $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$\therefore$ যেকোনো বিন্দু (x_1, y_1) এ স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$

বা, $\sqrt{x_1}\,y - \sqrt{x_1}\,y_1 = -\sqrt{y_1}\,x + \sqrt{y_1}\,x_1$

বা, $\sqrt{y_1}\,x + \sqrt{x_1}\,y = \sqrt{x_1}\,y_1 + \sqrt{y_1}\,x_1$

বা, $\frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{y_1} + \sqrt{x_1}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{x_1 y_1}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{a}$

$\therefore \frac{x}{\sqrt{ax_1}} + \frac{y}{\sqrt{ay_1}} = 1$ [(i) নং হতে]

$\therefore$ x এবং y অক্ষ দ্বারা কর্তিত অংশের পরিমাণ যথাক্রমে $\sqrt{ax_1}$ এবং $\sqrt{ay_1}$.

$\therefore$ কর্তিত অংশ দুইটির যোগফল

$= \sqrt{ax_1} + \sqrt{ay_1} = \sqrt{a}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$= \sqrt{a}.\sqrt{a} = a$ যা একটি ধ্রুবক (দেখানো হলো)

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-9.19.1 | পৃষ্ঠা-৩৭৪

প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

$f'(x) = \cos x$

এখন $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ বিন্দু দুইটি $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিকে $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ও $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে, $\cos x > 0$ কাজেই $f'(x) > 0$

সুতরাং $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\cos x < 0$ কাজেই $f'(x) < 0$

সুতরাং $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন হ্রাস পায়।

এবং $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$ ব্যবধিতে $\cos x > 0$ কাজেই $f'(x) > 0$

সুতরাং $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

অনুশীলনী-9(I) এর সমাধান

1. (i) ধরি, $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 45$

সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $3x^2 - 6x - 45 = 0$

বা, $x^2 - 2x - 15 = 0$

বা, $(x-5)(x+3) = 0$

$\therefore$ $x = 5$ অথবা -3

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$, যখন $x = 5, \frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 5 - 6 = 24 > 0$

$\therefore x = 5$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= (5)^3 - 3 \times (5)^2 - 45 \times 5 + 13$
$= -162$ **(Ans.)**

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$ যখন $x = -3, \frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times (-3) - 6$
$= -24 < 0$

$x = -3$ তে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= (-3)^3 - 3(-3)^2 - 45(-3) + 13$
$= 94$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$\therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের জন্য, $f'(x) = 0$

বা, $4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

বা, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

বা, $x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$

বা, $x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

বা, $(x-1)(x^2 - 3x - 2x + 6) = 0$

বা, $(x-1)\{x(x-3) - 2(x-3)\} = 0$

বা, $(x-1)(x-3)(x-2) = 0$

$\therefore$ $x = 1, 2, 3$

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

এখন, $x = 1$ বিন্দুতে, $f''(x) = 12.1^2 - 48.1 + 44$
$= 8 > 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে, $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1^4 - 8.1^3 + 22.1^2 - 24.1 + 5$
$= 1 - 8 + 22 - 24 + 5 = -4$

আবার, $x = 2$ বিন্দুতে,

$f''(x) = 12.2^2 - 48.2 + 44$
$= 48 - 96 + 44 = -4 < 0$

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে, $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

সর্বোচ্চ মান $= 2^4 - 8.2^3 + 22.2^2 - 24.2 + 5$
$= 16 - 64 + 88 - 48 + 5 = -3$

এবং $x = 3$ বিন্দুতে, $f''(x) = 12.3^2 - 48.3 + 44$
$= 8 > 0$

$\therefore x = 3$ বিন্দুতে, $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

সর্বনিম্ন মান $= 3^4 - 8.3^3 + 22.3^2 - 24.3 + 5$
$= 81 - 216 + 198 - 72 + 5$
$= -4$ **(Ans.)**

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বনিম্ন মান $= -4$, সর্বোচ্চ মান $= -3$ (Ans.)

(iii) ধরি, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের জন্য, $f'(x) = 0$

বা, $3x^2 - 12x + 9 = 0$

বা, $x^2 - 4x + 3 = 0$

বা, $x^2 - 3x - x + 3 = 0$

বা, $x(x-3) - 1(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-1) = 0$

$\therefore x = 1, 3$

আবার, $f''(x) = 6x - 12$

$\therefore x = 1, 3$

$\therefore x = 3$ হলে, $f''(x) = 6x - 12 = 6 \times 3 - 12$
$= 18 - 12 = 6 > 0$

$\therefore x = 3$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= (3)^3 - 6(3)^2 + 9.3 + 5$
$= 27 - 54 + 27 + 5 = 5$

আবার, $x = 1$ হলে, $f''(x) = 6x - 12 = 6 - 12$
$= -6 < 0$

$\therefore x = 1$ তে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= (1)^3 - 6(1)^2 + 9.1 + 5$
$= 1 - 6 + 9 + 5 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান $= 9$, সর্বনিম্ন মান $= 5$. **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $y = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$

বা, $y = 144x - 48x^2 + 4x^3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 144 - 96x + 12x^2$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $12x^2 - 96x + 144 = 0$

বা, $x^2 - 8x + 12 = 0$

বা, $(x - 6)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = 6, 2$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = -96 + 24x$

$x = 6$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = -96 + 144 = 48$, যা ধনাত্মক।

অতএব $x = 6$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান হবে।

$\therefore$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান $= 6(12 - 12)^2 = 0$ **(Ans.)**

আবার, $x = 2$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -96 + 48 = -48$, যা ঋণাত্মক।

অতএব $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান হবে।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 2(12 - 4)^2 = 2 \times 64 = 128$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x - 10)(2x - 7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x - 10)^2}$

$= \frac{x^2 - 20x + 64}{(x - 10)^2} = \frac{x^2 - 16x - 4x + 64}{(x - 10)^2}$

$= \frac{(x - 16)(x - 4)}{(x - 10)^2}$

সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{(x - 16)(x - 4)}{(x - 10)^2} = 0$

বা, $(x - 16)(x - 4) = 0$

$\therefore x = 16$ অথবা $x = 4$

এখন,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x - 10)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - 20x + 64) - (x^2 - 20x + 64)\frac{d}{dx}(x - 10)^2}{(x - 10)^4}$$

$$= \frac{(x - 10)^2(2x - 20) - (x^2 - 20x + 64).2(x - 10).1}{(x - 10)^4}$$

যখন $x = 16$,

তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6^2.12 - (256 - 320 + 64) \times 12}{6^4}$

$= \frac{36 \times 12}{36 \times 36} = \frac{1}{3} > 0$

সুতরাং $x = 16$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= \frac{16^2 - 7.16 + 6}{16 - 10} = \frac{150}{6} = 25$ **(Ans.)**

আবার, যখন $x = 4$,

তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6^2.(-12) - (16 - 80 + 64).2(-6)}{6^4}$

$= \frac{-36 \times 12}{36 \times 36} = -\frac{1}{3} < 0$

সুতরাং $x = 4$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \frac{4^2 - 7.4 + 6}{4 - 10} = \frac{-6}{-6} = 1$ **(Ans.)**

(vi) ধরি, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

$\therefore f'(x) = x^2 + x - 6$

$\therefore f''(x) = 2x + 1$

সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের জন্য, $f'(x) = 0$

বা, $x^2 + x - 6 = 0$

বা, $x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$

বা, $x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$

বা, $(x + 3)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -3, 2$

$x = -3$ বিন্দুতে, $f''(x) = 2(-3) + 1$
$= -6 + 1 = -5 < 0$

$\therefore x = -3$ বিন্দুতে, $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 8$

$= \frac{1}{3}(-27) + \frac{1}{2}.9 + 18 + 8$

$= -9 + \frac{9}{2} + 26 = \frac{-18 + 9 + 52}{2}$

$= \frac{61 - 18}{2} = \frac{43}{2}$ **(Ans.)**

আবার, $x = 2$ বিন্দুতে, $f''(x) = 2 \times 2 + 1$
$= 4 + 1 = 5 > 0$

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে, $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= \frac{1}{3} \times 2^3 + \frac{1}{2} \times 2^2 - 6 \times 2 + 8$

$= \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12 + 8 = \frac{8}{3} - 2$

$= \frac{8 - 6}{3} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

(vii) দেওয়া আছে, $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$$

সর্বনিম্ন বা সর্বোচ্চ মানের জন্য,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $6x^2 - 18x + 12 = 0$

বা, $x^2 - 3x + 2 = 0$

বা, $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 1, 2$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 18$

$x = 1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12.1 - 18 = -6 < 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে, ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 2.1^3 - 9.1^2 + 12.1 + 5$
$= 2 - 9 + 12 + 5 = 10$

$x = 2$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12.2 - 18 = 6 > 0$

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 2.2^3 - 9.2^2 + 12.2 + 5$
$= 16 - 36 + 24 + 5 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান, 10 এবং সর্বনিম্ন মান, 9 **(Ans.)**

(viii) ধরি, $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

বা, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 3$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ $3x^2 - 10x + 3 = 0$

বা, $3x^2 - 9x - x + 3 = 0$

বা, $3x(x-3) - 1(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(3x-1) = 0$

$\therefore x = 3, \frac{1}{3}$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 10$

$\therefore$ $x = 3$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6.3 - 10 = 8 > 0$

$x = 3$-এ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 3^3 - 5.3^2 + 3.3 + 2$
$= 27 - 45 + 9 + 2 = -7$ **(Ans.)**

আবার, $x = \frac{1}{3}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6.\frac{1}{3} - 10 = -8 < 0$

$x = \frac{1}{3}$ এ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3.\frac{1}{3} + 2$

$= \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 1 + 2 = \frac{1 - 15 + 81}{27} = \frac{67}{27}$ **(Ans.)**

2. দেওয়া আছে,

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8)$
$= 3(x^2 - 4x + 4) + 12 = 3(x-2)^2 + 12$

x এর বাস্তব মানের জন্য যা কখনও শূন্য হতে পারে না। কিন্তু কোনো ফাংশনের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $f'(x) = 0$

অতএব, ফাংশনটির কোনো বৃহত্তম অথবা ক্ষুদ্রতম মান নেই। (দেখানো হলো)

3. ধরি, $y = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

বা, $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 6x^2 - 12x + 6$

$\therefore$ সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $12x^3 - 6x^2 - 12x + 6 = 0$

বা, $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

বা, $x^2(2x-1) - 1(2x-1) = 0$

বা, $(2x-1)(x^2-1) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, 1, -1$

এখন, $\frac{1}{2}, 1 \in (0, 2)$ কিন্তু $-1 \notin (0, 2)$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 12x - 12$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12.\frac{1}{2} - 12$

$= 36.\frac{1}{4} - 6 - 12 = 9 - 6 - 12 = -9 < 0$

$x = \frac{1}{2}$ এ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 3.\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6.\frac{1}{2} + 1$

$= 3.\frac{1}{16} - 2.\frac{1}{8} - 6.\frac{1}{4} + 3 + 1$

$= \frac{3 - 4 - 24 + 48 + 16}{16} = \frac{39}{16}$ (Ans.)

আবার, $x = 1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 36(1)^2 - 12.1 - 12$
$= 12 > 0$

$x = 1$ এ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 3(1)^4 - 2(1)^3 - 6(1)^2 + 6.1 + 1$
$= 3 - 2 - 6 + 6 + 1 = 2$ (Ans.)

4. ধরি, $y = \frac{\ln x}{x}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x} - \ln x.}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{1 - ln\,x}{x^2} = 0$

বা, $ln\,x = 1 \quad \therefore x = e$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - ln x)\,2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-x - 2x + 2x\,ln\,x}{x^4} = \frac{-3 + 2ln\,x}{x^3}$

এখন, x = e বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3 + 2lne}{e^3}$

$= \frac{-3 + 2}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$

$\therefore x = e$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \frac{ln\,e}{e} = \frac{1}{e}$ (দেখানো হলো)

5. মনে করি, $y = \frac{x}{lnx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{lnx\,.\,1 - x\,.\,\frac{1}{x}}{(lnx)^2} = \frac{lnx - 1}{(lnx)^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য,

$\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{lnx - 1}{(lnx)^2} = 0$

বা, $lnx - 1 = 0$

বা, $lnx = 1 = lne \quad \therefore x = e$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(lnx)^2\,.\frac{1}{x} - (lnx - 1).2\,lnx.\frac{1}{x}}{(lnx)^4}$

যখন x = e, তখন

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(lne)^2\,.\frac{1}{e} - (lne - 1).2\,lne.\frac{1}{e}}{(lne)^4}$

$= \frac{(1).\frac{1}{e} - 0}{1} \quad [\because lne = 1]$

$= \frac{1}{e}$, যা ধনাত্মক।

সুতরাং x = e বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান $= \frac{e}{lne} = \frac{e}{1} = e$ (দেখানো হলো)

6. দেওয়া আছে, $y = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x + 9e^{-x}.(-1) = 4e^x - 9e^{-x}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের জন্য,

$\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $4e^x - 9e^{-x} = 0$

বা, $4e^x = 9e^{-x}$

বা, $4e^x = \frac{9}{e^x}$

বা, $e^{2x} = \frac{9}{4}$

বা, $(e^x)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

বা, $e^x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \ln\frac{3}{2}$

$x = ln\frac{3}{2}$ বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\,e^{ln\frac{3}{2}} + 9\,.\,\frac{1}{e^{ln\frac{3}{2}}}$

$= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} \quad [\because e^{ln\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}]$

$= 6 + 6 = 12 > 0$

$\therefore x = ln\frac{3}{2}$ বিন্দুতে y এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $y = 4\,e^{\ln\frac{3}{2}} + 9\,.\,\frac{1}{e^{ln\frac{3}{2}}}$

$= 4.\,\frac{3}{2} + 9.\,\frac{2}{3}$

$= 6 + 6 = 12$ (দেখানো হলো)

7. মনে করি, $y = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ বা, $x^2 = 1$ বা, $x = \pm 1$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$

x = 1 হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1} = 2 > 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে, ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

অতএব, সর্বনিম্ন মান, $1 + \frac{1}{1} = 2$

x = – 1 হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$

$\therefore$ x = 1 বিন্দুতে, ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

অতএব, সর্বোচ্চ মান, $(-1) + \frac{1}{-1} = -2$

সুতরাং, ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (দেখানো হলো)

8. ধরি, $f(x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$f'(x) = 2\cos x - 6\sin x\cos x$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore\ 2\cos x - 6\sin x\cos x = 0$

বা, $2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

$\therefore\ \cos x = 0$ অর্থাৎ $x = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ $[\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}]$

অথবা $\sin x = \frac{1}{3}$ অর্থাৎ $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

আবার, $f''(x) = -2\sin x - 6\cos^2 x + 6\sin^2 x$
$= -2\sin x - 6(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f''(x) = -2 + 6 = 4 > 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ তে ফাংশনের সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3$ **(Ans.)**

$\sin x = \frac{1}{3}$ বিন্দুতে

$f''(x) = -2\sin x - 6(1 - 2\sin^2 x)$
$= -\frac{2}{3} - 6\left(1 - \frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{3} - 6.\frac{7}{9} = -\frac{16}{3} < 0$

