ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
Matrices and Determinants

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-1.1.5 | পৃষ্ঠা-৫

1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান। তাই ম্যাট্রিক্সটি একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 3×3।

$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের একটিমাত্র কলাম আছে। তাই ম্যাট্রিক্সটি একটি কলাম ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 3×1।

$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স। এর প্রধান কর্ণের ভুক্তিগুলো অশূন্য ও বাকি ভুক্তিগুলো শূন্য। তাই এটি একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 3×3।

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স। এর কর্ণের ভুক্তিগুলো সমান তাই এটি একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 2×2।

$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের একটি মাত্র সারি আছে। তাই এটি একটি সারি ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 1×3।

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তিগুলো সমান। অর্থাৎ 1 এবং বাকিগুলো 0। তাই এটি একটি একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 2×2।

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সকল ভুক্তি শূন্য তাই এটি একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। এর ক্রম 3×3।

2. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore A^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

3. দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

তাহলে, $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} = B$

$\therefore$ B একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। **(Ans.)**

এবং $C = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 8 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

তাহলে, $C^t = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 8 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -C$

$\therefore$ C একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। **(Ans.)**

অনুচ্ছেদ-1.2.3 | পৃষ্ঠা-৬

1. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

দুইটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম একই অর্থাৎ সমান না হলে তাদের যোগ বা বিয়োগ করা সম্ভব নয়।

(i) A ম্যাটিক্সের ক্রম 3×3
B ম্যাটিক্সের ক্রম 3×2
$\therefore$ $(A + B)$ নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(ii) B ম্যাটিক্সের ক্রম 3×2
C ম্যাটিক্সের ক্রম 3×1
$\therefore$ $(B - C)$ নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(iii) A ম্যাটিক্সের ক্রম 3×3
D ম্যাটিক্সের ক্রম 3×3
$\therefore$ $(A - D)$ নির্ণয় করা সম্ভব।

2. (i) A ও D ম্যাট্রিক্স দুইটির ক্রম একই।
$\therefore$ $(2A + 3D)$ নির্ণয় করা সম্ভব।

এখন $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & -2 & 4 \\ 8 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

$3D = 3\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & -6 \\ 3 & 15 & -9 \end{bmatrix}$

$$\therefore 2A + 3D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & -2 & 4 \\ 8 & 10 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & -6 \\ 3 & 15 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 0+6 & -4+3 \\ 6+9 & -2+12 & 4+(-6) \\ 8+3 & 10+15 & 14+(-9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 15 & 10 & -2 \\ 11 & 25 & 5 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

(ii) A ও B এর ক্রম সমান নয়।

$\therefore$ (3A – 2B) নির্ণয় সম্ভব নয়। **(Ans.)**

(iii) $4A = 4\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\3 & -1 & 2\\4 & 5 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0 & -8\\12 & -4 & 8\\16 & 20 & 28\end{bmatrix}$

$2D = 2\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\3 & 4 & -2\\1 & 5 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\6 & 8 & -4\\2 & 10 & -6\end{bmatrix}$

$\therefore\ 4A - 2D = \begin{bmatrix}4 & 0 & -8\\12 & -4 & 8\\16 & 20 & 28\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\6 & 8 & -4\\2 & 10 & -6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4-0 & 0-4 & -8-2\\12-6 & -4-8 & 8-(-4)\\16-2 & 20-10 & 28-(-6)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -4 & -10\\6 & -12 & 12\\14 & 10 & 34\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

অনুচ্ছেদ-1.2.4 | পৃষ্ঠা-৭

দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $B = [2\ 3\ -4]$,

$C = \begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\2 & 0 & -7\\3 & 5 & 0\end{bmatrix}$

দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল নির্ণয়ের শর্ত ১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ২য় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হতে হবে।

এখানে, A এর ক্রম 3×1

B এর ক্রম 1×3

C এর ক্রম 3×3

(i) A এর কলাম B এর সারির সমান। সুতরাং AB নির্ণয় সম্ভব।

$\therefore\ AB = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}[2\ 3-4] = \begin{bmatrix}-2 & -3 & 4\\4 & 6 & -8\\2 & 3 & -4\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(ii) B এর কলাম A এর সারির সমান। BA নির্ণয় সম্ভব।

$\therefore\ BA = [2\ 3-4]\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$

$= [2.(-1) + 3.2 + (-4).1]$

$= [-2 + 6 - 4] = [0]$ **(Ans.)**

(iii) A এর কলাম C এর সারির সমান নয়।

$\therefore$ AC নির্ণয় সম্ভব নয়। **(Ans.)**

(iv) B এর কলাম C এর সারির সমান। BC নির্ণয় সম্ভব।

$\therefore\ BC = [2\ 3-4]\begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\2 & 0 & -7\\3 & 5 & 0\end{bmatrix}$

$= [2 + 6 - 12\ \ -8 + 0 - 20\ \ 12 - 21 - 0]$

$= [-4\ -28\ -9]$ **(Ans.)**

(v) C এর কলাম A এর সারির সমান।

তাহলে, CA নির্ণয় সম্ভব।

$\therefore\ CA = \begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\2 & 0 & -7\\3 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-1-8+6\\-2+0-7\\-3+10+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-9\\7\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(vi) C এর কলাম B এর সারির সমান নয়।

$\therefore$ CB নির্ণয় সম্ভব নয়। **(Ans.)**

(vii) (i) নং হতে পাই, AB এর ক্রম 3×3

C এর ক্রম 3×3

তাহলে, AB + C নির্ণয় সম্ভব।

$\therefore\ AB + C = \begin{bmatrix}-2 & -3 & 4\\4 & 6 & -8\\2 & 3 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\2 & 0 & -7\\3 & 5 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-2+1 & -3-4 & 4+6\\4+2 & 6+0 & -8-7\\2+3 & 3+5 & -4+0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-1 & -7 & 10\\6 & 6 & -15\\5 & 8 & -4\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(viii) (ii) নং থেকে পাই, BA এর ক্রম 1×1

C এর ক্রম 3×3

$\therefore$ BA + C নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

অনুশীলনী-1(A) এর সমাধান

1. (i) $3A + 4B = 3\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & -4\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -1 & 5\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}6 & -15 & 3\\9 & 0 & -12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -8 & -12\\0 & -4 & 20\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}6+4 & -15-8 & 3-12\\9+0 & 0-4 & -12+20\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}10 & -23 & -9\\9 & -4 & 8\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(ii) $7A - 5B = 7\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 3 & 4\\-4 & 5 & 6\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\2 & 0 & -7\\3 & 5 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}21 & 7 & -7\\14 & 21 & 28\\-28 & 35 & 42\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & -20 & 30\\10 & 0 & -35\\15 & 25 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}21-5 & 7+20 & -7-30\\14-10 & 21-0 & 28+35\\-28-15 & 35-25 & 42-0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}16 & 27 & -37\\4 & 21 & 63\\-43 & 10 & 42\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

2. (i) $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3\times1+(-4)\times2+2\times3 & 3\times2+(-4)\times5+2\times7 \\ -2\times1+1\times2+0\times3 & -2\times2+1\times5+0\times7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 \\ -2+2+0 & -4+5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times3+2(-2) & 1\times(-4)+2\times1 & 1\times2+2\times0 \\ 2\times3+5(-2) & 2\times(-4)+5\times1 & 2\times2+5\times0 \\ 3\times3+7(-2) & 3\times(-4)+7\times1 & 3\times2+7\times0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3-4 & -4+2 & 2+0 \\ 6-10 & -8+5 & 4+0 \\ 9-14 & -12+7 & 6+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(ii) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times(-1)+0\times4+(-2)\times2 & 1\times3+0\times0+(-2)\times6 \\ 3\times(-1)+(-2)\times4+(-1)\times2 & 3\times3+(-2)\times0+(-1)\times6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+0-4 & 3+0-12 \\ -3-8-2 & 9-0-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$

এবং $BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1\times1+3\times3 & -1\times0+3\times(-2) & -1\times(-2)+3\times(-1) \\ 4\times1+0\times3 & 4\times0+0\times(-2) & 4\times(-2)+0\times(-1) \\ 2\times1+6\times3 & 2\times0+6(-2) & 2\times(-2)+6\times(-1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+9 & 0-6 & 2-3 \\ 4+0 & 0-0 & -8-0 \\ 2+18 & 0-12 & -4-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 4 & 0 & -8 \\ 20 & -12 & -10 \end{bmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$ (প্রমাণিত)

(iii) দেওয়া আছে,

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 35+4+45 \\ 0+5+0 & -14+10+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 84 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0-14 & 0+35 & 0+21 \\ 5-4 & 2+10 & 9+6 \\ 0-10 & 0+25 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 35 & 21 \\ 1 & 12 & 15 \\ -10 & 25 & 15 \end{bmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$ (দেখানো হলো)

(iv) $AB = [3 \;\; 4] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$= [3\times1+4\times4 \quad 3\times(-2)+4\times5 \quad 3\times0+4(-3)]$

$= [3+16 \quad -6+20 \quad 0-12]$

$= [19 \quad 14 \quad -12]$ **(Ans.)**

(v) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times4+6\times2 & 1\times0+6\times(-1) \\ -3\times4+5\times2 & -3\times0+5\times(-1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+12 & 0-6 \\ -12+10 & 0-5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4\times1+0\times(-3) & 4\times6+0\times5 \\ 2\times1+(-1)(-3) & 2\times6+(-1)\times5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+0 & 24+0 \\ 2+3 & 12-5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(vi) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1\times0+2\times1+3\times0 & 1\times2+2\times2+3\times(-1) \\ 4\times0+5\times1+6\times0 & 4\times2+5\times2+6\times(-1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

এবং $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0\times1+2\times4 & 0\times2+2\times5 & 0\times3+2\times6 \\ 1\times1+2\times4 & 1\times2+2\times5 & 1\times3+2\times6 \\ 0\times1+(-1)\times4 & 0\times2+(-1)\times5 & 0\times3+(-1)\times6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

$\therefore AB \neq BA$ (দেখানো হলো)

(vii) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8\times(-4)+4\times1+(-1)\times5 & 8\times6+4\times3+(-1)\times4 & 8\times2+4\times7+(-1)\times1 \\ 0\times(-4)+1\times1+3\times5 & 0\times6+1\times3+3\times4 & 0\times2+1\times7+3\times1 \\ 5\times(-4)+4\times1+8\times5 & 5\times6+4\times3+8\times4 & 5\times2+4\times7+8\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -32+4-5 & 48+12-4 & 16+28-1 \\ 0+1+15 & 0+3+12 & 0+7+3 \\ -20+4+40 & 30+12+32 & 10+28+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -33 & 56 & 43 \\ 16 & 15 & 10 \\ 24 & 74 & 46 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

3. (i) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6-0-5 & -2+0+2 & 2+0-2 \\ 15-15+0 & -5+6-0 & 5-5+0 \\ 0-15+15 & 0+6-6 & 0-5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

আবার,

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5+0 & 0-1+1 & -3-0+3 \\ -30+30-0 & 0+6-5 & 15+0-15 \\ 10-10+0 & 0-2+2 & -5-0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

(ii) $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4-0 \\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

এবং $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore\ AB = I_3 = BA$ (দেখানো হলো)

(iii) $BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1+6+10 & 2+9+4 & -1-3+2 \\ 4-4+25 & -8-6+10 & 4+2+5 \\ 6+2-15 & -12+3-6 & 6-1-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 15 & -2 \\ 25 & -4 & 11 \\ -7 & -15 & 2 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-8+6 & 3+4+1 & 2-10-3 \\ -2+12-6 & 6-6-1 & 4+15+3 \\ -5+8+6 & 15-4+1 & 10+10-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 8 & -11 \\ 4 & -1 & 22 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ AB \neq BA$ (প্রমাণিত)

4. (i) $AB = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times4+2\times6+3\times(-1) \\ 4\times4+5\times6+6\times(-1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad -5 \quad 6]$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

এবং $BC = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad -5 \quad 6]$

$$= \begin{bmatrix} 4\times1 & 4\times2 & 4\times-5 & 4\times6 \\ 6\times1 & 6\times2 & 6\times-5 & 6\times6 \\ -1\times1 & -1\times2 & -1\times-5 & -1\times6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+12-3 & 8+24-6 & -20-60+15 & 24+72-18 \\ 16+30-6 & 32+60-12 & -80-150+30 & 96+180-36 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ, (AB)C = A(BC) (দেখানো হলো)

$$\text{(ii)}\ AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+10 & 16+15 \\ 20+26 & 40+39 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

আবার, $BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4\times1+3\times2 & 4\times2+3\times3 \\ 2\times1+1\times2 & 2\times2+1\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+8 & 17+14 \\ 30+16 & 51+28 \\ 0+4 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ (AB)C = A(BC) (প্রমাণিত)

$$\text{(iii)}\ AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & 3-0 & 0-1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB(C) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+9-1 \\ 8+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11-5 \\ 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ (AB) C = A(BC) (দেখানো হলো)

5. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times3+2\times5 & 3\times2+2\times(-1) \\ 5\times3+(-1)\times5 & 5\times2+(-1)\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+10 & 6-2 \\ 15-5 & 10+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2-5A+6I = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19-15+6 & 4-10+0 \\ 10-25+0 & 11+5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

$$\therefore A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times9+2\times(-8) & 1\times(-4)+2\times17 \\ 4\times9+(-3)\times(-8) & 4\times(-4)+(-3)\times17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

$$\therefore A^2+2A-11I$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+2-11 & -4+4+0 \\ -8+8-0 & 17-6-11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$ (দেখানো হলো)

(iii) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+6 & 2-8\\ 3-12 & 6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}$ (Ans.)

$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7-18 & 14+24\\ -9+66 & -18-88\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & 38\\ 57 & -106\end{bmatrix}$ (Ans.)

