চতুর্থ অধ্যায়

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

Polynomials and Polynomial Equations

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-4.1.4 | পৃষ্ঠা-১১৭

ধরি $f(x) = x^2 - x - 30$

এখানে, 30 এর উৎপাদকসমূহের সেট

$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\}$

এখন, $f(-5) = (-5)^2 - (-5) - 30$

$= 0$

এবং $f(6) = 6^2 - 6 - 30 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $-5, 6$

অনুচ্ছেদ-4.1.6 | পৃষ্ঠা-১১৮

(i) $x^3 = 8$ বা, $x^3 - 8 = 0$

সমীকরণটির মাত্রা = 3

এবং মূলের সংখ্যা = 3

(ii) $x^2 - 2x + 1 = 0$

সমীকরণের মাত্রা = 2

এবং মূলের সংখ্যা = 2

(iii) $5x^4 - 3x^2 - x^5 + 1 = 0$

বা, $-x^5 + 5x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

সমীকরণটির মাত্রা = 5

এবং মূলের সংখ্যা = 5

অনুচ্ছেদ-4.1.9 | পৃষ্ঠা-১১৯

যেহেতু মূলদ সহগ বিশিষ্ট জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে সুতরাং একটি মূল $\frac{1}{1+\sqrt{-5}}$ হলে অপরটি হবে $\frac{1}{1-\sqrt{-5}}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{1+\sqrt{-5}} + \frac{1}{1-\sqrt{-5}}$

$= \frac{1-\sqrt{-5}+1+\sqrt{-5}}{(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})}$

$= \frac{2}{1+5} = \frac{2}{6}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{1+\sqrt{-5}} \times \frac{1}{1-\sqrt{-5}}$

$= \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$

$\therefore$ নির্ণয় সমীকরণ $x^2 - \frac{2}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

বা, $6x^2 - 2x + 1 = 0$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

ধরি, $x = \frac{1}{1+\sqrt{-5}}$

বা, $x + \sqrt{-5}x = 1$

বা, $x - 1 = -\sqrt{-5}\,x$

বা, $(x-1)^2 = (-\sqrt{-5}\,x)^2$

বা, $x^2 - 2x + 1 = -5x^2$

বা, $6x^2 - 2x + 1 = 0$ **(Ans.)**

অনুচ্ছেদ-4.2.2 | পৃষ্ঠা-১২০

$5x^2 - 7x + 4 = 0$ সমীকরণের সর্বোচ্চ 2টি মূল থাকবে।

$5x^2 - 7x + 4 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.5.4}}{2.5}$

$= \frac{7 \pm \sqrt{49-80}}{10}$

$= \frac{7 \pm \sqrt{-31}}{10}$

$\therefore x = \frac{7+\sqrt{-31}}{10}, \frac{7-\sqrt{-31}}{10}$

অনুচ্ছেদ-4.3 | পৃষ্ঠা-১২১

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$px^2 + 2x + 1 = 0$ .... (i)

এবং $x^2 + 2x + p = 0$ ....(ii)

ধরি, (i) এবং (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূল α

$\therefore$ $p\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ .... (iii)

$\alpha^2 + 2\alpha + p = 0$ .... (iv)

(iii) এবং (iv) নং হতে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসরণ করে

পাই, $\frac{\alpha^2}{2p-2} = \frac{\alpha}{1-p^2} = \frac{1}{2p-2}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2(p-1)} = \frac{\alpha}{-(p^2-1)} = \frac{1}{2(p-1)}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2(p-1)} = \frac{\alpha}{-(p+1)(p-1)} = \frac{1}{2(p-1)}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{-(p+1)} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{-(p+1)}$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]

বা, $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{-(p+1)}$

বা, $\alpha = \frac{-2}{(p+1)}$

আবার, $-\frac{\alpha}{(1+p)} = \frac{1}{2}$ [২য় এবং ৩য় অনুপাত হতে]

বা, $\alpha = \frac{-(p+1)}{2}$

তাহলে, $-\frac{2}{p+1} = -\frac{(p+1)}{2}$

বা, $(p+1)^2 = 4$

বা, $p + 1 = \pm 2$

বা, $p = \pm 2 - 1$

বা, $p = 1, -3$

$p = 1$ হলে, $\alpha = \frac{-(1+1)}{2} = -1$

$p = -3$ হলে $\alpha = \frac{-(-3+1)}{2} = 1$

সাধারণ মূল -1 হলে p এর মান 1

সাধারণ মূল 1 হলে p এর মান -3.

▶ অনুচ্ছেদ-4.4 | পৃষ্ঠা-১২২

প্রদত্ত সমীকরণ,

$3x^2 + px + q = 0$

যেহেতু সমীকরণের মূলদ্বয় α, β। সুতরাং, মূলদ্বয়ের যোগফল ও গুণফলের মান যথাক্রমে, $\alpha + \beta = \frac{-p}{3}$

এবং $\alpha\beta = \frac{q}{3}$ **(Ans.)**

▶ অনুচ্ছেদ-4.5 | পৃষ্ঠা-১২২

(i) প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + 1 = 0$

বা, $x^2 + 0.x + 1 = 0$ .... (i)

বা, $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a = 1, b = 0, c = 1$

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= 0 - 4.1.1$

$= -4$

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 + 3x = 0$ .... (i)

বা $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a = 2, b = 3$ এবং $c = 0$

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (3)^2 - 4.2.0$

$= 9$

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + 5x + 8 = 0$ .... (i)

বা $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে, $a = 1, b = 5$ এবং $c = 8$

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক, $D = b^2 - 4.a.c$

$= 25 - 4.1.8$

$= -7$

▶ অনুচ্ছেদ-4.6.1 | পৃষ্ঠা-১২৪

1.(i) প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 = 0$

বা $ax^2 + 0.x + 0 = 0$ .... (i)

(i) নং কে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = a, b = 0$ এবং $c = 0$

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= 0 - 4.a.0$

$= 0$

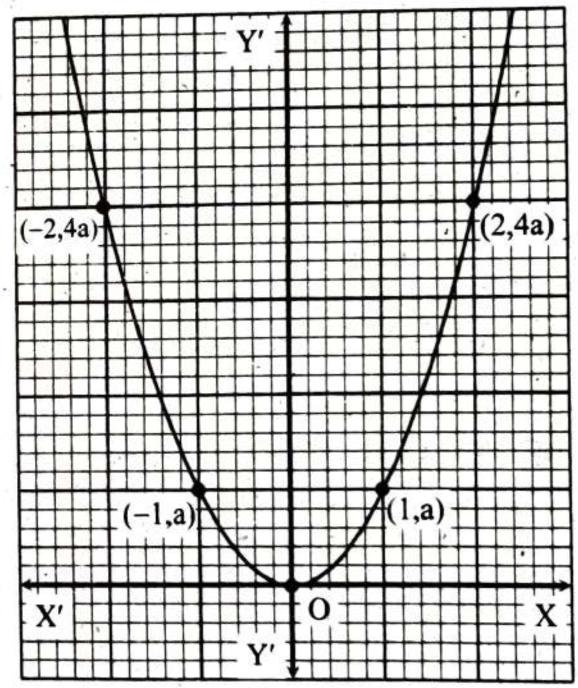
যেহেতু $D = 0$

∴ মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান।

ধরি, $y = ax^2$ যখন $a > 0$

ছক নির্ধারণ:

x	-2	-1	0	1	2
y	4a	a	0	a	4a



$y = ax^2$ এর লেখচিত্র

স্কেল: x-অক্ষে ক্ষুদ্রতম 5 ঘর = 1 একক

y-অক্ষে ক্ষুদ্রতম 5 ঘর = a একক

এক্ষেত্রে $y = ax^2$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে মূল বিন্দুতে অর্থাৎ একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি মূলই বাস্তব এবং সমান।

অনুরূপভাবে, $a < 0$ হলে লেখচিত্রটি x-অক্ষের নিচের দিকে অবস্থান করবে।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ

$x^2 + x + 1 = 0$ .... (i)

বা, $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a = 1$, $b = 1$ এবং $c = 1$

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4.1.1$

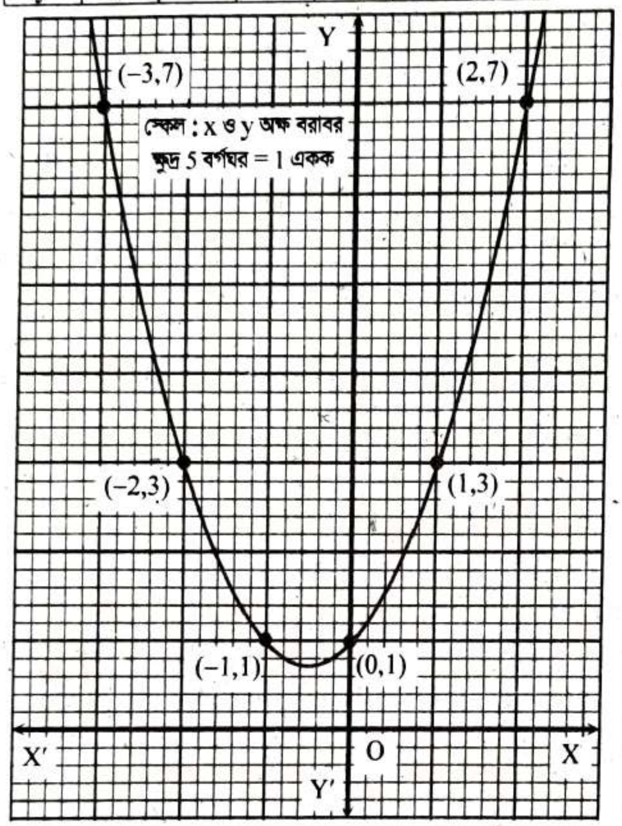
$= -3$

যেহেতু $D < 0$, মূলদ্বয় অবাস্তব, কাল্পনিক ও জটিল।

ধরি, $y = x^2 + x + 1$

ছক নির্ধারণ:

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	7	3	1	1	3	7



$y = x^2 + x + 1$ এর লেখচিত্র

এক্ষেত্রে $y = x^2 + x + 1$

বক্ররেখাটি x-অক্ষের কোন বিন্দুতে ছেদ না করায় $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের দুইটি মূলই জটিল ও অসমান।

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ,

$x^2 - 4x + 4 = 0$ .... (i)

বা, $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a = 1$, $b = -4$ এবং $c = 4$

(1) নং সমীকরণের পৃথায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= 16 - 4.1.4 = 0$

যেহেতু $D = 0$

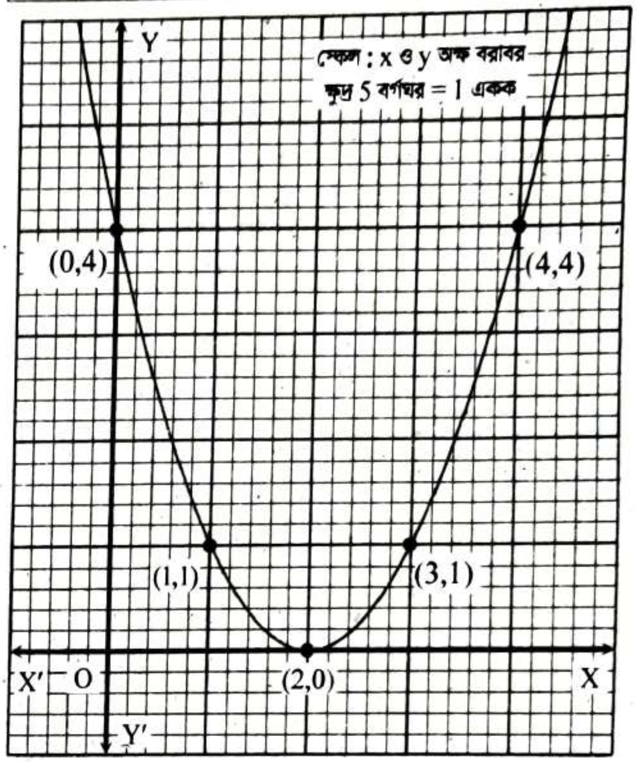
∴ মূলদ্বয় বাস্তব এবং সমান।

ধরি, $y = x^2 - 4x + 4$

$= (x - 2)^2$

ছক নির্ধারণ:

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4



$y = x^2 - 4x + 4$ এর লেখচিত্র

প্রদত্ত বক্ররেখা

$y = x^2 - 4x + 4$, x-অক্ষের (2,0) বিন্দুতে মিলিত হয়ে বা স্পর্শ করে পূর্বের মাধ্যমে চলে গেছে।

