জটিল সংখ্যা

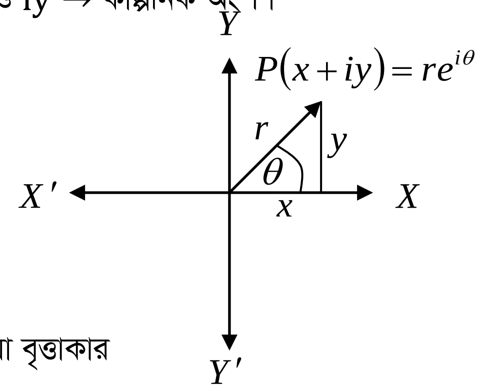
জটিলসংখ্যা

$$z^n = (x+iy)^n = r^n(\cos n\theta + \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

সাধারণ আলোচনা ও সুত্রাবলী ঃ $x + iy$ আকারের রাশিকে জটিল সংখ্যা বলে। একে $'z'$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$z = x + iy$, যেখানে $(x, y) \in R$

জটিল সংখ্যার একটি কাল্পনিক অংশ ও একটি বাস্তব অংশ থাকে। $x \rightarrow$ বাস্তব অংশ ও $iy \rightarrow$ কাল্পনিক অংশ।



এই ব্যবস্থায় $X -$ অক্ষকে Rez ও $Y -$ অক্ষকে lmz দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পোলার আকার: চিত্র হতে, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \leftarrow$পোলারআকার [অয়লার]

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \leftarrow$ [ডিমোইভার]

ধর্ম ঃ $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ $\therefore$ iএর একটি পর্যায় রয়েছে যা বৃত্তাকার

$\sum_{n=1}^{4} i^n = 0$, $\sum_{1}^{205} i^n = \sum_{1}^{204} i^n + i = 0 + i = i$, $\sum_{n=1}^{207} i^n = i^2 + i^3 + i = -1$

মুডুলাস ও আর্গুমেন্ট ঃ-

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; এখানে, মুডুলাস বা $\text{mod } z = |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

এবং আর্গুমেন্ট বা $\arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

আর্গুমেন্ট এর রেঞ্জ ঃ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, এবং **মুখ্যআর্গুমেন্ট এর রেঞ্জ ঃ** $-180^\circ < \theta \leq 0^\circ$,অথবা, $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$

মুখ্য আর্গুমেন্ট ঃ প্রথম চতুর্ভাগের জন্য $\arg z = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$; দ্বিতীয় চতুর্ভাগের জন্য $\arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

তৃতীয় চতুর্ভাগের জন্য $\arg z = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$; চতুর্থ চতুভ্াগের জন্য $\arg z = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা ঃ $z = x + iy$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z} = x - iy$. x- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি ।

$\bar{z}.z = x^2 + y^2 = z^2 = r^2 = |\bar{z}|^2$ $z = -x + iy$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্য $\bar{z} = -x - iy$

$z = -x - iy$ এর প্রতিচ্ছবি বা অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\bar{z} = -x + iy$

$z = x - iy$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, $\bar{z} = x + iy$

অর্থাৎ $\pm i$ কে $\mp i$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করলে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা পাওয়া যায়।

জটিল সংখ্যার ধর্মাবলী ঃ

i) $z = -x + iy = 0$ হলে $x = 0, y = 0$

ii) $x + iy = c - id$ হলে $x = c, y = -d$

iii) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \rightarrow$ বাস্তবসংখ্যা, $z.\bar{z} = x^2 + y^2$ $\rightarrow$যা বাস্তব সংখ্যা

iv) $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = xx_1 - yy_1 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}, \text{mod}z = r_1 r_2, \text{mod}z = \theta_1 + \theta_2$

v) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ $\rightarrow$যা জটিল সংখ্যা

vi) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 + y_2)$ $\rightarrow$যা জটিল সংখ্যা

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}\right)$ $\rightarrow$যা জটিল সংখ্যা $= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$\text{mod}z = \frac{r_1}{r_2}, \text{mod}z = \theta_1 - \theta_2$

viii) যে কোন জটিল সংখ্যার মূল একটি জটিল সংখ্যা কিন্তু অনুবন্ধী আকারে থাকে বলে তারা বাস্তব সমীকরণ গঠন করতে পারে।

$\sqrt[n]{x + iy} = a$ হলে $x + iy = a^n; a \in R$

$\therefore$ $n -$ তম মূল অংশ্যই জটিল সংখ্যা।

ix) মুডুলাস ঃ $\text{mod}\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}$,আর্গুমেন্ট ঃ $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$; মুডুলাস ঃ $\text{mod}\ (z_1\ z_2) = r_1 r_2$ এবং আর্গুমেন্ট ঃ $\arg(z_1.z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\frac{z_1^n}{z_2^{n-1}}$ এর আর্গুমেন্ট $= n\arg z_1 - (n-1)\arg z_2$