অতএব, $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ তে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 1 + 2.\frac{1}{3} + 3\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{13}{3}$ **(Ans.)**

9. ধরি, $y = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\cos x - 3\sin x$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = 0$

বা, $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan x = \tan\frac{\pi}{6}$ $\therefore x = \frac{\pi}{6}$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{3}\sin x - 3\cos x$

যখন $x = \frac{\pi}{6}$ তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6}$
$= -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) - 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$= -2\sqrt{3} < 0$

অতএব, $x = \frac{\pi}{6}$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

(দেখানো হলো)

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= \sqrt{3}.\frac{1}{2} + 3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ **(Ans.)**

10. (i) ধরি, $f(x) = \sin x + \cos 2x$

$\therefore f'(x) = \cos x - 2\sin 2x$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\cos x - 2\sin 2x = 0$

বা, $\cos x = 2\sin 2x$

বা, $\cos x = 2.2\sin x\cos x$

বা, $4\sin x\cos x - \cos x = 0$

বা, $\cos x(4\sin x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ $\qquad \therefore 4\sin x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

$\therefore f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)$
$= -1 - 4(-1)$
$= -1 + 4 = 3 > 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)$
$= 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$ **(Ans.)**

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ হলে,

$f''\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = -\sin\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right\} - 4\cos 2\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$
$= -\frac{1}{4} - 4.\left\{1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}$
$= -\frac{1}{4} - 4.\left(1 - \frac{1}{8}\right)$
$= -\frac{1}{4} - 4\left(\frac{7}{8}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{7}{2}$
$= \frac{-1-14}{4} = \frac{-15}{4} < 0$

$\therefore x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \sin x + \cos 2x$
$= \sin x + (1 - 2\sin^2 x)$
$= \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) + 1 - 2\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)\right\}^2$
$= \frac{1}{4} + 1 - 2.\frac{1}{16} = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{8}$
$= \frac{2+8-1}{8} = \frac{9}{8}$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$ .... (i)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 - \frac{2}{3} \times 3x^2 - 4x + 2$

$= 4x^3 - 2x^2 - 4x + 2$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $4x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$

বা, $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

বা, $x^2(2x - 1) - 1(2x - 1) = 0$

বা, $(2x - 1)(x^2 - 1) = 0$

বা, $(2x - 1)(x + 1)(x - 1) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, -1, 1$

এখানে, $-1 \notin [0, 3]$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4x - 4$

যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} - 4$

$= 12 \times \frac{1}{4} - 2 - 4 = 3 - 2 - 4 = -3 < 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{3 - 4 - 24 + 48}{48}$

$= \frac{51 - 28}{48} = \frac{23}{48}$ **(Ans.)**

যখন $x = 1$ তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times 1 - 4 \times 1 - 4 = 4 > 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1^4 - \frac{2}{3}1^3 - 2 \times 1^2 + 2 \times 1$

$= 1 - \frac{2}{3} - 2 + 2$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

11. ধরি, $y = \sin x(1 + \cos x) = \sin x + \sin x \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

বা, $\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\therefore \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$ বা, $x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - 2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x$

$= -\sin x - 2\sin 2x$

যখন, $x = \frac{\pi}{3}$ তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে ফাংশনটির বৃহত্তম মান রয়েছে।

(দেখানো হলো)

12. (i) প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 18 = 3x^2 - 6x + 3 + 15$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 15 = 3(x - 1)^2 + 15$

স্পষ্টতই x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি x এর একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = 1 - x - x^3$

$\therefore f'(x) = -1 - 3x^2 = -(1 + 3x^2)$

স্পষ্টতই x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x) < 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি x এর একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

(iii) প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 3x + 5$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$

$\therefore x = -1$ এবং $x = 1$ হলে $f'(x) = 0$ হয়। $x = -1$ এবং $x = 1$ এই মান দুইটি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < 1$ এবং $1 < x$ এই তিনটি ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < -1$ এর জন্য $x + 1 < 0$ এবং $x - 1 < 0$ কাজেই $f'(x) > 0$.

সুতরাং $x < -1$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

আবার $-1 < x < 1$ ব্যবধিতে $x + 1 > 0$ এবং $x - 1 < 0$.

কাজেই $f'(x) < 0$.

সুতরাং $-1 < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে $x > 1$ এর জন্য $x - 1 > 0$ এবং $x + 1 > 0$

কাজেই $f'(x) > 0$.

সুতরাং $1 < x$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ নির্ণেয় ফাংশনটি $x < -1$ ও $1 < x$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং $-1 < x < 1$ ব্যবধিতে হ্রাস পায়।

(iv) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

$= 6(x + 1)(x - 2)$

$\therefore x = -1$ এবং $x = 2$ হলে $f'(x) = 0$ হয়।

$x = -1$ এবং $x = 2$ এ মান দুইটি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < 2$ এবং $2 < x$ এ তিনটি ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x < -1$ এর জন্য $x + 1 < 0$ এবং $(x + 2) < 0$

কাজেই $f'(x) > 0$

সুতরাং $x < -1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।
আবার, $-1 < x < 2$ ব্যবধিতে $x + 1 > 0$ এবং $x - 2 < 0$
কাজেই $f'(x) < 0$
$\therefore -1 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।
অপরপক্ষে, $x > 2$ এর জন্য $x + 1 > 0$ এবং $x - 2 > 0$
কাজেই $f'(x) > 0$
$\therefore 2 < x$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়
$\therefore$ নির্ণেয় ফাংশনটি $x < -1$ ও $2 < x$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং $-1 < x < 2$ ব্যবধিতে হ্রাস পায়।

(v) প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$
$f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$
এখন, $f'(x) = 0$ বা, $2(3x - 1) = 0$ বা, $x = \frac{1}{3}$
$x = \frac{1}{3}$ বিন্দুটি $-1 \le x \le 2$ ব্যবধিকে $-1 \le x < \frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{3} < x \le 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।
$-1 \le x < \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে $3x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$
$\therefore -1 \le x < \frac{1}{3}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়।
আবার, $\frac{1}{3} < x \le 2$ ব্যবধিতে $3x - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$
$\therefore \frac{1}{3} < x \le 2$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর ও ব্যাখ্যা

1. গ; ব্যাখ্যা: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\frac{d}{dx}(x^2 + x - 6)}{\frac{d}{dx}(x^2 - 4)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x + 1}{2x} = \dfrac{5}{4}$

2. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^5}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\frac{x^4}{\sqrt{x^5}}$

3. খ; ব্যাখ্যা: $\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}$
$= \sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$
$\therefore y = \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

4. গ; ব্যাখ্যা: $y = \cos^{-1}\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2\tan^{-1}x$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$

5. গ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{1 + (\sin e^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sin e^x) = \frac{e^x.\cos e^x}{1 + \sin^2 e^x}$

6. গ; ব্যাখ্যা: অব্যক্ত ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$\frac{dy}{dx} = -\frac{x \text{ এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ}}{y \text{ এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ}}$
$= -\frac{2x + 1.y + 0}{0 + x.1 + 2y} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$

7. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = -\sin x + \cos x$
বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x - \sin x$

8. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x} + 1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$

9. ক;

10. গ; ব্যাখ্যা: চরম বিন্দুর ক্ষেত্রে, $f'(x) = 0$
বা, $6x - 2 = 0 \therefore x = \frac{1}{3}$ $x = \frac{1}{3}$ হলে, $f(x) = \frac{11}{3}$

11. খ; ব্যাখ্যা: $2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

12. গ; ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x + 5$
$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(5, 4)} = 3.5^2 - 14.5 + 5 = 10$

13. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)} = 3.2^2 - 4.2 = 4$
$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{4}$

14. গ; ব্যাখ্যা: ঢাল $= \frac{dy}{dx}$ বা, $1 = 3x^2 - 2x - 7$
বা, $x = 2, -\frac{4}{3}$
এখন, $x = 2$ হলে $y = 2^3 - 2^2 - 7.2 + 6 = -4$

15. ঘ; ব্যাখ্যা: x-অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0;
$0.(x - 2).(x - 3) - x + 7 = 0$
বা, $-x + 7 = 0 \therefore x = 7$ অর্থাৎ, বিন্দুটি $(7, 0)$

16. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = 5e^x \therefore f'(x) = 5e^x$

17. খ; ব্যাখ্যা: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 24t + 6 \therefore a = \frac{dv}{dt} = 6t - 24$
এখন $6t - 24 = 0$ বা $t = 4$
$\therefore v = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 6 = -42$

18. ক; ব্যাখ্যা: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 18 = 3(x - 1)^2 + 15 > 0$

19. ঘ; ব্যাখ্যা: (i) $\lim\limits_{x \to 0}[(f o g)(x)] = \lim\limits_{x \to 0}[f(g(x))]$
$= \lim\limits_{x \to 0}[f(x)] = \lim\limits_{x \to 0}\sin x = 0$
(ii) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{(gof)(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{g(\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$
$= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

20. ক; ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}(yz) = \frac{d}{dx}(x^5\log_a x)$
$= x^5\frac{1}{x}\log_a e + \log_a x.5x^4$
$= x^4(\log_a e + 5\log_a x)$

21. খ; ব্যাখ্যা: স্পর্শকের সমীকরণ $y - 0 = 8(x + 1)$
$\therefore 8x - y + 8 = 0$

22. গ; ব্যাখ্যা: (iii) $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\sin e^x)] = \frac{1}{1+\sin^2 e^x}\frac{d}{dx}(\sin e^x)$
$s = \frac{1}{1+\sin^2 e^x}.\cos e^x.e^x = \frac{e^x\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$

23. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = px + qx^{-1} \Rightarrow f'(x) = p - qx^{-2}$
$= p - \frac{q}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 0 + 2qx^{-3} = \frac{2q}{x^3}$
$\Rightarrow f'''(x) = -6qx^{-4} = \frac{-6q}{x^4}$

24. ক;

25. ঘ; ব্যাখ্যা: $gof(x) = g(f(x)) = \ln e^{2x} = 2x$
$\therefore \frac{d}{dx}\{(gof)(x)\} = \frac{d}{dx}(2x) = 2$

26. গ; ব্যাখ্যা: $y_1 = 20x^3 - 9x^2 + 5, y_2 = 60x^2 - 18x$

27. খ; ব্যাখ্যা: $y_3 = 120x - 18$
$\therefore x = 2$ বিন্দুতে $y_3 = 120 \times 2 - 18 = 222$

28. গ; ব্যাখ্যা: $y = \lambda x - \lambda x^2 \therefore \frac{dy}{dx} = \lambda - 2\lambda x$

29. ঘ; ব্যাখ্যা: (0, 0) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \lambda = \tan 60° = \sqrt{3}$

30. খ; ব্যাখ্যা: $f'(x) = 6\sin x.\cos x + 8\cos x(-\sin x)$
$= -2\sin x\cos x = -\sin 2x$

31. গ; ব্যাখ্যা: $f'(x) = 0$ বা $-\sin 2x = 0$
বা, $2x = 0$ অথবা, $\pi \therefore x = 0$ অথবা $\frac{\pi}{2}$
$f''(x) = -2\cos 2x$
$\therefore f''(0) = -2 < 0, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$
সর্বনিম্নমান $= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin^2\frac{\pi}{2} + 4.\cos^2\frac{\pi}{2} = 3$

32. ক; ব্যাখ্যা: $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \tan\frac{x}{2}$

33. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

34. ক; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}}{\cos x} = \frac{e^{\cos 0}}{\cos 0} = \frac{e^1}{1} = e$

35. ক;

36. ঘ; ব্যাখ্যা: $y = \ln(ax^2) = \ln a + 2\ln x$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}$

37. ঘ; ব্যাখ্যা: $y = \sin^{-1}(\sin x) \Rightarrow y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

38. গ; ব্যাখ্যা: $y = x + x^{-1} \therefore \frac{dy}{dx} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$
শর্তমতে, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ বা, $x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

39. গ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{7\cos 7x - \cos x}{6\cos 6x} = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

40. গ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x}{2x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x}}{2+\frac{5}{x^2}}$
$= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

41. গ;

42. গ; ব্যাখ্যা: $e^{xy+1} = 5$ বা, $xy + 1 = \ln 5$
বা, $x\frac{dy}{dx} + y.1 = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

43. ঘ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-\cos 2.\frac{x}{2}\right)}{x^2}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -2\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}$
$= -2.1.1\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

44. ক;

45. খ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\{e^x - e^{-x} - 2\ln(1+x)\}}{\frac{d}{dx}(x\sin x)}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - \frac{2}{1+x}}{x\cos x + \sin x}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^2}}{-x\sin x + \cos x + \cos x} = \frac{1 - 1 + \frac{2}{1}}{1+1} = 1$

46. ঘ;

47. গ; ব্যাখ্যা: $y = x^{lnx}$

$\therefore\ lny = lnx.lnx$

$\therefore\ \frac{d}{dx}(lny) = lnx.\frac{1}{x} + lnx.\frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2lnx}{x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = y.\frac{2lnx}{x}$

$\therefore\ \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{y}{x}.2lnx.\frac{x}{y} = 2lnx$

48. গ;

49. ঘ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{x}{lnx}$ $\therefore f'(x) = \frac{lnx - 1}{(lnx)^2}$

এবং $f''(x) = \frac{(lnx)^2.\left(\frac{1}{x} - 0\right) - (lnx - 1).\frac{2\,lnx}{x}}{(lnx)^4}$

$= \frac{\frac{(lnx)^2}{x} - \frac{2(lnx)^2 - 2\,lnx}{x}}{(lnx)^4}$

ফাংশনটির চরমমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \frac{lnx - 1}{(lnx)^2} = 0$ বা, $lnx = 1$ $\therefore x = e$

$x = e$ এর জন্য $f''(e) = \frac{\frac{(lne)^2}{e} - \frac{2(lne)^2 - 2\,lne}{e}}{(lne)^4}$

$= \frac{\frac{1}{e} - \frac{2-2}{e}}{1} = \frac{1}{e}$ যা ধনাত্মক

$\therefore x = e$ এর জন্য ফাংশনটির মান ক্ষুদ্রতম।

50. খ;

51. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$

$\therefore\ f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2 = 6(x - 2a)(x - a)$

$\therefore\ f''(x) = 12x - 18a$

চরমমানের জন্য, $x = 2a, x = a$

$x = 2a$ হলে, $f''(2a) = 6a$

$\therefore\ x = 2a$ এর জন্য লঘিষ্ট মান আছে,

$x = a$ হলে, $f''(a) = -6a$

$\therefore\ x = a$ এর জন্য গরিষ্ঠমান আছে।

শর্তমতে, $a = p$ এবং $2a = q$ $\therefore a = \frac{q}{2}$

তাহলে, $p = \frac{q}{2}$ বা, $2p = q$ বা, $2p = p^2$

$\therefore\ p = 2$ $\quad\therefore\ a = 2$

52. ঘ; 53. ক;

54. গ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{-2x}}{\log_e(1 + x)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{ln(1 + x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}.ln(1 + x)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}.\frac{1}{1 + x} + ln(1 + x)\times 2e^{2x}} = \frac{2}{\frac{1}{1} + 0} = 2$