$\therefore A^2+3A-10I=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}-10\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$ (দেখানো হলো)

6. (i) $A^2=A.A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+4+3 & -4+2+6 & 6-12-0\\ -4+2+6 & 4+1+12 & -6-6-0\\ 2-4+0 & -2-2+0 & 3+12+0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}11 & 4 & -6\\ 4 & 17 & -12\\ -2 & -4 & 15\end{bmatrix}$

$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}11 & 4 & -6\\ 4 & 17 & -12\\ -2 & -4 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-22+8+6 & 22+4+12 & -33-24-0\\ -8+34+12 & 8+17+24 & -12-102-0\\ 4-8-15 & -4-4-30 & 6+24+0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-8 & 38 & -57\\ 38 & 49 & -114\\ -19 & -38 & 30\end{bmatrix}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=A^3+A^2-21A-45I$

$=\begin{bmatrix}-8 & 38 & -57\\ 38 & 49 & -114\\ -19 & -38 & 30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & 4 & -6\\ 4 & 17 & -12\\ -2 & -4 & 15\end{bmatrix}$

$-21\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}-45\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-8+11+42-45 & 38+4-42+0 & -57-6+63+0\\ 38+4-42+0 & 49+17-21-45 & -114-12+126+0\\ -19-2+21+0 & -38-4+42+0 & 30+15+0-45\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ii) দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2\\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2\\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$

এখন, প্রদত্ত রাশিমালা $=A^2-4A-5I$

$=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 8 & 8\\ 8 & 4 & 8\\ 8 & 8 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (Ans.)

(iii) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

সুতরাং, $A^2=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2\\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3\\ 1-2+1 & 3-0-1 & 2-3+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 1 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$

এবং $A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}9 & 1 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13\\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7\\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}24 & 14 & 34\\ 18 & 8 & 26\\ 4 & 0 & 6\end{bmatrix}$

এখন প্রদত্ত রাশি $=A^3-2A^2+A-2I$

$=\begin{bmatrix}24 & 14 & 34\\ 18 & 8 & 26\\ 4 & 0 & 6\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}9 & 1 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$+\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 2 & 26 \\ 10 & 6 & 14 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-18+1-2 & 14-2+3-0 & 34-26+2-0 \\ 18-10+2-0 & 8-6+0-2 & 26-14+3-0 \\ 4-0+1-0 & 0-4-1-0 & 6-0+1-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

7.(a) (i) দেওয়া আছে,

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \therefore A^t = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 12 & 3 & 24 \end{bmatrix} \quad \therefore B^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 24 \end{bmatrix}$

এখন, $A + B = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 12 & 3 & 24 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 12 & -6 & 12 \\ 15 & 6 & 21 \end{bmatrix}$$

সুতরাং $(A+B)^t = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 12 & -6 & 12 \\ 15 & 6 & 21 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 15 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 12 & 21 \end{bmatrix}$

$$\therefore (A+B)^t = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 15 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 12 & 21 \end{bmatrix}$$

আবার, $A^t + B^t = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 24 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 12 & 15 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 12 & 21 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A+B)^t = A^t + B^t$ (দেখানো হলো)

(ii) $AB = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 12 & 3 & 24 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 36+18+0 & -36+9+0 & 0+27+0 \\ 18-54+36 & -18-27+9 & 0-81+72 \\ 9+18-36 & -9+9-9 & 0+27-72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 54 & -27 & 27 \\ 0 & -36 & -9 \\ -9 & -9 & -45 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $(AB)^t = \begin{bmatrix} 54 & -27 & 27 \\ 0 & -36 & -9 \\ -9 & -9 & -45 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 54 & 0 & -9 \\ -27 & -36 & -9 \\ 27 & -9 & -54 \end{bmatrix}$

$$\therefore (AB)^t = \begin{bmatrix} 54 & 0 & -9 \\ -27 & -36 & -9 \\ 27 & -9 & -45 \end{bmatrix}$$

আবার, $B^tA^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 36+18+0 & 18-54+36 & 9+18-36 \\ -36+9+0 & -18-27+9 & -9+9-9 \\ 0+27+0 & 0-81+72 & 0+27-72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 54 & 0 & -9 \\ -27 & -36 & -9 \\ 27 & -9 & -45 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)^t = B^tA^t$ (দেখানো হলো)

(b) দেওয়া আছে,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\therefore A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \therefore B' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

আবার, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times(-3)+0\times2+(-2)\times1 & 1\times1+0\times4+(-2)\times(-2) \\ 2\times(-3)+(-1)\times2+3\times1 & 2\times1+(-1)\times4+3\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+0-2 & 1+0+4 \\ -6-2+3 & 2-4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$$

এখন, বামপক্ষ $= (AB)' = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

ডানপক্ষ $= B'A'$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3)\times1+2\times0+1\times(-2) & (-3)\times2+2\times(-1)+1\times3 \\ 1\times1+4\times0+(-2)\times(-2) & 1\times2+4\times(-1)+(-2)\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3+0-2 & -6-2+3 \\ 1+0+4 & 2-4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)' = B'A'$ (দেখানো হলো)

(c) বর্গাকার কোনো ম্যাট্রিক্স A সমঘাতি হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore$ A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স। **(দেখানো হলো)**

(d) $$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 . B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0-0 & 0+0-0 & 0+0-0 \\ 3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27 \\ -1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore$ B ম্যাট্রিক্সটি 3 সূচকের একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(দেখানো হলো)

(e) বর্গ ম্যাট্রিক্স C অভেদঘাতি হবে যদি $C^2 = I$ হয়।

$$\therefore C^2 = C . C = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25-24+0 & 40-40+0 & 0+0+0 \\ -15+15+0 & -24+25+0 & 0+0-0 \\ -5+6-1 & -8+10-2 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore$ C ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি। **(প্রমাণিত)**

(f) একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স D উলম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি $DD^t = D^tD = I$ হয়।

$$\therefore DD^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1+4+4 & -2-2+4 & -2+4-2 \\ -2-2+4 & 4+1+4 & 4-2-2 \\ -2+4-2 & 4-2-2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore$ D ম্যাট্রিক্সটি উলম্ব। **(প্রমাণিত)**

(g) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সহগুণক ম্যাট্রিক্স

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-0 & -(4-0) & -1-6 \\ -(4+1) & 0-3 & -(0-3) \\ 0-2 & -(0-1) & 0-1 \end{bmatrix}$$

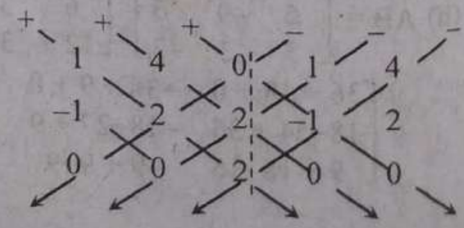
$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 & -7 \\ -5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-1.4 | পৃষ্ঠা-১৩

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

এখানে,



$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 2 \times 2 + 4 \times 2 \times 0 + 0 \times (-1) \times 0$
$\quad - 0 \times 2 \times 0 - 1 \times 2 \times 0 - 4 \times (-1) \times 2$
$= 4 + 0 + 0 - 0 - 0 + 8$
$= 12$

(ii) $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$

এখানে,

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \\ p & q & r & p & q \\ 0 & x & y & 0 & x \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \end{array}$$

$\therefore \begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = p \times x \times z + q \times y \times 0 + r \times 0 \times 0$
$\quad - r \times x \times 0 - p \times y \times 0 - q \times 0 \times z$
$= pxz + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = pxz.$

▶ অনুচ্ছেদ-1.8.1 | পৃষ্ঠা-১৮

1. (i) এখানে, $\det B = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\therefore$ B একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং B ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় সম্ভব নয়। **(Ans.)**

(ii) এখানে, $\det C = |C| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

$= 1(36 - 16) + 4(4 - 12) + 6(8 - 6)$
$= 20 - 32 + 12 = 32 - 32 = 0$

$\therefore$ C একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং C ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় সম্ভব নয়। **(Ans.)**

(iii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

এখানে, $\det A = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= -1(5) + 2(0 - 10) - 3(-4 - 4)$
$= -5 - 20 + 24 = -1 \neq 0$ একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় সম্ভব।

এবং $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -4$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

সুতরাং $A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^t$

$= -\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

2. ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের পার্থক্য নিম্নরূপ:

ম্যাট্রিক্স (Matrix)	নির্ণায়ক (Determinant)
i. যখন কোনো সংখ্যা রাশি, পরামিতি বা চলক সমূহকে শ্রেণিবদ্ধভাবে আয়তকার বা বর্গাকারে সাজানো হয়, তখন তাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়।	i. দুইটি উল্লম্ব সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে বর্গাকারভাবে কতগুলি সংখ্যা সাজানো হলে তাকে নির্ণায়ক বলা হয়।
ii. ম্যাট্রিক্স এর কোন নির্দিষ্ট মান নেই।	ii. নির্ণায়ক এর সুনির্দিষ্ট মান থাকে।
iii. এর সারি ও কলাম পরস্পর বিনিময় করা যায় না।	iii. এর সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে রূপান্তরিত করা যায়।
iv. এর সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হতে পারে আবার নাও হতে পারে।	iv. এর সারি ও কলাম সংখ্যা অবশ্যই সমান হতে হবে।
v. m সংখ্যক সারি n সংখ্যক কলাম হলে এর ভুক্তি হবে mn।	v. ক্রম n হলে এর ভুক্তি সংখ্যা n^2 হবে।
vi. একে কোন ধ্রুবক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে তার প্রত্যেকটি ভুক্তিকে (সারিতে বা কলামে) এই ধ্রুবক সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়।	vi. একে কোন ধ্রুব সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে এর একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলিকে গুণ করতে হয়।

▶ অনুচ্ছেদ-1.9.2 | পৃষ্ঠা-১৯

1. দেওয়া আছে, $x + 2y - z = 5$

$3x - y + 3z = 7$

$2x + 3y + z = 11$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-9)+2(6-3)-1(9+2)$

$= -10 + 6 - 11 = -15 \neq 0$

তাহলে, $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 5(-1-9) + 2(33-7) - 1(21+11)$

$= -50 + 52 - 32 = -30$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1(7-33) + 5(6-3) - 1(33-14)$

$= -26 + 15 - 19 = -30$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1(-11-21) + 2(14-33) + 5(9+2)$

$= -32 - 38 + 55 = -15$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-30}{-15} = 2; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-30}{-15} = 2;$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-15} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y, z) = (2, 2, 1)$

2. প্রদত্ত সমীকরণ জোটকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots \ldots \text{(i)}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $|A| = 2(3-4) - 1(1+2) - 1(2+3)$

$= -2 - 3 - 5 = -10 \neq 0$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4 & -(1+2) & 2+3 \\ -(1+2) & 2-1 & -(4+1) \\ 2+3 & -(4+1) & 6-1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

(i) নং থেকে পাই, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -5 & -30 & +5 \\ -15 & +10 & -5 \\ 25 & -50 & +5 \end{bmatrix} = \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -30 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$x = 3, y = 1, z = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (3, 1, 2)$

অনুশীলনী-1(B) এর সমাধান

1. (i) $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 4 & 20 & 11 \\ -30 & 15 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 44 & 20 & 11 \\ 0 & 15 & 14 \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1 + 2c_2$ প্রয়োগ করে]

$= -44(-70-45) = 44 \times 115 = 5060$ **(Ans.)**

(ii) $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+y-x-y & x & y \\ x-x-z-z & x+z & z \\ y-z-y-z & z & y+z \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1 - (c_2 + c_3)$ প্রয়োগ করে]

$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} = -2z \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x+z & z \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$

$= -2z \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$ [$r_2' = r_2 - r_3$]

$= -2z \begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix} = -2z(-xy - xy)$

$= -2z(-2xy) = 4xyz$ **(Ans.)**

(iii) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix}$

$= abc.abc \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= a^2b^2c^2 \{-1(1-1) - 1(-1-1) + 1(1+1)\}$

$= a^2b^2c^2 (2+2) = 4a^2b^2c^2$ **(Ans.)**

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2-bc+ca & b^2-c^2-ca+ab & c^2-ab \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ (a-b)(a+b)+c(a-b) & (b-c)(b+c)+a(b-c) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(a+b+c)(1-1)$

$= (a-b)(b-c)(a+b+c) \times 0 = 0$ **(Ans.)**

(v) $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+\omega^3 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega+\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2-\omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_3\omega]$

$= \begin{vmatrix} 2 & -\omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= 2\begin{vmatrix} \omega^2 & 1 \\ 1 & -\omega \end{vmatrix} = 2[-\omega^3 - 1]$

$= 2(-1-1)$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= -4$ **(Ans.)**

2. (i) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 \end{vmatrix}$ [১ম সারি সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) & (b-c)(b^2+bc+c^2) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a^2+ab+b^2) & (b^2+bc+c^2) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$

$= (a-b)(b-c)\{(c^2-a^2)+b(c-a)\}$

$= (a-b)(b-c)\{(c+a)(c-a)+b(c-a)\}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} p & a & b+c \\ p & b & c+a \\ p & c & a+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} p & a+b+c & b+c \\ p & a+b+c & c+a \\ p & a+b+c & a+b \end{vmatrix}$

$[c'_2 = c_2 + c_3$ প্রয়োগ করে]

$= p(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= p(a+b+c) \times 0$ [$\because$ দুইটি কলাম একই]

$= 0 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 + c_3$ প্রয়োগ করে]

$= 3(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot 0$ [$\because$ দুইটি কলাম একই]

$= 0 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iv) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং, $c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$= \begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-b)^2(a-b)$

$= (a-b)^3 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(v) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & \cos2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & \cos2\alpha - \cos2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos2\beta - \cos2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

