ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

Matrices and Determinants

Arthur Cayley

যেকোনো ধরনের তথ্য সংগ্রহ ও সংরক্ষণের জন্য আমরা সর্বদা বিভিন্ন উপায় অবলম্বন করে থাকি। আর এই সংগৃহীত তথ্য এমনভাবে ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে সাজানো হয় যেন পরবর্তীতে ঐ তথ্য বোঝা ও বিশ্লেষণ করা সহজতর হয়।

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের সূচনা হয় খ্রিস্টপূর্ব দ্বিতীয় শতকের পূর্বে। প্রাচীন ব্যাবিলন ও চীন থেকেই ম্যাট্রিক্স সম্পর্কিত এই ধারণা পাওয়া যায়। এরপর সতের শতাব্দীর শেষ পর্যন্ত গণিতের এই গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ের তেমন কোনো প্রসার ঘটেনি।

ইংরেজ গণিতবিদ জেম্‌স্ জোসেফ সিলভেস্টার (James Joseph Sylvester) (1814-1897) 1850 খ্রিস্টাব্দে সর্বপ্রথম ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে ধারণা ব্যক্ত করেন। তারই সহকর্মী আর্থার ক্যালি (Arthur Cayley) (1821-1895) বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ধারণাসহ ম্যাট্রিক্সের তাৎপর্য তুলে ধরেন। এটি তিনি 1853 খ্রিস্টাব্দে প্রকাশ করেন। পরবর্তীতে তিনি 1858 খ্রিস্টাব্দে তাঁর পত্রিকা 'Memoir on the theory of matrices' এ প্রথমে বিশ্লেষণমূলকভাবে ম্যাট্রিক্সকে প্রকাশ করেন। এ কারণে **আর্থার ক্যালিকে** ম্যাট্রিক্সের জনক বলা হয়। বিখ্যাত পদার্থবিজ্ঞানী হাইজেনবার্গ (Heisenberg) 1925 খ্রিস্টাব্দে কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় প্রথম ম্যাট্রিক্সের ব্যবহার শুরু করেন।

গণিতে সমীকরণ জোটের সমাধান, পরিসংখ্যানের সম্ভাবনা তত্ত্বে, উচ্চতর অর্থনীতিতে, ব্যবসায় গণিতে আয়-ব্যয় হিসাব ইত্যাদিতে ম্যাট্রিক্স বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়। শেয়ারের ক্রয়-বিক্রয় হিসাব, কোন প্রকার ট্রেজারি বন্ডে কী পরিমাণ অর্থ বিনিয়োগ করতে হবে তা বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সহজে নির্ণয় করা যায়।

Gabriel Cramer

একঘাতিক সমীকরণ জোট (System of linear equations) এর সমাধান করার প্রয়াসেই মূলত নির্ণায়কের উৎপত্তি। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতেও একঘাতিক সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়। তবে নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে সমসংখ্যক চলক ও সমীকরণবিশিষ্ট একঘাতিক সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয়ের জন্য নির্ণায়ক পদ্ধতি অত্যন্ত সহজ ও কার্যকর।

1683 খ্রিস্টাব্দে প্রথম জাপানি গণিতবিদ Seki নির্ণায়ক বিষয়ক প্রাথমিক ধারণা প্রকাশ করেন। তিনি 2×2, 3×3, 4×4 এবং 5×5 ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক নিরূপণ করেন এবং সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ে নির্ণায়কের ব্যবহার প্রসঙ্গে ধারণা দেন। একই বছরে জার্মান গণিতবিদ লিবনীজ (Leibnitz) অনুরূপ ধারণা ও প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ করেন। 1750 খ্রিস্টাব্দে সুইস গণিতবিদ **গ্যাব্রিয়েল ক্রেমার** (Gabriel Cramer) (1704 – 1752) নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাতিক সমীকরণ জোটের সমাধান করেন। 1801 খ্রিস্টাব্দে সর্বপ্রথম Gauss 'নির্ণায়ক' শব্দটি প্রয়োগ করেন এবং 1812 খ্রিস্টাব্দে ফরাসি গণিতবিদ Cauchy নির্ণায়ককে আধুনিক ভাবে প্রতিষ্ঠিত করেন।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়, একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান ও ভেক্টর জ্যামিতিতে নির্ণায়ক ব্যবহৃত হয়।

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে—

- ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ উদাহরণসহ বর্ণনা করতে পারবে।
- ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ করতে পারবে।
- নির্ণায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবে।
- নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- নির্ণায়কের ধর্মাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বর্গম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা এবং প্রযোজ্য ক্ষেত্রে তা নির্ণয় করতে পারবে।
- নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ : ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ
- পাঠ-২ : ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ
- পাঠ-৩ : উদাহরণমালা
- পাঠ-৪ ও ৫ : অনুশীলনী-1(A)
- পাঠ-৬ : নির্ণায়ক, নির্ণায়কের মান নির্ণয়
- পাঠ-৭ : নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক; নির্ণায়কের ধর্মাবলি
- পাঠ-৮ : ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, বর্গম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স
- পাঠ-৯ : একঘাত সমীকরণ জোট ও ক্রেমারের নিয়মে এর সমাধান নির্ণয়
- পাঠ-১০ : উদাহরণমালা
- পাঠ-১১ ও ১২ : অনুশীলনী-1(B)

পাঠ-১

1.1 ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Matrix and Types of Matrices)

1.1.1 ম্যাট্রিক্স (Matrix): বিজ্ঞান ও গণিতের বিভিন্ন তথ্য আয়তাকারে সারি (আনুভূমিক রেখা) ও কলাম (উল্লম্ব রেখা) বরাবর সাজালে যে আয়তাকার বিন্যাস (Rectangular arrays) পাওয়া যায় একে **ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ: একজন ছাত্র একটি নির্দিষ্ট সপ্তাহে, কোন দিনে কত সময় (ঘন্টায়) গণিত, পদার্থবিদ্যা ও রসায়নবিদ্যা অধ্যয়ন করেছে তা আয়তাকারে সাজালে তিনটি সারি ও সাতটি কলামবিশিষ্ট একটি বিন্যাস পাওয়া যায়।

বার / বিষয়	শনি	রবি	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র
গণিত	5	1	4	3	2	0	6
পদার্থবিদ্যা	2	4	2	5	1	7	1
রসায়নবিদ্যা	2	3	1	4	6	2	4

যদি শিরোনাম (heading) উহ্য রাখি তাহলেই '[ ]' বা '( )' বা '|| ||' দ্বারা আবদ্ধ তিনটি সারি ও সাতটি কলামবিশিষ্ট যে আয়তাকার বিন্যাস পাওয়া যায় এটিই ম্যাট্রিক্স। গাণিতিক

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

এই বিন্যাস শুধুমাত্র তথ্য সংরক্ষণেই সীমাবদ্ধ নয়। গণিতের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানেও ম্যাট্রিক্সের ভূমিকা অপরিসীম।

উদাহরণস্বরূপ: $\left.\begin{matrix} 5x + 2y = 4 \\ x + 3y = -7 \end{matrix}\right\}$ সমীকরণ জোটের সমাধান করার জন্য যে সকল তথ্য প্রয়োজন এর সবকিছুই $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স হতে পাওয়া যায়।

ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমেই উপরি-উক্ত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়। বর্তমান যুগকে ডিজিটাল যুগ বলা হয় এবং বর্তমানে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা কম্পিউটারের মাধ্যমে অল্প সময়ে সমাধান করা হয়ে থাকে। কম্পিউটারের মাধ্যমে সমাধানের ক্ষেত্রে, সংখ্যার এই আয়তাকার বিন্যাসের ভূমিকা তথা ম্যাট্রিক্সের ভূমিকা অপরিসীম (যারা পরবর্তীতে গণিত বা কম্পিউটার বিজ্ঞানে উচ্চতর শ্রেণিতে অধ্যয়ন করবে তারা বিষয়টি ব্যবহারিকভাবেই দেখবে)।

ম্যাট্রিক্স হলো সংখ্যার আয়তাকার বিন্যাস যা বন্ধনী (bracket) দ্বারা আবদ্ধ।

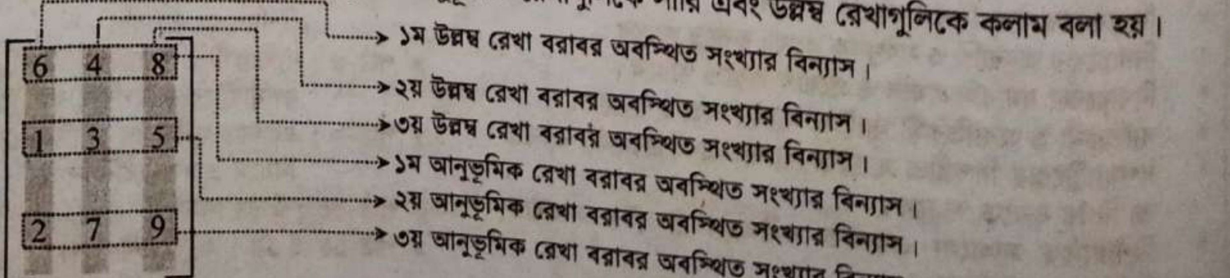
উদাহরণ: $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $[3\ \ -4\ \ 2\ \ 7]$, $\begin{bmatrix} ln3 & \pi & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & 5 & e \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $[8]$ প্রত্যেকটিই এক-একটি ম্যাট্রিক্স।

ম্যাট্রিক্স গঠনকারী সংখ্যাগুলিকে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (entry) বলে। ম্যাট্রিক্স প্রকাশের জন্য সাধারণত প্রথম বন্ধনী '( )' বা তৃতীয় বন্ধনী '[ ]' বা '|| ||' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়ে থাকে। সাধারণত ম্যাট্রিক্স বুঝানোর জন্যে বড় হাতের অক্ষর A, B, C, ... এবং ভুক্তি বুঝানোর জন্যে ছোট হাতের অক্ষর a, b, c, ... ব্যবহার করা হয়।

অর্থাৎ, আমরা লিখতে পারি $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} l & m & n \\ o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix}$

1.1.2 ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম: ম্যাট্রিক্সে সংখ্যার আয়তাকার বিন্যাসকে দুই প্রকারে বিশ্লেষণ করা হয়। যথা; আনুভূমিক রেখা বরাবর এবং উল্লম্ব রেখা বরাবর। সংখ্যাগুলির আনুভূমিক রেখাগুলিকে সারি এবং উল্লম্ব রেখাগুলিকে কলাম বলা হয়।

উদাহরণ:



সুতরাং, উল্লেখিত ম্যাট্রিক্সের ১ম কলাম = $\begin{matrix}6\\1\\2\end{matrix}$, ২য় কলাম = $\begin{matrix}4\\3\\7\end{matrix}$ এবং ৩য় কলাম = $\begin{matrix}8\\5\\9\end{matrix}$

উল্লেখিত ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি = $\boxed{6\ \ 4\ \ 8}$, ২য় সারি = $\boxed{1\ \ 3\ \ 5}$ এবং ৩য় সারি = $\boxed{2\ \ 7\ \ 9}$

1.1.3 ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order of a matrix):

m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক কলামবিশিষ্ট কোনো ম্যাট্রিক্সকে $m \times n$ (পড়তে হবে m বাই (by) n) ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ কে 2×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

কোনো ম্যাট্রিক্সের মোট ভুক্তি সংখ্যা, এর সারি ও কলাম সংখ্যার গুণফলের সমান হয়। উপরের ম্যাট্রিক্সটিতে মোট ছয়টি ভুক্তি আছে এবং ম্যাট্রিক্সটির সারি ও কলাম সংখ্যার গুণফলও ছয়।

1.1.4 ম্যাট্রিক্সের সাধারণ আকার (General form of matrix)

3×3 ক্রমের যেকোনো ম্যাট্রিক্স A হলে, $A = [a_{ij}]_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

অতএব, m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক কলামবিশিষ্ট একটি ম্যাট্রিক্স A এর ভুক্তি a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m ; j = 1, 2, \ldots, n)$ হলে,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ অথবা, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ অথবা, } A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

$\Rightarrow A = [a_{ij}]_{m\times n}$ $\qquad \Rightarrow A = (a_{ij})_{m\times n}$ $\qquad \Rightarrow A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$

