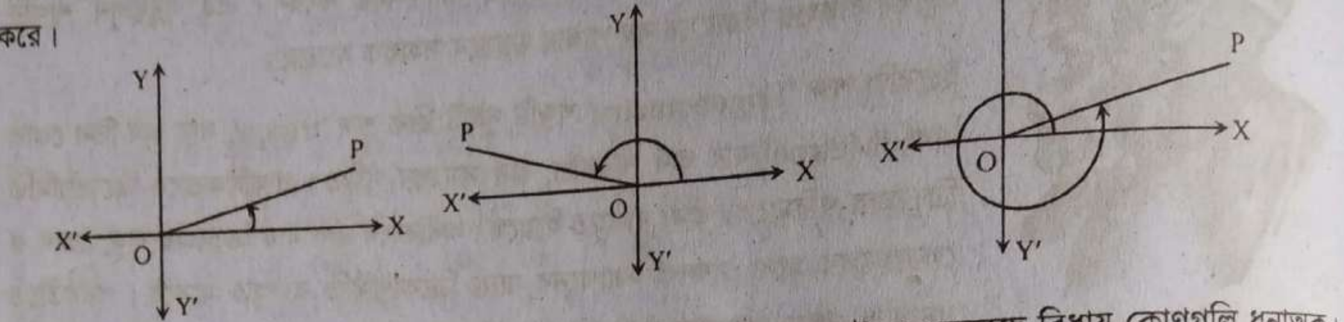
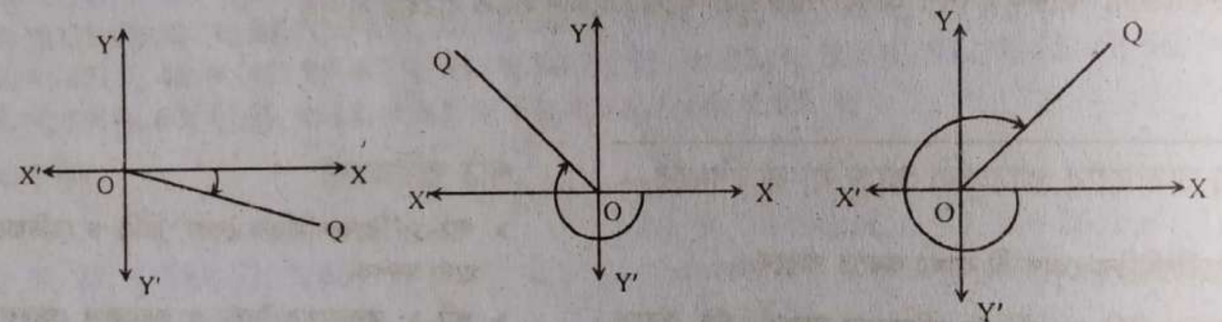
পাঠ-১

6.1 ত্রিকোণমিতিক কোণ (Trigonometric angle)

জ্যামিতিতে কোণের ধারণা সীমাবদ্ধ। অর্থাৎ জ্যামিতিক ধারণায় কোণ সর্বদাই ধনাত্মক এবং এর মান $0°$ হতে $360°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে একটি রশ্মি অবিরাম ঘূর্ণনের ফলে যেকোনো মানের কোণ উৎপন্ন করতে পারে। রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে ধনাত্মক কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করে।

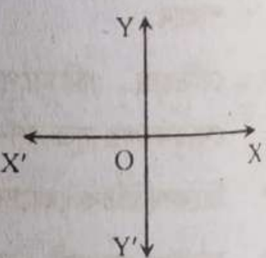


উপরের চিত্রগুলিতে OP রেখা ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করেছে বিধায় কোণগুলি ধনাত্মক। আবার, নিম্নলিখিত চিত্রগুলিতে OQ রেখা ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করেছে বিধায় কোণগুলি ঋণাত্মক।



চতুর্ভাগ বা কোয়াড্রেন্ট (Quadrant)

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী লম্ব সরলরেখা একটি সমতলকে চারটি অংশে ভাগ করে। এক-একটি ভাগকে চতুর্ভাগ বা কোয়াড্রেন্ট বলে। চিত্রে XOY চতুর্ভাগটি ১ম, YOX′ চতুর্ভাগটি ২য়, X′OY′ চতুর্ভাগটি ৩য় এবং Y′OX চতুর্ভাগটি ৪র্থ চতুর্ভাগ হিসাবে পরিচিত।



কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ (Degree and Radian Measure of angle):

ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের জন্য ষাটমূলক, শতমূলক এবং বৃত্তীয় এ তিন প্রকার একক ব্যবহার করা হয়। শতমূলক এককের প্রচলন না থাকায় এখানে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় একক নিয়ে আলোচনা করা হলো।

ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System) **:** দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করলে যে সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়, তাদের প্রত্যেককে সমকোণ বলে। সমকোণকে 90টি সমান ভাগে ভাগ করলে প্রত্যেক ভাগকে 1 ডিগ্রি বলে। আবার 1 ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগে ভাগ করলে প্রত্যেক ভাগকে 1 মিনিট এবং 1 মিনিটকে সমান 60 ভাগে ভাগ করলে প্রত্যেক ভাগকে 1 সেকেন্ড বলে। অর্থাৎ, 1 সমকোণ $= 90°$, $1° = 60'$ এবং $1' = 60''$

দ্রষ্টব্য: '°' ডিগ্রির চিহ্ন, '′' মিনিটের চিহ্ন এবং '″' সেকেন্ডের চিহ্ন।

প্রত্যেক ক্ষেত্রে সমান 60 ভাগে ভাগ করার কারণে এটি ষাটমূলক একক নামে পরিচিত।

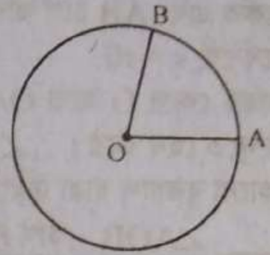
Scanned with CamScanner

বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System) : কোণ পরিমাপে বৃত্তীয় একক রেডিয়ান। কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে ব্যাসার্ধের সমান চাপ যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে এক রেডিয়ান বলে। একে 1^c দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রেডিয়ানের পরিমাণ বৃত্তের ওপর নির্ভর করে না। এটি একটি স্থির কোণ।

রেডিয়ান একটি ধ্রুব বা স্থির কোণ (Radian is a constant angle)

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং ব্যাসার্ধের সমান চাপ AB। সুতরাং $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান।

আমরা জানি, বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে ধারণকৃত কোণ বৃত্ত চাপটির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।



সুতরাং, $\dfrac{\angle AOB}{\text{চাপ } AB} = \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{\text{পরিধি}}$

$\Rightarrow \dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{2\pi r}$

$\Rightarrow 1$ রেডিয়ান $= \dfrac{4 \times r}{2\pi r} = \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ।

যেহেতু π একটি স্থির রাশি, কাজেই রেডিয়ান একটি ধ্রুব বা স্থির কোণ।

দ্রষ্টব্য: আমরা জানি, বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত নিত্য ধ্রুবক। এ ধ্রুবকই হচ্ছে π (গ্রিক অক্ষর), কেননা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ এবং ব্যাস $= 2r$। সুতরাং ধ্রুবক $\dfrac{2\pi r}{2r} = \pi$, এই ধ্রুবক একটি অমূলদ সংখ্যা। $\dfrac{22}{7}$ মূলদ সংখ্যা হওয়া সত্ত্বেও দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মিল থাকায় কখনও কখনও বিশেষ সুবিধার্থে $\pi = \dfrac{22}{7}$ ধরা হয়।

6.2 ডিগ্রি ও রেডিয়ানের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between degree and radian)

1 রেডিয়ান $= \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ $\Rightarrow \pi$ রেডিয়ান $= 2$ সমকোণ $\Rightarrow 1$ রেডিয়ান $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$ আবার, $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান।

বি.দ্র : ডিগ্রি $= D$ এবং রেডিয়ান $= R$ হলে, $\dfrac{D}{180} = \dfrac{R}{\pi}$.

উদাহরণ: (i) $50^\circ 37' 30''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। (ii) $\dfrac{7\pi}{20}$ রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: (i) $30'' = \dfrac{30'}{60} = \dfrac{1'}{2}$

$37'30'' = 37\dfrac{1'}{2} = \dfrac{75'}{2} = \dfrac{75^\circ}{2 \times 60} = \dfrac{5^\circ}{8}$

$50^\circ 37' 30'' = 50\dfrac{5^\circ}{8} = \dfrac{405^\circ}{8} = \dfrac{405}{8 \times 90}$ সমকোণ $= \dfrac{9}{16}$ সমকোণ $= \dfrac{9}{16} \times \dfrac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $= \dfrac{9\pi}{32}$ রেডিয়ান

(ii) $\dfrac{7\pi}{20}$ রেডিয়ান $= \dfrac{7\pi}{20} \times \dfrac{180}{\pi}$ ডিগ্রি $= 63^\circ$

কাজ: 1. $45^\circ 25' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

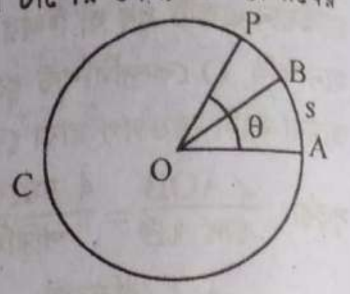
2. $\dfrac{7\pi}{15}$ রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

3. একটি কোণের পরিমাণ ডিগ্রি ও রেডিয়ানে যথাক্রমে a, b হলে দেখাও যে, $\dfrac{a}{90} = \dfrac{2b}{\pi}$

Scanned with CamScanner

পাঠ-২

6.3 বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল (Arc length and area of a sector)



উপপাদ্য: রেডিয়ান এককে কোণের পরিমাণ কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে উক্ত কোণ উৎপন্নকারী চাপের দৈর্ঘ্য ও ব্যাসার্ধের অনুপাতের সমান।

মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA = r একক এবং চাপ AB = s একক এবং AB চাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান। প্রমাণ করতে হবে যে, $s = r\theta$.

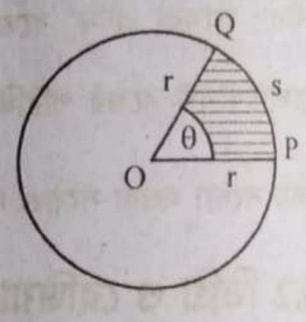
বৃত্তের কেন্দ্র O হতে OA সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AP বৃত্তচাপ আঁকি যেন পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore \angle AOP = 1$ রেডিয়ান।

কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

সুতরাং $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOP} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP}$

বা, $\dfrac{\theta}{1} = \dfrac{s}{r}$ বা, $\theta = \dfrac{s}{r}$ $\therefore s = r\theta$

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল (Area of a sector):



চিত্রে POQ বৃত্তকলা এবং $\angle POQ = \theta$ রেডিয়ান।

$\therefore \dfrac{\text{বৃত্তকলা } POQ \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\angle POQ \text{ এর পরিমাপ}}{2\pi}$

বা, $\dfrac{A}{\pi r^2} = \dfrac{\theta}{2\pi}$ [POQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = A]

$\therefore A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

আবার, $A = \dfrac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$ [যখন θ এর একক ডিগ্রিতে] [এ সম্পর্কে মাধ্যমিক গণিত বইয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।]

উদাহরণ: একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি. এবং এর একটি চাপ কেন্দ্রে 40° কোণ উৎপন্ন করলে, চাপের দৈর্ঘ্য এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব: বো: ১৬]

সমাধান: বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 5 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 40^\circ = 40 \times \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \dfrac{2\pi}{9}$ রেডিয়ান

আমরা জানি, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $s = r\theta = 5 \times \dfrac{2\pi}{9}$ সে.মি. $= \dfrac{10 \times 3.1416}{9}$ সে.মি. = 3.491 সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য = 3.491 সে.মি. (প্রায়)

আবার, আমরা জানি, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}r^2\theta$ [রেডিয়ান এককে]

$= \dfrac{1}{2} \times 5^2 \times \dfrac{2\pi}{9}$ বর্গ সে.মি.

$= \dfrac{25\pi}{9}$ বর্গ সে.মি.

$= \dfrac{25 \times 3.1416}{9}$ বর্গ সে.মি.

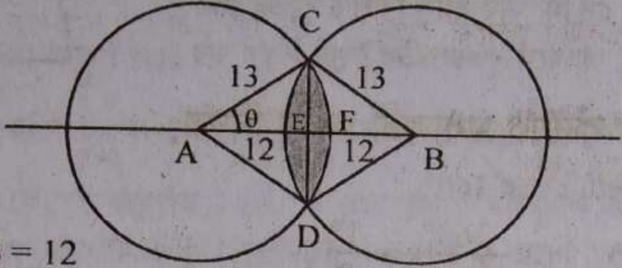
= 8.727 বর্গ সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 8.727 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

Scanned with CamScanner

উদাহরণ: চিত্রে, 13 সে.মি. ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করেছে। তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 24 সে.মি.। সাধারণ অংশের পরিধি ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



ΔCAE-এ $AE = \frac{1}{2} AB = 12$

$\cos\theta = \frac{AE}{AC} = \frac{12}{13}$ বা, $\theta = 0.3948$ রেডিয়ান

সাধারণ অংশের পরিধি $= 2 \times$ চাপ CD

$= 2 \times 13 \times \angle CAD$

$= 2 \times 13 \times 2\theta$

$= 2 \times 13 \times 2 \times 0.3948$

$= 20.5$ সে.মি.

সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ CDF অংশের ক্ষেত্রফল

$= 2$ (ACD বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $- \Delta ACD$-এর ক্ষেত্রফল)

$$= 2\left[\frac{1}{2} \times AC^2 \times \angle CAD - \frac{1}{2} \times AD \times AC \times \sin\angle CAD\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} \times 13^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times 13^2 \times \sin 2\theta\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} \times 13^2 \times 2 \times 0.3948 - \frac{1}{2} \times 13^2 \times \sin(2 \times 0.3948)\right]$$

$= 2\,[66.7212 - 60.0011]$

$= 13.44$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

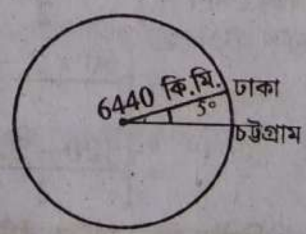
উদাহরণ: পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। ঢাকা ও চট্টগ্রাম পৃথিবীর কেন্দ্রে 5° কোণ উৎপন্ন করে। ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 5°$

$= 5 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{\pi}{36}$ রেডিয়ান



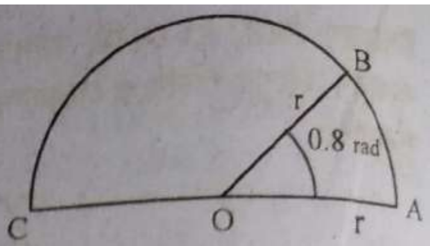
$\therefore$ ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব, $s = r\theta = 6440 \times \frac{\pi}{36}$ কি.মি.