$[r'_1 = r_1 - r_2$ এবং $r'_2 = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= \begin{vmatrix} \cos2\alpha - \cos2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ \cos2\beta - \cos2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) & \sin\alpha - \sin\beta \\ -2(\sin^2\beta - \sin^2\gamma) & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$

$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) \times \begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & 1 \\ \sin\beta + \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$

$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) \times \{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\beta - \sin\gamma\}$

$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(vi) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x - \log x & \log 2y - \log y & \log 2z - \log z \\ \log 3x - \log 2x & \log 3y - \log 2y & \log 3z - \log 2z \end{vmatrix}$

$[r_2' = r_2 - r_1$ এবং $r_3' = r_3 - r_2]$

$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2 & \log 2 & \log 2 \\ \log\frac{3}{2} & \log\frac{3}{2} & \log\frac{3}{2} \end{vmatrix}$

$= \log 2 . \log\frac{3}{2} \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \log 2 . \log\frac{3}{2} . 0 = 0$

[∵ দুইটি সারি সমান তাই নির্ণায়কের মান শূন্য]

$\therefore \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$ (দেখানো হলো)

(vii) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$

$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & -1 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$[c_2' = c_2 - c_1 ; c_3' = c_3 - c_2]$

$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)[1(1-0)]$

$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ (প্রমাণিত)

3. (i) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -x \\ 1 & 0 & y \end{vmatrix}$

[$c'_2 = c_2 - c_1$ এবং $c'_3 = c_3 - c_2$ প্রয়োগ করে]

$= \begin{vmatrix} x & -x \\ 0 & y \end{vmatrix} = xy - 0 = xy =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-1 & p^2-p & p^2 \\ p^2-1 & p^4-p^2 & p^4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} p-1 & p(p-1) \\ (p-1)(p+1) & p^2(p^2-1) \end{vmatrix}$

$[c'_1 = c_2 - c_1$ এবং $c'_2 = c_3 - c_2$ প্রয়োগ করে]

$$= p(p-1)(p-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+1 & p(p+1) \end{vmatrix}$$
$$= p(p-1)^2\left\{p(p+1)-(p+1)\right\}$$
$$= p(p-1)^2(p^2+p-p-1)$$
$$= p(p-1)^2(p^2-1)$$
= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1-a & a-a^2 & a^2 \\ 1-a^2 & a^2-a^4 & a^4 \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_1 - c_3$]

$$= a\begin{vmatrix} 1-a & a-a^2 \\ 1-a^2 & a^2-a^4 \end{vmatrix}$$
$$= a(1-a)(a-a^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+a & a+a^2 \end{vmatrix}$$
$$= a^2(1-a)^2[a+a^2-1-a]$$
$$= a^2(a-1)^2(a^2-1)$$
= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iv) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$$

[$c_1' = c_1 + c_2 + c_3$]

$$= (1+x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$$
$$= (1+x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$$

[$r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= (1+x_1+x_2+x_3) \times 1$ [প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= 1 + x_1 + x_2 + x_3$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

4. (i) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

[$r_1' = r_1 + r_2 + r_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$$

[$c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

[১ম সারি সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 0\}$$
$$= (a+b+c)^3$$
= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

[$c_1' = c_1 + c_2 + c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

[$r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ a+b+c & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

[প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= 2(a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 0\}$$
$$= 2(a+b+c)^3$$
= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

5. (i) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

[$c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= abc\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$
$$= abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$
$$= abc(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$$
$$= abc(a-b)(b-c)(c-a)$$
= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x-y & x-y & x-y \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ [$r_1' = r_1 - r_2$ প্রয়োগ করে]

$= (x-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= (x-y) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

[$c'_1 = c_1 - c_2$ এবং $c'_2 = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$= (x-y) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ (a+b)(a-b) & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$

[১ম সারি সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= (a-b)(b-c)(x-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(x-y)(b+c-a-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(x-y) =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3-1 \\ y & y^2 & y^3-1 \\ z & z^2 & z^3-1 \end{vmatrix}$

[১ম, ২য় ও ৩য় সারিকে যথাক্রমে ১ম, ২য় ও ৩য় কলামে স্থাপন করে]

$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

[২য় নির্ণায়কে ২য় ও ৩য় কলাম স্থান বিনিময় করার পর ১ম ও ২য় কলাম স্থান বিনিময় করা হয়েছে ।]

$= (xyz-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

$= (xyz-1) \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

[$r'_1 = r_1 - r_2$ এবং $r'_2 = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= (xyz-1) \begin{vmatrix} (x-y) & (x^2-y^2) \\ (y-z) & (y^2-z^2) \end{vmatrix}$

[প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= (xyz-1) \begin{vmatrix} (x-y) & (x-y)(x+y) \\ (y-z) & (y-z)(y+z) \end{vmatrix}$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 1 & y+z \end{vmatrix}$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(y+z-x-y)$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

$=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iv) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a-b & b-c & c-b \\ a-b & b-c & 0 \end{vmatrix}$

[$c'_1 = c_1 - c_2$ এবং $c'_2 = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-a \\ 1 & 1 & c-b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c).0$

$= 0 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(v) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 2b & b & a \\ 2b & b+c & c \end{vmatrix}$

[$c_1' = (c_1 + c_2) - c_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2b \times abc \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 1 & b & a \\ 1 & b+c & c \end{vmatrix}$

$= 2ab^2c \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 0 & -c & a-c \\ 1 & b+c & c \end{vmatrix}$ [$r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2ab^2c \begin{vmatrix} c & a+c \\ -c & a-c \end{vmatrix}$ [প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= 2ab^2c^2\begin{vmatrix} 1 & a+c \\ -1 & a-c \end{vmatrix} = 2ab^2c^2(a-c+a+c)$$

$= 2ab^2c^2(2a) = 4a^2b^2c^2 =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

6. (i) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2+ac^2 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & bc^2+a^2b & bc^2 \\ a^2c & b^2c & a^2c+b^2c \end{vmatrix}$$

[নির্ণায়কের বাইরে $\frac{1}{abc}$ নিয়ে ১ম, ২য় ও ৩য় কলামকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ -2bc^2 & bc^2+a^2b & bc^2 \\ -2b^2c & b^2c & a^2c+b^2c \end{vmatrix}$$

[$c_1' = c_1 - (c_2+c_3)$ প্রয়োগ করে]

$$= \frac{1}{abc}(-2bc)\,bc\begin{vmatrix} 0 & ab & ac \\ c & c^2+a^2 & bc \\ b & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2bc}{a}\times a\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c^2+a^2 & bc \\ b & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ bc & bc^2+a^2b & b^2c \\ bc & bc^2 & a^2c+b^2c \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & a^2b & -a^2c \\ bc & bc^2 & a^2c+b^2c \end{vmatrix}$$ [$r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$$= -2bc\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & a^2b & -a^2c \\ 1 & bc^2 & a^2c+b^2c \end{vmatrix} = -2bc\begin{vmatrix} b & c \\ a^2b & -a^2c \end{vmatrix}$$

[প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= -2bc(-a^2bc - a^2bc) = -2bc(-2a^2bc)$

$= 4a^2b^2c^2 =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(ii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1 - c_2$ প্রয়োগ করে]

$$= \begin{vmatrix} (a+b+c)(b+c-a) & a^2 & 1 \\ (a+b+c)(c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & 0 \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & 0 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

[$r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & (a+b)(a-b) \\ -2(b-c) & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

[৩য় কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= (-2)(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & (a+b) \\ 1 & (b+c) \end{vmatrix}$$

$= (-2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(iii) বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2-b^2 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

[$c'_2 = c_2 - c_1$ এবং $c'_3 = c_3 - c_1$ প্রয়োগ করে]

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (a+b+c)(c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a-b-c) & (a-b-c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$ [$r_1' = r_1 - (r_2+r_3)$]

$$= \frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix} 2bc & -2bc & -2bc \\ b^2 & bc+ab-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & ac+bc+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix} 2bc & 0 & 0 \\ b^2 & bc+ab & b^2 \\ c^2 & c^2 & ac+bc \end{vmatrix}$$

[$c'_2 = c_1 + c_2$; $c'_3 = c_3 + c_1$]

$$= \frac{(a+b+c)^2}{bc} \times 2bc \begin{vmatrix} bc+ab & b^2 \\ c^2 & ac+bc \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2.bc \begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2bc(a+b+c)^2 \ [(c+a)(a+b) - bc]$$

$$= 2bc(a+b+c)^2 [ca + a^2 + bc + ab - bc]$$

$$= 2abc\ (a+b+c)^2(c+a+b)$$

$$= 2abc(a+b+c)^3$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(iv) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} \frac{(a+b)^2}{c} & a & b \\ c & \frac{(b+c)^2}{a} & b \\ c & a & \frac{(c+a)^2}{b} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ c^2 & (b+c)^2 & b^2 \\ c^2 & a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

[প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কলামকে যথাক্রমে c, a ও b দ্বারা গুণ করে]

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

[সারিকে কলামে ও কলামকে সারিতে রূপান্তর করে]

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

[সারি ও কলাম স্থানান্তর করে]

এরপর অনুশীলনী 1(B) এর 6(iii) নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

(v) বামপক্ষ = $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$= (1+a^2+b^2) \begin{vmatrix} 1 & 2ab & -2b \\ 0 & 1-a^2+b^2 & 2a \\ b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

[$c'_1 = c_1 - b \times c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (1+a^2+b^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

[$c'_2 = c_2 + ac_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

[প্রথম সারি সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= (1+a^2+b^2)^2 [\ 1\{1-a^2-b^2-a(-2a)\} - 0 - 2b\{0-b\}]$$

$$= (1+a^2+b^2)^2\{1-a^2-b^2+2a^2+2b^2\}$$

$$= (1+a^2+b^2)^2(1+a^2+b^2) = (1+a^2+b^2)^3$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(vi) বামপক্ষ = $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$

$$= -2a\ \{4bc - (b+c)^2\} - (a+b)\ \{-2bc - 2ac - (b+c) \times (c+a)\} + (a+c)\ \{(b+a)\ (c+b) + 2bc + 2ab\}$$

$$= -2a\{2bc - b^2 - c^2\} + (a+b)\ \{2bc + 2ca + bc + ab + c^2 + ac\} + (a+c)\ \{bc + b^2 + ac + ab + 2bc + 2ab\}$$

$$= -2a(2bc - b^2 - c^2) + (a+b)\ (3bc + 3ca + ab + c^2) + (a+c)\ (3ab + 3bc + b^2 + ca)$$

$$= -2abc + 2ab^2 + 2ac^2 + 3abc + 3a^2c + a^2b + ac^2 + 3b^2c + 3abc + ab^2 + bc^2 + 3a^2b + 3abc + ab^2 + a^2c + 3abc + 3bc^2 + b^2c + ac^2$$

$$= 8abc + 4a^2b + 4a^2c + 4b^2c + 4b^2a + 4c^2a + 4c^2b$$

$$= 4(2abc + a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b)$$

$$= 4(abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + b^2a + abc + c^2b)$$

$$= 4\{ab(c+a) + ac(c+a) + b^2(c+a) + bc(a+c)\}$$

$$= 4(c+a)\ (ab + ac + b^2 + bc)$$

$= 4(a+b)\ (b+c)\ (c+a)$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(vii) $\begin{vmatrix} qr & rp & pq \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{p}+q & \frac{1}{q}+r & \frac{1}{r}+p \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{pqr} \begin{vmatrix} pqr & pqr & pqr \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+pq & 1+qr & 1+pr \end{vmatrix}$$

$$= \frac{pqr}{pqr} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+pq & 1+qr & 1+pr \end{vmatrix}$$

$= 0$ [∵ নির্ণায়কটির দুইটি সারি সমান] (প্রমাণিত)

7. (i) বামপক্ষ = $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-b \\ 1 & x_1 & y_1-b \\ 1 & x_2 & y_2-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -a & y-b \\ 1 & -a & y_1-b \\ 1 & -a & y_2-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & -b \\ 1 & x_1 & -b \\ 1 & x_2 & -b \end{vmatrix} + (-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-b \\ 1 & 1 & y_1-b \\ 1 & 1 & y_2-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} + (-a).0$$

[∵ নির্ণায়কের দুইটি কলাম একই তাই মান শূন্য]

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b.0$$ [ঐ একই কারণে]

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ii) $$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$$

[নির্ণায়কের বাহিরে $\frac{1}{abc}$ নিয়ে ১ম, ২য় ও ৩য় সারিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{abc \times abc}{abc} \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$ (প্রমাণিত)

$$= abc \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b+c \\ a+b+c & 1 & c+a \\ a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$ [$c_1' = c_1 + c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

= 0 [∵ নির্ণায়কের দুইটি কলাম একই]

অতএব, $$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$$

(প্রমাণিত)

(iii) বামপক্ষ = $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(p+q+r) & r+p & p+q \\ 2(x+y+z) & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ [$c_1' = c_1 + c_2 + c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= 2 \begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ p+q+r & r+p & p+q \\ x+y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

[$c_1' = c_1 - c_2$ প্রয়োগ করে]

$$= 2 \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix}$$ [$c_3' = c_3 - c_1$ প্রয়োগ করে]

$$= 2 \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}$$ [∵ ২য় নির্ণায়কের ২য় ও ৩য় কলাম অভিন্ন]

$$= -2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

8. প্রদত্ত নির্ণায়ক = $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

তাহলে, $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2)$

$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)$

$\therefore\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$

$= a_2(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2$

= 0 (প্রমাণিত)

9. (i) $$\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$\begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = 0$$

[$r_1' = r_1 + r_2 + r_3$ প্রয়োগ করে]

বা, $$(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & b \\ 0 & -x & x+c \end{vmatrix} = 0$$

[$c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে]

বা, $(x+a+b+c)(x^2 - 0) = 0$

$\therefore x = 0, -(a+b+c)$ **(Ans.)**

(ii) $\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 1 \\ 3 & 1+x & 2 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 6+x & 3 & 1 \\ 6+x & 1+x & 2 \\ 6+x & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$