1.1.5 ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Classification of matrices)

(i) সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix): যে ম্যাট্রিক্সের কেবল একটি সারি বিদ্যমান তাকে **সারি ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ: $A = [4 \quad 1 \quad 3]$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স এবং এর ক্রম 1×3।

(ii) কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix): যে ম্যাট্রিক্সের কেবল একটি কলাম বিদ্যমান তাকে **কলাম ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স এবং এর ক্রম 3×1।

(iii) বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix) : যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান তাকে **বর্গ ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। অর্থাৎ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $m = n$ হয়। তখন A কে m অথবা n ক্রমের একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ একটি 3×3 ক্রমের বা সংক্ষেপে 3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(iv) মূখ্য বা প্রধান কর্ণ (Principal or main diagonal): মনে করি, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। এখন $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ভুক্তিগুলি নিয়ে যে কর্ণ গঠিত তাকে **মূখ্য বা প্রধান কর্ণ** বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার ছায়াঘেরা কর্ণটি মূখ্য কর্ণ।

(v) ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Upper Triangular Matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n \times n}$ এর মূখ্য বা প্রধান কর্ণের নিম্নস্থ সবগুলি ভুক্তি শূন্য (0) হলে (অর্থাৎ $a_{ij} = 0$; যখন $i > j$) তাকে **ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ: $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ একটি 3 ক্রমের ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স।

(vi) নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Lower Triangular Matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n \times n}$ এর মূখ্য বা প্রধান কর্ণের উপরস্থ সবগুলি ভুক্তি শূন্য (0) হলে (অর্থাৎ $a_{ij} = 0$; যখন $i < j$) তাকে **নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ: $L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি 3 ক্রমের নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স।

(vii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ কে m ক্রমের **কর্ণ ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $a_{ij} = 0$ হয়, যখন $i \neq j$; অর্থাৎ, মূখ্য বা প্রধান কর্ণের ভুক্তি ব্যতীত অপর সকল ভুক্তি '0' (শূন্য) হবে।

উদাহরণ: $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

(viii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix): কোনো কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান হলে, ঐ কর্ণ ম্যাট্রিক্সকে **স্কেলার ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। **উদাহরণ:** $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(ix) একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স (Unit or Identity Matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ কে n ক্রমের **একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $a_{ij} = 0$ যখন $i \neq j$; এবং $a_{ij} = 1$ যখন $i = j$ হয়।

অর্থাৎ, কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য বা প্রধান কর্ণের ভুক্তি ব্যতীত অপর সকল ভুক্তি '0' (শূন্য) এবং প্রধান কর্ণের প্রত্যেক ভুক্তি 1(এক) হলে তাকে **অভেদক বা একক ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। অভেদক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$

উদাহরণ: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ যথাক্রমে 2 এবং 3 ক্রমের একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স।

(x) শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero or Null Matrix): কোনো ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তি শূন্য (0) হলে তাকে **শূন্য ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি 2×3 ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(xi) সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix): বর্গাকার কোনো ম্যাট্রিক্স A কে **সমঘাতি ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, এখানে $A^2 = A$. সুতরাং A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(xii) শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (Nilpotent Matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^n = 0$ হয়, যেখানে $n \in \mathbb{N}$ যদি সর্বনিম্ন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $A^n = \mathbf{0}$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স A কে সূচক (index) n এর শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$, এখানে $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$; সুতরাং A একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স। একইভাবে $A^3 = \mathbf{0}, A^4 = \mathbf{0}$ ইত্যাদি। সুতরাং A হলো সূচক 2 এর শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স।

 matrix — know about them

(xiii) অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (Involutory Matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে **অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

উদাহরণ: $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; এখানে $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$; সুতরাং B একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(xiv) বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose of a Matrix): কোনো ম্যাট্রিক্স A এর যথাযথ সারি এবং কলাম বিনিময় করলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে A ম্যাট্রিক্স-এর **ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স** অথবা **বিম্ব ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। A ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে A^t বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ হলে $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ হলো A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স।

(xv) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n\times n}$ কে **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $A^t = A$ হয়, অর্থাৎ $a_{ij} = a_{ji}$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ অর্থাৎ $A = A^t$ সুতরাং A হলো প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(xvi) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew Symmetric Matrix): বা বক্রপ্রতিসম, বা অপ্রতিসম

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n\times n}$ কে **বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $A^t = -A$ হয়, অর্থাৎ $a_{ij} = -a_{ji}$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix} = -A$

অর্থাৎ $A^t = -A$ সুতরাং A হলো একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। উল্লেখ্য যে, প্রত্যেক বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তিসমূহ শূন্য, অর্থাৎ $a_{ij} = 0$ যখন $i = j$।

(xvii) উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub Matrix): কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনো সংখ্যক কলাম ও যেকোনো সংখ্যক সারির ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত অপর একটি ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের **উপ-ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ইত্যাদি।

(xviii) উলম্ব ম্যাট্রিক্স (Orthogonal Matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে উলম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $AA^t = A^tA$ $= \boxed{A^T = A^{-1}}$

সমকোণিক

$= I$ হয়। **উদাহরণ:** $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ একটি উলম্ব ম্যাট্রিক্স।

(xix) ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace of Matrix): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য বা প্রধান কর্ণের ভুক্তি সমূহের যোগফলকে ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace) বলা হয়। **উদাহরণ:** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস হলো $5 + 2 + 3 = 10$।

কাজ: 1. নিচের ম্যাট্রিক্সগুলিকে প্রকারভেদ অনুযায়ী ক্রমসহ শ্রেণি বিন্যাস কর:

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, [2 \;\; -4 \;\; 1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, A^t নির্ণয় কর।

3. $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 8 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, B ও C এর মধ্যে কোনটি প্রতিসম ও কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

পাঠ-২

1.2 ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ (Equality, Addition, Subtraction and Multiplication of Matrices)

1.2.1 ম্যাট্রিক্সের সমতা: দুইটি ম্যাট্রিক্সকে সমান বলা হবে যদি এদের ক্রম সমান হয় এবং উভয়ের অনুরূপ ভুক্তিসমূহ পরস্পর সমান হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} x & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; যদি $x = 6$ হয় তবে $A = B$ হবে, কিন্তু $x \neq 6$ হলে $A \neq B$ হবে, কারণ A ও B এর ক্রম সমান হলেও সকল অনুরূপ ভুক্তি সমান নয়।

আবার, $A \neq C$ এবং $B \neq C$, কারণ A ও C এর ক্রম এবং B ও C এর ক্রম ভিন্ন।

1.2.2 ম্যাট্রিক্সের যোগ এবং বিয়োগ: যদি A ও B দুইটি সমান ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয়, তবে এদের যোগফল $A + B$ একটি ম্যাট্রিক্স হবে, যার ভুক্তি হবে A এর প্রত্যেক অনুরূপ ভুক্তির সাথে B এর অনুরূপ ভুক্তির যোগফল।
একইভাবে, A ও B এর বিয়োগফল $A - B$ একটি ম্যাট্রিক্স হবে, যার ভুক্তি হবে A এর প্রত্যেক অনুরূপ ভুক্তি থেকে B এর অনুরূপ ভুক্তির বিয়োগফল। $A + B$ ও $A - B$ এর ক্রম A ও B এর ক্রমের সমান হবে।

বি: দ্র: দুইটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম একই না হলে এদের যোগ বা বিয়োগ করা যায় না।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ হলে,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2a & b+h & c+g \\ d+h & e+b & 2f \\ 2g & h+f & i+c \end{bmatrix} \text{ এবং } A - B = \begin{bmatrix} 0 & b-h & c-g \\ d-h & e-b & 0 \\ 0 & h-f & i-c \end{bmatrix}$$

কিন্তু $A + C, A - C, C - A, B + C, B - C$ এবং $C - B$ সম্ভব নয়।
কারণ, A এর ক্রম ও C এর ক্রম সমান নয়; আবার B এর ক্রম ও C এর ক্রম সমান নয়।
দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর ক্রম সমান হলে, অর্থাৎ এদের যোগ ও বিয়োগ বিদ্যমান হলে, $A + B = B + A$ কিন্তু $A - B, B - A$ এর সমান হবেই এমন নয়। $A = B$ হলেই কেবলমাত্র $A - B = B - A$ হবে; কিন্তু $A = B$ না হলে $A - B \neq B - A$.

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ এবং } B + A = \begin{bmatrix} 2+1 & -1+2 \\ 0+3 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = B + A$$

আবার, $A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-(-1) \\ 3-0 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B - A = \begin{bmatrix} 2-1 & -1-2 \\ 0-3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A - B \neq B - A$$

কিন্তু $A = B$ হলে, $A - B = B - A$ হয়, যেমন: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B - A$

1.2.3 ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক: যদি A একটি ম্যাট্রিক্স এবং k কোনো ধ্রুবক হয় তবে k ও A এর গুণন kA একটি ম্যাট্রিক্স হবে যার প্রত্যেক ভুক্তি হবে A এর অনুরূপ ভুক্তির সাথে k এর গুণফল।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ হলে, $kA = \begin{bmatrix} 2k & 3k & 4k \\ k & 2k & 10k \end{bmatrix}$

কাজ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

1. ম্যাট্রিক্সগুলি কী নির্ণয় সম্ভব? কেন? (i) $A + B$ (ii) $B - C$ (iii) $A - D$
2. সম্ভব হলে নির্ণয় কর: (i) $2A + 3D$ (ii) $3A - 2B$ (iii) $4A - 2D$

1.2.4 ম্যাট্রিক্সের গুণন: দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর গুণফল AB নির্ণয়ের জন্য প্রথম ম্যাট্রিক্স A এর কলাম সংখ্যা ও দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স B এর সারি সংখ্যা সমান হতে হবে। অর্থাৎ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এবং $B = [b_{ij}]_{n\times r}$ হলে AB নির্ণয় সম্ভব কিন্তু BA নির্ণয় সম্ভব নয়, কেননা B এর কলাম সংখ্যা (r) এবং A এর সারি সংখ্যা (m) সমান নয়।
যেহেতু $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এবং $B = [b_{ij}]_{n\times r}$; সুতরাং AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m \times r$ হবে।

দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর গুণফল AB সংজ্ঞায়িত হলে, AB ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের পদ্ধতি: A এর প্রথম সারির ভুক্তিগুলি দ্বারা B এর প্রথম কলামের সকল অনুরূপ ভুক্তি গুণ করে গুণফলগুলি পর্যায়ক্রমে পাশাপাশি যোগ করতে হবে এবং এই যোগফল AB ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রথম ভুক্তি হবে, যাকে AB এর (1, 1)-তম ভুক্তি বলা হয়।
আবার, A এর প্রথম সারির ভুক্তিগুলি দ্বারা B এর দ্বিতীয় কলামের সকল অনুরূপ ভুক্তি গুণ করে গুণফলগুলি যোগ করতে হবে এবং এই যোগফল AB ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির দ্বিতীয় ভুক্তি হবে, যাকে AB এর (1, 2)-তম ভুক্তি বলা হয়। অনুরূপে, A এর প্রথম সারির সাথে B এর অবশিষ্ট কলামগুলির প্রয়োগে প্রাপ্ত ফলাফলগুলি পর্যায়ক্রমে AB এর প্রথম সারির ভুক্তি হবে। পুনরায়, A এর দ্বিতীয় সারি দিয়ে B এর প্রত্যেক কলামকে একইভাবে গুণ করলে প্রাপ্ত ফলকে AB ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় সারি বরাবর বসাতে হবে।
এভাবে অগ্রসর হয়ে A এর সকল সারি প্রয়োগ সমাপ্ত হলে, AB ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে।

উদাহরণ: ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

যেহেতু A এর ক্রম 3×3 এবং B এর ক্রম 3×3, সুতরাং AB নির্ণয় সম্ভব এবং AB এর ক্রম হবে 3×3 এখানে, AB এর (1, 2) তম ভুক্তি নিম্নরূপে নির্ণয় করা যায়,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \boxed{11} & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$ এখানে, $2(-1) + 2\cdot2 + (-3)(-3) = 11$

