ভেক্টর
Vectors

অধ্যায় ০২

এ অধ্যায়ে অনন্য A+ সংযোজন | শিখনফলের ধারায় প্রশ্ন ও উত্তর | পাঠ্যবইয়ের সূত্রসহ প্রশ্ন ও উত্তর | সমন্বিত অধ্যায়ের প্রশ্ন ও উত্তর | সেরা কলেজের প্রশ্ন বিশ্লেষণ | অ্যাপস-এ MCQ Exam

ভূ•মি•কা (Introduction)

উচ্চতর পদার্থবিদ্যা গণিতেরই নামান্তর। পদার্থবিজ্ঞানে যা কিছু পরিমাপযোগ্য তাকে ভৌত রাশি বলে। যে সকল ভৌত রাশি প্রকাশে মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় তাদেরকে ভেক্টর রাশি এবং শুধুমাত্র মানের প্রয়োজন হয় তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে। ওজন, সরণ, বেগ, বল, প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর রাশি এবং ভর, দৈর্ঘ্য, দ্রুতি, কাজ, সময়, তাপমাত্রা, বিভব ইত্যাদি স্কেলার রাশি। এ সকল রাশিগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক স্থাপনে, পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন ধারণা, সূত্র, নীতি, স্বীকার্য, অনুকল্প ও তত্ত্ব উপস্থাপনে বা প্রমাণে গণিতশাস্ত্রের প্রয়োজনীয়তা অপরিহার্য। বিশেষ করে ভেক্টর এ্যালজেবরা, ভেক্টর ক্যালকুলাস, অন্তরীকরণ, যোগজীকরণ প্রায়ই ব্যবহৃত হয়।

▶ এক নজরে অধ্যায় বিন্যাস

১ এর ভেতর সব ALL IN ONE

শিক্ষার্থীদের সেরা প্রস্তুতির জন্য এ অধ্যায়টি পাঁচটি ধারাবাহিক পার্টে বিভক্ত করে উপস্থাপন করা হলো। সহজে খুঁজে বের করার জন্য প্রতিটি পার্টের সাথে পৃষ্ঠা নম্বর দেওয়া আছে। শিক্ষার্থীরা পার্টসমূহ অনুসরণে প্রস্তুতি গ্রহণ করলে পরীক্ষায় যেভাবেই প্রশ্ন আসুক না কেন, সহজেই ১০০% কমন নিশ্চিত করতে পারবে।

PART 01 অনুশীলন [Practice]
১০০% সঠিক ফরম্যাট অনুসরণে শিখনফলের ধারায় প্রশ্ন ও উত্তর
- সৃজনশীল অংশ — কমন উপযোগী প্রশ্ন ও উত্তর — পৃষ্ঠা : ৫৭-১২০
- বহুনির্বাচনি অংশ — ১০০% নির্ভুল প্রশ্ন ও উত্তর — পৃষ্ঠা : ১২১-১৩৭

PART 02 যাচাই ও মূল্যায়ন [Assessment & Evaluation]
মডেল টেস্ট আকারে সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নব্যাংক পৃষ্ঠা ১৩৮

PART 03 এক্সক্লুসিভ সাজেশন্স [Exclusive Suggestions]
কলেজ পরীক্ষা ও এইচএসসি পরীক্ষা উপযোগী সাজেশন্স পৃষ্ঠা ১৪০

PART 04 বিকল্প প্রস্তুতি [Alternative Preparation]
গতানুগতিক ধারার গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নের সমন্বয়ে বিশেষ পাঠ পৃষ্ঠা ১৪০

PART 05 এক্সক্লুসিভ টিপস [Exclusive Tips]
পূর্ণাঙ্গ প্রস্তুতি নিশ্চিতকল্পে অভিনব কৌশলভিত্তিক নির্দেশনা পৃষ্ঠা ১৪০

EXCLUSIVE ITEMS Admission Test After HSC
- মেডিকেল, ইঞ্জিনিয়ারিং ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় আসা প্রশ্নোত্তর পৃষ্ঠা ১৪১

অধ্যায় সংশ্লিষ্ট ৩ বিজ্ঞানীর পরিচিতি

সত্যেন্দ্রনাথ বসু

বাঙালি পদার্থবিজ্ঞানী সত্যেন্দ্রনাথ বসু আইনস্টাইনের সাথে যৌথভাবে বোস-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন প্রদান করেন, যা পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার হিসেবে বিবেচিত হয়।

বানার্ড লামি

ফরাসি গণিতবিদ ও তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানী বানার্ড লামী ভেক্টর নিয়ে গবেষণা করেন। জ্যামিতিতে তার উপপাদ্যগুলো তাকে ব্যাপক পরিচিতি এনে দেয়। এছাড়া তার প্রচুর নিবন্ধও রয়েছে।

ইউক্লিড

বিখ্যাত গ্রিক গণিতজ্ঞ ও পদার্থবিদ ইউক্লিড ভেক্টর রাশির বর্তমান অবস্থাগত উন্নয়নে মূল ভূমিকা পালন করেন। তার অসংখ্য গ্রন্থের মধ্যে উল্লেখযোগ্য তিনটি গ্রন্থ হলো– ডাটা, অপটিক্স ও এলিমেন্টস।

ও•য়ে•ব•সা•ই•ট ⇔ তথ্য সংযোগ

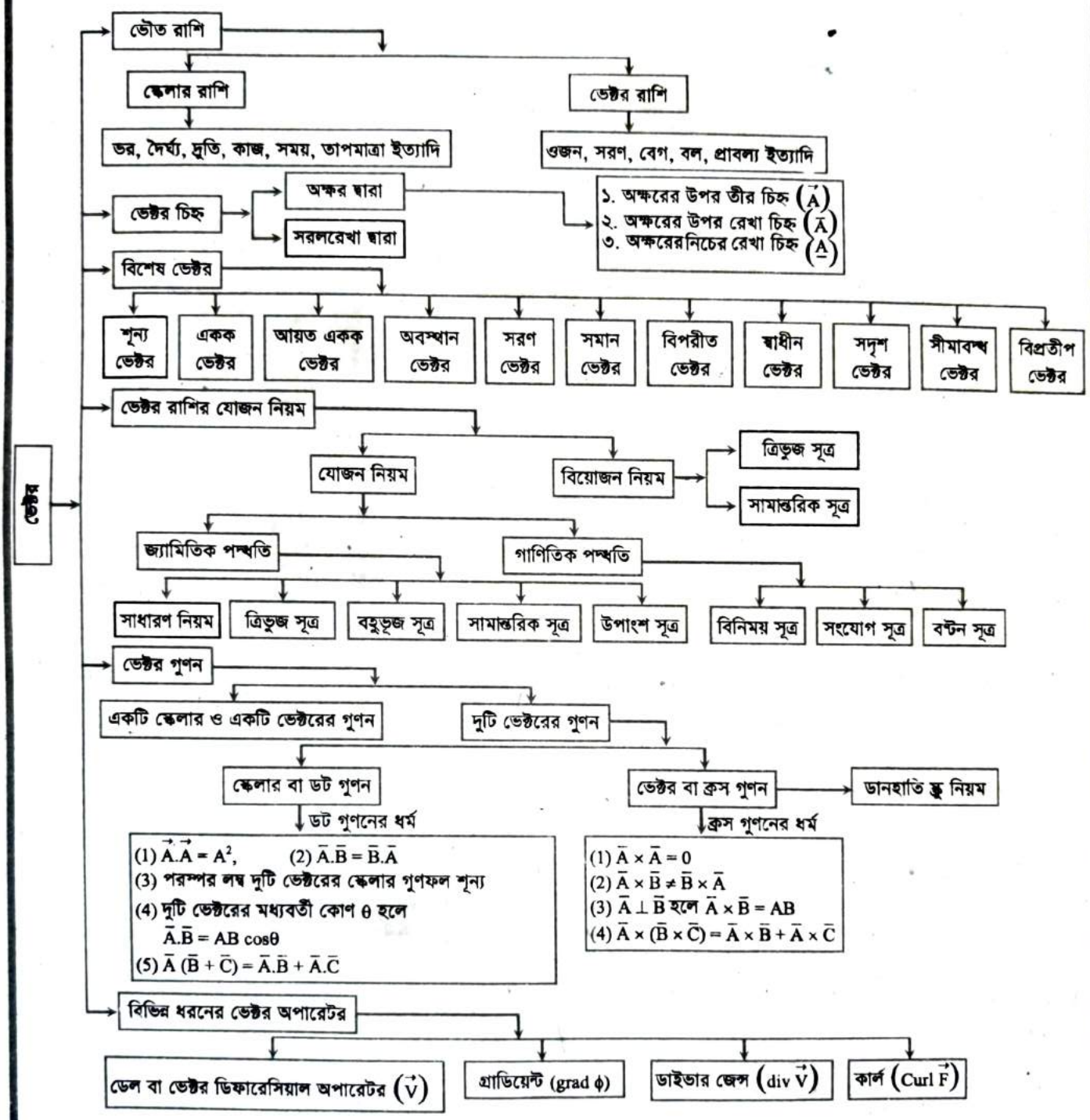
অধ্যায়টিকে বিষয়বস্তুর ওপর শিখনফলের ধারাবাহিকতায় প্রশ্ন তৈরিতে এবং উত্তরকে তথ্যবহুল ও নির্ভুলতা নিশ্চিতকরণে বোর্ড বইয়ের পাশাপাশি নিম্নোক্ত ওয়েব লিংকের সহায়তা নেওয়া হয়েছে–

http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_vector
http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_product
en.wikipedia.org/wiki/Scalar_multiplication
en.wikipedia.org/wiki/Multiplication_of_vectors
en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus
http://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product
http://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

টিচার্স ম্যানুয়াল অনুসরণে ভিন্ন ধারায় উপস্থাপন ➤ শিখনফল | শিখন যাচাই | উপকরণ

এক নজরে অধ্যায়ের প্রবাহ চিত্র

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা, কোনো অধ্যায়ের বিষয়বস্তুর বিন্যাস ও ধারাবাহিকতা সম্পর্কে পূর্ব হতে ধারণা থাকলে প্রশ্ন ও উত্তর আত্মস্থ করা সহজ হয়। নিম্নে এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াবলি প্রবাহ চিত্র (Flow Chart) আকারে উপস্থাপন করা হলো, যা তোমাদের সহজেই এক নজরে অধ্যায়টি সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা পেতে সহায়তা করবে।



অধ্যায় বিশ্লেষণ (Chapter Analysis)

- ১৫৭টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর (বোর্ড প্রশ্ন ২৮টি + অনুশীলনীর প্রশ্ন ১১৪টি + মাস্টার ট্রেইনার প্রশ্ন ৮টি + কলেজ প্রশ্ন ৬টি + সমন্বিত প্রশ্ন ১টি)
- ৩৩০টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও উত্তর (বোর্ড প্রশ্ন ৬২টি + মাস্টার ট্রেইনার প্রশ্ন ৮৪টি + কলেজ প্রশ্ন ১১৫টি + অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬৯টি)

অনলাইনে প্রস্তুতি যাচাই

INTERNET BASED

সৃজনশীল মডেল টেস্ট ০৫টি
বহুনির্বাচনি মডেল টেস্ট ০৫টি

PART 01 অনুশীলন Practice

প্রিয় শিক্ষার্থী, Part 01 সম্পূর্ণরূপে অনুশীলন নির্ভর; যা মূলত দুটি অংশে বিভক্ত– সৃজনশীল অংশ ও বহুনির্বাচনি অংশ। তোমাদের অনুশীলনের সুবিধার্থে NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তরের পাশাপাশি এইচএসসি পরীক্ষা, মাস্টার ট্রেইনার প্যানেল, শীর্ষস্থানীয় কলেজ ও সমন্বিত অধ্যায়ের প্রশ্নোত্তর সংযোজন করা হয়েছে। প্রশ্ন ও উত্তরে সর্বশেষ সংশোধিত ফরম্যাট অনুসৃত হয়েছে।

অধ্যায়ের শিখনফল

অধ্যায়টি অনুশীলন করে আমি যা জানতে পারব–

- ভেক্টরের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারব।
- পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ভৌত রাশি ভেক্টররূপে প্রকাশ করতে পারব।
- কতিপয় বিশেষ ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারব।
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারব।
- লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারব।
- একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারব।
- দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারব।
- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারব।
- ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারব।
- ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারব।

শিখন অর্জন যাচাই

- ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশির মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করতে পারব।
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়মগুলো ব্যাখ্যা করতে পারব।
- লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারব।
- স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন সম্পর্কে ধারণা লাভ করতে পারব।
- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের গুরুত্ব অনুধাবন করতে পারব।
- ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার সম্পর্কে ধারণা লাভ করতে পারব।

শিখন সহায়ক উপকরণ

- বিভিন্ন ধরনের ভেক্টর রাশির উদাহরণ ও বিবরণসহ ছবি।
- ভেক্টর যোজন নিয়মের বিভিন্ন সূত্রগুলোর ছবি ও বিবরণ।
- অন্তরকলন ও সমাকলনের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলির চার্ট।
- ডাইভারজেন ও কার্লের মধ্যে পার্থক্যের ছক।

১ সৃজনশীল — সকল বোর্ডের এইচএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রিয় শিক্ষার্থী, সারা দেশের ৮টি শিক্ষা বোর্ডের এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৯, ২০১৮, ২০১৭, ২০১৬ ও ২০১৫-এ আসা এ অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্নসমূহের যথাযথ উত্তর নিচে সংযোজিত হলো। এসব প্রশ্ন ও উত্তর অনুশীলনের মাধ্যমে তোমরা এইচএসসি পরীক্ষার প্রশ্ন ও উত্তরের ধরন সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা পাবে।

এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৯ এর প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১ ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্ব দিকে চলমান একটি গাড়ির চালক উত্তর দিকে ঘণ্টায় তার বেগের দ্বিগুণ বেগে একটি ট্রাক চলতে দেখল। [পূর্ব দিক ধনাত্মক x-অক্ষ ও উত্তর দিক ধনাত্মক y-অক্ষ বিবেচনা করা হলো।]

ক. স্বীকার্য কী? ১

খ. কাজ ও টর্ক এর মান এবং একক সমান হলেও এরা ভিন্ন রাশি– ব্যাখ্যা দাও। ২

গ. ট্রাকটি প্রকৃতপক্ষে কোন দিকে চলছিল? ৩

ঘ. ট্রাক ও গাড়িটির প্রকৃত বেগ যে তলে অবস্থিত তার উল্লম্ব দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় করা সম্ভব কি-না? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে দেখাও। ৪

[ঢা. বো. '১৯]

১নং প্রশ্নের উত্তর

ক স্বীকার্য হলো একটি প্রস্তাবনা যার প্রমাণের প্রয়োজন হয় না, নিজে থেকেই প্রতিষ্ঠিত অথবা সত্য বলে স্বীকার করার কোনো সুনির্দিষ্ট উদ্দেশ্য থাকে এবং এটি অন্য একটি প্রস্তাবনা প্রমাণের জন্য ব্যবহৃত হয়।

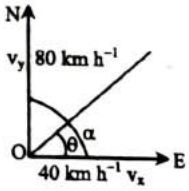
খ কাজ হলো বল ও সরণের ডট গুণফল। এটি প্রকাশের জন্য শুধু মান প্রয়োজন হয়। অন্যদিকে টর্ক হলো কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টর এবং ঐ বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলের ভেক্টর গুণন। একে প্রকাশের জন্য মান এবং দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। এজন্য কাজ ও টর্ক এর মান ও একক সমান হলেও এরা যথাক্রমে স্কেলার ও ভেক্টর রাশি, অর্থাৎ ভিন্ন রাশি।

গ এখানে, গাড়ির বেগ, $v_x = 40\ km\ h^{-1}$

ট্রাকের বেগ, $v_y = 2 \times 40\ km\ h^{-1}$
$= 80\ km\ h^{-1}$

মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

ধরি, ট্রাকটি গাড়ির গতির দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে



আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{v_x \sin\alpha}{v_y + v_x \cos\alpha}$

$= \dfrac{40 \sin 90°}{80 + 40 \cos 90°}$

$= \dfrac{40}{80}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 26.57°$

সুতরাং, ট্রাকটি গাড়ির গতির দিকের সাথে অর্থাৎ পূর্বদিকের সাথে 26.57° কোণে চলছিল।

ঘ ধরি, ট্রাকের প্রকৃত বেগ, v_T

এখানে, $v_x = 40\ km\ h^{-1}$

$v_y = 80\ km\ h^{-1}$

$v_T = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{40^2 + 80^2} = 40\sqrt{5}\ m\ s^{-1}$

x অক্ষ বরাবর গাড়ির বেগ, $v_C = 40\hat{i}$

x ও y অক্ষ বরাবর ট্রাকের বেগ,

$v_T = 40\sqrt{5}\cos(90° - 26.57°)\hat{i} + 40\sqrt{5}\cos 26.57\,\hat{j}$

$= 40\hat{i} + 80\hat{j}$

$$\vec{v_C} \times \vec{v_T} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 40 & 0 & 0 \\ 40 & 80 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}(3200-0)$$

$$= 3200\,\hat{k}$$

$$|\vec{v_C} \times \vec{v_T}| = \sqrt{(3200)^2} = 3200$$

$$\hat{\eta} = \pm \frac{\vec{v_C} \times \vec{v_T}}{|\vec{v_C} \times \vec{v_T}|} = \pm \frac{3200\,\hat{k}}{3200} = \pm \hat{k}$$

নির্ণেয় একক ভেক্টর $\pm \hat{k}$।

প্রশ্ন ২ 30° কোণে আনত একটি পাহাড়ের ঢাল বেয়ে 72 km/h সমবেগে একটি বাস উপরে উঠছে। এমন সময় হঠাৎ বৃষ্টি 6 m/s সমবেগে খাড়া নিচে পড়তে শুরু করল। বৃষ্টি যখন প্রায় শেষ তখন অনুভূমিকভাবে বায়ুপ্রবাহ শুরু হলো।

ক. বিপ্রতীপ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল ও বিয়োগ ফলের মান সমান– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. শুরুতে বাসচালক কত কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে নির্ণয় কর। ৩

ঘ. বায়ুপ্রবাহের দরুণ বাসচালক খাড়া নিচের দিকে একই বেগে বৃষ্টি পড়তে দেখলে বৃষ্টি পড়ার প্রকৃত মান ও দিক গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[রা. বো. '১৯]

২নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

খ $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha = A^2 + B^2 + 2AB\cos(180 - \alpha)$

বা, $2\,AB\cos\alpha = -2\,AB\cos\alpha$

বা, $4\,AB\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0$

$\therefore\ \alpha = 90°$

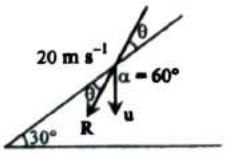
অতএব, দুটি ভেক্টর যখন পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে তখন তাদের যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হয়।

গ এখানে, বাসের বেগ,

$v = 72\ km\ h^{-1}$

$= \frac{72 \times 1000}{3600}\ m\ s^{-1}$

$= 20\ m\ s^{-1}$



বৃষ্টির বেগ, $u = 6\ m\ s^{-1}$

$\alpha = 60°$

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha} = \frac{6\sin 60°}{20 + 6\cos 60°} = 0.226$

$\therefore\ \theta = 12.73°$

অতএব, শুরুতে বাসচালক তার চলার অভিমুখের সাথে 12.73° কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে।

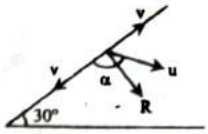
ঘ 'গ' অনুসারে,

$R = \sqrt{20^2 + 6^2 + 2 \times 20 \times 6\cos 60°}\ m\ s^{-1}$

$= 23.58\ m\ s^{-1}$

সুতরাং, 'গ' তে বাসচালক $23.58\ m\ s^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়তে দেখবে।

এখন, 'ঘ' এর প্রশ্ন এবং আপেক্ষিক বেগের নিয়মানুসারে চিত্রটি দাঁড়ায় নিম্নরূপ–



$\tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

বা, $\cos\alpha = \frac{-v}{u}$

আবার, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

বা, $R^2 = u^2 + v^2 + 2uv\left(\frac{-v}{u}\right)$

বা, $u^2 = R^2 + v^2$

বা, $u = \sqrt{23.58^2 + 20^2}\ m\ s^{-1}$

$\therefore\ u = 30.92\ m\ s^{-1}$

আবার, $\cos\alpha = \frac{-v}{u}$

এখানে,
বাসের বেগ, $v = 20\ m\ s^{-1}$
বৃষ্টি পড়ার প্রকৃত বেগ, u
বাসের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ, $R = 23.58\ m\ s^{-1}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{20}{30.92}\right) = 130.3°$

$180° - \alpha = 180° - 130.3° = 49.7°$

অতএব, বৃষ্টি পড়ার প্রকৃত মান $30.92\ m\ s^{-1}$ এবং এর দিক বাসটি চলার অভিমুখের সাথে 49.7° কোণে।

প্রশ্ন ৩ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে P (1, 2, – 1), Q (– 2, 1, 1) এবং R (3, 1, – 2), যেখানে $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে।

ক. সীমাবদ্ধ ভেক্টর কী? ১

খ. স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0.01 mm বলতে কি বুঝ? ২

গ. $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. P, Q এবং R বিন্দুত্রয়ের ক্রম সংযোজন দ্বারা উৎপন্ন ভেক্টরগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্র একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কি-না তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মধ্যেমে ব্যাখ্যা কর। ৪

[য. বো. '১৯]

৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের পাদবিন্দু নির্ধারিত থাকে তাই সীমাবদ্ধ ভেক্টর।

খ স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0.01 mm বলতে বুঝায় স্ফেরোমিটারের বৃত্তাকার স্কেলের একভাগ ঘুরালে স্ক্রুটি 0.01 mm সরে আসে।

গ এখানে, P (1, 2, – 1) এবং Q (– 2, 1, 1)

$\therefore\ \vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{Q} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

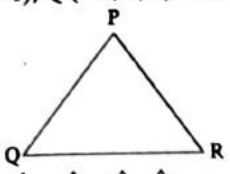
আমরা জানি, $\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$

বা, $Q\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{P} = \frac{1.(-2) + 2.1 + (-1)(1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}$

$= \frac{-2 + 2 - 1}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$

অতএব, $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $\frac{-1}{\sqrt{6}}$।

ঘ এখানে, P(1, 2, – 1), Q (– 2, 1, 1) এবং R (3, 1, – 2)



এখন, $\vec{PQ} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} - (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

$= -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{QR} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} - (-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 5\hat{i} - 3\hat{k}$

$\vec{RP} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} - (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

PQR ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে যদি $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$ এবং $\vec{RP}$ ভেক্টরত্রয়ের একটির মানের বর্গ অপর দুটির মানের বর্গের সমষ্টির সমান হয়।

$\therefore |\vec{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

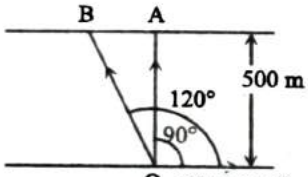
$|\vec{QR}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

$|\vec{RP}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

দেখা যাচ্ছে যে, $|\vec{RP}|^2 + |\vec{PQ}|^2 \neq |\vec{QR}|^2$

অতএব, P, Q এবং R বিন্দুত্রয়ের ক্রমসংযোজন দ্বারা উৎপন্ন ভেক্টরগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে না।

৪নং প্রশ্ন



স্রোতের বেগ = 1 m s^{-1}

OB বরাবর, করিমের বেগ = 8 m s^{-1}

OA বরাবর রহিমের বেগ = 7.5 m s^{-1}

ক. ডাইভারজেন্স কী? ১

খ. সকল সমরেখ ভেক্টর সমান ভেক্টর নয়—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. করিম কত বেগে অপর পাড়ে পৌঁছাল? নির্ণয় কর। ৩

ঘ. রহিম ও করিমের মধ্যে কে আগে অপর পাড়ে পৌঁছাবে গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

[কু. বো. '১৯]

৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ এর সাথে কোনো একট ভেক্টর ক্ষেত্রের ডট গুণন বা স্কেলার গুণনই ঐ ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স।

খ দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই রেখা বরাবর বা সমান্তরালে ক্রিয়া করলে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। সমরেখ ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে এটি স্পষ্ট যে, কেবল দিক এক হলেই দুটি ভেক্টর সমরেখ হয়। কিন্তু আমরা জানি, দুটি ভেক্টর সমান হতে হলে তাদের মান ও দিক সমান এবং তাদেরকে সমজাতীয় হতে হয়। অতএব, সকল সমরেখ ভেক্টর সমান ভেক্টর নয়।

গ এখানে, করিমের বেগ, $v_k = 8$ m s^{-1}

স্রোতের বেগ, $v = 1$ m s^{-1}

করিম ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$

$\therefore$ করিমের লব্ধি বেগ, $v_R = \sqrt{v_k^2 + v^2 + 2v_k \cdot v \cos\alpha}$

$= \sqrt{8^2 + 1^2 + 2 \cdot 8 \cdot 1 \cos 120°}$ m s^{-1}

$\therefore v_R = 7.55$ m s^{-1}

অতএব, করিম লব্ধি বেগ 7.55 m s^{-1} এ অপর পাড়ে পৌঁছাল।

ঘ নদীর প্রস্থ OA = 500 m

নদীর প্রস্থ তথা OA বরাবর করিমের বেগের উপাংশ,

$v_{KOA} = 8 \times \cos(120 - 90)°$ m s^{-1} $= 4\sqrt{3}$ m s^{-1}

অপর পাড়ে যেতে করিমের সময় লাগে,

$$t_k = \frac{OA}{v_{kOA}} = \frac{500}{4\sqrt{3}} \text{ s} = 72.17 \text{ s}$$

নদীর প্রস্থ তথা OA বরাবর রহিমের বেগের উপাংশ,

$v_{rOA} = 7.5$ m s^{-1}

$\therefore$ অপর পাড়ে যেতে রহিমের সময় লাগে,

$$t_r = \frac{OA}{v_{rOA}} = \frac{500 \text{ m}}{7.5 \text{ m s}^{-1}}$$

$\therefore t_r = 66.67$ s

উপরের গাণিতিক বিশ্লেষণ হতে দেখা যাচ্ছে যে, $t_r < t_k$. অতএব, রহিম আগে অপর পাড়ে পৌঁছাবে।

৫নং প্রশ্ন তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{C} = x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2x\hat{k}$।

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ডানহাতি স্ক্রু নিয়মের সাহায্যে বোতলের মুখ খোলা বা বন্ধ করা যায়— ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য হবে কি? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[চ. বো. '১৯]

৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম অনুসারে বামদিকে ঘুরালে স্ক্রুটি উপরের দিকে অগ্রসর হয়। একইভাবে বোতলের ছিপি বামদিকে ঘুরালে ছিপিটি বাইরের দিকে অগ্রসর হয়ে মুখ খুলে যায়। অনুরূপভাবে, স্ক্রু ডানদিকে ঘুরালে স্ক্রুটি যেমন ভিতরের দিকে অগ্রসর হয় তেমনি বোতলের ছিপিও ডানদিকে ঘুরালে সেটি ভিতরের দিকে অগ্রসর হয়ে মুখ বন্ধ হয়ে যায়। অতএব বলা যায়, ডানহাতি স্ক্রু নিয়মের সাহায্যে বোতলের মুখ খোলা বা বন্ধ করা যায়।

গ এখানে, $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্ব দিকে একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(6 - 5) - \hat{j}(8 - 10) + \hat{k}(4 - 6)$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

$\therefore \hat{n} = \dfrac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3}$

অতএব, উদ্দীপকের $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকে একটি একক ভেক্টর $\dfrac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3}$।

ঘ এখানে, $\vec{C} = x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2x\hat{k}$

এখন, $\text{curl}\,\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{C}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z^2x) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z^2x) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right\}$$

$$= \hat{i}\{0 - y^2\} - \hat{j}\{z^2 - 0\} + \hat{k}\{0 - x^2\}$$

$$= -y^2\hat{i} - z^2\hat{j} - x^2\hat{k}$$

$\therefore \text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C})$

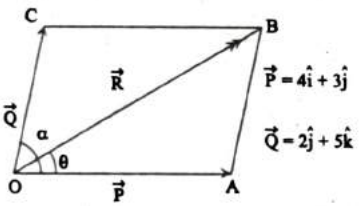
$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (-y^2\hat{i} - z^2\hat{j} - x^2\hat{k})$$

$$= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right\}$$

$$= -\{0 + 0 + 0\} = 0$$

অতএব, উদ্দীপকের $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য।

প্রশ্ন ৬ চিত্রটি লক্ষ কর :



ক. টর্ক কাকে বলে? ১

খ. পরিমাপের এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতির প্রয়োজন হয়েছিল কেন? ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে θ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ΔOAB ও ΔOBC এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিক OABC এর ক্ষেত্রফলের সমান কি না? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[সি. বো. '১৯]

৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হলে বস্তুটির মধ্যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরবার যে প্রবণতা সৃষ্টি হয় তাকে বলের ভ্রামক বা টর্ক বলে।

খ একই রাশি ভিন্ন ভিন্ন এককে পরিমাপ করলে মান ভিন্ন হয়। যেমন যে দন্ডটির দৈর্ঘ্য মিটার এককে 1 m, সেন্টিমিটার এককে তার মান 100 cm। এভাবে একই রাশি বিভিন্ন জায়গায় বিভিন্ন এককে পরিমাপ করলে বুঝতে সমস্যার সৃষ্টি হয়। এজন্য ইউনিফর্ম পরিমাপ ব্যবস্থা চালু করার লক্ষ্যে পরিমাপের এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতির প্রয়োজন হয়েছিল।

গ এখানে, $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{j} + 5\hat{k} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore \vec{P} \cdot \vec{R} = 16 + 15 + 0$

বা, $PR\cos\theta = 31$

বা, $\cos\theta = \frac{31}{PR}$

বা, $\cos\theta = \frac{31}{\sqrt{4^2 + 3^2} \times \sqrt{4^2 + 5^2 + 5^2}}$

বা, $\cos\theta = 0.76$

$\therefore \theta = 40.26°$

অতএব, উদ্দীপকের আলোকে θ-এর মান 40.26°।

ঘ এখানে, $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

$\vec{Q} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

'গ' হতে পাই, $\vec{R} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\theta = 40.26°$

এখন, $\cos\alpha = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ} = \frac{0 + 6 + 0}{\sqrt{4^2 + 3^2} \times \sqrt{2^2 + 5^2}}$

বা, $\alpha = 77.12°$

ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{R}| = \frac{1}{2}PR\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} \times \sqrt{4^2 + 5^2 + 5^2} \times \sin 40.26°$

$= \frac{1}{2} \times 26.25$ বর্গ একক $= 13.13$ বর্গ একক

ΔOBC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{R}|$

$= \frac{1}{2}QR\sin(\alpha - \theta)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 5^2} \times \sqrt{4^2 + 5^2 + 5^2} \times \sin(77.12° - 40.26°)$

$= 13.12$ বর্গ একক

$\therefore$ ΔOAB + ΔOBC = 13.13 + 13.12 = 26.25 বর্গ একক

OABC সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= |\vec{P} \times \vec{Q}| = PQ\sin\alpha$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} \times \sqrt{2^2 + 5^2}\sin 77.12°$

$= 26.25$ বর্গ একক = ΔOAB + ΔOBC

অতএব, ΔOAB ও ΔOBC-এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিক OABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান।

প্রশ্ন ৭ অনিক $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর নিয়ে তাদের ডট ও ক্রস গুণন নির্ণয় করছিল। সে দেখল যে, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যস্থ কোণের মান একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ পরিবর্তন করলে তাদের ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হয়।

ক. আপেক্ষিক বেগ কাকে বলে? ১

খ. বালির উপর দিয়ে হাঁটা কষ্টসাধ্য—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

ঘ. অনিকের পর্যবেক্ষণের গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

[ব. বো. '১৯]

৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি গতিশীল বস্তুর একটির সাপেক্ষে অন্যটির অবস্থানের পরিবর্তনের হারকে আপেক্ষিক বেগ বলে।

খ বালির উপরে হাঁটা অসুবিধাজনক। বালি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া দিলেও এরূপ ঘটার কারণ বালিকণা ও পানির আন্তঃআনবিক বল কঠিন ভূমির তুলনায় অনেক কম হয়। লোকের ওজন বালি ও পানির উপর ক্রিয়া করায় বালি ও পানি স্থানচ্যুত হয়ে আন্তঃআনবিক ব্যবধান বৃদ্ধি করে ফলে লোকটি নিচের দিকে নামতে থাকেন। এজন্য বালির উপরে হাঁটা কষ্টকর।

গ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়কে কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-3-2) - \hat{j}(-6+1) + \hat{k}(-4-1)$

$= -5\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$

অতএব, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $5\sqrt{3}$ বর্গ একক।

ঘ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

$$= \frac{(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{2 - 2 + 3}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+4+9}} = \frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{14}}$$

$\therefore\ \theta = 70.89°$

এখন, মনে করি, পরিবর্তিত কোণের মান θ′ হলে প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হবে,

$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}|$

বা, $AB\cos\theta' = AB\sin\theta'$

বা, $\tan\theta' = 1$

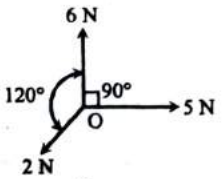
বা, $\theta' = 45°$

∴ প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কমাতে হবে

$= \theta - \theta' = 70.89° - 45° = 25.89°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যস্থ কোণের মান 25.89° কমালে তাদের ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হবে। সুতরাং অনিকের পর্যবেক্ষণ সঠিক।

প্রশ্ন ৮ চিত্র-১ অনুসারে O বিন্দুতে 2 kg ভরের কোনো স্থির বস্তুর উপর 4 s ধরে তিনটি বল ক্রিয়া করে। পরবর্তীতে একই বস্তুর উপর কেবলমাত্র 5 N ও 6 N বল 4 s ধরে ক্রিয়া করে।



চিত্র : ১

ক. কার্ল কী? ১

খ. রাস্তার বাঁকযুক্ত অংশে ভিতরের প্রান্ত অপেক্ষা বাইরের প্রান্ত উঁচু রাখা হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. প্রথম 4 s সময়ে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল লব্ধি বলের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উভয় ক্ষেত্রে লব্ধি বলের দিক একই হবে কি? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। ৪

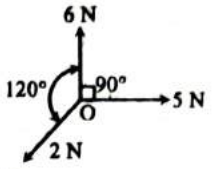
[দি. বো. '১৯]

৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং একে ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেনসিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর ∇ ও $\vec{A}$ -এর ভেক্টর গুণনই $\vec{A}$ -এর কার্ল।

খ রাস্তার বাঁকযুক্ত অংশে বাঁক নেওয়ার সময় কেন্দ্রবিমুখী বলের কারণে গাড়ী যেন ছিটকে বাইরে চলে না যায় সেজন্য রাস্তার বাঁকযুক্ত অংশে ভিতরের প্রান্ত অপেক্ষা বাইরের প্রান্ত কিছুটা উঁচু রাখা হয় যাতে ওজন (mg) এর উপাংশ ভিতরের দিকে কাজ করে কেন্দ্রবিমুখী বলকে প্রশমিত করতে পারে।

গ ধরি, তিনটি বলের লব্ধি 5 N বলের সাথে θ কোণে ক্রিয়ারত।



∴ বলের লম্বাংশ সূত্রানুসারে,

$R\cos\theta = 5 + 6\cos 90° + 2\cos(120° + 90°)$

বা, $R\cos\theta = 5 + 2\cos 210°$

বা, $R\cos\theta = 5 - \sqrt{3}$ ..... (i)

আবার, $R\sin\theta = 5\sin\theta + 6\sin 90° + 2\sin(120° + 90°)$

বা, $R\sin\theta = 6 - 1$

∴ $R\sin\theta = 5$ ..... (ii)

(ii) ÷ (i) করে পাই,

$$\tan\theta = \frac{5}{5-\sqrt{3}}$$

$\therefore\ \theta = 56.83°$

আবার, $(i)^2 + (ii)^2$ করে পাই,

$R^2 = \{(5-\sqrt{3})^2 + 5^2\}\ N^2$

বা, $R = 5.97$ N

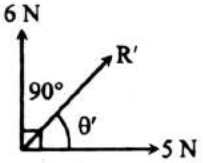
অতএব, প্রথম 4 s সময়ে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল লব্ধি বলের মান 5.97 N যা 5 N বলের সাথে 56.83° কোণে ক্রিয়াশীল।

ঘ ধরা যাক, ২য় ক্ষেত্রে 5 N ও 6 N বলের লব্ধি R′, 5 N বলের সাথে θ′ কোণে ক্রিয়ারত।

$$\tan\theta' = \frac{6\sin 90°}{5 + 6\cos 90°}$$

বা, $\tan\theta' = \frac{6}{5}$

$\therefore\ \theta' = 50.19°$



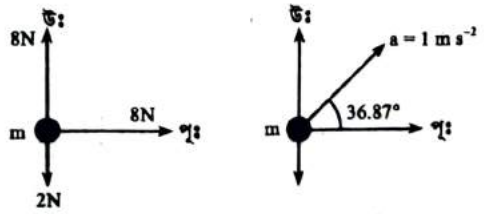
'গ' হতে পাই, প্রথম 4 s সময়ে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলত্রয়ের লব্ধি 5 N বলের সাথে θ = 56.83° কোণে ক্রিয়ারত।

এখানে, $\theta' \neq \theta$

অতএব, উভয় ক্ষেত্রে লব্ধি বলের দিক একই হবে না।

এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৮ এর প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ৯ m = (10 kg) ভরের একটি বস্তুর উপর একই সময়ে তিনটি বল ক্রিয়া করছে যা ১নং চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র-১ চিত্র-২

ক. কৌণিক বেগ কাকে বলে? ১

খ. বল ও সরণ ভেক্টর রাশি হলেও তাদের দ্বারা সৃষ্ট কাজ স্কেলার রাশি– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ১নং চিত্রে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বলের মান কত? ৩

ঘ. চিত্র-১ এর আলোকে চিত্র-২ এর সঠিকতা যাচাই কর। ৪

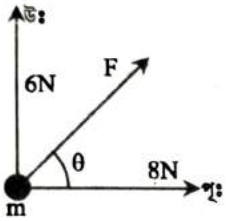
[ক সেট : ঢাকা, রাজশাহী, যশোর, সিলেট, দিনাজপুর বোর্ড ২০১৮]

৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি ($\Delta t \to 0$) হলে সময়ের সাপেক্ষে বস্তুর কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক বেগ বলে।

খ যে সকল রাশির মান এবং দিক উভয়ই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে। দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণন একটি স্কেলার রাশি এবং ক্রস গুণন ভেক্টর রাশি হয়। কাজের সংজ্ঞানুসারে আমরা জানি, কাজ হলো সরণের দিকে বলের উপাংশ × সরণ অথবা বল × বলের দিকে সরণের উপাংশের গুণফল। অর্থাৎ $W = FS\cos\theta$। বল ও সরণ উভয়ই দিক রাশি হওয়ায় দিক রাশির স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞানুসারে $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$. যেহেতু দুটি দিক রাশির স্কেলার গুণফল একটি রাশি তাই বল ও সরণের গুণফল একটি স্কেলার রাশি। যার কেবল মান আছে, দিক নেই।

গ m ভরের বস্তুটির উপর প্রযুক্ত উত্তরমুখী নিট বল $= (8 - 2)\,N = 6\,N$



∴ চিত্র-১ এর রূপ দাঁড়ায়

∴ বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বল,

$F = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2.6.8\cos 90°}\,N$

$= \sqrt{36 + 64}\,N$

$= \sqrt{100}\,N = 10\,N$

অতএব, ১নং চিত্রে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বলের মান 10 N।

ঘ চিত্র-২ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, m ভরের বস্তুটির ত্বরণ $m\,s^{-2}$ এবং এটি পূর্ব দিকের সাথে 36.87° কোণে ক্রিয়াশীল।

'গ' হতে চিত্র-১ অনুসারে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বল, $F = 10\,N$

∴ বস্তুটির ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = \frac{10\,N}{10\,kg} = 1\,m\,s^{-1}$ | এখানে, $m = 10\,kg$

ধরি, নিট বল, F পূর্ব দিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল।

সুতরাং 'গ' এ প্রদত্ত চিত্রানুসারে

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{6\sin 90°}{8 + 6\cos 90°}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87°$

$\therefore \theta = 36.87°$

অর্থাৎ, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বলটি পূর্বদিকের সাথে 36.87° কোণে ক্রিয়াশীল। অতএব, ত্বরণও পূর্বদিকের সাথে 36.87° কোণে ক্রিয়াশীল।

সুতরাং চিত্র-১ এর আলোকে চিত্র-২ সঠিক।

প্রশ্ন ১০ তিনটি বিন্দু A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 1, – 1) (3, – 2, 4) ও (1, – 3, 5)। কোনো সুষম বেগে গতিশীল বস্তুর B বিন্দু হতে C বিন্দুতে পৌঁছতে 2 sec সময় লাগলো। [সবকটি রাশি এসআই এককে প্রদত্ত]

ক. অনুকল্প কী? ১

খ. অভিকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. BC পথে বস্তুটির বেগ নির্ণয় কর। ৩

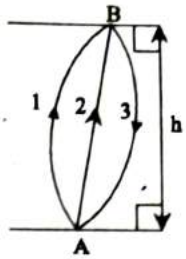
ঘ. উদ্দীপকের বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত অবস্থান ভেক্টরগুলো একই সমতলে অবস্থান করবে কী? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। ৪

[খ সেট : কুমিল্লা, চট্টগ্রাম, বরিশাল বোর্ড ২০১৮]

১০নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো পর্যবেক্ষণ, ঘটনা বা বৈজ্ঞানিক সমস্যার জন্য একটি সম্ভাব্য ব্যাখ্যা যা আরও অনুসন্ধানের মাধ্যমে যাচাই করা যায় তাই অনুকল্প।

খ মনে করি, m ভরের একটি বস্তুকে A বিন্দু হতে B বিন্দুতে আনা হলো (চিত্র) এর ফলে বস্তুটির উল্লম্ব সরণ হলো h।



বস্তুটির স্থানান্তর 1নং বা 2নং বা 3নং যেকোনো পথে হোক না কেন প্রত্যেক পথেই অভিকর্ষীয় বল $F = mg$ খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। বস্তুটিকে যেকোনো পথে A হতে B-তে আনলে অভিকর্ষ বল দ্বারা প্রতিটি পথেই সম্পন্ন কাজ হবে, $W_1 = -mgh$।

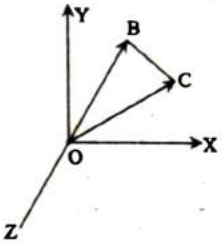
আবার, বস্তুটিকে যেকোনো পথে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে স্থানান্তর করা হলে, অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত সম্পন্ন কাজ হবে, $W_2 = mgh$

∴ A হতে B তে যেয়ে আবার A তে আসতে মোট কৃত কাজ,

$W = W_1 + W_2 = -mgh + mgh = 0$

কাজেই অভিকর্ষ বল একটি সংরক্ষণশীল বল।

গ প্রশ্নানুসারে, B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,



$\overrightarrow{OB} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OC} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} - (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

বা, $\overrightarrow{BC} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BC}$ পথে বস্তুটির বেগ, $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BC}}{t} = \frac{-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{t}$

$\therefore$ বেগের মান $= \frac{|\overrightarrow{BC}|}{t} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2}\,m\,s^{-1}$

$= 1.225\,m\,s^{-1}$

ঘ উদ্দীপক অনুসারে,

A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরগুলো একই সমতলে অবস্থান করবে যদি যেকোনো দুটির ক্রস গুণফলের সাথে অপরটির ডটগুণফল শূন্য হয়।

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4 - 2) - \hat{j}(8 + 3) + \hat{k}(-4 - 3)$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

এখন, $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 2 \times 1 + (-11) \times (-3) + (-7) \times 5$

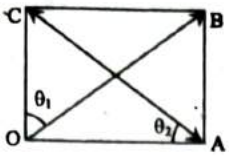
$= 2 + 33 - 35 = 35 - 35$

বা, $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$

যেহেতু $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$ অতএব শর্তানুযায়ী A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টরগুলো একই সমতলে অবস্থান করবে।

এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৭ এর প্রশ্ন ও উত্তর

১ [redacted] পাশের চিত্র অনুসারে OABC একটি আয়তক্ষেত্র। এর OA এবং OB বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নির্দেশিত হয়েছে।



ক. তাৎক্ষণিক বেগ কাকে বলে? ১

খ. পরবশ কম্পন ও অনুনাদের মধ্যে দুটি পার্থক্য লিখ। ২

গ. উদ্দীপক অনুসারে ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে θ_1 ও θ_2 এর মধ্যে কোনটি বড় তা গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বের কর। ৪

[ঢা. বো. '১৭]

১১নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে বেগ বা তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

খ কোনো কম্পনরত বস্তুকে অন্য একটি কম্পনক্ষম বস্তুর নিকট আনলে দ্বিতীয় বস্তুটিতে কম্পন শুরু হয়। এতে বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল যদি এর উপর আরোপিত পর্যায়কালের সমান হয় তখন বস্তুটির যে কম্পন হয় তাকে অনুনাদ বলে। অনুনাদী কম্পনে বিস্তার সর্বোচ্চ হলেও পরবশ কম্পনে বিস্তার কম-বেশি হতে পারে।

গ এখানে, OA বরাবর নির্দেশিত ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

OB বরাবর নির্দেশিত ভেক্টর $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{P} \times \vec{Q} = (\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) \times (2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4-3)\hat{i} + (-2-2)\hat{j} + (-3+4)\hat{k} = -7\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$$

এখন, ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{Q}|$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2}|-7\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + (1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{49 + 16 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{66} \text{ বর্গ একক}$$

ঘ এখানে, OA বরাবর নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

OB বরাবর নির্দেশিত ভেক্টর $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

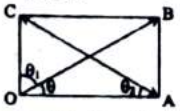
$$\cos\theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$$

$$= \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^1} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{2 + 6 - 2}{\sqrt{6}\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{102}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{102}}\right) = 53.55°$$

$$\therefore \quad \theta_1 = 90° - 53.55° = 36.45°$$



আবার, OABC আয়তক্ষেত্র বলে, $\theta = \theta_2 = 53.55°$ হবে।

এখানে, $\theta_2 > \theta_1$

অতএব, উদ্দীপক অনুসারে θ_1 ও θ_2 এর মধ্যে θ_2 বড়।

২ [redacted] কোনো এক বৃষ্টির দিনে নাফিসা জানালার পাশে দাঁড়িয়ে দেখছিল বৃষ্টি উল্লম্বভাবে 6 km h^{-1} বেগে পতিত হচ্ছে। নাফিসা লক্ষ করল, রাস্তায় একজন লোক 4 km h^{-1} বেগে হাঁটছে এবং অপরজন 8 km h^{-1} বেগে সাইকেলে যাচ্ছে। তাদের উভয়ের ছাতা ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা।

ক. একক ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. কোনো রাশির পরিমাপ প্রকাশ করতে এককের প্রয়োজন হয় কেন? ২