$z^n z^{n-1}$ এর আর্গুমেন্ট $= n\arg z_1 + (n-1)\arg z_2$

TYPE – 01 : A + iB এর পোলার আকার থেকে মুডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়

EXAMPLE - 01 : $z = \frac{3+2i}{2+3i} + \frac{1+5i}{1-2i} = \frac{(3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} + \frac{(1+5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{6+6-5i}{5+9} + \frac{1-10+7i}{1+4} = \frac{12-5i}{13} + \frac{-9+7i}{5} = \frac{60-25i+(-117)+91i}{13\times5} = \frac{-52+66i}{65} = \frac{-52}{65} + \frac{66}{65}i \rightarrow A + iB \rightarrow$আকারের রাশি

SOLVE : মুডুলাস, $z = \sqrt{(\frac{-52}{65})^2 + (\frac{66}{65})^2} = \sqrt{\frac{1412}{845}}$; আর্গুমেন্ট $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{66}{52}\right| = 128.23°$

পোলার আকার= $\sqrt{\frac{1412}{845}}[\cos(128.23°) + i\sin(128.23°)] \leftarrow$ পোলার আকার

EXAMPLE - 02 : $\frac{(1+i)^3}{(-1-i)^2}$ এর আর্গুমেন্ট কত ? রাশিটিকে পোলার আকারে রুপান্তর কর।

SOLVE : ধরি, $z = \frac{(1+i)^3}{(-1-i)^2}$, $\quad \arg(z) = 3\arg(1+i) - 2\arg(-1-i)$

$= 3\tan^{-1}\frac{1}{1} - 2\left(-\pi + \tan^{-1}\frac{1}{1}\right) = 3\times\frac{\pi}{4} - 2\left(-\pi + {}^{\pi}/_{4}\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi\left(\frac{1+2}{4}\right) = \frac{9\pi}{4} > 2\pi.$

$= 2\pi + \frac{\pi}{4}$ ∴মুখ্য আর্ডমেন্ট= $\frac{\pi}{4}$; মুডুলাস, $\mathrm{mod}(z) = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \therefore \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ পোলার আকার।

EXERCISE :

01. $\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর। **Ans:** $\frac{\sqrt{10}+1}{7} + \frac{i}{2}(\sqrt{15} - 3\sqrt{6})$.

02. $-2 + 3i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর এবং মুডুলাস ও আর্গুমেন্ট বের কর।

Ans: $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ মুডুলাস হয় $2\sqrt{2}$ আর্গুমেন্ট $\frac{3\pi}{4}$

$\mathbf{Type - 02}$: জটিল সংখ্যার মূল নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $\sqrt{-7+24i} = ?$

SOLVE : মনে করি, $\sqrt{-7+24i} = x + iy$

উভয়পক্ষে বর্গ পাই, $-7 + 24i = (x+iy)^2 \Rightarrow -7 + 24i = x^2 + 2xiy + (iy)^2$

$\Rightarrow -7 + 24i = x^2 + i2xy + i^2y^2 \Rightarrow -7 + 24i = x^2 - y^2 + i(2xy)$

বাস্তব অংশের সাথে বাস্তব অংশ ও জটিল অংশের সাথে জটিল অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = -7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$; $2xy = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

আমরা জানি, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (-7)^2 + (24)^2 = 625 = (25)^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(iii)$

(i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \ \therefore x = \pm 3$

আবার, (i) ও (iii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 16 \ \therefore y = \pm 4$

নির্ণেয় বর্গমূল : $\pm(3 \pm 4i)$ **বিঃদ্রঃ** $\pm(3-4i)$ হত যদি জটিল সংখ্যাটি $-7-24i$ হত ।

EXAMPLE – 02 : $\sqrt{1+i} = ?$

SOLVE : মনে করি $\sqrt{1+i} = x + iy \Rightarrow 1 + i = (x+iy)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 1 + i = x^2 + 2x.iy + (iy)^2 \Rightarrow 1 + i = x^2 - y^2 + i(2xy)$

উভয় পক্ষ থেকে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore x^2 - y^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$

$2xy = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

আমরা জানি, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = 1^2 + (2xy)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$

(i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $2x^2 = 1 + \sqrt{2} \Longrightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$\therefore \sqrt{1+i} = x + iy = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\sqrt{2}+1\right)^{1/2} + i\left(\sqrt{2}-1\right)^{1/2}\right\}$

EXAMPLE – 03 : -64 এর ষষ্ঠমূল নির্ণয় কর।

SOLVE : $\sqrt[6]{-64} = x \Longrightarrow \sqrt[6]{(i8)^2} = x \Longrightarrow (i8)^{\frac{1}{3}} = x \Longrightarrow x^3 = \pm 8i$