[$c_1' = c_1 + c_2 + c_3$ প্রয়োগ করে]

বা, $(6+x)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1+x & 2 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$

বা, $(6+x)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2+x & 1 \\ 0 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

[$r_2' = r_2 - r_1$ এবং $r_3' = r_3 - r_1$ প্রয়োগ করে]

বা, $(6+x)(x^2 - 4 + 1) = 0$

বা, $(6+x)(x^2 - 3) = 0$

হয়, $(6+x) = 0$ অথবা, $(x^2 - 3) = 0$

বা, $x = -6$ বা, $x^2 = 3$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore x = -6, \pm\sqrt{3}$ **(Ans.)**

10.(i) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = |A| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$

$\therefore$ A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য নয়।

(ii) দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$

$\therefore \det B = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} = 50 - 50 = 0$

$\therefore$ B একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং B ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য নয়।

(iii) দেওয়া আছে, $= \begin{bmatrix} 28 & 29 & 30 \\ 31 & 33 & 35 \\ 34 & 37 & 40 \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = |A| = \begin{vmatrix} 28 & 29 & 30 \\ 31 & 33 & 35 \\ 34 & 37 & 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28 & 1 & 1 \\ 31 & 2 & 2 \\ 34 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

[$c_2' = c_2 - c_1$ এবং $c_3' = c_3 - c_2$]

$= 0$ [$\because$ কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।]

$\therefore$ A একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য নয়।

(iv) দেওয়া আছে, $C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \\ -3 & 11 & 15 \end{bmatrix}$

$\therefore \det C = |C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \\ -3 & 11 & 15 \end{vmatrix}$

$= 4(105 - 66) + 4(-18 - 45) + 0$

$= 4.39 + 4.(-63) = 156 - 252 = -96 \neq 0$

$\therefore$ C একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং C ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

11. $\begin{bmatrix} x+5 & 5 \\ 3 & x-9 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে $\begin{vmatrix} x+5 & 5 \\ 3 & x-9 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(x+5)(x-9) - 15 = 0$

বা, $x^2 - 4x - 60 = 0$

$\therefore x = -6, 10$ **(Ans.)**

12. (i) ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 7 = 8 \neq 0$

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

এখানে, (1, 1)-তম সহগুণক $= (-1)^{1+1}.5 = 5$

(1, 2)-তম সহগুণক $= (-1)^{1+2}.7 = -7$

(2, 1)-তম সহগুণক $= (-1)^{2+1}.1 = -1$

(2, 2)-তম সহগুণক $= (-1)^{2+2}.3 = 3$

$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-7}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore \det B = |B| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 14 = 4$

$\therefore$ এটি একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

এখানে, (1, 1)-তম সহগুণক $= (-1)^{1+1}.6 = 6$

(1, 2)-তম সহগুণক $= (-1)^{1+2}.2 = -2$

(2, 1)-তম সহগুণক $= (-1)^{2+1}.7 = -7$

(2, 2)-তম সহগুণক $= (-1)^{2+2}.3 = 3$

$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$

$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-7}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(iii) ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3(1-0) - 4(0+2) + 2(2+1)$

$= 3 - 8 + 6 = 1 \neq 0$

∴ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

সুতরাং, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(iv) ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

এখানে, $\det A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix}$

$= 2.30 + 2.(-12) + 2.0 = 36 \neq 0$

∴ A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় সম্ভব।

এখন $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 30$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -12$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = -12$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 18$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$

$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2(-4+1) + 1(2-1) - 1(-1+2)$

$= 2 \times (-3) + 1 - 1 = -6 + 1 - 1 = -6$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

13. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.(-2)+(-1).1 & 1.1+(-1).(-1) \\ 0.(-2)+(-2).1 & 0.1+(-2).(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-1 & 1+1 \\ 0-2 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6+4 = -2$$

$A_{11} = 2, A_{12} = -(-2) = 2, A_{21} = -2, A_{22} = -3$

$$\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

$A_{11} = -1, A_{12} = -1, A_{21} = -1, A_{22} = -2$

$$\text{adj}B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2-0 = -2$$

$A_{11} = -2, A_{12} = 0, A_{21} = 1, A_{22} = 1$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.1+(-1).0 & -1.(-\frac{1}{2})+(-1).(-\frac{1}{2}) \\ -1.1+(-2).0 & -1.(-\frac{1}{2})+(-2)(-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (প্রমাণিত)

আবার, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$$

$A_{11} = -\frac{1}{2}, A_{12} = 0, A_{21} = \frac{1}{2}, A_{22} = 1$

$$\text{adj } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}\text{adj}A^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$ (প্রমাণিত)

(ii) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় করতে হবে যেন $AB = BA = I_3$ হয়।

যেহেতু $AB = BA = I_3$

$\therefore B = A^{-1}$ এবং $A = B^{-1}$

এখন $\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-1-30) + 3(-6-3) + 4(15-1)$

$= -31 - 27 + 56 = -2 \neq 0$

এবং $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -31$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 22$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$\therefore \ \text{adj } A = \begin{bmatrix} -31 & -9 & 14 \\ 17 & 5 & -8 \\ 22 & 6 & -10 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $B = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & \frac{-17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & \frac{-5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ B = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & \frac{-17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & \frac{-5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

(iii) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6)$$
$$= 8 - 10 = -2$$

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1 \times 1 - 3 \times 3) = 8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 \times 1 - 2 \times 3) = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1-2) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-6) = -6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\ (0-3) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3-4) = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(0-2) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(0-1) = -1$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

14. (i) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \ AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 - 0 + 12 & 2 + 0 - 2 & 2 + 0 - 2 \\ -22 + 4 + 18 & 4 - 0 - 3 & 4 - 1 - 3 \\ -44 - 4 + 48 & 8 + 0 - 8 & 8 + 1 - 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

এবং $BA = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -11 + 4 + 8 & 0 - 2 + 2 & -22 + 6 + 16 \\ -4 + 0 + 4 & 0 - 0 + 1 & -8 + 0 + 8 \\ 6 - 2 - 4 & 0 + 1 - 1 & 11 - 3 - 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore \ AB = BA = I_3$

তাহলে সংজ্ঞানুযায়ী A ও B পরস্পর বিপরীত ম্যাট্রিক্স। ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক। **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore |M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 1(4-0) + 1(-1-6)$$
$$= -4 - 7 = -11$$

$$\text{adj } M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 & -7 \\ -5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -4 & -3 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

এখন, $(\text{adj } M)\, M = \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -4 & -3 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0-5-6 & 8-10+2 & 8+0-8 \\ 0-3+3 & -4-6-1 & -4+0+4 \\ 0+3-3 & -7+6+1 & -7+0-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= -11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |M|\, I_3$$

$\therefore (\text{adj } M)\, M = |M|\, I_3$ (দেখানো হলো)

(iii) দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 2x - 11I$

$\therefore\ f(A) = 0$

বা, $A^2 + 2A - 11I = 0$

বা, $A^{-1}(A^2 + 2A - 11I) = 0$ [A^{-1} দ্বারা গুণ করে]

বা, $A^{-1}.A^2 + 2A^{-1}A - 11A^{-1}.I = 0$

বা, $(A^{-1}.A)A + 2I - 11A^{-1} = 0$

বা, $IA + 2I - 11A^{-1} = 0$

বা, $11A^{-1} = A + 2I$

বা, $11A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 4+0 & -3+2 \end{bmatrix}$$

বা, $11A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

15. (i) দেওয়া আছে, $x + 2y = 5$

$3x + 5y = 14$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 28 = -3$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$ এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (3, 1)$

(ii) দেওয়া আছে, $x + 2y + 3z = 14$

$2x + 4y + 7z = 31$

$3x + 5y + 10z = 43$

এখন, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix}$

$= 1(40 - 35) - 2(20 - 21) + 3(10 - 12)$

$= 5 + 2 - 6 = 1 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 31 & 4 & 7 \\ 43 & 5 & 10 \end{vmatrix}$

$= 14(40 - 35) - 2(310 - 301) + 3(155 - 172)$

$= 70 - 18 - 51 = 1$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 31 & 7 \\ 3 & 43 & 10 \end{vmatrix}$

$= 1(310 - 301) - 14(20 - 21) + 3(86 - 93)$

$= 9 + 14 - 21 = 2$

এবং $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 31 \\ 3 & 5 & 43 \end{vmatrix}$

$= 1(172 - 155) - 2(86 - 93) + 14(10 - 12)$

$= 17 + 14 - 28 = 3$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2, z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{1} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

(iii) দেওয়া আছে, $4x - y + 4z = 12$

$2x + 3y + 8z = 12$

$6x + 5y + 12z = 24$

এখন, $D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix}$

$= 4(36 - 40) + 1(24 - 48) + 4(10 - 18)$

$= -16 - 24 - 32 = -72 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ 24 & 5 & 12 \end{vmatrix}$

$= 12(36 - 40) + 1(144 - 192) + 4(60 - 72)$

$= -48 - 48 - 48 = -144$

$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & 12 & 8 \\ 6 & 24 & 12 \end{vmatrix}$

$= 4(144 - 192) - 12(24 - 48) + 4(48 - 72)$

$= -192 + 288 - 96 = 0$

এবং $D_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 12 \\ 2 & 3 & 12 \\ 6 & 5 & 24 \end{vmatrix}$

$= 4(72-60) + 1(48-72) + 12(10-18)$

$= 48 - 24 - 96 = -72$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-144}{-72} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-72} = 0$

এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-72}{-72} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = (2, 0, 1)$

(iv) দেওয়া আছে, $3x + 2y + z = 3$

$6x + 4y + 3z = 7$

$9x + 8y + 4z = 11$

এখন, $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(16-24) - 2(24-27) + 1(48-36)$

$= 3(-8) - 2(-3) + 12 = -24 + 6 + 12 = -6 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 11 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(16-24) - 2(28-33) + 1(56-44)$

$= 3(-8) - 2(-5) + 12 = -24 + 10 + 12 = -2$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 9 & 11 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(28-33) - 3(24-27) + 1(66-63)$

$= 3(-5) - 3(-3) + 3 = -15 + 9 + 3 = -3$

এবং $D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 11 \end{vmatrix}$

$= 3(44-56) - 2(66-63) + 3(48-36)$

$= -36 - 6 + 36 = -6$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-6} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$

16. (i) প্রদত্ত সমীকরণজোট $2x + 3y = 4$

$x - y = 7$

ম্যাট্রিক্স আকারে লিখে পাই,

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ বা, $AX = B \therefore X = A^{-1}B$ .... (i)

যেখানে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান।

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

এখন (i) নং হতে পাই, $X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4+21 \\ 4-14 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 25 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 5, y = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (5, -2)$

(ii) প্রদত্ত সমীকরণজোট, $2x - y - z = 6$

$x + 3y + 2z = 1$

$3x - y - 5z = 1$

ম্যাট্রিক্স আকারে লিখে পাই, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

বা, $AX = B \therefore X = A^{-1}B$ ... ... (i)

যেখানে $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -26 - 11 + 10 = -27 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান।

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 11 & -10 \\ -4 & -7 & -1 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

এখন (i) নং হতে পাই, $X = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ -11 & 7 & 5 \\ 10 & 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 78+4-1 \\ -66+7+5 \\ 60+1-7 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 81 \\ -54 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 3, y = -2, z = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (3, -2, 2)$

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর ও ব্যাখ্যা

1. গ; ব্যাখ্যা: বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A সমঘাতি হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = A$$

2. খ; ব্যাখ্যা: শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A^n = 0$ হয়, যেখানে A একটি বর্গম্যাট্রিক্স এবং $n \in \mathbb{N}$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
$$= \begin{bmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

3. ঘ; ব্যাখ্যা: অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A^2 = I$ হয়, যেখানে A একটি বর্গম্যাট্রিক্স।

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
$$= \begin{bmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

4. খ; ব্যাখ্যা: বর্গম্যাট্রিক্স A প্রতিসম হবে যদি $A^t = A$ হয়।

5. খ; ব্যাখ্যা: বর্গম্যাট্রিক্স A বিপ্রতিসম হবে যদি $A^t = -A$

6. খ; ব্যাখ্যা: $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & -9 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 & -x \\ 2 & y & -9 \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix}$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 8 & 8 & -18 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\therefore \begin{bmatrix} -4 & 13 & 7-x \\ 8 & 8+y & -18 \\ 5 & z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 8 & 8 & -18 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $7 - x = 7$, $\therefore x = 0$ | $8 + y = 8$, $\therefore y = 0$ | $z = 0$

7. গ; ব্যাখ্যা: $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$
$$= \begin{bmatrix} 1-3 & 2-4 \\ 4-6 & -3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$$

8. খ; ব্যাখ্যা: $(P+Q)-(P-Q) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

বা, $2Q = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore Q = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

9. গ; ব্যাখ্যা: $A + B + A - B = 2A$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$
বা, $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

10. গ; ব্যাখ্যা: $[3 \ \ 2 \ \ -1]\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = [12 + 6 - 8] = [10]$

11. ক;

12. খ; ব্যাখ্যা: $\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 2x + 15 \\ -4 + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $2x + 15 = 0$, $\therefore x = \frac{-15}{2}$ | $-4 + 5y = 0$, $\therefore y = \frac{4}{5}$

13. গ;

14. ঘ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 2(96 - 0) - 4(0) + 6(0) = 192$

15. ক; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (2, 3)-তম

অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 8 = -13$

16. খ; ব্যাখ্যা: (1, 2) তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

বা, $-x = -2 \therefore x = 2$

17. ক; ব্যাখ্যা: (3, 2) তম ভুক্তির সহগুণক
$$= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$$

18. গ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2$

বা, $0 - ab^2(0 - a^2bc^3) + c^2a(a^2b^3c - 0) = 2$

বা, $a^3b^3c^3 + a^3b^3c^3 = 2$ বা, $2a^3b^3c^3 = 2$

$\therefore a^3b^3c^3 = 1$

19. গ; ব্যাখ্যা: ব্যতিক্রমী হলে, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

বা, $1(45 - 48) - 2(36 - 42) + a(32 - 35) = 0$

বা, $-3 + 12 - 3a = 0$ বা, $-3a = -9$ বা, $a = 3$

20. গ; ব্যাখ্যা: যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান অশূন্য তাই অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$

21. ক; ব্যাখ্যা: A ও B ম্যাট্রিক্স হলে $(AB)^t = B^tA^t$.