∴ উক্ত ফাংশনের দুইটি মূলই সমান এবং মূল দুইটি 2, 2

(iv) $x^2 + 17x - 16 = 0$ .... (i)

বা $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a = 1$, $b = 17$, $c = -16$

(i) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক বা পৃথায়ক

$D = b^2 - 4ac$

$= (17)^2 - 4.1.(-16)$

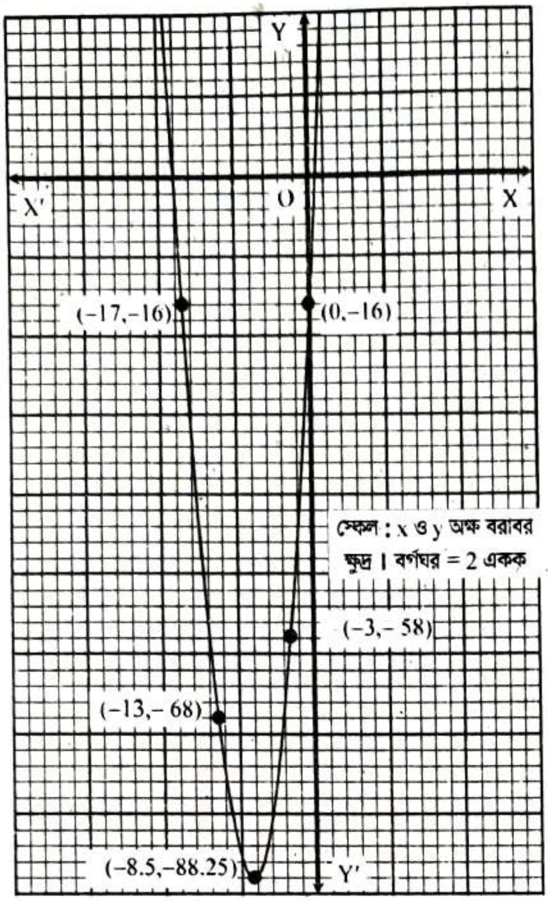
$= 289 + 64 = 353$

যেহেতু $D > 0$, সুতরাং মূলদ্বয় বাস্তব অসমান ও অমূলদ।

ধরি, $y = x^2 + 17x - 16$

ছক নির্ধারণ:

x	−17	−13	−8.5	−3	0
y	−16	−68	−88.25	−58	−16



$y = x^2 + 17x - 16$ এর লেখচিত্র

$y = x^2 + 17x - 16$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করেছে। কিন্তু নির্দিষ্ট স্থানাঙ্ক সাপেক্ষে x-অক্ষের ছেদক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সেজন্য প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব কিন্তু অমূলদ।

(v) প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - 17x + 16 = 0$ .... (i)

বা, $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a = 1, b = -17$ এবং $c = 16$

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক,

$D = b^2 - 4ac$

$= (-17)^2 - 4.1.16$

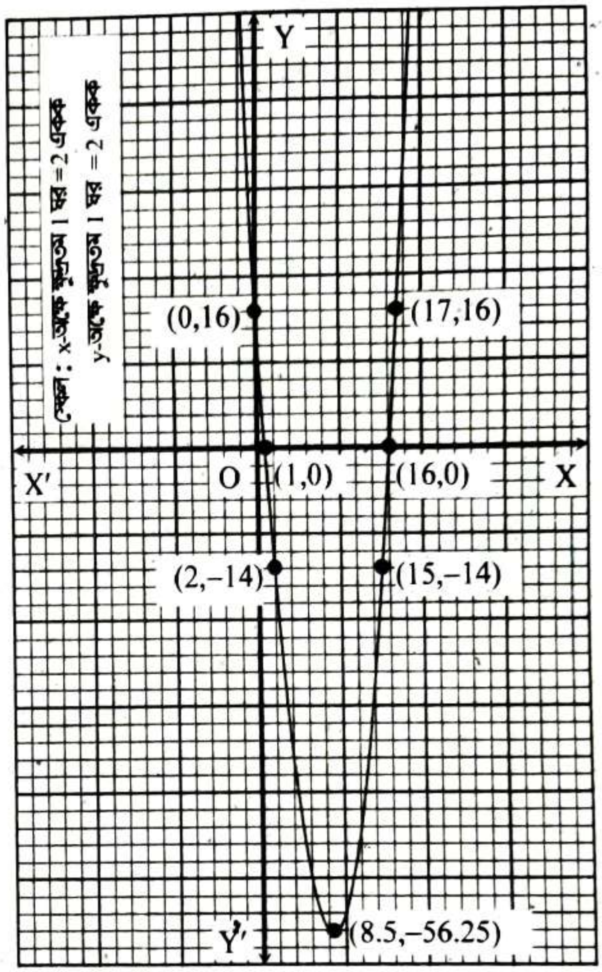
$= 289 - 64 = 225 = (15)^2$

যেহেতু $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ, সুতরাং মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান।

ধরি, $y = x^2 - 17x + 16$

ছক নির্ধারণ:

x	0	1	2	8.5	15	16	17
y	16	0	– 14	– 56.25	– 14	0	16



$y = x^2 - 17x + 16$ এর লেখচিত্র

$y = x^2 - 17x + 16$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে (1,0) এবং (16,0) বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং উক্ত সমীকরণের দুইটি বাস্তব, অসমান ও মূলদ মূল বিদ্যমান। মূল দুইটি 1 এবং 16.

2. প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

বা, $\dfrac{(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0$

বা, $x^2 - bx - cx + bc + x^2 - ax - cx + ca +$
$x^2 - ax - bx + ab = 0$

বা, $3x^2 - 2ax - 2bx - 2cx + (ab + bc + ca) = 0$

বা, $3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক,

$D = 4(a + b + c)^2 - 4.3(ab + bc + ca)$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - 12(ab + bc + ca)$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ab - 3bc - 3ca)$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= 2(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$

$= 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} > 0$

যেহেতু, $D > 0$, সুতরাং মূলদ্বয় বাস্তব।
উপরোক্ত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে $D = 0$ হবে।
অর্থাৎ $2\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$
বা, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$
আমরা জানি, পূর্ণবর্গ সংখ্যা সর্বদাই ধনাত্মক। বর্গগুলির সমষ্টি শূন্য হবে যদি এরা পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হয়।
অর্থাৎ $(a-b)^2 = 0$ বা, $a - b = 0$ বা, $a = b$
অনুরূপভাবে, $b = c$ এবং $c = a$
$\therefore$ $a = b = c$ **(দেখানো হলো)**

▶ অনুচ্ছেদ-4.7 | পৃষ্ঠা-১২৪

1(i) মূলদ্বয়ের যোগফল $= -1 + 6 = 5$
মূলদ্বয়ের গুণফল $= -1.6 = -6$
$\therefore$ সমীকরণটি,
$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$
বা, $x^2 - 5.x - 6 = 0$ বা, $x^2 - 5x - 6 = 0$

(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $= 3 + 7 = 10$
মূলদ্বয়ের গুণফল $= 3.7 = 21$
$\therefore$ সমীকরণটি,
$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$
বা, $x^2 - 10x + 21 = 0$

▶ অনুচ্ছেদ-4.8 | পৃষ্ঠা-১২৬

1(i). $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ এবং $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

$$\alpha\beta^{-1} + \beta\alpha^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{q}{p}\right)^2 - 2.\frac{r}{p}}{\frac{r}{p}}$$

$$= \frac{\frac{q^2}{p^2} - \frac{2r}{p}}{\frac{r}{p}} = \frac{\frac{q^2-2pr}{p^2}}{\frac{r}{p}} = \frac{q^2-2pr}{pr} = \frac{q^2}{pr} - 2 \text{ (Ans.)}$$

(ii) $(p\alpha + q)^{-1} + (p\beta + q)^{-1}$

$$= \frac{1}{p\alpha+q} + \frac{1}{p\beta+q}$$

$p\alpha + q = -p\beta$
$p\beta + q = -p\alpha$

$$= \frac{1}{-p\beta} + \frac{1}{-p\alpha}$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) = -\frac{1}{p}\left(\frac{-\frac{q}{p}}{\frac{r}{p}}\right) = \frac{q}{pr} \text{ (Ans.)}$$

(iii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$= \frac{-q^3}{p^3} - 3.\frac{r}{p}.\left(-\frac{q}{p}\right)$$

$$= \frac{-q^3}{p^3} + \frac{3qr}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^3}(3pr - q^2) \text{ (Ans.)}$$

2. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে
$\alpha + \beta = -p$ এবং $\alpha\beta = q$

(i) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{-p^3 + 3pq}{q} \text{ (Ans.)}$$

(ii) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$$= \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2$$
$$= (p^2 - 2q)^2 - 2q^2$$
$$= p^4 - 4p^2q + 4q^2 - 2q^2$$
$$= p^2(p^2 - 4q) + 2q^2 \text{ (Ans.)}$$

(iii) $\alpha^{-2} + \beta^{-2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} = \frac{p^2-2q}{q^2} \text{ (Ans.)}$$

3. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β ও γ হলে

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-3b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3c}{a}$

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2 = \Sigma(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$
$$= \Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta + \Sigma\beta^2$$
$$= \Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta + \Sigma\alpha^2$$
$$= 2\Sigma\alpha^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$
$$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2.\frac{3c}{a}$$
$$= 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} - \frac{6c}{a}$$
$$= 2\left(\frac{9b^2}{a^2} - \frac{6c}{a}\right) - \frac{6c}{a} = \frac{18b^2}{a^2} - \frac{12c}{a} - \frac{6c}{a}$$
$$= \frac{18b^2}{a^2} - \frac{18c}{a} = \frac{18(b^2 - ac)}{a^2} \text{ (Ans.)}$$

▶ অনুচ্ছেদ-4.9 | পৃষ্ঠা-১২৭

$rx^3 + pqx^2 + mx + n = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ

$\therefore$ $\Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{pq}{r}$

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{m}{r}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{n}{r}$

অনুশীলনী-4 এর সমাধান

1. (i) ধরি, $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2$
$\therefore f(1) = 1 + 2 - 5 + 6 + 2 = 6$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $f(x) = 3x^3 - (7 + 3a)x^2 + (2 + 7a)x - 2a$
$(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $f(a) = 0$ হয়।
এখন, $f(x) = 3x^3 - (7 + 3a)x^2 + (2 + 7a)x - 2a$
$\therefore f(a) = 3a^3 - (7 + 3a)a^2 + (2 + 7a)a - 2a$
$= 3a^3 - 7a^2 - 3a^3 + 2a + 7a^2 - 2a = 0$
সুতরাং, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে, $(x - a)$ প্রদত্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

(iii) ধরি, $f(x) = x^2 + x - 6$
এখানে, ধ্রুবক এর উৎপাদক সমূহ $\pm 1, \pm 2, \pm 3$
$f(-1) = (-1)^2 - 1 - 6 = -6$
$f(1) = 1 + 1 - 6 = -4$
$f(2) = 4 + 2 - 6 = 0$
$f(-3) = 9 - 3 - 6 = 0$
$\therefore x = 2, -3$ **(Ans.)**

(iv) $2x^2 + 5x - 9 = 0$
বা, $16x^2 + 40x - 72 = 0$
বা, $16x^2 + 40x + 25 - 97 = 0$
বা, $(4x + 5)^2 - (\sqrt{97})^2 = 0$
বা, $(4x + 5 + \sqrt{97})(4x + 5 - \sqrt{97}) = 0$
হয়, $4x + 5 + \sqrt{97} = 0$ অথবা, $4x + 5 - \sqrt{97} = 0$
বা, $4x = -5 - \sqrt{97}$ বা, $4x = -5 + \sqrt{97}$
$\therefore x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{4}$ $\therefore x = \frac{-5 + \sqrt{97}}{4}$
নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{4}$

2. (i) (a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $= (-4)^2 - 4.4.1$
$= 16 - 16 = 0$
সুতরাং সমীকরণটির মূলগুলো সমান, বাস্তব ও মূলদ।

সমাধান ও সত্যতা যাচাই :
$4x^2 - 4x + 1 = 0$
বা, $(2x)^2 - 2.2x + (1)^2 = 0$
বা, $(2x - 1)^2 = 0$
$\therefore x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
সুতরাং, উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হলো।

(b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $= 25 - 24 = 1 > 0$
সুতরাং সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব ও অসমান।
সমাধান ও সত্যতা যাচাই :
$x^2 - 5x + 6 = 0$
বা, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$
বা, $(x - 3)(x - 2) = 0$
$\therefore x = 2, 3$
সুতরাং উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হলো।

(c) $x^2 - 2x + 2 = 0$
প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $= 4 - 4.2 = -4 < 0$
সুতরাং, সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে।
সমাধান ও সত্যতা যাচাই :
$x^2 - 2x + 2 = 0$
বা, $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$
$= \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$ $\therefore x = 1 \pm i$
সুতরাং উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হলো।

