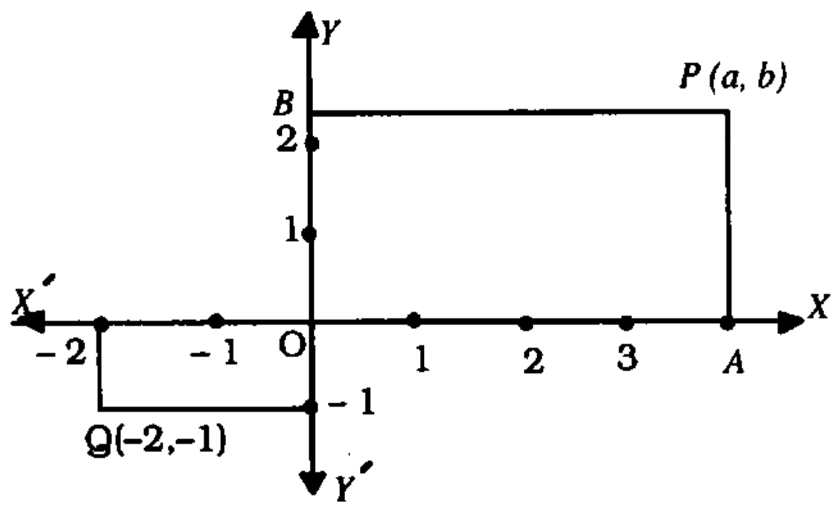
তৃতীয় অধ্যায়

সরলরেখা

3.1. সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক *(Cartesian Plane)*

সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ রেনে দেকার্তে *(Rene Descartes)* একটি সমতলে লম্বভাবে পরস্পরছেদী দুইটি স্থির সরলরেখাকে অক্ষরেখা *(Axes of co-ordinates)* বিবেচনা করেন। রেখাদ্বয়কে আয়ত–অক্ষ *(Rectangular axes)* এবং ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু *(Origin)* নামকরণ করা হয়। XOX' আনুভূমিক *(Horizontal)* রেখাকে x-অক্ষ এবং YOY' উল্লম্ব *(Vertical)* রেখাকে y–অক্ষ ধরা হয়। গণিতবিদ দেকার্ত–এর নামানুসারে এ সমতলকে কার্তেসীয় সমতল *(Cartesian Plane)* বলা হয়।



আমরা সহজেই বুঝতে পারি অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা সমগ্র সমতলটি চারটি ভাগে বিভক্ত হয়েছে। এর এক এক ভাগকে একটি চতুর্ভাগ *(Quadrant)* বলা হয়। XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ চতুর্ভাগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলে।

মনে করি, সমতলের একটি বিন্দু P। P বিন্দু দিয়ে উল্লম্ব রেখা অঙ্কন করায় উহা x- অক্ষকে A বিন্দুতে এবং P বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত আনুভূমিক রেখা y- অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করল, যেখানে $OA = a$ এবং $OB = b$. এখানে, a ও b, P বিন্দুটির অবস্থান নির্দেশ করে। অতএব, a ও b এর মান জানলে অতি সহজে P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

তাহলে, (a, b) দ্বারা P বিন্দুর স্থানাংক নির্দেশ করে। এখানে a এবং b কে যথাক্রমে x- স্থানাঙ্ক বা ভুজ এবং y-স্থানাঙ্ক বা কোটি বলা হয়। সুতরাং, মূলবিন্দু O এর স্থানাংক $(0, 0)$.

y- অক্ষের ডানদিকে সকলবিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে সকল বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ধরা হয়। আবার x- *অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত সকল বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নিচে অবস্থিত সকল বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক ধরা* হয়। এভাবে চিত্রে Q বিন্দুর স্থানাংক $(-2, -1)$. এক্ষেত্রে Q এর ভুজ $x = -2$ এবং কোটি $y = -1$.

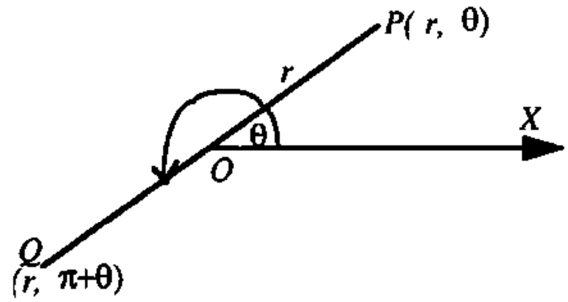
$\boldsymbol{R}$ দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সেট সূচিত করলে $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ (গুণজ সেট) ক্রমজোড়ের সেট প্রকাশ করে। সুতরাং ক্রমজোড়ের সেটটি অসীম সেট, কারণ বাস্তব সংখ্যা অসংখ্য। এখন ক্রমজোড় (a, b) এর প্রথম উপাদান 'a' দ্বারা কার্তেসীয় সমতলের কোনো বিন্দুর x -স্থানাংক এবং দ্বিতীয় উপাদান 'b' দ্বারা ঐ বিন্দুর y -স্থানাংক নির্দেশ করলে ক্রমজোড়ের সেট দ্বারা সমতলের সব বিন্দুর সেট সূচিত করবে। অর্থাৎ কার্তেসীয় সমতলটি হল গুণজ সেট, $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.

অনুসিদ্ধান্ত : কোনো বিন্দু x–অক্ষের উপর থাকলে ঐ বিন্দু দিয়ে আনুভূমিক রেখা অঙ্কন করলে তা y–অক্ষকে O বিন্দুতে ছেদ করবে। অর্থাৎ ঐ সব বিন্দুর y–স্থানাঙ্ক বা কোটি $= 0$. অনুরূপভাবে y–অক্ষের উপরিস্থিত সব বিন্দুর x–স্থানাঙ্ক বা ভুজ $= 0$.

সমতলে পোলার স্থানাঙ্ক

মনে করি, O একটি স্থির বিন্দু এবং OX একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে O কে মেরু *(Pole)* এবং OX কে মূল রেখা বা মেরু রেখা *(Polar axis)* ধরা হয়। সমতলে যে কোনো বিন্দু P নেয়া হল। P এবং O যোগ করি। যদি $OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$ হয়, তবে (r, θ) দ্বারা P এর অবস্থান নির্দিষ্টভাবে জানা যায়।

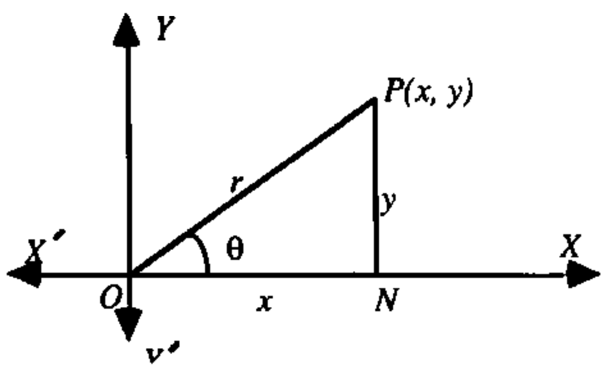


(r, θ) কে বলা হয় পোলার স্থানাঙ্ক। সাধারণত r ও θ কে যথাক্রমে ব্যাসার্ধ ভেক্টর *(Radius Vector)* এবং ভেক্টর কোণ *(Vectorial angle)* বলা হয়।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে θ কোণ উৎপন্ন করলে তাকে ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করলে ঋণাত্মক ধরা হয়।

3.2. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক

মনে করি, XOX' এবং YOY' কার্তেসীয় অক্ষদ্বয়। আবার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতির মূলবিন্দু O হল পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতির মেরু *(Pole)* এবং OX মেরুরেখা। এখন P থেকে OX এর উপর লম্ব PN আঁকি। ধরি, P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).



যেহেতু $\dfrac{PN}{OP} = \sin\theta$

বা $\dfrac{y}{r} = \sin\theta, \quad \therefore y = r\sin\theta \ldots (i)$

আবার $\dfrac{ON}{OP} = \cos\theta$

বা $\dfrac{x}{r} = \cos\theta, \quad \therefore x = r\cos\theta \ldots (ii)$

এখন (i) এবং (ii) এর বর্গের সমষ্টি নিয়ে, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = x^2 + y^2$, বা $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\text{বা } r = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (iii)$$

$$\text{এবং } \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}, \quad \text{বা, } \tan\theta = \frac{y}{x} \ldots (iv)$$

সুতরাং (iii) এবং (iv) দ্বারা কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক প্রকাশ করে।

উদাহরণ 1. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানঙ্ক $\left(2\ ,\ \frac{\pi}{3}\right)$ হলে, ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y). তাহলে, $x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2.\frac{1}{2} = 1$

এবং $y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(1, \sqrt{3})$.

উদাহরণ 2. **কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-3, \sqrt{3})$ হলে, ঐ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান : ধরি পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$\therefore \ r^2 = x^2 + y^2 = (-3)^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12$ বা, $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

এবং $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-3} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{5\pi}{6}, \ \therefore \ \theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3}, \ \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

উদাহরণ 3. **$r = 6\cos\theta - 2\sin\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।**

সমাধান : $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta \Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta - 2r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 6x - 2y$ যেহেতু $x = r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ $y = r\sin\theta$ এবং

যা একটি বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ নির্দেশ করে। $x^2 + y^2 = r^2$

উদাহরণ 4. **$y^2 = 1 - 2x$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর :**

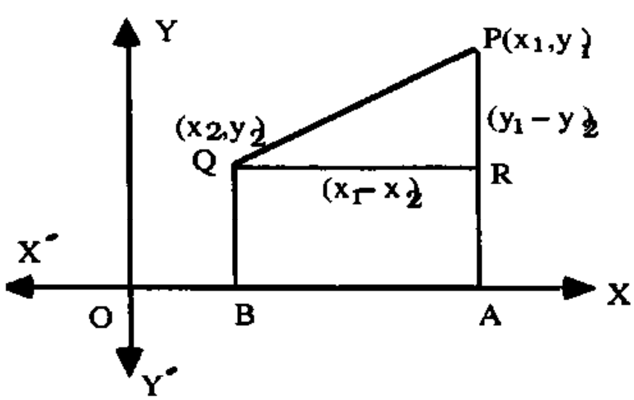
সমাধান : $y^2 = 1 - 2x \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2$

$\Rightarrow r^2 = (1-x)^2 \ [\because r^2 = x^2 + y^2]$

$\Rightarrow r = 1 - x \Rightarrow r + x = 1 \Rightarrow r + r\cos\theta = 1 \Rightarrow r(1 + \cos\theta) = 1$

যা নির্ণেয় পোলার সমীকরণ।

3. 3. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব



ধরি, একই সমতলে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P এবং Q থেকে x–অক্ষের উপর যথাক্রমে PA এবং QB লম্ব আঁকি।

আবার Q থেকে PA এর উপর QR লম্ব আঁকি।

$\therefore OA = x_1, OB = x_2, PA = y_1$ এবং $QB = y_2$.

সুতরাং, $QR = BA = OA - OB = x_1 - x_2$

এবং $PR = PA - RA = PA - QB = y_1 - y_2$

এখন PQR সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$\boxed{PQ^2 = QR^2 + PR^2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

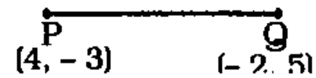
$\therefore PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, যা দুইটি বিন্দুর দূরত্ব প্রকাশ করে।

$$\boxed{\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}}$$

অনুসিদ্ধান্ত : মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর দূরত্ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. (4, – 3) এবং (–2, 5) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

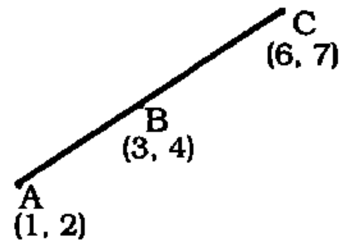


সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(4, -3)$ এবং $Q(-2, 5)$

$$\therefore PQ = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, (1, 2), (3, 4), (6, 7) বিন্দুত্রয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ ও $C(6, 7)$



এখন $AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

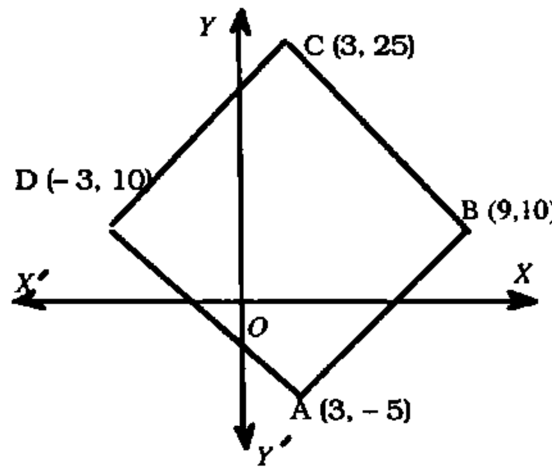
$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

এবং $AC = \sqrt{(1-6)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

যেহেতু $AB + BC = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$. অতএব A, B, C বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, A(3, –5), B(9, 10), C(3, 25) এবং D(–3, 10) বিন্দু চারটি একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু।

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুগুলি xy সমতলে স্থাপন করে $ABCD$ চতুর্ভুজটি অঙ্কন করি।



এখন $AB^2 = (3-9)^2 + (-5-10)^2 = 36 + 225 = 261$

$BC^2 = (9-3)^2 + (10-25)^2 = 36 + 225 = 261$

$CD^2 = (3+3)^2 + (25-10)^2 = 36 + 225 = 261$

$DA^2 = (-3-3)^2 + (10+5)^2 = 36 + 225 = 261$

$\therefore AB = BC = CD = DA$. সুতরাং $ABCD$ একটি বর্গ বা রম্বস হতে পারে।

আবার $BD^2 = (9+3)^2 + (10-10)^2 = 144 \Rightarrow BD = 12$

এবং $AC^2 = (3-3)^2 + (-5-25)^2 = 900 \Rightarrow AC = 30$

যেহেতু কর্ণ $BD \neq$ কর্ণ AC. সুতরাং $ABCD$ একটি রম্বস।

প্রশ্নমালা 3.1

1. (i) $(1, -\sqrt{3})$, $(1, 1)$, $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুগুলির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$, $(3, 150^\circ)$ বিন্দুগুলির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ: (i) $\left(2, \frac{-\pi}{3}\right)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; (ii) $(1, \sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর :

(iii) $r = 4\sin\theta$ উ: $x^2 + y^2 - 4y = 0$

(iv) $r = b\cos\theta$ উ: $x^2 + y^2 - bx = 0$

(v) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণটি কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।সমীকরণটি কি নির্দেশ করে?

[কু. '০৮] উ: $y^2 = -4(x-1)$

2. **পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর :**

(a) $x^2 + y^2 = 16$ (b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ (c) $y^2 = 4(x + 1)$ (d) $x^2 = 1 - 2y$

উ: (a) $r = 4$; (b) $r = 6 \cos \theta$; (c) $r(1 - \cos \theta) = 2$; (d) $r(1 + \sin \theta) = 1$;

3. নিচের বিন্দুগুলির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(4, 5)$ এবং $(-2, -3)$, (ii) $(7, 7)$ এবং $(-5, 2)$ উ: (i) 10, (ii) 13.

4. x–অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দুটি $(0, 3)$ এবং $(5, -2)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী। P–এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(2, 0)$

5. P, Q, R তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-7, -1)$, $(-3, 2)$ $(x, 5)$ এবং $PQ = QR$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। উ: 1 অথবা -7.

6. দেখাও যে, $(1, 2)$, $(-4, 2)$ এবং $(-4, 7)$ বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 12·5 বর্গ একক

7. দেখাও যে $A(3,4)$, $B(-4,3)$ এবং $C(4,-3)$ বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 25 বর্গ একক।

8. দেখাও যে, $(4, -1)$, $(2, 1)$ এবং $(1, 2)$ বিন্দুত্রয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

9. দেখাও যে $(-6, -3)$ এবং $(8,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

10. $(1, 2)$, $(3, -4)$ এবং $(5, -6)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে, ঐ ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ: $(11, 2)$

11. দেখাও যে, $(1, 1)$, $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দু চারটি একটি রম্বসের শীর্ষ বিন্দু। [দি. '১১]

12. প্রমাণ কর যে, $P(3,3)$, $Q(-3,1)$, $R(-1,-5)$ এবং $S(5,-3)$ বিন্দু চারটি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

13. প্রমাণ কর যে, $(-5,1)$, $(3,-3)$, $(1,-7)$ ও $(-7,-3)$ বিন্দু চারটি একটি আয়তের শীর্ষবিন্দু। আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 40 বর্গএকক;

14. দেখাও যে, $A(6, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(-7, 0)$ এবং $D(2,-3)$ বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

15. যে বর্গের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(6,3)$ ও $(-2,-3)$ ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল এবং অপর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: 50 বর্গ একক; $(5, -4)$, $(-1,4)$

16. (x, y) বিন্দুটি $(a + b, b - a)$ এবং $(a - b, a + b)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, $bx = ay$.

17. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাংক $(5,3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. '১০; চ. '১৩] উ: $4\sqrt{5}$ একক

18. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10, কেন্দ্রের স্থানাংক $(11, 2)$. এর যে জ্যা $(2, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব. '১১] উ : $2\sqrt{10}$ একক

19. একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ এবং তা $(4, 3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত। [ব. '০৭; দি. '১৩] উ: $(3, 6)$ বা $(1, 2)$

20. কোনো বিন্দুর কোটি 3 এবং $(5, 3)$ হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। উ: 1অথবা 9.

[কু. '১১]

21. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(5, 2)$ এবং $(-3, -4)$ হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উ: 5

22. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -4)$, $(0, 4)$ হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. '০৯, '১৩] উ: $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$

23. ABC সমবাহু ত্রিভুজের A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3,4)$ ও $(3, 6)$; AB বাহুর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বে C বিন্দু অবস্থিত। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(3+\sqrt{3}, 5)$

24. y-অক্ষ ও $(7, 2)$ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর। উ : $\frac{29}{7}$
[কু. '০৭; রা. য. চ. '১০; ঢা. '১৩]

25. x-অক্ষ ও $(-5, -7)$ থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর। [কু. '০৯] উ: $-\frac{65}{7}$

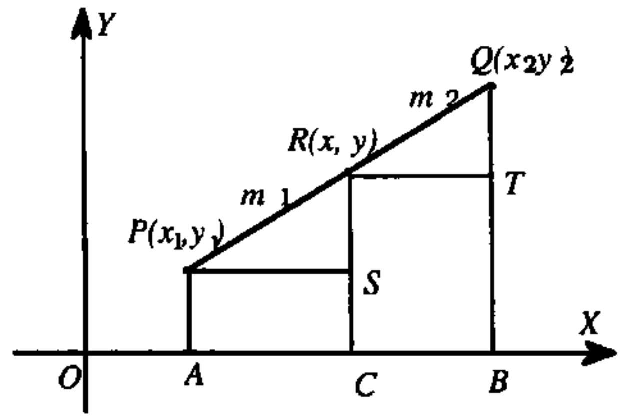
3. 4. রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

(a) অন্তর্বিভাগের ক্ষেত্রে

$P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশ $R\ (x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এখানে $PR : RQ = m_1 : m_2$.

P, Q, R বিন্দু থেকে OX এর উপর যথাক্রমে PA, QB, RC লম্ব আঁকি।

আবার $PS \perp RC$ এবং $RT \perp QB$ অঙ্কন করি।



এখন ΔPRS ও ΔQRT সদৃশ বলে

$$\frac{PS}{RT} = \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2} \quad ....(1)$$

আবার $PS = AC = OC - OA = x - x_1$

এবং $RT = CB = OB - OC = x_2 - x$

$\therefore$ (1) থেকে $\dfrac{PS}{RT} = \dfrac{m_1}{m_2}$ বা, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{m_1}{m_2}$

বা, $m_2 x - m_2 x_1 = m_1 x_2 - m_1 x$

বা, $(m_1 + m_2)\, x = m_1 x_2 + m_2 x_1$, $\quad \therefore x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$.

$RS = RC - CS = y - y_1$ এবং $QT = BQ - BT = y_2 - y$

তদ্রূপ (1) থেকে $\dfrac{RS}{QT} = \dfrac{m_1}{m_2}$ বা, $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{m_1}{m_2}$, বা $m_2 y - m_2 y_1 = m_1 y_2 - m_1 y$

বা, $(m_1 + m_2)\, y = m_1 y_2 + m_2 y_1$, $\quad \therefore y = \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

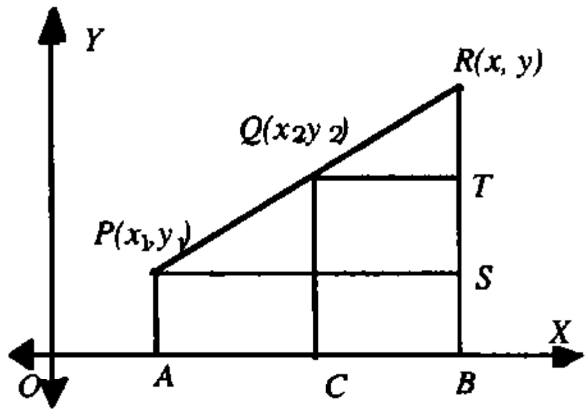
$\therefore$ অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1 : যদি R, PQ এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m_1 = m_2$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত 2 : যদি R বিন্দুটি PQ কে $k : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $PR : RQ = k : 1$ হয় তাহলে, $x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1}$ এবং $y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$. এক্ষেত্রে শুধু k এর মান জানলে অনুপাত জানা যায়।

(b) বহির্বিভক্তির ক্ষেত্রে



মনে করি, R বিন্দুটি PQ কে $m_1 : m_2$ এ বহির্বিভক্ত করেছে।

অর্থাৎ $PR : QR = m_1 : m_2$, বা $\frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$

এখানে ΔPRS এবং ΔQRT সদৃশ।

$\therefore \frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT} = \frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2} \ldots (i)$

(i) থেকে $\frac{PS}{QT} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m_1}{m_2}$

বা, $m_1x - m_1x_2 = m_2x - m_2x_1$ বা, $(m_1 - m_2)x = m_1x_2 - m_2x_1$ $\therefore x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$.

আবার (i) থেকে $\frac{RS}{RT} = \frac{m_1}{m_2}$ 'বা, $\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2}$ বা, $m_1y - m_1y_2 = m_2y - m_2y_1$

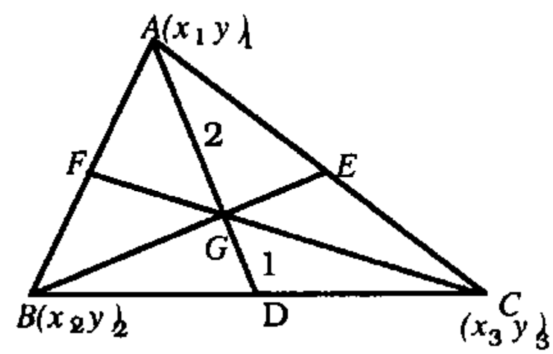
বা, $(m_1 - m_2)y = m_1y_2 - m_2y_1$, $\therefore y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$.

$\therefore$ বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$.

