নবম অধ্যায়

অন্তরীকরণ (Differentiation)

9.1. লিমিট

মনে করি, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. তাহলে, $f(2) = \frac{0}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত (undefined).

এখন $x = 1{\cdot}99,\ 1{\cdot}999,\ 1{\cdot}9999$ ইত্যাদি বসিয়ে আমরা পাই, $f(x) = 3{\cdot}99,\ 3{\cdot}999,\ 3{\cdot}9999$ ইত্যাদি।

আবার $x = 2{\cdot}01,\ 2{\cdot}001,\ 2{\cdot}0001$ ইত্যাদি বসিয়ে আমরা পাই, $f(x) = 4{\cdot}01,\ 4{\cdot}001,\ 4{\cdot}0001$ ইত্যাদি

উভয়ক্ষেত্রে দেখা যায় যে x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 2 এর কাছাকাছি অগ্রসর হলে, ফাংশন $f(x)$ এর মান ক্রমশঃ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা 4 এর কাছাকাছি হয়। এক্ষেত্রে আমরা বলি x এর মান ক্রমশঃ 2 এর দিকে অগ্রসর হলে, অর্থাৎ $|x-2|$ যে কোন ক্ষুদ্রতর সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতর হলে, $f(x)$ এর সীমাস্থ মান (limiting value) বা, সংক্ষেপে লিমিট 4 হয়। নিচের প্রতীক দ্বারা তা প্রকাশ করা হয় :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

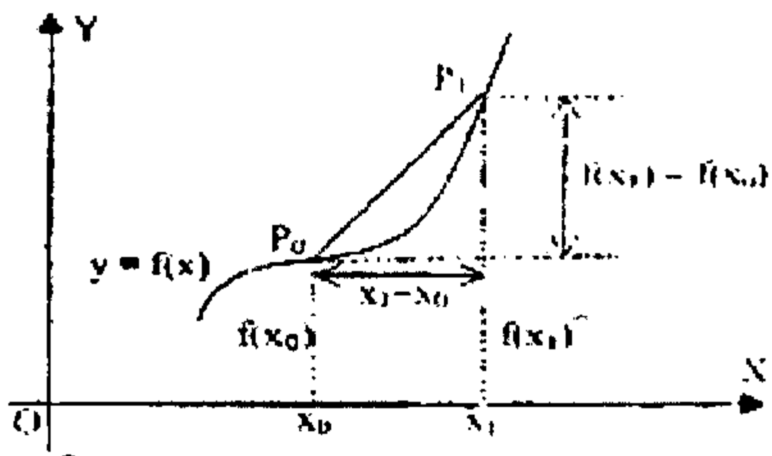
লিমিট এর সংজ্ঞা ঃ যে কোন যথেচ্ছ ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা, $\varepsilon > 0$ এর জন্য একটি নির্দিষ্ট প্রতিরূপী সংখ্যা, $\delta > 0$ আছে, যখন $x \to a$ এবং $|x-a| < \varepsilon$ হলে $f(x) \to l$ এবং $|f(x) - l| < \delta$ হয়;

অর্থাৎ $|f(x) - l| < \varepsilon$ যদি $|x - a| < \delta$.

এক্ষেত্রে l কে $f(x)$ এর **লিমিট** বলে এবং লেখা হয় $\lim_{x \to a} f(x) = l.$

সাধারণভাবে, চলমান রাশি x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি একটি প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী হয়, তাহলে l কে a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লিমিট (limit) বলা হয় এবং লেখা হয় : $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

9.2. ঢাল



মনে করি, বক্ররেখার সমীকরণ, $y = f(x)$.

উপরের চিত্রে লক্ষ করি ঃ x এর প্রেক্ষিতে $f(x)$ এর পরিবর্তনের গড় হার $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, যা জ্যা, $P_1 P_0$ এর ঢাল (slope) এর সমান।

এখন $x_1 \to x_0$ হলে, P_1 ক্রমশঃ P_0 এর সন্নিকটবর্তী হয়। ফলে জ্যাটি P_0 বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী হয়। অর্থাৎ $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার তখন $x = x_0$ এ অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল (slope) এর সমান হয়। সুতরাং, ঐক্ষেত্রে স্পর্শকের ঢাল = $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

9.3. ফাংশনের লিমিট

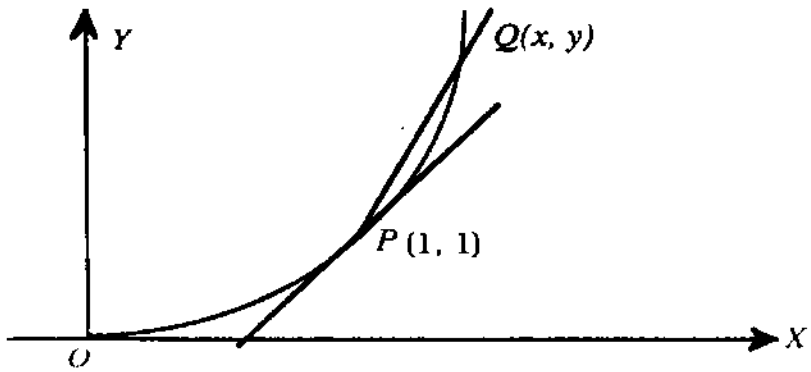
(i) লেখচিত্রের সাহায্যে :

কোন বক্ররেখার একটি বিন্দু P–তে স্পর্শক বলতে একটি রেখা বোঝায় যা

(ক) বক্ররেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে,

বা, (খ) বক্ররেখাকে দুইটি সমাপতিত (coincid*e*nt) বিন্দুতে ছেদ করে,

বা, (গ) জ্যা PQ এর সীমাস্থ অবস্থান (limiting position), যখন Q বিন্দু P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হয়ে P এর সন্নিকটবর্তী হয়।



মনে করি, ফাংশন f কে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো এবং P এবং Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (1, 1) এবং (x, y). তাহলে, PQ রেখার ঢাল $= \dfrac{y-1}{x-1} = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ [বক্ররেখার সমীকরণ, $y = x^2$ থেকে]

স্পষ্টতঃ, ঢাল $= \dfrac{0}{0}$ [অসংজ্ঞায়িত, যখন $x = 1$]

এখন x এর মান যতই 1 এর সন্নিকটবর্তী হয়, PQ এর ঢাল ততই 2 এর সন্নিকটবর্তী হয়। যেমন, $x = 1{\cdot}1$, $1{\cdot}01$, $1{\cdot}001$, $1{\cdot}0001$, ... হলে, PQ এর ঢাল = $2{\cdot}1$, $2{\cdot}01$, $2{\cdot}001$, $2{\cdot}0001$, ... হবে। অর্থাৎ জ্যা, PQ এর জন্য আমরা যে ঢালই নির্ণয় করি তা 2 এর খুব কাছাকাছি হবে কিন্তু 2 এর সমান হবে না। সুতরাং, আমরা এ সিদ্ধান্তে পৌছতে পারি যে, স্পর্শকের ঢালই কেবল 2 হবে। অর্থাৎ, স্পর্শকের ঢাল $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর লিমিট নির্ণয় করার সাধারণ নিয়ম

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর মান নির্ণয় করতে হলে x এর পরিবর্তে একটি নতুন চলক h যার সীমা শূন্য (0) নেয়া সুবিধাজনক হবে। এখন $x = a + h$, অর্থাৎ $h = x - a$, যা শূন্যের দিকে অগ্রসর হয়, যখন $x \to a$. এরপর ফাংশনটিকে সরল করে h এর উচ্চতর ঘাতের সমন্বিত পদগুলো বর্জন করতে হয়, কারণ অন্য সংখ্যার তুলনায় h এর উচ্চতর ঘাতের সমন্বিত পদের মান যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

উদাহরণ ঃ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(4+h)^2-16}{4+h-4}$ [$x = 4 + h$ ধরে, $\because x \to 4$ হলে, $h \to 0$]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (8+h) = 8.$$

9.4. এক দিকবর্তী লিমিট

কখনও কখনও ফাংশন, $f(x)$ কে একাধিক সূত্র দ্বারা সূচিত করা হয়। ঐ সব ক্ষেত্রে ফাংশনের বামদিকের এবং ডানদিকের লিমিট সম্পর্কিত ধারণা থাকা খুবই দরকার। $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ কে $f(x)$ এর বাম দিকবর্তী লিমিট বলা হয়, যেখানে x এর মান a এর যথেষ্ট সন্নিকটবর্তী কিন্তু a থেকে ক্ষুদ্রতর। অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$.

তদ্রূপ $f(x)$ এর ডানদিকবর্তী লিমিটের ক্ষেত্রে x সব সময় a থেকে বৃহত্তর থাকে।

ডানদিকবর্তী লিমিটকে $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$

উদাহরণ : $\lim\limits_{x\to 2-} (x^2+3)$ এবং $\lim\limits_{x\to 2+} (x^2+3)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\to 2-} (x^2+3) = \lim\limits_{h\to 0} \{(2-h)^2+3\}$, যখন $x = 2-h$.

$= 7.$

এবং $\lim\limits_{x\to 2+} (x^2+3) = \lim\limits_{h\to 0} \{(2+h)^2+3\}$, যখন $x = 2+h$.

$= 7.$

মন্তব্য ঃ ফাংশনের সীমাস্থ মান (limiting *value*) কে সংক্ষেপে **লিমিট** বলা হয়।

9.5. লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি

নিচে লিমিটের কয়েকটি মৌলিক ধর্মাবলি দেয়া হল :

(i) দুইটি বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ফাংশনের বীজগণিতীয় সমষ্টির লিমিট তাদের প্রত্যেকের আলাদা আলাদা লিমিটের বীজগণিতীয় সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ, u, v, w এর প্রত্যেকে একই চলক x এর ফাংশন হলে,

$$\lim \{u(x) \pm v(x) \pm \mathrm{w}(x)\} = \lim \{u(x)\} \pm \lim \{v(x)\} \pm \lim \{\mathrm{w}(x)\}.$$

(ii) দুইটি বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ফাংশনের গুণফলের লিমিট, তাদের আলাদা আলাদা লিমিটের গুণফলের সমান।

অর্থাৎ, $\lim \{u(x) \times v(x)\} = \lim \{u(x)\} \times \lim \{v(x)\}$.

(iii) দুইটি ফাংশনের ভাগফলের লিমিট, তাদের লিমিটের ভাগফলের সমান, যদি হরের লিমিট শূন্য না হয়।

অর্থাৎ, $\lim \left\{\dfrac{u(x)}{v(x)}\right\} = \dfrac{\lim \{u(x)\}}{\lim \{v(x)\}}$, যদি $\lim \{v(x)\} \neq 0$.

Sandwich Theorem

বর্ণনা : মনে করি, I ব্যবধিতে a একটি লিমিট বিন্দু এবং I ব্যবধিতে (a ব্যতিত) f, g, h ফাংশনগুলি সংজ্ঞায়িত।

ধরি, I ব্যবধিতে প্রত্যেকটি $x\ (x \neq a)$ এর জন্য $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ এবং আরও মনে করি,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

তাহলে, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

মন্তব্য : (i) g এবং h ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে f এর নিম্নসীমা ও উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

(ii) এখানে I এর মধ্যবর্তী মান a হওয়ার প্রয়োজন নেই। বাস্তবে যদি I এর সর্বশেষ মান a হয়, তাহলে, উপরের লিমিট বাম দিকবর্তী অথবা ডান দিকবর্তী লিমিট।

(iii) অসীম ব্যবধির জন্যও একই বর্ণনা প্রযোজ্য। যেমন : যদি $I = (0, \infty)$ হয়, তাহলে একই সিদ্ধান্ত প্রযোজ্য যখন $x \to \infty$

উদাহরণ 1. $\lim\limits_{x \to a} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : লিমিটের বিধি

$\lim\limits_{x \to a} (f(x).\ g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x).\ \lim\limits_{x \to a} g(x)$ এর মাধ্যমে $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়, কারণ $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ এর মান অনির্ণেয়।

সাইন ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী, $-1 \le \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le x^2$ [x^2 দ্বারা গুণ করে]

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0,$

অতএব Sandwich Theorem অনুযায়ী $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0.$

9.6. অসীম লিমিট

(i) মনে করি, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

এখন $x = \cdot 00001$ হলে, $f(x) = 100000$; $x = \cdot 0000001$ হলে, $f(x) = 10000000$ ইত্যাদি।

অতএব, $x \to 0_+$ হলে, $f(x) \to \infty$. অর্থাৎ x কেবল ধনাত্মক মান গ্রহণ করে ক্ষুদ্রতর থেকে ক্ষুদ্রতর হয়ে 0 এর সন্নিকটবর্তী হলে, $f(x) \to \infty$. হবে।

(ii) x সব সময় a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মানগুলি নিয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হলে, যদি $f(x)$ এর মানগুলি ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর থেকে ক্ষুদ্রতর হয় তবে আমরা বলি $x \to a$ হলে, $f(x) \to -\infty$.

(iii) x সব সময় ধনাত্মক মানগুলি গ্রহণ করে সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেতে থাকলে যদি একটি সসীম রাশি l পাওয়া যায় যেন $|f(x) - l|$ এর মান কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর হয়, তাহলে $f(x)$ এর লিমিট l, যখন $x \to \infty$ এবং এটিকে $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

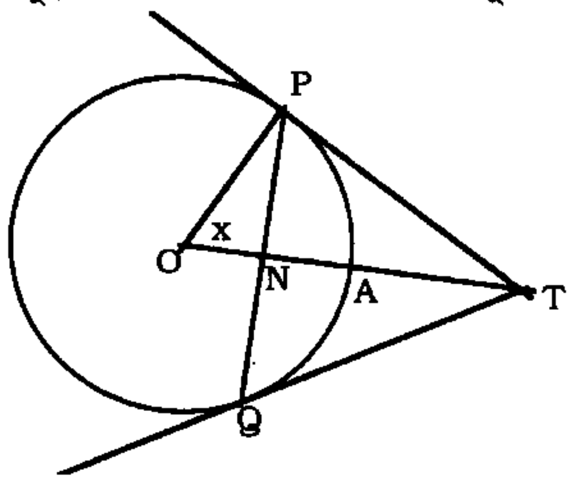
উদাহরণ। $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{5x - 3}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{5x - 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + \dfrac{5}{x}}{5 - \dfrac{3}{x}}$ [লব ও হরকে x দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}(3 + \frac{5}{x})}{\lim\limits_{x \to \infty}(5 - \frac{3}{x})} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}(3) + \lim\limits_{x \to \infty}\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 5 - \lim\limits_{x \to \infty}\frac{3}{x}} = \frac{3 + 0}{5 - 0} = \frac{3}{5}.$$

9.7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ এবং অনুরূপ লিমিট :

(ক) মনে করি, একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PAQ এ বৃত্তের একটি চাপ। মনে করি, OA ব্যাসার্ধ PQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। তাহলে, OA ব্যাসার্ধ A বিন্দুতে PAQ চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত PT ও QT স্পর্শক দুইটি OA এর বর্ধিতাংশের সাথে T বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।



মনে করি, $\angle AOP = x$ রেডিয়ান।

এখন $PQ <$ চাপ $PAQ < PT + QT$ ..... (i)

(i) এর অসমতার অর্ধেক নিয়ে আমরা পাই $PN <$ চাপ $PA < PT$ .... (ii)

আমরা পাই, $\sin x = \frac{PN}{OP} = PN$ [$\because$ $OP = 1$]

তদ্রূপ $x = \frac{\text{চাপ } PA}{OP} =$ চাপ PA এবং $\tan x = \frac{PT}{OP} = PT$

$\therefore$ (ii) থেকে $\sin x < x < \tan x$ .... (iii)

বা, $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ [$\sin x$ দ্বারা ভাগ করে] .... (iv) [এখানে $\sin x \neq 0$]

x এর মান যতই ক্ষুদ্রতর হউক না কেন (iv) সম্পর্কটি সত্য। x এর মান ক্ষুদ্রতর থেকে ক্ষুদ্রতর করলে OP এবং ON সীমাস্থ অবস্থায় মিলে যাবে। সেক্ষেত্রে $\cos x \to 1$.