গ. উদ্দীপকে হেঁটে চলা লোকটির সাপেক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত? ৩

ঘ. হেঁটে চলন্ত লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়– নাফিসার পর্যবেক্ষণটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[রা. বো. '১৭]

১২নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টরের মান এক একক হলে তাই একক ভেক্টর।

খ কোনো পরিমাপকে প্রকাশ করার জন্য পরিমাপের এককের প্রয়োজন। যেকোনো পরিমাপের জন্য প্রয়োজন একটি স্ট্যান্ডার্ড বা আদর্শ পরিমাণ যার সাথে তুলনা করে পরিমাপ করা যায়। যেমন–

১. কোনো একটি বস্তুর দৈর্ঘ্য সম্পর্কে প্রকৃত ধারণা পাওয়ার জন্য দৈর্ঘ্যের সংখ্যাগত মানের পাশে একক ব্যবহার করতে হয়। যেমন, একটি বস্তুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার।

২. কোনো বস্তুর ভর সম্পর্কে প্রকৃত ধারণা পাওয়ার জন্য ওজনের সংখ্যাগত মানের পাশে একক ব্যবহার করতে হয়। যেমন, বস্তুর ওজন 5 কেজি (kg)।

৩. আবার সময়ের প্রকৃত ধারণা পাওয়ার জন্য সময়ের সংখ্যাগত মানের পাশে একক ব্যবহার করতে হয়। যেমন, দুপুর 2 ঘণ্টা 30 মিনিট 20 সেকেন্ড।

গ এখানে, বৃষ্টির বেগ $v = 6$ km h^{-1}

হেঁটে চলা লোকটির বেগ $u = 4$ km h^{-1}

মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$

লব্ধি বেগ $W = ?$

আমরা জানি, $W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$$= \sqrt{4^2 + 6^2 + 2 \times 4 \times 6 \times \cos 90°} = 7.21 \text{ km h}^{-1}$$

অতএব, হেঁটে চলা লোকটির পক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ 7.21 km h^{-1}।

ঘ এখানে, বৃষ্টির বেগ $v = 6$ km h^{-1}

হেঁটে চলা লোকের বেগ $u = 4$ km h^{-1}

সাইকেলে চলা লোকের বেগ, $u_1 = 8$ km h^{-1}

হেঁটে চলা লোকটি উল্লম্ব দিকের সাথে θ_1 কোণে ছাতা ধরলে,

$$\tan\theta_1 = \frac{u}{v} = \frac{4 \text{ km h}^{-1}}{6 \text{ km h}^{-1}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7°$$

সাইকেলে চলা লোকটি উল্লম্বের সাথে θ_2 কোণে ছাতা ধরলে,

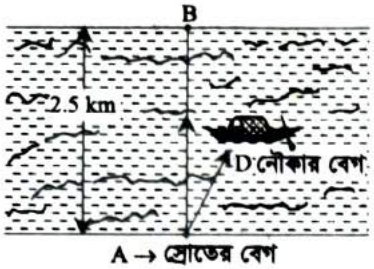
$$\tan\theta_2 = \frac{u_1}{v} = \frac{8 \text{ km h}^{-1}}{6 \text{ km h}^{-1}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$$

এখানে, $\theta_1 \neq \theta_2$

অতএব, হেঁটে চলন্ত লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একই রকমভাবে বাঁকা নয়। অর্থাৎ নাফিসার পর্যবেক্ষণটি সঠিক।

প্রশ্ন ১৩ একটি নৌকা চিত্রানুযায়ী 2.5 km প্রস্থের একটি নদীতে A অবস্থান হতে অন্য প্রান্তে AD বরাবর যাচ্ছে।



A → স্রোতের বেগ

স্থির পানিতে নৌকার বেগ $= (3\hat{i} + 3\hat{j})\ m\ s^{-1}$ এবং স্রোতের বেগ $= 2\hat{i}\ m\ s^{-1}$. অন্য একটি ক্ষেত্রে নৌকাটিকে AB বরাবর একই দ্রুতিতে চালানো হয়।

ক. স্বাধীন ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রত্যায়নী বল দ্বারা কৃতকাজ কখন ঋণাত্মক হবে– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে কোন ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর তীরে পৌঁছবে তা গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক উত্তর দাও। ৪

[য. বো. '১৭]

১৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু কোথায় হবে তা যদি ইচ্ছেমতো ঠিক করা যায়, তবে ঐ ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।

খ প্রত্যায়নী বল দ্বারা কৃতকাজ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। যেমন প্রান্তে ভরযুক্ত দোলায়মান স্প্রিং-এর ভর যখন সাম্যাবস্থান হতে গতি জড়তার কারণে বিস্তারের প্রান্ত বিন্দুর দিকে সরে যেতে থাকে তখন প্রত্যায়নী বলের দিক হয় ভরের অবস্থান হতে সাম্যাবস্থানের দিকে। কিন্তু ঐ মুহূর্তে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সরণ ঘটে সাম্যাবস্থান হতে বিস্তারের প্রান্তের দিকে অর্থাৎ প্রত্যায়নী বলের বিপরীতে। তখন $W = \vec{F}.\vec{s} = FS\cos 180° = -FS$ সূত্রানুসারে প্রত্যায়নী বল দ্বারা কৃতকাজ ঋণাত্মক হয়।

গ এখানে, নৌকার বেগ $\vec{u} = (3\hat{i} + 3\hat{j})\ m\ s^{-1}$

স্রোতের বেগ $\vec{v} = 2\hat{i}\ m\ s^{-1}$

$\therefore\ \vec{u} \times \vec{v} = (3\hat{i} + 3\hat{j}) \times 2\hat{i}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (0-6)\hat{k} = -6\hat{k}$$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-6)^2} = 6$

$\therefore$ নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর,

$$\hat{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{-6\vec{k}}{6} = -\hat{k}$$

নির্ণেয় লম্ব বরাবর একক ভেক্টর $-\hat{k}$

ঘ এখানে, নৌকার বেগ $\vec{u} = (3\hat{i} + 3\hat{j})\ m\ s^{-1}$

স্রোতের বেগ $\vec{v} = 2\hat{i}\ m\ s^{-1}$

$\therefore\ u = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ এবং $v = \sqrt{2^2} = 2$

প্রথম ক্ষেত্রে, $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

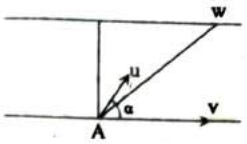
$\vec{u}.\vec{v} = uv\cos\theta$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{uv} = \dfrac{(3\hat{i} + 3\hat{j}).2\hat{i}}{\sqrt{18}.2} = \dfrac{6}{2\sqrt{18}}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

$t_1 = \dfrac{d}{u\sin\alpha}$

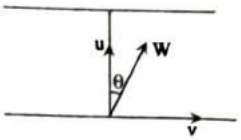
$= \dfrac{2500}{\sqrt{18}\sin 45°} = 833.33\ s$



দ্বিতীয় ক্ষেত্রে :

$w = \sqrt{u^2 + v^2}$

$\cos\theta = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$



$\therefore\ d = w\cos\theta \times t_2$

$= \dfrac{\sqrt{u^2 + v^2} \times u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \times t_2$

বা, $t_2 = \dfrac{d}{u} = \dfrac{2500}{\sqrt{18}}\ s = 589.25\ s.$

এখানে, $t_2 < t_1$

অতএব, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অর্থাৎ AB বরাবর চলার ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর তীরে পৌঁছবে।

প্রশ্ন ১৪ দুটি বিন্দুর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় স্থানাঙ্কদ্বয় যথাক্রমে A(1, 0, – 1) এবং B(1, 1, 0)।

ক. ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি বিবৃত কর। ১

খ. একটি বিপ্রতীপ ভেক্টরকে সমরেখ ভেক্টর বলা যেতে পারে– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. দুটি বিন্দুর A ও B এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের X অক্ষের উপর লম্ব অভিক্ষেপ এর তুলনামূলক বিশ্লেষণ কর। ৪

[কু. বো. '১৭]

১৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি হলো– দুটি ভেক্টর যে সমতলে অবস্থিত সে সমতলের অভিলম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু রেখে প্রথম ভেক্টরের দিক থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।

খ আমরা জানি, দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। আবার দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। অর্থাৎ বিপ্রতীপ ভেক্টরগুলো পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করে যা সমরেখ ভেক্টরের শর্ত পূরণ করে। এজন্য একটি বিপ্রতীপ ভেক্টরকে সমরেখ ভেক্টর বলা যেতে পারে।

গ এখানে, ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক, A(1, 0, – 1) এবং B(1, 1, 0)

$\therefore\ \vec{AB} = (1-1)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + \{0-(-1)\}\hat{k}$

$= 0\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} = \hat{j} + \hat{k}$

এখন, $|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore\ \vec{AB}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \dfrac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \dfrac{\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j} + \hat{k})$

ঘ এখানে, A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{OA} = \hat{i} - \hat{k}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{OB} = \hat{i} + \hat{j}$

এখন, X অক্ষের সাথে $\vec{OA}$ সৃষ্ট কোণ θ হলে,

X অক্ষের উপর $\vec{OA}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ–

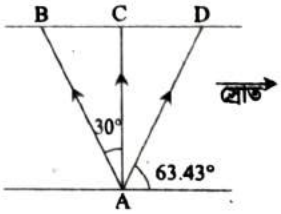
$$OA \cdot \cos\theta = \frac{\hat{i}\cdot(\hat{i}-\hat{k})}{|\hat{i}|} = \frac{1-0}{\sqrt{12}} = \frac{1}{1} = 1$$

আবার, X অক্ষের সাথে $\vec{OB}$ এর সৃষ্ট কোণ α হলে, X অক্ষের উপর $\vec{OB}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ,

$$OB\cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(\hat{i}+\hat{j})}{|\hat{i}|} = \frac{1+0}{\sqrt{1^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

অতএব, দুটি বিন্দু A ও B এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের X অক্ষের উপর লব্ধ অভিক্ষেপ এর মান সমান।

প্রশ্ন ১৫ চিত্রানুযায়ী একটি নদী 31 km প্রশস্ত। দুটি ইঞ্জিন বোট আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য A হতে অভিন্ন বেগে যাত্রা শুরু করল যাদের একটি AB বরাবর অপরটি AC বরাবর। প্রথমটি আড়াআড়ি পার হয়ে C বিন্দুতে পৌছালেও দ্বিতীয়টি D বিন্দুতে পৌছায়। স্রোতের বেগ 9 km h^{-1}।



ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি শূন্য কি-না? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপক হতে নৌকার অভিন্ন বেগ হিসাব কর। ৩

ঘ. নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পারে পৌছায় কি-না গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

[চ. বো. '১৭]

১৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে অর্থাৎ সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগের মান সর্বনিম্ন কিন্তু শূন্য নয়। কারণ প্রাসটির যখন উল্লম্ব বরাবর গতিবেগ শূন্য হয় ঠিক তখনও আদি বেগের অনুভূমিক উপাংশের জন্য এর মধ্যে নিম্নমুখী একটি বেগ ক্রিয়া করে এবং প্রাসের বেগ নিম্নমুখী হয়ে যায়। ফলে গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতায় প্রাসের বেগ শূন্য নয় বরং সর্বনিম্ন হয়।

গ এখানে, স্রোতের বেগ $v = 9$ km h^{-1}

ধরি, বোটের অভিন্ন বেগ u km h^{-1}

১ম বোটের ক্ষেত্রে, v ও u এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = (90 + 30)° = 120°$

লব্ধি, v এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে,

$$\therefore \tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$$

$$\text{বা, } \cot 90° = \frac{v + u\cos\alpha}{u\sin\alpha}$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{v + u\cos\alpha}{u\sin\alpha}$$

$$\text{বা, } v + u\cos\alpha = 0$$

$$\text{বা, } u = \frac{-v}{\cos\alpha} = \frac{-9 \text{ km h}^{-1}}{\cos 120°} = 18 \text{ km h}^{-1}$$

অতএব, নৌকার অভিন্ন বেগ 18 km h^{-1}।

ঘ এখানে, নৌকার অভিন্ন বেগ $u = 18$ km h^{-1} [গ নং থেকে প্রাপ্ত]

স্রোতের বেগ $v = 9$ km h^{-1}

নদীর প্রশস্ততা $d = 31$ km

১ম নৌকার ক্ষেত্রে, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = (90° + 30°) = 120°$

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $W = \sqrt{u^2 - v^2}$

$= \sqrt{(18^2 - 9^2)} = 15.59$ km h^{-1}

$\therefore$ নদী পার হতে ১ম নৌকার সময় লাগবে,

$$t_1 = \frac{d}{W} = \frac{31 \text{ km}}{15.59 \text{ km h}^{-1}} = 1.99 \text{ h}$$

আবার, $\angle CAD = 90° - 63.43° = 26.57°$

$$\therefore \cos 26.57° = \frac{AC}{AD}$$

$$\text{বা, } AD = \frac{AC}{\cos 26.57°}$$

$$= \frac{d}{\cos 26.57°} = \frac{31 \text{ km}}{\cos 26.57°} = 34.661 \text{ km}$$

২য় নৌকার ক্ষেত্রে, v ও u এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $W_1 = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta}$

$= \sqrt{(18)^2 + 9^2 + 2 \times 18 \times 9 \times \cos 90°}$ km h^{-1}

$= 9\sqrt{5}$ km h^{-1}

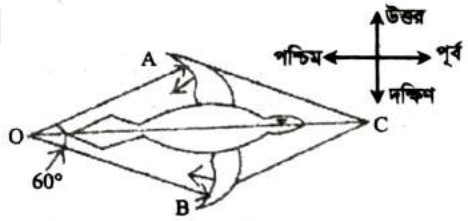
$\therefore$ নদী পাড়ি দিতে ২য় নৌকার সময় লাগবে,

$$t_2 = \frac{AD}{W_1} = \frac{34.661 \text{ km}}{9\sqrt{5} \text{ km h}^{-1}} = 1.72 \text{ h}$$

এখানে, $t_1 \neq t_2$

অতএব, দুটি নৌকা একই সময়ে নদীর অপর পাড়ে পৌছায় নি।

প্রশ্ন ১৬



চিত্রানুযায়ী একটি পাখি সমতল ভূমির সমান্তরালে আকাশে উড়ছে। পাখিটির উভয় পাখা কর্তৃক ধাক্কার পরিমাণ 5 N।

ক. কার্ল কাকে বলে? ১

খ. আমাদের পায়ে হাঁটা কীভাবে ভেক্টর বিভাজনের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়? ২

গ. চিত্রের OC বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান কত? ৩

ঘ. AO বরাবর পাখার ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে পাখিটি কোনদিকে উড়বে? গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। ৪

[সি. বো. '১৭]

১৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং একে ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেন্সিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর ∇ ও $\vec{A}$-এর ভেক্টর গুণনই $\vec{A}$-এর কার্ল।

খ আমাদের হাঁটার সময় সামনের পা ভূমির উপর লম্বভাবে বল প্রয়োগ করে। ফলে ভূমিও লম্বভাবে সমান প্রতিক্রিয়া বল দেয়। কিন্তু পিছনের পা ভূমির উপর তীর্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। তাই বল দুটি উপাংশে বিভাজিত হয়। লম্ব বরাবর উপাংশটি ভূমির প্রতিক্রিয়া দ্বারা নিঃশেষ হয়। কিন্তু তীর্যকভাবে ক্রিয়ারত বলের উপাংশের প্রতিক্রিয়ার কারণেই আমরা সামনের দিকে এগিয়ে যাই। অর্থাৎ আমাদের হাঁটার ক্ষেত্রে পিছনের পায়ের ভূমিকাই মুখ্য।

গ এখানে, OA ও BO বরাবর পাখা কর্তৃক ধাক্কার পরিমাণ 5 N
সুতরাং OA ও OB বরাবর বাতাসের প্রতিক্রিয়া বলের মান 5 N.
OA ও OB এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 60°$

$\therefore$ OC বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান R হলে,

$$R = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5 \times \cos 60°}$$
$$= \sqrt{25 + 25 + 50 \times \frac{1}{2}} = 8.66 \text{ N}$$

অতএব, OC বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান 8.66 N।

ঘ AO বরাবর পাখার ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে পরিবর্তিত ধাক্কার মান হবে, $P = 2 \times 5 \text{ N} = 10 \text{ N}$

BO বরাবর ধাক্কার পরিমাণ, $Q = 5 \text{ N}$

সুতরাং OA ও OB প্রতিক্রিয়া বলের পরিমাণ হবে যথাক্রমে, $P = 10$ N এবং $Q = 5$N [শুধু মান নিয়ে]

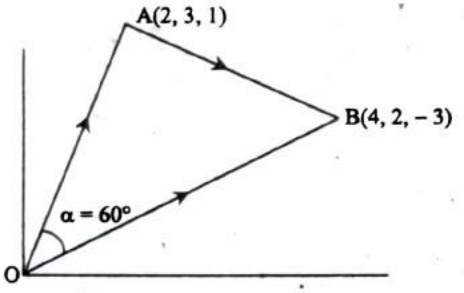
P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 60°$

এখন, P ও Q এর লব্ধি বল Q_1 এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\theta = \frac{P \sin\alpha}{Q + Q\cos\alpha}$$
$$= \frac{10 \sin 60°}{5 + 10 \cos 60°} = \frac{5\sqrt{3}}{5+5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 40.89°$$

সুতরাং AO বরাবর পাখার ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে পাখিটি OB এর সাথে 40.89° কোণ করে অর্থাৎ উত্তর দিকের সাথে (60° − 40.89°) বা 19.11° কোণে পূর্বদিকে উড়বে।

প্রশ্ন ১৭ নিম্নের চিত্রে দুটি বিন্দু A ও B স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে :



ক. নাল ভেক্টরের সংজ্ঞা লেখ। ১
খ. একটি ভারী বস্তুকে স্বল্প কোণে টেনে নেওয়ার কারণ ব্যাখ্যা কর। ২
গ. AB সংযোগকারী ভেক্টরের মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. উদ্দীপকের ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে কি? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। ৪

[ব. বো. '১৭]

১৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাই শূন্য বা নাল ভেক্টর।

খ আমরা জানি, m ভরের কোনো বস্তুকে θ কোণে টেনে নেওয়ার ক্ষেত্রে বস্তুর গতির দিকে কার্যকর বল হয় $mg \cos\theta$, এখানে বস্তুর ভর m ও অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর মান অপরিবর্তনীয় বলে বস্তুর গতি নির্ভর করে কোণ θ এর উপর। আবার θ এর মান যত কম হবে cos θ এর মান তত বেশি হবে এবং বস্তুটি টেনে নেওয়াও তত সহজ হবে। এজন্যই একটি ভারী বস্তুকে স্বল্প কোণে টেনে নেওয়া হয়।

গ এখানে, A(2, 3, 1) এবং B(4, 2, – 3)

$\therefore \vec{AB} = (4-2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (-3-1)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

অতএব, A ও B সংযোগকারী ভেক্টরের মান $\sqrt{21}$ একক।

ঘ এখানে, A (2, 3, 1) ; B (4, 2, – 3)

$\therefore \vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$ [গ নং থেকে প্রাপ্ত]

আবার, $\vec{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

বা, $\vec{BO} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$OA^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$

$AB^2 = 2^2 + (-1)^2 + (-4)^2 = 21$

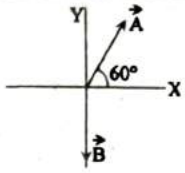
$BO^2 = (-4)^2 + (-2)^2 + 3^2 = 29$

এখানে, $BO^2 \neq OA^2 + AB^2$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী নয়।

এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৬ এর প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১৮ চিত্রে $|\vec{A}| = 5$ এবং $|\vec{B}| = 6$.



ক. স্পর্শ কোণ কাকে বলে? ১
খ. ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখার সকল বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান কেন? ২
গ. চিত্রে $(\vec{A} - \vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. উদ্দীপকে $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত– গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

[ঢা. বো. '১৬]

১৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক কঠিন ও তরল পদার্থের স্পর্শ বিন্দু হতে বক্রাকার তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন পদার্থের সাথে তরলের ভিতরে যে কোণ সৃষ্টি করে তাকে উক্ত কঠিন ও তরলের স্পর্শ কোণ বলে।

খ আমরা জানি, সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক বেগ বলা হয়। এখন ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখা যে গতিতেই চলুক না কেন পাখার প্রতিটি বিন্দু সমান সময়ে সমান কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে। এজন্যই ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখার সকল বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান।

গ এখানে, x অক্ষের সাথে $\vec{A}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°.

$\therefore A_x = |A| \cos\theta = 5 \cos 60° = \frac{5}{2}$

$A_y = |A| \sin\theta = 5 \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \vec{A} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

আবার, x অক্ষের সাথে $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ 270°

$\therefore B_x = |B| \cos\theta = 6 \cos 270° = 0$

$B_y = |B| \sin\theta = 6 \sin 270° = -6$

$\therefore \vec{B} = -6\hat{j}$

এখন, $\vec{A} - \vec{B} = \left(\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) - (-6\hat{j})$

$= \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j} + 6\hat{j} = 2.5\,\hat{i} + 10.33\,\hat{j}$

$\vec{A} - \vec{B}$ এর মান $= \sqrt{(2.5)^2 + (10.33)^2} = 10.63$

ঘ এখানে, $\vec{A} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}$ এবং $\vec{B} = -6\hat{j}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \left(\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) \times (-6\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{5}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -15\hat{k}$$

আবার, $\vec{A} + \vec{B} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j} + (-6\hat{j}) = \frac{5}{2}\hat{i} - 1.67\hat{j}$

এখন, $(\vec{A} \times \vec{B})$ এবং $(\vec{A} + \vec{B})$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = |\vec{A} \times \vec{B}|\,|\vec{A} + \vec{B}| \cos\theta$$

বা, $(-15\hat{k}) \cdot \left(\frac{5}{2}\hat{i} - 1.67\hat{j}\right) = |\vec{A} \times \vec{B}|\,|\vec{A} + \vec{B}| \cos\theta$

বা, $0 = |\vec{A} \times \vec{B}|\,|\vec{A} + \vec{B}| \cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{0}{|\vec{A} \times \vec{B}|\,|\vec{A} + \vec{B}|} = 0$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

অতএব, $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত।

১ কোনো এক বৃষ্টির দিনে আসাদ ঘরের দরজায় দাঁড়িয়ে বৃষ্টি দেখছিল। বৃষ্টি উল্লম্বভাবে $6\ km\ h^{-1}$ বেগে পড়ছিল। এমন সময় আসাদ দেখল এক ব্যক্তি উল্লম্বের সাথে 33.8° কোণে ছাতা ধরে পায় হেঁটে চলছে। অপর এক ব্যক্তি উল্লম্বের সাথে 53.06° কোণে ছাতা ধরে সাইকেলে চলছে। উভয়ই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেল।

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রাসের বেগ বিশ্লেষণ কর। ২

গ. পায় হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ব্যক্তিদ্বয়ের ভিন্ন কোণে ছাতা ধরার কারণ ব্যাখ্যা কর। ৪

[য. বো. '১৬]

১৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ একটি প্রাসকে θ কোণে v_0 আদিবেগে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে এই বেগ দুটি উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়। একটি অনুভূমিক বরাবর $v_0 \cos\theta$ এবং অপরটি উল্লম্ব বরাবর $v_0 \sin\theta$। সর্বোচ্চ উচ্চতায় প্রাসটির উল্লম্ব বেগ থাকে না।

গ আমরা জানি,

$\tan\theta = \frac{u}{v}$

বা, $\tan 33.8° = \frac{u}{6}$

বা, $u = 6 \times \tan 33.8° = 4\ km\ h^{-1}$

এখানে,
বৃষ্টির বেগ $v = 6\ km\ h^{-1}$
উল্লম্বের সাথে সৃষ্ট কোণ, $\theta = 33.8°$
লোকটির বেগ, $u = ?$

অতএব, পায়ে হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ $4\ km\ h^{-1}$।

ঘ এখানে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6\ km\ h^{-1}$

উল্লম্বের সাথে সাইকেল চালকের ছাতার সৃষ্ট কোণ, $\theta_1 = 53.06°$

এখন, সাইকেল চালকের বেগ u_1 হলে,

$\tan\theta_1 = \frac{u_1}{v}$

বা, $\tan 53.06° = \frac{u_1}{6}$

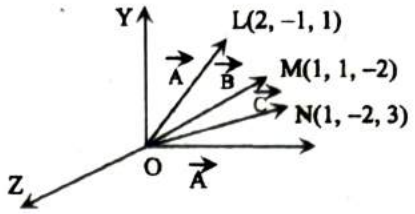
বা, $u_1 = 6 \times \tan 53.06° = 8\ km\ h^{-1}$

'গ' হতে পাই, হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ, $u = 4\ km\ h^{-1}$

এখানে, $u \neq u_1$

অতএব, ব্যক্তিদ্বয়ের বেগের ভিন্নতার কারণে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ভিন্ন কোণে ছাতা ধরতে হয়েছে।

২



ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{C}$, X-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কত? ৩

ঘ. $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে একই সমতলে অবস্থান করে কি-না গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

[কু. বো. '১৬]

২০নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ ট্রলি ব্যাগের হাতল যত লম্বা হয় ব্যাগটি টানার সময় তা ভূমির সাথে তত কম কোণ তৈরি করে। অর্থাৎ হাতলটি ভূমির বেশি কাছাকাছি থাকে। আর θ এর মান কম হলে $\cos\theta$ এর মান বেশি হয়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ভূমি বরাবর বেগের মান বেশি হয় যাতে ব্যাগটি সহজেই টেনে নেওয়া যায়। এজন্যই ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।

গ এখানে, $\vec{C} = i - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

এখন, X-অক্ষের সাথে $\vec{C}$ এর উৎপন্ন কোণ θ_1 হলে,

$$\cos\theta_1 = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot \hat{i}}{|\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}| \cdot |\hat{i}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

বা, $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = 74.5°$.

অতএব x অক্ষের সাথে $\vec{C}$ এর উৎপন্ন কোণ 74.5°.

ঘ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

এখন, $\vec{B} \times \vec{C} = (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (3-4)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$$

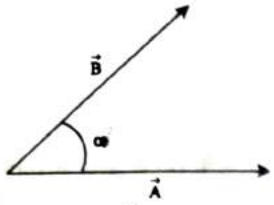
$$= -\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

আবার, $(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (-\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

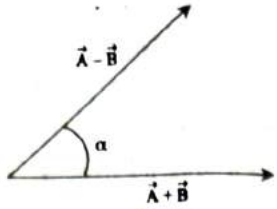
$$= -2 + 5 - 3 = 0$$

অতএব, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে লম্বভাব অবস্থান করে অর্থাৎ এই ভেক্টর দুটি একই সমতলে অবস্থান করবে না।

প্রশ্ন ২১ $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}; \vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$



চিত্র-১



চিত্র-২

ক. লব্ধ একক কী? ১

খ. দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. α-এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. α-এর মানের পরিবর্তন কত হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$-এর অভিক্ষেপ এক-চতুর্থাংশ হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

[চ. বো. '১৬]

২১নং প্রশ্নের উত্তর

ক যেসব ভৌত রাশির একক স্বাধীন বা নিরপেক্ষ নয় অর্থাৎ অন্য কোনো মৌলিক রাশির এককের উপর নির্ভর করে এবং এক বা একাধিক মৌলিক রাশির এককের গুণফল বা ভাগফল থেকে উৎপন্ন হয় তাই হলো লব্ধ একক।

খ দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান। এক্ষেত্রে ভেক্টরদ্বয় অসমান হওয়ার কারণে এদের বিয়োগফল কখনো শূন্য হবে না। তাই দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না।

গ আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\alpha = ?$

$$= \frac{(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\times\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{12-6-2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}} = \frac{4}{3\times 7}$$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right) = 79.02°$

অতএব, α এর মান 79.02°.

ঘ $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ

$$B\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A|} = \frac{(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{12-6-2}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

এখন, ধরি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ এক চতুর্থাংশ হবে।

$B\cos\theta = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}$

বা, $7\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ [গ হতে প্রাপ্ত $|\vec{B}| = B = 7$]

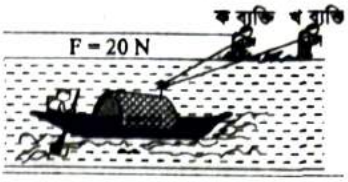
বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{21}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{21}\right) = 87.27°$.

'গ' হতে পাই, $\alpha = 79.02°$

∴ α এর মান বৃদ্ধি করতে হবে $= 87.27° - 79.02°$
$= 8.27°$.

প্রশ্ন ২২



ক. টর্ক কাকে বলে? ১

খ. $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$ হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. যদি ক ব্যক্তি অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে গুণ টানে তবে বলের অনুভূমিক উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. যদি ক ব্যক্তি ও খ ব্যক্তি একই বলে নৌকাটি টানে তবে কে সহজেই নৌকাটি চালাতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও। ৪

[সি. বো. '১৬]

২২নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হলে বস্তুটির মধ্যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরবার যে প্রবণতা সৃষ্টি হয় তাকে বলের ভ্রামক বা টর্ক বলে।

খ এখানে, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর আয়ত একক ভেক্টর। আমরা জানি, X ও Y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ = 90°.

$\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর ডট গুণফল $\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{j}|\cos\theta$
$= \sqrt{1^2}\sqrt{1^2}.\cos 90° = (1)\times(1)\times 0 = 0$

অতএব, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° বলে $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$ হয়।

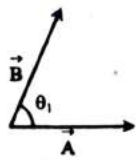
গ এখানে, বল F = 20 N

উৎপন্ন কোণ, θ = 45°

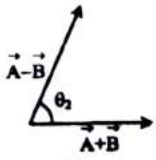
∴ অনুভূমিক বরাবর বলের উপাংশ $= F\cos\theta$
$= 20\text{ N}\times\cos 45°$
$= 20\text{ N}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 14.14\text{ N}$

ঘ এখানে, 'ক' ব্যক্তি ও 'খ' ব্যক্তি নৌকাকে গুণ বেধে নদীর পাড় দিয়ে F = 20 N বলে টেনে নিচ্ছে। এখন বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা প্রযুক্ত বলকে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়। যথা— অনুভূমিক উপাংশ F cos θ এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ। বলের অনুভূমিক উপাংশ F cos θ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ নৌকার হাল দিয়ে প্রতিহত করা হয়। এখন গুণ যত লম্বা হবে θ এর মান তত কম হবে। ফলে F sin θ এর মান কম হবে এবং F cos θ এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে, উদ্দীপক থেকে পাই, ক ব্যক্তির চেয়ে খ ব্যক্তির গুন বেশি লম্বা। ফলে খ ব্যক্তি নৌকা সহজে চালাতে পারবে।

প্রশ্ন ২৩



চিত্র-১



চিত্র-২

উপরের চিত্রে $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$.

ক. ঘাতবল কাকে বলে? ১

খ. একটি ইঞ্জিনের দক্ষতা 60% বলতে কি বুঝায়? ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে θ_1 এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে $\theta_1 = \theta_2$ হওয়া সম্ভব কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও। ৪

[ব. বো. '১৬]

২৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাতবল বলে।

খ কোনো ইঞ্জিনের দক্ষতা 60% বলতে বুঝায় যে, ইঞ্জিনটিতে 100 একক শক্তি সরবরাহ করলে তার মাত্র 60 একক শক্তি কাজে লাগবে এবং 40 একক শক্তির অপচয় হবে।

গ এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta_1$

বা, $\cos\theta_1 = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \dfrac{(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\times\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}$

$= \dfrac{2+3+6}{\sqrt{3}\times\sqrt{49}} = \dfrac{11}{7\sqrt{3}}$

বা, $\theta_1 = \cos^{-1}\left(\dfrac{11}{7\sqrt{3}}\right) = 24.87°.$

ঘ এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{A}+\vec{B} = (\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) + (2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}) = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{A}-\vec{B} = (\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) - (2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}) = -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = |\vec{A}+\vec{B}|\cdot|\vec{A}-\vec{B}|\cos\theta_2$

বা, $(3\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k})\cdot(-\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}) = \sqrt{3^2+(-4)^2+7^2}$
$\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+(-5)^2}\cdot\cos\theta_2$

বা, $-3-8-35 = \sqrt{74}\cdot\sqrt{30}\cos\theta_2$

বা, $\cos\theta_2 = \dfrac{-46}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{30}}$

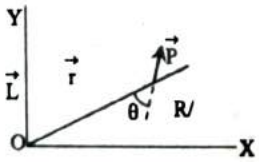
বা, $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\dfrac{-46}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{30}}\right) = 167.5°$

'গ' হতে প্রাপ্ত $\theta_1 = 24.87°$

এখানে, $\theta_1 \neq \theta_2$.

অতএব, উদ্দীপকে $\theta_1 = \theta_2$ হওয়া সম্ভব নয়।

[redacted] R বিন্দুতে বস্তুর ভর $m = 2$ kg, $\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$ m, $\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$ m s^{-1}, $\vec{P}$ = ভরবেগ।



R বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m = 2$ kg

$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$ m, $\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$ m s^{-1}, $\vec{P}$ = ভরবেগ

ক. মুক্তিবেগ কাকে বলে? ১

খ. বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $b = 2$ হলে বস্তুর কৌণিক ভরবেগের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল ও লম্ব হলে b এর মানের কিরূপ পরিবর্তন হবে– বিশ্লেষণ কর। ৪

[দি. বো. '১৬]

২৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তু নিক্ষেপ করা হলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না সে বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

খ আমরা জানি, r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে m ভরের একটি বস্তু v বেগে ঘূর্ণনশীল থাকলে এর কেন্দ্রমুখী বল হবে, $F = \dfrac{mv^2}{r}$.

অর্থাৎ কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক, ব্যাসার্ধ বৃদ্ধি পেলে কেন্দ্রমুখী বল হ্রাস পাবে, ব্যাসার্ধ হ্রাস পেলে কেন্দ্রমুখী বল বৃদ্ধি পাবে।

গ এখানে, $\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$

$= (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ m [b = 2 বসিয়ে]

ভর, $m = 2$ kg এবং বেগ $\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$ m s^{-1}

$\therefore \vec{P} = m\vec{v} = 2(2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$ kg m s^{-1} $= (4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k})$ kg m s^{-1}

এখন কৌণিক ভরবেগ,

$L = \vec{r}\times\vec{P}$

$= (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{vmatrix}$

$= (-8+16)\hat{i} + (8-4)\hat{j} + (-8+8)\hat{k} = (8\hat{i} + 4\hat{j})$ kg m^{2}s^{-1}

ঘ এখানে, $\vec{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k}$ এবং $\vec{v} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$

বা, $(\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})\cdot(2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

বা, $2 + 8 + 2b = 0$

বা, $2b = -10$

বা, $b = -5$

$\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\vec{r}\times\vec{v} = 0$

বা, $(\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k}) \times (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & b \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(-4+4b)\hat{i} + (2b-2)\hat{j} + (-4+4)\hat{k} = 0$

বা, $(-4+4b)\hat{i} + (2b-2)\hat{j} = 0$

উভয় পক্ষের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-4 + 4b = 0$ আবার, $2b - 2 = 0$

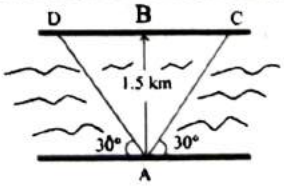
বা, $4b = 4$ বা, $2b = 2$

$\therefore b = 1$ বা, $b = 1$

$\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল ও লম্ব হলে b এর মানের পরিবর্তন হবে $= 1 - (-5) = 1 + 5 = 6$.

এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৫ এর প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ২৫ চিত্রে প্রবহমান নদীটির প্রশস্ততা 1.5 km এবং স্রোতের বেগ 4 km h^{-1}। রহমত মাঝি AB বরাবর নৌকা চালনা করে AC বরাবর ওপারে পৌঁছালেন। নৌকার বেগ 3 km h^{-1}।



ক. স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাকে বলে? ১

খ. ভর ও জড়তার ভ্রামকের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। ৩

ঘ. AD বরাবর নৌকা চালিয়ে রহমত মাঝি কি B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবেন? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। ৪

[ঢা. বো. '১৫]

২৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি বস্তুর মধ্যে কোনো সংঘর্ষের পূর্ব মুহূর্তের গতিশক্তির সমষ্টি সংঘর্ষের পরের গতিশক্তির সমষ্টির সমান হলে এবং বস্তুদ্বয় সংঘর্ষের পর আলাদা থাকলে সে ধরনের সংঘর্ষকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

খ নিচে ভর ও জড়তার ভ্রামকের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা করা হলো : কোনো বস্তুর মধ্যকার মোট উপাদানের পরিমানই ঐ বস্তুর ভর। তবে কোনো বস্তু কোনো বিন্দু বা অক্ষকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে ঐ বস্তু প্রত্যেকটি কণার ভর এবং ঘূর্ণন অক্ষ হতে নিজ নিজ

দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টিকে ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক বলে। ভরের একক kg হলেও জড়তার ভ্রামকের একক $kg\ m^2$। ভরের মাত্রা [M] তবে জড়তার ভ্রামকের মাত্রা $[ML^2]$।

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $AB = 1.5\ km$

$\angle BAC = 90° - 30° = 60°$

ধরি, AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব, AC

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই, $\cos \angle BAC = \frac{AB}{AC}$

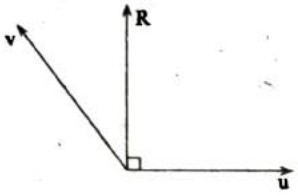
বা, $AC = \frac{AB}{\cos \angle BAC} = \frac{1.5}{\cos 60°} = 3\ km$

অতএব, AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব 3 km।

ঘ এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 4\ km\ h^{-1}$,

নৌকার বেগ, $v = 3\ km\ h^{-1}$

বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 180° - (30 + 30)° = 180° - 60° = 120°$



এখন, নৌকা চালিয়ে B বিন্দুতে পৌঁছতে হলে নৌকার লব্ধি-বেগ R স্রোতের বেগ u এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করতে হবে। এখন R ও u এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

বা, $\tan\theta = \frac{(3\ km\ h^{-1}) \sin 120°}{(4\ km\ h^{-1}) + (3\ km\ h^{-1}) \cos 120°}$

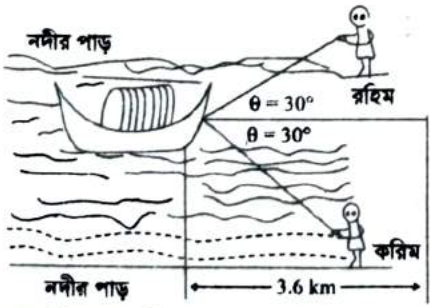
বা, $\tan\theta = \frac{3 \sin 120°}{4 + 3\cos 120°} = 1.039230$

বা, $\theta = \tan^{-1}(1.039230) = 46.10°$

এখানে, $\theta < 90°$

অতএব, AD বরাবর নৌকা চালিয়ে রহমত মাঝি B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবেন না।

প্রশ্ন ২৬ নিচের চিত্রে করিম ও রহিম দু'জন মাঝি স্থির পানিতে 500 kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে দু'তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে $\vec{F}$ বলে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3.6 km পথ অতিক্রম করে। করিম রহিমকে বলে "সমান টানে এ দূরত্ব 5 মিনিটের কম সময়ে পৌঁছা সম্ভব।" নৌকার তল ও পানির ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়]



ক. ভেক্টর বিশ্লেষণ কী? ১

খ. নাল ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক নেই কেন? ২

গ. উদ্দীপকে $\vec{F}$ এর মান বের কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে করিমের বক্তব্য সঠিক কি-না—গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। ৪

[রা. বো. '১৫]

২৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর বিশ্লেষণ বলে।

খ কোনো ভেক্টরের নির্দেশক রেখাটির আদিবিন্দু ও শেষবিন্দু যদি মিশে যায় তবে রেখাংশটি এটি বিন্দুতে পরিণত হয়। এ ধরনের ভেক্টরকে শূন্য ভেক্টর বলে। সুতরাং এটি এমন একটি ভেক্টর যার মান শূন্য অর্থাৎ $|\vec{0}| = 0$, এর কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকে না অর্থাৎ শূন্য ভেক্টরের কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নেই।

একে সাধারণত $\vec{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গ উদ্দীপক থেকে পাই, কোণ, $\theta = 30°$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = 3.6\ km = 3.6 \times 10^3\ m$

সময়, $t = 5\ min = 5 \times 60\ s = 300\ s$

নৌকার ভর, $m = 500\ kg$

ধরি, টান বল, F

এখন, $F\cos\theta + F\cos\theta = ma$

বা, $2F\cos\theta = m \times \frac{2s}{t^2}$

বা, $F = \frac{2 \times m \times s}{t^2 \times 2\cos\theta} = \frac{2 \times 500\ kg \times 3.6 \times 10^3\ m}{(300\ s)^2 \times 2\cos 30°} = 23.09\ N$

অতএব, $\vec{F}$-এর মান 23.09 N।

ঘ এখানে, টান সমান হলে অর্থাৎ রহিম ও করিম উভয়ের ক্ষেত্রে টান সমান হলে,

$F + F = ma$

বা, $2F = ma$

বা, $2F = m.\frac{2s}{t^2}$

বা, $t^2 = \frac{2 \times m \times s}{2F} = \frac{2 \times 500\ kg \times 3.6 \times 10^3\ m}{2 \times 23.09\ N}$

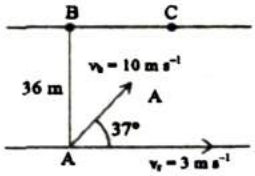
বা, $t^2 = 77955.825\ s^2$

বা, $t = 279.20\ s = 4.65\ min$

এখানে, $t < 5\ min$

অতএব, উদ্দীপকে করিমের বক্তব্য সঠিক।

প্রশ্ন ২৭ 36 m চওড়া একটি নদীতে $10\ m\ s^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চলছে (চিত্র)। নৌকাটি নদী পার হয়ে বিপরীত তীরের C বিন্দুতে পৌঁছাল। নদীতে স্রোতের বেগ $3\ m\ s^{-1}$।



ক. কার্ল কী? ১

খ. কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নদীটির বিপরীত পাড়ের BC দূরত্ব বের কর। ৩

ঘ. নদীর বিপরীত পাড়ের B বিন্দুতে নৌকাটিকে পৌঁছাতে হলে, মাঝির কী ব্যবস্থা নিতে হবে? ৪

[কু. বো. '১৫]

২৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং একে ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেন্সিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর ∇ ও $\vec{A}$-এর ভেক্টর গুণনই $\vec{A}$-এর কার্ল।

খ বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তু ঘুরতে থাকলে তা অনবরত দিক পরিবর্তন করে। বস্তুটি সমদ্রুতিতে যদি চলে সেক্ষেত্রে বেগের মান অপরিবর্তিত থাকলেও দিক পরিবর্তনের ফলে বেগের পরিবর্তন যেকোনো বিন্দুতে তার লব রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। ফলে বস্তুটিতে ত্বরণ ক্রিয়া করে। এজন্য বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়।

গ এখানে, বেগ, $v_B = 10\ m\ s^{-1}$

∴ নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ, $v_1 = v_B \sin 37°$

$= 10\ m\ s^{-1} \times \sin 37°$

$= 6.0182\ m\ s^{-1}$

নদীর পাড় বরাবর বেগের উপাংশ, $v_2 = v_B \cos 37°$
$= 10\ m\ s^{-1} \times \cos 37°$
$= 7.986\ m\ s^{-1}$

$\therefore$ নদীর পাড় বরাবর মোট বেগ, $v_3 = v_2 + v_r$
$= (7.986 + 3)\ m\ s^{-1}$
$= 10.986\ m\ s^{-1}$

নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{d}{v_1}$
$= \frac{36\ m}{6.0182\ m\ s^{-1}}$
$= 5.982\ s$

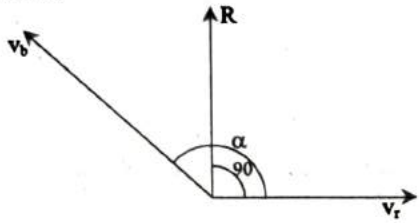
$\therefore$ $BC = v_3 t = 10.986\ m\ s^{-1} \times 5.982\ s$
$= 65.72\ m$

নির্ণেয় দূরত্ব 65.72 m।

ঘ এখানে, স্রোতের বেগ, $v_r = 3\ m\ s^{-1}$
এবং নৌকার বেগ, $v_b = 10\ m\ s^{-1}$

ধরি, বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে নৌকার লব্ধি বেগ R স্রোতের বেগ v_r এর সাথে $\theta = 90°$ কোণ উৎপন্ন করতে হবে।



এখন, $\tan\theta = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$

বা, $\tan 90° = \frac{10\ m\ s^{-1} \times \sin\alpha}{3\ m\ s^{-1} + 10\ m\ s^{-1} \times \cos\alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{3\ m\ s^{-1} + 10\ m\ s^{-1} \times \cos\alpha}{10\ m\ s^{-1} \times \sin\alpha}$

বা, $0 = \frac{3\ m\ s^{-1} + 10\ m\ s^{-1} \times \cos\alpha}{10\ m\ s^{-1} \times \sin\alpha}$

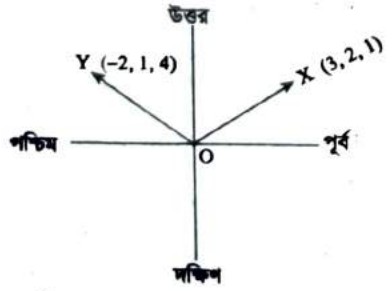
বা, $3\ m\ s^{-1} + 10\ m\ s^{-1} \times \cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = \frac{-3\ m\ s^{-1}}{10\ m\ s^{-1}}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{10}\right) = 107.45°$

অতএব, নদীর বিপরীত পাড়ের B বিন্দুতে নৌকাটিকে পৌঁছাতে হলে মাঝিকে স্রোতের বেগের সাথে 107.45° কোণে নৌকা চালাতে হবে।

১ উদ্দীপকে X ও Y বিন্দু দুটি কলেজের অবস্থান নির্দেশ করে। O, উভয় কলেজের যাত্রা অবস্থানের সাধারণ বিন্দু।



ক. তাৎক্ষণিক ত্বরণ কাকে বলে? ১
খ. উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ হ্রাস পায় কেন? ২
গ. $\vec{OX}$ ও $\vec{OY}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর, এবং $\vec{OY}$, $\vec{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর, একই হবে কি? প্রয়োজনীয় গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যুক্তি দাও। ৪

[দি. বো. '১৫]

২৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, সময়ের সাথে যেকোনো মুহূর্তে বস্তুকণার বেগের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

খ উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বস্তুর গতির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। ফলে বস্তুর গতিবেগ প্রতিসেকেন্ডে $9.8\ m\ s^{-1}$ করে হ্রাস পায়।

গ এখানে, X বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2, 1)
Y বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−2, 1, 4)

$\therefore$ $\vec{OX} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{OY} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\cos\theta = \frac{\vec{OX}.\vec{OY}}{|\vec{OX}||\vec{OY}|}$

$= \frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}).(-2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2}}$

$= \frac{-6 + 2 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{21}}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\frac{0}{7\sqrt{6}} = 90°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°।

ঘ এখানে, $\vec{OX} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{OY} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{OX} \times \vec{OY} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \times (-2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= (8 - 1)\hat{i} + (-2 - 12)\hat{j} + (3 + 4)\hat{k}$
$= 7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}$

এখন, $\vec{OX}$ ও $\vec{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর

$\hat{n}_1 = \pm\frac{\vec{OX} \times \vec{OY}}{|\vec{OX} \times \vec{OY}|}$

$= \frac{7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{7^2 + (-14)^2 + 7^2}} = \pm\frac{7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{294}}$

আবার, $\vec{OY} \times \vec{OX} = (-2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}) \times (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1 - 8)\hat{i} + (12 + 2)\hat{j} + (-4 - 3)\hat{k}$
$= -7\hat{i} + 14\hat{j} - 7\hat{k}$

এখন, $\vec{OY}$, $\vec{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর

$\hat{n}_2 = \pm\frac{\vec{OY} \times \vec{OX}}{|\vec{OY} \times \vec{OX}|}$

$= \pm\frac{-7\hat{i} + 14\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(-7)^2 + 14^2 + (-7)^2}}$

$= \pm\frac{-7\hat{i} + 14\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{294}} = \pm\frac{7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{294}}$

এখানে, $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$

অতএব, $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর এবং $\vec{OY}$, $\vec{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর একই হবে তবে দিক বিপরীত হবে।

NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রিয় শিক্ষার্থী, NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহের এ অধ্যায়ের অনুশীলনীর নমুনা সৃজনশীল প্রশ্নসমূহের যথাযথ উত্তর নিচে সংযোজিত হলো। এসব প্রশ্নোত্তর অনুশীলনের মাধ্যমে তোমরা কলেজ ও এইচএসসি পরীক্ষার প্রশ্ন ও উত্তরের ধরন ও মান সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা পাবে।

১ এ টি এম শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া তৌহিদ স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ২৯ বর্ষাকালে স্রোতের নদীতে মাঝি 7 km h^{-1} বেগে নৌকা চালিয়ে আড়াআড়িভাবে নদী পার হয়। স্রোতের বেগ 3 km h^{-1}.

