দশম অধ্যায়

বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা
Measures of Dispersions and Probability

আজকাল পত্র-পত্রিকা, সাময়িকী ও টেলিভিশনে আমরা প্রায়ই বিভিন্ন বিষয়ের পরিসংখ্যান দেখতে পাই। যুগে যুগে বহু মনীষীর অক্লান্ত পরিশ্রম ও সাধনার ফলে পরিসংখ্যানের উৎকর্ষ সাধন ও প্রসার ঘটেছে। পরিসংখ্যানের উন্নয়নে যারা উল্লেখযোগ্য ভূমিকা পালন করেছেন তাদের মধ্যে অন্যতম হলেন Sir Ronald Aylmer Fisher (1890–1962)। তাকে পরিসংখ্যানের জনক হিসেবে অভিহিত করা হয়। তিনি একক ভাবে পরিসংখ্যানের নতুন নতুন পদ্ধতি আবিষ্কার করেন এবং কৃষি, জীববিদ্যা ও জেনেটিক্সে প্রথম পরিসংখ্যান পদ্ধতি প্রয়োগ করেন। জ্ঞান বিজ্ঞানের উত্তরণের সাথে সাথে পরিসংখ্যানের ক্ষেত্র এবং কলাকৌশলের প্রসারতা বৃদ্ধি পেয়েছে। বর্তমানে যেকোনো সংখ্যাত্মক গবেষণার কাজে পরিসংখ্যান ব্যবহৃত হয়।

নাম	: স্যার রোনাল্ড আইমার ফিশার (Sir R.A. Fisher)
জন্ম	: ১৭ ফেব্রুয়ারি, ১৮৯০
জন্মস্থান	: লন্ডন, যুক্তরাজ্য
নাগরিকত্ব	: যুক্তরাজ্য
অবদান	: পরিসংখ্যান, বিবর্তনবাদী জীববিজ্ঞান
অর্জন	: Weldon Memorial Prize (1930), Royal Medal (1938), Guy Medal (1946), Copley Medal (1955), Darwin-wallace Medal
মৃত্যু	: ২৯ জুলাই, ১৯৬২

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- উপাত্তের বিস্তার কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- উপাত্তের বিস্তার পরিমাপগুলি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- শ্রেণিকৃত ও অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- সম্ভাবনার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দৈনন্দিন বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা, সম্ভাব্য ঘটনা এবং প্রয়োজনীয় ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় করতে পারবে।
- পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণনসূত্র ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- বাস্তব জীবনভিত্তিক সহজ সমস্যা সমাধানে সম্ভাবনার ধারণা ও সূত্রসমূহ প্রয়োগ করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- শ্রেণিকৃত ও অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- ➤ পাঠ-১, ২ ও ৩: উপাত্তের বিস্তার, উপাত্তের বিস্তার পরিমাপ এবং বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ
- ➤ পাঠ-৪: উদাহরণমালা
- ➤ পাঠ-৫ ও ৬: অনুশীলনী-10(A)
- ➤ পাঠ-৭, ৮ ও ৯: সম্ভাবনার ধারণা, সম্ভাবনার সাথে সম্পর্কিত কতিপয় বিষয়বস্তুর ধারণা, একই ঘটনা পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাব্যতা নির্ণয়, পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রসমূহ এবং অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্রসমূহ
- ➤ পাঠ-১০: উদাহরণমালা
- ➤ পাঠ-১১ ও ১২: অনুশীলনী-10(B)
- ➤ পাঠ-১৩ ও ১৪: ব্যবহারিক

পাঠ-১, ২ ও ৩

পরিসংখ্যান হলো একটি সংখ্যা তত্ত্বের বিজ্ঞান। প্রযুক্তির উন্নয়নের অগ্রযাত্রায় তথ্য উপাত্তের অবদানের ফলে পৃথিবী পরিণত হয়েছে বিশ্বগ্রামে (Global village)। মানব সভ্যতার ঊষালগ্ন থেকে বর্তমান পর্যন্ত জ্ঞান-বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার সাথে স্বতন্ত্র একটি বিজ্ঞান হিসাবে পরিসংখ্যান কাজ করে আসছে। প্রাসঙ্গিকভাবে শিক্ষার্থীর জ্ঞান অর্জনের চাহিদা মেটানোর লক্ষ্যে ষষ্ঠ শ্রেণি থেকেই পরিসংখ্যান এর বিভিন্ন ধারণার আলোচনা করা হয়েছে এবং ধাপে ধাপে শ্রেণিভিত্তিক বিষয়বস্তুর বিন্যাস করা হয়েছে। এরই ধারাবাহিকতায় এই শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা উপাত্তের বিস্তার পরিমাপগুলির ব্যাখ্যা, সম্ভাবনার ধারণার ব্যাখ্যা ও দৈনন্দিন জীবনে বাস্তবভিত্তিক বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা, সম্ভাব্য ঘটনা এবং প্রয়োজনীয় ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

10.1 উপাত্তের বিস্তার (Dispersion of Data)

পরিসংখ্যানীয় যেকোনো প্রকার উপাত্ত সংগ্রহ করলে দেখা যায় যে, উপাত্তের মানগুলির কেন্দ্রের দিকে ঝুঁকে থাকার একটা প্রবণতা বিদ্যমান। এই ঝোঁককেই কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। সংগৃহীত উপাত্তগুলো কেন্দ্রীয়মান হতে গড়ে কী পরিমাণ দূরত্বে অবস্থান করছে তার পরিমাপকেই বিস্তার পরিমাপ নামে অভিহিত করা হয়। কোনো বিন্যাসের অন্তর্গত মানগুলির কেন্দ্রের দিকে ঝোঁকার প্রবণতা কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের সাহায্যে বোঝা যায় কিন্তু কেন্দ্রীয় মান হতে উপাত্তের অন্যান্য মানগুলির অবস্থান বা দূরত্ব কতটুকু তা পরিমাপ করা সম্ভব হয় না। উপাত্তের মানগুলি এদের কেন্দ্রীয় মানের চারদিকে কিভাবে বিস্তৃত অথবা এদের পরস্পরের মধ্যে মানের পার্থক্য কিরূপ তা বিস্তার পরিমাপের সাহায্যে জানা যায়।

বিস্তার পরিমাপের সাহায্যে একটি মধ্যক মান উপাত্তের অন্যান্য মানগুলির কতটা প্রতিনিধিত্বমূলক তা নিরূপণ করা যায়। যদি মধ্যক মানটি উপাত্তের অন্যান্য মানগুলি হতে বেশি পার্থক্য দেয় তবে গড় মানটিকে প্রতিনিধিত্বমূলক বলা যাবে না। এছাড়া দুই বা ততোধিক বিন্যাসের সুষমতার তুলনা করতে এবং চলকের মানসমূহের পরিবর্তনশীলতা নিয়ন্ত্রণে রাখার জন্য বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজন হয়। বিস্তার পরিমাপের প্রধানত দুইটি উদ্দেশ্য আছে। একটি হলো কেন্দ্রিয় মানের চারদিকে উপাত্তের মানগুলির অবস্থান কিরূপ তা নির্ণয় করা, আর অপরটি হলো চলকের বিভিন্ন উপাত্তমানের অবস্থানের তুলনা করা। বিভিন্ন কারণে কোনো একটি উপাত্তের বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজন হতে পারে।

ঘটনা-1: দুই বা ততোধিক নিবেশনের মধ্যক মান সমান হলেও তাদের গঠন পদ্ধতি ভিন্ন হতে পারে।

উপাত্ত A	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	$\overline{X}_A = 100$
উপাত্ত B	140	100	95	120	80	75	90	85	95	120	$\overline{X}_B = 100$
উপাত্ত C	00	60	50	20	150	145	140	140	155	140	$\overline{X}_C = 100$

দেখা যাচ্ছে A, B, C এর উপাত্তের গড় মান সমান হলেও তাদের গঠন ও প্রকৃতির মধ্যে সুস্পষ্ট পার্থক্য রয়েছে।

ঘটনা-2: দুই বা ততোধিক মধ্যক মান ভিন্ন হলেও তাদের গঠন পদ্ধতি একই ধরনের হতে পারে।

উপাত্ত D	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	$\overline{X}_D = 70$
উপাত্ত E	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	$\overline{X}_E = 60$
উপাত্ত F	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	$\overline{X}_F = 30$

এক্ষেত্রে D, E, F উপাত্তের মধ্যক মানের পার্থক্য পরিলক্ষিত হলেও তাদের গঠন প্রকৃতি প্রায় একই রূপ অর্থাৎ গড় হতে উপাত্তের অন্যান্য মানের বিস্তৃতি সমান।

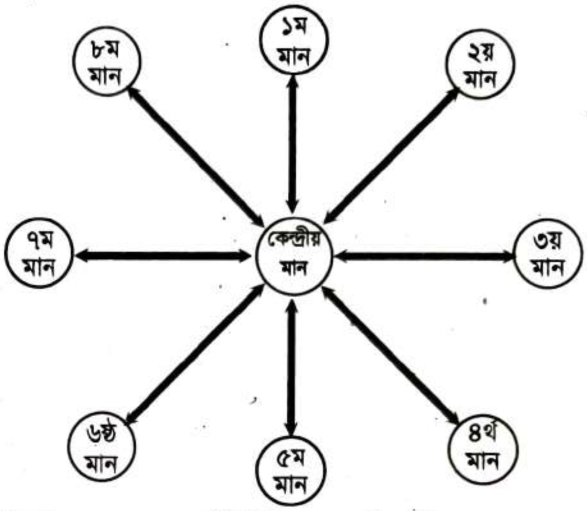
10.2 উপাত্তের বিস্তার পরিমাপ (Measures of Dispersion of data)

বিস্তার: কোনো নিবেশনের বিস্তার বলতে নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলির ব্যবধানকেই বোঝায়। আবার নিবেশনের মানগুলির পারস্পরিক ব্যবধানও **বিস্তার**। বিভিন্ন পরিসংখ্যানবিদ বিস্তারকে বিভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত করেছেন।

M.R. Spiegel এর মতে, "The degree to which numerical data tends to spread about an average value is called the variation or dispersion of data". ("কোনো সংখ্যাত্মক উপাত্তের গড় হতে অন্যান্য মানের বিস্তৃতি বা ভেদের পরিমাপকে ঐ উপাত্তের **বিস্তার** বলে"।)

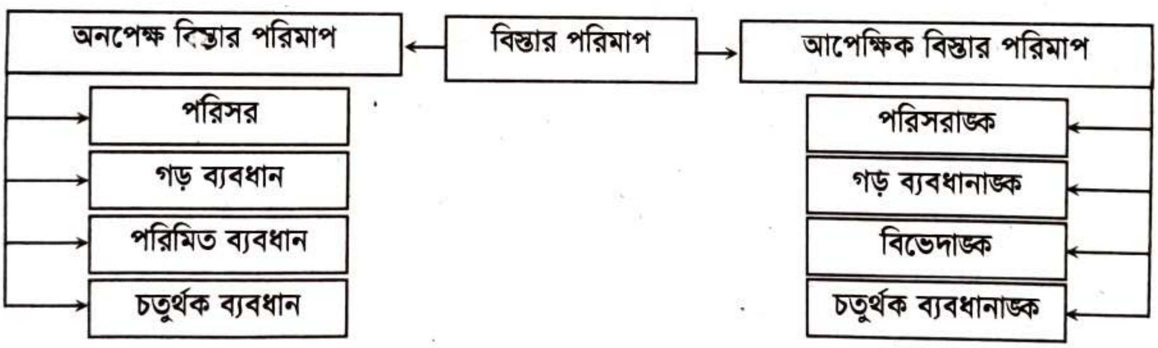
Brooks & Dick এর মতে,
"বিস্তার হলো কোনো চলকের কেন্দ্রীয় মান হতে এর অন্যান্য মানের বিক্ষিপ্ততা বা ভেদের মাত্রা"।

বিস্তার পরিমাপ: যে সংখ্যাগত পরিমাপের সাহায্যে কোনো গণসংখ্যা নিবেশন বা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের মানসমূহ এদের গড়ের চারদিকে কিভাবে বিস্তৃত তা প্রকাশিত হয় অথবা মান সমূহের সাথে গড়ের যে পার্থক্য তা প্রকাশ করা হয় তাকে **বিস্তার পরিমাপ** বলে।



10.3 বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ (Types of Measures of Dispersion)

যে সকল সংখ্যাত্মক মানসমূহের দ্বারা বিস্তার পরিমাপ করা হয় তাদেরকে বিস্তারের পরিমাপক বলে। বিস্তার পরিমাপের মূল উদ্দেশ্য হলো দুই বা ততোধিক উপাত্তের মধ্যে তুলনা করা।



10.3.1 পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ (Absolute measures of dispersion)

কোনো নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানসমূহের ব্যবধানের গড় যা নিবেশনের মান সমূহের মূল এককে প্রকাশিত হয়, তাই **পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ**। পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার। যথা:

১. পরিসর (Range); ২. গড় ব্যবধান (Mean Deviation); ৩. পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation) ও
৪. চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation)

10.3.1.1 পরিসর (Range) : পরিসর হলো বিস্তার পরিমাপকের প্রথম এবং সর্বাপেক্ষা সহজ ও সরল পদ্ধতি। এটি খুব সহজভাবে নির্ণয় করা যায়। উপাত্তের সবচেয়ে বড় মান থেকে সবচেয়ে ছোট মানের ব্যবধানই হলো **পরিসর**।

অশ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে: কোনো উপাত্তের বৃহত্তম মান x_n এবং ক্ষুদ্রতম মান x_1 হলে পরিসর, $R = x_n - x_1$
অথবা, $R = |x_1 - x_n|$

শ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে: সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা এবং সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার পার্থক্যকে **পরিসর** বলে। অর্থাৎ সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_n এবং সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা L_1 হলে,
পরিসর, $R = L_n - L_1$ অথবা, $R = |L_1 - L_n|$

পরিসরের ব্যবহার (Uses of Range) :

পরিসর বিস্তার পরিমাপের প্রতিনিধিত্বশীল পরিমাপক না হলেও এটি সীমিতভাবে বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়।

১. শিল্প কারখানায় উৎপাদিত পণ্যের মান নিয়ন্ত্রণে এটি ব্যবহৃত হয়।

২. শেয়ার বাজারে মূল্য হ্রাস-বৃদ্ধি পরিমাপে এটি ব্যবহৃত হয়।

৩. আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদানে ব্যবহৃত হয়।

৪. সুদের হার নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়।

উদাহরণ: কোনো শ্রেণির একটি পরীক্ষায় 30 জন শিক্ষার্থীর অর্জিত নম্বরের উপাত্ত হতে পরিসর নির্ণয় কর।

30,	35,	32,	45,	60,	45,	50,	58,	38,	42,
60,	75,	72,	80,	85,	45,	55,	45,	62,	75,
90,	85,	45,	35,	65,	70,	85,	90,	42,	47

সমাধান: এখানে অর্জিত সর্বাপেক্ষা বড় নম্বর, $X_n = 90$; ক্ষুদ্রতম নম্বর, $X_1 = 30$

আমরা জানি, পরিসর $= X_n - X_1 = 90 - 30 = 60$

কাজ: একটি বাগানে দশটি গাছের উচ্চতা সেন্টিমিটার এককে 78, 101, 150, 133, 73, 91, 110, 125, 85, 148 এদের পরিসর নির্ণয় কর। 80 সে.মি. এর চেয়ে ছোট গাছ বাদ দিলে পরিসর কত হবে?

10.3.1.2 গড় ব্যবধান বা গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation) : কোনো উপাত্তের মানগুলি হতে তাদের কেন্দ্রমানের (গড় বা মধ্যমা বা প্রচুরক) ব্যবধানের পরমমানের সমষ্টিকে মোট উপাত্ত সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ কেন্দ্র মান হতে মাপা **গড় ব্যবধান** বলে। অশ্রেণিকৃত ও শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান বের করার সূত্র:

কেন্দ্রমান হতে নিণীত গড় ব্যবধান	অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	যেখানে,
গড় হতে নিণীত ব্যবধান	$MD_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$MD_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	x_i = শ্রেণির মধ্যমান $\bar{x}$ = গাণিতিক গড়
মধ্যমা হতে নিণীত গড় ব্যবধান	$MD_{me} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - Me\rvert$	$MD_{me} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\lvert x_i - Me\rvert$	$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ Me = মধ্যমা
প্রচুরক হতে নিণীত গড় ব্যবধান	$MD_{mo} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - Mo\rvert$	$MD_{mo} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\lvert x_i - Mo\rvert$	Mo = প্রচুরক

গড় ব্যবধানের ব্যবহার (Uses of Mean Deviation) : পরিসংখ্যানে ও ব্যবহারিক জীবনে গড় ব্যবধানের ব্যবহার সীমিত। নিচে গড় ব্যবধানের কতিপয় ব্যবহার উল্লেখ করা হলো।

১. কোনো উপাত্তের মানগুলির পরিবর্তনশীলতা খুব বেশি হলে গড় ব্যবধানকে বিস্তার পরিমাপ হিসাবে সফলভাবে ব্যবহার করা যায়।

২. অর্থনৈতিক ও বাণিজ্যিক পূর্বাভাস প্রদানের ক্ষেত্রে এটি ব্যবহৃত হয়।

৩. এটি সহজ বোধ্য হওয়ায় সমাজ বিজ্ঞানে এটির ব্যবহার বেশি পরিলক্ষিত হয়।

উদাহরণ-1: নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হলো। নিবেশনটির গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণি	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
গণসংখ্যা	5	6	10	4	2

সমাধান: গাণিতিক গড় নির্ণয়ের প্রয়োজনীয় সারণি:

শ্রেণি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$ $(c = 10)$	$f_i d_i$
10-20	15	5	-2	-10
20-30	25	6	-1	-6
30-40	$35 = a$	10	0	0
40-50	45	4	1	4
50-60	55	2	2	4
মোট		$N = \sum f_i = 27$		$\sum f_i d_i = -8$

$\therefore$ গাণিতিক গড়, $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times c$

$$= 35 + \left(\frac{-8}{27}\right) \times 10$$

$$= 35 - 2.96 = 32.04$$

উদাহরণ-2. 10 জন শ্রমিকের বয়স হলো 18, 20, 35, 55, 38, 24, 45, 85, 37, 53। প্রদত্ত উপাত্তের গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, উপাত্তের গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $MD_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$ যেখানে গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

গণনা সারণি

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
18	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$ $= \frac{410}{10} = 41$	$18 - 41 = -23$	23
20		$20 - 41 = -21$	21
35		$35 - 41 = -6$	6
55		$55 - 41 = 14$	14
38		$38 - 41 = -3$	3
24		$24 - 41 = -17$	17
45		$45 - 41 = 4$	4
85		$85 - 41 = 44$	44
37		$37 - 41 = -4$	4
53		$53 - 41 = 12$	12
$\sum_{i=1}^{10} x_i = 410$			$\sum_{i=1}^{10} \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 148$

অতএব, গড় ব্যবধান, $MD_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}|x_i - \bar{x}| = \frac{1}{10} \times 148 = 14.8$

উদাহরণ-3. নিম্নলিখিত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800	800 - 900
গণসংখ্যা	12	18	36	24	10	8	7

সমাধান: আমরা জানি,

উপাত্তের গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $MD_{\overline{x}} = \frac{1}{N}\sum f_i|x_i - \overline{x}|$; যেখানে গাণিতিক গড়, $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum f_i x_i$

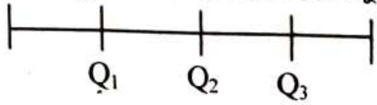
প্রয়োজনীয় গণনা তালিকা:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	গড় $(\overline{x})$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$
200 - 300	12	250	3000	$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N}$	246.9565	2963.478
300 - 400	18	350	6300		146.9565	2645.217
400 - 500	36	450	16200	$= \frac{57150}{115}$	46.9565	1690.434
500 - 600	24	550	13200		53.0435	1273.044
600 - 700	10	650	6500	$= 496.9565$	153.0435	1530.435
700 - 800	8	750	6000		253.0435	2024.348
800 - 900	7	850	5950		353.0435	2471.305
মোট	$N = 115$		$\Sigma f_i x_i = 57150$			$\Sigma f_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert = 14598.261$

$\therefore$ গড় ব্যবধান, $MD_{\overline{x}} = \frac{1}{N}\sum f_i|x_i - \overline{x}| = \frac{14598.261}{115} = 126.9414.$

কাজ: শীতকালে একটি স্থানের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা একটি নির্দিষ্ট সপ্তাহে যথাক্রমে 7, 9, 10, 6, 6, 5, 8 ডিগ্রি সেলসিয়াস হলে (i) গাণিতিক গড় (ii) মধ্যমা থেকে বিচ্যুতি নিয়ে প্রাপ্ত তাপমাত্রার গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

10.3.1.3 চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation): উপাত্তের মানগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মানগুলি উপাত্তের মানকে সমান চার ভাগে ভাগ করে সেগুলিই চতুর্থক। একটি উপাত্তে বা নিবেশনে তিনটি চতুর্থক থাকে। যথা : ১ম, ২য় ও ৩য় চতুর্থক। এদেরকে যথাক্রমে Q_1, Q_2 ও Q_3 দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ১ম চতুর্থক (Q_1) উপাত্তকে 1 : 3 অনুপাতে, ২য় চতুর্থক (Q_2) উপাত্তকে 2 : 2 অনুপাতে এবং ৩য় চতুর্থক (Q_3) উপাত্তকে 3 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। ২য় চতুর্থক (Q_2) মধ্যমার সমান।



কোনো উপাত্তের বা নিবেশনের ৩য় চতুর্থক থেকে ২য় চতুর্থক এবং ২য় চতুর্থক থেকে ১ম চতুর্থকের ব্যবধানের সমষ্টিকে দুই দ্বারা ভাগ করে যে মান পাওয়া যায় তাকে **চতুর্থক ব্যবধান** বলে।

কোনো নিবেশনের তিনটি চতুর্থক যথাক্রমে, Q_1, Q_2 ও Q_3 বিবেচনা করা হলে,

চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

সুতরাং ৩য় চতুর্থক থেকে ১ম চতুর্থকের ব্যবধানকে দুই দ্বারা ভাগ করে যে মান পাওয়া যায় তাই **চতুর্থক ব্যবধান**।

$(Q_3 - Q_1)$ কে আন্ত:চতুর্থক পরিসর (Inter Quartile Range) বলে।

অশ্রেণিকৃত নিবেশনের চতুর্থক নির্ণয়ের সূত্রাবলি:

(i) **যখন N জোড় সংখ্যা এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য:**

$$Q_i = \frac{\frac{N \times i}{4} \text{ তম পদের মান} + \left(\frac{N \times i}{4} + 1\right) \text{ তম পদের মান}}{2}$$

(ii) যখন N জোড় সংখ্যা এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়:
এক্ষেত্রে তথ্য সারিকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে ১ম অংশের মধ্যক হবে ১ম চতুর্থক Q_1 এবং ২য় অংশের মধ্যক হবে ৩য় চতুর্থক Q_3

(iii) যখন N বিজোড় সংখ্যা এবং (N + 1) সংখ্যাটি 4 দ্বারা বিভাজ্য:
$Q_i = \frac{(N+1)\times i}{4}$ তম পদের মান।

(iv) যখন N বিজোড় সংখ্যা এবং (N + 1) সংখ্যাটি 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়:
এক্ষেত্রে তথ্যসারির মধ্যকের বাম দিকের অংশের মধ্যমান হবে ১ম চতুর্থক Q_1 এবং ডানদিকের অংশের মধ্যমান হবে ৩য় চতুর্থক Q_3

শ্রেণিকৃত নিবেশনের চতুর্থক নির্ণয়ের সূত্রঃ

শ্রেণিকৃত কোনো নিবেশনের i-তম চতুর্থক, $Q_i = L_i + \frac{\frac{N\times i}{4} - F_c}{f_i} \times C$

যেখানে, L_i = i -তম চতুর্থক শ্রেণির নিম্নসীমা।
F_c = i -তম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ব শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।
f_i = i-তম চতুর্থক শ্রেণির গণসংখ্যা।
C = চতুর্থক শ্রেণির শ্রেণি ব্যবধান।
N = মোট গণসংখ্যা

চতুর্থক ব্যবধানের ব্যবহার (Uses of Quartile Deviation) ; বিশেষ কিছু সীমাবদ্ধতার কারণে চতুর্থক ব্যবধানের ব্যবহার খুবই সীমিত। কেবল বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে এটি ব্যবহৃত হয়।

1. অতি বঙ্কিম বিন্যাসের বিস্তার পরিমাপে ব্যবহৃত হয়।
2. খোলা প্রান্ত শ্রেণি ব্যাপ্তিবিশিষ্ট বিন্যাসের বিস্তার পরিমাপে এটি বেশ উপযোগী।
3. চতুর্থক ব্যবধান একটি অবস্থান ভিত্তিক বিস্তার পরিমাপ যে সব নিবেশনের বিস্তার সম্পর্কে মোটামুটি অনুমান প্রয়োজন, সেক্ষেত্রে এটি ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ-4(i): 16, 8, 15, 25, 13, 10, 17, 14, 12, 13, 20, 22 তথ্যসারির ১ম ও ৩য় চতুর্থক নির্ণয় কর।