$\therefore$ যখন $x \to 0$, তখন $1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} < 1$. $\therefore$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, অর্থাৎ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

বিকল্প পদ্ধতি : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, যখন x এর মান ক্ষুদ্রতম কিন্তু $x \neq 0$

এখন $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$

সুতরাং, Sandwich উপপাদ্য অনুযায়ী $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

(খ) অনুরূপভাবে, (iii) নং কে $\tan x$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$,

অর্থাৎ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$.

(গ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ নির্ণয় :

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\infty\right)-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\infty}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\infty\right)=1.$$

(ঘ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1+x)}{x}$ নির্ণয় :

এখানে $x=0+h$ বসিয়ে [যখন $x\to 0, h\to 0$] আমরা পাই

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\,(1+x)}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{ln\,(1+h)}{h}$$

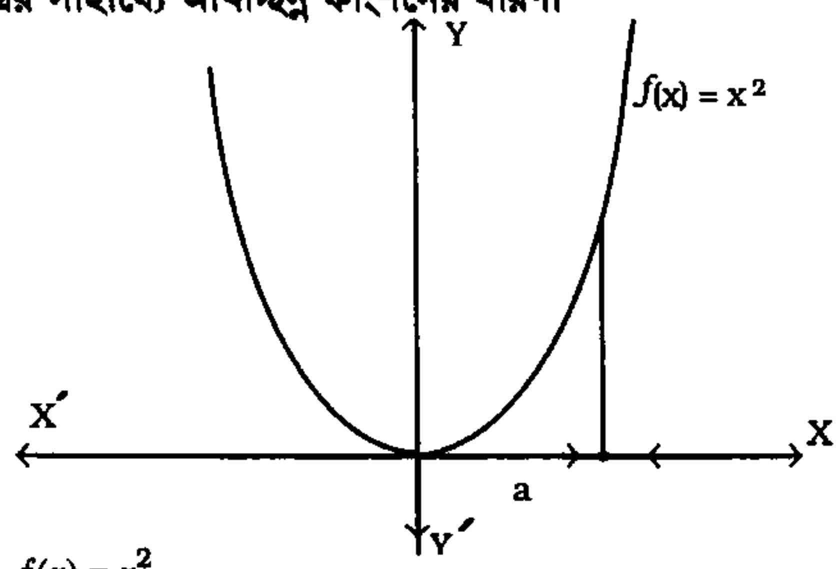
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\left(h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\ldots.\infty\right)\right\}=\lim_{h\to 0}\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2-\ldots.\infty\right)=1.$$

9.8. অবিচ্ছিন্ন ফাংশন

$f(x)$ ফাংশনের $x=a$ বিন্দুতে ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় হয়, যদি

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x).$$

9.8.1. লেখচিত্রের সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধারণা



মনে করি, ফাংশন, $f(x)=x^2$.

এখন $f(a)=a^2$ এবং $\lim\limits_{x\to a}(x^2)=a^2$.

আবার $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2)=a^2$ এবং $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(x^2)=a^2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

সুতরাং $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ পরস্পর সমান। এক্ষেত্রে $x=a$ বিন্দুতে ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন (contin*uo*us) বলা হয়। লেখচিত্রটি লক্ষ করলে দেখা যায় যে তা $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন **(contin*uo*us).**

9.8.2. মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (Intermediate Value theorem)

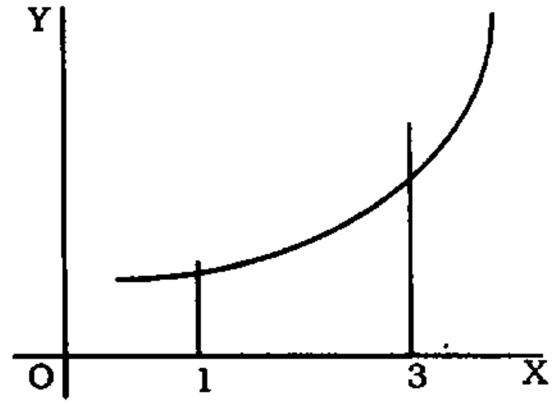
বর্ণনা (Statement) : বাস্তব সংখ্যার অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের প্রতিচ্ছবির ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা ও বৃহত্তম নিম্নসীমার মধ্যবর্তী প্রত্যেক মানের জন্য ফাংশনের ডোমেনের কমপক্ষে একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে ফাংশনের লেখচিত্রটি অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : *(i)* মনে করি, $[a, b]$ ব্যবধিতে f একটি বাস্তব মানের অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং $f(a)$ ও $f(b)$ এর একটি মধ্যবর্তী মান u তাহলে, $c \in [a, b]$, একটি মান পাওয়া যাবে যেন $f(c) = u$.

উপপাদ্যটি প্রায়শ নিম্নোক্তভাবে বর্ণনা করা হয় :

মনে করি, $f : [a, b] \rightarrow \boldsymbol{R}$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং u একটি বাস্তব সংখ্যা যা $f(a) < u < f(b)$ অথবা, $f(a) > u > f(b)$ সিদ্ধ করে। তাহলে, যেকোনো বাস্তব মান c এর জন্য $c \in [a, b], f(c) = u$.

উদাহরণ : দেওয়া আছে, $[1, 3]$ ব্যবধিতে f একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন, যা $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। সুতরাং, $f(1) = 2$ এবং $f(3) = 10$ হয়। তাহলে 1 এবং 3 এর মধ্যবর্তী একটি মান 2 পাওয়া যায় যার জন্য f এর প্রতিচ্ছবি 5. অর্থাৎ একটি বদ্ধ ব্যবধিতে f এর লেখচিত্র অবিচ্ছিন্নভাবে অঙ্কন করা যায়।



9.8.3. *Lagrange's Mean Value Theorem* এর বর্ণনা

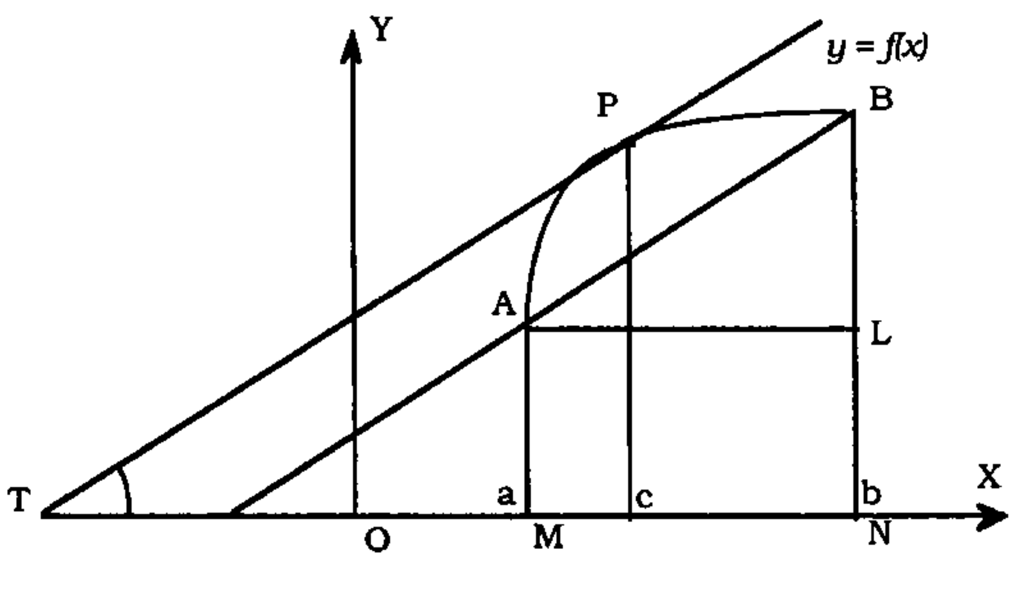
যদি $f(x)$ একটি ফাংশন হয় যেন,

(i) $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং

(ii) (a, b) ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান, তাহলে (a, b) ব্যবধির মধ্যে কমপক্ষে একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে যেন,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ যেখানে } a < c < b.$$

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :



$y = f(x)$ ফাংশনটি APB বক্ররেখা দ্বারা সূচিত হলো, যেখানে $x = a, x = b$ এবং $x = c$ এর সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি যথাক্রমে A, B এবং P যেন, গড়মান উপপাদ্যটি $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ সিদ্ধ হয়।

OX এর উপর AM ও BN লম্ব টানা হলো।

তাহলে $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BN - AM}{ON - OM} = \frac{BN - LN}{MN} = \frac{BL}{AL} = \tan \angle BAL$

এবং $f'(c) = \tan\angle PTX$, যেখানে P বিন্দুতে PT স্পর্শক।

সুতরাং আমরা পাই, $\tan\angle BAL = \tan\angle PTX$,

অর্থাৎ $\angle BAL = \angle PTX$, অর্থাৎ $x = c$ এর সংশ্লিষ্ট বিন্দু P তে অঙ্কিত স্পর্শক AB জ্যায়ের সমান্তরাল।

Mean Value theorem এর প্রয়োগ

উদাহরণ। $f(x) = x(x - 2)$ ফাংশনের জন্য $[1, 2]$ ব্যবধিতে একটি বিন্দু $x = c$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$

(i) $f(x)$ একটি বহুপদী। সুতরাং $[1, 2]$ ব্যবধিতে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(ii) $f'(x) = 2x - 2$ যা $(1, 2)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

তাহলে, $f(x)$ ফাংশনটি *Mean Value theorem* এর শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ আমরা পাই, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, যেখানে $a < c < b$

এখানে, $a = 1, b = 2 \Rightarrow f(a) = f(1) = 1 - 2 = -1$, যেহেতু $f(x) = x^2 - 2x$

$f(b) = f(2) = 4 - 4 = 0$ এবং $f'(c) = 2c - 2$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{0 - (-1)}{2 - 1} = 2c - 2$$

$$\Rightarrow 1 = 2c - 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

$\therefore 1 < \frac{3}{2} < 2$ অর্থাৎ $(1, 2)$ ব্যবধির মধ্যে $\frac{3}{2}$ আছে।

9.8.4. অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্মাবলি

যদি $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $g(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে,

(i) $x = c$ বিন্দুতে $f(x) + g(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

(ii) $x = c$ বিন্দুতে $f(x) - g(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

(iii) $x = c$ বিন্দুতে $f(x). g(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$. [ঢা. '০৯]

সমাধান : মনে করি, $\sqrt{x} = y$ এবং $\sqrt{a} = b$. তাহলে, যদি $x = a$ হয় তবে $y = \sqrt{x} = \sqrt{a} = b$.

$\therefore y \to b$, যেহেতু $x \to a$.

এখন $\lim_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{y\to b} \dfrac{y^5 - b^5}{y-b}$

$= \lim_{y\to b} (y^4 + by^3 + b^2y^2 + b^3y + b^4)$ [লবকে হর দ্বারা ভাগ করে]

$= 5b^4 = 5(\sqrt{a})^4 = 5a^2$.

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$.

সমাধান : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \times \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \dfrac{5}{4}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \dfrac{5}{2} = 1 \times 1 \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$.

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h}$

সমাধান : $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$.

সমাধান : মনে করি, $x = \frac{\pi}{2} + h$. তাহলে, যখন $x \to \frac{\pi}{2}$, তখন $h \to 0$.

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{h\to 0} (-h) \tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \lim_{h\to 0} (-h)(-\cot h)$

$= \lim_{h\to 0} \left(\dfrac{\sin h}{h} \times \cos h\right) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} \times \lim_{h\to 0} \cos h = 1$.

উদাহরণ 5. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-e^{-2y}}{ln\,(1+y)}$ $[0<y<1]$

সমাধান : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-e^{-2y}}{ln\,(1+y)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\left\{1-2y+\dfrac{(2y)^2}{2!}-\dfrac{(2y)^3}{3!}+\dots\dots\right\}}{y-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{3}y^3-\dfrac{1}{4}y^4+\dots\dots}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2-\dfrac{2^2}{2!}y+\dfrac{2^3}{3!}y^2-\dots\dots\dots}{1-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3}y^2-\dfrac{1}{4}y^3+\dots\dots} = \frac{2}{1} = 2.$$

উদাহরণ 6. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$.

সমাধান : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 8x}{2\sin x\sin 4x}\quad\left[\because \cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cos 4x}{\sin 4x} = 2\times\lim_{x\to 0}(\cos 4x) = 2\times 1 = 2.$$

প্রশ্নমালা 9.1

লিমিট নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 1–46)

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x^2-12x-9}{x^2-x-6}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2x^2+9x-4}$.

5. (*a*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$. [কু. '১৩] (*b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

6. (*a*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$. [সি. '০৩] (*b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+5x}-\sqrt{4-7x}}{3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}$.

8. $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^2-1}{\sqrt{3y+1}-\sqrt{5y-1}}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right\}$.

10. $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{1}{b}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+b}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$.

11. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y^3}-\sqrt{1+y}}$.

12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{9}{2}}-a^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^x-6^{-x}}{6^x+6^{-x}}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{2x+5}{x}}$.

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}}$, যখন $a > 0$ এবং $b > 0$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$. [রা. '১২]

20. $\lim\limits_{x \to \infty} \{ln(4x-1) - ln(x+7)\}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}$. [দি. কু. '১১; ঢা. '১০; সি. ব. '১২]

23. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin^2 5\theta}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$. [ঢা. ব.'১১; কু. '১০; চ. সি.'১১]

25. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 9x}{\sin 4x}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$. [দি. '১২]

26. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx}$. [ঢা. '০৬]

27. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$.

28. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$.

29. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$.

30. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

31. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$. [কু. '০৩]

32. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$. [ব. '১২; ব. '১৩]

33. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$.

34. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{y(\cos y + \cos 2y)}{\sin y}$. [রা. '১১]

35. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$. [ঢা. '১৩]

36. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta}$. [কু. চ. '১২]

37. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 + x}$.

38. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$. [ব. '১১; ঢা. '১২]

40. $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x \sin \frac{b}{2^x}$. [সি. '০৫]

41. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$.

42. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\theta}{\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)^2}$. [য '১০]

43. $\lim\limits_{k \to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$, যখন $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

44. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log\left(1 - \frac{x}{4}\right) - (1-x)^{\frac{1}{4}} + 1}{x^2}$.

45. $\lim\limits_{x \to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$. [কু. '০৫]

46. $\lim\limits_{y \to x} \frac{\tan y - \tan x}{y - x}$.

47. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right]$. [ব. '১০; রা. '১৩]

উত্তরমালা

1. $-\frac{1}{6}$. **2.** $\frac{27}{5}$ **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{2}$, **5.** (*a*) $-\frac{1}{2}$. (*b*) 1. **6.** (*a*) $\frac{7}{2}$. (*b*) 1. **7.** -2. **8.** -4. **9.** $\frac{1}{2}$.

10. $-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$. **11.** 1. **12.** $9a^4$. **13.** 1. **14.** 1. **15.** e^{10}. **16.** $e^{\frac{b}{a}}$. **17.** 2. **18.** 0. **19.** 1.

20. $2\log 2$. **21.** 1. **22.** $\frac{49}{6}$. **23.** $\frac{2}{25}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** (*a*) -2. (*b*) 1. **26.** $\frac{a}{b}$.

27. $\frac{1}{2}$. **28.** $\frac{1}{2}$. **29.** 1. **30.** 0. **31.** 6. **32.** $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. **33.** $\frac{a^2}{b^2}$. **34.** 2. **35.** 0.

36. $\frac{3}{2}$. **37.** 2. **38.** 1. **39.** $\frac{1}{2}$. **40.** b. **41.** $\frac{1}{2}$. **42.** $\frac{1}{2}$. **43.** $\frac{2}{(1-x)^2}$. **44.** $\frac{1}{16}$.

45. $\cos y$. **46.** $\sec^2 x$. **47.** 0.

9.9. লিমিট হিসেবে অন্তরজ

মনে করি, $f(x)$ হলো x এর একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন। তাহলে x এর অতি ক্ষুদ্রতর বৃদ্ধির জন্য ফাংশনটির বৃদ্ধি হবে $f(x+\delta x)-f(x)$.

সুতরাং ফাংশন $f(x)$ এর বৃদ্ধি ও চলক x এর বৃদ্ধির অনুপাত $=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$.

$\therefore$ যখন $\delta x \to 0$ অনুপাতের লিমিট

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

এই লিমিটকে x এর প্রেক্ষিতে $f(x)$ এর অন্তরজ বলা হয়।

যদি $f(x)$ কে y দ্বারা সূচিত করা হয়, অর্থাৎ $y=f(x)$, তাহলে, x এর অতি ক্ষুদ্রতর বৃদ্ধি δx এর জন্য y এর আনুসঙ্গিক বৃদ্ধি δy (ধনাত্মক বা ঋনাত্মক) দ্বারা সূচিত করা হলে,

$$y+\delta y=f(x+\delta x)$$

$$\Rightarrow \delta y=f(x+\delta x)-f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\ [\delta x \text{ দ্বারা ভাগ করে }]$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজকে $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$ বা $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

9.10. মূল নিয়মে x^n এর অন্তরজ [ঢা. '১২]

মনে করি, $f(x)=x^n$, যখন n একটি মূলদ সংখ্যা।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n\left(1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \ldots\ldots\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{n.h\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot h^2 x^{n-2} + \text{--------}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot hx^{n-2} + \text{-------}\right) = nx^{n-1}.$$

$\therefore \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(x^n) = \mathbf{n}x^{n-1}.$

মন্তব্য : যেহেতু $h \to 0$, সুতরাং $\frac{h}{x}$ এর সাংখ্যিক মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হবে। অতএব n যে কোন মূলদ সংখ্যা হলে, দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে $\left(1+\frac{h}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। x এর প্রেক্ষিতে নিচের ফাংশনগুলোর অন্তরজ নির্ণয় কর :

(i) $f(x) = x^3$, **(ii)** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, **(iii)** $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

সমাধান : (i) $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$. [অনুচ্ছেদ 9.10 থেকে]

(ii) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

(iii) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

9.10.1. ধ্রুবকের অন্তরজ

মনে করি, $f(x) = c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক।

সংজ্ঞানুসারে, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$

যে কোন চলকের প্রেক্ষিতে ধ্রুবকের অন্তরজ শূন্য।

9.10.2. ফাংশনের যোগফলের অন্তরজ

মনে করি, u এবং v উভয়ে x এর ফাংশন।

ধরি, $y = u \pm v$. ----- (i); তাহলে y, x এর ফাংশন।

মনে করি, x এর অতি সামান্য বৃদ্ধি Δx এর জন্য y, u, v এর অনুরূপ (corresponding) বৃদ্ধি যথাক্রমে $\Delta y, \Delta u, \Delta v$, যারা যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

$\therefore y = u \pm v$ থেকে আমরা পাই, $y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)$. --------- (ii)

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে, $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$ $\quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$ [উভয়পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে]

সুতরাং, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$ অর্থাৎ, $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$.

এ সূত্রটি যে কোন সসীম সংখ্যক ফাংশনের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।

9.11. বহুপদী ফাংশনের অন্তরীকরণ

মনে করি, $f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^3 + x^2 + x + 5$, যা একটি বহুপদী ফাংশন। তাহলে,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) + \frac{d}{dx}(x^{n-1}) + ... + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ...+ 3x^2 + 2x + 1 \left[\because \frac{d}{dx}(5) = 0\right]$$

9.12. মূল নিয়মে e^x, a^x, $ln\ x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ এবং $\operatorname{cosec} x$ এর অন্তরজ নির্ণয়

(i) মনে করি, $f(x) = e^x \quad \therefore f(x+h) = e^{x+h}$ [রা. '১০; সি. '১১]

অন্তরজের সংজ্ঞা থেকে পাই, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

$$= e^x \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+...\right)-1\right\}$$

$$= e^x \times \lim_{h\to 0}\left\{1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+...\right\} = e^x.$$

(ii) মনে করি, $f(x) = a^x$ [ব. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$= a^x.\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$ [$\because$ h এর সাথে a^x সম্পর্কিত নয়]

$$= a^x.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{1!}\ln a+\frac{h^2}{2!}(\ln a)^2+\text{-------}\right)-1\right\}$$ [a^h এর বিস্তৃতি থেকে]

$$= a^x.\lim_{h\to 0}\left\{\ln a+\frac{h}{2!}(\ln a)^2+\text{--------}\right\} = a^x \ln a.$$

(iii) মনে করি, $f(x) = ln\ x$ [ব. '১০; চ. কু. '১১; রা. '১২; সি. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{x}-\frac{1}{2}.\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}.\frac{h^3}{x^3}-\text{-------}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}.\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}.\frac{h^2}{x^3}-...........\right) = \frac{1}{x}.$$

(iv) মনে করি, $f(x) = \sin x$

$$\therefore f'(x) = \lim,\ h\to 0)\ \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x\ .\ 1 = \cos x.$$ [অনুচ্ছেদ 1.8 থেকে]

(v) মনে করি, $f(x) = \cos x$ [দি. কু. '১০; দি. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = -\sin x\times 1 = -\sin x.$$

$$\left[\because \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

(vi) মনে করি, $f(x) = \tan x$ [কু. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1\times\frac{1}{\cos x\ .\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

(vii) মনে করি, $f(x) = \cot x$

$$\therefore f'(x) = \lim,\ h\to 0)\frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin x - \sin(x+h)\cos x}{h\sin(x+h)\sin x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\sin h}{h}\right)\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1.\frac{1}{\sin^2 x} = -1.\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x\ .$$

(viii) মনে করি, $f(x) = \sec x$ [সি. য. '১০]

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\} \times \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \sin x \times 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sec x \tan x.$$

(ix) মনে করি, $f(x) = \operatorname{cosec} x$ [সি. চ. '১৩]

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\} \times \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

বি. দ্র. (i) $\log_x a = \log_e a \times \log_x e = \log_e a \times \frac{1}{\log_e x} = \frac{\log_e a}{\ln x}$

(ii) $\log_a x = \log_a e \times \log_e x = \log_a e \ln x$

প্রশ্নমালা 9.2

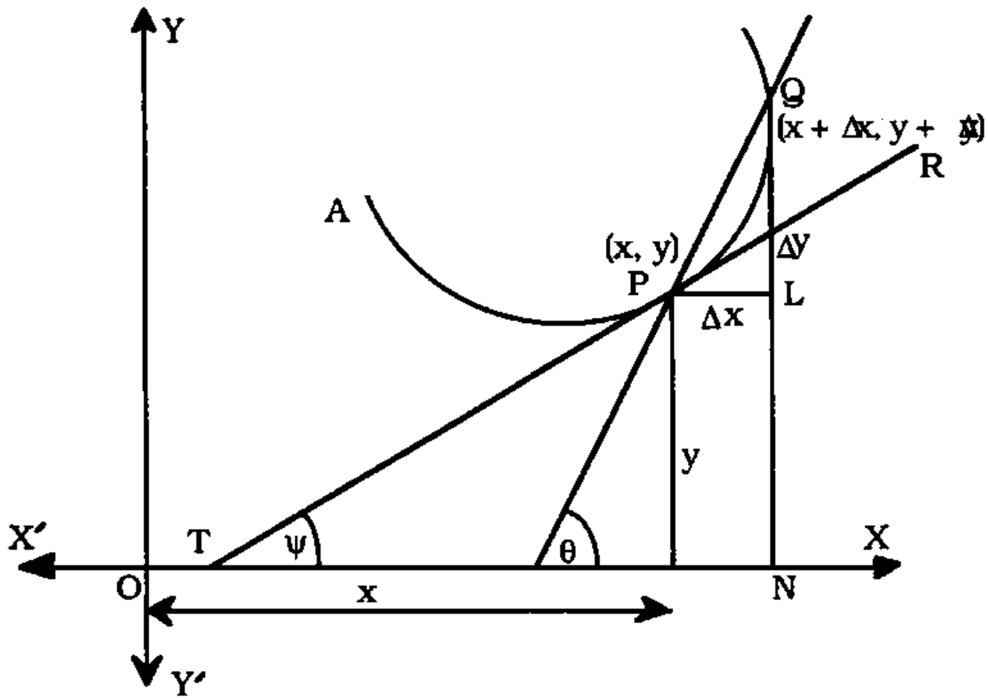
মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় কর :

1. e^{mx}. [ব. দি. '১১; কু. '১৩] 2. (a) $\sin bx$. (b) $\cos ax$. (c) $\cos 3x$. [রা. '১১]
3. $\sec 2x$. $\tan 2x$. $\log_a x$. [ঢা. '১১; ব. '১২] 4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sin 2x$. [ঢা. '০৫; ব. '১৩]
5. $e^x \cos x$.

উত্তরমালা

1. me^{mx}. 2. (a) $b\cos bx$, (b) $-a\sin ax$; (c) $-3\sin 3x$. 3. $2\sec 2x\tan 2x$, $2\sec^2 2x$, $\frac{\log_a e}{x}$. 4. $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$, $2\cos 2x$. 5. $e^x\cos x - e^x\sin x$.

9.13. স্পর্শকের নতি হিসেবে অন্তরজ



মনে করি, $y = f(x)$ সমীকরণ দ্বারা APQ বক্ররেখা সূচিত করা হল। এ বক্ররেখার খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দু $P(x,y)$ এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ নেয়া হল। এখানে $\Delta x \to 0$ হলে, $\Delta y \to 0$ হবে।

Q থেকে OX এর উপর QN লম্ব আঁকি। এখন P থেকে QN এর উপর PL লম্ব টানা হল।

তাহলে, স্পষ্টত $QL = \Delta y$ এবং $PL = \Delta x$.

আবার মনে করি, বক্ররেখার QP জ্যা X–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, PQ সরলরেখার ঢাল (slope), $\tan\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ [QPL সমকোণী ত্রিভুজ থেকে]। যখন $\Delta x \to 0$ হয়, তখন Q বিন্দুটি ক্রমশঃ P এর দিকে অগ্রসর হয়ে P এর সাথে প্রায় মিলে যাবে। অর্থাৎ QP জ্যা বক্ররেখার P বিন্দুতে স্পর্শক হয়। সুতরাং, যখন $\Delta x \to 0$, তখন $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ হবে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল। এখন x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের (positive direction of x– axis) সাথে স্পর্শকটি ψ কোণ উৎপন্ন করলে, স্পর্শক রেখার ঢাল (slope) $= \tan\psi$.

$$\therefore \tan\psi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.\ \text{[সংজ্ঞানুসারে]}$$

সুতরাং $y = f(x)$ সমীকরণবিশিষ্ট বক্ররেখার উপরিস্থিত (x,y) বিন্দুতে ফাংশন, $f(x)$ এর অন্তরক সহগ ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক টেনজেন্ট এর সমান।

উদাহরণ। $y = \dfrac{2}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x = \dfrac{1}{3}$, ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $y = \dfrac{2}{x}$. $\therefore \dfrac{dy}{dx} = 2(-1)x^{-2} = \dfrac{-2}{x^2}$.

যখন $x = \dfrac{1}{3}$, তখন $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -18$. সুতরাং, স্পর্শকের ঢাল $= -18$.

9.14.1. দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

মনে করি, $y = uv$ ... (i), যেখানে u এবং v এর উভয়ে x এর ফাংশন। তাহলে, y হবে x এর ফাংশন।

এখন x এর অতি সামান্য বৃদ্ধি Δx এর জন্য y, u, v এর অনুরূপ বৃদ্ধি হবে যথাক্রমে $\Delta y, \Delta u, \Delta v$, যারা যথেষ্ট ক্ষুদ্র।

$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$ [$\because$ $y = uv$ ধরা হয়েছে।

$$= uv + u.\Delta v + v.\Delta u + (\Delta u)(\Delta v) \text{ ---- (ii)}$$

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে আমরা পাই,

$\Delta y = u.\Delta v + v.\Delta u + (\Delta u)(\Delta v)$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v.\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ [উভয়পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে]

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(v.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

[লিমিটের সূত্র থেকে]

$$= u.\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + v.\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta u) \times \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \text{ ------- (iii)}$$

যেহেতু $\Delta x \to 0$ হলে, $\Delta u \to 0$; $\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0.$

অর্থাৎ, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta u) \times \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) = 0.$

সুতরাং, (iii) থেকে সংজ্ঞানুসারে

$$\frac{d}{dx}(y) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \quad \therefore \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

অর্থাৎ, **দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ**

= প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশনের অন্তরজ + দ্বিতীয় ফাংশন × প্রথম ফাংশনের অন্তরজ।

9.14.2. দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ

মনে করি, $y = \dfrac{u}{v}$ ---- (i), যেখানে u এবং v এর উভয়ে x এর ফাংশন। তাহলে, y হবে x এর ফাংশন।

মনে করি, x এর অতি সামান্য বৃদ্ধি Δx এর জন্য y, u, v এর অনরূপ বৃদ্ধি যথাক্রমে $\Delta y, \Delta u, \Delta v$.