$= \frac{6440 \times 3.1416}{36}$ কি.মি.

$= \frac{20231.904}{36}$ কি.মি.

$= 561.9973$ কি. মি. $= 562$ কি.মি. (প্রায়)

কাজ: 1. চিত্রে OABC একটি অর্ধবৃত্ত। AB চাপের দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি.।
(ক) ব্যাসার্ধ r নির্ণয় কর। (খ) BC চাপের দৈর্ঘ্য কত?
2. যদি একটি বৃত্তচাপ 35 সে.মি. দীর্ঘ ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে $40°$ কোণ উৎপন্ন করে, তা হলে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



6.4 ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়:

ঘণ্টার কাঁটা 12 ঘণ্টা বা 12×60 মিনিটে ঘোরে $360°$

$\therefore$ 1 " " $\dfrac{360°}{12 \times 60} = \dfrac{1°}{2}$

মিনিটের কাঁটা 60 মিনিটে ঘোরে $360°$

" " 1 " " $\dfrac{360°}{60} = 6°$

" " M " " $6M°$

$\therefore$ H ঘণ্টা M মিনিট = $(60H + M)$ মিনিট

ঘণ্টার কাঁটা 1 মিনিটে ঘোরে $\dfrac{1°}{2}$

" " $(60H + M)$ " " $\dfrac{1}{2}(60H + M)°$

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটে কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $= \left|\dfrac{(60H + M)°}{2} - 6M°\right|$

$$= \left|\frac{60H - 11M}{2}\right|°$$

যদি $\left|\dfrac{60H - 11M}{2}\right|° > 180°$ হয়,

তবে ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $= 360° - \left|\dfrac{60H - 11M}{2}\right|°$

উদাহরণ: 2টা 20 মিনিটের সময় ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত?

সমাধান: নির্ণেয় মধ্যবর্তী কোণ $= \left|\dfrac{60H - 11M}{2}\right|°$

$$= \left|\frac{60 \times 2 - 11 \times 20}{2}\right|°$$

$$= \left|\frac{120 - 220}{2}\right|° = |-50|° = 50°$$

উদাহরণ: 10টা 15 মিনিটের সময় ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত?

সমাধান: মধ্যবর্তী কোণ $= \left|\dfrac{60H - 11M}{2}\right|°$

$$= \left|\frac{60 \times 10 - 11 \times 15}{2}\right|°$$

$$= \left|\frac{600 - 165}{2}\right|° = \left|\frac{435}{2}\right|° = 217.5°$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যবর্তী কোণ $= 360° - 217.5° = 142.5°$

Scanned with CamScanner

পাঠ-৩

অনুশীলনী-6(A)

1. রেডিয়ানে বা বৃত্তীয় এককে প্রকাশ কর: (i) $18° 33'45''$ (ii) $73°7'30''$

2. ডিগ্রিতে বা ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর : (i) $\frac{5\pi}{16}$ রেডিয়ান (ii) $\frac{47\pi}{12}$ রেডিয়ান (iii) $\frac{7\pi}{15}$ রেডিয়ান

3. কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3 : 4 : 5$ কোণগুলিকে ষাটমূলক এবং রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

4. (i) একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটি সমান্তর শ্রেণিভুক্ত। ক্ষুদ্রতম ও মধ্যম কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে তাদের অনুপাত $3 : 5$। কোণগুলির মান রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

   (ii) একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণিভুক্ত। এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটিকে যথাক্রমে রেডিয়ান ও ডিগ্রীতে প্রকাশ করলে এদের অনুপাত $\pi : 90°$ কোণগুলির পরিমাপকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৫]

5. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $x°$, $25°$ এবং $\frac{11\pi}{36}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

6. দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটির কোণগুলি গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত। একটি ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণ অপরটির ক্ষুদ্রতম কোণের তিন গুণ এবং তাদের বৃহত্তম কোণ দুইটির সমষ্টি $240°$ বৃত্তীয় এককে কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

7. একটি চতুর্ভুজের দুইটি কোণ $60°$ ও $\frac{3\pi}{4}$ রেডিয়ান। অপর দুইটি কোণের অনুপাত $3 : 8$ হলে, কোণগুলি বৃত্তীয় এককে নির্ণয় কর।

8. $54°$ কোণকে এমন তিনটি অংশে ভাগ কর যেন রেডিয়ানে প্রকাশিত প্রথম ও দ্বিতীয় কোণটির অন্তর $\frac{\pi}{10}$ এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় কোণ দুইটির যোগফল $27°$।

9. (i) 7টা 15 মিনিটের সময় ঘন্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ ষাটমূলক এককে প্রকাশ কর।

   (ii) 11টা 45 মিনিটের সময় ঘন্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ বৃত্তীয় পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

10. একটি গাড়ির চাকা 200 বার আবর্তিত হয়ে 400 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

11. (i) একটি বৃত্তচাপ 30 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য: বো: ১৫]

    (ii) একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $24°$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃহত্তর জ্যা 49 মিটার হয়, তবে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য: বো: ১৫]

    (iii) একটি বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃত্তচাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 13.09 বর্গ সে.মি. হয়, তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

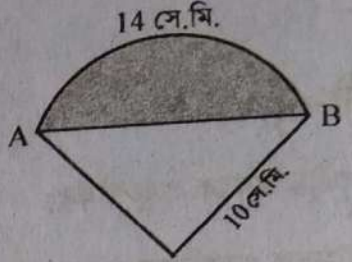
12. এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘন্টায় 5 কি.মি. বেগে পরিভ্রমণ করে 15 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি ঐ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\frac{5\pi}{12}$ কোণ উৎপন্ন করে তবে বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

13. একটি গাড়ি বৃত্তাকার পথে প্রতি সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে $28°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 60 মিটার হয়, তবে গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

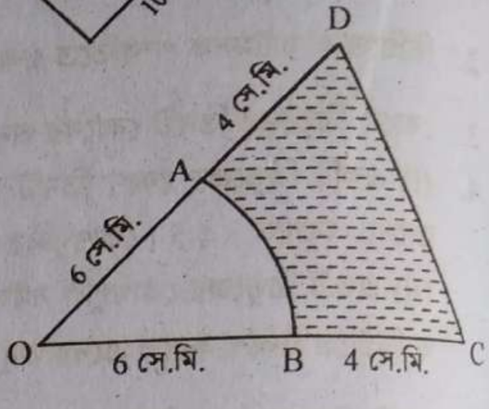
14. 10 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের 14 সে.মি. দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে যে পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। জ্যাটি বৃত্তের যে ক্ষুদ্রতম অংশ কর্তন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Scanned with CamScanner

15. চিত্রে একটি বৃত্তাংশ দেখানো হয়েছে যার কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ 10 সে.মি. এবং AB চাপের দৈর্ঘ্য 14 সে.মি.
(ক) রেডিয়ান এককে কোণ AOB এর মান নির্ণয় কর।
(খ) গাঢ় অংশটুকুর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

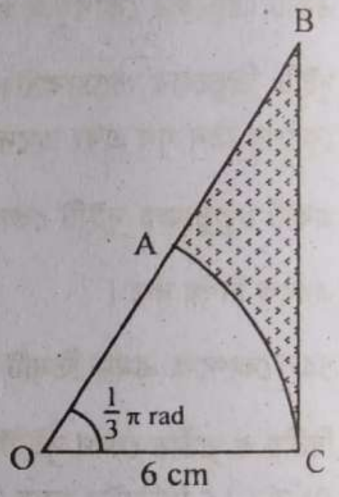


16. (i)



একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের OCD এর OD = OC, OAB একটি বৃত্তকলা এবং $\angle COD = 0.8$ রেডিয়ান হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

(ii)



চিত্রানুসারে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের চাপ AC, BC রেখা OC রেখার ওপর লম্ব এবং OB অতিভুজ।

$\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান। ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{33\pi}{320}$; (ii) $\frac{13\pi}{32}$; 2.(i) $56°15'$ (ii) $705°$ (iii) $84°$;

3. $45°, 60°, 75°, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$

4. (i) $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{15}$; (ii) $\frac{2\pi^C}{9}, \frac{\pi^C}{3}, \frac{4\pi^C}{9}$; 5. $100°$;

6. $\frac{\pi}{21}, \frac{4\pi}{21}, \frac{16\pi}{21}; \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$;

7. $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$;

8. $27°, 9°, 18°$; 9. (i) $127°30'$; (ii) $\frac{11\pi}{24}$; 10. 0.6366 মিটার.;

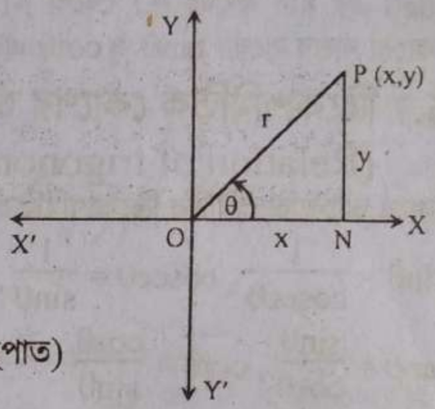
11. (i) 31.42 মিটার, 471.24 বর্গ মিটার; (ii) 10.263 মিটার; 125.716 বর্গ মিটার (iii) 5 সে.মি.
12. 15.915 মিটার; 13. 52.78 কি. মি/ঘণ্টা;
14. 1.55 রেডিয়ান, 27.51 বর্গ সে.মি.
15. (ক) 1.40 রেডিয়ান (খ) 20.73 বর্গ সে.মি. (প্রায়);
16. (i) 21.467 বর্গ সে.মি.; 20.558 সে.মি.; (ii) 12.327 বর্গ সে.মি.;

Scanned with CamScanner

6.5 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric ratio)

মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মির আদি অবস্থান OX এবং রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। P বিন্দু হতে OX এর ওপর PN লম্ব আঁকি। এক্ষেত্রে ΔPON এ OP অতিভুজ, ON ভূমি এবং PN লম্ব।

এখন সমকোণী ΔPON এর বাহুত্রয় দ্বারা নিম্নলিখিত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞায়িত করা যায়–



$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PN}{OP}$ ($\sin\theta$ হচ্ছে θ কোণের sine অনুপাত)

$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{ON}{OP}$ ($\cos\theta$ হচ্ছে θ কোণের cosine অনুপাত)

$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{PN}{ON}$ ($\tan\theta$ হচ্ছে θ কোণের tangent অনুপাত)

$\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{OP}{PN}$ ($\text{cosec}\theta$ হচ্ছে θ কোণের cosecant অনুপাত)

$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{OP}{ON}$ ($\sec\theta$ হচ্ছে θ কোণের secant অনুপাত)

$\cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{ON}{PN}$ ($\cot\theta$ হচ্ছে θ কোণের cotangent অনুপাত)

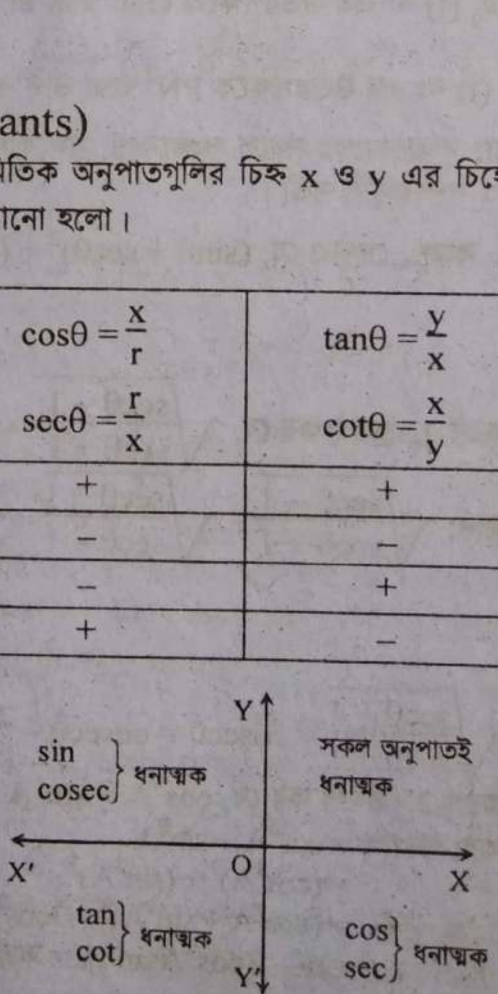
6.6 চতুর্ভাগ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন
(Sign of trigonometric ratios in the Quadrants)

যেহেতু r (ব্যাসার্ধ ভেক্টর) সর্বদা ধনাত্মক, কাজেই θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির চিহ্ন x ও y এর চিহ্নের ওপর নির্ভর করে। চতুর্ভাগ হিসাবে অনুপাতগুলির চিহ্ন ছকের মাধ্যমে দেখানো হলো।

ছক :

চতুর্ভাগ	x	y	r	$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\text{cosec}\theta = \frac{r}{y}$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$
১ম	+	+	+	+	+	+
২য়	–	+	+	+	–	–
৩য়	–	–	+	–	–	+
৪র্থ	+	–	+	–	+	–

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কোণের ওপর নির্ভর করে না। এটি নির্ভর করে ঘূর্ণায়মান সরলরেখার শেষ অবস্থান কোন চতুর্ভাগে তার ওপর। ঘূর্ণায়মান সরলরেখার অবস্থানের ওপর নির্ভর করে পার্শ্বের চিত্রের সাহায্যে সহজেই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করা যায়।



Scanned with CamScanner

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা (Limitation of trigonometric ratios)

6.4 অনুচ্ছেদের চিত্র থেকে প্রমাণ করা যায় যে, P বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্যে $x^2 + y^2 = r^2$
অর্থাৎ x ও y এর মান $-r$ এবং $+r$ এর মধ্যবর্তী। অর্থাৎ $-r \le x \le r, -r \le y \le r$।
সুতরাং $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ এর মান -1 থেকে $+1$ এর মধ্যে থাকবে।
সুতরাং $-1 \le \sin\theta \le 1, -1 \le \cos\theta \le 1$। অর্থাৎ $\text{cosec}\theta \ge 1$ অথবা $\text{cosec}\theta \le -1$, $\sec\theta \ge 1$ অথবা $\sec\theta \le -1$.
সুতরাং আলোচনা থেকে বোঝা যায়, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান সব সময়ই $+1$ থেকে -1 এর মধ্যে হবে। $\text{cosec}\theta$ ও $\sec\theta$ এর মান কখনই $+1$ থেকে -1 এর মধ্যবর্তী হবে না। কিন্তু $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ এর মানের কোনো সীমা নেই, যে কোনো বাস্তব সংখ্যা $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ এর মান হতে পারে।

6.7 ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহের মধ্যে সম্পর্ক (Relation of trigonometric ratios of angle)

উপরে আলোচিত বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত হতে নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায়-

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta},\ \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

আবার, 6.4 অনুচ্ছেদ হতে সমকোণী ΔPON হতে পাই, $OP^2 = PN^2 + ON^2$ ... ... (i)

এখন (i) নং এর উভয়পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $\left(\frac{PN}{OP}\right)^2 + \left(\frac{ON}{OP}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

আবার, (i) নং এর উভয়পক্ষকে ON^2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $\left(\frac{OP}{ON}\right)^2 = \left(\frac{PN}{ON}\right)^2 + 1 \Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

এবং (i) নং এর উভয়পক্ষকে PN^2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $\left(\frac{OP}{PN}\right)^2 = 1 + \left(\frac{ON}{PN}\right)^2 \Rightarrow \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

দ্রষ্টব্য: সূক্ষ্মকোণের স্থলে স্থূলকোণ, সমকোণ, সরলকোণ যাই হোক না কেন, এমনকি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণের জন্যও সম্পর্কগুলি সত্য।

কাজ: দেখাও যে, $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \text{cosec}\theta)^2 = (1 + \sec\theta.\ \text{cosec}\theta)^2$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} - \text{cosec}\theta = \text{cosec}\theta - \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$

সমাধান: $\sqrt{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} + \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}} = \frac{\sec\theta - 1 + \sec\theta + 1}{\sqrt{(\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)}}$

$$= \frac{2\sec\theta}{\sqrt{\tan^2\theta}} = \frac{2\sec\theta}{\tan\theta} = 2\text{cosec}\theta$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} - \text{cosec}\theta = \text{cosec}\theta - \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$$

উদাহরণ-2. প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\cos^6A + \sin^6A = 1 - 3\sin^2A\cos^2A}$.