22. গ; ব্যাখ্যা: $\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$$=\frac{1}{8-9}\begin{bmatrix}2 & -3\\-3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}$$

23. ক; ব্যাখ্যা: iii. সঠিক নয়। কারণ, অভেদক ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের প্রত্যেক ভুক্তি 1 (এক) হয়।

24. গ; ব্যাখ্যা: i. সঠিক নয়।

কারণ $A^t=\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 6\end{bmatrix}\neq A$

ii. $|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{vmatrix}=12-(-3)=15$

iii. $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 6\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4-3 & -6-18\\2+6 & -3+36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -24\\8 & 33\end{bmatrix}$$

25. ঘ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix}-2 & 3\\-2 & 4\end{vmatrix}=(-2\times 4)-3\times(-2)=-8+6=-2$

$A+2I=\begin{pmatrix}-2 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\-2 & 6\end{pmatrix}$

$\therefore |A+2I|=6$

$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4-6 & -6+12\\4-8 & -6+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\-4 & 10\end{pmatrix}$$

26. খ; ব্যাখ্যা: $|Q|=\begin{vmatrix}-4 & 2 & -1\\2 & -4 & 0\\5 & -10 & 0\end{vmatrix}$

$$=-4(0)-2(0)-1(-20+20)=0$$

$\therefore$ Q ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং বিপরীতযোগ্য নয়। আবার, (ii) সঠিক নয়, কারণ (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি $=\begin{vmatrix}-4 & 2\\5 & -10\end{vmatrix}=40-10=30$

27. ঘ; ব্যাখ্যা: 0 এর সহগুণক $=-(-2)=2$

5 এর অনুরাশি = 1

নির্ণায়কটির মান = 5 − 0 = 5

28. ক; ব্যাখ্যা: A ও B প্রতিসম কারণ $A^t=B$ এবং A ও C বিপ্রতিসম কারণ $A^t=-C$ এবং B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স, $B^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\neq C$.

29. ঘ; 30. ঘ;

31. গ; ব্যাখ্যা: $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 7\\3 & 2 & 5\\8 & -4 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -6 & -7\\4 & 0 & 0\\2 & -5 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1+3 & 4-6 & 7-7\\3+4 & 2+0 & 5+0\\8+2 & -4-5 & 3+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\7 & 2 & 5\\10 & -9 & 4\end{bmatrix}$$

32. খ; ব্যাখ্যা: $3A-4B=\begin{bmatrix}-3 & 12 & 21\\9 & 6 & 15\\24 & -12 & 9\end{bmatrix}$

$$-\begin{bmatrix}12 & -24 & -28\\16 & 0 & 0\\8 & -20 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 & 36 & 49\\-7 & 6 & 15\\16 & 8 & 5\end{bmatrix}$$

33. ক; ব্যাখ্যা: কোনো কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলো সমান হলে, ঐ কর্ণ ম্যাট্রিক্সকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

34. খ; ব্যাখ্যা: কোনো কর্ণ ম্যাট্রিক্সের কর্ণের ভুক্তিগুলো 1 (একক) হলে তাই অভেদক ম্যাট্রিক্স।

35. ক; ব্যাখ্যা: $FH=[3\ \ -2\ \ -4]\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\6 & -2 & 0\\3 & 7 & 1\end{bmatrix}$

$=[3-12-12\ \ 12+4-28\ \ 9+0-4]$

$=[-21\ \ -12\ \ 5]$

36. ক; ব্যাখ্যা: E ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা $=2\times 1$

F ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা $=1\times 3$

$\therefore$ EF ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা $=2\times 3$

37. ঘ; ব্যাখ্যা: p এর সহগুণক $=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}$

$$=-(-7+0)=7$$

38. ক; ব্যাখ্যা: B = 0 বা, $\begin{vmatrix}7 & -7 & 0\\-1 & 2 & -1\\5 & p & 3\end{vmatrix}=0$

বা, $7(6+p)-(-7)(-3+5)+0=0$

বা, $42+7p+14=0\ \therefore p=-8$

39. ক; ব্যাখ্যা: $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\3 & 2 & 2\\5 & 4 & 3\end{vmatrix}$

$=2(6-8)-1(9-10)+(-1)(12-10)$

$=-4+1-2=-5$

$\therefore D_x=\begin{vmatrix}10 & 1 & -1\\1 & 2 & 2\\4 & 4 & 3\end{vmatrix}$

$=10(6-8)-1(3-8)+(-1)(4-8)$

$=-20+5+4=-11$

$\therefore x=\frac{D_x}{D}=\frac{-11}{-5}=\frac{11}{5}$

40. গ; ব্যাখ্যা: $D_y=\begin{vmatrix}2 & 10 & -1\\3 & 1 & 2\\5 & 4 & 3\end{vmatrix}$

$=2(3-8)-10(9-10)+(-1)(12-5)$

$=-10+10-7=-7$

$\therefore y=\frac{D_y}{D}=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}$

41. ঘ; ব্যাখ্যা: $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4-6 & 4-6 \\ -4+6 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

42. খ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & \beta \\ \theta & x & \theta \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 0 & \alpha - x & x \\ 0 & 0 & \beta \\ \theta - x & x - \theta & \theta \end{vmatrix} = 0 \begin{bmatrix} C'_1 = C_1 - C_2 \\ C'_2 = C_2 - C_3 \end{bmatrix}$

বা, $(\theta - x) \begin{vmatrix} \alpha - x & x \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0$ বা, $(\theta - x)(\alpha - x)\beta = 0$

বা, $(x - \theta)(x - \alpha) = 0 \therefore x = \theta, \alpha$

43. গ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2x+7 \\ 2 & 7x & 9+5x \\ 0 & 0 & 2x+5 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(2x+5) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7x \end{vmatrix} = 0$

বা, $(2x+5)(0-6) = 0$

বা, $2x + 5 = 0$ বা, $2x = -5 \quad \therefore x = -\frac{5}{2}$

44. গ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} m-2 & 6 \\ 2 & m-3 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(m-2)(m-3) - (6 \times 2) = 0$

বা, $m^2 - 2m - 3m + 6 - 12 = 0$ বা, $m^2 - 5m - 6 = 0$

বা, $m^2 - 6m + m - 6 = 0$ বা, $m(m-6) + 1(m-6) = 0$

বা, $(m-6)(m+1) = 0 \therefore m = 6, -1$

45. ঘ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} i & i \\ 2i & i \end{vmatrix} = i^2 - 2i^2 = -i^2 = -(-1) = 1$

$\begin{bmatrix} i & i \\ 2i & i \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix}$

46. ঘ;

47. গ; ব্যাখ্যা: প্রশ্নমতে, $\begin{vmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $k^2 - 5k + 6 - 4 = 0$ বা, $k^2 - 5k + 2 = 0$

$\therefore k = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

48. খ; ব্যাখ্যা: $|(2A)^{-1}| = \left|\frac{1}{2A}\right| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^3|A|}$

[$\because$ A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স]

$= \frac{1}{8(-7)} = -\frac{1}{56}$

49. খ; ব্যাখ্যা: $[x \;\; y]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= [ax + hy \quad hx + by]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= [x^2a + xyh + xyh + y^2b]$

$= [x^2a + 2xyh + y^2b]$

50. ঘ; ব্যাখ্যা: এখানে, A ম্যাট্রিক্সটির ক্রম 2×2. অতএব A^2 এর ক্রম হবে 2×2.

আবার, X এর ক্রম 2×1. কিন্তু X এর কলাম সংখ্যাও A^2 এর সারির সংখ্যা সমান না হওয়ায় $X \times A^2$ নির্ণয় সম্ভব নয়।

51. গ; ব্যাখ্যা: A^T এর ক্রম $= 5 \times 4$

$(A^T + B)$ এর ক্রম $= 5 \times 4$

C এর ক্রম $= 4 \times 2$

$\therefore (A^T + B)C$ এর ক্রম $= 5 \times 2$

52. ঘ; ব্যাখ্যা: A ম্যাট্রিক্সটির ক্রম $= 3 \times 1$

B ম্যাট্রিক্সটির ক্রম $= 1 \times 3$

$\therefore$ AB এর ক্রম $= 3 \times 3$

$\therefore$ শুধুমাত্র অপশন 'ঘ' 3×3 মাত্রার ম্যাট্রিক্স।

53. ঘ; ব্যাখ্যা: $x - y = 3; 2x - 2y = k$

বা, $x - y = 3; x - y = \frac{k}{2}$

সমীকরণ জোটটির অসংখ্য সমাধান বিদ্যমান থাকবে যদি সমীকরণদ্বয়ের ধ্রুবকদ্বয় সমান হয়।

অর্থাৎ, $\frac{k}{2} = 3$ হয়। $\therefore k = 6$

54. গ; ব্যাখ্যা: $C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+2+9 & 1+4+6 & 2+6+3 \\ 3+2+3 & 3+4+2 & 6+6+1 \\ 1+1+6 & 1+2+4 & 2+3+2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 \\ 8 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

55. ক; 56. খ;

57. ঘ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & ab \\ 1 & ab & ab^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ 1-a & a-ab & ab \\ 1-ab & ab-ab^2 & ab^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a(1-b) & ab \\ 1-ab & ab(1-b) & ab^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & a(1-b) \\ 1-ab & ab(1-b) \end{vmatrix} = (1-b)\begin{vmatrix} 1-a & a \\ 1-ab & ab \end{vmatrix}$$
$$= (1-b)(ab - a^2b - a + a^2b)$$
$$= (1-b)a(b-1) = -a(b-1)^2$$

58. গ; ব্যাখ্যা: $A^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{-6-8}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

59. ক; 60. খ; 61. গ;

62. গ; ব্যাখ্যা: প্রদত্ত নির্ণায়কে 1 এর সহগুণক

$$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -\{2(-7+28) - (-3)(21-0) + 5(-21+0)\}$$
$$= -(42 + 63 - 105) = -(105 - 105) = 0$$

63. গ;

64. ক; ব্যাখ্যা: $Q = P^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{32-12}\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 40+0 \\ 10+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

65. ঘ; ব্যাখ্যা: A এর কর্ণের উপাদানগুলির গুণফল $= a^3$

প্রশ্নমতে, $a^3 = 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3 \quad \therefore a = \sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{2}I - A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |(\sqrt{2}I - A)^3| = 0$$

66. ঘ; ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 2! & 3! & 2! \\ 3! & 2! & 4! \\ 0! & 3! & 2! \end{vmatrix} [R'_1 = R_1 - R_3] = \begin{vmatrix} 2! & 0 & 0 \\ 3! & 2! & 4! \\ 0 & 3! & 2! \end{vmatrix}$

$$= 2!(2!2! - 4!3!) = 2(4 - 144) = -280$$

67. ক;

সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. **ক** $P - 2Q = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & -3+4 \\ -2+2 & 7-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (P-2Q)^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

খ উদ্দীপক অনুসারে, $D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $f(x) = x^2 - 7x - 4$

$$\therefore f(D) = D^2 - 7D - 4I$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+12+5 & 8+4+1 & 4+2+1 \\ 24+12+5 & 12+4+1 & 6+2+1 \\ 20+6+5 & 10+2+1 & 5+1+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 14 & 7 \\ 42 & 14 & 7 \\ 35 & 7 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & 13 & 7 \\ 41 & 17 & 9 \\ 31 & 13 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 28 & 14 & 7 \\ 42 & 14 & 7 \\ 35 & 7 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33-28-4 & 13-14-0 & 7-7-0 \\ 41-42-0 & 17-14-4 & 9-7-0 \\ 31-35-0 & 13-7-0 & 7-7-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ প্রশ্নমতে, $DR = C$ বা, $R = D^{-1}C$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 475 \\ 575 \\ 425 \end{bmatrix} \text{ .... (i)}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(2-1) - 2(6-5) + 1(6-10)$$
$$= 4 - 2 - 4 = -2 \neq 0$$

$$\text{adj } D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D^{-1} = \frac{1}{|D|}\text{adj } D = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

(i) নং হতে পাই,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 475 \\ 575 \\ 425 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 475 - 575 + 0 \\ -475 - 575 + 850 \\ -1900 + 3450 - 1700 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -100 \\ -200 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 75 \end{bmatrix}$$

∴ প্রতি প্যাকেট কলম, পেন্সিল ও রাবারের ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 50 টাকা, 100 টাকা ও 75 টাকা। **(Ans.)**

2. ক $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (3, 1)-তম ভুক্তির

সহগুণক $= (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3k$

প্রশ্নমতে, $2 - 3k = 5$

বা, $2 - 5 = 3k$ বা, $3k = -3 \therefore k = -1$ **(Ans.)**

খ প্রশ্নমতে, $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+z \\ 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+z \\ 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \\ 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} \frac{1}{x}+1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y}+1 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & \frac{1}{z}+1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y}+1 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & \frac{1}{z}+1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{y}+1 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & \frac{1}{z}+1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{y} & 1 & -1 \\ \frac{1}{z} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 - c_1 ; c_3' = c_3 - c_2]$

$$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)[1(1-0)]$$

$$= xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$\therefore |v| = xyz\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রশ্নমতে, $W = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \therefore W^t = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