$\therefore y + \Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ ------ (ii)

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে আমরা পাই,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v.\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$ [উভয়পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \dfrac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(v.\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\{v(v + \Delta v)\}}$ [লিমিটের সূত্র থেকে]

এখন সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$ [$\because \Delta x \to 0$ হলে, $\Delta v \to 0$]

সুতরাং, $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

অর্থাৎ, দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ = $\frac{(\text{হর} \times \text{লবের অন্তরজ}) - (\text{লব} \times \text{হরের অন্তরজ})}{(\text{হর})^2}$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. x এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

$3\, ln\, x - 5 \sec x + 2 \cot x - b^x + \log_a x$.

সমাধান : মনে করি, $y = 3\, ln\, x - 5 \sec x + 2 \cot x - b^x + \log_e x \times \log_a e$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\, ln\, x) - \frac{d}{dx}(5 \sec x) + \frac{d}{dx}(2 \cot x) - \frac{d}{dx}(b^x) + \frac{d}{dx}(\log_a e.\, ln\, x)$

$= 3.\frac{1}{x} - 5 \sec x \tan x + 2(-\operatorname{cosec}^2 x) - b^x \log_e b + \log_a e.\frac{1}{x}$

$= \frac{3}{x} - 5 \sec x \tan x - 2 \operatorname{cosec}^2 x - b^x \log_e b + \frac{\log_a e}{x}$.

উদাহরণ 2. x এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

(i) $(x^2 + 3)(2x^2 - 1)$; (ii) $x^2 \log_e x - 8 e^x \cos x + 7$.

সমাধান : (i) মনে করি, $y = uv$, যেখানে $u = x^2 + 3$ এবং $v = 2x^2 - 1$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ [অনুচ্ছেদ 2.7 থেকে]

$= (x^2 + 3)\frac{d}{dx}(2x^2 - 1) + (2x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 3)$

$= (x^2 + 3).\, 4x + (2x^2 - 1).\, 2x = 4x^3 + 12x + 4x^3 - 2x = 8x^3 + 10x$.

(ii) মনে করি, $y = x^2\, ln\, x - 8 e^x \cos x + 7$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2\, ln\, x) - 8.\frac{d}{dx}(e^x \cos x) + \frac{d}{dx}(7)$

$= x^2 .\ \frac{d}{dx}(ln\, x) + \log_e x.\frac{d}{dx}(x^2) - 8\left\{e^x.\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x.\frac{d}{dx}(e^x)\right\} + 0$

$= x^2 .\ \frac{1}{x} + ln\, x.\, 2x - 8\{e^x.(-\sin x) + \cos x.\, e^x\}$

$= x + 2x\, ln\, x + 8 e^x \sin x - 8e^x \cos x = x(1 + 2\, ln\, x) + 8 e^x(\sin x - \cos x)$.

উদাহরণ 3. t এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর : $\dfrac{\sin t+\cos t}{\sin t-\cos t}$.

সমাধান : মনে করি, $y=\dfrac{\sin t+\cos t}{\sin t-\cos t}$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{(\sin t-\cos t)\frac{d}{dt}(\sin t+\cos t)-(\sin t+\cos t)\frac{d}{dt}(\sin t-\cos t)}{(\sin t-\cos t)^2}$$

$$=\frac{(\sin t-\cos t)(\cos t-\sin t)-(\sin t+\cos t)(\cos t+\sin t)}{(\sin t-\cos t)^2}$$

$$=\frac{-(\sin t-\cos t)^2-(\sin t+\cos t)^2}{(\sin t-\cos t)^2}$$

$$=\frac{-2(\sin^2 t+\cos^2 t)}{(\sin t-\cos t)^2}=\frac{-2}{(\sin t-\cos t)^2}.$$

প্রশ্নমালা 9.3

প্রত্যেকটির অন্তর্ভুক্ত চলকের প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

1. $\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
2. $6x^4-3x^3-4x^{-\frac{1}{2}}+5$.
3. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\dfrac{3}{x}$.
4. $(ax)^n+(b^2x^2)^m$.
5. $\dfrac{x^3-27}{x^2+3x+9}$.
6. $(y+1)^2(y+2)$.
7. $2x^b-5e^x+b\tan x$.
8. $7\log_b x-6\ln(x)+8\cos x$.
9. $8\cot x-6\ln(x^n)+3\sec x$.
10. $x-3\log_a x+7\cos x$.
11. $7\log_a x-5\operatorname{cosec} x+7\cot x-2e^x$.
12. $8\log_a x-3\ln x+4\sin x$.
13. (i) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ [সি. '০১] (ii) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ [ঢা. '০৯]
14. $e^x\sin x$, $5e^x\ln x$
15. (i) $4e^t\sin t$, (ii) $\log_x a$. [ঢা. '১৩]
16. $e^x\log_a x$ [দি. '১২] $(\log_a x)(\ln x)$. [সি. '০৫]
17. $\log_a x\ln(5x)$.
18. $3\sqrt{x}\sin x-8$.
19. $7\sqrt{x}\cos x+e^x\sin x$.
20. (a) $x^3\log_a x+9e^x\cos x$. (b) $x^3\log_a x+7e^x\cos x$.
21. $\dfrac{\ln x}{\cos x}$.
22. $\dfrac{e^t+\ln(t)}{\sin t}$.
23. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. [চ. '১৩; কু. য. '১২]
24. $7x^3\log_a x+8e^x\sec x$.
25. $\dfrac{1-\cot x}{1+\cot x}$.
26. $\dfrac{\sin x}{x+\cos x}$.
27. $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$. [ঢা. '১৩; চ. '১২]

28. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$ · [কু. '০৪]

29. $\frac{e^x + ln(x)}{\log_a x}$.

30. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$ [ব. '১০; য. '১৩]

31. $\frac{x \cos x}{(x+1)\sin x}$.

32. $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

33. $\frac{\text{cosec } x}{1 + \text{cosec } x}$.

34. $\frac{x^n + \tan x}{e^x - \cot x}$.

35. (i) $\frac{x^n + \cot x}{e^x - \tan x}$, (ii) $x^n ln(2x)$

36. $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ (যেখানে u এবং f ধ্রুবক) হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{ds}{dt} = u + ft$.

37. $f(x) = 80x - 16x^2$ হলে, $f'(x)$ এর মান নির্ণয় কর। $f'(x) = 16$ হলে, x এর মান কত?

38. $y = x(x^2 - 12)$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর যার জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$.

39. একটি বক্ররেখার সমীকরণ $y = 4x^2$ দেয়া আছে। বক্ররেখাটির $x = 2$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর।

40. $s = \sqrt{t} + 7$ হলে, $\frac{ds}{dt}$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $t = 9$.

41. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$.

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{4}x^{-3/4} - \frac{1}{4}x^{-5/4}$. **2.** $24x^3 - 9x^2 + 2x^{\frac{-3}{2}}$. **3.** $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2}$.

4. $na^n x^{n-1} + 2mb^{2m}x^{2m-1}$ **5.** 1. **6.** $3y^2 + 8y + 5$. **7.** $2bx^{b-1} - 5e^x + b\sec^2 x$. **8.** $\frac{7\log_b e}{x} - \frac{6}{x} - 8\sin x$. **9.** $-8\text{cosec}^2 x - \frac{6n}{x} + 3\sec x \tan x$. **10.** $1 - \frac{3}{x}\log_a e - 7\sin x$. **11.** $\frac{7}{x}\log_a e + 5\text{cosec } x \cot x - 7\text{cosec}^2 x - 2e^x$. **12.** $\frac{8\log_a e}{x} - \frac{3}{x} + 4\cos x$.
13. (i) $\sin x$. (ii) 0. **14.** $e^x(\sin x + \cos x)$. **15.** (i) $4e^t(\cos t + \sin t)$. (ii) $-\ln(a)/x\{\ln(x)\}^2$.
16. $e^x\left(\log_a x + \frac{\log_a e}{x}\right)$; $\frac{2}{x}\log_a x$. **17.** $\frac{\log_a x}{x} + \frac{\log_a e\, ln(5x)}{x}$. **18.** $\frac{3\sin x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\cos x$.

19. $\frac{7\cos x}{2\sqrt{x}} - 7\sqrt{x}\sin x + e^x(\sin x + \cos x)$. **20.** **(a)** $3x^2\log_a x + x^2\log_a e + 9e^x(\cos x - \sin x)$.

(b) $3x^2\log_a x + x\log_a e + 7e^x\cos x - 7e^x\sin x$. 2 **22.** $\frac{(te^t + 1)\sin t - t\{e^t + ln(t)\}\cos t}{t\sin^2 t}$.

23. $\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$ **24.** $7x^2\log_a e + 21x^2\log_a x + 8e^x\sec x\tan x + 8e^x\sec x$.

25. $\frac{2\text{cosec}^2 x}{(1 + \cot x)^2}$. **26.** $\frac{x\cos x - \sin x + 1}{(x + \cos x)^2}$. **27.** $\frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ **28.** $\frac{\cos x + \sin x + 1}{(1 + \cos x)^2}$.

29. $\dfrac{\left(e^x+\dfrac{1}{x}\right)\log_a x-(e^x+\log x)\,\dfrac{1}{x}\log_a e}{(\log_a x)^2}$. **30.** $-2\sin x$. **31.** $\dfrac{\sin x\cos x - x(x+1)}{(x+1)^2\sin^2 x}$.

32. $\dfrac{(\sec^2 x+\text{cosec}^2 x)(\tan x+\cot x)-(\tan x-\cot x)(\sec^2 x-\text{cosec}^2 x)}{(\tan x+\cot x)^2}$.

33. $\dfrac{-\text{cosec}\, x\cot x}{(1+\text{cosec}\, x)^2}$. **34.** $\dfrac{(nx^{n-1}+\sec^2 x)(e^x-\cot x)-(x^n+\tan x)(e^x+\text{cosec}^2 x)}{(e^x-\cot x)^2}$.

35. (i) $\dfrac{(nx^{n-1}-\text{cosec}^2 x)(e^x-\tan x)-(e^x-\sec^2 x)(x^n+\cot x)}{(e^x-\tan x)^2}$. (ii) $x^{n-1}\{1+n\,ln\,(2x)\}$

37. $80-32x, 2$. **38.** $x=2$, অথবা -2. **39.** 16. **40.** $\frac{1}{6}$.

9.15. সংযোজিত (Composite) ফাংশনের এবং বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ : মনে করি, $y=f(z)$ এবং $z=g(x)$

x, y, z এর পরিবর্তন যথাক্রমে $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ এবং এ পরিবর্তনগুলো খুব ক্ষুদ্র ও সসীম।

যখন $\Delta x\to 0$, তখন $\Delta z\to 0$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\times\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\times\dfrac{dz}{dx}$ অনুরূপভাবে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$ ইত্যাদি।

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ :

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত একটি ফাংশন f এবং $y\in$ B. তাহলে, y এর বিপরীত (inverse) কে $f^{-1}(y)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $f^{-1}(y)$ হল A সেটের ঐ উপাদানগুলো যাদের প্রতিচ্ছবি (image) y.

সংক্ষেপে, যদি f: A $\to$B হয়, তাহলে, $f^{-1}(y)=\{x : x\in$ A এবং $f(x)=y\}$. এক্ষেত্রে f^{-1} কে বলা হয় B সেট থেকে A সেটে f এর বিপরীত ফাংশন।

প্রতিজ্ঞা : যদি ফাংশন, f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান থাকে, অর্থাৎ $y=f(x)$ এবং $f^{-1}(y)=x$ হয়, তবে $\dfrac{d}{dy}\{f^{-1}(y)\}=\dfrac{1}{f'(x)}$,

অর্থাৎ $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$. .... (i) এবং $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ ....(ii)

প্রমাণ : যেহেতু $y=f(x)$, $\therefore 1=f'(x).\dfrac{dx}{dy}$ [y এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে]

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

9.15.1. লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ

কোন ফাংশনের সূচক যদি অপর একটি ফাংশন অথবা একটি ফাংশন কয়েকটি ফাংশনের গুণফল দ্বারা গঠিত হয়, তবে প্রথমে ফাংশনটির লগারিদম নিয়ে পরে অন্তরজ নির্ণয় করা সহজতর হয়।

উদাহরণ। $(\cos x)^{\tan x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $y = (\cos x)^{\tan x}$

উভয়পক্ষের লগারিদম নিয়ে, $ln\, y = \tan x\ \ ln\,(\cos x)$ ...(i)

এখন (i) এর উভয়পক্ষকে x-এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে $\dfrac{d}{dx}(ln\, y) = \dfrac{d}{dx}\{\tan x.\, ln\,(\cos x)\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = ln\,(\cos x).\ \sec^2 x + \tan x.\frac{1}{\cos x}.\ (-\sin x) = ln\,(\cos x).\ \sec^2 x - \tan^2 x.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = (\cos x)^{\tan x}\ \{ln\,(\cos x).\ \sec^2 x - \tan^2 x\}.$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. x এর প্রেক্ষিতে $(\sin x)^2$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $y = (\sin x)^2 = z^2$, যখন $z = \sin x$.

সুতরাং, $\dfrac{dy}{dz} = 2z$ এবং $\dfrac{dz}{dx} = \cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 2z.\ \cos x = 2\sin x\cos x\ [\, z = \sin x \text{ বসিয়ে}] = \sin 2x.$$

উদাহরণ 2. x এর প্রেক্ষিতে $ln\,(\tan 5x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $y = ln\,(\tan 5x) = ln\, u$, $\quad u = \tan v\quad$ এবং $v = 5x$.

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\cdot\ \frac{du}{dv} = \sec^2 v\ .\ \frac{dv}{dx} = 5$$

সুতরাং, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{u}\ .\ \sec^2 v.\ 5 = \dfrac{1}{\tan 5x}\ .\ \sec^2 5x\ .\ 5 = \dfrac{5\sec^2 5x}{\tan 5x}$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি, $y = ln\,(\tan 5x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{ln(\tan 5x)\} = \frac{d}{d\,(\tan 5x)}\ \{ln\,(\tan 5x)\} \times \frac{d}{d\,(5x)}\ (\tan 5x) \times \frac{d}{dx}(5x)$$

$$= \frac{1}{\tan 5x} \times \sec^2 5x \times 5 = \frac{5\sec^2 5x}{\tan 5x}.$$

উদাহরণ 3. $\sin^{-1} x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $y = \sin^{-1} x$. তাহলে, $x = \sin y$ -------- (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে y এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \quad \left[\because\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [(i) থেকে]

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, যখন $-1 < x < 1$.

মন্তব্য : $\sin^{-1}x$ কে $x = \pm 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ করা যায় না, কারণ ঐ বিন্দুতে $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$ সংজ্ঞায়িত নয়।

উদাহরণ 4. $\cos^{-1} x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি $y = \cos^{-1} x$. তাহলে, $x = \cos y$.