3.4.1. ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নির্ণয় [ঢা. '০৪]

মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$; BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. এখন AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় অঙ্কন করলে তারা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করবে। G বিন্দুটিকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয় এবং তা প্রত্যেক মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

এখন BC এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাংক $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$.



ধরি G এর স্থানাংক (x, y). $\because AG : GD = 2 : 1$

$$\therefore x = \frac{2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \cdot x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

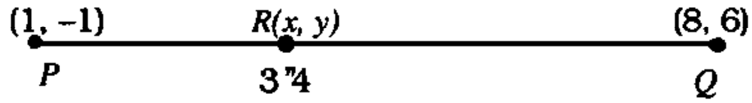
$$\text{এবং } y = \frac{2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} + 1 \cdot y_1}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

সুতরাং, ΔABC এর ভরকেন্দ্র $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. $P(1, -1)$ এবং $Q(8, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 3 : 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাংক $R(x, y)$.



$\therefore x = \dfrac{3 \times 8 + 4 \times 1}{3 + 4} = \dfrac{28}{7} = 4$ এবং $y = \dfrac{3 \times 6 + 4 \times (-1)}{3 + 4} = \dfrac{14}{7} = 2$

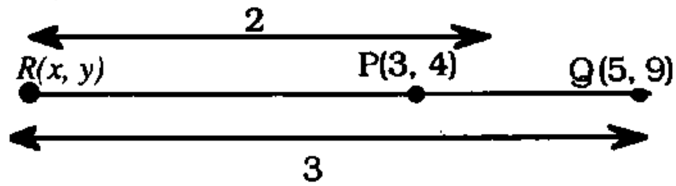
$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$.

উদাহরণ 2. $P(3, 4)$ এবং $Q(5, 9)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $R(x, y)$।

তাহলে, $x = \dfrac{2 \times 5 - 3 \times 3}{2 - 3} = \dfrac{1}{-1} = -1$

এবং $y = \dfrac{2 \times 9 - 3 \times 4}{2 - 3} = \dfrac{6}{-1} = -6$



$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-1, -6)$

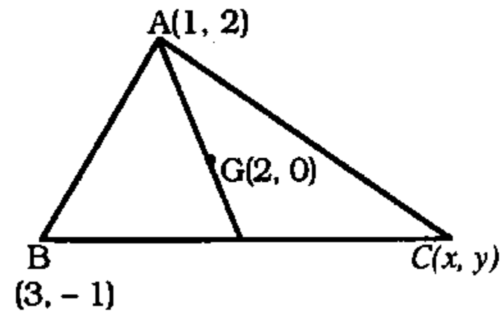
উদাহরণ 3. একটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(2, 0)$। এর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(1, 2)$ ও $(3, -1)$ হলে, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক (x, y).

আমরা জানি, ভরকেন্দ্র $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

অতএব $\dfrac{1 + 3 + x}{3} = 2,$ বা $x + 4 = 6$ $\quad \therefore x = 2$

এবং $\dfrac{2 - 1 + y}{3} = 0,$ বা $y + 1 = 0$ $\quad \therefore y = -1$



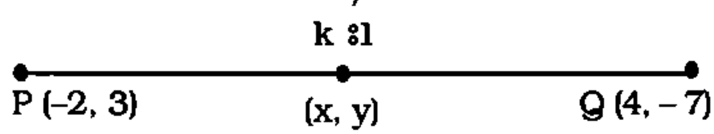
সুতরাং, ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(2, -1)$.

উদাহরণ 4. $P(-2, 3)$ ও $Q(4, -7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x–অক্ষ এবং y–অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ. '০৭]

সমাধান : PQ কে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(x, y) = \left(\dfrac{4k - 2}{k + 1}, \dfrac{-7k + 3}{k + 1}\right)$.

এ বিন্দুটি x–অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি $y = 0$ হবে।

অর্থাৎ $\dfrac{-7k + 3}{k + 1} = 0,$ বা, $-7k + 3 = 0$ $\therefore k = \dfrac{3}{7}$.



অতএব x– অক্ষ PQ কে 3 : 7 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

আবার বিন্দুটি y–অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, ছেদবিন্দুটির ভুজ $x = 0$ হবে।

অর্থাৎ $\dfrac{4k - 2}{k + 1} = 0,$ বা $4k - 2 = 0$ বা, $k = \dfrac{1}{2}$.

সুতরাং y -অক্ষ PQ কে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

উদাহরণ 5. যদি $A(2, 5)$, $B(5, 9)$ এবং $D(6, 8)$ বিন্দুত্রয় $ABCD$ রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে C এর স্থানাংক এবং রম্বসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি. '১০; ঢা. '১১]

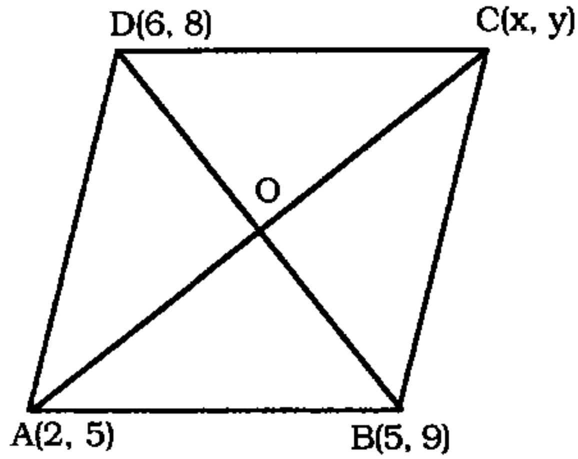
সমাধান : মনে করি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)। তাহলে, AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$

এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5+6}{2}, \frac{9+8}{2}\right)$ বা, $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$.

$ABCD$ একটি রম্বস বলে AC এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দু অভিন্ন।

$\therefore \frac{x+2}{2} = \frac{11}{2}$ অর্থাৎ $x = 9$ এবং $\frac{y+5}{2} = \frac{17}{2}$ অর্থাৎ $y = 12$

অতএব C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(9, 12)$.



$BD = \sqrt{(5-6)^2 + (9-8)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(2-9)^2 + (5-12)^2} = \sqrt{49+49}$

$= \sqrt{2 \times 49} = 7\sqrt{2}$

$\therefore$ রম্বস $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABD$

$= 2 \times \frac{1}{2} BD \times \frac{1}{2} AC$

[$\because$ রম্বসের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$= \frac{1}{2}(BD \times AC) = \frac{1}{2} . \sqrt{2} . 7\sqrt{2}$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 3.2

1. নিম্নলিখিত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

   (i) $(-3, 4)$ এবং $(7, 6)$ (ii) $(-2, -8)$ এবং $(2, 8)$ (iii) $(t+2, -t+4)$ এবং $(t, 3t)$ (iv) $(a+b, -a-b)$ এবং $(a-b, a+b)$ উ: (i) $(2,5)$, (ii) $(0,0)$ (iii) $(t+1, t+2)$ (iv) $(a, 0)$

2. $(2, 0)$ এবং $(7, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় কর। উ: $(4, 2)$

3. (i) একটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর, যা $(-2, 3)$ ও $(6, -8)$, বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। উ: $(-10, 14)$

   (ii) PQ রেখাংশের মধ্যবিন্দু $(2,3)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1,6)$ হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(5,0)$

4. AB সরলরেখাটি $P(3, 3)$ এবং $Q(8, 5)$ বিন্দু দুইটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত হয়। A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '১১] উ: $A(-2, 1)$, $B(13, 7)$

5. $(3,1)$ বিন্দুটি $(1, -3)$ ও $(6,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উ: $2 : 3$

6. $(7, -8)$ বিন্দুটি $(3,-2)$ এবং $(-3,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উ: $2 : 5$

7. এমন বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর, যা $(-3, 4)$ ও $(7, 9)$, বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $3 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে। উ: $(3, 7)$, $(27, 19)$

8. $A(8,3)$ ও $B(2,-9)$ বিন্দু দুইটি যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু তার কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
উঃ কেন্দ্র $(5,-3)$; ব্যাসার্ধ $3\sqrt{5}$

9. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল যেন $AB = 3BC$ হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. '১১; দি. '১২; রা. '১৩] উত্তর: $(6, -8)$

10. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(7,3)$ ও $(-1,-5)$। AB কে C পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হল যেন $AC = 2AB$ হয়। C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উঃ $(-9, -13)$

11. $(7, 5)$ ও $(-2, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[রা. '১১] উত্তর: $(4, 3)$ এবং $(1, 1)$

12. মূলবিন্দুটি (x,y) এবং $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = r^2$.

13. $ABCD$ রম্বসের A, B ও C বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, -1), (1, 3)$ ও $(5, 6)$। D এর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $(2, 2)$; 7 বর্গ একক

14. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(8, 8), B(9, -5)$ এবং $C(-4, -6)$ এর চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক এবং বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উঃ $(-5, 7)$; 170 বর্গ একক

15. কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3,-4)$ এবং $(-6,5)$; এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. য. '১১] উঃ $(-1, 2)$

16. $ABCD$ সামান্তরিকের A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 1), (1, 3)$ ও $(1, 6)$ হলে, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উঃ $(-2, 2)$

17. $ABCD$ আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $A(3, 2), B(2, -1), C(8, -3)$। এর চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. '০৬] উঃ $(9, 0)$, 20 বর্গ একক।

18. $(1,2)$ এ $(6, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $(3,4)$ বিন্দুটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।
উঃ $2 : 3$

19. দেখাও যে, $(2, -2)$ এবং $(-1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।
[সি. '১৩]

20. $(7, 7)$ এবং $(-5, -10)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x–অক্ষ যে অনুপাতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর ভুজ কত? [সি. '১১; রা. ঢা. '১২, ব. '১৩] উঃ $7 : 10$; $\frac{35}{17}$

21. $(2, -4)$ ও $(-3, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষরেখা যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [রা. '০৮] উঃ $2 : 3, 2 : 3$.

22. $(2, -4)$ ও $(-4, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x–অক্ষ ও y–অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উঃ $2 : 3$ ও $1 : 2$

23. x-অক্ষ $A(2, -5)B(2, 3)$ রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর। উঃ $5 : 3$; $(2, 0)$

24. প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুটি $(-3, -2)$ এবং $(6, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দু। অপর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. '১৩] উঃ $(3, 2)$

25. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3,-5), (5,-2)$ এবং $(-2, -1)$। হলে, A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উঃ $A(0,2), B(-4,-4), C(10,-6)$

26. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 4), (5, 0)$ এবং $(4, -2)$। হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উঃ $(\frac{11}{3}, \frac{2}{3})$

27. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(7, 2)$। A ও B শীর্ষ দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5)$ ও $(7, -1)$ হলে, C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৬] উঃ $(11, 2)$

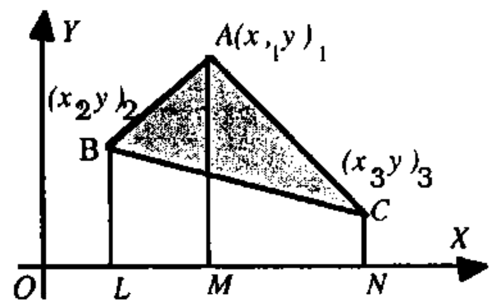
28. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(2, 7)$ ও $(6, 1)$ এবং ভরকেন্দ্র $(6, 4)$; তৃতীয় শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। [ব. সি. চ. '১২] উঃ $(10, 4)$

29. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$ $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$। যদি এর ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. [কু. '০৬]

30. $A(8, 10)$ এবং $B(18, 20)$ বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q এবং R বিন্দুদ্বয় 2ঃ 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর মধ্য বিন্দু Q এবং R বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ \times PR = PB^2$. উঃ $(12, 14)$, $(-12, -10)$

3.5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেয়া আছে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



মনে করি, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

A, B, C বিন্দু থেকে x – অক্ষের উপর যথাক্রমে AM, BL, CN লম্ব আঁকি। তাহলে, $LN = ON - OL = x_3 - x_2$

$LM = OM - OL = x_1 - x_2$ এবং $MN = ON - OM = x_3 - x_1$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল

= ট্রাপিজিয়াম $ABLM$ এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম $AMNC$ এর ক্ষেত্রফল – ট্রাপিজিয়াম $BLNC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AM + BL).\ LM + \frac{1}{2}(AM + CN).\ MN - \frac{1}{2}(BL + CN).\ LN$$

$$= \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2) + (y_1+y_3)(x_3-x_1) - (y_2+y_3)(x_3 - x_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_1+y_2 - y_1 - y_3) + x_2(y_2 + y_3 - y_1 - y_2) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)\}$$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ....(i)

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ [নির্ণায়কের সাহায্যে প্রকাশ করে] ......(ii)

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$ ....(iii)

নির্ণায়কের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সময় শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাটার উল্টা দিকে বা ঘড়ির কাটার দিকে নিলে ক্ষেত্রফল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য *(iii)* সূত্রটি প্রয়োগ করা সুবিধাজনক। **চিহ্ন নিরপেক্ষ (ধনাত্মক) মানই হবে ত্রিভুজের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল।**

অনুসিদ্ধান্ত : A, B, C ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

(i) ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 0$ অথবা $AB + BC = AC$.

(ii) বিন্দু তিনটির স্থানাংক দ্বারা গঠিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

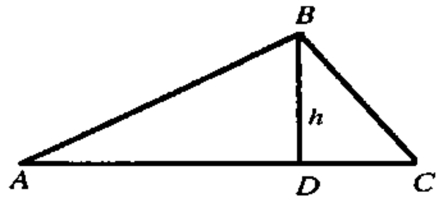
প্রমাণ : যথেষ্ট শর্ত : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ অর্থাৎ একই সরল রেখার উপর অবস্থিত। তাহলে, বিন্দু তিনটি কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু বিবেচনা করা হলে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে অর্থাৎ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 0$ অথবা $AB + BC = AC$.

প্রয়োজনীয় শর্ত : ধরা যাক বিন্দু তিনটি একই সমতলে এরূপভাবে অবস্থান করে যেন $\Delta ABC = 0$ এবং $AB + BC = AC$. প্রমাণ করতে হবে বিন্দুত্রয় সমরেখ।

মনে করি, ΔABC এর ভূমি $AC \neq 0$ এবং উচ্চতা $BD = h$.

$\therefore \ \frac{1}{2}\ AC \times h = \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= 0$.

যেহেতু $AC \neq 0$, অতএব $h = 0$ অর্থাৎ B বিন্দুটি AC এর উপর অবস্থিত।সুতরাং, বিন্দু তিনটি সমরেখ।



মন্তব্য : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, AB এবং BC রেখার ঢাল সমান হবে অর্থাৎ $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$ এবং বিপরীতক্রমে। সরলরেখার ঢাল সম্পর্কে 3.7 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে।

সমস্যা ও সমাধান

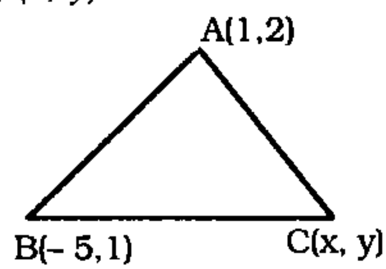
উদাহরণ 1. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 1)$, (x,y) এবং ΔABC এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গএকক হলে, দেখাও যে, $x - 6y = 25$.

সমাধান : দেয়া আছে, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 1)$, (x, y).

$$\therefore\ \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(1+10) + (-5y - x) + (2x - y)\}$$

$$= \frac{1}{2}(x - 6y + 11)$$



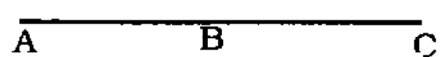
শর্তানুসারে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 18$

$\therefore \frac{1}{2}(x - 6y + 11) = 18$ বা, $x - 6y + 11 = 36$, বা $x - 6y = 25$.

উদাহরণ 2. a এর মান কত হলে, $A(a, 2 - 2a)$, $B(1 - a, 2a)$ এবং $C(-4 - a, 6 - 2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে ? [ঢা. '১১, '১৩; কু. '১২]

সমাধান : মনে করি, A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ। তাহলে, সমরেখ হবার শর্তানুসারে আমরা পাই,

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & 2 - 2a & 1 \\ 1-a & 2a & 1 \\ -4 - a & 6 - 2a & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$$\Rightarrow [a(2a - 6 + 2a) - (2 - 2a)(1 - a + 4 + a) + 1\{(1-a)(6 - 2a) + 2a(4+a)\}] = 0$$
$$\Rightarrow a(4a - 6) - (2 - 2a) \times 5 + (6 - 6a - 2a + 2a^2 + 8a + 2a^2) = 0$$
$$\Rightarrow 4a^2 - 6a - 10 + 10a + 4a^2 + 6 = 0 \Rightarrow 8a^2 + 4a - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow (a + 1)(2a - 1) = 0 \text{ অতএব, } a = -1 \text{ বা } \frac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 3.3

1. (a, b), (b, a) এবং $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাও যে, $a + b = 0$.

2. $(a, 0)$, $(0,b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

3. $A(2,3)$, $B(-3,6)$, $C(0,-5)$ এবং $D(4,-7)$ চারটি বিন্দু। $ABCD$ চতুর্ভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 41 বর্গ একক

4. k এর মান কত হলে $(k, -1)$, $(2, 3)$ এবং $(0, 1)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করবে? উ: $k = -2$

5. $ABCD$ চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 6)$, $(7, -4)$ এবং $(k, 2)$। চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক হলে, k এর মান নির্ণয় কর। উ: $k = 3$

6. (x, y) বিন্দুটি $(5, 3)$ এবং $(-2, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখার উপর অবস্থিত হলে, দেখাও যে, $x - y - 2 = 0$.

7. ΔABC এর A, B এবং C শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাংক যথাক্রমে $(-1, 2)$, $(2, 3)$ এবং $(3, -4)$; P বিন্দুর স্থানাংক (x, y) হলে, দেখাও যে $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{x - 3y + 7}{22}$. [কু. '০৭]

8. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(-3, -2)$, $B(-3, 9)$ এবং $C(5, -8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. য. '০৪; য '১৩] উ: 44 বর্গ একক ; $8\frac{4}{5}$ একক

9. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6)$, $(-9, 1)$ ও $(-3, -1)$. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

   উ: 29 বর্গ একক; 9.17একক; [সি. ঢা. '১২]

10. ΔOPQ এর শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $(0. 0)$, $(A \cos\beta, -A \sin\beta)$ এবং $(A \sin\alpha, A \cos\alpha)$. দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। উ: $\frac{1}{2}A^2$ বর্গ একক [চ. '১২]

11. যদি $A(x, y)$, $B(2, -4)$ এবং $C(-3, 3)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $7x + 5y + 24 = 0$.

12. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (x,y), $(2,3)$, $(3,4)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 8 বর্গ একক। প্রমাণ কর যে, $x - y + 17 = 0$.

13. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(x, y)$, $B(1, 2)$ এবং $C(2, 1)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x + y = 15$. [রা. য. '১১; কু. রা. '১৩]

14. A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং O মূলবিন্দু হলে, মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}\left|(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right|$. [সি. '১২]

15. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+1,1)$ $(2t+1,3)$, $(2t+2,2t)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে, বিন্দুগুলি সমরেখ হবে। উ: $\frac{1}{2}(2t^2 - 3t - 2)$ বর্গ একক

   [ঢা. '০৬; কু. রা. ব. '১০; সি. '১১; য. '১২]

16. ΔABC এর A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4,-3), (13, 0), (-2, 9)$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. প্রমাণ কর যে,

$\Delta ABC : \Delta DEF = 3 : 1.$ [রা. '০২]

17. যদি $A (3 ,4), B (2t,5), C (6 ,t)$ বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। [ব. '১৩] উ: $t = -2, 7\frac{1}{2}$

18. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাংক যথাক্রমে $(t - 4, -2), (t, t + 3), (2t + 1,1), (t - 3,1)$ এবং মূলবিন্দু O হলে, $\Delta OAB : \Delta OCD$ এর অনুপাত নির্ণয় কর এবং তা থেকে দেখাও যে, $t = 4$ হলে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলের মান সমান ও একই চিহ্নযুক্ত হবে। উ: $(t-3) : 1$

19. ΔABC এ A, B, C এর স্থানাংক যথাক্রমে $(3,5), (-3,3), (-1,-1)$ এবং BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC = 4 \Delta DEF$. [ব. '০৫]

20. $A(2,6), B(-7,-3), C(5,-6)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,

$\Delta ABC = 3\Delta ABG = 3 \Delta BCG = 3\Delta CAG.$ উ: $(0, -1)$

21. প্রমাণ কর যে, $(p, p-2), (p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে।

22. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(2, -1), (a+1, a-3), (a+2, a)$ হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে? [সি. '০৬; চ. '০৭; রা. '১২] উ: $\frac{1}{2}(2a-1); a = \frac{1}{2}$

23. দেখাও যে, $(3, 5)$ এবং $(3, 8)$ শীর্ষবিশিষ্ট বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সংগে একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

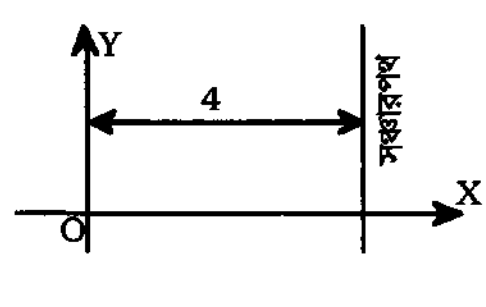
24. $ABCD$ সামান্তরিকের A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-3, 2), (-4, -3), (1, -7)$ হলে, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $(2, -2)$; 29 বর্গ একক।

25. A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাংক যথাক্রমে $(0, -1), (15, 2), (-1, 2)$ এবং $(4, -5)$. CD কে AB রেখাটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [কু. '১১; দি. '১৩] উ: $2 : 3$; অন্তর্বিভক্ত

3.6. সঞ্চারপথ (*Locus*)

সংজ্ঞা : $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ কার্তেসীয় গুণজ সেটের ক্রমজোড়ের এক একটি ক্রমজোড় কার্তেসীয় সমতলে এক একটি বিন্দু নির্দেশ করে। প্রত্যেকটি বিন্দুর সংশ্লিষ্ট ক্রমজোড় হল ঐ বিন্দুর স্থানাংক। তাহলে, ক্রমজোড়ের সেট থেকে সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলির সেট পাওয়া যায়। যদি এই সেটের বিন্দুগুলি এক বা একাধিক শর্ত মেনে চলে তবে উক্ত সেট দ্বারা সৃষ্ট পথকে এর সঞ্চারপথ বলে **অর্থাৎ সেটের বিন্দুগুলি যে পথের উপর অবস্থান করে ঐ পথটিকে বিন্দুর সঞ্চারপথ বলে।**

সুতরাং, কার্তেসীয় সমতলস্থ যে সকল বিন্দু এক বা একাধিক প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে, তাদের সেটকে সঞ্চারপথ বলে। যেমন y-অক্ষ রেখা থেকে 4 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর সেট একটি সঞ্চারপথ।



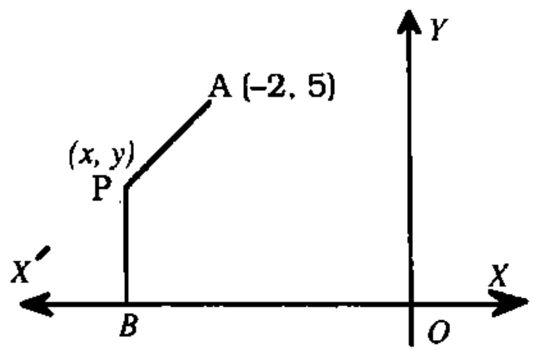
সঞ্চারপথের শর্ত থেকে চলমান বিন্দুর ভুজ ও কোটির মধ্যে একটি গাণিতিক সম্পর্ক পাওয়া যায়। ঐ গাণিতিক সম্পর্কই হল চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ। বিপরীতক্রমে সমীকরণ থেকে সঞ্চারপথ অঙ্কন করা যায়।

একটি চলমান বিন্দু যদি সর্বদাই x-অক্ষ বরাবর চলে তবে ঐ বিন্দুর অবস্থান থেকে প্রাপ্ত ক্রমজোড় হবে $(x,0)$. অর্থাৎ সব সময় বিন্দুটির y স্থানাঙ্ক $= 0$. তাহলে, x- অক্ষের উপরিস্থিত বিন্দুগুলির সেট চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ তৈরি করে অর্থাৎ প্রদত্ত শর্তানুযায়ী চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ x-অক্ষ। আবার x-অক্ষের উপরিস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দু $y=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

উক্ত সঞ্চারপথের সমীকরণ $y = 0$, অর্থাৎ x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$. তদরূপ দেখান যায় y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$.