সমাধান: বামপক্ষ $= \cos^6A + \sin^6A$
$= (\cos^2A)^3 + (\sin^2A)^3$
$= (\cos^2A + \sin^2A)^3 - 3\cos^2A\sin^2A(\cos^2A + \sin^2A)$
$= 1 - 3\cos^2A\sin^2A =$ ডানপক্ষ

Scanned with CamScanner

অনুশীলনী-6(B)

1. নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রমাণ কর:

(i) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

(iii) $\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$

(iv) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A - \cot A} - \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin A} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}A + \cot A}$

(v) $\sin^2A(1+\cot^2A) + \cos^2A(1+\tan^2A) = 2$

2. $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ হলে $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. যদি $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4. যদি $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ [কু: বো: ১৫; চ: বো: ১৬, ১৫]

5. যদি $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ হয় তবে $\dfrac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. যদি $a\cos^2x + b\sin^2x = c$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan x = \pm\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}$ [ব: বো: ১৫]

7. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} - \sec\theta = \sec\theta - \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$ যেখানে $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

8. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \pm(\sec\theta - \tan\theta)$

9. যদি $\tan\theta + \sec\theta = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin\theta = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ [রা: বো: ১৫]

10. $(a^2-b^2)\sin\theta + 2ab\cos\theta = a^2+b^2$ হলে $\tan\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

11. যদি $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

12. যদি $\cos\alpha + \sec\alpha = \dfrac{5}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha = 2^n + 2^{-n}$ [দি: বো: ১৫; চ: বো: ১৫]

13. যদি $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = 2$

14. যদি $\operatorname{cosec}A + \operatorname{cosec}B + \operatorname{cosec}C = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $(\Sigma\sin A)^2 = \Sigma\sin^2A$ [ঢা: বো: ১৫; দি: বো: ১৬; চ: বো: ১৬; য: বো: ১৬]

15. যদি $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(\Sigma\tan A)^2 = \Sigma\tan^2A$

16. যদি $\tan^2\theta = 1 - e^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sec\theta + \tan^3\theta\operatorname{cosec}\theta = (2-e^2)^{\frac{3}{2}}$ [রা: বো: ১৬, ১৫; দি: বো: ১৬]

17. যদি $\sin^2A + \sin^4A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan^4A - \tan^2A = 1$ [ব: বো: ১৬; য: বো: ১৫]

18. যদি $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ এবং $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$ [সি: বো: ১৬]

উত্তরমালা

2. $\dfrac{7}{25}$ 5. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 10. $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$, $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Scanned with CamScanner

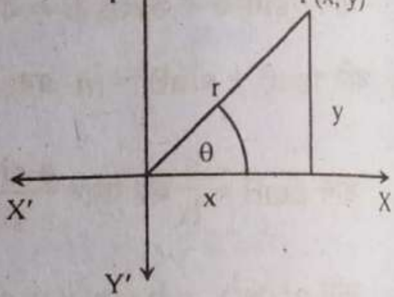
পাঠ-৭ ও ৮

6.8 ত্রিকোণমিতিক বা বৃত্তীয় ফাংশন (Trigonometric or Circular function)

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনসমূহ যেমন : $\cos\theta, \sin\theta, \ldots$ ইত্যাদির কোণ θ কে সাধারণত রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয়। কোণ পরিমাপের বৃত্তীয় একক হচ্ছে রেডিয়ান। এজন্য এ ফাংশনগুলি বৃত্তীয় ফাংশন নামে পরিচিত। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলির মধ্যে $\tan\theta, \cot\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$ ইত্যাদিকে $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। আবার, যেকোনো বৃত্তের সমীকরণকে $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় বিধায় ফাংশনগুলিকে বৃত্তীয় ফাংশন বলা হয় বলেও মনে করা হয়। যেমন : $x^2 + y^2 = 2^2$ বৃত্তকে $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$ দ্বারা, $(x-1)^2 + y^2 = 3^2$ বৃত্তকে $x - 1 = 3\cos\theta \Rightarrow x = 1 + 3\cos\theta, y = 3\sin\theta$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

6.8.1 বৃত্তীয় ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ (Domain and range of circular function)

বৃত্তীয় ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়ের জন্য প্রথমে ফাংশনগুলিকে সংজ্ঞায়িত করা প্রয়োজন। যেকোনো θ কোণের জন্য ঘূর্ণায়মান সরলরেখার শেষ অবস্থানের ওপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু হলে,



$\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \tan\theta = \frac{y}{x}, \sec\theta = \frac{r}{x}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y},$

$\cot\theta = \frac{x}{y}$ (যেখানে $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

এখন, θ কোণের অবস্থান যেকোনো চতুর্ভাগে হতে পারে বিধায় x ও y এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারবে। এমন কী ঘূর্ণায়মান সরলরেখা অক্ষের সাথে মিলিত হলে x অথবা y এর মান শূন্যও হতে পারে।

যেকোনো বাস্তব মান θ এর জন্য $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়, কাজেই ফাংশনদ্বয়ের প্রত্যেকের ডোমেন $= \mathbb{R}$.

যখন x ও y উভয়েই ধনাত্মক, তখন $\frac{x}{r} < 1$ এবং $\frac{y}{r} < 1$

আবার, x ও y উভয়েই ঋণাত্মক অথবা পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হলে, $\frac{x}{r} > -1$ এবং $\frac{y}{r} > -1$.

সুতরাং $x \neq 0$ এবং $y \neq 0$ হলে, অর্থাৎ কোণ উৎপাদনকারী ঘূর্ণায়মান সরলরেখার অবস্থান যেকোনো চতুর্ভাগে হোক না কেন $-1 < \sin\theta < 1$ এবং $-1 < \cos\theta < 1$.

এখন, $x = 0$ এবং y ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হলে, কোণ উৎপাদনকারী ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদিরেখার সাথে $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। সেক্ষেত্রে, $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, 2\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

আবার, $y = 0$ এবং x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হলে, কোণ উৎপাদনকারী ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদিরেখার সাথে $0, \pi$ বা 2π কোণ উৎপন্ন করে। সেক্ষেত্রে $\sin 0 = 0, \sin\pi = 0, \sin 2\pi = 0, \cos 0 = 1, \cos\pi = -1$ এবং $\cos 2\pi = 1$.

সুতরাং $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ব্যবধির যেকোনো কোণের জন্য $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ এবং $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

অর্থাৎ $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ প্রত্যেক ফাংশনের রেঞ্জ $[-1, 1]$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, কাজেই $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত হয়, যখন $\cos\theta = 0$. অর্থাৎ $\theta = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$.

সুতরাং $\tan\theta$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{\pm(2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\}$

আবার, $\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$, x ও y একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে এবং x কে নির্দিষ্ট রেখে y কে ক্রমাগতভাবে বাড়ালে অর্থাৎ $y \to \infty$ হলে, $\tan\theta \to \infty$, অথবা y কে নির্দিষ্ট রেখে x কে ক্রমাগতভাবে কমালে $\tan\theta \to \infty$ হয়।

Scanned with CamScanner

অপরপক্ষে x ও y বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হলে, অনুরূপভাবে $\tan\theta \to -\infty$ হয়। কাজেই $-\infty < \tan\theta < \infty$, অর্থাৎ $\tan\theta$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R}$.

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$, কাজেই $\tan\theta = 0$ হলে $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত হয়। যখন $\tan\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = \pm(n-1)\pi, n \in \mathbb{N}$,
সুতরাং $\cot\theta$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{\pm(n-1)\pi, n \in \mathbb{N}\}$
আবার, টেনজেন্ট ফাংশন হতে বলা যায় যে, $-\infty < \cot\theta < \infty$, অর্থাৎ $\cot\theta$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, কাজেই $\cos\theta = 0$ হলে $\sec\theta$ অসংজ্ঞায়িত হয়। যখন, $\cos\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = \pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$.

সুতরাং $\sec\theta$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{\pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\}$

এখন x ও y ধনাত্মক হলে, $\dfrac{r}{x} > 1$ এবং x ও y উভয়েই ঋণাত্মক বা পরস্পর বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হলে $\dfrac{r}{x} < -1$.
অর্থাৎ $\sec\theta$ এর মান $(-1, 1)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান নেই। $\therefore$ $\sec\theta$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R} - (-1, 1)$.

$\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, কাজেই $\sin\theta = 0$ হলে $\text{cosec}\theta$ অসংজ্ঞায়িত হয়। যখন $\sin\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = \pm(n-1)\pi, n \in \mathbb{N}$.
সুতরাং $\text{cosec}\theta$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{\pm(n-1)\pi, n \in \mathbb{R}\}$ এবং $\sec\theta$ এর ন্যায় $\text{cosec}\theta$ ফাংশনের রেঞ্জ $= \mathbb{R} - (-1, 1)$.

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\cos\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\tan\theta$	$\mathbb{R} - \{\pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ অথবা, $\mathbb{R} - \{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\cot\theta$	$\mathbb{R} - \{\pm(n-1)\pi : n \in \mathbb{N}\}$ অথবা, $\mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sec\theta$	$\mathbb{R} - \{\pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ অথবা, $\mathbb{R} - \{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1, 1)$
$\text{cosec}\theta$	$\mathbb{R} - \{\pm(n-1)\pi : n \in \mathbb{N}\}$ অথবা, $\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1, 1)$

6.8.2 ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়কাল (Period of trigonometric function)

$f(\theta)$ ফাংশনকে পর্যায়ী বলা হয় যদি $f(\theta + T) = f(\theta)$ হয় এবং T এর সর্বনিম্ন যে মানের জন্য সম্পর্কটি সত্য হয় তাকে ফাংশনটির পর্যায়কাল বলে।

$\cos\theta$ ও $\sin\theta$ ফাংশনদ্বয় পর্যায়ী এবং এদের পর্যায়কাল 2π. কেননা, $\sin\theta = \sin(2\pi + \theta) = \sin(4\pi + \theta) = \sin(6\pi + \theta) = \dots$ এবং $\cos\theta = \cos(2\pi + \theta) = \cos(4\pi + \theta) = \cos(6\pi + \theta) = \dots$ অনুরূপভাবে, $\sec\theta$ ও $\text{cosec}\theta$ ফাংশনদ্বয় পর্যায়ী এবং এদের পর্যায়কাল 2π। $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ ফাংশনদ্বয় পর্যায়ী এবং তাদের পর্যায়কাল π। কেননা, $\tan\theta = \tan(\pi + \theta) = \tan(2\pi + \theta) = \tan(3\pi + \theta) = \dots$ এবং $\cot\theta = \cot(\pi + \theta) = \cot(2\pi + \theta) = \cot(3\pi + \theta) = \dots$

কোনো পর্যায়ী ফাংশনের পর্যায়কে θ এর সহগ দ্বারা ভাগ করলে পর্যায় পাওয়া যায়। যেমন $y = A\sin(B\theta + C)$ এর পর্যায়ী $\dfrac{2\pi}{|B|}$ [$\because$ sine এর পর্যায় 2π]

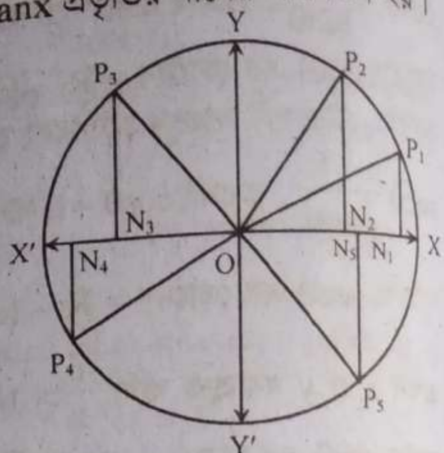
$\sin^n(B\theta + C)$, $\cos^n(B\theta + C)$, $\text{cosec}^n(B\theta + C)$, $\sec^n(B\theta + C)$ এর পর্যায় $\dfrac{2\pi}{|B|}$ যখন n বিজোড়;
$\dfrac{\pi}{|B|}$ যখন n জোড়। $\tan^n(Bx + C)$, $\cot^n(Bx + C)$ এর পর্যায় $= \dfrac{\pi}{|B|}$

কাজ: পর্যায় নির্ণয় কর: (ক) $4\tan 4\theta$ (খ) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (গ) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (ঘ) $\sin\left(-3\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

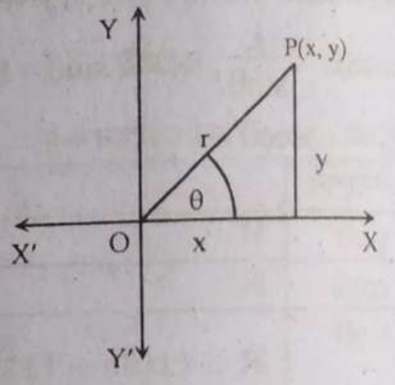
Scanned with CamScanner

6.8.3 ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন (Change of the values of trigonometric function)