55. গ; ব্যাখ্যা: $y = \sin^{-1}\left[\frac{4\sqrt{x}}{1 + 4x}\right]$

$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}\right]\left[\begin{array}{l}\text{ধরি, } 2\sqrt{x} = \tan\theta \\ \therefore\ \theta = \tan^{-1}(2\sqrt{x})\end{array}\right]$

$= \sin^{-1}[\sin 2\theta] = 2\tan^{-1}2\sqrt{x}$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1 + (2\sqrt{x})^2}.2.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{(1 + 4x).\sqrt{x}}$

$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,2)} = \frac{2}{(1 + 4.4)\sqrt{4}} = \frac{2}{17.2} = \frac{1}{17}$

56. ঘ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \sin^3x\cos x$

$f'(x) = -\sin^4x + 3\sin^2x.\cos^2x$

$f''(x) = -4\sin^3x\cos x + 6\sin x\cos^3x - 6\cos x\sin^3x$

ফাংশনটির চরমমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore\ 3\sin^2x.\cos^2x - \sin^4x = 0$

বা, $3\cos^2x = \sin^2x$

বা, $\tan^2x = \sqrt{3}$

বা, $\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore\ x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$ এর জন্য, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\sin^3\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{3}$

$+ 6\sin\frac{\pi}{3}.\cos^3\frac{\pi}{3} - 6.\cos\frac{\pi}{3}.\sin^3\frac{\pi}{3}$

$= -4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\frac{1}{2} + 6.\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{8} - 6.\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= -2.\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 3.\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$= -4.\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{3}$ এর জন্য ফাংশনটির মান বৃহত্তম হবে।

57. ক; ব্যাখ্যা: $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2e^{-4x} + kx}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x + 8e^{-4x} + k}{2x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 32e^{-4x}}{2}$

$= \frac{2.1 - 32.1}{2} = -15$

$\therefore\ k = 0$

58. খ; ব্যাখ্যা: $y = \sin^2 2x + e^{2\,ln(\cos 2x)}$

$= \sin^2 2x + e^{ln\cos^2 2x}$

$= \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 0$

59. ক;

60. ঘ; ব্যাখ্যা: $y_1 = x^2 \times \frac{1}{x} + \log x \times 2x = x + 2x\log x$

$y_2 = 1 + 2x \times \frac{1}{x} + 2\log x$

$y_3 = 0 + 0 + \frac{2}{x} \therefore y_3 = \frac{2}{x}$

61. গ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$

62. ঘ; ব্যাখ্যা: $x = \tan(ln y)$ বা, $ln y = \tan^{-1}x \therefore y = e^{\tan^{-1}x}$

$\therefore y_1 = e^{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{y}{1+x^2}$

এবং $y_2 = \frac{(1+x^2)y_1 - 2xy}{(1+x^2)^2}$

$\therefore \frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{(1+x^2)y_1 - 2xy}{(1+x^2)^2}}{\frac{y}{1+x^2}} = \frac{(1+x^2)y_1 - 2xy}{y.(1+x^2)}$

$= \frac{(1+x^2)\frac{y}{(1+x^2)} - 2xy}{y(1+x^2)} = \frac{1-2x}{1+x^2}$

63. ঘ; ব্যাখ্যা: ধরি, $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}.\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$

64. খ; ব্যাখ্যা: $y = x^{-1}$

$\therefore y_1 = -x^{-2}$,

$y_2 = 2x^{-3}$,

$y_3 = -6x^{-4} = \frac{-3!}{x^4}$

$y_4 = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5} = \frac{4!}{x^5}$

লক্ষণীয় জোড়তম অন্তরীকরণ ধনাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট।

$\therefore y_{20} = \frac{20!}{x^{21}}$

65. গ; ব্যাখ্যা: $S = 6 - 2t + 3t^3$

$\therefore \frac{ds}{dt} = v = -2 + 9t^2 \left[\text{বেগ}, v = \frac{ds}{dt} \right]$

এবং $\frac{dv}{dt} = a = 18t \left[\text{ত্বরণ}, a = \frac{dv}{dt} \right]$

$\therefore \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=1} = 18.1 = 18.$

66. গ; 67. ক; 68. ঘ; 69. গ; 70. ঘ;

71. ক; ব্যাখ্যা: $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{\sin 2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{4 - (x+4)}{\sin 2x} \times \frac{1}{2 + \sqrt{x+4}}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{x+4}}$

$= -\lim_{2x \to 0} \frac{2.x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + \sqrt{x+4}}$

$= -\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2+\sqrt{4}} = -\frac{1}{8}$

72. ঘ; 73. ঘ; 74. গ; 75. ঘ; 76. ক; 77. খ; 78. ক;

79. খ; ব্যাখ্যা: $\lim_{x \to \infty} \{ln(3x-1) - ln(2x+7)\}$

$= \lim_{x \to \infty} ln\left(\frac{3x-1}{2x+7}\right) = \lim_{x \to \infty} ln\left(\frac{3 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{7}{x}}\right) = ln\frac{3}{2}$

80. খ;

সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. ক তারটি সিলিন্ডার আকৃতির।

সিলিন্ডার আকৃতির তারটির ব্যাস $\frac{1}{50}$ মিটার

এবং ব্যাসার্ধ $\frac{1}{100}$ মিটার

সিলিন্ডার আকৃতির তারের দৈর্ঘ্য l হলে

তারটির আয়তন, $v = \pi r^2 l = \pi \times \left(\frac{1}{100}\right)^2.l$

শর্তমতে, $\pi\left(\frac{1}{100}\right)^2 l = 1$

$l = \frac{10000}{\pi} = 3183$ মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

খ আমরা জানি, সিলিন্ডার আকৃতির তারের আয়তন,

$v = \pi r^2 L$

বা, $L = \frac{v}{\pi r^2}$

$\therefore L(r) = \frac{v}{\pi r^2}$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের হার, $\frac{dL}{dr} = \frac{v}{\pi}\frac{d}{dr}(r^{-2})$

$= \frac{v}{\pi}(-2).r^{-3} = \frac{v}{\pi}(-1)^1.\ 2!\ r^{-3}$

আবার, $\frac{d^2L}{dr^2} = \frac{v}{\pi}(-2)(-3)r^{-3-1}$

$= \frac{v}{\pi}(-2)(-3)r^{-4} = \frac{v}{\pi}(-1)^2.\ 3!\ r^{-4}$

$\frac{d^3L}{dr^3} = \frac{v}{\pi}(-2)(-3)(-4)r^{-5} = \frac{v}{\pi}(-1)^3.\ 4!\ r^{-5}$

... ...

... ...

$\frac{d^nL}{dr^n} = \frac{v}{\pi}(-1)^n(n+1)!\ r^{-(n+2)}$. **(Ans.)**

গ শর্তমতে, $R \propto L$ ... ... (i)

$R \propto \frac{1}{r^2}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\therefore R \propto \frac{L}{r^2}$

বা, $R = k\frac{L}{r^2}$

বা, $R = k.\frac{L}{\left(\frac{v}{\pi L}\right)}\left[\because v = \pi r^2 L \;\therefore r^2 = \frac{v}{\pi L}\right]$

বা, $R = \frac{\pi k}{v}L^2$

বা, $\frac{dR}{dL} = \frac{\pi k}{v}2L$

$\therefore \frac{dR}{dL} = \frac{2\pi k}{v}L$

এখানে, π, k, v ধ্রুবক।

$\therefore \frac{dR}{dL} \propto L$. (দেখানো হলো)

2. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{d}{dx}e^{\sin\{f(x)\}} = \frac{d}{dx}e^{\sin\sqrt{x}} = e^{\sin\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})$$

$$= e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= e^{\sin\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} \text{ (Ans.)}$$

খ $\frac{2\ln\{f(x)\}}{\{f(x)\}^2} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{x} = \frac{\ln x}{x}$

ধরি, $y = \frac{\ln x}{x}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{1-\ln x}{x^2} = 0$

বা, $\ln x = 1$ $\therefore x = e$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1-\ln x)2x}{(x^2)^2}$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

এখন, $x = e$ বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3 + 2\ln e}{e^3} = \frac{-3+2}{e^3}$

$$= -\frac{1}{e^3} < 0$$

$\therefore x = e$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $f(x) + f(y) = f(a)$

বা, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

বা, $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$\therefore$ যেকোনো বিন্দু (x_1, y_1) এ স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

বা, $\sqrt{x_1}\,y - \sqrt{x_1}\,y_1 = -\sqrt{y_1}\,x + \sqrt{y_1}x_1$

বা, $\sqrt{y_1}\,x + \sqrt{x_1}\,y = \sqrt{x_1}\,y_1 + \sqrt{y_1}\,x_1$

বা, $\frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{y_1} + \sqrt{x_1}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{x_1y_1}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{y_1}} = \sqrt{a}$

$\therefore \frac{x}{\sqrt{ax_1}} + \frac{y}{\sqrt{ay_1}} = 1$

$\therefore$ x এবং y অক্ষ দ্বারা কর্তিত অংশের পরিমাণ যথাক্রমে $\sqrt{ax_1}$ এবং $\sqrt{ay_1}$.

$\therefore$ কর্তিত অংশ দুইটির যোগফল $= \sqrt{ax_1} + \sqrt{ay_1}$

$= \sqrt{a}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}) = \sqrt{a}.\sqrt{a}$

$= a$ যা একটি ধ্রুবক (দেখানো হলো)

3. **ক** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{1+0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3} \text{ (Ans.)}$$

খ বক্ররেখার ঢালের সমীকরণ,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^3 + 3x^2 - 6x + 1) = 12x^2 + 6x - 6$

বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের ঢাল শূন্য '0' হবে।

অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $12x^2 + 6x - 6 = 0$

বা, $2x^2 + x - 1 = 0$

বা, $2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

বা, $(x + 1)(2x - 1) = 0$

হয়, $x + 1 = 0$ অথবা, $2x - 1 = 0$

$\therefore x = -1$ $\therefore x = \frac{1}{2}$

$x = -1$ হলে, $y = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = \frac{-3}{4}$

সুতরাং $(-1, 6)$ ও $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}\right)$ বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল হবে। **(Ans.)**

গ গড় মান উপপাদ্য হতে আমরা জানি,

$(b - a) f'(c) = f(b) - f(a)$

যেখানে $a < c < b$

দেওয়া আছে, $y = f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$

এখানে, $a = -1, b = 2, -1 < c < 2$

$f(-1) = 6$

$\therefore f(2) = 33$

এখন, $\{2 - (-1)\} f'(c) = 33 - 6$

বা, $3f'(c) = 27$

বা, $f'(c) = 9$

বা, $12c^2 + 6c - 6 = 9$

বা, $4c^2 + 2c - 5 = 0$

বা, $c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.4.(-5)}}{2.4}$

$\therefore c = 0.9$ ও -1.4

সুতরাং $c = 0.9$ যা $a < c < b$ কে সিদ্ধ করে। সুতরাং গড় মান উপপাদ্য প্রমাণিত হল।

4. **ক** দেওয়া আছে,

$y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \ldots \infty}}}$

বা, $y = \sqrt{\cos x + y}$

বা, $y^2 = \cos x + y$

বা, $2y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x + \frac{dy}{dx}$

[x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই]

বা, $2y \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + \sin x = 0$

$\therefore (2y - 1)\frac{dy}{dx} + \sin x = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $u = a(\theta + \sin\theta)$

$\therefore \frac{du}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$

এবং $v = a(1 - \cos\theta)$ $\therefore \frac{dv}{d\theta} = a \cdot \sin\theta$

$$\therefore \frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{d\theta}}{\frac{du}{d\theta}} = \frac{a \sin\theta}{a(1 + \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \frac{dv}{du} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dv}{du}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{du} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{a.(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}}{a \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \left.\frac{d^2v}{du^2}\right|_{\theta = 0} = \frac{1}{4a}\sec^4\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{1}{4a} \cdot 1 = \frac{1}{4a} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $z = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}|$

বা, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \left[1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\right]$

বা, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \left[1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right]$

বা, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

বা, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ বা, $\frac{dz}{dx} = (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2} - 1} \cdot 2x$

$\therefore \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

এখন, $(a^2 + x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x \cdot \frac{dz}{dx}$

$$= (a^2 + x^2)\frac{-x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0$$

$\therefore (a^2 + x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} = 0$ **(দেখানো হলো)**

5. ক $\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin^{-1}x^6})$

ধরি, $y = \sqrt{\sin^{-1}x^6}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x^6)^{\frac{-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-(x^6)^2}} \cdot 6x^5$

$= \frac{3x^5}{\sqrt{\sin^{-1}x^6} \cdot \sqrt{1-x^{12}}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^5}{\sqrt{\sin^{-1}x^6} \cdot \sqrt{1-x^{12}}}$ **(Ans.)**

খ $\text{L.H.S} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\{1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + \dots\dots\dots - 1\}}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left[1 + \frac{\sin x}{2!} + \frac{(\sin x)^2}{3!} + \dots\dots\right]}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\left[1 + \frac{\sin x}{2!} + \frac{(\sin x)^2}{3!} + \dots\dots\right]$

$= 1 + 0 + 0 + \dots\dots$

$= 1 =$ **R.H.S**

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $y = \sin\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$

$= \sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$

$= \sin(\sin x)$

$\frac{dy}{dx} = \cos(\sin x).\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(\sin x).\cos x.\cos x + \cos(\sin x)(-\sin x)$

$= -\sin(\sin x).\cos^2 x - \sin x.\cos(\sin x)$

$\text{L.H.S} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\{f(x)\}^2$

$= -\sin(\sin x).\cos^2 x - \sin x.\cos(\sin x) + \cos(\sin x).\cos x.\tan x + \sin(\sin x).\cos^2 x$

$= -\sin x.\cos(\sin x) + \cos(\sin x).\cos x.\frac{\sin x}{\cos x}$

$= -\sin x.\cos(\sin x) + \sin x.\cos(\sin x)$

$= 0 =$ **R.H.S**

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\{f(x)\}^2 = 0$ (প্রমাণিত)

6. ক মনে করি, $f(x) = (x+2)^2$

$\therefore f(x+h) = (x+h+2)^2$

আমরা জানি,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+2)^2-(x+2)^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+2)^2\left\{\left(1+\frac{h}{x+2}\right)^2 - 1\right\}}{h}$

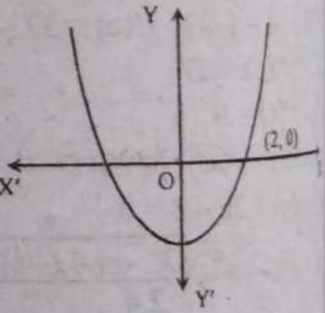
$= \lim_{h\to 0}(x+2)^2\frac{\left(1 + \frac{2.h}{x+2} + \frac{2.1.h^2}{(x+2)^2 2!} + \dots\dots - 1\right)}{h}$

$= (x+2)^2\lim_{h\to 0}\left\{\frac{2}{x+2} + \frac{h}{(x+2)^2} + \dots\dots\right\}$