উদাহরণ 1. $(-2, 5)$ বিন্দু এবং x–অক্ষ থেকে সর্বদা সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সেটের একটি বিন্দু $P(x, y)$. প্রদত্ত বিন্দুটি $A(-2, 5)$. P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PB লম্ব টানি।



তাহলে, x-অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব, $PB = y$

শর্তানুসারে $AP = BP$ বা $AP = y$, বা, $AP^2 = y^2$

$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4 - 10y + 25 - y^2 = 0$

$\therefore x^2 + 4x - 10y + 29 = 0$,

যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদাহরণ 2. $A(a, 0)$ এবং $B(0, a)$ বিন্দু দুইটি থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সর্বদা $2a$ একক হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১২]

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত চলমান বিন্দুটি $P(x, y)$. এ বিন্দুটি এমনভাবে চলে যেন,

$AP^2 - BP^2 = \pm 2a$ হয়।

বা, $\{(x-a)^2 + (y-0)^2\} - \{(x-0)^2 + (y-a)^2\} = \pm 2a$

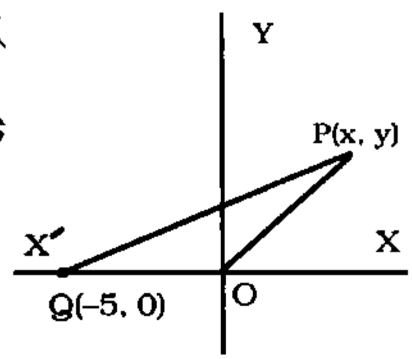
বা, $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - x^2 - y^2 - a^2 + 2ay = \pm 2a$

বা, $-2ax + 2ay = \pm 2a$ বা, $-x + y = \pm 1$,

$\therefore y = x \pm 1$, যা চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদাহরণ 3. মূলবিন্দু এবং $(-5, 0)$ বিন্দু থেকে একটি প্রদত্ত সেটের বিন্দুগুলির দূরত্বের অনুপাত $3 : 4$. উক্ত সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত সেটের একটি বিন্দু $P(x, y)$ এবং মূলবিন্দু $O(0,0)$.



মূলবিন্দু থেকে P এর দূরত্ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং প্রদত্ত বিন্দুটি $Q(-5,0)$ হলে,

$$PQ = \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 25}$$

শর্তানুসারে $OP : PQ = 3 : 4 \Rightarrow \frac{OP}{PQ} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{OP^2}{PQ^2} = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow 16(x^2 + y^2) = 9(x^2 + y^2 + 10x + 25)$

$\therefore 7(x^2 + y^2) - 90x - 225 = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 3.4

1. $(2,0)$ এবং $(-4,0)$ হতে সমদূরবর্তী এরূপ বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + 1 = 0$.

2. $(3, 0)$ ও $(-3, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্বের সমষ্টি সর্বদা 10 একক, ঐ সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $16x^2 + 25y^2 = 400$

3. (*i*) একটি বিন্দু–সেটের যে কোনো উপাদান A ও B বিন্দুর সাথে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। A এবং B এর স্থানাংক যথাক্রমে $(0,b)$, (a,b). হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১০; চ. '১৩] উ: $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$

(*ii*) $A(0, 4)$ এবং $B(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুসমূহের এমন একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে, AB রেখাংশ ঐ সেটের যেকোন বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১০] উ: $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$

4. $A(2,3)$ এবং $B(-1,4)$ দুইটি স্থির বিন্দু। P বিন্দুটি এমনভাবে চলে যে $PA : PB = 2 : 3$ হয়। P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. চ. '১১; ব. '১২] উ: $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$

5. $(2,0)$ থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব, y - অক্ষ থেকে তার দূরত্বের তিনগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০৯] উ: $y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$.

6. y-অক্ষ হতে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব, $(2,2)$ বিন্দু হতে তার দূরত্বের দ্বিগুণ, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 32 = 0$

7. $A(1,2)$, $B(-4,0)$, $P(x,y)$। এবং P এরূপ সেটের সদস্য যার প্রত্যেক বিন্দুর জন্য $AP \perp BP$ হয়, তবে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$

8. O, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0,0)$, $(3,5)$, $(2,6)$ (x, y); B ও C বিন্দু দুইটি OA রেখার এক পাশে অবস্থিত। এবং (x, y) বিন্দুটি এরূপ সেটের সদস্য যার প্রত্যেক বিন্দুর ক্ষেত্রে $\Delta OAC = 2\Delta OAB$ হয়, তাহলে দেখাও যে, ঐ সেট দ্বারা গঠিত সঞ্চারপথের সমীকরণ, $5x - 3y + 16 = 0$.

9. $A(x, y)$, $B(1,1)$ ও $C(-1,-1)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষ। ΔABC এর ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক হলে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x - y = \pm 5$

10. A, B, C তিনটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(c, 0)$; $P(x, y)$ একটি চলমান বিন্দু যেন $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$. P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $2cx = c^2 - a^2$

11. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(-6,-3)$ এবং $C(6,3)$. A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যে কোনো বিন্দু হতে BC এর উপর অংকিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য একটি স্থির সংখ্যা 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 25$.

12. (*i*) একটি সেটের বিন্দুসমূহ $(2,-1)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১২] উ: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

(*ii*) একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে, x অক্ষ থেকে এর প্রতিটি বিন্দুর দূরত্বের বর্গ, y অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্বের 4 গুণ হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y^2 = 4x$.

প্রশ্নমালা 3.5

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. (a) একটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক বলতে কী বুঝ?
(b) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। সমীকরণটি কি নির্দেশ করে?
(c) একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -4)$ ও $(0, 4)$ হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **উ:** $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$.

2. (a) কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দুর সঞ্চারপথের সংজ্ঞা লিখ। $x = 4$ দ্বারা কী বুঝ?
(b) t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ হলে, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রাপ্ত সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? **উ:** $y^2 = 4ax$, পরাবৃত্ত।
(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর।

3. (a) পোলার স্থানাঙ্ক এবং কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, -1)$ হলে, এর পোলার স্থানাঙ্ক কত? **উ:** $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$.
(b) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ও $(7, -1)$। ত্রিভুজটির অপর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। দেওয়া আছে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $(7, 2)$। **উ:** $(11, 2)$.
(c) $(7, 7)$ এবং $(-5, -10)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x- অক্ষ যে অনুপাতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ছেদ বিন্দুর ভুজ কত? **উ:** $7 : 10. \frac{35}{17}$.

4. (a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। **উ:** $r = 6\cos\theta$.
(b) দেখাও যে, মূলবিন্দুটি $(-3, -2)$ এবং $(6, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দু।
(c) $A(0, 4)$ এবং $B(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুসমূহের এমন একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে, AB রেখাংশ ঐ সেটের যেকোনো বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **উ:** $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ পোলার স্থানাঙ্কের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত?
   (a) $(2, \sqrt{2})$ (b) $(1, \sqrt{3})$ (c) $(2, \sqrt{3})$ (d) $(2, 2)$

2. $(\sqrt{3}, 1)$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের পোলার স্থানাঙ্ক কত?
   (a) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ (c) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

3. $(2, 270°)$ পোলার স্থানাঙ্কের, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত?
   (a) $(0, 1)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(2, 0)$

4. $y-$ অক্ষ ও $(7, 2)$ বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান–
   (a) $\frac{25}{7}$ (b) $\frac{29}{7}$ (c) $\frac{31}{7}$ (d) $\frac{5}{6}$

5. x-অক্ষ ও $(-5, -7)$ বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান কত?
   (a) $\frac{-55}{7}$ (b) $\frac{19}{6}$ (c) $\frac{-65}{7}$ (d) $\frac{27}{5}$

6. (1, – 1) ও (8, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 3 ঃ 4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক–
(a) (2, 2) (b) (3, – 1) (c) (4, 2) (d) (4, 3)

7. (3, 4) ও (5, 9) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 2 ঃ 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক–
(a) (– 1, – 6) (b) (– 1, 5) (c) (2, – 3) (d) (– 2, – 3)

8. কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু (3, – 4) ও (– 6, 5) এবং এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু (– 2, – 1) হলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) (1, 2) (b) (– 1, 2) (c) (2, 3) (d) (2, – 3)

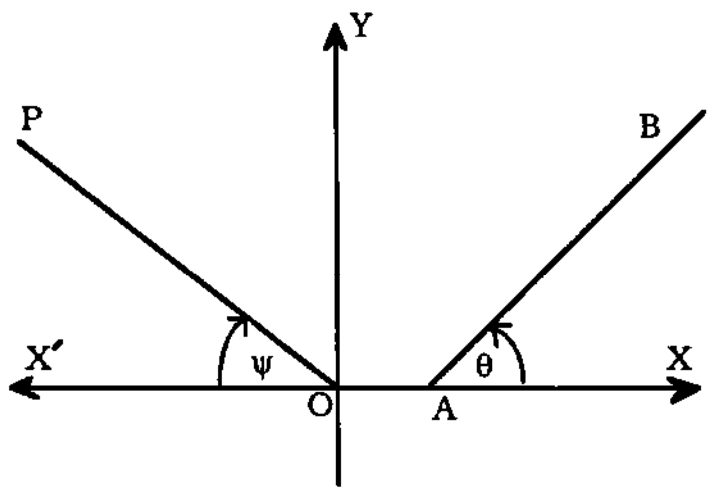
9. (7, 7) ও (– 5, – 10) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x-অক্ষটি কি অনুপাতে ছেদ করে?
(a) 5 : 7 (b) 7 : 10 (c) 7 : 3 (d) 10 : 7

10. a এর মান কত হলে $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$ এবং $(a+2, a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 2 (d) $\frac{-1}{2}$

11. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (2, 7), (6, 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6, 4) হলে, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক–
(a) (6, 7) (b) (6, – 9) (c) (10, 4) (d) (– 10, – 4)

12. (– 2, 5) এবং x-অক্ষ থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ–
(a) $y^2 + 3x - 6y + 27 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 10y + 29 = 0$
(c) $x^2 + 4x - 5y + 30 = 0$ (d) $x^2 + 2x - 6y + 4 = 0$

3.7. সরলরেখার ঢাল *(Gradient or slope of a line)*



পাশের চিত্রে AB সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। এখানে কোণ θ হলো আনুভূমিক x- অক্ষের সাথে AB রেখাটি কী পরিমাণ আনত হয়েছে তার পরিমাপ।

কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টকে রেখাটির ঢাল বলে এবং একে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। চিত্রে AB রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে । এখানে AB রেখার ঢাল $m = \tan\theta$.

চিত্রে OP রেখাটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে ψ $(0° < \psi < 90°)$ কোণ তৈরি করেছে। এক্ষেত্রে OP রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $(180° - \psi)$ কোণ উৎপন্ন করে, সুতরাং OP এর ঢাল,

$m = \tan(180° - \psi) = -\tan\psi$.

যেমন, কানো সরলরেখা x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করলে ঐ রেখার ঢাল
$m = \tan 45° = 1$

মন্তব্য : y–অক্ষের সমান্তরাল রেখার জন্য ঢাল সংজ্ঞায়িত নয়। কারণ এক্ষেত্রে $\theta = 90°$ এবং $\tan 90°$ অসংজ্ঞায়িত। কোণের পরিমাপ θ, $(90° < \theta < 180°)$ হলে, ঢাল ঋণাত্মক হবে।

স্পষ্টতঃ x-অক্ষের ঢাল শূন্য।

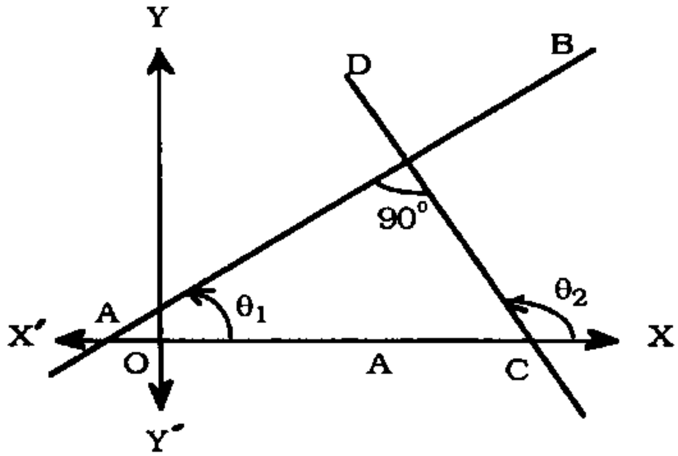
3.7. 1. দুইটি সরলরেখা লম্ব ও সমান্তরাল হবার শর্ত :

মনে করি, AB এবং CD সরলরেখা দুইটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 কোণ উৎপন্ন করে। অতএব AB এর ঢাল, $m_1 = \tan\theta_1$ এবং CD এর ঢাল, $m_2 = \tan\theta_2$.

এখন $AB \perp CD$ হলে, $\theta_2 = 90° + \theta_1$ [চিত্র থেকে]।

অতএব $\tan\theta_2 = \tan(90° + \theta_1) = -\cot\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ বা, $\tan\theta_1 \times \tan\theta_2 = -1$

বা, $\boxed{m_1 . m_2 = -1.}$

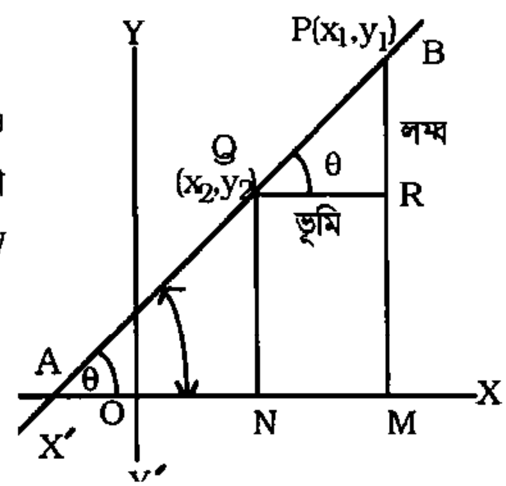


অর্থাৎ দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -1$ এবং বিপরীতক্রমে $m_1 \times m_2 = -1$ হলে, রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে।

আবার রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে যদি এবং কেবল যদি $\theta_1 = \theta_2$ অর্থাৎ $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ বা, $\boxed{m_1 = m_2.}$

সুতরাং রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হলে, তাদের ঢাল দুইটি পরস্পর সমান হবে এবং বিপরীতক্রমে $m_1 = m_2$ হলে, রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।

3.8. দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখার ঢাল



মনে করি, AB সরলরেখাটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি।

$QR \perp PM$ এবং $\angle QAN = \theta = \angle PQR$ [অনুরূপ কোণ]

এখন $PR = PM - RM = y_1 - y_2$ এবং

$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল,

$$m = \tan\theta = \frac{PR}{QR} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

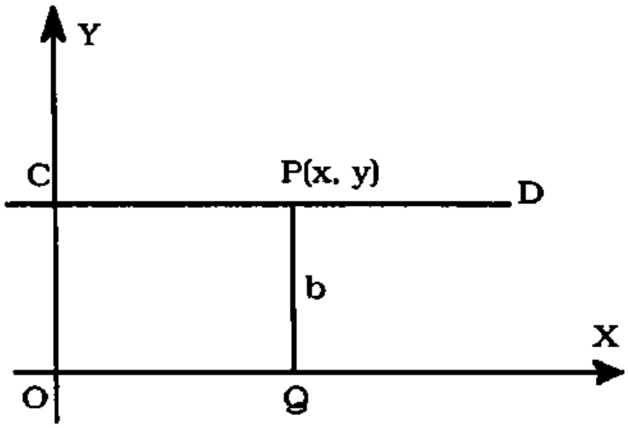
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল}}{\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল}} \text{ [ক্রম ঠিক রেখে]}$$

উদাহরণ : $(6, 3)$ এবং $(3, 2)$ **বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।**

সমাধান : রেখাটির ঢাল, $m = \dfrac{3-2}{6-3} = \dfrac{1}{3}.$

3.9. অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

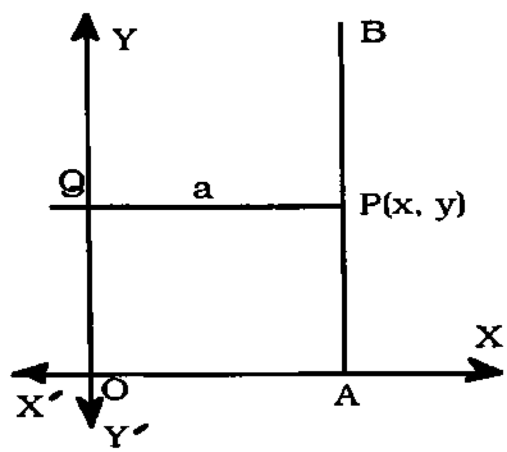
(i) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ



মনে করি, x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটি CD এবং CD সরলরেখার উপর বিন্দুর সেট $\{(x, y) : x \in X, y \in Y$ এবং $y = b\}$. এ সেটের যে কোনো $P(x, y)$ বিন্দুর x- অক্ষ থেকে দূরত্ব $y = b$ এবং এই সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ হল CD সরলরেখা। CD রেখার উপরস্থ সকল বিন্দু x–অক্ষ থেকে b দূরত্বে অবস্থান করে। সুতরাং বিন্দুটি $y = b$ এ শর্তটি সর্বদা মেনে চলে। উক্ত শর্তটি সঞ্চারপথের সমীকরণ। অতএব x–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $\boxed{y = b}$

দ্রষ্টব্য : b এর ধনাত্মক মানের জন্য CD রেখাটি x–অক্ষের উপরে এবং ঋণাত্মক মানের জন্য রেখাটি x–অক্ষের নিচে অবস্থান করে। $b = 0$ হলে CD রেখাটি x–অক্ষের উপর সমাপতিত হয়। এ কারণে x–অক্ষের সমীকরণ, $\boxed{y = 0}$.

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ



মনে করি, AB রেখাটি y–অক্ষের সমান্তরাল এবং AB সরলরেখার উপর বিন্দুর সেট $\{(x, y) : x \in X, y \in Y$ এবং $x = a\}$. তাহলে, AB রেখার উপরস্থ সকল বিন্দু y–অক্ষ হতে a দূরত্বে অবস্থান করে। এ সেটের যে কোনো $P(x, y)$ বিন্দুর y- অক্ষ থেকে দূরত্ব $x = a$ এবং এ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথটি AB সরলরেখা।

সুতরাং বিন্দুটি নির্দিষ্ট শর্ত $x = a$ সর্বদা মেনে চলে। অতএব y–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ, $\boxed{x = a}$.

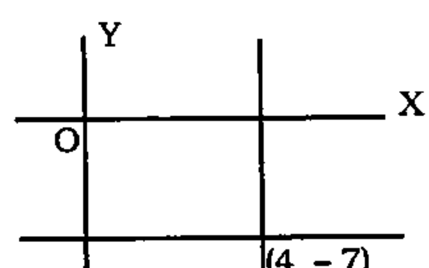
দ্রষ্টব্য : $a = 0$ হলে AB রেখাটি y–অক্ষের উপর সমাপতিত হবে। সুতরাং y–অক্ষের সমীকরণ, $\boxed{x = 0}$.

উদাহরণ । দুইটি সরলরেখার উভয়ে $(4, -7)$ বিন্দুগামী এবং এরা যথাক্রমে y-অক্ষের সমান্তরাল এবং y-অক্ষের উপর লম্ব। সরলরেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, y–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ

$x = a$ .... (i)

শর্তানুসারে (i) রেখাটি $(4, -7)$ বিন্দুগামী $\therefore\ a = 4$.



এখন (i) এ $a = 4$ বসিয়ে পাই, $x = 4$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

মনে করি, y-অক্ষের উপর লম্ব অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,
$y = b$ .... (ii)
এ রেখাটিও $(4, -7)$ বিন্দুগামী। সুতরাং $-7 = b, \Rightarrow b = -7$.
এখন (ii) এ $b = -7$ বসিয়ে পাই, $y = -7$ বা, $y+7 = 0$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

3.10. বিভিন্ন আকারের সরলরেখার সমীকরণ

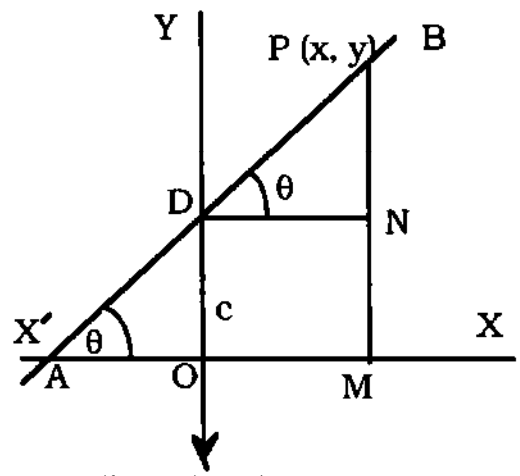
(i) $y = mx + c$ $\quad (ii)$ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$(iii)\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(iv)\ \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \quad (v)\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

(i) y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের সাথে একটি ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, AB সরলরেখাটি y-অক্ষকে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু। P থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং $DN \perp PM$ টানি।



ধরি, $\angle BAM = \theta = \angle BDN$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $OD = c = MN$ [y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ]

অতএব PDN সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

লম্ব $PN = PM - NM = y - c$ ভূমি $DN = OM = x$

$\therefore \dfrac{PN}{DN} = \tan\theta$

বা, $\dfrac{y-c}{x} = m$ বা, $y - c = mx$

বা, $y = mx + c$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : $c = 0$ হলে, রেখাটি মূলবিন্দুগামী হবে। সুতরাং মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx$.