কোণের মানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত sinx, cosx, tanx প্রভৃতির মানের পরিবর্তন হয়। মনে করি, O বিন্দুকে কেন্দ্র করে যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা হয়েছে এবং বৃত্তের XOX′ ও YOY′ ব্যাস দুইটি O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করেছে। আদি অবস্থান OX হতে একটি রেখাংশ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে ক্রমশ 0° হতে শুরু করে 360° পরিমাণ কোণে ঘুরে আসলে তা পুনরায় আদি বা পূর্বাবস্থানে ফিরে। রেখাংশের এই আবর্তনের বিভিন্ন অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানও ভিন্ন ভিন্ন হয়।



(a) **sine অনুপাতের পরিবর্তন:** চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \frac{y}{r}$



উপরি-উক্ত চিত্রে প্রথম চতুর্ভাগে $N_1OP_1 = \theta = 0^\circ$ হলে, $y = 0$ হয় এবং 0° কোণের সাইন অনুপাত শূন্য হয়। $\theta = 90^\circ$ হলে, $y = r$ হয়, ফলে $\sin\theta = 1$ হয়। সুতরাং, এর মান যখন 0° থেকে ক্রমাগত বৃদ্ধি পেয়ে 90° হয়, তখন $\sin\theta$ এর মান 0 থেকে ক্রমাগত বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয়। দ্বিতীয় চতুর্ভাগে θ যতই বৃদ্ধি পায় y ততই ক্রমাগত হ্রাস পায় এবং $\theta = 180^\circ$ হলে, $y = 0$ হয়। সুতরাং $y = 0$, $\sin 180^\circ = 0$ হয়। তৃতীয় চতুর্ভাগে y ঋণাত্মক এবং θ-এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y-এর পরিমাণ ক্রমাগত বৃদ্ধি পায় ফলে $\frac{-y}{r}$ ক্রমাগত হ্রাস পায় এবং $\theta = 270^\circ$ হলে $y = -r$ হয় এবং $\sin 270^\circ = -1$ হয়। চতুর্থ চতুর্ভাগে θ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে y ঋণাত্মক হতে থাকে এবং y এর পরমমান ক্রমাগত হ্রাস পায়, ফলে $\frac{-y}{r}$ এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেয়ে $\theta = 360^\circ$ হলে, $y = 0$ হয় এবং $\sin 360^\circ = 0$ হয়। উপরি-উক্ত আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, θ এর মান 0° থেকে 360° পর্যন্ত পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে $\sin\theta$ এর মান শূন্য থেকে বৃদ্ধি পেয়ে +1 হয়। আবার হ্রাস পেয়ে শূন্য হয় এবং আরও হ্রাস পেয়ে −1 হয় এবং এরপর আবার বৃদ্ধি পেয়ে শূন্য হয়। অর্থাৎ $\sin\theta$ এর মান −1 থেকে +1 পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যা হতে পারে।

(b) **cosine অনুপাতের পরিবর্তন:** উপরি-উক্ত পদ্ধতিতে অগ্রসর হলে দেখা যায় $\cos 0^\circ = 1$ এবং প্রথম চতুর্ভাগে θ এর মান যখন 0° থেকে ক্রমাগত বৃদ্ধি পেয়ে 90° হয় তখন $\cos\theta$ এর মান 1 থেকে হ্রাস পেয়ে শূন্য হয়। অতঃপর দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্ভাগে $\cos\theta$ ঋণাত্মক এবং এর মান পর্যায়ক্রমে কমে −1 ও বেড়ে শূন্য হয়ে যায় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে $\cos\theta$ ধনাত্মক এবং বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বাবস্থায় ফিরে আসে অর্থাৎ $\cos 360^\circ = 1$ হয়।

(c) **tan অনুপাতের পরিবর্তন:** $\theta = 0^\circ$ হলে $\tan\theta$ এর মান শূন্য হয় এবং $\theta < 90^\circ$ অবস্থান হতে θ এর মান 0° হতে যতই বৃদ্ধি পেয়ে 90° দিক অগ্রসর হয় অথবা $\theta > 90^\circ$ অবস্থান হতে ততই হ্রাস পেয়ে 90° কোণের দিকে অগ্রসর হয় $\tan\theta$ এর মান ততই সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পায়। $\theta = 90^\circ$ হলে $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত হয়। n এর সকল মানের জন্য $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হলে $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

দ্রষ্টব্য: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি পর্যায়বৃত্ত ফাংশন। $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\text{cosec}\theta$ এবং $\sec\theta$ এর পর্যায় 2π বা 360°। সুতরাং এদের মানের পরিবর্তন 360° পরপর একইভাবে পরিবর্তিত হবে। আবার $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ এর পর্যায় π বা 180°। সুতরাং এদের পরিবর্তনও 180° পরপর একই রকম হবে।

Scanned with CamScanner

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	$0° \le \theta \le 90°$	$90° < \theta \le 180°$	$180° < \theta \le 270°$	$270° < \theta \le 360°$
$\sin\theta$	$[0, 1]$	1 থেকে কমে শূন্য (0) হয়।	0 থেকে কমে -1 হয়।	$(-1, 0]$
$\cos\theta$	1 থেকে কমে শূন্য (0) হয়।	0 থেকে কমে -1 হয়।	$(-1, 0]$	$(0, 1]$
$\tan\theta$	$[0, \infty)$	$(-\infty, 0]$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0]$
$\operatorname{cosec}\theta$	∞ থেকে কমে 1 হয়।	$(1, \infty)$	$(-\infty, -1]$	-1 থেকে কমে $-\infty$ হয়।
$\sec\theta$	$[1, \infty]$	$(-\infty, -1]$	-1 থেকে কমে $-\infty$ হয়।	∞ থেকে কমে 1 হয়।
$\cot\theta$	∞ থেকে কমে শূন্য হয়।	0 থেকে কমে $-\infty$ হয়।	∞ থেকে কমে শূন্য (0) হয়।	0 থেকে কমে $-\infty$ হয়।

θ এর মান $90°$ অতিক্রম করার সময় $\tan\theta$ এর মান $+\infty$ থেকে $-\infty$ হয়।
θ এর মান $270°$ অতিক্রম করার সময় $\tan\theta$ এর $+\infty$ থেকে $-\infty$ হয়।
θ এর মান $180°$ অতিক্রম করার সময় $\cot\theta$ এর মান $-\infty$ থেকে ∞ হয়।
θ এর মান $360°$ অতিক্রম করার সময় $\cot\theta$ এর মান $-\infty$ থেকে পরিবর্তন হয়ে $+\infty$ হয়।

পাঠ-৯, ১০ ও ১১

6.9 ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র (Graph of Trigonometric function)

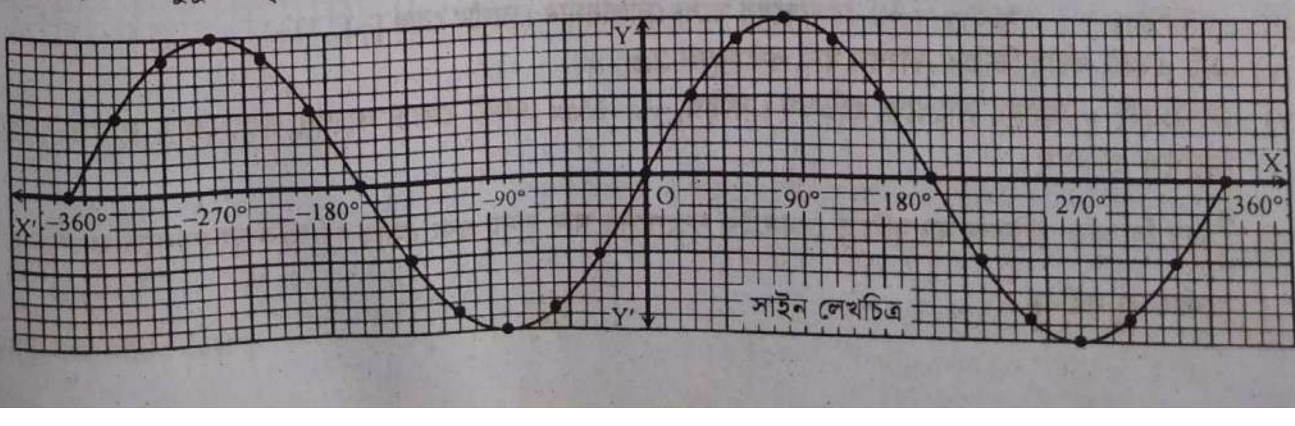
বৃত্তীয় ফাংশন তথা ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য বীজগণিতীয় ফাংশনের মতো দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী অনুভূমিক রেখা XOX' কে x-অক্ষ এবং উলম্ব YOY' রেখাকে y-অক্ষ বিবেচনা করা হয়। x-অক্ষ বরাবর একটি নির্দিষ্ট স্কেলে কোণগুলিকে এবং একই স্কেলে অথবা পৃথক কোনো স্কেলে y-অক্ষ বরাবর বৃত্তীয় ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানগুলি উপস্থাপন করা হয়। এভাবে প্রতিটি কোণ এবং এদের সংশ্লিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাত হতে আমরা ছক কাগজে এক একটি বিন্দু পাই। বিন্দুগুলি যোগ করে প্রদত্ত বৃত্তীয় ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

(a) $y = \sin x, -360° \le x \le 360°$ ফাংশনের লেখচিত্র; [ঢা: বো: ১১; দি: বো: ১৪; চ: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৪]

উল্লেখিত সীমার মধ্যে $30°$ ব্যবধানে $y = \sin x$ এর মান সাইন সারণি বা ক্যালকুলেটরের সাহায্যে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।

x	−360°	−330°	−300°	−270°	−240°	−210°	−180°	−150°	−120°	−90°	−60°	−30°	0°
y = sinx	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0
x	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°	
y = sinx	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	

এখন, ছক কাগজে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব রেখা দ্বারা x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহু $= 10°$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু $= 1$ একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলি মসৃণ বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলেই $y = \sin x$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



সাইন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রের কোথাও ছেদ বা লম্ফ (jump) নাই। অর্থাৎ লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন।

(ii) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ ডোমেন $\mathbb{R}$

(iii) লেখচিত্রটির আকার ঢেউয়ের মতো এবং সর্বোচ্চ মান $+1$ ও সর্বনিম্ন মান -1 এর মধ্যে দোলায়মান। অর্থাৎ রেঞ্জ $[-1, 1]$

(iv) এটি একটি পর্যায় ভিত্তিক ফাংশন যার পর্যায়কাল $360°$ বা 2π

(v) $90°$ এর বিজোড় গুণিতক মানগুলিতে সাইন ফাংশনের মান সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন।

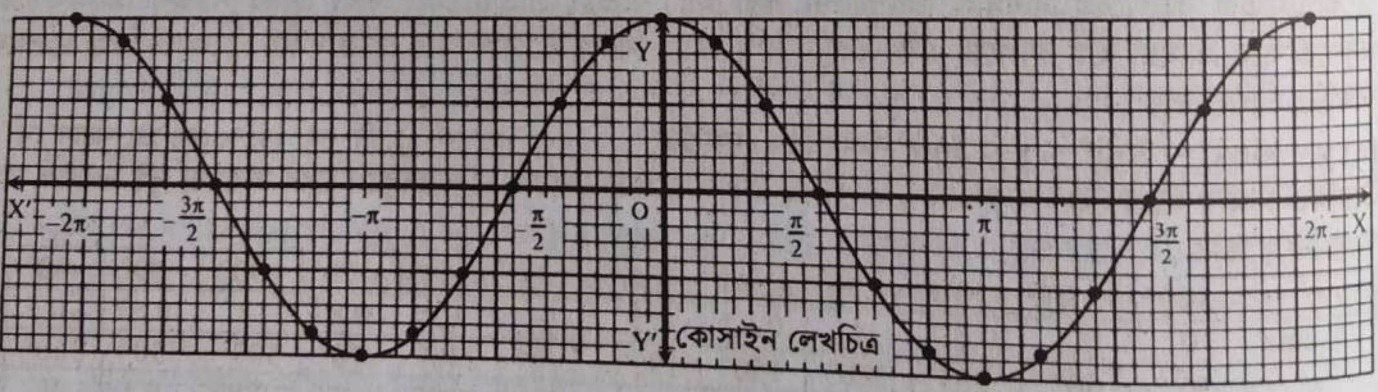
(vi) $90°$ এর জোড় গুণিতক মানগুলিতে সাইন ফাংশনের মান শূন্য।

(b) $y = \cos x, -2\pi \le x \le 2\pi$ ফাংশনের লেখচিত্র: [য: বো: ১৪, ১০, ০৪; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ০৯]

উল্লেখিত সীমার মধ্যে $\frac{\pi}{6}$ ব্যবধানে $y = \cos x$ এর মান কোসাইন সারণি বা ক্যালকুলেটরের সাহায্যে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।

x	$-\frac{12\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{10\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{6}$	$-\frac{8\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{6\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	
y = cosx	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	0.5	0.87	
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{12\pi}{6}$
y = cosx	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	0.5	0.87	1

এখন, ছক কাগজে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব রেখা দ্বারা x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু $= \frac{\pi}{6}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু $= 1$ একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলি মসৃণ বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলেই $y = \cos x$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



কোসাইন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

(i) কোসাইন লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন। অর্থাৎ লেখচিত্রের কোথায়ও কোনো ছেদ বা লম্ফ নেই।

(ii) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ ডোমেন $\mathbb{R}$

(iii) লেখচিত্র $y = -1$ হতে $y = +1$ রেখাদ্বয়ের মধ্যে দোলায়মান। অর্থাৎ রেঞ্জ $[-1, 1]$

(iv) এটি একটি পর্যায় ভিত্তিক ফাংশন যার পর্যায়কাল 2π.