ক. ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর কাকে বলে? ১

খ. দুটি সমান ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$. এদের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হয়েছিল? ৩

ঘ. মাঝি আড়াআড়ি নৌকা চালনা করলে নৌকার লব্ধির মান উদ্দীপকের নৌকার লব্ধির বেগের বেশি হবে— উক্তিটি গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

২৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{\nabla}$ কে ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর বলে, $\vec{\nabla}$ কে $\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

খ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় সমান হলে এদের লব্ধি শূন্য হবে যদি

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

বা, $0 = 2P^2(1 + \cos\alpha)$

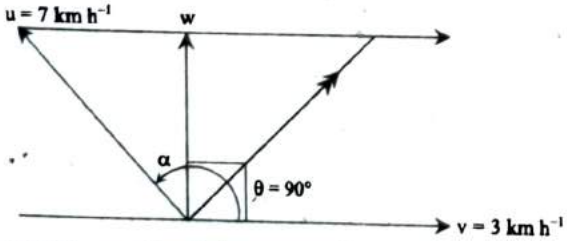
বা, $1 + \cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -1$

বা, $\alpha = 180°$ হয়

সুতরাং দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হবে যখন এদের মধ্যবর্তী কোণ 180° হবে।

গ ধরি, নৌকার বেগ, u = 7 km h^{-1}



স্রোতের বেগ, v = 3 km h^{-1}

∴ মাঝি আড়াআড়িভাবে নদী পাড় হয়,

সুতরাং মাঝি নৌকা নিয়ে θ = 90° কোণে অপর পাড়ে পৌঁছেছিল।

$\therefore \tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{7\sin\alpha}{3 + 7\cos\alpha}$

বা, $3 + 7\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = \frac{-3}{7}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{7}\right) = 115.37°$

অতএব, মাঝিকে স্রোতের সাথে 115.37° কোণে নৌকা চালাতে হয়েছিল।

ঘ 'গ' হতে প্রাপ্ত,

১ম ক্ষেত্রে নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$\cos\alpha = -\frac{3}{7}$

∴ লব্ধি, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$= \sqrt{7^2 + 3^2 + 2\cdot7\cdot3\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)}$

$= 6.32$ km h^{-1}

এখন, আড়াআড়িভাবে নৌকা চালালে স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ θ = 90° হবে।

∴ লব্ধি, $w' = \sqrt{7^2 + 3^2 + 2\cdot7\cdot3\cdot\cos 90°} = 7.62$ km h^{-1}

∴ $w' > w$

অর্থাৎ উক্তিটি সঠিক।

প্রশ্ন ৩০ 2 km প্রশস্থ একটি নদীতে স্রোতের বেগ 2 km h^{-1}। একটি নৌকা A ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপর একটি নৌকা B ক্ষুদ্রতম সময়ে নদীটি পারের জন্য একই সময়ে একই স্থান থেকে 8 km h^{-1} বেগে যাত্রা করল। দেখা যায়, B নৌকাটি A নৌকার আগে অপর পাড়ে পৌঁছায় অথচ B নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব A নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব অপেক্ষা বেশি।

ক. স্বাধীন ভেক্টর কী? ১

খ. একই দিকে দুটি আয়ত একক ভেক্টরের গুণফল কীভাবে শূন্য হয়? ২

গ. A নৌকাটিকে স্রোতের সাথে কত কোণে চালাতে হবে? ৩

ঘ. উদ্দীপকে নৌকা দুটির অতিক্রান্ত সময় ও দূরত্ব সংক্রান্ত ফল গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ২]

৩০নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টর রাশির মান ও দিক ঠিক রেখে ইচ্ছেমতো পাদবিন্দু নেওয়া যায় তাই স্বাধীন ভেক্টর।

খ আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের গুণফলের সমান। একই দিকে দুটি আয়ত একক ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ 0° এবং sin 0° = 0। এ কারণেই একই দিকে দুটি আয়ত একক ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

$\hat{i}\times\hat{i} = (1\times1\sin 0°)\,\hat{n} = 0\times\hat{n} = 0$

$\hat{j}\times\hat{j} = (1\times1\sin 0°)\,\hat{a} = 0$

$\hat{k}\times\hat{k} = (1\times1\times\sin 0°)\,\hat{b} = 0$

গ এখানে, স্রোতের বেগ, u = 2 km h^{-1}

নৌকার বেগ, v = 8 km h^{-1}

A নৌকাটি ক্ষুদ্রতম পথে নদী পার হলে স্রোতের বেগের সাথে লব্ধি বেগের উৎপন্ন কোণ, θ = 90° হবে।

ধরি, নৌকাটিকে স্রোতের বেগের সাথে α কোণে চালাতে হবে

$\therefore \tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\tan 90° = \frac{8 \sin \alpha}{2 + 8 \cos \alpha}$

বা, $2 + 8 \cos \alpha = 0$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = 104.48°$

অতএব, A নৌকাটিকে স্রোতের সাথে 104.48° কোণে চালাতে হবে।

ঘ A নৌকা : ক্ষুদ্রতম পথে–

নদীর প্রস্থ, $s = 2$ km

স্রোতের বেগ, $u = 2$ km/h এবং নৌকার বেগ, $v = 8$ km/h

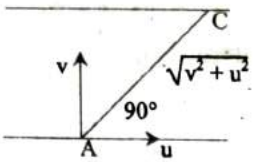
A নৌকাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = 2$ km

আমরা জানি, $s = wt$

$$s = \sqrt{v^2 - u^2} \times t$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{8^2 - 2^2}} = 0.258 \text{ hr}$$

B নৌকাটির ক্ষেত্রে :



নৌকার বেগ, $v = 8 \text{ km h}^{-1}$

নদীর প্রস্থ, $s = 2$ km

অতিক্রান্ত সময়, $t = \frac{2 \text{ km}}{8 \text{ km h}^{-1}} = 0.25$ hr

B এর ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব s' হলে,

আমরা জানি, $s' = w't$

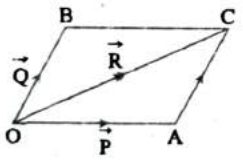
$$= \sqrt{v^2 + u^2} \times t$$

$$= \sqrt{8^2 + 2^2} \times 0.25 = 2.06 \text{ km}$$

B নৌকাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব = 2.06 km

অতএব, A ও B নৌকার অতিক্রান্ত সময় ও দূরত্ব যথাক্রমে 0.258 hr ও 0.25 hr এবং 2 km ও 2.06 km।

প্রশ্ন ৩১ চিত্রে, $\vec{P} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$



ক. উপাংশ কী? ১

খ. সকল সমান ভেক্টর সদৃশ কিন্তু সকল সদৃশ ভেক্টর সমান নয় কেন? ২

গ. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ কত কোণে আনত তা নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{R}$ কে $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ এর উপাংশরূপে বিশ্লেষণ করা সম্ভব কি-না গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৩]

৩১নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরকে যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টরে এমনভাবে বিভক্ত করা হয়, যাদের লব্ধি হবে মূল ভেক্টর তবে বিভাজিত অংশগুলো হবে মূল ভেক্টরের উপাংশ।

খ সমজাতীয় দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তারা পরস্পর সমান ভেক্টর। সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে। তবে তাদেরকে পরস্পর সদৃশ ভেক্টর বলে। সমান ভেক্টরের ক্ষেত্রে ভেক্টরদ্বয়ের মান ও দিক উভয়ই সমান হতে হয়। পক্ষান্তরে সদৃশ ভেক্টরদ্বয়ের ক্ষেত্রে দিক একই হলেও মান সমান কিংবা অসমান। তাই সকল সমান ভেক্টর সদৃশ হলেও সকল সদৃশ ভেক্টর সমান ভেক্টর নয়।

গ আমরা জানি,

$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta$

বা, $\cos \theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$

উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{P} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{Q} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

এখন, $|\vec{P}| = P = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}$

বা, $P = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{Q}| = Q = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2}$

বা, $Q = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2 \times 6 + 2 \times (-3) + (-1) \times 2 = 12 - 6 - 2 = 4$

$\therefore \cos \theta = \frac{4}{(3) \times (7)}$ বা, $\theta = \cos^{-1} \frac{4}{(3) \times (7)} = 79.02°$

অতএব, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি 79.02° কোণে আনত।

ঘ উদ্দীপকের চিত্রটি পর্যবেক্ষণ করলে আমরা উল্লেখ করতে পারি $\vec{R}$ কে $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ এর উপাংশরূপে প্রকাশ করা সম্ভব।

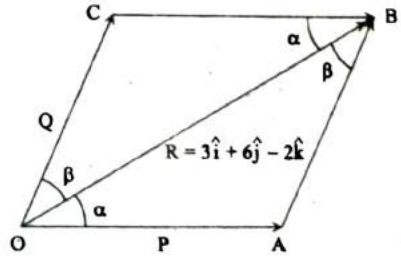
যুক্তিসহ বিশ্লেষণ : উদ্দীপক থেকে পাই, R একটি ভেক্টর রাশি। তীর চিহ্নিত OB সরলরেখাটি তার মান ও দিক নির্দেশ করছে। OB এর সাথে দুই পাশে α ও β কোণ উৎপন্ন করে যথাক্রমে P ও Q ভেক্টরটি OA এবং OC বরাবর রয়েছে, এখন OABC সামান্তরিকটি পূর্ণ করি।

সুতরাং সামান্তরিকের সূত্রানুযায়ী OB দ্বারা সূচিত ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ এর দুটি অংশকের বা উপাংশের মান ও দিক $\vec{OA}$ ও $\vec{OC}$ নির্দেশ করবে। বর্ণনানুসারে OC এবং AB সমান্তরাল এবং OB তাদেরকে যুক্ত করেছে। কাজেই $\angle ABO = \angle BOC = \beta$

এখন ত্রিকোণমিতিক ও ত্রিভুজের ধর্মানুসারে ΔOAB হতে আমরা পাই,

$$\frac{OA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\sin \angle OAB}$$

আবার, $AB = OC$ এবং $\angle OAB = 180° - (\angle AOB + \angle ABO) = 180° - (\alpha + \beta)$



$$\therefore \frac{OA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\sin \{180° - (\alpha + \beta)\}}$$

$\vec{OA}$ এবং $\vec{OC}$ দ্বারা সূচিত উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে P ও Q এর সমান ধরে আমরা পাই,

$$\frac{P}{\sin \beta} = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \{180° - (\alpha + \beta)\}} = \frac{R}{\sin (\alpha + \beta)} \quad [\because AB = OC]$$

$$\therefore P = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad \text{.....} (১)$$

$$\text{এবং } Q = \frac{R \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \quad \text{.....} (২)$$

∴ সমীকরণ (১) ও (২) নং P ও Q কে R এর মাধ্যমে প্রকাশ করে।

আবার, যদি R ভেক্টরকে সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ, P এবং Q উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণী হয় তবে $(\alpha + \beta) = 90°$

$\therefore \sin (\alpha + \beta) = \sin 90° = 1$ এবং

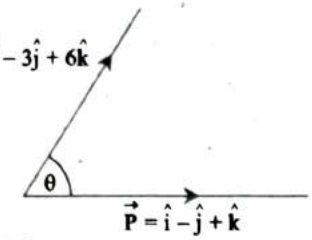
$\sin \beta = \sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$

$\therefore \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = R$

$\therefore P = R\cos\alpha$ ..... (৩) এবং $Q = R\sin\alpha$ ..... (৪)

সুতরাং, সমীকরণ (৩) ও (৪) নং P, Q কে R এর মাধ্যমে প্রকাশ করে যা উত্তরের যৌক্তিকতা প্রমাণ করে।

প্রশ্ন ৩২ উদ্দীপকটি লক্ষ কর–



ক. লব্ধি ভেক্টর কী? ১

খ. দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান কি উভয়ের যেকোনো একটি অপেক্ষা ছোট হতে পারে? ২

গ. উদ্দীপকের ভেক্টর দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে ব্যবহৃত ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা সম্ভব কি-না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৪]

৩২নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক ভেক্টরের সমন্বয়ে যে নতুন ভেক্টর পাওয়া যায় তাই লব্ধি ভেক্টর।

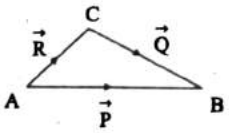
খ দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান উভয়ের যেকোনোটির অপেক্ষা কম হতে পারে।

ব্যাখ্যা : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে ক্রমান্বয়ে দুটি বাহু দুটি ভেক্টরকে মানে ও দিকে সূচিত করলে বিপরীতক্রমে গৃহীত বাহুটি লব্ধিকে সূচিত করে।

চিত্রানুযায়ী, $\vec{AB}$ এবং $\vec{CB}$ দুটি বাহু যদি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটিকে প্রকাশ করে তবে অপর $\vec{AC}$ বাহুটি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$এর লব্ধি $\vec{R}$ কে প্রকাশ করবে। চিত্র হতে দেখা যাচ্ছে,

$\vec{R}(\vec{AC}) = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{P} - \vec{Q}$,

অর্থাৎ, ABC ত্রিভুজের AC বাহুটি AB ও BC এর প্রতিটির চেয়ে ছোট।



অতএব, দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান উভয়ের যেকোনোটির অপেক্ষা ছোট হতে পারে।

গ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

আমরা জানি,

$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{PQ}$

উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{P} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$$= \frac{(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}).(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} \times \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{1\times 2 + (-1)\times(-3) + 1\times 6}{\sqrt{1+1+1}\times\sqrt{4+9+36}} = \frac{2+3+6}{\sqrt{3}\times\sqrt{49}}$$

বা, $\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{3}\times 7} = 0.9073$

বা, $\theta = \cos^{-1}(0.9073) = 24.9°$

অতএব, ভেক্টর দুটির অন্তর্গত কোণ 24.9°।

ঘ উদ্দীপকে ব্যবহৃত ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা সম্ভব।

লব্ধির সর্বোচ্চ মান নির্ণয় : ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মান নির্দিষ্ট থাকলে লব্ধির মান cos α তথা ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এর উপর নির্ভর করে। জানা আছে, cos α এর সর্বোচ্চ মান + 1। সুতরাং লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে যখন cos α = 1 হয় বা α = 0° হয়।

অতএব, লব্ধির মান সর্বোচ্চ হয় যখন ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α = 0° হয় অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করে।

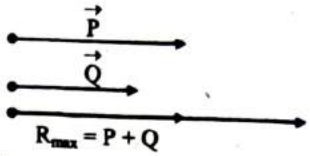
লব্ধির সর্বোচ্চ মান R_{max} হলে,

$R^2_{max} = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ$

$= (P+Q)^2$

$\therefore R_{max} = P + Q$



অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মান যোগফলের সমান।

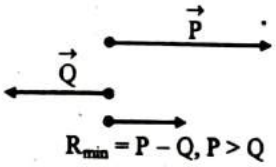
লব্ধির সর্বনিম্ন মান : জানা আছে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি R হলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

সমীকরণটি হতে দেখা যায় cos α এর মান সর্বনিম্ন হলে R এর মান সর্বনিম্ন হবে।

জানা আছে, cos α এর সর্বনিম্ন মান = – 1

অর্থাৎ cos α = – 1 বা α = 180° হলে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হয়। এক্ষেত্রে ভেক্টরদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত। লব্ধির সর্বনিম্ন মান R_{min} হলে,



$R^2_{min} = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180^0$

$= P^2 + Q^2 - 2PQ$ বা $Q^2 + P^2 - 2PQ$

$= (P-Q)^2$ বা, $(Q-P)^2$

$\therefore R_{min} = P - Q$ যখন $P > Q$ বা $Q - P$ যখন $Q > P$

$R_{min} = P \sim Q$

অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান।

প্রশ্ন ৩৩ দুটি সমান্তরাল ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + m\hat{j} - 9\hat{k}$

ক. সমান ভেক্টর কী? ১

খ. ক্রিকেট খেলার পীচ তৈরি করার জন্য রোলারকে ঠেলে নিলে মাটিতে বেশি চাপ প্রযুক্ত হয় কেন? ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে m এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ভেক্টর দুটিকে কি পরস্পরের উপর লম্ব করা সম্ভব? যদি সম্ভব হয় তাহলে গাণিতিক যুক্তি দ্বারা সত্যতা যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৫]

৩৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক সমজাতীয় দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তারা পরস্পর সমান ভেক্টর।

খ ক্রিকেট খেলার পীচ তৈরির সময় একটি লন রোলারকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি রোলারের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে লন রোলারটি মাটিতে কম চাপ প্রয়োগ কর। অন্যদিকে রোলারটিকে ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয় বলে এটি মাটিতে বেশি চাপ প্রদান করে।

গ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল বলে এদের ক্রস গুণফল শূন্য হবে।

উদ্দীপক থেকে পাই,
$\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$
$\vec{B} = 15\hat{i} + m\hat{j} - 9\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 15 & m & -9 \end{vmatrix} = 0$

বা, $\hat{i}(-18 + 3m) + \hat{j}(-45 + 45) + \hat{k}(5m - 30) = 0$

বা, $\hat{i}(-18 + 3m) + \hat{k}(5m - 30) = 0$

উভয়পক্ষকে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-18 + 3m = 0$

বা, $3m = 18$

বা, $m = \frac{18}{3} = 6$

এবং $5m - 30 = 0$

বা, $5m = 30$

বা, $m = \frac{30}{5} = 6$

অতএব, m এর মান 6।

ঘ ভেক্টর দুটিকে পরস্পরের লম্ব করা সম্ভব।

গাণিতিক বিশ্লেষণ : উদ্দীপক থেকে পাই, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। অর্থাৎ এদের মধ্যবর্তী কোণ শূন্য এবং m এর মান 6 (গ নং থেকে) এখন ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ 90° হবে। সেক্ষেত্রে m এর মানও পরিবর্তিত হবে। ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে এদের ডট গুণফল শূন্য হবে।

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

বা, $(5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (15\hat{i} + m\hat{j} - 9\hat{k}) = 0$

বা, $75 + 2m + 27 = 0$

বা, $2m = -102$

বা, $m = \frac{-102}{2} = -51$

অর্থাৎ, $m = -51$ হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

অতএব, উপরোক্ত গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে বলা যায় যে, শুধু m এর মান পরিবর্তন করে -51 করলেই ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

৩ কোনো এক বৃষ্টির দিনে প্রমি জানালার পাশে দাঁড়িয়ে বৃষ্টি দেখছিল। (উল্লম্বভাবে বৃষ্টির বেগ 6 km h^{-1})। প্রমি লক্ষ করল, রাস্তায় যে লোকটি হেঁটে চলছে (বেগ 4 km h^{-1}) এবং যে লোকটি সাইকেলে চলছে (বেগ 8 km h^{-1}) তাঁদের উভয়ের ছাতা উল্লম্বের সাথে ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা।

ক. বিপরীত ভেক্টর কী? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর থেকে কীভাবে ত্বরণ পাওয়া যায়-ব্যাখ্যা কর। ২

গ. হেঁটে চলন্ত লোকের ছাতা কত কোণে ধরলে সে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে? ৩

ঘ. হেঁটে চলন্ত লোক ও সাইকেলে চলন্ত লোকের ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়— গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রমির পর্যবেক্ষণটির সত্যতা নিরূপণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬]

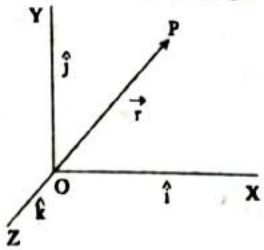
৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক সমমানের দুটি সমজাতীয় ভেক্টর যদি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদের একটিকে অপরটির বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

খ অবস্থান ভেক্টর হতে নিম্নরূপে ত্বরণ নির্ণয় করা যায়—

ধরি, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর যেখানে $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতিক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে।



অর্থাৎ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

বা, $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$

$= \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$

$= \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z$

এখানে v_x, v_y, v_z যথাক্রমে X, Y, Z অক্ষ বরাবর বেগের স্কেলার উপাংশ।

আবার, অতিক্ষুদ্র সময়ে $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে।

$\therefore$ ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

বা, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}\right) = \hat{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{k}\frac{d^2z}{dt^2}$

$= \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z$

এখানে a_x, a_y, a_z যথাক্রমে X, Y, Z অক্ষ বরাবর ত্বরণের স্কেলার উপাংশ।

গ ধরি, বৃষ্টির বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

উদ্দীপক থেকে পাই,
হেটে চলন্ত লোকের বেগ, $u = 4$ km h^{-1}
বৃষ্টির বেগ, $v = 6$ km h^{-1}

$\therefore \tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{4 \text{ km h}^{-1}}{6 \text{ km h}^{-1}}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\therefore \theta = 33.69°$

অতএব, হেটে চলন্ত লোক 33.69° কোণে ছাতা ধরলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে।

ঘ উদ্দীপক থেকে পাই,
হেটে চলন্ত লোকের বেগ 4 km h^{-1} এবং সাইকেলে চলন্ত লোকের বেগ 8 km h^{-1}।
বৃষ্টির উল্লম্ব বেগ = 6 km h^{-1}
'গ' নং থেকে পাই,
হেটে চলন্ত লোকের ছাতা θ = 33.69° কোণে আনত।
এখন, সাইকেলে চলন্ত লোকের ছাতা, θ_1 কোণে আনত হলে,

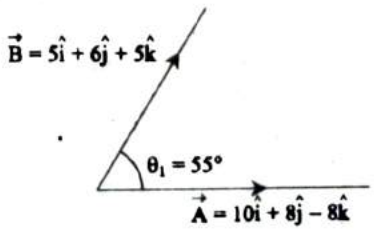
$\tan\theta_1 = \frac{8 \text{ km h}^{-1}}{6 \text{ km h}^{-1}}$

বা, $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$

এখানে, $\theta \neq \theta_1$

অর্থাৎ হেটে চলন্ত লোক ও সাইকেলে চলন্ত লোকের ছাতা একই রকম বাঁকানো নয়।

৪ উদ্দীপকটি লক্ষ কর :



ক. লম্বাংশ কী? ১

খ. ব্যবকলনী অপারেটর বলতে কী বুঝ? ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর সমতলে লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ কি সমান? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সত্যতা নিরূপণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৭]

৩৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরকে যদি এমনভাবে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা হয় যে, উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণে থাকে, অর্থাৎ পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদেরকে লম্বাংশ বলে।

খ যে গাণিতিক প্রকাশ বা চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

ভেক্টর ব্যবকলনী অপারেটরকে $\vec{\nabla}$ বা ∇ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর অপর নাম ন্যাবলা। এটি এক ধরনের গাণিতিক প্রকাশ। t-সাপেক্ষে এই অপারেটর $\frac{d}{dt}$, x সাপেক্ষে $\frac{d}{dx}$, y সাপেক্ষে $\frac{d}{dy}$ ইত্যাদি। বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে ভেক্টর ব্যবকলনী অপারেটরকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

যেহেতু স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশিকেই ব্যবকলন করা যায়, সেহেতু ব্যবকলনী অপারেটর স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশির ক্ষেত্রেই কার্যকর।

গ আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণফল বরাবর বা তার বিপরীত দিক বরাবর একক ভেক্টর ভেক্টরদ্বয়ের সমতলের উপর লম্ব।

ধরি, $\vec{P} = \vec{A} \times \vec{B}$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$$

উদ্দীপক থেকে পাই,
$\vec{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$
$\vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$
একক ভেক্টর, $\hat{n} = ?$

$$\text{এখন, } \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 8 & -8 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

বা, $\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}(40+48) + \hat{j}(-40-50) + \hat{k}(60-40)$

বা, $\vec{A}\times\vec{B} = 88\hat{i} - 90\hat{j} + 20\hat{k}$

$\therefore \vec{P} = 88\hat{i} - 90\hat{j} + 20\hat{k}$

$\therefore |\vec{P}| = \sqrt{(88)^2 + (-90)^2 + (20)^2} = \sqrt{16244}$

$$\therefore \hat{n} = \pm\frac{88\hat{i} - 90\hat{j} + 20\hat{k}}{\sqrt{16244}} = \pm\left(\frac{88}{\sqrt{16244}}\hat{i} - \frac{90}{\sqrt{16244}}\hat{j} + \frac{20}{\sqrt{16244}}\hat{k}\right)$$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর সমতলে লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm\left(\frac{88}{\sqrt{16244}}\hat{i} - \frac{90}{\sqrt{16244}}\hat{j} + \frac{20}{\sqrt{16244}}\hat{k}\right)$$

ঘ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k})\cdot(5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}) = 50 + 48 - 40 = 58$

$|\vec{A}| = \sqrt{(10)^2 + (8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100 + 64 + 64} = \sqrt{228}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(5)^2 + (6)^2 + (5)^2} = \sqrt{25 + 36 + 25} = \sqrt{86}$

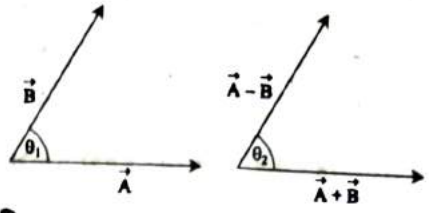
এখন, $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ, $B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{58}{\sqrt{228}}$

আবার, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{58}{\sqrt{86}}$

অতএব, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ এবং $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ সমান নয়।

১ উদ্দীপকটি লক্ষ কর :

$\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং
$\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$



ক. ভেক্টর গুণন কী? ১

খ. একটি ভেক্টরের ক্ষেত্র ঘূর্ণনশীল না অঘূর্ণনশীল, তা কীভাবে বোঝা যায়? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের θ_1 ও θ_2 কি সমান? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে উত্তরের সত্যতা যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৮]

৩৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের sine এর মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনই ভেক্টর গুণন।

খ $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেন্সিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ ও $\vec{A}$ এর ভেক্টর গুণনকে $\vec{A}$ এর কার্ল বলে।

অর্থাৎ, $\text{Curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \text{curl}\,\vec{A}$ একটি ভেক্টর রাশি। ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল এর ভূমিকা অপরিসীম।

$$\text{curl}\,\vec{A} \text{ এর মান} = \left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial_y} - \frac{\partial A_y}{\partial_z}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial_z} - \frac{\partial A_z}{\partial_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial_x} - \frac{\partial A_x}{\partial_y}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

কোনো ভেক্টরের কার্ল অশূন্য হলে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হবে এবং কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে।

গ এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})\times(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-6+3)\hat{i} + (2-6)\hat{j} + (-3+2)\hat{k}$$

$= -3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$

$= |-3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = 5.1$ বর্গ একক

ঘ উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{A} + \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ_2

$\therefore (\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) = |\vec{A} + \vec{B}|\cdot|\vec{A} - \vec{B}|\cos\theta_2$

$$\text{বা, } \cos\theta_2 = \frac{(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} + \vec{B}|\cdot|\vec{A} - \vec{B}|}$$

$$= \frac{(3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k})\cdot(-\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 7^2}\times\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{-3-8-35}{\sqrt{74}\times\sqrt{30}} = \frac{-46}{47\cdot117}$$

$$\therefore \quad \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-46}{47\cdot117}\right) = 167\cdot5^\circ$$

'গ' নং থেকে পাই, $\theta_1 = 24\cdot9^\circ$

এখানে, $\theta_1 \neq \theta_2$

অতএব, উপরোক্ত গাণিতিক বিশ্লেষণের আলোকে বলা যায় উদ্দীপকের θ_1 ও θ_2 সমান নয়।

প্রশ্ন ৪৬ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৯ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৪৭ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১০ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৪৮ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১১ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৩-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৪৯ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১২ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৪-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫০ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৩ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৫-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫১ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৪ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৬-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫২ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৫ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৭-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৬ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৮-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৪ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৭ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ৩ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৬ পৃষ্ঠার ৩নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৩ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ১১-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৫ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ৫ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৬ পৃষ্ঠার ৫নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৪ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ১৪-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৬ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৯ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ৬ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৬ পৃষ্ঠার ৬নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৫ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ১৫-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৭ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২০ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ৭ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৬ পৃষ্ঠার ৭নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৫ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ১৬-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৮ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২১ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ৯ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৬ পৃষ্ঠার ৯নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৬ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৯ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২২ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ১০ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৬ পৃষ্ঠার ১০নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৭ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ১৯-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬০ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৩ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ১১ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৭ পৃষ্ঠার ১১নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৭ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ২০-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

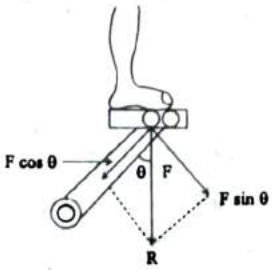
প্রশ্ন ৬১ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৪ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ১৩ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৭ পৃষ্ঠার ১৩নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৯ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ২৪-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬২ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৫ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ৪ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৭ পৃষ্ঠার ১৪নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৬৯ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ২৫-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৬ এর উত্তরের জন্য ১১৪ পৃষ্ঠার ১৫ নং (জ্ঞানমূলক), ১১৭ পৃষ্ঠার ১৬নং (অনুধাবনমূলক) এবং ৭০ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ২৭-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

ড. আমির হোসেন খান, মোহাম্মদ ইসহাক ও ড. মো. নজরুল ইসলাম স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ৫৫ রাফি রোজ সাইকেলে করে কলেজে যায়। সাইকেল চালায় আর ভাবে, সাইকেলের প্যাডেলে সোজা খাড়া নিচের দিকে বল প্রয়োগ করি অথচ সাইকেল সামনের দিকে এগিয়ে যায়। রাফির বন্ধু আল আমিন বিষয়টা সহজ করে দেয়। সে বলে এটি বলের বিভাজন দ্বারাই সম্ভব। নিচের দিকে এ বল দুটি উপাংশে বিভক্ত হয়ে ক্রিয়া করে। এদের একটি উপাংশ বল সাইকেলকে সামনের দিকে গতিশীল করে।



ক. একক ভেক্টর কী? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর হতে কীভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায়? ২

গ. F মানের একটি বলকে দুটি অংশে বিশ্লেষণ করলে, একটি অংশ যদি বলটির সমমানের হয় এবং এর সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে তবে অপর অংশটির মান ও দিক নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের বল F-কে যেকোনো দুই দিকে বিভাজিত করে বিপ্লিষ্টাংশদ্বয়ের রাশিমালা বের কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

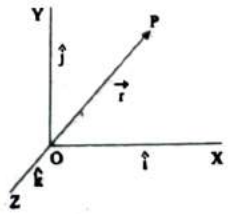
৫৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক একক তাই একক ভেক্টর।

খ অবস্থান ভেক্টর হতে নিম্নরূপে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করা যায়—

ধরি, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর যেখানে $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতিক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে।



অর্থাৎ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

বা, $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$

$= \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$

$= \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z$

এখানে v_x, v_y, v_z যথাক্রমে X, Y, Z অক্ষ বরাবর বেগের স্কেলার উপাংশ।

আবার, অতিক্ষুদ্র সময়ে $\vec{v}$ এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে।

$\therefore$ ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

বা, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}\right) = \hat{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{k}\frac{d^2z}{dt^2} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z$

এখানে a_x, a_y, a_z যথাক্রমে X, Y, Z অক্ষ বরাবর ত্বরণের স্কেলার উপাংশ।

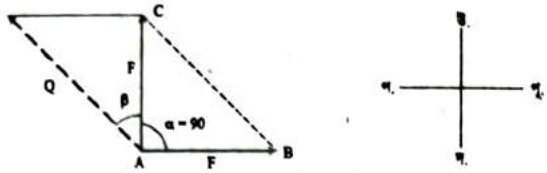
গ প্রশ্নানুসারে, F মানের বলের জন্য নিম্নরূপ চিত্র অঙ্কন করা হলো :

আমরা জানি, $\tan\alpha = \frac{Q\sin(\alpha+\beta)}{F+Q\cos(\alpha+\beta)}$

$\tan 90° = \frac{Q\sin(\alpha+\beta)}{F+Q\cos(\alpha+\beta)} = \infty$

$\therefore\ F + Q\cos(\alpha+\beta) = 0$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta) = -\frac{F}{Q}$ ..... (১)



$\therefore$ লব্ধি, $F = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2QF\cos(\alpha+\beta)}$

বা, $F = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2QF(-\frac{F}{Q})}$

বা, $F^2 = F^2 + Q^2 - 2F^2$

বা, $Q^2 = 2F^2$

বা, $F = \frac{Q}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ Q = \sqrt{2}F$ ..... (২)

এখন, $Q = \frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{F\sin\alpha}{\sin(90+\beta)}$

বা, $Q = \frac{F\sin 90}{\sin(90+\beta)}$

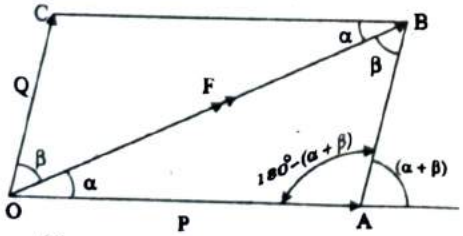
বা, $\sqrt{2}F = \frac{F}{\cos\beta}$

বা, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \therefore \beta = 45°$

অতএব, বলের মান $\frac{Q}{\sqrt{2}}$ এবং দিক হবে 45° উত্তর-পশ্চিম।

ঘ উদ্দীপকের F বলের দুটি অংশ বিশ্লিষ্টকরণ নিম্নরূপ–

উদ্দীপকের F বলকে নিচের চিত্রের OB রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হলো। F বলকে দুই দিকে দুটি অংশে বিভক্ত করার জন্য O বিন্দু থেকে OB এর দু'পাশে α ও β কোণ করে OA এবং OC রেখা দুটি টানি। OB কে কর্ণ ধরে OABC সামান্তরিকটি আঁকি।



চিত্র : F বলের যেকোনো দুই দিকে বিভাজন

সুতরাং সামান্তরিকের সূত্রানুযায়ী OB দ্বারা সূচিত F বল এর দুটি অংশকের মান ও দিক $\vec{OA}$ এবং $\vec{OC}$ নির্দেশ করবে। বর্ণনানুসারে OC এবং AB সমান্তরাল এবং OB তাদেরকে যুক্ত করেছে।

$\therefore\ \angle ABO = \angle BOC = \beta$

$\therefore\ \Delta OAB$ থেকে, $\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin\angle OAB}$ ..... (১)

আবার, AB = OC এবং ∠OAB

$= 180° - (\angle AOB + \angle ABO) = 180° - (\alpha+\beta)$

$\therefore$ OA = P এবং OC = Q ধরে (১) নং থেকে আমরা পাই,

$\therefore\ \frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\{180° - (\alpha+\beta)\}}$

বা, $\frac{P}{\sin°} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore\ P = \frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ .....(২)

এবং $Q = \frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ .....(৩)

সমীকরণ (২) ও (৩) যথাক্রমে বিশ্লিষ্টাংশের রাশিমালা।

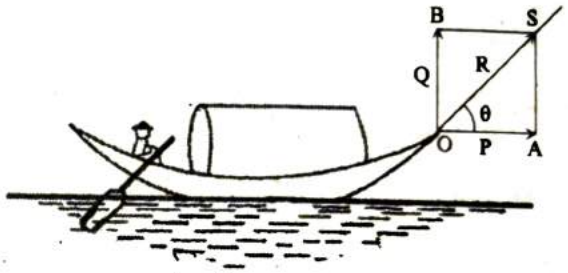
আবার, যদি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ অর্থাৎ $\alpha + \beta = 90°$ হয়, তবে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ হবে লব্ধি $\vec{F}$-এর যথাক্রমে অনুভূমিক ও লম্ব উপাংশ।

$\therefore$ অনুভূমিক উপাংশের মান $P = F\sin\beta = F\sin(90° - \alpha) = F\cos\alpha$

এবং উল্লম্ব উপাংশের মান, $Q = F\sin\alpha$

প্রশ্ন ২৬ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২ এর উত্তরের জন্য ১৭নং (জ্ঞানমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর খ, গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ২৭ নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর :



ক. অবস্থান ভেক্টর কী? ১

খ. বৃষ্টির পানি চলন্ত গাড়ির সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেয়, পেছনের কাচকে ভিজায় না কেন? ২

গ. নৌকাটির গতির বিপরীত দিক থেকে 200N টানের স্রোত আসায় নৌকাটি নদীতে স্থির হয়ে রইল। গুণের টান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. গুণের টান অপরিবর্তিত থাকলে নৌকাটি নদীর কোন পথ দিয়ে চললে দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে– বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৩]

৫৭নং প্রশ্নের উত্তর

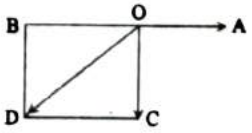
ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তাই অবস্থান ভেক্টর।

খ গাড়ি যে দিকে চলে তার উল্টোদিকে বাতাস প্রবাহিত হয়। বাতাসের বেগের মান গাড়ির বেগের মানের সমান হয়।

ধরি, গাড়ির বেগ = $\vec{OA}$

বাতাসের বেগ = $\vec{OB}$

বৃষ্টির বেগ = $\vec{OC}$



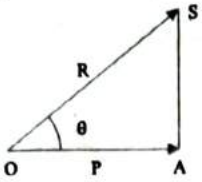
OBDC সামান্তরিক অঙ্কন করা হলো।

$\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$

$\therefore$ বৃষ্টির লব্ধি বেগ = $\vec{OD}$

সামনের দিক থেকে তির্যকভাবে পড়ে বলেই বৃষ্টি চলন্ত গাড়ির সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেয়, পিছনের কাচকে নয়।

গ চিত্রে R হলো গুণের টান। R বলটি OA এবং OB দুটি অংশে বিভাজিত করে দেখানো হয়েছে। OA অংশটি অনুভূমিক দিকে এবং OB অংশটি উল্লম্ব দিকে। OB অংশটি নৌকার হাল দ্বারা প্রতিহত হয় এবং OA অংশের জন্য নৌকাটি সামনে এগিয়ে যায়। যেহেতু গতির বিপরীত দিক থেকে 200N টানের স্রোত আসায় নৌকাটি স্থির হয়ে থাকে। তাই বলা যায়, OA অংশে নৌকাটি P = 200 N বলে চলছিল।



এখন, ΔSOA এ $\cos\theta = \frac{OA}{OS}$

বা, $\cos\theta = \frac{P}{R}$

বা, $R = \frac{200\ N}{\cos\theta} = \frac{200}{\cos\theta} N$

অতএব, গুণের টান $\frac{200}{\cos\theta} N$।

ঘ গুণের টান অপরিবর্তিত থাকলে নৌকাটি নদীর OA পথে চললে দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।

বিশ্লেষণ : উদ্দীপকের নৌকাটিকে O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OS বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{R}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে R-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়। যথা– অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ।

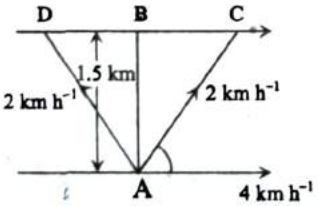
অনুভূমিক উপাংশ, $P = R\cos\theta$ এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ, $Q = R\sin\theta$ এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $R\cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $R\sin\theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ $R\sin\theta$ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ এর মান তত কম হবে ফলে $R\sin\theta$ এর মান কম হবে এবং $R\cos\theta$ এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।

অতএব, নৌকাটি যেহেতু অনুভূমিক অংশের জন্য সামনে এগিয়ে যায় তাই θ এর সর্বনিম্ন মানের জন্য OA পথে চললে দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।

প্রশ্ন ৫৮ একজন সাঁতারু চিত্রানুযায়ী 1.5 km প্রশস্ত একটি নদী $4\ km\ h^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে 30° কোণে সাঁতার কাটছে। ঐ নদীতে স্রোতের বেগ $2\ km\ h^{-1}$।



ক. ব্যাসার্ধ ভেক্টর কী? ১

খ. দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব ও সমান্তরাল হওয়ার শর্ত কী? ২

গ. সাঁতারুকে নদীর অপর প্রান্তে পৌঁছাতে হলে কত পথ সাঁতার কাটতে হবে? ৩

ঘ. সাঁতারু যদি AD পথে সাঁতরাতে শুরু করে তবে আদৌ B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবে কি-না? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৪]

৫৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক মূল বিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বই হলো ব্যাসার্ধ ভেক্টর।

খ দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

যেমন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $0 = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = 0$

বা, $\theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

আবার, মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণন শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হয়।

যেমন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

$\vec{A}\times\vec{B} = 0$ হলে, $AB\sin\theta = 0$ ($\because \hat{n} \neq 0$)

বা, $\sin\theta = 0$ (যদি A বা B শূন্য না হয়)

বা, $\sin\theta = \sin 0°$ বা $\sin 180°$

$\therefore$ $\theta = 0°$ বা $180°$

অতএব, মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল অথবা ক্রস গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

গ এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 4\ km\ h^{-1}$

সাঁতারুর বেগ, $v = 2\ km\ h^{-1}$

স্রোতের সাথে সাঁতারুর উৎপন্ন কোণ, $\theta = 30°$

$\therefore$ সাতারুর লব্ধি বেগ $W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 30°}$

$= \sqrt{4^2 + 2^2 + 2\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\ km\ h^{-1}$

$= 5.82\ km\ h^{-1}$

AB বরাবর স্রোত ও সাঁতারুর বেগের উপাংশ

$= u\cos 90° + v\cos(90 - 30°)$

$= 0 + 2\times\frac{1}{2} = 1\ km\ h^{-1}$

$\therefore$ সাঁতারুর 1.5 km পাড়ি দিতে সময় লাগবে $t = \frac{1.5\ km}{1\ km\ h^{-1}} = 1.5\ h$

সুতরাং নদীর অপর প্রান্তে পৌঁছতে সাঁতারুকে পথ পাড়ি দিতে হবে

$= W\times 1.5\ h$

$= 5.82\ km\ h^{-1}\times 1.5\ h = 8.73\ km$

ঘ সাঁতারু A বিন্দু থেকে যাত্রা করে B বিন্দুতে পৌঁছানোর উদ্দেশ্যে AD পথে যাত্রা করলে AB বরাবর সাতারুর লব্ধি বেগ থাকতে হবে। অর্থাৎ সাঁতারুর লব্ধি বেগ স্রোতের বেগের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করবে।

এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 4\ km\ h^{-1}$

সাতারুর বেগ, $v = 2\ km\ h^{-1}$

এখন, স্রোতের বেগের সাথে AD যাত্রাপথের সৃষ্ট কোণ α হলে,

$\tan 90° = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $u + v\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\frac{u}{v} = \frac{-4}{2} = -2$

এটি অসম্ভব। কারণ আমরা জানি, $-1 < \cos\alpha < 1$।

অতএব, সাঁতারু AB পথে সাঁতরাতে শুরু করলে আদৌ B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে না।

প্রশ্ন ৫৯ সাকিল একটি সুপার শপে বাজার করার সময় ট্রলি ব্যবহার করছিল। সে ট্রলির হাতলকে উল্লম্বের সাথে 30° কোণে 10 N বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে ঠেলতে থাকে। এ দেখে দোকানদার বলল আপনি ট্রলির হাতল ধরে না ঠেলে টানলে কম বল লাগবে।

ক. সদৃশ ভেক্টর কী? ১

খ. কার্লের ভৌতিক তাপর্য উল্লেখ কর। ২

গ. ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল কত? ৩

ঘ. দোকানদারের কথার যৌক্তিকতা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৫]

৫৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক সদৃশ ভেক্টর হলো সমজাতীয় অসমমানের দুটি ভেক্টর যা একই দিকে ক্রিয়া করে।

খ কার্লের ভৌত তাৎপর্য হলো–

১. কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান।

২. ভেক্টরটির দিক ঐ ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

৩. কোনো ভেক্টরে কার্ল ঐ ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে।

৪. কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল হয়।

গ এখানে, প্রযুক্ত বল, $F = 10$ N

অনুভূমিক সাথে সৃষ্ট কোণ, $\theta = 30°$

$\therefore$ ট্রলির গতিসৃষ্টিকারী বল $= F\cos\theta = 10\text{ N} \times \cos 30° = 8.66$ N

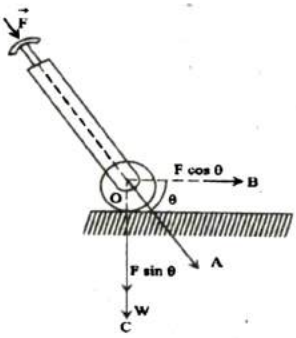
ঘ উদ্দীপকে উল্লিখিত দোকানদার বলল ট্রলি না ঠেলে টানলে কম বল লাগবে।

যৌক্তিকতা বিশ্লেষণ : উদ্দীপক থেকে পাই, সাকিল ট্রলিটি ঠেলছে। এখন আমরা লক্ষ করি–

ঠেলার ক্ষেত্রে : ধরি, ট্রলির ওজন $\vec{W}$

ট্রলির হাতলের উপর প্রযুক্ত বল $= \vec{F}$

$\vec{F}$ বল ট্রলির O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল। O বিন্দুতে এ বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।



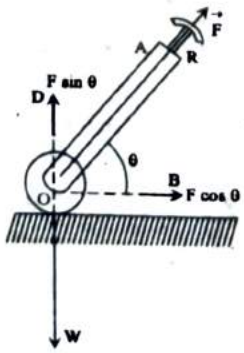
বলের অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$, এর দিক OB বরাবর সামনের দিকে এবং উল্লম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$, এর দিক OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল যা ট্রলির ওজন বৃদ্ধি করে।

সুতরাং ট্রলির মোট ওজন হয় $(W + R\sin\theta)$। ফলে ট্রলি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় বলে ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। তাই ট্রলি ঠেলা কষ্টকর হয়।

আবার, টানার ক্ষেত্রে : ধরি, ট্রলির ওজন $= \vec{W}$

ট্রলির হাতলের উপর প্রযুক্ত বল $= \vec{F}$

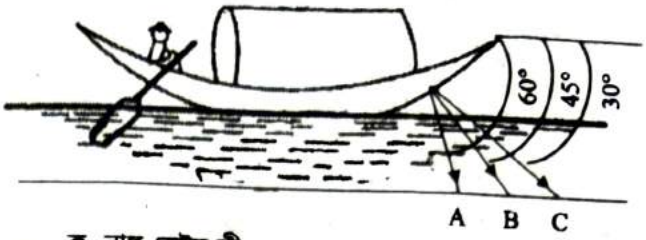
$\vec{F}$ বল O বিন্দুতে অনুভূমিক রেখা OB-এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল। $\vec{F}$ বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়ে যায়।



অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$, এর ক্রিয়ায় ট্রলিটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে এবং উল্লম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$, এর ক্রিয়া OD বরাবর উপরের দিকে হওয়ায় ট্রলির মোট ওজন হ্রাস পায়। ফলে ট্রলির ওজন হয় $(W - F\sin\theta)$। ফলে টানার ক্ষেত্রে ট্রলি হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। ফলে ট্রলি টানা সহজতর হয়।

সুতরাং, দোকানদারের কথা যৌক্তিক।

প্রশ্ন ৬০ চিত্রে A, B, C রাশি তিনটিতে বলের পরিমাণ 300 N।



ক. নাল ভেক্টর কী? ১

খ. "দুটি ভেক্টর রাশি ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।"– উক্তিটি ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নৌকার গতির দিকে লব্ধি বলের পরিমাণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. প্রযুক্ত বলে কত শতাংশ কার্যকর হচ্ছে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। A, B, C তিনটি রাশির মধ্যে কোন রশি টেনে বেশি গতি সৃষ্টি করা যাবে–গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬]

৬০নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাই হলো শূন্য বা নাল ভেক্টর।

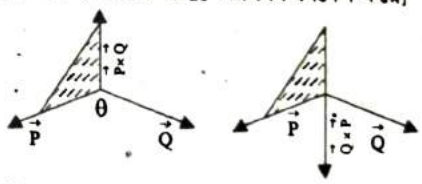
খ দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। কারণ এক্ষেত্রে গুণফলের মান সমান হলেও দিক বিপরীতমুখী হয়ে থাকে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ।

এখন, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির ক্রস গুণন,

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{n}\,PQ\sin\theta \text{ ..... (1)}$$

[এখানে, $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{R}$ এর দিক নির্দেশ করে]



এবং $\vec{Q} \times \vec{P} = \hat{n}\,PQ\sin(-\theta) = -\hat{n}\,PQ\sin\theta$

$\therefore \vec{Q} \times \vec{P} = -\hat{n}\,PQ\sin\theta$ ..... (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণ হতে পাই, $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

$\therefore \quad \vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ এখানে, A, B, C প্রতিটি বলের মান 300 N

$\therefore |\vec{A}| = 300\text{ N}, |\vec{B}| = 300\text{ N}, |\vec{C}| = 300\text{ N}$

নৌকার তির দিকের সাথে টানবল তিনটির সৃষ্ট কোণ, যথাক্রমে, $\theta_1 = 60°$, $\theta_2 = 45°$ এবং $\theta_3 = 30°$

$\therefore$ নৌকার গতির দিকে লব্ধি বলের পরিমাণ

$= |\vec{A}|\cos\theta_1 + |\vec{B}|\cos\theta_2 + |\vec{C}|\cos\theta_3$

$= 300\text{ N} \times \cos 60° + 300\text{ N} \times \cos 45° + 300\text{ N} \times \cos 30°$

$= 300\text{ N} \times \frac{1}{2} + 300\text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 300\text{ N} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 150\text{ N} + 212\text{ N} + 260\text{ N} = 622\text{ N}$

অতএব, নৌকার গতির দিকে লব্ধি বলের পরিমাণ 622 N.