(+) ve এর জন্য, $8i = x^3 \Longrightarrow x^3 - 8i = 0 \Longrightarrow x^3 + (2i)^3 = 0$

$\Longrightarrow (x+2i)\{x^2 - i2x + (2i)^2\} = 0 \Longrightarrow (x+2i)(x^2 - 2ix - 2) = 0$

হয়, $x + 2i = 0$ অথবা, $x^2 - 2ix - 2 = 0$

$x = -2i \Longrightarrow x^2 - 2x.i + i^2 - i^2 - 2 = 0 \Longrightarrow (x-i)^2 = 1 \Longrightarrow x - i = \pm 1 \;\therefore x = \pm 1 + i$

(−) ve এর জন্য , $-(i8)^{\frac{1}{3}} = x \Longrightarrow -8i = x^3 \Longrightarrow x^3 + 8i = 0 \Longrightarrow x^3 - (2i)^3 = 0$

$\Longrightarrow (x-2i)\{x^2 + i2x + (2i)^2\} = 0 \Longrightarrow (x-2i)(x^2 + 2ix - 2) = 0$

হয়, $x - 2i = 0$ অথবা, $x^2 + 2ix - 2 = 0$

$x = 2i \Longrightarrow x^2 + 2x.i + i^2 - i^2 - 2 = 0 \Longrightarrow (x+i)^2 = 1 \Longrightarrow x + i = \pm 1 \therefore x = \pm 1 - i$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলগুলো, $2i, -2i, 1+i, -1+i, 1-i, -1-i$.

■এককের ঘনমূল (ω):

$\sqrt[3]{1} = x \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$বা, $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ এখানে $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ∴এককের ঘনমূল তিনটি$= 1, \omega, \omega^2$

EXAMPLE – 04 : - i Gi Nbg~j wbY©q Ki|

SOLVE : ধরি, (i) $\sqrt[3]{-i} = x \Longrightarrow -i = x^3 \Longrightarrow x^3 + i = 0 \Longrightarrow x^3 - i = 0 \Longrightarrow (x-i)(x^2 + ix + i^2) = 0$

$\Longrightarrow (x-i)(x^2 + ix + 1) = 0$ হয়, $x - i = 0$ অথবা $x^2 + ix - 1 = 0 \Longrightarrow x = i \Longrightarrow x^2 + 2x.\frac{1}{2}i + \left(\frac{i}{2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{i}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x + \frac{i}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূল তিনটি : $i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

EXAMPLE – 05 : $\sqrt[4]{-81} = ?$

SOLVE : ধরি, $\sqrt[4]{-81} = x \Longrightarrow \sqrt[4]{(9i)^2} = x \Longrightarrow \sqrt{\pm 9i} = x \Longrightarrow 3\sqrt{\pm i} = x \Longrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\pm 2i} = x$

$\Longrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm 2i + i^2} = x \Longrightarrow \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 \pm i)^2} = x \Longrightarrow \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = x$

নির্ণেয় মূল তিনটি : $\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i), -\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i), \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i), -\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)$

■: **MCQ** এর জন্যঃ

$\sqrt{x+iy} = a + ib$ হলে, $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x + \sqrt{x^2+y^2})^{\frac{1}{2}}$, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-x + \sqrt{x^2+y^2})^{\frac{1}{2}}$

Type − 03: মান নির্ণয় সংক্রান্ত

EXAMPLE – 01 : $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = ?$

SOLVE : $\{(\sqrt{i} + \sqrt{-i})^2\}^{\frac{1}{2}} = (i + -i) + 2\sqrt{i}\sqrt{-i})^{\frac{1}{2}} = (2\sqrt{-i^2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ Ans:

অথবা, $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 2i} + \sqrt{\frac{1}{2}(-2i)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$(+)v_e$ এর জন্য, $= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i + 1 - i) = \sqrt{2}$, i কে সর্বসময় পজেটিভ ধরা হয়।

Type − 04: এককের কাল্পনিক ঘনমূল সংক্রান্ত

ω এর বৈশিষ্ট্য ঃ $\omega.\omega^2 = 1 \therefore \omega = \frac{1}{\omega^2}$; ω এর ঘাত সমুহ ঃ- $\omega^3 = 1$

$\omega^{3n} = 1 \quad n = 1,2,3 \ldots\ldots n,\qquad \omega^{3n+p} = \omega^p \quad [p < 3]$

EXAMPLE – 01 : প্রমাণ কর ,$(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = 9$

$\text{L.H.S} = (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)$

$= (1-2\omega^2+\omega^4)(1-2\omega+\omega^2)$

$= (1-2\omega^2+\omega)(-3\omega) = (-3\omega^2)\times(-3\omega) = 9\omega^3 = 9.1 = 9$ **Proved**