(d) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
সমীকরণটির পৃথায়ক $= 3^2 - 4.2.(-2)$
$= 9 + 16 = 25$ যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।
সুতরাং মূলগুলো বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে।
সমাধান ও সত্যতা যাচাই :
$2x^2 + 3x - 2 = 0$
বা, $2x^2 + 4x - x - 2 = 0$
বা, $2x(x + 2) - (x + 2) = 0$
বা, $(x + 2)(2x - 1) = 0$
বা, $(x + 2)(2x - 1) = 0$
$\therefore x = -2, \frac{1}{2}$
সুতরাং, উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হলো।

(e) প্রদত্ত সমীকরণটি, $x^2 - 6x + 7 = 0$
$\therefore$ পৃথায়ক $= (-6)^2 - 4.1.7 = 36 - 28$
$= 8 > 0$ এবং পূর্ণবর্গ নয়।
সুতরাং সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।
সমাধান ও সত্যতা যাচাই :
$x^2 - 6x + 7 = 0$
বা, $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$
$\therefore$ মূলগুলো $3 \pm \sqrt{2}$ যা বাস্তব, অমূলদ ও অসমান।
উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হল।

(ii) দেওয়া আছে, $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$
পৃথায়ক, $\{2(a^2 + b^2)\}^2 - 4(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)$
$= 4(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)^2$
$= 4\{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2\}$
$= 4 \cdot 4\, a^2 \cdot b^2$; $[4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2]$
$= 16\, a^2b^2$
$= (4\, ab)^2$, যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।
অতএব, a ও b মূলদ হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সব সময় মূলদ হবে। **(দেখানো হলো)**

(iii) দেওয়া আছে, $(a-b)x^2+(b-c)x+c-a=0$

পৃথায়ক $=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)$
$=b^2+c^2-2bc-4(ac-a^2-bc+ab)$
$=b^2+c^2+4a^2+2bc-4ca-4ab$
$=(b+c-2a)^2$ যা পূর্ণবর্গ।

$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ। **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $\frac{1}{x-k}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}=0$

বা, $x(x-1)+x(x-k)+(x-1)(x-k)=0$
বা, $x^2-x+x^2-kx+x^2-kx-x+k=0$
বা, $3x^2-2kx-2x+k=0$
$\therefore\ 3x^2-2(k+1)x+k=0$
পৃথায়ক $=4(k+1)^2-4.3.k$
$=4(k^2+2k+1-3k)=4(k^2-k+1)$
$=4k^2-4k+1+3=(2k-1)^2+3>0$

$\therefore$ k এর যেকোনো মানের জন্য মূলদ্বয় বাস্তব হবে।
(দেখানো হলো)

(v) দেওয়া আছে, $(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2)=0$

পৃথায়ক $=\{2(ac+bd)\}^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$
$=4(a^2c^2+2acbd+b^2d^2)-4(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)$
$=4(a^2c^2+2abcd+b^2d^2-a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2$
$=4(2abcd-a^2d^2-b^2c^2)$
$=-4(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=-4(ad-bc)^2$

যদি মূলগুলো বাস্তব হয় তবে পৃথায়ক ≥ 0 হবে।
সুতরাং $ad-bc=0$ ব্যতীত তা সম্ভব নয়। সুতরাং এক্ষেত্রে পৃথায়ক $=0$। অর্থাৎ মূলগুলো সমান হবে।
(দেখানো হলো)

(vi) দেওয়া আছে,
$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$
বা, $3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$
পৃথায়ক $=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)$
$=4\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$
$=4(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ab-3bc-3ca)$
$=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=2\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
যা ধনাত্মক। সুতরাং মূলগুলো বাস্তব।
পৃথায়ক শূন্য হলে মূলগুলো সমান হবে।
যেহেতু $(a-b)^2$, $(b-c)^2$ ও $(c-a)^2$ প্রতিটিই ধনাত্মক। সুতরাং পৃথায়ক শূন্য হলে $(a-b)^2$, $(b-c)^2$ ও $(c-a)^2$ প্রত্যেকেই আলাদাভাবে শূন্য হবে।
অর্থাৎ $(a-b)^2=0$
বা, $a-b=0\ \therefore a=b$
অনুরূপে, $b=c$, $c=a$

$\therefore\ a=b=c$
$\therefore\ a=b=c$ না হলে মূলদ্বয় সমান হতে পারে না।
(দেখানো হলো)

(vii) $(h^2-a^2)x^2-2hkx+(k^2-b^2)$ একটি দ্বিঘাত বহুপদী।
প্রদত্ত দ্বিঘাত বহুপদীটি পূর্ণবর্গ হবে যদি $(h^2-a^2)x^2-2hkx+(k^2-b^2)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।
সমীকরণটির পৃথায়ক, $D=4h^2k^2-4(h^2-a^2)(k^2-b^2)$

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে যদি পৃথায়ক (D) শূন্য হয়।
অর্থাৎ $4h^2k^2-4(h^2-a^2)(k^2-b^2)=0$ হয়।
বা, $4h^2k^2-4h^2k^2+4h^2b^2+4a^2k^2-4a^2b^2=0$
বা, $4h^2b^2+4a^2k^2-4a^2b^2=0$
বা, $h^2b^2+a^2k^2=a^2b^2$

$\therefore\ \frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ [উভয়পক্ষে a^2b^2 (একটি ধ্রুবক) দ্বারা ভাগ করে]

অর্থাৎ, $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে।

অতএব, প্রদত্ত বহুপদটি পূর্ণ বর্গ হবে যদি $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ হয়।
(দেখানো হলো)

(viii) দেওয়া আছে, $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$
সমীকরণের মূলদ্বয় সমান।

$\therefore$ উক্ত সমীকরণের পৃথায়কের মান শূন্য।
$\therefore\ \{b(c-a)\}^2-4[\{a(b-c)\}\{c(a-b)\}]=0$
বা, $b^2c^2-2ab^2c+a^2b^2-4(a^2bc-ab^2c-a^2c^2+abc^2)=0$
বা, $b^2c^2+a^2b^2+4a^2c^2+2ab^2c-4a^2bc-4abc^2=0$
বা, $(bc+ab-2ac)^2=0$
বা, $bc+ab-2ac=0$
বা, $bc+ab=2ac$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ [উভয়পক্ষকে abc দ্বারা ভাগ করে] **(প্রমাণিত)**

(ix) দেওয়া আছে, $a^2x^2+6abx+ac+8b^2=0$
সমীকরণের মূলদ্বয় সমান।
নিশ্চায়ক $=0$
বা, $36a^2b^2-4a^2(ac+8b^2)=0$
বা, $4a^2b^2-4a^3c=0$
বা, $4a^2(b^2-ac)=0$
$\therefore\ b^2-ac=0$
আবার, $ac(x+1)^2=4b^2x$
বা, $acx^2+2acx+ac-4b^2x=0$
$\therefore\ acx^2+(2ac-4b^2)x+ac=0$
$\therefore$ নিশ্চায়ক $=\{(2ac-4b^2)\}^2-4ac.ac$
$=4a^2c^2-16ab^2c+16b^4-4a^2c^2$
$=16b^2(b^2-ac)$
$=16b^2\times 0=0$ [কারণ, $b^2-ac=0$]

$\therefore$ দ্বিতীয় সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে। **(দেখানো হলো)**

3. (i) দেওয়া আছে, $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$

পৃথায়ক $= \{-(k+2)\}^2-4(k-1)4$
$= k^2+4k+4-16k+16$
$= k^2-12k+20$
$= k^2-10k-2k+20$
$= k(k-10)-2(k-10)$
$= (k-2)(k-10)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(k-2)(k-10)=0$

$\therefore$ $k=2$ অথবা $k=10$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k=2$ বা 10

(ii) দেওয়া আছে, $(k+1)x^2+2(k+2)x+(k-3)=0$

পৃথায়ক $= 4(k+2)^2-4(k+1)(k-3)$
$= 4(k^2+4k+4-k^2+3k-k+3)$
$= 4(6k+7)$

সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক $=0$ হয়।

$\therefore$ $4(6k+7)=0$

বা, $6k+7=0$

$\therefore$ $k=-\frac{7}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $k=-\frac{7}{6}$

(iii) দেওয়া আছে, $mx^2+2x+3=0$

পৃথায়ক $=4-4.m.3=4-12m$ সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে যদি পৃথায়ক >0 হয়।

$\therefore$ $4-12m>0$

বা, $4>12m$ বা, $m<\frac{1}{3}$

আবার, মূলগুলো সমান হবে যদি, পৃথায়ক $=0$ হয়।

$\therefore$ $4-12m=0$ বা, $m=\frac{1}{3}$

আবার, মূলগুলো অবাস্তব হবে যদি পৃথায়ক <0 হয়।

$\therefore$ $4-12m<0$

বা, $4<12m$ বা, $m>\frac{1}{3}$

Ans. $m<\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{3}$; $m>\frac{1}{3}$

(iv) দেওয়া আছে, $(3k+1)x^2+(11+k)x+9=0$

পৃথায়ক $=(11+k)^2-4(3k+1).9$
$=121+22k+k^2-108k-36$
$=k^2-86k+85=(k-85)(k-1)$

সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক $=0$ হয়।

অর্থাৎ, $(k-85)(k-1)=0$

বা, $k=85$ অথবা $k=1$।

আবার, মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে যদি পৃথায়ক >0 হয়। অর্থাৎ, $(k-85)(k-1)>0$

বা, $k-85>0$ এবং $k-1>0$

বা, $k>85$ এবং $k>1$

$k>85$

অথবা, $k-85<0$ এবং $k-1<0$

বা, $k<85$ এবং $k<1$

$\therefore$ $k<1$।

সুতরাং, মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে যদি $k>85$ এবং $k<1$ হয়।

আবার, সমীকরণটির মূলগুলো জটিল হবে যদি পৃথায়ক <0 হয়। অর্থাৎ, $(k-85)(k-1)<0$। ইহা সম্ভব হবে যদি $k-1>0$ ও $k-85<0$ হয়। অর্থাৎ $k>1$ ও $k<85$

$\therefore 1<k<85$

Ans. $k=85$ বা $k=1$; $k>85$ অথবা $k<1$; $1<k<85$.

(v) $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

অর্থাৎ, সমীকরণের পৃথায়ক $=0$ হয়।

অর্থাৎ, $\{2(k+3)\}^2-4(k+1)(2k+3)=0$

বা, $k^2+6k+9-(2k^2+5k+3)=0$

বা, $k^2+6k+9-2k^2-5k-3=0$

বা, $-k^2+k+6=0$

বা, $k^2-k-6=0$

বা, $k^2-3k+2k-6=0$

বা, $k(k-3)+2(k-3)=0$

বা, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore$ $k=3, -2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k=3, -2$ **(Ans.)**

(vi) দেওয়া আছে, $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)=0$.

মনে করি, সমীকরণটির একটি মূল α এবং অপর মূলটি $\frac{1}{\alpha}$।

মূলদ্বয়ের গুণফল $=\frac{3k+1}{k^2-3}=\alpha.\frac{1}{\alpha}=1$

বা, $k^2-3=3k+1$

বা, $k^2-3k-4=0$

বা, $k^2-4k+k-4=0$

বা, $k(k-4)+1(k-4)=0$

বা, $(k-4)(k+1)=0$

হয় $k-4=0$ অথবা, $k+1=0$

$\therefore$ $k=4$ $\therefore$ $k=-1$

$\therefore$ $k=4, -1$ **(Ans.)**

(vii) ধরি, $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α এবং অপর মূল 3α।

এবং $\alpha + 3\alpha = \frac{k}{3}$

বা, $4\alpha = \frac{k}{3}$

$\therefore \quad \alpha = \frac{k}{12}$

এবং $\alpha.3\alpha = \frac{4}{3}$

বা, $3\alpha^2 = \frac{4}{3}$

বা, $3 \times \frac{k^2}{144} = \frac{4}{3}$ [মান বসিয়ে]

বা, $k^2 = \frac{4 \times 144}{3 \times 3} = 64$

$\therefore \ k = \pm 8$ **(Ans.)**

(viii) দেওয়া আছে, $(m-1)x^2 - (m+2)x + 4 = 0$

পৃথায়ক $= \{-(m+2)\}^2 - 4(m-1)4$
$= m^2 + 4m + 4 - 16m + 16$
$= m^2 - 12m + 20$
$= m^2 - 10m - 2m + 20$
$= m(m-10) - 2(m-10)$
$= (m-2)(m-10)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(m-2)(m-10) = 0$

$\therefore \quad m = 2$ অথবা $m = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = 2$ বা 10

4. (i) ধরি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $4\alpha, 5\alpha$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $4\alpha + 5\alpha = -\frac{b}{a}$

বা, $9\alpha = -\frac{b}{a}$

$\therefore \alpha = -\frac{b}{9a}$

আবার, মূলদ্বয়ের গুণফল, $4\alpha.\ 5\alpha = \frac{c}{a}$

বা, $20\alpha^2 = \frac{c}{a}$

বা, $20.\left(-\frac{b}{9a}\right)^2 = \frac{c}{a}$ [মান বসিয়ে]

বা, $20.\frac{b^2}{81a^2} = \frac{c}{a}$

বা, $\frac{20b^2}{81a} = \frac{c}{1}$

$\therefore \ 20b^2 = 81ac$ **(প্রমাণিত)**

(ii) মনে করি, $ax^2 + bx + b = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha$ এবং $n\alpha$

$m\alpha + n\alpha = -\frac{b}{a}$ এবং $m\alpha.n\alpha = \frac{b}{a}$

$\therefore m + n = -\frac{b}{a\alpha}$ ……… (i)

$\therefore mn = \frac{b}{a\alpha^2}$ ……… (ii)

এখন, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{m+n}{\sqrt{mn}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$

$= \frac{-\frac{b}{a\alpha}}{\sqrt{\frac{b}{a\alpha^2}}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= -\frac{b}{a\alpha}.\frac{\sqrt{a}\cdot\alpha}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = 0$

$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির মূল দুইটির অনুপাত r.