$= (x+2)^2\left(\frac{2}{x+2} + 0 + \dots\right)$

$= 2(x+2)$ **(Ans.)**

খ দেয়া আছে, $g(x) = (x+2)(x-2) = x^2 - 4$



$g'(x) = 2x$

ধরি, $y = (x+2)(x-2)$

x-অক্ষের উপর $y = 0$

$\therefore (x+2)(x-2) = 0$

$\therefore x = -2, 2$

g(x) বক্ররেখা ও x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদবিন্দু (2, 0)

(2, 0) বিন্দুতে, $g'(x) = 2.2 = 4$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 0 = 4(x-2) = 4x - 8$

বা, $4x - y - 8 = 0$ **(Ans.)**

গ দেয়া আছে, $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

এখন, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$h'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

এখন, ফাংশনের বৃহত্তম মানের জন্য

$h'(x) = 0$

বা, $6x^2 - 6x - 12 = 0$

বা, $x^2 - x - 2 = 0$

বা, $x^2 - 2x + x - 2 = 0$

বা, $x(x-2) + 1(x-2) = 0$

$\therefore x = -1, 2$

আবার, $h''(x) = 12x - 6$

যখন, $x = -1$, $h''(x) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$

এবং $x = 2$, $h''(x) = 24 - 6 = 18 > 0$

$\therefore x = -1$, বিন্দুতে ফাংশনের বৃহত্তম মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ বৃহত্তম মান $= 2.(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1$

$= -2 - 3 + 12 + 1 = 8$ **(Ans.)**

7. **ক** ধরি, $\sin^{-1}\theta = x$

$\therefore \theta = \sin x$

$\therefore$ যখন $\theta \to 0$ তখন $x \to 0$

$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^{-1}\theta}{\theta} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $s = pt^2 + qt + r$

বা, $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(pt^2 + qt + r)$ [t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\therefore v = 2pt + q$

আবার, ত্বরণ, $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2pt + q) = 2p$

বামপক্ষ $= ft - v + q = 2pt - 2pt - q + q$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore ft - v + q = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $s = pt^2 + qt + r$

$= -t^2 - 6t + 63$ [$\because p = -1, q = -6, r = 63$]

$\therefore s_1 = st = (-t^2 - 6t + 63)t = 63t - 6t^2 - t^3$

$\therefore \frac{ds_1}{dt} = \frac{d}{dt}(63t - 6t^2 - t^3) = 63 - 12t - 3t^2$

বেগ শূন্য হলে কণাটি থেমে যাবে।

অর্থাৎ $\frac{ds_1}{dt} = 0$

বা, $63 - 12t - 3t^2 = 0$

বা, $t^2 + 4t - 21 = 0$

বা, $t^2 + 7t - 3t - 21 = 0$

বা, $t(t + 7) - 3(t + 7) = 0$

বা, $(t + 7)(t - 3) = 0$

$\therefore t = -7, 3$

$\therefore t \neq -7$, কারণ সময় ঋনাত্মক হতে পারে না।

$\therefore t = 3$ অর্থাৎ কণাটি থামার পূর্বে 3 সেকেন্ড সময় চলেছিল।

সুতরাং $t = 3$ হলে, $s_1 = 63 \times 3 - 6 \times 3^2 - 3^3$

$= 189 - 54 - 27 = 108$

$\therefore$ থামার পূর্বে কণাটি 108 একক দূরত্ব অতিক্রম করে।

(Ans.)

8. **ক** $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\frac{d^2}{dx^2}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}(\cos x)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right\}$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$

অনুরূপে পাই, $\frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$

$\therefore f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$

$\therefore f''(x) = 24x - 30$

গুরুমান ও লঘুমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 12x^2 - 30x + 12 = 0$

বা, $2x^2 - 5x + 2 = 0$

বা, $2x^2 - 4x - x + 2 = 0$

বা, $(2x - 1)(x - 2) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, 2$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $f''(x) = 24.\frac{1}{2} - 30 = -18 < 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ গুরুমান $= f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 15.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12.\frac{1}{2} - 2$

$= \frac{1}{2} - \frac{15}{4} + 6 - 2$

$= \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

আবার, $x = 2$ হলে, $f''(x) = 24.2 - 30 = 18 > 0$

$\therefore x = 2$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘুমান $= f(2) = 4.2^3 - 15.2^2 + 12.2 - 2$

$= 32 - 60 + 24 - 2$

$= -6$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত বক্ররেখা, $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x - 5y + 2 = 0$

বা, $3x^2 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 6x + 4 - 5\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx}(2xy - 5) = 6x - 3x^2 - y^2 - 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x - 3x^2 - y^2 - 4}{2xy - 5}$

$\therefore (1, 1)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = \frac{6.1 - 3.1^2 - 1^2 - 4}{2.1.1 - 5} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$\therefore (1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1)$

বা, $3y - 3 - 2x + 2 = 0$

$\therefore 2x - 3y + 1 = 0$ **(Ans.)**

এবং (1, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$x - 1 + \frac{2}{3}(y - 1) = 0$$

বা, $3x - 3 + 2y - 2 = 0$

$\therefore 3x + 2y - 5 = 0$ **(Ans.)**

9. ক দেওয়া আছে, $g(x) = 7x^3 - 2x + \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$

বা, $g(x) = 7x^3 - 2x + \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}}$

বা, $g(x) = 7x^3 - 2x + \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}}$

বা, $g(x) = 7x^3 - 2x + 1$

বা, $g'(x) = 21x^2 - 2$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\therefore g''(x) = 42x$ **(Ans.)**

খ P বিন্দুর x স্থানাংক, $OQ = t$

$y = 27 - x^2$ থেকে P বিন্দুর y স্থানাংক, $PQ = 27 - t^2$

$\therefore$ PQRS এর ক্ষেত্রফল $A = 2 \times OQ \times PQ$

বা, $A = 2t(27 - t^2)$

$\therefore A = 54t - 2t^3$

$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(54t - 2t^3) = 54 - 6t^2$

শর্তমতে, $\frac{dA}{dt} = 0$ বা, $54 - 6t^2 = 0$

বা, $54 = 6t^2$ বা, $t^2 = 9$ $\therefore t = \pm 3$

$\therefore$ t এর মান = $|\pm 3|$ একক = 3 একক। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $y = 27 - x^2$

ধরি, $f(x) = 27 - x^2$

এখানে $Rf'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{27 - (x+h)^2 - 27 + x^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2 - 2xh}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} (-h - 2x)$

$= -2x$

আবার, $Lf'(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{27 - (x+h)^2 - 27 + x^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h(2x + h)}{h}$

$= -2x$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$ কাজেই x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন [0, 1] বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (0, 1) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

$\therefore f(x)$ ফাংশন ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পূরণ করে। অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের শর্তানুসারে অন্ততপক্ষে একটি বিন্দু $c \in (0, 1)$ এর জন্য $f(1) - f(0) = (1 - 0) f'(c)$ ... (i) হবে।

এখন $f(1) = 27 - 1^2 = 26$ এবং $f(0) = 27 - 0^2 = 27$

প্রদত্ত সমীকরণকে অন্তরীকরণ করে পাই, $f'(x) = -2x$

বা, $f'(c) = -2c$

$\therefore$ (i)নং হতে পাই, $26 - 27 = (1 - 0)(-2c)$

বা, $-1 = 1 \times -2c$

$\therefore c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$

$\therefore$ (0, 1) ব্যবধিতে প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণটির গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো।

10. ক $\lim_{x\to\infty} \frac{4^x - 4^{-x}}{4^x + 4^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4^x(1 - 4^{-2x})}{4^x(1 + 4^{-2x})}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{4^{2x}}}{1 + \frac{1}{4^{2x}}} = \frac{1 - \frac{1}{4^{2\times\infty}}}{1 + \frac{1}{4^{2\times\infty}}}$

$= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ **(Ans.)**

খ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2$ ব. একক।

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিসীমা, $C = 2\pi r$ একক।

এখন, $C = 2\pi r$

বা, $C^2 = 4\pi^2 r^2$

বা, $C^2 = 4\pi . A$

বা, $\frac{d}{dt}(C^2) = \frac{d}{dt}(4\pi A)$

বা, $2C . \frac{dC}{dt} = 4\pi . \frac{dA}{dt}$

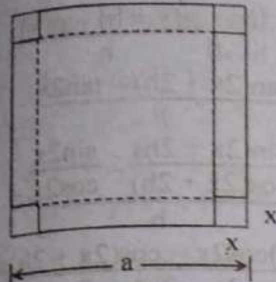
বা, $\frac{dC}{dt} = 4\pi . \frac{1}{2C} . \frac{dA}{dt}$

বা, $\frac{dC}{dt} = 4\pi . \frac{1}{4\pi r} . \frac{dA}{dt}$

বা, $\frac{dC}{dt} = \frac{1}{r} . \frac{dA}{dt}$

$\therefore \frac{dC}{dt} \propto \frac{1}{r}$ $\left[\because \frac{dA}{dt} \text{ ধ্রুবক}\right]$ [দেখানো হলো]

গ



ধরি, a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বর্গাকার পাত থেকে x দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট চারটি বর্গাকার পাত কোণা থেকে কেটে নেয়া হলো। এখন পাতের বাড়তি অংশ ভাঁজ করে (চিত্রের ড্যাস রেখা বরাবর) আয়তাকার বক্স তৈরি করলে, আয়তাকার বক্সের তলের দৈর্ঘ্য হবে $(a-2x)$ একক।

$\therefore$ তলের ক্ষেত্রফল হবে $= (a-2x)^2$ বর্গ একক।

বক্সের উচ্চতা হবে $= x$ একক।

$\therefore$ পুরো বক্সের আয়তন হবে, $v = (a-2x)^2 . x$ ঘন একক।

সর্বোচ্চ আয়তনের জন্য, $\frac{dV}{dx} = 0$ হবে

বা, $\frac{d}{dx}\{(a-2x)^2x\} = 0$

বা, $\frac{d}{dx}\{(a^2-4ax+4x^2)x\} = 0$

বা, $\frac{d}{dx}(a^2x-4ax^2+4x^3) = 0$

বা, $a^2-8ax+12x^2 = 0$

বা, $a^2-6ax-2ax+12x^2 = 0$

বা, $a(a-6x)-2x(a-6x) = 0$

$\therefore (a-6x)(a-2x) = 0$

হয়, $a-6x = 0$ অথবা, $a-2x = 0$

$\therefore x = \frac{a}{6}$ $\qquad \therefore x = \frac{a}{2}$

আবার, $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}(a^2-8ax+12x^2) = -8a+24x$

$x = \frac{a}{2}$ এর জন্য $\frac{d^2V}{dx^2} = -8a+24\cdot\frac{a}{2} = 4a > 0$

সুতরাং $x = \frac{a}{2}$ এর জন্য V সর্বনিম্ন হবে।

আবার $x = \frac{a}{6}$ এর জন্য $\frac{d^2V}{dx^2} = -8a+24\cdot\frac{a}{6}$

$= -8a+4a$

$= -4a < 0$

সুতরাং $x = \frac{a}{6}$ এর জন্য V সর্বোচ্চ হবে।

$\therefore$ আয়তন সর্বোচ্চ হওয়ার জন্য ছিন্ন বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য হতে হবে $\frac{a}{6}$ একক। **(Ans.)**

11. **ক** $\lim_{x\to0}\frac{\tan mx}{\tan nx} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan mx}{mx}}{\frac{\tan nx}{nx}}\cdot\frac{m}{n}$

$= \frac{m}{n}\cdot\frac{\lim_{x\to0}\frac{\tan mx}{mx}}{\lim_{x\to0}\frac{\tan nx}{nx}}$

$= \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1} = \frac{m}{n}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \log_a x$ এবং $g(x) = \sin^{-1}(bx)$

$\therefore p(x) = \{f(x)\}^{g(x)} = \{\log_a x\}^{\sin^{-1}(bx)}$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $ln\{p(x)\} = ln\{\log_a x\}^{\sin^{-1}(bx)}$

বা, $ln\{p(x)\} = \sin^{-1}(bx) . ln(\log_a x)$

বা, $\frac{1}{p(x)}\cdot p'(x) = \sin^{-1}(bx)\cdot\frac{1}{\log_a x}\cdot\frac{d}{dx}(\log_a x) + ln(\log_a x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(bx)^2}}\cdot b$

বা, $p'(x) = p(x)\left[\frac{\sin^{-1}(bx)}{\log_a x}\cdot\frac{1}{x}\log_a e + \frac{b\,ln(\log_a x)}{\sqrt{1-(bx)^2}}\right]$

$\therefore p'(a) = p(a)\left[\frac{\sin^{-1}(ab)}{\log_a a}\cdot\frac{1}{a}\log_a e + \frac{b\ln(\log_a a)}{\sqrt{1-(ab)^2}}\right]$

$= p(a)\left[\frac{\sin^{-1}(ab) . \log_a e}{a . 1} + \frac{b\ln(1)}{\sqrt{1-(ab)^2}}\right]$ $[\because \log_a a = 1]$

$= p(a)\left[\frac{\sin^{-1}(ab) . \log_a e}{a} + 0\right]$ $[\because \ln 1 = 0]$

$= \frac{p(a)}{a}\sin^{-1}(ab)\log_a e$

এখন, $p(a) = (\log_a a)^{\sin^{-1}(ab)} = (1)^{\sin^{-1}(ab)} = 1$

$\therefore p'(a) = \frac{1}{a} . \log_a e . \sin^{-1}(ab)$ **(Ans.)**

গ $a = e$ হলে পাই, $f(x) = \log_e x = \ln x$

$\therefore f(y) = \ln y$

দেওয়া আছে, $g(x) = \sin^{-1}(bx)$

$\therefore g\left(\frac{x}{b}\right) = \sin^{-1}\left(b.\frac{x}{b}\right) = \sin^{-1}x$

$\because f(y) = b\,g\left(\frac{x}{b}\right)$

সুতরাং $ln y = b\sin^{-1}x$

বা, $y = e^{b\sin^{-1}x}$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

বা, $y_1 = e^{b\sin^{-1}x}\cdot\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_1(\sqrt{1-x^2}) = be^{b\sin^{-1}x}$

বা, $(\sqrt{1-x^2})\,y_1 = by$ [বর্গ করে]

বা, $(1-x^2)y_1^2 = b^2y^2$

বা, $(1-x^2)\,2y_1y_2 + (-2x)y_1^2 = b^2.2y\,y_1$

উভয়পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে,

$\therefore\ (1-x^2)\,y_2 - xy_1 - b^2y = 0$ **(দেখানো হলো)**

12. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\sin x}{1+\cos x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{0.\sin 0}{(\cos 0)(1+\cos 0)} = \frac{0}{1(1+1)} = 0 \text{ (Ans.)}$$

খ $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \dfrac{d}{dx}\left(\cos x + \dfrac{x\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= -\sin x + \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(x\sin x) - x\sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{(1+\cos x)\left\{x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x)\right\} - x\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{(1+\cos x)(x\cos x + \sin x.1) + x\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{x\cos x + \sin x + x\cos^2 x + \cos x\sin x + x\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{x\cos x + \cos x\sin x + \sin x + x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{\cos x\,(x+\sin x) + (\sin x + x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{(1+\cos x)\,(x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\sin x + \frac{x+\sin x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin x\cos x + x + \sin x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{x - \sin x\cos x}{1+\cos x} \text{ (Ans.)}$$