EXAMPLE – 02: $(x+y)^2 + (x\omega+y\omega^2)^2 + (x\omega^2+y\omega)^2 = 6xy$

$\mathbf{L.H.S} = x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy\omega^3+y^2\omega^4+x^2\omega^4+2xy\omega^3+y^2\omega^2$

$= x^2(1+\omega^2+\omega^4)+y^2(1+\omega^4+\omega^2)+6xy$

$= x^2(1+\omega^2+\omega)+y^2(1+\omega+\omega^2)+6xy$

$= x^2\times 0+y^2\times 0+6xy = 6xy \;= \mathbf{R.H.S} \quad (\mathbf{Proved})$

EXERCISE :

01. $(-1+\sqrt{-3})^4 + (-1—3)^4 = -16$

02. $(1+\omega^2)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8) = 1$

03. $x = p+q,\; y = p\omega+q\omega^2, z = p\omega^2+q\omega$ হয় তবে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2 = 6pq$

04. প্রমান কর যে, $\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\}^n + \{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\}^n = 2$; যখন n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং রাশিটি$= -1$, যখন n অপর কোন পূর্ণ সংখ্যা হয়।

Type − 05 : কিছু গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা ও সমাধান

EXAMPLE – 01 : $P = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হলে , প্রমান কর যে, $P^6 + P^4 + P^2 + 1 = 0$

$P^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} = i \therefore P^4 = -1,\ P^6 = -i \quad \therefore P^6 + P^4 + P^2 + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0 \quad (\textbf{Proved})$

EXAMPLE – 02 : $x = -1 + i\sqrt{2}$ হলে, $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9 = ?$

SOLVE : xএর একটি মূল $-1 + i\sqrt{2}$ হলে অপর একটি মূল অবশ্যই $-1 - i\sqrt{2}$ হবে কারন জটিল মুলগুলি যুগলরূপে থাকে।

$\therefore$ সমীকরনটি : $x^2 -$ (মুলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$= x^2 + 2x + 3 = 0$

$\therefore x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$

$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x - x^2 - 2x - 3 + 12$

$= x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3) - 1(x^2 + 2x + 3) + 12$

$= x^2 \times 0 + 2x \times 0 - 1.0 + 12 = 12$ **Ans :**

EXAMPLE – 03 : $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ হলে প্রমান কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

SOLVE : $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3x\,i^2y^2 + i^3y^3 = x^3 + 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$a = x^3 + 3xy^2, \qquad \frac{a}{x} = x^2 - 3y^2$

এবং $b = 3xy^2 - y^3 , \qquad \frac{b}{y} = 3x^2 - y^2 \qquad \therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4\,(x^2 - y^2)$ Proved

EXAMPLE – 04 : $\mathbf{x : y = a + ib : c + id}$ হলে, প্রমান কর যে,

$(c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = 0$

SOLVE : দেওয়া আছে, $x : y = a + ib : a + ib \implies \frac{x}{y} = \frac{a+ib}{a+ib}$

$\implies xc + ixd = ya + ixd \implies i(dx - by) = ay - cx \implies \{i(dx - by)\}^2 = (ay - cx)^2$

$\implies i^2(d^2x^2 - 2bdxy + b^2y^2) = a^2y^2 - 2acxy + c^2x^2$

$\implies -d^2x^2 + 2bdxy - b^2y^2 = a^2y^2 - 2acxy + c^2x^2$

$\implies c^2x^2 + d^2x^2 - 2acxy - 2bdxy + a^2y^2 + b^2y^2 = 0$ [পক্ষান্তর করে পাই]

$\implies (c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = 0$ (**Proved**)

EXAMPLE – 05 : $z = x + iy$ হলে, $|z - 8| + |z + 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ কিরূপ ?

SOLVE : দেওয়া আছে, $|z - 8| + |z + 8| = 20 \Rightarrow |x + iy - 8| + |x + iy + 8| = 20$

$\Rightarrow |x - 8 + iy| + |x + 8 + iy| = 20 \Rightarrow |x - 8 + iy| = 20 - |x + 8 + iy|$

$\Rightarrow \{\sqrt{(x - 8)^2 + y^2}\}^2 = \{20 - \sqrt{(x + 8)^2 + y^2}\}^2$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 = 400 - 40\sqrt{(x + 8)^2 + y^2} + x^2 + 16x + 64 + y^2$

$\Rightarrow 32x + 400 = 40\sqrt{(x + 8)^2 + y^2} \Rightarrow 4x + 50 = 5\sqrt{(x + 8)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 16x^2 + 400x + 2500 = 25(x^2 + 16x + 64 + y^2)$

$\Rightarrow 16x^2 + 400x + 2500 = 25x^2 + 400x + 1600 + 25y^2)$

$\Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 900 \Rightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \rightarrow$ সঞ্চারপথটি উপবৃত্তাকার।

EXAMPLE – 06 : a, b বাস্তব এবং $a^2+b^2=1$ হলে দেখাও যে, xএর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে ।