ধরি, $W = \frac{1}{2}(W + W^t) + \frac{1}{2}(W - W^t) = B + C$

যেখানে $B = \frac{1}{2}(W + W^t)$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

এবং $C = \frac{1}{2}(W - W^t)$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$$\therefore B = \frac{1}{2}(W + W^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 8 \\ 11 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}(W - W^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore W = B + C$

যেখানে $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 8 \\ 11 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং

$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

3. ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix}$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস $= p + 3$

প্রশ্নমতে, $p + 3 = 7$ বা, $p = 7 - 3 \therefore p = 4$ **(Ans.)**

খ ধরি, $X = \begin{bmatrix} 30\% & 50\% & 60\% \\ 60\% & 30\% & 25\% \\ 10\% & 20\% & 15\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.25 \\ 0.1 & 0.2 & 0.15 \end{bmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} 280 \\ 260 \\ 200 \end{bmatrix}$ এবং $Z = [70 \ 60 \ 50]$

$$\therefore XY = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.25 \\ 0.1 & 0.2 & 0.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 280 \\ 260 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 84 + 130 + 120 \\ 168 + 78 + 50 \\ 28 + 52 + 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 334 \\ 296 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Z(XY) = [70 \ 60 \ 50]\begin{bmatrix} 334 \\ 296 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$$= [23380 + 17760 + 5500]$$

$$= [46640]$$

$\therefore$ দৈনিক উৎপাদন খরচ 46640 টাকা। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{3p-5}\begin{bmatrix} p & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

শর্তানুসারে, $A + A^{-1} = kI$

বা, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix} + \frac{1}{3p-5}\begin{bmatrix} p & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix} + \frac{1}{3p-5}\begin{bmatrix} p & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 3 + \frac{p}{3p-5} & 1 - \frac{1}{3p-5} \\ 5 - \frac{5}{3p-5} & p + \frac{3}{3p-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $5 - \frac{5}{3p-5} = 0$

বা, $\frac{5}{3p-5} = 5$

বা, $5 = 15p - 25$

বা, $15p = 30 \therefore p = 2$ **(Ans.)**

এবং $k = 3 + \frac{2}{3(2)-5} = 5$ **(Ans.)**

4. **ক** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore |A + B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13$ **(Ans.)**

খ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 0+4 \\ 8-3 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

$A_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3; A_{12} = (-1)^{1+2}(4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1}(2) = -2; A_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^t$

$= \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

অনুরূপভাবে, $B^{-1} = \frac{1}{4-0}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$(AB)^{-1} = \frac{1}{-24-20}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-44}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

আবার, $B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{44}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{44}\begin{bmatrix} -6-0 & -4+0 \\ 3-8 & 2+2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{44}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 2x - 8$

$\therefore f(A) = A^2 + 2A - 8I$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9+2-8 & -4+4-0 \\ -8+8-0 & 17-6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \frac{1}{3}f(A) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \frac{1}{3}f(A)$ একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স। **(প্রমাণিত)**

5. **ক** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

$\therefore A^2 = A \times A$

$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16-15 & -4+4 \\ 60-60 & -15+16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি।

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4-3 & 12-2 \\ 15-12 & 45-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 37 \end{bmatrix}$

$(AC)^t = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 37 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 37 \end{bmatrix}$

আবার, $A^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore C^tA^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4-3 & 15-12 \\ 12-2 & 45-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 37 \end{bmatrix}$

$\therefore (AC)^t = C^tA^t$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} \frac{2p}{3} & \frac{1}{5} \\ r & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2p}{3} & \frac{1}{5} \\ r & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{8p}{3} - r & \frac{4}{5}+1 \\ 10p-4r & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8p-3r}{3} & \frac{9}{5} \\ 10p-4r & 7 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $AB = \begin{bmatrix} 4 & \frac{9}{5} \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} \frac{8p-3r}{3} & \frac{9}{5} \\ 10p-4r & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{9}{5} \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

উভয়পক্ষে সমীকৃত করে পাই,

$\frac{8p-3r}{3} = 4$

বা, $8p - 3r = 12$

$\therefore p = \frac{12+3r}{8}$ .... (i)

এবং $10p - 4r = 5$

বা, $10 \times \frac{12+3r}{8} - 4r = 5$

বা, $\frac{60+15r}{4} - 4r = 5$

বা, $\frac{60+15r-16r}{4} = 5$

বা, $60 - r = 20$

$\therefore r = 40$

r এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$p = \frac{12+3\times 40}{8} = \frac{132}{8} = \frac{33}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $p = \frac{33}{2}, r = 40$

6. **ক** দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

এবং $B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5$

সুতরাং $B_{11} + B_{33} = -3 + 5 = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $s = a + b + c$ এবং

$A = \begin{bmatrix} s+c & s-b-c & s-c-a \\ s-a-b & s+a & s-c-a \\ s-a-b & s-b-c & s+b \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} s+c & s-b-c & s-c-a \\ s-a-b & s+a & s-c-a \\ s-a-b & s-b-c & s+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & 2a+b+c & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1+c_2+c_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

[$r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ a+b+c & -(a+b+c) \end{vmatrix}$

[প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= 2(a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 0\}$

$= 2(a+b+c)^3$

$\therefore |A| = 2(a+b+c)^3$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $BC = F$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} x-2y+3z \\ 2x+y+2z \\ 3x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\therefore x - 2y + 3z = 11$

$2x + y + 2z = 10$

$3x + 2y + z = 9$

$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-4) - 2(6-2) + 3(4-3)$

$= -3 - 8 + 3 = -8$

$D_x = \begin{vmatrix} 11 & -2 & 3 \\ 10 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11(1-4) - 2(18-10) + 3(20-9)$

$= -33 - 16 + 33 = -16$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1(10-18) + 11(6-2) + 3(18-30)$$
$$= -8 + 44 - 36 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 1(9-20) - 2(30-18) + 11(4-3)$$
$$= -11 - 24 + 11 = -24$$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-16}{-8} = 2$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-8} = 0$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-24}{-8} = 3$

সুতরাং $x + y + z = 2 + 0 + 3 = 5$ (দেখানো হলো)

7. **ক** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 5+a & 6 & 3 \\ 4 & 3+a & 2 \\ 1 & 7 & 1+a \end{bmatrix}$

$a = 0$ হলে, $P = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |P| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5(3-14) - 6(4-2) + 3(28-3)$$
$$= -55 - 12 + 75 = 8 \text{ (Ans.)}$$

খ P ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, $|P| = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 5+a & 6 & 3 \\ 4 & 3+a & 2 \\ 1 & 7 & 1+a \end{vmatrix} = 0$

বা, $(5+a)\{(3+a)(1+a) - 14\} - 6\{4(1+a) - 2\} + 3(28 - 3 - a) = 0$

বা, $(a+5)(3 + 3a + a + a^2 - 14) - 6(4 + 4a - 2) + 3(25 - a) = 0$

বা, $(a+5)(a^2 + 4a - 11) - 6(4a + 2) + 75 - 3a = 0$

বা, $a^3 + 4a^2 - 11a + 5a^2 + 20a - 55 - 24a - 12 + 75 - 3a = 0$

বা, $a^3 + 9a^2 - 18a + 8 = 0$

বা, $a^3 - a^2 + 10a^2 - 10a - 8a + 8 = 0$

বা, $a^2(a-1) + 10a(a-1) - 8(a-1) = 0$

$\therefore (a-1)(a^2 + 10a - 8) = 0$

হয়, $a - 1 = 0$ অথবা, $a^2 + 10a - 8 = 0$

$\therefore a = 1$ $\therefore a = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4.1.(-8)}}{2.1}$

$= \frac{-10 \pm \sqrt{132}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{33}}{2}$

$= -5 \pm \sqrt{33}$

$\therefore$ নির্ণেয় a এর মান $= 1, -5 \pm \sqrt{33}$

গ $a = -6$ হলে, $P = \begin{bmatrix} 5-6 & 6 & 3 \\ 4 & 3-6 & 2 \\ 1 & 7 & 1-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$P^2 = P \times P = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+24+3 & -6-18+21 & -3+12-15 \\ -4-12+2 & 24+9+14 & 12-6-10 \\ -1+28-5 & 6-21-35 & 3+14+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & -3 & -6 \\ -14 & 47 & -4 \\ 22 & -50 & 42 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \times P = \begin{bmatrix} 28 & -3 & -6 \\ -14 & 47 & -4 \\ 22 & -50 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -28-12-6 & 168+9-42 & 84-6+30 \\ 14+188-4 & -84-141-28 & -42+94+20 \\ -22-200+42 & 132+150+294 & 66-100-210 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -46 & 135 & 108 \\ 198 & -253 & 72 \\ -180 & 576 & -244 \end{bmatrix}$$

প্রদত্ত রাশি $= P^3 + 8P^2 - 20P - 192\,I$

$$= \begin{bmatrix} -46 & 135 & 108 \\ 198 & -253 & 72 \\ -180 & 576 & -244 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 224 & -24 & -48 \\ -112 & 376 & -32 \\ 176 & -400 & 336 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 120 & 60 \\ 80 & -60 & 40 \\ 20 & 140 & -100 \end{bmatrix} - 192 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 178 & 111 & 60 \\ 86 & 123 & 40 \\ -4 & 176 & 92 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 120 & 60 \\ 80 & -60 & 40 \\ 20 & 140 & -100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 192 & 0 & 0 \\ 0 & 192 & 0 \\ 0 & 0 & 192 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 198 & -9 & 0 \\ 6 & 183 & 0 \\ -24 & 36 & 192 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 192 & 0 & 0 \\ 0 & 192 & 0 \\ 0 & 0 & 192 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ -24 & 36 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

8. **ক** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

প্রদত্ত রাশি $= 2A + 3C = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & -10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 6 & -6 \\ 12 & 15 & -12 \\ -15 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+15 & 6+6 & -8-6 \\ 2+12 & 0+15 & -4-12 \\ 2-15 & -10+9 & 12+21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 12 & -14 \\ 14 & 15 & -16 \\ -13 & -1 & 33 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

ঘ $AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 10+12+20 & 4+15-12 & -4-12-28 \\ 5+0+10 & 2+0-6 & -2+0-14 \\ 5-20-30 & 2-25+18 & -2+20+42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 42 & 7 & -44 \\ 15 & -4 & -16 \\ -45 & -5 & 60 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+2-2 & 15+0+10 & -20-4-12 \\ 8+5-4 & 12+0+20 & -16-10-24 \\ -10+3+7 & -15+0-35 & 20-6+42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 25 & -36 \\ 9 & 32 & -50 \\ 0 & -50 & 56 \end{bmatrix}$$

$\therefore AC \neq CA$

A ও C ম্যাট্রিক্স দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন বিনিময় বিধি মানে না।

গ দেওয়া আছে, $AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2x+3y-4z \\ x-2z \\ x-5y+6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সমীকৃত করে পাই,

$2x + 3y - 4z = 1$

$x - 2z = 3$

$x - 5y + 6z = 2$

x, y ও z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক হবে,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 2(0-10) - 3(6+2) + (-4)(-5-0)$$

$$= -20 - 24 + 20 = -24 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-10) - 3(18+4) + (-4)(-15-0)$$

$$= -10 - 66 + 60 = -16$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2(18+4) - 1(6+2) + (-4)(2-3)$$

$$= 44 - 8 + 4 = 40$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(0+15) - 3(2-3) + 1(-5-0)$$

$$= 30 + 3 - 5 = 28$$

$\therefore \; x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-16}{-24} = \dfrac{2}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore \; y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{40}{-24} = \dfrac{-5}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore \; z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{28}{-24} = \dfrac{-7}{6}$ **(Ans.)**

9. **ক** ধরি, $M = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore M^t = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \alpha & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |M^t| = \begin{vmatrix} \alpha & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 12$$

শর্তমতে, $2\alpha - 12 = 0$

বা, $2\alpha = 12$

$\therefore \alpha = 6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$P_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$P_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7-10) = 3$$

$$P_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

$$P_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-9) = 8$$

$$P_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$$

$$P_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1$$

$$P_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$P_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -(4-21) = 17$$

$$P_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 7 = 1$$

$$\therefore \text{adj } P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 8 & -13 & -1 \\ -10 & 17 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -10 \\ 3 & -13 & 17 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$

প্রশ্নমতে, $f(P) = I$

বা, $P^3 - 2P^2 + 3P - I = 0$

বা, $P^{-1}(P^3 - 2P^2 + 3P - I) = 0$ [P^{-1} দ্বারা গুণ করে]

বা, $(P^{-1}P)P^2 - 2(P^{-1}P)P + 3(P^{-1}P) - P^{-1}I = 0$

বা, $IP^2 - 2IP + 3I - P^{-1} = 0$

বা, $P^{-1} = P^2 - 2P + 3I$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 15 & 11 \\ 52 & 29 & 31 \\ 36 & 20 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 14 & 8 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26-4+3 & 15-2+0 & 11-6+0 \\ 52-14+0 & 29-8+3 & 31-4+0 \\ 36-10+0 & 20-6+0 & 22-2+3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 13 & 5 \\ 38 & 24 & 27 \\ 26 & 14 & 23 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

10. **ক** মনে করি, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A$$

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি।

খ দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{bmatrix}$

এবং $a = 1, b = -1, c = -2$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-7-0) + 1(0-7) + 2(-4+2)$$

$$= -7 - 7 - 4 = -18 \neq 0$$

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

এখন, $P_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 0 = -7$

$P_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = -(7+0) = -7$

$P_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$

$P_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -(-7-8) = 15$

$P_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 4 = -3$

$P_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6$

$P_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

$P_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$

$P_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{|P|} \text{adj } P = \frac{1}{-18}\begin{bmatrix} -7 & -7 & -2 \\ 15 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & -15 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{bmatrix}$

$$\therefore |P| = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} - abc\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + abc\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+abc)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+abc)\begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 & 0 \\ b-c & b^2-c^2 & 0 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} r'_1 = r_1 - r_2 \\ r'_2 = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$$

$$= (1+abc)\begin{vmatrix} a-b & (a+b)(a-b) \\ b-c & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (1+abc)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & b+c \end{vmatrix}$$

$= (1 + abc)(a - b)(b - c)(b + c - a - b)$
$= (1 + abc)(a - b)(b - c)(c - a)$
$= (1 + abc)(a - c)(b - a)(b - c) =$ ডানপক্ষ
$\therefore |P| = (1 + abc)(a - c)(b - a)(b - c)$ (দেখানো হলো)

11. ক ধরি, প্রত্যেক প্রকার পণ্যকে কলাম বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটি, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4+2+3 & 4+2+2 & 2+6+4 \\ 2+1+9 & 2+1+6 & 1+3+12 \\ 6+2+12 & 6+2+8 & 3+6+16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 12 \\ 12 & 9 & 16 \\ 20 & 16 & 25 \end{bmatrix} \neq A$$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি নয়।

খ ধরি, প্রত্যেক প্রকার পণ্যকে সারি বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটি B.