ধরি, সমীকরণটির একটি মূল α এবং অপরটি αr

$\therefore$ মূল দুইটির যোগফল, $\alpha + \alpha r = -\frac{b}{a}$

$\therefore \quad \alpha = -\frac{b}{a(1+r)}$

এবং মূল দুইটির গুণফল, $\alpha.\ \alpha r = \frac{c}{a}$

বা, $\alpha^2 r = \frac{c}{a}$ বা, $\left\{-\frac{b}{a(1+r)}\right\}^2 r = \frac{c}{a}$

বা, $\frac{b^2 r}{a^2(1+r)^2} = \frac{c}{a}$

বা, $\frac{r}{(1+r)^2} = \frac{ca^2}{ab^2}$

বা, $\frac{(1+r)^2}{r} = \frac{ab^2}{a^2c}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore \frac{(1+r)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ **(প্রমাণিত)**

(iv) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ………. (i)
$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ……… (ii)

ধরি, (i) এর মূলদ্বয় α_1, β_1 এবং (ii) এর মূলদ্বয় α_2, β_2

$\therefore \alpha_1 + \beta_1 = -\frac{b_1}{a_1}$ এবং $\alpha_1\beta_1 = \frac{c_1}{a_1}$

আবার, $\alpha_2 + \beta_2 = -\frac{b_2}{a_2}$ এবং $\alpha_2\beta_2 = \frac{c_2}{a_2}$

শর্তমতে, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_2+\beta_2}$

$\therefore \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_2+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_2+\beta_2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{c_1}{a_1}}{\frac{c_2}{a_2}} = \frac{\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)^2}{\left(-\frac{b_2}{a_2}\right)^2} \Rightarrow \frac{c_1 a_2}{a_1 c_2} = \frac{b_1^2 a_2^2}{a_1^2 b_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1^2 a_2}{a_1 b_2^2} \Rightarrow \frac{b_1^2}{a_1 c_1} = \frac{b_2^2}{a_2 c_2}$$ (প্রমাণিত)

(v) ধরি, $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α এবং β

$\therefore \quad \alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$

আবার, ধরি, $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha + k$ ও $\beta + k$, যেখানে k ধ্রুবক।

$\therefore \alpha + k + \beta + k = c$

$\Rightarrow \alpha + \beta + 2k = c$

$\Rightarrow b + 2k = c$

$\therefore k = \frac{c-b}{2}$

এবং $(\alpha + k)(\beta + k) = b$

$\Rightarrow \alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2 = b$

$\Rightarrow c + \left(\frac{c-b}{2}\right) b + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = b$

$\Rightarrow (c - b) + \frac{b(c-b)}{2} + \frac{(c-b)^2}{4} = 0$

$\Rightarrow 1 + \frac{b}{2} + \frac{c-b}{4} = 0$ [$(c - b) \neq 0$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 4 + 2b + c - b = 0$

$\Rightarrow b + c + 4 = 0$ (প্রমাণিত)

(vi) ধরি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β

$\therefore \quad \alpha + \beta = -p$ ... ... (i)

$\alpha\beta = q$ ... ... (ii)

এবং প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\alpha - \beta = \pm 1$ ... ... (iii)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$(\alpha + \beta)^2 = p^2$

বা, $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = p^2$

বা, $1 + 4q = p^2$ [(ii) ও (iii) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $p^2 + 4q^2 = 1 + 4q + 4q^2$

[উভয়পক্ষে $4q^2$ (একটি ধ্রুবক) যোগ করে]

$\therefore \quad p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ (দেখানো হলো)

(vii) মনে করি, $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β;

$\therefore \quad \alpha + \beta = -(-b) = b$ এবং $\alpha\beta = c$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\alpha - \beta = \pm 1$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$ [বর্গ করে]

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

বা, $b^2 - 4c = 1$ [$\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ এর মান বসিয়ে]

বা, $b^2 = 1 + 4c$

বা, $b^2 + 4c^2 = 1 + 4c + 4c^2$

[উভয়পক্ষে $4c^2$ যোগ করে]

$\therefore \quad b^2 + 4c^2 = (1 + 2c)^2$ (প্রমাণিত)

(viii) দেওয়া আছে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p - x + x}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $x(p - x) = pq$

বা, $px - x^2 = pq$

$\therefore \quad x^2 - px + pq = 0$ ... ... (i)

মনে করি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore \quad \alpha + \beta = p$

এবং $\alpha\beta = pq$

প্রশ্নানুসারে, $\alpha - \beta = \pm r$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = r^2$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = r^2$

বা, $p^2 - 4pq = r^2$

বা, $p^2 - 2.\, p.\, 2q + (2q)^2 - 4q^2 = r^2$

বা, $(p - 2q)^2 = r^2 + 4q^2$

বা, $p - 2q = \pm\sqrt{r^2 + 4q^2}$

$\therefore \quad p = 2q \pm \sqrt{r^2 + 4q^2}$ **(Ans.)**

(ix) প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - px + q = 0$

ধরি, মূল দুইটি, $\alpha, \alpha + 1$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \alpha + 1 = p$

বা, $2\alpha = p - 1$

$\therefore \alpha = \frac{p-1}{2}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha(\alpha + 1) = q$

বা, $\frac{p-1}{2}\left(\frac{p-1}{2} + 1\right) = q$ [মান বসিয়ে]

বা, $\frac{p-1}{2}\left(\frac{p-1+2}{2}\right) = q$

বা, $(p - 1)(p + 1) = 4q$

বা, $p^2 - 1 = 4q$

$\therefore \quad p^2 - 4q - 1 = 0$ (প্রমাণিত)

(x) মনে করি, $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূল α

তাহলে শর্তানুযায়ী, $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল 2α।

সুতরাং α দ্বারা $cx^2 + bx + a = 0$ এবং 2α দ্বারা $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণ সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ,

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ ... ... (i)

$4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc - 2ab} = \frac{\alpha}{4a^2 - c^2} = \frac{1}{2bc - 4ab}$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{bc - 2ab}{4a^2 - c^2}$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]

এবং $\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}$ [২য় ও ৩য় অনুপাত হতে]

সুতরাং আমরা পাই, $\frac{bc - 2ab}{4a^2 - c^2} = \frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}$

বা, $(bc - 2ab)(2bc - 4ab) = (4a^2 - c^2)^2$

বা, $2b^2 (c - 2a)^2 = (c - 2a)^2(c + 2a)^2$

বা, $2b^2 (c - 2a)^2 - (c - 2a)^2(c + 2a)^2 = 0$

বা, $(c - 2a)^2 \{2b^2 - (2a + c)^2\} = 0$

হয়, $(c - 2a)^2 = 0$ অথবা, $2b^2 - (2a + c)^2 = 0$

বা, $c - 2a = 0$ বা, $(2a + c)^2 = 2b^2$

$\therefore$ $2a = c$

$\therefore$ $2a = c$ অথবা, $(2a + c)^2 = 2b^2$ **(প্রমাণিত)**

(xi) প্রদত্ত সমীকরণটির পৃথায়ক

$= \{2(a + b)\}^2 - 4.2b.(3a - 2b) = 4(a + b)^2 - 8b(3a - 2b)$

$= 4(a^2 + 5b^2 - 4ab) = 4(a^2 + 4b^2 - 4ab + b^2)$

$= 4\{(a - 2b)^2 + b^2\} \geq 0$

অতএব, মূলগুলো বাস্তব। **(দেখানো হলো)**

ধরি, সমীকরণটির একটি মূল α, তাহলে অপরটি 2α

$\therefore$ $\alpha + 2\alpha = -\frac{2(a + b)}{2b} = -\frac{a + b}{b}$

সুতরাং, $\alpha = -\frac{a + b}{3b}$ ... ... (i)

এবং $\alpha. 2\alpha = \frac{3a - 2b}{2b}$

সুতরাং, $2\alpha^2 = \frac{3a - 2b}{2b}$ ... ... (ii)

(i) নং থেকে α এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$2\left(-\frac{a + b}{3b}\right)^2 = \frac{3a - 2b}{2b}$

বা, $\frac{2(a^2 + b^2 + 2ab)}{9b} = \frac{3a - 2b}{2}$

বা, $4a^2 + 22b^2 - 19ab = 0$

বা, $4a^2 - 11ab - 8ab + 22b^2 = 0$

বা, $a(4a - 11b) - 2b(4a - 11b) = 0$

বা, $(a - 2b)(4a - 11b) = 0$

$\therefore$ $a = 2b$ অথবা, $4a = 11b$ **(প্রমাণিত)**

(xii) মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore$ অপরটি α^2

$\therefore$ $\alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a}$ ... ... (i) এবং $\alpha.\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$\therefore$ $\alpha^3 = \frac{c}{a}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

বা, $\alpha(1 + \alpha + \alpha^2) = \frac{c - b}{a}$

বা, $\alpha\left(1 - \frac{b}{a}\right) = \frac{c - b}{a}$ $[\because \alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a}]$

বা, $\alpha\left(\frac{a - b}{a}\right) = \frac{c - b}{a}$

বা, $\alpha(a - b) = c - b$

বা, $\alpha^3(a - b)^3 = (c - b)^3$

বা, $\frac{c}{a}(a - b)^3 = (c - b)^3$ $[\because \alpha^3 = \frac{c}{a}]$

$\therefore$ $c(a - b)^3 = a(c - b)^3$ **(দেখানো হলো)**

(i) কে ঘন করে $(\alpha + \alpha^2)^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3$

বা, $(\alpha)^3 + (\alpha^2)^3 + 3\alpha.\alpha^2(\alpha + \alpha^2) = -\frac{b^3}{a^3}$

বা, $(\alpha)^3 + (\alpha^3)^2 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -\frac{b^3}{a^3}$

বা, $\frac{c}{a} + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3}$

বা, $\frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{3bc}{a^2} = -\frac{b^3}{a^3}$

বা, $ca^2 + c^2a - 3abc = -b^3$ [উভয়পক্ষকে a^3 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$ **(দেখানো হলো)**

(xiii) ধরি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে অপর মূল α^2

$\alpha + \alpha^2 = -p$ ... ... (i)

এবং $\alpha.\alpha^2 = q$ $\therefore$ $\alpha^3 = q$ ... ... (ii)

এখন (i) নং এর উভয়পক্ষে ঘন করে পাই,

$(\alpha + \alpha^2)^3 = (-p)^3$

বা, $\alpha^3 + \alpha^6 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -p^3$

বা, $q + q^2 + 3q(-p) = -p^3$

[(i) ও (ii) হতে মান বসিয়ে]

$\therefore$ $p^3 - 3pq + q^2 + q = 0$ **(প্রমাণিত)**

5. **(i)** দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β

$\therefore$ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - 2\frac{b}{a}x + 4 = 0$

[উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\alpha\beta x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 4 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4 = 0$

বা, $\alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2) = 0$

বা, $(\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0$

হয় $(\alpha x + 2) = 0$ অথবা, $(\beta x + 2) = 0$

বা, $x = -\frac{2}{\alpha}$ বা, $x = -\frac{2}{\beta}$

অতএব, মূল দুইটি $-\frac{2}{\alpha}$ এবং $-\frac{2}{\beta}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ এর দুইটি মূল α এবং β