(v) লেখচিত্রটি y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। কারণ, $y = \cos x$ একটি জোড় ফাংশন এবং জোড় ফাংশন y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(vi) $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক মানগুলিতে কোসাইন ফাংশনের মান শূন্য এবং জোড় গুণিতক মানগুলিতে ফাংশনের মান সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন।

(c) $y = \tan x, -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ফাংশনের লেখচিত্র:

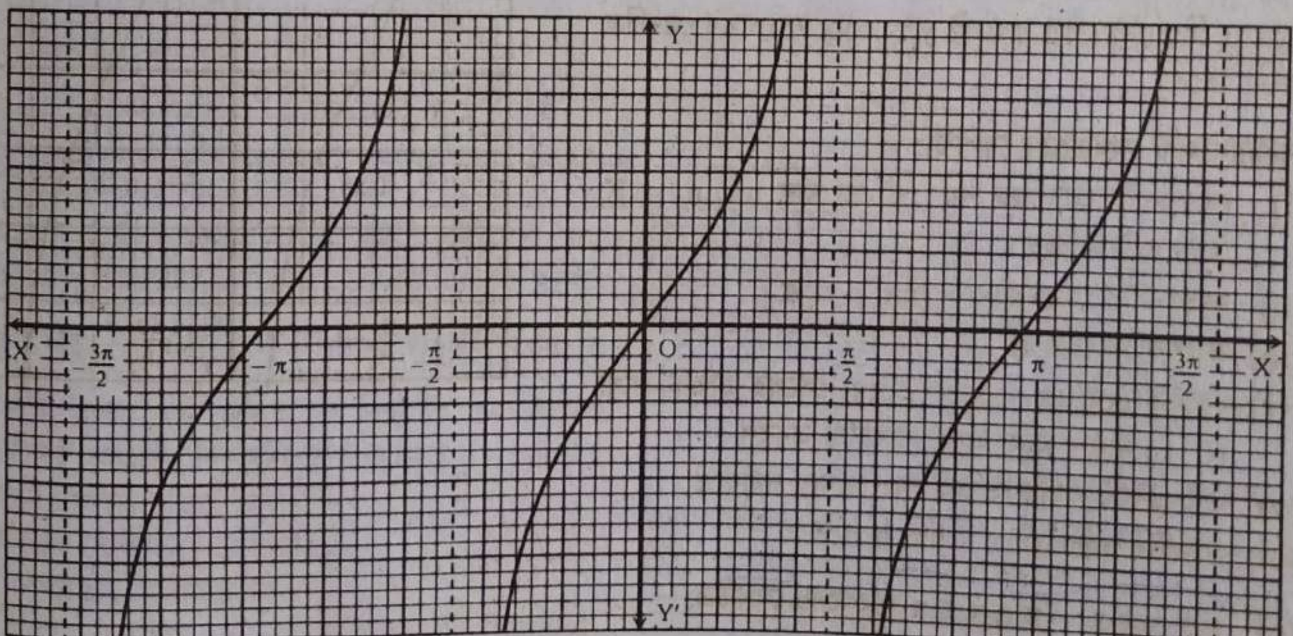
উল্লেখিত ব্যবধির অন্তর্গত $x = -\pi, 0$ ও π বিন্দুতে $y = \tan x$ এর মান শূন্য। আবার, $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$ বিন্দুগুলিতে $\tan x$ এর মান বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় $x \to \frac{\pi^-}{2}$ ($\frac{\pi}{2}$ হতে সামান্য কম) হলে $y \to \infty$, $x \to \frac{\pi^+}{2}$ ($\frac{\pi}{2}$ হতে সামান্য বেশি) হলে $y \to -\infty$ হয়। অনুরূপভাবে $x \to \frac{3\pi^-}{2}$ হলে, $y \to \infty$, $x \to -\frac{\pi^+}{2}$ হলে, $y \to -\infty$, $x \to -\frac{\pi^-}{2}$ হলে, $y \to \infty$ এবং $x \to -\frac{3\pi^+}{2}$ হলে, $y \to -\infty$.

এখন, $-\frac{\pi}{2}$ হতে $\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে লেখচিত্রের অংশ নির্ণয়ের জন্য একটি তালিকা তৈরি করি।

x	$-\frac{12\pi}{24}$	$-\frac{8\pi}{24}$	$-\frac{6\pi}{24}$	$-\frac{4\pi}{24}$	0	$\frac{4\pi}{24}$	$\frac{6\pi}{24}$	$\frac{8\pi}{24}$	$\frac{12\pi}{24}$
$y = \tan x$	$-\infty$	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73	∞

$-\frac{\pi}{2}$ হতে $\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে ফাংশনের লেখচিত্রের অংশ দেখতে যেমন, $\frac{\pi}{2}$ হতে $\frac{3\pi}{2}$ সীমার মধ্যে এবং $-\frac{3\pi}{2}$ হতে $-\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে একই রকম হবে।

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $= \frac{\pi}{24}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



ট্যানজেন্ট লেখচিত্র

ট্যানজেন্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন নয়। x এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক হলে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) ফাংশনটির ডোমেন $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$

(iii) ফাংশনটির রেঞ্জ $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

(iv) যেহেতু $\tan(n\pi + x) = \tan x$, লেখের প্রতিটি শাখা $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ সীমার মধ্যে আঁকা শাখাটির অনুরূপ।

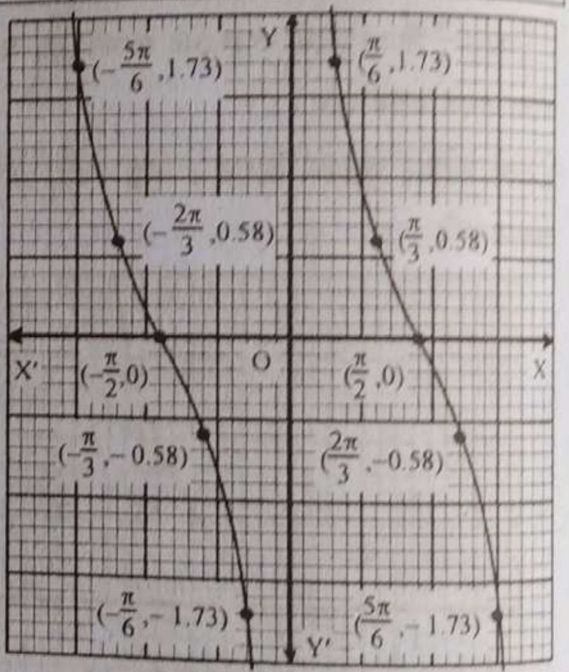
(v) এটি একটি পর্যায় ভিত্তিক ফাংশন যার পর্যায় π

(vi) লেখটির অসীমতট $x = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

(d) $y = \cot x, -\pi < x < \pi$ ফাংশনের লেখচিত্র:

উল্লেখিত সীমার মধ্যে $\frac{\pi}{6}$ ব্যবধানে $y = \cot x$ এর মান ক্যালকুলেটরের সাহায্যে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।

x	$\frac{-6\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{-4\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{6}$	$\frac{-2\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
y = cotx	অসংজ্ঞায়িত	1.73	0.58	0	−0.58	−1.73	অসংজ্ঞায়িত
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	
y = cotx	1.73	0.58	0	−0.58	−1.73	অসংজ্ঞায়িত	



এখন, ছক কাগজে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব রেখা দ্বারা x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু $= \frac{\pi}{6}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলি যোগ করলেই $y = \cot x$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

কোট্যানজেন্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন নয়। x এর মান $n\pi, n \in \mathbb{Z}$ তখন এটি বিচ্ছিন্ন।

(ii) ফাংশনটির ডোমেন $\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

(iii) ফাংশনটির রেঞ্জ $\mathbb{R}$

(iv) যেহেতু $\cot(n\pi + x) = \cot x$, লেখের প্রতিটি শাখা $(0, \pi)$ সীমার মধ্যে আঁকা শাখাটির অনুরূপ।

(v) এটি একটি পর্যায় ভিত্তিক ফাংশন যার পর্যায় π

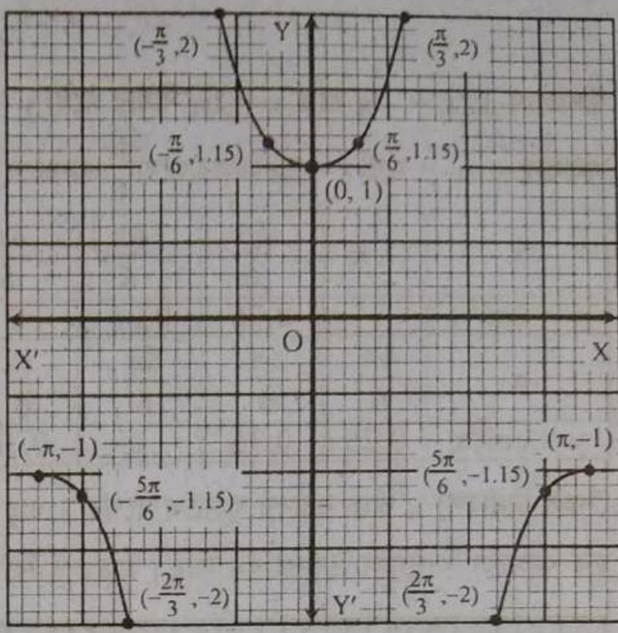
(vi) লেখটির অসীমতট $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

(e) $y = \sec x, -\pi \le x \le \pi$ ফাংশনের লেখচিত্র:

উল্লেখিত সীমার মধ্যে $\frac{\pi}{6}$ ব্যবধানে $y = \sec x$ এর মান ক্যালকুলেটরের সাহায্যে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।

x	$-\frac{6\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
y = secx	−1	−1.15	−2	অসংজ্ঞায়িত	2	1.15	1
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	
y = secx	1.15	2	অসংজ্ঞায়িত	−2	−1.15	−1	

Scanned with CamScanner



এখন, ছক কাগজে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব রেখা দ্বারা x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু $= \frac{\pi}{6}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলি যোগ করলেই $y = \sec x$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

সেক্যান্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন নয়।
$x = (2n-1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ এর জন্য এটি বিচ্ছিন্ন।

(ii) ফাংশনটির ডোমেন $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$

(iii) ফাংশনটির রেঞ্জ $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(iv) এটি একটি পর্যায় ভিত্তিক ফাংশন যার পর্যায় 2π

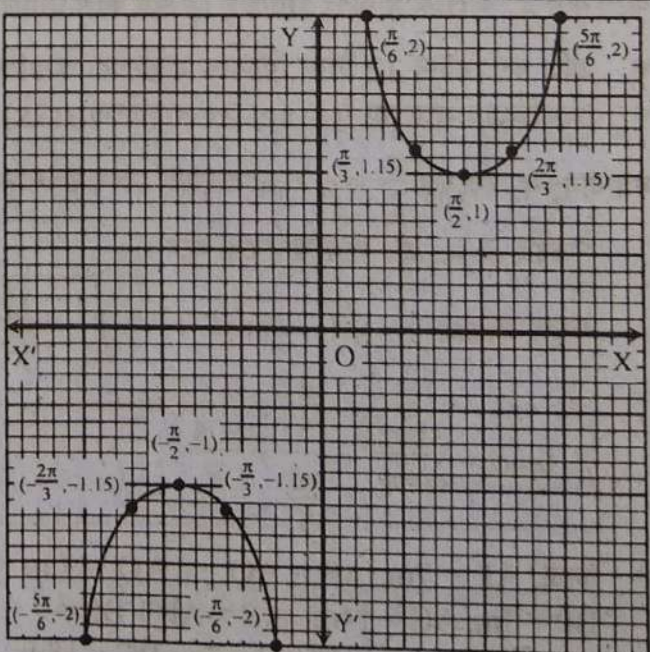
(v) লেখটি y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(vi) লেখটির অসীমতট $x = (2n-1)\pi, n \in \mathbb{Z}$

(f) $y = \operatorname{cosec} x, -\pi < x < \pi$ ফাংশনের লেখচিত্র:

উল্লেখিত সীমার মধ্যে $\frac{\pi}{6}$ ব্যবধানে $y = \operatorname{cosec} x$ এর মান ক্যালকুলেটরের সাহায্যে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।

x	$-\frac{6\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
y = cosecx	অসংজ্ঞায়িত	−2	−1.15	−1	−1.15	−2	অসংজ্ঞায়িত
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	
y = cosecx	2	1.15	1	1.15	2	অসংজ্ঞায়িত	



এখন, ছক কাগজে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব রেখা দ্বারা x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু $= \frac{\pi}{6}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলি যোগ করলেই $y = \operatorname{cosec} x$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

কোসেক্যান্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন নয়।
যখন x এর মান $n\pi, n \in \mathbb{Z}$ তখন এটি বিচ্ছিন্ন।

(ii) ফাংশনটির ডোমেন $\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$

(iii) ফাংশনটির রেঞ্জ $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(iv) এটি একটি পর্যায় ভিত্তিক ফাংশন যার পর্যায় 2π

(v) লেখটির অসীমতট $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

কাজ: 1. $y = \sin 2\theta$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর; যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$

2. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর: $\tan x = 2x$ যখন $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Scanned with CamScanner

পাঠ-১২

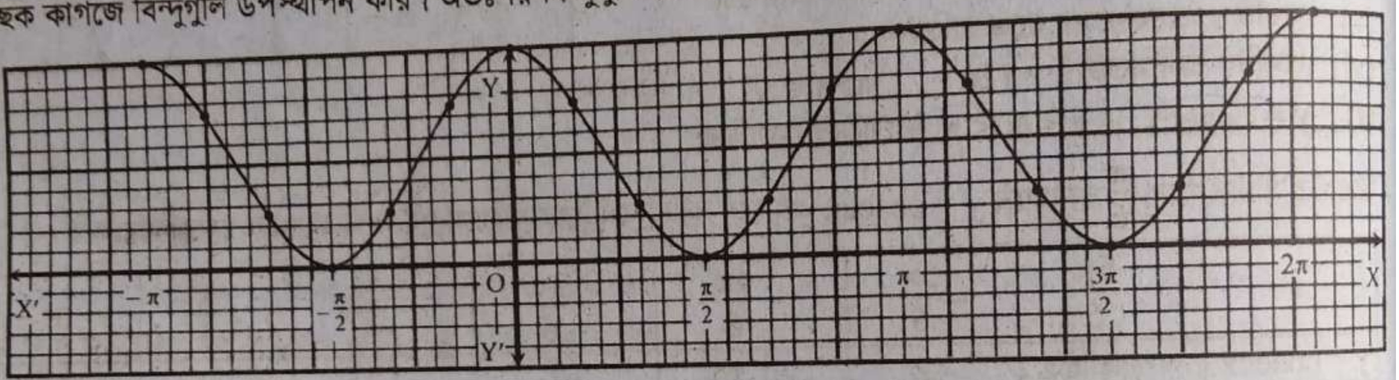
উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $x = -\pi$ হতে $x = 2\pi$ সীমার মধ্যে $y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। [দি: বো: ১৫; রা: বো: ০৯; সি: বো: ১৫]

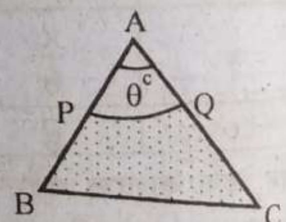
সমাধান: $x = -\pi$ হতে $x = 2\pi$ সীমার মধ্যে $\frac{\pi}{6}$ ব্যবধানে বিভিন্ন বিন্দুতে $y = \cos^2 x$ এর মান নির্ণয় করি এবং তালিকাভুক্ত করি।