সমাধান: তথ্যসারিকে মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,
8, 10, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 25
এখানে N = 12 যা 4 দ্বারা বিভাজ্য।

$$\therefore Q_1 = \frac{\frac{N\times 1}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{N\times 1}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{\frac{12\times 1}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{12\times 1}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{\text{৩য় পদের মান} + \text{৪র্থ পদের মান}}{2} = \frac{12+13}{2} = 12.5$$

$$Q_3 = \frac{\frac{N\times 3}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{N\times 3}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{\frac{12\times 3}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{12\times 3}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2} = \frac{\text{9ম পদের মান} + \text{10ম পদের মান}}{2} = \frac{17+20}{2} = 18.5$$

উদাহরণ: 4 (ii): 11, 12, 0, 2, 9, 5, 6, 8, 7, 5 তথ্যসারির ১ম ও ৩য় চতুর্থক নির্ণয় কর।

সমাধান: তথ্যসারিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই

0, 2, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12

এখানে, $N = 10$ যা 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়। সুতরাং তথ্যসারিকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে প্রত্যেক অংশের মধ্যমা নিয়ে নিবেশনটির চতুর্থক নির্ণয় করা হলো।

$Q_1 =$ ১ম অংশের মধ্যক $=$ ১ম অংশের $\frac{5+1}{2}$ তম পদের মান $=$ ১ম অংশের ৩য় পদের মান $= 5$

$Q_3 =$ ২য় অংশের মধ্যক $=$ ২য় অংশের $\frac{5+1}{2} =$ ৩য় পদের মান $= 9$

উদাহরণ: 4 (iii): 15 জন শ্রমিকের দৈনিক খরচ এর উপাত্ত দেওয়া আছে, তাদের চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর।
20, 30, 15, 25, 22, 27, 15, 20, 35, 22, 32, 12, 30, 25, 17

সমাধান: প্রথমে উপাত্তের মানগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাই,

12, 15, 15, 17, 20, 20, 22, 22, 25, 25, 27, 30, 30, 32, 35

এরপর Q_1 ও Q_3 এর মান বের করতে হবে।

এখানে, $N = 15$ (বিজোড়)

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ তম পদের মান $= \frac{(15+1)}{4}$ তম পদের মান $= 4$ তম পদের মান $= 17$

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ তম পদের মান $= \frac{3(15+1)}{4}$ তম পদের মান $= 12$ তম পদের মান $= 30$

আমরা জানি, চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{30-17}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$

উদাহরণ: 4 (iv): একটি শহরে 21 দিনের তাপমাত্রা নিম্নরূপ:
10, 15, 8, 7, 15, 18, 11, 17, 10, 9, 8, 7, 10, 8, 14, 14, 13, 9, 9, 5, 6 উপাত্ত থেকে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত উপাত্তকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই

5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 15, 17, 18

এখানে, $N = 21$

$\therefore$ ১ম চতুর্থক $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ তম তথ্যমান $= \frac{21+1}{4} = 5.5$ তম তথ্যমান

$= \frac{\text{5-তম তথ্যমান + 6- তম তথ্যমান}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$

৩য় চতুর্থক $Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ তম তথ্যমান $= \frac{3(21+1)}{4} = 16.5$ তম তথ্যমান

$= \frac{\text{16-তম তথ্যমান + 17-তম তথ্যমান}}{2} = \frac{14+14}{2} = 14$

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{14-8}{2} = 3$

উদাহরণ: 4(v) নিম্নোক্ত উপাত্ত থেকে চতুর্থক ব্যবধান বের কর।

ক্রমিক নং	1 - 4	5 - 8	9 - 12	13 - 16	17 - 20	21 - 24	25 - 28
নম্বর	20	28	40	12	30	15	50

সমাধান : প্রদত্ত নিবেশনে শ্রেণি সীমাগুলি বিচ্ছিন্ন হওয়ায় প্রথমে প্রকৃত শ্রেণি সীমা নির্ণয় করতে হবে।

প্রয়োজনীয় গণনা সারণি

শ্রেণি ব্যাপ্তি	প্রকৃত শ্রেণি সীমা	গণসংখ্যা (f_i)	যোজিত গণসংখ্যা (F_i)
1-4	0.5-4.5	20	20
5-8	4.5-8.5	28	48
9-12	8.5-12.5	40	88
13-16	12.5-16.5	12	100
17-20	16.5-20.5	30	130
21-24	20.5-24.5	15	145
25-28	24.5-28.5	50	195
		N = 195	

চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এখানে, $Q_1 = L_1 + \frac{\frac{1\times N}{4} - F_1}{f_1} \times C = 8.5 + \frac{\frac{195}{4} - 48}{40} \times 4$

[যেহেতু $\frac{1\times 195}{4} = 48.75$ তম পদ তৃতীয় শ্রেণিতে অবস্থিত।]

$= 8.5 + 0.075 = 8.575$

এবং $Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3\times N}{4} - F_3}{f_3} \times C$

$= 24.5 + \frac{\frac{3\times 195}{4} - 145}{50} \times 4$ [$\because \frac{3\times 195}{4} = 146.25$ তম পদ (25–28) শ্রেণিতে অবস্থিত।]

$= 24.5 + \frac{146.25 - 145}{50} \times 4 = 24.5 + 0.1 = 24.6$

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{24.6 - 8.575}{2} = \frac{16.025}{2} = 8.0125$

10.3.1.4 ভেদাঙ্ক (Variance) :

1918 সালে বিখ্যাত পরিসংখ্যানবিদ পরিসংখ্যানের জনক হিসেবে পরিচিত R. A. Fisher সর্বপ্রথম ভেদাঙ্কের ধারণা প্রবর্তন করেন। উপাত্তের মানগুলি থেকে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে **ভেদাঙ্ক** বলে। ভেদাঙ্ককে σ^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক
ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (তাত্ত্বিক সূত্র)	ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$ (তাত্ত্বিক সূত্র)
ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ (গণনার সূত্র)	ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2$ (গণনার সূত্র)
$\sigma^2 = \frac{\Sigma d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_i}{N}\right)^2$ যেখানে $d_i = x_i - A$ এবং A = অনুমিত গড়	$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2 \times C^2$ শ্রেণিব্যাপ্তি সমান হলে, $d_i = \frac{x_i - A}{C}$ যেখানে, A = অনুমিত গড় এবং C = শ্রেণিব্যাপ্তি

ভেদাঙ্কের তাত্ত্বিক সূত্র হতে গণনার ক্ষুদ্র প্রতিপাদন:

প্রমাণ কর যে, ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$

$$= \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$$

এখানে, $\Sigma\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \Sigma(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$

$$= \Sigma x_i^2 - 2\bar{x}\,\Sigma x_i + \Sigma \bar{x}^2$$

$$= \Sigma x_i^2 - 2\bar{x}.n\,\bar{x} + n\,\bar{x}^2 \quad [\because \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \sum x_i = n\bar{x}]$$

$$= \Sigma x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \Sigma x_i^2 - n\,\bar{x}^2 = \Sigma x_i^2 - n\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$ **(প্রমাণিত)**

ভেদাঙ্কের প্রয়োজনীয়তা (Necessity of Variance)**:** ভেদাঙ্ক নিবেশনের মধ্যক মান থেকে অন্যান্য মানগুলির বিস্তৃতি পরিমাপ করে। এটি দ্বারা চলকের এককের বর্গ প্রকাশ পায়। বিশেষ করে, উপাত্তকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে অংশগুলির অভ্যন্তরীণ বিস্তৃতি পরিমাপ করতে ভেদাঙ্ক ব্যবহার করা হয়।

আবার, যদি একাধিক কারণ দ্বারা চলকের মানের ভেদের তারতম্য ঘটে তবে সেক্ষেত্রে প্রতিটি কারণের সাপেক্ষে বিস্তৃতি পরিমাপ করতে ভেদাঙ্ক দরকার হয়।

ভেদাঙ্কের আরও উল্লেখযোগ্য প্রয়োজনীয়তা নিচে উল্লেখ করা হলো:

1. যেকোনো পরিসাংখ্যিক গবেষণায় প্রকল্প যাচাইয়ে, পরীক্ষণীয় নমুনার মান গঠনে ভেদাঙ্ক ব্যবহৃত হয়।
2. এতে বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপ করা যায় বলে উচ্চতর পরিসংখ্যানে বহুল ব্যবহৃত হয়।
3. নমুনায়নে সমসত্ত্বতা বিচারের জন্য ভেদাঙ্ক নির্ণয় অপরিহার্য।
4. কৃষি ক্ষেত্রে ভেদাঙ্কের গুরুত্ব অপরিসীম।

উদাহরণ-5. কোন পরিবারের 5 জনের বয়স যথাক্রমে 55, 45, 15, 7 ও 30 বছর হলে, বয়সের ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, বয়সের চলক, $x_i = 55, 45, 15, 7, 30$ এখানে, মোট সদস্য, $n = 5$

$\therefore \Sigma x_i = 55 + 45 + 15 + 7 + 30 = 152$ বছর এবং $\Sigma x_i^2 = 55^2 + 45^2 + 15^2 + 7^2 + 30^2 = 6224$ বছর

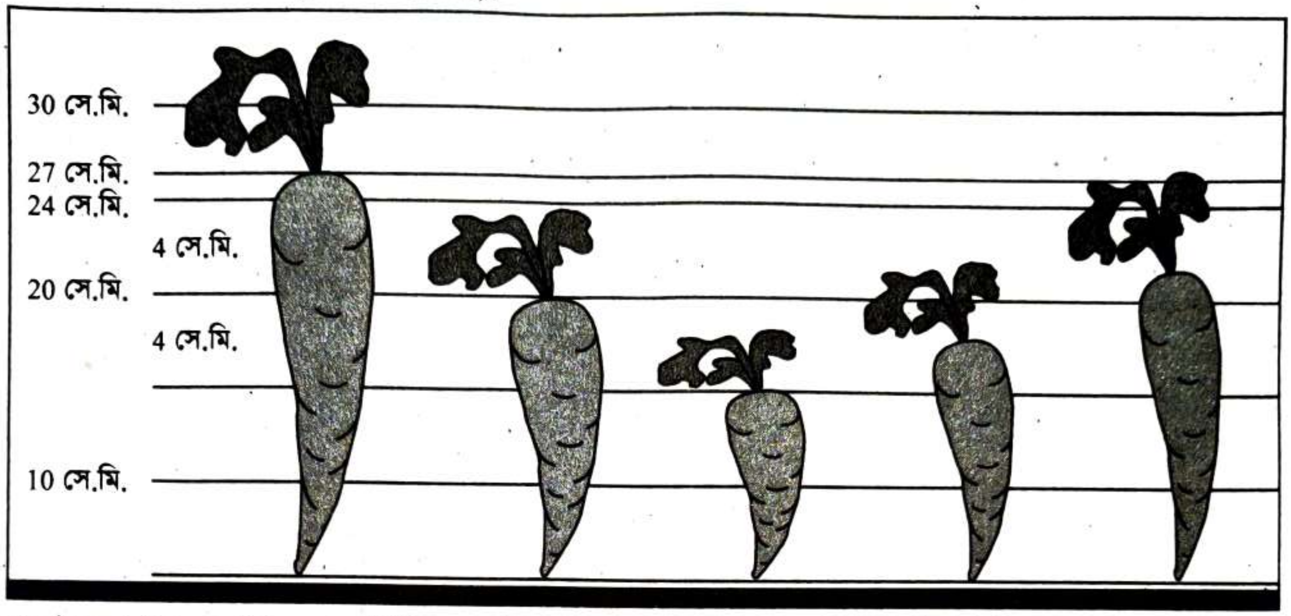
আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = \frac{6224}{5} - \left(\frac{152}{5}\right)^2 = 320.64$ বছর

কাজ: যদি $n = 5, \sum x_i = 25$ এবং $\sum x_i^2 = 250$ হয় তবে σ_x^2 এর মান কত?

10.3.1.5 পরিমিত ব্যবধান বা আদর্শ বিচ্যুতি (Standard Deviation): বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ও সঠিক পরিমাপক হচ্ছে **পরিমিত ব্যবধান**। উপাত্তের মানগুলি থেকে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তার ধনাত্মক বর্গমূলকে **পরিমিত ব্যবধান** বলে। অর্থাৎ ভেদাঙ্কের বর্গমূলকেই পরিমিত ব্যবধান বলে। পরিমিত ব্যবধানকে গ্রিক অক্ষর σ (সিগমা) বা SD দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরিমিত ব্যবধান কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না।

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান
পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ (তাত্ত্বিক সূত্র)	পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$ (তাত্ত্বিক সূত্র)
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$ (গণনা সূত্র)	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ (গণনা সূত্র)
$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_i}{N}\right)^2}$ যেখানে, $d_i = x_i - A$ এবং $A =$ অনুমিত গড়	$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2\right\}} \times C$ শ্রেণিব্যাপ্তি সমান হলে, $d_i = \frac{x_i - A}{C}$ যেখানে, $A =$ অনুমিত গড় এবং $C =$ শ্রেণিব্যাপ্তি

Standard Deviation (পরিমিত ব্যবধান):



গড় উচ্চতা (20 সে.মি.) হতে প্রতিটি মূলার উচ্চতার ব্যবধান গড়ে 4 সে.মি.। অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধান ব্যবহার করে তথ্যসমূহ কেন্দ্রীয় মান হতে কত দূরে তা সম্পর্কে ধারণা লাভ করতে পারি।

পরিমিত ব্যবধানের ব্যবহার (Uses of Standard Deviation):

যদিও ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধানের ব্যবহারের ক্ষেত্র মূলত একই তথাপি আরও কিছু ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধানের ব্যবহার উল্লেখ করা হলো:

1. সম্ভাবনা বিন্যাস যেমন পরিমিত বিন্যাস, পৈঁসু বিন্যাস প্রভৃতির উদ্ভাবনে ও মিলকরণে এটা ব্যবহৃত হয়।
2. বিভিন্ন প্রকার সংখ্যাত্মক গবেষণায় ও পরিকল্পনা প্রণয়নে এটা ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।
3. অনুমান যাচাই এ পরিমাপ ব্যবহৃত হয়।
4. বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে নির্ভরযোগ্য পরিমাপ হিসাবে উচ্চতর পরিসংখ্যানে এটির সর্বাধিক ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়।
5. দুই বা ততোধিক নিবেশনের বিস্তারের তুলনা করতে ব্যবহৃত হয়।
6. কালীন সারি বিশ্লেষণে ব্যবহৃত হয়।
7. নিবেশনের প্রতিনিধিত্বকারী মান হিসেবে কেন্দ্রীয় মানের গ্রহণযোগ্যতা যাচাইয়ে ব্যবহৃত হয়।

কাজ:

1. বিস্তার পরিমাপ বলতে কী বোঝ? বিস্তার পাঠের প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা কর।
2. অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপগুলির বর্ণনা দাও।
3. আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপগুলির বর্ণনা দাও।
4. ভেদাঙ্কের সংজ্ঞা দাও। ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তা আলোচনা কর।
5. পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা দাও।

10.3.1.6 পরিমিত ব্যবধানের বৈশিষ্ট্য

দুইটি অসম সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান তাদের পরিসরের অর্ধেক।

মনে করি, সংখ্যা দুইটি x_1 ও $x_2 (x_1 > x_2)$ সুতরাং তাদের পরিসর $R = H - L = x_1 - x_2$

গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

এবং পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{2}}, i = 1, 2$

$$\text{বা,}\quad \sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2}{2}} = \sqrt{\frac{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2}{2}} = \sqrt{2\times\frac{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2} = \frac{x_1-x_2}{2} = \frac{R}{2}$$

উদাহরণ-6. একজন শিক্ষার্থীর কয়েকটি বিষয়ে 20 নম্বরের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর যথাক্রমে 16, 12, 14, 15, 18 হলে প্রাপ্ত নম্বরের পরিমিত ব্যবধান কত?

সমাধান: আমরা জানি, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের গণনা তালিকা:

x_i	16	12	14	15	18	$\Sigma x_i = 75$
x_i^2	256	144	196	225	324	$\Sigma x_i^2 = 1145$

অতএব, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1145}{5}-\left(\frac{75}{5}\right)^2} = \sqrt{229-(15)^2} = \sqrt{229-225} = \sqrt{4} = 2$$

উদাহরণ-7. নিচের উপাত্ত হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। [য: বো: ১৫]

শ্রেণি ব্যাপ্তি	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800
গণসংখ্যা	12	18	36	24	10	8

সমাধান: আমরা জানি, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{N}\right)^2}$

এবং গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i$ [যেখানে, $N = \Sigma f_i$]

প্রয়োজনীয় গণনা তালিকা:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
200 - 300	12	250	3000	750000
300 - 400	18	350	6300	2205000
400 - 500	36	450	16200	7290000
500 - 600	24	550	13200	7260000
600 - 700	10	650	6500	4225000
700 - 800	8	750	6000	4500000
মোট	$N = 108$		$\Sigma f_i x_i = 51200$	$\Sigma f_i x_i^2 = 26230000$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{26230000}{108} - \left(\frac{51200}{108}\right)^2}$

$$= \sqrt{242870.37 - 224746.23} = \sqrt{18124.14} = 134.6259$$

বি. দ্র. দুইটি অসম ধনাত্মক সংখ্যার ক্ষেত্রে, $MD = SD = \frac{R}{2}$

কাজ: একটি ফার্মের 10 জন কর্মচারীর দৈনিক আয়ের উপাত্ত থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

আয় (টাকায়)	600	620	640	620	680	770	680	670	700	650

10.3.2 আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative Measures of Dispersion)

কোনো নিবেশনের পরম বিস্তার পরিমাপ এবং ঐ পরম বিস্তার পরিমাপের সাথে সংশ্লিষ্ট কেন্দ্রীয় মানের বা কেন্দ্রীয় মানসমূহের যোগফলের অনুপাতকে **আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ বলে**। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ একটি এককবিহীন সংখ্যা। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার। যথা:

(i) পরিসরাঙ্ক (Coefficient of Range)
(ii) গড় ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Mean deviation)
(iii) বিভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation)
(iv) চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Quartile deviation)

10.3.2.1 পরিসরাঙ্ক (Coefficient of Range) : কোনো উপাত্তের পরিসরকে তার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে **পরিসরাঙ্ক** বলে। একে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে: বৃহত্তম মান x_n এবং ক্ষুদ্রতম মান x_1 হলে পরিসরাঙ্ক, $CR = \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \times 100$

শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে: সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা L_1 এবং সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_n হলে পরিসরাঙ্ক,

$$CR = \frac{L_n - L_1}{L_n + L_1} \times 100$$

উদাহরণ-8. নিম্নে গত ছয় দিনে প্রতি গ্রাম সোনার মূল্য দেওয়া হলো :

সোমবার	মঙ্গলবার	বুধবার	বৃহস্পতিবার	শুক্রবার	শনিবার
6150.00	6200.00	6175.00	6190.00	6170.00	6180.00

সোনার মূল্যের পরিসর এবং পরিসরাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, পরিসর $= x_L - x_S$ এখানে, x_L = সর্বোচ্চ মান, x_S = সর্বনিম্ন মান

এবং পরিসরাঙ্ক $= \frac{x_L - x_S}{x_L + x_S} \times 100$ এখানে, $x_L = 6200.00, x_S = 6150.00$

সুতরাং সোনার মূল্যের পরিসর $= 6200.00 - 6150.00 = 50$ এবং পরিসরাঙ্ক $= \frac{50}{12350} \times 100 = 0.41\%$

কাজ: কোনো শ্রেণির 80 জন শিক্ষার্থীর নম্বরের গণসংখ্যা সারণি নিম্নে প্রদত্ত হলো। নম্বরের বিস্তারের পরিসর ও পরিসরাঙ্ক নির্ণয় কর।

নম্বর	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	4	12	20	18	15	8	2	1

10.3.2.2 গড় ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation) : কোনো নিবেশনের গড় ব্যবধান এবং ঐ গড় ব্যবধান নির্ণয়ে সংশ্লিষ্ট মধ্যক মানের (গড় বা মধ্যমা বা প্রচুরক) অনুপাতকে **গড় ব্যবধানাঙ্ক** বলে। একে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়। সুতরাং কোনো উপাত্তের কেন্দ্রীয় মানের গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক থেকে নির্ণীত গড় ব্যবধান যথাক্রমে $MD(\bar{x})$, MD (me) ও MD (mo) হলে,

গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD(\bar{x}) = \frac{MD(\bar{x})}{\bar{x}} \times 100$

মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD(me) = \frac{MD(me)}{Me} \times 100$

প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD(mo) = \frac{MD(mo)}{Mo} \times 100$

উদাহরণ-9. নিচের উপাত্ত হতে মধ্যমা ও প্রচুরক হতে গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।

x :	2	4	6	8	10
f :	1	4	6	4	1

সমাধান: মধ্যমা ও প্রচুরক নির্ণয় সারণি :

x	f
2	1
4	4
6	6
8	4
10	1

এখানে, $n = 16$

অর্থাৎ, মধ্যমা $= \frac{16}{2}$ -তম পদের বিপরীত মান $= 6$ এবং প্রচুরক $= 6$. [যেহেতু 6 সংখ্যাটি বেশিবার ঘটেছে]

এক্ষেত্রে মধ্যমা ও প্রচুরক উভয়ই সমান অর্থাৎ গড় ব্যবধান উভয় ক্ষেত্রে একই হবে।

$\therefore$ গড় ব্যবধান, $MD = \frac{1}{16}(\Sigma f_i\,|x_i - 6|)$

$$= \frac{1}{16}\,(1|2-6| + 4|4-6| + 6|6-6| + 4|8-6| + 1|10-6|) = \frac{24}{16} = 1.5$$

এবং গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD = \frac{MD}{6} \times 100 = \frac{1.5}{6} \times 100 = 25\%$

কাজ: নিচের উপাত্ত থেকে গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর:

X	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12
f	1	4	6	4	1

10.3.2.3 বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Variation): বিভেদাঙ্ক হলো বিস্তারের আপেক্ষিক পরিমাপগুলির মধ্যে সর্বাধিক ব্যবহৃত পরিমাপ। কোনো উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে **বিভেদাঙ্ক** বলে। একে শতকরায় প্রকাশ করা হয়। সুতরাং কোনো উপাত্তের গড় এবং পরিমিত ব্যবধান জানা থাকলেই বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

এখন, কোনো নিবেশনের গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে $\bar{x}$ ও σ হলে, বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

উদাহরণ-10. কোনো কারখানার 32 জন শ্রমিকের বাৎসরিক অনুপস্থিতির আদর্শ বিচ্যুতির মান 5 দিন। শ্রমিকদের অনুপস্থিতির বর্গের সমষ্টি 1000 হলে, বিভেদাঙ্কের মান কত?

সমাধান: ধরি, সংখ্যাগুলির চলক, x

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ বা, $(5)^2 = \frac{1000}{32} - \bar{x}^2$

বা, $\bar{x}^2 = \frac{1000 - 800}{32}$ বা, $\bar{x} = 2.5$

সুতরাং, বিভেদাঙ্ক, $CV(x) = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{5}{2.5} \times 100 = 200\%$

এখানে,
$\sigma_x = 5$
$\Sigma x_i^2 = 1000$
$n = 32$

কাজ: নিচের উপাত্ত হতে বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

সাপ্তাহিক মজুরি (টাকায়)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000
শ্রমিকের সংখ্যা	5	10	15	20	10	5

10.3.2.4 চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation): কোনো উপাত্তের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের পার্থক্যকে উহাদের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাই **চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক**। একে সাধারণত শতকরায় প্রকাশ করা হয়। কোনো উপাত্তের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক যথাক্রমে Q_1 ও Q_3 হলে

চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, $CQD = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

উদাহরণ-11. নিম্নলিখিত উপাত্ত হতে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।
5, 7, 0, –3, 11, 25, 17, 4, 20, 26

সমাধান: প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই, –3, 0, 4, 5, 7, 11, 17, 20, 25, 26.