ঘ এখানে, নৌকার গতির দিকে প্রাপ্ত লব্ধি বলের পরিমাণই কার্যকর বল। প্রাপ্ত লব্ধি বলের মান 622 N [গ হতে প্রাপ্ত]

মোট প্রযুক্ত বল $= (300 + 300 + 300)\text{ N} = 900\text{ N}$

$\therefore$ কার্যকর বলের শতকরা পরিমাণ $= \frac{622}{900} \times 100\% = 69.11\%$

এখানে, A রশির জন্য নৌকার গতির দিকে বলের উপাংশ

$F_1 = 300\ N \times \cos 60° = 150\ N$

B রাশির জন্য নৌকার গতির দিকে বলের উপাংশ

$F_2 = 300\ N \times \cos 45° = 212\ N$

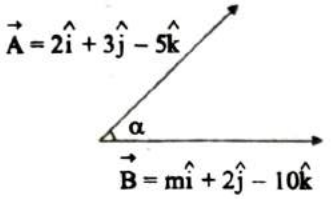
C রাশির জন্য নৌকার গতির দিকে বলের উপাংশ

$F_3 = 300\ N \times \cos 30° = 260\ N$

এখানে, $F_3 > F_2 > F_1$

অতএব, C রাশি টেনে বেশি গতি সৃষ্টি করা যাবে।

নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর :



চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α।

ক. ভেক্টর গুণন কাকে বলে? ১

খ. পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর বিভাজনের কোনো ভূমিকা আছে কী? ২

গ. m এর মান কত হলে $\alpha = 90°$ হবে? ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কি ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার উত্তর যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৭]

৬১নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের sin অনুপাতের মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনকে ভেক্টর বা ক্রস গুণন বলে।

খ পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর বিভাজনের কোনো ভূমিকা নেই, তবে ভেক্টর যোজনের ভূমিকা রয়েছে। পাখি তার প্রতিটি ডানা দিয়ে বাতাসের ওপর তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। তবে পাখিটি তির্যকভাবে নয় বরং সম্মুখদিকে এগিয়ে যায়। এর কারণ হলো বাতাসও প্রতিটি ডানার ওপর তির্যকভাবে (বিপরীত দিকে) প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এ প্রতিক্রিয়া বলদ্বয়ের লব্ধির দিকে পাখিটি এগিয়ে যায়। এটি ভেক্টর যোজনের উদাহরণ।

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$

$\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ অর্থাৎ, $\alpha = 90°$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হবে। ভেক্টর দুটি পরস্পরের লম্ব হলে এদের ডট গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ হবে।

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) \cdot (m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k})$

$= 2m + 6 + 50 = 2m + 56$

সুতরাং, $2m + 56 = 0$

বা, $2m = -56$

$\therefore\ m = -28$

অতএব, m এর মান – 28 হলে $\alpha = 90°$ হবে।

ঘ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গাণিতিক বিশ্লেষণ : উদ্দীপক হতে পাই, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ m & 2 & -10 \end{vmatrix}$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(-30 + 10) - \hat{j}(-20 + 5m) + \hat{k}(4 - 3m)$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -20\hat{i} + (20 - 5m)\hat{j} + (4 - 3m)\hat{k}$ ..... (১)

আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m & 2 & -10 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

বা, $\vec{B} \times \vec{A} = \hat{i}(-10 + 30) - \hat{j}(-5m + 20) + \hat{k}(3m - 4)$

বা, $\vec{B} \times \vec{A} = 20\hat{i} - (20 - 5m)\hat{j} - (4 - 3m)\hat{k}$ ..... (২)

(১) ও (২) নং সমীকরণ হতে দেখা যাচ্ছে, $\vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{B} \times \vec{A}$ এর মান সমান হবে, কিন্তু এদের দিক বিপরীত।

সুতরাং $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$।

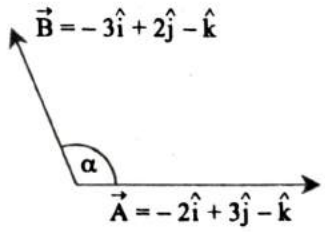
অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

প্রশ্ন ৬২ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৮-এর উত্তরের জন্য ১৮নং (জ্ঞানমূলক), ১৮নং (অনুধাবনমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৯ এর উত্তরের জন্য ১০নং (জ্ঞানমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ২১-এর খ, গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬৪ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১০ এর উত্তরের জন্য ১৯নং (জ্ঞানমূলক), ১৯নং (অনুধাবনমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬৫ উদ্দীপকের চিত্রটি লক্ষ কর এবং নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :



ক. একটি ভেক্টরের ঘূর্ণনশীল ও সলিনয়েড হওয়ার শর্ত কী? ১

খ. ক্যারম বোর্ডের গুটিগুলোকে একটির উপর একটি সাজিয়ে নিচের গুটিকে স্ট্রাইকার দিয়ে আঘাত করলে সবগুলো গুটি না সরে কেবল নিচের গুটি সরে যায় কেন? ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি এবং মধ্যবর্তী কোণ কীভাবে নির্ণয় করবে? ৩

ঘ. দেখাও যে, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণ α-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং প্রদত্ত ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর সমান্তরালে অবস্থান করে না।– গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১১]

৬৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টরের কার্ল অশূন্য হলে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হবে এবং কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়ডল হবে।

খ ক্যারম বোর্ডের গুটিটিকে একটির উপর একটি সাজিয়ে নিচের গুটিটিকে স্ট্রাইকার দিয়ে আঘাত করলে সবগুলো গুটি না সরে শুধুমাত্র নিচের গুটিটি সরে যায়। এর কারণ হলো উপরের গুটিগুলোর স্থিতি জড়তা, যার ধারণা নিউটনের গতির ১ম সূত্র থেকে পাওয়া যায়। স্ট্রাইকার কর্তৃক প্রযুক্ত বল কেবল নিচের গুটিটির উপর ক্রিয়া করে। তাই বাহ্যিক বল অনুভব করায় এটি অবস্থান পরিবর্তন করে অর্থাৎ সরে যায়। উপরের গুটিগুলোর উপর স্ট্রাইকার কর্তৃক বাহ্যিক বল প্রযুক্ত হয় না বলে সেগুলি সরে যায় না।

গ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ এদের লব্ধি $= \vec{A} + \vec{B}$

$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + (-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = -\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α

$$\therefore \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha$$

$$\text{বা,} \quad \cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$= \frac{(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{-6 + 6 + 1}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) = 85.9^\circ$$

ঘ গ হতে পাই, $A = |\vec{A}| = \sqrt{14}$ এবং $B = |\vec{B}| = \sqrt{14}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, α, এদের লব্ধি $\vec{A}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\theta = \frac{B\sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$$

$$= \frac{B\sin\alpha}{B + B\cos\alpha} \quad [\because A = B]$$

$$= \frac{B\sin\alpha}{B(1 + \cos\alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি এদের মধ্যবর্তী কোণ α কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \times (-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

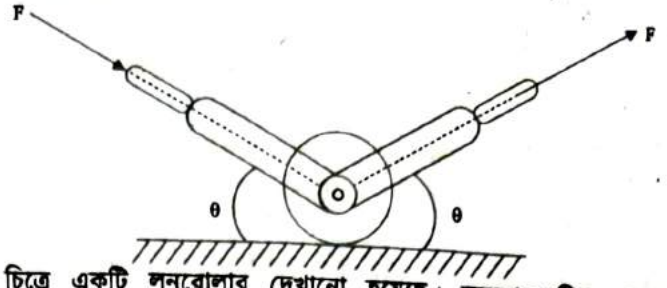
$$= (-3 + 2)\hat{i} + (3 + 2)\hat{j} + (4 + 9)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 13\hat{k}$$

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} \neq 0$

সুতরাং প্রদত্ত ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর সমান্তরালে অবস্থান করে না।

১ নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর :



চিত্রে একটি লনরোলার দেখানো হয়েছে। লনরোলারটির হাতল অনুভূমিকের সাথে θ কোণে হেলানো আছে।

ক. ভেক্টর ব্যবকলনীয় বা ডিফারেনশিয়াল অপারেটর কী? ১

খ. লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ কেন? ২

গ. লন রোলারকে 20 N বল দ্বারা ঠেললে বলটির অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ বের কর। ৩

ঘ. লন রোলারের 20 N বল টানার এবং ঠেলার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে যদি 5 m সরাতে হয় তবে উভয় ক্ষেত্রে কাজ সমান হবে কী? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

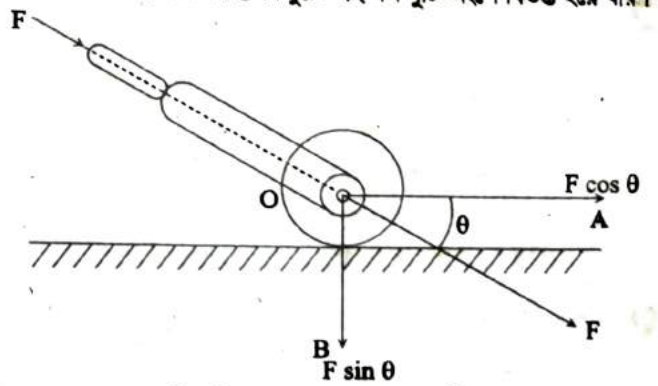
[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১২]

৬৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময় t এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য t এর সাপেক্ষে ভেক্টরের পরিবর্তনের হারই সময় সাপেক্ষে ভেক্টরের ভেক্টর ব্যবকলনীয় বা ডিফারেনশিয়াল অপারেটর।

খ একটি লন রোলারকে ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী মনে হয়। অন্যদিকে রোলারটিকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি রোলারের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ হয়।

গ লন রোলারটি ঠেলার সময় প্রযুক্ত বল F, O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল। O বিন্দুতে এই বল দুটি অংশে বিভক্ত হয়ে যায়।



১. বলের অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ, যার দিক OA বরাবর

২. বলের উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ, যার দিক OB বরাবর,

এখন, লন রোলারটিকে 20 N বল দ্বারা ঠেলা হলে

১. বলের অনুভূমিক উপাংশ = 20 cosθ

২. বলের উল্লম্ব উপাংশ = 20 sin θ

ঘ ঠেলার ক্ষেত্রে কৃতকাজ :

ধরি, রোলারের ওজন = $\vec{W}$

হাতলের উপর প্রযুক্ত বল = 20 N

এই 20 N O বিন্দুতে দুটি লম্বাংশে বিভাজিত হয়।

অনুভূমিক উপাংশ = 20 N cos θ এটি রোলারকে সামনের দিকে নিয়ে যায়।

উল্লম্ব উপাংশ = 20 N sin θ এটি নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

$\therefore$ রোলারের আপাত ওজন, W + 20 N sin θ

$\therefore$ রোলার কর্তৃক কৃতকাজ, $W_1 = (W + 20\,N\sin\theta) \times 5m$ [$\because$ সরণ = 5 m]

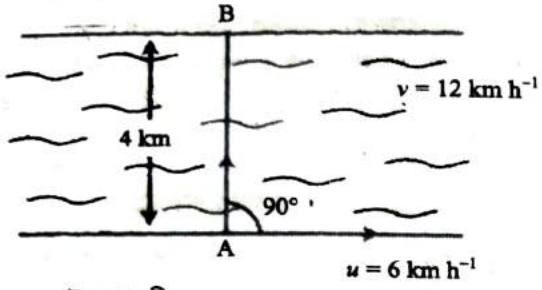
টানার ক্ষেত্রে কৃতকাজ : টানার ক্ষেত্রে উল্লম্ব উপাংশ $20\,N \sin\theta$ এটি উপরের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারের আপাত ওজন $= W - 20\,N \sin\theta$

$\therefore$ কৃতকাজ, $W_2 = (W - 20\,N \sin\theta) \times 5\,m$
$= (W - 20 \sin\theta)\,5\,J$

$\therefore W_2 < W_1$

অতএব, টানা ও ঠেলা উভয় ক্ষেত্রে কৃতকাজ সমান হবে না।

প্রশ্ন ৬৭ 4 km প্রশস্ত একটি নদীর পাড়ের A বিন্দু হতে $12\,km\,h^{-1}$ বেগে একটি নৌকা নদীর অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য যাত্রা শুরু করল। একজন লোক নৌকা চলার শুরু হতে অপর পাড়ের B বিন্দুতে 20 মিনিট অপেক্ষা করে চলে গেল। নদীতে স্রোতের বেগ $6\,km\,h^{-1}$।



ক. ডট গুণন কী? ১

খ. নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে নৌকার গতি কীভাবে বৃদ্ধি করা যায়? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নৌকাটির লব্ধি বেগ কত? ৩

ঘ. নৌকাটিকে কীভাবে চালনা করলে সোজা অপর পাড়ের B বিন্দুতে পৌছাতে পারবে। অপেক্ষমাণ লোকটির সাথে সাক্ষাৎ হয়েছিল কি? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৩]

৬৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে যদি একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়, তবে ঐ গুণনকে স্কেলার বা ডট গুণন বলে।

খ আমরা জানি, নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশের জন্য নৌকা গতি প্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ প্রযুক্ত বল F এবং কোণ θ হলে, $F \cos\theta$ বলের জন্য নৌকা গতিপ্রাপ্ত হয়। এখন θ এর মান যত কম হবে $F \cos\theta$ এর মান তত বেশি হবে অর্থাৎ রশির দৈর্ঘ্য যত বেশি হবে $\pm \cos\theta$ এর মান তত বেশি হবে। সুতরাং রশির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করে নৌকার গতি বৃদ্ধি করা যায়।

গ এখানে, নৌকার বেগ, $v = 12\,km\,h^{-1}$

স্রোতের বেগ, $u = 6\,km\,h^{-1}$

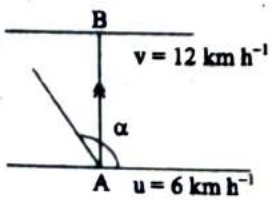
ব্যাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 90°$

লব্ধি বেগ $w = ?$

আমরা জানি, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos 90°}$
$= \sqrt{6^2 + 12^2 + 2 \times 6 \times 12 \times 0}\,km\,h^{-1} = 13.42\,km\,h^{-1}$

$\therefore$ নৌকার লব্ধি বেগ, $13.42\,km\,h^{-1}$

ঘ



মনে করি, লোকটি সোজা অপর পাড়ের B বিন্দুতে পৌছাতে পারবে যদি সে স্রোতের বিপরীত দিকে স্রোতের বেগের সমান α কোণে নৌকা চালায়। এক্ষেত্রে লব্ধি স্রোতের সাথে লম্ব বরাবর ক্রিয়া করবে।

$\therefore \tan 90° = \dfrac{v \sin\alpha}{u + v \cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{v \sin\alpha}{u + v \cos\alpha}$

বা, $u + v \cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{u}{v} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 120°$

$\therefore$ স্রোতের দিকের সাথে 120° কোণে নৌকা চালালে সোজাসুজি অপর পাড়ের B বিন্দুতে পৌছাতে পারবে।

এক্ষেত্রে, লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos\alpha}$
$= \sqrt{6^2 + 12^2 + 2 \times 6 \times 12 \times \cos 120°}$
$= 12\,km\,h^{-1}$

B বিন্দুতে পৌছাতে সময় লাগবে, $t = \dfrac{4\,km}{12\,km\,h^{-1}}$
$= \dfrac{1}{3}\,h = \dfrac{1}{3} \times 60\,min = 20\,min$

সুতরাং অপেক্ষমাণ লোকটির সাথে সাক্ষাত হবে।

প্রশ্ন ৬৮ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - m\hat{k}$

ক. ঋণাত্মক ভেক্টর কী? ১

খ. পাখি আকাশে কীভাবে উড়ে— ব্যাখ্যা কর। ২

গ. m-এর মান কত হলে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে। ৩

ঘ. m = 6 হলে ভেক্টরদ্বয় ত্রিভুজ ও সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় ধরে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তাদের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৪]

৬৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে তার বিপরীত দিকে সমমানের সমজাতীয় ভেক্টরটিই হলো ঋণাত্মক ভেক্টর।

খ পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর যোজনের রয়েছে। পাখি তার প্রতিটি ডানা দিয়ে বাতাসের উপর তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে এবং পাখিটি সম্মুখ দিকে এগিয়ে যায়। এর কারণ হলো বাতাসও প্রতিটি ডানার উপর তির্যকভাবে (বিপরীত দিকে) প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এ প্রতিক্রিয়া বলদ্বয়ের লব্ধির দিকে পাখিটি এগিয়ে যায়। এটি ভেক্টর যোজনের উদাহরণ।

গ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - m\hat{k}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

বা, $(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} - m\hat{k}) = 0$

বা, $4 - 3 - 2m = 0$

বা, $-2m = -1$

বা, $m = \dfrac{1}{2}$

অতএব, m এর মান $\dfrac{1}{2}$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

ঘ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$ [m = 6 বসিয়ে]

ভেক্টরদ্বয় সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু হলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে $|\vec{A} \times \vec{B}|$ বর্গ একক

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-18 + 2)\hat{i} + (4 + 12)\hat{j} + (-2 - 6)\hat{k}$$

$$= 16\hat{i} + 16\hat{j} - 8\hat{k}$$

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$ বর্গ একক

$= \sqrt{(-16)^2 + 16^2 + (-8)^2}$ বর্গ একক

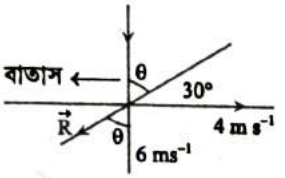
$= 24$ বর্গ একক

আবার, ভেক্টরদ্বয় কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু হলে,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 24$ বর্গ একক $= 12$ বর্গ একক

৩ 4 m s^{-1} বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক 6 m s^{-1} বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো।



ক. আয়ত ভেক্টর কী? ১

খ. $\hat{j} \times \hat{j}$ কেন নাল ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। ২

গ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে? ৩

ঘ. বৃষ্টির বেগ এবং লোকটির বেগ সমান হলে ছাতাকে আগের অবস্থা হতে কি অবস্থায় ধরলে লোকটি ভিজবে না– গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৫]

৬৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ এখানে, $\hat{j}$ হলো y অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর

$\therefore |\hat{j}| = 1$

এখন, $\hat{j} \times \hat{j} = |\hat{j}|\,|\hat{j}| \sin 0° = 1 \times 1 \times 0 = 0$

∴ $\hat{j} \times \hat{j}$ একই অক্ষ বরাবর দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফল বলে এর মান শূন্য।

গ এখানে, লোকের বেগ, $u = 4$ m s^{-1}

বৃষ্টির বেগ, $v = 6$ m s^{-1}

এখন, বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \frac{u}{v}$ বা, $\tan\theta = \frac{4 \text{ m s}^{-1}}{6 \text{ m s}^{-1}}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7°$

অতএব, বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে লোকটিকে উল্লম্বদিকের সাথে 33.7° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

ঘ এখানে, লোকটির বেগ, $u = 4$ m s^{-1}

∴ বৃষ্টির বেগ, $v_1 = 4$ m s^{-1}

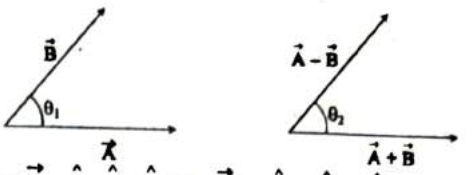
এখন, বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ_1 কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta_1 = \frac{u}{v_1}$ বা, $\tan\theta_1 = \frac{4 \text{ m s}^{-1}}{4 \text{ m s}^{-1}}$ বা, $\theta_1 = \tan^{-1}(1) = 45°$

অতএব, পরিবর্তিত ক্ষেত্রে ছাতাকে উল্লম্বের সাথে 45° কোণে ধরলে অর্থাৎ আগের অবস্থান থেকে কিছুটা হেলিয়ে ধরলে লোকটি ভিজবে না।

৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৬ এর উত্তরের জন্য ১৪নং (জ্ঞানমূলক), ২নং (অনুধাবনমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

৩



উপরের চিত্রে $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

ক. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি সমতলীয় হওয়ার শর্ত কী? ১

খ. ডাইভারজেন্সের ভৌতিক তাৎপর্য লিখ। ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে θ_1 এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. θ_1 ও θ_2 সমান হওয়া সম্ভব কিনা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৭]

৭১নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি সমতলীয় হওয়ার শর্ত হলো ভেক্টর দুটিকে একই তলে অবস্থান করতে হবে।

খ ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্য হলো–

১. ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ বা div.$\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

২. মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে।

৩. মান ঋণাত্মক হলে, আয়তনের সংকোচন ঘটে, ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

৪. মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়।

গ এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ মধ্যবর্তী কোণ, $\theta_1 = ?$

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta_1$

বা, $\cos\theta_1 = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}).(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{2 + 3 + 6}{\sqrt{3}\,7}$

$\therefore \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{11}{7\sqrt{3}}\right) = 24.87°$

∴ উদ্দীপকের আলোকে θ_1 এর মান 24.87°।

ঘ উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{A} + \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ_2

$\therefore (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = |\vec{A} + \vec{B}| \cdot |\vec{A} - \vec{B}| \cos\theta_2$

বা, $\cos\theta_2 = \frac{(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} + \vec{B}| \cdot |\vec{A} - \vec{B}|}$

$= \frac{(3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 7^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{-3 - 8 - 35}{\sqrt{74} \times \sqrt{30}} = \frac{-46}{47.117}$

$\therefore \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{-46}{47.117}\right) = 167.5°$

'গ' নং থেকে পাই, $\theta_1 = 24.9°$

এখানে, $\theta_1 \neq \theta_2$

অতএব, উপরোক্ত গাণিতিক বিশ্লেষণের আলোকে বলা যায় উদ্দীপকের θ_1 ও θ_2 সমান নয়।

একটি কণার ওপর $\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল ক্রিয়া করায় কণাটির $\vec{x} = (2\hat{i} - a\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়।

ক. লব্ধি ভেক্টর কী? ১

খ. বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেয়, পিছনের কাচকে ভিজায় না কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. কণাটির ওপর কৃত কাজ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. a এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে? ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৮]

৭২নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক ভেক্টরের সমন্বয়ে যে নতুন ভেক্টর পাওয়া যায় তাই লব্ধি ভেক্টর।

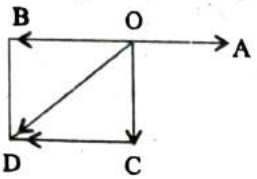
খ গাড়ি যে দিকে চলে তার উল্টোদিকে বাতাস প্রবাহিত হয়। বাতাসের বেগের মান গাড়ির বেগের মানের সমান হয়।

ধরি, গাড়ির বেগ $= \overrightarrow{OA}$

বাতাসের বেগ $= \overrightarrow{OB}$

বৃষ্টির বেগ $= \overrightarrow{OC}$

OBDC সামান্তরিক অঙ্কন করা হলো।



$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

$\therefore$ বৃষ্টির লব্ধি বেগ $= \overrightarrow{OD}$

সামনের দিক থেকে তির্যকভাবে পড়ে বলেই বৃষ্টি চলন্ত গাড়ির সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেয়, পিছনের কাচকে নয়।

গ এখানে, বল, $\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N

সরণ, $\vec{x} = (2\hat{i} - a\hat{j} - \hat{k})$ m ; কৃতকাজ, W = ?

আমরা জানি, $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$

$= (2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - a\hat{j} - \hat{k})$

$= 4 + 3a - 2 = 2 + 3a$

$\therefore$ কণাটির ওপর কৃতকাজ $(3a + 2)$ J.

ঘ 'গ' নং থেকে পাই,

সম্পাদিত কাজের পরিমাণ $W = 2 + 3a$

এখন, সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হলে,

$W = 0$

বা, $2 + 3a = 0$

বা, $a = -\frac{2}{3}$

অতএব, a এর মান $-\frac{2}{3}$ হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে।

ড. শাহজাহান তপন, মুহম্মদ আজিজ হাসান ও ড. রানা চৌধুরী স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

একজন মাঝি 6 km h^{-1} বেগে নৌকা চালাতে পারেন। 3 km h^{-1} বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে তার যাওয়ার প্রয়োজন।

ক. ভেক্টর রাশি কী? ১

খ. দুটি ভেক্টর রাশির যোগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হবে বের কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের মাঝি যদি সোজা নৌকা চালান তাহলে তিনি কেন বিপরীত বিন্দুতে যেতে পারবেন না– যুক্তি দিয়ে বুঝাও। তিনি সোজা নৌকা চালালে কোন দিকে কত বেগে যাবেন? ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

৭৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক যেসব ভৌত রাশিকে সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় সেসব রাশিই ভেক্টর রাশি।

খ ভেক্টর রাশির যোগের সাধারণ নিয়মটি হলো– দুটি ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে একটি ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে অপর ভেক্টরের পাদবিন্দু স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তার দৈর্ঘ্য ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান নির্দেশ করে। লব্ধি ভেক্টরের দিক প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুর দিকে।

গ নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করার জন্য নৌকার লব্ধি বেগ R স্রোতের বেগ u এর সাথে $\theta = 90°$ কোণ তৈরি করতে হবে।

এখন বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$$\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

উদ্দীপক থেকে পাই,
স্রোতের বেগ, $u = 3$ km h^{-1}
নৌকার বেগ, $v = 6$ km h^{-1}

উক্ত সমীকরণে মান বসিয়ে,

$$\tan 90° = \frac{(6 \text{ km h}^{-1}) \sin\alpha}{3 \text{ km h}^{-1} + (6 \text{ km h}^{-1})\cos\alpha}$$

কিন্তু $\tan 90° = \infty$

$\therefore \infty = \frac{6 \sin\alpha}{3 + 6\cos\alpha}$

বা, $3 + 6\cos\alpha = 0 \quad \left[\because \frac{\text{যেকোনো সংখ্যা}}{0} = \infty\right]$

বা, $6\cos\alpha = -3$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120°$

অতএব, নদীর এপার থেকে ঠিক ওপারে বিপরীত বিন্দুতে যাওয়ার জন্য মাঝিকে স্রোতের সাথে 120° কোণে নৌকা চালাতে হবে।

ঘ উদ্দীপকের মাঝি সোজা নৌকা চালালে স্রোতের বেগের কারণে তিনি বিপরীত বিন্দুতে যেতে পারবেন না।

যুক্তিসহ বিশ্লেষণ : উদ্দীপক থেকে আমরা পাই যে, নদীতে 3 km h^{-1} বেগে সরলরেখা বরাবর স্রোত প্রবাহিত হচ্ছে। অতএব মাঝি যদি সোজা অর্থাৎ স্রোতের বেগের সাথে সমকোণে নৌকা চালান তাহলে তারপক্ষে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছা সম্ভব হবে না। কারণ তিনি সোজা নৌকা চালালে স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90°$ হবে। ধরি, তখন মাঝি লব্ধি বেগ R, u এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করবে।

এখন, $\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

এখানে,
$v = 6$ km h^{-1}
$u = 3$ km h^{-1}

বা, $\tan\theta = \frac{(6 \text{ km h}^{-1}) \sin 90°}{(3 \text{ kmh}^{-1}) + (6 \text{ km h}^{-1})\cos 90°}$

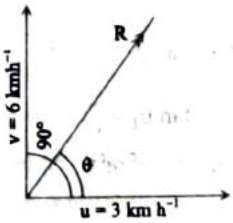
বা, $\tan\theta = \frac{6 \text{ km h}^{-1} \times 1}{3 \text{ km h}^{-1} + 0}$

বা, $\tan\theta = \frac{6 \text{ km h}^{-1}}{3 \text{ km h}^{-1}}$

বা, $\tan\theta = 2$

বা, $\theta = \tan^{-1} 2$

$\therefore \theta = 63.43°$



উপরোক্ত বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় মাঝি সোজা নৌকা চালালে নৌকার লব্ধি বেগ স্রোতের বেগের সাথে 63.43° কোণ করে চলবে। কিন্তু মাঝিকে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে নৌকার লব্ধি বেগ স্রোতের সাথে 90° কোণ তৈরি করতে হবে, যা সোজা নৌকা চালালে সম্ভব নয়।

এখন সোজা নৌকা চালালে লব্ধি বেগের মান হবে,

$$R = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu.\cos 90°}$$
$$= \sqrt{6^2 + 3^2 + 2 \times 6 \times 3 \times 0} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 6.708 \text{ km h}^{-1}$$

অতএব, সোজা নৌকা চালালে তিনি স্রোতের বেগের সাথে 63.43° কোণে 6.708 km h^{-1} বেগে যাবেন।

৩ রনি ও সানির তর্ক হচ্ছিল যে, দুটি অসমান মানের ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কি-না? রনি বলছিল অবশ্যই পারে, সানি বলছিল কখনোই না, এদের লব্ধির সর্বনিম্ন মান কখনোই শূন্য হবে না বড় জোড় দুটি ভেক্টরের মানের বিয়োগ ফল হতে পারে।

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. অবস্থান ভেক্টর কী? ১

খ. একক ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টরের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. দেখাও যে, একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান সমান হলে এদের লব্ধি ভেক্টর রাশিদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৩

ঘ. রনি ও সানির মধ্যে কে সঠিক? গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৩]

৭৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তাই অবস্থান ভেক্টর।

খ একক ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টরের মধ্যে পার্থক্য নিচে ব্যাখ্যা করা হলো–

১, কোনো ভেক্টরের মান এক একক হলে তাকে একক ভেক্টর বলে। অন্যদিকে প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

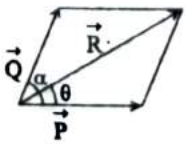
২. একক ভেক্টরকে $\hat{a}$ বা $\hat{i}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অপরদিকে অবস্থান ভেক্টরকে $\bar{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গ মনে করি, P ও Q দুটি ভেক্টর রাশি। এরা একই বিন্দুতে পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। এদের লব্ধি R হলে এবং R ও P এর মধ্যেবর্তী কোণ θ হলে ভেক্টর রাশির সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

ভেক্টর দুটির মান সমান অর্থাৎ $\vec{P} = \vec{Q}$ হলে,

$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{P\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$



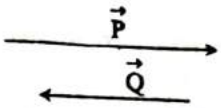
বা, $\tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় সমান হলে লব্ধি ভেক্টর, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ঘ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α যেখানে, P > Q এদের লব্ধি R হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

সমীকরণ অনুসারে cos α এর মান সর্বনিম্ন হলে R এর মান সর্বনিম্ন হবে।



cos α এর সর্বনিম্ন মান 1

অর্থাৎ $\cos\alpha = -1$

বা, $\alpha = \cos^{-1}(-1)$

$\therefore \alpha = 180°$

সুতরাং α = 180° হলে ভেক্টরদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত হবে।

$\therefore R^2_{min} = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180° = P^2 + Q^2 - 2PQ = (P - Q)^2$

$\therefore R_{min} = P - Q$

অর্থাৎ দুটি অসমান মানের ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না কিন্তু তাদের মানের বিয়োগফলের সমান হতে পারে। অর্থাৎ সানি সঠিক।

৪ নওরিন বলছিল যে, দুটি ভেক্টরকে গুণ করে গুণফল স্কেলার রাশি বা ভেক্টর রাশি উভয়ই পাওয়া যেতে পারে। দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল স্কেলার হয় এ কথাটা কিছুতেই নওশিন মানতে পারছিল না। সে কেবলই বলছে দুটি ভেক্টরের গুণফল ভেক্টরই হবে। নওরিন ও নওশিন দুজনেই যুক্তিতর্কে মেতে ওঠল।

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী? ১

খ. চিত্রসহকারে দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি অবস্থান ভেক্টরের রাশিমালা নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ এই ভেক্টর দুটির স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল নির্ণয় কর এবং নওরিন ও নওশিনের যুক্তিতর্কের সমাধান দাও। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৪]

৭৫নং প্রশ্নের উত্তর

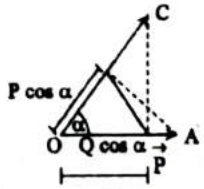
ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে এই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। তীর চিহ্নিত OA ও OC সরলরেখা রাশি দুটির মান ও দিক নির্দেশ করছে। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। এদের স্কেলার গুণফল $\vec{P}.\vec{Q}$।

$\therefore \vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\alpha = QP\cos\alpha$ যেখানে, $0 \le \alpha \le \pi$

কিন্তু Q cos α হচ্ছে $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ বা $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং P cos α হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে P এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{Q}$ এর দিকে P এর উপাংশ।

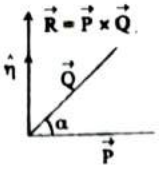


দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি পরস্পরের সাথে α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। এদের ভেক্টর গুণফল ক্রস গুণফল R হলে,

$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q}$

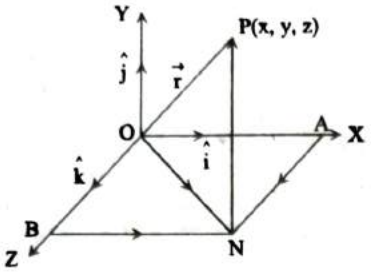
$= \hat{\eta} PQ \sin\alpha$ যেখানে, $0 \le \alpha \le \pi$



এখানে, $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে।
দুটি ভেক্টরের গুণফলের দিক ডানহাতি কর্ক স্ক্রু সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

গ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় পরস্পর লম্ব তিনটি রেখা OX, OY এবং OZ যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ নির্দেশ করে এবং মূলবিন্দু O। $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ যথাক্রমে অক্ষত্রয় বরাবর একক ভেক্টর। $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।

মনে করি, $\vec{r} = \vec{OP}$ এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z)। P বিন্দু থেকে XZ তলের উপর PN এবং N বিন্দু থেকে X ও Z অক্ষের উপর যথাক্রমে NA ও NB লম্ব আঁকি।



$\therefore$ BN = OA = x

OB = AN = z এবং NP = y

$\vec{BN} = \vec{OA} = x\hat{i}$

$\vec{OB} = \vec{AN} = z\hat{k}$ এবং $\vec{NP} = y\hat{j}$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে ΔONP হতে পাই,

$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP}$ ..... (i)

আবার, ΔOBN হতে পাই, $\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN}$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BN} + \vec{NP}$

বা, $r = z\hat{k} + x\hat{i} + y\hat{j}$

$\therefore$ $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এটিই অবস্থান ভেক্টরের রাশিমালা।

ঘ উদ্দীপক অনুসারে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$= (2 \times 4) + \{1 \times (-6)\} + \{(-6) \times 5\}$

$= 8 - 6 - 30$

$= 28$; যা একটি স্কেলার রাশি

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -6 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(5 - 36) + \hat{j}(-24 - 10) + \hat{k}(-12 - 4)$

$= -31\hat{i} - 34\hat{j} - 16\hat{k}$; যা একটি ভেক্টর রাশি।

অর্থাৎ দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি এবং ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি।

অতএব, উপরের গাণিতিক বিশ্লেষণ হতে বলা যায় যে, নওরিন সঠিক এবং গাণিতিক বিশ্লেষণই যুক্তিতর্কের সমাধান।

৭৬নং প্রশ্নের উত্তর

$\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$

ক. স্কেলার গুণন কী? ১

খ. দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের দিক কীভাবে পাওয়া যায়? ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

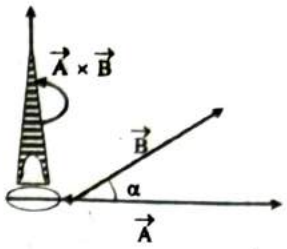
ঘ. যেকোনো দুটি ভেক্টরের গুণফল দিয়ে চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়— এই উক্তির যথার্থতা প্রমাণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৫]

ক দুটি ভেক্টর রাশির যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের cosine এর মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনই স্কেলার বা ডট গুণন।

খ দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম থেকে পাওয়া যায়।

ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি হলো— $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সে সমতলের অভিলম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু রেখে প্রথম ভেক্টরের দিক থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।



ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি দুটি ভেক্টর গুণফলের দিক নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা হয়।

গ আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$

উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{A} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$

মধ্যবর্তী কোণ θ = ?

বা, $\cos\theta = \dfrac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \times \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{(4 \times 2)\hat{i}^2 - (2 \times 4)\hat{j}^2 + (3 \times 6)\hat{k}^2}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} \times \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{8 - 8 + 18}{\sqrt{16 + 4 + 9} \times \sqrt{4 + 16 + 36}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{18}{\sqrt{29} \times \sqrt{56}} = \dfrac{18}{40.30} = 0.447$

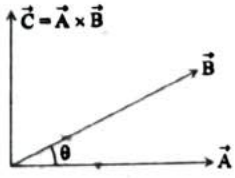
বা, $\theta = \cos^{-1}(0.447) = 63.47°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 63.47°।

ঘ যেকোনো দুটি ভেক্টরের গুণফল দিয়ে চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি ক্ষেত্র অর্থাৎ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

যথার্থতা প্রমাণ : আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণন বলে। ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের sine এর গুণফলকে ভেক্টর গুণফলের মান বলে। ভেক্টর গুণফলের দিক হয় উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকে।

এখন, যেকোনো দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে আমরা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণনের ফলে যে নতুন ভেক্টর পাই, তা যদি $\vec{C}$ হয়,

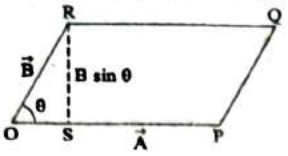


তাহলে, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ (যখন $0 \le \theta \le \pi$)

এখানে $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{A} \times \vec{B}$ অর্থাৎ $\vec{C}$ এর দিক নির্দেশ করে। এই $\hat{n}$ এর মান 1। একটি ডানহাতি স্ক্রুকে উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্বভাবে স্থাপন করে $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হবে $\hat{n}$ তথা $\vec{C}$ এর দিক হবে সে দিকে।

$\therefore \vec{A} = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta$

কিন্তু $B \sin\theta$ হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত OPQR সামান্তরিকের উচ্চতা



$\therefore \vec{C} = AB \sin\theta = OP \times RS = A \times h$

= সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, যা চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি ক্ষেত্র। অর্থাৎ দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে কল্পিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের মানের সমান।

অতএব, উপরোক্ত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায়, যেকোনো দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল দিয়ে চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

১ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর।

ক. ভেক্টর গুণন কী? ১

খ. দেখাও যে, দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে। ২

গ. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লম্ব বরাবর একক ভেক্টর কীভাবে নির্ণয় করবে ব্যাখ্যা কর। ৩

ঘ. কোন শর্তে দুটি ভেক্টর লম্ব হবে আর কোন শর্তে দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হবে তা ভেক্টরদ্বয়ের গুণন থেকে কীভাবে জানা যায় বিশ্লেষণ করে বুঝিয়ে দাও। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬]

৭৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের sine এর মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনই ভেক্টর বা ক্রসগুণন।

খ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ। তাহলে তাদের স্কেলার গুণন বা ডট গুণন নিয়মানুসারে,

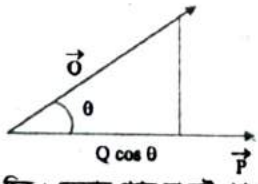
$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$ ... ... (১)

এবং $\vec{Q}.\vec{P} = PQ\cos(-\theta) = PQ\cos\theta$.

$\vec{Q}.\vec{P} = PQ\cos\theta$ ..... (২)

(১) নং এবং (২) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

অর্থাৎ, স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে।



চিত্র : স্কেলার গুণন বা ডট গুণন

গ উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয় $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$

মনে করি, $\vec{A} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$ এবং $\vec{B} = (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

অতএব এদের ভেক্টর গুণফল,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x(\hat{i} \times \hat{i}) + A_xB_y(\hat{i} \times \hat{j}) + A_xB_z(\hat{i} \times \hat{k}) + A_yB_x(\hat{j} \times \hat{i}) + A_yB_y(\hat{j} \times \hat{j}) + A_yB_z(\hat{j} \times \hat{k}) + A_zB_x(\hat{k} \times \hat{i}) + A_zB_y(\hat{k} \times \hat{j}) + A_zB_z(\hat{k} \times \hat{k})$$

$$= 0 + A_xB_y\hat{k} + A_xB_z(-\hat{j}) + A_yB_x(-\hat{k}) + 0 + A_yB_z\hat{i} + A_zB_x\hat{j} + A_zB_y(-\hat{i}) + 0$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

অতএব, নির্ণায়কের সাহায্যে লেখা যায়,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2}$$

এবং $\vec{A} \times \vec{B}$ এর লম্ব বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

অতএব, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লম্ব বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|}$

ঘ উদ্দীপকের $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণফল $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

এখন, দুটি ভেক্টর লম্ব হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ 90° হবে।

তখন, ডট গুণফল, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90° = PQ.0$

বা, $\vec{P}.\vec{Q} = 0$

অতএব, দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল শূন্য হলে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে অথবা দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে এদের ডট গুণফল শূন্য হয়।

আবার, ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ হবে 0°.