গ $f(x) = \cos x$

$f(2x) = \cos 2x$

$f\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$

$$\therefore \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{f(2x)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

ধরি, $g(x) = \tan 2x$

$\therefore g(x+h) = \tan 2(x+h)$

আমরা জানি, $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(2x+2h) - \tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \cos(2x+2h)\sin 2x}{\cos(2x+2h)\cos 2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h-2x)}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2.\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2.1\frac{1}{\cos(2x+0)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

$\therefore\ \dfrac{d}{dx}(\tan 2x) = 2\sec^2 2x$ **(Ans.)**

13. **ক** দেওয়া আছে, $x = at^2$ এবং $y = 2at$

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = 2at$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dt} = 2a$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\left(\dfrac{x}{p}\right)^3 + \left(\dfrac{y}{q}\right)^3 = 2$

বা, $\dfrac{1}{p^3}.x^3 + \dfrac{1}{q^3}.y^3 = 2$

বা, $\dfrac{1}{p^3}.3x^2 + \dfrac{1}{q^3}.3y^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

[x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $\dfrac{y^2}{q^3}.\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{p^3}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{q^3}{p^3}.\dfrac{x^2}{y^2}$

(p, q) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{q^3}{p^3}.\dfrac{p^2}{q^2} = -\dfrac{q}{p}$

$\therefore (p, q)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - q = -\frac{q}{p}(x - p)$$

বা, $py - pq = -qx + pq$

$\therefore qx + py - 2pq = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $r(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dr}{dx} = 12x^3 - 6x^2 - 12x + 6$$

$\therefore$ সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dr}{dx} = 0$

বা, $12x^3 - 6x^2 - 12x + 6 = 0$

বা, $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

বা, $x^2(2x - 1) - 1(2x - 1) = 0$

বা, $(2x - 1)(x^2 - 1) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, 1, -1$

এখন, $\frac{1}{2}, 1 \in (0, 2)$ কিন্তু $-1 \notin (0, 2)$

আবার, $\frac{d^2r}{dx^2} = 36x^2 - 12x - 12$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d^2r}{dx^2} = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12.\frac{1}{2} - 12$
$= 36.\frac{1}{4} - 6 - 12$
$= 9 - 6 - 12$
$= -9 < 0$

$x = \frac{1}{2}$ এ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ গরিষ্ঠ মান $= 3.\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6.\frac{1}{2} + 1$
$= 3.\frac{1}{16} - 2.\frac{1}{8} - 6.\frac{1}{4} + 3 + 1$
$= \frac{3 - 4 - 24 + 48 + 16}{16}$
$= \frac{39}{16}$ **(Ans.)**

আবার, $x = 1$ হলে, $\frac{d^2r}{dx^2} = 36(1)^2 - 12.1 - 12$
$= 12 > 0$

$x = 1$ এ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘিষ্ঠ মান $= 3(1)^4 - 2(1)^3 - 6(1)^2 + 6.1 + 1$
$= 3 - 2 - 6 + 6 + 1 = 2$ **(Ans.)**

14. **ক** $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 3^{-2x}}{1 + 3^{-2x}}$ [লব ও হরকে 3^x দ্বারা ভাগ করে]

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{2x}}}{1 + \frac{1}{3^{2x}}}$

$= \frac{1 - 0}{1 + 0}$ $\quad [\because \frac{1}{3^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0]$

$= 1$ **(Ans.)**

খ এখানে, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x}$

মনে করি, $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x}$ .... (i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}3x^2 - 2 - (-1)\frac{1}{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

$\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 1^2 - 2 + \frac{1}{1^2} = 0$

$\therefore \left(1, -\frac{8}{3}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{dy}{dx}(x - 1)$

বা, $y + \frac{8}{3} = 0(x - 1)$

বা, $y + \frac{8}{3} = 0$

$\therefore 3y + 8 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{3}.3x^2 - 2 - (-1)\frac{1}{x^2}$
$= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$
$= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x^2.\frac{1}{x^2}$
$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

স্পষ্টতই x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$ সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি x এর একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন। **(প্রমাণিত)**

15. **ক** (i) নং বক্ররেখার x-অক্ষকে ছেদ করলে $y = 0$ হবে।

$\therefore 6 + 2x - \frac{8}{x^2} = 0$

বা, $3x^2 + x^3 - 4 = 0$

বা, $x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 = 0$

বা, $x^2(x - 1) + 4x(x - 1) + 4(x - 1) = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$

বা, $(x - 1)(x + 2)^2 = 0 \quad \therefore x = 1, -2, -2$

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দুসমূহ $(1, 0), (-2, 0)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = 6 + 2x - \frac{8}{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(6 + 2x - \frac{8}{x^2}\right)$
$= 2 - 8(-2).\frac{1}{x^3} = 2 + \frac{16}{x^3}$

$\therefore$ P(2, 8) বিন্দুগামী স্পর্শকের ঢাল হবে,

$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{16}{2^3} = 2 + 2 = 4$

$\therefore$ P বিন্দুগামী অভিলম্বের ঢাল হবে $= -\frac{1}{4}$

এখন $-\frac{1}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট ও (2, 8) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y - 8 = -\frac{1}{4}(x - 2)$

বা, $-4y + 32 = x - 2$ বা, $x - 2 + 4y - 32 = 0$

$\therefore$ $x + 4y = 34$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 102$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 45$ $\quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$

সর্বনিম্ন মান ও সর্বোচ্চ মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $3x^2 - 6x - 45 = 0$

বা, $x^2 - 2x - 15 = 0$

বা, $(x-5)(x+3) = 0$ $\therefore x = 5$ অথবা -3

যখন $x = 5, \frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 5 - 6 = 24 > 0$

$\therefore x = 5$ তে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= (5)^3 - 3 \times (5)^2 - 45 \times 5 + 102$

$= -73$ **(Ans.)**

যখন $x = -3, \frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times (-3) - 6 = -24 < 0$

$x = -3$ তে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যামান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= (-3)^3 - 3(-3)^2 - 45(-3) + 102$

$= 183$ **(Ans.)**

16. ক $\frac{d}{dx}(\ln x^n) = \frac{d}{dx}(n\ln x) = n.\frac{1}{x} = \frac{n}{x}$

$\therefore \frac{d^2}{dx^2}(\ln x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n}{x}\right) = -\frac{n}{x^2}$ **(Ans.)**

খ ধরি, $y = x^{\frac{1}{x}} = g_2(x)$

$\therefore \ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$ বা, $\ln y = \frac{1}{x}\ln x$ বা, $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\ln x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x) = (\ln x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}(\ln x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{x^2}(1 - \ln x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x) = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \ln x)$

$\therefore$ (1, 2) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 1^{\frac{1}{1} - 2}(1 - \ln 1) = 1$ **(Ans.)**

গ $g_1(x) = x^{\cos^{-1}x} = y$ [ধরে]

$\therefore \ln y = \ln x^{\cos^{-1}x} = \cos^{-1}x \ln x$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x). + \cos^{-1}x \frac{d}{dx}(\ln x)$

$= \frac{-\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos^{-1}x \cdot \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\right\}$

$= x^{\cos^{-1}x}\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$ **(Ans.)**

17. ক $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{(1 + \sin x)\cos x}$

[লব ও হরকে $(1 + \sin x)$ দ্বারা গুণ ক

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1 + \sin\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{0}{1 + 1} = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

বা, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left\{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right\}^2$ [বর্গ করে]

$= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$

$= \frac{1}{4}\{(e^x + e^{-x})^2 - 4.e^x.e^{-x}\}$

$= \left\{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right\}^2 - 1$

$= y^2 - 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = -1$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $y = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

বা, $x^2 = 1$

বা, $x = \pm 1$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$

$x = 1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1} = 2 > 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে, ফাংশনটির লঘুমান বিদ্যমান।

অতএব, লঘুমান, $1 + \frac{1}{1} = 2$

$x = -1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$

$\therefore$ $x = 1$ বিন্দুতে, ফাংশনটির গুরুমান বিদ্যমান।

অতএব, গুরুমান, $(-1) + \frac{1}{-1} = -2$

সুতরাং, y এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (দেখানো হলো)

18. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = e^x$

$\therefore f(e^x) = e^{e^x}$

ধরি, $y = e^{e^x}$

বা, $\ln y = \ln e^{e^x}$ [উভয়পক্ষে ln নিয়ে]

বা, $\ln y = e^x . \ln e = e^x$

বা, $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $\frac{dy}{dx} = ye^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{e^x} e^x$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = \left\{f(x) + \frac{1}{f(x)}\right\}\sin x$

বা, $y = \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \sin x$

বা, $y = (e^x + e^{-x}) \sin x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$y_1 = (e^x + e^{-x}) \cos x + (e^x - e^{-x}) \sin x$

বা, $y_2 = (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \sin x$

বা, $y_2 = 2(e^x - e^{-x}) \cos x$

বা, $y_3 = 2[(e^x - e^{-x})(-\sin x) + (e^x + e^{-x}) \cos x]$

বা, $y_4 = 2[-\{(e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \sin x\} + (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x}) \cos x]$

বা, $y_4 = 2[-(e^x - e^{-x}) \cos x - (e^x + e^{-x}) \sin x - (e^x + e^{-x}) \sin x + (e^x - e^{-x}) \cos x]$

বা, $y_4 = -2.2(e^x + e^{-x}) \sin x$

বা, $y_4 = -4y$

$\therefore y_4 + 4y = 0$ (দেখানো হলো)

গ ধরি, $y = 4f(x) + \frac{9}{f(x)}$

$f(x) = e^x$ হলে পাই, $y = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x + 9e^{-x}.(-1) = 4e^x - 9e^{-x}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের জন্য,

$\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $4e^x - 9e^{-x} = 0$

বা, $4e^x = 9e^{-x}$

বা, $4e^x = \frac{9}{e^x}$

বা, $e^{2x} = \frac{9}{4}$

বা, $(e^x)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

বা, $e^x = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \ln \frac{3}{2}$

$x = \ln \frac{3}{2}$ বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\, e^{\ln\frac{3}{2}} + 9.\frac{1}{e^{\ln\frac{3}{2}}}$

$= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3}$ [$\because e^{\ln\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$]

$= 6 + 6$

$= 12 > 0$

$\therefore x = \ln \frac{3}{2}$ বিন্দুতে y এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $y = 4\, e^{\ln\frac{3}{2}} + 9.\frac{1}{e^{\ln\frac{3}{2}}}$

$= 4.\frac{3}{2} + 9.\frac{2}{3}$

$= 6 + 6 = 12$ (প্রমাণিত)

19. **ক** t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = 3t + \frac{1}{4}t^2$

$\therefore$ বেগের সমীকরণ, $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t + \frac{1}{4}t^2\right)$

$= 3 + \frac{1}{4}. 2t = 3 + \frac{1}{2}t$

Scanned with CamScanner

$\therefore$ 5 মিনিট অর্থাৎ, 300 সেকেন্ড পরে তার বেগ,

$$v = 3 + \frac{1}{2} \times 300$$
$$= 153 \text{ মিটার/সেকেন্ড } \textbf{(Ans.)}$$

খ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, x একক
আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ, y একক
$\therefore$ পরিসীমা, $P = 2(x+y)$ একক

$\therefore y = \frac{P}{2} - x$

ক্ষেত্রফল, $A = xy$ একক

ক্ষেত্রফল, A_{max} এর জন্য $\frac{dA}{dx} = 0$ হবে

এখন $\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}\left\{x\left(\frac{P}{2}-x\right)\right\}$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{P}{2}x - x^2\right) = \frac{P}{2} - 2x$$

শর্তমতে, $\frac{P}{2} - 2x = 0$

বা, $x + y - 2x = 0$

বা, $y - x = 0$

$\therefore x = y$

সুতরাং বর্গক্ষেত্র হলে এর ক্ষেত্রফল সর্বোচ্চ হবে যখন পরিসীমা নির্দিষ্ট অর্থাৎ নির্দিষ্ট P এর জন্য A_{max} হবে যখন আয়তক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র হবে। (দেখানো হলো)

গ P এর সর্বনিম্ন মানের জন্য,

$\frac{dP}{dx} = 0$ হতে হবে।

বা, $\frac{d}{dx}(2x + 2y) = 0$

বা, $\frac{d}{dx}\left(2x + 2 . \frac{A}{x}\right) = 0$ $[\because A = xy]$

বা, $2 + 2A\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$

বা, $1 + xy\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$

বা, $1 - \frac{y}{x} = 0$

বা, $\frac{y}{x} = 1$

$\therefore x = y$

$\therefore$ নির্দিষ্ট A এর জন্য পরিসীমা P_{min} হবে যখন আয়তক্ষেত্রের $x = y$ অর্থাৎ বর্গক্ষেত্র হবে। (দেখানো হলো)

20. **ক** $y = x^2$ রেখার যে কোন বিন্দুতে ঢাল,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

$\therefore$ মূলবিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2(0) = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $6y = (2x-3)^3 - 4x$

বা, $y = \frac{(2x-3)^3}{6} - \frac{2}{3}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3(2x-3)^2.(2)}{6} - \frac{2}{3}$

$$= (2x-3)^2 - \frac{2}{3}$$

চরম বিন্দুর জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $(2x-3)^2 - \frac{2}{3} = 0$

বা, $(2x-3)^2 = \frac{2}{3}$

বা, $2x - 3 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

বা, $2x = 3 \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

এখন $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ ও $x > \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$\therefore x < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ বা, $x < 1.092$ এর জন্য $f'(x) > 0$

$\therefore -\infty < x < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান।

আবার, $\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$

বা, $1.092 < x < 1.908$ এর জন্য $f'(x) < 0$.

$\therefore \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

আবার $x > \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$

বা, $x > 1.908$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$\therefore x > \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ এর জন্য $f(x)$ ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

$\therefore x < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ ও $x > \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ এর জন্য ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান। **(Ans.)**

গ $6y = (2x-3)^3 - 4x$ বক্ররেখা y-অক্ষকে ছেদ করলে ছেদ বিন্দুর জন্য $x = 0$.