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$
$y = \cos^2 x$	1	0.76	0.25	0	0.25	0.76	1	0.76	0.25	0
x	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$y = \cos^2 x$	0.25	0.76	1	0.76	0.25	0	0.25	0.76	1	

স্কেল নির্ধারণ: x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু $= \frac{\pi}{6}$ এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে ছক কাগজে বিন্দুগুলি উপস্থাপন করি। অতঃপর বিন্দুগুলি যোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।



উদাহরণ-2. **$AP = 7m$, $BP = 3m$, $AC = 14m$, $BC = 18m$, $AP = AQ$, চাপ $PQ = 10.5$ m এবং $f(x) = \sin x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।**



ক. যদি $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ এবং $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ হয় তবে $\tan\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রতি বর্গ মিটার 12 টাকা হিসেবে ছায়াঘেরা অঞ্চলে ঘাস লাগাতে কত টাকা খরচ হবে? ৪

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে $f(2x) - f(x) = 0$ এর সমাধান কর। ৪

সমাধান: ক. যেহেতু $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ কাজেই কোণ উৎপাদনকারী রেখার অবস্থান হবে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে।

সুতরাং $\cos\alpha$ এর মান ঋণাত্মক হবে।

এখন, $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{-3}{5}$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{3}$$

খ. চিত্রে, $AP = 7m$, $AP = AQ$ $\therefore AQ = 7$ m

$BP = 3m$, $AC = 14m$; $AB = AP + BP = 7 + 3 = 10m$;

$CQ = AC - AQ = 14 - 7 = 7m$; $BC = 18m$

ΔABC এর পরিসীমা, $2s = AB + BC + CA$

$= 10 + 18 + 14 = 42m$

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{42}{2} = 21\text{m}$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-18)(21-14)(21-10)}$ [$\because a = BC = 18\text{m}, b = CA = 14$ m এবং $c = AB = 10$ m]

$= \sqrt{21 \times 3 \times 7 \times 11}$

$= \sqrt{4851} = 69.65$ sq.m (প্রায়)

APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AP^2 \times \theta$

$= \frac{1}{2} \times AP^2 \times \frac{\text{চাপ } PQ}{AP}$

$= \frac{1}{2} \times AP \times$ চাপ PQ

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 10.5 = 36.75$ sq.m

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 69.65 - 36.75 = 32.9$ sq.m

$\therefore$ ঘাস লাগাতে মোট খরচ $= 32.9 \times 12 = 394.80$ টাকা

গ. $f(x) = \sin x \quad \therefore f(2x) = \sin 2x$

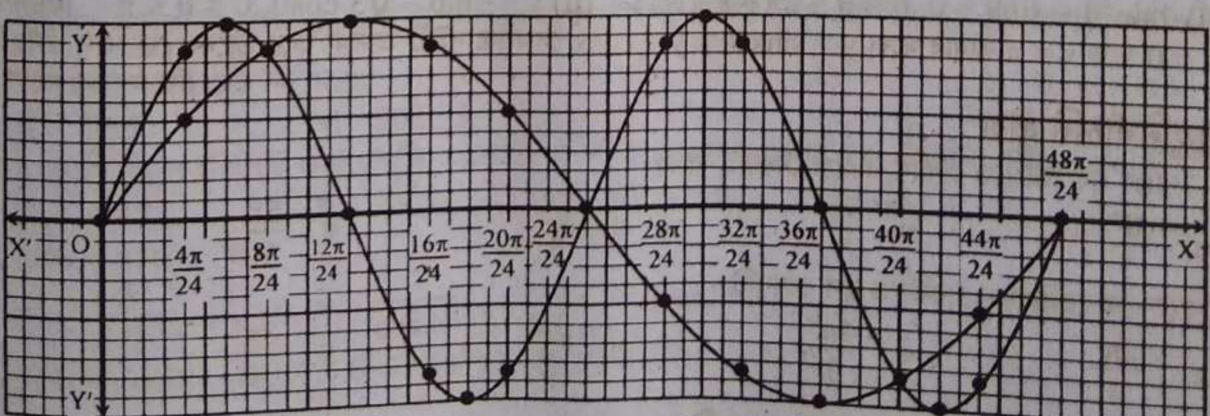
এখন, $f(2x) - f(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x - \sin x = 0$ এর $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

$0 \le x \le 2\pi$ এর অন্তর্গত বিভিন্ন বিন্দুতে $y = \sin 2x$ ও $y = \sin x$ এর মান সম্বলিত দুইটি তালিকা তৈরি করি।

x	0	$\frac{4\pi}{24}$	$\frac{6\pi}{24}$	$\frac{8\pi}{24}$	$\frac{12\pi}{24}$	$\frac{16\pi}{24}$	$\frac{18\pi}{24}$	$\frac{20\pi}{24}$	$\frac{24\pi}{24}$	$\frac{28\pi}{24}$	$\frac{30\pi}{24}$	$\frac{32\pi}{24}$	$\frac{36\pi}{24}$	$\frac{40\pi}{24}$	$\frac{42\pi}{24}$	$\frac{44\pi}{24}$	$\frac{48\pi}{24}$
$y = \sin 2x$	0	0.87	1	0.87	0	-0.87	-1	-0.87	0	0.87	1	0.87	0	-0.87	-1	-0.87	0

x	0	$\frac{4\pi}{24}$	$\frac{8\pi}{24}$	$\frac{12\pi}{24}$	$\frac{16\pi}{24}$	$\frac{20\pi}{24}$	$\frac{24\pi}{24}$	$\frac{28\pi}{24}$	$\frac{32\pi}{24}$	$\frac{36\pi}{24}$	$\frac{40\pi}{24}$	$\frac{44\pi}{24}$	$\frac{48\pi}{24}$
$y = \sin x$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $= \frac{\pi}{24}$ এবং y-অক্ষ বরাবর 10 বাহু = 1 একক ধরে ছক কাগজে একই অক্ষ ব্যবস্থায় উভয় তালিকার বিন্দুসমূহ উপস্থাপন করি।



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $x = 0, \frac{8\pi}{24}$ বা $\frac{\pi}{3}, \frac{24\pi}{24}$ বা π, $\frac{40\pi}{24}$ বা $\frac{5\pi}{24}$ ও $\frac{48\pi}{24}$ বা 2π এর জন্য $y = \sin 2x$ ও $y = \sin x$ এর লেখদ্বয় মিলিত হয়েছে।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ ও 2π.

Scanned with CamScanner

পাঠ-১৩ ও ১৪

অনুশীলনী-6(C)

ডান পার্শ্বে উল্লেখিত ব্যবধিতে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর (1 – 4):

1. (i) $y = \sin x, -\pi \le x \le \pi$ [ঢা: বো: ১৩, ০৩; রা: বো: ০৪; কু: বো: ০৩; রা: বো: ০৬; চ: বো: ০৮, ০৬, ০৪; সি: বো: ০৭, ০৫; য: বো: ০৭; ব: বো: ১১, ০৯; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]

   (ii) $y = \sin 2x, 0° \le x \le 360°$ [ঢা: বো: ০৯, ০৭, ০৫; রা: বো: ১৫, ১২, ১০; দি: বো: ১৬, ১২, ১০; কু: বো: ১৪, ১০, ০৭, ০৫; য: বো: ১৬, ১৩, ১১, ০৯, ০৩; চ: বো: ১৫, ১২, ১০, ০৩; সি: বো: ১৫, ১১, ০৩; ব: বো: ১৫, ১৪, ০৭, ০৪, ০৩]

   (iii) $y = \sin 3x, -90° \le x \le 180°$ [রা: বো: ১৪; কু: বো: ১২, ০৯; সি: বো: ১৩; য: বো: ০৫]

2. (i) $y = \cos x, -\pi < x < \pi$ [ঢা: বো: ১৪, ১২, ০৮, ০৬; দি: বো: ০৯; রা: বো: ১৬, ১১, ০৫, ০৭; কু: বো: ১১, ১০, ০৮, ০৬, ০৪; সি: বো: ১৬, ১২, ০৯, ০৮, ০৪; য: বো: ১২, ০৮, ০৬; ব: বো: ১৬, ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১১]

   (ii) $y = \cos 2x, -\pi \le x \le \pi$ [ঢা: বো: ১০; কু: বো: ১৫; চ: বো: ১৬, ১৩, ০৯; ব: বো: ১২; সি: বো: ০৬; ব: বো: ০৬; চ: বো: ০৭]

   (iii) $y = \cos 3x, 0 \le x \le \pi$ [ঢা: বো: ০৩; চ: বো: ১৫, ০৪]

3. (i) $y = \sin^2 x, -\pi \le x \le \pi$ [ঢা: বো: ১৬, ০৪; রা: বো: ১৩; কু: বো: ১৩; সি: বো: ১০; য: বো: ১৫]

   (ii) $y = \cos^2 x, -\pi \le x \le \pi$ [ঢা: বো: ১৫; রা: বো: ০৬, ০৩; দি: বো: ১৩; কু: বো: ১৬; চ: বো: ১১, ০৫; ব: বো: ১৩, ০৫; য: বো: ১৩, ০৯] [দি: বো; ১১; য: বো: ১০]

4. (i) $y = \tan x, -2\pi \le x \le 2\pi$ (iii) $y = \text{cosec}\, x, -\pi \le x \le 2\pi$ (iv) $y = \sec x, -\pi \le x \le 2\pi$

   (ii) $y = \cot x, -\pi \le x \le 2\pi$

ডান পার্শ্বে উল্লেখিত ব্যবধিতে লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় কর (5 – 10):

5. $\sin x - \cos x = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ [ঢা: বো: ১৪, ১২, ০৯, ০৭; রা: বো: ১৩; দি: বো: ১৫; ব: বো: ১২, ০৯, ০৭; কু: বো: ০৯, ০৫; য: বো: ১৪, ১১, ০৬; সি: বো: ০৭; চ: বো: ১২, ০৯, ০৭, ০৫, ০৩ রা: বো: ০৮, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

6. $5 \sin x + 2 \cos x = 5, 0° \le x \le 270°$ [সি: বো: ০৪; য: বো: ০৪; চ: বো: ১০; রা: বো: ১৪; ব: বো: ১৪]

7. $x - \tan x = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ১৬, ০৯, ০৪; য: বো: ১২, ব: বো: ১৩, ১১, ০৪; সি: বো: ১৪, ১২, ১০, ০৫; কু: বো: ১৬, ১৪, ১০, ০৭; চ: বো: ১৪, ১১, ০৮; দি: বো: ১৪, ১২, ১০]

8. $\cot x - \tan x = 2, 0 \le x \le \pi$ [ঢা: বো: ১৩, ০৮, ০৬; চ: বো: ১৩; সি: বো: ১৫, ১১, ০৩; য: বো: ০৫; ব: বো: ০৮, ০৬; কু: বো: ০৮; রা: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১২]

9. $2 \sin^2 x = \cos 2x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ [য: বো: ০৮, ০৩]

10. (i) $2\sin^2\theta - \sin\theta = 0, 0 \le \theta \le 2\pi$ [মাদ্রাসা বো: ১০] (ii) $y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$ [মাদ্রাসা বো: ১৩]

11. $x = 0$ হতে $x = \pi$ সীমার মধ্যে $y = \sin x$ এবং $y = \cos x$ লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করে তাদের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। [সি: বো: ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. 37′30″ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে কোনটি হবে?

   ক. $\frac{8°}{5}$ খ. $\frac{7°}{5}$ গ. $\frac{5°}{8}$ ঘ. $\frac{5°}{9}$

2. 270° কে রেডিয়ানে প্রকাশিত রূপ কোনটি?

   ক. $\frac{2\pi^c}{3}$ খ. $\frac{4\pi^c}{3}$ গ. $\frac{3\pi^c}{2}$ ঘ. $\frac{3\pi^c}{4}$

3. $\frac{3\pi^c}{8}$ এর ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশরূপ কোনটি?

   ক. 45° খ. 50°30′ গ. 60°30′ ঘ. 67°30′

4. $\frac{7\pi}{32}$ রেডিয়ান সমান কত ডিগ্রী?

   ক. 39° খ. 39°12′ গ. 29°22′30″ ঘ. 39°22′30″

Scanned with CamScanner

5. ঘড়ির সময় 2টা 15 মিনিট হলে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রী?
ক. $30°$ খ. $28°$ গ. $24°$ ঘ. $22.5°$

6. বিকাল 5 টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যকার কোণের পরিমাণ কত?
ক. $150°$ খ. $135°$ গ. $120°$ ঘ. $90°$

7. $\sec(5x+3)$ এর পর্যায় কোনটি?
ক. 2π খ. $\frac{2\pi}{3}$ গ. π ঘ. $\frac{2\pi}{5}$

8. $\sin(4x+1)$ এর পর্যায় কোনটি?
ক. 2π খ. $\frac{2\pi}{5}$ গ. π ঘ. $\frac{\pi}{2}$

9. $4\tan 4\theta$ এর পর্যায় নিচের কোনটি?
ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. π ঘ. 2π

10. $y = \cot x$ ফাংশনটি নিচের কোন বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন?
ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. π

11. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\sin x - \cos x = 0$ সমীকরণের সমাধান কত?
ক. π খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{5\pi}{6}$ ঘ. $\frac{\pi}{3}$

12. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এবং $\sin\theta = \frac{12}{13}$ হলে $\tan\theta =$ কত?
ক. $-\frac{5}{13}$ খ. $\frac{-12}{5}$ গ. $\frac{12}{5}$ ঘ. $\frac{12}{13}$

13. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে একটি চাপ $40°$ কোণ উৎপন্ন করলে, ঐ চাপের দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?
ক. 3.491 খ. 3.520 গ. 3.641 ঘ. 200

14. একটি চাকার ব্যাস 100 সে.মি. হলে 10 সে.মি. যেতে চাকাটি কত ডিগ্রি ঘুরবে?
ক. $5°13'$ খ. $11°27'$ গ. $11°46'$ ঘ. $12°50'$

15. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 km। ঢাকা ও রাজশাহী পৃথিবীর কেন্দ্রে $\frac{\pi}{60}$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করলে, ঢাকা ও রাজশাহীর দূরত্ব কত কি.মি.?
ক. 255 খ. 305.75 গ. 325.50 ঘ. 337.2

16. 4 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও 4 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট দুইটি অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?
ক. 1 : 2 খ. 2 : 3 গ. 3 : 4 ঘ. 4 : 1

17. $\tan\theta + \cot\theta =$ কত?
ক. $\frac{2}{\sin 2\theta}$ খ. $\frac{2}{\cos 2\theta}$ গ. $\sin 2\theta$ ঘ. $\cos 2\theta$

18. $f(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$ হলে θ এর কোন মানের জন্যে $f(\theta) = 0$ হবে?
ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. $\frac{\pi}{4}$ গ. $\frac{\pi}{6}$ ঘ. $\frac{\pi}{8}$

19. $\cos\theta = \frac{1}{2}; \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত?
ক. $-\sqrt{3}$ খ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ. $\sqrt{3}$

Scanned with CamScanner

20. $5\tan\theta = 4$ হলে $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ এর মান কত?