উদাহরণ । $3x - 2y + 6 = 0$ সরলরেখাটির ঢাল এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

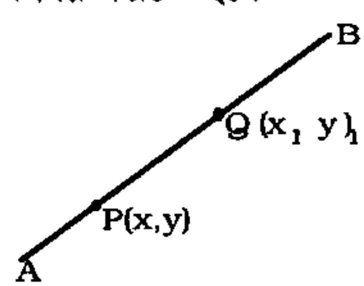
সমাধান : $3x - 2y + 6 = 0$ কে এভাবে লেখা যায় : $2y = 3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$

এ সমীকরণটিকে $y = mx + c$ এর সংগে তুলনা করে পাই, সরলরেখাটির ঢাল, $m = \frac{3}{2}$

এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $c = 3$.

(ii) যে সরলরেখার ঢাল m এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির উপর যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ নেয়া হল।

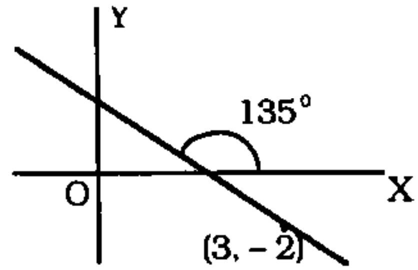


PQ এর ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m. = AB$ এর ঢাল

$\therefore$ **$y - y_1 = m(x - x_1)$**, যা (x_1, y_1) একটি বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ।

উদাহরণ । একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, -2)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : মনে করি, $(3, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখাটির সমীকরণ



$y - (-2) = m(x - 3)$

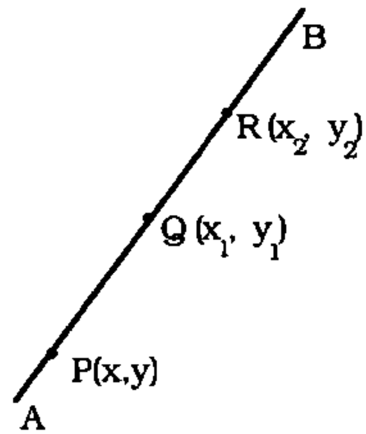
$\Rightarrow y + 2 = m(x - 3)$ .... (i)

এখন $m = \tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

(i) এ $m = -1$ বসিয়ে পাই, $y + 2 = -(x - 3) \Rightarrow x + y - 1 = 0$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

(iii) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ ও $R(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।



তাহলে PQ এর ঢাল= $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ এবং QR এর ঢাল= $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

P, Q, R বিন্দুত্রয় সমরেখ বলে PQ এর ঢাল = QR এর ঢাল

$\therefore \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

বা, $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

বা, $\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)}$

অর্থাৎ, $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : এখানে $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m =$ রেখাটির ঢাল।

উদাহরণ। একটি সরলরেখা $(2, 5)$ এবং $(-4, 3)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$.

সুতরাং $(2, 5)$ এবং $(-4, 3)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটির সমীকরণ $\dfrac{y - 5}{5 - 3} = \dfrac{x - 2}{2 - (-4)}$

$$\Rightarrow \frac{y - 5}{2} = \frac{x - 2}{6}$$

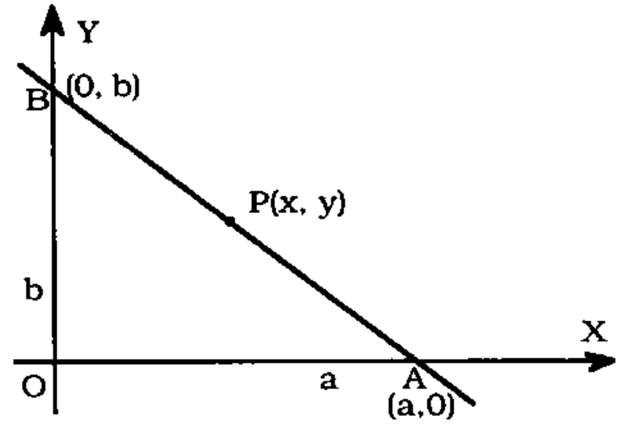
$$\Rightarrow 3(y - 5) = x - 2$$

অতএব $\boldsymbol{x - 3y + 13 = 0}$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

(iv) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশ দেয়া থাকলে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, সরলরেখাটি x-অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি, x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $OA = a$, y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $OB = b$. সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$.

রেখাটির উপর $P(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।



তাহলে, AP এর ঢাল $= \frac{y-0}{x-a}$ বা, $\frac{y}{x-a}$

BP এর ঢাল $= \frac{y-b}{x-0}$ বা, $\frac{y-b}{x}$

A, P, B বিন্দুত্রয় সমরেখ বলে,

AP এর ঢাল $= BP$ এর ঢাল

$\therefore \frac{y}{x-a} = \frac{y-b}{x} \Rightarrow (x-a)(y-b) = xy$

$\Rightarrow xy - ay - bx + ab = xy$

$\Rightarrow bx + ay = ab$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ [ab দ্বারা ভাগ করে] যা নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ।

উদাহরণ 1. $3x - 4y + 9 = 0$ রেখাটির ঢাল এবং অক্ষ দুইটির খণ্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $3x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 4y = 3x + 9$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \quad \text{রেখার ঢাল} = \frac{3}{4}$$

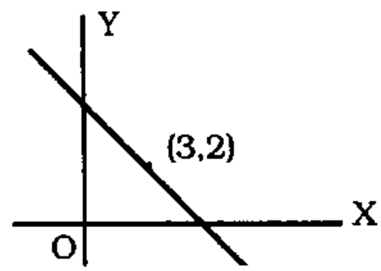
আবার $3x - 4y = -9 \Rightarrow \frac{3x}{-9} + \frac{4y}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{9}{4}} = 1$; একে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $a = -3$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $b = \frac{9}{4}$.

উদাহরণ 2. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং $(3,2)$ বিন্দুগামী। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$



এখানে a এবং b যথাক্রমে x-অক্ষের এবং y-অক্ষের ছেদাংশ।

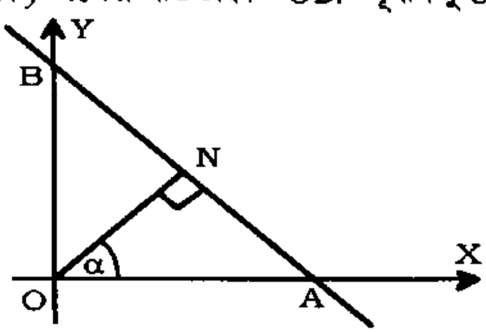
শর্তানুসারে $a = b$, সুতরাং সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1,$

$\Rightarrow x + y = a.$ এ রেখাটি $(3,2)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং $3 + 2 = a, \quad \therefore a = 5.$ অতএব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x + y = 5.$ বা, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$

(v) মূলবিন্দু থেকে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, রেখাটি x ও y-অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= OA$ এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= OB.$ মূলবিন্দু O থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য $ON = p$ এবং $\angle AON = \alpha.$



$\therefore \angle BON = 90° - \alpha$

এখন ΔONA-এ, $OA = ON \sec\alpha = p \sec\alpha$

আবার, ΔOBN-এ, $OB = ON \sec(90° - \alpha) = p \operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$

বা, $\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$

বা, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ।

একে সরলরেখার লম্বরূপ (*Perpendicular form*) সমীকরণ বলে।

3.10.1. দুইটি সমীকরণ দ্বারা একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত

মনে করি, $ax + by + c = 0$ এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করে, যখন ধ্রুবকগুলির কোনোটি শূন্য নয়। তাহলে, সমীকরণদ্বয় থেকে প্রাপ্ত ঢালদ্বয় সমান হবে এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণও সমান হবে। সমীকরণ দুইটিকে এভাবে লেখা যায় : $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ এবং $y = \frac{-a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$

$\therefore \frac{-a}{b} = \frac{-a_1}{b_1}$ [$\because$ ঢালদ্বয় সমান] $\Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$.................. (i)

এবং $\frac{-c}{b} = \frac{-c_1}{b_1}$ [y -অক্ষের খন্ডিতাংশ সমান] $\Rightarrow \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ .... (ii)

এখন (i) ও (ii) থেকে $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, যা দুইটি সমীকরণ একই সরলরেখা সূচিত করার শর্ত।

3.11. $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা প্রকাশ করে।

মনে করি, x এবং y দুই চলক সম্বলিত একঘাত সমীকরণ $ax + by + c = 0$ ....(i)

যেখানে a, b, c প্রত্যেকে অশূন্য। সমীকরণটি নিম্নরূপে লেখা যায় :

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow y = mx + c'$..... (ii) যখন $-\frac{a}{b} = m$ এবং $-\frac{c}{b} = c'$.

আবার সমীকরণ (i) কে নিম্নরূপে লেখা যায় :

$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$..... (iii) যখন $-\frac{c}{a} = a_1$ এবং $-\frac{c}{b} = b_1$.

যদি $a = 0$ হয়, তাহলে (i) নং থেকে পাই, $y = -\frac{c}{b}$, যা x- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা, এবং $b = 0$ হয়, তাহলে

(i) নং থেকে পাই, $x = -\frac{c}{a}$, যা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা। আবার সমীকরণ (ii), (iii) প্রত্যেকে সরলরেখা নির্দেশ করে।

সুতরাং, $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি সর্বদাই একটি সরলরেখা নির্দেশ করে যখন a ও b উভয়ই শূন্য না হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax + by + c = 0$ রেখাটি x- অক্ষের সমান্তরাল হলে x- এর সহগ $a = 0$ এবং y- অক্ষের সমান্তরাল হলে y- এর সহগ $b = 0$ হবে।

উদাহরণ : $3x - 4y - 12 = 0$ সমীকরণটিকে নিচের আকারে রূপান্তর কর :

(i) $y = mx + c$ ***(ii)*** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

সমাধান : ***(i)*** প্রদত্ত সমীকরণটি $3x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow 4y = 3x - 12$

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$, যা $y = mx + c$ আকারের। এখানে $m = \frac{3}{4}$ এবং $c = -3$.

(ii) $3x - 4y - 12 = 0$

বা, $3x - 4y = 12$ বা, $\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} = 1$

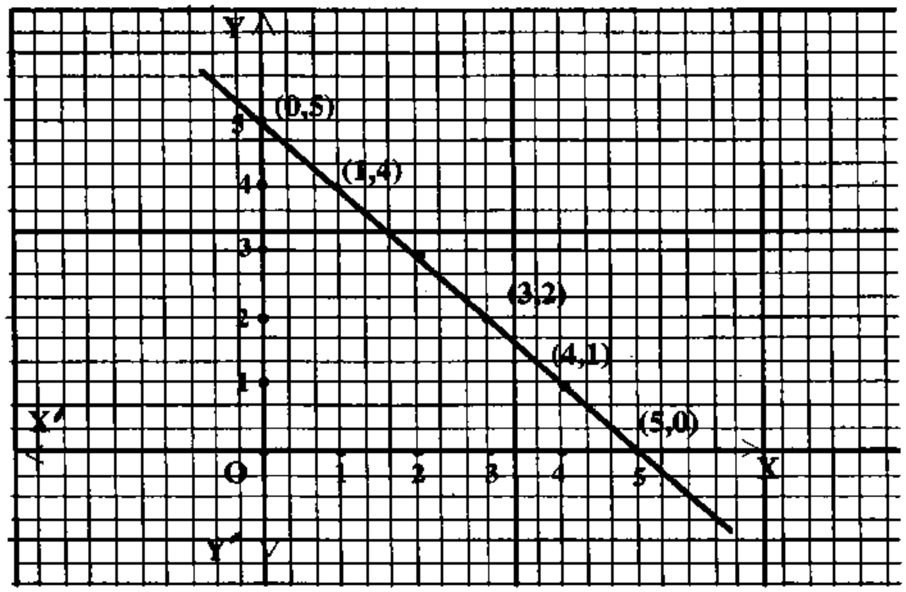
$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$, যা $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারের । এখানে $a = 4, b = -3$.

3.12. লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন

$L = \{ (x, y) : x + y = 5 \}$ এর লেখ অঙ্কন করতে হবে।

প্রদত্ত সমীকরণ $x + y = 5$ এর উপর কতকগুলি বিন্দু যা সমীকরণকে সিদ্ধ করে তা নির্ণয় করে একটি সেট $S = \{ (1, 4), (0, 5), (4, 1), (5, 0), (3, 2) \subset L$ তৈরি করি।

ছক কাগজে x ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। অতপর ছক কাগজের ক্ষুদ্র 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক নিয়ে উক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।



বিন্দুগুলি পেন্সিল দ্বারা সংযোগ করলেই সরলরেখা L এর লেখ পাওয়া যায়।

সরলরেখা বিষয়ক সূত্র ঃ

- y–অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$
- x- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$
- মূলবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx$, যেখানে রেখার ঢাল m.
- y -অক্ষকে নির্দিষ্ট দূরত্বে ছেদ করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$
- অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে (অর্থাৎ অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ (a ও b) এরূপ রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- মূলবিন্দু থেকে কোনো রেখার উপর লম্ব–দূরত্ব = p এবং উক্ত লম্বটি X-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$
- একটি বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$, যেখানে রেখার ঢাল m
- (x_1 , y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ (1, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।

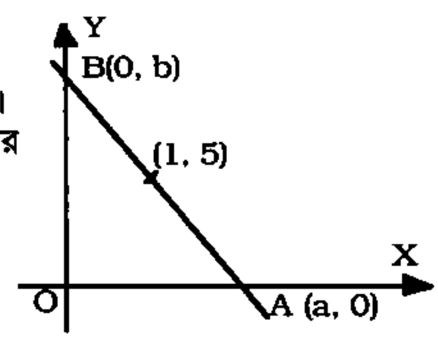
সমাধান : মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

এ রেখাটি x-অক্ষকে $A\ (a,\ 0)$ এবং y-অক্ষকে $B\ (0,\ b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

শর্তানুসারে, $A\ (a,\ 0)$ এবং $B\ (0,\ b)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু $(1,5)$

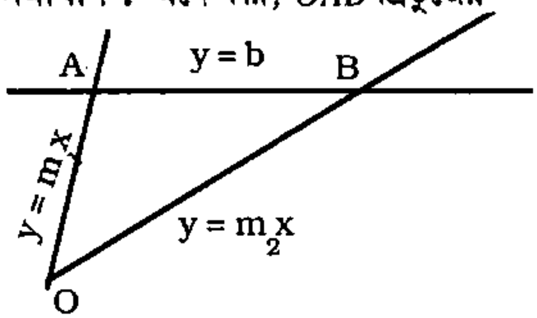
$\therefore \frac{a + 0}{2} = 1$ এবং $\frac{0 + b}{2} = 5$ অর্থাৎ $a = 2,\ b = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{2} + \frac{y}{10} = 1$ বা, $5x + y = 10.$



উদাহরণ 2. দেখাও যে, $y = m_1x$, $y = m_2x$ এবং $y = b$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b^2}{2} \left| \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) \right|$ বর্গ একক। [ঢা. '০৯; কু. '১০; দি. '১২]

সমাধান : মনে করি, OAB ত্রিভুজের



OA বাহুটির সমীকরণ, $y = m_1x$ .... (i)

OB বাহুটির সমীকরণ, $y = m_2x$ .... (ii)

AB বাহুটির সমীকরণ, $y = b$ .... (iii)

(i) ও (iii) সমাধান করে, $m_1x = b$ বা, $x = \frac{b}{m_1}$

$\therefore$ (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $A\left(\frac{b}{m_1}, b\right)$

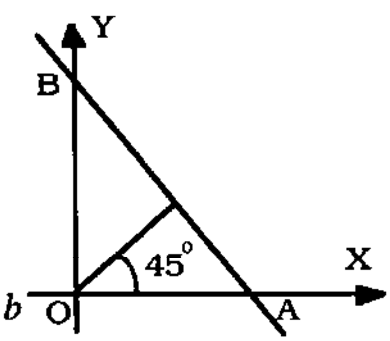
তদ্রূপ (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{b}{m_2}, b\right)$. স্পষ্টত (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $O(0,0)$.

$$\therefore \Delta OAB \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{b}{m_1} & b & 1 \\ \frac{b}{m_2} & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{m_1} - \frac{b^2}{m_2}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right).$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{b^2}{2} \left| \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) \right|$ বর্গ একক।

উদাহরণ 3. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ তৈরি করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। [য. '১০; চ. '১৩]

সমাধান : মনে করি, রেখাটির সমীকরণ,



$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, যেখানে $\alpha = 45°$

$\therefore x\cos 45° + y\sin 45° = p$

বা, $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = p$ বা, $\frac{x}{p\sqrt{2}} + \frac{y}{p\sqrt{2}} = 1$. একে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই $OA = p\sqrt{2} = a$ এবং $OB = p\sqrt{2} = b$

শর্তানুসারে, ΔOAB এর ক্ষেত্রফল = 8 বর্গ একক

বা, $\frac{1}{2}. OA. OB = 8$ বা, $ab = 16$ বা, $p\sqrt{2} . p\sqrt{2} = 16$ বা, $p^2 = 8$

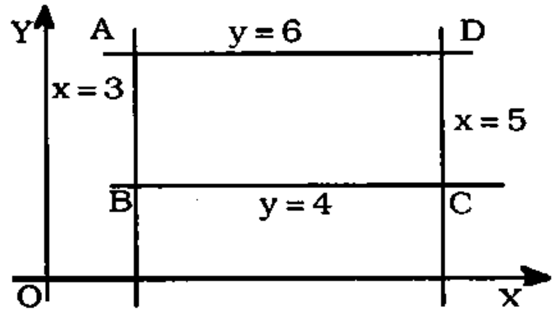
$\therefore p = 2\sqrt{2}$. যেহেতু ধনাত্মক।

সুতরাং নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ অর্থাৎ, $x + y = 4$.

উদাহরণ 4. $x = 3$, $x = 5$, $y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১১]

সমাধান : $x = 3$ এবং $x = 5$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল, আবার $y = 4$ এবং $y = 6$ রেখা দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং রেখা চারটি একটি আয়ত উৎপন্ন করে।

মনে করি, উৎপন্ন আয়তটি $ABCD$ এবং এর AB বাহুটির সমীকরণ, $x = 3$; BC বাহুটির সমীকরণ, $y = 4$; CD বাহুটির সমীকরণ, $x = 5$ এবং AD বাহুটির সমীকরণ, $y = 6$



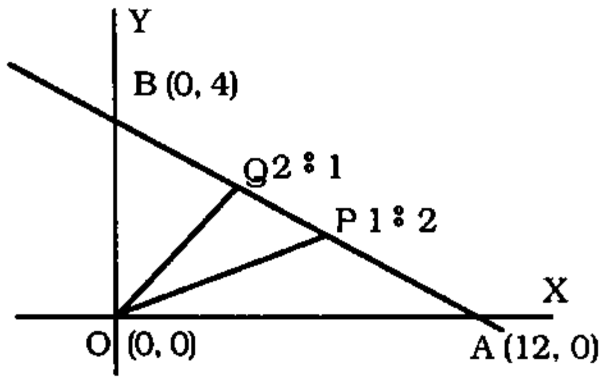
A বিন্দুটি $x = 3$ এবং $y = 6$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু। সুতরাং A বিন্দুটির স্থানাংক $(3, 6)$। তদ্রূপ B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাংক যথাক্রমে $(3, 4), (5, 4), (5,6)$.

অতএব AC কর্ণের সমীকরণ, $\dfrac{y-6}{6-4} = \dfrac{x-3}{3-5}$

$$\Rightarrow \frac{y-6}{2} = \frac{x-3}{-2} \Rightarrow x + y - 9 = 0$$

এবং BD কর্ণের সমীকরণ, $\dfrac{y-4}{4-6} = \dfrac{x-3}{3-5} \Rightarrow \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{x-3}{-2}$ অর্থাৎ $x - y + 1 = 0$.

উদাহরণ 5. $x + 3y - 12 = 0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১০; চ. '১৩]



সমাধান : $x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow x + 3y = 12$

বা, $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{4} = 1$

প্রদত্ত রেখাটি x-অক্ষকে $A\ (12, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B\ (0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, P ও Q বিন্দু দুইটি AB কে যথাক্রমে $1 : 2$ এবং $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore P$ এর স্থানাংক $\left(\dfrac{1 \times 0 + 2 \times 12}{1 + 2}, \dfrac{1 \times 4 + 2 \times 0}{1 + 2}\right) = \left(8, \dfrac{4}{3}\right)$

এবং Q বিন্দুর স্থানাংক $\left(\dfrac{2 \times 0 + 1 \times 0}{1 + 2}, \dfrac{2 \times 4 + 1 \times 0}{1 + 2}\right) = \left(4, \dfrac{8}{3}\right)$

OP রেখার ঢাল $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\frac{4}{3} - 0}{8 - 0} = \dfrac{1}{6}$ এবং OQ এর ঢাল $= \dfrac{\frac{8}{3} - 0}{4 - 0} = \dfrac{2}{3}$

সুতরাং OP রেখার সমীকরণ $y = mx$ বা, $y = \dfrac{1}{6}x$ বা, $x = 6y$

এবং OQ রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{2}{3}x$ বা, $2x = 3y$

উদাহরণ 6 : একটি ফ্যাক্টরিতে 200 বাক্স তৈরি করতে 800 টাকা এবং 400 বাক্স তৈরি করতে 1200 টাকা খরচ হয়। যদি ব্যয় রেখাটি সরলরেখা হয়, তবে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। এ থেকে 300টি বাক্স তৈরি করতে কত টাকা খরচ হবে তা বের কর।

সমাধান : মনে করি, x সংখ্যক বাক্স তৈরি করতে খরচ হয় y টাকা। তাহলে, $(x_1, y_1) \equiv (200, 800)$ এবং $(x_2, y_2) \equiv (400, 1200)$

এখন (200, 800) ও (400, 1200) দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ সূত্র দ্বারা পাই, $\dfrac{y - 800}{800 - 1200} = \dfrac{x - 200}{200 - 400}$ বা, $\dfrac{y - 800}{-400} = \dfrac{x - 200}{-200}$

বা, $y - 800 = 2x - 400$ বা, $y = 2x + 400$, যা নির্ণেয় সমীকরণ।

এখন বাক্সের সংখ্যা $x = 300$ হলে, $y =$ কত টাকা?