আমরা জানি, চতুর্থক ব্যবধান $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

এখানে, Q_1 ও Q_3 হলো প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক।

যেহেতু, $n = 10$, জোড় সংখ্যা এবং এটি 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়। সেহেতু তথ্যসারিটিকে সমান দুইটি অংশে বিভক্তকরে প্রত্যেক অংশের মধ্যমা নিয়ে নিবেশনটির চতুর্থক নির্ণয় করা হলো।

$\therefore$ $Q_1 =$ ১ম অংশের $\dfrac{5+1}{2}$ তম পদ = ১ম অংশের ৩য় পদ = 4

$Q_3 =$ ২য় অংশের $\dfrac{5+1}{2}$ তম পদ = ২য় অংশের ৩য় পদ = 20

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $= \dfrac{20-4}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \dfrac{20-4}{20+4} \times 100 = \dfrac{16}{24} \times 100 = 66.67\%$ (প্রায়)।

কাজ: নিচের ঘটন সংখ্যা বিন্যাস হতে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	58	59	60	61	62	63	64	65	66
ছাত্রের সংখ্যা	15	20	32	35	35	22	20	10	8

পাঠ-8

উদাহরণমালা

উদাহরণ-12. – 2a, – a, 0, a, 2a সংখ্যাগুলির গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত সংখ্যাগুলি – 2a, – a, 0, a, 2a

$\therefore$ গড়, $\bar{x} = \dfrac{-2a - a + 0 + a + 2a}{5} = 0$ তাহলে,

গড় ব্যবধান $= \dfrac{\sum_{i=1}^{5} |x_i - \bar{x}|}{5} = \dfrac{|-2a-0| + |-a-0| + |0-0| + |a-0| + |2a-0|}{5} = \dfrac{6a}{5}$

আবার, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (-2a)^2 + (-a)^2 + 0^2 + (a)^2 + (2a)^2 = 10a^2$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{10\,a^2}{5} - 0^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

উদাহরণ-13. নিচের ঘটনসংখ্যা বিন্যাসটির পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. বো. ১৬]

শ্রেণিব্যাপ্তি	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
ঘটনসংখ্যা	3	7	15	20	12	9	4

সমাধান: সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি : পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের তালিকা :

শ্রেণিব্যাপ্তি	মধ্যবিন্দু x_i	ঘটনসংখ্যা f_i	$d = \frac{x_i - A}{C}$ $A = 65.5, C = 10$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
31 – 40	35.5	3	–3	–9	27
41 – 50	45.5	7	–2	–14	28
51 – 60	55.5	15	–1	–15	15
61 – 70	$65.5 \rightarrow A$	20	0	0	0
71 – 80	75.5	12	1	12	12
81 – 90	85.5	9	2	18	36
91 – 100	95.5	4	3	12	36
মোট		$N = 70$		$\Sigma f_i d_i = 4$	$\Sigma f_i d_i^2 = 154$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2} \times C = \sqrt{\frac{154}{70} - \left(\frac{4}{70}\right)^2} \times 10 = \sqrt{2.2 - (0.057)^2} \times 10$

$= \sqrt{2.2 - 0.00327} \times 10 = \sqrt{2.197} \times 10 = 1.48 \times 10 = 14.82$

$\therefore$ ভেদাংক, $\sigma^2 = (14.82)^2 = 219.673$

উদাহরণ-14. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গড়, ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ১৬]

সমাধান: আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা $1, 2, \cdots \cdots, n$

এখন, সংখ্যাগুলির যোগফল, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

আমরা জানি, গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{n(n+1)}{2.n} = \frac{n+1}{2}$ এবং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

এখন, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots \cdots + x_n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6.n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]$

$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{4n+2-3n-3}{6}\right] = \frac{n^2-1}{12}$

$\therefore$ বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}{\frac{n+1}{2}} \times 100 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \times 100$

উদাহরণ-15. একটি সমান্তর ধারার n তম পদ পর্যন্ত গড়, ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: একটি সমান্তর ধারা,

$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots \ldots + \{a + (n-1)d\}$

$\therefore$ গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{\text{সমান্তর ধারার n-তম পদের সমষ্টি}}{n}$

$= \frac{\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}}{n} = \frac{2a + (n-1)d}{2}$

এখন মনে করি, $n = 2m + 1$

তাহলে, n তম পদ $= a + (2m + 1 - 1)d = a + 2md$

এবং গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \dfrac{2a + (2m + 1 - 1)d}{2} = a + md$

এখন,

$$\begin{aligned}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 &= (a - a - md)^2 + (a + d - a - md)^2 + (a + 2d - a - md)^2 + \dots\ \dots \\ &\qquad + (a + 2md - a - md)^2 \\ &= m^2d^2 + (1 - m)^2d^2 + (2 - m)^2d^2 + \dots\ \dots + \{a + (m - 1)d - a - md\}^2 \\ &\qquad + \{a + md - a - md\}^2 + \{a + (m + 1)d - a - md\}^2 + \dots\ \dots + (a + 2md - a - md) \\ &= m^2d^2 + (1 - m)^2d^2 + (2 - m)^2d^2 + \dots\ \dots + d^2 + 0 + d^2 + \dots\ \dots + m^2d^2 \\ &= 2d^2\,[m^2 + (m - 1)^2d^2 + (m - 2)^2d^2 + \dots\ \dots + 1^2] \\ &= 2d^2 . \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6} = \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{3}d^2\end{aligned}$$

$$\text{ভেদাঙ্ক, } \sigma_x{}^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{m(m + 1)(2m + 1)d^2}{3(2m + 1)}$$

$$= \frac{m(m + 1)}{3}d^2 = \frac{\left(\frac{n - 1}{2}\right)\left(\frac{n - 1}{2} + 1\right)}{3}d^2$$

$$\therefore \text{ ভেদাঙ্ক, } \sigma_x{}^2 = \frac{n^2 - 1}{12}d^2$$

উদাহরণ-16. 32টি সংখ্যার পরিমিত বিচ্যুতি 5। যদি সংখ্যাগুলির সমষ্টি 80 হয় তবে সংখ্যাগুলির বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান: ধরি, সংখ্যাগুলির চলক x

$\therefore$ আমরা পাই, $\sigma_x{}^2 = \dfrac{\sum x_i{}^2}{n} - \bar{x}^2$ ……… (i)

দেওয়া আছে, $n = 32$, $\sigma_x = 5$ $\therefore \sigma_x{}^2 = 25$; $\sum x_i = 80$ $\therefore \bar{x} = \dfrac{80}{32} = 2.5 \left[\because \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}\right]$

(i) নং হতে পাই, $25 = \dfrac{\sum x_i{}^2}{32} - (2.5)^2$ বা, $\sum x_i{}^2 = 32\{25 + (2.5)^2\} = 32(25+6.25) = 1000$

$\therefore$ সংখ্যাগুলির বর্গের সমষ্টি = 1000.

উদাহরণ-17. দুইটি অসম রাশির গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 6 ও 9 হলে রাশি দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, রাশি দুইটি যথাক্রমে, x_1 ও x_2; $x_1 > x_2$

গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ বা, $6 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ বা, $x_1 + x_2 = 12$ ……… (i)

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{9} = 3$ $\therefore$ পরিমিত ব্যবধান $= \dfrac{\text{পরিসর}}{2}$

বা, $3 = \dfrac{|x_1 - x_2|}{2}$ বা, $x_1 - x_2 = 6$ ……… (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$x_1 + x_2 + x_1 - x_2 = 12 + 6$ বা, $2x_1 = 18$

বা, $x_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ $\therefore x_1 = 9$

(i) নং -এ x_1 এর মান বসিয়ে পাই,

$9 + x_2 = 12$ বা, $x_2 = 12 - 9$ $\therefore x_2 = 3$

উদাহরণ-18. দুইটি তথ্যসারির ব্যবধানাঙ্ক যথাক্রমে 75% এবং 90% এবং পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 15 এবং 18 হলে তাদের গাণিতিক গড় কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, $(CV)_1 = 75\%, \sigma_1 = 15; (CV)_2 = 90\%, \sigma_2 = 18$

$\bar{x}_1 = ?\quad \bar{x}_2 = ?$

আমরা জানি, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100$

$\therefore\ (CV)_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}\times 100 = 75$ বা, $\frac{15\times 100}{\bar{x}_1} = 75$

বা, $\bar{x}_1 = \frac{15\times 100}{75} = 20$

একইভাবে, $(CV)_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}\times 100 = 90$

বা, $\bar{x}_2 = \frac{18\times 100}{90} = 20$

উদাহরণ-19. একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানের পুরুষ ও মহিলা শ্রমিকদের বেতনের পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 20 টাকা ও 15 টাকা এবং বিভেদাঙ্ক যথাক্রমে 50% ও 70%। যদি ঐ প্রতিষ্ঠানে 60% পুরুষ শ্রমিক থাকে তবে শ্রমিকদের গড় বেতন কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sigma_x = 20, \sigma_y = 15; CV_{(\bar{x})} = 50\%; CV_{(\bar{y})} = 70\%$;

ধরি, পুরুষ শ্রমিকদের বেতন x টাকা এবং মহিলা শ্রমিকদের বেতন y টাকা।

এখন, $CV_{(\bar{x})} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}\times 100$

বা, $50 = \frac{20}{\bar{x}}\times 100$

$\therefore\ \bar{x} = 40$

আবার, $CV_{(\bar{y})} = \frac{\sigma_y}{\bar{y}}\times 100$

বা, $70 = \frac{15}{\bar{y}}\times 100$

$\therefore\ \bar{y} = 21.43$

উক্ত প্রতিষ্ঠানের মোট শ্রমিক সংখ্যা n হলে 60n জন পুরুষ শ্রমিক এবং 40n জন মহিলা শ্রমিক।

$\therefore$ শ্রমিকদের গড় বেতন $= \frac{n_1\bar{x}+n_2\bar{y}}{n_1+n_2} = \frac{60n(40)+40n.(21.43)}{60n+40n} = 32.57$ টাকা।

পাঠ-৫ ও ৬

? অনুশীলনী-10(A)

Type-I

1. (i) 7, 12, 17, 22, ……………., 102 রাশিগুলোর ভেদাঙ্ক কত?
   (ii) S = {1, 2, 3, …………, 50} এর জোড় সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(গ)]
   (iii) S_1 = {1, 3, 4, 5, 7, 9, 20} এর উপাদানগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।
   [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(গ)]
   (iv) দশটি রাশির সমষ্টি 100 এবং বর্গের সমষ্টি 1250 হলে, তাদের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

Type-II

2.(i) নিম্নে দ্বাদশ শ্রেণির 60 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

নম্বর	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
ছাত্র	10	20	15	10	5

(ii) নিচের তথ্য সারি হতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ১৬; রা: বো: ১৬; চ: বো: ১৫; য: বো: ১৬ (অনুরূপ), মাদ্রাসা বো: ১৫]

শ্রেণি ব্যাপ্তি	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49
গণসংখ্যা	7	10	15	13	9	6

(iii) নিচের তথ্য সারি হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

বয়স (বছর)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
শ্রমিক সংখ্যা	25	40	20	10	5

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮-এর সৃজনশীল-৮(গ)]

(iv) নিচে 50 জন ছাত্রের গণসংখ্যা নিবেশন দেখানো হলো। প্রদত্ত সারণি হতে ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধানের পার্থক্য নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	40	50	60	70	80	90
ছাত্র সংখ্যা	4	6	11	13	12	4

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৮(গ)]

(v) নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যবধান	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
গণসংখ্যা	5	8	14	12	9	6

[বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(গ)]

(vi) নিচের সারণি হতে পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
শিক্ষার্থী	10	20	15	10	5

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(খ ও গ)]

(vii) নিচে 50 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো :

নম্বর	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ছাত্র সংখ্যা	5	7	11	14	6	4	3

সারণি হতে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৮(গ)]

Type-III

3. (i) নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের পরিসর, চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান, পরিসরাঙ্ক, চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক, গড় ব্যবধানাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

নম্বর	10	20	30	40	50	60	70
ছাত্র সংখ্যা	4	6	10	25	10	6	4

(ii) নিচের সারণি হতে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	11-16	17-22	23-28	29-34	35-40	41-46	47-52
গণসংখ্যা	5	4	10	12	8	4	7

[যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(খ)]

4.(i) তিনটি শিল্প প্রতিষ্ঠানের গড় উৎপাদন ও উৎপাদনের ভেদাঙ্ক: $\bar{x}_1 = 10, \sigma_1^2 = 25, \bar{x}_2 = 6,$ $\sigma_2^2 = 16, \bar{x}_3 = 10$ ও $\sigma_3^2 = 9$ হলে কোন শিল্প প্রতিষ্ঠানের উৎপাদন বেশি ভালো এবং কেন যুক্তি দ্বারা দেখাও।

(ii) নিম্নে কোনো একটি মৌসুমে দুইজন ব্যাটসম্যান A এবং B এর দশটি খেলার রানের স্কোর দেওয়া হলো:

A এর রানের স্কোর: x	57	16	27	39	53	56	61	80	101	105
B এর রানের স্কোর: y	04	16	21	41	43	57	78	83	90	95

দুইজন ব্যাটসম্যানের মধ্যে কার রানের স্কোর বেশি সঙ্গতিপূর্ণ।

(iii) কোনো ক্লাবে 25 জন সদস্য আছে যাদের গড় আয় 300 টাকা এবং আয়ের পরিমিত ব্যবধান 5 টাকা। আরো দুইজন সদস্য ক্লাবে যোগদান করল যাদের গড় আয় যথাক্রমে 250 টাকা ও 300 টাকা হলে সর্বমোট 27 জনের আয়ের ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. **(i)** 831.25 **(ii)** 208 **(iii)** 5.831 **(iv)** 5;
2. **(i)** 10, 11.785, 138.89; **(ii)** 7.376 ও 54.41; **(iii)** 11 **(iv)** 175.25 (প্রায়) **(v)** 7.2435 (প্রায়) **(vi)** 11.785; 10; **(vii)** 254.44;
3. **(i)** 60; 10; 10.46; 14.68; 75%; 25%; 26.15%; 36.69%; **(ii)** 7.3875
4. **(i)** ৩য় প্রতিষ্ঠানের উৎপাদন বেশি ভালো কারণ এর বিভেদাঙ্ক সবচেয়ে কম; **(ii)** ব্যাটসম্যান A এর রানের স্কোর বেশি সঙ্গতিপূর্ণ; **(iii)** 111.207 (প্রায়)

পাঠ-৭, ৮ ও ৯

10.4 সম্ভাবনার ধারণা (Concept of Probability)

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা সম্ভাবনা শব্দটি ব্যবহার করি। যেমন আজ বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা খুব বেশি, বিশ্বকাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ের সম্ভাবনা বেশি, শিক্ষার্থীটির ভাল করার সম্ভাবনা আছে, রফিক ঢাকা যেতে পারে ইত্যাদি। এ ধরনের উক্তির মধ্যে ঘটনাটি ঘটা বা না ঘটা দুই-ই প্রকাশ পায়। সম্ভাবনা তত্ত্বে কোনো ঘটনা ঘটা বা না ঘটা উভয়েরই নিশ্চয়তার গাণিতিক পরিমাপ করা হয়। কোনো ঘটনা কতটুকু নিশ্চয়তা সহকারে ঘটবে তাই এর সম্ভাবনা।

কোনো বিষয় বা ঘটনার অনুকূল উপাদানের পরিমাণের ভিত্তিতে তা ঘটা বা না ঘটার ব্যাপারে মন্তব্য করা হয়। যদি বেশির ভাগ উপাদান কোনো ঘটনার অনুকূলে থাকে তবে ঐ ঘটনাটির ঘটার সম্ভাবনা বেশি বলা হয়। আর যদি বেশির ভাগ উপাদান কোনো ঘটনার প্রতিকূলে থাকে তবে ঐ ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা কম বলে ধরা হয়। সুতরাং কোনো ঘটনার মোট ফলাফলের সাথে এর অনুকূল ফলাফলের অনুপাতই হচ্ছে ঐ ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা।

অর্থাৎ, কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $= \dfrac{\text{ঘটনাটির অনুকূল উপাদান সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য মোট উপাদান সংখ্যা}}$

10.5 সম্ভাবনার সাথে সম্পর্কিত কতিপয় বিষয়বস্তুর ধারণা (Concept of Some Topics Related to Probability)

পরীক্ষা বা পরীক্ষণ (Experiment): কতগুলি নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোনো একটি কাজ বা চেষ্টা বারবার করাই হলো **পরীক্ষা বা পরীক্ষণ**।

উদাহরণ: একটি মুদ্রার দুইটি পিঠ থাকে। মুদ্রার দুই পিঠই সুষম। এই শর্তাধীনে মুদ্রাটি বেশ কয়েকবার নিক্ষেপ করে মুদ্রার উপরের পিঠ নির্দেশক অবস্থা বের করার প্রক্রিয়া একটি পরীক্ষা।

চেষ্টা (Trial): কোনো পরীক্ষার ক্ষুদ্রতম প্রচেষ্টাই হলো ট্রায়াল বা চেষ্টা । কোনো ঘটনার সম্ভাব্যতা পরিমাপ করার জন্য নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোনো কাজ একবার মাত্র করা হলে তাকে **ট্রায়াল** বা **চেষ্টা** বলে।

উদাহরণ: একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলে তাকে একটি ট্রায়াল বলে।

নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space): কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফলের সমাহারকে **নমুনা ক্ষেত্র** বলে। অর্থাৎ একটি সমসম্ভাবনাযুক্ত পরীক্ষণের প্রাপ্ত সকল সরল ঘটনাসমূহের সেট হলো সার্বিক নমুনা ক্ষেত্র। নমুনা ক্ষেত্রকে সাধারণত S দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: একটি মুদ্রা দুই বার নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র হবে $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

নমুনা বিন্দু (Sample point): নমুনা বিন্দু হলো নমুনা ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি উপাদান।

উদাহরণ: একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ এখানে, HH একটি নমুনা বিন্দু।

দৈব পরীক্ষা (Random Experiment): যখন কোনো পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোনো একটি নির্দিষ্ট চেষ্টায় কী ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না তাকে **দৈব পরীক্ষা** বলে।

উদাহরণ: একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলে $\{H, T\}$ এর যে কোনো একটি উঠবে এটি নিশ্চিত কিন্তু মুদ্রা নিক্ষেপের পূর্বে নিশ্চিতভাবে বলা যায় না যে কোনটি আসবে।

ঘটনা (Event): কোনো পরীক্ষায় প্রাপ্ত একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে **ঘটনা** বলে।

উদাহরণ: একটি ছক্কা নিক্ষেপে প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনাকে A দ্বারা চিহ্নিত করলে ঘটনাটি হবে $A = \{2, 4, 6\}$

পূরক ঘটনা (Complementary Events): কোনো পরীক্ষণে একটি ঘটনা ঘটা এবং একটি ঘটনা না ঘটার ঘটনাকে পরস্পর **পূরক ঘটনা**। A ঘটনার পূরক ঘটনা A^C দ্বারা সূচিত করা হয়।

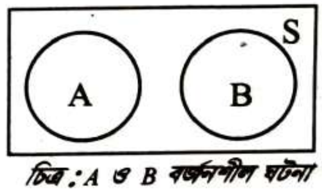
উদাহরণ: একটি ছক্কা নিক্ষেপে জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা, $A = \{2, 4, 6\}$ হলে, A ঘটনার পূরক ঘটনা হবে বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা। অর্থাৎ $A^C = \{1, 3, 5\}$.

সমসম্ভাব্য ঘটনাবলী (Equally likely Events): কোনো পরীক্ষার ঘটনাগুলি ঘটার সম্ভাবনা সমান হয় অর্থাৎ যদি একটি অপরটির চেয়ে বেশি বা কম সম্ভাব্য না হয় তবে ঘটনাগুলিকে **সমসম্ভাব্য** বলে।

উদাহরণ: একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করার পরীক্ষায় উপরের পিঠে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এদের প্রতিটির আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$।

সুতরাং এই ঘটনাগুলি সমসম্ভাব্য ঘটনা।

বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events): দুইটি ঘটনা তখনই বর্জনশীল হয় যখন তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনা বিন্দু থাকে না। দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি পরস্পর এরূপে সম্পর্কিত থাকে যাতে তাদের যে কোনো দুইটি ঘটনা একই সাথে ঘটা সম্ভব নয় তাহলে উক্ত ঘটনা সমূহকে পরস্পর **বর্জনশীল** বা **বিচ্ছিন্ন ঘটনা** বলে।



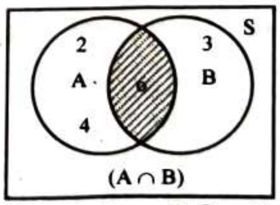
চিত্র : A ও B বর্জনশীল ঘটনা

A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে $A \cap B = \varnothing \therefore P(A \cap B) = 0$

উদাহরণ: একজন পরীক্ষার্থীর পাস করার ঘটনা A ও ফেল করার ঘটনা B হলে A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল।

একটি মুদ্রা নিক্ষেপে Head এবং Tail পাবার ঘটনাটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা।

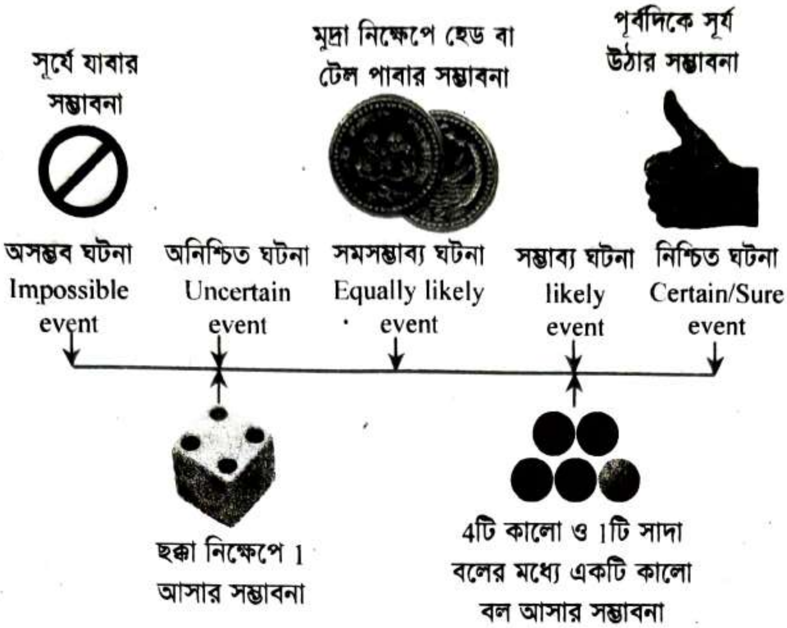
অবর্জনশীল ঘটনা (Non mutually Exlusive Events): দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপে পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত হয় যে তাদের মধ্যে যে কোনো দুইটি ঘটনা একত্রে ঘটতে পারে তাহলে এই ঘটনাসমূহকে পরস্পর **অবর্জনশীল ঘটনা** বলে। এরূপ ঘটনাদ্বয়ের মধ্যে অবশ্যই সাধারণ নমুনা বিন্দু থাকবে।



চিত্র : A ও B অবর্জনশীল ঘটনা

উদাহরণ-1. 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে দৈবভাবে একখানা তাস টানলে তাসখানা ইস্কাবন হওয়ার ঘটনাকে A এবং টেক্কা হওয়ার ঘটনাকে B ধরলে A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

উদাহরণ-2. একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে $A = \{2, 4, 6\}$ এবং $B = \{3, 6\}$ দুইটি অবর্জনশীল ঘটনা। কারণ A ও B এর মধ্যে সাধারণ নমুনা বিন্দু 6।



নিশ্চিত ঘটনা (Sure Events) : কোনো দৈব পরীক্ষণে একটি ঘটনা এমন হয় যে, তা পরীক্ষণের প্রত্যেক ক্ষেত্রে অবশ্যই ঘটে তখন উক্ত ঘটনাকে **নিশ্চিত ঘটনা** বলে। নিশ্চিত ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা এবং নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা সব সময় সমান হবে। সহজভাবে কোনো পরীক্ষণে যে ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এক তাকে **নিশ্চিত ঘটনা** বলে।

উদাহরণ: একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করলে Head বা Tail আসার সম্ভাবনা এক। এরা সমসম্ভাবনা যুক্ত ঘটনা এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে নিশ্চিতভাবে ঘটবে। সুতরাং মুদ্রা নিক্ষেপে Head অথবা Tail আসার সম্ভাবনা নিশ্চিত ঘটনা।

অনিশ্চিত ঘটনা (Uncertain Events): যদি কোনো ঘটনা এমন হয় যে, পরীক্ষণের কোনো কোনো ক্ষেত্রে তা ঘটতে পারে আবার কোনো কোনো ক্ষেত্রে নাও ঘটতে পারে, তবে এরূপ ঘটনাকে অনিশ্চিত ঘটনা বলে। অর্থাৎ কোনো পরীক্ষায় প্রাপ্ত কোনো ঘটনা পরীক্ষাটির প্রতিটি চেষ্টায় না ঘটলে তাকে **অনিশ্চিত ঘটনা** বলে। অনিশ্চিত ঘটনার সম্ভাবনা 0 অপেক্ষা বেশি কিন্তু 1 অপেক্ষা কম। $0 < P(A) < 1$; যেখানে, $P(A)$ ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা।

উদাহরণ: একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপে জোড় সংখ্যা আসার ঘটনা একটি অনিশ্চিত ঘটনা।

অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events): কোনো দৈব পরীক্ষণে কোনো ঘটনা যদি এমন হয় যে তা পরীক্ষণের কোনো ক্ষেত্রেই আদৌ ঘটবে না তবে উক্ত কল্পিত ঘটনাকে **অসম্ভব ঘটনা** বলে। অসম্ভব ঘটনার কোনো অনুকূল নমুনা বিন্দু থাকে না। অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা সর্বদা শূন্য।

উদাহরণ: ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় 7 সংখ্যাটি আসার ঘটনা একটি অসম্ভব ঘটনা।

স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events): কোনো পরীক্ষায় প্রাপ্ত একাধিক ঘটনার যে কোনো একটির ঘটা বা না ঘটা যদি ইতোপূর্বে অন্য ঘটনা বা ঘটনাগুলির ঘটা বা না ঘটার উপর নির্ভর না করে তবে তাদেরকে পরস্পর **স্বাধীন** বা **অনির্ভরশীল ঘটনা** বলে।

অন্যভাবে বলা যায়, যদি দুইটি ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা তাদের পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান হয় তবে তাদেরকে স্বাধীন ঘটনা বলে। অর্থাৎ দুইটি ঘটনা A ও B কে স্বাধীন ঘটনা বলা যাবে যদি

$P(A \cap B) = P(A). P(B)$ হয়।

উদাহরণ-1. আগামীকাল সারাদেশে বৃষ্টি হওয়ার ঘটনা, আগামীদিনের তারিখ জোড় নাকি বিজোড় তার উপর নির্ভর করে না। সুতরাং, বৃষ্টি হওয়ার ঘটনা ও তারিখ পরস্পর স্বাধীন ঘটনা।

আবার, দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে ১মটিতে হেড পাওয়ার ওপর ২য়টিতে হেড পাওয়া নির্ভর করে না। এখানে ১মটিতে হেড পাওয়া ও ২য়টিতে হেড পাওয়ার ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

উদাহরণ-2. দুটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় $S = \{HH, HT, TH\ TT\}$ এবং $A = \{HT, TH\}$; $B = \{TH, TT\}$ হলে,

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ এবং $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A).\ P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\therefore$ A ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

অধীন ঘটনা বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Events): যখন কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোনো ঘটনা ঘটা বা না ঘটার ওপর নির্ভর করে তখন সে ঘটনাকে **অধীন** বা **নির্ভরশীল** ঘটনা বলে। অন্য কথায়, কোনো পরীক্ষায় প্রাপ্ত দুইটি ঘটনার মধ্যে যদি B ঘটনা ঘটা বা না ঘটা ইতোপূর্বে A ঘটনা ঘটা বা না ঘটার ওপর নির্ভর করে তবে B ঘটনাকে **অধীন** বা **নির্ভরশীল ঘটনা** বলে। এক্ষেত্রে $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A) > 0$

উদাহরণ: একটি তাসের প্যাকেট থেকে দুইটি তাস নেওয়া হলে প্রথম তাসটি ইস্কাবনের টেক্কা। পরের তাসটিও যে ঐ একই তাস হবে তা অবশ্যই নির্ভর করবে প্রথম তাসটি ফেরত দেয়ার উপর। সুতরাং এক্ষেত্রে দ্বিতীয় ঘটনাটি প্রথম ঘটনার উপর নির্ভরশীল।

শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability): যদি কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোনো ঘটনার ইতিপূর্বে ঘটার বা না ঘটার ওপর নির্ভর করে তবে ঐ ঘটনার সম্ভাবনাকে **শর্তাধীন সম্ভাবনা** বলে।

মনে করি, কোনো নমুনা ক্ষেত্রে A ও B দুইটি অধীন ঘটনা যেন $P(B) > 0$। এখন যদি A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা B ঘটনাটির ইতোপূর্বে ঘটার ওপর নির্ভর করে তবে A ঘটনার সম্ভাবনাকে B ঘটনার সাপেক্ষে **শর্তাধীন সম্ভাবনা** বলে।

সাংকেতিকভাবে, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B) > 0$. এখানে, $P(A|B)$ = B ঘটনার সাপেক্ষে A ঘটনার শর্তাধীন সম্ভাবনা বা P(A given B).

