Integration (যোগজীকরণ)

$\int$ $\longrightarrow$ Integration Sign যা Summation শব্দের প্রথম অক্ষর 'S' এর লম্বা রূপ ($\int$)

১। $\int f(x)d\,x = F\,(x) + c$ ২। $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ \ [n \neq -1]$ ৩। $\int dx = x + c$

৪। $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$ ৫। $\int e^x dx = e^x + c$ ৬। $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

৭। $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ ৮। $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ ৯। $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

১০। $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ ১১। $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$ ১২। $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

১৩। $\int \mathrm{cosec}\,x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\,x + c$ ১৪। $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

১৫। $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$ ১৬। $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$ ১৭। $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \cot^{-1} x + c$

১৮। $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ ১৯। $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{cosec}^{-1} x + c$

২০। $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + c$ ২১। $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + c$

২২। $\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$

২৩। $\int \mathrm{cosec}\,x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\mathrm{cosec}\,x - \cot x| + c$

২৪। $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ ২৫। $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

২৬। $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ ২৭। $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

২৮। $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ / $\int \frac{\frac{d}{dx}(\text{হর})}{(\text{হর})} dx = \ln|\text{হর}| + c$

অর্থাৎ হরকে differentiate করলে যদি লব পাওয়া যায় তবে Ans হবে ln (হর) +c

যেমনঃ $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin x} dx = \ln(\sin x) + c$

২৯। $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = 2\sqrt{f(x)} + c$ যেমনঃ $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} dx = 2\sqrt{\tan x} + c$

Note 1: **Integration এর জন্য ত্রিকোণমিতিক প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ (অন্যান্য সকল সূত্র ত্রিকোণমিতি অধ্যায়ে)**

(i) $\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sin x + \cos x$

(ii) $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x - \cos x$

(iii) $\sqrt{1 + \sin x} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$

(iv) $\sqrt{1 - \sin x} = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$

(v) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

(vi) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

(vii) $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

(viii) $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

Note 2: (i) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ($x = a\sin\theta$ ধরতে হবে)

যেমনঃ $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$ এর ক্ষেত্রে $x = 4\sin\theta$ ধরে Integrate করতে হবে।

(ii) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ ($x = a\tan\theta$ ধরতে হবে)

যেমনঃ $\int \sqrt{16 + x^2}\, dx$ এর ক্ষেত্রে $x = 4\tan\theta$ ধরে Integrate করতে হবে।

(iii) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ ($x = a\sec\theta$ ধরতে হবে)

যেমনঃ $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx$ এর ক্ষেত্রে $x = 4\sec\theta$ ধরে Integrate করতে হবে।

Integration by Parts /অংশক্রমে /সখন্ড পদ্ধতিতে যোগজীকরণ ঃ

৩০। $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\int v\,dx\right\}dx$

u ধরার ক্রম ঃ $\longrightarrow$ **L I A T E**

Logarithmic($\ln x$, $\log x$ ...)

Inverse($\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \ldots$)

Algebric ($x, 2x, 1,2,3, \ldots$)

Trigonometric ($\sin x, \cos x, \ldots.$)

Exponential ($e^x, a^x, \ldots.$)

যেমনঃ $\int e^x \sin x\,dx$ উপরের ক্রমানুসারে $T = \sin x$, $E = e^x$ যেহেতু 'L I A T E' এ E এর পূর্বে T তাই $T = \sin x = u$, $E = e^x = v$

একইভাবে $\int x\cos^{-1}x\,dx \rightarrow I = \cos^{-1}x = u$; $A = x = v$

৩১। $\int e^{ax}\{a\,f(x) + f'(x)\}\,dx = e^{ax}f(x) + c$

Note 3 : $\int e^x \sin x, \int e^x \cos x$ এর ক্ষেত্রে Main Integration টি আবার চলে আসে তাই I ধরে শুরু করা উত্তম।

৩২। আংশিক ভগ্নাংশ ঃ (i) $\frac{x^2}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma}$

আংশিক ভগ্নাংশের Thumb rule : $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-5x}$

(i) প্রথমে উৎপাদক গুলি হরে লিখ। $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{\square}{1-4x} + \frac{\square}{1-5x}$