$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

বা, $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\alpha\beta x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

$\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$ **(Ans.)**

(iii) $2x^2 + x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে

$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{5}{2}$

আবার, $2x^2 - 3x + 2b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + 1, \beta + 1$ হলে, $(\alpha + 1)(\beta + 1) = b$

বা, $\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = b$

বা, $b = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1$ বা, $b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ $\therefore b = 3$ **(Ans.)**

(iv) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

$\therefore \quad \alpha + \beta = -p$ ... (i), $\alpha\beta = q$ ... (ii)

আবার, $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ।

$\therefore \quad \gamma + \delta = -p_1$ ... ... (iii)

এবং $\gamma\delta = q_1$ ... ... (iv)

এখন, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) + (\beta - \gamma)(\beta - \delta)$

$= \alpha^2 - \alpha(\gamma + \delta) + \gamma\delta + \beta^2 - \beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta$

$= \alpha^2 + \beta^2 - (\gamma + \delta)(\alpha + \beta) + 2\gamma\delta$

$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - (\gamma + \delta)(\alpha + \beta) + 2\gamma\delta$

$= p^2 - 2q - pp_1 + 2q_1$ [(i), (ii), (iii) ও (iv) হতে]

$= p^2 - 2(q - q_1) - pp_1$ **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{2b}{a}$ ... ... (i)

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ... ... (ii)

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(\frac{-2b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}$

$= \frac{4b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{4b^2 - 4ac}{a^2}$ ... ... (iii)

আবার, $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \delta$ ও $\beta + \delta$

$\therefore (\alpha + \delta) + (\beta + \delta) = -\frac{2B}{A}$

$(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = \frac{C}{A}$

$\therefore \{(\alpha + \delta) - (\beta + \delta)\}^2 = \{(\alpha + \delta) + (\beta + \delta)\}^2 - 4(\alpha + \delta)(\beta + \delta)$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = \left(\frac{-2B}{A}\right)^2 - 4\frac{C}{A}$

$= \frac{4B^2}{A^2} - \frac{4C}{A} = \frac{4B^2 - 4AC}{A^2}$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) হতে $\frac{4(b^2 - ac)}{a^2} = \frac{4(B^2 - AC)}{A^2}$

$\therefore \frac{b^2 - ac}{a^2} = \frac{B^2 - AC}{A^2}$ **(প্রমাণিত)**

6. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল α ও β.

$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(i) $\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} = \frac{\beta + 1 + \alpha + 1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}$

$= \frac{-\frac{b}{a} + 2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{-\frac{b}{a} + 2}{\frac{c}{a} - \frac{b}{a} + 1} = \frac{2a - b}{c - b + a}$

আবার, $\frac{1}{\alpha + 1} \cdot \frac{1}{\beta + 1} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$

$= \frac{1}{\frac{c}{a} - \frac{b}{a} + 1} = \frac{a}{c - b + a}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{2a - b}{c - b + a}x + \frac{a}{c - b + a} = 0$

$\therefore (a - b + c)x^2 - (2a - b)x + a = 0$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 0$

বা, $x^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

বা, $x^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a}}{\dfrac{c}{a}} x + 1 = 0$

বা; $x^2 - \dfrac{\dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\dfrac{c}{a}} x + 1 = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{b^2 - 2ac}{ac} x + 1 = 0$

$\therefore \quad acx^2 - (b^2 - 2ca)x + ca = 0$ **(Ans.)**

(iii) মূলদ্বয়ের যোগফল $= \dfrac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta}$

$= \dfrac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{2} = \dfrac{-b/a + 2\sqrt{c/a}}{2}$

$= \dfrac{\dfrac{-b + 2\sqrt{ca}}{a}}{2} = \dfrac{2\sqrt{ca} - b}{2a}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \dfrac{\alpha + \beta}{2} . \sqrt{\alpha\beta} = \dfrac{-b/a}{2} . \sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$= \dfrac{-b}{2a} . \sqrt{\dfrac{c}{a}} = \dfrac{-b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \dfrac{2\sqrt{ca} - b}{2a} x + \dfrac{-b\sqrt{c}}{2a\sqrt{a}} = 0$

$\therefore 2a\sqrt{a}\, x^2 - \left(2a\sqrt{c} - b\sqrt{a}\right) x - b\sqrt{c} = 0$ **(Ans.)**

(iv) মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha + \dfrac{1}{\beta} + \beta + \dfrac{1}{\alpha}$

$= (\alpha + \beta) + \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right)$

$= (\alpha + \beta) + \left(\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\, \beta}\right)$

$= \left(\dfrac{-b}{a}\right) + \left(\dfrac{-b/a}{c/a}\right) = \dfrac{-b}{a} - \dfrac{b}{c}$

$= \dfrac{-bc - ab}{ac} = -\dfrac{(ab + bc)}{ac}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

$= \alpha\beta + 1 + 1 + \dfrac{1}{\alpha\beta}$

$= \alpha\beta + \dfrac{1}{\alpha\beta} + 2 = \dfrac{c}{a} + \dfrac{1}{c/a} + 2$

$= \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + 2 = \dfrac{c^2 + a^2 + 2ac}{ac}$

$= \dfrac{(a + c)^2}{ac}$

$\therefore \left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)$ এবং $\left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - \left\{\dfrac{-(ab + bc)}{ac}\right\} x + \dfrac{(a + c)^2}{ac} = 0$

বা, $x^2 + \dfrac{(a + c)bx}{ac} + \dfrac{(a + c)^2}{ac} = 0$

$\therefore \quad acx^2 + b(a + c)x + (a + c)^2 = 0$ **(Ans.)**

(v) মূলদ্বয়ের যোগফল $= \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\alpha\beta}$

$= \dfrac{\beta + \alpha + 1}{\alpha\beta} = \dfrac{-b/a + 1}{c/a}$

$= \dfrac{\dfrac{-b + a}{a}}{c/a} = \dfrac{a - b}{c}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{1}{\alpha\beta}$

$= \dfrac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} . \dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{-b/a}{(c/a)^2}$

$= -\dfrac{b}{a} \times \dfrac{a^2}{c^2} = \dfrac{-ab}{c^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \dfrac{a - b}{c} x - \dfrac{ab}{c^2} = 0$

$\therefore c^2x^2 - c(a - b)x - ab = 0$ **(Ans.)**

(vi) $\dfrac{1}{\alpha^2}$ ও $\dfrac{1}{\beta^2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}\right)x + \dfrac{1}{\alpha^2} \times \dfrac{1}{\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} x + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2} x + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a}}{\dfrac{c^2}{a^2}} x + \dfrac{1}{c^2/a^2} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{b^2 - 2ca}{c^2} x + \dfrac{a^2}{c^2} = 0$

$\therefore c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$ **(Ans.)**

(vii) $\dfrac{1}{\alpha^3}$ ও $\dfrac{1}{\beta^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - \left(\dfrac{1}{\alpha^3} + \dfrac{1}{\beta^3}\right) x + \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{\beta^3 + \alpha^3}{\alpha^3\beta^3} x + \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha^3\beta^3} x + \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} = 0$

বা, $x^2 - \dfrac{-b^3/a^3 + 3bc/a^2}{\dfrac{c^3}{a^3}} x + \dfrac{1}{\dfrac{c^3}{a^3}} = 0$

বা, $x^2 - \frac{-(b^3-3abc)}{c^3}x + \frac{a^3}{c^3} = 0$

$\therefore\ c^3x^2 + b(b^2-3ac)x + a^3 = 0$ **(Ans.)**

(viii) মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{\alpha-4\beta} + \frac{1}{\beta-4\alpha}$

$= \frac{\beta-4\alpha+\alpha-4\beta}{(\alpha-4\beta)(\beta-4\alpha)}$

$= \frac{-3\alpha-3\beta}{\alpha\beta-4\alpha^2-4\beta^2+16\alpha\beta}$

$= \frac{-3(\alpha+\beta)}{17\alpha\beta-4(\alpha^2+\beta^2)}$

$= \frac{-3(\alpha+\beta)}{17\alpha\beta-4(\alpha+\beta)^2+8\alpha\beta}$

$= \frac{3b/a}{\frac{25c}{a}-\frac{4b^2}{a^2}} = \frac{3ab}{25ac-4b^2}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{\alpha-4\beta}\cdot\frac{1}{\beta-4\alpha}$

$= \frac{1}{\alpha\beta-4\alpha^2-4\beta^2+16\alpha\beta}$

$= \frac{1}{17\alpha\beta-4(\alpha^2+\beta^2)}$

$= \frac{1}{17\alpha\beta-4(\alpha+\beta)^2+8\alpha\beta}$

$= \frac{1}{25\alpha\beta-4(\alpha+\beta)^2}$

$= \frac{1}{\frac{25c}{a}-\frac{4b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{25ac-4b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{3ab}{25ac-4b^2}x + \frac{a^2}{25ac-4b^2} = 0$

$\therefore\ (25ac-4b^2)x^2 - 3abx + a^2 = 0$ **(Ans.)**

(ix) $\alpha^2+\beta,\ \beta^2+\alpha$ মূল দ্বারা গঠিত x চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নিম্নরূপ হবে,

$x^2 - (\alpha^2+\beta+\beta^2+\alpha)x + (\alpha^2+\beta)(\beta^2+\alpha) = 0$

বা, $x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha+\beta)\}x + (\alpha^2\beta^2+\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta) = 0$

বা, $x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha+\beta)\}x + \{(\alpha\beta)^2 + (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha\beta\} = 0$

বা, $x^2 - \left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) + \left(-\frac{b}{a}\right)\right\}x + \left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a}\right)\right\} = 0$

[(i) ও (ii) নং থেকে মান বসিয়ে]

বা, $x^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} - \frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{ac^2-b^3+3abc+a^2c}{a^3}\right) = 0$

বা, $a^3x^2 - (ab^2 - 2a^2c - a^2b)x + (ac^2 - b^3 + 3abc + a^2c) = 0$

[উভয় পক্ষকে a^3 (যেখানে $a \neq 0$) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore\ a^3x^2 - a(b^2-2ac-ab)x + (ac^2+a^2c-b^3+3abc) = 0$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

(x) $\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - \left(\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}\right)x + \frac{2}{\alpha}\times\frac{2}{\beta} = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{4}{\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)x + \frac{4}{\frac{c}{a}} = 0$

বা, $x^2 + \frac{2b}{c}x + 4\times\frac{a}{c} = 0 \ \therefore\ cx^2 + 2bx + 4a = 0$

7. **(i)** দেওয়া আছে, $x^2+ax+b=0$ এর মূলদ্বয় α, β.

$\therefore\ \alpha+\beta = -a$ এবং $\alpha\beta = b$

এখন, $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4b = a^2-4b$

এবং $(\alpha+\beta)^2 = (-a)^2 = a^2$.