$y = 2x + 400$ সমীকরণে $x = 300$ বসিয়ে পাই, $y = 2 \times 300 + 400$ বা, $y = 1000$ টাকা।

সুতরাং 300টি বাক্স তৈরি করতে 1000 টাকা খরচ।

প্রশ্নমালা 3.6

1. (*i*) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $(3,4)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উ: $4x - 3y = 0$
   (*ii*) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দুগামী এবং x–অক্ষের সাথে (a) $60°$ (b) $135°$ কোণ উৎপন্ন করে। উ: (a) $y - \sqrt{3}x = 0$; (b) $x + y = 0$.
   (*iii*) $6x - 5y + 30 = 0$ সরলরেখাটির ঢাল এবং অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।
   উ: ঢাল $= \frac{6}{5}$ খণ্ডিতাংশ -5 এবং 6.
2. দুইটি সরলরেখার উভয়ে $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা যথাক্রমে x-অক্ষের সমান্তরাল এবং এর উপর লম্ব। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y + 4 = 0$ এবং $x - 3 = 0$.
3. (*i*) $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান a, b এবং c তে প্রকাশ কর। [দি. '১৩] উ: $p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
   (*ii*) $3x + 7y = 21$ এবং $2ax - 3by + 6 = 0$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা সূচিত করলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০২] উ: $a = \frac{-3}{7}$, $b = \frac{2}{3}$
   (*iii*) $12x + 5y - 6 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। উ: $p = \frac{6}{13}$
4. দেখাও যে, $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ঢা. '০৯; চ. '১১; দি. '১২]
5. নিম্নলিখিত দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :
   (*i*) $(2, -1)$ এবং $(-3,5)$, (*ii*) $(5,7)$ এবং $(0,-4)$. উ: (*i*) $6x + 5y - 7 = 0$, (*ii*) $11x - 6y - 24 = 0$
6. (*i*) একটি সরলরেখা $(1, 2)$ ও $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয়গামী এবং (x, y) বিন্দুটি তার উপর অবস্থিত। দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [ঢা. '০৩; রা. '০৬]
   (*ii*) $P(x, y)C(1,2)$ রেখাটি $A(-7, 3)B(1, -5)$ রেখার উপর লম্ব হলে, দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$.
7. (a, b), (a', b'), $(a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, দেখাও যে, এদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $a\acute{b} = \acute{a}b$ হয়। [কু. '০৯]
8. $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ চলমান রেখাটি x ও y অক্ষরেখা দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, এখানে p ধ্রুবক। দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$. [ঢা. '১১]
9. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(3,5)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উ: $x + y - 8 = 0$
10. কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(2,3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ: $3x + 2y = 12$
11. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(6,2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. '১১] উ: $x + 2y - 10 = 0$
12. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। [সি. '১১; ব. '১৩] উ: $9x - 20y + 96 = 0$
13. $5x + 4y - 20 = 0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে, এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $5x - 2y = 0$; $5x - 8y = 0$.

14. একটি বর্গের কর্ণদ্বয় অক্ষদ্বয় বরাবর এবং প্রত্যেক কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 একক। বর্গের চারটি বাহুর সমীকরণ বের কর। উঃ $x + y = 2, x - y + 2 = 0, x + y + 2 = 0, x - y = 2.$

15. একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়। O মূলবিন্দু হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '১২; ঢা. '১৩] উঃ $x - 2y - 8 = 0$

16. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। [সি. রা. '১২] উঃ $2x + 3y = 12$ বা, $x - y = 1$

17. একটি সরলরেখা $(2,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের সমষ্টি 15; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $2x + y = 10$ বা, $3x + 2y = 18.$

18. যে সরলরেখা $(-2, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের গুণফল 6, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $3x + 2y - 6 = 0, 6x + y + 6 = 0$

19. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং তা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের গুণফল $= 1$, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $x + 4y = 2, x + 9y + 3 = 0$

20. $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট অংশ ছেদ করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটির যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ তার স্থানাঙ্ক বের কর। উত্তর: $x - y + 3 = 0$; $(3,6)$

21. একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমান সমান অংশ ছেদ করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. '১১] উঃ $x + y = \alpha + \beta.$

22. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3,8)$ বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের ধনাত্মক অংশ ছেদ করে। উঃ $x + y - 5 = 0$

23. একটি সরলরেখা $(3, 7)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $x + y + 4 = 0$

24. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশছেদ করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক। [কু. '১১; সি. '১৩] উঃ $x + y = 4\sqrt{2}$

25. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে $\frac{50}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অংকিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$

26. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে উক্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। [সি. '০৫] উঃ $x + y = 4\sqrt{2}.$

27. একটি সরলরেখা $(1,4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চর্তুভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১২] উঃ $y + 4x = 8.$

28. $A\ (h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B\ (k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত; AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১১; য. ঢা. '১২] উঃ $x + y - 6 = 0$

29. $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরোক্ত খণ্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহুর হলে তার ক্ষেত্রফল কত? [ব. '১২; য. '১৩] উঃ $(-7/2, -7/4)$, $61\frac{1}{4}$ বর্গএকক

30. t এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2t + 2, t - 4)$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উঃ $x - 2y = 10$; 25 বর্গ একক।

31. $3x + by + 1 = 0$ এবং $ax + 6y + 1 = 0$ রেখা দুইটি $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে; a ও b এর মান কত? যদি প্রথম রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $a = -5,\ b = -4;\ 3x + 6y + 1 = 0$

32. a এর মান কত হলে (i) $3x + 2y - 5 = 0$, (ii) $ax + 4y - 9 = 0$, (iii) $x + 2y - 7 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে? বিশেষ অবস্থা দুইটি আলোচনা কর, যখন $a = 2$ এবং $a = 6$.
উ: $a = 7$ এবং $a = 2$ হলে, (ii) ও (iii) সমান্তরাল; $a = 6$ হলে, (i) ও (ii) সমান্তরাল।

33. দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$.
[কু. '১২; ব. '১৩]

34. $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাত্রয়ের সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $\frac{3}{2}$ বর্গএকক।

35. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ এবং $2x - y - 3 = 0$; প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

36. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(1,1)$, $B(3,4)$ এবং $C(5,-2)$; AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল। [ঢা. '১১] উত্তর: $6x + 2y - 17 = 0$.

37. $(2,4)$, $(-4,-6)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে, ঐ ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $11x - y - 18 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$, $x + y + 2 = 0$.

38. $(1,2)$, $(4, 4)$ ও $(2,8)$ বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $2x + y - 4 = 0$, $6x - y - 20 = 0$, $2x - 3y + 20 = 0$.

39. $OABC$ একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4,2)$। A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১১; রা. '১৩]
উ: $(3,0)$, $(1,2)$, $x + y - 3 = 0$.

40. $x + by = b$ রেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $OA = 3.OB$, যখন O মূলবিন্দু এবং Q এর স্থানাঙ্ক $(0,-9)$ হয়, তবে AQ-এর সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে $AQ \perp AB$. উ: $3x - y = 9$.

41. $x = 4$, $x = 8$, $y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্ব। [চ. '০২] উ: $x - y + 2 = 0$, $x + y - 14 = 0$.

42. $x - 4 = 0$, $y - 5 = 0$, $x + 3 = 0$ এবং $y + 2 = 0$ সমীকরণ চারটি একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২] উ: $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

43. x-অক্ষের উপর P, Q বিন্দুদ্বয় এবং y-অক্ষের উপর R, S বিন্দুদ্বয় অবস্থিত। PR ও QS রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ এবং $x + 2y - 1 = 0$; দেখাও যে, $PQ = RS$. [ঢা. '০৪]

44. একটি কারখানায় 75 একক এবং 100 একক জিনিস তৈরি করতে যথাক্রমে 350 টাকা এবং 400 টাকা খরচ হয়। জিনিসটির খরচ (cost) ও পরিমাণের মধ্যকার বিদ্যমান সরলরৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় কর এবং তা থেকে 150 একক জিনিস তৈরি করার খরচ বের কর। উ: $y = 2x + 200$; 500 টাকা।

45. কোনো একটি ছাত্রাবাসের মোট ব্যয় y এবং সদস্য সংখ্যা x; 12 জন সদস্যের জন্য মোট খরচ 1040 টাকা এবং 20 জন সদস্যের জন্য মোট খরচ 1600 টাকা হলে, (i) x এবং y এর মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় কর। (ii) সদস্য সংখ্যা 15 হলে, মোট ব্যয় কত হবে? উ: (i) $y = 70x + 200$, (ii) 1250 টাকা।

3.13. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু :

মনে করি, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$........ (i)

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

এদের ছেদবিন্দুটি উভয় সরলরেখার একটি সাধারণ বিন্দু। যে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (i) ও (ii) সমীকরণ দুইটিকে সিদ্ধ করে তা হল প্রদত্ত রেখা দুইটির নির্ণেয় ছেদবিন্দু।

সুতরাং (i) ও (ii) সমীকরণ দুইটি সমাধান করে x ও y এর যে মান পাওয়া যায় তা হবে রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক। (i) ও (ii) কে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে আমরা পাই

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore x = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ এবং } y = \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

অর্থাৎ, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$ যেখানে $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

মন্তব্য : a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 নির্দিষ্ট বিধায় উক্ত ছেদবিন্দুটি অনন্য (Unique) .

$\therefore$ রেখা দুইটি সমান্তরাল না হলে, এরা একটি এবং কেবল একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করবে।

3.14. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ

(i) ধরি, রেখা দুইটির সমীকরণ $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$.

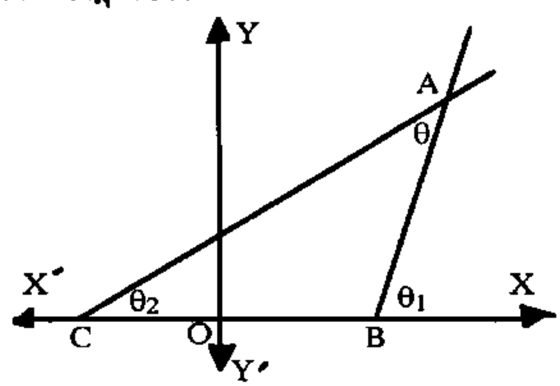
রেখা দুইটি x– অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore m_1 = \tan\theta_1$ এবং $m_2 = \tan\theta_2$

মনে করি, রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore$ চিত্র থেকে পাই, $\theta + \theta_2 = \theta_1$

সুতরাং $\theta = \theta_1 - \theta_2$, ... (i)



যদি AB ও AC রেখা দুইটি x-অক্ষের সাথে যথাক্রমে θ_2 ও θ_1 কোণ উৎপন্ন করে তবে,

$\theta = \theta_2 - \theta_1 = -(\theta_1 - \theta_2)$ .... (ii) , $\theta_2 > \theta_1$

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\theta = \pm(\theta_1 - \theta_2)$. $\therefore \tan\theta = \pm\tan(\theta_1 - \theta_2) = \pm\dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$

সুতরাং $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ অথবা, $\cot\theta = \pm\dfrac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}$.

(ii) মনে করি, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

[যখন a_1, a_2, b_1, b_2 এর কোনটি শূন্য নয়]

সমীকরণ দুইটিকে এভাবে লেখা যায় : $y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1}$ এবং $y = \dfrac{-a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2}$

সুতরাং রেখা দুইটির ঢাল যথাক্রমে $m_1 = \dfrac{-a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = \dfrac{-a_2}{b_2}$

যদি রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ φ হয় তবে, $\tan\varphi = \pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

$$= \pm\frac{\dfrac{-a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2}}{1 + \dfrac{a_1a_2}{b_1b_2}} = \pm\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2},$$

3.15. দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত

$y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হলে, $\theta = 0$ অর্থাৎ $\tan\theta = 0$

[অনুচ্ছেদ 3.14 থেকে]

সুতরাং $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = 0$ বা, $m_1 - m_2 = 0$ বা, $\boxed{m_1 = m_2}$ যা রেখা দুইটি সমান্তরাল হওয়ার শর্ত।

রেখা দুইটি লম্ব হলে, $\theta = 90°$.

অতএব $\cot 90° = 0$ অর্থাৎ $1 + m_1 m_2 = 0$ বা $\boxed{m_1 m_2 = -1}$, যা দুইটি রেখা লম্ব হওয়ার শর্ত।

অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবার শর্ত হল $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ অর্থাৎ $a_1b_2 = a_2b_1$ বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ এবং বিপরীতক্রমে।

রেখাদ্বয় অসমান্তরাল হলে $(a_2b_1 - a_1b_2) \neq 0$.

এবং রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবার শর্ত হল $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ এবং বিপরীতক্রমে।

দ্রষ্টব্য : $\tan\varphi$ এর ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক মান দুইটি থেকে যথাক্রমে রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ পাওয়া যায়।

লক্ষণীয় : দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব এবং সমান্তরাল হওয়ার শর্ত অনুচ্ছেদ 3.7.1 এ আলোচনা করা হয়েছে।

3.16. বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ

***(i)* দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়**

মনে করি, প্রদত্ত রেখা দুইটির সমীকরণ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ..... (i) এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

যদি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুটির স্থানাংক (x', y') হয়, তবে $a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$ এবং $a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$ হবে।

সুতরাং যে কোনো অনির্ধারিত ধ্রুবক, $k \neq 0$ এর জন্য $a_1x' + b_1y' + c_1 + k(a_2x' + b_2y' + c_2) = 0$ ...... (iii)

(iii) থেকে স্পষ্ট বোঝা যায় যে, (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু (x', y') দ্বারা

$\boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0}$ .... (iv) সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

আবার (iv) সমীকরণটি x ও y এর একঘাতবিশিষ্ট বলে একটি সরলরেখা সূচিত করে। সুতরাং k এর যে কোনো অশূন্য মানের জন (iv) সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুগামী একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

***(ii)* সমান্তরাল ও লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি :**

সমান্তরাল রেখা : দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে, প্রথম রেখার ঢাল = দ্বিতীয় রেখার ঢাল।

মনে করি, প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. এ রেখাটির ঢাল= $\frac{-a}{b}$.

অতএব এর সমান্তরাল রেখার ঢাল $= \frac{-a}{b}$.

সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ $y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + k_1$

বা, $ax + by - bk_1 = 0$.

বা, $ax + by + k = 0$, যখন $k = -bk_1$ ...... (ii), যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

লম্ব-রেখা : আবার যেহেতু দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= -1$

অতএব প্রদত্ত $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল m হলে,

$m \times \left(\frac{-a}{b}\right) = -1 \quad \Rightarrow m = \frac{b}{a}$

সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ, $y = \frac{b}{a}x + k_1$

$\Rightarrow\ bx - ay + ak_1 = 0$

$\Rightarrow bx - ay + k = 0$ .... (iii), যেখানে $ak_1 = k$ একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

লক্ষণীয় : কোনো সরলরেখার সমীকরণের x, y সম্বলিত পদ দুইটি অপরিবর্তিত রেখে কেবল ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করলেই ঐ রেখার সমান্তরাল যে কোনো রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়। আবার প্রদত্ত সমীকরণে x ও y এর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করে এদের যে কোনো একটির চিহ্ন পরিবর্তন করলে ঐ রেখার উপর লম্ব যেকোন রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়। অবশ্য উভয়ক্ষেত্রে একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক নিতে হবে।

3.16.1. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(i)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (ii)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ .... (iii)

সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হওয়ার শর্ত ঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

প্রমাণ : অনুচ্ছেদ 3.13 থেকে (ii) ও (iii) রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2}\right)$

রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে (i) রেখাটিও এ ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সুতরাং ছেদ বিন্দুটি (i) সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$$\therefore\ a_1\left(\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}\right) + b_1\left(\frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2}\right) + c_1 = 0$$

$\Rightarrow a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0;$ অতএব $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1, 2) বিন্দুগামী এবং (*a*) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়। (*b*) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়। [কু. '০৪]

সমাধান : (১ম পদ্ধতি) :

(***a***) প্রদত্ত রেখাটির সমীকরণ $3x - 4y + 8 = 0$. $\therefore$ এর ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$

সুতরাং এ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= m_2$ হলে, $m_1 . m_2 = -1$, $\therefore\ m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-4}{3}$

সুতরাং (1, 2) বিন্দুগামী এবং $m_2 = \frac{-4}{3}$ ঢালবিশিষ্ট রেখাটির সমীকরণ,

$$y - 2 = \frac{-4}{3}(x - 1) \text{ অর্থাৎ } 4x + 3y - 10 = 0.$$

(***b***) প্রদত্ত রেখাটির ঢাল $m_1 = \frac{3}{4}$ সুতরাং এর সমান্তরাল রেখাটির ঢাল , $m_2 = m_1 = \frac{3}{4}$ হবে।

অতএব (1, 2) বিন্দুগামী এবং $m_2 = \frac{3}{4}$ ঢালবিশিষ্ট রেখাটির সমীকরণ

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1) \text{ অর্থাৎ, } 3x - 4y + 5 = 0 .$$

(২য় পদ্ধতি) :

(*a*) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$4x + 3y + k = 0$ ----------------- (i), যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

এ রেখাটি $(1, 2)$ বিন্দুগামী হলে বিন্দুটির স্থানাংক (i) কে সিদ্ধ করবে।

$\therefore 4.1 + 3(2) + k = 0$, বা, $k = -10$ $\therefore$ নির্ণেয় রেখাটির সমীকরণ, $4x + 3y - 10 = 0$.

(*b*) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল এমন যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$3x - 4y + k = 0$ ----------- (ii), যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এখন রেখাটি $(1, 2)$ বিন্দু দিয়ে গেলে আমরা পাই, $3.1 - 4(2) + k = 0$, বা, $k = 5$.

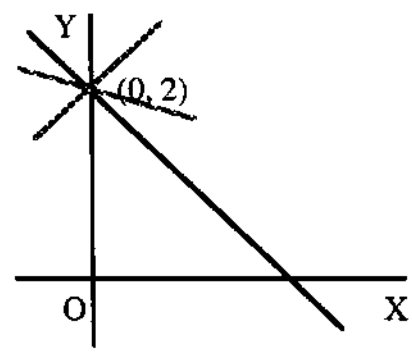
$\therefore$ নির্ণেয় রেখাটির সমীকরণ, $3x - 4y + 5 = 0$.

উদাহরণ 2. $2x - y + 2 = 0$ এবং $x + 3y - 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় থেকে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $2x - y + 2 = 0$ এবং $x + 3y - 6 = 0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করে পাই

$x = 0, y = 2$ অর্থাৎ, রেখা দুইটির ছেদবিন্দু $(0, 2)$.

ধরি অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ----------- (i)



এখানে $a = x$-অক্ষের ছেদাংশ, $b = y$-অক্ষের ছেদাংশ

শর্তানুসারে, $a = b$.

সুতরাং (i) সমীকরণটি হবে $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1, \Rightarrow x + y = a$

যেহেতু এ রেখাটি ছেদবিন্দু $(0, 2)$ দিয়ে যায়,

সুতরাং $0 + 2 = a \;\therefore\; a = 2$

অতএব সরলরেখাটির সমীকরণ, $x + y = 2$.

উদাহরণ 3. $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -2b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $2(1 + 2b) - b(-4 + 6b) + 4(4 + 3) = 0$ বা, $2 + 4b + 4b - 6b^2 + 28 = 0$

বা, $-6b^2 + 8b + 30 = 0$ বা, $3b^2 - 4b - 15 = 0$

বা, $3b^2 - 9b + 5b - 15 = 0$ বা, $3b(b - 3) + 5(b - 3) = 0$

বা, $(b - 3)(3b + 5) = 0$; অতএব $b = 3$ অথবা $b = -\frac{5}{3}$

উদাহরণ 4. $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. '০৫, '০৭; কু. '০৪; য. '০৬; চ. '০৭, '১০; ঢা. '০৮; রা. য. দি. সি. '১২]

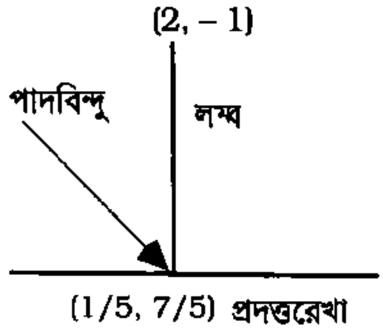
সমাধান ঃ ধরি, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ,

$4x + 3y + k = 0$ ----------------- (i), যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

এ রেখাটি $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে গেলে আমরা পাই, $8 - 3 + k = 0$, বা, $k = -5$

$\therefore$ লম্ব-রেখাটির সমীকরণ, $4x + 3y - 5 = 0$.

এখন $3x - 4y + 5 = 0$ এবং $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুটি নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দু।



বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমীকরণদ্বয় সমাধান করে আমরা পাই

$$\frac{x}{20-15} = \frac{y}{20+15} = \frac{1}{9+16}$$

$$\therefore x = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \text{ এবং } y = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

উদাহরণ 5. দুইটি সরলরেখা (1, 3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + y = 7$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, (1, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - 3 = m\,(x - 1)$ ... (i)

[$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ সূত্র]

প্রদত্ত রেখা $2x + y = 7 \Rightarrow y = -2x + 7$ এর ঢাল $= -2$ [$y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে]

(i) রেখাটি প্রদত্তরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan 45° = \pm \dfrac{m - (-2)}{1 + m\,(-2)}$, $\left[\tan\theta = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \text{ সূত্র দ্বারা}\right]$

$\Rightarrow 1 = \pm \dfrac{m+2}{1-2m} \Rightarrow 1 - 2m = \pm\,(m + 2)$

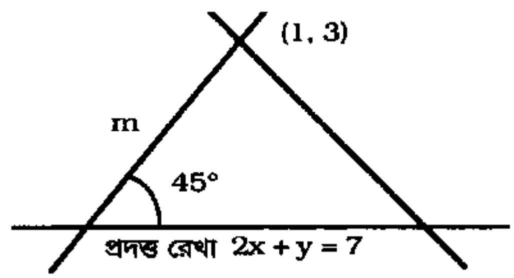
(+) নিয়ে, $1 - 2m = m + 2 \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

(–) নিয়ে, $1 - 2m = -(m + 2) \Rightarrow m = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y - 3 = -\dfrac{1}{3}(x - 1)$, যখন $m = -\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow x + 3y = 10$

এবং $y - 3 = 3\,(x - 1) \Rightarrow 3x - y = 0$, যখন $m = 3$



উদাহরণ 6. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। **[সি. '১১; য. '১২]**

সমাধান : ধরি, রেখাটির সমীকরণ $2x - 7y + 11 + k(x + 3y - 8) = 0$ .... (i) যখন $k \neq 0$ একটি ধ্রুবক।

$\Rightarrow (k + 2)x + (3k - 7)y - 8k + 11 = 0$

যেহেতু রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং yএর সহগ $3k - 7 = 0$ বা, $k = 7/3$.

[অনুচ্ছেদ 3.11 এর অনুসিদ্ধান্ত দ্রষ্টব্য]

(i) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $2x - 7y + 11 + \frac{7}{3}(x + 3y - 8) = 0$

বা, $6x - 21y + 33 + 7x + 21y - 56 = 0$ বা, $13x - 23 = 0$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি $2x - 7y + 11 = 0$ .... (i) এবং $x + 3y - 8 = 0$ .... (ii)

(i) – (ii) × 2 $\Rightarrow -13y + 27 = 0 \;\therefore\; y = \dfrac{27}{13}$

(ii) এ $y = \dfrac{27}{13}$ বসিয়ে, $x + \dfrac{3 \times 27}{13} - 8 = 0$

বা, $x = 8 - \dfrac{81}{13} = \dfrac{23}{13}$ $\therefore$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু $\left(\dfrac{23}{13}, \dfrac{27}{13}\right)$

মনে করি, y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = a$, যা $\left(\dfrac{23}{13}, \dfrac{27}{13}\right)$ বিন্দুগামী। $\therefore a = \dfrac{23}{13}$

সুতরাং নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $x = \dfrac{23}{13}$ বা, $13x - 23 = 0$

প্রশ্নমালা 3.7

1. নিচের রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর :

   (*a*) $y = 5$ এবং $x + y - 2 = 0$, (*b*) $x - 2y + 1 = 0$ এবং $3x - y + 5 = 0$,

   (*c*) $3x + 4y - 2 = 0$ এবং $4x - 3y + 7 = 0$. উ : (*a*) 45° (*b*) 45° (*c*) 90°.