অনুরূপভাবে, A এর সাপেক্ষে B এর শর্তাধীন সম্ভাবনা, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A) > 0$.

উদাহরণ: একটি পাত্রে তিনটি লাল ও দুইটি কালো বল আছে। একটি বল উঠিয়ে পুনঃস্থাপন না করে আরেকটি বল উঠালে দ্বিতীয় উত্তোলিত বলটি কালো হবার ঘটনা প্রথম উত্তোলিত বলের ওপর নির্ভরশীল। এক্ষেত্রে প্রথম বলটি লাল হয়েছে এ শর্তে দ্বিতীয় বলটি কালো হবার সম্ভাবনা শর্তাধীন সম্ভাবনা।

সম্ভাবনার সংজ্ঞা (Definition of Probability): কোনো ঘটনা সম্বন্ধে অনিশ্চয়তার মাত্রার গাণিতিক পরিমাপ হলো সম্ভাবনা। কোনো একটি ঘটনার সম্ভাবনা ঐ ঘটনার অনুকূল ও মোট ফলাফলের ওপর নির্ভরশীল। সম্ভাবনা হচ্ছে একটি আপেক্ষিক অনুপাত যা শূন্য (0) থেকে এক (1) এর মধ্যে বিদ্যমান থাকে। গাণিতিকভাবে, কোনো একটি পরীক্ষার মোট সম্ভাব্য ফলাফলের সংখ্যার সাথে ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যার অনুপাতকে ঐ ঘটনা ঘটার **সম্ভাবনা** বলে।

কোনো নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা n এবং উহার কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m হলে,

$$\text{সম্ভাবনা} = \frac{\text{ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা}}{\text{মোট সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা}} = \frac{m}{n}$$

উদাহরণ: একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র $S = \{H,T\}$

$\therefore$ মোট ফলাফল সংখ্যা $n(S) = 2$

মনে করি, A একটি ঘটনা যা হেড পড়া নির্দেশ করে। সুতরাং A এর নমুনা বিন্দু A : {H}

$\therefore$ A এর অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা $n(A) = 1$

$\therefore$ সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

10.6 একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাবনা নির্ণয়

(Determination of the probability of repeated events)

যখন কোনো পরীক্ষায় পরীক্ষণের সমস্ত শর্ত ঠিক রেখে বারবার পুনরাবৃত্তি হয় তখন ঐ পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট কোনো ঘটনাও বারবার পুনরাবৃত্তি ঘটে থাকে। তখন উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যার সাথে পরীক্ষার মোট ফলাফলের সংখ্যার অনুপাতের সীমায়িত মান নির্ণয়ের মাধ্যমে ঘটনাটির সম্ভাবনা নির্ণয় করা হয়।

অর্থাৎ কোনো ঘটনা A এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m এবং নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফলের সংখ্যা n বিবেচনা করা হলে, ঘটনাটির সম্ভাবনা-

$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$; m = A ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা
n = নমুনাক্ষেত্রের ফলাফলের সংখ্যা

উদাহরণ: যদি একটি মুদ্রা 10 বার নিক্ষেপ করা হয় তাহলে সম্ভাবনার সংজ্ঞানুসারে হেড আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ অর্থাৎ 5 বার। কিন্তু বাস্তবে 1টি অথবা 2টি কিংবা হেড নাও আসতে পারে। আবার মুদ্রাটিকে যদি অসংখ্যবার নিক্ষেপ করা হয় তাহলে হেড আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এর কাছাকাছি হবে। দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় J.E. Kerrich 10টি মুদ্রা 1000 বার নিক্ষেপ করেছিলেন। তার পরীক্ষণে হেড আসার সংখ্যা ছিল: 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 520, 504, 529 দেখা যায় তার পরীক্ষণে হেড আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এর কাছাকাছি। অর্থাৎ পরীক্ষণের সংখ্যা অসীম হলে হেড আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এর আরও কাছাকাছি হবে।

সীমাবদ্ধতা: (Limitation)

i. বাস্তব ক্ষেত্রে কোনো পরীক্ষাই অসীম সংখ্যক বার সম্পন্ন করা সহজ নয়।
ii. যে সব শর্তাধীনে কোনো পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি ঘটানো হবে তা সর্বদা একই থাকবে কিনা তা নিশ্চিত করা কঠিন।
iii. গাণিতিক দৃষ্টিকোণে $\frac{m}{n}$ এর প্রকৃত সীমাস্থ মান বাস্তবে নাও পাওয়া যেতে পারে যা সম্ভাবনার প্রকৃত মান হবে।
iv. $\frac{m}{n}$ একটি পরীক্ষালব্ধ ধারণা, পক্ষান্তরে সীমাস্থ মান একটি তত্ত্বীয় ধারণা। এই দুইটি ধারণার যুগপৎ ব্যবহার যথোপযুক্ত নয় এবং এক্ষেত্রে গাণিতিক জটিলতা দেখা দেয়।

10.7 পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রসমূহ

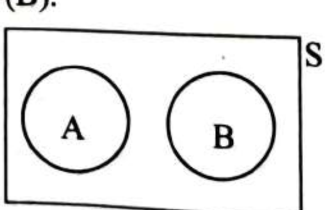
(Additive Laws of Probability for mutually exclusive and non mutually exclusive events)

10.7.1 দুইটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার যোগসূত্র [য: বো: ১৬, ১৪, ১১; চ: বো: ১৩; রা: বো: ১৬, ০৯; দি: বো: ১৪, ০৯; সি: বো: ১৬, ১৫; ঢা: বো: ১৪, ০৭; কু: বো: ১৬, ১৫, ০৬; ব: বো: ১৬, ১৪, ১২, ০৮; মা. ১৪, ১০]

বিবৃতি: দুইটি বর্জনশীল ঘটনার যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা, এদের প্রত্যেকটি পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

প্রমাণ: ধরি, S সসীম নমুনা ক্ষেত্রে, A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা যেখানে,

নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = $n(S)$
A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = $n(A)$
এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = $n(B)$



চিত্র: $A \cap B = \varnothing$

সুতরাং, A ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ এবং B ঘটনার সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$

এখন, A ও B বর্জনশীল হওয়ায়, $A \cap B = \varnothing$; অর্থাৎ এদের মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনা বিন্দু নেই।

$\therefore$ $(A \cup B)$ এর অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা হবে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

কাজেই, $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{n(A)+n(B)}{n(S)}$ বা, $P(A \cup B) = \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(B)}{n(S)}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

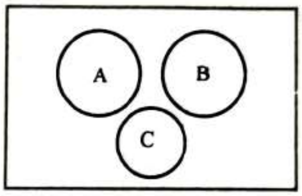
10.7.2 তিনটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার যোগসূত্র

বিবৃতি: তিনটি বর্জনশীল ঘটনার যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা, এদের প্রত্যেকটি পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ A, B ও C তিনটি বর্জনশীল ঘটনা হলে—

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

প্রমাণ: ধরি, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা n(S) এবং A, B ও C পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা। A এর অনুকূলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n(A); B এর অনুকূলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n(B)

এবং C এর অনুকূলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n(C).



চিত্র: $A \cap B \cap C = \varnothing$

সুতরাং A ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$; B ঘটনার সম্ভাবনা, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$

এবং C ঘটনার সম্ভাবনা, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)}$

এখন, A, B ও C পরস্পর বর্জনশীল হওয়ায় $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

সম্ভাবনার সংজ্ঞানুসারে,

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{n(A \cup B \cup C)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) + n(C)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)}$$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

উদাহরণ-1. একটি তাসের প্যাকেটে 52 খানা তাস আছে। তা হতে 2 খানা তাস নির্বিচারে টানা হলো। তাস দুটি একই রঙের রাজা হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

সমাধান: প্যাকেটে মোট তাস 52 টি। মোট রাজা তাস 4 টি {2টি লাল, 2টি কালো}

এখন, P (তাস দুটি একই রঙের রাজা) = P (2টি লাল রাজা বা 2 টি কালো রাজা)

= P (2টি লাল রাজা) + P (2টি কালো রাজা) $= \dfrac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2} + \dfrac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2} = \dfrac{1}{1326} + \dfrac{1}{1326} = \dfrac{1}{663}$

কাজ: এক প্যাকেট তাস হতে একটি তাস দৈবভাবে নেয়া হলে তাসটির হরতন বা রুইতন হবার সম্ভাবনা কত?

10.7.3 n সংখ্যক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার যোগসূত্র

[সি.বো. ১১; ঢা.,য.,ব. ০৪; কু., রা. ০৩; চ. ০১]

বর্ণনা (Statement) : n সংখ্যক বর্জনশীল ঘটনার যে কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা তাদের প্রত্যেকটির পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান।

S সসীম নমুনাক্ষেত্রের $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_n$ বর্জনশীল ঘটনা এবং $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_n$ ঘটনাগুলি ঘটার সম্ভাবনা যথাক্রমে $P(A_1), P(A_2), P(A_3), \ldots \ldots, P(A_n)$ হলে (A_1 অথবা A_2 অথবা A_3 অথবা ... ... অথবা A_n) যেকোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots \ldots + P(A_n)$

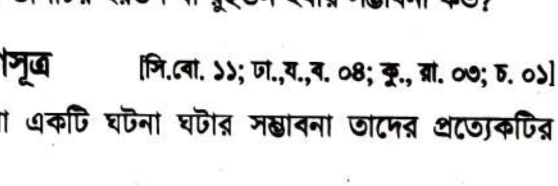
প্রমাণ: ধরি, S সসীম নমুনাক্ষেত্রে $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots \ldots A_n$ হলো n সংখ্যক বর্জনশীল ঘটনা।

যেখানে, S নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n(S)

অনুকূল ঘটনা A_1 এর উপাদান সংখ্যা $= n(A_1)$

অনুকূল ঘটনা A_2 এর উপাদান সংখ্যা $= n(A_2)$

অনুকূল ঘটনা A_3 এর উপাদান সংখ্যা $= n(A_3)$



ভেনচিত্র

অনুরূপভাবে, অগ্রসর হয়ে অনুকূল ঘটনা A_n এর উপাদান সংখ্যা $= n(A_n)$

সুতরাং $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots A_n$ ঘটনাগুলি ঘটার সম্ভাবনা যথাক্রমে

$P(A_1) = \dfrac{n(A_1)}{n(S)}, P(A_2) = \dfrac{n(A_2)}{n(S)}, P(A_3) = \dfrac{n(A_3)}{n(S)}, \ldots \ldots, P(A_n) = \dfrac{n(A_n)}{n(S)}$; $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots A_n$ বর্জনশীল ঘটনা

সুতরাং $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n$ অনুকূল ঘটনার উপাদান সংখ্যা,

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \ldots \ldots + n(A_n)$

অতএব, (A_1 অথবা A_2 অথবা A_3 অথবা ... ... অথবা A_n;) ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = \frac{n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \ldots \ldots + n(A_n)}{n(S)}$$

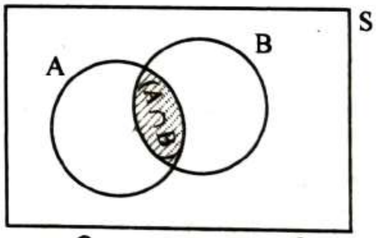
$$= \frac{n(A_1)}{n(S)} + \frac{n(A_2)}{n(S)} + \frac{n(A_3)}{n(S)} + \ldots \ldots + \frac{n(A_n)}{n(S)}$$

$\therefore P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$

10.7.4 দুইটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার যোগসূত্র

[রা: বো: ১৫, ১৩, ১১; কু: বো: ০৮; ব: বো: ১৫; য: বো: ০৮; সি: বো: ১৪, ০৯; দি: বো: ১৫; চ: বো: ১৬, ০৭]

বিবৃতি: দুইটি অবর্জনশীল ঘটনার যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফল হতে একত্রে ঘটার সম্ভাবনার বিয়োগফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে— $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



চিত্র : A ও B অবর্জনশীল

প্রমাণ: ধরি, S সসীম নমুনা ক্ষেত্রে A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = $n(S)$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = $n(A)$

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = $n(B)$

$(A \cup B)$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = $n(A \cup B)$

$(A \cap B)$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = $n(A \cap B)$

এখন সম্ভাবনার গাণিতিক সংজ্ঞানুসারে, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$; $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$;

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$; $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)}$

যেহেতু A ও B অবর্জনশীল, সুতরাং $(A \cup B) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

সুতরাং $(A \cup B)$ এর অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(A \cup B) = n(A \cap \bar{B}) + n(A \cap B) + n(\bar{A} \cap B)$

$= \{n(A) - n(A \cap B)\} + n(A \cap B) + \{n(B) - n(A \cap B)\} = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

সুতরাং, $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

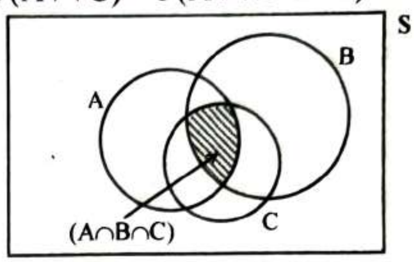
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

10.7.5 তিনটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনার সম্ভাবনার যোগসূত্র

[রা: বো: ১৫, ১৩, ১১; কু: বো: ০৮; য: বো: ০৮; সি: বো: ০৯; চ: বো: ০৭]

বিবৃতি: তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার যেকোনো একটি ঘটার সম্ভাবনা, এদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফল হতে (১ম, ২য়), (২য়, ৩য়), (৩য়, ১ম) ঘটনার একত্রে ঘটার সম্ভাবনার বিয়োগফলের সাথে তিনটি ঘটনার একত্রে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে—

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$



[সমীকরণ অনুযায়ী]

প্রমাণ : ধরি, S নমুনা ক্ষেত্রে A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা।

দুইটি অবর্জনশীল ঘটনার জন্যে আমরা জানি,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$ ... ... (i)

এখন, $P(A \cup B \cup C) = P\{A \cup (B \cup C)\}$

ধরি, $B \cup C = D$ তাহলে,

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

$= P(A) + P(B \cup C) - P\{A \cap (B \cup C)\}$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\}$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\}]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$[\because (A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap B \cap C)]$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$

উদাহরণ-2. একটি তাসের প্যাকেট হতে দৈবভাবে একটি তাস নেওয়া হলো। তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত ?

সমাধান: ধরি, তাসটি লাল হবার সম্ভাবনা = P(A)

তাসটি টেক্কা হবার সম্ভাবনা = P(B)

তাসটি লাল অথবা টেক্কা হবার সম্ভাবনা = $P(A \cup B)$

তাসটি লাল এবং টেক্কা হবার সম্ভাবনা = $P(A \cap B)$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{7}{13}$$

কাজ: 1. একজন পরিসংখ্যানবিদ A ও B দুইটি কোম্পানিতে চাকুরির জন্য আবেদন করতে পারে। সে মনে করে যে, A কোম্পানিতে তার চাকুরি পাবার সম্ভাবনা 0.8; B কোম্পানিতে তার চাকুরি পাবার সম্ভাবনা 0.4। কমপক্ষে তার একটি কোম্পানিতে চাকুরি না পাবার সম্ভাবনা কত?

2. মোট 12টি প্রশ্নের মধ্যে ক 6টির ও খ 5টির উত্তর দিতে পারে। ক ও খ উভয়ে 2টি প্রশ্নের উত্তর দিতে পারে। একটি প্রশ্ন দৈবায়িত উপায়ে নির্বাচন করা হলে, ক ও খ কর্তৃক উত্তর দিতে পারার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

3. একটি ছক্কার গুটি চালা হলে সংখ্যাটি 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত?

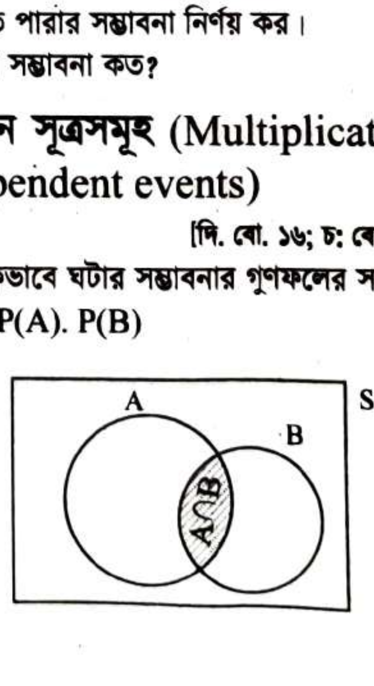
10.8 অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্রসমূহ (Multiplicative Laws of Probability for independent and dependent events)

10.8.1 দুইটি স্বাধীন ঘটনার সম্ভাবনার গুণন সূত্র

[দি. বো. ১৬; চ: বো: ১০]

বিবৃতি: দুইটি স্বাধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা এদের প্রত্যেকের পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান। A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা হলে A ও B একত্রে ঘটার সম্ভাবনা, $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

প্রমাণ: ধরি, S সসীম নমুনা ক্ষেত্রে A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা।



স্বাধীন ঘটনার সংজ্ঞানুযায়ী $P(A \mid B) = P(A)$ এবং $P(B \mid A) = P(B)$

আবার, শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞানুযায়ী $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

বা, $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $[\therefore P(A|B) = P(A)$, যখন A ও B স্বাধীন$]$

$\therefore P(A \cap B) = P(A). P(B)$ একইভাবে, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

বা, $P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ [$\because P(B|A) = P(B)$, যখন A ও B স্বাধীন]

$\therefore P(A \cap B) = P(A). P(B)$

কাজ: আলাদাভাবে A একটি বইয়ের 85% অঙ্ক সমাধান করতে পারে এবং B ঐ বইয়ের 65% অঙ্ক সমাধান করতে পারে। দৈবভাবে নির্বাচিত একটি অঙ্ক তাদেরকে করতে দেওয়া হলো। অঙ্কটি উভয়ই করতে পারার সম্ভাবনা কত?

10.8.2 দুইটি অধীন ঘটনার সম্ভাবনার গুণন সূত্র

বিবৃতি: দুইটি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা, এদের যেকোনো একটির শর্তহীন সম্ভাবনা এবং অপরটির শর্তাধীন সম্ভাবনার গুণফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি অধীন ঘটনা হলে—

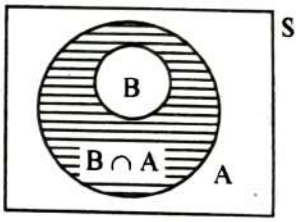
$P(A \cap B) = P(A). P(B \mid A) = P(B). P(A \mid B)$

প্রমাণ: ধরি, কোনো সসীম নমুনা ক্ষেত্রের ঘটনা S এর মধ্যে A ও B অধীন এবং যৌগিক ঘটনা।

এখানে, মোট উপাদান সংখ্যা, $n(S) = n$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা, $n(A) = m_1$; B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা, $n(B) = m_2$

$(A \cap B)$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা, $n(A \cap B) = m$



সুতরাং, $P(A) = \dfrac{m_1}{n}$, $P(A \cap B) = \dfrac{m}{n}$

শর্তাধীন সম্ভাবনা সংজ্ঞানুযায়ী, $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{m}{n} \times \dfrac{n}{m_1} = \dfrac{m}{m_1}$

এখন, সম্ভাবনার সংজ্ঞানুযায়ী, $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m_1}{n} \cdot \dfrac{m}{m_1} = P(A). P(B|A)$

$\therefore P(A \cap B) = P(A). P(B \mid A)$

উদাহরণ-3. A ও B দুইটি সম্পূর্ণ ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A) = 0.65$ এবং $P(B) = 0.47$ হলে A ও B এর স্বাধীনতা সম্পর্কে মন্তব্য কর।

সমাধান: যেহেতু, A ও B ঘটনাদ্বয় সম্পূর্ণ সুতরাং আমরা পাই, $P(A \cup B) = 1$

আমরা জানি, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $1 = 0.65 + 0.47 - P(A \cap B)$ বা, $P(A \cap B) = 1.12 - 1 = 0.12$

এখন, $P(A).P(B) = 0.65 \times 0.47 = 0.3055$ $\quad \therefore P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

সুতরাং A ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন নয়, অধীন।

কাজ: মনে করি A হলো পরীক্ষায় পাশের ঘটনা এবং B হলো দৈনিক পড়াশুনা করার ঘটনা। যদি A ও B ঘটনাদ্বয় সম্পূর্ণ হয় এবং $P(A) = 0.75$ এবং $P(B) = 0.45$ হয়, তবে A ও B এর স্বাধীনতা সম্পর্কে মন্তব্য কর।

10.8.3 কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য-1. সম্ভাবনার মান সর্বনিম্ন 0 এবং সর্বোচ্চ 1 হতে পারে। অর্থাৎ, $0 \leq P(A) \leq 1$.