সুতরাং, AB এর (1, 2)-তম ভুক্তি হলো, A ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি এবং B ম্যাট্রিক্সের ২য় কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলির গুণফলের যোগফল।
আবার, AB এর (2, 3)-তম ভুক্তি নিম্নরূপে নির্ণয় করা যায়,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{2} \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$ এখানে, $5\cdot2 + 0\cdot5 + 2(-4) = 2$

সুতরাং, AB এর (2, 3)-তম ভুক্তি হলো A ম্যাট্রিক্সের ২য় সারি এবং B ম্যাট্রিক্সের ৩য় কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলির গুণফলের যোগফল।

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot3 + 2\cdot4 + (-3)\cdot1 & 2(-1) + 2\cdot2 + (-3)(-3) & 2\cdot2 + 2\cdot5 + (-3)(-4) \\ 5\cdot3 + 0\cdot4 + 2\cdot1 & 5(-1) + 0\cdot2 + 2(-3) & 5\cdot2 + 0\cdot5 + 2(-4) \\ 2\cdot3 + (-1)4 + 1\cdot1 & 2(-1) + (-1)2 + 1(-3) & 2\cdot2 + (-1)\cdot5 + 1(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 26 \\ 17 & -11 & 2 \\ 3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

কাজ: $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = [2 \;\; 3 \;\; -4]$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

সম্ভব হলে নির্ণয় কর: (i) AB (ii) BA (iii) AC (iv) BC (v) CA (vi) CB (vii) AB + C (viii) BA + C

পাঠ-৩

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. যদি $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স দুইটির সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর। [দি: বো: ১১; কু: বো: ০৫]

অতঃপর দেখাও যে, $A + B = B + A$ এবং $A - B \neq B - A$

সমাধান: $A + B = \begin{bmatrix} 8-4 & 4+6 & -1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 3+7 \\ 5+5 & 4+4 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ এবং $B+A = \begin{bmatrix} -4+8 & 6+4 & 2-1 \\ 1+0 & 3+1 & 7+3 \\ 5+5 & 4+4 & 1+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore A + B = B + A$

$A - B = \begin{bmatrix} 8+4 & 4-6 & -1-2 \\ 0-1 & 1-3 & 3-7 \\ 5-5 & 4-4 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ এবং $B-A = \begin{bmatrix} -4-8 & 6-4 & 2+1 \\ 1-0 & 3-1 & 7-3 \\ 5-5 & 4-4 & 1-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

$\therefore A - B \neq B - A$

উদাহরণ-2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, **AB** এবং **BC** নির্ণয় কর। **BA** নির্ণয় করা সম্ভব কি? [ব: বো: ০৯, ০৬; য: বো: ১৩; মাদ্রাসা বো: ০৯]

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

B এর মাত্রা 2×2 এবং A এর মাত্রা 3×2

যেহেতু B এর কলাম সংখ্যা $(2) \neq$ A এর সারি সংখ্যা (3); সুতরাং, BA নির্ণয় সম্ভব নয়।

উদাহরণ-3. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ হয় তবে দেখাও যে, **(AB)C = A(BC)**।

[কুয়েট ০৪-০৫; ঢা: বো: ০৬; কু: বো: ১৪; রা: বো: ১৬, ০৯; সি: বো: ১৩, ০৮, ০৪; চ: বো: ১৬, ১৪, ১১, ০৭; ব: বো: ১৬, ১৩; য: বো: ১৪, ১১, ০৬]

সমাধান: $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 3-0 & 0-1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

এখন, বামপক্ষ $= (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+9-4 \\ 8+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$

আবার, $BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

এখন, ডানপক্ষ $= A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-8 \\ 0+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

পাঠ-৪ ও ৫

অনুশীলনী-1(A)

1. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $3A + 4B$ নির্ণয় কর। [ব: বো: ০৪; মাদ্রাসা বো: ১০]

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $7A - 5B$ নির্ণয় কর।

2. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এবং BA নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৮]

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$। [চ: বো: ০৩; দি: বো; ১০]

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB \neq BA$। [রা: বো: ১৫]

(iv) যদি $A = [3 \;\; 4]$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB নির্ণয় কর। [কু: বো: ০৬]

(v) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এবং BA নির্ণয় কর। [য: বো: ০৯]

(vi) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এবং BA নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $AB \neq BA$

[ঢা: বো: ০৮; ব: বো: ১১, ০৭, ০৫; রা: বো: ০৮, ০৩; য: বো: ১২, ০৭; সি: বো: ১৪, ১২, ০৭; চ: বো: ১০; দি: বো: ১৬, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১২]

(vii) যদি $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB নির্ণয় কর। [রা: বো: ০৫]

3. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এবং BA নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ০৫; চ: বো: ০৮; রা: বো: ১০]

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $AB = I_3 = BA$, যেখানে, I_3 হলো 3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স। [ঢা: বো: ১০; দি: বো: ১৫; কু: বো: ০৯, ০৩; য: বো: ০৮; সি: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১২; মাদ্রাসা বো: ১১]

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে BA নির্ণয় কর। [চ: বো: ০৪] এবং প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$ [য: বো: ০৩]

4. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ এবং $C = [1 \quad 2 \quad -5 \quad 6]$ হয়, তবে $(AB)C$ নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ১৬, ১৫, ১৩, ১১; রা: বো: ১৩, ১১; দি: বো: ১২]

[য: বো: ১৬, ১০]

এবং দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$। [রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৬; চ: বো: ০৫; কু: বো: ১২, ১০; ব: বো: ১০; য: বো: ১৬, ১০]

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(AB)C = A(BC)$। [য: বো: ০৪]

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$। [কু: বো: ১৫; চ: বো: ১৫]

5. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর; যেখানে, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$। [ঢা: বো: ০৭; সি: বো: ০৯; ব: বো: ১২]

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর [ঢা: বো: ০৩, মাদ্রাসা বো: ১৩] এবং দেখাও যে,

$A^2 + 2A - 11I = \mathbf{0}$, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$।

[ঢা: বো:, দি: বো: ১৪, ০৯; চ: বো: ০৯, ০৬; রা: বো: ১২, ০৭, ০৪; ব: বো: ০৮; সি: বো: ০৩]

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 ও A^3 এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 3A - 10I = \mathbf{0}$ যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[য: বো: ১৫]

(iv) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A + B)^2 = A^2 - B^2$।

6. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A^3 + A^2 - 21A - 45I = \mathbf{0}$

যেখানে, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $A^2 - 4A - 5I$ নির্ণয় কর। যেখানে, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[চুয়েট ০৫-০৬; সি: বো: ১৬, ১৫, ১১; কু: বো: ১৩, ০৭; চ. বো. ১৩; ব: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^3 - 2A^2 + A - 2I_3$ নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ১৪, ১২, ০৪; সি: বো: ০৬; য: বো: ০৫; কু: বো: ১১, ০৪; ব: বো: ১৪]

7. (a) যদি $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 12 & 3 & 24 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, **(i)** $(A + B)^t = A^t + B^t$ **(ii)** $(AB)^t = B^tA^t$।

(b) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(AB)' = B'A'$ । [রা: বো: ১৪]

(c) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

B^3

(d) দেখাও যে, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ একটি 3 সূচকের শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(e) প্রমাণ কর যে, $C = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি।

(f) প্রমাণ কর যে, $D = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি উল্লম্ব।

Xviii

(g) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সহগুণক ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. **(i)** $\begin{bmatrix} 10 & -23 & -9 \\ 9 & -4 & 8 \end{bmatrix}$; **(ii)** $\begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix}$

2. **(i)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$; **(iv)** $[19 \ \ 14 \ \ -12]$; **(v)** $\begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$; **(vii)** $\begin{bmatrix} -33 & 56 & 43 \\ 16 & 15 & 10 \\ 24 & 74 & 46 \end{bmatrix}$

3. **(i)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **(iii)** $\begin{bmatrix} 15 & 15 & -2 \\ 25 & -4 & 11 \\ -7 & -15 & 2 \end{bmatrix}$

4. **(i)** $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$

5. **(i)** $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$; **(ii)** $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$

6. **(ii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$; **7(g)** $\begin{bmatrix} 8 & -4 & -7 \\ -5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

পাঠ-৬

1.3 নির্ণায়ক (Determinant)

যে নিয়মের দ্বারা প্রত্যেকটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের জন্য এক একটি সংখ্যা বা মান পাওয়া যায় তাকে নির্ণায়ক বলা হয়। অর্থাৎ নির্ণায়ক একটি ফাংশন যার ডোমেনের প্রত্যেক উপাদান যেকোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং রেঞ্জ এর প্রত্যেক উপাদান কোনো বাস্তব বা জটিল সংখ্যা।

একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ হলে, A এর নির্ণায়ককে $\det(A)$ বা $|A|$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেখানে, $$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

বিস্তৃতির মাধ্যমে নির্ণায়কের মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা (বাস্তব বা জটিল) পাওয়া যাবে। যেকোনো ক্রমের নির্ণায়কেরই বিস্তৃতি করা যায়। এক, দুই ও তিন ক্রমের নির্ণায়কের মান নির্ণয় নিয়ে আলোচনা করা হলো।

1.4 নির্ণায়কের মান নির্ণয় (Determining of determinant)

এক ক্রমের নির্ণায়কের মান: $A = [a_{11}]$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

অর্থাৎ, কোনো নির্ণায়কের একটি মাত্র সারি ও একটি মাত্র কলাম থাকলে এর মান হবে নির্ণায়কটি যে সংখ্যা দ্বারা গঠিত ঐ সংখ্যাই।

উদাহরণ: $|-6| = -6$ আবার, $|5| = 5$

2 × 2 আকারের নির্ণায়কের মান: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

অর্থাৎ, ('↘' চিহ্ন বরাবর ভুক্তিগুলির গুণফল)− ('↙' চিহ্ন বরাবর ভুক্তিগুলির গুণফল) সরল করলে দুই ক্রমের নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 7(-2) - (-2)8 = -14 + 16 = 2$

3 × 3 আকারের নির্ণায়কের মান: তিনটি সারি ও তিনটি কলাম দ্বারা গঠিত নির্ণায়কের বিস্তার সহজে করার জন্য সারাস ডায়াগ্রাম (Sarrus diagram) ব্যবহার করা হয়। এ পদ্ধতিতে নির্ণায়কের ভুক্তিগুলিকে পাশাপাশি দুইবার লিখে নির্ণায়কের মান নিম্নোক্তভাবে বের করা হয়।

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $|A| = \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \ldots\ldots \text{(ii)}$$

অর্থাৎ, প্রত্যেক '↘' চিহ্ন বরাবর ভুক্তিগুলির গুণফলের পূর্বে ধনাত্মক (+) চিহ্ন এবং প্রত্যেক '↙' চিহ্ন বরাবর ভুক্তিগুলির গুণফলের পূর্বে ঋণাত্মক (−) চিহ্ন নিয়ে সরল করলে তিন ক্রমের নির্ণায়কের মান পাওয়া যাবে।

অন্যভাবে, (ii) হতে বলা যায়, {(1, 1)-তম ভুক্তি × (১ম সারি ও ১ম কলাম বাদে অবশিষ্ট অংশের নির্ণায়ক)} − {(1, 2)-তম ভুক্তি × (১ম সারি ও ২য় কলাম বাদে অবশিষ্ট অংশের নির্ণায়ক)} + {(1, 3)-তম ভুক্তি × (১ম সারি ও ৩য় কলাম বাদে অবশিষ্ট অংশের নির্ণায়ক)} সরল করলে তিন ক্রমের নির্ণায়কের মান পাওয়া যাবে।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(20-6) - (0+2) + (0-5) = 21$