SOLVE : দেওয়া আছে, $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib \Rightarrow \frac{1-ix+1+ix}{1-ix-1-ix}=\frac{a-ib+1}{a-ib-1} \Rightarrow \frac{2}{-2ix}=\frac{1+a-ib}{a-1-ib}$

$$\Rightarrow \frac{1}{-ix}=\frac{1+a-ib}{a-1-ib} \Rightarrow -ix=\frac{a-1-ib}{1+a-ib} \Rightarrow -i\times ix=\frac{i(a-1)-(-b)}{1+a-ib}$$

$$\Rightarrow -i^2x=\frac{i(a-1)-(-b)}{1+a-ib} \Rightarrow x=\frac{b+i(a-1)}{(1+a)-ib}=\frac{\{b+i(a-1)\}\{(1+a)+ib\}}{\{(1+a)-ib\}\{(1+a)+ib\}}$$

$$=\frac{b+ab+i(b^2+a^2-1)-ab+b}{(1+a)^2-i^2b^2}=\frac{2b+i\ (1-1)}{(1+a)^2-i^2b^2}$$

$$\therefore x=\frac{2b}{(1+a)^2+b^2}=\frac{2b}{1+2a+a^2+b^2} \quad \therefore x=\frac{2b}{2+2a}=\frac{b}{1+a}$$

সুতরাং $a^2+b^2=1$ এর জন প্রদত্ত সমীকরণে x এর একটি বাস্তব মান থাকবে অর্থাৎ x এর ঐ মান দ্বারা $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে । **(দেখানো হলো)**

EXAMPLE – 07 : যদি $a+b+c=0$ এবং এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হয়, তবে দেখাও যে,

$$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3=27abc.$$

SOLVE : $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$

ধরি, $a+b\omega+c\omega^2=x$; $a+b\omega^2+c\omega=y \therefore x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{x^2+(\omega+\omega^2)xy+\omega^3\}$

$$=(x+y)(x^2+\omega xy+\omega^2xy+\omega^3xy)=(x+y)\{x\,(x+\omega y)+\omega^2y\,(x+\omega y)\}$$
$$=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2y)\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$x+y=2a+b\,(\omega+\omega^2)+c(\omega+\omega^2)=2a-b-c$$
$$x+\omega y=a+b\omega+c\omega^2+a\omega+b\omega^3+c\omega^3=a(1+\omega)+b(1+\omega)+2c\omega^2=-a\omega^2-b\omega^2+2c\omega^2$$
$$=(-a-b+2c)\,\omega^2$$

এখন, $x+\omega^2y=a+b\omega+c\omega^2+a\omega^2+b\omega^4+c\omega^3=a(1+\omega^2)+b\,(\omega+\omega)+c\,(1+\omega^2)$

(i) নং হতে পাই,

$\left(a+b\omega+c\omega^2\right)^3+\left(a+b\omega^2+c\omega\ \right)^3=(2b-a-c)(2a-b-c)(2c-a-b)\omega^3$
$=(2b-a-c)(2a-b-c)(2c-a-b)\left[\because \omega^3=1\right]$
$=\{3b-(a+b+c)\}\{3a-(a+b+c)\}\{3c-(a+b+c)\}$
$=(3b-0)(3a-0)(3c-0)\quad [\because a+b+c=0]$
$=3b.\,3a.\,3c=27\,abc\quad (Showed)$

EXERCISE :

01. $(p\omega^2+q+r\omega)^3+(p\omega+q+r\omega^2)^3=0$ হলে প্রমাণ কর যে, $p=\frac{1}{2}(p+r)$ অথবা $q=\frac{1}{2}(r+p)$ অথবা $r=\frac{1}{2}(p+q)$ [same as 07]

EXAMPLE – 08 : যদি $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots\dots+a_nx^n$ হয়, তবে দেখাও যে,

$(a_0+a_2+a_4-\dots\dots)^2+(a_1-a_3+a_5-\dots\dots)^2=a_0+a_1+a_2+\dots\dots+a_n$

SOLVE : দেওয়া আছে, $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_nx^n\dots\dots\dots(i)$

(i) নং এর x= i বসিয়ে পাই, $(1+i)^n=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+a_4i^4+a_5i^5\dots\dots\dots$

$\Rightarrow (1+i)^n=(a_0-a_2+a_4-\dots\dots)\ +i\,(a_1-a_3+a_5-\dots\dots)\dots\dots\dots(ii)$

(ii) নং এর 'i' এর স্থলে '-i' লিখে পাই,

$(1-i)^n=(a_0-a_2+a_4-\dots\dots)-i\,(a_1-a_3+a_5-\dots\dots)\dots\dots\dots(iii)$

(ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$(1-i^2)^n=(a_0-a_2+a_4-\dots\dots)^2-i^2\,(a_1-a_3+a_5-\dots\dots)^2$
$\Rightarrow 2^n=(a_0-a_2+a_4-\dots\dots)^2+(a_1-a_3+a_5-\dots\dots)^2\dots\dots\dots(iv)$

আবার, (i) নং এ x= 1 বসিয়ে পাই, $2^n=(a_0+a_1+a_2+\dots\dots+a_n)\dots\dots\dots(v)$

(iv) ও (v) নং সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$(a_0-a_2+a_4-\dots\dots)^2+(a_1-a_3+a_5-\dots\dots)^2=a_0+a_1+a_2+\dots\dots+a_n$ **(Showed)**

EXAMPLE – 09 : প্রমাণ কর যে, $(1+x+x^2)^2 = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots\dots\dots\dots + p_{2n}x^{2n}$ হলে দেখাও যে,

$p_0 + p_3 + p_6 + \dots\dots\dots\dots = 3^{n-1}$

SOLVE : দেওয়া আছে, $(1+x+x^2)^2 = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6 + \cdots$

(i) নং সমীকরনে $x = 1$ বসিয়ে পাই, $(1+1+1)^n = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots\dots\dots\dots$

$\Rightarrow 3^n = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \cdots \dots\dots\dots$ (ii)

(i) নং সমীকরনে $x = \omega$ বসিয়ে পাই,

$(1+\omega+\omega^2)^n = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_4\omega^4 + p_5\omega^5 + p_6\omega^6 + \cdots$

$\Rightarrow 0 = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3 + p_4\omega + p_5\omega^2 + p_6 + \dots\dots\dots\dots$ (iii)

(i) নং সমীকরনে $x = \omega^2$ বসিয়ে পাই,

$(1+\omega+\omega^4)^2 = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_4\omega^4 + p_5\omega^5 + p_6\omega^6 + \cdots$

EXAMPLE – 10 : প্রমাণ কর যে, $(1+x+x^2)^2 = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots\dots\dots\dots + p_{2n}x^{2n}$ হলে দেখাও যে, $p_0 + p_3 + p_6 + \dots\dots\dots\dots = 3^{n-1}$

SOLVE : দেওয়া আছে, $(1+x+x^2)^2 = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6 + \cdots$

(i) নং সমীকরনে $x = 1$ বসিয়ে পাই, $(1+1+1)^n = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots\dots\dots\dots$

$\Rightarrow 3^n = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \cdots \dots\dots\dots$ (ii)

(i) নং সমীকরনে $x = \omega$ বসিয়ে পাই,

$(1+\omega+\omega^2)^n = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_4\omega^4 + p_5\omega^5 + p_6\omega^6 + \cdots$

$\Rightarrow 0 = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3 + p_4\omega + p_5\omega^2 + p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) নং সমীকরনে $x = \omega^2$ বসিয়ে পাই,

$(1 + \omega + \omega^4)^2 = p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega^4 + p_3\omega^6 + p_4\omega^8 + p_5\omega^{10} + p_6\omega^{10} + \ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow (1 + \omega^2 + \omega)^n = p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega + p_3 + p_4\omega^2 + p_5\omega + p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$

(ii) + (iii) + (iv) হতে পাই,

$3^n + 0 + 0 = 3p_0 + p_1(1 + \omega + \omega^2) + p_2(1 + \omega^2 + \omega) + 3p_3 + p_4(1 + \omega + \omega^2) + p_5(1 + \omega^2 + \omega) + 3p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow 3^n = 3p_0 + p_1 \times 0 + p_2 \times 0 + 3p_3 + p_4 \times 0 + p_5 \times 0 + p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow 3^n = 3(p_0 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$\Rightarrow p_1 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{3^n}{3}$ $\therefore p_0 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 3^{n-1}$ (**Prove**)

EXAMPLE – 11 : এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে যদি $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $a = c$ বা, $b = \frac{1}{2}(a + c)$.

SOLVE : $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2\omega^2 + c^2\omega^4 + 2ab\omega + 2b\omega.c\omega^2 + 2c\omega^2.a + a^2\omega^2 + b^2 + c^2\omega^4 + 2a\omega.b + 2bc\omega^2 + 2c\omega^2.a\omega + a^2\omega^2 + b^2\omega^4 + c^2 + 2a\omega.b\omega^2 + 2b\omega^2.c + 2c.a\omega = 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2\omega^2 + c^2\omega + 2ab\omega + 2bc + 2ca\omega^2 + a^2\omega^2 + b^2 + c^2\omega + 2ab\omega + 2bc\omega^2 + 2ca + a^2\omega^2 + b^2\omega + c^2 + 2ab + 2bc^2\omega + 2ca\omega = 0$ $[\because \omega^3 = 1, \omega^4 = \omega]$