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

এবং $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(4-6) - 1(8-2) + 3(6-1)$
$= -4 - 6 + 15 = 5 \neq 0$

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-2) = -6$

$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-9) = 5$

$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5$

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$

$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$

$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj } B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}^t$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ প্রদত্ত তথ্যগুলো ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করার জন্য ধরি, প্রতিদিন তিনটি মেশিন দ্বারা উৎপন্ন পণ্যের পরিমাণ,

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

প্রতিটি পণ্যের উৎপাদন খরচ, $F = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$

প্রতিটি পণ্যের বিক্রয়মূল্য, $H = \begin{bmatrix} 23 \\ 18 \\ 25 \end{bmatrix}$

$\therefore$ প্রতিটি পণ্যে লাভ, $H - F = \begin{bmatrix} 23 \\ 18 \\ 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\therefore$ প্রতিদিন লাভ $= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12+12+10 \\ 6+6+30 \\ 18+12+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 42 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ প্রতিদিন মোট লাভ $(34 + 42 + 70) = 146$ টাকা

$\therefore$ প্রতি সপ্তাহে কোম্পানির লাভ $(146 \times 7) = 1022$ টাকা

12. ক $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(3, 1) তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -20 + 6 = -14$ **(Ans.)**

খ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 18 = 22$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-5-2) = 7$

$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -(-12-8) = 20$

$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15$

$\therefore 2B_{13} + 8B_{21} - 2B_{32} + 4B_{22}$
$= 2 \times 22 + 8 \times 7 - 2 \times 20 + 4 \times (-15)$
$= 44 + 56 - 40 - 60 = 0$

$\therefore 2B_{13} + 8B_{21} - 2B_{32} + 4B_{22} = 0$ (দেখানো হলো)

গ যেহেতু $AB = BA = I_3$

সুতরাং B ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্সই হবে নির্ণেয় A ম্যাট্রিক্স।

$\therefore |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(3+4) - 5(-4+24) + 2(4+18)$
$= 21 - 100 + 44 = -35$

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (3+4) = 7$

$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-4+24) = -20$

$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (4+18) = 22$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-5-2) = 7$

$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -3-12 = -15$

$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -(3-30) = 27$

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -20+6 = -14$

$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -(-12-8) = 20$

$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9-20 = -29$

$\therefore A = B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj } B$

$= \frac{1}{-35}\begin{bmatrix} 7 & -20 & 22 \\ 7 & -15 & 27 \\ -14 & 20 & -29 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{-35}\begin{bmatrix} 7 & 7 & -14 \\ -20 & -15 & 20 \\ 22 & 27 & -29 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

13. ক দেওয়া আছে, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore CC^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+4+9 & 4+10+0 & 3+4+21 \\ 4+10+0 & 16+25+0 & 12+10+0 \\ 3+4+21 & 12+10+0 & 9+4+49 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & 14 & 28 \\ 14 & 41 & 22 \\ 28 & 22 & 62 \end{bmatrix}$

$\therefore |CC^t| = \begin{vmatrix} 14 & 14 & 28 \\ 14 & 41 & 22 \\ 28 & 22 & 62 \end{vmatrix}$

$= 14(2542-484) - 14(868-616) + 28(308-1148)$

$= 28812 - 3528 - 23520 = 1764$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $|B| + x^3 + 4 = 0$

বা, $\begin{vmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{vmatrix} + x^3 + 4 = 0$

বা, $-x(-2x+0) - 14x(-0-0) + 7x(-0-x) + x^3 + 4 = 0$

বা, $2x^2 - 7x^2 + x^3 + 4 = 0$

বা, $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$

বা, $x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x - 4x + 4 = 0$

বা, $x^2(x-1) - 4x(x-1) - 4(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(x^2 - 4x - 4) = 0$

$\therefore x - 1 = 0 \quad \therefore x = 1$

অথবা, $x^2 - 4x - 4 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2(1 \pm \sqrt{2})$

$\therefore$ নির্ণেয় x এর মান $= 1,\ 2(1 \pm \sqrt{2})$

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

এবং $B = \begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix}$

যেহেতু A ম্যাট্রিক্সটি B এর বিপরীত, কাজেই B ম্যাট্রিক্সটিও A এর বিপরীত হবে অর্থাৎ $B = A^{-1}$

$\therefore B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$

এখন $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-0) + 0(0-0) + 7(0-1)$

$= 2 - 7 = -5 \neq 0$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(0+14) = -14$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-0) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 7 = -7$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -14 & -5 & 4 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t$

$= \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 1 & -14 & -7 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

তাহলে, $\begin{bmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $-x = \frac{-1}{5}$ $\therefore x = \frac{1}{5}$

সুতরাং $x = \frac{1}{5}$ হলে A ম্যাট্রিক্সটি B এর বিপরীত হবে।

(Ans.)

14. ক (1, 2)-তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$

$= 6 - (-21)$

$= 27$ (Ans.)

(3, 1)-তম সহগুণক $= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= -9 - 0$

$= -9$ (Ans.)

খ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0-2 & 0+0-2 & -1+0-3 \\ 1+2+2 & 0+4+2 & -1+2+3 \\ 2+2+6 & 0+4+6 & -2+2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 10 & 10 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1-2-8 & 0-4-8 & 1-2-12 \\ 5+6+8 & 0+12+8 & -5+6+12 \\ 10+10+18 & 0+20+18 & -10+10+27 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -11 & -12 & -13 \\ 19 & 20 & 13 \\ 38 & 38 & 27 \end{bmatrix}$

$\therefore A^3 - 6A^2 + 11A - 6I$

$= \begin{bmatrix} -11 & -12 & -13 \\ 19 & 20 & 13 \\ 38 & 38 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -12 & -24 \\ 30 & 36 & 24 \\ 60 & 60 & 54 \end{bmatrix}$

$+ \begin{bmatrix} 11 & 0 & -11 \\ 11 & 22 & 11 \\ 22 & 22 & 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -11+6+11-6 & -12+12+0-0 & -13+24-11-0 \\ 19-30+11-0 & 20-36+22-6 & 13-24+11-0 \\ 38-60+22-0 & 38-60+22-0 & 27-54+33-6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 0$

$\therefore A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$ (প্রমাণিত)

গ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(6-2) - 0(3-2) + (-1)(2-4) = 6$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

প্রশ্নমতে, $B = \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore |B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4(10-4) - (-2)(-2-4) + 2(2+10)$

$= 24 - 12 + 24 = 36 = 6 \times 6$

$\therefore |B| = 6\,|A|$ (দেখানো হলো)

15. ক ক্রয়মূল্যসমূহকে (হাজার একক) কলাম ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $\begin{bmatrix} 25 \\ 35 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ প্রতি বিভাগের যন্ত্রাংশের সংখ্যা সারি হিসেবে নিয়ে পাই,

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ বিভাগ প্রতি যন্ত্রাংশের ক্রয়মূল্য হবে,

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 35 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 + 70 + 4 \\ 100 + 140 + 8 \\ 175 + 350 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149 \\ 248 \\ 537 \end{bmatrix}$

$\therefore$ কলেজের মোট ব্যয় হবে $= (149 + 248 + 537)$ হাজার টাকা

$= 934$ হাজার টাকা

$= 9,34,000$ টাকা। (Ans.)

খ ক্রয়কৃত যন্ত্রাংশের পরিমাণকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = 3(12-20) - 4(6-10) + 7(4-4) = -24 + 16 = -8$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 20 = -8$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-10) = 4$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(12-14) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 7 = 2$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6-4) = -2$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 28 = 12$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = (-1)(30-14) = -16$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 12 \\ 4 & 2 & -16 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ ধরি, প্রতিটি ল্যাপটপ সেট করতে সময় লাগে x মিনিট, ডেক্সটপে y মিনিট ও প্রিন্টারে z মিনিট।

সুতরাং প্রতি যন্ত্রাংশে প্রয়োজনীয় সময় নিয়ে ম্যাট্রিক্স $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

শর্তানুসারে পাই, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 \\ 200 \\ 435 \end{bmatrix}$

$3x + 2y + z = 115$

$4x + 4y + 2z = 200$

$7x + 10y + 3z = 435$

ক্রেমারের নিয়মে সমাধানের ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 3(12-20) - 2(12-14) + 1(40-28)$

$= 3(-8) - 2(-2) + 12 = -24 + 4 + 12 = -8$

$D_x = \begin{vmatrix} 115 & 2 & 1 \\ 200 & 4 & 2 \\ 435 & 10 & 3 \end{vmatrix}$

$= 115(12-20) - 2(600-870) + 1(2000-1740)$

$= -120$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 115 & 1 \\ 4 & 200 & 2 \\ 7 & 435 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3(600-870) - 115(12-14) + 1(1740-1400)$

$= -240$

$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 115 \\ 4 & 4 & 200 \\ 7 & 10 & 435 \end{vmatrix}$

$= 3(1740-2000) - 2(1740-1400) + 115(40-28)$

$= -80$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-120}{-8} = 15, \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-240}{-8} = 30$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-80}{-8} = 10$

$\therefore$ যন্ত্রাংশ সেট করতে ল্যাপটপে 15 মিনিট, ডেক্সটপে 30 মিনিট ও প্রিন্টারে 10 মিনিট সময় লাগে। **(Ans.)**

16. **ক** দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্স সমঘাতি হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

$\therefore A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16-2+15 & 4-1-20 & 20-3-45 \\ -8+2-9 & -2+1+12 & -10+3+27 \\ 12+8-27 & 3+4+36 & 15+12+81 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 29 & -17 & -28 \\ -15 & 11 & 20 \\ -7 & 43 & 108 \end{bmatrix} \neq A$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি নয়। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{vmatrix} = 4(9-12) - 1(18+9) + 5(8+3)$

$= -12 - 27 + 55 = 16$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = 9 - 12 = -3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -(18+9) = -27$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = -(-9+20) = -11$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -36-15 = -51$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-16-3) = 19$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3+5 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-12+10) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4+2 = -2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & -27 & 11 \\ -11 & -51 & 19 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & -11 & 2 \\ -27 & -51 & 2 \\ 11 & 19 & -2 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |B| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= pqr\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= pqr\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-q & q-r & r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

$$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= (pqr-1)\begin{vmatrix} p-q & q-r \\ (p-q)(p+q) & (q+r)(q-r) \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+q & q+r \end{vmatrix}$$

$$= (pqr-1)(p-q)(q-r)(q+r-p-q)$$

$$\therefore \quad |B| = (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p) \text{ (দেখানো হলো)}$$

17. **ক** দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |P| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3(6+12)+2(-1-20)+2(3-30)$$

$$= 54-42-54 = -42$$

আবার, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore |Q| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-9+8)-5(-6-4)+4(-4-3)$$

$$= -1+50-28 = 21$$

এখানে, $|P| = -42 = -2 \times 21$

$\therefore |P| = -2|Q|$ (দেখানো হলো)

খ $Q_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9+8 = -1$

$$Q_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6-4) = 10$$

$$Q_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4-3 = -7$$

$$Q_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(15-8) = -7$$

$$Q_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+4 = 7$$

$$Q_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2+5) = -7$$

$$Q_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -20+12 = -8$$

$$Q_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4+8) = -4$$

$$Q_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3+10 = 7$$

$$\therefore \text{adj}Q = \begin{bmatrix} -1 & 10 & -7 \\ -7 & 7 & -7 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 10 & 7 & -4 \\ -7 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |\text{adj}Q| = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 10 & 7 & -4 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -1(49-28)+7(70-28)-8(-70+49)$$

$$= -21+294+168 = 441 \text{ (Ans.)}$$

গ $Q^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore P^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Q^tP^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+4-2 & -1-12-4 & 5+6-1 \\ 15+6+4 & -5-18+8 & 25+9+2 \\ 12+8+6 & -4-24+12 & 20+12+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -17 & 10 \\ 25 & -15 & 36 \\ 26 & -16 & 35 \end{bmatrix}$$

আবার, $PQ = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3+4-2 & 15+6+4 & 12+8+6 \\ -1-12-4 & -5-18+8 & -4-24+12 \\ 5+6-1 & 25+9+2 & 20+12+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 25 & 26 \\ -17 & -15 & -16 \\ 10 & 36 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (PQ)^t = \begin{bmatrix} 5 & 25 & 26 \\ -17 & -15 & -16 \\ 10 & 36 & 35 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -17 & 10 \\ 25 & -15 & 36 \\ 26 & -16 & 35 \end{bmatrix}$$

$\therefore Q^tP^t = (PQ)^t$ **(প্রমাণিত)**

18. **ক** ধরি, $F = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

F ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে যদি $F^t = F$ হয়।

$$\therefore F^t = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ x & 3 \end{bmatrix}$$

শর্তমতে, $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $x = -2$ **(Ans.)**