দ্রষ্টব্য: (a) উল্লেখিত নিয়ম অনুসারে যেকোনো সারি বা কলাম বরাবর বিস্তৃতি করলেও নির্ণায়কের মান একই পাওয়া যাবে।
(b) এখানে শুধুমাত্র প্রথম সারি বরাবর বিস্তৃতি দেখানো হয়েছে, যেকোনো সারি বা কলাম বরাবর বিস্তৃতি করার নিয়ম নিম্নরূপ:
নির্ণায়ক = নির্দিষ্ট সারি বা কলামের {(১ম চিহ্নযুক্ত ভুক্তি) × (ভুক্তিটি ধারণকারী সারি ও কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট নির্ণায়ক)} + {(২য় চিহ্নযুক্ত ভুক্তি) × (ভুক্তিটি ধারণকারী সারি ও কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট নির্ণায়ক)} + {(৩য় চিহ্নযুক্ত ভুক্তি) × (ভুক্তিটি ধারণকারী সারি ও কলাম ব্যতীত অবশিষ্ট নির্ণায়ক)}

(p, q)-তম ভুক্তির চিহ্ন = $(-1)^{p+q}$

উপরি-উক্ত নির্ণায়কটিকে তৃতীয় সারি বরাবর বিস্তৃতি করলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-5) + 3(-4) + 4 \times 10 = -7 - 12 + 40 = 21$$

আবার, দ্বিতীয় কলাম বরাবর বিস্তৃতি করলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(5)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(2) + 5(8-1) + 3(-4) = -2 + 35 - 12 = 21$$

কাজ: সারাস ডায়াগ্রাম ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর: **(i)** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$

পাঠ-৭

1.5 নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক (Minors and cofactors of determinant)

কোনো নির্ণায়কের যেকোনো ভুক্তির অনুরাশি হচ্ছে, ঐ ভুক্তি যে সারিতে ও যে কলামে অবস্থিত সেই সারি ও কলাম বাদে অবশিষ্ট সারি ও কলাম নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক।

আবার, কোনো নির্ণায়কের যেকোনো ভুক্তির অনুরাশির পূর্বে যথাযোগ্য চিহ্ন বসালে তাকে ঐ ভুক্তির সহগুণক বলা হয়।

চিহ্ন নির্ণয়ের নিয়ম: যে ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় করতে হবে ঐ ভুক্তিটি যদি p-তম সারি ও q-তম কলামে অবস্থান করে অর্থাৎ, (p, q)-তম ভুক্তির চিহ্ন = $(-1)^{p+q}$

সুতরাং ভুক্তিটির সহগুণক = $(-1)^{p+q} \times$ অনুরাশি। $(p+q)$ জোড় হলে, অনুরাশির পূর্বে ধনাত্মক চিহ্ন এবং $(p+q)$ বিজোড় হলে, অনুরাশির পূর্বে ঋণাত্মক চিহ্ন বসিয়ে নির্ণায়কের কোনো ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় করতে হবে।

3 ক্রমের সকল সহগুণকের ভুক্তিগুলির চিহ্ন নিম্নরূপ

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

উদাহরণ: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের

(1, 1)-তম অনুরাশি = $\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = b_{22}c_{33} - b_{23}c_{32}$ এবং (1, 1)-তম সহগুণক = $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = b_{22}c_{33} - b_{23}c_{32}$

(1, 2)-তম অনুরাশি = $\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} = b_{21}c_{33} - b_{23}c_{31}$ এবং (1, 2)-তম সহগুণক = $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} = -(b_{21}c_{33} - b_{23}c_{31})$

এরূপে নির্ণায়কটির সকল ভুক্তির অনুরাশি ও সহগুণক নির্ণয় করা যাবে।

সাধারণত ভুক্তিগুলি ছোট হাতের অক্ষর থাকলে তাদের সহগুণকগুলি বড় হাতের অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন– (1, 1) -তম সহগুণক A_{11}, (1, 2)-তম সহগুণক A_{12}, (1, 3)-তম সহগুণক A_{13} ইত্যাদি।

1.5.1 অনুরাশি ও সহগুণকের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expansion of determinant with the help of minors and cofactors)

অনুচ্ছেদ 1.5 এর উদাহরণ অনুযায়ী

$A_{11} = (-1)^{1+1} \times$ (1, 1)-তম অনুরাশি = (1, 1)-তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \times$ (1, 2)-তম অনুরাশি = – (1, 2)-তম অনুরাশি $= -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix}$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \times$ (1, 3)-তম অনুরাশি = (1, 3)-তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}$

এখন, ১ম সারি সাপেক্ষে D কে বিস্তার করলে,

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (i)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left\{-\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix}\right\} + a_{13}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \quad \ldots\ldots (ii)$$

সমীকরণ (i) হতে পাই, **$D = a_{11} \times$ {(1, 1)-তম অনুরাশি} – $a_{12} \times$ {(1, 2)-তম অনুরাশি} + $a_{13} \times$ {(1, 3)-তম অনুরাশি}**

আবার, সমীকরণ (ii) হতে পাই, **$D = a_{11} \times$ {(1, 1)-তম সহগুণক} + $a_{12} \times$ {(1, 2)-তম সহগুণক} + $a_{13} \times$ {(1, 3)-তম সহগুণক}**

এই প্রক্রিয়ায় নির্ণায়কের বিস্তৃতি, যে কোনো সারি বা কলাম বরাবর করা যায়।

দ্রষ্টব্য: সমীকরণ (ii) এর ন্যায় দেখানো যায়, $D = b_{21} B_{21} + b_{22} B_{22} + b_{23} B_{23} = c_{31} C_{31} + c_{32} C_{32} + c_{33} C_{33}$

$\therefore D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = b_{21} B_{21} + b_{22} B_{22} + b_{23} B_{23} = c_{31} C_{31} + c_{32} C_{32} + c_{33} C_{33}$

অনুরূপে কলাম বরাবর বিস্তৃতির সাহায্যে দেখানো যায়,

$D = a_{11} A_{11} + b_{21} B_{21} + c_{31} C_{31} = a_{12}A_{12} + b_{22} B_{22} + c_{32} C_{32} = a_{13} A_{13} + b_{23} B_{23} + c_{33} C_{33}$

আবার, $D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$

এখন, a_{11}, a_{12}, a_{13} এর পরিবর্তে যথাক্রমে b_{21}, b_{22}, b_{23} বসালে,

$$D = b_{21} A_{11} + b_{22} A_{12} + b_{23} A_{13} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0$$

সিদ্ধান্ত:

(a) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলিকে নিজ নিজ সহগুণক দ্বারা গুণ করে যোগ করলে তা ঐ নির্ণায়কের মানের সমান হবে।

(b) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলিকে অপর কোনো সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তির সহগুণক দ্বারা গুণ করে যোগ করলে যোগফল শূন্য (0) হবে।

1.6 নির্ণায়কের ধর্মাবলি (Properties of determinants)

(i) কোনো নির্ণায়কের একটি সারির (বা কলামের) সকল ভুক্তি শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।

উদাহরণ: $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ আবার, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

প্রমাণ: $D_1 = 0\,(b_2c_3 - b_3c_2) - 0\,(a_2c_3 - a_3c_2) + 0\,(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

আবার, $D_2 = a_1(0 - 0) - b_1(0 - 0) + 0\,(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

(ii) কোনো নির্ণায়কের সারিগুলিকে কলামে এবং কলামগুলিকে সারিতে স্থানান্তর করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রমাণ: বামপক্ষ $= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$; [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

ডানপক্ষ $= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$;[১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে]

(iii) কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি (বা কলাম) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সাংখ্যিক মান একই থাকে কিন্তু চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রমাণ: বামপক্ষ $= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$; [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

ডানপক্ষ $= -\{-a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\}$; [২য় সারি বরাবর বিস্তার করে]

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

(iv) কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি (বা কলাম) একই হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

উদাহরণ: $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ আবার, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

প্রমাণ: $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$; $[r_1' = r_1 - r_3]$ আবার, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \\ a_3 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = 0$; $[c_2' = c_2 - c_3]$

(v) কোনো নির্ণায়কের যেকোনো সারি (বা কলাম) এর প্রত্যেক ভুক্তিকে যে কোনো সংখ্যা m দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকে ঐ সংখ্যা 'm' দ্বারা গুণ বুঝায়।

উদাহরণ: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & mb_3 & mc_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mD$

প্রমাণ: বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & mb_3 & mc_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2mc_3 - c_2mb_3) - b_1(a_2mc_3 - c_2ma_3) + c_1(a_2mb_3 - b_2ma_3)$

$$= m\{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)\}$$

$$= m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$= mD =$ ডানপক্ষ

(vi) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি (বা কলাম) এর প্রত্যেক ভুক্তিকে দুইটি (বা ততোধিক) সংখ্যার যোগফলরূপে প্রকাশ করা সম্ভব হলে নির্ণায়কটিকেও দুইটি (বা ততোধিক) নির্ণায়কের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} a_1 + k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রমাণ: মনে করি, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর সাপেক্ষে a_1, a_2 ও a_3 ভুক্তিগুলির সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3।

তাহলে, $\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+k_1)A_1 + (a_2+k_2)A_2 + (a_3+k_3)A_3$

$$= (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(vii) একটি নির্ণায়কের একটি সারি (বা কলামের) ভুক্তিগুলির সাথে ঐ নির্ণায়কের অপর এক বা একাধিক সারির (বা কলামের) ভুক্তিগুলির k গুণিতক যোগ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রমাণ: ডানপক্ষ $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; [বৈশিষ্ট্য (vi) অনুসারে]

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; [বৈশিষ্ট্য (v) অনুসারে]

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $\left[\because \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0\right]$

= বামপক্ষ

দ্রষ্টব্য: কোনো নির্ণায়কের সারি (row) ও কলাম (column) এর কর্ম পদ্ধতি সংক্ষেপে প্রকাশ করা যায়। যেমন- প্রথম সারি থেকে দ্বিতীয় সারি বিয়োগ করে প্রথম সারিতে বসানোকে $r_1' = r_1 - r_2$ দ্বারা এবং প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কলাম যোগ করে তৃতীয় কলামে বসানোকে $c_3' = c_1 + c_2 + c_3$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পাঠ-৮

1.7 ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular and Non-singular matrices)

যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক $|A|$ বা $\det(A) = 0$ হয় তবে A কে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলে।
আবার যদি নির্ণায়ক $|A|$ বা $\det(A) \neq 0$ হয় তবে A ম্যাট্রিক্সকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$

এখানে $|A| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 56 - 56 = 0$ সুতরাং A হলো ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

এবং $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 13 \end{vmatrix} = 65 - 60 = 5 \neq 0$ সুতরাং B হলো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

1.8 বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse matrix of a square matrix)

দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের গুণফল যদি একক ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তবে এদের একটিকে অপরটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য একটি একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স B থাকে যেন $AB = BA = I$ হয়, (যেখানে I হলো একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স) তবে B ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে।
A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
অপরপক্ষে A ম্যাট্রিক্সকেও B ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে।
উল্লেখ্য যে, শুধু অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

উদাহরণ: $A=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & 2\\ \frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}$ ও $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ হলে, $AB=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & 2\\ \frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+6 & -10+10\\ 3-3 & 6-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

এবং $BA=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & 2\\ \frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+6 & 4-4\\ \frac{-15}{2}+\frac{15}{2} & 6-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

এখানে $AB=BA=I$

সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স B এবং B ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স A অর্থাৎ $A=B^{-1}$ এবং $B=A^{-1}$।

দ্রষ্টব্য: দুই ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

1.8.1 বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্ট (Adjoint of a square matrix)

ধরি $A=(a_{ij})_{n\times n}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্টকে সংক্ষেপে adj A দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\text{adj } A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$$ [সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে পরিণত করে]

যেখানে $A_{ij}=a_{ij}$ এর সহগুণক $=(-1)^{i+j}\times a_{ij}$ এর অনুরাশি।

অনুবন্ধ ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়: যদি $A=(a_{ij})_{n\times n}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় তবে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{ adj } A.$

ব্যাখ্যা: ধরি, $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ এবং $\text{adj } A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$ হলে $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$

দ্রষ্টব্য : $\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{bmatrix}$

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

(i) কোনো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স মূল ম্যাট্রিক্সের সমান অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্স হলে $(A^{-1})^{-1}=A$

(ii) A ও B যদি একই ক্রমের অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে AB ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে এবং $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(iii) কোনো ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজের বিপরীত ম্যাট্রিক্স ঐ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজের সমান অর্থাৎ A একটি ম্যাট্রিক্স হলে $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