$\Rightarrow a^2(1 + \omega^2 + \omega^2) + b^2(1 + \omega + \omega^2) + c^2(1 + \omega + \omega) + 2ab(1 + \omega + \omega) + 2bc(1 + \omega^2 + \omega^2) + 2ca(1 + \omega + \omega^2) = 0$

$\Rightarrow a^2(-\omega + \omega^2) + c^2(-\omega^2 + \omega) + 2ab(-\omega^2 + \omega) + 2bc(-\omega + \omega^2) = 0$

$\Rightarrow \omega^2(a^2 - c^2 - 2ab + 2bc) - \omega(a^2 - c^2 - 2ab + 2bc) = 0$

$\Longrightarrow (a^2 - c^2 - 2ab + 2bc)(\omega^2 - \omega) = 0 \therefore a^2 - c^2 - 2ab + 2bc = 0[\because \omega^2 - \omega \neq 0]$

$\Longrightarrow (a - c)(a - c) - 2b(a - c) = 0 \Longrightarrow (a - c)(a + c - 2b) = 0$

হয়, $a - c = 0 \therefore a = c$ অথবা, $a + c - 2b = 0 \Longrightarrow a + c = 2b \quad \therefore b = \frac{1}{2}(a + c)$

$\therefore a = c \Longrightarrow \therefore b = \frac{1}{2}(a + c)$

EXAMPLE – 12 : $\log_e(1 - x + x^2) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 +$ ----- হলে দেখাও যে, $a_3 + a_6 + a_9 + \ldots\ldots = \frac{2}{3}\log_e 2$

SOLVE : $x = 1, \omega, \omega^2$ বসাই,

$\log_e(1 - 1 + 1) = 0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \ldots\ldots$

$\log_e(1 - \omega + \omega^2)$

$= a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + a_7\omega^7 + a_8\omega^8 + a_9\omega^9$

$\log_e(1 - \omega + \omega^2)$

$= a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10} + a_6\omega^{12} + a_7\omega^{14} + a_8\omega^{16}$

$\mathbf{Now}, 0 + \log_e(-2\omega) + \log_e(-2\omega^2) = a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + 3a_3 + a_4 \times 0 + 3a_6 + a_7 \times 0 + 3a_9$

$\Rightarrow \log_e(4\omega^3) = 3(a_3 + a_6 + a_9 + \ldots\ldots)$

$\Rightarrow \log_e(4\omega^3) = 3(a_3 + a_6 + a_9 + \ldots\ldots) \Rightarrow \frac{2}{3}\log_e 2 = a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + \ldots.)$

Φ: অয়লার এর সূত্র হতে ডিমো'ভারের সূত্র ঃ $\mathbf{z} = x + iy = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ হলে প্রমান কর যে ,

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$; $z.z = r(\cos\theta + i\sin\theta).r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r^2(\cos^2\theta + i\sin\theta.\cos\theta + i\cos\theta.\sin\theta + i^2 son^2\theta)$

$= r^2\{\cos^2\theta - \sin^2\theta + i(\sin\theta.\cos\theta + \sin\theta.\cos\theta)\} = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

$z.z.z = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)r'(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r^3[\cos 2\theta.\cos\theta + i\ \sin 2\theta.\cos\theta + i^2 son 2\theta.\sin\theta + i\sin\theta.\cos 2\theta]$

$= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$; $z.z.z\ldots.z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ (**Proved**)

EXAMPLE – 13 : α ও β এক এর দটি জটিল মূল হলে দেখাও যে, $\alpha^4+\beta^4+\alpha^{-1}\beta^{-1}=0$

$\alpha=-\frac{1+\sqrt{3i}}{2}=\omega \therefore \alpha^4=\omega^4=\omega$ এবং $\alpha^{-1}=\omega^2$

$\beta=\frac{-1-\sqrt{3i}}{2}=\omega^2 \therefore \beta^4=\omega^8=\omega^2$ এবং $\beta^{-1}=\omega$

রাশিটি $=\omega+\omega^2+\omega^2.\omega=-1+1=0$ দেখানো হল।

EXAMPLE – 14 : $z^3+2z^2+2z+1=0$ এর সাধারন মূল নির্ণয় কর।

সমাধান: $z^3+1+2z(z+1)=0 \Rightarrow (z+1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z^3+1^3=0 \Rightarrow \frac{z}{-1}=1,\omega,\omega^2$

$$\therefore z=-1,-\omega,-\omega^2,$$

EXAMPLE – 15 : $1,\omega,\omega^2$ এক এর মূল হলে $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{\omega.\omega^2(c+a\omega+b\omega^2)}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{\omega^2.\omega(b+c\omega+a\omega^2)}=\frac{a+b\omega+c\omega^2}{\omega(a+b\omega+c\omega^2)}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)}$

$=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1\ Ans$

EXAMPLE – 16 : $\log_e(1-x+x^2)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+$ ----- হলেদেখাও যে, $a_3+a_6+a_9+\ldots\ldots=\frac{2}{3}\log_e 2$ **সমাধানঃ** $x=1,\omega,\omega^2$ বসাই,