খ A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$

বা, $1\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(7-4\lambda)-\lambda(14-5\lambda)+3\,(8-5)=0$

বা, $7-4\lambda-14\lambda+5\lambda^2+9=0$

বা, $5\lambda^2-18\lambda+16=0$

বা, $5\lambda^2-10\lambda-8\lambda+16=0$

বা, $5\lambda(\lambda-2)-8(\lambda-2)=0$

বা, $(\lambda-2)\,(5\lambda-8)=0 \;\therefore \lambda = 2, \frac{8}{5}$

$\therefore \lambda$ এর মান 2 অথবা $\frac{8}{5}$ হলে A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে।

গ $\lambda = 1$ এর জন্য $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\det A = 1(7-4)-1(14-5)+3(8-5) = 3-9+9 = 3$

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1(7-4) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1(14-5) = -9$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1(8-5) = 3$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -1(7-12) = 5$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1(7-15) = -8$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1(4-5) = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-3) = -2$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-6) = 5$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-2) = -1$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -9 & -8 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

এখন, $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -9 & -8 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6+5-8 \\ -18-8+20 \\ 6+1-4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 1, y = -2, z = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (1, -2, 1)$

19. **ক** (i) যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম সমান হয় তবে তাদের যোগফল নির্ণয়যোগ্য হবে।

(ii) দুইটি ম্যাটিক্স গুণনযোগ্য হবে যদি বাম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ডান ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হয়।

খ ধরি, $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$= 5(16-28) - 9(32-8) + 5(28-4)$

$= -60 - 216 + 120 = -156$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&4\\7&8\end{vmatrix}=16-28=-12$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&4\\2&8\end{vmatrix}=-(32-8)=-24$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&2\\2&7\end{vmatrix}=28-4=24$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}9&5\\7&8\end{vmatrix}=-(72-35)=-37$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5&5\\2&8\end{vmatrix}=40-10=30$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5&9\\2&7\end{vmatrix}=-(35-18)=-17$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}9&5\\2&4\end{vmatrix}=36-10=26$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5&5\\4&4\end{vmatrix}=-(20-20)=0$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&9\\4&2\end{vmatrix}=10-36=-26$

$$\therefore \text{adj } A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12&-37&26\\-24&30&0\\24&-17&-26\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj } A=\frac{1}{-156}\begin{bmatrix}-12&-37&26\\-24&30&0\\24&-17&-26\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{13}&\frac{37}{156}&\frac{-1}{6}\\\frac{2}{13}&-\frac{5}{26}&0\\-\frac{2}{13}&\frac{17}{156}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

গ যেহেতু দ্রব্য তিনটির একক মূল্য যথাক্রমে p, q ও r টাকা
সুতরাং সরল সমীকরণজোটটি নিম্নরূপ:

$4p+2q+4r=190$
$5p+9q+5r=426$
$2p+7q+8r=377$

$$\therefore D=\begin{vmatrix}4&2&4\\5&9&5\\2&7&8\end{vmatrix}=4(72-35)-2(40-10)+4(35-18)$$
$$=148-60+68=156$$

$$D_p=\begin{vmatrix}190&2&4\\426&9&5\\377&7&8\end{vmatrix}$$
$$=190(72-35)-2(3408-1885)+4(2982-3393)$$
$$=7030-3046-1644=2340$$

$$D_q=\begin{vmatrix}4&190&4\\5&426&5\\2&377&8\end{vmatrix}$$
$$=4(3408-1885)-190(40-10)+4(1885-852)$$
$$=6092-5700+4132=4524$$

$$D_r=\begin{vmatrix}4&2&190\\5&9&426\\2&7&377\end{vmatrix}$$
$$=4(3393-2982)-2(1885-852)+190(35-18)$$
$$=1644-2066+3230=2808$$

$$\therefore p=\frac{D_p}{D}=\frac{2340}{156}=15,\ q=\frac{D_q}{D}=\frac{4524}{156}=29$$
$$r=\frac{D_r}{D}=\frac{2808}{156}=18$$

20. **ক** মনে করি, $B=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

$$\therefore B^t=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

এখন $BB^t=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta&-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta\\-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta&\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$$

সুতরাং প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

(দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\x&a&b\\x^3&a^3&b^3\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $|A|=0$

বা, $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&a&b\\x^3&a^3&b^3\end{vmatrix}=0$

বা, $\begin{vmatrix}0&0&1\\x-a&a-b&b\\x^3-a^3&a^3-b^3&b^3\end{vmatrix}=0\quad\begin{bmatrix}C_1'=C_1-C_2\\C_2'=C_1-C_2\end{bmatrix}$

বা, $\begin{vmatrix}x-a&a-b\\x^3-a^3&a^3-b^3\end{vmatrix}=0$

বা, $\begin{vmatrix}x-a&a-b\\(x-a)(x^2+ax+a^2)&(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{vmatrix}=0$

বা, $(x-a)(a-b)\begin{vmatrix}1&1\\x^2+ax+a^2&a^2+ab+b^2\end{vmatrix}=0$

বা, $(x-a)(a-b)(a^2+ab+b^2-x^2-ax-a^2)=0$

বা, $(x-a)(a-b)(ab+b^2-x^2-ax)=0$

বা, $(x-a)(a-b)\{a(b-x)+(b+x)(b-x)\}=0$

বা, $(x-a)(a-b)(b-x)(a+b+x)=0$

$\therefore (x-a)(b-x)(a+b+x)=0 \; [\because a \neq b]$

হয়, $x-a=0$ | অথবা, $b-x=0$ | অথবা, $a+b+x=0$

$\therefore x=a$ | $\therefore x=b$ | $\therefore x=-(a+b)$

$\therefore$ x এর মান $a, b, -(a+b)$ **(Ans.)**

গ বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 2a-s & 2a & 2a \\ 2b & 2b-s & 2b \\ 2c & 2c & 2c-s \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2a-a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & 2b-a-b-c & 2b \\ 2c & 2c & 2c-a-b-c \end{vmatrix}$ $[\because s=a+b+c]$

$= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1+r_2+r_3$ প্রয়োগ করে$]$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$ প্রয়োগ করে$]$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}$

[১ম সারি সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 0\}$

$= (a+b+c)^3 = s^3 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \begin{vmatrix} 2a-s & 2a & 2a \\ 2b & 2b-s & 2b \\ 2c & 2c & 2c-s \end{vmatrix} = s^3$ **(দেখানো হলো)**

21. ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore AC = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+20+8 \\ 8+0+12 \\ 4+15+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 27 \end{bmatrix}$

$\therefore$ AC ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3×1 **(Ans.)**

খ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(0-9) - 4(8-6) + 2(12-0)$

$= -9 - 8 + 24 = 7 \neq 0$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 = -16$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$

$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -9 & -2 & 12 \\ -2 & -2 & 5 \\ 12 & 5 & -16 \end{bmatrix}^t$

$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -9 & -2 & 12 \\ -2 & -2 & 5 \\ 12 & 5 & -16 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $AB = C$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x+4y+2z \\ 4x \quad +3z \\ 2x+3y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$x + 4y + 2z = 2$

$4x + 3z = 5$

$2x + 3y + 2z = 4$

$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(0-9) - 4(8-6) + 2(12-0)$

$= -9 - 8 + 24 = 7 \neq 0$

$\therefore D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(0-9) - 4(10-12) + 2(15-0)$

$= -18 + 8 + 30 = 20$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(10-12) - 2(8-6) + 2(16-10)$

$= -2 - 4 + 12 = 6$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(0-15) - 4(16-10) + 2(12-0)$$

$$= -15 - 24 + 24 = -15$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{7},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{7},\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{7}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = \left(\frac{20}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-15}{7}\right)$

22. **ক** দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 2 & -x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$y - 1 = 4$

$\therefore y = 5$

$-x = 3 + y$

বা, $-x = 3 + 5$

$\therefore x = -8$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $(x, y) = (-8, 5)$

খ দেওয়া আছে, $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 2-6+1 & 1-2+0 \\ 3-9-2 & 6+9-1 & 3+3-0 \\ 2+3+0 & 4-3+0 & 2-1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 14 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

প্রদত্ত রাশি $= M^2 - 3M + MI$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 14 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 14 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-3+1 & -3-6+2 & -1-3+1 \\ -8-9+3 & 14+9-3 & 6+3-1 \\ 5-6+2 & 1-3+1 & 1-0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 \\ -14 & 20 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

গ $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-0+1) - 2(0+2) + 1(3+6)$

$$= 1 - 4 + 9 = 6 \neq 0$$

$$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -0 + 1 = 1$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-3) = 4$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9$$

$$\therefore M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{adj } M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 9 & 3 & -9 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

23. **ক** যেহেতু $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী।

সুতরাং $\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$

বা, $3x^2 - 10x = 0$ বা, $x(3x - 10) = 0 \therefore x = 0, \frac{10}{3}$ **(Ans.)**

খ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1-6-15 & 2+14-0 \\ 2-3+0 & -4+7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+1 & 5-3 \\ 5-3 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= AB - C^2 + 2I_2$

$$= \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22-26+2 & 16-2+0 \\ -1-2+0 & 3-10+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

গ $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-6-4) - 1(0-2) + (-1)(0+2)$

$$= -10 + 2 - 2 = -10 \neq 0$$

$\therefore D^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(3+2) = -5$

$D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 3+1 = 4$

$D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -(2-1) = -1$

$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix} = 2-2 = 0$

$D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -(2+0) = -2$

$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} = -2-0 = -2$

$\therefore\ D^{-1} = \frac{1}{|D|}\text{adj } D$

$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-10 & 2 & 2\\ -5 & 4 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}^t = \frac{-1}{10}\begin{bmatrix}-10 & -5 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

24. **ক** $\begin{vmatrix}x & -a & x+a\\ y & -b & y+b\\ z & -c & z+c\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}x & -a & x+a-a\\ y & -b & y+b-b\\ z & -c & z+c-c\end{vmatrix}\ [c'_3 = c_3 + c_2]$

$= \begin{vmatrix}x & -a & x\\ y & -b & y\\ z & -c & z\end{vmatrix} = 0$

[যদি কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।]

$\therefore \begin{vmatrix}x & -a & x+a\\ y & -b & y+b\\ z & -c & z+c\end{vmatrix} = 0$ (প্রমাণিত)

খ $A = B + C = \begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 6 & 4 & -2\\ 5 & 2 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ -4 & -3 & 2\\ -1 & -4 & 6\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix} = -1(5+0) - 2(10-0) + (-3)(-4-4)$

$= -5 - 20 + 24 = -1 \neq 0$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix} = 5+0 = 5$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix} = -(10-0) = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix} = -4-4 = -8$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix} = -(10-6) = -4$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix} = -5+12 = 7$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix} = -(2-8) = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0+3 = 3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -(-0+6) = -6$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1-4 = -5$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$

$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -10 & -8\\ -4 & 7 & 6\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}-5 & 4 & -3\\ 10 & -7 & 6\\ 8 & -6 & 5\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ প্রশ্নমতে, $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = 1$

$\therefore\ 2x + 3y - 5z = 7\ \ldots\ldots$ (i)

$\frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = 1$

$\therefore\ x - 4y + z = 4\ \ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$

$\therefore\ 3x - y - 2z = 5\ \ldots\ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে,

$D = \begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix} = 2(8+1) - 3(-2-3) + (-5)(-1+12)$

$= 18 + 15 - 55 = -22 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix}7 & 3 & -5\\ 4 & -4 & 1\\ 5 & -1 & -2\end{vmatrix} = 7(8+1) - 3(-8-5) + (-5)(-4+20)$

$= 63 + 39 - 80 = 22$

$D_y = \begin{vmatrix}2 & 7 & -5\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix} = 2(-8-5) - 7(-2-3) + (-5)(5-12)$

$= -26 + 35 + 35 = 44$

$D_z = \begin{vmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & -4 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix} = 2(-20+4) - 3(5-12) + 7(-1+12)$

$= -32 + 21 + 77 = 66$

$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{-22} = -1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{44}{-22} = -2$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{66}{-22} = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (-1, -2, -3)$

25. **ক** দেওয়া আছে, $2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix} + F = I_2$

বা, $\begin{bmatrix}2 & -4\\ 4 & -2\end{bmatrix} + F = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

বা, $F = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -4\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

$\therefore\ F = \begin{bmatrix}-1 & 4\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ $x + y + z = 1$

$lx + my + nz = k$

$l^2x + m^2y + n^2z = k^2$

ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix} \therefore AX = B$$

যেখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2 \end{vmatrix} \quad [C_1' = C_1 - C_2; \; C_2' = C_1 - C_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l-m & m-n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l-m & m-n \\ (l+m)(l-m) & (m-n)(m+n) \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l+m & m+n \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)(m+n-l-m)$$

$\therefore \det(A) = (l-m)(m-n)(n-l)$ (দেখানো হলো)

গ (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে x, y ও z এর সহগ নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1^2 & 2^2 & (-1)^2 \end{bmatrix} \quad [\because l = 1, m = 2, n = -1]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(2+4) - 1(1+1) + 1(4-2)$$

$$= 6 - 2 + 2 = 6 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1) = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

26. **ক** ধরি, $A = \begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে যদি $|A| = 0$ হয়।

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

বা, $5p - 10 - 12 = 0$

বা, $5p - 22 = 0$ বা, $5p = 22 \therefore p = \frac{22}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+6 & 8+10 \\ 12+15 & 6+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-20+6 & 18-10+0 \\ 27-15+0 & 31-25+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

এখন, $AX = B$

বা, $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} 4x+2y \\ 3x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে পাই,

$4x + 2y = 6$

$3x + 5y = 1$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$

$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 2 = 28$

$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 18 = -14$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{14} = 2$ এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{14} = -1$

$\therefore \quad x = 2$ এবং $y = -1$ **(Ans.)**