(iv) কোনো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা হবে অনন্য। অর্থাৎ $A^{-1}=B$ এবং $A^{-1}=C$ হলে $B=C$

(v) অব্যতিক্রমী প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স প্রতিসম হবে। অর্থাৎ যদি, $A^t=A \Rightarrow (A^{-1})^t=A^{-1}$ হয়।

উদাহরণ : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক, $\det A=|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\times 5+2(-7)+4(-1)=-13\neq 0$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

এখন, $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-7;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-2;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-5;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-6;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=\frac{1}{-13}\begin{bmatrix}5 & -7 & -1\\ -2 & -5 & 3\\ -6 & 11 & -4\end{bmatrix}^t=\frac{1}{-13}\begin{bmatrix}5 & -2 & -6\\ -7 & -5 & 11\\ -1 & 3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{6}{13}\\ \frac{7}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{11}{13}\\ \frac{1}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{4}{13}\end{bmatrix}$$

কাজ: 1. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর: (i) $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ (ii) $C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ 2 & 6 & 4\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix}$ (iii) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}$

2. ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের পার্থক্যগুলি আলোচনা কর।

পাঠ-৯

1.9 একঘাত সমীকরণ জোট ও এর সমাধান নির্ণয়

(System of linear equations and it's solution)

1.9.1 একঘাত সমীকরণ জোট: $a_1x_1+a_2x_2+\dots\dots+a_nx_n=b$ কে $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ চলকের একঘাত সমীকরণ বলা হয়, যেখানে, $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ হলো ধ্রুবক।

এইরূপ একাধিক একঘাত সমীকরণকে একত্রে একঘাত সমীকরণ জোট বলা হয়।

নির্ণায়কের সাহায্যে সমসংখ্যক চলক ও সমীকরণবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়। সমাধান নির্ণয়ের এই পদ্ধতি 1750 খ্রিস্টাব্দে সুইস গণিতবিদ গ্যাব্রিয়েল ক্রেমার প্রতিষ্ঠা করেন বিধায় একে ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule) বলা হয়।

1.9.2 ক্রেমারের নিয়মে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান (Solution of system of linear equations using cramer's rule)

দুই চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের ক্ষেত্রে –

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ জোট: $a_1x+b_1y=c_1$ ...... (i)

$a_2x+b_2y=c_2$ ...... (ii)

এখানে x ও y এর সহগগুলি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক, $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$

x এর সহগের পরিবর্তে ধ্রুবক পদ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক, $D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$

এবং y এর সহগের পরিবর্তে ধ্রুবক পদ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক, $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে, $\dfrac{x}{-b_1c_2+b_2c_1}=\dfrac{y}{-c_1a_2+c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

বা, $\dfrac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ বা, $\dfrac{x}{D_x}=\dfrac{y}{D_y}=\dfrac{1}{D}$

$\therefore x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$ হতে x ও y এর মান অর্থাৎ, প্রদত্ত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়।

তিন চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের ক্ষেত্রে:

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ জোট: $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ ... ... (i)

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ ... ... (ii)

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ ... ... (iii)

$\therefore$ আমরা পাই, $\dfrac{x}{D_x}=\dfrac{y}{D_y}=\dfrac{z}{D_z}=\dfrac{1}{D}$

এখানে, $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$; x, y ও z এর সহগগুলি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক।

$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; x এর সহগের পরিবর্তে ধ্রুবক পদ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক।

আবার, $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$; y এর সহগের পরিবর্তে ধ্রুবক পদ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক।

এবং $D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$; z এর সহগের পরিবর্তে ধ্রুবক পদ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক।

$\therefore x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$ ও $z=\dfrac{D_z}{D}$ হতে x, y ও z এর মান অর্থাৎ, প্রদত্ত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য: যদি $D\neq 0$ হয়, তবে সমীকরণ জোটের অনন্য সমাধান বিদ্যমান। কেবল $D\neq 0$ শর্তেই ক্রেমারের নিয়ম প্রযোজ্য।

1.9.3 বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান (Solution of system of linear equations using inverse matrix)

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ জোট: $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

সমীকরণ জোটটি ম্যাট্রিক্স আকারে লিখে পাই, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AX=B$ যেখানে $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

$\therefore X=A^{-1}B$ হতে ম্যাট্রিক্স সমতা প্রয়োগ করে x, y, z এর মান পাওয়া যায়।

কাজ: 1. ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর: $x+2y-z=5$

$3x-y+3z=7$

$2x+3y+z=11$

2. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর : $2x+y-z=5$

$x+3y+2z=10$

$-x+2y+z=1$

পাঠ-১০

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

[ঢা: বো: ১৫, ১০; চ: বো: ১৫, ১৩, ১২, ০৯; কু: বো: দি: বো:, রা: বো: ১৬, ১২; ০৯; ব: বো: ১৪, ০৭; সি: বো: ১২, ০৫; য: বো: ১৪, ১০]

সমাধান: এখানে, $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ ax+by & bx+cy & -(ax^2+2bx+cy^2) \end{vmatrix}$ $[\because c_3' = c_3 - (c_1x + c_2y)]$

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ [৩য় কলামের সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$

$= (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

উদাহরণ-2. সমাধান কর: $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ [চুয়েট ১৩-১৪; ঢা: বো: ০৫; কু: বো: ০৭; চ: বো: ১৬, ০৭]

সমাধান: এখানে, $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+x+4+2 & 4 & 2 \\ 4+2+x+3 & 2+x & 3 \\ 2+3+4+x & 3 & 4+x \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$

$= (x+9)\begin{vmatrix} 0 & 2-x & -1 \\ 0 & x-1 & -1-x \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3]$

$= (x+9)\begin{vmatrix} -(x-2) & -1 \\ x-1 & -1-x \end{vmatrix} = (x+9)(x^2-x-2+x-1)$

$= (x+9)(x^2-3)$

যেহেতু, $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+9)(x^2-3) = 0$

হয়, $x+9=0 \therefore x=-9$

অথবা, $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \therefore x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান:** $x=-9, \pm\sqrt{3}$

উদাহরণ-3. $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ হলে এর বিপরীত যোগ্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান: $\det A = |A| = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = 32 - 35 = -3 \neq 0.$

$\therefore$ A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং A ম্যাট্রিক্স বিপরীতযোগ্য।
[কেবল অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা যায়।]

উদাহরণ-4. $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **হলে B ম্যাট্রিক্সের বিপরীত যোগ্যতা নির্ণয় কর।**

সমাধান: $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক, $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\therefore$ B একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং B ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য নয় অর্থাৎ B^{-1} নির্ণয় সম্ভব নয়।

উদাহরণ-৫. একটি ক্ষুদ্র প্লাস্টিক কোম্পানি জগ, মগ ও বালতি উৎপাদন করে যা ঢাকা, চট্টগ্রাম ও বরিশালের বাজারগুলোতে বিক্রয় করে। দৈনিক যতগুলো পণ্য উৎপাদন করো ঠিক ততগুলোই বিক্রি হয়। পণ্য তিনটির দৈনিক বিক্রির পরিমাণ নিচে দেওয়া হলো:

বিক্রয়ের স্থান	বিক্রির পরিমাণ		
	জগ	মগ	বালতি
ঢাকা	2	6	5
চট্টগ্রাম	5	7	3
বরিশাল	3	5	4

প্রতিটি জগ, মগ ও বালতির উৎপাদন খরচ যথাক্রমে 27, 14 ও 39 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য যথাক্রমে 38, 22 ও 62 টাকা।

ক. $N = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি উলম্ব ম্যাট্রিক্স কিনা যাচাই কর। ২

খ. জুন মাসের লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রতিটি জগ, মগ ও বালতির উৎপাদন খরচ কত টাকা হলে ঢাকা, চট্টগ্রাম ও বরিশালের জন্য উৎপাদন খরচ যথাক্রমে 89, 94 ও 83 টাকা হবে? ৪

সমাধান: ক. বর্গ ম্যাট্রিক্স N উলম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি $NN' = N'N = I$ হয়।

$$\therefore NN' = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+1 & -\sqrt{3}+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{3} & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq I_2$$

$\therefore$ **N ম্যাট্রিক্সটি উলম্ব ম্যাট্রিক্স নয়।**

খ. পণ্য তিনটির বিক্রয়মূল্য একটি সারি ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে প্রকাশ করে পাই, $A = [38 \;\; 22 \;\; 62]$

বিক্রির পরিমাণ ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

প্রতিটি পণ্যের উৎপাদন খরচ সারি ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $C = [27 \;\; 14 \;\; 39]$

$\therefore$ লাভ, $P = A - C = [38 \;\; 22 \;\; 62] - [27 \;\; 14 \;\; 39] = [38-27 \;\; 22-14 \;\; 62-39] = [11 \;\; 8 \;\; 23]$

$$\therefore\ PB = [11\ 8\ 23]\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [22+48+115\quad 55+56+69\quad 33+40+92] = [185\ 180\ 165]$$

দৈনিক মোট লাভের পরিমাণ $= (185 + 180 + 165)$ টাকা $= 530$ টাকা

$\therefore$ জুন মাসে লাভের পরিমাণ $= (30 \times 530)$ টাকা $= 15900$ টাকা **(Ans.)**

গ. ধরি, প্রতিটি জগ, মগ ও বালতির উৎপাদন খরচ যথাক্রমে x, y ও z টাকা ধরে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

শর্তানুসারে ধরি, $F = \begin{bmatrix} 89 \\ 94 \\ 83 \end{bmatrix}$ এবং $H = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $HE = F$ বা, $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \\ 94 \\ 83 \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{bmatrix} 2x + 6y + 5z \\ 5x + 7y + 3z \\ 3x + 5y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \\ 94 \\ 83 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $2x + 6y + 5z = 89$
$5x + 7y + 3z = 94$
$3x + 5y + 4z = 83$

x, y ও z এর সহগগুচ্ছ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক D হলে,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2(28 - 15) - 6(20 - 9) + 5(25 - 21) = 26 - 66 + 20 = -20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 89 & 6 & 5 \\ 94 & 7 & 3 \\ 83 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 89(28 - 15) - 6(376 - 249) + 5(470 - 581) = 1157 - 762 - 555 = -160$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 89 & 5 \\ 5 & 94 & 3 \\ 3 & 83 & 4 \end{vmatrix} = 2(376 - 249) - 89(20 - 9) + 5(415 - 282) = 254 - 979 + 665 = -60$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 89 \\ 5 & 7 & 94 \\ 3 & 5 & 83 \end{vmatrix} = 2(581 - 470) - 6(415 - 282) + 89(25 - 21) = 222 - 798 + 356 = -220$$

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{-160}{-20} = 8;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-60}{-20} = 3;\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{-220}{-20} = 11$$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুযায়ী প্রতিটি জগ, মগ ও বালতির উৎপাদন খরচ যথাক্রমে 8 টাকা, 3 টাকা ও 11 টাকা। **(Ans.)**

উদাহরণ-6. $A = \begin{bmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

ক. AX^t নির্ণয়যোগ্য কিনা যাচাই কর। ২

খ. দেখাও যে, $|A| = (a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca)$ ৪

গ. $BX = C$ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ জোটকে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর। ৪

সমাধান: ক. A ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা, $m = 3$

আবার, $X^t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^t = [x\ y\ z]$

$\therefore X^t$ ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা, $n = 1$

যেহেতু $m \neq n$ সুতরাং, AX^t নির্ণয়যোগ্য নয়।

খ. বামপক্ষ $= |A| = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$= 1\{(a+b)(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2) - (b+c)(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$

$= (b-c)(a-b)\{(a+b)(b^2+bc+c^2) - (b+c)(a^2+ab+b^2)\}$

$= (b-c)(a-b)\{ab^2+abc+ac^2+b^3+b^2c+bc^2-a^2b-ab^2-b^3-a^2c-abc-b^2c\}$

$= (b-c)(a-b)(ac^2-a^2b+bc^2-a^2c)$

$= (b-c)(a-b)\{ac(c-a)+b(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(a-b)\{ac(c-a)+b(c+a)(c-a)\}$

$= (b-c)(a-b)(c-a)(ac+bc+ab)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) =$ ডানপক্ষ