$\therefore \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ অর্থাৎ, $\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ 5. $\tan^{-1} x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = \tan^{-1} x$. তাহলে, $x = \tan y$.

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$ অর্থাৎ, $\frac{d(\tan^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

উদাহরণ 6. x এর প্রেক্ষিতে $\cot^{-1} \frac{1-x}{1+x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = \cot^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

মন্তব্য : ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সরল আকারে প্রকাশ করে অন্তরীকরণ করা সুবিধাজনক।

উদাহরণ 7. x এর প্রেক্ষিতে $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $y = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$ [$x = \sec\theta$ ধরে]

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\cot\theta = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

প্রশ্নমালা 9.4

x এর প্রেক্ষিতে অন্তরজ নির্ণয় কর :

প্রথম ভাগ :

1. $(3x-5)^4$. e^{3x}, $e^{\sqrt{x}}$, $e^{\sin x}$

2. (i) $\sin(ax)$, (ii) $\sec(5x+3)$, (iii) $\tan(ax+b)$. (iv) $\cos x^\circ$, (v) $5e^x \ln x$

3. (i) $\sin\sqrt{x}$, [সি. '১২; কু. '১৩] (ii) $\cos\sqrt{x}$, $\sin^2 x^2$, $\log_{10} 3x$ [ঢা. '১১; য. '১৩]

4. $\dfrac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$.

5. $\dfrac{1}{(3-x^2)^3}$, $\sin^2(ax+b)$.

6. $\dfrac{x \sin x}{1+\cos x}$. [রা. '১৩; চ. ব. '১১; সি. '১০]

7. $\sqrt{(x-3)(x-4)}$.

8. $\operatorname{cosec}\sqrt{x}$; $\ln(\sin 2x)$

9. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ [য. '১৩; ঢা. '০৯]

10. $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

11. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$.

12. $\left(\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$.

13. $\ln(\ln x)$.

14. $\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$, [কু. '১০]

15. $\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)$.

16. $\ln\dfrac{a+x}{a-x}$

17. $\sin^2\{\ln(\sec x)\}$, [য. রা. '১৩; সি. ঢা. '১২]

18. (i) $\sin^2\{\ln(x^2)\}$. [চ. '১৩] (ii) $\{\ln(\sin x^2)\}^n$. [সি. '০৬]

19. $2x^0 \cos 3x^0$. [কু. '১৩; সি. দি. '১১; য. '১২]

20. $e^{5x}\sin x^0$

21. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

22. $\ln\left\{e^x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$.

23. $\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ [ব. '১০; সি. '১১]

24. $\cos(\ln x)+\ln(\tan x)$. [সি. '০৬]

25. $2\operatorname{cosec} 2x \cos\{\ln(\tan x)\}$ [রা. '০৬]

দ্বিতীয় ভাগ :

26. (i) $\sin^{-1} 3x$. (ii) $\sin^{-1}\sqrt{xe^x}$. [ব. '১০]

27. $\tan^{-1}(e^x)$. [ঢা. '০৮]

28. (i) $\tan(\sin^{-1} x)$. [ঢা. ব. '১২; দি. য. ঢা. '১০; কু. '১১] (ii) $\sqrt{\sin^{-1} x^5}$.

29. (i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. (ii) $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. [ঢা. য. '১০]

30. $\tan^{-1}\dfrac{4x}{1-4x^2}$

31. (i) $\sin^{-1}(\tan x)$ (ii) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$. [চ. '১৩]

32. (i) $\sin^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ [রা. '১২] (ii) $\sec^{-1}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. [সি. '১১]

33. $\tan^{-1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

34. (i) $\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [চ. সি. '১১; কু. '১২] (ii) $\tan^{-1}\dfrac{6\sqrt{x}}{1-9x}$. [সি. '১২]

35. $\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$

36. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

37. $\tan^{-1}\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

38. $\tan^{-1}\dfrac{4\sqrt{x}}{1-4x}$. [ব. '১১]

39. $\sin^{-1}\dfrac{4x}{1+4x^2}$

40. $\tan^{-1}\dfrac{a+bx}{a-bx}$. [কু. '১৩; ঢা. '০৯, '১১; রা. '১২]

41. (i) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. [রা. '১০; কু. '১১; ব. '১২] (ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ [ঢা. '১৩]

42. $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$. [কু. '১২]

তৃতীয় ভাগ :

43. $ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. [রা. '১১; ঢা. '১২]

44. (i) x^x. [কু. '১২; সি. রা. '১৩] (ii) $x^{\frac{1}{x}}$.

45. $a^{\cos x}$.

46. $e^{2ln(\tan 5x)}$ [ব. '১১; সি. '১০]

47. a^{px+q}. a^{a^x} [চ. '১৩; দি. '১২]

48. $(\sin x)^{\tan x}$.

49. $x^{\cos(ax+b)}$.

50. (i) x^{e^x}. (ii) e^{e^x}.

51. $e^{5\,ln(\tan 5x)}$. [ঢা. '০৮; চ. '১২]

52. (i) e^{x^x} (ii) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [চ. '১০; কু. '১১; ব. '১২]

53. $(x^x)^x$. [ঢা. ব. দি. '১১; রা. '১২]

54. $a^{ln(\cos x)}$.

55. $x^{ln\, x}$. [সি. '১১]

56. $(1+x^2)^{2x}$.

57. $10^{ln(\sin x)}$.

58. $(\cot x)^{\tan x}$.

59. $(\sin x)^{ln\, x}$.

60. x^{x^x}. [য. '১১]

61. $x^{\cos^{-1}x}$. [ব. রা. ঢা. '১০; চ. '১১]

62. $x^{\sin^{-1}x}$. [ঢা. কু. '১৩]

63. $e^{x^2} + x^{x^2}$. [ঢা. '১২]

উত্তরমালা

প্রথম ভাগ :

1. $12(3x-5)^3$, $3e^{3x}$, $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $\cos x e^{\sin x}$ **2.** (i) $a\cos(ax)$, (ii) $5\sec(5x+3)\tan(5x+3)$, (iii) $a\sec^2(ax+b)$. (iv) $-\dfrac{\pi}{180}\sin\dfrac{\pi x}{180}$. **3.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$, $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$, $4x\sin x^2\cos x^2$, $\dfrac{\log_e 10}{x}$.

4. $-2\sin 2x$. **5.** $\dfrac{6x}{(3-x^2)^4}$, $2a\sin(ax+b)\cos(ax+b)$. **6.** $\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}x\sec^2\dfrac{x}{2}$.

7. $\dfrac{2x-7}{2\sqrt{(x-3)(x-4)}}$. **8.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{cosec}\sqrt{x}\cot\sqrt{x}$; $2\cot 2x$. **9.** $\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\sqrt{\left(e^{\sqrt{x}}\right)}$.

10. $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ **11.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$. **12.** $2\tan x\sec^2 x$ **13.** $\dfrac{1}{x\, ln(x)}$. $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

14. $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **15.** $\dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ **16.** $\dfrac{2a}{a^2-x^2}$.

17. $\tan x \sin 2\{(ln\ (\sec x)\}$. **18.** (i) $\dfrac{2 \sin \{\ ln\ (x^4)\}}{x}$. (ii) $2nx \cot x^2\ \{ln\ (\sin x^2)\}^{n-1}$

19. $\dfrac{\pi}{90}\left(\cos\dfrac{\pi x}{60} - \dfrac{\pi x}{60}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{60}\right)$. **20.** $5\ e^{5x} \sin\dfrac{\pi x}{180} + \dfrac{\pi \cos\dfrac{\pi x}{180}\cdot e^{5x}}{180}$. **21.** $(1 + x^2)^{-3/2}$.

22. $\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$. **23.** $\dfrac{-\{x \tan x + ln\ (\cos x)\}}{x^2}$. **24.** $-\dfrac{\sin\ (ln\ x)}{x} + \dfrac{\sec^2 x}{\tan x}$.

25. $-\ 4\text{cosec}\ 2x \cot 2x \cos \{ln\ (\tan x)\} - \dfrac{2\ \text{cosec}\ 2x \sin \{ln\ (\tan x)\}}{\sin x \cos x}$.

দ্বিতীয় ভাগ :

26. (i) $\dfrac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$. (ii) $\dfrac{e^x\ (1 + x)}{2\sqrt{xe^x}\sqrt{1 - xe^x}}$ **27.** $\dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$. **28.** (i) $(1 - x^2)^{\frac{-3}{2}}$. (ii) $\dfrac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5\ (1 - x^{10})}}$

29. (i) $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$. (ii) $\dfrac{-2}{\sqrt{1 - x^2}}$. **30.** (i) $\dfrac{4}{1 + 4x^2}$. (ii) $\dfrac{1}{2(1 + x^2)}$. (iii) $\sec^2 x \sin^{-1} x + \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 - x^2}}$

31. (i) $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}$ (ii) $\dfrac{1}{2}$. **32.** (i) $-\dfrac{2}{1 + x^2}$ (ii) $\dfrac{2}{1 + x^2}$. **33.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\ (1 + x)}$.

34. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ (1 + x)}$. (ii) $\dfrac{3}{\sqrt{x}(1 + 9x)}$. **35.** $-\dfrac{1}{1 + x^2}$. **36.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$. **37.** $\dfrac{2}{1 + 12x^2}$.

38. $\dfrac{2}{\sqrt{x}(1 + 4x)}$. **39.** $\dfrac{4}{1 + 4x^2}$. **40.** $\dfrac{ab}{a^2 + b^2x^2}$. **41.** (i) $\dfrac{1}{2}$. (ii) $-\dfrac{1}{2}$. **42.** $2x \tan^{-1} x$.

তৃতীয় ভাগ :

43. $\text{cosec}\ x$. **44.** (i) $x^x\ (1 + \log x)$; (ii) $x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \ln x)$. **45.** $-\ a^{\cos x} \sin x \log_e a$. **46.** $-\dfrac{\log_x a}{x \log_e x}$.

47. $p \ln a.\ a^{px + q}\ .\ a^{a^x}.a^x\ (\ln a)^2$ **48.** $(\sin x)^{\tan x}\ \{1 + \sec^2 x\ .\ \log\ (\sin x)\}$

49. $x^{\cos (ax + b)} \left\{\dfrac{\cos\ (ax + b)}{x} - a \sin(ax + b\ ).ln\ (x)\right\}$. **50.** (i) $x^{e^x}\ .e^x\ \left\{\dfrac{1}{x} + ln\ (x)\right\}$. (ii) $e^{e^x}.e^x$

51. $25\sec^2 5x\ (\tan 5x)^4$. **52.** (i) $e^{x^x}\ .\ x^x\ \{1 + ln\ (x)\}$. (ii) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}.\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \dfrac{1}{2} \ln x\right)$.

53. $x^{x^2}\ .\ x\ \{1 + 2\ ln\ (x)\}$. **54.** $-\ a^{ln(\cos x)}.\ \tan x.\ ln(a)$. **55.** $x^{ln\, x}.\ \dfrac{2\ ln\ x}{x}$.

56. $2(1 + x^2)^{2x} \cdot \left\{\dfrac{2x^2}{1 + x^2} + ln\ (1 + x^2)\right\}$. **57.** $10^{ln(\sin x)}.\ \cot x.)\ ln\ (10)$.

58. $(\cot x)^{\tan x}\ .\ \sec^2 x\ \{\ ln\ (\cot x) - 1\}$. **59.** $(\sin x)^{ln\, x} \left\{\dfrac{ln\ (\sin x)}{x} + \cot x\ .\ \ln x\right\}$.

60. $x^{x^x}.x^x\left[ln\ (x)\{\ ln\ (x) + 1\} + \dfrac{1}{x}\right]$. **61.** $x^{\cos^{-1} x}\left\{-\dfrac{ln\ x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{\cos^{-1} x}{x}\right\}$.

62. $x^{\sin^{-1} x}\left\{\dfrac{ln\ x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{\sin^{-1} x}{x}\right\}$. **63.** $2xe^{x^2} + x^{x^2}\ (2x\ ln\ x + x)$.

9.15.2. অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় ঃ

দুইটি চলক x ও y দ্বারা একটি সমীকরণ প্রকাশ করা হলে যদি y কে সরাসরি x এর মাধ্যমে প্রকাশ করা না যায়, তবে y কে x এর অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। একে সাধারণত $f(x,y) = 0$ আকারে লেখা হয়।

y কে x এর একটি অজ্ঞাত ফাংশনরূপে গণ্য করে x এর প্রেক্ষিতে সমীকরণের প্রত্যেক পদের অন্তরক সহগ নির্ণয় করে $\frac{dy}{dx}$ এর মান সমাধান করে পাওয়া যায়।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 8. $\sqrt{x} + \sin y = x^2$ **সমীকরণ থেকে** $\frac{dy}{dx}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ মনে করি, $u = \sin y$, $\therefore \frac{du}{dy} = \cos y$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{[অনুচ্ছেদ 2.11 থেকে]}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y . \frac{dy}{dx}$ .... (i)

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ (differentiation) করে আমরা পাই,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos y . \frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{[(i) থেকে]}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1/2\sqrt{x}}{\cos y}.$$

প্রশ্নমালা 9.5

নিচের ফাংশনগুলো থেকে $\frac{dy}{dx}$ **নির্ণয় কর ঃ (প্রশ্ন 1 – 14)**

1. $x^4 + y^4 = 3axy$.

2. $1 + xy^2 + x^2y = 0$.

3. $x^y = y^x$. [রা. বো. ২০০০; চ. বো.' ০৩]

4. (a) $ln(xy) = x + y$. [ঢা. '০৩, রা. '০৫, কু. '০৬]

(b) $ln(xy) = x^2 + y^2$. **(c)** $x^y = e^{x+y}$. [ব. '০৫]

5. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

6. $x + y = xy^2$.

7. $e^{xy} - 4xy = 2$.

8. $x^2 + y^2 = \sin(xy)$.

9. $y = x^y$.

10. $y = \cot(x + y)$.

11. $(\sin x)^y = (\cos y)^x$.

12. $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{a}$.

13. $x^y + y^x = a^b$. [রা. '১১]

14. $y = \sin(x + y)^2$. [রা. '০৪]

উত্তরমালা

1. $\frac{y(y^4 - 3x^4)}{x(3y^4 - x^4)}$. 2. $\frac{-y(y + 2x)}{x(x + 2y)}$. 3. $\frac{y(x\, ln\, y - y)}{x(y\, ln\, x - x)}$. 4. (a) $\frac{y(x - 1)}{x(1 - y)}$; (b) $\frac{y(2x^2 - 1)}{x(1 - 2y^2)}$; (c) $\frac{x - y}{x(ln\, x - 1)}$

5. $-\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$. 6. $\frac{y^2 - 1}{1 - 2xy}$. 7. $-\frac{y}{x}$. 8. $\frac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)}$. 9. $\frac{y^2}{x\{1 - ln(y)\}}$. 10. $-\frac{1 + y^2}{2 + y^2}$.