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণন, $\vec{P}.\vec{Q} = P.Q\cos 0°$

বা, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ$

অতএব, দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল ভেক্টরদ্বয়ের মানের গুণফলের সমান হলে এরা পরস্পর সমান্তরাল হবে অথবা দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হলে এদের ডট গুণফল ভেক্টরদ্বয়ের মানের গুণফলের সমান হবে।

এখন, ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল, $\vec{P} \times \vec{Q} = PQ\sin\theta$

এখন, ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{n}\,PQ\sin 0°$

বা, $\vec{P} \times \vec{Q} = 0$

অতএব, দুটি অশূন্য ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

প্রশ্ন ৭৮ একটি বস্তুকে দুটি রাশি দিয়ে সমমানের বস্তুটি বল $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা দুটি ভিন্ন দিকে টানা হচ্ছে।

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. একক ভেক্টর কী? ১

খ. ভেক্টর বিয়োগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর। ২

গ. দেখাও যে, উদ্দীপকে বর্ণিত বস্তুটি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর দিকের ঠিক মাঝখান দিয়ে যাবে। ৩

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, সমমানের দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান তাদের যে কোনোটির মানের দ্বিগুণ হবে। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৮]

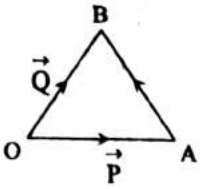
৭৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক একক তাই একক ভেক্টর।

খ দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর বিয়োগফল নির্ণয় করতে হলে

১. ভেক্টর দুটিকে মান ও দিক অপরিবর্তিত রেখে একই আদি বিন্দু O হতে $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ অঙ্কন করতে হবে।

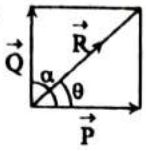
২. Q এর প্রান্ত বিন্দু B এর সাথে $\vec{P}$ এর প্রান্ত বিন্দু A যোগ করলে $\vec{BA}$ ই মানে ও দিকে $\vec{P}-\vec{Q}$ ভেক্টরকে সূচিত করে।



অর্থাৎ, $\vec{BA}=\vec{P}-\vec{Q}$

গ লব্ধি $\vec{P}$ বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে

$$\tan\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$



বা, $\tan\theta=\frac{P\sin\alpha}{P+P\cos\alpha}$ [∵ P = Q]

$$=\frac{P\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

বা, $\tan\theta=\tan\frac{\alpha}{2}$

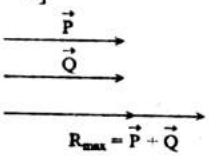
∴ $\theta=\frac{\alpha}{2}$

অর্থাৎ লব্ধি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর দিকের ঠিক মাঝখান দিয়ে যাবে।

ঘ P ও Q সমমানের ভেক্টর দুটি পরস্পর α কোণে ক্রিয়া করলে ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$
এখানে, লব্ধির মান cos α এর উপর নির্ভর করে।

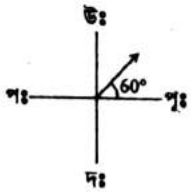
cos α এর মান সর্বাধিক হয় যখন $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করে। অর্থাৎ এদের মধ্যবর্তী কোণ α = 0° হয়।

$$R_{max}=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 0^\circ}$$
$$=\sqrt{P^2+2PQ+Q^2}\quad[\because \cos 0^\circ=1]$$
$$=\sqrt{(P+Q)^2}$$
$$\therefore\ R_{max}=P+Q$$
$$=P+P\quad[\because \vec{P}=\vec{Q}]$$
$$=2P$$



অনুরূপভাবে, $R_{max}=2Q$
অর্থাৎ সমমানের দুটির ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান তাদের যেকোনোটির মানের দ্বিগুণ।

কোনো স্থানের বায়ু পূর্বদিকের সাথে 60° কোণে উত্তর দিকে বইছে। বায়ুর বেগের পূর্বমুখী উপাংশ 30 km h⁻¹।
নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



ক. ভেক্টরের বিভাজন কী? ১
খ. উপাংশ বলতে কী বুঝ? ২
গ. উদ্দীপকে বর্ণিত ঝড়ের বেগের মান কত? ৩
ঘ. একটি ভেক্টরকে পরস্পর লম্ব দুটি উপাংশে বিভাজিত করলে কোন দিকে কোন উপাংশ হবে তা ব্যাখ্যা কর। ৪
[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৯]

৭৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো একটি ভেক্টরকে যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টরে বিভাজিত করা হয় এবং প্রথম ভেক্টরটি বিভাজিত অংশগুলোর লব্ধি হয়, তবে সেই বিভাজনই ভেক্টর বিভাজন।

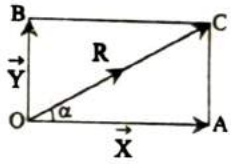
খ উপাংশ বলতে বোঝায় যদি একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা হয় তবে বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটি হবে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশক বা উপাংশ। একটি ভেক্টরকে যদি এমনভাবে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা হয় যে, উপাংশ দুটি পরস্পরের সমকোণে থাকে তবে তাদেরকে লম্ব উপাংশ বা লম্বাংশ বলে।

গ ধরি, ঝড়ের বেগের মান, v
উদ্দীপক হতে, পূর্বদিকের সাথে বেগের কোণ, θ = 60°
বায়ুর বেগের পূর্বমুখী উপাংশ, $v_e = 30\ km\ h^{-1}$
আমরা জানি, $V_E = V\cos\theta$

বা, $V=\frac{V_E}{\cos\theta}=\frac{30\ km\ h^{-1}}{\cos 60^\circ}=\frac{30\ km\ h^{-1}}{\frac{1}{2}}$

∴ $V = 60\ km\ h^{-1}$
সুতরাং ঝড়ের বেগের মান 60 km h⁻¹।

ঘ মনে করি, $\vec{R}$ একটি ভেক্টর। একে $\vec{X}$ ও $\vec{Y}$ দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত করা হয়েছে। $\vec{R}$ কে α কোণে একটি উপাংশ $\vec{OA}=\vec{X}$ এ বিভক্ত করা হয়েছে। অপর উপাংশ $\vec{OB}=\vec{Y}$ হচ্ছে $\vec{X}$ এর সাথে সমকোণে অর্থাৎ লম্ব বরাবর।
এখন, ΔOAC-এ
OC = R
OA = X
এবং AC = OB = Y



∴ $\cos\alpha=\frac{OA}{OC}=\frac{X}{R}$

∴ $X = R\cos\alpha$

আবার, $\sin\alpha=\frac{AC}{OC}=\frac{Y}{R}$

∴ $Y = R\sin\alpha$

সুতরাং কোনো ভেক্টর $\vec{R}$ কে দুটি পরস্পর উপাংশে বিভাজিত করলে R এর সাথে α কোণে উপাংশ X এবং X এর সাথে সমকোণে উপাংশ Y হবে। অর্থাৎ, $X = R\cos\alpha$; $Y = R\sin\alpha$.

প্রশ্ন ৮০ $\vec{A}=4\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{B}=8\hat{i}+m\hat{j}+10\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী? ১
খ. $\hat{i}\times\hat{i}$ কেন নাল ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। ২
গ. m এর মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. শুধু m এর মান পরিবর্তন করে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটিকে পরস্পর লম্ব করা সম্ভব— গাণিতিক যুক্তিসহ এ কথার যথার্থতা নিরূপণ কর। ৪
[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১০]

৮০নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে নাল ভেক্টর বলে। ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞানুসারে,
$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{n}\,|\hat{i}|\,|\hat{i}|\sin 0^\circ$ [∵ দুটি সমান ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ 0°]
$=\vec{0}$
যেহেতু $\hat{i}\times\hat{i}=\vec{0}$ অতএব, $\hat{i}\times\hat{i}$ নাল ভেক্টর।

গ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 0°$ হবে।

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0$$

এখানে, $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = 8\hat{i} + m\hat{j} + 10\hat{k}$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 5 \\ 8 & m & 10 \end{vmatrix} = 0$

বা, $\hat{i}(-30 - 5m) - \hat{j}(40 - 40) + \hat{k}(4m + 24) = 0$

বা, $\hat{i}(-30 - 5m) + \hat{k}(4m + 24) = 0$

এখন, $\hat{i}$ এবং $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-30 - 5m = 0$ এবং $4m + 24 = 0$

বা, $5m = -30$ বা, $4m = -24$

বা, $m = -6$ $\therefore m = -6$

নির্ণেয় মান -6।

ঘ যদি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয় তাহলে তাদের ডট গুণন অবশ্যই শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B} = 0$

বা, $(4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (8\hat{i} + m\hat{j} + 10\hat{k}) = 0$

বা, $32 - 3m + 50 = 0$

বা, $-3m = -82$

বা, $m = 27.33$

অর্থাৎ $m = 27.33$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

'গ' হতে পাই m এর মান -6 হলে ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে।

অতএব, বলা যায় যে, শুধু m এর মান পরিবর্তন করে 27.33 করলেই ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

৯ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 25 একক এবং ভেক্টর গুণফলের মান $25\sqrt{3}$ একক।

ক. সমতলীয় ভেক্টর কী? ১

খ. ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে কি? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? ব্যাখ্যা কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের তথ্য থেকে ভেক্টর দুটির মান বের করা সম্ভব কি-না গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১১]

৮১নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সমতলে অবস্থিত হয় তবে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

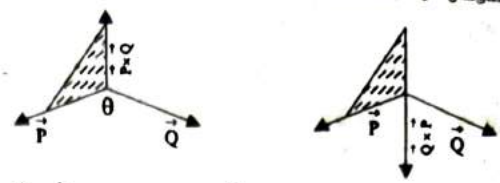
খ দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। কারণ এক্ষেত্রে গুণফলের মান সমান হলেও দিক বিপরীতমুখী হয়ে থাকে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ।

এখন, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির ক্রস গুণন,

$\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{n}\, PQ \sin\theta$ ..... (1)

[এখানে, $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{R}$ এর দিক নির্দেশ করে]



এবং $\vec{Q} \times \vec{P} = \hat{n}\, PQ \sin(-\theta) = -\hat{n}\, PQ \sin\theta$

$\therefore \vec{Q} \times \vec{P} = -\hat{n}\, PQ \sin\theta$ ..... (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণ হতে পাই, $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

$\therefore \vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ এখানে, $\vec{A} . \vec{B} = 25$ একক এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = 25\sqrt{3}$ একক।

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ θ হলে,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$ এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta$

সুতরাং $AB \cos\theta = 25$ ..... (1)

এবং $AB \sin\theta = 25\sqrt{3}$ ..... (2)

(2) ÷ (1) হতে, $\frac{AB \sin\theta}{AB \cos\theta} = \frac{25\sqrt{3}}{25}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 60°।

ঘ এখানে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 25$ এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = 25\sqrt{3}$

ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ α হলে,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta = 25$ ..... (1)

এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta = 25\sqrt{3}$ ..... (2)

'গ' নং থেকে পাই, $\theta = 60°$

θ এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$AB \cos 60° = 25$

বা, $AB \times \frac{1}{2} = 25$

$\therefore AB = 50$

θ এর মান (2) নং এ বসালেও AB = 50 পাওয়া যাবে।

প্রদত্ত তথ্য থেকে ভেক্টর দুটির মান বের করা সম্ভব নয়, কারণ A, B এর মান সংক্রান্ত একটিমাত্র সমীকরণ পাওয়া যায়।

কিন্তু অজানা মান দুটি (A ও B) হওয়ায় A ও B এর মান বের করা সম্ভব নয়।

১০ $\vec{P} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 8\hat{k}$ দুটি ভেক্টর।

ক. নাল ভেক্টর কী? ১

খ. একটি একক ভেক্টর কীভাবে পাওয়া যায়—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. m এর মান কত হলে উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে? ৩

ঘ. উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় কি কোনোভাবে সমান্তরাল হওয়া সম্ভব? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১২]

৮২নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাই নাল ভেক্টর।

খ শূন্য নয় এরূপ যেকোনো ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। অর্থাৎ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\text{মূল ভেক্টর}}{\text{ভেক্টরের মান}}$।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X, Y ও Z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরগুলোকে যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, কোনো ভেক্টরের মান $|\vec{A}|$ ও তার দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, ভেক্টরটি হবে $|\vec{A}|\hat{a}$ অর্থাৎ, একক ভেক্টর, $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$।

গ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে এদের ডটগুণফল শূন্য হবে,

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = 0$

আবার, $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$= (6 \times 2)\hat{i}^2 + (2 \times m)\hat{j}^2 - (4 \times 8)\hat{k}^2$

$= 12 + 2m - 32 = 2m - 20$

$\therefore 2m - 20 = 0$

বা, $2m = 20$ বা, $m = 10$

উদ্দীপক থেকে পাই,
$\vec{P} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$
$\vec{Q} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 8\hat{k}$
$m = ?$

অতএব, m এর মান 10 হলে, উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

ঘ 'গ' এর উত্তর থেকে পাই, m এর মান 10 হলে উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

অর্থাৎ এদের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়। এখন ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হতে হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ 0° হয়ে যাবে এবং এদের ভেক্টর গুণফল 0 হবে।

এখন, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 2 & -4 \\ 2 & m & 8 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(16 + 4m) + \hat{j}(-8 - 48) + \hat{k}(6m - 4)$

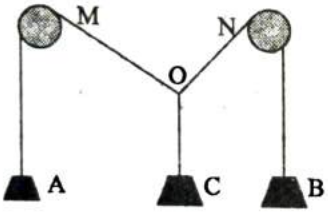
$= (16 + 4m)\hat{i} - 56\hat{j} + (6m - 4)\hat{k}$;

যা শূন্য হতে পারে না।

অতএব, উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হওয়া সম্ভব নয়।

গোলাম হোসেন প্রামাণিক, দেওয়ান নাসির উদ্দিন ও রবিউল ইসলাম স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

[redacted] চিত্রে দুটি কপিকলের সাহায্যে A, B ও C তিনটি বস্তু ঝুলানো। এদের ভর যথাক্রমে 3 kg, 4 kg ও 5 kg। এতে MON কোণটি সমকোণ হতে দেখা গেল। পরীক্ষার স্থানে অভিকর্ষ ত্বরণের মান $10\ m\ s^{-2}$। নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।



ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি বিবৃত কর। ১

খ. স্রোতের নদীতে নৌকা আড়াআড়ি পাড়ি দিতে চাইলে তা আড়াআড়ি পাড়ি না দিতে পারার কারণ ব্যাখ্যা কর। ২

গ. যখন ∠MON = 60°, তখন O বিন্দুতে উর্ধ্বমুখী বল নির্ণয় কর। ৩

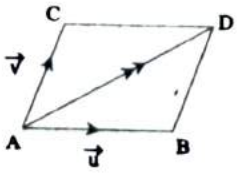
ঘ. চিত্রের সাহায্যে ও গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে MON কোণটি সমকোণ হওয়ার যথার্থতা নিরূপণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

৮৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি হলো— কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু যদি দুটি ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করে তবে ঐ বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

খ চিত্রে স্রোতের বেগ $\vec{u}$ এবং নৌকার বেগ $\vec{v}$ হলে সামান্তরিকের কর্ণ AD বেগদ্বয়ের লব্ধি নির্দেশ করবে। এজন্যই নৌকাকে AC বরাবর চালালে তা AD বরাবর চলবে। অর্থাৎ স্রোতের নদীতে নৌকা সোজাসুজি পাড়ি দিতে চাইলে তা সোজাসুজি পাড়ি দেওয়া যায় না।



গ উদ্দীপক থেকে পাই, A এর ভর = 3 kg

$\therefore$ A এর ওজন $P = 3\ kg \times 10\ m\ s^{-2} = 30\ N$ যা OM বরাবর ক্রিয়া করবে।

অনুরূপভাবে, B এর ওজন $Q = 4\ kg \times 10\ m\ s^{-2} = 40\ N$ যা ON বরাবর ক্রিয়া করবে।

এখন P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 60°$

সুতরাং O বিন্দুতে উর্ধ্বমুখী বল = $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি বল

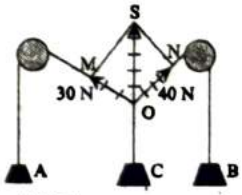
$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \times \cos\alpha}$

$= \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \times \cos 60°}$

$= 60.83\ N$

অতএব, O বিন্দুতে উর্ধ্বমুখী বল 60.83 N.

ঘ চিত্রের ন্যায় OM = 30 N এবং ON = 40 N অংশ কেটে নিই। OMSN সামান্তরিকটি অঙ্কন করি। এখন OS এর দৈর্ঘ্য C এর ওজনের সমান হলে ওজন তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।



এখন, C এর ওজন, $R = 5\ kg \times 10\ m\ s^{-2} = 50\ N$

এক্ষেত্রে P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α_1 হলে,

প্রশ্নমতে, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha_1}$

বা, $50 = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \times \cos\alpha_1}$

বা, $2500 = 900 + 1600 + 2400\cos\alpha_1$

বা, $2500 = 2500 + 2400\cos\alpha_1$

বা, $2400\cos\alpha_1 = 0$

বা, $\cos\alpha_1 = 0$

$\therefore \alpha_1 = 90°$

অতএব, বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করলে ∠MON সমকোণ হবে।

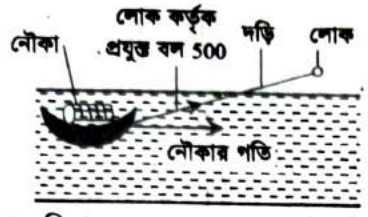
[redacted] অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২ এর উত্তরের জন্য ৫৪ পৃষ্ঠার সৃজনশীল প্রশ্ন ৯-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

[redacted] অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৩-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৪-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

[redacted] অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৪-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৮৭ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৫-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৬-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৮৮ নিচের চিত্রটি লক্ষ কর—



ক. ভেক্টরের বিভাজন কাকে বলে? ১

খ. লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নৌকার গতির দিকে বলের উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. নৌকাটি ভিন্ন পথে চালাতে মাঝির ভূমিকা ব্যাখ্যা কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৮]

৮৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো একটি ভেক্টরকে যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টরে বিভাজিত করা হয় এবং প্রথম ভেক্টরটি বিভাজিত অংশগুলোর লব্ধি হয়, তবে সেই বিভাজনকে ভেক্টর বিভাজন বলে।

খ একটি লন রোলারকে ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী মনে হয়। অন্যদিকে রোলারটিকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি রোলারের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ হয়।

গ উদ্দীপক থেকে পাই, প্রযুক্ত বল $F = 500$ N.

নৌকার গতির দিকের সাথে প্রযুক্ত বলের অভিমুখের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 20°$

এখন, নৌকার গতির দিকে বলের উপাংশ $= F\cos\theta$

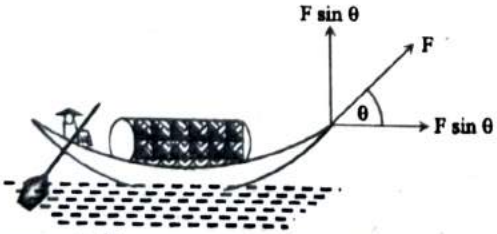
$= 500\text{ N} \times \cos 20°$

$= 469.85$ N

অতএব, নৌকার গতির দিকে বলের উপাংশ 469.85 N.

ঘ উদ্দীপকের তথ্যের আলোকে বলা যায়—

মাঝি দাঁড়/হাল উঠিয়ে নিলে নৌকার গতিপথ পরিবর্তিত হবে।



এখানে, F বলে গুণ টানা হলে, এর $F\cos\theta$ উপাংশ নৌকাকে সামনের দিকে নিয়ে যায় এবং $F\sin\theta$ উপাংশ নৌকাকে পাড়ের দিকে টানে, দাঁড় বা হাল দ্বারা $F\sin\theta$ কে নাকচ করা হয়। এক্ষেত্রে দাঁড় সরিয়ে দিলে নৌকাটির গতিপথ পরিবর্তিত হবে। অতএব বলা যায় যে, নৌকাটিকে ভিন্ন পথে চালাতে মাঝিই প্রধান ভূমিকা রাখতে পারে।

প্রশ্ন ৮৯ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১১-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৪-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৯০ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১২-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৭-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৯১ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৩-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৩-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৯২ $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর।

ক. দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন কী? ১

খ. দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কোন শর্তে দুটি ভেক্টর লম্ব হবে এবং কোন শর্তে সমান্তরাল হবে তা ভেক্টরদ্বয়ের গুণন থেকে কীভাবে জানা যায় মতামত দাও। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৪]

৯২নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টর রাশির যে গুণনের ফলে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তাই ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন।

খ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ। তাহলে তাদের স্কেলার গুণন বা ডট গুণন নিয়মানুসারে,

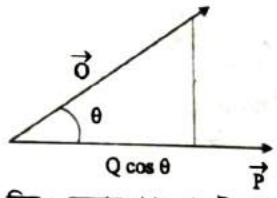
$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$ ... ... (১)

এবং $\vec{Q}.\vec{P} = PQ\cos(-\theta) = PQ\cos\theta$.

$\vec{Q}.\vec{P} = PQ\cos\theta$ ..... (২)

(১) নং এবং (২) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

অর্থাৎ, স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে।



চিত্র : স্কেলার গুণন বা ডট গুণন

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}\sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2}\cos\theta$

বা, $12 - 6 - 2 = \sqrt{4+4+1}\sqrt{36+9+4}\cos\theta$

বা, $4 = \sqrt{9} \times \sqrt{49}\cos\theta = 3 \times 7 \times \cos\theta = 21\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{4}{21} = 0.19047619$

বা, $\theta = \cos^{-1} 0.19047619 = 79.01°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 79.01°।

ঘ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হলে $\theta = 90°$ হবে এবং সেক্ষেত্রে $\cos\theta = 0$ হবে। তাহলে $\vec{A}.\vec{B} = 0$।

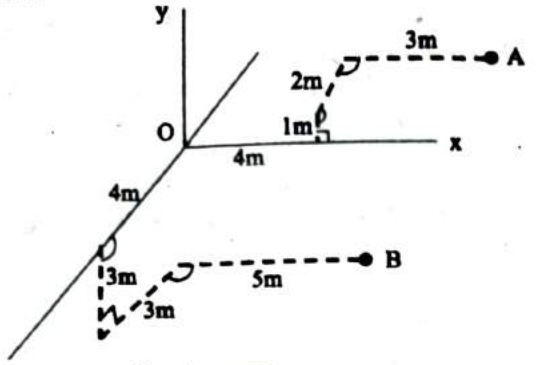
সুতরাং, দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হবে যদি ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}AB\sin\theta$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে $\theta = 0°$ বা 180° হবে এবং সেক্ষেত্রে $\sin\theta = 0$ হবে, তাহলে $\vec{A} \times \vec{B} = 0$।

সুতরাং, দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

[redacted] নিচের চিত্রটি লক্ষ কর–



ক. একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর আয়ত একক ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

গ. A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. চিত্রটিকে সরল করে অঙ্কন কর এবং A থেকে একটি বস্তু B তে এলে সরণের x, y, z উপাংশগুলো নির্ণয় কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৮]

৯৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টরের মান এক একক হলে তাকে একক ভেক্টর বলে।

খ মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_A} = (7\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})m$

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_B} = (5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})m$.

গ 'খ' নং থেকে পাই, $\vec{r_A} = 7\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{r_B} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{r_A}$ ও $\vec{r_B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = ?$

$\vec{r_A} \cdot \vec{r_B} = r_A \cdot r_B \cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{r_A} \cdot \vec{r_B}}{r_A \cdot r_B}$

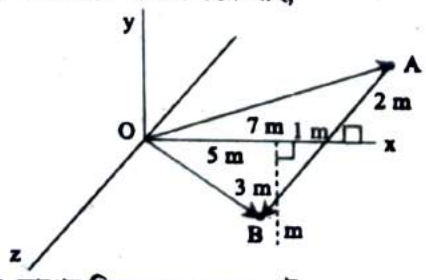
বা, $\cos\alpha = \dfrac{(7\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{7^2 + 1^2 + (-2)^2}.\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}}$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{35 - 3 - 2}{\sqrt{49 + 1 + 4}.\sqrt{25 + 9 + 1}} = \dfrac{30}{\sqrt{54} \times \sqrt{35}}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{30}{\sqrt{54} \times \sqrt{35}} = 46.365°$

অতএব, A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 46.365°.

ঘ চিত্রটিকে সরল করে অঙ্কন করে পাই,



এখন, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই,

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$

$= (5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})m - (7\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})m$ [$\vec{r_A}$ ও $\vec{r_B}$ এর মান বসিয়ে]

$= (-2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k})\ m$

অতএব, সরণের x, y ও z উপাংশ যথাক্রমে – 2 m, – 4 m ও 3 m.

[redacted] $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর।

ক. দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন কাকে বলে? ১

খ. দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মানে না– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন থেকে কীভাবে ক্ষেত্র ভেক্টরের ধারণা পাওয়া যায় মতামত দাও। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১৯]

৯৪নং প্রশ্নের উত্তর

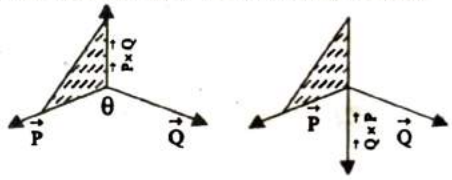
ক দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের sine এর মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনকে ভেক্টর বা ক্রসগুণন বলে।

খ দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। কারণ এক্ষেত্রে গুণফলের মান সমান হলেও দিক বিপরীতমুখী হয়ে থাকে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ।

এখন, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির ক্রস গুণন, $\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{n}\ PQ \sin\theta$ ..... (1)

[এখানে, $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{R}$ এর দিক নির্দেশ করে]



এবং $\vec{Q} \times \vec{P} = \hat{n}\ PQ \sin(-\theta) = -\hat{n}\ PQ \sin\theta$

$\therefore\ \vec{Q} \times \vec{P} = -\hat{n}\ PQ \sin\theta$ ..... (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

$\therefore\ \vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{n} = ?$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

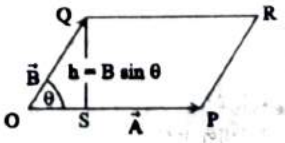
$= \hat{i}(9 - 8) + \hat{j}(-4 - 6) + \hat{k}(-4 - 3) = \hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 100 + 49} = \sqrt{150}$

এখন, $\hat{n} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \dfrac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{150}}$

ঘ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে এদের ভেক্টর গুণফল $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}\ AB \sin\theta$।

এখানে $0 \le \theta \le \pi$ এবং $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যার দিক ও যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব এবং ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম থেকে পাওয়া যাবে।



$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে OPRQ সামান্তরিকটি অঙ্কন করি। OP-এর উপর QS লম্ব টানি।

আমরা জানি, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

∴ OPRQ সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল = OP × QS

$= A \times B \sin\theta = AB \sin\theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$

অর্থাৎ $\vec{A} \times \vec{B}$-এর মান $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান। সুতরাং, $\vec{A} \times \vec{B}$ হচ্ছে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিক ক্ষেত্রের তল ভেক্টর যার দিক ঐ তলের উপর লম্ব। এ থেকে বোঝা যায় তল ভেক্টর হতে পারে এবং এ তল ভেক্টরের দিক ঐ তলের উপর লম্ব।

অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২১-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ৫-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

ড. তফাজ্জল হোসেন, মহিউদ্দিন, নীলুফার, হুমায়ুন ও আতিকুর স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন তীব্র গরমে অতিষ্ঠ হয়ে একটি পিঁপড়া কোনো xy সমতলে ছোটাছুটি শুরু করল এবং পরপর চারটি বিন্দুতে গর্ত তৈরি করল। গর্তগুলো x ও y উপাংশ যথাক্রমে (30, 40), (b_x – 70), (– 20, C_y) এবং (– 80, – 70) মানগুলো সে. মি-তে প্রকাশিত। পিঁপড়াটির চারটি গর্তের জন্য চূড়ান্ত সরণের x ও y উপাংশ (– 140, 20) সে. মি. পাওয়া গেল।

ক. একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর যোগের বহুভুজ সূত্রটি বর্ণনা কর। ২

গ. b_x ও C_y এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. চূড়ান্ত সরণের মান ও দিক লেখচিত্রে প্রকাশ করে, পিঁপড়াটির গতিপথ কোন প্রকৃতির ছিল সে সম্পর্কে তোমার ধারণা ব্যক্ত কর। ৪

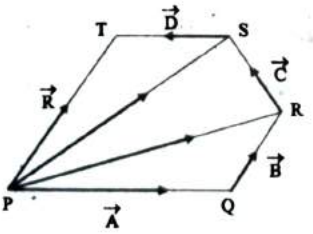
[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

৯৬ প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে।

খ ভেক্টর যোগের বহুভুজ সূত্রটি হলো– দুইয়ের বেশি ভেক্টরের ক্ষেত্রে প্রথম ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে দ্বিতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে তৃতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু দিয়ে একই ক্রমে ভেক্টরগুলো সাজিয়ে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করে একটি বহুভুজ অঙ্কন করলে বহুভুজের শেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টরগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

মনে করি, PQRST একটি পঞ্চভুজ। এর চারটি বাহু PQ, QR, RS, ST যথাক্রমে $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ এবং $\vec{D}$ ভেক্টরকে নির্দেশ করে। একই ক্রমে বহুভুজের শেষ বাহু PT।



সূত্রানুসারে শেষ বাহু PT ভেক্টরগুলোর লব্ধি নির্দেশ করে।

অর্থাৎ $\vec{PT} = \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{ST}$

বা, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

গ প্রদত্ত বিন্দুগুলো (30, 40), (b_x, – 70), (– 20, C_y) এবং (– 80, – 70)

চূড়ান্ত সরণের উপাংশ (– 140, – 20)

প্রশ্নমতে, $30 + b_x - 20 - 80 = -140$

বা, $b_x - 70 = -140$

বা, $b_x = -140 + 70 = -70$

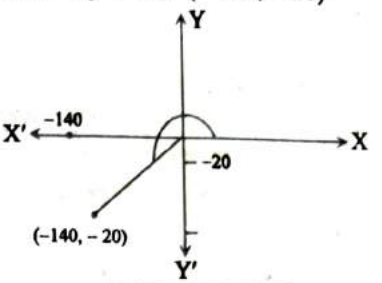
আবার, $40 - 70 + C_y - 70 = -20$

বা, $C_y - 100 = -20$

বা, $C_y = -20 + 100 = 80$

অতএব, $b_x = -70$ cm, এবং $C_y = 80$ cm.

ঘ চূড়ান্ত সরণের x ও y উপাংশ (– 140, – 20)



∴ চূড়ান্ত সরণের মান $= \sqrt{(-140)^2 + (-20)^2}$ cm

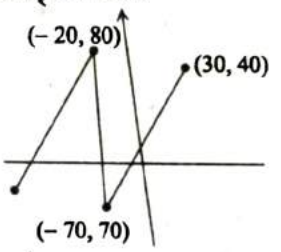
$= \sqrt{20000}$ cm

$= 141.42$ cm

চূড়ান্ত সরণের দিক $= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-20}{-140}\right)$

$= 180° + 8.13° = 188.13°$

পিঁপড়াটির গতিপথের বিন্দুগুলো লেখচিত্রে স্থাপন করে পাই, পিঁপড়াটির গতিপথ বক্রাকৃতির ছিল।



প্রশ্ন ৯৭ $\vec{A}$ ভেক্টরের x উপাংশ – 25 m এবং y উপাংশ 40 m; ভেক্টরটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ সম্পর্কটি সম্ভব কী-না, তা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ এর মান ও θ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ভেক্টরটি যে তলে অবস্থিত সে তলে ভেক্টরটির উপাংশসমূহ যথাযথ চিত্রে প্রকাশ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ২]

৯৭নং প্রশ্নের উত্তর

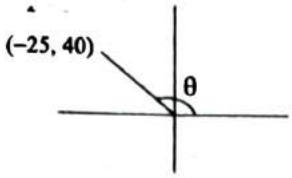
ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ সম্পর্কটি সম্ভব হবে যখন $\vec{B}$ নাল ভেক্টর হবে। কারণ $\vec{B}$ নাল ভেক্টর হবে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + 0 = \vec{A}$ এবং $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} - O = \vec{A}$। অর্থাৎ $\vec{B}$ নাল ভেক্টর হলে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ হবে।

গ এখানে, A = (– 25, 40)

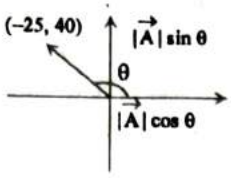
∴ A এর মান $= \sqrt{(-25)^2 + (40)^2}$ m

$= \sqrt{625 + 1600}$ m
$= \sqrt{2225}$ m $= 47.2$ m



$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{40}{25}\right)$
$= 180° - 57° = 122°$

ঘ প্রদত্ত ভেক্টরটি A (− 25, 40) ভেক্টরটি XY তলে স্থাপন করে পাই,
ভেক্টরটির মান $|\vec{A}| = 47.2$ [গ হতে প্রাপ্ত]
এবং $\theta = 122°$



∴ X অক্ষ বরাবর উপাংশ $= |\vec{A}| \cos\theta$
$= 47.2 \cos 122°$
$= -25$ m

এবং Y অক্ষ বরাবর উপাংশ $= |\vec{A}| \sin\theta$
$= 47.2 \sin 122° = 40$ m

[redacted] তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{a} = (4.2\text{ m})\,\hat{i} - (1.5\text{ m})\,\hat{j}$, $\vec{b} = (-1.6\text{ m})\,\hat{i} + (2.9\text{ m})\,\hat{j}$ ও $\vec{c} = (-3.7)\,\hat{j}$.

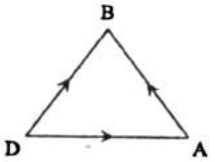
ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১
খ. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি বর্ণনা কর। ২
গ. ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধি $\vec{r} = ?$ ৩
ঘ. $\vec{r}$ এর মান ও দিক নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র $\vec{r}$ কে দেখাও। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৩]

৯৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি হলো– যদি কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে দুটি একই জাতীয় ভেক্টর নির্দেশ করা যায় তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে। যেমন, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এই সূত্রানুসারে, $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$



গ এখানে, $\vec{a} = (4.2\text{ m})\,\hat{i} - (1.5\text{ m})\,\hat{j}$
$\vec{b} = (-1.6\text{ m})\,\hat{i} + (2.9\text{ m})\,\hat{j}$
$\vec{c} = (-3.7\text{ m})\,\hat{j}$

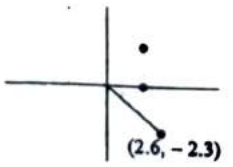
∴ লব্ধি $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$= (4.2\text{ m})\,\hat{i} - (1.5\text{ m})\,\hat{j} + (-1.6\text{ m})\,\hat{i} + (2.9\text{ m})\,\hat{j} + (-3.7\text{ m})\,\hat{j}$
$= (4.2\text{ m} - 1.6\text{ m})\,\hat{i} + (-1.5\text{ m} + 2.9\text{ m} - 3.7\text{ m})\,\hat{j}$
$= (2.6\text{ m})\,\hat{i} - (2.3\text{ m})\,\hat{j}$

অতএব লব্ধি, $\vec{r} = (2.6\text{ m})\,\hat{i} - (2.3\text{ m})\,\hat{j}$

ঘ 'গ' হতে প্রাপ্ত, $\vec{r} = (2.6\text{ m})\,\hat{i} - (2.3\text{ m})\,\hat{j}$

$\vec{r}$ এর মান $= \sqrt{(2.6)^2 + (-2.3)^2}$ m
$= 3.47$ m

$\vec{r}$ এর দিক $= \tan^{-1}\left(\frac{-2.3}{2.6}\right)$
$= -41.5°$



[redacted] নদীতে স্রোত না থাকলে ওয়াসিফ 4 km h^{-1} দ্রুতিতে সাঁতার কাটতে পারে। স্রোত থাকা অবস্থায় ১ম প্রচেষ্টায় কোনো একদিন সে, এপার হতে ওপার সোজাসুজি নদী পার হতে গিয়ে 5 km h^{-1} দ্রুতিতে কোনাকুনি পার হলো। ২য় প্রচেষ্টায় সে নৌকায় স্রোতের সাথে 120° কোণে যাত্রা করে সোজাসুজি নৌকা পার হলো।

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১
খ. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি কী কী কাজে ব্যবহার করা যেতে পারে? ২
গ. স্রোতের বেগ কত ছিল? ৩
ঘ. ২য় প্রচেষ্টায় চিত্রটি প্রতিটি ভেক্টরের যথাযথ মান ও তাদের মধ্যবর্তী কোণ চিহ্নিত করে সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে দেখাও। ৪

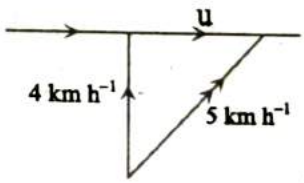
[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৪]

৯৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি হলো– দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়ে ব্যবহার করা যেতে পারে। কারণ সামান্তরিক সূত্রানুসারে, যদি একটি সামান্তরিকের কোনো কোনো কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা যায় তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

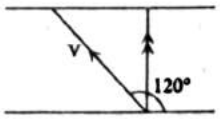
গ এখানে,
ওয়াসিফের বেগ $v = 45$ km h^{-1}
লব্ধি বেগ $R = 5$ km h^{-1}
স্রোতের বেগ $u = ?$



এখানে, $R^2 = u^2 + v^2$
বা, $u^2 = R^2 - v^2$
বা, $u = \sqrt{R^2 - u^2}$
$= \sqrt{5^2 - 4^2}$ km h^{-1}
$= \sqrt{25 - 16}$ km h^{-1}
$= \sqrt{9}$ km h^{-1}
$= 3$ km h^{-1}

অতএব স্রোতের বেগ ছিল 3 km h^{-1}.

ঘ এখানে, স্রোতের সাথে সৃষ্ট কোণ $\alpha = 120°$
স্রোতের বেগ $u = 3$ km h^{-1} [গ হতে প্রাপ্ত]
দ্বিতীয় প্রচেষ্টায় ওয়াসিফের বেগ v হলে,



$\tan 90° = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{u + v\cos\alpha}{v \sin\alpha}$

বা, $u + v\cos\alpha = 0$

বা, $v\cos\alpha = -u$

বা, $v = \frac{-u}{\cos\alpha} = \frac{-3}{\cos 120°} = \frac{-3}{-\frac{1}{2}} = 6 = 6$ km h^{-1}

অর্থাৎ দ্বিতীয় প্রচেষ্টায় ওয়াসিফের বেগ ছিল 6 km h^{-1}.

২০১৪ সালের ২০ জুলাই রাত বারটায় ঝড়ো আবহাওয়ায় ঢাকা আন্তর্জাতিক বিমান বন্দর হতে বাংলাদেশ বিমানের একটি উড়োজাহাজ $\vec{v_B} = 500\ km\ h^{-1}$ বেগে পূর্বদিকের সাথে 30° কোণে যাত্রা শুরু করল। একই সময়ে মালয়েশিয়ান এয়ারলাইন্সের একটি উড়োজাহাজ একই বেগে ঠিক উল্টা দিকে যাত্রা শুরু করল। বাতাস $\vec{v_B} = 50\ km\ h^{-1}$ বেগে পূর্ব হতে পশ্চিম দিকে বইছিল। রাত দুইটায় কন্ট্রোল টাওয়ার হতে একজন বিজ্ঞানী উড়োজাহাজ দুটির দূরত্ব পরিমাপ করল।

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. কোন ভেক্টর রাশির কার্ল শূন্য হলে এর প্রকৃতি কেমন হতে পারে? ২

গ. উড়োজাহাজ দুটি প্রকৃতপক্ষে কত বেগে কোন দিকে চলছিল? ৩

ঘ. কন্ট্রোল টাওয়ারের বিজ্ঞানীর প্রাপ্ত মান কেমন ছিল তা যৌক্তিকভাবে বর্ণনা কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬]

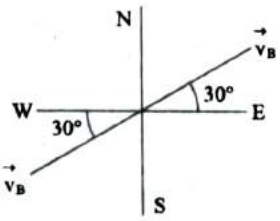
১০০নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ কোনো ভেক্টরের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। কোনো ভেক্টর রাশির কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরকে অঘূর্ণনশীল ভেক্টর বলা হয় অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল এবং সংরক্ষণশীল।

গ বাংলাদেশ বিমানের একটি উড়োজাহাজের বেগ ও পূর্বদিকের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta_1 = 30°$
এবং মালয়েশিয়া বিমানের বেগ ও পশ্চিম দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta_2 = 30°$

এখানে, বাংলাদেশ বিমানের বেগ, $\vec{v_B} = 500\ km\ h^{-1}$
মালয়েশিয়ার বিমানের বেগ, $\vec{v_m} = 500\ km\ h^{-1}$
বাতাসের বেগ, $\vec{v_a} = 50\ km\ h^{-1}$



বাংলাদেশ বিমানের ক্ষেত্রে,

$v_E = v_B \cos 30°$
$= 500 \cos 30°$
$= 133.01\ km\ h^{-1}$

এবং

$v_N = 500 \sin 30°$
$= 250\ km\ h^{-1}$

∴ পূর্বদিকে মোট বেগ, $v_E' = v_E - v_a = (433.01 - 50)\ km\ h^{-1}$
$= 383.01\ km\ h^{-1}$

∴ লব্ধি বেগ, $v_B' = \sqrt{(v_E')^2 + (v_N)^2}$
$= \sqrt{(383.01)^2 + (250)^2} = 457.38\ km\ h^{-1}$

আবার, $\tan Q_B = \frac{v_N}{v_E'} = \frac{250}{383.01}$

∴ $\theta_B = 33.13°$

অতএব, বাংলাদেশ বিমানের একটি উড়োজাহাজ $457.38\ km\ h^{-1}$ বেগে পূর্বদিকের সাথে 33.13° কোণে উত্তর দিকে চলছে।

মালয়েশিয়া বিমানের ক্ষেত্রে,

$v_w = v_m \cos 30° = 500 \cos 30° = 433.01\ km\ h^{-1}$

যেহেতু বাতাস ও বিমান একইদিকে চলছে তাই, পশ্চিম দিকের মোট বেগ হবে,

$v_w' = v_w + v_a = 433.01 + 50 = 483.01\ km\ h^{-1}$
$v_s = v_m \sin 30° = 500 \sin 30° = 250\ km\ h^{-1}$

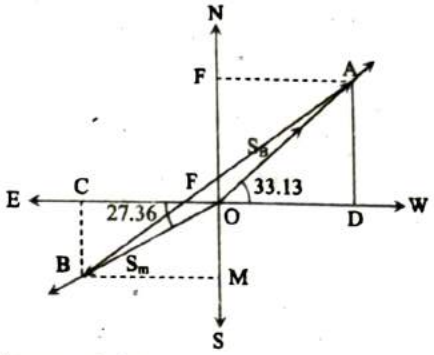
∴ লব্ধি বেগ, $v_m' = \sqrt{v_w'^2 + v_s^2}$
$= \sqrt{(483.01)^2 + (250)^2} = 543.87\ km\ h^{-1}$

আবার, $\tan \theta_m = \frac{v_s}{v_m'} = \frac{250}{483.01}$

∴ $\theta_m = 27.36°$

∴ মালয়েশিয়ার বিমান $543.87\ km\ h^{-1}$ বেগে পশ্চিম দিকের সাথে 27.36° কোণে দক্ষিণ দিকে চলছে।

ঘ 'গ' থেকে প্রাপ্ত মান নিয়ে–



উভয়ের বিমানের ভ্রমণকাল, t = 2h

∴ $OA = S_B = V_B' \times t = 457.38 \times 2 = 914.76\ km$

এবং $OB = S_m = V_m' \times t = 543.87 \times 2 = 1087.74\ km$

এখানে, S_B হলো বাংলাদেশ বিমানের অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং S_m হলো মালয়েশিয়া বিমানের অতিক্রান্ত দূরত্ব।

∴ $OD = S_B \cos 33.13 = 914.76 \times \cos 33.13° = 766.0499\ km$
$OC = S_m \cos 27.36 = 1087.77 \cos 27.36° = 966.0615\ km$

∴ $DC = OD + OC = (766.0499 + 966.0615)\ km$
$= 1732.1114\ km$

ধরি, DF = x km

∴ $CF = (1732.1114 - x)\ km$

আবার, $AD = OF = 914.76 \times \sin 33.13° = 499.953\ km$
$BC = OM = 1087.74 \times \sin 27.36° = 499.90339\ km$

এখন, ΔADF এবং ΔBCF সদৃশকোণী,

$\frac{DF}{CF} = \frac{AD}{AC}$

বা, $\frac{x}{1732.1114 - x} = \frac{499.953}{499.90339}$

∴ $x = 866.0997\ km$

∴ $DF = 866.0997\ km$
$CF = 866.01143\ km$

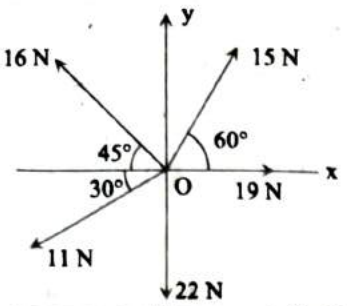
এখন, $AF = \sqrt{DF^2 + AD^2}$
$= \sqrt{(866.099)^2 + (499.953)^2}$
$= 1000.4\ km$

∴ $FB = \sqrt{CF^2 + CB^2} = \sqrt{(866.01143)^2 + (499.90399)^2}$
$= 999.4\ km$

রাত দুইটায় উড়োজাহাজদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$AB = AF + FB$
$= 1000.04 + 999.94 = 1999.98\ km \cong 2000\ km$

অতএব, উড়োজাহাজদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 2000 km।



উপরের চিত্রে xy সমতলের মূলবিন্দু 'O' তে পাঁচটি ভিন্ন মানের বল বিভিন্ন দিকে চিত্রানুযায়ী কাজ করছে।

ক. নাল ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. দুটি ভেক্টর রাশির যোগের ত্রিভুজ সূত্র ও সামান্তরিক সূত্রের মধ্যে সাদৃশ্য কেমন তা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. লব্ধি বলের x ও y উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

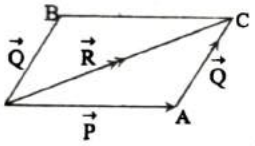
ঘ. লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় করে লেখচিত্রে যৌক্তিকভাবে প্রকাশ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৭]

১০১নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর রাশির মান শূন্য হলে তাকে নাল ভেক্টর বলে।

খ ভেক্টর রাশির যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত দুটি বাহু একই ক্রমে দুটি একই জাতীয় ভেক্টরকে নির্দেশ করলে ত্রিভুজের অপর বাহু বিপরীতক্রমে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।



অর্থাৎ, ΔOAB-এ, $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ বরাবর ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরের লব্ধি $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$।

আবার, ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, OABC সামান্তরিকের, $\vec{OA}$ ও $\vec{OC}$ বরাবর ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি, $R = \vec{P} + \vec{Q}$।

গ XY সমতলের মূল বিন্দু 'O' তে পাঁচটি বল ক্রিয়াশীল। সুতরাং বলদ্বয়ের x-অক্ষ বরাবর লব্ধি বলের উপাংশ,

$$R_x = 19 + 15\cos 60° - 16\cos 45° - 11\cos 30° = 5.7\ N$$

এবং Y-অক্ষ বরাবর লব্ধি বলের উপাংশ,

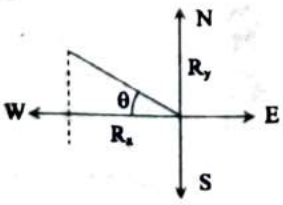
$$R_y = 15\sin 60° + 16\sin 45° - 11\sin 30° - 22 = -3.2\ N$$

অতএব, লব্ধি বলের x ও y উপাংশ যথাক্রমে 5.7 N এবং – 3.2 N।

ঘ ধরি, R_x ও R_y লব্ধি বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{(5.7)^2 + (-3.2)^2}\ N = 6.5\ N$$

ধরি, লব্ধি R, R_x বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

বা, $\tan\theta = \frac{-3.2}{5.7}$

$\therefore\ \theta = -29.31$

অতএব, লব্ধি বল পশ্চিমের সাথে 29.31° কোণ অবস্থান করে।

ভর, বেগ, ত্বরণ, সরণ, সময় ইত্যাদি ভৌত রাশিসমূহকে দু'ভাগে ভাগ করা যায়। যাদের কেবলমাত্র মান আছে তা হলো স্কেলার এবং যাদের মান ও দিক উভয়ই আছে তা হলো ভেক্টর। যেকোনো ভেক্টর রাশিকে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ উপাংশের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। ধরা যাক, একটি ভেক্টর রাশি নিম্নরূপ : $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$.