গ. প্রশ্নমতে, $BX = C \Rightarrow X = B^{-1}C$ ……… (i)

এখন, $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-8) - 1(9-10) - 1(12-10) = -4+1-2 = -5 \neq 0$

$\therefore$ B^{-1} বিদ্যমান।

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -7 & 11 & -3 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 1 & 11 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}B = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 1 & 11 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -1 & -11 & 7 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) নং হতে পাই,

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -1 & -11 & 7 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ বা, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 20+7-16 \\ -10-11+28 \\ -20+3-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -21 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{21}{5} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $x = \frac{11}{5}, y = \frac{7}{5}, z = -\frac{21}{5}$

পাঠ-১১ ও ১২

অনুশীলনী-1(B)

1. নিম্নের নির্ণায়কগুলির মান নির্ণয় কর:

(i) $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 4 & 20 & 11 \\ -30 & 15 & 14 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [য: বো: ০৫; কু: বো: ১১; চ: বো: ১৪]

(iii) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$ [কু: বো: ১৬; রা: বো: ০৮; সি: বো: ০৯]

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$ [বুয়েট ০৫-০৬; য: বো: ০৩]

(v) $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ এখানে, ω এককের যেকোনো একটি জটিল ঘনমূল। [বুয়েট ১০-১১; কু: বো; ১০]

প্রমাণ কর (2 – 6) পর্যন্ত:

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ [চ: বো: ১০, ০৫; ব: বো: ১০]

(ii) $\begin{vmatrix} p & a & b+c \\ p & b & c+a \\ p & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ (iii) $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [কু: বো: ০৫] (iv) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$ [সি: বো: ০৩]

(v) $\begin{vmatrix} 1 & \cos2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ [ব: বো: ০৩]

(vi) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$ [বুয়েট ০৯-১০; কুয়েট ০৭-০৮; বুয়েট ১১-১২; বিআইটি ০০-০১; ব: বো: ১৩]

(vii) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$

3. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

[বুয়েট ০৭-০৮, ০৮-০৯; ঢা: বো: ১২, ০৭; রা: বো: ১১, ১০; কু: বো: ১৫; চ: বো: ১৫, ১২; ব: বো: ০৯; য: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১০]

(iii) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$ [চ: বো: ০৩] (iv) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + x_3$ [মাদ্রাসা বো: ১১]

4. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ [বুয়েট ১১-১২; ঢা: বো: ১৩; য: বো: ১১, ০৮; চ: বো: ০৮; কু: বো: ১৩, ০৬]

(ii) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

[দি: বো: ১১; ব: বো: ০৬; দি: বো; ০৯; য: বো: ১৫, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১৪]

5. (i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$ [ব: বো: ১২; সি: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২, ০৯]

(ii) $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ [বুয়েট ১০-১১; বিআইটি ০১-০২]

(iii) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

[ঢা: বো: ১৪, ১১, ০৬, ০৩; ব: বো: ১৬, ১৫, ০৮; য: বো: ০৬; সি: বো: ১৫, ১৪, ১১, ০৪; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৬, ১৩, ১০]

(iv) $\begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} = 0$

(v) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [ঢা: বো: ১৬; য: বো: ০৮, ০৪; রা: বো: ১৫, ১৩; দি: বো: ১৫]

6. (i) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ [কু: বো: ১২, ০৪]

(ii) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ [চ: বো: ০৩]

(iii) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$ [কু: বো: ০৩]

(iv) দেখাও যে, $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

(v) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

[কুয়েট ০৩-০৪, ১১-১২; রা: বো: ০৯; য: বো: ১৬; দি: বো: ১৪; চ: বো: ১৬; সি: বো: ১৬, ১৩, ১০]

(vi) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$ [ব: বো: ১১]

(vii) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} qr & rp & pq \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{p}+q & \frac{1}{q}+r & \frac{1}{r}+p \end{vmatrix} = 0$

7. বিস্তার না করে প্রমাণ কর: [কু: বো: ১৬; চ: বো: ১১; সি: বো: ০৭]

(i) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ [কুয়েট ০৯-১০; বিআইটি ৯৬-৯৭, ৯৭-৯৮; ঢা: বো: ০৯; রা: বো: ১৫; য. বো: ১৩]

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$ [য: বো: ১৫]

(iii) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এই নির্ণায়কে প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$ যেখানে, A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক। [রা: বো: ১৪; কু: বো: ১৪, ০৮]

9. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সমাধান কর:

(i) $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 1 \\ 3 & 1+x & 2 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$

10. নিচের ম্যাট্রিক্সগুলির বিপরীত যোগ্যতা নির্ণয় কর:

(i) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$ (iii) $A = \begin{bmatrix} 28 & 29 & 30 \\ 31 & 33 & 35 \\ 34 & 37 & 40 \end{bmatrix}$ (iv) $C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \\ -3 & 11 & 15 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} x+5 & 5 \\ 3 & x-9 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে x এর মান নির্ণয় কর।

12. নিচের ম্যাট্রিক্সগুলির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [কু: বো: ১৫] (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ [সি: বো: ১৫] (v) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ [ব: বো: ১৫]

13. (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ এবং $(A^{-1})^{-1} = A$

IM (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ হলে এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর যেন $AB = BA = I_3$ হয়।

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^{-1} নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৫; রা: বো: ১৬]

14. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AB ও BA নির্ণয় করে A ও B ম্যাট্রিক্সের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(ii) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $(\text{adj } M)M = |M| I_3$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x - 11I$ এবং $f(A) = 0$ হলে, A^{-1} নির্ণয় কর।

15. নির্ণায়কের সাহায্যে (ক্রেমারের নিয়মে) সমাধান কর:

(i) $x + 2y = 5$
$3x + 5y = 14$

(ii) $x+2y+3z = 14$
$2x+4y+7z = 31$
$3x+5y+10z = 43$

(iii) $4x - y + 4z = 12$
$2x + 3y + 8z = 12$
$6x + 5y + 12z = 24$

(iv) $3x + 2y + z = 3$
$6x + 4y + 3z = 7$
$9x + 8y + 4z = 11$

16. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর :

(i) $2x + 3y = 4$
$x - y = 7$

(ii) $2x - y - z = 6$
$x + 3y + 2z = 1$
$3x - y - 5z = 1$

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স?

ক. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. কোনটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স?

ক. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. নিচের কোনটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স?

ক. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

4. নিচের কোনটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

ক. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ঘ. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

5. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

ক. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & -9 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 & -x \\ 2 & y & -9 \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 8 & 8 & -18 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে x, y ও z এর মান কত?

ক. $-7, -18, 5$ খ. $0, 0, 0$ গ. $0, 0, 2$ ঘ. $7, -8, 0$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ হলে $A - B =$ কত?

ক. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

8. $P + Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $P - Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ হলে Q এর মান কত হবে?

ক. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$

9. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ হলে $A =$ কত?

ক. $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$

10. $[3 \;\; 2 \;\; -1]$ ও $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ এর গুণফল কত?

ক. $\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ খ. $[12 \;\; 6 \;\; -8]$ গ. $[10]$ ঘ. $\begin{bmatrix} 12 & 9 & 24 \\ 8 & 6 & 16 \\ -4 & -3 & -8 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ এবং $[1 \;\; 2 \;\; 5]$ ম্যাট্রিক্স দুইটির গুণফল কত?

ক. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 18 & 45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 24 \\ 72 \\ 0 \end{bmatrix}$ গ. $[21]$ ঘ. অনির্ণেয়

12. $\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ হলে x ও y এর মান কত?

ক. $x = -\frac{5}{2}, y = \frac{4}{5}$ খ. $x = \frac{-15}{2}, y = \frac{4}{5}$ গ. $x = \frac{4}{5}, y = \frac{-15}{2}$ ঘ. $x = -\frac{5}{4}, y = -\frac{15}{2}$

13. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে $A^2 + 2A =$ কত?

ক. A খ. 2A গ. 3A ঘ. 4A

14. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান নিচের কোনটি?

ক. 12 খ. 48 গ. 80 ঘ. 192

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (2, 3) তম অনুরাশি নিচের কোনটি?

ক. − 13 খ. − 3 গ. 0 ঘ. 13

16. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি a_{12} তম অনুরাশির মান (−2) হলে, x এর মান কত?

ক. −2 খ. 2 গ. 20 ঘ. 40

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কত?

ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 5

18. $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2$ হলে $a^3b^3c^3$ এর মান কত?

ক. −1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 8

19. a এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে?

ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

20. নিচের কোনটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স?

ক. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

21. যদি A এবং B ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $(AB)^t$ = কত?

ক. B^tA^t খ. A^tB^t গ. AB' ঘ. BA

22. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নিচের কোনটি?

ক. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি —

i. কর্ণ ম্যাট্রিক্স ii. স্কেলার ম্যাট্রিক্স iii. অভেদক ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ হয় তবে—

i. A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স ii. $|A| = 15$ iii. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{bmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. যদি $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ হয় তাহলে—

i. $|A| = -2$ ii. $|A + 2I| = 6$ iii. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

26. $Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি—

i. ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ii. (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি –30 iii. বিপরীতযোগ্য নয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

27. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির —

i. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণকের মান 2

ii. (2, 2) তম ভুক্তির অনুরাশির মান 1

iii. মান 5

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

28. $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 5\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 5\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -5\end{bmatrix}$ হলে—

i. $A^t = B$ ii. $A^t = -C$ iii. $B^{-1} = C$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হলে—

i. A^2 নির্ণয় করা যায় ii. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)$ (যখন $|A| \neq 0$)

iii. $|A| = 0$ হলে এটি একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স B হলে—

i. $AB = BA = I$ ii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ iii. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (31 ও 32) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 7\\3 & 2 & 5\\8 & -4 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -6 & -7\\4 & 0 & 0\\2 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

31. $A + B$ এর মান কত?

ক. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\7 & 2 & 5\\6 & -1 & 4\end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix}2 & -2 & -14\\7 & 2 & 5\\10 & -9 & 4\end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\7 & 2 & 5\\10 & -9 & 4\end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\7 & 2 & 0\\10 & 1 & 4\end{bmatrix}$

32. $3A - 4B$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\begin{bmatrix}-15 & 36 & 49\\-7 & -6 & 15\\16 & 8 & 5\end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix}-15 & 36 & 49\\-7 & 6 & 15\\16 & 8 & 5\end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix}-15 & -12 & 49\\-7 & 6 & -15\\16 & -32 & 5\end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix}-15 & 36 & 28\\-7 & 6 & 15\\16 & 8 & -5\end{bmatrix}$

নিচের তথ্যের আলোকে (33 ও 34) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{pmatrix}p & 0 & 0\\0 & q & 0\\0 & 0 & r\end{pmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

33. কোন শর্তে ম্যাট্রিক্সটি স্কেলার হবে?

ক. $p = q = r$ খ. $p \neq q = r$ গ. $p = q + r$ ঘ. $p + q = r$

34. p, q, r এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটি অভেদক হবে?

ক. $p = q = r$ খ. $p = q = r = 1$ গ. $p = q = r = 0$ ঘ. $r = p + q$

$$E=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}, F=[3 \quad -2 \quad -4] \text{ ও } H=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\6 & -2 & 0\\3 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

উপরের তথ্যের আলোকে (35 ও 36) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

35. $FH =$ কত?

ক. $[-21 \quad -12 \quad 5]$ খ. $[-17 \quad 22 \quad -9]$ গ. $\begin{bmatrix}-21\\-12\\5\end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix}-17\\22\\-9\end{bmatrix}$

36. EF ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা (ক্রম) নিচের কোনটি?

ক. 2×3 খ. 1×2 গ. 2×1 ঘ. 3×2

নিচের তথ্যের আলোকে (37 ও 38) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$B = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & p & 3 \end{vmatrix}$ একটি নির্ণায়ক।

37. p এর সহগুণকের মান কত?

ক. -7 খ. $7p + 35$ গ. p ঘ. 7

38. $B = 0$ হলে p এর মান কত হবে?

ক. -8 খ. -4 গ. 0 ঘ. 8

নিচের তথ্যের আলোকে (39 ও 40) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$2x + y - z = 10$
$3x + 2y + 2z = 1$
$5x + 4y + 3z = 4$

39. $x =$ কত?