$(\alpha-\beta)^2$ এবং $(\alpha+\beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - [(\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2]x + (\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2 = 0$

বা, $x^2 - [a^2 - 4b + a^2]\ x + a^2(a^2-4b) = 0$

$\therefore\ x^2 - 2(a^2-2b)x + a^2(a^2-4b) = 0$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে,

$x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

$\therefore\ \alpha+\beta = -p$ এবং $\alpha\beta = q$

$\alpha+\beta$ ও $\frac{\alpha\beta}{2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - \left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{2}\right)x + (\alpha+\beta)\cdot\frac{\alpha\beta}{2} = 0$

বা, $x^2 - \left(-p+\frac{q}{2}\right)x + (-p)\cdot\frac{q}{2} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{-2p+q}{2}\right)x - \frac{pq}{2} = 0$

$\therefore\ 2x^2 + (2p-q)x - pq = 0$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $ax^2+bx-a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore\ \alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ ...... (i)

এবং $\alpha\beta = -1$ ...... (ii)

(i) নং হতে, $a\alpha + a\beta = -b$

$\therefore\ a\alpha + b = -a\beta,\ a\beta + b = -a\alpha$

$\therefore$ $(a\alpha+b)$ এবং $(a\beta+b)$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2 - \{(a\alpha+b)+(a\beta+b)\}x + (a\alpha+b)(a\beta+b) = 0$

বা, $x^2 - \{(-a\beta)+(-a\alpha)\}x + (-a\beta)(-a\alpha) = 0$

[(i) ও (ii) নং হতে]

বা, $x^2 + a(\alpha + \beta)x + a^2\alpha\beta = 0$

বা, $x^2 + a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a^2(-1) = 0$

$\therefore$ $x^2 - bx - a^2 = 0$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $px^2 + 8(q - p)x + 4(4p - 8q + r) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $4 - 2\alpha$ ও $4 - 2\beta$

$\therefore$ $4 - 2\alpha + 4 - 2\beta = -\frac{8(q-p)}{p}$

বা, $8 - 2(\alpha + \beta) = -\frac{8(q-p)}{p}$

বা, $2(\alpha + \beta) = 8 + \frac{8(q-p)}{p}$

বা, $2(\alpha + \beta) = \frac{8p + 8q - 8p}{p} = \frac{8q}{p}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = \frac{4q}{p}$

আবার, $(4 - 2\alpha)(4 - 2\beta) = \frac{4(4p - 8q + r)}{p}$

বা, $16 - 8(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta = \frac{4(4p - 8q + r)}{p}$

বা, $16 - \frac{32q}{p} + 4\alpha\beta = \frac{4(4p - 8q + r)}{p}$

বা, $4\alpha\beta = \frac{16 - 32q + 4r}{p} + \frac{32q}{p} - 16$

বা, $4\alpha\beta = \frac{16p - 32q + 4r + 32q - 16p}{p}$

বা, $4\alpha\beta = \frac{4r}{p}$

$\therefore$ $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

সুতরাং α, β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - \frac{4q}{p}x + \frac{r}{p} = 0$

$\therefore$ $px^2 - 4qx + r = 0$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $17x^2 - 3x + 14 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়, α ও β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{3}{17}$ এবং $\alpha\beta = \frac{14}{17}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{3}{17} + \frac{14}{17}\right)x + \frac{3}{17} \times \frac{14}{17} = 0$

বা, $x^2 - \frac{17}{17}x + \frac{42}{289} = 0$

বা, $x^2 - x + \frac{42}{289} = 0$

$\therefore$ $289x^2 - 289x + 42 = 0$ **(Ans.)**

(vi) $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = 2b$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = b^2 - a^2$

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= (2b)^2 - 4(b^2 - a^2)$
$= 4b^2 - 4b^2 + 4a^2$
$= 4a^2$

বা, $\alpha - \beta = \pm\sqrt{4a^2}$

বা, $\alpha - \beta = \pm 2a$

$\therefore$ $\alpha - \beta = 2a$ [যোগবোধক মান নিয়ে]

প্রশ্নানুসারে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় হবে যথাক্রমে $2b, 2a$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - (2a + 2b)x + 2a.2b = 0$

$\therefore$ $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$ **(Ans.)**

(vii) মনে করি, $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-(-2a)}{1} = 2a$

$\alpha\beta = \frac{a^2 - b^2}{1} = a^2 - b^2$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= (2a)^2 - 4(a^2 - b^2)$
$= 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 = 4b^2$

$\therefore$ $|\alpha - \beta| = 2b$

মূল দুইটি হবে $\alpha + \beta$ ও $|\alpha - \beta|$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= (\alpha + \beta) + |\alpha - \beta|$
$= 2a + 2b$
$= 2(a + b)$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= (\alpha + \beta) \times |\alpha - \beta|$
$= 2a \times 2b = 4ab$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$

(viii) ধরি, $3x^2 - 4x - 5 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{4}{3}$ এবং $\alpha\beta = -\frac{5}{3}$

এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলদ্বয় $(\alpha - 1)$ ও $(\beta - 1)$

$\therefore$ সমীকরণটি:

$x^2 - (\alpha - 1 + \beta - 1)x + (\alpha - 1)(\beta - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta - 2)x + \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{4}{3} - 2\right)x - \frac{5}{3} - \frac{4}{3} + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - 2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 6 = 0$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

মনে করি, $3x^2 - 4x - 5 = 0$ এর মূলদ্বয় α_1 ও β_1।
এখন, ধরি, এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার মূলদ্বয় α_2 ও β_2.
যেখানে, $\alpha_2 = \alpha_1 - 1$ এবং $\beta_2 = \beta_1 - 1$

$\therefore \quad \alpha_1 = \alpha_2 + 1$ এবং $\beta_1 = \beta_2 + 1$

α_1 এর মান $3x^2 - 4x - 5 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3(\alpha_2 + 1)^2 - 4(\alpha_2 + 1) - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 3(\alpha_2^2 + 2\alpha_2 + 1) - 4\alpha_2 - 4 - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 3\alpha_2^2 + 6\alpha_2 + 3 - 4\alpha_2 - 9 = 0$

$\therefore \quad 3\alpha_2^2 + 2\alpha_2 - 6 = 0$

$\therefore \quad \alpha_2$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, $3x^2 + 2x - 6 = 0$ যার মূলদ্বয় $3x^2 - 4x - 5 = 0$ এর মূলদ্বয় অপেক্ষা 1 কম।

(ix) দেওয়া আছে, $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \quad \alpha + \beta = -1$ এবং $\alpha\beta = 1$

এখন, α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণের জন্য,

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$= (-1)^2 - 2.1 = -1 = \alpha + \beta$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1 = \alpha\beta$

$\therefore \alpha^2$ ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 + x + 1 = 0$

প্রাপ্ত সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণ একই কারণ উভয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল ও গুণফল একই।

(x) দেওয়া আছে, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β।

$\therefore \quad \alpha + \beta = p$ ও $\alpha\beta = q$

$$\therefore \quad \frac{q}{p-\alpha} + \frac{q}{p-\beta} = \frac{q(p-\beta) + q(p-\alpha)}{(p-\alpha)(p-\beta)}$$
$$= \frac{2pq - q(\alpha+\beta)}{p^2 - p(\alpha+\beta) + \alpha\beta}$$
$$= \frac{2pq - pq}{p^2 - p^2 + q} = p$$

এবং $$\frac{q}{p-\alpha} \cdot \frac{q}{p-\beta} = \frac{q^2}{p^2 - p(\alpha+\beta) + \alpha\beta}$$
$$= \frac{q^2}{p^2 - p^2 + q} = q$$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - px + q = 0$ **(Ans.)**

নির্ণেয় সমীকরণের ১ম মূল $= \frac{q}{p-\alpha}$
$$= \frac{q}{\alpha+\beta-\alpha}$$
$$= \frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha$$

এবং ২য় মূল $= \frac{q}{p-\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha} = \beta$

এজন্য নির্ণেয় সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণ অভিন্ন।

(xi) $x^2 + px + \frac{1}{4}(p^2 - q^2) = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার দুইটি মূল α ও β; মূল সহগ সম্পর্ক অনুসারে,

$\alpha + \beta = -p \quad \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $\alpha\beta = \frac{1}{4}(p^2 - q^2) \quad \ldots\ldots\ldots$ (ii)

আমরা জানি, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = (-p)^2 - 4\left\{\frac{1}{4}\left(p^2 - q^2\right)\right\}$

[(i) ও (ii) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $(\alpha - \beta)^2 = p^2 - p^2 + q^2$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = q^2$

$\therefore (\alpha - \beta) = \pm q \ldots\ldots\ldots$ (iii)

এখন যদি কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল $(\alpha + \beta)$, $(\alpha - \beta)$ হয়; তবে সমীকরণটি নিম্নরূপ হবে,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - (\alpha + \beta + \alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0$

বা, $x^2 - \{(-p) + (\pm q)\}x + (-p)(\pm q) = 0$

[(i) ও (iii) নং হতে মান বসিয়ে]

$\therefore \quad x^2 + (p \pm q)x \pm pq = 0$

$\therefore \quad x^2 + px + \frac{1}{4}(p^2 - q^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $x^2 + (p \pm q)x \pm pq = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ হবে। **(প্রমাণিত)**

(xii) $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{q}{p} \ldots\ldots$ (i)

এবং $\alpha\beta = \frac{r}{p} \quad \ldots\ldots$ (ii)

(a) $$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^{-1} + \beta^{-1} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$
$$= \left(\frac{-q}{p}\right)^2 - \frac{2r}{p} + \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{q^2}{p^2} - \frac{2r}{p} + \frac{-\frac{q}{p}}{\frac{r}{p}}$$
$$= \frac{q^2 - 2pr}{p^2} - \frac{q}{r} \text{ (Ans.)}$$

(b) $$(1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2)$$
$$= 1 + \beta + \beta^2 + \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha^2\beta^2$$
$$= 1 + (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta + \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^2\beta^2$$
$$= 1 + \frac{-q}{p} + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^2\beta^2$$
$$= 1 - \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\left(\frac{-q}{p}\right) + \frac{r^2}{p^2}$$

$$= 1 - \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{qr}{p^2} + \frac{r^2}{p^2}$$
$$= \frac{p^2 - pq + q^2 - pr - qr + r^2}{p^2}$$
$$= \frac{1}{p^2}(p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - qr) \textbf{ (Ans.)}$$

(xiii) দেওয়া আছে, $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \quad \alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ এবং $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

বামপক্ষ $= (p\alpha^2 + q)^{-1} + (p\beta^2 + q)^{-1}$
$$= \frac{1}{p\alpha^2 + q} + \frac{1}{p\beta^2 + q}$$
$$= \frac{p\beta^2 + q + p\alpha^2 + q}{(p\alpha^2 + q)(p\beta^2 + q)}$$
$$= \frac{p(\alpha^2 + \beta^2) + 2q}{(p^2\alpha^2\beta^2 + pq\alpha^2 + pq\beta^2 + q^2)}$$
$$= \frac{p\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 2q}{p^2(\alpha\beta)^2 + pq\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\} + q^2}$$
$$= \frac{p\left(\frac{q^2}{p^2} - \frac{2r}{p}\right) + 2q}{p^2 \cdot \frac{r^2}{p^2} + pq\left(\frac{q^2}{p^2} - \frac{2r}{p}\right) + q^2}$$
$$= \frac{p\left(\frac{q^2 - 2pr}{p^2}\right) + 2q}{r^2 + pq\left(\frac{q^2 - 2pr}{p^2}\right) + q^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{p}(q^2 - 2pr + 2pq)}{\frac{1}{p}\{pr^2 + q(q^2 - 2pr) + pq^2\}}$$
$$= \frac{q^2 + 2p(q - r)}{p(q^2 + r^2) + q(q^2 - 2pr)}$$
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(xiv) দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

আবার, প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore \; a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$\Rightarrow \alpha(a\alpha + b) = -c$

$\therefore \; a\alpha + b = -\frac{c}{\alpha}$

অনুরূপভাবে, $a\alpha + b = -\frac{c}{\beta}$

L.H.S $= (a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$
$$= \frac{1}{(a\alpha + b)^2} + \frac{1}{(a\beta + b)^2}$$
$$= \frac{1}{\frac{c^2}{\alpha^2}} + \frac{1}{\frac{c^2}{\beta^2}}$$
$$= \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{c^2}$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{c^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{c^2}$$
$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$$

সুতরাং $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$ **(প্রমাণিত)**

(xv) $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

বা, $a\alpha + a\beta = -b$

বা, $a\alpha + b = -a\beta$ ... ... (ii)

আবার, $a\beta + b = -a\alpha$ ... ... (iii)

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ .... (iv)

এখন, $(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = (-a\beta)^{-3} + (-a\alpha)^{-3}$
$$= -\frac{1}{a^3\beta^3} - \frac{1}{a^3\alpha^3}$$
$$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\alpha^3}\right) = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right)$$
$$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}\right\}$$
$$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{-b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}\right\}$$
$$= -\frac{1}{a^3}\frac{\left(\frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}\right)}{\frac{c^3}{a^3}}$$
$$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right) \times \frac{a^3}{c^3}$$
$$= \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$$ **(দেখানো হলো)**

(xvi) (a) সমীকরণটির একটি মূল $a - ib$ হলে অপর মূলটি $a + ib$; কারণ, বাস্তব সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূল জোড়ায় থাকে।

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটি,

$x^2 - (a + ib + a - ib)x + (a - ib)(a + ib) = 0$

$\therefore \quad x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$ **(Ans.)**

(b) সমীকরণটির একটি মূল $\frac{1}{2+3i}$

এখন, $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2-3i}{13}$

সুতরাং, সমীকরণের অপর মূল $\frac{2+3i}{13}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি,

$x^2 - \left(\frac{2-3i}{13} + \frac{2+3i}{13}\right)x + \frac{2-3i}{13}\cdot\frac{2+3i}{13} = 0$

বা, $x^2 - \frac{4x}{13} + \frac{4+9}{169} = 0$

বা, $x^2 - \frac{4x}{13} + \frac{13}{169} = 0$ বা, $x^2 - \frac{4x}{13} + \frac{1}{13} = 0$