$\log_e(1-1+1)=0=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9\ldots\ldots.$

$\log_e(1-\omega+\omega^2)$
$=a_1\omega+a_2\omega^2+a_3\omega^3+a_4\omega^4+a_5\omega^5+a_6\omega^6+a_7\omega^7+a_8\omega^8+a_9\omega^9$

$\log_e(1-\omega+\omega^2)$
$=a_1\omega^2+a_2\omega^4+a_3\omega^6+a_4\omega^8+a_5\omega^{10}+a_6\omega^{12}+a_7\omega^{14}+a_8\omega^{16}$

Now,

$0+\log_e(-2\omega)+\log_e(-2\omega^2)=a_1\times 0+a_2\times 0+3a_3+a_4\times 0+3a_6+a_7\times 0+3a_9$

$\Rightarrow \log_e(4\omega^3)=3(a_3+a_6+a_9+\ldots\ldots.)$

$\Rightarrow \log_e(4\omega^3)=3(a_3+a_6+a_9+\ldots\ldots.)$ $\Rightarrow \frac{2}{3}\log_e 2=a_3+a_6+a_9+a_{12}+\ldots.)\ Solved$

EXAMPLE – 17 : দেখাও যে, $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}$

<u>সমাধানঃ</u>L.H.S = $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2$

$=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} + (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$ $[\therefore z^2 = z\bar{z}]$

$= (z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2}) + (z_1-z_2)(\bar{z_1}-\bar{z_2})$ $[\therefore \overline{z_1+z_2} = \bar{z_1}+\bar{z_2}]$

$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1}$

$= 2(z_1\bar{z_1}+z_2\bar{z_2}) = 2\{|z_1|^2 + |z_2|^2\} = R.H.S$ $\quad Showed$

EXAMPLE – 18: $z = x+iy,\ z_1 = 10+6i,\ z_2 = 4+6i$ এবং $arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2-14x-18y+112=0$

সমাধানঃ $arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \arg(z-z_1) - \arg(z-z_2)$

$=\arg\{x-10+i\,(y-6)\} - \arg\{(x-4)+i\,(y-6)\}$

$=tan^{-1}\frac{y-6}{x-10} - tan^{-1}\frac{y-6}{x-4}$ $\quad =tan^{-1}\frac{\frac{y-6}{x-10}-\frac{y-6}{x-4}}{1+\frac{y-6}{x-10}\times\frac{y-6}{x-4}}$

$=tan^{-1}\frac{(y-6)(x-4-x+10)}{x^2-14x+40+y^2+36-12y}$ $\quad =\frac{6y-36}{x^2+y^2-14x-12y+76}$ $\quad = tan\frac{\pi}{4}$ $\quad = 1$

$\Rightarrow x^2+y^2-14x-12y+76 = 6y-36 \Rightarrow x^2+y^2-14x-18y+112$
$= 0$ $\quad showed$

EXAMPLE – 19 : $(\sqrt{3}+3i)(-2+2i) \div (\sqrt{3}-3i)$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর।

$=\frac{\{-2\sqrt{3}-6+(2\sqrt{3}-6)i\}(3+\sqrt{3}i)}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}$ $\quad =\frac{2\sqrt{3}.3-2.3i-18-6\sqrt{3}i+(2\sqrt{3}.3-18)i-2.3+6\sqrt{3}}{9+3}$

$=\frac{-6i-18+6\sqrt{3}i-18i-6\sqrt{3i}-6}{12}$ $\quad =-2-2i,\quad z = -2-2i$

মুডুলাস $\quad = |z| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$

আর্গুমেন্ট $\quad = angz = \pi + tan^{-1}\frac{2}{2} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

মূখ্য আর্গুমেন্ট $\quad = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

পোলার আকার $\quad = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$

নিজে চেষ্টা কর:

১। $\frac{5+iy}{3-2i}$ এর আর্গুমেন্ট ও মুডুলাস কত? Ans: $\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}$

২। $z = x + iy$ ও $\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$

৩। $z = x + iy$ জটিল সংখ্যাটি $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ কে সিদ্ধ করলে দেখাও যে, z ,x অক্ষের উপর অবস্থিত।

৪। (a) $iz^3 + z^2 - z + i = 0$ হলে $|z|$ নির্ণয় কর। $Ans: 1$

(b) $z^{1958} + z^{1936} + 1 = 0$ সমীকরণের সাধারণ মূল নির্ণয় কর। $Ans: -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

৫। $(1 + x + x^2)^2 = p_0 + p_1x + p_2x^2 \dots. + p_{2n}x^{2n}$ হলে দেখাও যে, $p_0 + p_3 + p_6 + \dots\dots = 3^{n-1}$