ক. একক ভেক্টর কী? ১

খ. $\vec{A}$ কোন সমতলে অবস্থিত ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, $\vec{A}$ এর দিকে প্রাপ্ত একক ভেক্টরের মান এক। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৮]

১০২নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টরের মান এক একক হলে তাই একক ভেক্টর।

খ $\vec{A}$ ভেক্টরটি XY সমতলে অবস্থিত।

ব্যাখ্যা : $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$ দ্বারা বুঝা যায় ভেক্টরটি XY সমতলে অবস্থিত এবং X ও Y অক্ষ থেকে যথাক্রমে 4 একক ধনাত্মক দিকে ও 3 একক ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত। $\vec{A}$ এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, – 3).

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$

$\therefore$ $\vec{A}$ এর মান $|\vec{A}| = A = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{16 + 9}$
$= \sqrt{25} = 5$

এখন, $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে,

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{4\hat{i} - 3\hat{j}}{5} = \frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}$$

অতএব, $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}$।

ঘ উদ্দীপকের তথ্যানুযায়ী $\vec{A}$ এর দিকে প্রাপ্ত একক ভেক্টরের মান এক।

গাণিতিক বিশ্লেষণ : 'গ' নং থেকে পাই,

$\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}$

এখন, একক ভেক্টরটির মান,

$$|\hat{a}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{16+9}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{25}{25}}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

অতএব, গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখা যায় যে, $\hat{a}$ এর দিকে প্রাপ্ত একক ভেক্টরের মান এক।

ড. এম. আলী আসগর ও মোহাম্মদ জাকির হোসেন স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১০৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৪-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১৫-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১০৪ দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দেওয়া আছে।

ক. একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর রাশির যোগ বা বিয়োগ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে করা যায় না– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব কিনা যাচাই কর। ৩

ঘ. উপরোক্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি তথা $(\vec{A} \times \vec{B})$ এবং $(\vec{B} \times \vec{A})$ এর মান অভিন্ন হলেও দিক ভিন্ন– চিত্রসহ গাণিতিক উপস্থাপন কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬]

১০৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।

খ ভেক্টর রাশির যোগ ও বিয়োগ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে করা যায় না।

ব্যাখ্যা : সাধারণ গাণিতিক যোগ-বিয়োগে কেবল সাংখ্যিক মান বিবেচনায় নেওয়া হয়। কিন্তু ভেক্টর যোগ-বিয়োগের ক্ষেত্রে কেবল সাংখ্যিক মান হিসাব করলেই হয় না, এর দিকও বিবেচনায় নিতে হয়। ফলে যে সকল প্রক্রিয়ায় সাধারণ যোগ-বিয়োগ করা যায় সে সকল প্রক্রিয়া দ্বারা ভেক্টর যোগ-বিয়োগ করা যায় না।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হবে যদি $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ হয়।

কিন্তু, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$= 2 \times 6 + 2 \times (-3) + (-1) \times 2$

$= 12 - 6 - 2 = 12 - 8 = 4$

যেহেতু, $\vec{A} \cdot \vec{B} \neq 0$

অতএব, ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব নয়।

ঘ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4-3) - \hat{j}(4+6) + \hat{k}(-6-12)$

$= \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-18)^2}$

$= \sqrt{425}$

$= 20.62$

আবার, $$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(3-4) - \hat{j}(-6-4) + \hat{k}(12+6)$

$= -\hat{i} + 10\hat{j} + 18\hat{k}$

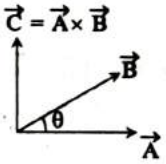
$\therefore |\vec{B} \times \vec{A}| = \sqrt{(-1)^2 + (10)^2 + (18)^2}$

$= \sqrt{425}$

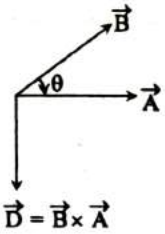
$= 20.62$

চিত্রসহ দিক নির্ণয় :

যদি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হয় তাহলে এর দিক হবে নিম্নরূপ চিত্রের ন্যায়।



আবার, $\vec{B} \times \vec{A}$ এর দিক চিত্র নিম্নরূপ–



অতএব, $(\vec{A} \times \vec{B})$ এবং $(\vec{B} \times \vec{A})$ এর মান অভিন্ন হলেও দিক ভিন্ন।

প্রশ্ন ১০৫ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৭-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

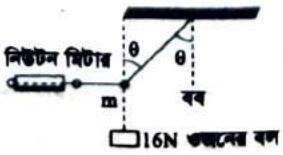
প্রশ্ন ১০৬ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৯-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৭-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১০৭ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১২-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১০৮ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৩-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২০-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

আবদুল গনি, সুশান্ত সরকার, মজিবুর রহমান ও তিতাস রোজারিও স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১০৯ একজন ছাত্র বলের সাম্য পরীক্ষা করার জন্য পাশের চিত্র অনুযায়ী যন্ত্রপাতি ব্যবহার করছে। এখানে m ভরের একটি বব সুতা দ্বারা ঝুলন্ত অবস্থায় একটি স্প্রিং নিক্তি দিয়ে টেনে রাখা হয়েছে এবং এই অবস্থায় ববটিতে খাড়া নিচের দিকে 16 N ওজন ঝুলিয়ে দেওয়া হয়েছে। এখানে স্প্রিং নিক্তির পাঠ 16 N।



ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. কাজ ও টর্ক এর মান ও একক সমান হলেও তারা ভিন্ন রাশি ব্যাখ্যা কর। ২

গ. স্প্রিং নিক্তি ও নিচের দিকে ক্রিয়াশীল ওজনের লব্ধি নির্ণয় কর। ৩

ঘ. যদি বলটি ভারসাম্য অবস্থায় থাকে তবে এই সাম্য প্রতিষ্ঠার জন্য θ এর মানের উপরেই নির্ভর করতে হবে কি? এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

১০৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ কাজ ও টর্ক এর মান ও একক সমান হলেও তারা ভিন্ন রাশি। কারণ, কাজ একটি স্কেলার রাশি কিন্তু টর্ক ভেক্টর রাশি। আবার কাজের কোনো দিক নেই কিন্তু টর্কের দিক প্রযুক্ত বলের দিকে। আবার কাজ হচ্ছে দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণনের ফল কিন্তু টর্ক হচ্ছে দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণনের ফল। ফলে কাজ ও টর্কের মান ও একক সমান হলেও তারা ভিন্ন রাশি।

গ উদ্দীপক থেকে পাই, ওজন দ্বারা প্রযুক্ত বল, $P = 16\ N$

এবং নিক্তি দ্বারা প্রযুক্ত বল, $Q = 16\ N$

নিক্তি ও ওজনের মধ্যকার কোণ, $\alpha = 90°$

ধরি, লব্ধি বল, R

আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$= (16^2 + 16^2)\ N^2 = 2 \times 16^2\ N^2$

$\therefore R = 16\sqrt{2}\ N$

$\therefore$ বল দ্বারা সৃষ্ট লব্ধি বলের মান $16\sqrt{2}\ N$।

ঘ মনে করি, স্প্রিং দ্বারা প্রযুক্ত বল Q এবং ওজন দ্বারা প্রযুক্ত বল P। প্রযুক্ত বলের (Q) এর লব্ধির উল্লম্ব রেখার সাথে A কোণ উৎপন্ন করে তাহলে,

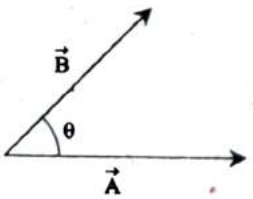
আমরা জানি, $\tan A = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{16\sin 90°}{16 + 0} = \dfrac{16\ N}{16\ N} = 1$

বা, $A = \tan^{-1} 1 = 45°$

শর্তানুসারে, θ এর মান হতে হবে $90° - A = 90° - 45° = 45°$

অর্থাৎ যদি কোনো বল পরিবর্তন না করা হয় তবে θ এর মান 45° হতে হবে এবং তাহলে ভারসাম্য প্রতিষ্ঠিত হবে। আর যদি ওজন অথবা স্প্রিং দ্বারা প্রযুক্ত বল পরিবর্তন করা হয় তবে ভারসাম্য প্রতিষ্ঠার জন্য θ এর মান পরিবর্তন করতে হবে। ওজনের মান বৃদ্ধি করলে θ এর মান ক্ষুদ্রতর ও স্প্রিং দ্বারা বলের মান বৃদ্ধি করলে θ বৃহত্তর হবে।

১১০ চিত্রে দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ θ কোণে অবস্থান করছে।



ক. ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণনের দিক নির্দেশ কর। ১

খ. দুটি ভেক্টরের মান সমান হলে পরস্পরের উপর এদের লব্ধ অভিক্ষেপের মান সমান হতে পারে কি? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টর দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে– গাণিতিকভাবে প্রয়োজনীয় সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ২]

১১০নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণনের দিক হলো $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে আছে তার লম্ব দিকে।

খ দুটি ভেক্টরের মান সমান হলে তাদের লব্ধ অভিক্ষেপের মান সমান হতে পারে।

মনে করি, θ কোণে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মান সমান।

$\vec{A}$ এর দিক বরাবর $\vec{B}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ $= |\vec{B}|\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = B\cos\theta$

আবার, $\vec{B}$ এর দিক বরাবর $\vec{A}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ $= |\vec{A}|\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$

$= A\cos\theta$

$\therefore B\cos\theta = A\cos\theta\ [\because |\vec{A}| = |\vec{B}|]$

অতএব, দুটি ভেক্টরের মান সমান হলে তাদের লব্ধ অভিক্ষেপ সমান হবে।

গ আমরা জানি,

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$

উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

অন্তর্ভুক্ত কোণ, θ = ?

এখানে, $\vec{A}.\vec{B} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k})(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

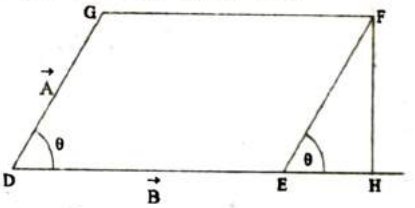
$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{0}{AB} = 0$

বা, $\theta = \cos^{-1} 0 = 90°$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°।

ঘ মনে করি, সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু DG ও DE যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান ও দিক প্রকাশ করে।



আমরা জানি, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা = DE × HF

এখানে, $DE = |\vec{DE}| = |\vec{B}| = B$

আবার, $HF = EF\sin\theta = |\vec{A}|\sin\theta = A\sin\theta$

$\therefore$ DEFG সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= DE \times HF = B.A\sin\theta = AB\sin\theta$

আবার, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর এর ক্রস গুণফল $= |\vec{A} \times \vec{B}| = |AB\sin\theta\ n|$

$= AB\sin\theta \times 1$ [∵ n একক ভেক্টর]

$= AB\sin\theta$

= DEFG সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের বাহুদ্বয় দ্বারা ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে।

১১১ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৩ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৪-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

১১২ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৪ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২০-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

১১৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৫ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২১-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

১১৪ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৬ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১৯-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

১১৫ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৭ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১১৮ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৮ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২২-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১১৯ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৯ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৩-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১২০ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১০ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৫-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১২১ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১১ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১২২ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১২ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৭-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১২৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৪ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৬-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

ড. ননী গোপাল, অচিন্ত্য, গফুর, নির্মল, প্রাণেশ ও মোমেনুল স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১২২ স্রোতের নদীতে এক পাড় থেকে অপর পাড়ে সোজা যাওয়ার জন্য লঞ্চ করে 15 km h^{-1} বেগে নদী পার হওয়ার সময় একদল যাত্রী দেখলেন, লঞ্চটি সোজাসুজি যাত্রা না করে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে চলছে। [স্রোতের বেগ 10 km h^{-1}]

ক. ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম কী? ১

খ. নাল ভেক্টরের তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের কত গুণ? ৩

ঘ. গাণিতিক ব্যাখ্যাসহ লঞ্চটির দিক পরিবর্তনের কারণ বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

১২২নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি হলো $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সে সমতলের অভিলম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু রেখে প্রথম ভেক্টরের দিক থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।
ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি দুটি ভেক্টর গুণফলের দিক নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা হয়।

খ নাল ভেক্টরের তাৎপর্য হলো :

১। নাল ভেক্টরের মান শূন্য।

২। একে $\vec{O}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৩। এর সুনির্দিষ্ট কোনো দিক নেই।

৪। এর দিক ইচ্ছামতো ধরা যায়।

গ এখানে, লঞ্চের বেগ, $v = 15$ km h^{-1}

স্রোতের বেগ, $u = 10$ km h^{-1}

$\therefore$ লব্ধির সর্বোচ্চ মান, $R_{min} = u + v$

$= (10 + 15)$ km h^{-1} $= 25$ km h^{-1}

লব্ধির সর্বনিম্ন মান, $R_{min} = v - u$

$= (15 - 10)$ km h^{-1} $= 5$ km h^{-1}

এখন, $\frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{25}{5}$

বা, $\frac{R_{max}}{R_{min}} = 5$

$\therefore R_{max} = 5 \times R_{min}$

অর্থাৎ, লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের 5 গুণ।

ঘ এখানে, লঞ্চের বেগ, $v = 15$ km h^{-1}; স্রোতের বেগ, $u = 10$ km h^{-1}

এখন, সোজাসুজি নদী পার হওয়ার জন্য যদি লঞ্চকে স্রোতের বেগের সাথে α কোণে যাত্রা করতে হয় তাহলে,

$$\tan 90° = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$$

বা, $\cot 90° = \frac{u + v \cos \alpha}{v \sin \alpha}$

বা, $u + v \cos \alpha = 0$

বা, $\cos \alpha = -\frac{u}{v}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-10}{15}\right) = 131.81°$

এখানে, লঞ্চটিকে সোজাসুজি নদী পার হওয়ার জন্য স্রোতের বেগের সাথে 131.81° কোণে যাত্রা করতে হবে। এখন স্রোতের বেগের সাথে 131.81° কোণে যাত্রা করা মানেই স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাওয়া।

প্রশ্ন ১২৩ একজন লোক অনুভূমিক রাস্তা বরাবর 2 km h^{-1} বেগে হাঁটছেন। তার কাছে মনে হচ্ছে বৃষ্টি খাড়া উপর থেকে 2 km h^{-1} বেগে নিচে পড়ছে।

ক. কার্ল কী? ১

খ. একটি ভেক্টরের কোনো উপাংশের মান ভেক্টরটির মানের চেয়ে বড় হতে পারে কি না ব্যাখ্যা কর। ২

গ. বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক নির্ণয় কর। ৩

ঘ. লোকটি দ্বিগুণ বেগে হাঁটলে তার কাছে বৃষ্টির বেগের পরিবর্তন কিরূপ হবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৩]

১২৩নং প্রশ্নের উত্তর

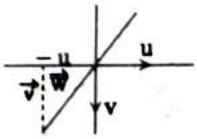
ক ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় $\vec{v}$ (x, y, z) একটি ব্যবকলনযোগ্য ভেক্টর ক্ষেত্র হলে $\vec{v}$ এর উপর $\vec{\nabla}$ এর ক্রস অপারেশনকে কার্ল বলে।

খ একটি ভেক্টরের কোনো উপাংশের মান ভেক্টরটির মানের চেয়ে বড় হতে পারে না। কারণ ভেক্টরের ভূমি বরাবর উপাংশ ভেক্টরটির মানের $\cos\theta$ গুণ এবং লম্ব বরাবর উপাংশ ভেক্টরটির মানের $\sin\theta$ গুণ। কিন্তু $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বেশি হতে পারে না বলে ভেক্টরের কোনো উপাংশের মান ভেক্টরটির মানের চেয়ে বড় হতে পারে না।

গ এখানে, লোকটির বেগ, $u = 2$ km h^{-1}

আপেক্ষিক বেগ, $w = 2$ km h^{-1}

বৃষ্টির প্রকৃত বেগ, $v = ?$



এখানে, $-\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

বা, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} = 2$ km h^{-1} $+ 2$ km h^{-1} $= 4$ km h^{-1}

$\therefore$ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ 4 km h^{-1}

বৃষ্টির দিক, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 26.57°$

ঘ লোকটির বেগ $\vec{u} = 2$ km h^{-1}

বেগ দ্বিগুণ হলে $\vec{u}_1 = 2 \times 2$ km h^{-1} $= 4$ km h^{-1}

বৃষ্টির বেগ, $\vec{v} = 4$ km h^{-1}

এখন, আপেক্ষিক বেগ w_1 হলে, $-\vec{u}_1 + \vec{v} = \vec{w}_1$

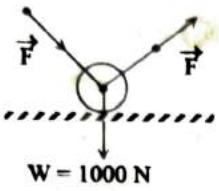
বা, -4 km h^{-1} $+ 4$ km h^{-1} $= \vec{w}_1$

বা, $\vec{w}_1 = 0$

$\therefore$ পরিবর্তন $= (2-0)\ km\ h^{-1} = 2\ km\ h^{-1}$

অতএব, লোকটি দ্বিগুণ বেগে হাঁটলে তার কাছে বৃষ্টির বেগের পরিবর্তন হবে $2\ km\ h^{-1}$.

[redacted] ডান পার্শ্বের চিত্রানুসারে ক্রিকেটের পিচ সমান করার জন্য ব্যবহৃত 1000 N ওজনের একটি রোলারের উপর এর হ্যান্ডেলের মাধ্যমে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে আনতভাবে $\vec{F} = (10\hat{i} - 7\hat{j} + 13\hat{k})N$ বল প্রয়োগ করা হলো।



ক. ভেক্টর বিশ্লেষণ কী? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর থেকে কিভাবে বেগ পাওয়া যায়? ২

গ. ঠেলা ও টানার ক্ষেত্রে প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কম পরিশ্রমে কিভাবে পিচ সমান করা যাবে গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৪]

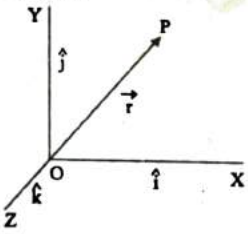
১২৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াই ভেক্টর বিশ্লেষণ।

খ অবস্থান ভেক্টর হতে নিম্নরূপে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করা যায়—

ধরি, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর যেখানে $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতিক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে।



অর্থাৎ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

বা, $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$

$= \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$

$= \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z$

এখানে v_x, v_y, v_z যথাক্রমে X, Y, Z অক্ষ বরাবর বেগের স্কেলার উপাংশ।

গ এখানে, প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (10\hat{i} - 7\hat{j} + 13\hat{k})\ N$

অনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60°$

এখন $|\vec{F}| = \sqrt{(10)^2 + (-7)^2 + (13)^2}\ N$

$= \sqrt{100 + 49 + 169}\ N = 17.83\ N$

$\therefore$ প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ $= F \sin\theta = 17.83 \sin 60° = 15.44\ N$

ঘ এখানে, রোলারের ওজন, $W = 100\ N$

প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ $F \sin\theta = 15.44\ N$

এখন, রোলারটি ঠেলার ক্ষেত্রে, এর আপাত ওজন হবে

$= W + F\sin\theta = 1000\ N + 15.44\ N = 1015.44\ N$

আবার, রোলারটি টানার ক্ষেত্রে, এর আপাত ওজন হবে

$= W - F\sin\theta = 1000\ N - 15.44\ N = 984.56\ N$

আবার, রোলারটি ঠেলা ও টানা উভয় ক্ষেত্রে বলের অনুভূমিক উপাংশ

$= F\cos\theta = 17.83 \times \cos 60° = 8.915\ N$

উভয় ক্ষেত্রে রোলারটি 8.195 N বলের জন্য সামনের দিকে এগিয়ে যাবে, তবে ঠেলার ক্ষেত্রে এর ওজন 1015.44 N অনুভূত হবে এবং টানার ক্ষেত্রে এর ওজন 984.56 N অনুভূত হবে। সুতরাং আমরা বলতে পারি রোলারটি টেনে কম পরিশ্রমে পিচ সমান করা যাবে।

[redacted] দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$।

ক. অপারেটর কী? ১

খ. তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ভেক্টর দুটির পরস্পরের উপর অভিক্ষেপের তুলনা কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৬]

১২৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক অপারেটর একটি গাণিতিক সংকেত যার সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়।

খ তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে।

ধরি তিনটি ভেক্টর $\vec{A} = 2x\hat{i} + 3y\hat{i} + 4z\hat{k}$, $\vec{B} = -x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$ এবং $\vec{C} = -x\hat{i} - 2y\hat{j} - 3z\hat{k}$

$\therefore$ লব্ধি $= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$= (2x\hat{i} + 3y\hat{i} + 4z\hat{k}) + (-x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}) + (-x\hat{i} - 2y\hat{j} - 3z\hat{k})$

$= (2x - x - x)\hat{i} + (3y - y - 2y)\hat{j} + (4z - z - 3z)\hat{k}$

অতএব, তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে।

গ এখানে, $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A}, \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \cos^{-1}\frac{(3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k})\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 6^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2}}$

$= \cos^{-1}\frac{6 - 12 - 30}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{38}} = \cos^{-1}\frac{-36}{48.15} = 138.39°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 138.39°.

ঘ এখানে, $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{A}.\vec{B} = -36$ [গ হতে প্রাপ্ত]

$A = |\vec{A}| = \sqrt{61}$

$B = |\vec{B}| = \sqrt{38}$

$\therefore \vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{B}$

$= \frac{-36}{\sqrt{38}} = -5.84$

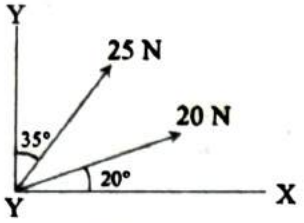
আবার, $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ, $B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A}$

$= \frac{-36}{\sqrt{61}} = -4.61$

এখানে, $-4.61 > -5.84$

অতএব, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপের মান $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপের মান অপেক্ষা কম।

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর :



ক. গ্র্যাডিয়েন্ট কাকে বলে? ১

খ. কোনো প্রবাহীর বেগের ডাইভার্জেন্স $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ শূন্য দ্বারা কী বোঝা যায়? ২

গ. লব্ধি বলের X-উপাংশ বের কর। ৩

ঘ. লব্ধি বল কোন অক্ষের নিকটবর্তী বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৮]

১২৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর ডিফারেনসিয়াল অপারেটরে $\vec{\nabla}$ এর সাথে কোনো স্কেলার ক্ষেত্রের সাধারণ গুণফলকে ঐ স্কেলার ক্ষেত্রের গ্র্যাডিয়েন্ট বলে।

খ কোনো প্রবাহীর বেগের ডাইভারজেন্স $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ শূন্য দ্বারা বুঝায় প্রবাহীটি অসংনম্য। $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ কে নিরবচ্ছিন্ন সমীকরণ বলে। তখন এই বেগ $\vec{V}$ কে সলিনয়েডাল বলে।

গ ধরি, $\vec{A} = 20$ N এবং $\vec{B} = 25$ N

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \{90° - (20° + 35°)\}$
$= 90 - 55° = 35°$

$\therefore$ লব্ধি, $R = \sqrt{(20)^2 + (25)^2 + 2 \times 20 \times 25 \times \cos 35°}$ N
$= 42.94$ N

এখন, লব্ধি $\vec{A}$ এর সাথে α কোণ তৈরি করলে

$$\tan\alpha = \frac{B \sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

বা, $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{25 \sin 35°}{20 + 25\cos 35°} = \tan^{-1}\dfrac{14.34}{40.48} = 19.51°$

$\therefore$ লব্ধির X অক্ষের সাথে সৃষ্ট কোণ, $\theta' = (19.51° + 20°) = 39.51°$

$\therefore$ লব্ধি বলের X উপাংশ $= R\cos\theta'$.
$= 42.94 \times \cos 39.51° = 33.13$ N

ঘ 'গ' হতে পাই,

X অক্ষের সাথে লব্ধির সৃষ্ট কোণ 39.51°

$\therefore$ Y অক্ষের সাথে লব্ধির সৃষ্ট কোণ $= 90° - 39.51° = 50.49°$

অতএব, লব্ধি বল X অক্ষের নিকটবর্তী।

তিনটি ভেক্টর $\vec{P} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{R} = \hat{i} + 4\hat{k}$।

ক. $\vec{\nabla}$ কী? ১

খ. ডাইভারজেন্স ও কার্লের মধ্যে পার্থক্য কী? ২

গ. $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত কি-না যুক্তিসহ আলোচনা কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১০]

১২৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{\nabla}$ হলো একটি ভেক্টর ডিফারেনসিয়াল অপারেটর যেখানে,

$$\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}$$

খ ডাইভারজেন্স ও কার্লের মধ্যে পার্থক্য নিম্নরূপ–

ডাইভারজেন্স	কার্ল
১. $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ভেক্টরটি x, y ও z এর ব্যবকলনযোগ্য হলে, ভেক্টর ব্যবকলন অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{A}$ এর ডট গুণনকে ডাইভারজেন্স বলে।	১. $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ সকল বিন্দুতে ব্যবকলনযোগ্য হলে, ভেক্টর ব্যবকলন অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{A}$ এর ক্রস গুণনকে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল বলে।
২. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ বা div $\vec{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	২. $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ বা Curl $\vec{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
৩. ডাইভারজেন্স-এর অর্থ বিচ্যুতি বা অপসৃতি।	৩. কার্ল-এর অর্থ ঘূর্ণন বা পেঁচানো।

গ এখানে, $\vec{P} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (5\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3 + 1)\hat{i} + (-2 - 5)\hat{j} + (5 - 6)\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}$$

অতএব, $\vec{P} \times \vec{Q} = 4\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}$

ঘ এখানে, $\vec{P} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$,

$\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

এবং $\vec{R} = \hat{i} + 4\hat{k}$

এখন, ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হবে যদি $(\vec{P} \times \vec{Q}) . \vec{R} = 0$ হয়।

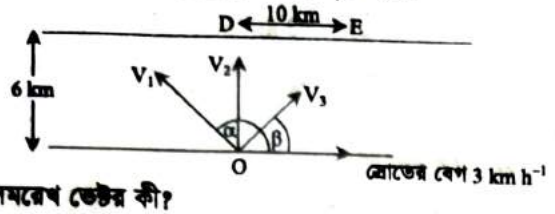
আবার, $\vec{P} \times \vec{Q} = 4\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}$ [গ হতে প্রাপ্ত]

$\therefore (\vec{P} \times \vec{Q}) . \vec{R} = (4\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}) . (\hat{i} + 4\hat{k})$
$= 4 - 4$
$= 0$

অতএব, ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।

রমা বিজয়, আলী আহম্মেদ, সুদেব পাল ও সালাহউদ্দিন স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১২৮ হাসেম, কাশেম ও সাদেক মাঝি 6 km প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদীর O বিন্দু হতে যথাক্রমে $v_1 = v_2 = v_3 = 6\ km\ h^{-1}$ বেগে চিত্রানুযায়ী নদী পাড়ি দিতে শুরু করে। করিম ঠিক বিপরীত D বিন্দুতে পৌঁছায়। স্রোতের বেগ $3\ km\ h^{-1}$। $\alpha - \beta = 90°$.



ক. সমরেখ ভেক্টর কী? ১

খ. গুণ টানার ফলে নৌকা সামনের দিকে কিভাবে এগিয়ে চলে ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের হাসেম মাঝির লব্ধিবেগ কত? ৩

ঘ. সাদেক মাঝি যদি তার নৌকার বেগের মান ও দিক অপরিবর্তিত রাখে তাহলে সে নদীর অপর পাড়ের E এর চেয়ে ডাটিতে পৌঁছাবে কি না? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ৪]

১২৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সরলরেখা বরাবর বা পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করে তবে তা সমরেখ ভেক্টর।

খ F বলে নৌকার গুণ টানা হলে এর অনুভূমিক উপাংশ $F \cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $F \sin\theta$ নৌকাকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা এ উল্লম্ব উপাংশ $F \sin\theta$ নাকচ হয়ে যায়। ফলে নৌকাটি সামনের দিকে এগিয়ে চলে।

গ হাসেম মাঝির বেগ, $v_1 = 6\ km\ h^{-1}$

স্রোতের বেগ, $u = 3\ km\ h^{-1}$

u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α

হাসেম মাঝি ঠিক D বিন্দুতে পৌঁছায় বলে লব্ধি স্রোতের বেগ u এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করবে।

$$\tan 90° = \frac{v_1 \sin\alpha}{u + v_1 \cos\alpha}$$

বা, $\cot 90° = \dfrac{u + v_1 \cos\alpha}{v_1 \sin\alpha}$

বা, $0 = \dfrac{u + v_1 \cos\alpha}{v_1 \sin\alpha}$

বা, $u + v_1 \cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{u}{v_1}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{u}{v_1}\right)$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{3}{6}\right)$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore\ \alpha = 120°$

$\therefore$ হাসেম মাঝির লব্ধি বেগ, $W = \sqrt{u^2 + v_1^2 + 2uv_1 \cos\alpha}$

$= \sqrt{3^2 + 6^2 + 2 \times 3 \times 6 \times \cos 120°}$

$= \sqrt{9 + 36 - 18}$

$= \sqrt{27}$

$= 3\sqrt{3}\ km\ h^{-1}$

অতএব, হাসেম মাঝির লব্ধি বেগ $3\sqrt{3}\ km\ h^{-1}$।

ঘ সাদেক মাঝির বেগ, $v_3 = 6\ km\ h^{-1}$

স্রোতের বেগ, $u = 3\ km\ h^{-1}$

v_3 ও u এর মধ্যবর্তী কোণ $= \beta$

নদীর প্রশস্ততা, $d = 6\ km$

আবার, $\alpha = 120°$ ['গ' নং থেকে প্রাপ্ত]

$\alpha - \beta = 90°$

বা, $120° - \beta = 90°$

বা, $\beta = 120° - 90° = 30°$

$\therefore$ OD বরাবর v_3 এর উপাংশ, $v_D = v_3 \sin 30°$

$= 6\ km\ h^{-1} \times \dfrac{1}{2} = 3\ km\ h^{-1}$

স্রোত অর্থাৎ DE বরাবর বেগের উপাংশ,

$v_3 \cos 30° = 6\ km\ h^{-1} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5.2\ km\ h^{-1}$

$\therefore$ DE বরাবর মোট বেগ, $v_E = (5.2 + 4)\ km\ h^{-1}$

$= (5.2 + 3)\ km\ h^{-1} = 8.2\ km\ h^{-1}$

নদী পার হতে সাদেক মাঝির প্রয়োজনীয় সময়,

$t = \dfrac{d}{v_D} = \dfrac{6\ km}{3\ km\ h^{-1}} = 2\ h$

$t = 2\ h$ সময়ে সাদেক মাঝির DE বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= v_E \times t = 8.2\ km\ h^{-1} \times 2\ h = 16.4\ km$

এখানে, $DE = 10\ km < 16.4\ km$

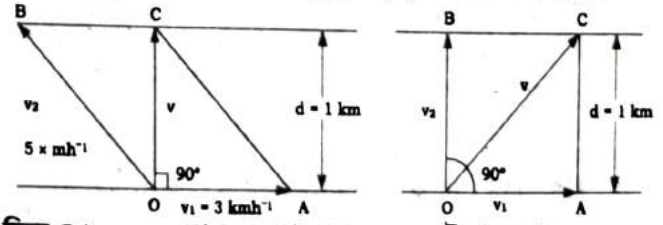
অতএব, সাদেক মাঝি তার নৌকার বেগের মান ও দিক অপরিবর্তী রাখলে অপর পাড়ের E এর চেয়ে ডাটিতে পৌঁছবে।

প্রশ্ন ১২৯ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৫ এর উত্তরের জন্য ২০নং (জ্ঞানমূলক), ২০নং (অনুধাবনমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ২৭-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩০ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৭ এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৬-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩১ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ৮ এর উত্তরের জন্য ১নং (জ্ঞানমূলক), ১৫নং (অনুধাবনমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ২৫-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩২ নিচের চিত্রটি হতে (গ) ও (ঘ) প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $OA = v_1$ = স্রোতের বেগ, $OB = v_2$ = নৌকার বেগ, $OC = v$ = লব্ধি বেগ এবং $d = 1\ km$ নদীর প্রস্থ।

ক. ডাইভারজেন্স কাকে বলে? ১

খ. লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ- ব্যাখ্যা কর। ২

গ. প্রথম চিত্র হতে লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. তোমার মতে কোন চিত্র অনুসারে নদী পার হতে কম সময় লাগবে? গাণিতিকভাবে দেখাও। ৪

[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১০]

১৩২নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ এর সাথে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের ডট গুণন বা স্কেলার গুণনকে ঐ ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে।

খ একটি লন রোলারকে ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী মনে হয়। অন্যদিকে রোলারটিকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি রোলারের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ হয়।

গ উদ্দীপক অনুসারে, স্রোতের বেগ, $v_1 = 3\ km\ h^{-1}$

নৌকার বেগ, $v_2 = 5\ km\ h^{-1}$

লব্ধি বেগ, $v = ?$

আমরা জানি, $v_2^2 = v_1^2 + v^2$

বা, $v^2 = v_2^2 - v_1^2$

বা, $v^2 = (5\ km\ h^{-1})^2 - (3 km\ h^{-1})^2$

বা, $v = \sqrt{16}\ km\ h^{-1} = 4\ km\ h^{-1}$

অতএব, প্রথম চিত্রে লব্ধি বেগ $4\ km\ h^{-1}$.

ঘ 'গ' হতে পাই, প্রথম চিত্রের লব্ধি বেগ, $v = 4\ km\ h^{-1}$

নদীর প্রস্থ, $d = 1\ km$

অতএব, প্রথম চিত্রে নদী পার হতে সময়, $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{1\ km}{4} = 0.25\ h$

২য় চিত্রে লব্ধি বেগ, $v_1 = v_1^2 + v_2^2 + 2_1v_2 \cos 45°$

$= (3\ km\ h^{-1})^2 + (5\ km\ h^{-1})^2 + 2 \times 3\ km\ h^{-1} \times 5\ km\ h^{-1} \times \cos 45°$

$\therefore v = 7.43\ km\ h^{-1}$

২য় চিত্রে নদী পার হতে সময়, $t_2 = \frac{d'}{v} = \frac{1\ km}{7.4\ km\ h^{-1}} = 0.134\ h$

$\therefore t_1 > t_2$

অতএব, ২য় চিত্রে নদী পার হতে সময় কম লাগবে।

প্রশ্ন ১৩৩ অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ১৯ এর উত্তরের জন্য ২১নং (জ্ঞানমূলক), ২১নং (অনুধাবনমূলক) এবং সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর গ, ঘ উত্তর দ্রষ্টব্য।

অধ্যাপক ম. হালিম, তপন দেবনাথ ও দিলীপ ভৌমিক স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১৩৪ একজন সাঁতারু স্রোতহীন অবস্থায় নদীতে $4\ km\ h^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারে। স্রোতের নদীতে তিনি এপার থেকে সোজা ওপারে যাওয়ার জন্য সাঁতার কাটা শুরু করে $2\sqrt{5}\ km\ h^{-1}$ বেগে কোনাকুনি নদী পার হলেন।

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ত্রিভুজের তিনটি বাহু যদি একই ক্রমে তিনটি ভেক্টরকে নির্দেশ করে তাহলে ভেক্টরত্রয়ের লব্ধি শূন্য হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নদীর স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. সাঁতারু যদি নদীর স্রোতের সাথে 120° কোণ করে সাঁতার কেটে যায় তবে সোজাসুজি নদী পার হতে পারবে। উদ্দীপকের আলোকে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

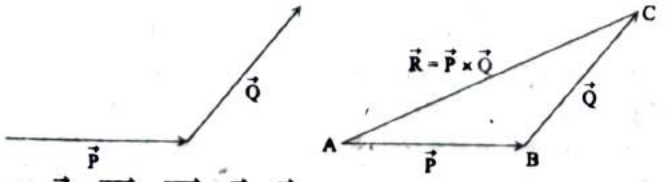
[অনুশীলনীর প্রশ্ন ১]

১৩৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ ত্রিভুজের তিনটি বাহু একই ক্রমে তিনটি ভেক্টরকে নির্দেশ করলে ভেক্টরত্রয়ের লব্ধি শূন্য হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি, দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ কে ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে AB ও BC বাহু দ্বারা সূচিত করা হলো। এদের দিক তীর চিহ্ন দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করা হয়েছে। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু AC দ্বারা বিপরীতক্রমে সূচিত $\vec{R}$ ভেক্টর হবে ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর যোগফল।



অর্থাৎ $\vec{R} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{P} + \vec{Q}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} + (-\vec{R}) = 0$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

অতএব, একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় এবং সমতলীয় দিকরাশি কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে তার লব্ধি শূন্য হবে।

গ স্রোতের বেগ ও সাঁতারুর বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90°$

আমরা জানি,

$R = \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv \cos \alpha}$

বা, $2\sqrt{5} = \sqrt{(4)^2 + u^2 + 2u \times 4 \cos 90°}$

বা, $2\sqrt{5} = \sqrt{16 + u^2 + 0}$ [$\because \cos 90° = 0$]

বা, $\sqrt{16 + u^2} = 2\sqrt{5}$

বা, $16 + u^2 = 20$

বা, $u^2 = 20 - 16$

অতএব, সাঁতারুর বেগ $2\ km\ h^{-1}$।

উদ্দীপক থেকে পাই,
সাঁতারুর বেগ, $v = 4\ km\ h^{-1}$
লব্ধি বেগ, $R = 2\sqrt{5}\ km\ h^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = ?$

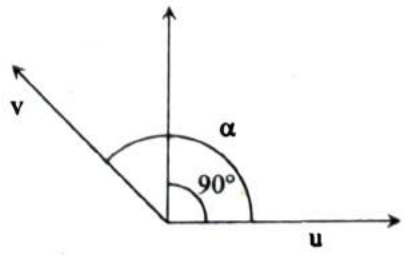
ঘ উদ্দীপক থেকে পাই,

সাঁতারুর বেগ, $v = 4\ km\ h^{-1}$

স্রোতের বেগ, $u = 2\ km\ h^{-1}$

উদ্দীপকের তথ্যানুযায়ী, সাঁতারুর পক্ষে নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছা সম্ভব।

যুক্তিসহ বিশ্লেষণ : ধরি, স্রোতের বেগ u এবং সাঁতারুর বেগ v এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α। নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ R স্রোতের বেগ u এর সাথে θ = 90° কোণ উৎপন্ন করতে হবে।



এখন, উদ্দীপকের তথ্যানুসারে,

$u = 2\ km\ h^{-1}$

$v = 4\ km\ h^{-1}$

$\theta = 90°$

$\therefore \tan \theta = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$

বা, $\tan 90° = \frac{(4\ km\ h^{-1}) \sin \alpha}{(2\ km\ h^{-1}) + (4\ km\ h^{-1}) \cos \alpha}$

বা, $\cot 90° = \frac{2 + 4 \cos \alpha}{4 \sin \alpha}$

বা, $0 = \frac{2 + 4\cos\alpha}{4\sin\alpha}$

বা, $2 + 4\cos\alpha = 0$

বা, $4\cos\alpha = -2$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120°$

অতএব, সাঁতারু স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার কাটলে নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে।

প্রশ্ন ১৩৭। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২০-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১৮-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩৮। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২১-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১৯-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩৯। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২২-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৫-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩৮। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৪-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ১৯-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৩৯। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৫-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২১-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৪০। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৬-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৪-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৪১। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৭-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৬-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ১৪২। অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর উত্তরের জন্য সৃজনশীল প্রশ্ন ২৮-এর উত্তর দ্রষ্টব্য।

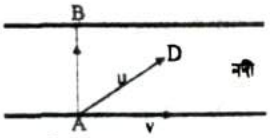
মাস্টার ট্রেইনার প্যানেল কর্তৃক প্রণীত সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রিয় শিক্ষার্থী, মাস্টার ট্রেইনার প্যানেল এ অধ্যায়ের জন্য শিখনফলের ধারায় নিম্নোক্ত সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তরসমূহ প্রণয়ন করেছেন। ১০০% মৌলিক উদ্দীপক নির্ভর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তরসমূহের যথাযথ অনুশীলন কলেজ ও এইচএসসি পরীক্ষার জন্য তোমাদের সেরা প্রস্তুতি গ্রহণ এবং আত্মবিশ্বাস বৃদ্ধিতে সহায়তা করবে।

2.1

শিখনফল : ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারব।

প্রশ্ন ১৪৩। একটি নৌকা চিত্রানুযায়ী 5 km প্রস্থের একটি নদীতে A অবস্থান থেকে অন্য প্রান্তে AD বরাবর যাচ্ছে। স্থির পানিতে নৌকার বেগ $\vec{u} = (3\hat{i} + 9\hat{j})\ m\ s^{-1}$ এবং স্রোতের বেগ $\vec{v} = (6\hat{i})\ m\ s^{-1}$। অন্য একটি ক্ষেত্রে নৌকাটি AB বরাবর একই দ্রুতিতে চালানো হয়।



ক. স্বাধীন ভেক্টর কী? ১

খ. বিমানের বাতাসের অনুকূলে নাকি প্রতিকূলে উড্ডয়ন সহজ হয়– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কোন ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর পাড়ে পৌঁছাবে তা গাণিতিক বিশ্লেষণ পূর্বক উত্তর দাও। ৪

১৪৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টর রাশির মান ও দিক ঠিক রেখে ইচ্ছেমতো পাদবিন্দু নেওয়া যায় তাই স্বাধীন ভেক্টর।

খ বিমানের বাতাসের বিপরীত দিকে উড্ডয়ন সহজ হয়। কারণ বিমান উড্ডয়নের ক্ষেত্রে এর উপর প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশের জন্য সামনের দিকে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশের জন্য উপরের দিকে উঠে। এক্ষেত্রে বাতাসের বিপরীত দিকে চলার ক্ষেত্রে অনুভমিক উপাংশ বাধার সম্মুখীন হলে অল্প অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রমে উপরে উঠা যাবে।

গ এখানে, $\vec{u} = (3\hat{i} + 9\hat{j})\ m\ s^{-1}$ এবং $\vec{v} = 6\hat{i}\ m\ s^{-1}$

নদীর সমতলের লম্ব বরাবর ভেক্টর,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6(0 - 9\hat{k}) = -54\hat{k}$$

$\therefore$ নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর,

$$\hat{a} = \pm\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \pm\frac{(-54\hat{k})}{\sqrt{(-54)^2}} = \pm\hat{k}$$

ঘ প্রথম ক্ষেত্রে নদীর প্রস্থ তথা AB বরাবর নৌকাটির বেগের উপাংশ, $u_{AB1} = 9\ m\ s^{-1}$।

$\therefore$ ১ম ক্ষেত্রে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_1 = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ}} = \frac{5 \times 10^3}{9}\ s = 555.556\ s$$

$\therefore t_1 = 9.259\ min$

১ম ক্ষেত্রে, নৌকার দ্রুতি ছিল, $u = \sqrt{3^2 + 9^2}\ m\ s^{-1} = 3\sqrt{10}\ m\ s^{-1}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, AB বরাবর তথা নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ,

$u_{AB_2} = 3\sqrt{10}\ m\ s^{-1}$

$\therefore$ ২য় ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সময়, $t_2 = \frac{5 \times 10^3}{3\sqrt{10}}\ s = 527.05\ s = 8.78\ min$

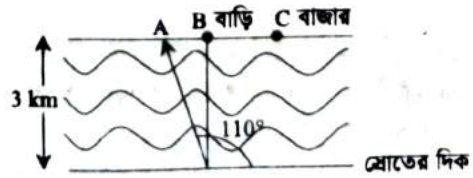
$\therefore t_2 < t_1$ অর্থাৎ, ২য় ক্ষেত্রে সময় কম লাগবে।

অতএব, ২য় ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর পাড়ে পৌঁছাবে।

2.2

শিখনফল : লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারব।

প্রশ্ন ১৪৪। নিঝুম দ্বীপের একজন মাঝি O বিন্দু হতে মেঘনা নদীর অপর পাড়ে তার বাড়ি B-তে যাওয়ার জন্য বিকাল 5.00 টায় চিত্রের ন্যায় OA বরাবর 6 km h^{-1} বেগে যাত্রা করে নিঝুম দ্বীপের বাজার C-তে পৌঁছল। C হতে স্রোতের প্রতিকূলে নৌকা চালিয়ে 19 মিনিট পর বাড়িতে পৌঁছল। ঐ দিনের সূর্যাস্ত ছিল সন্ধ্যা 6.00 টায় এবং নদীতে স্রোতের বেগ 4 km h^{-1}।



ক. ব্যাসার্ধ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. "লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ"– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নৌকার লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. সূর্যাস্তের পূর্বে মাঝি বাড়ি ফিরতে পারবে কি? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

১৪৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

খ একটি লন রোলারকে ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী মনে হয়। অন্যদিকে রোলারটিকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি রোলারের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ হয়।

গ দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ, $P = 4\ km\ h^{-1}$

নৌকার বেগ, $Q = 6\ km\ h^{-1}$

P ও Q-এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 110°$

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{4^2 + 6^2 + 2 \times 4 \times 6 \times \cos 110}$

$= 5.965\ km\ h^{-1} = 1.656\ m\ s^{-1}$

$\therefore$ লব্ধি বেগ $1.656\ m\ s^{-1}$।

ঘ ধরি, C বিন্দুতে পৌঁছতে প্রয়োজনীয় সময় t

নদীর প্রস্থ, $d = 3\ km$

নৌকার বেগ, $Q = 6\ km\ h^{-1}$

$\therefore t = \frac{d}{Q\sin\alpha} = \frac{3}{6 \times \sin 110} = 0.532\ h = 0.532 \times 60\ min = 31.93\ min$

$\therefore$ মোট অতিক্রান্ত সময় $= 31.93 + 19 = 50.93\ min$

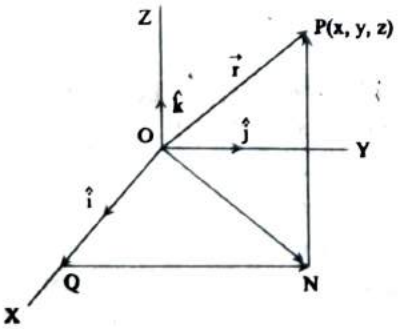
এখানে, $t' < 60\ min$

$\therefore$ মাঝি সূর্যাস্তের পূর্বে বাড়ি পৌঁছাতে পারবে।

2.3

শিখনফল : একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারব।

১৪৫ নিচের চিত্রটি লক্ষ কর–



ক. স্কেলার রাশি কী? ১

খ. লব্ধি বলতে কী বুঝায়? ২

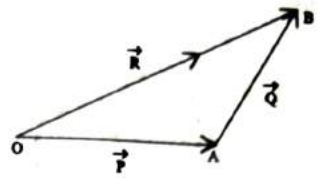
গ. উদ্দীপকের $\vec{r}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে উল্লিখিত $\vec{r}$ থেকে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া সম্ভব কি-না বিশ্লেষণ কর। ৪

১৪৫নং প্রশ্নের উত্তর

ক যেসব ভৌতরাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য শুধু মানই যথেষ্ট, দিকের কোনো প্রয়োজন হয় না সেসব রাশিই স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি।

খ লব্ধি হলো দুই বা ততোধিক ভেক্টরের সম্মিলিত ফল। অর্থাৎ দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলে যে নতুন ভেক্টর পাওয়া যায় তাকে লব্ধি বলে। ধরি, OA বরাবর $\vec{P}$ ভেক্টর এবং AB বরাবর $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। এখানে, OB বরাবর সৃষ্ট $\vec{R}$ ভেক্টরই $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরের লব্ধি প্রকাশ করে।