প্রমাণ: মনে করি, একটি দৈব পরীক্ষার সসীম নমুনা ক্ষেত্র S এবং নমুনা ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট A একটি ঘটনা।

ধরি, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n(S); A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n(A)

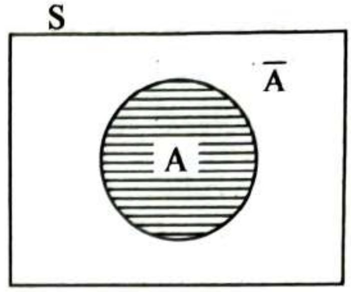
$\therefore$ সম্ভাবনার গাণিতিক সংজ্ঞা অনুসারে পাই, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ ... ... (i)

এটি স্পষ্ট যে, A ঘটনার উপাদান সংখ্যা 0 থেকে n(S) এর মধ্যে থাকবে।

অর্থাৎ $0 \leq n(A) \leq n(S)$ বা, $\dfrac{0}{n(S)} \leq \dfrac{n(A)}{n(S)} \leq \dfrac{n(S)}{n(S)}$ [n(S) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $0 \leq P(A) \leq 1$

উপপাদ্য-2. সম্ভাবনার পূরক সূত্র (Complementary law of probability): কোনো ঘটনা ঘটা ও না ঘটার সম্ভাবনার যোগফল 1. অর্থাৎ $P(A)+P(\bar{A})=1$. অথবা $p+q=1$



চিত্র ঃ $A \cup \bar{A} = S$

প্রমাণ: ধরি, কোনো সসীম নমুনা ক্ষেত্র S এর মধ্যে A একটি ঘটনা।

এখানে, $\bar{A}$ হচ্ছে A না ঘটার ঘটনা।
নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা, $n(S)=n$.
A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা, $n(A)=m$

$\therefore$ A ঘটনা না ঘটার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(\bar{A})=n-m$

A ঘটনার সম্ভাবনা, $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{m}{n}$

A ঘটনা না ঘটার সম্ভাবনা, $P(\bar{A})=\dfrac{n(\bar{A})}{n(S)}=\dfrac{n-m}{n}$

এখন, A ঘটনা ঘটা ও না ঘটার সম্ভাবনার সমষ্টি,

$P(A)+P(\bar{A})=\dfrac{m}{n}+\dfrac{n-m}{n}=\dfrac{n}{n}=1$ [বি:দ্র: $\bar{A}=A^c$]

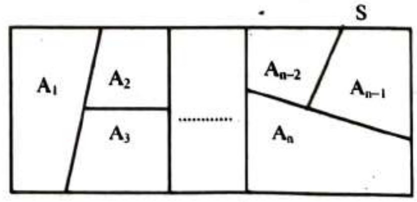
উপপাদ্য-3. দুইটি ঘটনা একত্রে বা একই সাথে বা যুগপৎভাবে বর্জনশীল ও স্বাধীন হতে পারে না।

প্রমাণ: মনে করি, কোনো নমুনা ক্ষেত্রের দুইটি ঘটনা হচ্ছে A ও B যেন, $P(A)\neq 0$ এবং $P(B)\neq 0$.
এখন, ঘটনা দুইটি স্বাধীন হলে, $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ [সম্ভাবনার গুণন সূত্রানুযায়ী]
যেহেতু $P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$ সেহেতু $P(A\cap B)\neq 0$ ... ... (i)
আবার, ঘটনা দুইটি পরস্পর বর্জনশীল হলে, $A\cap B=\varnothing$
বা, $P(A\cap B)=0$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) হতে প্রমাণিত হয় যে, দুইটি ঘটনা একই সাথে বা একত্রে বা যুগপৎভাবে বর্জনশীল ও স্বাধীন হতে পারে না।

উপপাদ্য-4. কতগুলি সম্পূরক ঘটনার সম্ভাবনার যোগফল 1. অর্থাৎ $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)=1$

অথবা, যদি $A_1, A_2, \ldots \ldots, A_k$ ঘটনাসমূহ বর্জনশীল ও সম্পূর্ণ ঘটনা হয় তবে দেখাও যে, $\sum\limits_{j=1}^{k} P(A_j)=1$

প্রমাণ: ধরি, $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_n$ কোনো সসীম নমুনা ক্ষেত্র S এর মধ্যে n সংখ্যক সম্পূরক বা সম্পূর্ণ ঘটনা যেন, $A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots \ldots \cup A_n=S$.
আমরা জানি, সম্পূরক ঘটনাগুলি পরস্পর বর্জনশীল।
এখন $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots \ldots, A_n$ ঘটনাগুলির উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে, $N_1, N_2, N_3, N_4, \ldots \ldots, N_n$ এবং নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা N হলে,
$N=N_1+N_2+N_3+N_4+\ldots \ldots+N_n$ হবে।
এক্ষেত্রে সম্ভাবনার গাণিতিক সূত্রানুসারে,



চিত্র: $A_1\cup A_2\cup \ldots \ldots \cup A_n=S$

$P(A_1)=\dfrac{N_1}{N}$; $P(A_2)=\dfrac{N_2}{N}$; $P(A_3)=\dfrac{N_3}{N} \ldots \ldots P(A_n)=\dfrac{N_n}{N}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} P(A_i)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots \ldots+P(A_n)$$

$$=\frac{N_1}{N}+\frac{N_2}{N}+\frac{N_3}{N}+\ldots \ldots+\frac{N_n}{N}=\frac{N_1+N_2+N_3+\cdots+N_n}{N}=\frac{N}{N}=1$$

অতএব, n সংখ্যক সম্পূরক ঘটনার সম্ভাবনার যোগফল 1. অর্থাৎ $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)=1$.

উপপাদ্য-5. যদি A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর স্বাধীন হয় তবে A ও $\overline{B}$ পরস্পর স্বাধীন।

প্রমাণ: যেহেতু A ও B পরস্পর স্বাধীন।

সুতরাং, $P(A \cap B) = P(A). P(B)$

ভেনচিত্র হতে পাই, $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

বা, $P(A) = P\{(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\} = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

[$\because (A \cap \overline{B})$ ও $(A \cap B)$ পরস্পর বর্জনশীল]

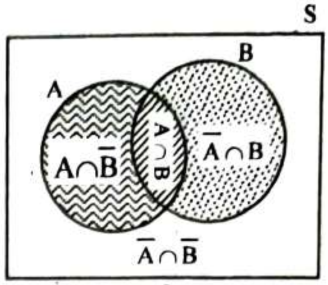
বা, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A).P(B) \quad [\because P(A \cap B) = P(A).P(B)]$

$= P(A)\,[1 - P(B)]$

$= P(A)\,P(\overline{B})\ [\because P(B) + P(\overline{B}) = 1]$

অর্থাৎ, A ও $\overline{B}$ পরস্পর স্বাধীন।



ভেনচিত্র

পাঠ-১০

উদাহরণমালা

10.9 বাস্তব জীবনভিত্তিক সমস্যার সমাধান

উদাহরণ-4. দুইটি ছক্কা শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা বের কর।

i. অন্তত একটি 6 পাবার। ii. প্রথম ছক্কার সংখ্যা দ্বিতীয় ছক্কার দ্বিগুণ।

সমাধান: দুইটি ছক্কা শূন্যে নিক্ষেপ করার কারণে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি নিচে দেওয়া হলো :

S =	{(1, 1),	(1, 2),	(1, 3),	(1, 4),	(1, 5),	(1, 6),	(2, 1),	(2, 2),	(2, 3),	(2, 4),	(2, 5),	(2, 6),
	(3, 1),	(3, 2),	(3, 3),	(3, 4),	(3, 5),	(3, 6),	(4, 1),	(4, 2),	(4, 3),	(4, 4),	(4, 5),	(4, 6),
	(5, 1),	(5, 2),	(5, 3),	(5, 4),	(5, 5),	(5, 6),	(6, 1),	(6, 2),	(6, 3),	(6, 4),	(6, 5),	(6, 6)}

নমুনা ক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(S) = 6 \times 6 = 36$ টি

i. ধরি, A অন্তত একটিতে 6 পাবার ঘটনা।

A ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র : {(1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) (5, 6) (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)}

$\therefore$ A এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = 11$

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{11}{36}$

ii. ধরি, B ১ম ছক্কার সংখ্যা দ্বিতীয় ছক্কার দ্বিগুণ হবার ঘটনা।

B ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র : {(2, 1), (4, 2), (6, 3)} $\therefore$ B এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(B) = 3$

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

উদাহরণ-5. চারটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং সম্ভাবনা বের কর –

i. দুই বার মাথা। ii. কমপক্ষে তিনটি মাথা। iii. বড়জোর দুইটি মাথা।

সমাধান: চারটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি নিম্নরূপ :

S = {HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT,
THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, HTTH, TTTT}

নমুনা ক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = 16$

i. ধরি, A দুইবার মাথা পাবার ঘটনা। $\therefore$ A ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র: {HHTT, HTTH, HTHT, THHT, THTH, TTHH} $\therefore$ A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = 6$

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

ii. ধরি, B কমপক্ষে তিনটি মাথা পাবার ঘটনা। B ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র : {HHHH, HTHH, HHTH, HHHT, THHH} $\therefore$ B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(B) = 5$

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{16}$

iii. ধরি, C বড়জোর দুইটি মাথা পাবার ঘটনা। C ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র :
{HTTH, HTHT, HHTT, HTTT, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

$\therefore$ C ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(C) = 11$ অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{11}{16}$

উদাহরণ-6. এক প্যাকেট তাস হতে 3টি তাস নির্বিচারে নেওয়া হলো। তাস 3টি
i. টেক্কা হবার; ii. কমপক্ষে একটি রাজা; iii. তাসগুলি একই স্যুটের সম্ভাবনা হবার নির্ণয় কর।

সমাধান: এক প্যাকেট তাসে মোট 52টি তাস থাকে। যার মধ্যে 4টি টেক্কা ও 4টি রাজা তাস থাকে।
52টি তাস থেকে 3টি তাস $^{52}C_3$ উপায়ে নেওয়া যায়।

i. 4টি টেক্কা থেকে 3টি তাস $^{4}C_3$ উপায়ে নেওয়া যায়।

$\therefore$ তাস 3টি টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= \frac{^{4}C_3}{^{52}C_3} = \frac{4}{22100} = \frac{1}{5525}$

ii. 3টি তাসের মধ্যে কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা = P(একটি রাজা ও 2টি অন্য তাস)
অথবা P(2টি রাজা ও 1টি অন্য তাস) অথবা P(3টি রাজা তাস)

$$= \frac{^{4}C_1 \times {}^{48}C_2}{^{52}C_3} + \frac{^{4}C_2 \times {}^{48}C_1}{^{52}C_3} + \frac{^{4}C_3}{^{52}C_3} = \frac{4512}{22100} + \frac{288}{22100} + \frac{4}{22100} = \frac{4804}{22100} = \frac{1201}{5525}$$

iii. তাসগুলি একই স্যুটের হবার সম্ভাবনা = P(3টি হরতন বা 3টি ইস্কাবন বা 3টি রুইতন বা 3টি চিরতন)
= P(3টি হরতন) + P(3টি ইস্কাবন) + P(3টি রুইতন) + P(3টি চিরতন)

$$= \frac{^{13}C_3}{^{52}C_3} + \frac{^{13}C_3}{^{52}C_3} + \frac{^{13}C_3}{^{52}C_3} + \frac{^{13}C_3}{^{52}C_3} = 4 \times \frac{^{13}C_3}{^{52}C_3} = 4 \times \frac{286}{22100} = \frac{1144}{22100}$$

উদাহরণ-7. একটি পাত্রে 6টি লাল ও 4টি সাদা বল আছে। দুইটি বল দৈবায়িতভাবে নেওয়া হলো। বল দুইটি i. একই রঙের; ii. ভিন্ন রঙের; iii. কমপক্ষে একটি লাল হবার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান: পাত্রে লাল বল 6টি, সাদা বল 4টি অর্থাৎ মোট বল 10টি
10টি বল থেকে 2টি বল $^{10}C_2$ উপায়ে নেয়া যায়।

i. বল দুইটি একই রঙের হবার সম্ভাবনা = P{(বল 2টি লাল) অথবা (বল 2টি সাদা)}

$$= P(\text{বল 2টি লাল}) + P(\text{বল 2টি সাদা}) = \frac{^{6}C_2}{^{10}C_2} + \frac{^{4}C_2}{^{10}C_2} = \frac{15}{45} + \frac{6}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

ii. বল দুইটি ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা = P(1টি লাল ও 1টি সাদা বল) $= \frac{^{6}C_1 \times {}^{4}C_1}{^{10}C_2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

iii. কমপক্ষে একটি বল লাল হবার সম্ভাবনা = P{(একটি লাল ও একটি সাদা বল) অথবা (2টি লাল বল)}

$$= P(\text{1টি লাল ও 1টি সাদা বল}) + P(\text{2টি লাল বল}) = \frac{^{6}C_1 \times {}^{4}C_1}{^{10}C_2} + \frac{^{6}C_2}{^{10}C_2} = \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$$

উদাহরণ-8. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ হলে i. $P(A|B)$; ii. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; iii. $P(A|\bar{B})$; (iv) $P(A^c)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

এখন, আমরা জানি, অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{12 + 16 - 15}{24} = \frac{13}{24}$

i. শর্তাধীন সম্ভাবনা হতে পাই, $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{13}{24}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{13}{24} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{16}$

ii. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$; [ডি মর্গ্যানের সূত্র]

$$= 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

iii. $P(A \mid \bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

এখন, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{13}{24} = \frac{12 - 13}{24} = -\frac{1}{24} \cong 0$ এবং $P(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore P(A \mid \bar{B}) = \dfrac{0}{P(\bar{B})} = 0$

[যেহেতু সম্ভাবনার মান ঋণাত্মক হতে পারে না তাই $P(A \mid \bar{B}) = 0$, কারণ সম্ভাবনার সর্বনিম্ন মান শূন্য।]

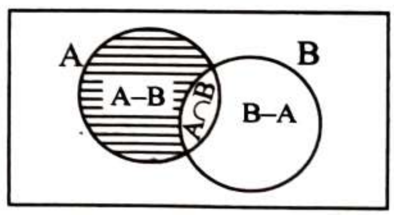
iv. $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

উদাহরণ-9. 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 40 জন অঙ্কে, 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে। একজন পরীক্ষার্থী দৈবভাবে নেওয়া হলো। i. তার অঙ্কে ফেল এবং পরিসংখ্যানে পাশ; ii. কেবল এক বিষয়ে পাশ; iii. বড়জোর এক বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা কত ?

[কু: বো: ১২; রা: বো: ১২; ব: বো: ০৯; দি: বো: ১৪; ঢা: বো: ০৫; সি: বো: ০৫]

সমাধান: ধরি, A = অঙ্কে ফেল করার ঘটনা; B = পরিসংখ্যানে ফেল করার ঘটনা।

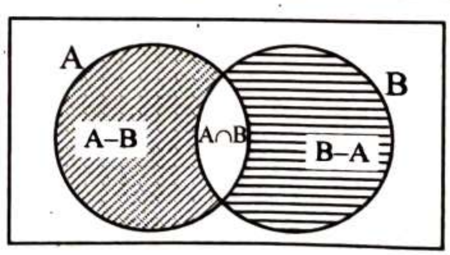
এখন, $P(A) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$; $P(A \cap B) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$



i. নির্ণেয় সম্ভাবনা,

$P(A \cap B^c) = P(A - B)$

$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$$



ii. নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P\{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\}$

$$= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{3}{20} + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

iii. নির্ণেয় সম্ভাবনা = P (অঙ্কে ফেল এবং পরিসংখ্যানে পাশ) + P (অঙ্কে পাশ এবং পরিসংখ্যানে ফেল) + P (অঙ্কে ও পরিসংখ্যান উভয় বিষয়ে ফেল)

$$= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$

উদাহরণ-10. নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হলো :

মাসিক আয় টাকা (হাজারে)	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
কর্মচারীর সংখ্যা	10	15	40	17	15	3

ক. উপরের তথ্য থেকে গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

খ. গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. উপরের ছক থেকে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:

মাসিক আয় (টাকা হাজারে)	কর্মচারীর সংখ্যা (f_i)	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	$d_i = \frac{x_i - a}{c}$	f_id_i	$f_id_i^2$	$\bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
5-9	10	7	-2	-20	40		11.05	110.5
10-14	15	12	-1	-15	15		6.05	90.75
15-19	40	17 = a	0	0	0	$a + \frac{\sum f_id_i}{N} \times C$	1.05	42
20-24	17	22	1	17	17		3.95	67.15
25-29	15	27	2	30	60	$= 17 + \frac{21}{100} \times 5$	8.95	134.25
30-34	3	32	3	9	27		13.95	41.85
	N = 100			$\sum f_id_i = 21$	$\sum f_id_i^2 = 159$	$= 18.05$		$\sum f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 486.5$

ক. ছক হতে পাই গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 18.05$

খ. গড় ব্যবধান, $(M.D) = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert}{N} = \frac{486.5}{100} = 4.865$

গ. পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_id_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_id_i}{N}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{159}{100} - \left(\frac{21}{100}\right)^2} \times 5 = 1.2433 \times 5 = 6.216 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = (6.216)^2 = 38.64$ (প্রায়)

উদাহরণ-11. দুটি শহর A ও B এর লোকসংখ্যা বয়সের ভিত্তিতে দেখানো হলো:

বয়স	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
শহর A	8	16	15	12	10	5	2	1
শহর B	10	12	24	32	29	11	3	1

ক. শহর দুটির মোট লোকসংখ্যা নির্ণয় কর?

খ. A শহরের লোকদের বয়সের পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. বয়সের দিক দিয়ে শহর দুটির লোকগুলোকে তুলনা কর এবং পরিমিত ব্যবধানের আলোকে তোমার মন্তব্য উপস্থাপন কর?

সমাধান: ক. A শহরের মোট লোকসংখ্যা = 8 + 16 + 15 + 12 + 10 + 5 + 2 + 1= 69

B শহরের মোট লোকসংখ্যা = 10 + 12 + 24 + 32 + 29 + 11 + 3 + 1 = 122

$\therefore$ শহর দুটির মোট লোকসংখ্যা = 69 + 122 = 191 জন

খ. ধরি, বয়সের মধ্যবিন্দু = x_i $(i = 1, 2, \ldots \ldots 8)$

A শহরের লোকসংখ্যা = f_i, $a = 35$, $c = 10$ এবং $u_i = \frac{x_i - a}{c}$

প্রয়োজনীয় ছক:

বয়স	লোক সংখ্যা f_i	শ্রেণি মধ্যবিন্দু (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 35}{10}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
0-10	8	5	−3	−24	72
10-20	16	15	−2	−32	64
20-30	15	25	−1	−15	15
30-40	12	35 = a	0	0	0
40-50	10	45	1	10	10
50-60	5	55	2	10	20
60-70	2	65	3	6	18
70-80	1	75	4	4	16
	$\sum f_i = N = 69$			$\sum f_iu_i = -41$	$\sum f_iu_i^2 = 215$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_x = c\sqrt{\frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_iu_i}{N}\right)^2}$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{215}{69} - \left(\frac{-41}{69}\right)^2} = 16.622 \text{ (প্রায়)}$$

ভেদাঙ্ক, $\sigma_x^2 = (\text{পরিমিত ব্যবধান})^2 = (16.622)^2 = 276.287$ (প্রায়)

গ. A শহরের লোকের বয়সের গড়, $\overline{x}_A = a + \frac{\Sigma f_iu_i}{N} \times C$

$$= 35 + \frac{-41}{69} \times 10 = 29.058 \text{ (প্রায়)}$$

B শহরের গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের ছক :

বয়স	লোকসংখ্যা f_i	x_i	$u_i = \frac{x_i - 35}{10}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
0-10	10	5	−3	−30	90
10-20	12	15	−2	−24	48
20-30	24	25	−1	−24	24
30-40	32	35 = a	0	0	0
40-50	29	45	1	29	29
50-60	11	55	2	22	44
60-70	3	65	3	9	27
70-80	1	75	4	4	16
	$N = \sum f_i = 122$			$\sum f_iu_i = -14$	$\sum f_iu_i^2 = 278$

B শহরের লোকের বয়সের গড়, $\overline{x}_B = a + \frac{\Sigma f_iu_i}{N} \times C = 35 + \frac{-14}{122} \times 10 = 33.85$ (প্রায়)

B শহরের লোকের বয়সের গড় A শহরের লোকের বয়সের গড় থেকে বেশি।

B শহরের লোকের বয়সের পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_x(B) = c\sqrt{\frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_iu_i}{N}\right)^2} = 10 \times \sqrt{\frac{278}{122} - \left(\frac{-14}{122}\right)^2}$

$$= 15.05 \text{ (প্রায়)}$$

'খ' থেকে পাই, A শহরের লোকের বয়সের পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_x(A) = 16.622$ (প্রায়)

$\therefore \sigma_x(A) > \sigma_x(B)$

অতএব বলা যায় যে, A শহরের লোক অপেক্ষা B শহরের লোকের বয়সের গড় বেশি হলেও পরিমিত ব্যবধান কম অর্থাৎ, B শহরের লোকদের বয়সের পার্থক্য কম।

উদাহরণ-১২: মিস্টার A কোনো এক অধিবর্ষের শুক্রবারে বিয়ে করেন। তিনি বর্তমানে চার (04) সন্তানের জনক।

ক. $P(A) = \frac{2}{9}$, $P(B) = \frac{1}{7}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{11}$ হলে $P(B|A)$ এর মান বের কর।

খ. কোনো সন্তান একই তারিখে জন্মগ্রহণ না করার সম্ভাবনা কত? (যখন 1 বছর = 365 দিন)

গ. 'মিস্টার A এর 53তম শুক্রবারে বিয়ে করার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$' বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

সমাধান: ক. আমরা জানি, A এবং B অধীন চলকের ক্ষেত্রে $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{11}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{11} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{22}$

খ. 4 সন্তানের মধ্যে প্রথম সন্তানের জন্ম তারিখ 365 দিনের যে কোনো একদিন হতে পারে এবং ১ম সন্তানের প্রতিটি জন্ম তারিখের সাথে ২য় সন্তানের 365 টি জন্ম তারিখ থাকতে পারে। সুতরাং 2 সন্তানের 365×365 রকম বিভিন্ন জন্ম তারিখ থাকতে পারে।

একইভাবে 4 সন্তানের জন্য সম্ভাব্য জন্ম তারিখের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 365 × 365 × 365 × 365

যদি কোনো সন্তান একই তারিখে জন্মগ্রহণ না করে তবে, ১ম সন্তানের জন্ম তারিখ 365 দিনের যেকোনো একদিন হতে পারে। তাহলে ২য় সন্তানের জন্মদিন বাকি 364 দিনের যেকোনো একদিন হবে। সুতরাং 4 সন্তানের একই তারিখে জন্মগ্রহণ না করার জন্য সম্ভাব্য নমুনা বিন্দুর সংখ্যা =365×364×363×362

$\therefore$ 4 সন্তানের একই তারিখে জন্মগ্রহণ না করার সম্ভাবনা $= \frac{365\times364\times363\times362}{365\times365\times365\times365} = 0.9836$ (প্রায়)

গ. আমরা জানি, অধিবর্ষে 366 দিন থাকে এবং 366 দিনে 52 টি পূর্ণ সপ্তাহ ও 2 টি দিন অতিরিক্ত থাকে।

স্পষ্টতঃই 52 সপ্তাহে 52 টি শুক্রবার পাওয়া যাবে এবং নিরপেক্ষভাবে নির্বাচিত অধিবর্ষে 53টি শুক্রবার থাকতে হলে অতিরিক্ত দুইটি দিনের যে কোনো একটি দিন শুক্রবার থাকতে হবে। অর্থাৎ অতিরিক্ত দিন দুইটি সপ্তাহের পর পর দুইটি দিন হবে।

সপ্তাহের পর পর দুইটি দিন নিম্নলিখিত ভাবে থাকতে পারে ঃ

১. শুক্রবার, শনিবার; ২. শনিবার, রবিবার; ৩. রবিবার, সোমবার; ৪. সোমবার, মঙ্গলবার; ৫. মঙ্গলবার, বুধবার
৬. বুধবার, বৃহস্পতিবার; ৭. বৃহস্পতিবার, শুক্রবার

সুতরাং সপ্তাহের পর পর দুইটি দিনের সম্ভাব্য নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 7

দুইটি দিনের যে কোনো একটি দিন শুক্রবার হবার নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 2

সুতরাং মিস্টার A এর 53 তম শুক্রবারে বিয়ে করার সম্ভাবনা $= \frac{2}{7}$

সুতরাং মিস্টার A এর 53 তম শুক্রবারে বিয়ে করার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$ উক্তিটি যথার্থ।

উদাহরণ-১৩: একটি কলেজের দ্বাদশ শ্রেণির 70 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ:

নম্বর শ্রেণি	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	5	20	10	20	15

ক. 40, 30, 24, 60, 55, 45, 66, 70 তথ্য সারি থেকে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের সাহায্যে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. দৈবভাবে পরপর তিনজন পরীক্ষার্থী বাছাই করলে তাদের একই নম্বরের শ্রেণিতে হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. তথ্য সারিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

24, 30, 40, 45, 55, 60, 66, 70

এখানে, N = 8 (জোড়), যা 4 দ্বারা বিভাজ্য

$$Q_1 = \frac{\frac{N\times1}{4} \text{ তম পদের মান} + \left(\frac{N\times1}{4}+1\right) \text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{\frac{8\times1}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{8\times1}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{2\text{ তম পদের মান} + 3\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{30+40}{2} = 35$$

$$Q_3 = \frac{\frac{N\times3}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{N\times3}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{\frac{8\times3}{4}\text{ তম পদের মান} + \left(\frac{8\times3}{4}+1\right)\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{6\text{ তম পদের মান} + 7\text{ তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{60+66}{2} = 63$$

চতুর্থ ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

$$= \frac{63-35}{63+35} \times 100 = \frac{28}{98} \times 100 = 28.57\%$$

খ.