(ii) প্রথম উৎপাদককে 0 ধরে x এর যে মান পাওয়া যায় তা এই উৎপাদক ছাড়া অন্য সব x এর স্থলে বসাও।

$$1 - 4x = 0 \therefore x = \frac{1}{4} \text{ এখন, } \frac{x}{1-5x} = \frac{1/4}{1-5/4} = \frac{1/4}{-1/4} = -1 \quad \therefore A = -1$$

(iii) একই ভাবে, $1 - 5x = 0 \therefore x = 1/5$ এখন, $x = 1/5$ হলে

$$\frac{x}{1-4x} = \frac{1/5}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1/5}{1/5} = 1 \quad \therefore B = 1$$

$$\therefore \frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{-1}{1-4x} + \frac{1}{1-5x}$$

(ii) $\frac{x^3}{(x-\alpha)^3(x-\beta)} = \frac{A}{(x-\alpha)^3} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{c}{(x-\alpha)} + \frac{D}{x-\beta}$

অর্থাৎ কোন উৎপাদক Power হিসেবে থাকলে সর্বোচ্চ Power থেকে শুরু করে Power = 1 পর্যন্ত উৎপাদকের জন্য সমাধান করতে হবে।

যেমন ঃ $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+7)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{c}{x+7}$

(iii) $\frac{x^2}{(\alpha x^2+\beta)(x-\gamma)} = \frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta} + \frac{c}{x-\gamma}$

[অর্থাৎ দ্বিঘাত উৎপাদক থাকলে তার জন্য লবে $(Ax + B)$ use করতে হবে]

যেমন ঃ $\frac{2x+3}{(7x^2+2)(x^2+1)(x-3)} = \frac{Ax+B}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{দ্বিঘাত}}}{7x^2+2}} + \frac{cx+D}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{দ্বিঘাত}}}{x^2+1}} + \frac{E}{x-3}$

নির্দিষ্ট যোগজ ঃ

৩৩। $\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$

ব্যাখ্যা ঃ Total Function এ upper limit $(\mathbf{x = b})$ বসানোর পর $(-)$ দিয়ে lower limit $(\mathbf{x = a})$ বসাতে হবে।

যেমন ঃ(i) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$

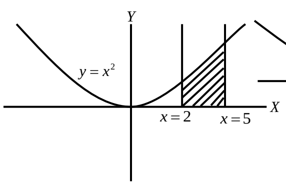
(ii) $\int_1^2 \left(\sec^2 x + e^x + \frac{1}{x}\right) dx = [\tan x + e^x + \ln x]_1^2$

$= (\tan 2 + e^2 + \ln 2) - (\tan 1 + e^1 + \ln 1)$

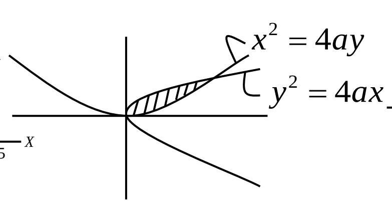
৩৪। ক্ষেত্রফল নির্ণয় ঃ

(i) একটি রেখা $(y = f(x))$ এবং $x = a, x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b y dx$

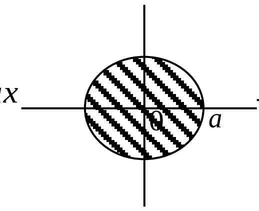
যেমন ঃ $y = x^2, x = 2, x = 5$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = \int_2^5 y dx = \int_2^5 x^2 dx$ (চিত্র-১)



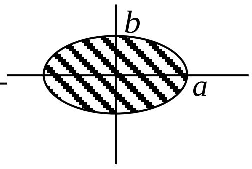
চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-



চিত্র-৪

(ii) দুটি রেখা দ্বারা (সমান্তরাল নয়) আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)\, dx$

যেমন, $y^2 = 4ax, x^2 = 4ay$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)\, dx$ (চিত্র-২)

$[x_1, x_2$ হল রেখাটি দুইটির ছেদবিন্দু] এবং $y_1 = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$, $y_2 = \frac{x^2}{4a}$

(iii) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $A = 4\int_0^a y\, dx$

যেমন ঃ $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $A = 4\int_0^3 y\, d\, x$ (চিত্র-৩) $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $A = 4\int_0^a y dx$

যেমন ঃ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $A = 4\int_0^3 y\, d\, x$ (চিত্র-৪) $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$

Note : ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে চিত্র এঁকে নেওয়া সুবিধাজনক।