2. k এর মান কত হলে $5x + 4y - 1 = 0$ এবং $2x + ky - 7 = 0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে? উ: $k = 8/5$.

3. a এর মান কত হলে $2x - y + 3 = 0$ এবং $3x + ay - 2 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে? উ : $a = 6$.

4. (i) মূলবিন্দু এবং $x - y - 4 = 0$ ও $7x + y + 20 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x - y = 0$.

   (ii) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১০] উ : $4x + 5y = 0$.

5. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উ : $x - y = 0$.

6. (i) $(3, 2)$ বিন্দু এবং $x - y + 4 = 0$ ও $2x - y + 5 = 0$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + 4y = 11$.

   (ii) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(4, 6)$ ও $(-2, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখার মধ্যবিন্দু এবং $2x + 3y - 6 = 0$ ও $5x - 4y - 1 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। উ : $x - 4y + 19 = 0$.

7. (i) $(2, -3)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৭] উ : $3x + 2y = 0$.

   (ii) এরূপ সরলরেখা সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2, 5)$ বিন্দুগামী এবং $3x + 12y - 7 = 0$ যার উপর লম্ব। [কু. '০৫] উ : $12x - 3y - 9 = 0$.

   (iii) একটি সরলরেখা $(-3, -2)$ বিন্দুগামী এবং $4x + 5y - 2 = 0$ রেখার উপর লম্ব। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. ২০০০] উ : $5x - 4y + 7 = 0$.

   (iv) $(-3, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2y - 11x + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০২] উ : $11y + 2x + 17 = 0$.

8. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা, $3x + 2y + 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 11 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 6y + 15 = 0$ রেখার উপর লম্ব। উ : $3x - 2y + 42 = 0$.

9. $5x - 9y + 13 = 0$ এবং $9x - 5y + 11 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $7x - 7y + 12 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$ [ঢা. '১২]

10. AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ এবং $y = 4x - 1$ হলে, AB এর উপর অংকিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. কু. '১২; য. '১৩] উ : $x + 2y = 7$

11. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x-অক্ষের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১০] উ : $ax + by = a^2$.

12. $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১২] উ : $2x + 11y + 25 = 0$

13. $4x + 3y + 12 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং $x + y - 5 = 0$ ও $2x - y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x + 3y - 19 = 0$.

14. **(i)** $A(8, 5)B(-4, -3)$ রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x + 2y - 8 = 0$.
[রা. য. '১২; সি. '১৩]

(ii) (2, 1), (6, 3) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডরে সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $2x + y = 10$

15. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব দ্বিখন্ডকের সমীকরণ
$$(a - c)x + (b-d)\, y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2).$$

16. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3, 2)$ ও $(3, 8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে 1ঃ 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং উক্ত রেখার উপর লম্ব। উ : $x + y - 3 = 0$.

17. **(i)** দুইটি সরলরেখা $(6,-7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $y + x\sqrt{3} - 1 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। এদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৫; কু. '১১] উ : $y + 7 = 0; y + 7 = \sqrt{3}\,(x - 6)$

(ii) দুইটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ : $(2 \pm \sqrt{3})x + y = 10 \pm 3\sqrt{3}$

(iii) দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং এরা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এদের সমীকরণ থেকে প্রমাণ কর যে, তারা পরস্পর লম্ব।
[ঢা. য. '১১; সি. '১২; চ. '১৩] উ : $2x + y = 0; x - 2y + 5 = 0$

(iv) দুইটি সরলরেখা (6, 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 4y = 11$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। এদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. চ. '১১, '১৩] উ : $x - 7y + 43 = 0, 7x + y - 49 = 0$

(v) $3x + 8y - 10 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক $(3, -4)$, এ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $11x + 5y - 13 = 0$ $5x - 11y - 59 = 0$.

সংকেত : $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বাহু দুইটি কর্ণের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

18. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা, $x - 2y - 1 = 0$ এবং $2x + 3y + 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল $\tan 45°$. [কু. '০৮] উ : $7x - 7y - 3 = 0$.

19. **(i)** দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, -2)$ দিয়ে অতিক্রম করে এবং $2x + y - 4 = 0$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ কোণ উৎপন্ন করে। উ : $x + y - 1 = 0,\ 7x + y - 19 = 0$

(ii) দুইটি সরলরেখা মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3y = 2x$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১১] উ : $x = 8y$, $7x = 4y$.

20. একটি সরলরেখা (2, 5) এবং (5,6) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে; ঐ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা $(-4, 5)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব হবে। উ : $x - 3y + 13 = 0$,

21. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$, $(-3, 0)$ এবং $(5, 6)$. প্রমাণ কর যে, AB ও AC সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। উক্ত বিন্দুগুলিকে কোনো আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু ধরলে তার চতুর্থ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. '০৪] উ : (1,8),

22. একটি সামান্তরিকের দুইটি বাহুর সমীকরণ যথাক্রমে $x - 2y + 3 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$ এবং এর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2, -3)$, ঐ সামান্তরিকের অপর বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $2x + 3y + 11 = 0,\ x - 2y - 19 = 0$

23. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা যদি $(b, 0)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$. [ঢা. রা. '১৩]

24. (2, 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব–দূরত্ব নির্ণয় কর। **[ঢা. '১০; কু. '১১] উ :** $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$; 2.

25. (3, 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু নির্ণয় কর। [ব. '০৫] **উ :** $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

26. **(i)** দেখাও যে, $x = 4 - 2t$, $y = t + 3$ এবং $2x = 3 - 4t$, $y = t + 2$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

(ii) দেখাও যে, $x = t$, $y = 2t + 1$ এবং $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখা দুইটি$(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। **[ব. '১১]**

27. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব হয়। মূলবিন্দু এবং উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখাটিরও সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $3x - 2y + 5 = 0$, $19x + 9y = 0$.

28. A (2, 1) ও B (5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর; রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **উ :** $3x + y = 12$, (0, 12).
[ঢা. '১০; রা. '১১]

29. $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$ এবং $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে a ও b মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। **[দি. '১১; চ. '১২; য. '১৩] উ :** $6a - 4b = 1$

30. a এর মান কত হলে $x - 3y + 2 = 0$, $x - 6y + 3 = 0$ এবং $x + ay = 0$ রেখাত্রয় একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। **[ব. '০৩] উ :** 3

31. $ax + by + c = 0$ রেখাটি $bx + cy + a = 0$ এবং $cx + ay + b = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে গেলে প্রমাণ কর যে, $a + b + c = 0$. **[সি. '০১]**

32. **(i)** x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু. '০৭] উ :** $y - 1 = 0$

(ii) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখাদ্বয়ের সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু. '০৫; দি. সি. '১০; ঢা. ''০৭, ১৩] উ :** $y + 2 = 0$

33. **(i)** y –অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ. '০৪; য. ব. '১০] উ :** $5x - 1 = 0$

(ii) $2x - 3y - 15 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের সাথে একটি সরলরেখা সমবিন্দু এবং $x = 0$ রেখার সমান্তরাল হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **উ :** $x - 4 = 0$

34. একটি সরলরেখা $2x + 5y - 9 = 0$ ও $3x - 4y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের সাথে সমবিন্দু এবং $x = y$ রেখার সমান্তরাল হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **উ :** $23x - 23y = 58$.

35. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের অক্ষদ্বয়ের ছেদক অংশের সংখ্যামান সমান এবং যারা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমবিন্দু। **উ :** $x - y + 2 = 0$, $x + y = 0$

36. $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $5x + y = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **উ :** $23x + 23y = 11$.

37. $3x - 7y + 5 = 0$ এবং $x - 2y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **উ :** $x + y = 85$.

38. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। উ : $x + y - 9 = 0, x - y - 1 = 0$

39. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x - 3y = 1$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। উ : $x + y = 2; x - y = 0$

40. (i) p বিন্দুটি $x - 3y = 2$ রেখার উপর অবস্থিত এবং তা $(2, 3), (6, -5)$ বিন্দু দুইটি হতে সমদূরবর্তী। p এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(14, 4)$

(ii) $x + 2y + 2 = 0$ সরলরেখার উপর এরূপ একটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর যা $(2, -1), (3, 4)$ বিন্দু দুইটি থেকে সমদূরবর্তী। উ : $(-10, 4)$

41. $P(x, y)$ বিন্দুটি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত যা $Q(2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $A(-1, 2)B(-5, 4)$ রেখার উপর লম্ব। দেখাও যে, $2x - y - 1 = 0$.

42. $P(h, k)$ বিন্দু থেকে x ও y অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে PA ও PB হলে, P বিন্দু দিয়ে যায় এবং AB এর উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $hx - ky = h^2 - k^2$.

43. (i) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A\ (6, 1)$ ও $B\ (1, 6)$ এবং এর লম্ববিন্দু $P\ (3, 2)$; অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাংক নির্ণয় কর। [ঢা. '০৪] উ : $(-2, -3)$

(ii) ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF উচ্চতা তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y = 6,\ x - 2y = 7$ ও $2x - y = 8$ এবং A বিন্দুর স্থানাংক $(0, 2)$ হলে, AB এবং AC বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $x + 2y - 4 = 0, 2x + y - 2 = 0$.

44. যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ এবং $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। উ : $a = 17/4, b = 17/3$. [ঢা. '১২ ; সি. '১৩]

45. দেখাও যে, $3x + 5y - 6 = 0$ ও $2x - 3y + 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং $(4, 9)$ বিন্দুর সংযোগ সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী।

46. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও BC বাহুদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0$ ও $x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাংক $(2, -4)$; অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - y - 6 = 0; 2x + y = 0$.

47. একটি সামান্তরিকের দুইটি বাহুর সমীকরণ $3x - 4y + 1 = 0$ ও $2x - y - 1 = 0$ এবং কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু $(2, 3)$. এর অপর বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x - 4y + 11 = 0, 2x - y - 1 = 0$.

48. প্রমাণ কর যে, $2x + y + 5 = 0$ এবং $x - 2y - 3 = 0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। রেখাদ্বয়কে কোনো আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিতি বাহু ধরলে এবং অপর বাহুদ্বয় $(3, 4)$ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করলে অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - 2y + 5 = 0, 2x + y - 10 = 0$.

49. k এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য $(2k - 3)x + (3k - 2)y - (4k - 1) = 0$ রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-1, 2)$.

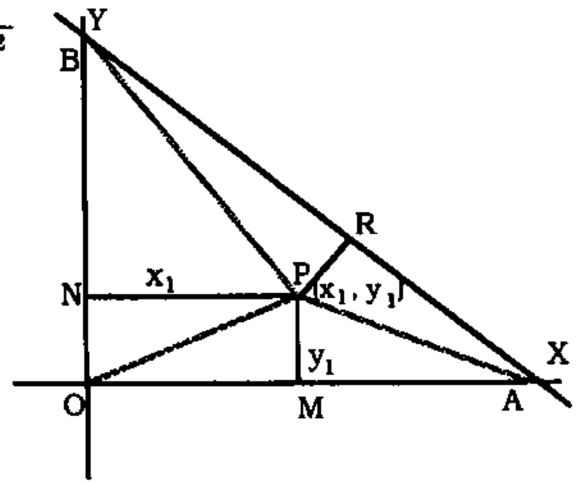
50. দেখাও যে, k এর সব মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা $(3 + 2k)x + 5k\,y - 3 = 0$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর। উ : $(1, -2/5)$.

3.17. কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব

$P(x_1,y_1)$ বিন্দু হতে $ax+by+c=0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে

মনে করি, $ax+by+c=0$ রেখাটি x ও $y-$ অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নরূপে লেখা যায় : $\frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1 \Rightarrow OA=-c/a$, এবং $OB=-c/b$.

$\therefore AB^2=OA^2+OB^2=\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}$ $\therefore AB=\pm\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$



$P(x_1,y_1)$ বিন্দু থেকে x ও y–অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব অঙ্কন করি। সুতরাং $PM=y_1$, $PN=x_1$.

ধরি, P থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য $PR=d$.

এখন $\Delta OAB=\Delta OAP+\Delta OBP+\Delta ABP$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{-c}{a}\right)\left(\frac{-c}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-c}{a}\right).y_1+\frac{1}{2}\left(\frac{-c}{b}\right)x_1+\frac{1}{2}d\times AB$

বা, $\pm d\times\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{cx_1}{b}+\frac{cy_1}{a}+\frac{c^2}{ab}$

$\Rightarrow \pm d\times\sqrt{a^2+b^2}=ax_1+by_1+c$, $\left[\frac{ab}{c}\text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$ সুতরাং, $d=\pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore P(x_1,y_1)$ বিন্দু হতে $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব দৈর্ঘ্য $=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

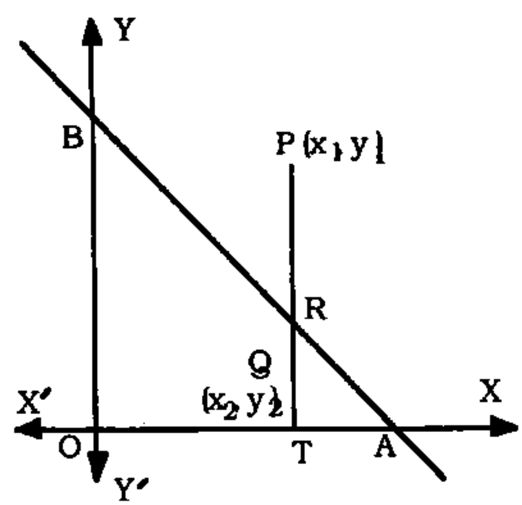
দ্রষ্টব্য : কেবল দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য পরম মান প্রয়োজন।

উদাহরণ । $(3,-2)$ বিন্দু থেকে $12x-5y+6=0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : $(3,-2)$ বিন্দু থেকে $12x-5y+6=0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব

$$=\left|\frac{12.3-5(-2)+6}{\sqrt{(12)^2+(-5)^2}}\right|=\left|\frac{36+10+6}{\sqrt{144+25}}\right|=\left|\frac{52}{\sqrt{169}}\right|=\left|\frac{52}{13}\right|=4.$$

3.17.1. সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্ব এবং ঋণাত্মক পার্শ্ব



মনে করি, AB রেখার সমীকরণ $ax+by+c=0$ এবং $P(x_1,y_1)$ একটি বিন্দু । P থেকে $x-$ অক্ষের উপর PT লম্ব টানি, যা AB কে R বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব (x_1, RT) বিন্দুটি AB রেখার উপর অবস্থিত। এখানে $RT=R$ বিন্দুর কোটি।

সুতরাং $ax_1+b.RT+c=0$ $[\because\ y=RT]$

$\Rightarrow ax_1+c=-b.RT$

$\therefore ax_1+by_1+c=by_1-b.RT$ [উভয়পক্ষে by_1 যোগ করে]

$=b(y_1-RT)=b(PT-RT)>0$ $[\because PT>RT$ এবং $b>0]$

তদ্রূপ AB রেখার অপর পার্শ্বের $Q(x_2,y_2)$ বিন্দুটির জন্য আমরা পাই, $ax_2+by_2+c=by_2-b.RT$

$=b(y_2-RT)=b(QT-RT)<0$ $[\because QT<RT]$

এক্ষেত্রে আমরা বলি $P(x_1, y_1)$ এবং $Q\ (x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি যথাক্রমে AB রেখার ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত। $P\ (x_1, y_1)$ বিন্দুটি AB রেখার উপর থাকলে $ax_1 + by_1 + c = 0$ হবে।

এখন AB রেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ কে L এবং ঐ রেখার একই সমতলস্থ $P\ (x_1, y_1)$ এর জন্য

$(ax_1 + by_1 + c)$ কে $L\ (P)$ দ্বারা সূচিত করা হলে $P \in L \Leftrightarrow L(P) = 0.$

প্রত্যেক সরলরেখা এর বহিঃস্থ সকল বিন্দুকে নিচ্ছেদ দুইটি সেটে বিভক্ত করে।

এক্ষেত্রে $L(P) \cap L\ (Q) = \varnothing$. এ নিচ্ছেদ সেট দুইটিকে আমরা রেখাটির দুই পার্শ্ব বলতে পারি। L এর বহিঃস্থ সকল P বিন্দুর জন্য $L(P) > 0$ হলে, P বিন্দু L এর ধনাত্মক পার্শ্বে এবং $L(P) < 0$ হলে, P বিন্দু L এর ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত বুঝায়।

মন্তব্য : কোনো সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত সকল বিন্দুর জন্য $L(P)$ রাশিটির চিহ্ন (+) অথবা (–) হবে।

উদাহরণ । $P(2, 5), Q(-1, 3)$ বিন্দুদ্বয় $3x - 2y + 7 = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা তা নির্ণয় কর। কোন্ বিন্দুটি মূলবিন্দুর পার্শ্বে অবস্থিত ?

সমাধান : ধরি প্রদত্ত সমীকরণ, $L \equiv 3x - 2y + 7 = 0$

$\therefore L(P) = 3.2 - 2.5 + 7 = 3 > 0$ এবং $L(Q) = 3(-1) - 2.3 + 7 = -2 < 0.$

দেখা যায় যে, $L(P)$ এবং $L(Q)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

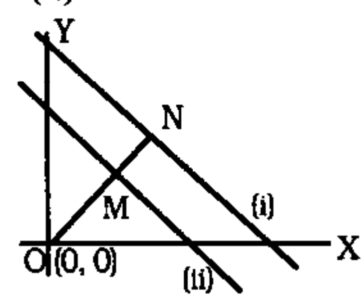
আবার মূলবিন্দু , $O\ (0, 0)$;

$\therefore L(O) = 3.0 - 2.0 + 7 = 7 > 0.$ সুতরাং $L(P)$ এবং $L(O)$ উভয়েই ধনাত্মক অর্থাৎ একই চিহ্নযুক্ত। অতএব রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু ঐ পার্শ্বে P বিন্দুটি অবস্থিত।

3. 17.2. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় : $ax + by + c_1 = 0$ .... (i) $ax + by + c_2 = 0$ ....(ii)

মূলবিন্দু $O(0, 0)$ থেকে (i) রেখার দূরত্ব $ON = \dfrac{a.0 + b.0 + c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



মূলবিন্দু $O(0, 0)$ থেকে (ii) রেখার দূরত্ব $OM = \dfrac{c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

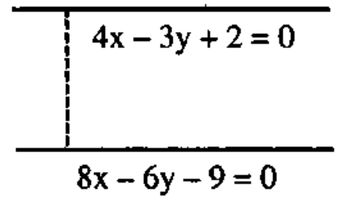
$\therefore$ সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $MN = ON - OM$

$$= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

উদাহরণ। $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

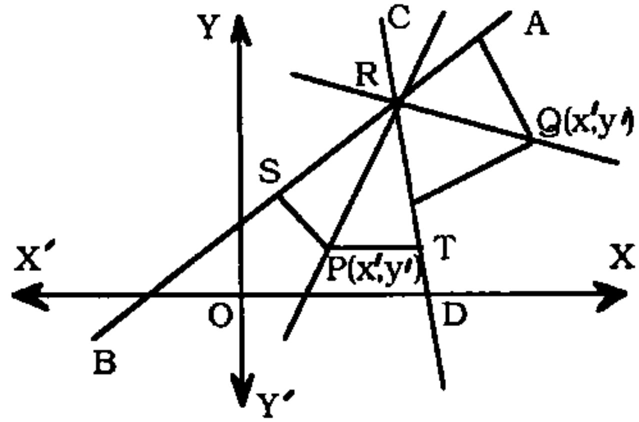
সমাধান : সমীকরণ দুইটিকে এভাবে লেখা যায় : $4x - 3y + 2 = 0$

এবং $4x - 3y - \frac{9}{2} = 0$



অতএব নির্ণেয় দূরত্ব $= \left|\dfrac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\dfrac{2 - (-\frac{9}{2})}{\sqrt{16 + 9}}\right| = \dfrac{13}{10}.$

3.17.3. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ



মনে করি, AB ও CD সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং রেখা দুইটি R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক PR এবং QR.