গ উদ্দীপকে পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY ও OZ সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ নির্দেশ করছে। OP রেখাটি এই অক্ষ ব্যবস্থায় r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে। আবার, $\vec{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$। PN রেখাটি হলো XY সমতলের উপর এবং NQ রেখাটি হলো OX-এর উপর লম্ব।

এখন ভেক্টর যোগের নিয়ম অনুসারে পাই,

$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP}$ এবং $\vec{ON} = \vec{OQ} + \vec{QN}$

$\therefore \quad \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QN} + \vec{NP}$

কিন্তু $\vec{OQ} = x\hat{i}, \vec{QN} = y\hat{j}, \vec{NP} = z\hat{k}$ ও $\vec{OP} = \vec{r}$

$\therefore \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এখানে, x, y ও z হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান।

চিত্র হতে, $OP^2 = ON^2 + NP^2$ এবং $ON^2 = OQ^2 + QN^2$

$\therefore \quad OP^2 = OQ^2 + QN^2 + NP^2$

বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\vec{r}$ বরাবর বা, $\vec{r}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর,

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ঘ উদ্দীপকে উল্লিখিত $\vec{r}$ থেকে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া সম্ভব।

বিশ্লেষণ : উদ্দীপকের $\vec{r}$ কে ব্যবকলন করে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া সম্ভব। উদ্দীপকের $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর। 'গ' নং থেকে পাই,

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

বেগ-এর ক্ষেত্রে : অতিক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$ এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে,

$\therefore$ বেগ, $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r})$

বা, $\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

বা, $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

অতএব, বেগ $= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

ত্বরণ-এর ক্ষেত্রে : অতিক্ষুদ্র সময়ে বেগ $(\vec{v})$ এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে।

$\therefore$ ত্বরণ $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v})$

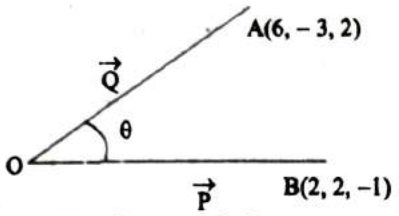
বা, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$

$\therefore$ ত্বরণ $= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$

অতএব, উপরোক্ত বিশ্লেষণের আলোকে বলা যায় যে, উদ্দীপকের $\vec{r}$ থেকে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া সম্ভব।

2.4

শিখনফল : দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারব।



ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি লিখ। ১

খ. আমাদের পায়ে হাঁটা কীভাবে ভেক্টর বিভাজনের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়? ২

গ. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$-এর উপাংশ 3 গুণ হলে মধ্যবর্তী কোণ এর পরিবর্তন গাণিতিক ব্যাখ্যাসহ বিশ্লেষণ কর। ৪

১৪৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি হলো– যদি কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে দুটি ভেক্টরের মান ও দিক প্রকাশ করা যায় তবে তৃতীয় বাহু বিপরীত ক্রমে ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান ও দিক প্রকাশ করবে।

খ হাঁটার সময় যখন পায়ে F বল প্রয়োগ করা হয়, তা যদি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে F বল দুটি উপাংশ যথা অনুভূমিক উপাংশ F cos θ এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ তে ভাগ হয়। দুটি উপাংশের মধ্যে আনুভূমিক উপাংশ F cos θ আমাদের সামনে এগিয়ে যেতে সাহায্য করে।

গ $\vec{P} = \vec{OB} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{Q} = \vec{OA} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore \vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$

এখন, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 2 \times 6 + 2(-3) + (-1)(2)$

$= 12 - 6 - 2 = 4$

$P = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

$Q = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{3 \times 7}$

বা, $\cos\theta = \frac{4}{21}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) = 79.02°$

অতএব, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ 79.02°।

ঘ ধরি, $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর উপাংশ 3 গুণ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ α হবে

$\therefore Q\cos\alpha = 3Q\cos\theta$

বা, $\cos\alpha = \frac{3Q\cos\theta}{Q}$

বা, $\cos\alpha = 3\cos\theta$

বা, $\cos\alpha = 3\cos(79.02°)$ ['খ' হতে, θ = 79.02°]

বা, $\cos\alpha = \frac{4}{7}$

বা, $\alpha = 55.15°$

অতএব, $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর উপাংশ 3 গুণ হলে মধ্যবর্তী কোণ কমে 55.15° হবে।

প্রশ্ন ১৪৭ $\vec{P} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ হলো দুটি ভেক্টর রাশি।

ক. ভেক্টরের বিয়োগ বলতে কী বোঝায়? ১

খ. 'কৃত কাজ' একটি স্কেলার রাশি, ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর যে, ভেক্টর দুটি দ্বারা সৃষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণের গুণফলের মানের সমান। ৪

১৪৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টর রাশির বিয়োগ বলতে একটি ভেক্টরের সাথে অপরটির ঋণাত্মক ভেক্টরের যোগফল বুঝায়।

খ বল প্রয়োগের মাধ্যমে বস্তুর সরণ হলে বল এবং বলের দিকে বস্তুর সরণের উপাংশের গুণফলকে কৃতকাজ বলে। বল $\vec{F}$ এবং বলের অভিমুখের সাথে θ কোণে বস্তুর সরণ $\vec{S}$ হলে, বলের দিকের সাথে $\vec{S}$ সরণের উপাংশ = S cos θ।

এখন, কৃতকাজের সংজ্ঞানুসারে, $W = F(S\cos\theta) = \vec{F} \cdot \vec{S}$

অর্থাৎ কৃতকাজ বলতে বল ও সরণের স্কেলার গুণফলকে বুঝায় যা সর্বদা স্কেলার মান প্রদান করে।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, কৃতকাজ একটি স্কেলার রাশি।

গ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ।

আমরা জানি, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$

উদ্দীপকে

$\vec{P} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{Q} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

বা, $\cos\theta = \frac{(4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{-8-1-6}{\sqrt{16+1+9}.\sqrt{4+1+4}}$

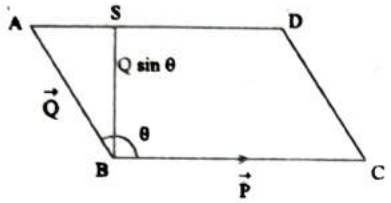
বা, $\cos\theta = \dfrac{-15}{\sqrt{26}.\sqrt{9}} = \dfrac{-15}{3\sqrt{26}}$

বা, $\cos\theta = \cos 168.69°$

$\therefore$ $\theta = 168.69°$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান 168.69°।

ঘ উদ্দীপকে, দুটি ভেক্টর $\vec{P} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$



$\therefore$ $|\vec{P}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$

$|\vec{Q}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

আবার, $\sin\theta = \dfrac{SB}{AB}$

বা, $SB = AB \sin\theta$

বা, $SB = Q \sin\theta$

অর্থাৎ সামান্তরিকের লম্ব, $SB = Q \sin\theta$

আমরা জানি,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা = $P \times Q \sin\theta$

$= \sqrt{26} \times 3 \times \sin(168.69°)$ ['গ' হতে]

= 3 বর্গ একক।

আবার, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের ক্রসগুণনে আমরা পাই,

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-8+6) + \hat{k}(4-2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore$ ভেক্টর দুটি দ্বারা সৃষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণের গুণফলের মানের সমান।

2.5

শিখনফল : ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারব।

১ একই ভেক্টর রাশি $\vec{A} = 4xy^3\,\hat{i} - 3x^2yz\,\hat{j} - 3\,xyz\,\hat{k}$ এবং একটি স্কেলার রাশি $\phi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$

ক. আয়ত একক ভেক্টর এর সংজ্ঞা দাও। ১

খ. রাস্তার বাঁকে সাইকেল আরোহী হেলে থাকে কেন– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ এর কার্ল নির্ণয় কর। ৩

ঘ. একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে কিভাবে ভেক্টর ক্ষেত্রে এবং একটি ভেক্টরের ক্ষেত্রকে কিভাবে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়? গাণিতিক বিশ্লেষণ করে দেখাও। ৪

১৪৮নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোই আয়ত একক ভেক্টর।

খ রাস্তার বাঁকে সাইকেল চালানোর সময় আরোহী সাইকেলসহ তার শরীরকে বাঁকা পথের কেন্দ্রের দিকে হেলিয়ে রাখে।

কারণ : বাঁকা বা বৃত্তাকার পথে মোড় ঘুরাবার সময় একটি কেন্দ্রমুখী এবং অনুভূমিক বলের প্রয়োজন হয়। আরোহী যদি সোজা থাকে, তাহলে সাইকেলসহ তার ওজন নিচের দিকে ক্রিয়ারত। আর রাস্তার প্রতিক্রিয়া বলের অভিমুখ উপর দিকে। এ দুটি বলের প্রত্যেকের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য। এ দুটি বল উপরিউক্ত কেন্দ্রমুখী বল যোগান দিতে পারে না। তাই, প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বলের যোগান দেওয়ার জন্যই আরোহীকে রাস্তার বাঁকে হেলে থাকতে হয়।

গ এখানে, $\vec{A} = 4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$

$\therefore$ $\text{curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4xy^3 & -3x^2yz & -3xyz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(-3x^2yz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(4xy^3)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(4xy^3)\right\}$$

$= \hat{i}(-3xz + 3x^2y) - \hat{j}(-3yz - 0) + \hat{k}(-3yz.2x - 4.x.3y^2)$

$= \hat{i}\,3x(xy - z) + \hat{j}\,3yz - 6xy(z + 2y)\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{A}$-এর কার্ল $3x(xy - z)\hat{i} + 3yz\hat{j} - 6xy(z + 2y)\hat{k}$.

ঘ উদ্দীপক অনুসারে, ভেক্টর ক্ষেত্র, $\vec{A} = 4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$

স্কেলার ক্ষেত্র, $\varphi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$

$\therefore$ $\text{div}\,\vec{A} = \left(\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right).(4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k})$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(4xy^3) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-3x^2yz) + \dfrac{\partial}{\partial z}(-3xyz)$

$= 4y^3 - 3x^2z - 3xy$ যা একটি স্কেলার ক্ষেত্র

আবার, $\text{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi$

$= \left(\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$

$= \hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\varphi$

$= \hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3) + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3) + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3)$

$= \hat{i}(4xyz + 2yz + 2z^3) + \hat{j}(2x^2z + 2xz + 0) + \hat{k}(2x^2y + 2xy + 6xz^2)$ যা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র

অতএব, গ্রাডিয়েন্ট করে একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর এবং ডাইভারজেন্স করে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তরিত করা যায়।

[redacted] $\vec{F} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$ ভেক্টরটি একটি বলক্ষেত্র নির্দেশ করে।

ক. জ্যামিতিক উপায়ে কয়টি সূত্রের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোগ করা যায়? ১

খ. কার্ল বলতে কী বোঝ? ২

গ. (2, 2, – 2) বিন্দুতে div $\vec{F}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে উদ্দীপকের বল ক্ষেত্রটির প্রকৃতি আলোচনা কর। ৪

১৪৯নং প্রশ্নের উত্তর

ক জ্যামিতিক উপায়ে তিনটি সূত্রের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোগ করা যায়।

খ $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেন্সিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ ও $\vec{A}$ এর ভেক্টর গুণনকে $\vec{A}$ এর কার্ল বলে।

অর্থাৎ, কার্ল, $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ = curl $\vec{A}$ একটি ভেক্টর রাশি। ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে কার্ল এর ভূমিকা অপরিসীম।

curl $\vec{A}$ এর মান $= \left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial_y} - \frac{\partial A_y}{\partial_z}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial_z} - \frac{\partial A_z}{\partial_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial_x} - \frac{\partial A_x}{\partial_y}\right)^2\right\}$

গ উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{F} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

এখন, div $\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) . \{(6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^2\hat{j} - 3xz^2\hat{k}\}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - z^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial z}(-3xz^2)$

$= 12xy + 0 - 6xz = 12xy - 6xz$

এখন, (2, 2, – 2) বিন্দুতে div $\vec{F}$ এর মান

$= 12 \times 2 \times 2 - 6 \times 2 \times (-2) = 48 + 24 = 72$

অতএব, (2, 2, – 2) বিন্দুতে div $\vec{F}$ এর মান 72.

ঘ আমরা জানি, ভেক্টর অপারেটর, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

উদ্দীপক থেকে পাই, $\vec{F} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

এখন, curl $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \{(6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}\}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6x^2y - z^3) & 2x^3 & -3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^3)\right\} + \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(6x^2y - z^3) - \frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y - z^3)\right\}$$

$= \hat{i}(0 - 0) + \hat{j}(-3z^2 + 3z^2) + \hat{k}(6x^2 - 6x^2)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে পাই, curl $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

এখন, আমরা জানি, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে বলক্ষেত্রটি অসংরক্ষণশীল বা অঘূর্ণনীয় হয়।

অতএব, উদ্দীপকের বলক্ষেত্রটি অসংরক্ষণশীল বা অঘূর্ণনীয়।

2.6

শিখনফল : ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারব।

[redacted] $\vec{A} = 6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}$ এবং

$\vec{B} = x^2y^2\hat{i} - 4xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ দুটি ভেক্টরক্ষেত্র।

ক. স্কেলার ক্ষেত্র কাকে বলে? ১

খ. নাল ভেক্টর সঠিক ভেক্টর নয় কেন? ২

গ. P(1, – 1, 2) বিন্দুতে $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উপরের উদ্দীপকের $\vec{A}$ ভেক্টরটি চোঙাকৃতি নয় এবং $\vec{B}$ ভেক্টর ঘূর্ণনশীল গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর। ৪

[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]

১৫০নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলোকে স্কেলারক্ষেত্র বলে।

খ যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে। কিন্তু নাল ভেক্টর হচ্ছে সেই ভেক্টর যার মান শূন্য ও কোনো নির্দিষ্ট দিক নেই। অর্থাৎ, নাল ভেক্টরের মান শূন্য হওয়ায় ভেক্টরটি সঠিক ভেক্টর না।

গ এখানে, $\vec{A} = 6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}$

div$\vec{A} = \vec{\nabla} . \vec{A}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) . (6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k})$

$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y) + \frac{\partial}{\partial_y}(4xy^2) + \frac{\partial}{\partial_z}(2x)$

$= 12xy + 4x . 2y + 0 = 12xy + 8xy = 20xy$

$\therefore$ div $\vec{A} = 20xy$

$\therefore$ P(1, –1, 2) বিন্দুতে div $\vec{A} = 20 \times 1 \times (-1) = -20$

ঘ 'গ' হতে, div $\vec{A} = -20xy$

অর্থাৎ, div A $\neq 0$। অর্থাৎ, $\vec{A}$ ভেক্টরটি চোঙাকৃতি নয়।

$\vec{B}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হবে যদি ও কেবল যদি curl $\vec{B} \neq 0$ হয়

curl $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2 & -4xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-4xz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-4xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2)\right\}$$

$= \hat{i}(2z + 4x) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(-4z - 2x^2y)$

$= \hat{i}(2z + 4x) - \hat{k}(4z + 2x^2y)$

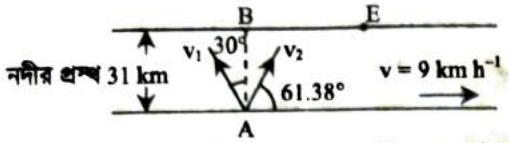
$\therefore$ curl $\vec{B} = 2(2x + z)\hat{i} - (2x^2y + 4z)\hat{k}$ যা শূন্য নয়

যেহেতু, curl $\vec{B} \neq 0$ সেহেতু, $\vec{B}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল। (প্রমাণিত)

শীর্ষস্থানীয় কলেজসমূহের টেস্ট পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রিয় শিক্ষার্থী, মাস্টার ট্রেইনার প্যানেল সারা দেশের শীর্ষস্থানীয় কলেজসমূহের টেস্ট পরীক্ষার প্রশ্নপত্র বিশ্লেষণ করে তা থেকে গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নাবলি উত্তর সহকারে নিচে সংযোজন করেছেন। কলেজের নাম সংবলিত এসব প্রশ্ন ও উত্তর অনুশীলনের মাধ্যমে তোমরা পরীক্ষায় কমনের নিশ্চয়তা পাবে।

প্রশ্ন নং ১৫১



একজন মাঝি AB এর সাথে 30° কোণে 18 km h^{-1} বেগে নৌকা চালাতে চাচ্ছে, নদীর স্রোতের বেগ 9 km h^{-1}। আরেকজন মাঝি A বিন্দুতে 18 km h^{-1} বেগে স্রোতের সাথে 61.38° কোণে নৌকা চালাচ্ছে।

ক. একক ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. একটা ঘাস কাটা মেশিন কেন টানা সহজ—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. যদিও প্রথম মাঝি নৌকা ভিন্ন দিকে চালাচ্ছিল কিন্তু নৌকা সোজাসুজি AB পথে গিয়ে অপর পারে B-তে পৌঁছায়। B-তে পৌঁছাতে কত সময় লেগেছিল? ৩

ঘ. দ্বিতীয় মাঝি উদ্দীপকের E বিন্দুতে পৌঁছায়। BE দূরত্ব কত? ৪

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

১৫১নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টরের মান এক একক হলে তাকে একক ভেক্টর বলে।

খ ঠেলার সময় ঘাস কাটা মেশিনের প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে মেশিনটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী মনে হয়। অন্যদিকে মেশিনটিকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি মেশিনের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে ঘাস কাটা মেশিন টানা সহজ হয়।

গ প্রথম মাঝির বেগ, $v_1 = 18 \text{ km h}^{-1}$

নদীর প্রস্থ, $s = 31$ km

প্রস্থের সাথে ১ম মাঝির বেগের উৎপন্ন কোণ, $\theta_1 = 30°$

$\therefore$ প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ, $v_{y_1} = v_1 \cos\theta_1$

$= 18 \times \cos 30° \text{ km h}^{-1}$

$= 9\sqrt{3} \text{ km h}^{-1}$

$\therefore$ B বিন্দুতে পৌঁছাতে ১ম মাঝির প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_1 = \frac{s}{v_{y_1}} = \frac{31 \text{ km}}{9\sqrt{3} \text{ km h}^{-1}}$$

$\therefore t_1 = 1.99$ h

ঘ প্রস্থ বরাবর ২য় মাঝির বেগ,

$v_{y_2} = v_2 \sin\theta_2$

$= 18 \times \sin 61.38° \text{ km h}^{-1} = 15.8 \text{ km h}^{-1}$

নদী পার হতে ২য় মাঝির প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_2 = \frac{s}{v_{y_2}}$$

বা, $t_2 = \dfrac{31 \text{ km}}{15.8 \text{ km h}^{-1}} = 1.96$ h

নদীর দৈর্ঘ্য বরাবর নৌকার বেগ,

$v_{x_2} = v_2 \cos\theta_2 +$ স্রোতের বেগ

$= (18 \times \cos 61.38° + 9) \text{ km h}^{-1}$

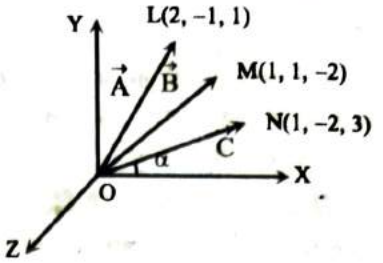
$= 17.62 \text{ km h}^{-1}$

$\therefore$ BE এর দূরত্ব $= v_{x_2} \times t_2$

$= 17.62 \text{ km h}^{-1} \times 1.96$ h

$= 34.54$ km

প্রশ্ন নং ১৫২



ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. "একটি বৈদ্যুতিক পাখার সকল বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান"— ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপক অনুসারে, $\vec{B}$ ও Y অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে α কত পরিবর্তন ঘটালে X অক্ষের উপর $\vec{C}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ পূর্বের এক-চতুর্থাংশ হবে? ৪

[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]

১৫২নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ আমরা জানি, সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক বেগ বলা হয়। এখন ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখা যে গতিতেই চলুক না কেন পাখার প্রতিটি বিন্দু সমান সময়ে সমান কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে। এজন্যই ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখার সকল বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান।

গ এখানে, $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

Y-অক্ষের সাথে $\vec{B}$ এর উৎপন্ন কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).\hat{j}}{|\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}|.|\hat{j}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 65.90°$$

উদ্দীপক অনুসারে $\vec{B}$ এবং Y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ 65.90°।

ঘ এখানে, $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{C}$ এর সাথে X-অক্ষ α কোণ উৎপন্ন করে,

$$\therefore \cos\alpha = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}).\hat{i}}{|\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}|.|\hat{i}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{14}} = 74.5°$

X-অক্ষের উপর $\vec{C}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ,

$$C\cos\alpha = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}).(\hat{i})}{|\hat{i}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

এখন ধরি, X-অক্ষ এবং $\vec{C}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ_2 হলে X-অক্ষের উপর $\vec{C}$ এর লব্ধ অভিক্ষেপ পূর্বের এক চতুর্থাংশ হবে,

$$C\cos\theta_2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

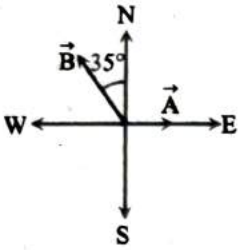
বা, $\sqrt{14}.\cos\theta_2 = \frac{1}{4}$

বা, $\cos\theta_2 = \frac{1}{4 \times \sqrt{14}}$

বা, $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4\sqrt{14}}\right) = 86.17°$

$\therefore$ α এর পরিবর্তন $= 86.17° - 74.5° = 11.67°$

১ ভেক্টর $\vec{A}$ এর মান 10 m এবং দিক পূর্ব দিকে। ভেক্টর $\vec{B}$ এর মান 8 m এবং দিক 35° উত্তর পশ্চিম।



ক. সূত্র কাকে বলে? ১

খ. টর্ক কিভাবে বল হতে আলাদা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টর $\vec{A} + \vec{B}$ এর মান ও দিক নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ভেক্টর $\vec{A} + \vec{B}$ এর মান ও দিক $\vec{A} - \vec{B}$ এর মান ও দিক হতে আলাদা। গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

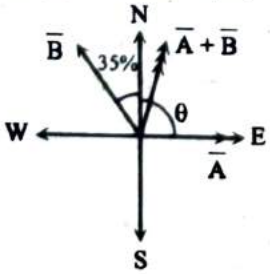
[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

১৫৩নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব পরীক্ষা-নিরীক্ষার পর সঠিক প্রমাণিত হলে যখন একটি উক্তির মাধ্যমে এটিকে প্রকাশ করা হয় তখন তাকে সূত্র বলে।

খ কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হলে বস্তুটির মধ্যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরবার যে প্রবণতা সৃষ্টি হয় তাকে বলের ভ্রামক বা টর্ক বলে। অপরদিকে, যে বাহ্যিক কারণ স্থির বা গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে। অর্থাৎ টর্ক ও বল এক নয়, দুটি আলাদা রাশি।

গ উদ্দীপক হতে পাই, $|\vec{A}| = 10$ m এবং $|\vec{B}| = 8$ m



$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90° + 35° = 125°$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos 125°}$$
$$= \sqrt{(10)^2 + (8\text{ m})^2 + 2 \times 10\text{ m} \times 8\text{ m} \times \cos 125°}$$
$$= 8.5\text{ m}$$

ধরি, $\vec{A} + \vec{B}$ লব্ধি $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan\theta = \frac{|\vec{B}|\sin\alpha}{|\vec{A}| + |\vec{B}|\cos\alpha} = \frac{8\sin 125°}{10 + 8\cos 125°}$$

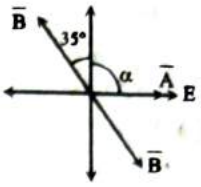
বা, $\theta = 50.45°$

$\therefore$ $\vec{A} + \vec{B}$ এর মান 8.5 m এবং দিক $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে 50.45° কোণ উৎপন্ন করে।

ঘ 'গ' নং হতে পাই,

$\vec{A} + \vec{B}$ এর মান 8.5 m

দিক $\theta = 50.45°$ যা $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে উৎপন্ন করে।



আবার,

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(180 - \alpha)}$$
$$= \sqrt{(10\text{ m})^2 + (8\text{ m})^2 + 2 \cdot 10\text{ m} \cdot 8\text{ m} \cos(180° - 125°)}$$
$$= 15.99\text{ m}$$

ধরি, $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর $\vec{A}$ এর সাথে θ_1 কোণ উৎপন্ন করে

$$\therefore \tan\theta_1 = \frac{|\vec{B}|\sin(180 - \alpha)}{|\vec{A}| + |\vec{B}|\cos(180 - \alpha)}$$

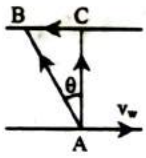
বা, $\tan\theta_1 = \frac{8\sin(180° - 125°)}{10 + 8\cos(180 - 125°)}$

$\therefore$ $\theta_1 = 24.2°$

এখানে, $|\vec{A} + \vec{B}| \neq |\vec{A} - \vec{B}|$ এবং $\theta \neq \theta_1$

সুতরাং ভেক্টর $\vec{A} + \vec{B}$ এর মান ও দিক ভেক্টর $\vec{A} - \vec{B}$ এর মান ও দিক হতে আলাদা।

প্রশ্ন ১৫৪ মাঝি 4 m s^{-1} স্রোতযুক্ত নদীর এপার হতে 7.96 m s^{-1} বেগে নৌকা চালিয়ে 50 m উজানে AB পথে ওপার তীরের ঘাটে (B তে) যাত্রী নামালো। কিন্তু নেমেই একজন যাত্রী ACB পথে নৌকা চালানোর দাবি করলো। নদীর প্রস্থ 500 m।



ক. স্কেলার ক্ষেত্র কাকে বলে? ১

খ. স্রোতযুক্ত নদীতে সোজা পথে ওপারে যেতে নৌকার বেগ স্রোতের বেগের চেয়ে অধিক হতে হবে—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নৌকার লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে যাত্রীর দাবিটি মূল্যায়ন কর। ৪

[রাজশাহী কলেজ, রাজশাহী]

১৫৪নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলোকে স্কেলারক্ষেত্র বলে।

খ স্রোতযুক্ত নদীতে নৌকার চেয়ে স্রোতের বেগ বেশি হলে নৌকাটি ওপারে পৌঁছাতে পারবে না কারণ ভেক্টরের নিয়ম অনুযায়ী স্রোতের বেগ শুধু কার্যকর হবে ফলে নৌকাটি সোজা স্রোত বরাবর চলতে থাকবে। ফলে স্রোতযুক্ত নদীতে ওপারে যেতে নৌকার বেগ স্রোতের চেয়ে অধিক হতে হবে।

গ ধরি, স্রোতের বেগ, $u = 4\text{ m s}^{-1}$

নৌকার বেগ, $v = 7.96\text{ m s}^{-1}$

লব্ধিবেগ, $R = ?$

এখানে, $\tan\theta_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{50\text{ m}}{500\text{ m}}$

বা, $\theta_1 = 5.71°$

$\therefore$ স্রোতের সাথে লব্ধির উৎপন্ন কোণ $\theta = 90° + 5.71° = 95.71°$

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

বা, $\tan 95.71° = \frac{7.96\sin\alpha}{4 + 7.96\cos\alpha}$

বা, $\alpha = 125.7°$

∴ লব্ধিবেগ,

$$R = \sqrt{(4\ m\ s^{-1})^2 + (7.96\ m\ s^{-1})^2 + 2 \times 4\ m\ s^{-1} \times 7.96\ m\ s^{-1} \cos 125.7°}$$
$$= 6.5\ m\ s^{-1}$$

ঘ AC বরাবর যেতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_1 = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{500\ m}{\sqrt{(7.96\ ms^{-1})^2 - (4\ ms^{-1})^2}} = 72.654\ s$$

নদীর প্রস্থ, $d = 500\ m$
নৌকার বেগ, $v = 7.96\ m\ s^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 4\ m\ s^{-1}$
$BC = d_1 = 50\ m$

BC বরাবর যেতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_2 = \frac{d_1}{v - u} = \frac{50\ m}{(7.96 - 4)\ ms^{-1}} = 12.626\ s$$

B বিন্দুতে পৌঁছাতে মোট সময় লাগবে,

$$t' = (72.654 + 12.626)\ s = 85.28\ s$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{500^2 + 50^2}\ m = 50\sqrt{101}\ m$$

AB পথে সময় লাগে, $t'' = \frac{d_2}{R} = \frac{50\sqrt{101}\ m}{7.2960\ ms^{-1}} = 68.87\ s$

সুতরাং, $t' > t''$

সুতরাং, AB পথে যেতে কম সময় লাগবে।

∴ যাত্রীটির দাবি সঠিক নয়।

প্রশ্ন ১৫৫ আরমান, 10 kg ভরের একটি লন রোলারকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 10 N ঠেলা বল প্রয়োগ করে। পৃথকভাবে রিমনও উক্ত রোলারকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 10 N টানা বল প্রয়োগ করতে পারে।

ক. মৌলিক রাশি কাকে বলে? ১
খ. একটি স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0.02 mm বলতে কী বুঝায়? ২
গ. আরমান ও রিমন একই সাথে লন রোলারের উপর ঠেলা ও টানা বল প্রয়োগ করলে লব্ধি বল কত হবে? ৩
ঘ. আরমান ও রিমনের জন্য লন রোলারটিকে সরাতে সমান কষ্টকর ছিল কি?— উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। ৪

[কুমিল্লা ভিক্টোরিয়া সরকারি কলেজ, কুমিল্লা]

১৫৫নং প্রশ্নের উত্তর

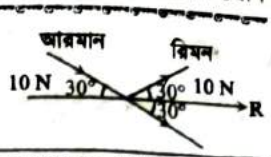
ক যেসব রাশি মূল অর্থাৎ স্বাধীন বা নিরপেক্ষ, যেগুলো অন্য রাশির উপর নির্ভর করে না বরং অন্যান্য রাশি এদের উপর নির্ভর করে তাদেরকে মৌলিক রাশি বলে।

খ স্ক্রু গজের বৃত্তাকার স্কেলের মাত্র একভাগ ঘুরালে তার T-এর প্রান্ত বা স্ক্রুটি যতটুকু সরে আসে তাকে বলা হয় যন্ত্রের লঘিষ্ঠ গণন বা লঘিষ্ঠমান।

ব্যাখ্যা : স্ক্রু গজের সাহায্যে পাঠ নেওয়ার পূর্বে লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করতে হয়। বৃত্তাকার স্কেলের শূন্য দাগের সাথে রৈখিক স্কেলের শূন্য দাগ মিলিয়ে নিতে হয়। বৃত্তাকার স্কেলটিকে একবার ঘুরালে এর যতটুকু সরণ ঘটে এবং রৈখিক স্কেল বরাবর যে দৈর্ঘ্য অতিক্রম করে তাকে ঐ যন্ত্রের দৌড় বা পিচ বলে। যন্ত্রের পিচকে বৃত্তাকার স্কেলের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে লঘিষ্ঠ মান পাওয়া যায়।

সুতরাং লঘিষ্ঠ গুণন 0.02 mm বলতে বৃত্তাকার স্কেলটিকে একবার ঘুরালে রৈখিক স্কেল বরাবর 0.02 mm অতিক্রম করে।

গ আরমান ও রিমন ঠেলা ও টানা বল প্রয়োগ করলে মধ্যবর্তী কোণ হবে $\alpha = 60°$



∴ লব্ধি বল $= \sqrt{(10\ N)^2 + (10\ N)^2 + 2 \times 10\ N \times 10\ N \times \cos 60°}$
$= 10\sqrt{3}\ N$

∴ লব্ধি বল $10\sqrt{3}\ N$।

ঘ এখানে, রোলারের ওজন, $W = (10 \times 9.8)\ N = 98\ N$।

প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta = 10\sin 30° = 5\ N$

এখন, রোলারটি ঠেলার ক্ষেত্রে, এর আপাত ওজন হবে
$= W + F\sin\theta = 98\ N + 5\ N = 103\ N$

আবার, রোলারটি টানার ক্ষেত্রে, এর আপাত ওজন হবে
$= W - F\sin\theta = 98\ N - 5\ N = 93\ N$

আবার, রোলারটি ঠেলা ও টানা উভয় ক্ষেত্রে বলের অনুভূমিক উপাংশ
$= F\cos\theta = 10 \times \cos 30° = 8.66\ N$

উভয় ক্ষেত্রে রোলারটি 8.66 N বলের জন্য সামনের দিকে এগিয়ে যাবে, তবে ঠেলার ক্ষেত্রে এর ওজন 103 N অনুভূত হবে এবং টানার ক্ষেত্রে এর ওজন 93 N অনুভূত হবে। সুতরাং আমরা বলতে পারি লন রোলার সরাতে সমান কষ্টকর ছিল না।

প্রশ্ন ১৫৬ সরকারী সৈয়দ হাতেম আলী কলেজের সামনের রাস্তা দিয়ে একজন লোক 5 km h^{-1} বেগে দক্ষিণ দিক থেকে উত্তর দিকে এবং অন্যজন উত্তর দিক থেকে দক্ষিণ দিকে একই বেগে হেঁটে যাচ্ছেন। হঠাৎ দক্ষিণ দিক থেকে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 30 km h^{-1} বেগে ঝড়ো বৃষ্টি নামল।

ক. সীমাবদ্ধ ভেক্টর কাকে বলে? ১
খ. কোণ একটি মাত্রাশূন্য রাশি— ব্যাখ্যা কর। ২
গ. ১ম ব্যক্তির উপর বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত? ৩
ঘ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে কোন ব্যক্তিকে বেশি কোণে ছাতা ধরতে হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে মতামত দাও। ৪

[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]

১৫৬নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে পাদবিন্দু হিসেবে ঠিক করে রাখা হয় তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

খ সাধারণত যে সকল রাশির মান ধ্রুব তাদের মাত্রাশূন্য রাশি বলে। যেমন : সমতলিক কোণ একটি মাত্রাহীন রাশি।

এখন কোণের সংজ্ঞানুযায়ী, আমরা জানি,

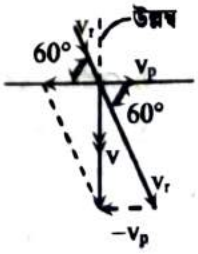
$$Q = \frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$$

বৃত্তচাপ ও ব্যাসার্ধ উভয় রাশির মাত্রা হলো দৈর্ঘ্যের মাত্রা [L]

∴ কোণ $(\theta) = \frac{[L]}{[L]} = 1$

সুতরাং সমতলিক কোণ একটি মাত্রাহীন রাশি।

গ ১ম ব্যক্তির বেগ, $v_p = 5\ km\ h^{-1}$
বৃষ্টির বেগ, $v_y = 30\ km\ h^{-1}$
বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $v = ?$



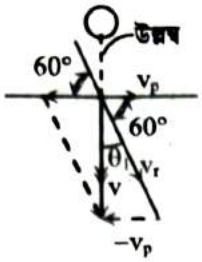
∴ লব্ধি বেগ,

$$v = \sqrt{v_p^2 + v_y^2 - 2\ v_p\ v_y \cos 60°}$$
$$= \sqrt{5^2 + 30^2 - 2 \times 5 \times 30 \times \cos 60°}$$
$$= 27.84\ km\ h^{-1}$$

ঘ ১ম ব্যক্তির বেগ, $v_p = 5\ km\ h^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $v_y = 30\ km\ h^{-1}$

যেহেতু বৃষ্টি অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে দক্ষিণ দিক হতে উত্তর দিকে গমণকারী ব্যক্তির উপর আপতিত হচ্ছে চিত্রে তা নিম্নরূপ



এখানে, $\tan\theta_1 = \dfrac{v_p \sin 60°}{v_y - v_p \cos 60°}$

$= \dfrac{5 \sin 60°}{30 - 5 \cos 60°}$

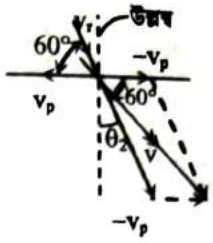
$= 8.95°$

∴ উল্লম্বের সাথে ছাতার কোণ $= 30 - 8.95° = 21.05°$

২য় ব্যক্তির ক্ষেত্রে, ব্যক্তির বেগ, $v_p = 5\ km\ h^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $v_r = 30\ km\ h^{-1}$

আমরা জানি,



$\tan\theta_2 = \dfrac{v_p \sin 60°}{v_r - v_p \cos 60°}$

$= \dfrac{5 \sin 60°}{30 - 5 \cos 60°}$

∴ $\theta_2 = 8.95°$

∴ লব্ধির উল্লম্বের সাথে উৎপন্ন কোণ $= 30 + 8.95° = 38.95°$

∴ বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে ২য় ব্যক্তিকে উল্লম্বের সাথে বেশি কোণে ছাতা ধরতে হবে।

৫ একাধিক অধ্যায়ের সমন্বয়ে প্রণীত সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

প্রিয় শিক্ষার্থী, এইচএসসি পরীক্ষায় সৃজনশীল প্রশ্ন সাধারণত একাধিক অধ্যায়ের সমন্বয়ে এসে থাকে। তোমরা যাতে পরীক্ষার জন্য এ ধরনের প্রশ্ন সম্পর্কে পূর্ব প্রস্তুতি গ্রহণ করতে পার, সে লক্ষ্যে এ অধ্যায়ের সাথে সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ের সমন্বয়ে প্রণীত সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর নিচে দেওয়া হলো।

১ কবীর ও জহির একত্রে দৌড়াচ্ছেন, যেখানে কবীরের ভর জহিরের ভরের অর্ধেক এবং জহিরের গতিশক্তি কবীরের অর্ধেক। এক পর্যায়ে বৃষ্টি পড়তে শুরু করায় জহির আরও দ্রুত দৌড়াতে থাকে। এতে তার বেগ $1\ m\ s^{-1}$ বৃদ্ধি পায় ফলে তার গতিশক্তি কবীরের গতিশক্তির সমান হয়।

ক. বিপরীত ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টরের ধর্মগুলো ব্যাখ্যা কর। ২

গ. কবীর ও জহিরের আদিবেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. জহির দৌড়ানো অবস্থায় যদি দেখে $2.4\ m\ s^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছে তা বৃষ্টির প্রকৃত বেগের সমান হবে কি-না তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও। ৪

[অধ্যায় ২ ও ৫-এর সমন্বয়ে প্রণীত]

১৫৭নং প্রশ্নের উত্তর

ক সমমানের দুটি সমজাতীয় ভেক্টর যদি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদের একটিকে অপরটির বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

খ ভেক্টরের ধর্মগুলো নিম্নরূপ :

১. শুধু মানের অথবা শুধু দিকের অথবা উভয়ের পরিবর্তন হলে ভেক্টর রাশির পরিবর্তন ঘটে।

২. ভেক্টর রাশির যোগ, বিয়োগ ও গুণ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মে সম্পাদিত হয় না।

৩. কোনো স্কেলার রাশিকে ভেক্টর রাশি দ্বারা গুণ করলে রাশিটি ভেক্টর রাশিতে পরিণত হয়।

৪. পদার্থবিজ্ঞানে সূত্রগুলোকে ভেক্টররূপে প্রকাশ করলে চলনশীল ও ঘূর্ণনশীল প্রসঙ্গ কাঠামোতে অপরিবর্তিত থাকবে।

গ এখন, জহিরের গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \times$ কবীরের গতিশক্তি

বা, $\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{m}{2} v_1^2$

বা, $v_2^2 = \frac{v_1^2}{4}$

বা, $v_2 = \frac{v_1}{2}$

উদ্দীপক থেকে পাই,
জহিরের ভর $= m$ (ধরি)
কবীরের ভর $= \frac{m}{2}$
কবীরের বেগ $= v_1$
জহিরের বেগ $= v_2$

আবার, জহিরের বেগ $1\ m\ s^{-1}$ বৃদ্ধি পেলে তার গতিশক্তি কবীরের গতিশক্তির সমান হয়।

এখন, জহিরের গতিশক্তি $\frac{1}{2} m (v_2 + 1)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} v_1^2$

বা, $(v_2 + 1)^2 = \frac{v_1^2}{2}$

বা, $v_2 + 1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{v_1}{2} + 1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$ $[\because v_2 = \frac{v_1}{2}]$

বা, $v_1 + 2 = \sqrt{2}\, v_1$

বা, $\sqrt{2}\, v_1 - v_1 = 2$

বা, $0.414213562\, v_1 = 2$

বা, $v_1 = 4.82$

এবং $v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{4.82}{2} = 2.41$

অতএব, কবীর ও জহিরের আদিবেগ যথাক্রমে $4.82\ m\ s^{-1}$ এবং $2.41\ m\ s^{-1}$।

ঘ গাণিতিক বিশ্লেষণ : জহিরের আদিবেগ $2.41\ m\ s^{-1}$ [গ নং থেকে]

সুতরাং জহিরের দৌড়ানো অবস্থায় বেগ $= (2.41 + 1) = 3.41\ m\ s^{-1} = OA$

$OB =$ জহিরের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $= 2.41\ m\ s^{-1}$

ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ OC, এক্ষেত্রে OC এবং ব্যক্তির বিপরীতমুখী সমমানের বেগ OA'-এর লব্ধি OB.

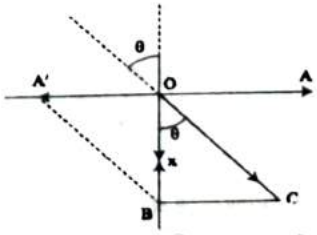
ΔOBC থেকে $(OC)^2 = (OB)^2 + (BC)^2$

বা, $(OB)^2 = (2.41)^2 + (2.41)^2$

বা, $(OC)^2 = 11.61$

∴ $OC = 3.4\ m\ s^{-1}$

আবার, ধরি, $\angle BOC = \theta$



∴ $\tan\theta = \dfrac{BC}{OB} = \dfrac{2.41}{2.41}$

বা, $\tan\theta = 1$

∴ $\theta = 45°$

অতএব, উপরোক্ত গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় যে, জহিরের দৌড়ানো অবস্থায় পর্যবেক্ষণকৃত বেগ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নয়। বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান হচ্ছে $3.4\ m\ s^{-1}$ যা উল্লম্বের সাথে 45° কোণে আনত।

১০০% কমন উপযোগী জ্ঞান ও অনুধাবনমূলক প্রশ্ন ও উত্তর

প্রিয় শিক্ষার্থী, জ্ঞান ও অনুধাবনমূলক প্রশ্ন উদ্দীপক সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ের যেকোনো লাইন ও অনুচ্ছেদ থেকে এসে থাকে। তাই নতুন পাঠ্যবইয়ের পরিবর্তিত বিষয়বস্তুর আলোকে লাইন ধরে ধরে সর্বাধিক জ্ঞান ও অনুধাবনমূলক প্রশ্ন ও উত্তর নিচে প্রদত্ত হলো, যা পরীক্ষায় ১০০% কমন পাওয়ার ক্ষেত্রে তোমাদের সহায়তা করবে।

কমন উপযোগী জ্ঞানমূলক প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১। স্বাধীন ভেক্টর কাকে বলে?
[য. বো. '১৭] [সেলু-৭, আমির-২৩, প্রামাণিক-৭, তপন-৩]

উত্তর : কোনো ভেক্টর রাশির মান ও দিক ঠিক রেখে ইচ্ছেমতো পাদবিন্দু নেওয়া গেলে তাকে স্বাধীন বা মুক্ত ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ২। আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে?
[য. বো. '১৬; চ. বো. '১৯; ব. বো. '১৯] [সেলু-৪, আমির-২৪, প্রামাণিক-১০, তফাজ্জল-১]

উত্তর : ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ৩। স্কেলার গুণন কাকে বলে? [সেলু-২৪]

উত্তর : দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোনের cosine এর মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনকে স্কেলার গুণন বলে।

প্রশ্ন ৪। দুটি ভেক্টর কখন সমান্তরাল হয়?