ক. $\frac{11}{5}$ খ. $\frac{-11}{5}$ গ. $\frac{5}{11}$ ঘ. $\frac{-5}{11}$

40. $y =$ কত?

ক. $\frac{5}{7}$ খ. $\frac{-5}{7}$ গ. $\frac{7}{5}$ ঘ. $\frac{-7}{5}$

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

41. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, AB নিচের কোনটি? *[DU.14-15]*

ক. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ খ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ গ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ঘ. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

42. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} = 0$ হলে x এর মান কোনটি? *[DU.14-15; RUET. 04-06]*

ক. α, β, θ খ. α, θ গ. β, θ ঘ. α, β

43. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2x + 7 \\ 2 & 7x & 9 + 5x \\ 0 & 0 & 2x + 5 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x এর মান কত? *[DU. 13-14]*

ক. $-\frac{9}{5}$ খ. $-\frac{7}{2}$ গ. $-\frac{5}{2}$ ঘ. 0

44. $\begin{bmatrix} m-2 & 6 \\ 2 & m-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে যখন $m =$ কত? *[DU. 11-12]*

ক. $-1, -6$ খ. $1, -6$ গ. $6, -1$ ঘ. $-1, -6$

45. $\begin{bmatrix} i & i \\ 2i & i \end{bmatrix}$ এবং $i^2 = -1$ হলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি? *[DU.10-11]*

ক. $\begin{bmatrix} i & -i \\ 2i & -i \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -i & 2i \\ i & -i \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} i & 2i \\ i & i \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b + c) \\ 1 & ca & ca(c + a) \\ 1 & ab & ab(a + b) \end{vmatrix}$ এর মান কত? *[DU. 10-11; KUET. 09-10]*

ক. $abc(a + b + c)$ খ. $4abc$ গ. 1 ঘ. 0

47. k এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতকরণযোগ্য নয়? *[BUET. 12-13]*

ক. 3 খ. 2 গ. $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ ঘ. $\frac{5}{2}$

48. A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = -7$ হলে $|(2A)^{-1}|$ এর মান কত? *[BUET. 12-13]*

ক. $-\frac{1}{14}$ খ. $-\frac{1}{56}$ গ. $-\frac{8}{7}$ ঘ. $-\frac{2}{7}$

49. তিনটি ম্যাট্রিক্স $[x \quad y]$, $\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এর গুণফলের মান নিচের কোনটি? *[BUET. 12-13]*

ক. $[x^2a + xyh \quad xyh + y^2b]$ খ. $[x^2a + 2xyh + y^2b]$

গ. $\begin{bmatrix} x^2a + xyh \\ xyh + y^2b \end{bmatrix}$ ঘ. $[2ax^2 + xyh + 2by^2]$

50. $AX = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ হলে XA^2 কত হবে? *[BUET. 11-12]*

ক. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ ঘ. কোনটিই নয়

51. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলির আকার যথাক্রমে 4×5, 5×4 এবং 4×2 হলে $(A^T + B)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার কত হবে? *[BUET. 10-11]*

ক. 5×4 খ. 4×2 গ. 5×2 ঘ. 2×5

52. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = [1 \quad 2 \quad 3]$ হলে $AB =$ কত? *[BUET. 08-09]*

ক. $[4 \quad -2 \quad 9]$ খ. $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ গ. $[11]$ ঘ. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

53. k এর কোন মানের জন্য $x - y = 3$ ও $2x - 2y = k$ সমীকরণ জোটের অসংখ্য সমাধান বিদ্যমান? *[BUET. 05-06]*

ক. $-\infty < k < \infty$ খ. $k \neq 6$ গ. $k = \frac{3}{2}$ ঘ. $k = 6$

54. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = AB$ হলে C ম্যাট্রিক্স কোনটি? *[KUET. 12-13]*

ক. $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 9 & 8 & 9 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 6 & 10 & 10 \\ 6 & 9 & 11 \\ 8 & 11 & 13 \end{bmatrix}$ গ. $\begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 \\ 8 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ ঘ. $\begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 11 & 9 & 7 \\ 11 & 13 & 7 \end{bmatrix}$

55. $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? *[KUET. 10-11, 08-09; RUET. 11-12]]*

ক. $4xyz$ খ. $2(x-y)(y-z)(z-x)$

গ. $2xyz$ ঘ. -1

56. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $(BA)^{-1}$ এর মান কত? *[KUET. 15-16]*

ক. $\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ খ. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ গ. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -44 & 1 \\ 31 & -1 \end{pmatrix}$ ঘ. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -31 & 1 \\ 44 & -1 \end{pmatrix}$

57. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & ab \\ 1 & ab & ab^2 \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? *[RUET. 13-14]*

ক. $a(1-b)^2$ খ. $b(1-a)^2$ গ. $-b(a-1)^2$ ঘ. $-a(b-1)^2$

58. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1} কোনটি? *[RUET. 13-14]*

ক. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ খ. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ গ. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ঘ. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

59. $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$ এর মান কত হবে? *[CUET 09-10; RUET 11-12]*

ক. 0 খ. $\log\frac{2}{3}$ গ. $\log\frac{3}{2}$ ঘ. 1

60. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$ হলে x, y এবং z এর মান যথাক্রমে— *[RUET. 10-11]*

ক. 1, 2, 3 খ. 3, 4, 3 গ. 3, –3, 4 ঘ. –1, 2, 3

61. যদি $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ এবং $|A^2| = 1$ হলে θ এর মান কোনটি? *[CUET. 11-12]*

ক. $\theta = 0°$ খ. $\theta = 45°$ গ. $\theta = 0°, 45°$ ঘ. কোনোটিই নয়

62. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & 205 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 97 & 4 \\ 0 & -7 & k & 7 \end{vmatrix}$ নির্ণয়কে 1 এর সহগুণক কত? *[KUET. 14-15]*

ক. 11 খ. k গ. 0 ঘ. – 935

63. x এর কোন কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} 2-x & 13 \\ 5 & 10-x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে? *[KUET. 16-17]*

ক. – 15, – 3 খ. – 15, 3 গ. 15, – 3 ঘ. 15, 3

64. $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $P \times Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ হলে Q এর মান কত? *[RUET. 14-15]*

ক. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ খ. $\begin{bmatrix} 16 & -2 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$ গ. $[0.5 \;\; -2]$ ঘ. $\begin{bmatrix} -16 & 2 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix}$

65. 3×3 আকারের স্কেলার ম্যাট্রিক্স A এর কর্ণ উপাদানগুলির গুণফল $2\sqrt{2}$ হলে $|(\sqrt{2}I - A)^3|$ এর মান কত? *[SUST. 16-17]*

ক. $2\sqrt{2}$ খ. $24\sqrt{2}$ গ. $12\sqrt{2}$ ঘ. 0

66. $\begin{vmatrix} 2! & 3! & 2! \\ 3! & 2! & 4! \\ 0! & 3! & 2! \end{vmatrix}$ = কত? *[SUST. 16-17]*

ক. – 208 খ. – 140 গ. 140 ঘ. – 280

67. $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান কত? *[DU. 12-13; JNU. 11-12; CU. 12-13; BUET. 11-12]*

ক. 0 খ. $abc(a+b)(b+c)(c+a)$
গ. abc ঘ. $(a+b)(b+c)(c+a)$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. এক ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য ১ম সপ্তাহে যথাক্রমে 4, 2 ও 1 প্যাকেট করে কলম, পেন্সিল ও রাবার কিনলেন। অনুরূপভাবে ২য় সপ্তাহে যথাক্রমে 6, 2 ও 1 প্যাকেট এবং ৩য় সপ্তাহে 5, 1 ও 1 প্যাকেট করে যথাক্রমে কলম, পেন্সিল ও রাবার কিনলেন। তিনটি সপ্তাহে তার মোট খরচ যথাক্রমে 475 টাকা, 575 টাকা ও 425 টাকা। প্রতি প্যাকেট কলম, পেন্সিল ও রাবারের ক্রয়মূল্য যথাক্রমে x, y ও z টাকা। এরপর তিনি সারি বরাবর সপ্তাহ এবং কলাম বরাবর পণ্যসংখ্যা সাজিয়ে (3×3) আকারে একটি ম্যাট্রিক্স D, সাপ্তাহিক খরচকে সারি বরাবর সাজিয়ে (3×1) আকারের একটি ম্যাট্রিক্স C এবং প্রতি প্যাকেট পণ্যের ক্রয়মূল্যকে যথাক্রমে সারি বরাবর সাজিয়ে (3×1) আকারের একটি ম্যাট্রিক্স R লিখলেন।
   ক. $P = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ ও $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ হলে $(P - 2Q)^t$ নির্ণয় কর।
   খ. $f(x) = x^2 - 7x - 4$ হলে $f(D)$ নির্ণয় কর।
   গ. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে প্রতি প্যাকেট পণ্যের ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

2. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ছয়টি বিন্দু যথাক্রমে $A(1, 1 + y, 1)$, $B(4, 5, 6)$, $C(1 + x, 1, 1)$, $D(6, 1, 5)$, $E(1, 1, 1 + z)$, $F(2, 2, 7)$। E, C ও A বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে তিনটি সারিতে সাজিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে V এবং B, D ও F বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সকে W দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।
   ক. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (3, 1)-তম ভুক্তির সহগুণক 5 হলে k এর মান নির্ণয় কর।
   খ. প্রমাণ কর যে, $|V| = xyz\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$
   গ. W ম্যাট্রিক্সকে একটি প্রতিসম ও একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি আকারে প্রকাশ কর।

3. **দৃশ্যকল্প-১:** রাজধানী ঢাকার একটি দোকানে টাঙ্গাইলের চমচম, কুমিল্লার রসমালাই এবং নাটোরের কাঁচাগোল্লা বিক্রি করে। এই তিন প্রকারেরর খাবার তৈরির মূল উপাদান দুধ ও চিনি। প্রদত্ত খাবার তিনটির দৈনিক উৎপাদন নিচে দেওয়া হলো:

প্রকার	উপাদান (শতকরা)			দৈনিক উৎপাদন (কেজি)
	দুধ	চিনি	অন্যান্য	
চমচম	30	60	10	280
রসমালাই	50	30	20	260
কাঁচাগোল্লা	60	25	15	200

প্রতি কেজি দুধের ক্রয়মূল্য 70 টাকা, চিনি 60 টাকা ও অন্যান্য উপাদান গড়ে 50 টাকা।

দৃশ্যকল্প-২: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix}$ এবং $A + A^{-1} = kI$ যেখানে p ও k ধ্রুবক এবং I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।
   ক. p এর মান কত হলে A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস 7 হবে?
   খ. দৈনিক মোট উৎপাদন খরচ নির্ণয় কর।
   গ. p ও k এর মান নির্ণয় কর।

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 + 2x - 8$
   ক. $|A + B|$ নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$।
   গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{3}f(A)$ একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

5. $A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 15 & -4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2p & \frac{1}{5}\\ 3 & 5\\ r & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

ক. A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি কিনা যাচাই কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $(AC)^t = C^tA^t$।

গ. $AB=\begin{bmatrix}4 & \frac{9}{5}\\ 5 & 7\end{bmatrix}$ হলে p ও r এর মান নির্ণয় কর।

6. $A=\begin{bmatrix}s+c & s-b-c & s-c-a\\ s-a-b & s+a & s-c-a\\ s-a-b & s-b-c & s+b\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}11\\ 10\\ 9\end{bmatrix}$

ক. $B_{11}+B_{33}$ এর মান নির্ণয় কর যেখানে B_{ij} হলো (i, j)-তম ভুক্তির সহগুণক।

খ. $s=a+b+c$ হলে, দেখাও যে, $|A|=2(a+b+c)^3$

গ. $BC=F$ হলে দেখাও যে, $x+y+z=5$

7. $P=\begin{bmatrix}5+a & 6 & 3\\ 4 & 3+a & 2\\ 1 & 7 & 1+a\end{bmatrix}$

ক. $a=0$ হলে $|P|$ নির্ণয় কর।

খ. ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. $a=-6$ হলে $P^3+8P^2-20P-192\,I$ এর মান নির্ণয় কর।

8. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 2 & -2\\ 4 & 5 & -4\\ -5 & 3 & 7\end{bmatrix}$

ক. $2A+3C$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. A ও C ম্যাট্রিক্স দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন বিনিময় বিধি মানে কিনা যাচাই কর।

গ. $AB=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$ হলে নির্ণায়ক পদ্ধতিতে x, y ও z এর মান নির্ণয় কর।

9. $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 7 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3-2x^2+3x$

ক. $\begin{bmatrix}\alpha & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে α এর মান নির্ণয় কর।

খ. adj P নির্ণয় কর।

গ. $f(P)=I$ থেকে P^{-1} নির্ণয় কর।

10. $P=\begin{bmatrix}a & a^2 & 1+a^3\\ b & b^2 & 1+b^3\\ c & c^2 & 1+c^3\end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি কিনা যাচাই কর।

খ. $a=1, b=-1$ ও $c=-2$ হলে P^{-1} নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $|P|=(1+abc)(a-c)(b-a)(b-c)$.