ধরি, $P(x', y')$ বিন্দুটি $\angle BRD$ এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। P থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PS ও PT লম্ব টানি।

সুতরাং $PS = PT$, (সমদ্বিখণ্ডকের সংজ্ঞা অনুযায়ী)

$$\Rightarrow \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ ..... (ii)}$$

যেহেতু $P(x', y')$ বিন্দু ও মূলবিন্দু উভয়ই $\angle BRD$ –এর ভিতরে অবস্থিত, সুতরাং (ii) এর উভয়পক্ষের চিহ্ন একই হইবে। তদ্রূপ $\angle ARD$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপরস্থ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') হলে,

$$\frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{.......... (iii)}$$

এক্ষেত্রে মূলবিন্দু ও Q বিন্দু CD রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত বলে (iii) এর দুইপক্ষ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

সুতরাং (x', y') বিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \text{ .... (iv)}$$

দ্রষ্টব্য : যদি c_1 ও c_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট হয় অর্থাৎ উভয়ই (+) অথবা উভয়ই (–) চিহ্নযুক্ত হয়, তবে (iv) এর (+) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক বুঝায়। (–) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি অন্য সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্দেশ করে।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. দেখাও যে, (–6, 0) বিন্দুটি $3x + 4y - 1 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

সমাধান : $3x + 4y - 1 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{4x - 3y + 5}{\sqrt{16 + 9}}$$

বা, $3x + 4y - 1 = \pm (4x - 3y + 5)$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $3x + 4y - 1 = 4x - 3y + 5$

বা, $x - 7y + 6 = 0$, ধরি, $L_1 \equiv x - 7y + 6 = 0$

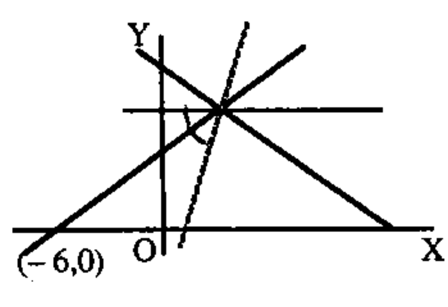
(–) চিহ্ন নিয়ে, $3x + 4y - 1 = -(4x - 3y + 5)$

বা, $7x + y + 4 = 0$,

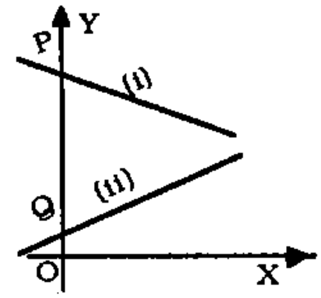
ধরি, $L_2 \equiv 7x + y + 4 = 0$

$L_1(-6, 0) = -6 - 7.0 + 6 = 0$ এবং $L_2(-6, 0) = -6 \times 7 + 0 + 4 \neq 0$

সুতরাং (– 6,0) বিন্দুটি একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।



উদাহরণ 2. **$y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডসমূহ y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।** [রা. '১১; ব. '১২]



সমাধান : প্রদত্ত রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{4+1}} = \pm \frac{x - 2y + 4}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow 2x - y + 1 = \pm (x - 2y + 4)$$

(+) নিয়ে পাই, $x + y - 3 = 0$... (i)

(–) নিয়ে পাই, $3x - 3y + 5 = 0$ ....(ii)

ধরি, (i) ও (ii) রেখাদ্বয় y-অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং P ও Q এর ভুজ $x = 0$, এখন (i) ও (ii) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y = 3, 5/3$

অর্থাৎ $OP = 3$ এবং $OQ = \frac{5}{3}$. অতএব, $PQ = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

উদাহরণ 3. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমমানেরর যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু হতে রেখাটির দূরত্ব 6 একক। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ বা, $x + y = a$ ......(i) $(a > 0)$

মূলবিন্দু $O(0, 0)$ হতে রেখাটির দূরত্ব $= 6$.

$$\therefore \left| \frac{0 + 0 - a}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = 6 \Rightarrow \left| \frac{-a}{\sqrt{2}} \right| = 6 \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$$ [∵ সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে]

(i) এ a এর মান বসিয়ে পাই, $x + y = 6\sqrt{2}$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 3.8

1. **লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর :**
   (*a*) মূলবিন্দু হতে $8x + 6y + 25 = 0$ রেখা — উ : 5/2
   (*b*) $(2, -3)$ বিন্দু হতে $4x - 3y + 33 = 0$ রেখা — উ : 10
2. $5x + 12y = 23$ এবং $5x + 12y + 29 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উ : 4
3. $3x - 2y = 2$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{13}/2$
4. $5x + 12y + 3 = 0$ এবং $5x + 12y + 29 = 0$ সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উ : 2.
5. $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের মধ্যে কোন্‌টি মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক?
   [য. '১২] উ : $16x - 48y + 23 = 0$; $24x + 8y + 7 = 0$, ২য়টি
6. $15x - 8y + 3 = 0$ এবং $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় y- অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : 1190/143
7. P বিন্দু হতে $2x + y - 1 = 0$ এবং $x + 2y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের দূরত্বের অনুপাত 2 ঃ 1 হলে P এর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x + 5y + 1 = 0$; $y + 1 = 0$.
8. দেখাও যে, $7x - 9y + 10 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু $3x + 4y - 5 = 0$ এবং $12x + 5y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।
9. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $y - 2x + 2 = 0$ এবং $y - 3x + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং মূলবিন্দু হতে যাদের দূরত্ব $7/\sqrt{2}$ একক। উ : $x + y = 7$; $17x + 31y = 175$.

10. $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরত্বে অবস্থিত সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[সি. '১২; রা. '১৩] উ : $12x - 5y + 19 = 0$; $12x - 5y - 33 = 0$.

11. $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩] উ : $4x - 3y + 2 = 0$, $4x - 3y - 18 = 0$.

12. **(i)** দেখাও যে, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে $2x \cos\alpha - 3y \sin\alpha = 6$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল α মুক্ত।
(ii) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x \cos\theta + 5y \sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত। [ঢা. '১১; কু. '১৩]

13. প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দুদ্বয় হতে $bx \cos\theta + ay \sin\theta = ab$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হবে, যখন $a^2 = b^2 + c^2$.

14. $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু হতে $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং এ লম্ব x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। উ : 5; 150°.

15. দেখাও যে, (0, 1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। [কু. য. '১১; কু. দি. '১৩]

16. দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু, $3x + 4y - 12 = 0$ এবং $5x + 12y - 52 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

17. মূলবিন্দু হতে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ এবং $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p_1 হলে প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p_1{}^2 = k^2$. [চ. '১১]

18. $x - y - 4 = 0$ ও $7x + y + 20 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। উ : $3x - y = 0$.

19. $2x + y + 3 = 0$ এবং $2x - 4y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $2x + 6y - 1 = 0$. $6x - 2y + 13 = 0$.

20. (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$. [চ. '১৩]

21. $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $12x + 5y + 13 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দুধারী তার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $8x - 14y + 39 = 0$.

22. $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরালে $3x + y + 4 = 0$ রেখা থেকে (1, 2) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।
সংকেত : $P(1,2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখাটি $3x + y + 4 = 0$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর। [য. '০৮] উ : 3.

23. $bx + ay = ab$ ও $ax - by = ab$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হতে $ax - by = 0$ এর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য ও তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $ab/\sqrt{a^2+b^2}$, $bx + ay = ab$.

24. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১২; য. সি. '১৩] উ : $6x + 8y = 65$, $6x + 8y + 85 = 0$.

25. মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. সি. '১১; দি. '১২] উ : $4x + 3y \pm 35 = 0$.

26. $8x - 6y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $6x + 8y \pm 40 = 0.$

27. দেখাও যে, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ বিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $6x + 4y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

28. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখাদ্বয় মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [রা. '১২] উ : $c = 10.$

29. y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে $3y = 4x - 10$ রেখার লম্বদূরত্ব 4 একক তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. '১০] উ : $(0, -10), \left(0, \frac{10}{3}\right)$

30. x– অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে $3x + 4y = 15$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দূরত্ব 6 একক হয় তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-5, 0), (15, 0).$

31. $5x - 12y - 6 = 0$, $3x + 4y + 2 = 0$ এবং $y = 2$ রেখাগুলির সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ : $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).$

32. $2x + y + 3 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১০] উ : $\left(2\sqrt{5} + 3\right)x + \left(\sqrt{5} - 4\right)y + 3\sqrt{5} + 7 = 0.$

33. $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + y + 2 = 0.$

34. $y = 4$ এবং y–অক্ষের অর্ন্তগত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + y - 4 = 0, x - y + 4 = 0$

35. (i) একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x - 2y = 0$, $3x + y = 0$ এবং $2x - 3y + 11 = 0$ হলে এর লম্বকেন্দ্র(*O*rthocentre) নির্ণয় কর। উ : $(2, -3)$

(ii) ΔABC এর শীর্ষ তিনটি $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ ও $C(3, 5)$ হলে ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ : $(5/3, 7/3)$

(iii) ΔABC এর দুইটি শীর্ষ $A(5, -1)$, $B(-4, -7)$ এবং লম্বকেন্দ্র $(0, 0)$ হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-2, 3)$

36. (i) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরে অবস্থিত। উ : $\sqrt{3}\,x - y \pm 8 = 0$

(ii) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূল বিন্দু হতে যার দূরত্ব 4 একক।

[সি. '০৯; কু. '১২] উ : $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0.$

37. মূলবিন্দু হতে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্য p হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$.

38. একটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু $6x - 8y + 5 = 0$ এবং $3x - 4y + 10 = 0$ রেখা দুইটির উপর অবস্থিত। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ : $\frac{9}{4}$ বর্গএকক।

39. যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $4x + 3y = 12$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x - 3y = 12$, তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ : $(3, 25/7)$

40. $(0, 0)$, $(0, 3)$ ও $(4, 0)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের কোণসমূহের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [ঢা. '০৪; কু. '১০; সি. '১১] উ : $x - y = 0, x + 3y - 4 = 0, 2x + y - 3 = 0$

প্রশ্নমালা 3.9

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. একটি সরলরেখার সমীকরণ : $3x - 4y + 8 = 0$.

(a) সরলরেখার ঢাল বলতে কি বুঝ? উপরে উল্লিখিত সরলরেখাটির ঢাল এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর? উ : 3/4, 2.

(b) $a_1x + b_1y + c_1 =$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্তটি লিখ।

(c) $ax + by + c = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সমীকরণ দুইটি একটি সরলরেখা সূচিত করলে, p এর মান a, b, c, এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। উ : $p = \pm c/\sqrt{a^2 + b^2}$

2. **একটি সরলরেখার সমীকরণ $3x - 2y + 4 = 0$**

(a) $y = m_1x + c_1$ $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে দেখাও যে, $m_1 \times m_2 = -1$.

(b) $x = 2$ এবং $y = 2$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, একটি সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। উ : $x = y$, $x + y = 4$.

(c) একটি সরলরেখা $(-3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x – অক্ষের সাথে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{3}x - y + (3\sqrt{3} + 2) = 0$

3. **তিনটি সরলরেখার সমীকরণ নিম্নরূপ :**

$x + 2y + 5 = 0$ --- (i) , $kx + 4y - 7 = 0$ --- (ii), $4x - 5y + 1 = 0$ --- (iii)

(a) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ দেয়া হলো। এদের ঢাল নির্ণয় না করে তুমি কিভাবে বুঝবে রেখা দুইটি সমান্তরাল না পরস্পর লম্ব।

(b) চিত্র অংকন করে $y = mx + c$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা কর। m ও c এর ব্যাখ্যা দাও।

(c) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণে $k = 2$ অথবা 5 হলে, উক্ত রেখাত্রয় কিরূপ হবে তা বিশ্লেষণ কর।

উ : (i) ও (ii) সমান্তরাল, (ii) ও (iii) লম্ব।

4. **$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।**

(a) $A(8, 5)$ $B(-4, -3)$ রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $3x + 2y = 8$

(b) α কে পরিবর্তনশীল ধরে AB এর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$

(c) $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x – অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $7x - 7y + 12 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.

5. **একটি সরলরেখার সমীকরণ $8x - 6y + 9 = 0$.**

(a) $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $4x - 3y + 10 = 0$

(b) $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর। সূত্রটির সাহায্যে প্রদত্ত ও নির্ণেয় রেখার দূরত্ব বের কর। উ : 11/10.

(c) $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ : (1/5, 7/5).

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

   (a) $y = mx$ (b) $y = \frac{y_1}{x_1}x$

   (c) $y - y_1 = m(x - x_1)$ (d) $y = \frac{x_1}{y_1}x.$

2. (2,1) এবং (6, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ড রেখার সমীকরণ :

   (a) $2x + y = 10$ (b) $2x - y = 8$

   (c) $x + 2y = 10$ (d) $x - 2y = 6$

   [সংকেত : $A(a, b)$ $B(c, d)$ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক $(a - c)x + (b - d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$]

3. মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ :

   (a) $4x - 3y = 0$ (b) $4x + 5y = 0$

   (c) $4x + 4y = 0$ (d) $5x + 2y = 0$

4. (1,2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ :

   (a) $4x + 3y = 10$ (b) $4x + 3y + 10 = 0$

   (c) $4x + 3y - 6 = 0$ (d) $4x + 3y = 8$

6. $x = a, y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

   (a) $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ (b) $\frac{1}{2m}(ma + b)^2$

   (c) $\frac{1}{m}(ma + b)$ (d) $\frac{m}{2}(b - ma)^2$

8. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে, রেখাটির সমীকরণ :

   (a) $4x + 4y + 10$ (b) $3x + 2y = 12$

   (c) $4x + 3y = 8$ (d) $4x + 3y = 6$

9. x – অক্ষের উপর লম্ব এবং (4, –7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ ঃ

   (a) $x = 4$ (b) $y + 7 = 0$

   (c) $x + 4 = 0$ (d) $y - 7$

10. y–অক্ষের উপর লম্ব এবং (5, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ ঃ

    (a) $x = 5$ (b) $y = 6$

    (c) $x + 5 = 0$ (d) $y + 6 = 0$

11. মূল বিন্দু হতে $12x - 5y + 26 = 0$ রেখার দূরত্ব ঃ

    (a) 2 (b) 3

    (c) $\frac{11}{13}$ (d) 4

12. $3x + 2y + 5 = 0$ এবং $ax - 4y + 7 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান

    (a) 4 (b) 8/3 (c) 6 (d) 8/5

ব্যবহারিক

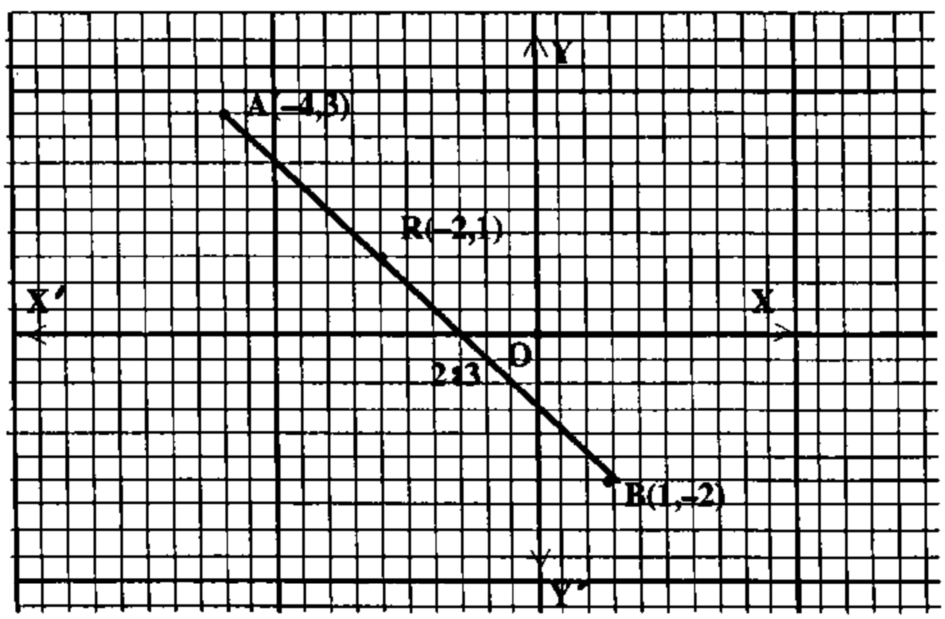
3.18. রেখা বিভক্তিকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 1 : (– 4, 3) এবং (1, – 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : তত্ত্ব : (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

কার্যপদ্ধতি : ছক কাগজের ক্ষুদ্র 2 বর্গের বাহুকে 1(একক) ধরি। ছক কাগজে x ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করে প্রদত্ত $A(-4, 3)$, $B(1, -2)$ বিন্দু দুইটি স্থাপন করি।



মনে করি, AB রেখাকে (x, y) বিন্দুটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\therefore x = \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2 + 3} = \frac{2 - 12}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$\text{এবং } y = \frac{2 \times (-2) + 3 \times 3}{2 + 3} = \frac{-4 + 9}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

অতএব নির্ণেয় বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 2, 1)

ছক কাগজে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় : রেখাটি স্কেল দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত করি। 2 : 3 অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুটি ছক কাগজে চিহ্নিত করি। দেখা যায় যে, বিন্দুটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 10 ঘর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে পাঁচ ঘর দূরে অবস্থিত।

অর্থাৎ ছক কাগজে নির্ণেয় বিন্দুটির অবস্থান বা স্থানাঙ্ক (– 2, 1)

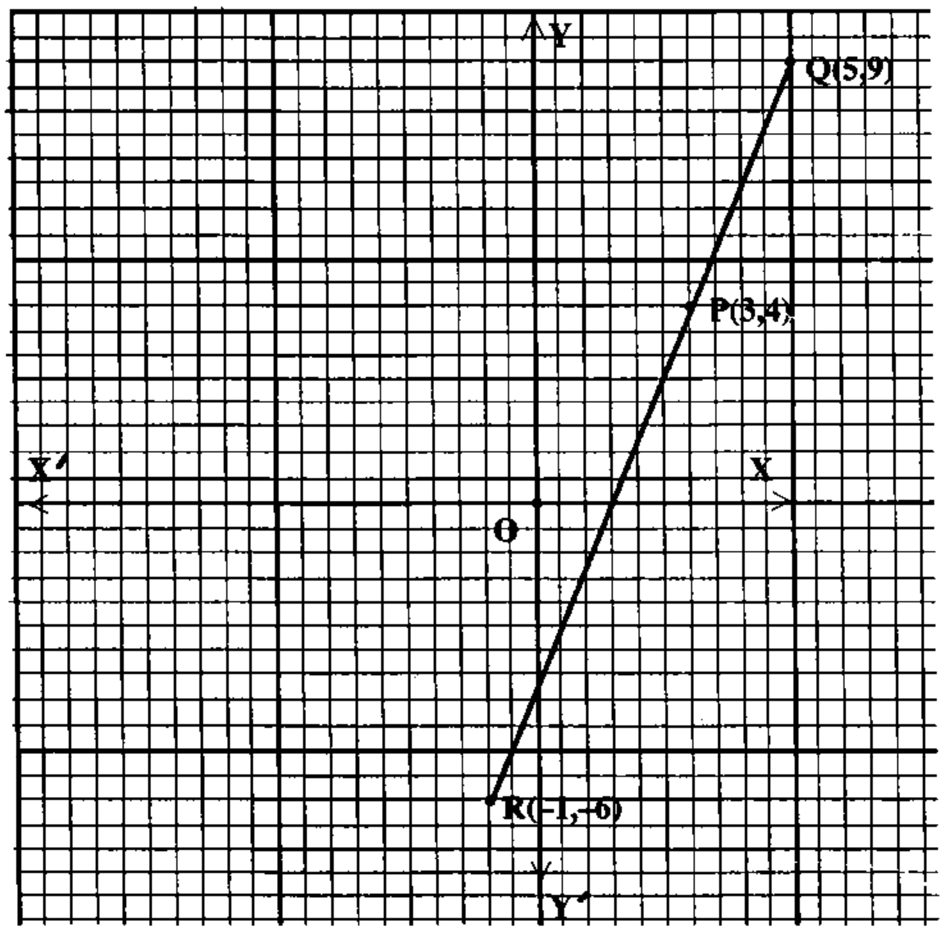
সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 2 : $P(3, 4)$ এবং $Q(5, 9)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 2 ঃ 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : তত্ত্ব : (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = \dfrac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$ এবং $y = \dfrac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

কার্যপদ্ধতি : ছক কাগজে x ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম এক বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) ধরে প্রদত্ত বিন্দু দুইটি স্থাপন করি।

মনে করি, $R(x, y)$ বিন্দুটি PQ রেখাংশকে 2 ঃ 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। অর্থাৎ $PR : QR = 2 : 3$



$$\therefore\ x = \frac{2 \times 5 - 3 \times 3}{2 - 3} = \frac{10 - 9}{-1} = -1 \text{ এবং } y = \frac{2 \times 9 - 3 \times 4}{2 - 3} = \frac{18 - 12}{-1} = -6$$

∴ নির্ণেয় বিভক্তকারী বিন্দুটি R এর স্থানাঙ্ক $(-1, -6)$.

ছক কাগজে বিভক্তকারী বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় :

ছক কাগজে বর্ধিত PQ রেখার উপর R বিন্দুটির অবস্থান চিহ্নিত করি যা, P এবং Q থেকে যথাক্রমে 2 এবং 3 একক দূরত্বে অবস্থিত।

দেখা যায় যে, R বিন্দুটি তৃতীয়–চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং যা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 5 ঘর এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে 12 ঘর দূরে অর্থাৎ বিন্দুটির ভুজ $x = \dfrac{-2}{2} = -1$ এবং কোটি $y = \dfrac{-12}{2} = -6$।

∴ বিভক্তকারী বিন্দুটির অবস্থান বা স্থানাঙ্ক $(-1, -6)$

শ্রেণির কাজ

1. $P(1, -1)$ ও $Q(8, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $3 : 4$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
2. একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যা $(-2, 3)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $1 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

3.19. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

সমস্যা নং		তারিখ :

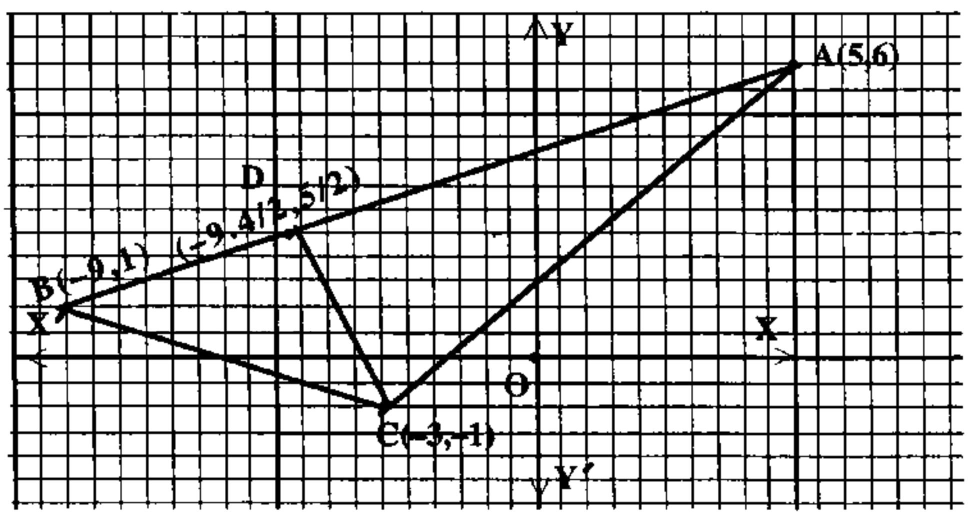
সমস্যা 3 : একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (5, 6), (– 9, 1) এবং (– 3, – 1); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\frac{1}{2}$ (ভূমি × উচ্চতা) এর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান : তত্ত্ব : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং (x_3, y_3) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

কার্যপদ্ধতি : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(5, 6), B(-9, 1)$ এবং $C(-3, -1)$

ছক কাগজে x ও y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) নিয়ে, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি ছক কাগজে স্থাপন করি।



$$\therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(5 + 54) + (9 + 3) + (-18 + 5)\} = \frac{1}{2}(59 + 12 - 13) = 29$$

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 29 (বর্গ একক)।

আবার ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ভূমি × উচ্চতা)

C বিন্দু থেকে AB বাহুর উপর CD লম্ব অঙ্কন করি এবং AB বাহুর উপর D এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-9.4}{2}, \frac{5}{2}\right)$ নির্ণয় করি।

এখন AB এবং CD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

$$AB = \sqrt{(5+9)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{196 + 25} = \sqrt{221} = 14.866$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{-9.4}{2} + 3\right)^2 + \left(\frac{5}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 2.89} = 3.89$$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2}(14.866 \times 3.89) = 28.914$ বর্গ একক (প্রায়)

শ্রেণির কাজ :

1. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $(-3, -2)$, $(-3, 9)$ এবং $(5, -8)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা)–এর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।
2. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 3)$, $(-3, -4)$ এবং $(5, -1)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা) এর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

3.20. সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 1 : $2x + y = 6$ সরল রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