উত্তর : দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হয়।

প্রশ্ন ৫। মৌলিক রাশি কাকে বলে? [ব. বো. '১৬]

উত্তর : যেসব রাশি মূল অর্থাৎ স্বাধীন বা নিরপেক্ষ, যেগুলো অন্য রাশির উপর নির্ভর করে না বরং অন্যান্য রাশি এদের উপর নির্ভর করে তাদেরকে মৌলিক রাশি বলে।

প্রশ্ন ৬। লব্ধ রাশি কাকে বলে? [সেলু-২০]

উত্তর : যেসব ভৌত রাশি স্বাধীন বা নিরপেক্ষ নয় অন্যকোনো মৌলিক রাশির ওপর নির্ভর করে এবং এক বা একাধিক মৌলিক রাশির গুণফল বা ভাগফল থেকে উৎপন্ন হয় তাদেরকে লব্ধ রাশি বলে।

প্রশ্ন ৭। সমরেখ ভেক্টর কী? [সেলু-১৯, তপন-৩]

উত্তর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সরলরেখা বরাবর বা পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করে তবে তা সমরেখ ভেক্টর।

প্রশ্ন ৮। ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ। [সেলু-২৩]

উত্তর : যদি কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে দুটি একই জাতীয় ভেক্টর নির্দেশ করা যায় তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।

প্রশ্ন ৯। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি বিবৃত কর।
[সেলু-২১, আমির-১৭]

উত্তর : ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি হলো– কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু যদি দুটি ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করে তবে ঐ বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

প্রশ্ন ১০। ডাইভারজেন্স কাকে বলে? [সেলু-১৮, প্রামাণিক-৪৩]

উত্তর : ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ এর সাথে কোনো একট ভেক্টর ক্ষেত্রের ডট গুণন বা স্কেলার গুণনকে ঐ ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে।

প্রশ্ন ১১। স্কেলার রাশি কী?
[সেলু-১৬, আমির-১, প্রামাণিক-১, তপন-১, তফাজ্জল-১]

উত্তর : যেসব ভৌত রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য শুধু মানই যথেষ্ট, দিকের কোনো প্রয়োজন হয় না সেসব রাশিই স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি।

প্রশ্ন ১২। নিশ্চল কোণ কী? [সেলু-২২]

উত্তর : অনুভূমিকের সাথে কোনো তল যে কোণ উৎপন্ন করলে আনত তলের উপরস্থ কোনো বস্তু গতিশীল হওয়ার উপক্রম হয়, সেই কোণই ঐ তলে বস্তুটির স্থিতি বা নিশ্চল কোণ।

প্রশ্ন ১৩। তিনটি ভেক্টরের লব্ধি কখন শূন্য হয়?
[সেলু-১৭, আমির-২৩, তফাজ্জল-১]

উত্তর : একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একইক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হয়।

প্রশ্ন ১৪। সদৃশ ভেক্টর কী? [সেলু-১৫, তপন-৩]

উত্তর : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে। তবে তাদেরকে পরস্পর সদৃশ ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ১৫। ঋণাত্মক ভেক্টর কী? [সেলু-৩১, প্রামাণিক-১৮, তপন-৩]

উত্তর : নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে তার বিপরীত দিকে সমমানের সমজাতীয় ভেক্টরটিই হলো ঋণাত্মক ভেক্টর।

প্রশ্ন ১৬। সমান ভেক্টর কী? [সেলু-৩৬, তপন-৩]

উত্তর : সমজাতীয় দুইটি সমান্তরাল ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তারা পরস্পর সমান ভেক্টর।

প্রশ্ন ১৭। কার্ল কী? [কু. বো. '১৯, '১৫; সি. বো. '১৭; দি. বো. '১৯]
[সেলু-৩, আমির-৯, প্রামাণিক-৪২]

উত্তর : $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং একে ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেনসিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর ∇ ও $\vec{A}$ -এর ভেক্টর গুণনই $\vec{A}$ -এর কার্ল।

প্রশ্ন ১৮। ভেক্টর অপারেটর কী?
[চ. বো. '১৫] [সেলু-১১, আমির-১২, প্রামাণিক-৪০, তফাজ্জল-১]

উত্তর : যেসব গাণিতিক চিহ্নের সাহায্যে ভেক্টর রাশির রূপান্তর করা হয় সেগুলোই ভেক্টর অপারেটর।

প্রশ্ন ১৯। লব্ধি ভেক্টর কী?
[রা. বো. '১৬; য. বো. '১৫] [সেলু-৮, আমির-১৮, প্রামাণিক-২১, তপন-১০]

উত্তর : দুই বা ততোধিক ভেক্টরের সমন্বয়ে যে নতুন ভেক্টর পাওয়া যায় তাই লব্ধি ভেক্টর।

প্রশ্ন ২০। বিপ্রতীপ ভেক্টর কী? [রা. বো. '১৯] [সেলু-৩২]

উত্তর : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ২১। সীমাবদ্ধ ভেক্টর কী? [য. বো. '১৯] [সেলু-২৯]

উত্তর : যে ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে পাদবিন্দু হিসেবে ঠিক করে রাখা হয় তাই সীমাবদ্ধ ভেক্টর।

প্রশ্ন ২২। গ্রেডিয়েন্ট কাকে বলে? [ঢা. বো. '১৭] [সেলু-১২, আমির-১১, প্রামাণিক-৪১]

উত্তর : যে ভেক্টর ক্ষেত্র অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে তাকে গ্রেডিয়ান্ট বলে।

প্রশ্ন ২৩। একক ভেক্টর কী? [রা. বো. '১৭] [সেলু-১, আমির-৪, প্রামাণিক-৫, তফাজ্জল-৩]

উত্তর : কোনো ভেক্টরের মান এক একক হলে তাই একক ভেক্টর।

প্রশ্ন ২৪। ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম কী?
[কু. বো. '১৭] [সেলু-১০, আমির-২২, প্রামাণিক-২৮, তফাজ্জল-৪]

উত্তর : ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি হলো– $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সে সমতলের অভিলম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু রেখে প্রথম

ভেক্টরের দিক থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।
ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি দুটি ভেক্টর গুণফলের দিক নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা হয়।

প্রশ্ন ২৫। অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? [কু. বো. '১৬; চ. বো. '১৭; ব. বো. '১৬] [সেলু-২, আমির-৫, প্রামাণিক-৯, তপন-৩, তফাজ্জল-১]

উত্তর : প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে যে ভেক্টর দিয়ে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ২৬। নাল ভেক্টর কী? [ব. বো. '১৭] [সেলু-৩, আমির-৩, প্রামাণিক-৬, তপন-৩]

উত্তর : যে ভেক্টরের মান শূন্য তাই শূন্য বা নাল ভেক্টর।

প্রশ্ন ২৭। ব্যাসার্ধ ভেক্টর কাকে বলে? [ঢা. বো. '১৬] [সেলু-৬, আমির-৬, প্রামাণিক-১১, তপন-৩]

উত্তর : প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ২৮। কৌণিক বেগ কাকে বলে? [সেলু-১৪]

উত্তর : ঘূর্ণনশীল কোনো বস্তু একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক বেগ বলে।

প্রশ্ন ২৯। ভেক্টর বিভাজন কী? [রা. বো. '১৫; সি. বো. '১৬, '১৫] [সেলু-৯, আমির-১৯, প্রামাণিক-২৫, তপন-১৫, তফাজ্জল-১]

উত্তর : একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াই ভেক্টর বিভাজন।

প্রশ্ন ৩০। সরণ ভেক্টর কাকে বলে? [ব. বো. '১৫] [সেলু-৫, আমির-৭, প্রামাণিক-৮]

উত্তর : কোনো কণার অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে তার হারকে সরণ ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ৩১। ভেক্টর রাশি কী? [সেলু-৩৪, প্রামাণিক-২, তপন-১, তফাজ্জল-১]

উত্তর : যেসব ভৌত রাশিকে সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় সেসব রাশিই ভেক্টর রাশি।

প্রশ্ন ৩২। ঘূর্ণন বল কী? [সেলু-২৭]

উত্তর : ঘূর্ণায়মান কোনো কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং কণার উপর প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলই ঘূর্ণন বল।

প্রশ্ন ৩৩। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ। [সেলু-৩৩, আমির-২]

উত্তর : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি হলো– যদি কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে দুটি একই জাতীয় ভেক্টর নির্দেশ করা যায়, তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।

প্রশ্ন ৩৪। ভেক্টর গুণন কী? [সেলু-২৬, আমির-২১, তফাজ্জল-১]

উত্তর : দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের sine এর মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনই ভেক্টর বা ক্রসগুণন।

প্রশ্ন ৩৫। একটি ভেক্টরের ঘূর্ণনশীল ও সলিনয়েড হওয়ার শর্ত কী? [সেলু-৩০, প্রামাণিক-৩৭]

উত্তর : কোনো ভেক্টরের কার্ল অশূন্য হলে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হবে এবং কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল হবে।

প্রশ্ন ৩৬। ভেক্টর ব্যবকলনীয় বা ডিফারেনশিয়াল অপারেটর কী? [সেলু-২৫]

উত্তর : সময় t-এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য t-এর সাপেক্ষে ভেক্টরের পরিবর্তনের হারকে সময় সাপেক্ষে ভেক্টরের ভেক্টর ব্যবকলনীয় বা ডিফারেনশিয়াল অপারেটর বলে।

প্রশ্ন ৩৭। $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত কী? [সেলু-৩৫]

উত্তর : $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হওয়ার শর্ত হলো $(\vec{A} \times \vec{B}) . \vec{C} = 0$ হতে হবে।

প্রশ্ন ৩৮। ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণনের দিক নির্দেশ কর।

উত্তর : ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণনের দিক হলো $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে আছে তার লম্ব দিকে।

প্রশ্ন ৩৯। অপারেটর কী? [সেলু-২৮]

উত্তর : অপারেটর একটি গাণিতিক সংকেত যার সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়।

প্রশ্ন ৪০। $\vec{\nabla}$ কী?

উত্তর : $\vec{\nabla}$ হলো একটি ভেক্টর ডিফারেনসিয়াল অপারেটর যেখানে,

$$\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}$$

প্রশ্ন ৪১। দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান কত হতে পারে? [সেলু-৩৭, আমির-১৫,

উত্তর : দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টর দুটির মানের যোগফলের সমান হতে পারে।

প্রশ্ন ৪২। বিপরীত ভেক্টর কাকে বলে? [আমির-১৫, তপন-৩]

উত্তর : সমমানের দুটি সমজাতীয় ভেক্টর যদি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদের একটিকে অপরটির বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন ৪৩। ভৌত রাশি কী? [সেলু-৪২]

উত্তর : পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত যেকোনো রাশিই ভৌত রাশি।

প্রশ্ন ৪৪। দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান কখন সর্বোচ্চ হয়? [সেলু-৩৯]

উত্তর : দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হয়।

প্রশ্ন ৪৫। দুটি ভেক্টর পরস্পর 180° কোণে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধির মান ও দিক কেমন হবে? [সেলু-৩৮]

উত্তর : দুটি ভেক্টর পরস্পর 180° কোণে ক্রিয়া করলে অর্থাৎ পরস্পর বিপরীতমুখী হলে এদের লব্ধির মান ভেক্টর দুটির বিয়োগফল এবং দিক হবে বৃহত্তর ভেক্টরটির দিকে।

প্রশ্ন ৪৬। ভেক্টর কী? [সেলু-৪০]

উত্তর : ভেক্টর এক ধরনের বিশেষ অপারেটর, যা দিক নির্দেশ করে। কোনো চলককে মোটা হরফে লিখে অথবা, চলকের ওপর তীর চিহ্ন বা টুপি বসিয়ে ভেক্টর প্রকাশ করা হয়।

প্রশ্ন ৪৭। দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণনে কী পাওয়া যায়? [সেলু-৪১]

উত্তর : দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়।

প্রশ্ন ৪৮। ক্যালকুলাস কী? [প্রামাণিক-৩৯]

উত্তর : বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হলো অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র যা আধুনিক গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা।

কমন উপযোগী অনুধাবনমূলক প্রশ্ন ও উত্তর

প্রশ্ন ১। দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল ও বিয়োগ ফলের মান সমান– ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. '১৯]

উত্তর : $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha = A^2 + B^2 + 2AB\cos(180 - \alpha)$

বা, $2AB\cos\alpha = -2AB\cos\alpha$

বা, $4AB\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 90°$

অতএব, দুটি ভেক্টর যখন পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে তখন তাদের যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হয়।

প্রশ্ন ২। $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$ কেন, ব্যাখ্যা কর। [প্রামাণিক-৫৫]

উত্তর : এখানে, $\hat{k}$ ও $\hat{i}$ হলো যথাক্রমে z ও x অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। যাদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$

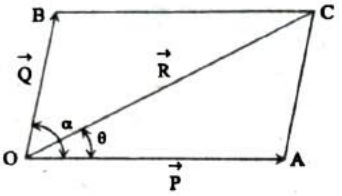
এবং $|\hat{k}| = 1$ এবং $|\hat{i}| = 1$

$\therefore \hat{k}.\hat{i} = |\hat{k}|\,|\hat{i}| \cos\theta = 1 \times \cos 90° = 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\therefore \hat{k}.\hat{i}$, z ও x অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরের ডটগুণন বলে এর মান শূন্য।

প্রশ্ন ৩। সামান্তরিক সূত্রটি ব্যাখ্যা কর। [সেলু-১৮]

উত্তর : যদি একটি সামান্তরিকের কোনো কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার উপর এককালীন ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা যায়, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির মিলিত ফলের বা লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।



চিত্রে O বিন্দুতে $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OB} = \vec{Q}$ দুটি ভেক্টর α কোণে ক্রিয়া করছে। OA এবং OB-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হয়েছে। এ সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়া বিন্দু অর্থাৎ O থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণ OC-ই OA এবং OB এর লব্ধি নির্দেশ করে।

অর্থাৎ $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

প্রশ্ন ৪। বল ও সরণ ভেক্টর রাশি হলেও তাদের দ্বারা সৃষ্ট কাজ স্কেলার রাশি— ব্যাখ্যা কর। [সেলু-১৫]

[ঢা. বো. '১৮; রা. বো. '১৮; য. বো. '১৮; সি. বো. '১৮; দি. বো. '১৮]

উত্তর : যে সকল রাশির মান এবং দিক উভয়ই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে। দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণন একটি স্কেলার রাশি এবং ক্রস গুণন ভেক্টর রাশি হয়। কাজের সংজ্ঞানুসারে আমরা জানি, কাজ হলো সরণের দিকে বলের উপাংশ × সরণ অথবা বল × বলের দিকে সরণের উপাংশের গুণফল। অর্থাৎ $W = FS\cos\theta$। বল ও সরণ উভয়ই দিক রাশি হওয়ায় দিক রাশির স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞানুসারে $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$. যেহেতু দুটি দিক রাশির স্কেলার গুণফল একটি রাশি তাই বল ও সরণের গুণফল একটি স্কেলার রাশি। যার কেবল মান আছে, দিক নেই।

প্রশ্ন ৫। সিলিং এ রক্ষিত বৈদ্যুতিক পাখা কিভাবে ঘুরলে বাতাস ফ্যানের নিচে বসা ব্যক্তি পাবে? [সেলু-১৭]

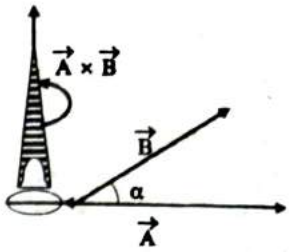
উত্তর : সিলিং এ রক্ষিত বৈদ্যুতিক পাখা ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরালে বাতাস ফ্যানের নিচে বসা ব্যক্তি পাবে। কারণ এক্ষেত্রে ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম প্রযোজ্য হবে। এ নিয়মানুসারে দুটি ভেক্টরের সমতলে একটি ডানহাতি স্ক্রুকে লম্বভাবে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হবে সেদিক হবে ভেক্টরের দিক। বৈদ্যুতিক পাখার ক্ষেত্রেও অনুরূপ ঘটে থাকে।

প্রশ্ন ৬। লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ কেন? [আমির-১১, প্রামাণিক-৪৮, তপন-১৮]

উত্তর : একটি লন রোলারকে ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটি প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী মনে হয়। অন্যদিকে রোলারটিকে টানার সময় এর উপর প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ উপরের দিকে হওয়ায় এটি রোলারের ওজন কমিয়ে দেয়। ফলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ হয়।

প্রশ্ন ৭। ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি ব্যাখ্যা কর। [সেলু-১৯]

উত্তর : ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি হলো—



$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সে সমতলের অভিলম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু রেখে প্রথম ভেক্টরের দিক থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সে দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।

ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি দুটি ভেক্টর গুণফলের দিক নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা হয়।

প্রশ্ন ৮। ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা কর। [সেলু-১৬, আমির-১৩]

উত্তর : দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের sine অনুপাতের মানের গুণফলের সমান হয় সে গুণনকে ভেক্টর বা ক্রস গুণন এবং গুণনের ফলকে ভেক্টর গুণফল বলে। ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম দ্বারা এ গুণনের দিক নির্ণয় করা হয়।

ব্যাখ্যা : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে আমরা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণনের ফলে যে নতুন ভেক্টর $\vec{C}$ পাই,

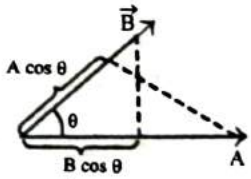
তাহলে $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{\eta}\, A\, B \sin\theta$ (যখন $0 \le \theta \le \pi$)

এখানে $\vec{\eta}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{A} \times \vec{B}$ অর্থাৎ $\vec{C}$-এর দিক নির্দেশ করে।

প্রশ্ন ৯। স্কেলার গুণন বলতে কী বুঝ? [সেলু-২৭, আমির-১২]

উত্তর : দুটি ভেক্টরের যে গুণনে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় এবং এর মান ঐ ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের cosine এর মানের গুণফলের সমান হয়, সে গুণনকে স্কেলার বা ডট গুণন এবং গুণনের ফলকে স্কেলার গুণফল বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, P ও B দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে সংজ্ঞানুসারে স্কেল গুণফল বা ডট গুণফল,



$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ [যখন $0 \le q \le p$]

$= AB\cos\theta$

$= (B\cos\theta)$

বিন্দু $B\cos\theta$ হচ্ছে A এর দিকে B এর উপাংশের মান বা A -এর উপর $\vec{B}$ -এর লম্ব অভিক্ষেপ।

আবার $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\cos\theta = B(A\cos\theta)$

কিন্তু $A\cos\theta$ হচ্ছে $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর উপাংশের মান বা $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

প্রশ্ন ১০। একই ক্রমে ক্রিয়াশীল তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে— ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. '১৯] [সেলু-২৩; প্রামাণিক-২১]

উত্তর : কোন বস্তু যদি B বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে BA পথে A বিন্দুতে অতঃপর AC পথে C বিন্দুতে এবং সর্বশেষ CB পথে B বিন্দুতে ফিরে আসে। তবে ঐ বস্তুটির নীট সরণ হবে শূন্য। অর্থাৎ, একই ক্রমে তিনটি ভেক্টর $\vec{BA}$, $\vec{AC}$ এবং $\vec{CB}$ এর লব্ধি শূন্য।

আবার, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

বা, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = 0$

বা, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 0$

অতএব, উপরোক্ত বিশ্লেষণ হতে এটি স্পষ্ট যে, একইক্রমে ক্রিয়াশীল তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে।

প্রশ্ন ১১। দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর। [সেলু-২৪, চ. বো. '১৬]

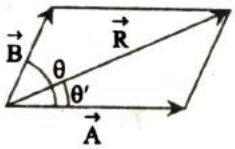
উত্তর : দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান। এক্ষেত্রে ভেক্টরদ্বয় অসমান হওয়ার কারণে এদের বিয়োগফল কখনো শূন্য হবে না। তাই দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না।

প্রশ্ন ১২। বায়ুপ্রবাহ না থাকলেও একজন সাইকেল আরোহী বাতাসের ঝাপটা অনুভব করেন কেন? ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. '১৯]

উত্তর : বায়ুপ্রবাহ না থাকলেও সেখানে বায়ুর উপস্থিতি বিদ্যমান। ফলে একজন সাইকেল আরোহী যখন স্থির বায়ুর মধ্যদিয়ে সাইকেলে আরোহন করে তখন বায়ুর পরম গতিশূন্য হলেও আরোহীর সাপেক্ষে বায়ুর আপেক্ষিক বেগ থাকে। এজন্য আরোহী বাতাসের ঝাপটা অনুভব করেন।

প্রশ্ন ১৩। একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের মান সমান। দেখাও যে, এদের লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [সেলু-২৮]

উত্তর : ধরি, ভেক্টরদ্বয় $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$ এবং লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$, $\vec{A}$ এর সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে।



তাহলে, $\theta' = \tan^{-1}\dfrac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} = \tan^{-1}\dfrac{B\sin\theta}{B + B\cos\theta}$ [$\because A = B$]

$$= \tan^{-1}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

অতএব, লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

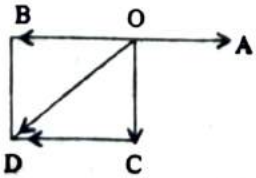
প্রশ্ন ১৪। বৃষ্টির পানি চলন্ত গাড়ির সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেয়, পেছনের কাচকে ভিজায় না কেন? [সেলু-২২]

উত্তর : গাড়ি যে দিকে চলে তার উল্টোদিকে বাতাস প্রবাহিত হয়। বাতাসের বেগের মান গাড়ির বেগের মানের সমান হয়।

ধরি, গাড়ির বেগ $= \overrightarrow{OA}$

বাতাসের বেগ $= \overrightarrow{OB}$

বৃষ্টির বেগ $= \overrightarrow{OC}$



OBDC সামান্তরিক অঙ্কন করা হলো।

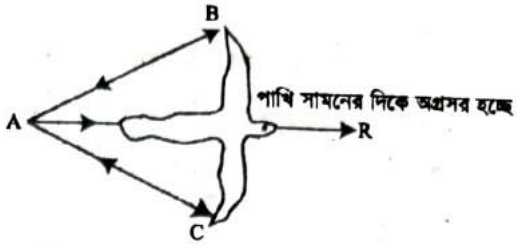
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

$\therefore$ বৃষ্টির লব্ধি বেগ $= \overrightarrow{OD}$

সামনের দিক থেকে তির্যকভাবে পড়ে বলেই বৃষ্টি চলন্ত গাড়ির সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেয়, পিছনের কাচকে নয়।

প্রশ্ন ১৫। পাখি আকাশে কীভাবে উড়ে– ব্যাখ্যা কর। [সেলু-২৫, প্রামাণিক-৩৭]

উত্তর : পাখি উড়বার সময় ডানা দুইটি দিয়ে বাতাসকে পেছনের দিকে ধাক্কা দেয় (BA ও CA)। একই সাথে বাতাসও নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে পাখির ডানাকে AB ও AC বরাবর ধাক্কা দেয়। এই প্রতিক্রিয়া বলের লব্ধিবল AR পাখিটিকে সামনের দিকে ধাক্কা দেয়। যা পাখিটিকে উড়তে সাহায্য করে।



প্রশ্ন ১৬। নৌকায় গুণ টানার সময় দড়ির দূরত্ব যত বেশি হয় নৌকা তত বেশি দ্রুত চলে কেন? [সেলু-২১]

উত্তর : নৌকার গুণ টানার সময় দড়ির দূরত্ব যত কম হয়, অনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ তত বড় হয়। সেক্ষেত্রে, অনুভূমিকের দিকে অনুভূমিক টানের উপাংশ $T\cos\theta$ এর মান তত কম হয়। কারণ θ এর মান যত বড় হয় $\cos\theta$ এর মান তত কম হয়। ফলে কার্যকর টান কম হয়। কিন্তু দড়ির দৈর্ঘ্য বেশি হলে টানের সময় অনুভূমিকের দিকের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কমে যায়। ফলে $T\cos\theta$ এর মান বেড়ে যায়। অর্থাৎ কার্যকর টান বেশি হয়। উপরিউক্ত কারণে নৌকার গুণ টানার সময় দড়ির দূরত্ব যত বেশি হয় নৌকা তত বেশি দ্রুত চলে।

প্রশ্ন ১৭। ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্য লিখ। [সেলু-২৯, আমির-২২, প্রামাণিক-৭৮]

উত্তর : ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্য হলো–

(i) ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার ক্ষেত্র।

(ii) $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div $\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে একক আয়তনের কোনো প্রবাহীর (তরল পদার্থ) ঘনত্বের হ্রাসের হার বুঝায়।

(iii) দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ক্ষেত্রে $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ কিন্তু $\vec{\nabla}.\vec{V} \neq \vec{V}.\vec{\nabla}$

(iv) কোনো ভেক্টর রাশি $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হলে উক্ত ভেক্টরকে চোঙাকৃতি বা সলিনয়ডাল (Solenoidal) বলে। অর্থাৎ যে আয়তনের তরলের আগমন ঘটে ঠিক সেই আয়তনের তরলের নির্গমন ঘটলে সে অবস্থাকে সলিনয়ডাল বলে।

(v) ডাইভারজেন্স এর মান ধনাত্মক হলে তরলের আয়তন বৃদ্ধি ও ঘনত্ব হ্রাস নির্দেশ করে এবং ডাইভারজেন্সের মান ঋণাত্মক হলে তরলের আয়তন হ্রাস ও ঘনত্ব বৃদ্ধি নির্দেশ করে।

প্রশ্ন ১৮। ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৩৬] [কু. বো. '১৬]

উত্তর : ট্রলি ব্যাগের হাতল যত লম্বা হয় ব্যাগটি টানার সময় তা ভূমির সাথে তত কম কোণ তৈরি করে। অর্থাৎ হাতলটি ভূমির বেশি কাছাকাছি থাকে। আর θ এর মান কম হলে $\cos\theta$ এর মান বেশি হয়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ভূমি বরাবর বেগের মান বেশি হয় যাতে ব্যাগটি সহজেই টেনে নেওয়া যায়। এজন্যই ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।

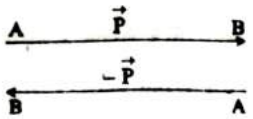
প্রশ্ন ১৯। ভেক্টরের মান কখন ঋণাত্মক হয় এবং কেন? ব্যাখ্যা কর। [দি. বো. '১৫] [সেলু-১১, আমির-২৫, প্রামাণিক-২৪, তপন-৪]

উত্তর : দুটি সমজাতীয় ভেক্টর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের একটির সাপেক্ষে অপরটির মান ঋণাত্মক হয়।

এখানে, $\overrightarrow{AB} = \vec{P}$

এর বিপরীত ভেক্টর $\overrightarrow{BA} = -\vec{P}$

এবং $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



প্রশ্ন ২০। দুটি ভেক্টর কখন পরস্পর সমান্তরাল হয় ব্যাখ্যা কর। [সেলু. ৩৭, প্রামাণিক-৫০]

উত্তর : মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণন শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ = θ

আমরা জানি, $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হলে, $AB \sin\theta = 0$ ($\because \hat{n} \neq 0$)

বা, $\sin\theta = 0$ (যদি A বা B শূন্য না হয়)

বা, $\sin\theta = \sin 0°$ বা $\sin 180°$

$\therefore \theta = 0°$ বা $180°$

অতএব, মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

প্রশ্ন ২১। পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর বিভাজনের কোনো ভূমিকা আছে কী? [সেলু-৩৮, প্রামাণিক-৩৮]

উত্তর : পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর বিভাজনের কোনো ভূমিকা নেই, তবে ভেক্টর যোজনের ভূমিকা রয়েছে। পাখি তার প্রতিটি ডানা দিয়ে বাতাসের ওপর তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। তবে পাখিটি তির্যকভাবে নয় বরং সম্মুখদিকে এগিয়ে যায়। এর কারণ হলো বাতাসও প্রতিটি ডানার ওপর তির্যকভাবে (বিপরীত দিকে) প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এ প্রতিক্রিয়া বলদ্বয়ের লব্ধির দিকে পাখিটি এগিয়ে যায়। এটি ভেক্টর যোজনের উদাহরণ।

প্রশ্ন ২২। ডানহাতি স্ক্রু নিয়মের সাহায্যে বোতলের মুখ খোলা বা বন্ধ করা যায়— ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. '১৯]

উত্তর : ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম অনুসারে বামদিকে ঘুরালে স্ক্রুটি উপরের দিকে অগ্রসর হয়। একইভাবে বোতলের ছিপি বামদিকে ঘুরালে ছিপিটি বাইরের দিকে অগ্রসর হয়ে মুখ খুলে যায়। অনুরূপভাবে, স্ক্রু ডানদিকে ঘুরালে স্ক্রুটি যেমন ভিতরের দিকে অগ্রসর হয় তেমনি বোতলের ছিপিও ডানদিকে ঘুরালে সেটি ভিতরের দিকে অগ্রসর হয়ে মুখ বন্ধ হয়ে যায়। অতএব বলা যায়, ডানহাতি স্ক্রু নিয়মের সাহায্যে বোতলের মুখ খোলা বা বন্ধ করা যায়।

প্রশ্ন ২৩। $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৪০] [সি. বো. '১৬]

উত্তর : এখানে, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর আয়ত একক ভেক্টর। আমরা জানি, X ও Y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ = 90°.

$\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর ডট গুণফল

$\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \cos\theta$

$= \sqrt{1^2}\sqrt{1^2} = \cos 90°$

$= (1) \times (1) \times 0 = 0$

অতএব, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° বলে $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ হয়।

প্রশ্ন ২৪। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে দেখাও যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$. [সেলু-৩৯] [সি. বো. '১৬; ব. বো. '১৬; চ. বো. '১৫]

উত্তর : এখানে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, θ = 45°

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$

$= AB \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} AB$

আবার, $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta = AB \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} AB$

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ২৫। বাতাসের প্রবাহের দিকে দৌড়ালে বাতাসের বেগ কম মনে হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. '১৫] [সেলু-১২]

উত্তর : বাতাসের প্রবাহের দিকে দৌড়ালে বাতাসের বেগ কম মনে হয়। কারণ বাতাস যেদিকে প্রবাহিত হয় সেই দিকে দৌড়ালে বাতাসের কোনো বাধা অনুভব করা যায় না। এক্ষেত্রে যিনি দৌড়ান তার বেগের সমপরিমাণ বেগ বাতাসের বেগ থেকে বাদ দিলে অবশিষ্ট বেগের মানই বাতাসের বেগ বলে তার কাছে মনে হবে। ফলে স্বাভাবিকভাবেই তার কাছে বাতাসের বেগ কম মনে হয়।

প্রশ্ন ২৬। নাল ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক নেই কেন? [রা. বো. '১৫] [সেলু-১, আমির-২৪, প্রামাণিক-১১, তপন-৬]

উত্তর : কোনো ভেক্টরের নির্দেশক রেখাটির আদিবিন্দু ও শেষবিন্দু যদি মিশে যায় তবে রেখাংশটি এটি বিন্দুতে পরিণত হয়। এ ধরনের ভেক্টরকে শূন্য ভেক্টর বলে। সুতরাং এটি এমন একটি ভেক্টর যার মান শূন্য অর্থাৎ $|\vec{0}| = 0$, এর কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকে না অর্থাৎ শূন্য ভেক্টরের কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নেই। একে সাধারণত $\vec{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

প্রশ্ন ২৭। গুণ টানার ফলে নৌকা সামনের দিকে কীভাবে এগিয়ে চলে— ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. '১৫] [সেলু-৬, প্রামাণিক-১৯, তপন-২০]

উত্তর : F বলে নৌকার গুণ টানা হলে এর অনুভূমিক উপাংশ F cos θ নৌকাকে সামনের দিকে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ নৌকাকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা এ উল্লম্ব উপাংশ F sin θ নাকচ হয়ে যায়। ফলে নৌকাটি সামনের দিকে এগিয়ে চলে।

প্রশ্ন ২৮। স্বাধীন ভেক্টরের পাদবিন্দু মূলবিন্দুতে নয় কেন—ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. '১৫] [সেলু-২, আমির-২৭, তপন-৫]

উত্তর : আমরা জানি, স্বাধীন ভেক্টরের পাদবিন্দু কোথায় হবে তা ইচ্ছেমতো ঠিক করা যায় অর্থাৎ, এর পাদবিন্দু নির্দিষ্ট নয়। এজন্যই স্বাধীন ভেক্টরের পাদবিন্দু মূলবিন্দুতে নয়।

প্রশ্ন ২৯। 'কৃতকাজ' একটি স্কেলার রাশি, ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৩৩]

উত্তর : বল প্রয়োগের মাধ্যমে বস্তুর সরণ হলে বল এবং বলের দিকে বস্তুর সরণের উপাংশের গুণফলকে কৃতকাজ বলে। বল $\vec{F}$ এবং বলের অভিমুখের সাথে θ কোণে বস্তুর সরণ $\vec{S}$ হলে, বলের দিকের সাথে $\vec{S}$ সরণের উপাংশ = S cos θ।

এখন, কৃতকাজের সংজ্ঞানুসারে, $W = F(S\cos\theta) = \vec{F} \cdot \vec{S}$

অর্থাৎ কৃতকাজ বলতে বল ও সরণের স্কেলার গুণফলকে বুঝায় যা সর্বদা স্কেলার মান প্রদান করে।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, কৃতকাজ একটি স্কেলার রাশি।

প্রশ্ন ৩০। $\vec{P} \times \vec{Q}$ এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$ কীভাবে সম্পর্কিত? [সেলু-৩২] [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা সেনানিবাস, কুমিল্লা]

উত্তর : $\vec{P} \times \vec{Q}$ হলো $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল। আবার, $\vec{Q} \times \vec{P}$ হলো $\vec{Q}$ এবং $\vec{P}$ ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল। ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে না অর্থাৎ $\vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$ বরং $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$ যেখানে $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর দিক $\vec{Q} \times \vec{P}$ এর বিপরীত। ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম হতে আমরা ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণনের দিক নির্ণয় করতে হয়।

প্রশ্ন ৩১। গ্রাডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য বর্ণনা কর। [সেলু-২১, প্রামাণিক-৮৩]

উত্তর : গ্রাডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য নিম্নরূপে বর্ণনা করা যায় :

১. গ্রাডিয়েন্ট শব্দের অর্থ ঢালের বা নতির মাত্রা।

২. কোনো স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রাডিয়েন্ট অবশ্যই ভেক্টরক্ষেত্র হবে। সুতরাং স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রাডিয়েন্ট নিয়ে ভেক্টরক্ষেত্র উৎপন্ন করা যায়।

৩. কোনো বক্ররেখার কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর গ্রাডিয়েন্ট হলো ঐ বিন্দুর স্পর্শকের গ্রাডিয়েন্টের সমান।

৪. কোনো স্কেলারক্ষেত্রে φ-এর গ্রাডিয়েন্ট একটা ভেক্টরক্ষেত্র।

প্রশ্ন ৩২। ভেক্টর রাশির যোগের সাধারণ নিয়মটি লেখ। [সেলু, ৩৪, তপন-১১]

উত্তর : ভেক্টর রাশির যোগের সাধারণ নিয়মটি হলো— দুটি ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে একটি ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে অপর ভেক্টরের পাদবিন্দু স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তার দৈর্ঘ্য ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান নির্দেশ করে। লব্ধি ভেক্টরের দিক প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুর দিকে।

প্রশ্ন ৩৩। কার্ল বলতে কী বোঝ? [সেলু-১৩, তপন-৪৭]

উত্তর : $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে (x, y, z) ডিফারেন্সিয়েট করা গেলে ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ ও $\vec{A}$ এর ভেক্টর গুণনকে $\vec{A}$ এর কার্ল বলে।

অর্থাৎ, $\text{Curl}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{curl}\,\vec{A}$ একটি ভেক্টর রাশি। ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল এর ভূমিকা অপরিসীম।

$$\text{curl}\,\vec{A} \text{ এর মান} = \left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial_y} - \frac{\partial A_y}{\partial_z}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial_z} - \frac{\partial A_z}{\partial_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial_x} - \frac{\partial A_x}{\partial_y}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

প্রশ্ন ৩৪। কার্লের ভৌত তাৎপর্য উল্লেখ কর।

[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা] [সেলু-১৪]

উত্তর : কার্লে এর ভৌত তাৎপর্য :

১. কোন ভেক্টরের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি।

২. কোন ভেক্টর রাশির কার্ল শূন্য হলে উক্ত ভেক্টরকে অঘূর্ণনশীল ভেক্টর বলা হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হলে $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল হবে।

৩. কোনো ঘূর্ণনশীল বস্তুর রৈখিক বেগের কার্ল বস্তুটির কোণিক বেগের দ্বিগুণ অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{w}$।

৪. বল অথবা ভেক্টর ক্ষেত্র (vector field) $\vec{F}$ এর কার্ল অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে, বল বা ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{F}$ সংরক্ষণশীল হবে। আর $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ হলে $\vec{F}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটিকে ঘূর্ণনশীল বা অসংরক্ষণশীল বা Vortex ক্ষেত্র বলে।

প্রশ্ন ৩৫। নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে নৌকার গতি কীভাবে বৃদ্ধি করা যায়? ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৩১, প্রামাণিক-৪৬]

উত্তর : আমরা জানি, নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশের জন্য নৌকা গতি প্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ প্রযুক্ত বল F এবং কোণ θ হলে, $F\cos\theta$ বলের জন্য নৌকা গতিপ্রাপ্ত হয়। এখন θ এর মান যত কম হবে $F\cos\theta$ এর মান তত বেশি হবে অর্থাৎ রশির দৈর্ঘ্য যত বেশি হবে $F\cos\theta$ এর মান তত বেশি হবে। সুতরাং রশির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করে নৌকার গতি বৃদ্ধি করা যায়।

প্রশ্ন ৩৬। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে— ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৩৫, আমির-৫০]

উত্তর : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ। তাহলে তাদের স্কেলার গুণন বা ডট গুণন নিয়মানুসারে,

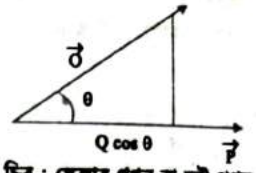
$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$ ... ... (১)

এবং $\vec{Q}.\vec{P} = PQ\cos(-\theta) = PQ\cos\theta$.

$\vec{Q}.\vec{P} = PQ\cos\theta$ ..... (২)

(১) নং এবং (২) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

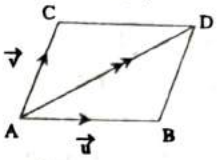
অর্থাৎ, স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে।



চিত্র : স্কেলার গুণন বা ডট গুণন

প্রশ্ন ৩৭। স্রোতের নদীতে নৌকা সোজাসুজি রওনা করেও নদীর সোজা অপর পারে পৌঁছাতে পারে না কেন—ব্যাখ্যা কর। [প্রামাণিক-২৬]

উত্তর : চিত্রে স্রোতের বেগ $\vec{u}$ এবং নৌকার বেগ $\vec{v}$ হলে সামান্তরিকের কর্ণ AD বেগদ্বয়ের লব্ধি নির্দেশ করবে। এজন্যই নৌকাকে AC বরাবর চালালে তা AD বরাবর চলবে। অর্থাৎ স্রোতের নদীতে নৌকা সোজাসুজি পাড়ি দিতে চাইলে তা সোজাসুজি পাড়ি দেওয়া যায় না।



প্রশ্ন ৩৮। দুটি ভেক্টর রাশির যোগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৩০, আমির-৪]

উত্তর : ভেক্টর রাশির যোগের সাধারণ নিয়মটি হলো— দুটি ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে একটি ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে অপর ভেক্টরের পাদবিন্দু স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে সরলরেখা পাওয়া যায় তার দৈর্ঘ্য ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান নির্দেশ করে। লব্ধি ভেক্টরের দিক প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুর দিকে।

প্রশ্ন ৩৯। $\hat{i} \times \hat{i}$ কেন নাল ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৯]

উত্তর : যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে নাল ভেক্টর বলে। ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞানুসারে, $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{\eta}\,|\hat{i}|\,|\hat{i}|\sin 0°$

[∵ দুটি সমান ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ 0°]

$= \vec{0}$

যেহেতু $\hat{i} \times \hat{i} = \vec{0}$ অতএব, $\hat{i} \times \hat{i}$ নাল ভেক্টর।

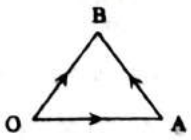
প্রশ্ন ৪০। $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ সম্পর্কটি সম্ভব কী-না, তা ব্যাখ্যা কর।

উত্তর : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ সম্পর্কটি সম্ভব হবে যখন $\vec{B}$ নাল ভেক্টর হবে। কারণ $\vec{B}$ নাল ভেক্টর হবে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + 0 = \vec{A}$ এবং $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} - O = \vec{A}$। অর্থাৎ $\vec{B}$ নাল ভেক্টর হলে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B}$ হবে।

প্রশ্ন ৪১। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি বর্ণনা কর। [সেলু-৪৪, আমির-৫, প্রামাণিক-৩২]

উত্তর : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি হলো— যদি কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে দুটি একই জাতীয় ভেক্টর নির্দেশ করা যায় তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে। যেমন, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এই সূত্রানুসারে,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$



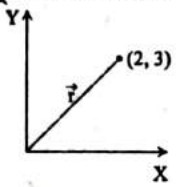
প্রশ্ন ৪২। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি কী কী কাজে ব্যবহার করা যেতে পারে? [সেলু-৪৫, আমির-৬]

উত্তর : ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি হলো— দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়ে ব্যবহার করা যেতে পারে। কারণ সামান্তরিক সূত্রানুসারে, যদি একটি সামান্তরিকের কোনো কোনো কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা যায় তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

প্রশ্ন ৪৩। কাজ ও টর্ক এর মান ও একক সমান হলেও তারা ভিন্ন রাশি ব্যাখ্যা কর। [সেলু-৪৬]

উত্তর : কাজ ও টর্ক এর মান ও একক সমান হলেও তারা ভিন্ন রাশি। কারণ, কাজ একটি স্কেলার রাশি কিন্তু টর্ক ভেক্টর রাশি। আবার কাজের কোনো দিক নেই কিন্তু টর্কের দিক প্রযুক্ত বলের দিকে। আবার কাজ হচ্ছে দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণনের ফল কিন্তু টর্ক হচ্ছে দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণনের ফল। ফলে কাজ ও টর্কের মান ও একক সমান হলেও তারা ভিন্ন রাশি।

প্রশ্ন ৪৪। অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ বলতে কী বুঝায়? [প্রামাণিক-১০]



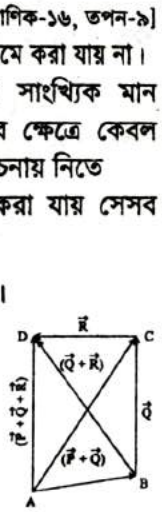
উত্তর : অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ দ্বারা বুঝায়— দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $\vec{r}$ একটি ভেক্টর যার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3) এবং মূলবিন্দু তার পাদবিন্দু। এখানে X ও Y অক্ষ দুটি থেকে $\vec{r}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে 2 ও 3 একক দূরে অবস্থিত। কারণ $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ দ্বারা যথাক্রমে X ও Y অক্ষ বরাবর আয়ত একক ভেক্টরকে বুঝানো হয়েছে।

প্রশ্ন ৪৫। ভেক্টর রাশির যোগ ও বিয়োগ সাধারণ গণিতের নিয়মে করা যায় না কেন? [সেলু-৪৩, আমির-৩, প্রামাণিক-১৬, তপন-৯]

উত্তর : ভেক্টর রাশির যোগ ও বিয়োগ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে করা যায় না।

ব্যাখ্যা : সাধারণ গাণিতিক যোগ-বিয়োগে কেবল সাংখ্যিক মান বিবেচনায় নেওয়া হয়। কিন্তু ভেক্টর যোগ-বিয়োগের ক্ষেত্রে কেবল সাংখ্যিক মান হিসাব করলেই হয় না, এর দিকও বিবেচনায় নিতে হয়। ফলে যেসব প্রক্রিয়ায় সাধারণ যোগ-বিয়োগ করা যায় সেসব প্রক্রিয়া দ্বারা ভেক্টর যোগ-বিয়োগ করা যায় না।

প্রশ্ন ৪৬। ভেক্টর যোগের সংযোজন সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।



উত্তর : তিনটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P}, \vec{Q}$ ও $\vec{R}$ হলে, ভেক্টর যোগের সংযোজন সূত্রানুসারে আমরা লিখতে পারি,

$$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$$

প্রশ্ন ৪৭। লন রোলারকে টানার সময় আপাত ওজন কমে যায় কেন? [সেলু-৪২]

উত্তর : লন রোলার টানার সময় তার আপাত ওজন কমে যায়। টানার সময় উল্লম্ব উপাংশ $F \sin\theta$, যা রোলারের উপরের দিকে ক্রিয়াশীল। ফলে রোলারের ওজন কমে যায়।

$\therefore$ রোলারের আপাত ওজন, $W_a' = W - F\sin\theta$

$\therefore$ ঘর্ষণ বল, $F_s' = k(W - F\sin\theta)$ [এখানে, k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক]

সুতরাং টানার সময় ঘর্ষণ বল তুলনামূলকভাবে কম।

প্রশ্ন ৪৮। আয়ত একক ভেক্টরের ক্রস গুণন ব্যাখ্যা কর।

উত্তর : প্রথমে X-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$-এর ক্রস গুণন বিবেচনা করি।

$\hat{i} \times \hat{i} = 1 \times 1 \times \sin 0° \times \hat{n} = 1 \times 1 \times 0 \times \hat{n} = 0$

$\therefore \hat{i} \times \hat{i} = 0$

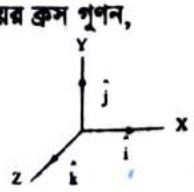
অনুরূপভাবে, $\hat{j} \times \hat{j} = 0$ ও $\hat{k} \times \hat{k} = 0$

এরপর, X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণন,

$\hat{i} \times \hat{j} = 1 \times 1 \times \sin 90° \times \hat{n}$

$= 1 \times 1 \times 1 \times \hat{n}$

$= \hat{n}$ [$\because \hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ পরস্পর লম্ব]



$\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ [এখানে $\hat{n} = \hat{k}$]

একই প্রক্রিয়ায়, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

এবং $\hat{j} \times \hat{i} = -k, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

প্রশ্ন ৪৯। কোন কোন শর্তে দুটি ভেক্টরের গুণফল শূন্য হতে পারে—ব্যাখ্যা কর। [অমৃত লাল দে মহাবিদ্যালয়, বরিশাল]

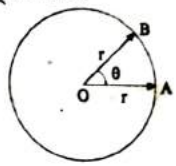
উত্তর : নিম্নলিখিত শর্তগুলোতে দুটি ভেক্টরের গুণফল শূন্য হতে পারে—

i. দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

ii. দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

প্রশ্ন ৫০। ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলতে কী বুঝ? [সেলু-৪১]

উত্তর : একটি কণা বৃত্তপথে ঘুরতে থাকলে, কেন্দ্র ও কণার অবস্থানের সংযোগকারী সরলরেখাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। মনে করি, একটি বস্তু r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তপথে ঘূর্ণায়মান। চিত্রে, কণাটি যখন A অবস্থানে তখন এর ব্যাসার্ধ ভেক্টর হচ্ছে $\overrightarrow{OA}$ এবং B অবস্থানে ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$।



ব্যাসার্ধ ভেক্টরের মান = ব্যাসার্ধ = r।

$\therefore \vec{r} = \overrightarrow{OA}$ বা $\overrightarrow{OB}$

প্রশ্ন ৫১। ডাইভারজেন্স বলতে কী বোঝ?

[অমৃত লাল দে মহাবিদ্যালয়, বরিশাল] [সেলু-২০, প্রামাণিক-৬৮, তপন-৪৫]

উত্তর : $\vec{V}(x, y, z)$ দ্বারা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দিষ্ট হলে এবং একে ক্ষেত্রের প্রত্যেক বিন্দুতে ব্যবকলন করা সম্ভব হলে ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণন $\nabla.\vec{V}$ কে $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স বলে।

$$\therefore \text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z\right)$$

$$= \hat{i}.\hat{i}\frac{\partial V_x}{\partial x} + \hat{i}.\hat{j}\frac{\partial V_y}{\partial x} + \hat{i}.\hat{k}\frac{\partial V_z}{\partial x} + \hat{j}.\hat{i}\frac{\partial V_x}{\partial y} + \hat{j}.\hat{j}\frac{\partial V_y}{\partial y} + \hat{j}.\hat{k}\frac{\partial V_z}{\partial y} + \hat{k}.\hat{i}\frac{\partial V_x}{\partial z} + \hat{k}.\hat{j}\frac{\partial V_y}{\partial z} + \hat{k}.\hat{k}\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

[$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ এবং $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = 0$]

$\vec{\nabla}.\vec{V}$ একটি স্কেলার রাশি। প্রবাহী বলবিদ্যায় ডাইভারজেন্স এর ভূমিকা লক্ষ করা যায়।

প্রশ্ন ৫২। দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান— ব্যাখ্যা কর। [সেলু-২৬, প্রামাণিক-১৭]

উত্তর : মনে করি, দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল।

তাদের লব্ধি $\vec{R}$ হলে সামান্তরিকের সূত্রানুযায়ী,

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)}$$

উপর্যুক্ত সমীকরণে R এর মান সর্বোচ্চ হবে, যখন $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ $\cos\alpha = 1 = \cos 0°$.

$$\therefore \text{লব্ধির সর্বোচ্চ মান, } R_{max} = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°)}$$
$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ.1)}$$
$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ)}$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2} = P + Q$$

অতএব, দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান।

প্রশ্ন ৫৩। সকল সমরেখ ভেক্টর সমান ভেক্টর নয়—ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. '১৯]

উত্তর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই রেখা বরাবর বা সমান্তরালে ক্রিয়া করলে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। সমরেখ ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে এটি স্পষ্ট যে, কেবল দিক এক হলেই দুটি ভেক্টর সমরেখ হয়। কিন্তু আমরা জানি, দুটি ভেক্টর সমান হতে হলে তাদের মান ও দিক সমান এবং তাদেরকে সমজাতীয় হতে হয়। অতএব, সকল সমরেখ ভেক্টর সমান ভেক্টর নয়।