বা, $6y = \{2(0) - 3\}^3 - 4(0) = (-3)^3 - 0$

বা, $y = \frac{-27}{6} = -\frac{9}{2}$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুর স্থানাংক $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$

এখন, $6y = (2x - 3)^3 - 4x$ রেখার যে কোন বিন্দুতে ঢালের সমীকরণ,

$$\frac{dy}{dx} = (2x-3)^2 - \frac{2}{3} \quad [\text{'খ' হতে}]$$

$\therefore \left(0, -\frac{9}{2}\right)$ বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = (2.0-3)^2 - \frac{2}{3}$

$$= 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$$

$\therefore \left(0, -\frac{9}{2}\right)$ বিন্দুগামী ও $\frac{25}{3}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$$y + \frac{9}{2} = \frac{25}{3}(x - 0)$$

বা, $3y + \frac{27}{2} = 25x$

$\therefore 6y + 27 = 50x$ **(Ans.)**

21. **ক** $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta^\circ) = \frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{\theta\pi}{180}\right) \left[\because 1^\circ = \frac{\pi^C}{180}\right]$

$$= \cos\frac{\theta\pi}{180}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta\pi}{180}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta\pi}{180}\right)\frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos\frac{\theta\pi}{180} \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $p = \tan x - \sin x$

$q = x^2$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{p}{qx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{1}{2}$$

$$= 1\times 1\times 1\times\frac{1}{\cos 0}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $y = p + \sec x + \sin x$

বা, $y = \tan x - \sin x + \sec x + \sin x$

বা, $y = \tan x + \sec x$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

$$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x + 1) - (\sin x + 1)\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x - (\sin x + 1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin x}$$

আবার, $y_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 - \sin x}\right)$

$$= \frac{(1 - \sin x)\frac{d}{dx}(1) - 1\frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \sin x).0 + \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$\therefore y_2 = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ **(দেখানো হলো)**

22. **ক** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}.e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}.e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}} \textbf{ (Ans.)}$$

খ ধরি, $f(x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$f'(x) = 2\cos x - 6\sin x\cos x$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 2\cos x - 6\sin x\cos x = 0$

বা, $2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ অর্থাৎ $x = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ $\left[\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right]$

অথবা $\sin x = \frac{1}{3}$ অর্থাৎ $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

আবার, $f''(x) = -2\sin x - 6\cos^2 x + 6\sin^2 x$
$= -2\sin x - 6(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f''(x) = -2 + 6 = 4 > 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ তে ফাংশনের সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3$ **(Ans.)**

$\sin x = \frac{1}{3}$ বিন্দুতে

$$f''(x) = -2\sin x - 6(1 - 2\sin^2 x)$$
$$= -\frac{2}{3} - 6\left(1 - \frac{2}{9}\right)$$
$$= -\frac{2}{3} - 6.\frac{7}{9}$$
$$= -\frac{16}{3} < 0$$

অতএব, $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ তে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 1 + 2.\frac{1}{3} + 3\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{13}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = \frac{d}{dx}\{\sin(m\sin^{-1}x)\}$

বা, $y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_1^2 = \cos^2(m\sin^{-1}x).\frac{m^2}{(1-x^2)}$ [বর্গ করে]

বা, $y_1^2(1-x^2) = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$

বা, $y_1^2(1-x^2) = m^2\{1 - \sin^2(m\sin^{-1}x)\}$

বা, $y_1^2(1-x^2) = m^2(1-y^2)$

বা, $(1-x^2)2y_1.y_2 - 2xy_1^2 = -2m^2yy_1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ **(প্রমাণিত)**

23. **ক** ধরি, $y = \log_{10}x = \log_e x . \log_{10}e = \ln x.\log_{10}e$

$\frac{dy}{dx} = \log_{10}e.\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log_{10}x) = \frac{1}{x}\log_{10}e$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x$

$\therefore [f(x)]^n = x^n$

ধরি, $g(x) = x^n$

$\therefore g(x+h) = (x+h)^n$

অন্তরীকরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(x+h)^n - x^n]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots\ldots + h^n - x^n\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots\ldots\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots\ldots\right]$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} + 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \textbf{ (Ans.)}$$

গ এখানে, $z = [f(x) + \sqrt{1 + \{f(x)\}^2}]^m$
$= [x + \sqrt{1+x^2}]^m$

$$z_1 = m[x + \sqrt{1+x^2}]^{m-1}.\left[1 + \frac{1}{2}.(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}.2x\right]$$
$$= m[x + \sqrt{1+x^2}]^{m-1}.\left[1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$
$$= m[x + \sqrt{1+x^2}]^{m-1}.\left[\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$
$$= m\frac{[x + \sqrt{1+x^2}]^m}{\sqrt{1+x^2}}$$

বা, $z_1 = \frac{mz}{\sqrt{1+x^2}}$

বা, $z_1\sqrt{1+x^2} = mz$

বা, $z_1^2(1+x^2) = m^2z^2$

বা, $(1+x^2).2z_1z_2 + z_1^2(0+2x) = m^2\,2z.z_1$

বা, $(1+x^2)\,2z_1z_2 + 2xz_1^2 - 2m^2zz_1 = 0$

বা, $2z_1[(1+x^2)z_2 + xz_1 - m^2z] = 0$

বা, $(1+x^2)z_2 + xz_1 - m^2z = 0$ **(প্রমাণিত)**

24. **ক** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+2}{x^2+1}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$
$$= \frac{1+0+0}{1+0} = 1 \textbf{ (Ans.)}$$

খ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-f(x)}{\left\{g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}^2}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

প্রদত্ত ফাংশনে $x\to\frac{\pi}{2}$ হলে $\frac{0}{0}$ আকার ধারণ করে।

ধরি, $x=\frac{\pi}{2}+h$

$\therefore x\to\frac{\pi}{2}$ হলে $h\to 0$ হয়

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-h\right)^2}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos h}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}$

$= 2\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$= 2.1.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **(Showed)**

গ দেওয়া আছে, $f(x)=\sin x$

$\therefore f(3x)=\sin 3x$

$f\{3(x+h)\}=\sin 3(x+h)$

অন্তরীকরণের সংজ্ঞানুসারে,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{f(3x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\{3(x+h)\}-f(3x)}{h}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin 3x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin 3(x+h)-\sin 3x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[2\cos\dfrac{3(x+h)+3x}{2}.\sin\dfrac{3(x+h)-3x}{2}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[2\cos\dfrac{6x+3h}{2}.\sin\dfrac{3h}{2}\right]$

$= 2\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(3x+\frac{3h}{2}\right)\cdot\lim\limits_{\frac{3h}{2}\to 0}\dfrac{\sin\frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}}\cdot\frac{3}{2}$

$= 2\cos(3x+0).1.\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin 3x) = 3\cos 3x$ **(Ans.)**

25. ক ধরি, $y=\tan^{-1}(e^x)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^x)\} = \frac{1}{1+(e^x)^2}\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

(Ans.)

খ প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $x^3+2y^3=3xy$

$x=az$ হলে পাই, $a^3z^3+2y^3=3azy$

z এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3a^3z^2+6y^2\frac{dy}{dz}=3ay+3az\frac{dy}{dz}$

বা, $\frac{dy}{dz}(6y^2-3az)=3ay-3a^3z^2$

বা, $\frac{dy}{dz}=\frac{3(ay-a^3z^2)}{3(2y^2-az)}$

$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{ay-a^3z^2}{2y^2-az}$ (দেখানো হলো)

গ $x^3+2y^3=3xy$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore 3x^2+6y^2.\frac{dy}{dx}=3x.\frac{dy}{dx}+3y$

বা, $6y^2\frac{dy}{dx}-3x.\frac{dy}{dx}=3y-3x^2$

বা, $\frac{dy}{dx}(2y^2-x)=y-x^2$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{2y^2-x}$

x-অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের জন্য, $\frac{dy}{dx}=0$

বা, $\frac{y-x^2}{2y^2-x}=0$ বা, $y-x^2=0$ $\therefore y=x^2$

$y=x^2$, $x^3+2y^3=3xy$ এ বসিয়ে পাই,

$x^3+2(x^2)^3=3.x.x^2$

বা, $x^3+2x^6=3x^3$ বা, $2x^6=2x^3$

বা, $x^6=x^3$ বা, $x^6-x^3=0$

বা, $x^3(x^3-1)=0$

হয়, $x^3=0$ $\quad$ অথবা, $x^3-1=0$ বা, $x^3=1$

বা, $x=0$ $\quad$ বা, $x=1$

$\therefore x=1$ বসালে, $y=1$

সুতরাং মূলবিন্দু ব্যতীত (1, 1) বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। **(Ans.)**

26. ক বামপক্ষ $=\frac{2}{\sqrt{2+2g(2x)}}=\frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2x}}$

$=\frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 2x)}}=\frac{2}{\sqrt{2.2\cos^2 x}}$

$=\frac{2}{2\cos x}=\frac{1}{\cos x}$

$=\sec x=$ ডানপক্ষ

ঘ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \{f(x)\}^3 + \{f(x+120°)\}^3 + \{f(x+240°)\}^3$

$= \sin^3 x + \sin^3(x+120°) + \sin^3(x+240°)$

$= \frac{1}{4}\{4\sin^3 x + 4\sin^3(120°+x) + 4\sin^3(240°+x)\}$

$= \frac{1}{4}\{3\sin x - \sin 3x + 3\sin(120°+x) - \sin 3(120°+x) + 3\sin(240°+x) - \sin 3(240°+x)\}$

$[\because \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A]$

$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x + 3\{\sin(120°+x) + \sin(240°+x)\} - \sin(360°+3x) - \sin(720°+3x)]$

$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x + 3.2\sin(180°+x)\cos 60° - \sin 3x - \sin 3x]$

$[\because 2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$= \frac{1}{4}\left[3\sin x - 3\sin 3x - 3.2\sin x.\ \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{4}[3\sin x - 3\sin 3x - 3\sin x]$

$= -\frac{3}{4}\sin 3x =$ ডানপক্ষ

$\therefore \{f(x)\}^3 + \{f(x+120°)\}^3 + \{f(x+240°)\}^3 = \frac{-3}{4}\sin 3x$

(দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$

বা, $y^2 = 4 + 3\sin x$ [বর্গ করে]

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4 + 3\sin x)$ বা, $2y\frac{dy}{dx} = 3\cos x$

বা, $2\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} + 2y.\frac{d^2y}{dx^2} = -3\sin x$

[পুনরায় অন্তরীকরণ করে]

বা, $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - y^2$

বা, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$

$\therefore 2yy_2 + 2{y_1}^2 + y^2 = 4$ (দেখানো হলো)

27. **ক** চিত্রানুযায়ী, $AC = \sqrt{3} + 1, BC = 2$

এবং $\angle ACB = 60°$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin\angle ACB$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}+1) \times 2 \times \sin 60°$ বর্গ একক

$= (\sqrt{3}+1).\frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ প্রদত্ত বক্ররেখা, $x^2 + y^2 - 4x - 7 = 0$ ...... (i)

বা, $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 = 0$

বা, $y\frac{dy}{dx} = 2 - x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$

স্পর্শক y-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{2-x}{y} = 0$

বা, $2 - x = 0$

$\therefore x = 2$

$x = 2$ (i) নং এ বসিয়ে পাই, $2^2 + y^2 - 4.2 - 7 = 0$

বা, $y^2 = 11$

$\therefore y = \pm\sqrt{11}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(2, \sqrt{11})$ ও $(2, -\sqrt{11})$

(Ans

গ চিত্রানুযায়ী পাই, $a = 2, b = \sqrt{3} + 1, C = 60°, A =$ ও $B = \beta$

আমরা জানি, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2.2(\sqrt{3}+1)\cos 60°$

$= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3}+1)\frac{1}{2}$

$= 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$

$= 6$

$\therefore c = \sqrt{6}$ **(Ans.)**

আবার, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

বা, $\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60°}$

বা, $\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

বা, $\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{2}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha = 45°$ **(Ans.)**

এখন, ΔABC-এ

$B = 180° - (A + C)$

$\beta = 180° - (45° + 60°) = 180° - 105°$

$\therefore \beta = 75°$ **(Ans.)**

28. **ক** $x = \frac{2}{5}$ হলে $f(x) = 3 - 2x$

$\therefore f\left(\frac{2}{5}\right) = 3 - \frac{2 \times 2}{5} = \frac{15 - 4}{5} = \frac{11}{5}$ **(Ans.)**

$x = \frac{5}{2}$ হলে $f(x) = 3 + 2x$

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 + 2.\frac{5}{2} = 8$ **(Ans.)**

খ $x = \frac{3}{2}$ হলে, $f(x) = 3 + 2x$

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 + 2.\frac{3}{2} = 6$

$\therefore \lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^-} (3 - 2x) = 3 - 2.\frac{3}{2} = 0$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} (3 + 2x) = 3 + 2.\frac{3}{2} = 6$

যেহেতু $\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right)$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

গ প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ, $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ ... ... (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x + a)}{y}$

যেহেতু স্পর্শকগুলি x-অক্ষের ওপর লম্ব। অর্থাৎ,

$\frac{dy}{dx} = \tan 90°$

বা, $\frac{dx}{dy} = \cot 90° = 0$

বা, $-\frac{y}{(x + a)} = 0$

বা, $y = 0$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই,

$x^2 + 2ax = 0$

বা, $x(x + 2a) = 0$

$\therefore x = 0, -2a$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় $(0, 0)$ ও $(-2a, 0)$.

29. **ক** $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots\right) - 1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\ldots\ldots\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\ldots\ldots\right)$

$= 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = x^2 + 1$

মনে করি, $g^{-1}[-1, 65] = x$

বা, $[-1, 65] = g(x)$

বা, $[-1, 65] = x^2 + 1$

বা, $-1 \leq x^2 + 1 \leq 65$

বা, $-1 - 1 \leq x^2 + 1 - 1 \leq 65 - 1$ [1 বিয়োগ করে পাই]

বা, $-2 \leq x^2 \leq 64$

বা, $0 \leq x^2 \leq 64$ [$\because$ বাস্তব সংখ্যার সর্বনিম্ন বর্গ শূন্য]

$\therefore -8 \leq x \leq 8$

$\therefore g^{-1}[-1, 65] = \{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x \leq 8\}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x}{1 + x}$ এবং $g(x) = x^2 + 1$

এখন $fog(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)$

$= \frac{2(x^2 + 1)}{1 + x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2}{2 + x^2}$

মনে করি, $x_1, x_2 \in$ ডোমেন $fog(x)$

$fog(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি এবং কেবল যদি $x_1 = x_2$ এর জন্য $fog(x_1) = fog(x_2)$ হয়।

ধরি, $fog(x_1) = fog(x_2)$

তাহলে $\frac{2x_1^2 + 2}{2 + x_1^2} = \frac{2x_2^2 + 2}{2 + x_2^2}$

বা, $4x_1^2 + 4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2 = 4x_2^2 + 4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2$

বা, $4x_1^2 + 2x_2^2 = 4x_2^2 + 2x_1^2$

বা, $2x_1^2 = 2x_2^2$

বা, $x_1^2 = x_2^2 \therefore x_1 = \pm x_2$

$\therefore fog(x)$ ফাংশনটি এক-এক নয়। (প্রমাণিত)

30. **ক** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 12x + 8y - 69 = 0$ ...... (i)

$\therefore (-3, 8)$ বিন্দু থেকে (i) নং বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{(-3)^2 + 8^2 - 12(-3) + 8.8 - 69}$

$= \sqrt{9 + 64 + 36 + 64 - 69}$

$= \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ একক **(Ans.)**

খ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 12x + 8y - 69 = 0$ ... ... (i)

$\therefore$ কেন্দ্র $(6, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 69}$

$= \sqrt{121} = 11$

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y + a = 0$ ... ... (ii)

ইহা (i) নং বৃত্তের স্পর্শক হলে, কেন্দ্র $(6, -4)$ হতে (ii) নং এর লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\therefore \left|\frac{0.6 - 4.1 + a}{\sqrt{0 + 1^2}}\right| = 11$

বা, $a - 4 = \pm 11$

বা, $a = 4 \pm 11$

$\therefore a = 15, -7$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y + 15 = 0$ **(Ans.)**