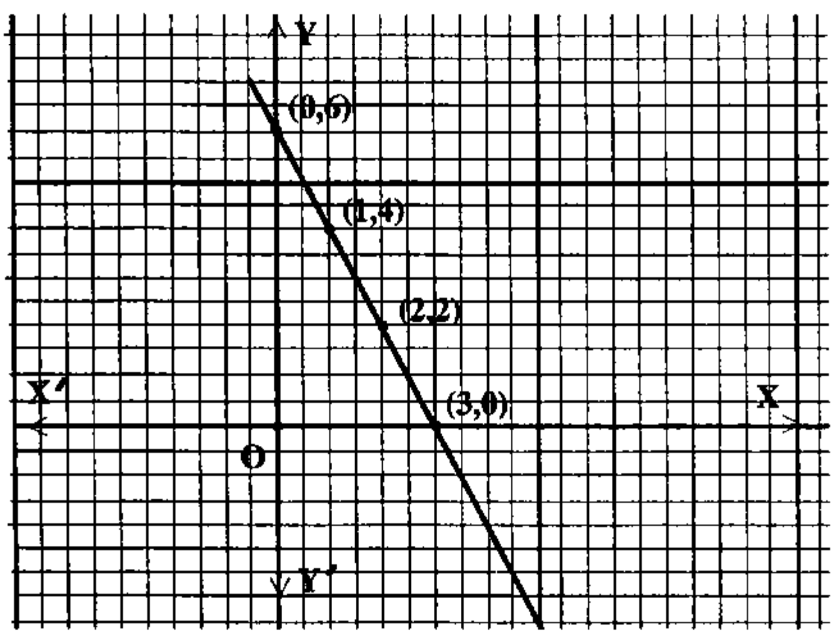
সমাধান : **তত্ত্ব :** $S = \{(x, y) \in R \times R : 2x + y = 6\}$

কার্যপদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণ, $y = 6 - 2x$ .... (i)

x	0	1	3	2
y	6	4	0	2

সমীকরণ (i) থেকে $S = \{(0, 6), (1, 4), (3, 0), (2, 2)\}$ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

ছক কাগজে x ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) ধরে উক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি।



স্থাপিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দ্বারা যুক্ত করে আমরা প্রদত্ত সরলরেখাটির লেখচিত্র পাই।

শ্রেণির কাজ

1. নিচের সরলরেখাগুলির লেখ অঙ্কন কর :

(i) $3x - 2y = 6$ (ii) $x + 4y + 8 = 0$

(iii) $2x + y - 4 = 0$ (iv) $x - 2y + 1 = 0$

3.21. লেখচিত্র থেকে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

সমস্যা নং		তারিখ :

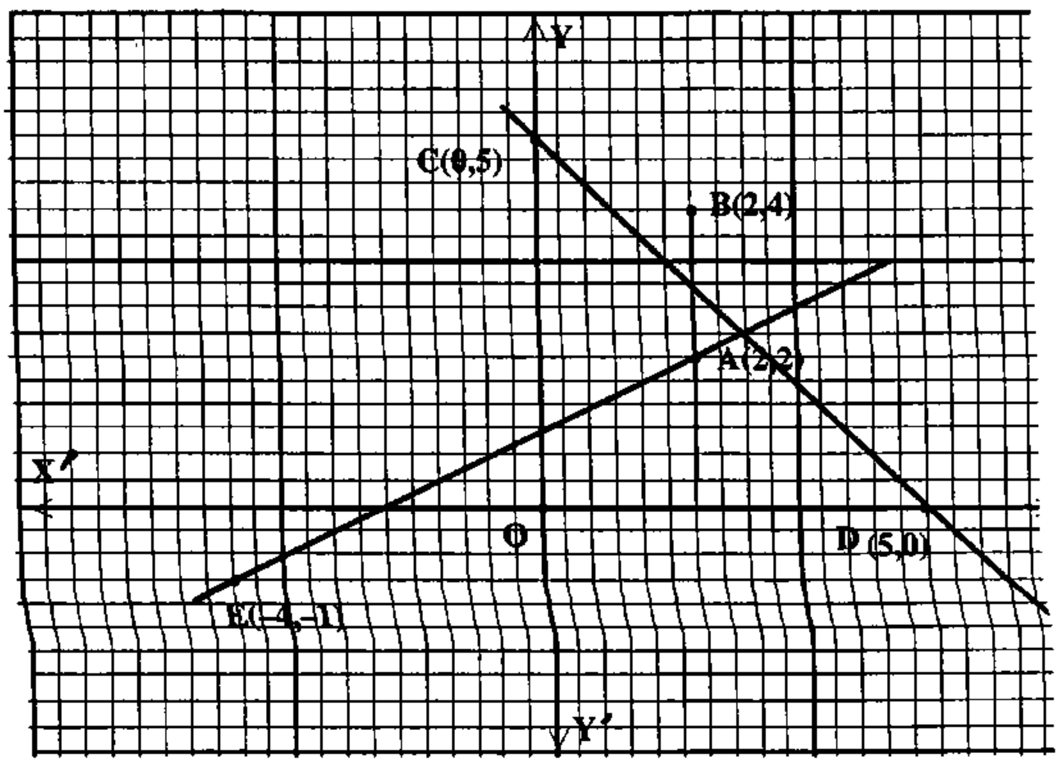
সমস্যা 1 : কার্তেসী সমতলে কতকগুলি বিন্দুর সেট দেওয়া হলো। এদের যে কোনো দুইটি বিন্দু সংযোগ করে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং সমীকরণের আকার উল্লেখ কর।

$S = \{A(2, 2), B(2, 4), C(0, 5), D(5, 0), E(-4, -1), F(3, 4), G(3, -5)\}$

সমাধান :

তত্ত্ব : সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $ax + by + c = 0$, যেখানে a ও b উভয়ই শূন্য নয়। যে কোনো দুইটি বিন্দু সংযোগে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়।

কার্যপদ্ধতি : ছক কাগজে x ও y–অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ক্ষুদ্র তিন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) নিয়ে প্রদত্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। পেন্সিল দ্বারা, যে কোনো দুইটি বিন্দু সংযোগ করে সরলরেখা ও এর সমীকরণ নির্ণয় করি।



উৎপন্ন রেখাগুলি : A ও B সংযুক্ত রেখাটি $x = 2$, বা, y-অক্ষের সমান্তরাল C, $\emptyset\pi D$ বিন্দু দুইটি সংযোগে উৎপন্ন রেখাটি $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ বা, $x + y = 5$, বা, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারের।

A ও E বিন্দু দুইটি সংযোগে উৎপন্ন রেখাটির সমীকরণ $\frac{x-2}{2+4} = \frac{y-2}{2+1}$

বা, $\frac{x-2}{6} = \frac{y-2}{3}$

বা, $(x - 2) = 2(y - 2)$ বা, $x - 2y + 2 = 0$

যা, $y = mx + c$ আকারের সমীকরণ।

3.22. (i) অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 1.: x-অক্ষের সাপেক্ষে $(2, 3)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

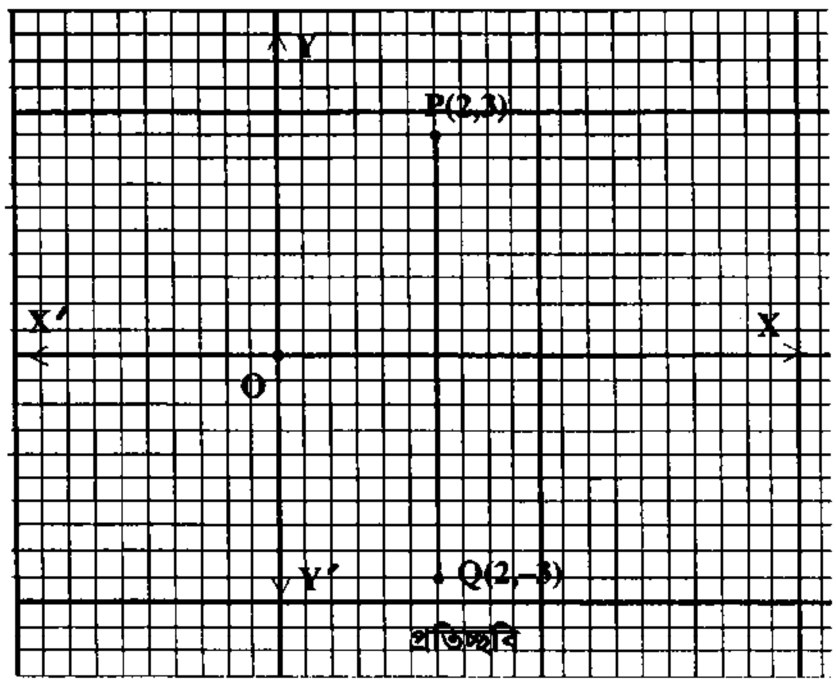
তত্ত্ব : x-অক্ষের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর প্রতিচ্ছবি ঐ বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর অংকিত লম্বের বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত এবং বিন্দুটি ও এর প্রতিচ্ছবি x-অক্ষ থেকে সমদূরবর্তী।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ অংকন করে মূলবিন্দু চিহ্নিত করি।

(ii) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$ একক ধরে $(2, 3)$ বিন্দুটি স্থানাঙ্কায়িত করি।

(iii) $(2, 3)$ বিন্দুটির মধ্য দিয়ে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব অংকন করি এবং লম্বটিকে নিচের দিকে বর্ধিত করি।

(iv) লম্বের বর্ধিতাংশের উপর একটি বিন্দু চিহ্নিত করি যেন, x-অক্ষ থেকে তার ও প্রদত্ত বিন্দুটি সমদূরবর্তী হয়।



(v) ছক কাগজ থেকে দেখা যায় চিহ্নিত প্রতিচ্ছবি বিন্দুটি y-অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র 6 ঘর ডান দিকে এবং x-অক্ষ থেকে নিচের দিকে 9 ঘর। অর্থাৎ, প্রতিচ্ছবি বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক $= 2$ এবং y-স্থানাঙ্ক $= -3$.

ফলাফল : নির্ণেয় প্রতিচ্ছবি বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(2, -3)$.

3.22. (ii) x-অক্ষের সাপেক্ষে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 2.: x-অক্ষের সাপেক্ষে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব : যে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে তার উপর যে কোনো দুইটি বিন্দু নিয়ে x-অক্ষের সাপেক্ষে এ বিন্দু দুইটির প্রাপ্ত প্রতিচ্ছবি সংযোগকারী রেখাটিই প্রদত্ত রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু $O(0, 0)$ চিহ্নিত করি। স্কেল : ছক কাগজের ক্ষুদ্র দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$(একক) ধরি।

(ii) $x - y + 1 = 0$ রেখার উপর $P(2, 3)$ ও $Q(4, 5)$ দুইটি বিন্দু নিয়ে ছক কাগজে স্থাপন করি।

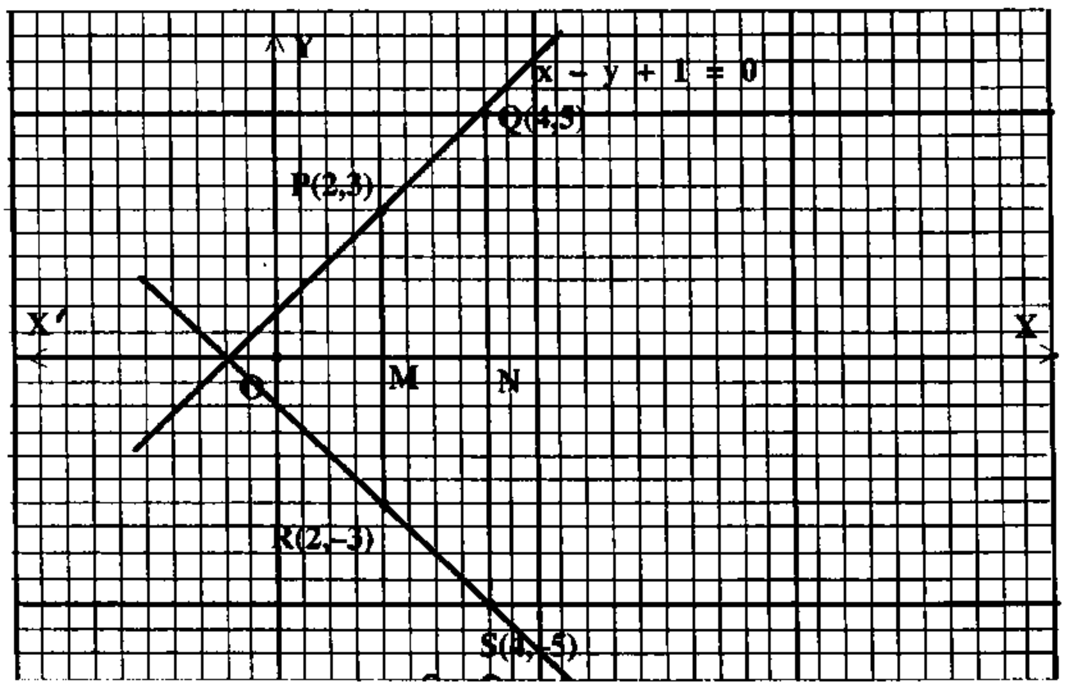
(iii) প্রদত্ত রেখাটির লেখ অঙ্কন করি। অতপর P ও Q বিন্দু দিয়ে x অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN দুইটি লম্ব অঙ্কন করে R ও S পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $PM = MR$ এবং $QN = NS$ হয়।

(iv) R ও S বিন্দু দুইটি যথাক্রমে P ও Q এর প্রতিচ্ছবি এবং R ও S সংযোগকারী রেখাটিই x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রদত্ত রেখাংশের প্রতিচ্ছবি। ছক কাগজ থেকে R ও S বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(2, -3)$ ও $(4, -5)$ নির্ণয় করি।

অতএব, প্রতিচ্ছবি RS রেখার সমীকরণ $\dfrac{y+3}{-3+5} = \dfrac{x-2}{2-4}$

বা, $\dfrac{y+3}{2} = \dfrac{x-2}{-2}$

বা, $x + y + 5 = 0$



ফলাফল : x- অক্ষের সাপেক্ষে $x - y + 1 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি $x + y + 5 = 0$.

3.23. নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 2 : $3x + 5y - 16 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $(5, 7)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

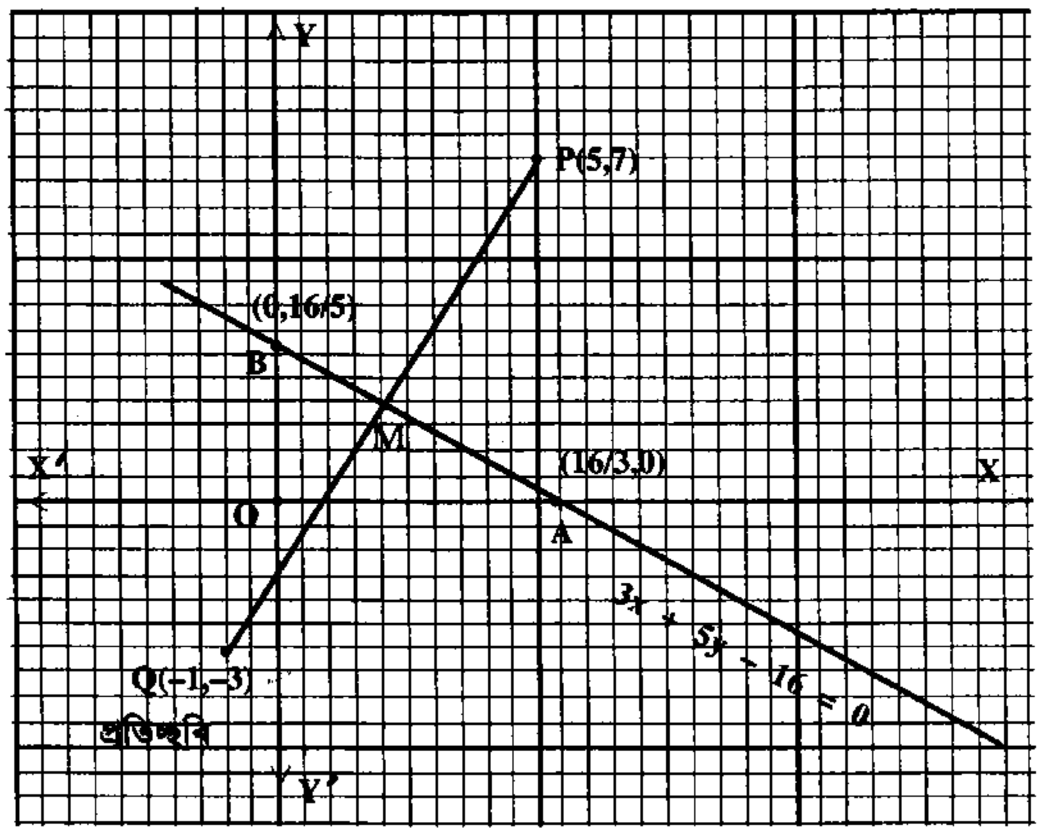
সমাধান : তত্ত্ব : কোনো সরলরেখার সাপেক্ষে একটি বিন্দুর প্রতিচ্ছবি ঐ বিন্দু থেকে রেখাটির উপর অংকিত লম্বের বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত এবং প্রদত্ত বিন্দুটি ও এর প্রতিচ্ছবি প্রদত্ত রেখাটি হতে সমদূরবর্তী।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ধরি প্রদত্ত বিন্দুটি P.

(ii) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে, প্রদত্ত $P(5, 7)$ বিন্দুটি স্থাপন করি। প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর $A(16/3, 0)$ এবং $B(0, 16/5)$ দুইটি বিন্দু নিয়ে এদেরকে পেন্সিল দ্বারা যুক্ত করে AB রেখাটি অঙ্কন করি।

(iii) $P(5, 7)$ বিন্দু থেকে প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর PM লম্ব অঙ্কন করি এবং লম্বটিকে নিচের দিকে Q পর্যন্ত র্ধিত করি যেন $PM = QM$ হয়।

তাহলে Q বিন্দুটি প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে $P(5, 7)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি।



(v) ছক কাগজ থেকে দেখা যায় Q বিন্দুটি y-অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র 2 ঘর বাম দিকে এবং x-অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র 6 ঘর নিচে। অর্থাৎ, প্রতিচ্ছবি বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক $= -1$ এবং y-স্থানাঙ্ক $= -3$.

ফলাফল : অতএব, প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে $(5, 7)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি $(-1, -3)$.

সমস্যা নং		তারিখ :

সমস্যা 3 : $x - 2y + 1 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $2x + 3y - 6 = 0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় ।

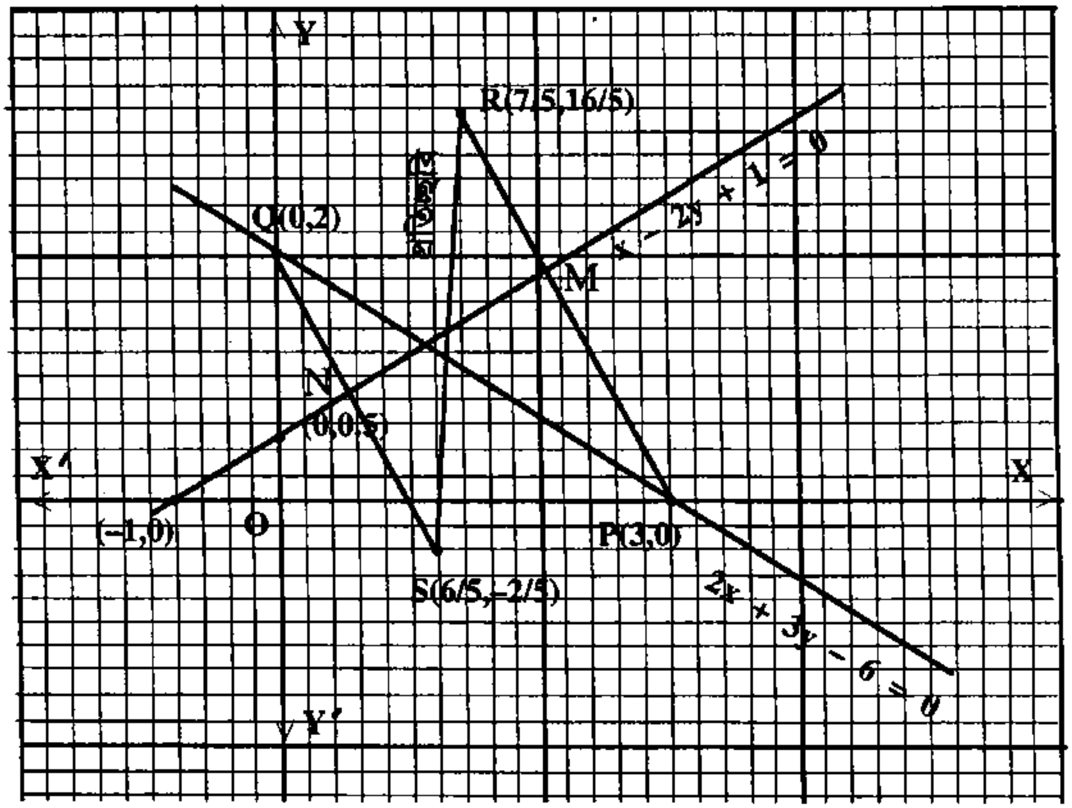
সমাধান : তত্ত্ব : যে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ যে কোনো দুইটি বিন্দুর প্রদত্ত সরলরেখার সাপেক্ষে দুইটি প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করে এদের সংযোগকারী রেখাটিই হবে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

কার্যপদ্ধতি : (i) ছক কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু $O(0, 0)$ চিহ্নিত করি।

(ii) $2x + 3y - 6 = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে এরূপ দুইটি বিন্দু $P(3, 0)$ এবং $Q(0, 2)$ নির্ণয় করি।

(iii) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক নিয়ে উক্ত বিন্দু দুইটি স্থাপন করি।

(iv) $P(3, 0)$ এবং $Q(0, 2)$ বিন্দু দিয়ে $x - 2y + 1 = 0$ রেখাটির উপর PM ও QN দুইটি লম্ব অংকন করি এবং লম্ব দুইটি যথাক্রমে R ও S বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন PM = MR এবং QN = NS হয়।



(v) ছক কাগজ থেকে দেখা যায় R ও S বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$ এবং $\left(\frac{6}{5}, \frac{-2}{5}\right)$ যা যথাক্রমে P ও Q এর প্রতিচ্ছবি।

এই প্রতিচ্ছবি বিন্দু দুইটি সংযোগে উৎপন্ন সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{y-\frac{16}{5}}{\frac{16}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{x-\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{6}{5}} \text{ বা, } \frac{5y-16}{18} = \frac{5x-7}{1} \text{ বা, } 90x - 5y - 110 = 0 \text{ বা, } 18x - y - 22 = 0$$

যা নির্ণেয় রেখাংশের প্রতিচ্ছবি।

ফলাফল : $x - 2y + 1 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $2x + 3y - 6 = 0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি $18x - y - 22 = 0$.

শ্রেণির কাজ

1. x ও y - অক্ষের সাপেক্ষে $(3, 4), (-2, 3), (-2, -4)$ এবং $(3, -2)$ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
2. $3x - 2y + 5 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x + y - 6 = 0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
3. $x - 2y + 2 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x + y - 1 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
4. $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x - 2y + 4 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
5. $2x + 5y - 10 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $(3, 4)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
6. x - অক্ষের সাপেক্ষে $x + y - 3 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।
7. y - অক্ষের সাপেক্ষে $x - 2y + 4 = 0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।