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা f_i	শ্রেণি মধ্যমান x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
50-60	5	55	275	15125
60-70	20	65	1300	84500
70-80	10	75	750	56250
80-90	20	85	1700	144500
90-100	15	95	1425	135375
	N = 70		$\Sigma f_ix_i = 5450$	$\Sigma f_ix_i^2 = 435750$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_ix_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_ix_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{435750}{70} - \left(\frac{5450}{70}\right)^2}$

$$= \sqrt{6225 - 6061.75} = \sqrt{163.27} = 12.78$$

গ. দৈবভাবে 3 জন পরীক্ষার্থী বাছাই করলে একই শ্রেণিতে হবার সম্ভাবনা $= \frac{^5C_3}{^{70}C_3} + \frac{^{20}C_3}{^{70}C_3} + \frac{^{10}C_3}{^{70}C_3} + \frac{^{20}C_3}{^{70}C_3} + \frac{^{15}C_3}{^{70}C_3}$

$$= \frac{10 + 1140 + 120 + 1140 + 455}{54740}$$

$$= \frac{2865}{54740} = \frac{573}{10948}$$

পাঠ-১১ ও ১২

অনুশীলনী-10(B)

Type-I

1. উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও।
   (i) চেষ্টা; **(ii)** দৈব পরীক্ষা; **(iii)** বর্জনশীল ঘটনা; **(iv)** অবর্জনশীল ঘটনা;
   (v) স্বাধীন ঘটনা; **(vi)** অধীন ঘটনা; **(vii)** শর্তাধীন সম্ভাবনা

2. **(i)** যদি $P(A \cup B) = 0.6, P(A) = 0.3$ হয় তবে, $P(B)$ এর মান কত হলে A ও B অবিচ্ছিন্ন ও স্বাধীন হবে?
   (ii) $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cap B)$ এবং $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।
   [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(ক); বুয়েট ০৬-০৭; দি: বো: ১৬, ১৫, ১২, ০৯; চ: বো: ১২; ঢা: বো: ১৫, ১০; ব: বো: ০৭; সি: বো: ১৬, ১০, ০৮, ০৬; কু: বো: ১২; রা: বো: ০৫; মা: বো: ১৩]
   (iii) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ এবং $P(A) = \frac{1}{2}$ হলে $P(B)$ এর মান কত ?
   [কু: বো: ০৬; ঢা: বো: ০৬; চ: বো: ০৯; সি: বো: ১৪; ব: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১১]
   (iv) যদি $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A | B) = \frac{3}{8}$ হয়, তবে $P(B | A)$ এর মান নির্ণয় কর। **[সি: বো: ১৫; চ: বো: ১০]**
   (v) $P(A) = \frac{1}{3}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ হলে $P(B|A)$ কত?
   [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৮(ক)]
   (vi) যদি $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ হয় তবে, (a) $P(A|B)$; (b) $P(A|\bar{B})$; (c) $P(\bar{A}|\bar{B})$ নির্ণয় কর।
   (vii) যদি $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$ এবং A ও B স্বাধীন হলে, $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।
   [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৮(ক)]

Type-II

3. **(i)** তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।
   a. কোনো টেল নয় **b.** একটি টেল **c.** কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার, সম্ভাবনা কত?
   (ii) দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
   a. প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 4 বা তার বেশি। **b.** প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 7 অথবা 6।
   c. প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল বড়জোর 3।
   (iii) একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ঘটনাগুলির সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
   a. মুদ্রায় হেড ও ছক্কার জোড় সংখ্যা। **b.** মুদ্রায় টেল ও ছক্কার 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা।
   (iv) দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ। প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্র হতে সম্ভাবনা বের কর।
   a. দুইটি মাথা ও জোড় সংখ্যা। **[ঢা: বা: ১৬; চ: বো: ১৬]** **b.** মুদ্রায় একই পিঠ ও ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা।
   c. যে কোনো পিঠ ও জোড় সংখ্যা। **d.** মুদ্রায় বিপরীত পিঠ ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা।
   (v) দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর এবং দুইটি ছক্কায়ই ছয় উঠার সম্ভাব্যতা কত তা নির্ণয় কর। **[ঢা: বো: ১৫; সি: বো: ১৩, কু: বো: ১৩, ১০; রা: বো: ১৪, ০৭, ০৬; ব: বো: ১৬; য: বো: ১৪; চ: বো: ১৫, ১১, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪]**

(vi) একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর এবং ছক্কায় 4 উঠার সম্ভাব্যতা কত তা নির্ণয় কর। [দি: বো: ১৩; কু: বো: ০৫; ব: বো: ০৭]

(vii) একটি সুষম মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হলো। প্রতি টসেই প্রথমে হেড পাবার শর্তে 2 বা ততোধিক বার হেড পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। কোন শর্ত আরোপ না করা হলে 2 বা ততোধিকবার হেড পাবার সম্ভাবনা কত? [য: বো: ১৫]

(viii) একজন ছাত্রকে 20টি নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নের উত্তর দিতে বলা হল। প্রতিটি প্রশ্নে 4টি অপশন আছে। ঐ ছাত্রের 12টি সঠিক উত্তর দেওয়ার সম্ভাবনা কত?

Type-III

4. (i) একটি বাক্সে 5টি লাল, 7 টি নীল ও 3টি সবুজ বল আছে। উহা হতে পরপর 3 টি বল দৈবভাবে নেয়া হলো বল তিনটি উত্তোলনের ক্রমানুসারে লাল, নীল ও সবুজ হবার সম্ভাবনা কত হবে?

a. যদি বলগুলি পুন:স্থাপন করা হয়। **b.** যদি বলগুলি পুন:স্থাপন না করা হয়।

(ii) একটি বাক্সে 6 টি সাদা বল এবং 7 টি লাল বল আছে। দৈবভাবে একটি বল তুলে নেওয়া হল। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [মা: বো: ১২; য: বো: ১১; সি: বো: ০৭]

(iii) একটি বাক্সে 7টি লাল, 9টি কালো এবং 6টি সাদা বল আছে। এলোমেলোভাবে একটি বল তুলে নেয়া হলো। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১৩-১৪; চুয়েট ১০-১১; রা: বো: ১০; সি: বো: ০৭, ১২; ব: বো: ০৮]

(iv) একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা, 7টি লাল এবং 9টি কালো বল আছে। এলোমেলোভাবে 3টি বল তুলে নেয়া হলো। বলগুলি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [চ: বো: ১০; কু: বো: ১১]

(v) একটি বাক্সে 15 টি সাদা ও 10 টি কালো রঙের মার্বেল আছে। ঐ বাক্সটি থেকে দৈবভাবে দুইটি মার্বেল পরপর উঠিয়ে নিলে প্রতিবারে দুইটি ভিন্ন রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৮; চ: বো: ০৬]

(vi) একটি বাক্সে 5 টি লাল ও 10 টি সাদা রং এর বল আছে। একজন বালক সম্পূর্ণ নিরপেক্ষভাবে দুইটি বল তুলে নিলে প্রতিবারে দুইটি ভিন্ন রং এর বল পাবার সম্ভাব্যতা কত? [কু: বো: ১৩; য়: বো: ০৮]

(vii) একটি পাত্রে 5টি লাল এবং 4টি সাদা বল এবং অপর একটি পাত্রে 3টি লাল ও 6টি সাদা বল আছে। প্রত্যেক পাত্র হতে একটি করে বল তোলা হলে দুটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ২০১২; য: বো: ১৫; রা: বো: ১৩(অনু); কু: বো: ০৯(অনু)]

(viii) একটি থলিতে 4টি লাল ও 3টি সাদা বল এবং অপর একটি থলিতে 3টি লাল ও 6টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি থেকে একটি করে মোট দুইটি বল তোলা হলো। উত্তোলিত বল দুইটির মধ্যে অন্তঃত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৮(গ)]

(ix) একটি পাত্রে 2টি সাদা এবং 3টি কালো বল ও অপর পাত্রে 3টি সাদা এবং 4টি কালো বল আছে। পাত্র দুইটি হতে একটি করে বল উঠানো হলে (a) বলগুলি একই রঙের, (b) ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা কত?

(x) একটি ব্যাগে 3 টি কালো এবং 4 টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে 2টি বল তুলে নেয়া হলো। কিন্তু প্রথমটি উঠানোর পর তা ব্যাগের মধ্যে রাখা হলো না। দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ?

(xi) একটি ব্যাগে 5 টি সাদা, 7 টি লাল এবং 8 টি কালো বল আছে বিনিময় না করে একটি করে পর পর 4 টি বল তুলে নেওয়া হলে সবগুলি বলের সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর ? [চ: বো: ১০]

(xii) একটি ব্যাগে 4 টি সাদা ও 5 টি কালো বল আছে। একজন লোক নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল উত্তোলন করলেন। 3 টি বলই কালো হবার সম্ভাবনা কত? [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(ক); চুয়েট ০৩-০৪, ১১-১২; চ: বো: ১৫, ১৩; য: বো: ১২; ঢা: বো: ১১, ০৫; কু: বো: ০৮]

(xii) একটি ব্যাগে 7 টি লাল এবং 5টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 4টি বল তোলা হল। তাদের মধ্যে 2টি লাল এবং 2টি সাদা বল হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [ব: বো: ১৩, ১২; কু: বো: ১৬; সি: বো: ০৯]

(xiv) একটি বাক্সে 12 টি লাল ও 16টি কালো বল আছে। পরপর দুইটি বল তুলে নেয়া হলে উভয় বল একই রঙের হবার সম্ভাবনা কত?

(xv) একটি বাক্সে 5টি নীল ও 10টি কালো মার্বেল আছে। একজন বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে দুইটি একই রংয়ের মার্বেল পাবার সম্ভাব্যতা কত? [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৮(ক)]

Type-IV

5. (i) একটি কলেজের একাদশ শ্রেণীর 80 জন ছাত্রের মধ্যে 20 জন ফুটবল খেলে, 25 জন ক্রিকেট খেলে এবং 10 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবায়িত উপায়ে নির্বাচন করা হল। যদি ছেলেটি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ০৮-০৯, ০৩-০৪; য: বো: ০৬; দি: বো: ১১]

(ii) একটি কলেজের একাদশ শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 30 জন ফুটবল খেলে, 40 জন ক্রিকেট খেলে এবং 20 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হল। যদি ছেলেটি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত? [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(গ)]

(iii) গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 250 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন পরিসংখ্যানে এবং 45 জন গণিতে ফেল করে। উভয় বিষয়ে 15 জন ফেল করেছে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। পরীক্ষার্থীর পরিসংখ্যানে পাশ ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা কত?
[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৮(খ)]

(iv) একজন ছাত্রের বাংলায় পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{2}{3}$, বাংলা ও গণিত দুইটি বিষয়ে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{14}{45}$ এবং দুইটির যে কোন একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{4}{5}$ হলে, তার গণিত পাসের সম্ভাব্যতা কত? [ঢা: বো: ১৪; সি: বো: ১১; ব: বো: ০৫]

(v) আলমের বাংলা পরীক্ষায় ফেল করার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{5}$, বাংলা ও ইংরেজি দুইটিতেই পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{3}{4}$ এবং দুইটির যে কোনো একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{7}{8}$ হলে তার কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা কত ?
[ঢা: বো: ১৬; চ: বো: ১৪; দি: বো: ১৩; য: বো: ০৯; ব: বো: ১৪]

(vi) দোলন ও গন্ধা একটি অঙ্কের সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$ । তারা একত্রে অঙ্কটি সমাধান করার চেষ্টা করলে অঙ্কটির সমাধান করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৮(খ); ঢা: বো: ১৩, ০৭; রা: বো: ০৯; কু: বো: ০৭; য: বো: ১০, ০৭, ০৫; সি: বো: ১৩]

Type-V

6. (i) দুইটি থলির একটিতে 5 টি লাল এবং 3 টি কালো বল আছে। অপর থলিতে 4 টি লাল এবং 5 টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি থলি নির্বাচন করা হলো এবং তা থেকে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হবার সম্ভাব্যতা কত? [রা: বো: ১১]

(ii) দুইটি একই রকম বাক্সের প্রথমটিতে 4 টি সাদা ও 3 টি লাল এবং দ্বিতীয়টিতে 3 টি সাদা ও 7 টি লাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হলো। ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল টানা হলে, বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। যদি বলটি সাদা হয়, তাহলে প্রথম বাক্স থেকে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [বুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ০৯; চ: বো: ০৫; য: বো: ০৫]

(iii) একটি বাল্ব তৈরীর কোম্পানীতে বাল্ব তৈরীর তিনটি মেশিন আছে। এগুলো হলো A, B, C. A মেশিন হতে 35%, B মেশিন হতে 25% এবং C মেশিন হতে 40% বাল্ব উৎপাদন হয়। A মেশিনের 4%, B মেশিনের 5%, C মেশিনের 3% বাল্ব ত্রুটিপূর্ণ। একটি ত্রুটিপূর্ণ বাল্ব A মেশিন হতে উৎপাদিত হবার সম্ভাবনা কত?

Type-VI

7. (i) 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোনো একটিকে ইচ্ছামত নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত ? [কুয়েট ০৮-০৯; কু: বো: ১৪; ব: বো: ১৫, ১১; চ: বো: ০৭; রা: বো: ০৫]

(ii) দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করলে তা 3 এর গুণিতক এবং 5 এর গুণিতক না হবার সম্ভাবনা কত?

(iii) একজন প্রার্থী কোনো একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানে তিনটি পদে আবেদন করে। প্রথম পদে প্রার্থীর সংখ্যা 3, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদে প্রার্থীর সংখ্যা যথাক্রমে 4 এবং 2। ঐ প্রার্থীর কমপক্ষে একটি পদে চাকুরি পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

(iv) মিলন ও শোভন একত্রে একটি দ্রব্যের উৎপাদন করে। মিলন ও শোভনের অংশে ত্রুটির সম্ভাবনা যথাক্রমে 15% ও 30% উভয়ের সমন্বয়ে কোনো দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ না হবার সম্ভাবনা কত?

(v) এক প্যাকেট তাস হতে 3টি তাস দৈবভাবে নেয়া হলো। তাস 3টি,
a. টেক্কা হবার b. টেক্কা না হবার c. 2টি টেক্কা হবার d. 2টি ইস্কাবন হবার
e. কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(vi) 52 খানা তাসের মধ্য হতে 1 টি তাস দৈবভাবে উঠানো হলো। তাসটির লাল টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? [রা: বো: ০৮; য: বো: ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৫]

8. (i) একজন ছাত্র ভর্তি পরীক্ষায় চারটি বিষয় Math, Phy, Chem, Eng এ অংশগ্রহণ করে। তার পাশের সম্ভাবনা Math এ $\frac{4}{5}$, Phy এ $\frac{3}{4}$, Chem এ $\frac{5}{6}$ এবং Eng এ $\frac{2}{3}$. যোগ্যতা অর্জনের জন্য তাকে অবশ্যই Math এ এবং ন্যূনতম আরও যে কোন দুইটি বিষয়ে পাশ করতে হবে। ভর্তি পরীক্ষায় তার যোগ্যতা অর্জনের সম্ভাবনা কত? **[BUET.14-15]**

(ii) কোন নির্বাচনে চারজন প্রার্থী A, B, C, D এর জয়ের সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ এবং $\frac{1}{10}$. নির্বাচনের পূর্বমুহূর্তে C তার প্রার্থিতা প্রত্যাহার করল। এখন অবশিষ্ট তিনজন প্রার্থীর জয়ের সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(iii) (a) 30 দিনের একটি মাসে 5টি রবিবার থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(b) একটি অধিবর্ষে 53টি শুক্রবার থাকার সম্ভাবনা কত?

Type-VII

9. (i) একটি 5 একক ব্যাসার্ধের বৃত্তের অন্তর্লিখিত সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গ আছে। বৃত্তের অভ্যন্তরে একটি বিন্দু চিহ্নিত করা হল। বিন্দুটি বর্গের অভ্যন্তরে থাকার সম্ভাবনা কত?

(ii) a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অংকন করা হল। এবং বৃত্তের অভ্যন্তরে একটি বিন্দু নির্ধারণ করা হল। বিন্দুটি ত্রিভুজের অভ্যন্তরে হবার সম্ভাবনা কত? বিন্দুটি ত্রিভুজের বাইরে হবার সম্ভাবনা কত?

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. কোনটি অপেক্ষাকৃত ভাল উপাত্ত?
ক. 55, 58, 61 খ. 71, 75, 79 গ. 99, 100, 101 ঘ. 10, 20, 30

2. $x^2 \le 36$ অসমতায় x এর মানগুলোর পরিসর কত?
ক. 6 খ. 12 গ. 10 ঘ. – 12

3. – 5, –6, –2, –3, 0, 3, 2 উপাত্তটির পরিসর কত?
ক. 8 খ. 9 গ. 0 ঘ. 6

4. – 6, – 5, 6, 4, 3, 2 তথ্যসারির গড় ব্যবধান কত?
ক. 0.67 খ. 4.11 গ. -3.33×10^{-3} ঘ. – 0.02

5. ভেদাঙ্ককে বর্গমূল করলে কী পাওয়া যায়?
ক. গড় খ. পরিমিত ব্যবধান গ. চতুর্থক ব্যবধান ঘ. ব্যবধানাঙ্ক

6. প্রথম 10টি ক্রমিক সংখ্যার ভেদাঙ্ক কত?
ক. 8.25 খ. 2.87 গ. 1.69 ঘ. 4.25

7. 7, 9, 11 উপাত্তগুলোর গড় ব্যবধানাঙ্ক কত?
ক. 16% খ. 20% গ. 11% ঘ. 14.78%

8. আসাদের 15 জন বন্ধুর বয়সের গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 10 ও 2 হলে, বয়সের বিভেদাঙ্ক কত?
ক. 5% খ. 10% গ. 15% ঘ. 20%

9. n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান কত?

ক. $\frac{n^2-1}{12}$ খ. $\frac{n^2+1}{12}$ গ. $\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ঘ. $\frac{n-1}{12}$

10. আজ বৃষ্টি হবার নিশ্চয়তা 60%, এখানে 60% কী?

ক. বিচ্যুতি খ. বিভেদাঙ্ক গ. সম্ভাবনা ঘ. ব্যবধানাঙ্ক

11. নিচের কোনটি দৈব পরীক্ষা?

ক. ঘুরতে যাওয়া খ. বই পড়া গ. কয়েন টস ঘ. ড্রাইভিং

12. দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র কোনটি?

ক. {H,T} খ. {HHH,TTT} গ. {HH, TH, HT, TT} ঘ. {HH,TT}

13. A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে কোনটি সঠিক?

ক. $A \cap B = \emptyset$ খ. $A \cap B \neq \emptyset$ গ. $A \cup B = \emptyset$ ঘ. $A \cup B \neq \emptyset$

14. একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাব্যতা কত?

ক. $\frac{1}{6}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. $\frac{2}{3}$

15. $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$ হলে A ও B ঘটনাদ্বয় কীরূপ?

ক. স্বাধীন খ. বর্জনশীল গ. অবর্জনশীল ঘ. নিরপেক্ষ

16. A ও B সম্পূর্ণ ঘটনার ক্ষেত্রে A ও B অবর্জনশীল হবে যদি-

ক. $P(A) + P(B) < 1$ খ. $P(A) + P(B) = 1$ গ. $P(A) + P(B) > 1$ ঘ. $P(A) + P(B) = 0$

17. A ও B সম্পূর্ণ ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A) = 0.45$ এবং $P(B) = 0.40$ হলে A ও B ঘটনাদ্বয় কীরূপ?

ক. বর্জনশীল খ. অবর্জনশীল গ. নির্ভরশীল ঘ. অধীন

18. A ঘটনার সম্ভাবনার ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

ক. $-\infty \le P(A) \le 0$ খ. $0 < P(A) < 1$ গ. $0 \le P(A) \le 1$ ঘ. $1 \le P(A) \le \infty$

19. নিবেশনের কেন্দ্রিয় মান হতে মানগুলির পারস্পরিক ব্যবধান নিচের কোনটি?

ক. কেন্দ্রীকতা খ. বিস্তার গ. পরিঘাত ঘ. সংশ্লেষ

20. কোন নিবেশনের পরিসর 45 এবং সর্বোচ্চ মান 180 হলে সর্বনিম্ন মান কত?

ক. 160 খ. 150 গ. 145 ঘ. 135

21. 5 জন ব্যক্তির ভর (কেজি) যথাক্রমে 55, 60, 67, 73, 85. যদি সর্বাপেক্ষা হালকা ব্যক্তিকে বাদ দেওয়া হয় তাহলে পরিসর কত হবে?

ক. 25 খ. 30 গ. 35 ঘ. 20

22. 7, 7, 7, 7 এই তথ্য সারির গড় ব্যবধান কত?

ক. 7 খ. 3 গ. 2 ঘ. 0

23. কোন নিবেশনের $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 40$ এবং পরিমিত ব্যবধান 2 হলে ঐ নিবেশনে কতটি মান আছে?

ক. 10 খ. 5 গ. 15 ঘ. 20

24. তৃতীয় ও প্রথম চতুর্থকের ব্যবধানকে কী বলে?

ক. চতুর্থক ব্যবধান খ. পরিসর গ. আন্তঃচতুর্থক পরিসর ঘ. চতুর্থক পরিসর

25. 5 জনের পরীক্ষার নম্বরের ভেদাঙ্ক 1600 হলে পরিমিত ব্যবধান কত?

ক. 50 খ. 60 গ. 40 ঘ. 30

26. n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গড় কোনটি?

ক. $\frac{n+1}{2}$ খ. $\frac{2(n+1)}{3}$ গ. $\frac{2n+1}{2}$ ঘ. $\frac{n+2}{2}$

27. নমুনা ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি উপাদানকে কী বলা হয়?

ক. ট্রায়াল খ. ঘটনা গ. নমুনা বিন্দু ঘ. সার্বিক ক্ষেত্র

28. কোন কয়েন টসে হেড আসার ঘটনা, $A = \{H\}$ হলে A^c কী হবে?

ক. $\{H\}$ খ. $\{T\}$ গ. $\{HT\}$ ঘ. $\{TH\}$

29. কোন নিশ্চিত ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা কত?

ক. 0 খ. 0.5 গ. 1 ঘ. ∞

30. কোন মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলে তিনবারই হেড আসার সম্ভাবনা নিচের কোনটি?

ক. 0.25 খ. 0.5 গ. 0.125 ঘ. 1

31. $P(A) = \frac{3}{4}, P(B)\frac{1}{2}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ হলে A ও B ঘটনাদ্বয় কেমন?

ক. স্বাধীন খ. শর্তাধীন গ. অবর্জনশীল ঘ. বর্জনশীল

32. একটি তাসের প্যাকেটে 52 খানা তাস আছে। তা হতে নির্বিচারে 2 খানা তাস টানা হলে তাস দুটি ভিন্ন রঙের রাজা হবার সম্ভাবনা কত?

ক. $\frac{3}{663}$ খ. $\frac{1}{663}$ গ. $\frac{2}{663}$ ঘ. $\frac{4}{663}$

33. বিস্তার পরিমাপ হলো—

i. তথ্যসারির মানগুলো গড়ের চতুর্দিকে কীভাবে বিস্তৃত তার পরিমাপ।

ii. তথ্যসারির মানগুলো হতে গড়ের পার্থক্য।

iii. মধ্যক মানের প্রতিনিধিত্ব নিরূপক।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

34. 2, 3, 7, 8, 12, 15, 17 তথ্যসারির ক্ষেত্রে—

i. চতুর্থক ব্যবধান 6

ii. আন্তঃচতুর্থক পরিসর 12

iii. পরিসর 15

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

35. ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায়, A = জোড় সংখ্যা পড়ার ঘটনা এবং B = বিজোড় সংখ্যা পড়ার ঘটনা হলে—

i. $P(A \cap B) \neq \varnothing$

ii. $P(A) = P(B)$

iii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

36. $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 4, 5\}$ হলে,

i. A ও B অবর্জনশীল

ii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

iii. $P(A \cap B) \neq \varnothing$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

37. বিচ্যুতি নির্ণয় করা যায়—

i. মধ্যমা থেকে ii. প্রচুরক থেকে iii. পরিসর থেকে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

38. ভেদাঙ্ক—

i. সর্বদা পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা বড়

ii. এর বর্গমূল হলো পরিমিত ব্যবধান

iii. নমুনায়নে সমসত্ত্বতা বিচারে অনেক প্রয়োজনীয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

39. A ও B দুইটি সম্পূর্ণ ও বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে—

i. $P(A \cup B) = 1$ ii. $P(A) + P(B) = 1$ iii. $P(A \cap B) = \varnothing$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (40 ও 41) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

ঢাকার 4টি গার্মেন্টস কারখানার শ্রমিকরা দাবি করলো তাদের প্রতিদিন 250 টাকা মজুরি দেওয়ার কথা কিন্তু মজুরি বৈষম্যের কারণে সবাই সমান মজুরি পায় না। শ্রম মন্ত্রণালয় নিয়ম বেধে দেয় যে মজুরি বৈষম্য 10% এর বেশি হতে পারে না। উক্ত কারখানাগুলোর মজুরির বিস্তার নিম্নে দেওয়া হলো:

কারখানা	মজুরির পরিমিত ব্যবধান	মজুরির গড়
A	40	250
B	30	250
C	22	250
D	35	250

40. কোন কারখানার মজুরী বৈষম্য সবচেয়ে কম?

ক. A খ. B গ. C ঘ. D

41. কোন কারখানা মন্ত্রণালয়ের নিয়ম মেনে চলছে?

ক. A খ. B গ. C ঘ. D

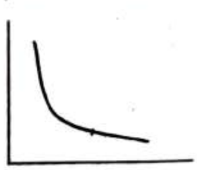
নিচের সারণির আলোকে (42 ও 43) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

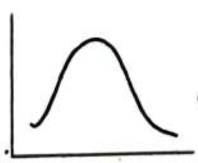
শ্রেণিব্যাপ্তি	10-20	20-30	30-40
গণসংখ্যা	15	10	25

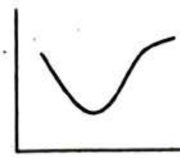
42. উপাত্তের ভেদাঙ্ক কত?

ক. 140 খ. 76 গ. 3800 ঘ. 7000

43. নিবেশনটির লেখচিত্র কোনটি?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (44 ও 45) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি পাত্রে 6 টি লাল, 5টি, নীল এবং 3টি কালো বল আছে।

44. দৈবভাবে 2টি বল নেওয়া হলে বলগুলো একই রঙের হবার সম্ভাবনা কত?