$\therefore$ $13x^2 - 4x + 1 = 0$ **(Ans.)**

(c) সমীকরণটির একটি মূল $3 + \sqrt{-5}$

এখন, $3 + \sqrt{-5} = 3 + \sqrt{5}\,i$

সুতরাং, সমীকরণটির অপর মূলটি $3 - \sqrt{5}\,i$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - (3+\sqrt{5}i + 3 - \sqrt{5}i)x + (3+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i) = 0$

বা, $x^2 - 6x + 9 + 5 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 6x + 14 = 0$ **(Ans.)**

(d) সমীকরণটির একটি মূল $2 + i\sqrt{3}$

আমরা জানি, কোনো বাস্তব সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে। একটি মূল $2 + i\sqrt{3}$ হলে অপর মূলটি হবে $2 - i\sqrt{3}$ এবং সমীকরণটি হবে,

$x^2 - (2 + i\sqrt{3} + 2 - i\sqrt{3})x + (2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 - i^2\, 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ **(Ans.)**

(xvii) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore$ $\alpha + \beta = -b$

$\alpha\beta = c$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = (\alpha+\beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

$= -b + \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = -b + \frac{-b}{c}$

$= \frac{-bc - b}{c}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta}$

$= c + 2 + \frac{1}{c} = \frac{c^2 + 2c + 1}{c} = \frac{(c+1)^2}{c}$

$\therefore$ $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)$ ও $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \frac{-bc-b}{c}x + \frac{(c+1)^2}{c} = 0$

$\therefore$ $cx^2 + b(c+1)x + (c+1)^2 = 0$ **(Ans.)**

(xviii) $x^2 - 5x + 3$ এর মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = 5$ এবং $\alpha\beta = 3$

এখন $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - \left(\frac{3}{5-\alpha} + \frac{3}{5-\beta}\right)x + \frac{3}{5-\alpha}\cdot\frac{3}{5-\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{15 - 3\beta + 15 - 3\alpha}{25 - 5\alpha - 5\beta + \alpha\beta}x + \frac{9}{25 - 5\alpha - 5\beta + \alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{30 - 3(\alpha+\beta)}{25 - 5(\alpha+\beta) + \alpha\beta}x + \frac{9}{25 - 5(\alpha+\beta) + \alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{30 - 3\times 5}{25 - 5\times 5 + 3}x + \frac{9}{25 - 5\times 5 + 3} = 0$

বা, $x^2 - \frac{15}{3}x + \frac{9}{3} = 0$

বা, $x^2 - 5x + 3 = 0$

যা নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

(xix) নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল $(2 + 2\sqrt{3}i)$ হলে অপর মূলটি $(2 - 2\sqrt{3}i)$;

কারণ বাস্তব সহগবিশিষ্ট জটিল মূল জোড়ায় থাকে।

নির্ণেয় সমীকরণটি, $x^2 - (2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i)x + (2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2^2 - (2\sqrt{3}i)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 12 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 16 = 0$ **(Ans.)**

(xx) দেওয়া আছে, $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$

এটি স্পষ্ট যে, α ও β মূল দুটি $x^2 = 5x - 3$

বা, $x^2 - 5x + 3 = 0$ ... ... (i) এর মূলদ্বয়।

$\therefore \alpha + \beta = 5$ এবং $\alpha\beta = 3$

এখন, এমন একটি সমীকরণ গঠন করতে হবে যার মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$।

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{5^2 - 2\times 3}{3} = \frac{19}{3}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{19}{3}\right)x + 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 19x + 3 = 0$ **(Ans.)**

(xxi) দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + a = 0$ এর মূলদ্বয় α, β.

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = 1$

এখন, একটি সমীকরণের মূল $\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ হলে অপর মূলটি এর অনুবন্ধী হবে অর্থাৎ, $\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ হবে।

মূলদ্বয়ের যোগফল

$= (\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) + (\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$

$= 2(\alpha + \beta) = -\frac{2b}{a}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল

$= (\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})(\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$

$= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)$

$= 2\alpha\beta = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ:

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{2b}{a}x + 2 = 0$

$\therefore ax^2 + 2bx + 2a = 0$ **(Ans.)**

(xxii) মনে করি,

প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো $\alpha, -\alpha, \beta, \gamma$

$\therefore \alpha - \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{8}$

বা, $\beta + \gamma = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

আবার,

$\sum\alpha\beta\gamma = \frac{-6}{8}$

বা, $-\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = \frac{-6}{8}$

বা, $-\alpha^2(\beta + \gamma) = \frac{-3}{4}$

বা, $-\alpha^2.\frac{1}{4} = \frac{-3}{4}$

বা, $\alpha^2 = 3$

$\therefore \alpha^2 = 3$

এখন, $\alpha.(-\alpha).\beta.\gamma = \frac{9}{8}$

বা, $-\alpha^2\beta\gamma = \frac{9}{8}$

বা, $-3.\beta\gamma = \frac{9}{8}$

$\therefore \beta\gamma = \frac{-3}{8}$

এখন,

$\beta + \gamma = \frac{1}{4}$; $\beta\gamma = \frac{-3}{8}$

$\therefore \beta$ ও γ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$

বা, $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

বা, $8x^2 - 2x - 3 = 0$

বা, $8x^2 - 6x + 4x - 3 = 0$

বা, $2x(4x - 3) + 1(4x - 3) = 0$

বা, $(4x - 3)(2x + 1) = 0$

$\therefore x = \frac{3}{4}, \frac{-1}{2}$ [দেখানো হলো]

৪. (i) দেওয়া আছে,

$px^2 + qx + 1 = 0$ .... (i)

$qx^2 + px + 1 = 0$ ....(ii)

ধরি, (i) ও (ii) এর সাধারণ মূল α

$\therefore$ $p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ .... (iii)

$q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$ .... (iv)

(iii) – (iv) করে,

$(p - q)\alpha^2 - (p - q)\alpha = 0$

$= (p - q)\alpha(\alpha - 1) = 0$

$\therefore$ $\alpha - 1 = 0$ [$\because \alpha \neq 0$ এবং $p - q \neq 0$ কারণ $p - q = 0$ বা $p = q$ হলে সমীকরণ দুটি অভিন্ন হয় এবং উভয় মূলই সাধারণ হয়]

$\therefore$ (iii) হতে পাই, $p + q + 1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

(ii) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, $x^2 + bx + ca = 0$

$x^2 + cx + ab = 0$

যদি সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তবে মনে করি, তা α সুতরাং, α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ, $\alpha^2 + b\alpha + ca = 0$ ... ... (i)

$\alpha^2 + c\alpha + ab = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,

$\frac{\alpha^2}{ab^2 - ac^2} = \frac{\alpha}{ca - ab} = \frac{1}{c - b}$

বা, $\frac{\alpha^2}{a(b - c)(b + c)} = \frac{\alpha}{-a(b - c)} = \frac{1}{-(b - c)}$

$\therefore \alpha = -(b + c)$; $\alpha = a$ ... ... (iii)

অতএব, $-(b + c) = a$ ... ... (iv)

$\therefore$ $a + b + c = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + bx + ca = 0$, $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে $a + b + c = 0$ হয়। **(প্রমাণিত)**

আবার, মনে করি, $x^2 + bx + ca = 0$, $x^2 + cx + ab = 0$ সমীকরণদ্বয়ের অপর মূল দুইটি যথাক্রমে β ও β_1

সুতরাং, $\alpha\beta = ca$

বা, $a\beta = ca$ [(iii) থেকে পাই, $\alpha = a$]

$\therefore \beta = c$

অনুরূপভাবে, $\beta_1 = b$ হয়।

এখন x চলকবিশিষ্ট যে দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল β, β_1 হবে সেই সমীকরণটি নিম্নরূপ হবে;

বা, $x^2 - (\beta + \beta_1)x + \beta\beta_1 = 0$

বা, $x^2 - (b + c)x + bc = 0$ [$\because \beta = c, \beta_1 = b$]

$\therefore$ $x^2 + ax + bc = 0$ [(iv) থেকে পাই, $-(b + c) = a$]

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল ব্যতীত আর দুইটি মূল দ্বারা $x^2 + ax + bc = 0$ সমীকরণ সিদ্ধ হবে। **(প্রমাণিত)**

(iii) প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়,

$x^2 + kx - 6k = 0$

$x^2 - 2x - k = 0$

যদি সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকে তবে মনে করি তা α, তাহলে α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ $\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$ ... ... (i)

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,

$$\frac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \frac{\alpha}{-6k + k} = \frac{1}{-2-k}$$

বা, $\frac{\alpha^2}{-k(k+12)} = \frac{\alpha}{-5k} = \frac{1}{-(2+k)}$

$\therefore\ \alpha = \frac{k(k+12)}{5k}$; $\alpha = \frac{5k}{2+k}$

অর্থাৎ, $\frac{k(k+12)}{5k} = \frac{5k}{2+k}$

বা, $k(k + 12)(k + 2) = 25k^2$

বা, $k(k + 12)(k + 2) - 25k^2 = 0$

বা, $k\{(k + 12)(k + 2) - 25k\} = 0$

বা, $k(k^2 - 11k + 24) = 0$

বা, $k(k^2 - 8k - 3k + 24) = 0$

বা, $k(k - 8)(k - 3) = 0$

$\therefore\ k = 0, 8, 3$

$\therefore$ k এর মানগুলো : 0, 3, 8. **(Ans.)**

(iv) ধরি, $px^2 + 2x + 1 = 0$ ও $x^2 + 2x + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি a। সুতরাং আমরা পাই,

$pa^2 + 2a + 1 = 0$ ... ... (i)

$a^2 + 2a + p = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং বজ্রগুণন করে পাই,

$$\frac{a^2}{2p-2} = \frac{a}{1-p^2} = \frac{1}{2p-2}$$

বা, $\frac{a^2}{2(p-1)} = \frac{-a}{p^2-1} = \frac{1}{2(p-1)}$

বা, $\frac{a^2}{2(p-1)} = \frac{-a}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{2(p-1)}$

$\therefore \frac{a^2}{2(p-1)} = \frac{-a}{(p+1)(p-1)}$ এবং

$\frac{-a}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{2(p-1)}$

$\therefore a = \frac{-2}{p+1}$ এবং $a = \frac{-(p+1)}{2}$

অর্থাৎ, $\frac{-(p+1)}{2} = \frac{-2}{p+1}$

বা, $(p + 1)^2 = 4$

বা, $p + 1 = \pm 2$ বা, $p = \pm 2 - 1$

$\therefore p = 1, -3$ **(Ans.)**

$p = 1$ হলে সমীকরণদ্বয় এক হয়ে যায়, তখন সাধারণ মূল -1 পুনরাবৃত্ত, $p = -3$ হলে সাধারণ মূল 1.

(v) মনে করি, $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির সাধারণ মূল α

$\therefore\ \alpha^2 + p\alpha + q = 0$ .... (i)

$\alpha^2 + q\alpha + p = 0$ .... (ii)

(i) তে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$\alpha^2 - \alpha^2 + (p - q)\alpha - (p - q) = 0$

বা, $(p - q)(\alpha - 1) = 0$

কিন্তু $p - q \neq 0$

$\therefore\ \alpha - 1 = 0$ বা, $\alpha = 1$

(i) এ $\alpha = 1$ বসিয়ে

$1 + p + q = 0$

বা, $p + q = -1$

ধরি, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের অপর মূল β_1

সাধারণ মূল α

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha.\beta_1 = q$ বা, $1.\beta_1 = q$

বা, $\beta_1 = q$

আবার, ধরি, $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের অপর মূল β_2

$\therefore\ \alpha.\beta_2 = p$ বা, $\beta_2 = p$

$\therefore$ p ও q মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (p + q)x + pq = 0$

বা, $x^2 - (-1)x + pq = 0$ $[\because p + q = -1]$

$\therefore\ x^2 + x + pq = 0$ **(দেখানো হলো)**

(vi) মনে করি, $x^2 + px + 10 = 0$ এবং $x^2 + qx - 10 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α.