ক. $\frac{5}{14}$ খ. $\frac{14}{5}$ গ. $\frac{1}{14}$ ঘ. $\frac{3}{14}$

21. $\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\sin\alpha$ খ. $\cos\alpha$ গ. $\tan\alpha$ ঘ. $\cot\alpha$

22. $\sin2\theta$ এর সর্বনিম্ন মান কত?

ক. -2 খ. -1 গ. 0 ঘ. 1

23. $\sec\theta - \text{cosec}\theta = 0$ হলে $\cos\theta$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\sqrt{3}$

24. নিচের কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতদ্বয়ের রেঞ্জ একই?

ক. $\sin\theta, \tan\theta$ খ. $\cos\theta, \cot\theta$ গ. $\sec\theta, \text{cosec}\theta$ ঘ. $\tan\theta, \sec\theta$

25. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এবং $\sin\theta = \frac{5}{13}$ হলে—

i. কোণ উৎপাদনকারী রেখার অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে ii. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ iii. $\cot^2\theta = \frac{144}{25}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

26. $f(x) = 2\cos x$ ফাংশনটির —

i. রেঞ্জ $R_f = [-2, 2]$ ii. পর্যায়কাল 2π. iii. লেখচিত্র y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

27. একটি গাড়ির চাকা 100 বার আবর্তিত হয়ে 400 মি: দূরত্ব অতিক্রম করলে —

i. চাকার পরিধি 4 মি:
ii. চাকার ব্যাসার্ধ 0.637 মি:
iii. চাকার ক্ষেত্রফল 420 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

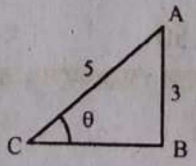
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

28. চিত্র থেকে—

i. $\text{cosec}\theta$ এর মান $\frac{5}{3}$

ii. $\tan2\theta$ এর মান $\frac{24}{7}$

iii. $\sec\theta$ এর মান $\frac{4}{5}$



নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এবং $\sin\theta = \frac{4}{5}$ হলে—

i. কোণ উৎপাদনকারী রেখার অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে

ii. $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ iii. $\tan^2\theta = \frac{16}{9}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

Scanned with CamScanner

30. $f(x) = \sin x$ হলে —

i. $f(x)$ পর্যায়বৃত্ত ফাংশন যার পর্যায়কাল 2π ii. $x = 3\theta$ হলে $f(x)$ এর পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{3}$

iii. $f(x)$ এর লেখচিত্র x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

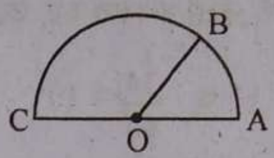
নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. OABC অর্ধবৃত্তে $r = 4$ সে.মি., $\angle AOB = 0.8$ রেডিয়ান হলে—

i. $AC = 8$ সে.মি. ii. $\angle BOC = 2.3416$ রেডিয়ান

iii. AB চাপের দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি.



নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

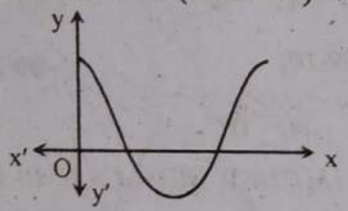
32. $\sin A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে—

i. $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ii. $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ iii. $\tan A \tan B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (33 ও 34) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



উপরোক্ত লেখচিত্রটি একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যা $[0, 2\pi]$ ব্যবধিতে অঙ্কিত।

33. লেখচিত্রটি কোন ফাংশনের হতে পারে?

ক. $2\sin x$ খ. $\tan x + 1$ গ. $1 + 2\cos x$ ঘ. $\cot x - 1$

34. উক্ত ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনটির কয়টি বাস্তবমূল বিদ্যমান?

ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

নিচের তথ্যের আলোকে (35 ও 36) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 ঃ 4 ঃ 5। অনুপাতের সাধারণ রাশি x।

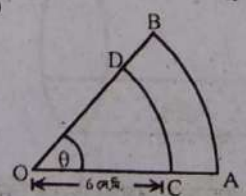
35. x এর মান কত?

ক. 30 খ. 18 গ. 15 ঘ. 12

36. বৃহত্তর কোণটির বৃত্তীয় মান কত?

ক. $\frac{7\pi^c}{12}$ খ. $\frac{5\pi^c}{12}$ গ. $\frac{\pi^c}{3}$ ঘ. $\frac{\pi^c}{4}$

চিত্রে OCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ সে.মি. এবং চাপ AB = 6 সে.মি.



ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে (37 ও 38) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

37. $\theta =$ কত রেডিয়ান?

ক. $\frac{3}{2}$ খ. $\frac{2}{3}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 2

38. OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. 15 খ. 21 গ. 27 ঘ. 54

Scanned with CamScanner

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

39. $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হলে $\tan\theta =$ কত? *[DU. 09-10]*

ক. $\frac{5}{12}$ খ. $\pm\frac{5}{12}$ গ. $\frac{5}{13}$ ঘ. $\pm\frac{5}{13}$

40. যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ধনাত্মক হয়, তবে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান হবে– *[BUET. 11-12]*

ক. $\frac{34}{39}$ খ. $\frac{34}{40}$ গ. $\frac{30}{39}$ ঘ. $\frac{35}{50}$

41. $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$ এর মান কোনটি? *[KUET. 09-10]*

ক. 1 খ. –1 গ. 2 ঘ. –2

42. $\sin\theta$ কে $\cot\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর— *[KUET. 06-07]*

ক. $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{2+\cot^2\theta}}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$ ঘ. $\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cot^2\theta}}$

43. যদি $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$ হয়, তবে $\sin^n\theta + \operatorname{cosec}^n\theta$ এর মান হলো— *[KUET. 12-13]*

ক. 1 খ. –1 গ. 2 ঘ. –2

44. $\cos^2\theta = \frac{(a+b)^2}{4ab}$ সমীকরণে $a = b$ হলে θ এর মান হবে— *[CUET. 09-10]*

ক. 60° খ. 90° গ. 45° ঘ. 0°

45. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ হলে $(-\pi, \pi)$ ব্যবধিতে θ এর মান কত? *[RU. 10-11; CUET. 10-11; Ch.U. 10-11]*

ক. 0° খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}$

46. $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} =$ কত? *[RU. 06-07; JU. 06-07]*

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 4

47. $\cos^4\theta - \sin^4\theta =$ কত? *[RU. 08-09; JU. 06-07]*

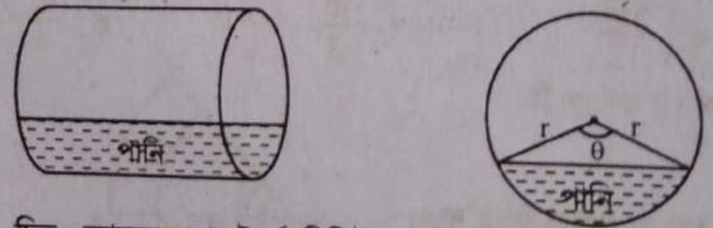
ক. $2\cos^2\theta - 1$ খ. $2\sin^2\theta - 1$ গ. $2\tan^2\theta - 1$ ঘ. $2\sec^2\theta - 1$

48. 7 টা 15 মিনিটের সময় ঘন্টা ও মিনিটের কাটার মধ্যবর্তী কোণ কত? *[IU. 10-11]*

ক. 127.5° খ. 120° গ. 115° ঘ. 112°5′

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1.



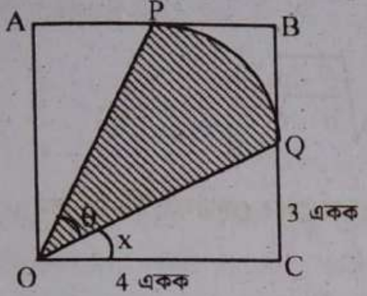
চিত্র : ব্যাসের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সিলিন্ডার ও তার প্রস্থচ্ছেদ

ক. সিলিন্ডারের আয়তন নির্ণয় কর।

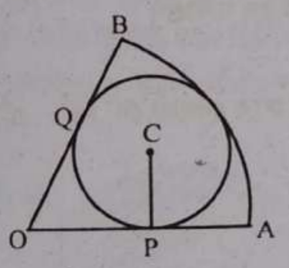
খ. কোন মসৃণ তলে গড়ানোর সময় যদি সিলিন্ডারটি প্রতি r সেকেন্ডে একবার ঘুরে তাহলে সিলিন্ডারটির বেগ নির্ণয় কর এবং কত সময় পর এটি 100π দূরত্ব অতিক্রম করবে?

গ. প্রমাণ কর যে, সিলিন্ডারটিতে বিদ্যমান পানির আয়তন $V = r^3(\theta - \sin\theta)$

2. একটি বৈদ্যুতিক তারের মধ্যে দিয়ে প্রবাহিত দিক পরিবর্তিত প্রবাহের সমীকরণ $I = I_0 \sin \omega t$. তড়িৎ প্রবাহের কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega = 2$ তড়ি প্রবাহের শীর্ষমান $I_0 = 1$
   ক. ফাংশনটির পর্যায় নির্ণয় কর।
   খ. $0 \le t \le 360^\circ$ ব্যবধিতে তড়িৎ প্রবাহ (I) বনাম সময় (t) এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।
   গ. $I^2 + I^4 = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan^4 2t - \tan^2 2t = 1$
3. OABC একটি বর্গ এবং O কেন্দ্রিক OPQ একটি বৃত্তকলা।

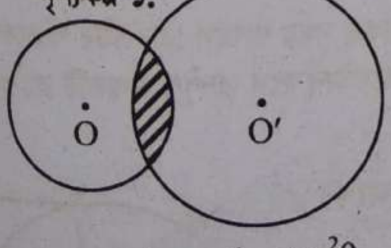


   ক. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে x°, 25° এবং $\frac{11\pi}{36}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।
   খ. PQ চাপ ও বর্গক্ষেত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র PBQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   গ. $\frac{CQ}{OQ} = x$ কোণের যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্দেশ করে, $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে তার লেখচিত্র অঙ্কন কর।
4. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:
$\tan^2\theta = 1 - e^2$

O কেন্দ্রিক বৃত্তকলার ভিতরে C কেন্দ্রিক একটি বৃত্ত অবস্থিত। P, OA এর মধ্যবিন্দু।
   ক. 8 cm ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 100 cm^2 হলে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ কত হবে?
   খ. OA = 10 সে.মি. হলে PC = ?
   গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে দেখাও যে, $\sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta = (2 - e^2)^{\frac{3}{2}}$.
5. দৃশ্যকল্প-১:

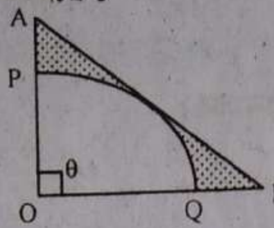


দৃশ্যকল্প-২:
$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$,
$0 \le x \le \pi$

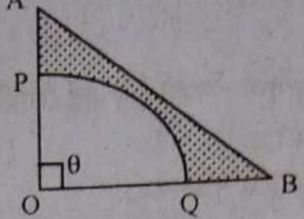
   ক. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে $\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. দৃশ্যকল্প-০১ হতে O কেন্দ্রিক বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি. এবং O′ কেন্দ্রিক বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে.মি. এবং OO′ = 15 সে.মি. হলে ছায়াঘেরা অংশের পরিধি নির্ণয় কর।
   গ. দৃশ্যকল্প-০২ হতে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান কর।

Scanned with CamScanner

6. চিত্র-১



চিত্র-২



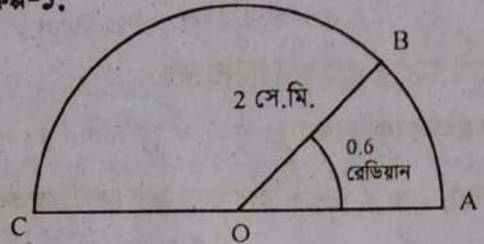
ΔAOB এর $OA = OB = 5$ সে.মি. এবং $\angle\theta = 90°$

ক. $a\cos^2x + b\sin^2x = c$ হলে দেখাও যে, $\tan x = \pm\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$.

খ. চিত্র-১ অনুসারে, ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. চিত্র-২ অনুসারে, যদি $OP = 3$ সে.মি. হয় তবে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:

$f(\theta) = \tan\theta$

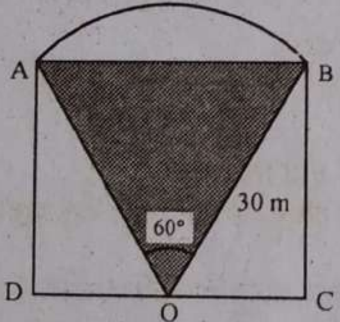
এবং $g(\theta) = \sin\theta$

ক. $-2\pi \le g(\theta) < 3\pi$ ব্যবধির মধ্যে $g(\theta) = 0$ এর চারটি মূল লিখ ও কারণ দর্শাও।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর BC চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে, যদি $f(\theta) + g(\theta) = m$ এবং $f(\theta) - g(\theta) = n$ হয় তবে দেখাও যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

8.



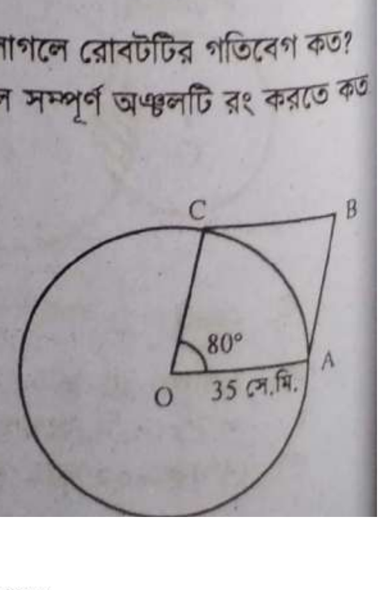
এটি একটি জানালার ডিজাইন যার OAB একটি বৃত্তকলা এবং O বৃত্ত কেন্দ্র।

ক. $18°33'45''$ কে বৃত্তীয় এককে প্রকাশ কর।

খ. একটি রোবটের সম্পূর্ণ বৃত্ত কলার পরিসীমা অতিক্রম করতে 30 সেকেন্ড সময় লাগলে রোবটটির গতিবেগ কত?