এবং $y - 7 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি,

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ হয়

বা, $x^2 - 3x - 2x + 6 \geq 0$

বা, $(x - 3)(x - 2) \geq 0$

$\therefore x - 3 \geq 0$ এবং $x - 2 \geq 0$ অথবা, $x - 3 \leq 0$ এবং $x - 2 \leq 0$

বা, $x \geq 3$ এবং $x \geq 2$ অথবা, $x \leq 3$ এবং $x \leq 2$

$\therefore x \geq 3$ অথবা, $x \leq 2$

$\therefore f(x)$ এর ডোমেন, $D_f = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ **(Ans.)**

যেহেতু কোনো সংখ্যার বর্গমূল ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং $f(x)$ এর রেঞ্জ হবে সকল অঋণাত্মক সংখ্যার সেট।

$\therefore$ রেঞ্জ, $R_f = [0, \infty)$ **(Ans.)**

31. **ক** দেওয়া আছে, $g(x) = \cos^2 x$

$\therefore g(\theta) = \cos^2\theta$

প্রশ্নমতে, $4g(\theta) = 3$

বা, $4\cos^2\theta = 3$

বা, $\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta = \frac{4}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{3} - 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^2 x$

$g(x) = \cos^2 x$

$\therefore y = 3f(\alpha) + 4g(\alpha) = 3\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$

$\therefore \frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(3\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha)$

$= 3.2\sin\alpha\cos\alpha + 4(2\cos\alpha)(-\sin\alpha)$

$= 6\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha$

$= -2\sin\alpha\cos\alpha$

$= -\sin 2\alpha$

লঘুমান ও গুরুমানের জন্য,

$\frac{dy}{d\alpha} = 0$

বা, $-\sin 2\alpha = 0$

বা, $2\alpha = 0$ অথবা π

$\therefore \alpha = 0$ অথবা $\frac{\pi}{2}$

আবার, $\frac{d^2y}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}(-\sin 2\alpha) = -2\cos 2\alpha$

$\alpha = 0$ হলে $\frac{d^2y}{d\alpha^2} = -2 < 0$

$\therefore \alpha = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ গুরুমান $= 3.0 + 4.1 = 4$ **(Ans.)**

আবার, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{d\alpha^2} = -2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= -2(-1) = 2 > 0$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির লঘুমান বিদ্যমান।

$\therefore$ লঘুমান $= 3\sin^2\frac{\pi}{2} + 4\cos^2\frac{\pi}{2}$

$= 3.1 + 4.0 = 3$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^2 x$

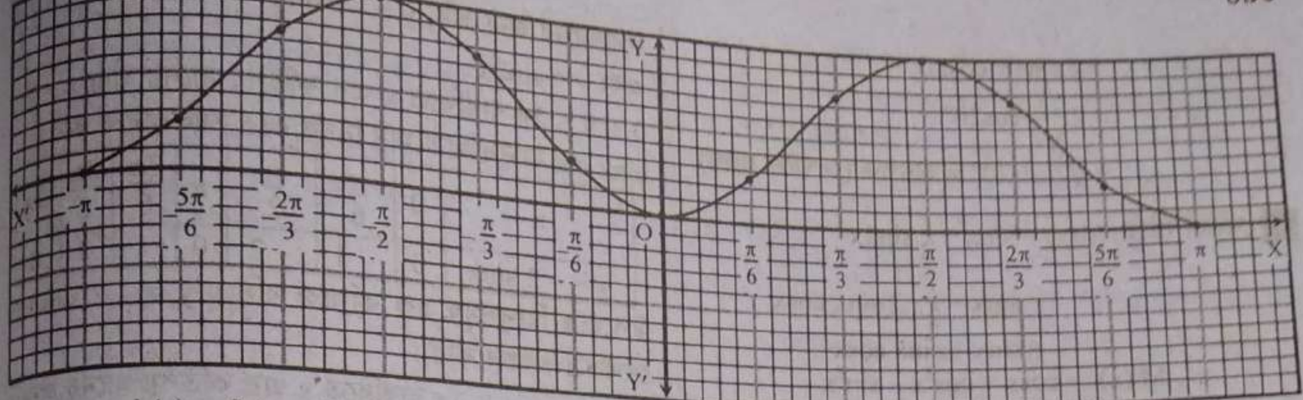
ধরি, $y = f(x)$

$y = \sin^2 x, -\pi \leq x \leq \pi$

এখন, x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর আনুষঙ্গিক মা[ন] নির্ণয় করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
y	0	0.25	0.75	1	0.75	0.25	0

স্কেল: x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু $= \frac{\pi}{30}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 1 বাহু = 0·1 একক ধরে বিন্দুগুলি গ্রাফ কাগজে স্থাপন করে সুষমভাবে যোগ করে $\sin^2 x$ এর লেখচিত্র আঁকি।



32. ক $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)-f(x)}{\{f(x)\}^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}$ [লব ও হরকে sinx দ্বারা ভাগ করে]

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x.\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x.\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\,.\,4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\times1\times1 = \dfrac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \dfrac{2}{\sqrt{2+2f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2+2\cos2x}}$

মধ্যপক্ষ $= \dfrac{2}{\sqrt{2+2g\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+2\sin2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+2\cos2x}}$ = বামপক্ষ

$= \dfrac{2}{\sqrt{2(1+\cos2x)}} = \dfrac{2}{\sqrt{2.2\cos^2x}} = \dfrac{2}{2\cos x}$

$= \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$ = ডানপক্ষ

গ দেওয়া আছে, $g(x)-f(x)=0$

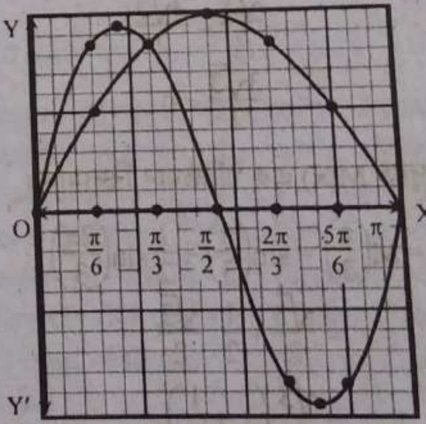
$\therefore \sin2x-\sin x=0$

$0\le x\le\pi$ এর অন্তর্গত বিভিন্ন বিন্দুতে $y=\sin2x$ ও $y=\sin x$ এর মান সম্বলিত দুইটি তালিকা তৈরি করি।

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = sin2x	0	0.87	1	0.87	0	−0.87	−1	−0.87	0

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = sinx	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0

স্কেল নির্ধারণ : x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $=\frac{\pi}{18}$ এবং y অক্ষ বরাবর 10 বাহু = 1 একক ধরে ছক কাগজে একই অক্ষ ব্যবস্থায় উভয় তালিকার বিন্দুসমূহ উপস্থাপন করি।



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $x=0,\frac{\pi}{3},\pi$ এর জন্য $y=\sin2x$ ও $y=\sin x$ লেখদ্বয় মিলিত হয়েছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=0,\frac{\pi}{3},\pi$ **(Ans.)**

33. ক বামপক্ষ $=\sin65^\circ+\cos65^\circ$

$=\sin65^\circ+\cos(90^\circ-25^\circ)$

$=\sin65^\circ+\sin25^\circ$

$=2\sin\dfrac{65^\circ+25^\circ}{2}\cos\dfrac{65^\circ-25^\circ}{2}$

$= 2\sin 45°\cos 20°$

$= 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20°$

$= \sqrt{2}\cos 20°$ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $M(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$= \sin x + \frac{1}{2}.2\sin x\cos x$

$= \sin x + \sin x\cos x$

$\therefore M'(x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$\therefore M''(x) = -\sin x - 2\sin x\cos x - 2\sin x\cos x$

$= -\sin x - 2\sin 2x$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য, $M'(x) = 0$

$\therefore \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

বা, $\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$

বা, $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\therefore 2\cos x - 1 = 0$ অথবা, $\cos x + 1 = 0$

বা, $\cos x = \frac{1}{2}$ বা, $\cos x = -1$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ $\therefore x = \pi$

$\therefore (0, \pi)$ ব্যবধিতে, $x = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$ এর জন্য, $M''(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে $M(x)$ এর গরিষ্ঠমান বিদ্যমান।

$\therefore$ গরিষ্ঠমান $= M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $M(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$\because M(x) = 0$. সুতরাং $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$

বা, $\sin x = -\frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore -2\sin x = \sin 2x$

সমাধানের জন্য ধরি, $y = -2\sin x$

এবং $y = \sin 2x$

$0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে x এর কতিপয় মানের জন্য $y = -2\sin x$ এর আনুষঙ্গিক মান নির্ণয় করে তালিকাবদ্ধ করি।

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = -2\sin x$	0	-1	-2	0	1	2	0

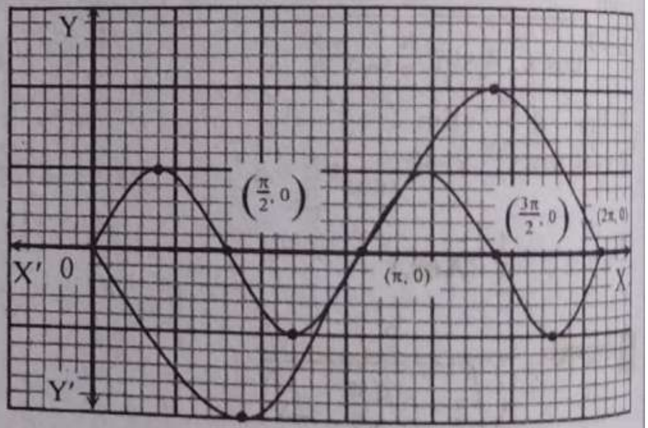
উপরোক্ত বিন্দুসমূহ ছক কাগজে বসিয়ে $y = -2\sin x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

আবার, $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে x এর কতিপয় মানের জন্য $y = \sin 2x$ এর আনুষঙ্গিক মান নির্ণয় করে তালিকাবদ্ধ করি।

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \sin 2x$	0	1	0	-1	0	0	-1	0

উপরোক্ত বিন্দুসমূহ পূর্বের ছক কাগজে বসিয়ে $y = \sin 2x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

স্কেল: x অক্ষ বরাবর বর্গের 1 বাহু = 0.499 একক এবং y অক্ষ বরাবর বর্গের 1 বাহু = 0.5 একক।



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে উভয় লেখ $x = 0, \pi, 2\pi$ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0, \pi, 2\pi$.

34. **ক** দেওয়া আছে,

$y = \sec x$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে,

$\therefore y_1 = \sec x\tan x$

বা, $y_2 = \sec x.\frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x.\frac{d}{dx}(\sec x)$

$= \sec x.\sec^2 x + \tan x.\tan x.\sec x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$

$= \sec x(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$

$= \sec x(2\sec^2 x - 1)$

$\therefore y_2 = y(2y^2 - 1)$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$ .... (i)

যেহেতু বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করে।

সুতরাং $y = 0$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$0(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$

বা, $0 - x + 4 = 0$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $(4, 0)$

(i) নং হতে পাই,

$y(x^2 + 3x + 2) - x + 4 = 0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}\{y(x^2 + 3x + 2) - x + 4\} = \frac{d}{dx}(0)$

বা, $y(2x+3) + (x^2 + 3x + 2)\frac{dy}{dx} - 1 + 0 = 0$

বা, $(x^2 + 3x + 2)\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy - 3y$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy - 3y}{x^2 + 3x + 2}$

$(4, 0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2 \times 4 \times 0 - 3 \times 0}{4^2 + 3 \times 4 + 2} = \frac{1}{30}$

$(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 0 = \frac{dy}{dx}(x - 4)$

বা, $y = \frac{1}{30}(x - 4)$

বা, $30y = x - 4$

$\therefore x - 30y - 4 = 0$ **(Ans.)**

$(4, 0)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$(x - 4) + \frac{1}{30}(y - 0) = 0$

বা, $30x - 120 + y = 0$

$\therefore 30x + y = 120$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$\therefore h'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$h''(x) = 12x - 6$

চরমমানের জন্য, $h'(x) = 0$

বা, $6x^2 - 6x - 12 = 0$

বা, $x^2 - x - 2 = 0$

বা, $x^2 - 2x + x - 2 = 0$

বা, $x(x-2) + 1(x-2) = 0$

বা, $(x-2)(x+1) = 0$

$\therefore x = -1, 2$

$x = -1$ হলে $h''(x) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$

$x = -1$ এর জন্য $h(x)$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= h(-1)$

$= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1$

$= -2 - 3 + 12 + 1 = 8$ **(Ans.)**

$x = 2$ হলে $h''(x) = 12 \times 2 - 6 = 18 > 0$

$x = 2$ এর জন্য $h(x)$ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= h(2)$

$= 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 1$

$= 16 - 12 - 24 + 1$

$= -19$ **(Ans.)**

35. ক $\frac{d}{dx}\{x^3 \sin(\ln x)\}$

$= x^3 \frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\} + \sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$

$= x^3 \cos(\ln x).\frac{1}{x} + \sin(\ln x).3x^2$

$= x^2\{\cos(\ln x) + 3\sin(\ln x)\}$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপক অনুসারে, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

প্রদত্ত রাশি $= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos\frac{2\alpha + 2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha - 2\beta}{2} + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + \cos(2\pi - \gamma)\cos(\alpha - \beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + \cos\gamma\{\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma\} - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + [\cos(\alpha - \beta) + \cos\{2\pi - (\alpha + \beta)\}]\cos\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + \{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}\cos\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

$= 1$ **(Ans.)**

গ ত্রিভুজটির পরিসীমা $= 21 + (9 + 6) + (3 + 6) = 45$ মি.

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা $= \frac{45}{2} = 22.5$ মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{22.5 \times (22.5 - 21)(22.5 - 15)(22.5 - 9)}$

$= 58.4567$ বর্গ মি. (প্রায়)

$\therefore \cos\alpha = \frac{15^2 + 9^2 - 21^2}{2 \times 15 \times 9} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120°$

$\therefore$ α কোণ উৎপন্নকারী বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$

$= \frac{3.1416 \times 6^2 \times 120}{360}$

$= 37.6992$ বর্গ মি. (প্রায়)

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= (58.4567 - 37.6992)$ বর্গমি.