11. মাইক্রোসফট প্রতিদিন তিনটি মেশিন দ্বারা x পণ্য 2, 1, 3 টি; y পণ্য 2, 1, 2 টি এবং z পণ্য 1, 3, 4টি তৈরি করে। প্রতিটি x, y, z পণ্যের উৎপাদন খরচ যথাক্রমে 17, 12 ও 15 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য যথাক্রমে 23, 18 ও 25 টাকা।
   ক. প্রত্যেক প্রকার পণ্যকে কলাম বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি কিনা যাচাই কর।
   খ. প্রত্যেক প্রকার পণ্যকে সারি বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।
   গ. প্রতি সপ্তাহে কোম্পানির লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর।

12. $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
   ক. $|B|$ নির্ণায়কটির (3, 1) তম ভুক্তির অনুরাশির মান নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, $2B_{13} + 8B_{21} - 2B_{32} + 4B_{22} = 0$ যেখানে B_{ij} হচ্ছে (i, j) তম ভুক্তির সহগুণক।
   গ. $AB = BA = I_3$ হলে A এর মান নির্ণয় কর।

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix}$ দুইটি ম্যাট্রিক্স।
   ক. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ হলে $|CC^t|$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. $|B| + x^3 + 4 = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।
   গ. x এর কোন মানের জন্য A ম্যাট্রিক্সটি B এর বিপরীত হবে?

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।
   ক. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (1, 2)-তম অনুরাশি ও (3, 1)-তম সহগুণকের মান নির্ণয় কর।
   খ. প্রমাণ কর যে, $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = \mathbf{0}$
   গ. $B = \text{adj}A$ হলে দেখাও যে, $|B| = 6|A|$

15. কোনো কলেজের তিনটি বিভাগের জন্য ক্রয়কৃত ল্যাপটপ, ডেস্কটপ ও প্রিন্টারের পরিমাণ নিম্নে ছক আকারে দেওয়া হলো:

	বাংলা	ইংরেজি	গণিত
ল্যাপটপ	3	4	7
ডেস্কটপ	2	4	10
প্রিন্টার	1	2	3

প্রতিটি ল্যাপটপ, ডেস্কটপ ও প্রিন্টারের দাম যথাক্রমে 25 হাজার, 35 হাজার ও 4 হাজার টাকা।
   ক. উপরের তথ্যগুলিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে প্রতিটি যন্ত্রাংশ ক্রয়ে কলেজের মোট ব্যয় কত হবে তা নির্ণয় কর।
   খ. ক্রয়কৃত যন্ত্রাংশের পরিমাণকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।
   গ. বাংলা, ইংরেজি ও গণিত বিভাগে সব যন্ত্রাংশ সেট করতে যথাক্রমে 115 মিনিট, 200 মিনিট ও 435 মিনিট লাগলে, প্রতিটি ল্যাপটপ, ডেস্কটপ ও প্রিন্টার সেট করতে কত সময় লাগবে?

16. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{bmatrix}$

ক. A সমঘাতি কিনা যাচাই কর।

খ. A^{-1} নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $|B| = (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$

17. $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ক. দেখাও যে, $|P| = -2|Q|$

খ. $|\text{adj}Q|$ নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $Q^tP^t = (PQ)^t$

18. একটি সমীকরণ জোট $AX = B$ যেখানে–

$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে x-এর মান কত?

খ. λ এর কোন মানের জন্য A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী তা নির্ণয় কর।

গ. $\lambda = 1$ এর জন্য সমীকরণ জোটটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর।

19. রাজীব, রিয়াজ ও প্রকাশ 'স্বপ্ন' সুপার শপ হতে যথাক্রমে 190 টাকা, 426 টাকা ও 377 টাকা দিয়ে তিন প্রকারের দ্রব্য ক্রয় করলো। দ্রব্য তিনটির একক মূল্য যথাক্রমে p, q, r টাকা। রাজীব দ্রব্য তিনটির যথাক্রমে 4টি, 2টি ও 4টি, রিয়াজ দ্রব্য তিনটির যথাক্রমে 5টি, 9টি ও 5টি এবং প্রকাশ দ্রব্য তিনটির যথাক্রমে 2টি, 7টি ও 8টি কিনলো।

ক. কোন শর্তে দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ ও গুণন যোগ্য হবে?

খ. রিয়াজ, রাজীব ও প্রকাশের দ্রব্য ক্রয়সংখ্যাকে যথাক্রমে ভিন্ন ভিন্ন সারি আকারে নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপক অনুসারে সমীকরণ জোট গঠন করে নির্ণায়ক পদ্ধতিতে p, q ও r এর মান নির্ণয় কর।

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^3 & a^3 & b^3 \end{bmatrix}$ এবং $s = a + b + c$

ক. দেখাও যে, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি উলম্ব ম্যাট্রিক্স।

খ. $|A| = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\begin{vmatrix} 2a-s & 2a & 2a \\ 2b & 2b-s & 2b \\ 2c & 2c & 2c-s \end{vmatrix} = s^3$

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ *[ঢা. বো. ১৭]*

ক. $A \times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর।

খ. A^{-1} নির্ণয় কর।

গ. $A \times B = C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর।

[দি. বো. ১৭]

22. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} 2 & -x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

খ. $M^2 - 3M + MI$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স।

গ. M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$

[কু. বো. ১৭]

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ক. x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর।

খ. $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর।

গ. D^{-1} নির্ণয় কর।

24. দৃশ্যকল্প-১: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = \frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1.$

[সি. বো. ১৭]

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0.$

খ. $A = B + C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।

25. $x + y + z = 1$ ... ... (i)
$lx + my + nz = k$ ... ... (ii)
$l^2x + m^2y + n^2z = k^2$ ... ... (iii)

[য. বো. ১৭]

ক. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

খ. সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\det(A) = (l - m)(m - n)(n - l)$.

গ. x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1, m = 2, n = -1$.

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

[ব. বো. ১৭]

ক. p এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে?

খ. উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$।

গ. উদ্দীপকের আলোকে $AX = B$ হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে x, y নির্ণয় কর।

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

উত্তরমালা

1. (i) 5060 (ii) 4xyz (iii) $4a^2b^2c^2$ (iv) 0 (v) – 4 **9.** (i) $x = 0, -(a+b+c)$; (ii) $x = -6, \pm\sqrt{3}$

10. (i) বিপরীত যোগ্য নয়; (ii) বিপরীত যোগ্য নয়; (iii) বিপরীত যোগ্য নয়; (iv) বিপরীত যোগ্য। **11.** – 6, 10

12. (i) $\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$; (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$; (v) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. (ii) $\begin{bmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; (iii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; **14.** (i) $AB = BA = I_3$; (iii) $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$;

15. (i) $(x, y) = (3, 1)$; (ii) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$; (iii) $(x, y, z) = (2, 0, 1)$; (iv) $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$

16. (i) $(x, y) = (5, -2)$; (ii) $(x, y, z) = (3, -2, 2)$

বহুনির্বাচনি

1. গ; **2.** খ; **3.** ঘ; **4.** খ; **5.** খ; **6.** খ; **7.** গ; **8.** খ; **9.** গ; **10.** গ; **11.** ক; **12.** খ; **13.** গ; **14.** ঘ; **15.** ক; **16.** খ; **17.** ক; **18.** গ; **19.** গ; **20.** গ; **21.** ক; **22.** গ; **23.** ক; **24.** গ; **25.** ঘ; **26.** খ; **27.** ঘ; **28.** ক; **29.** ঘ; **30.** ঘ; **31.** গ; **32.** খ; **33.** ক; **34.** খ; **35.** ক; **36.** ক; **37.** ঘ; **38.** ক; **39.** ক; **40.** গ; **41.** ঘ; **42.** খ; **43.** গ; **44.** গ; **45.** ঘ; **46.** ঘ; **47.** গ; **48.** খ; **49.** খ; **50.** ঘ; **51.** গ; **52.** ঘ; **53.** ঘ; **54.** গ; **55.** ক; **56.** খ; **57.** ঘ; **58.** গ; **59.** ক; **60.** খ; **61.** গ; **62.** গ; **63.** গ; **64.** ক; **65.** ঘ; **66.** ঘ; **67.** ক;

সৃজনশীল

1. ক. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$; খ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$; গ. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 75 \end{bmatrix}$; **2.** ক. –1;

3. ক. 4; খ. 46640 টাকা; গ. $p = 2, k = 5$

4. ক. – 13; **5.** ক. অভেদঘাতি; গ. $p = \frac{33}{2}, r = 40$; **6.** ক. 2;

7. ক. 8; খ. $1, -5 \pm \sqrt{33}$; গ. $\begin{bmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ -24 & 36 & 0 \end{bmatrix}$ **8.** ক. $\begin{bmatrix} 19 & 12 & -14 \\ 14 & 15 & -16 \\ -13 & -1 & 33 \end{bmatrix}$; গ. $x = \frac{2}{3}, y = \frac{-5}{3}, z = \frac{-7}{6}$

9. ক. 6; খ. $\begin{bmatrix} -2 & 8 & -10 \\ 3 & -13 & 17 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; গ. $\begin{bmatrix} 25 & 13 & 5 \\ 38 & 24 & 27 \\ 26 & 14 & 23 \end{bmatrix}$; **10.** ক. সমঘাতি; খ. $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & -15 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

11. ক. সমঘাতি নয়; খ. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$; গ. 1022 টাকা;

12. ক. –14; গ. $-\frac{1}{35}\begin{bmatrix} 7 & 7 & -14 \\ -20 & -15 & 20 \\ 22 & 27 & -29 \end{bmatrix}$

13. ক. 1764; খ. 1 , $2(1 \pm \sqrt{2})$; গ. $\frac{1}{5}$; **14.** ক. 27, – 9;

15. ক. 9,34,000 টাকা; খ. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; গ. ল্যাপটপ 15 মি, ডেক্সটপ 30 মি, প্রিন্টার 10 মি.

16. ক. সমঘাতি নয়; খ. $\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & -11 & 2 \\ -27 & -51 & 2 \\ 11 & 19 & -2 \end{bmatrix}$; **17.** খ. 441;

18. ক. – 2; খ. 2 অথবা $\frac{8}{5}$; গ. (x, y, z) = (1, –2, 1);

19. খ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{37}{156} & \frac{-1}{6} \\ \frac{2}{13} & -\frac{5}{26} & 0 \\ -\frac{2}{13} & \frac{17}{156} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$; গ. p = 15, q = 29, r = 18; **20.** খ. a, b, – (a + b) ;

21. 3 × 1; খ. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -9 & -2 & 12 \\ -2 & -2 & 5 \\ 12 & 5 & -16 \end{bmatrix}$; গ. $(x, y, z) = \left(\frac{20}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-15}{7}\right)$

22. ক. (x, y) = (–8, 5); খ. $\begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 \\ -14 & 20 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; গ. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 9 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

23. ক. 0, $\frac{10}{3}$; খ. $\begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$; গ. $\frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

24. খ. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$; গ. (x, y, z) = (– 1, – 2, – 3)

25. ক. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; গ. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$;

26. ক. $\frac{22}{5}$; খ. $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$; গ. x = 2, y = – 1