11. $\frac{ln(\cos y) - y\cot x}{ln(\sin x) + x\tan y}$. 12. $\frac{y}{x}$. 13. $-\frac{y x^{y-1} + y^x\, ln(y)}{x^y\, ln(x) + x y^{x-1}}$. 14. $\frac{2(x + y)\cos(x + y)^2}{1 - 2(x + y)\cos(x + y)^2}$

9.16. পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ

যদি $y = f(x)$ হয়, তবে x এর প্রেক্ষিতে ফাংশনের প্রথম অন্তরজ সাধারণত $f'(x), \frac{dy}{dx}, y_1$ বা y' দ্বারা সূচিত করা হয়।

আবার প্রথম অন্তরজকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করলে যে ফাংশান পাওয়া যায় তাকে দ্বিতীয় অন্তরজ বলা হয় এবং লেখা হয় : $f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \; y_2$ বা y''.

অনুরূপভাবে, পর্যায়ক্রমে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম ইত্যাদি অন্তরজ নির্ণয় করা যায়। যে পর্যায়ে অন্তরজের মান শূন্য হয় তার পরের পর্যায়ের প্রত্যেকটি অন্তরজের মান শূন্য হবে। তৃতীয় পর্যায়ের অন্তরজকে সাধারণত $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা y_3 দ্বারা সূচিত করা হয়। সাধারণভাবে, nতম পর্যায়ের অন্তরজকে $\frac{d^n y}{dx^n}$ বা, y_n দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ 1. $y = x^3 + 5x^2 + 10x + 14$ **থেকে** $\frac{dy}{dx}, \; \frac{d^2y}{dx^2}, \; \frac{d^4y}{dx^4}$ **এবং** $\frac{d^3y}{dx^3}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে,

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 10.$

$\frac{dy}{dx}$ কে x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 10$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ কে x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6.$

$\frac{d^3y}{dx^3}$ কে x প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$

উদাহরণ 2. $y = x^3 \log x$ **হলে,** $\frac{d^4y}{dx^4}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : এখানে $y = x^3 \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 \log x + x^3 . \frac{1}{x} = 3x^2 \log x + x^2$$

x এর প্রেক্ষিতে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \log x + 3x^2 . \frac{1}{x} + 2x = 6x \log x + 5x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6x. \frac{1}{x} + 6 \log x + 5 = 11 + 6 \log x \qquad \therefore \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{6}{x} .$$

উদাহরণ 3. $y = ax \sin x$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0.$

সমাধান : $y = ax \sin x.$ [দেওয়া আছে] ------ (i)

$\therefore y_1 = a (\sin x + x \cos x)$ ----- (ii)

আবার x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে

$y_2 = a (\cos x + \cos x - x \sin x) = 2 a \cos x - a x \sin x$ ----- (iii)

$\therefore x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y$

$= x^2(2a \cos x - ax \sin x) - 2x(a \sin x + ax \cos x) + (x^2 + 2) ax \sin x$

[(i) , (ii) এবং (iii) থেকে]

$= 2ax^2 \cos x - ax^3 \sin x - 2ax \sin x - 2ax^2 \cos x + a x^3 \sin x + 2ax \sin x = 0$ [প্রমাণিত]

প্রশ্নমালা 9.6

1. $y = x^2 - 5 + \frac{1}{x^2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $y = x^3 \log x$ হয়, তবে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $y = \tan x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = 2y(1 + y^2)$.

4. $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ হলে, $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

5. $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হলে, দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4.$ [য. '১৩]

6. (i) $y = \sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0.$
   (ii) $y = a\cos x + b\sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0.$

7. $\cos 3x$ এর n–তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

8. $\frac{1}{x}$ এর n–তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

9. $y = px + \frac{q}{x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 = y.$ [ঢা. '০৯]

10. $y = \tan^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0.$

11. $y = \sin^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0.$

12. $\cos\sqrt{y} = x$ বা, $y = (\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2.$ [চ. '১৩; ঢা. '১১; কু. সি. ব. '১০]

13. $\sin\sqrt{y} = x$ বা, $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0.$ [কু. '১১, '১৩; চ. '১১]

14. $y = (a + bx)e^{2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0.$

15. যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $y_2 = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$

16. $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 - m^2y = 0.$ [দি. '১০; কু. '১১]

17. $\ln y = \tan^{-1}x$ হলে, $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0.$ [রা. য. '১০; কু. '১১]

18. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$

19. $y = x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} +$ হলে, প্রমাণ কর যে, $3x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^{\frac{2}{3}}.$

20. $y = \tan x + \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ [রা. '১০]

21. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ হলে, দেখাও যে, $(a^2 + x^2)y_2 + xy_1 = 0.$ [চ. '১০]

22. $y = \sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.\tan x + y\cos^2 x = 0.$ [সি. '১১]

23. $y = e^x\cos x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$ [দি. '১০]

24. $y = e^{ax}\sin bx$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0.$

25. $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$

26. $y = \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = y\,(2y^2 - 1)$. [কু. '১০; য. '১১]

27. $y = \sin(m \sin^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$. [রা '১৩; ঢা. '১০; ব. '১১]

28. $y = \tan(m \tan^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\,y_2 + 2(x - m\,y)\,y_1 = 0$. [ঢা. '১৩; য. '১১]

29. $y = x^m\, ln(x)$ হলে, দেখাও যে, $xy_1 = my + x^m$.

30. $y = e^x \cos x$ হলে, দেখাও যে $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$.

31. $y = ax^2 + bx^{-\frac{1}{2}}$ হলে, দেখাও যে $2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0$. [ঢা. চ. '১৩; দি. চ. '১১; সি. ১০]

32. $y = (a + bx)\,e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

33. $y = (e^x + e^{-x}) \sin x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_4 + 4y = 0$.

34. $y = (p + qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\,\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

35. $y = a\cos(ln\, x) + b\sin(ln\, x)$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$. [রা. '১৩; ঢা. '০৯]

36. $y = e^{a\sin^{-1}t}$ হলে, দেখাও যে $(1 - t^2)\,y_2 - t\,y_1 = a^2y$. [ঢা. ব. '১১]

37. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$. [ব. য. '১০]

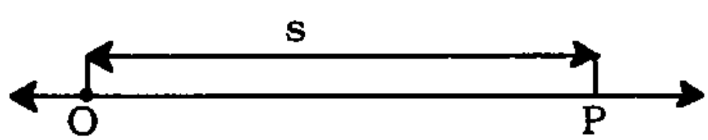
38. $y = e^x x^6$ হলে, y_3 এর মান নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $2 + \frac{6}{x^4}; -\frac{24}{x^5}$. 2. $11 + 6\log x$. 7. $3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$. 8. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

38. $e^x(x^6 + 18x^5 + 90x^4 + 120x^3)$.

9.16.1. অন্তরজ এর সাহায্যে বেগ (velocity) ও ত্বরণ (acceleration) নির্ণয় :



মনে করি, একটি কণা O বিন্দু থেকে একটি সরলরেখা OP বরাবর অবিরাম গতিতে চলছে। যদি t সময় পরে কণার অবস্থান P বিন্দুতে হয় এবং $OP = s$ হয় এবং স্থির বিন্দু O থেকে s কে ডানদিকে ধনাত্মক ও বামদিকে ঋণাত্মক ধরা হয়, তবে $s = f(t)$. তাহলে, P বিন্দুতে $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা চলমান কণার বেগ, v প্রকাশ করে। v এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বা মন্দন বলা হয়।

$$\therefore \text{ত্বরণ বা, মন্দন } = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = a \text{ (মনে করি)}$$

এখন a এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। যখন a এর মান ধনাত্মক তখন v এর মান বাড়ে । আবার v এর মান কমে যখন a এর মান ঋণাত্মক । প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\frac{d^2s}{dt^2}$ দ্বারা যথাক্রমে ত্বরণ ও মন্দন বোঝায়।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. কোন সরলরেখায় একটি গতিশীল কণার t সেকেন্ড সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s কে $s = 63t-6t^2-t^3$ দ্বারা প্রকাশ করা হল। 2 সেকেন্ডের শেষে কণাটির বেগ কত ? কণাটি কত সময় পরে থেমে যাবে?

সমাধান ঃ এখানে $s = 63t - 6t^2 - t^3$

$\therefore$ t সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$

সুতরাং 2 সেকেন্ডের শেষে বেগ $= 63 - 12.\ 2 - 3.(2)^2 = 63 - 24 - 12 = 27$ একক/সেকেন্ড।

আবার কণাটি থেমে যাবে যখন বেগ $\frac{ds}{dt} = 0$

বা, $63 - 12t - 3t^2 = 0$ বা, $t^2 + 4t - 21 = 0$

বা, $(t + 7)(t - 3) = 0$ $\therefore t - 3 = 0\ [\because t \neq -7]$

$\therefore t = 3.$

অর্থাৎ, 3 সেকেন্ড পরে কণাটি থেমে যাবে।

উদাহরণ 2. $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেয়া আছে $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$

স্পর্শক রেখা x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

অর্থাৎ $12x^2 + 6x - 6 = 0$ বা, $6(x + 1)(2x - 1) = 0$ $\therefore x = -1, \frac{1}{2}$.

যখন $x = -1$, $y = 6$ [বক্ররেখার সমীকরণ থেকে]

আবার যখন $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{4}$. $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(-1, 6)$ এবং $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

প্রশ্নমালা 9.7

1. $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(-1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
2. $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
3. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
4. $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি $(2, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উক্ত বিন্দুতে তার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।
5. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x – অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে?
6. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x–অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [দি. '১২; রা. '১০]
7. $y = (x - 3)^2 (x - 2)$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
8. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক y- অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।
9. $x^2 + 4x + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।
10. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x- অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।
11. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে সমান সমান কোন উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর। [দি. '১০; ঢা. '১১; রা. '১২]

12. $x^2 + 4y^2 = 8$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

13. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখাটির উপর এমন বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকগুলো x- অক্ষের উপর লম্ব। [ব. '১০]

14. a এর মান কত হলে $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x–অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। [ব. কু. '১২; ঢা. '০৮; সি. '১০; য. '১১]

15. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সব বিন্দুতে x–অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [কু. ঢা. '১০; সি. '১১]

16. c এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখা এবং x–অক্ষের ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত বক্ররেখার স্পর্শক x–অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করবে?

17. $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখাটির যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x–অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. '১০; সি. চ. '১২]

18. $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু ও $(1,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। যদি মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর।

19. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $\left(3t + \frac{1}{8}t^2\right)$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে? [কু. '১১]

20. একটি কণা সোজা পথে এমনভাবে চলে যেন t সময় পরে এর অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = \sqrt{t}$. দেখাও যে ঐ কণার ত্বরণ ঋণাত্মক এবং তা কণাটির বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

21. একটি কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ পথ অতিক্রম করে। t সময় শেষে কণাটির শেষ বেগ v হলে, দেখাও যে, $v^2 - b^2 = 4a(s - c)$, যেখানে a, b, c ধ্রুবক।

22. যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে (সময় t এর প্রেক্ষিতে) বাড়ে, তবে প্রমাণ কর যে, এর পরিধির বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের ব্যস্ত অনুপাতে বাড়ে।

23. একটি বস্তুর গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$ হলে, দেখাও যে এর ত্বরণ সব সময় ধনাত্মক এবং $t = 10$ সেকেন্ড হলে, এর গতিবেগ কত হবে?

24. কোন সরলরেখায় একটি কণা এমনভাবে চলছে যেন তা $s = 3{\cdot}8t + 1{\cdot}5\,t^2$ শর্তানুসারে t সেকেন্ডে s সে. মি. অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, এর ত্বরণ ধ্রুবক রাশি। ত্বরণের মানও বাহির কর।

25. যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। [দি. ' ১১; চ. '১২]

26. একটি পাথরখণ্ড 98 মিটার/ সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। t সময়ে এর গতি সমীকরণ $s = 98t - 4{\cdot}9t^2$ রূপে প্রকাশিত হলে, যে সময়ে (i) এর বেগ 49 মিটার/ সে. হয়, (ii) পাথরখণ্ডটি তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছে তা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. -4. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{t}$. **4.** 3. **5.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. **6.** $(1,2)$; $(1,-2)$, **7.** $(3, 0)$; $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$. **8.** $(0, 0)$, $(-2a, 0)$,

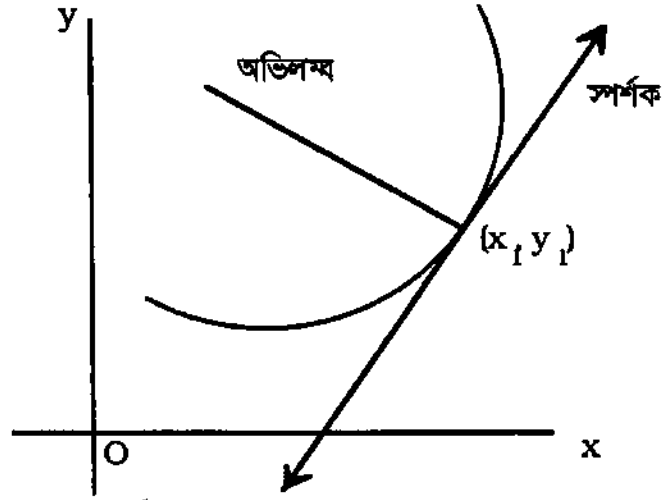
9. $(0, 0)$, $(-4, 0)$, **10.** $(1, 0)$; $(-1, 4)$. **11.** $1 \pm \sqrt{2}$; $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ **12.** $(2\sqrt{2}, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$

13. $(0, 0)$, $(-2a, 0)$. **14.** $\sqrt{3}$. **15.** 8, -4, 8. **16.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **17.** $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

18. $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$. **19.** 78 মিটার/ সে. **23.** 60·00012 একক। **24.** 3 সে. মি./সে.^{2}

26. **(i)** 5 সেকেন্ড **(ii)** 10 সেকেন্ড.

9.16.2. স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ



মনে করি, একটি বক্ররেখার সমীকরণ, $y = f(x)$ এবং এর উপরিস্থিত একটি বিন্দু (x_1, y_1).

(x_1, y_1) বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$, যেখানে রেখার ঢাল $= m$.