$= 20.76$ বর্গ মি. (প্রায়) **(Ans.)**

36. ক $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(\sqrt{x^2+5})^2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$

$= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5})$

$= 3 + 3 = 6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ এবং $g(x) = \frac{1}{\tan x}$

$\therefore \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan x}{\sin x}$

$= \frac{1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x$

ধরি, $p(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sec x$

$\therefore p(x+h) = \sec(x+h)$

আমরা জানি,

$\frac{d}{dx}\{p(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{d}{dx}(\sec x)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right\}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x \cos(x+h)}\right\}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{2\sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{\cos x \cos(x+h)}\right\}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos x \cos(x+h)}\right\}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x \cos(x+h)}$

$= 1 \times \frac{\sin x}{\cos x . \cos x} = \frac{1}{\cos x} . \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sec x \tan x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$h(x) = x$

$\therefore h(x) + \frac{1}{h(x)} = x + \frac{1}{x}$

মনে করি, $y = h(x) + \frac{1}{h(x)} = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

গুরুমান ও লঘুমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

বা, $x^2 = 1$

বা, $x = \pm 1$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$

$x = 1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1} = 2 > 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে, ফাংশনটির লঘুমান বিদ্যমান।

অতএব, লঘুমান $= 1 + \frac{1}{1} = 2$

$x = -1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$

$\therefore x = -1$ বিন্দুতে, ফাংশনটির গুরুমান বিদ্যমান।

অতএব, গুরুমান $= (-1) + \frac{1}{-1} = -2$

সুতরাং, ফাংশনটির গুরুমান, লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (দেখানো হলো)

37. ক $\frac{d}{dx}\{\sin(e^{\sqrt{1-x}})\}$

$= \cos(e^{\sqrt{1-x}}) \frac{d}{dx} e^{\sqrt{1-x}}$

$= \cos(e^{\sqrt{1-x}}) . e^{\sqrt{1-x}} \frac{d}{dx}\sqrt{1-x}$

$= e^{\sqrt{1-x}} \cos e^{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \frac{d}{dx}(1-x)$

$= \frac{-e^{\sqrt{1-x}} \cos e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$ এবং $h(x) = x^2 + 1$

$\therefore (hog)(1) = h(g(1)) = h\left(\frac{1-5}{3.1+1}\right)$

$= h\left(\frac{-4}{4}\right) = h(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

এবং $(goh)(2) = g(h(2)) = g(2^2+1)$

$= g(5) = \frac{5-5}{3 \times 5 + 1} = 0$

$\therefore (hog)(1) - (goh)(2) = 2 - 0 = 2$ (দেখানো হলো)

গ যেকোনো $a, b \in$ ডোমেন g এর জন্য $g(a) = g(b)$ হবে যদিও কেবল যদি $\frac{a-5}{3a+1} = \frac{b-5}{3b+1}$ হয়।

বা, $3ab - 15b + a - 5 = 3ab - 15a + b - 5$

বা, $a + 15a = b + 15b$

$\therefore a = b$

$\therefore g(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

আবার ধরি, $y = g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$

বা, $3xy + y = x - 5$

বা, $x(3y-1) = -y - 5$

$\therefore x = \frac{y+5}{1-3y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $1 - 3y \neq 0$ হয়।

$\therefore y \neq \frac{1}{3}$

$\therefore$ রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ = কোডোমেন = B

$\therefore g(x)$ ফাংশনটি সার্বিক।

যেহেতু $g(x)$ একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন, সেহেতু $g^{-1}(x)$ নির্ণয়যোগ্য।

$\therefore x = \frac{y+5}{1-3y}$

বা, $g^{-1}(y) = \frac{y+5}{1-3y}$ $\left[\begin{array}{l} \because g(x) = y \\ \therefore x = g^{-1}(y) \end{array}\right]$

$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x+5}{1-3x}$ **(Ans.)**

38. ক $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x}$

$= 2 \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$= 2.0.1^2 = 0$ **(Ans.)**

খ $y = 4x(6-x)^2 = 4x(36 - 12x + x^2)$

$= 144x - 48x^2 + 4x^3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 144 - 96x + 12x^2$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -96 + 24x$

লঘুমান ও গুরুমান এর জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $144 - 96x + 12x^2 = 0$

বা, $x^2 - 8x + 12 = 0$

বা, $x^2 - 6x - 2x + 12 = 0$

বা, $(x-6)(x-2) = 0$

$\therefore x = 6, 2$

$x = 2$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = -96 + 24 \times 2 = -48 < 0$

$x = 2$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনটির গরিষ্ঠ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ গরিষ্ঠ মান $= 4 \times 2 \times (6-2)^2$

$= 8 \times 16 = 128$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(x) = e^{\tan^{-1}x}$

বা, $\ln y = \ln e^{\tan^{-1}x}$ [উভয়পক্ষে $\ln$ নিয়ে]

বা, $\ln y = \tan^{-1}x$ [$\because \ln e = 1$]

বা, $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

বা, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

বা, $\frac{1}{y} \cdot y_1 = \frac{1}{1+x^2}$

বা, $y_1(1+x^2) = y$

বা, $\frac{d}{dx}\{y_1(1+x^2)\} = \frac{d}{dx}(y)$

বা, $(1+x^2)\frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{d}{dx}(1+x^2) = y_1$

বা, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = y_1$

বা, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

$\therefore (1+x^2)f''(x) + (2x-1)f'(x) = 0$ (প্রমাণিত)

39. ক ধরি, $a = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$

$\therefore \ln a = \lim_{x\to 0} \frac{5}{x} \ln(1+3x)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{5}{x}\left\{3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} - \dots\right\}$

$= \lim_{x\to 0}\left(15 - \frac{45x}{2} + 45x^2 - \dots\right)$

বা, $\ln a = 15$

বা, $a = e^{15}$

$\therefore \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}} = e^{15}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(p) = e^{-2p}$

$\therefore f(p+h) = e^{-2(p+h)} = e^{-2p-2h}$

$\therefore \frac{d}{dp}\{f(p)\} = \lim_{h\to0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$

$\therefore \frac{d}{dp}(e^{-2p}) = \lim_{h\to0} \frac{e^{-2p-2h} - e^{-2p}}{h}$

$= \lim_{h\to0} \frac{e^{-2p}(e^{-2h} - 1)}{h}$

$= \lim_{h\to0} \frac{e^{-2p}}{h}\left(1 - \frac{2h}{1!} + \frac{(-2h)^2}{2!} + \ldots\ldots - 1\right)$

$= \lim_{h\to0} e^{-2p}(-2 + 2h + h$ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ)

$= -2e^{-2p}$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = 4f(p) + \frac{9}{f(p)}$

$= 4e^{-2p} + \frac{9}{e^{-2p}}$

$= 4e^{-2p} + 9e^{2p}$

$\therefore \frac{dy}{dp} = 4(-2)e^{-2p} + 9.2e^{2p}$

$= -8e^{-2p} + 18e^{2p}$

$\therefore \frac{d^2y}{dp^2} = -8(-2e^{-2p}) + 18(2e^{2p})$

$= 16e^{-2p} + 36e^{2p}$

চরম মানের জন্য,

$\frac{dy}{dp} = 0$

বা, $-8e^{-2p} + 18e^{2p} = 0$

বা, $18e^{2p} = 8e^{-2p}$

বা, $e^{4p} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

বা, $4p = \ln\frac{4}{9}$

$\therefore p = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}$

$p = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}$ হলে,

$\frac{d^2y}{dp^2} = 16\,e^{-2\times\frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}} + 36\,e^{2\times\frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}}$

$= 16\,e^{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}} + 36e^{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$= 16 \times \frac{3}{2} + 36 \times \frac{2}{3}$

$= 24 + 24$

$= 48 > 0$

$\therefore p = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $= 4e^{-2\times\frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}} + 9e^{2\times\frac{1}{4}\ln\frac{4}{9}}$

$= 4e^{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}} + 9e^{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3}$

$= 6 + 6$

$= 12$ **(Ans.)**

40. ক $\lim_{\theta\to0} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to0} \frac{\tan\theta - \sin\theta}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to0} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to0} \frac{\sin\theta(1 - \cos\theta)}{\theta^2\cos\theta}$

$= \lim_{\theta\to0} \frac{\sin\theta \,.\, 2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\cos\theta}$

$= \frac{2}{4}\lim_{\theta\to0}\sin\theta \lim_{\theta\to0}\frac{1}{\cos\theta}\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{2} \times 0 \times \frac{1}{1} \times 1$

$= 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y = \{f(2x)\}^2$

বা, $y = (\sin^{-1}2x)^2\ [\because f(u) = \sin^{-1}u]$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $y_1 = 2\sin^{-1}2x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}2x)$

বা, $y_1 = 2\sin^{-1}2x\,.\,\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,.\,2$

বা, $y_1^2 = 4(\sin^{-1}2x)^2\,.\,\frac{4}{1-4x^2}$

বা, $y_1^2(1-4x^2) = 16y$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

বা, $(1-4x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-8x) = 16y_1$

বা, $(1-4x^2)y_2 - 4xy_1 = 8$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore (1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $g(u) = \ln u$

ধরি, $y = \frac{g(2x)}{x} = \frac{\ln 2x}{x}$

অধ্যায়-১০ এর সৃজনশীল-৪৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
পৃষ্ঠা-৫৭৬

41. **ক** $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y}$

$= \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y}$

$= \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2 \cdot \frac{y}{2}$

$= \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2 \lim_{y\to 0} \frac{y}{2}$

$= 1^2 \cdot \frac{0}{2}$

$= 0$ **(Ans.)**

খ ধরি, $y = f(x) = x^{\tan^{-1}x}$

বা, $\ln y = \ln x^{\tan^{-1}x}$

বা, $\ln y = (\tan^{-1}x)(\ln x)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\{(\tan^{-1}x)(\ln x)\}$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan^{-1}x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^{\tan^{-1}x}) = x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$ **(Ans.)**

আবার, ধরি, $y = g(x) = \log_x a$

বা, $y = \log_e a \times \log_x e$

বা, $y = \ln a \cdot \frac{1}{\ln x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \ln a \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

বা, $\frac{dy}{dx} = (\ln a)\frac{-1}{(\ln x)^2}\frac{d}{dx}(\ln x)$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log_x a) = \frac{-\ln a}{x(\ln x)^2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $y = h(x)$

বা, $y = \sqrt{a + b\cos x}$

বা, $y^2 = a + b\cos x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(a + b\cos x)$

বা, $2y\frac{dy}{dx} = -b\sin x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx}\left(2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-b\sin x)$

বা, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} = -b\cos x$

বা, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a + b\cos x = a$

$\therefore 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$ (দেখানো হলো)

42. **ক** $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec}x - \cot x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2}$

$= \tan\frac{0}{2} = \tan 0 = 0$ **(Ans.)**

খ আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

বা, $\frac{\sqrt{3}b}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B}$ [$\because a = \sqrt{3}b$ এবং $A = 2B$]

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2\sin B\cos B} = \frac{1}{\sin B}$

বা, $2\sin B\cos B = \sqrt{3}\sin B$

বা, $2\cos B = \sqrt{3}$ [$\because \sin B \neq 0$ কারণ, ত্রিভুজের কোনো কোণ শূন্য হতে পারে না]

বা, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos B = \cos 30°$

$\therefore B = 30°$

$\therefore A = 2 \times 30° = 60°$

$\therefore C = 180° - (30° + 60°) = 180° - 90° = 90°$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের কোণগুলো $A = 60°$, $B = 30°$ এবং $C = 90°$.

গ দেওয়া আছে, $\ln y = bz$

বা, $\ln y = b\cos^{-1}x$ $[\because \cos z = x \therefore z = \cos^{-1}x]$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y}y_1 = -b\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $y_1\sqrt{1-x^2} = -by$

বা, $y_1^2(1-x^2) = b^2y^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

আবার, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y_1y_2(1-x^2) + y_1^2(-2x) = 2b^2yy_1$

বা, $y_2(1-x^2) - xy_1 = b^2y$ $[\because y_1 \neq 0]$

$\therefore$ $(1-x^2)y_2 - xy_1 = b^2y$ (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

অনুচ্ছেদ-9.24 | পৃষ্ঠা-৩৯৮

সমস্যা নং 9.24.1	$y = \frac{1}{x}$ ফাংশনটির জন্য x = 1 বিন্দুতে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন dx = δx = 1 অধিকন্তু $y = \frac{1}{x}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করে dy এবং δy চিহ্নিত কর।	তারিখ: ...

সমস্যা: $y = \frac{1}{x}$ ফাংশনটির জন্য x = 1 বিন্দুতে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন dx = δx = 1 অধিকন্তু $y = \frac{1}{x}$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করে dy এবং δy চিহ্নিত কর।

সমাধান:

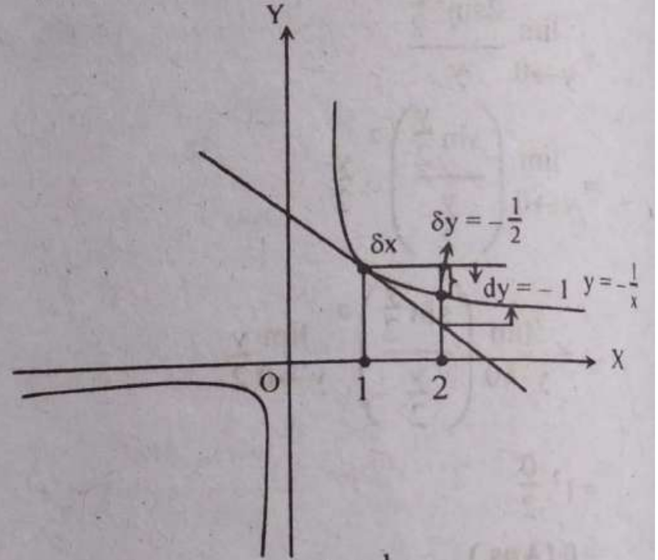
তত্ত্ব: dx এবং dy রাশিদ্বয় $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সাথে সম্পর্কিত। dx ও dy যথাক্রমে উক্ত স্পর্শকের উপর নিকটবর্তী দুইটি বিন্দুর আনুভূমিক দূরত্ব (run) এবং উলম্ব দূরত্ব (rise) নির্দেশ করে।

অপরদিকে δx এবং δy যথাক্রমে $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর নিকটবর্তী দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী আনুভূমিক দূরত্ব এবং উলম্ব দূরত্ব নির্দেশ করে এবং গাণিতিকভাবে

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ এবং $dy = f'(x)dx$

কার্যপদ্ধতি:

1. মুক্ত হস্তে $y = \frac{1}{x}$ ফাংশনের লেখ অঙ্কন করি।
2. যেহেতু δx = dx = 1 এবং δy দ্বারা x অক্ষের দিকে x হতে আরম্ভ করে x + δx(x + dx) পর্যন্ত $y = f(x)$ বক্ররেখা বরাবর y এর পরিবর্তন নির্দেশ করে তা গ্রাফে চিহ্নিত করি।
3. dy দ্বারা x অক্ষের দিকে x হতে আরম্ভ করে x + δx(x + dx) পর্যন্ত $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকরেখা বরাবর y এর যে পরিবর্তন নির্দেশ করে তা চিহ্নিত করি।
4. অতঃপর উপাত্তগুলোর মান বসিয়ে dy ও δy এর মান নির্ণয় করি।



ফল সংকলন: $y = f(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

যেহেতু, x = 1 এবং dx = δx = 1

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(1 + 1) - f(1)$

$= f(2) - f(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

এবং $dy = f'(x)dx = f'(1).1$

$= -\left(\frac{1}{1}\right).1 = -1$

ফলাফল: x = 1 বিন্দুতে dy = − 1 এবং $\delta y = -\frac{1}{2}$ এবং লেখে তা যথাযথভাবে চিহ্নিত করা হয়েছে।

মৌখিক প্রশ্নের উত্তর

1. দুই চলক বিশিষ্ট কোনো ফাংশনের একটি চলকের মানের পরিবর্তনের সাথে অপরটির পরিবর্তন ঘটে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করা হলে প্রথম চলকটিকে স্বাধীন চলক ও অপর চলকটিকে অধীন চলক বলে।
2. x স্বাধীন চলক এবং y অধীন চলক।
3. $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$