ক. $\frac{15}{91}$ খ. $\frac{25}{91}$ গ. $\frac{5}{13}$ ঘ. $\frac{4}{13}$

45. দৈবভাবে 3টি বল নেওয়া হলে কমপক্ষে 1টি বল লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

ক. $\frac{5}{91}$ খ. $\frac{11}{13}$ গ. $\frac{47}{91}$ ঘ. $\frac{72}{91}$

নিচের তথ্যের আলোকে (46 ও 47) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

10 জন ব্যক্তির বয়স বছরে দেওয়া হলো: 10, 12, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 40, 48

46. 10 জন ব্যক্তির বয়সের পরিসর কত?

ক. 38 খ. 40 গ. 42 ঘ. 48

47. নিবেশনের মানগুলোর উর্ধ্বক্রমানুসারে কত জন ব্যক্তির বয়সের পরিসর 15 হবে?

ক. 8 খ. 6 গ. 5 ঘ. 3

নিচের তথ্যের আলোকে (48 ও 49) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

গাজীপুরে একই দ্রব্য উৎপাদনের সাথে সংশ্লিষ্ট দুটি কারখানা A ও B তে গড় বেতন ও বেতনের পরিমিত ব্যবধান দেওয়া হলো:

কারখানা	গড় বেতন	পরিমিত ব্যবধান
A	70	10
B	60	5

48. A কারখানার বেতনের বিভেদাঙ্ক কত ?

ক. 14.00% খ. 14.29% গ. 14.50% ঘ. 14.79%

49. কোন কারখানার শ্রমিকেরা অধিকতর সামঞ্জস্যপূর্ণ বেতন পায়?

ক. A খ. B গ. সমান বেতন পায় ঘ. তুলনা করা কঠিন

নিচের তথ্যের আলোকে (50 ও 51) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

দুইটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো।

50. দুটি ছক্কায় জোড় সংখ্যা ও হেড আসার সম্ভাবনা কত?

ক. $\frac{1}{4}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{8}$ ঘ. $\frac{1}{16}$

51. প্রথম ছক্কায় বিজোড়, দ্বিতীয় ছক্কায় 6 এবং টেল আসার সম্ভাব্যতা কত?

ক. $\frac{1}{24}$ খ. $\frac{1}{16}$ গ. $\frac{1}{8}$ ঘ. $\frac{1}{4}$

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

52. একটি মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হলে পর্যায়ক্রমে হেড এবং টেল পাবার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১১-১২]

ক. $\frac{1}{4}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{8}$ ঘ. $\frac{1}{6}$

53. দুটি অসম রাশির গাণিতিক গড় এবং ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 12 এবং 36 হলে রাশি দুটির মান কত? [কু.বি. ১৯-২০]

ক. 14, 20 খ. 15, 9 গ. 16, 8 ঘ. 18, 6

54. 1 হতে 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়ন পদ্ধতিতে একটি সংখ্যা নেয়া হলে, সেটি বর্গ হওয়ার সম্ভাবনা হবে— [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{1}{9}$ খ. $\frac{2}{9}$ গ. $\frac{1}{11}$ ঘ. $\frac{2}{11}$

55. দুটি ছক্কা পাশাপাশি নিক্ষেপ করলে যদি 2টা সংখ্যার যোগফল 6 পাওয়ার সম্ভাবনা P_1 এবং 2 টা সংখ্যার যোগফল 7 পাওয়ার সম্ভাবনা P_2 হয়, তাহলে $P_1 + P_2$ এর মান কত? [কুয়েট ১৭-১৮]

ক. $\frac{11}{36}$ খ. $\frac{13}{36}$ গ. $\frac{17}{36}$ ঘ. $\frac{19}{36}$

56. প্রথম 7টি স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. 2 খ. 4 গ. 7 ঘ. 5

57. 1টি বাক্সে 5টি লাল, 10টি কালো এবং 6টি সাদা বল আছে। বাক্স থেকে দৈবভাবে 1টি বল নেয়া হলো। বলটি কালো বা লাল হবার সম্ভাবনা কত? [জ. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{11}{21}$ খ. $\frac{5}{21}$ গ. $\frac{10}{21}$ ঘ. $\frac{15}{21}$

58. একটি দলে 2 জন প্রথম বর্ষের ছাত্র, 3 জন দ্বিতীয় বর্ষের ছাত্রী এবং 5 জন তৃতীয় বর্ষের ছাত্র আছে। একজনকে দৈবভাবে বছাই করা হলো। সে প্রথম বর্ষের বা তৃতীয় বর্ষের হবে তার সম্ভাবনা কত? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{11}{10}$ খ. $\frac{9}{10}$ গ. $\frac{7}{10}$ ঘ. $\frac{1}{10}$

59. $X = \{2, 5, 6, 3, 9\}$, $Y = \{3, 5, 9, 12, 2, 1\}$ Y সেট থেকে একটি সংখ্যা দৈবভাবে নেওয়া হলে, সংখ্যাটি $X \cap Y$ তে থাকার সম্ভাবনা কত? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{2}{5}$ খ. $\frac{3}{5}$ গ. $\frac{2}{3}$ ঘ. $\frac{4}{5}$

60. 32টি সংখ্যার পরিমিত বিচ্যুতি 5। যদি সংখ্যাগুলোর সমষ্টি 80 হয়, তবে তাদের বর্গের সমষ্টি কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. 1000 খ. 500 গ. 100 ঘ. 10,000

61. কোন কারখানার 32 জন শ্রমিকের বাৎসরিক অনুপস্থিতির আদর্শ বিচ্যুতির মান 5 দিন। শ্রমিকদের অনুপস্থিতির বর্গের সমষ্টি 1000 হলে বিভেদাঙ্কের মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. 100% খ. 50% গ. 200% ঘ. 25%

62. একটি পাত্রে 8টি লাল, 4টি কালো এবং 3টি সাদা বল আছে। 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হলে এর মধ্যে কমপক্ষে 2টি লাল বল হবার সম্ভাব্যতা কত? [চ. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{1}{15}$ খ. $\frac{36}{65}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. $\frac{8}{15}$

63. একটি তথ্যসারির ব্যবধানাঙ্ক 80% এবং পরিমিত ব্যবধান 8 হলে, তাদের গাণিতিক গড় কত হবে? [খু. বি. ১৭-১৮]

ক. 1 খ. 10 গ. 64 ঘ. 640

64. একটি বাক্সে 3টি লাল, 3টি সবুজ ও 2টি নীল বল আছে। দৈবভাবে 3 টি বল তোলা হলে 2টি বল সবুজ হবার সম্ভাবনা কত? [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $\frac{15}{56}$ খ. $\frac{3}{7}$ গ. $\frac{28}{65}$ ঘ. $\frac{13}{22}$

65. 40 থেকে 50 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্য থেকে দৈবচয়ন করে (randomly) একটি সংখ্যা নিলে সংখ্যাটি মৌলিক (Prime number) অথবা 7 এর গুণিতক (multiple) হওয়ার সম্ভাবনা (probability) কত? [জা. বি. ১৬-১৭]

ক. $\frac{5}{11}$ খ. $\frac{7}{11}$ গ. $\frac{6}{11}$ ঘ. $\frac{6}{121}$

66. একটি শ্রেণিতে 30 জন ছাত্র ও 20 জন ছাত্রী আছে। বার্ষিক পরীক্ষায় একজন ছাত্রের প্রথম ও একজন ছাত্রীর দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাবনা কত? [রা. বি. ১৬-১৭]

ক. $\frac{12}{49}$ খ. $\frac{1}{25}$ গ. $\frac{6}{25}$ ঘ. $\frac{24}{49}$

67. দুইটি ছক্কা একই সঙ্গে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত বিন্দুর সমষ্টি 7 হওয়ার সম্ভাবনা কত? [জ. বি. ১৭-১৮; কুয়েট ১৪-১৫]

ক. $\frac{1}{6}$ খ. $\frac{1}{36}$ গ. $\frac{5}{36}$ ঘ. $\frac{7}{36}$

68. একজন বন্দুক চালনাকারীর গুলি লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করার সম্ভাবনা 0.8। যদি সে পরপর তিনবার গুলি চালায় তবে পর্যায়ক্রমে সফলতা ও ব্যর্থতার অথবা ব্যর্থতা ও সফলতার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১৩-১৪]

ক. 0.65 খ. 0.56 গ. 0.20 ঘ. 0.16

69. 30 থেকে 40 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যেকোনো একটিকে ইচ্ছামতো নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা কত? [ঢা. বি. ০৭-০৮, ০৫-০৬, জা. বি. ০৭-০৮]

ক. $\frac{5}{11}$ খ. $\frac{6}{11}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. $\frac{3}{5}$

70. 2 থেকে 40 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যেকোনো একটি পূর্ণসংখ্যা দৈবচয়নে নির্বাচন করলে সংখ্যাটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা কত? [ঢা. বি. ০৮-০৯]

ক. $\frac{1}{3}$ খ. $\frac{11}{38}$ গ. $\frac{11}{39}$ ঘ. $\frac{4}{13}$

71. একটি বাক্সে 10টি নীল ও 15টি লাল মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টেনে প্রতিবারে একটি করে পরপর দুইটি মার্বেল উঠালে দুইটি একই রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাবনা কত? [ঢা. বি. ০৫-০৬, জা. বি. ০৬-০৭]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{1}{11}$ গ. $\frac{10}{99}$ ঘ. $\frac{4}{33}$

72. একজন লোকের 3 জোড়া কালো মোজা এবং 2 জোড়া বাদামী মোজা আছে। একদিন অন্ধকারে তাড়াহুড়া করে লোকটি কাপড় পরল। সে প্রথমে একটি বাদামী মোজা পরার পর পরবর্তী মোজাও বাদামী হওয়ার সম্ভাবনা— [ঢা. বি. ১২-১৩]

ক. $\frac{1}{3}$ খ. $\frac{2}{15}$ গ. $\frac{1}{10}$ ঘ. $\frac{3}{10}$

73. একটি সুষম মুদ্রা এবং একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। একই সাথে মুদ্রাটির মাথা ও ছক্কাটির জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা— [ঢা. বি. ১১-১২]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{1}{3}$ গ. $\frac{1}{4}$ ঘ. $\frac{1}{5}$

74. 1 থেকে 520 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা চয়ন করা হলে সংখ্যাটি অযুগ্ম ঘনসংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা- [ঢা. বি. ১০-১১]

ক. $\frac{1}{65}$ খ. $\frac{2}{65}$ গ. $\frac{1}{64}$ ঘ. $\frac{1}{130}$

75. একজন বিক্রেতা প্রত্যেক খরিদ্দারের নিকট শতকরা 70 ভাগ সুযোগে দ্রব্য বিক্রি করে। পর্যায়ক্রমে খরিদ্দারের আচরণ পারস্পরিক প্রভাবমুক্ত। যদি A এবং B দুইজন খরিদ্দার দোকানে প্রবেশ করে, তাহলে A অথবা B এর নিকট বিক্রেতার দ্রব্য বিক্রয়ের সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১২-১৩]

ক. 0.50 খ. 0.72 গ. 0.91 ঘ. 0.93

76. পুনরাবৃত্তি না করে 2, 4, 7, 9, 3, 8 অঙ্কগুলি ব্যবহার করে দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা বানানো হলে সংখ্যাটির জোড় হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১০-১১]

ক. 0.25 খ. 0.50 গ. 0.75 ঘ. 1

77. একজন চাকুরী প্রার্থী তিনটি ভিন্ন ভিন্ন প্রতিষ্ঠানে চাকুরীর জন্য আবেদন করেন। জানুয়ারি মাসের তিনটি ভিন্ন ভিন্ন দিনে তার নির্বাচনি পরীক্ষা হবে এমন সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ০৯-১০]

ক. 1.0 খ. 0.992 গ. 0.905 ঘ. কোনটিই নয়

78. 100 থেকে শুরু করে 999 পর্যন্ত সংখ্যাগুলির মধ্য থেকে একটি পূর্ণসংখ্যা নেওয়া হলো। সংখ্যাটির সবগুলি অঙ্ক বিজোড় হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ০৭-০৮]

ক. $\frac{25}{102}$ খ. $\frac{5}{36}$ গ. $\frac{5}{102}$ ঘ. $\frac{25}{36}$

79. ইমন ও শারমিন দ্বাদশ শ্রেণিতে পড়ে। তারা তাদের গণিত বইয়ের যথাক্রমে 75% ও 80% প্রশ্ন সমাধান করতে পারে। দৈবভাবে নেয়া একটি গণিতের প্রশ্ন ইমন অথবা শারমিনের পক্ষে সমাধান করার সম্ভাবনা কত? [কুয়েট ১৩-১৪]

ক. $\frac{1}{20}$ খ. $\frac{9}{20}$ গ. $\frac{11}{20}$ ঘ. $\frac{19}{20}$

80. একই রকম 3টি বক্সে যথাক্রমে 2টি লাল ও 5টি কালো, 3টি লাল ও 5টি সাদা এবং 5টি লাল ও 7টি কালো বল আছে। দৈবচয়নের মাধ্যমে একটি বক্স হতে একটি বল নেওয়া হলে সেটি কালো হবার সম্ভাবনা কত? [কুয়েট ১০-১১]

ক. $\frac{31}{252}$ খ. $\frac{71}{252}$ গ. $\frac{97}{252}$ ঘ. $\frac{109}{252}$

81. প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়কে অন্তর্ভুক্ত না করে 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যাসেটের যে কোন একটিকে নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত? [কুয়েট ০৮-০৯]

ক. $\frac{6}{21}$ খ. $\frac{9}{19}$ গ. $\frac{11}{21}$ ঘ. $\frac{3}{7}$

82. 52টি তাসের প্যাকেট থেকে 1টি তাস দৈবচয়িকভাবে উঠানো হয়। তাসটি লাল অথবা টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা কোনটি? [বুটেক্স ০৭-০৮]

ক. $\frac{7}{52}$ খ. $\frac{15}{26}$ গ. $\frac{11}{13}$ ঘ. $\frac{7}{13}$

83. কোনো একটি অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা কত? [বুটেক্স ০৯-১০]

ক. 0 খ. 1 গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. $\frac{1}{3}$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. মাদারীপুর জেলার একটি গ্রামের কৃষকদের ধান উৎপাদনের পরিমাণ (মণে) দেওয়া হলো:

ধানের পরিমাণ (মণ)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
কৃষকসংখ্যা	12	17	22	13	8	5

ক. আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ ব্যাখ্যা কর।

খ. দৈবচয়নে 5 জন কৃষক নির্বাচন করা হলে তা ২য় শ্রেণি ব্যবধান অথবা চতুর্থ শ্রেণি ব্যবধান অথবা ষষ্ঠ শ্রেণি ব্যবধানে হওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

গ. ধানের পরিমাণের বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. একটি অনুষ্ঠানে বয়স অনুযায়ী লোকসংখ্যার তথ্য নিচে সন্নিবেশ করা হলো:

বয়স	16-25	26-35	36-45	46-55	56-65	66-75
লোকসংখ্যা	25	30	40	20	15	10

ক. $P(A) = \frac{2}{7}$ হলে $P(A^c)$ এর মান বের কর?

খ. উদ্দীপকের তালিকা হতে দৈবভাবে 4 জন লোক নির্বাচন করা হলে তারা একই শ্রেণিতে হওয়ার সম্ভাবনা কত?

গ. তথ্যসারির চতুর্থক ব্যবধনাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. 15 জন শ্রমিকের দৈনিক খরচের উপাত্ত টাকায় দেওয়া হলো—

20, 30, 15, 25, 22, 27, 15, 20, 35, 22, 32, 12, 30, 25, 17

ক. উপাত্তটির পরিসর কত?

খ. শ্রমিকদের খরচের চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. শ্রমিকদের খরচের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

4.

শ্রেণি ব্যপ্তি	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900
গণসংখ্যা	12	18	36	24	10	8	7

ক. প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার গড় কত?

খ. উপরের প্রথম 6টি শ্রেণিব্যপ্তি ও গণসংখ্যা দ্বারা ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. উপরের উপাত্তটি দ্বারা গড় ব্যবধান নির্ণয় কর?

5. একটি বাক্সে 5টি সবুজ, 6টি লাল ও 4টি কালো বল আছে। বাক্সটি হতে 3টি বল দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. 2টি লাল বল হবার সম্ভাবনা কত?

খ. সবগুলো বল ভিন্ন রংঙের হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

গ. কমপক্ষে 2টি বল সবুজ হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

6. একটি পাত্রে 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। অন্য একটি পাত্রে 3টি লাল ও 4টি কালো বল রয়েছে। প্রতিটি পাত্র থেকে 1টি বল দৈবভাবে তোলা হলো। বল দুইটি—
   ক. সাদা হবার সম্ভাবনা কত?
   খ. ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
   গ. একই রঙের হবার সম্ভাব্যতা কত?

7. A = {7, 8, 9, 11, 12, 14}
   ক. A সেটের একটি সংখ্যা দৈবভাবে নিলে তা 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত?
   খ. A সেটের সংখ্যাগুলির ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।
   গ. A এর সাথে একটি ছক্কার সংখ্যাগুলি দ্বারা সৃষ্ট নমুনা ক্ষেত্র হতে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফলের পরমমান 5 হওয়ার সম্ভাবনা কত?

8. দশজন ছাত্রের রোল নং এবং পদার্থবিজ্ঞান ও রসায়নে প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ (শিক্ষার্থীদের যে কোনো বিষয়ে পাশ নম্বর 40):

রোল নং	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
পদার্থ বিজ্ঞান	52	35	47	65	70	32	40	55	60	54
রসায়ন	67	40	20	25	32	54	34	44	51	43

   ক. একটি লটারি প্রতিযোগিতায় একটি পুরস্কারের জন্য 100টি টিকেট বিক্রি হয়। এদের মধ্যে তাকী ও তাসিন যথাক্রমে 5টি ও 2টি টিকেট কিনে। তাসিন অপেক্ষা তাকীর পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা কতটা বেশি তা নির্ণয় কর।
   খ. নিরপেক্ষভাবে একজন ছাত্র নির্বাচন করা হলে তার যেকোন একটি বিষয়ে পাসের সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
   গ. কোন বিষয়ে ছাত্ররা বেশি দক্ষতা অর্জন করছে তা নির্ণয় কর।

9. সরকারি রাজেন্দ্র কলেজের দ্বাদশ নির্বাচনী পরীক্ষায় উচ্চতর গণিত বিষয়ে 100 জন শিক্ষার্থীর নম্বর নিম্নরূপ:

নম্বর	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	8	15	30	25	15	7

   ক. নম্বর বিস্তারের পরিসরাঙ্ক নির্ণয় কর।
   খ. উপাত্তের সবচেয়ে কম গণসংখ্যা হতে সবচেয়ে বেশি গণসংখ্যা পর্যন্ত সংখ্যাগুলি হতে যেকোন একটি সংখ্যা দৈবভাবে বাছাই করলে সংখ্যাটি মৌলিক বা 7-এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
   গ. উপাত্ত হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

10. একটি তাসের প্যাকেট হতে 3টি তাস নির্বিচারে নেওয়া হলো।
   ক. তাসটি হরতন হবার সম্ভাব্যতা কত?
   খ. তাসটি কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা কত?
   গ. তাসগুলো একই স্যুটের হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

11. দৃশ্যকল্প-১: একটি সুষম মুদ্রা পর পর তিনবার টস করা হলো।
দৃশ্যকল্প-২: নিচে 50 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো :

নম্বর	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ছাত্র সংখ্যা	5	7	11	14	6	4	3

[ঢাকা বোর্ড-২০১৯]

   ক. যদি $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ এবং A ও B স্বাধীন হলে, $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. দৃশ্যকল্প-১ এর নমুনাক্ষেত্র তৈরি করে দুই বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
   গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]

12. দৃশ্যকল্প-১:

শ্রেণিব্যাপ্তি	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
গণসংখ্যা	9	21	15	10	5

দৃশ্যকল্প-২: একটি থলিতে 4টি লাল ও 3টি সাদা বল এবং অপর একটি থলিতে 3টি লাল ও 6টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি থেকে একটি করে মোট দুইটি বল তোলা হলো।

ক. একটি মুদ্রা এবং একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে, মুদ্রায় টেল ও ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর গণসংখ্যা সারণি থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে উত্তোলিত বল দুইটির মধ্যে অন্তঃত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

13. দুইজন ক্রিকেট খেলোয়াড় X ও Y এর 5টি খেলার স্কোর নিম্নরূপ: [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]

X এর স্কোর	53	48	16	37	75
Y এর স্কোর	42	50	23	67	38

ক. Y এর স্কোর থেকে একটি সংখ্যা দৈবভাবে নিলে সংখ্যাটি মৌলিক বা 2 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

খ. X এর স্কোরের সাথে একটি ছক্কার গুটি নিক্ষেপ করা হলে যে নমুনাক্ষেত্র পাওয়া যাবে তা হতে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল বড়জোর 50 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ. X ও Y এর মধ্যেকার রানের স্কোর কার বেশি সজাতিপূর্ণ তা পরিমিত ব্যবধান করে নির্ণয় কর।

14. উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষায় অংশগ্রহণমূলক দুজন শিক্ষার্থীর বিভিন্ন বিষয়ের হাজিরা তথ্য (%) নিম্নরূপ:

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

নাম / বিষয়	বাংলা	ইংরেজি	আইসিটি	পদার্থ	রসায়ন	গণিত	জীববিদ্যা	গড়
মিলন (x_i)	48	64	50	67	70	x_6	55	57
রতন (y_i)	44	76	58	64	48	59	50	$\overline{y}$

ক. রতনের হাজিরা তথ্যের পরিসরাংক বের কর।

খ. দেখাও যে, মিলনের হাজিরা তথ্যের গড় ব্যবধানাংক 15.04%।

গ. হাজিরা তথ্যে গড় হাজিরা 55% এর কম ও বিভেদাঙ্ক 17% এর বেশি হলে যদি কোনো শিক্ষার্থী ফরম পূরণ করতে না পারে তাহলে রতন পরীক্ষার ফরম পূরণ করতে পারবে কিনা তা তথ্যের গড় ও বিভেদাঙ্ক বিশ্লেষণপূর্বক নির্ণয় কর।

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

15. দৃশ্যকল্প-১:

শ্রেণিব্যাপ্তি	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
গণসংখ্যা	10	15	20	17	8

দৃশ্যকল্প-২: একটি ব্যাগে 7টি লাল, 5টি কালো এবং 4টি সাদা বল আছে। 3টি বল দৈবভাবে নেওয়া হলো।

ক. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{6}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A / B)$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর তথ্যাদির গণসংখ্যা নিবেশন সারণি থেকে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে কমপক্ষে 2টি লাল বল হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

16. 20 ওভারের একটি ইনিংসে একটি দলের ওভারপ্রতি অর্জিত রান সংখ্যা নিম্নরূপ: [সিলেট বোর্ড-২০১৯]

5, 3, 9, 2, 1, 7, 8, 5, 11, 13, 4, 7, 8, 6, 13, 11, 1, 7, 9, 10.

ক. একটি বাক্সে 5টি নীল ও 10টি কালো মার্বেল আছে। একজন বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে দুইটি একই রংয়ের মার্বেল পাবার সম্ভাব্যতা কত?

খ. উদ্দীপকের সংখ্যাগুলির গাণিতিক গড় হতে প্রাপ্ত গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের সংখ্যাগুলি হতে দৈবভাবে একটি সংখ্যা বাছাই করলে সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 3 এর গুণিতক হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

17. একটি কলেজের দ্বাদশ শ্রেণির 55 জন ছাত্রের উচ্চতর গণিতের ফলাফল নিম্নরূপ: [যশোর বোর্ড-২০১৯]

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রসংখ্যা	গ্রেড
50-59	5	B
60-69	10	A^-
70-79	15	A
80-89	20	A^+
90-99	5	A^+

ক. একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর।

খ. উদ্দীপকের নিবেশনটির ভেদাংক নির্ণয় কর।

গ. দৈবচয়নে একজন ছাত্রকে বেছে নেওয়া হলে ছাত্রটির A এবং A^+ না পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

18. দৃশ্যকল্প-১: একটি ঝুড়িতে 4টি সাদা বল এবং 5টি কালো বল আছে।

দৃশ্যকল্প-২: প্রদত্ত উপাত্ত : 5, 9, 8, 11, 20, 23, 24, 14, 15, 21. [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

ক. উদাহরণসহ অবর্জনশীল ঘটনার সংজ্ঞা দাও।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল উঠানো হলে বল তিনটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর তথ্যসারি থেকে ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

19. দৃশ্যকল্প-১: একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো।

দৃশ্যকল্প-২: একটি গণসংখ্যা নিবেশন ছক: [ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড-২০১৮]

বয়স (বছর)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
শ্রমিক সংখ্যা	25	40	20	10	5

ক. $P(A) = \frac{1}{3}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ হলে $P(B|A)$ কত?

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর নমুনা ক্ষেত্র তৈরি করে নমুনা ক্ষেত্রে বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর তথ্যের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

20. দৃশ্যকল্প-১: গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 250 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন পরিসংখ্যানে এবং 45 জন গণিতে ফেল করে। উভয় বিষয়ে 15 জন ফেল করেছে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো।

দৃশ্যকল্প-২: নিচে 50 জন ছাত্রের গণসংখ্যা নিবেশন দেখানো হলো: [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]

প্রাপ্ত নম্বর	40	50	60	70	80	90
ছাত্র সংখ্যা	4	6	11	13	12	4

ক. $P(A) = 0.6$ এবং $P(A \cap B) = 0.48$ হলে $P(B)$ এর কোন মানের জন্য A ও B স্বাধীন হবে?