গ. কালি করা অঞ্চলটির প্রতি বর্গ একক রং করতে 5 মিনিট সময় প্রয়োজন হলে সম্পূর্ণ অঞ্চলটি রং করতে কত সময় প্রয়োজন?

9. OABC একটি রম্বস এবং OAC বৃত্তকলা O কেন্দ্রিক একটি চাকার অংশ।

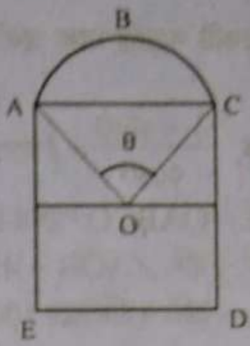


ক. দেখাও যে, $\sec\theta - \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta - \tan\theta$.

খ. চাকাটি যে গাড়িতে সংযুক্ত তার 50 কি.মি. যাত্রায় চাকাটি কেন্দ্রে কত কোণ উৎপন্ন করবে?

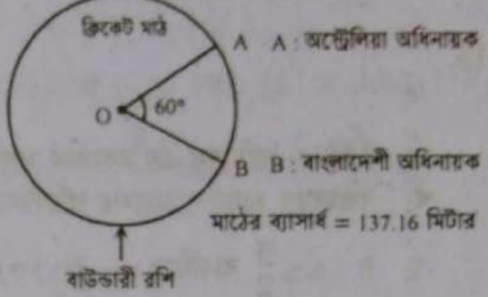
গ. AC চাপ ও রম্বসের মধ্যবর্তী ABC অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. ABCDE একটি জানালার কাঠামো: OABC একটি বৃত্তকলা, $OA = 2$ মিটার, $\theta = 120°$ এবং সম্পূর্ণ জানালার পরিসীমা 10 মিটার।



ক. একটি চতুর্ভুজের দুইটি কোণ $\frac{\pi}{6}$ ও $\frac{3\pi}{4}$ রেডিয়ান এবং অপর কোণদ্বয়ের অনুপাত 3 : 8 হলে কোণ দুইটি নির্ণয় কর।
খ. AE-এর উচ্চতা নির্ণয় কর।
গ. জানালাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

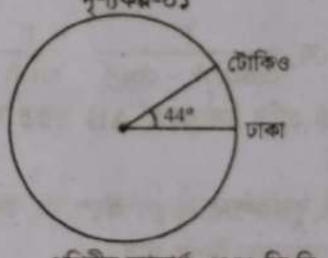
11.



ক. দেখাও যে, $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$
খ. একটি ফিল্ড কারে চড়ে আম্পায়ার এক অধিনায়ক হতে অপর অধিনায়কের নিকট যাচ্ছে। কারের প্রত্যেক চাকার ব্যাস 60 সে.মি. এবং একবার আবর্তনে 10 সেকেন্ড সময় লাগলে আম্পায়ারের পৌঁছাতে কত সময় লাগবে?
গ. বৃষ্টি আসায় মাঠ কর্মিরা AOB বৃত্তকলা বাদে অবশিষ্ট মাঠটি ঢেকে দিলে তারা মোট কতটুকু মাঠ ঢেকেছে?

12.

দৃশ্যকল্প-০১

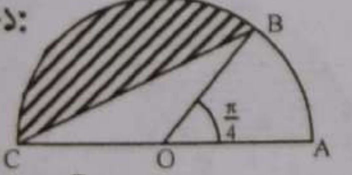


পৃথিবীর ব্যাসার্ধ: 6371 কি.মি.

দৃশ্যকল্প-০২
$f(x) = \cot x - \tan x - 2$
$0 \le x \le \pi$

ক. প্রমাণ কর যে, $f(x) = 2(\cot 2x - 1)$
খ. দৃশ্যকল্প-০১ হতে ঢাকা ও টোকিও এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ঢাকার সাথে যে স্থানটি পৃথিবীর কেন্দ্রে 90° কোণ উৎপন্ন করে তার দূরত্বও নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-০২ হতে $f(x) = 0$ সমীকরণের সমাধান কর।

13. দৃশ্যকল্প-১:

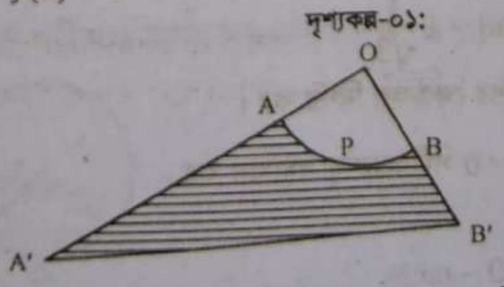


দৃশ্যকল্প-২: $f(\theta) = \cos\theta$

ক. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $f(\theta)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে, $OB = 10$ সে.মি. হলে ছায়া ঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
গ. $f(\theta) + \frac{1}{f(\theta)} = \frac{5}{2}$ হলে দেখাও যে, $\{f(\theta)\}^n + \frac{1}{\{f(\theta)\}^n} = 2^n + 2^{-n}$

14.

দৃশ্যকল্প-০১:

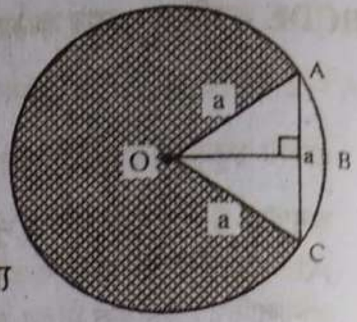


দৃশ্যকল্প-০২:
$f(x) = \cos^2 x$

এটি একটি বিমানের পাখা যার $AA' = 7$ মি., $A'B' = 16$ মি., $BB' = 5$ মি., চাপ $APB = 9$ মি. এবং $OA = 8$ মি.
ক. $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে দেখাও যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$
খ. দৃশ্যকল্প-০১ হতে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-০২ হতে $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

Scanned with CamScanner

15. একটি পার্কের মধ্যে অবস্থিত একটি বৃত্তাকার নকশার স্কেচ:



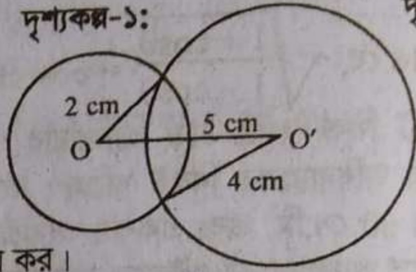
ক. $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = l$ হলে $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ এর মান কত হবে তা নির্ণয় কর।

খ. OABCO পথের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. যদি $\angle AOB = 45°$ এবং $OA = 5$ মিটার হয় তবে নকশা আকার জন্য প্রতি বর্গমিটারে 100 টাকা হিসেবে কালি করা অংশের খরচ নির্ণয় কর।

16.

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:

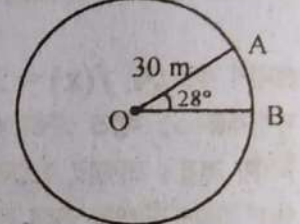
$f(x) = \tan x$

ক. ডিগ্রি ও রেডিয়ান এর মধ্যকার সম্পর্ক স্থাপন কর।

খ. বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ অংশের পরিসীমা নির্ণয় কর।

গ. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $x - f(x) = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।

17.

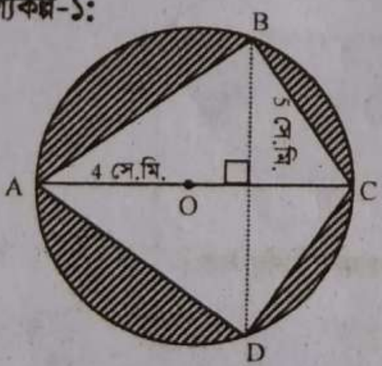


ক. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\operatorname{cosec}A - \cot A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\operatorname{cosec}A + \cot A}$

খ. একটি গাড়ি প্রতি সেকেন্ডে AB দূরত্ব অতিক্রম করে গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

গ. যদি OAB বৃত্তকলার দ্বিগুণ অংশ রং করা হয় তবে বৃত্তাংশের রং বিহীন অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:

$f(x) = \sin x - \cos x$

ক. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $BD \perp AC$ হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $f(x) = 0$ সমীকরণের সমাধান কর।

19. $f(\theta) = \sin\theta$ এবং $\tan\theta + \sec\theta = x$

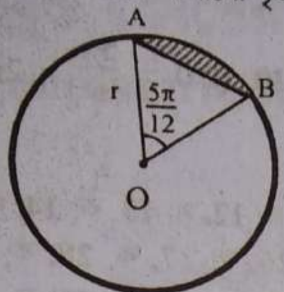
ক. দেখাও যে, $\frac{1 - f(\theta)}{1 + f(\theta)} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

খ. দেখাও যে, $f(\theta) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

গ. $0° \le \theta \le 360°$ ব্যবধিতে $f(2\theta)$ এর লেখচিত্র অংকন কর।

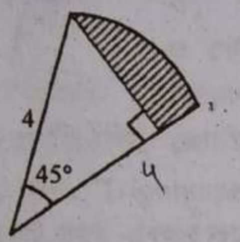
Scanned with CamScanner

20. এটি একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্রের সামনে লাগানো বৃত্তাকার গ্লাস।



ক. AOB ত্রিভুজের অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর।
খ. কোনো সংকেত নির্দেশক কাঁটার 5 মি./ঘণ্টা বেগে A হতে বৃত্তাকার পথে B তে যেতে 15 সে. সময় লাগে। কেন্দ্র O হতে A এর দূরত্ব নির্ণয় কর।
গ. $r = 3$ হলে কালি করা অংশ বাদে বাকি বৃত্তাংশ কাগজ দিয়ে ঢেকে ফেলতে কত বর্গ একক কাগজ প্রয়োজন?

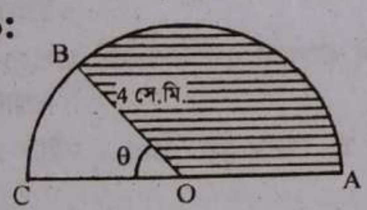
21. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin x$

ক. $f(x)$ ফাংশনটি পর্যায়ী কিনা? তা ব্যাখ্যা কর এবং পর্যায়ী হলে তার পর্যায় কত?
খ. দৃশ্যকল্প-১ এর ছায়াঘেরা অংশের পরিসীমা নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে, $\frac{1}{f(A)} + \frac{1}{f(B)} + \frac{1}{f(C)} = 0$ হলে দেখাও যে, $\{\Sigma f(A)\}^2 = \Sigma f^2(A)$.

22. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:

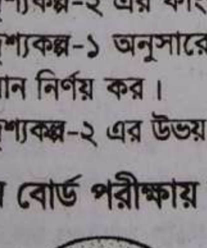
$y = \sin x$

$y = \cos x$

ক. দৃশ্যকল্প-২ এর ফাংশনদ্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ লিখ।
খ. দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে O কেন্দ্রিক বৃত্তকলা OAB এর পরিসীমা OBC বৃত্তকলার পরিসীমার দ্বিগুণ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর উভয় ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করে তাদের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। ($x = 0$ হতে $x = \pi$ সীমার মধ্যে)

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

23.



[ঢা. বো. ১৭]

ক. বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
খ. ABDC এর পরিসীমা নির্ণয় কর।
গ. ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।]

Scanned with CamScanner

উত্তরমালা

5. $\frac{\pi}{4}$; 6. 46.5°, 90°; 7. 0 8. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$; 9. $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ 10. (i) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi$ ii) $\frac{\pi}{3}$ 11. $(\frac{\pi}{4}, 0.71)$

বহুনির্বাচনি

1. গ; 2. গ; 3. ঘ; 4. ঘ; 5. ঘ; 6. ক; 7. ঘ; 8. ঘ; 9. ক; 10. ঘ; 11. খ; 12. খ; 13. ক; 14. খ; 15. ঘ; 16. ঘ; 17. ক; 18. খ; 19. ক; 20. ক; 21. ক; 22. খ; 23. খ; 24. গ; 25. খ; 26. ঘ; 27. ক; 28. ক; 29. ঘ; 30. ক; 31. ঘ; 32. ঘ; 33. গ; 34. খ; 35. গ; 36. খ; 37. খ; 38. গ; 39. খ; 40. ক; 41. ক; 42. ক; 43. গ; 44. ঘ; 45. গ; 46. গ; 47. ক; 48. ক

সৃজনশীল

1. ক. $2\pi r^3$; খ. 2π; 50 সেকেন্ড;
2. ক. $\frac{2\pi}{\omega}$
3. ক. 100° ; খ. 0.453 বর্গ একক;
4. ক. 179.05° (প্রায়); খ. 3.75 সে. মি.;
5. ক. $\frac{7}{25}$; খ. 20.96 cm; গ. $\frac{\pi}{3}$
6. খ. 2.6825 বর্গ সে.মি. ; গ. 5.4314 বর্গ সে.মি. ;
7. খ. 5.0832 সে. মি. ;
8. ক. 0.3239775^c; খ. 10.97 কি.মি./ঘণ্টা; গ. 32.476 ঘণ্টা (প্রায়);
9. খ. 142857.1429 রেডিয়ান; গ. 351.2 বর্গ সে. মি.;
10. ক. $\frac{13\pi}{44}$; $\frac{26\pi}{33}$; খ. 1.1735 মিটার (প্রায়); গ. 6.522 বর্গ মি.
11. খ. 12.699 মিনিট (প্রায়) ; গ. 49252.082 বর্গ মি. ;
12. খ. 4892.588 কি.মি.; 10007.5668 কি.মি.; গ. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$;
13. ক. [0, 1] ; খ. 82.455 বর্গ সে.মি.
14. খ. 55.19 বর্গ মি. (প্রায়);
15. ক. $\frac{1}{7}$; খ. 12.1888 একক; গ. 6545 টাকা
16. ক. $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$; খ. 6.564 সে. মি.; গ. 0 রেডিয়ান
17. খ. 52.779 কি.মি. (প্রায়); গ. 2387.616 বর্গ মি.
18. খ. 19.04 বর্গ সে.মি.; গ. $\frac{\pi}{4}$;
20. ক. $\frac{7\pi^c}{24}$; খ. 0.0159 মি.; গ. 26.7309 বর্গ একক;
21. ক. 2π ; খ. 7.1412 একক;
22. ক. $\mathbb{R}$; [−1, 1] ; খ. 0.381 রেডিয়ান; গ. $(\frac{\pi}{4}, 0.71)$;
23. ক. 13.19 বর্গ সে.মি. (প্রায়); খ. 16.4 সে.মি. (প্রায়); গ. 101.0532 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

Scanned with CamScanner