এ রেখাটি (x_1,y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখার স্পর্শক হলে, $m = \frac{dy}{dx}$ [(x_1,y_1) বিন্দুতে]

∴ **স্পর্শকের সমীকরণ,** $\mathbf{y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)}$

(x_1,y_1) বিন্দুগামী এবং ঐ একই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাকে অভিলম্ব বলা হয়।

∴ অভিলম্বের ঢাল $\times \frac{dy}{dx} = -1.$ $\Rightarrow$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

সুতরাং অভিলম্বের সমীকরণ, $\mathbf{(y - y_1) = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)}$

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 3. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত (1,2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ কে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 10\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 10) = 6 - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6 - 2x}{2y - 10} = \frac{6 - 2}{4 - 10} = -\frac{2}{3}$ [(1,2) বিন্দুতে]

∴ স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ [অনুচ্ছেদ 3.6 থেকে]

$$\Rightarrow 3y - 6 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0.$$

অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - 1) + \left(-\frac{2}{3}(y - 2)\right) = 0$ [অনুচ্ছেদ 3.6 থেকে]

$$\Rightarrow 3x - 3 = 2y - 4 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 1 = 0.$$

উদাহরণ 4. $x^2y + xy^2 - 2x - 3y - 17 = 0$ বক্ররেখার উপরিস্থিত (2,3) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2y + xy^2 - 2x - 3y - 17 = 0$ কে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 2 - 3\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy - 3) = -2xy - y^2 + 2$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - y^2 - 2}{x^2 + 2xy - 3} = \frac{-12 - 9 - 2}{4 + 12 - 3} = -\frac{23}{13}$ [(2,3) বিন্দুতে]

∴ স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 3 = -\frac{23}{13}(x - 2) \Rightarrow 13y - 39 = -23x + 46$

$$\Rightarrow 23x + 13y - 85 = 0.$$

অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 3 = \frac{13}{23}(x - 2)$ $3x - 26 = 23y - 69 = 0$

$$\Rightarrow 13x - 23y + 43 =$$

প্রশ্নমালা 9.8

1. (2, 4) বিন্দুতে $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
2. দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $yy_1 = 2a(x + x_1)$.
3. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার $(2, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
4. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২]
5. $y = x^3 - 2x^2 + 5$ বক্ররেখার $(2, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
6. $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটির $(1, -1)$ বিন্দু অতিক্রমকারী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
7. $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$ বক্ররেখার $(2, 1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
8. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত $(-1, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
9. $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত $(3,2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
10. $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 49 = 0$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত $(-1,2)$বিন্দুতে সস্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
11. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বের কর।
12. $x^3 - 6x^2y + 5xy - 2x + 3y - 17 = 0$ দ্বারা বর্ণিত বক্ররেখার $(-1, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
13. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৮; ব. '১১]
14. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 9 = 0$ বৃত্তটি যে বিন্দুতে y–অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
15. $y(x - 1)(x - 2) - x + 3 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
16. $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯; চ. য. '১০; দি. '১১]
17. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোন স্পর্শক দ্বারা অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক।
18. $x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$ বৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১১]

উত্তরমালা

1. $9x - y - 14 = 0$. **3.** $4x - y - 6 = 0$. **4.** $4x + 3y + 7 = 0$, $3x - 4y + 24 = 0$. **5.** $8x - y - 21 = 0$. **6.** $x - 1 = 0$. **7.** $x - 3y + 1 = 0$. **8.** $y + 2 = 0, x + 1 = 0$. **9.** $2x + y - 8 = 0, x - 2y + 1 = 0$. **10.** $3x - 5y + 13 = 0, 5x + 3y - 1 = 0$. **11.** $(x - x_1)(y_1^2 - ax_1) + (y - y_1)(ay_1 - x_1^2) = 0$. **12.** $33x + 8y + 49 = 0$, $8x - 33y - 58 = 0$. **13.** $2x + 3y + 1 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$. **14.** $x - 5y + 45 = 0$ এবং $x + 5y + 5 = 0$; $5x + y - 9 = 0$ এবং $5x - y - 1 = 0$. **15.** $x - 2y - 3 = 0$. **16.** $x - 20y - 7 = 0$, $20x + y - 140 = 0$. **18.** $8x + y - 10 = 0$, $x - 8y + 15 = 0$.

9.17. অন্তরজের আদর্শ প্রতীক হিসেবে $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ইত্যাদির ব্যবহার

যেসব ক্ষেত্রে পর্যায়ক্রমিক অন্তরজের প্রয়োজন হয়, ঐসব ক্ষেত্রে $f'(x), f''(x)$ .... $f^n(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$, ইত্যাদি প্রতীকগুলি ব্যবহৃত হয়। যেমন :

ম্যাকলরিনের ধারা

মনে করি, $f(x)$ ফাংশনটির সকল পর্যায়ের অন্তরজ বিদ্যমান এবং $f(x)$-কে x এর ঘাতের ঊর্ধক্রমে অসীম বা, অনন্ত ধারায় প্রকাশ করা যায়। তাহলে,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \text{-------} + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \text{.........} \infty .$$

উপরে প্রাপ্ত ধারাটি **ম্যাকলরিনের ধারা** নামে পরিচিত।

9.18. স্বাধীন ও অধীন চলকের অন্তরক

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে আমরা $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা স্বাধীন চলক, x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজ হিসেবে সূচিত করেছি। অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ কে একটি একক সত্ত্বা (Single entity) বিবেচনা করা হয়েছে। অধীন চলক, y এর অন্তরক dy এবং স্বাধীন চলক x এর অন্তরক dx সম্পর্কে আলোচনা করা হয়নি। এখন dy এবং dx প্রতীককে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করব যেন $\frac{dy}{dx}$ কে একটি **যথার্থ অনুপাত** (*Ac*tual ratio) হিসেবে বিবেচনা করা যায়।

মনে করি, x বিন্দুতে ফাংশন f অন্তরীকরণযোগ্য এবং "dx" একটি স্বাধীন চলক যার যেকোনো মান বাস্তব এবং "dy" কে নিচের সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো :

$$dy = f'(x)\,dx \quad .... \text{(i)}$$

যদি $dx \neq 0$, তাহলে, (i) এর উভয় পক্ষকে dx দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

সুতরাং, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছি যে,"dy" এবং "$dx \neq 0$," এর অনুপাত হলো $f'(x)$.

উদাহরণ : $y = x^2$ এর অন্তরজকে অন্তরক আকারে প্রকাশ কর এবং $x = 1$ বিন্দুতে dy এবং dx এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : x এর প্রেক্ষিতে y এর অন্তরজ, $\frac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore$ অন্তরক আকারে : $dy = 2x\,dx$

যখন $x = 1$, $dy = 2\,dx$.

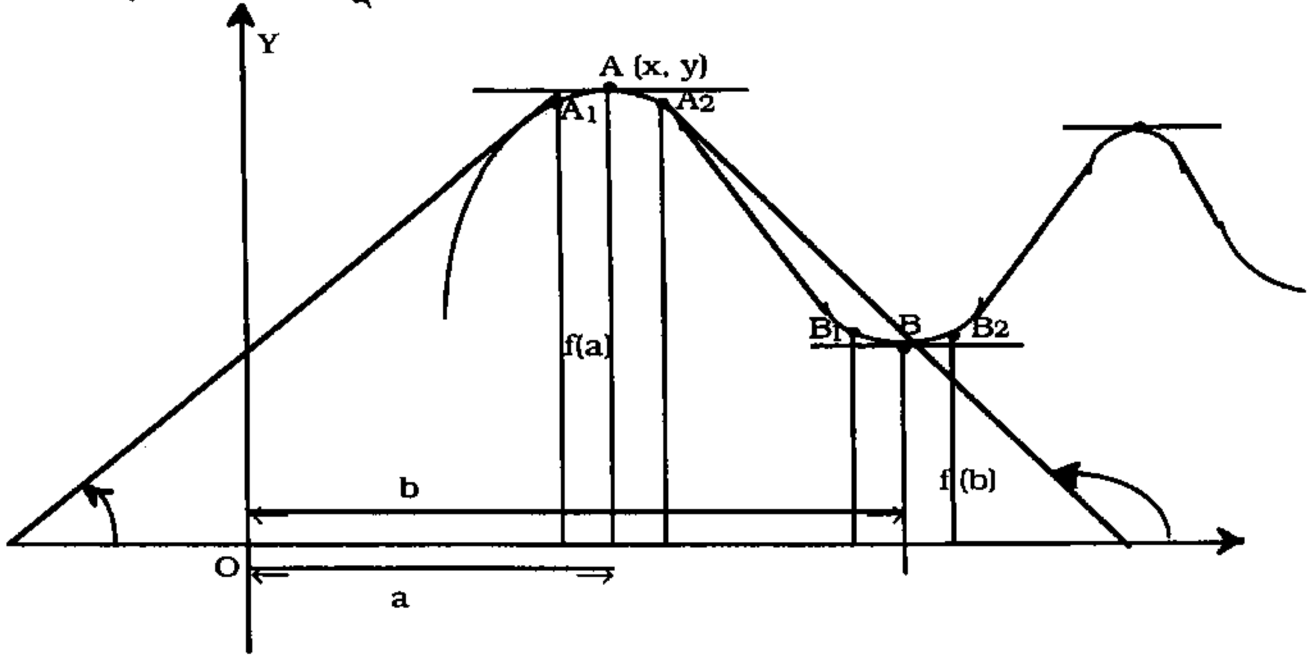
9.19. ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন

মনে করি, $y = f(x)$. তাহলে, $x = x_1$ বিন্দুতে y কে x এর **ক্রমবর্ধমান ফাংশন** বলা হয়, যদি $x = x_1$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$, অর্থাৎ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} > 0$. সুতরাং, $a < x < b$ ব্যবধির x এর সব মানের জন্য যদি $\frac{dy}{dx} > 0$ হয়, তবে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

আবার, y কে x এর **ক্রমহ্রাসমান ফাংশন** বলা হয়, যদি $x = x_2$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$,

অর্থাৎ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_2} < 0$. সুতরাং, $a < x < b$ ব্যবধির x এর সব মানের জন্য যদি $\frac{dy}{dx} < 0$ হয়, তবে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

9.20. ফাংশনের চরম বিন্দু



গরিষ্ঠ মান : উপরে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র $A_1A\ A_2B_1B\ B_2$ অঙ্কন করা হয়েছে। লেখচিত্রটি লক্ষ করলে দেখা যায় যে, $A\ (x = \mathrm{a})$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি x–অক্ষের সমান্তরাল। তাহলে, এ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি, অর্থাৎ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ বা $f'(x) = 0$. আবার, A_1 ($x = a - h$, যেখানে h যথেষ্ট ক্ষুদ্র কিন্তু $h > 0$) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে, অতএব A_1 বিন্দুতে $f'(x) > 0$; এবং $A_2(x = a + h)$বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে, অতএব A_2 বিন্দুতে $f'(x) < 0$.

লেখচিত্র থেকে স্পষ্টত বুঝা যায় যে $a - h < a < a + h$ ব্যবধিতে $A(x = a)$ বিন্দুতে y, অর্থাৎ $f(x)$ এর মান বৃহত্তম। এ মান অর্থাৎ $f(a)$ কে বলা হয় ফাংশন $f(x)$ এর **গরিষ্ঠ মান (Maximum value).**

> **যদি $f(x)$ এমন একটি ফাংশন হয় যেন (i) $x = \mathrm{a}$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$**
> **(ii) x এর সকল মান (a থেকে ক্ষুদ্রতর কিন্তু a এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) > 0$**
> **(iii) x এর সকল মান (a থেকে বৃহত্তর কিন্তু a এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) < 0$**
> **হয়, তবে $x = a$ এ প্রদত্ত ফাংশনের একটি গরিষ্ঠ মান আছে এবং তা $a - h < a < a + h$ ব্যবধিতে $f(\mathrm{a})$.**

লঘিষ্ঠ মান : অনুরূপভাবে, $B\ (x = b)$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$. আবার $B_1(x = b - h)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে, অতএব B_1 বিন্দুতে $f'(x) < 0$ এবং B_2 $(x = b + h)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x– অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে, অতএব B_2 বিন্দুতে $f'(x) > 0$. লেখচিত্র থেকে স্পষ্টত বুঝা যায় যে $b - h < b < b + h$ ব্যবধিতে $B\ (x = b)$ বিন্দুতে y, অর্থাৎ $f(x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম। এ মান অর্থাৎ $f(b)$ কে বলা হয় ফাংশন $f(x)$ এর **লঘিষ্ঠ মান (Minimum value).**

> **যদি $f(x)$ এমন একটি ফাংশন হয় যেন (i) $x = b$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$**
> **(ii) x এর সকল মান (b থেকে ক্ষুদ্রতর কিন্তু b এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) < 0$**
> **(iii) x এর সকল মান (b থেকে বৃহত্তর কিন্তু b এর সন্নিকটবর্তী) এর জন্য $f'(x) > 0$,**
> **তবে $x = b$ এ প্রদত্ত ফাংশনের একটি লঘিষ্ঠ মান আছে এবং তা $b - h < b < b + h$ ব্যবধিতে $f(b)$.**

যে সব বিন্দুতে ফাংশনের মান গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হয়, ঐ সব বিন্দুকে চরম বিন্দু বলা হয়।

9.21. ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান

চরম মান (Extreme value or extremum) :

ফাংশনের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানকে সম্মিলিতভাবে (collectively) সাধারণত বলা হয় ফাংশনের চরম মান।

অনুচ্ছেদ 9.20 থেকে লক্ষ করেছি যে বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সর্বোচ্চ হয় তার সন্নিকটবর্তী বিন্দুগুলিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হয়, সুতরাং $f'(x)$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

$\therefore f'(x)$ এর অন্তরজ $f''(x) < 0.$

আবার যে বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন হয় তার সন্নিকটবর্তী বিন্দুগুলিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হয়, সুতরাং $f'(x)$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

$\therefore f'(x)$ এর অন্তরজ $f''(x) > 0.$

চরম মান নির্ণয় পদ্ধতি :

মনে করি, $y = f(x)$ ফাংশনটি কোন নির্দিষ্ট ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত ও অবিচ্ছিন্ন।

(a) $f'(x) = 0$ থেকে x এর মান নির্ণয় করা। x এর এ মানগুলির জন্য ফাংশনের গরিষ্ঠ মান বা লঘিষ্ঠ মান থাকতে পারে। ধরি, x এর মানগুলি হলো a, b, c ইত্যাদি।

(b) $y = f(x)$ থেকে দ্বিতীয় পর্যায়ের অন্তরজ অর্থাৎ $f''(x)$ নির্ণয় করে x এর প্রাপ্ত মানগুলি বসিয়ে $f''(x)$ এর মানগুলি পরীক্ষা করতে হবে।

(i) যদি $f''(\text{a}) < 0$ হয়, তবে $x = \text{a}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি গরিষ্ঠ মান আছে।

(ii) যদি $f''(\text{a}) > 0$ হয়, তবে $x = \text{a}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি লঘিষ্ঠ মান আছে।

অনুরূপভাবে $x = b, c$ ইত্যাদি বসিয়ে চরম মান নির্ণয় করতে হবে।

মন্তব্য : $f'(x) = 0$ হলে, ফাংশন থেকে $f''(x)$ নির্ণয় করে $f''(\text{a})$ এর প্রাপ্ত মান পরীক্ষা করতে হবে। যদি $f''(\text{a}) = 0$ হয়, তবে পরবর্তী পর্যায়ের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হবে এবং তদ্রূপ।

উদাহরণ : কোন ফার্ম যা তৈরি করে তার সব কয়টি প্রতি একক 10 টাকা হিসাবে বিক্রয় করে। x একক তৈরি করতে মোট খরচ যদি $c(x) = 30 + 2x + 0.02x^2$ হয় তবে

(i) কত একক তৈরি করলে সর্বাধিক আয় হবে?