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরীক্ষার্থীর পরিসংখ্যানে পাশ ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধানের পার্থক্য বের কর।

21. $S = \{1, 2, 3, ..., 50\}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭]

ক. তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র তৈরি কর।

খ. S এর যে কোনো একটি সংখ্যা 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

গ. S এর জোড় সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর।

22. দৃশ্যকল্প-১: তুলি ও পলির এককভাবে একটি অংক সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$ । [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]

দৃশ্যকল্প-২: কোন কোম্পানীর দশজন শ্রমিকের দৈনিক আয় যথাক্রমে:

210, 220, 225, 230, 235, 238, 240, 242, 245, 248।

ক. একটি ব্যাগে 4টি সাদা ও 5টি কালো বল রয়েছে। নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল তোলা হল। তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

খ. পলি ও তুলির একত্রে অংকটি সমাধান করার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে ভেদাংক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

23. [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
শিক্ষার্থী	10	20	15	10	5

ক. প্রদত্ত সারণির জন্য পরিসর কত?

খ. উদ্দীপকে বর্ণিত তথ্যাদির সারণি থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের আলোকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

24. উপাত্ত: [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]

রং এর নাম	বলের সংখ্যা
সাদা	3
কালো	6
লাল	7
সবুজ	5
হলুদ	4
বেগুনি	9
নীল	8

ক. দুইটি নির্ভরশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্রটি প্রতিপাদন কর।

খ. উদ্দীপকের বলগুলি একটি বাক্সে থাকলে এবং বাক্সটি থেকে 3 টি করে বল দৈবভাবে উত্তোলন করা হলে, তিনটি বলই লাল অথবা সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত সাতটি সংখ্যার ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

25. দৃশ্যকল্প-১: দ্বাদশ শ্রেণির 55 জন ছাত্রের গণিতের নম্বরের একটি ডাটা নিম্নে দেওয়া হল : [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

নম্বর	51−60	61−70	71−80	81−90	91−100
ছাত্র সংখ্যা	7	18	15	10	5

দৃশ্যকল্প-২: একটি ব্যাগে 9টি লাল ও 7টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 6টি বল তোলা হলো।

ক. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে 3টি বল লাল ও 3টি বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

26. $S_1 = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 20\}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৭]

$S_2 = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

ক. একটি ছক্কা নিরপেক্ষভাবে নিক্ষেপ করা হলে 2 বা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

খ. S_1 এবং S_2 হতে একটি করে সংখ্যা দৈবভাবে বাছাই করা হলে S_1 হতে মৌলিক সংখ্যা এবং S_2 হতে 3 এর গুণিতক সংখ্যা পাবার সম্ভাব্যতা কত?

গ. S_1 এর উপাদানগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

27. দৃশ্যকল্প-১ : [যশোর বোর্ড-২০১৭]

শ্রেণি ব্যাপ্তি	10-16	17-22	23-28	29-34	35-40	41-46	47-52
গণসংখ্যা	5	4	10	12	8	4	7

দৃশ্যকল্প-২ : একটি কলেজের একাদশ শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 30 জন ফুটবল খেলে, 40 জন ক্রিকেট খেলে এবং 20 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হল।

ক. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ এবং A ও B স্বাধীন ঘটনা হলে $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে যদি ছেলেটি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত?

28. দৃশ্যকল্প-১: একটি ছক্কা এবং দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল।

দৃশ্যকল্প-২: নিম্নে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হল: [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]

শ্রেণি ব্যবধান	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
গণসংখ্যা	5	8	14	12	9	6

ক. বর্জনশীল এবং অবর্জনশীল ঘটনার সংজ্ঞা দাও।

খ. নমুনা ক্ষেত্রের সাহায্যে ২টি হেড ও বিজোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

গ. নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

2. **(i)** $\frac{3}{7}$ **(ii)** $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ **(iii)** $\frac{2}{3}$ **(iv)** $\frac{3}{20}$ **(v)** $\frac{3}{5}$; **(vi) (a)** $\frac{4}{9}$ **(b)** $\frac{2}{3}$ **(c)** $\frac{1}{3}$; **(vii)** $\frac{1}{2}$

3. **(i) (a)** $\frac{1}{8}$ **(b)** $\frac{3}{8}$ **(c)** $\frac{7}{8}$; **(ii) (a)** $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{11}{36}$ **(c)** $\frac{1}{12}$; **(iii) (a)** $\frac{1}{4}$ **(b)** $\frac{1}{6}$

(iv) (a) $\frac{1}{8}$ **(b)** $\frac{1}{4}$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** $\frac{1}{4}$ **(v)** $\frac{1}{36}$ **(vi)** $\frac{1}{6}$ **(vii)** $\frac{3}{4}; \frac{1}{2}$; **(viii)** ${}^{20}C_{12} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{12} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{8}$;

4. **(i) (a)** $\frac{7}{225}$ **(b)** $\frac{1}{26}$; **(ii)** 1; **(iii)** $\frac{13}{22}$; **(iv)** $\frac{1}{28}$ **(v)** $\frac{1}{2}$, **(vi)** $\frac{10}{21}$; **(vii)** $\frac{19}{27}$; **(viii)** $\frac{17}{21}$;

(ix) (a) $\frac{18}{35}$ **(b)** $\frac{17}{35}$; **(x)** $\frac{4}{7}$; **(xi)** $\frac{1}{969}$; **(xii)** $\frac{5}{42}$ **(xiii)** $\frac{14}{33}$; **(xiv)** $\frac{31}{63}$; **(xv)** $\frac{11}{21}$

5. **(i)** $\frac{2}{5}$ **(ii)** $\frac{1}{2}$ **(iii)** $\frac{3}{25}$ **(iv)** $\frac{4}{9}$ **(v)** $\frac{3}{40}$ **(vi)** $\frac{1}{2}$

6. **(i)** $\frac{275}{504}$; **(ii)** $\frac{61}{140}, \frac{40}{61}$; **(iii)** $\frac{4}{11}$

7. **(i)** $\frac{11}{21}$ **(ii)** $\frac{4}{15}$ **(iii)** $\frac{3}{4}$ **(iv)** $\frac{119}{200}$;

(v) (a) $\frac{1}{5525}$ **(b)** $\frac{4324}{5525}$ **(c)** $\frac{72}{5525}$ **(d)** $\frac{117}{850}$ **(e)** $\frac{1201}{5525}$; **(vi)** $\frac{1}{26}$ ও $\frac{7}{13}$

8. **(i)** $\frac{61}{90}$ **(ii)** 0.5, 0.375, 0.125; **(iii)** (a) $\frac{2}{7}$, (b) $\frac{2}{7}$;

9. **(i)** $\frac{2}{\pi}$ **(ii)** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi}$

বহুনির্বাচনি

1. গ	2. খ	3. খ	4. খ	5. খ	6. ক	7. ঘ	8. ঘ	9. গ	10. গ	11. গ	12. গ	13. খ	14. খ
15. গ	16. গ	17. খ	18. গ	19. খ	20. ঘ	21. ক	22. ঘ	23. ক	24. গ	25. গ	26. ক	27. গ	28. খ
29. গ	30. গ	31. গ	32. গ	33. ঘ	34. ঘ	35. খ	36. ঘ	37. ক	38. খ	39. ঘ	40. গ	41. গ	42. খ
43. গ	44. ঘ	45. খ	46. ক	47. খ	48. খ	49. খ	50. গ	51. ক	52. ক	53. ঘ	54. গ	55. ক	56. ক
57. ঘ	58. গ	59. গ	60. ক	61. গ	62. খ	63. খ	64. ক	65. ক	66. ক	67. ক	68. ঘ	69. ক	70. ঘ
71. ক	72. খ	73. গ	74. ঘ	75. গ	76. খ	77. গ	78. খ	79. ঘ	80. ঘ	81. খ	82. ঘ	83. ক	

সৃজনশীল

1. খ. 0.00038; গ. 40.64%;

2. ক. $\frac{5}{7}$; খ. $\frac{137865}{15329615}$; গ. 27.32%

3. ক. 23; খ. 6.5; গ. 6.59;

4. ক. $\frac{n+1}{2}$; খ. 18124.14; গ. 126.9414

5. ক. $\frac{27}{91}$; খ. $\frac{24}{91}$; গ. $\frac{22}{91}$

6. ক. 0; খ. $\frac{31}{63}$; গ. $\frac{32}{63}$

7. ক. $\frac{1}{3}$; খ. 5.81; গ. $\frac{1}{9}$

8. ক. $\frac{3}{100}$; খ. 1; গ. পদার্থ বিজ্ঞানে দক্ষতা বেশি

9. ক. 41.84%; খ. $\frac{5}{12}$; গ. 13.219

10. ক. $\frac{11}{850}$; খ. $\frac{1201}{5525}$; গ. $\frac{22}{425}$;

11. ক. $\frac{1}{2}$; খ. $\frac{1}{2}$; গ. 254.44

12. ক. $\frac{1}{4}$; খ. 11.62 (প্রায়); গ. $\frac{17}{21}$

13. ক. 1; খ. $\frac{7}{15}$; গ. Y এর স্কোর বেশি সজাতিপূর্ণ;

14. ক. 26.67%

15. ক. $\frac{1}{3}$; খ. 148.4855; গ. $\frac{2}{5}$

16. ক. $\frac{11}{21}$; খ. 2.9; গ. $\frac{7}{10}$

17. খ. 123.971 (প্রায়); গ. $\frac{3}{11}$

18. খ. $\frac{1}{21}$; গ. 40.8

19. ক. $\frac{3}{5}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. 11

20. ক. 0.8 খ. $\frac{3}{25}$ গ. 175.25 (প্রায়)

21. খ. $\frac{23}{50}$; গ. 208;

22. ক. $\frac{5}{42}$; খ. $\frac{1}{2}$; গ. 129.81 (প্রায়); 11.39 (প্রায়);

23. ক. 49; খ. 11.785; গ. 10;

24. খ. $\frac{9}{2296}$; গ. 4;

25. ক. $\frac{5}{6}$; খ. 11.55 (প্রায়); গ. $\frac{105}{286}$;

26. ক. $\frac{2}{3}$; খ. $\frac{9}{49}$; গ. 5.831 (প্রায়)

27. ক. $\frac{4}{5}$; খ. 7.3875; গ. $\frac{1}{2}$;

28. খ. $\frac{1}{8}$; গ. 7.2435 (প্রায়)

পাঠ-১৩ ও ১৪

ব্যবহারিক

10.10 শ্রেণিকৃত ও অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় (Determination of standard deviation and variance for grouped and ungrouped data)

পরীক্ষণ নং 10.10.1	অশ্রেণিকৃত তথ্য হতে বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: নিম্নে কোনো একটি ক্রিকেট মৌসুমে দুইজন ব্যাটসম্যান A এবং B এর এগারোটি খেলার স্কোর দেওয়া হলো

A এর স্কোর	57	16	27	39	53	56	65	80	102	105	60
B এর স্কোর	4	16	21	41	43	57	78	83	90	95	22

দুই জন ব্যাটসম্যানের মধ্যে কার রানের স্কোর বেশি সজ্ঞাতিপূর্ণ?

তত্ত্ব: ব্যাটসম্যানদ্বয়ের মধ্যে যার স্কোরের পরিমিত ব্যবধান ক্ষুদ্রতম হবে তার স্কোরই বেশি সজ্ঞাতিপূর্ণ হবে।

আমরা জানি, অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে, পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ (তত্ত্বীয় সূত্র)

$$= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} \text{ (ব্যবহারিক সূত্র)}$$

কার্যপদ্ধতি:

গণনার তালিকা

A এর স্কোর		B এর স্কোর	
x_A	x_A^2	x_B	x_B^2
57	3249	04	16
16	256	16	256
27	729	21	441
39	1521	41	1681
53	2809	43	1849
56	3136	57	3249
65	4225	78	6084
80	6400	83	6889
102	10404	90	8100
105	11025	95	9025
60	3600	22	484
$\sum x_A = 660$	$\sum x_A^2 = 47354$	$\sum x_B = 550$	$\sum x_B^2 = 38074$

তাহলে ব্যাটস্ম্যান A এর স্কোরের পরিমিত ব্যবধান $\sigma_A = \sqrt{\dfrac{\sum x_A^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_A}{n}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{47354}{11} - \left(\dfrac{660}{11}\right)^2}$

$$= \sqrt{4304.91 - 3600} = \sqrt{704.91} = 26.55$$

ব্যাটস্ম্যান B এর স্কোরের পরিমিত ব্যবধান $\sigma_B = \sqrt{\dfrac{\sum x_B^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_B}{n}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{38074}{11} - \left(\dfrac{550}{11}\right)^2}$

$$= \sqrt{3461.27 - 2500}$$
$$= \sqrt{961.27} = 31.0044$$

ফলাফল: $\sigma_A < \sigma_B$

মন্তব্য: সুতরাং A ব্যাটস্ম্যানের রানের স্কোর বেশি সজ্ঞাতিপূর্ণ।

পরীক্ষণ নং 10.10.2	শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়	তারিখ: ... ...

সমস্যা: নিম্নের তথ্য হতে চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

শ্রেণীব্যাপ্তি	10 - 19	20-29	30-39	40-49	50-59
গণসংখ্যা	7	16	21	12	4

তত্ত্ব: আমরা জানি, চতুর্থক ব্যবধান, $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এখানে, $Q_i = L_i + \frac{\frac{i \times N}{4} - F_c}{f_i} \times C$; L_i = i-তম চতুর্থক শ্রেণির নিম্নসীমা। F_c = i-তম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা। f_i = i-তম চতুর্থক শ্রেণির গণসংখ্যা। C = i-তম চতুর্থক শ্রেণির শ্রেণি ব্যবধান।

গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$; গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}$; পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান)$^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$

কার্যপদ্ধতি: প্রদত্ত নিবেশনে শ্রেণি সীমাগুলি বিচ্ছিন্ন হওয়ায় প্রথমে প্রকৃত শ্রেণি সীমা নির্ণয় করতে হবে।

প্রয়োজনীয় গণনা সারণি

শ্রেণি ব্যাপ্তি	প্রকৃত শ্রেণি সীমা	শ্রেণি মধ্যবিন্দু (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	যোজিত গণসংখ্যা (F_i)	$f_i x_i$	$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
10-19	9.5-19.5	14.5	7	7	101.5		128.8	2369.92
20-29	19.5-29.5	24.5	16	23	392		134.4	1128.96
30-39	29.5-39.5	34.5	21	44	724.5	$\frac{1974}{60}$	33.6	53.76
40-49	39.5-49.5	44.5	12	56	534	= 32.9	139.2	1614.72
50-59	49.5-59.5	55.5	4	60	222		90.4	2043.04
			N = 60		$\sum f_i x_i$ = 1974		$\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ = 526.4	$\sum f_i (x_i - \bar{x})^2$ = 7210.40

চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এখানে, $Q_1 = L_1 + \frac{\frac{1 \times N}{4} - F_1}{f_1} \times C = 19.5 + \frac{\frac{60}{4} - 7}{16} \times 10$ [যেহেতু $\frac{1 \times 60}{4} = 15$ তম পদ দ্বিতীয় শ্রেণিতে অবস্থিত।]

$= 19.5 + \frac{15 - 7}{16} \times 10 = 19.5 + 0.5 \times 10 = 19.5 + 5 = 24.5$ এবং $Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3 \times N}{4} - F_3}{f_3} \times C$

$= 39.5 + \frac{\frac{3 \times 60}{4} - 44}{12} \times 10$ [$\because \frac{3 \times 60}{4} = 45$ তম পদ (39.5 – 49.5) শ্রেণিতে অবস্থিত।]

$= 39.5 + \frac{45 - 44}{12} \times 10 = 39.5 + 0.83 = 40.33$

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40.33 - 24.5}{2} = \frac{15.83}{2} = 7.916$

গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{526.4}{60} = 8.77$

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{7210.40}{60}} = \sqrt{120.173} = 10.96$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান)$^2 = (10.96)^2 = 120.173$

ফলাফল: চতুর্থক ব্যবধান, QD = 7.916, গড় ব্যবধান = 8.77, পরিমিত ব্যবধান = 10.96, এবং ভেদাঙ্ক = 120.173

10.11 বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় (Determination the probability of different events)

পরীক্ষণ নং 10.11.1	শর্তাধীন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: A এবং B ঘটনাদ্বয় সম্পূর্ণ। $P(A) = 0.7$ এবং $P(B) = 0.4$ হলে $P(A \cap B)$ এর মান বের কর। A এবং B ঘটনাদ্বয়ের স্বাধীনতা পরীক্ষা কর। যদি ঘটনাদ্বয় অধীন হয় তবে $P(A|B)$ এবং $P(B|A)$ এর মান নির্ণয় কর।

তত্ত্ব: আমরা জানি, A ও B ঘটনাদ্বয় সম্পূর্ণ। সুতরাং আমরা পাই, $P(A \cup B) = 1$ দুইটি স্বাধীন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্র, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ এবং শর্তাধীন সম্ভাবনার ক্ষেত্রে,

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ এবং $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

কার্য পদ্ধতি: $P(A \cap B)$, $P(A \mid B)$ এবং $P(B \mid A)$ এর মান নির্ণয়।

সমাধান: A ও B ঘটনাদ্বয় সম্পূর্ণ সুতরাং আমরা পাই, $P(A \cup B) = 1$

আমরা জানি, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ বা, $1 = 0.7 + 0.4 - P(A \cap B)$ বা, $P(A \cap B) = 0.1$

এখন, $P(A).P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28 \quad \therefore P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

সুতরাং A ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন নয়, অধীন।

এখন অধীন ঘটনার গুণন সূত্র হতে পাই, $P(A \cap B) = P(A).\ P(B|A)$

বা, $0.1 = 0.7 \times P(B|A)$ বা, $P(B|A) = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7}$

আবার $P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$ বা, $0.1 = 0.4 \times P(A|B)$ বা, $P(A \mid B) = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$

ফলাফল: 0.1; অধীন; $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{7}$

পরীক্ষণ নং 10.11.2	স্বাধীন ও অধীন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। ধরা যাক, A প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল বিজোড়, B প্রথম ছক্কায় 1 এবং C প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 7 নির্দেশ করে।

(i) A এবং B কী স্বাধীন? (ii) A এবং C কী স্বাধীন? (iii) B এবং C কী স্বাধীন?

তত্ত্ব: কোনো নমুনা ক্ষেত্র S-এ মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(S) এবং A হলো ঐ নমুনা ক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত একটি ঘটনা। A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(A) হলে, A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

অর্থাৎ কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $= \frac{\text{ঐ ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা}}{\text{নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা}}$

কার্য পদ্ধতি:

সমাধান: দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র নিম্নরূপ :

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6) \\ &(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6) \\ &(5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\} \end{aligned}$$

নমুনা ক্ষেত্রে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = 36$

(i) A ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র: {(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)}

A ঘটনার নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, n(A) = 18 $\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

B ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র: {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)} $\therefore P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$(A \cap B)$ এর নমুনা ক্ষেত্র = {(1,2), (1,4), (1,6)}; $A \cap B$ এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(A \cap B) = 3$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

এখানে, $P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ অর্থাৎ, A ও B স্বাধীন।

(ii) ও **(iii)**, (i) নং এর অনুরূপ।

ফলাফল: (i) স্বাধীন, (ii) অধীন, (iii) স্বাধীন।

পরীক্ষণ নং 10.11.3	বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: একটি লাল ও একটি সাদা ছক্কাকে যথাক্রমে x ও y দ্বারা চিহ্নিত করে নিক্ষেপ করা হলো। এদের নমুনা ক্ষেত্র লিখ এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(i) $P[x = y]$; (ii) $P[x \neq y]$; (iii) $P[x \geq 5 \cap y \leq 5]$; (iv) $P[xy = 12]$; (v) $P[x + y = 7]$; (vi) $P[x = 2y]$; (vii) $P[2x = y]$; (viii) $P[x + y > 7]$; (ix) $P[x + y < 7]$

তত্ত্ব: n(s) কোনো নমুনা ক্ষেত্র S এর মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা এবং n(A) হলো ঐ নমুনা ক্ষেত্রের অন্তর্গত কোনো ঘটনা A এর অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা। এখন A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা। $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ অর্থাৎ

কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা = $\frac{\text{ঐ ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা}}$

কার্যপদ্ধতি: লাল ছক্কার পাঠ = x, সাদা ছক্কার পাঠ = y হলে ছক্কা দুইটি একত্রে নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র S হবে নিম্নরূপ–

লাল ছক্কা (x) \ সাদা ছক্কা (y)					
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, n(S) = 36।

i. x = y, ঘটনার অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র : {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)}

$\therefore$ x = y ঘটনার নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, n(x = y) = 6

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(x = y) = \frac{n(x = y)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ii. $P(x \neq y) = 1 - P(x = y) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iii. $x \geq 5$ অর্থাৎ x = {5, 6} এবং $y \leq 5$ অর্থাৎ y = {1, 2, 3, 4, 5};

$\{x \geq 5 \cap y \leq 5\}$ এর অনুকূল নমুনা ক্ষেত্র:

{(5, 1), (5, 2), (5, 3) (5, 4), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}

$\therefore \{x \geq 5 \cap y \leq 5\}$ এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(x \geq 5 \cap y \leq 5) = 10$

$\therefore P\{x \geq 5 \cap y \leq 5\} = \frac{n(x \geq 5 \cap y \leq 5)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

শিক্ষার্থীদের অনুশীলনের জন্য নিচের বাকি নম্বরগুলি সংক্ষেপে করা হলো।

iv. $P[x \times y = 12] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

[অনুকূল নমুনাবিন্দুগুলি হলো: (2,6) (3,4) (4,3) (6,2)]

v. $P[x + y = 7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

[{x + y = 7} এর নমুনাবিন্দু 6টি যথা: (1,6), (2,5), (3,4), (6,1), (5,2), (4,3)]

vi. $P[x = 2y] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

[{x = 2y} এর নমুনাবিন্দু 3 টি যথাঃ (2,1), (4,2), (6,3)]

vii. $P[2x = y] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

[{2x = y} এর নমুনাবিন্দু 3 টি যথা: (1,2), (2,4), (3,6)]

viii. $P[x + y > 7] = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

[অনুকূল নমুনাবিন্দুগুলি হলো: (2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,2), (6,4), (6,5), (6,6), (6,3)]

ix. $P[x + y < 7]$
$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

[অনুকূল নমুনাবিন্দুগুলি হলো: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3) (4,1), (4,2)(5,1)]

ফলাফল: i. $\frac{1}{6}$; ii. $\frac{5}{6}$; iii. $\frac{5}{18}$; iv. $\frac{1}{9}$; v. $\frac{1}{6}$; vi. $\frac{1}{12}$; vii. $\frac{1}{12}$; viii. $\frac{5}{12}$; ix. $\frac{5}{12}$

ব্যবহারিক কাজ: 1. নিম্নে 100 জন ছাত্রের উচ্চতা দেওয়া হলো, তাদের পরিমিত ব্যবধান, ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।

উচ্চতা (সে.মি.)	160	162	163	164	165	166	167	168
সংখ্যা	7	2	23	25	20	15	4	4

2. নিম্নের ঘটনসংখ্যা বিন্যাস হতে চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, গড় ব্যবধানাঙ্ক, পরিমিত ব্যবধান, ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করি।

বয়স (বৎসরে)	10 - 20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ঘটনসংখ্যা	5	60	120	25	16	20	4

3. যদি দুইটি সম্পূর্ণ ঘটনা A ও B এর জন্য $P(A) = 0.65$ এবং $P(B) = 0.5$ হয় তবে, A ও B এর স্বাধীনতা সম্পর্কে মন্তব্য কর। যদি ঘটনাদ্বয় অধীন হয় তবে $P(A \mid \bar{B})$ এবং $P(\bar{A} \mid \bar{B})$ নির্ণয় কর।

4. দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষার ক্ষেত্রে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(i) দুইটি মাথা ও জোড় সংখ্যা; (ii) যেকোনো পিঠ ও বিজোড় সংখ্যা;
(iii) মুদ্রায় বিপরীত পিঠ ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা; (iv) মুদ্রায় বিপরীত পিঠ ও ছক্কায় কমপক্ষে 5;
(v) মুদ্রায় একই পিঠ ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা।

5. দুইটি পাশা শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা বের কর।
(i) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 3 বা তার কম; (ii) সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 7 অথবা গুণফল 6 হবে;
(iii) সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 6 কিন্তু অন্তরফল 2 হবে; (iv) কমপক্ষে একটি 6 পাবার;
(v) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 3 দ্বারা বিভাজ্য।

মৌখিক প্রশ্ন

1. সম্ভাবনার গাণিতিক পরিমাপ কী? **2.** ঘটনা বলতে কী বোঝ? **3.** ঘটনজগত্ বা নমুনা ক্ষেত্র কী?
4. পরস্পর বিচ্ছিন্ন বা বর্জনশীল ঘটনাবলি কী? **5.** নির্ভরশীল বা অধীন ঘটনা বলতে কী বোঝ?