(ii) সর্বাধিক আয় কত?

সমাধান : (i) মোট বিক্রয় আয় $R = 10x$

$P =$ প্রকৃত আয় ফাংশন $= R - C = 10x - (30 + 2x + 0.02\,x^2) = 8x - 0.02x^2 - 30$

সর্বাধিক আয় হওয়ার শর্ত হলো,

$\dfrac{dp}{dx} = 0$ এবং $\dfrac{d^2p}{dx^2} < 0$

এখন $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d}{dx}(8x - 0.02x^2 - 30) = 8 - 0.04x = 8 - \dfrac{1}{25}x$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 8 - \frac{1}{25}x = 0$

$\Rightarrow x = 200$

দ্বিতীয় শর্ত : $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(8 - \frac{x}{25}\right) = -\ \frac{1}{25} < 0$

অতএব, x = 200 একক হলে আয় সর্বাধিক হবে।

(ii) সর্বাধিক আয় = $8 \times 200 - 0.02\ (200)^2 - 30 = 770$ টাকা।

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 5. নিচের ফাংশনের গুরু ও লঘু মান নির্ণয় কর :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2;$$

সমাধান ঃ $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

যে সব বিন্দুর জন্য $f'(x) = 0$ ঐ সব বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান বা লঘিষ্ঠ মান থাকবে।

এখন $f'(x) = 0$ হলে, $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)\ (3x - 1) = 0 \qquad \therefore x = 3, \frac{1}{3}$

আবার (1) এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই $f''\ (x) = 6x - 10$

$\therefore$ যখন $x = 3,\ f''\ (3) = 8 > 0;$ এবং যখন $x = \frac{1}{3},\ f''\ (\frac{1}{3}) = -\ 8 < 0.$

অর্থাৎ, $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান এবং $x = \frac{1}{3}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় লঘিষ্ঠ মান $= f(3) = 27 - 45 + 9 + 2 = -\ 7$

এবং গরিষ্ঠ মান $= f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + 1 + 2 = \frac{67}{27}.$

উদাহরণ 6. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে আমরা পাই

$f'\ (x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore$ চরম মানের জন্য $f'\ (x) = 0,$ অর্থাৎ $4x^3 - 12\ x^2 + 8x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow x(x - 1)\ (x - 2) = 0. \quad \therefore x = 0, 1, 2.$

(1) এর উভয়পক্ষকে x এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8.$

যখন $x = 0$, " $f''\ (0) = 8 > 0$

" $x = 1$, " $f''\ (1) = -\ 4 < 0$

" $x = 2$, " $f''\ (2) = 8 > 0.$

$\therefore x = 0$ এবং $x = 2$ বিন্দুদ্বয়ে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান এবং $x = 1$ বিন্দতে গরিষ্ঠ মান আছে।

$x = 0$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ মান $= f(0) = 5$

$x = 2$ " " " $= f(2) = 5$

$x = 1$ " গরিষ্ঠ মান $= f(1) = 6.$

প্রশ্নমালা 9.9

1. $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান x এর কোন মানের জন্য পাওয়া যেতে পারে তা বের কর।

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ এর লঘু মান ও গুরু মান নির্ণয় কর। [রা. '১০]

3. $x(12 - 2x)^2$ এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

4. $f(x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, \ (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ ফাংশনটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০৮]

5. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ এর গরিষ্ঠ মান ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

6. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ এর গরিষ্ঠ মান ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯]

7. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

8. $2x^3 - 9x^2 + 12x + 5 = f(x)$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [রা. '১১]

9. প্রমাণ কর যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$ এর কোন চরম মান থাকবে না।

10. প্রমাণ কর যে, $f(x) = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x \ (0 \le x \le 2\pi)$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $x = \frac{\pi}{6}$ হয়।

11. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

12. $y = 4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান নির্ণয় কর। [ব. কু. '১০]

13. দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [সি. চ. য. '১০; ঢা. '১১]

14. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোন গুরু অথবা লঘু মান নেই। [ব. '১১]

15. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। [দি. '১০]

16. মুনাফা ফাংশন $P = 300 + 1200x - x^2$ কি পরিমাণ উৎপাদন করা হলে, মুনাফা সর্বাধিক হবে? যখন $x =$ উৎপাদিত দ্রব্য।

17. একটি খামারের মোট ব্যয় ফাংশন $C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x$, যখন x উৎপাদিত এককের সংখ্যা নির্দেশ করে। আয় ফাংশন $R = 1\,2x - x^2$ হলে সর্বোচ্চ উৎপাদন নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. 1, 2, 3. **2.** লঘু মান $= -162$, গুরু মান $= 94$. **3.** বৃহত্তম মান $= 128$, ক্ষুদ্রতম মান $= 0$, **4.** $4\frac{1}{3}, 3$.
5. লঘিষ্ঠ মান $= -4$, গরিষ্ঠ মান $= -3$. **6.** গরিষ্ঠ মান $= -3$, লঘিষ্ঠ মান $= -128$. **7.** $-28, 0$.
8. লঘিষ্ঠ মান $= 9$, গরিষ্ঠ মান $= 10$. **11.** $21\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. **12.** 12. **15.** গুরু মান $= \frac{81}{16}$, লঘু মান $= 0$.
16. 600 একক। **17.** $x = 4$.

প্রশ্নমালা 9.10

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ এর মান –

(a) 0 (b) – 1 (c) 1 (d) 2

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1 + x)}{x}$ এর মান –

(a) – 1 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $(a > 1)$ এর মান –

(a) 0 (b) 1 (c) $ln\ a$ (d) $-\ ln\ a$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ এর মান –

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) – 2

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{2x^2 + 9x - 4}$ এর মান –

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{-5}{4}$

6. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) কোনোটিই নয়

7. $y = ln\ (x - \sqrt{x^2 - 1}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (c) $\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (d) $\frac{x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$

8. $y = \cot^{-1} \frac{1 - x}{1 + x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{1}{1 + x^2}$ (b) $\frac{-1}{1 + x^2}$ (c) $\frac{1}{1 + x}$ (d) $\frac{1}{1 - x}$

9. $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{-1}{2}$ (d) কোনোটিই নয়

10. $y = \sqrt{\sin 2x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{\sin 2x}}$ (c) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (d) $\frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $2\sqrt{1-x^2}$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

12. $y = \tan^{-1}\frac{a+x}{a-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{a}{a^2+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{1}{a(+x^2)}$ (d) $\frac{1}{1+a^2x^2}$

13. $y = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{3}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $\frac{1}{1+9x^2}$ (d) $\frac{9}{1+x^2}$

14. $y = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\cos x$ (b) $-\sin x$

(c) $\sin x$ (d) $-\cos x$

15. একটি গাড়ি সোজা রাস্তায় t সেকেন্ডে $(3t + \frac{1}{8}t^2)$ মিটার অতিক্রম করলে, 5 মিনিটে তার বেগ কত হবে?

(a) 60 m/sec (b) 72 m/sec

(c) 78 m/sec (d) 80 m/sec

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. (a) Sadwitch উপপাদ্যটি কী।

(b) এটি প্রয়োগ করে $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ নির্ণয় কর।

(c) $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হলে, দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = 4$.

2. (a) ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা লিখ।

(b) $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{2x}{a^2+x^2}$ হলে, $f(x)$ নির্ণয় কর।

(c) $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. (a) মান নির্ণয় কর : $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}$.

(b) মূল নিয়মে $\cos 2x$-এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

(c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

ব্যবহারিক

9.22. নির্দিষ্ট বিন্দুর সন্নিকটে ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন

সমস্যা নং 9.22		তারিখ :

সমস্যা : (4, 4) বিন্দুর সন্নিকটে $y = (x-2)^2$ এর লেখকে আসন্নভাবে (4, 4) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করতে হবে।

তত্ত্ব : $y = (x-2)^2$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$

কার্যপদ্ধতি : **1.** $y = (x-2)^2$ থেকে $\frac{dy}{dx} = 2(x-2)$ নির্ণয় করি।

2. (4, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করি।

$$y - 4 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = 4(x-4)$$

$$\Rightarrow y - 4 = 4(x-4)$$

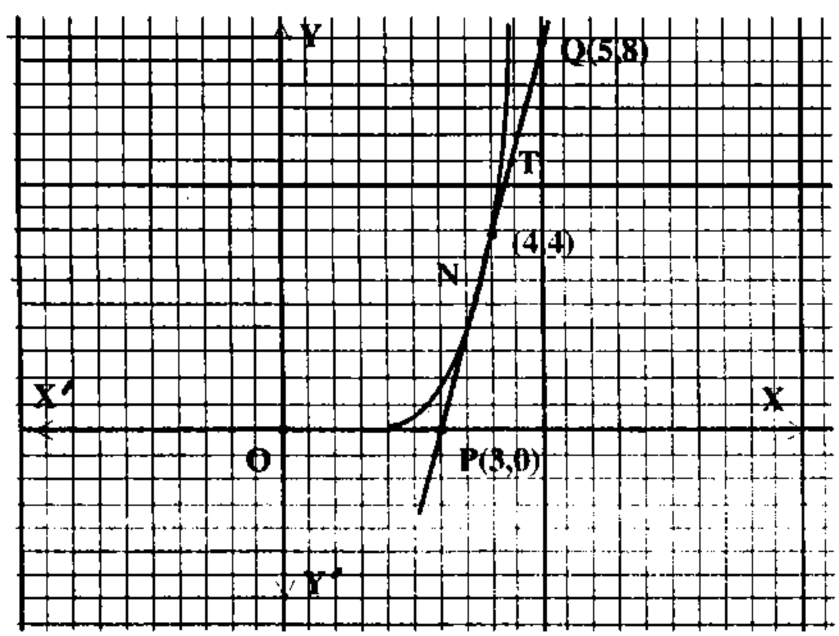
$$\Rightarrow 4x - y = 12$$

3. স্পর্শকের সমীকরণ থেকে (3, 0), (4, 4) এবং (5, 8) বিন্দুগুলি নির্ণয় করি।

4. x -অক্ষ এবং y -অক্ষ (আয়তাকার) অঙ্কন করি। উভয় অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের 2 বাহুকে একক ধরে উপরে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থানাঙ্কায়িত এবং সাবলীলভাবে সংযুক্ত করে PQ স্পর্শক অঙ্কন করি।

5. (4, 4) বিন্দুর সন্নিকটে TN লেখ অঙ্কন করি। এই লেখই নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখচিত্র অঙ্কন :



9.23. ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন।

সমস্যা নং 9.23		তারিখ :

সমস্যা : $y = x^2$ ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করতে হবে।

তত্ত্ব : $y = x^2$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1}(x - x_1)$.

কার্যপদ্ধতি :

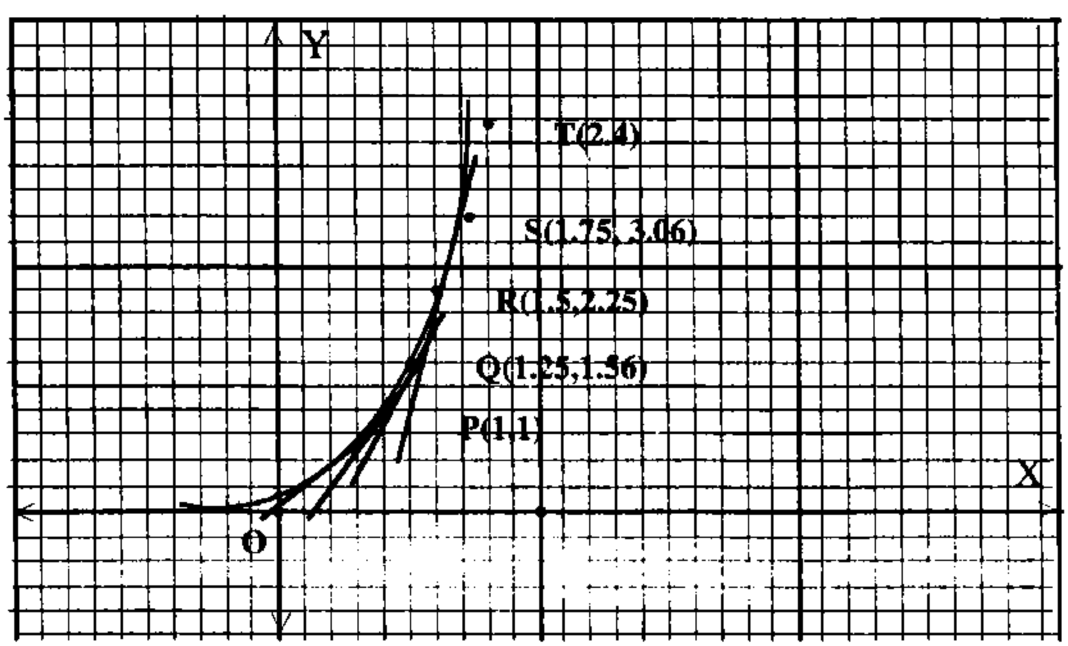
1. ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি।

2. $y = x^2$ সমীকরণে x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে y এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের ছক তৈরি করি।

x	1	1.25	1.5	1.75	2
y	1	1.56	2.25	3.06	4

3. ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম 4 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 (একক) ধরে $y = x^2$ লেখের $P(1, 1)$, $Q(1.25, 1.56)$, $R(1.5, 2.25)$, $S(1.75, 3.06)$ এবং $T(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

বিন্দুগুলি খুব নিকটবর্তী হওয়ায় পাশাপাশি যেকোনো দুইটি স্পর্শবিন্দুর সংযোগে $PQ, QR, RS, ST...$ ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশ উৎপন্ন হলো, যা ফাংশনটির লেখের সাথে আসন্নভাবে সমাপতিত।



সুতরাং $y = x^2$ এর লেখটি আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপিত হলো।

9.24. আসন্ন মান নির্ণয়

সমস্যা নং 9.24(a)		তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = y = \sqrt{x}$ থেকে $x = 4$ বিন্দুতে dy নির্ণয় করতে হবে, যখন $dx = 3$.

তত্ত্ব : $dy = f'(x)dx$.

কার্যপদ্ধতি :

1. $f(x) = \sqrt{x}$ কে অন্তরীকরণ করে পাই, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $x = 4$ বিন্দুতে $dy = f'(x)dx$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করি। .

ফলাফল : $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \dfrac{3}{2\sqrt{4}} = \dfrac{3}{4} = 0.75.$

সমস্যা নং 9.24(b)		তারিখ :

সমস্যা : $f(x) = y = \sqrt{x}$ থেকে $x = 4$ বিন্দুতে δy নির্ণয় করতে হবে, যখন $\delta x = 3$.

তত্ত্ব : $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$.

কার্যপদ্ধতি : $x = 4$ বিন্দুতে $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ নির্ণয় করি।

ফলাফল : $\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(4 + 3) - f(4) = f(7) - f(4) = \sqrt{7} - \sqrt{4} = 0.65.$

শ্রেণির কাজ :

1. $y = -x^2$.

2. $y = (x-1)^2$.

3. $y = x^2 + 1$.