$\alpha^2 + p\alpha + 10 = 0$ ... ... (i)

$\alpha^2 + q\alpha - 10 = 0$ ... ... (ii)

(i) হতে (ii) বিয়োগ করে, $\alpha^2 - \alpha^2 + (p - q)\alpha + 20 = 0$

বা, $(p - q)\alpha + 20 = 0$

বা, $\alpha = -\frac{20}{p-q}$ ... ... (iii)

(i) ও (ii) যোগ করে, $2\alpha^2 + (p + q)\alpha = 0$

বা, $2\alpha + (p + q) = 0$ $[\because\ \alpha \neq 0]$

বা, $\alpha = -\frac{p+q}{2}$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) হতে, $-\frac{p+q}{2} = \frac{-20}{p-q}$

$\therefore\ p^2 - q^2 = 40$ **(দেখানো হলো)**

(vii) দেওয়া আছে, $mx^2 + nx + l = 0$

$lx^2 + nx + m = 0$

মনে করি, α সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল।

$\therefore\ m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$ ... ... (i)

$l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$

(–) করে, $\alpha^2(m - l) + l - m = 0$

বা, $\alpha^2(m - l) - (m - l) = 0$

বা, $(m-l)(\alpha^2-1)=0$

কিন্তু $m-l \neq 0$

$\therefore \alpha^2-1=0$ বা, $\alpha=\pm 1$

এখন, (i) নং হতে পাই,

$m(\pm 1)^2+n(\pm 1)+l=0$

বা, $m \pm n+l=0$

$\therefore m+l=\pm n$ **(দেখানো হলো)**

(viii) দেওয়া আছে, $f(x)=e^{2x}-4e^x+6$

$$=(e^x)^2-2.2.e^x+2^2+2$$
$$=(e^x-2)^2+2$$

$\therefore$ f(x) এর সর্বনিম্ন মান $=0+2=2$.

সুতরাং, $x^2-mx+14=0$ এর একটি মূল 2 হলে লিখতে পারি,

$2^2-2m+14=0$

বা, $4-2m+14=0$

বা, $2m=18$

$\therefore$ $m=9$ **(Ans.)**

এখন, মনে করি, $x^2-mx+14=0$ এর অপর একটি মূল α.

$\therefore$ $\alpha \times 2=14$

$\therefore$ $\alpha=7$ **(Ans.)**

9. **(i)** প্রদত্ত সমীকরণ $x^3-3x^2-16x+48=0$

মনে করি, মূলত্রয় যথাক্রমে $\alpha, -\alpha$ ও β

$\therefore$ $\alpha-\alpha+\beta=3$ বা, $\beta=3$

সুতরাং $x^3-3x^2-16x+48=0$ সমীকরণের একটি মূল 3; অর্থাৎ $x^3-3x^2-16x+48$ এর একটি উৎপাদক $(x-3)$

এখন, $x^3-3x^2-16x+48=0$

বা, $x^2(x-3)-16(x-3)=0$

বা, $(x-3)(x^2-16)=0$

বা, $(x-3)(x-4)(x+4)=0$

সুতরাং মূলত্রয় যথাক্রমে 3, 4, –4. **(Ans.)**

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ $3x^3-13x^2-x+6=0$

ধরি, মূলগুলো যথাক্রমে $\alpha, 5-\alpha$ ও β

মূলগুলোর যোগফল $\alpha+5-\alpha+\beta=\frac{13}{3}$

বা, $5+\beta=\frac{13}{3}$ বা, $\beta=\frac{13}{3}-5$

$\therefore \beta=-\frac{2}{3}$

$\alpha(5-\alpha)\beta=\frac{-6}{3}$

বা, $(5\alpha-\alpha^2)\times\frac{-2}{3}=\frac{-6}{3}$ $[\because \beta=-\frac{2}{3}]$

বা, $\alpha^2-5\alpha+3=0$

$\therefore$ $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore$ মূলগুলো যথাক্রমে $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{13}), -\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ $4x^3+16x^2-9x-36=0$

মনে করি, সমীকরণটির মূলত্রয় $\alpha, -\alpha$ এবং β

মূল সহগ-সম্পর্ক হতে পাই,

$\alpha-\alpha+\beta=-\frac{16}{4}$ ... ... (i)

এবং $\alpha(-\alpha)\beta=\frac{36}{4}$ ... ... (ii)

এখন, (i) নং থেকে পাই, $\beta=-4$

এবং (ii) নং থেকে পাই, $-\alpha^2\beta=9$; $[\because \beta=-4]$

$\therefore \alpha=\pm\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলত্রয় : $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ এবং -4

(iv) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^3+5x^2-23x+10=0$

মনে করি, মূলত্রয় যথাক্রমে $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ ও β

$\therefore$ $\alpha.\frac{1}{\alpha}.\beta=-\frac{10}{2}=-5$

বা, $\beta=-5$

সুতরাং $2x^3+5x^2-23x+10=0$ এর একটি উৎপাদক $(x+5)$।

এখন, $2x^3+5x^2-23x+10=0$

বা, $2x^3+10x^2-5x^2-25x+2x+10=0$

বা, $2x^2(x+5)-5x(x+5)+2(x+5)=0$

বা, $(x+5)(2x^2-5x+2)=0$

বা, $(x+5)(2x^2-4x-x+2)=0$

বা, $(x+5)\{2x(x-2)-1(x-2)\}=0$

বা, $(x+5)(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-5, \frac{1}{2}, 2$

সুতরাং মূলত্রয় যথাক্রমে, $\frac{1}{2}, 2, -5$ **(Ans.)**

(v) প্রদত্ত সমীকরণ $24x^3-14x^2-63x+45=0$

মনে করি, মূলগুলো যথাক্রমে $\alpha, 2\alpha$ ও β.

মূলগুলোর যোগফল $\alpha+2\alpha+\beta=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$

$\therefore$ $3\alpha+\beta=\frac{7}{12}$ ... ... (i)

আবার, $2\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha\beta=-\frac{63}{24}=-\frac{21}{8}$

বা, $2\alpha^2+3\alpha\beta=-\frac{21}{8}$

বা, $2\alpha^2+3\alpha\left(\frac{7}{12}-3\alpha\right)=-\frac{21}{8}$

বা, $2\alpha^2+\frac{7}{4}\alpha-9\alpha^2=-\frac{21}{8}$

বা, $-7\alpha^2+\frac{7\alpha}{4}=-\frac{21}{8}$
বা, $-56\alpha^2+14\alpha+21=0$
বা, $8\alpha^2-2\alpha-3=0$
বা, $8\alpha^2-6\alpha+4\alpha-3=0$
বা, $2\alpha(4\alpha-3)+1(4\alpha-3)=0$
বা, $(2\alpha+1)(4\alpha-3)=0$
$\therefore\ \alpha=\frac{3}{4}, \alpha=-\frac{1}{2}$
$\alpha=\frac{3}{4}$ হলে, $2\alpha=\frac{3}{2}$ এবং $\beta=\frac{7}{12}-3\alpha$
বা, $\beta=\frac{7}{12}-\frac{9}{4}=-\frac{20}{12}=-\frac{5}{3}$
এবং $\alpha=-\frac{1}{2}$ হলে, $2\alpha=-1$
এবং $\beta=\frac{7}{12}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{12}+\frac{3}{2}=\frac{25}{12}$
এখন, মূলগুলোর গুণফল $=-\frac{45}{24}=-\frac{15}{8}$
মূলগুলো $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$ হলে তাদের গুণফল $=\frac{3}{4}.\frac{3}{2}.\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{15}{8}$
কিন্তু $-\frac{1}{2}(-1).\frac{25}{12}=\frac{25}{24}$ যা মূলত্রয়ের গুণফল নয়।
সুতরাং মূলগুলো যথাক্রমে $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$ **(Ans.)**

(vi) প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^3+x^2-8x+4=0$
মনে করি, মূলত্রয় যথাক্রমে $2a$, $3a$ এবং b
$\therefore\ 2a+3a+b=-\frac{1}{3}$ বা, $5a+b=-\frac{1}{3}$
$\therefore\ b=-\frac{1}{3}-5a$ ...... (i)
এবং $2a.3a+3a.b+2a.b=-\frac{8}{3}$
বা, $6a^2+5ab=-\frac{8}{3}$
বা, $6a^2+5a\left(-\frac{1}{3}-5a\right)=-\frac{8}{3}$
বা, $6a^2-\frac{5a}{3}-25a^2=-\frac{8}{3}$
বা, $-19a^2-\frac{5a}{3}+\frac{8}{3}=0$
বা, $19a^2+\frac{5a}{3}-\frac{8}{3}=0$
বা, $57a^2+5a-8=0$
বা, $57a^2-19a+24a-8=0$
বা, $19a(3a-1)+8(3a-1)=0$
বা, $(3a-1)(19a+8)=0$

$a=-\frac{8}{19}$ হলে, $b=-\frac{1}{3}+\frac{40}{19}=\frac{-19+120}{57}=\frac{101}{57}$
$\therefore$ মূলত্রয় $=\frac{-16}{19}, \frac{-24}{19}$ এবং $\frac{101}{57}$
সেক্ষেত্রে মূলত্রয়ের গুণফল $\frac{-16\times(-24)\times101}{19\times19\times57}\neq\frac{-4}{3}$
$\therefore\ a=\frac{1}{3}, a\neq-\frac{8}{19}$
(i) নং সমীকরণ-এ $a=\frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,
$b=-\frac{1}{3}-5.\frac{1}{3}=\frac{-1-5}{3}=-2$
এবং মূলত্রয়ের গুণফল $2a\times3a\times b$
$=2\times\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{3}\times(-2)$
$=\frac{-4}{3}$
$\therefore$ মূলগুলো যথাক্রমে $\frac{2}{3}, 1, -2$ **(Ans.)**

(vii) প্রদত্ত সমীকরণ, $32x^3-48x^2+22x-3=0$
মনে করি, মূলত্রয় যথাক্রমে $a-k, a, a+k$
তাহলে, $(a-k)+a+(a+k)=-\left(\frac{-48}{32}\right)=\frac{3}{2}$
বা, $3a=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$
আবার, $a(a-k)+a(a+k)+(a-k)(a+k)=\frac{22}{32}$
বা, $3a^2-k^2=\frac{11}{16}$
বা, $3.\frac{1}{4}-k^2=\frac{11}{16}$ $[\because a=\frac{1}{2}]$
বা, $k^2=\frac{1}{16}$
$\therefore\ k=\pm\frac{1}{4}$
$a=\frac{1}{2}, k=\frac{1}{4}$ ধরে মূলত্রয় যথাক্রমে $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
উভয় ক্ষেত্রে একই মূল পাওয়া যায়। তাই k-এর যেকোনো একটি মান ধরে মূল সেট নির্ণয় করা যায়।
$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

(viii) প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^3-22x^2+48x-32=0$ ...... (i)
ধরি, মূলত্রয় যথাক্রমে $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}$
আবার ধরি, $x=\frac{1}{y}$
$\therefore$ (i) হতে পাই,
$\therefore\ 3\left(\frac{1}{y}\right)^3-22\left(\frac{1}{y}\right)^2+48.\frac{1}{y}-32=0$

বা, $\frac{3}{y^3}-\frac{22}{y^2}+\frac{48}{y}-32=0$

বা, $3-22y+48y^2-32y^3=0$

$\therefore\ 32y^3-48y^2+22y-3=0$ ... ... (ii)

সুতরাং (ii) নং এর মূলত্রয় হবে $a-b, a, a+b$

$\therefore\ a-b+a+a+b=\frac{48}{32}$ বা, $3a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

এবং $(a-b)a+a(a+b)+(a+b)(a-b)=\frac{22}{32}$

বা, $a^2-ab+a^2+ab+a^2-b^2=\frac{22}{32}$

বা, $3a^2-b^2=\frac{22}{32}$

বা, $3\times\frac{1}{4}-b^2=\frac{11}{16}$ $[\because a=\frac{1}{2}]$

বা, $-b^2=\frac{11}{16}-\frac{3}{4}=\frac{11-12}{16}$

বা, $b^2=\frac{1}{16}$ $\therefore b=\frac{1}{4}$

(ii) নং সমীকরণের মূলত্রয় যথাক্রমে, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

অর্থাৎ $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$

(i) নং সমীকরণের মূলত্রয় যথাক্রমে $4, 2, \frac{4}{3}$

$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $4, 2, \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

(ix) $x^3-7x^2+8x+10=0$ সমীকরণের একটি মূল $1+\sqrt{3}$ যা অমূলদ। কিন্তু অমূলদ মূল জোড়ায় থাকে। সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে দ্বিতীয় মূলটি $1-\sqrt{3}$।
ধরি, তৃতীয় মূলটি α।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই, $1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+\alpha=7$

বা, $2+\alpha=7$ বা, $\alpha=7-2$

$\therefore \alpha=5$

$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $1\pm\sqrt{3}, 5$ **(Ans.)**

(x) $2x^3-9x^2+14x-5=0$ সমীকরণের একটি মূল $2+i$ যা একটি জটিল সংখ্যা। কিন্তু, জটিল মূল জোড়ায় থাকে। সুতরাং এর দ্বিতীয় মূলটি $2-i$।
ধরি, তৃতীয় মূলটি α।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই, $2+i+2-i+\alpha=\frac{9}{2}$

বা, $4+\alpha=\frac{9}{2}$ বা, $\alpha=\frac{9}{2}-4=\frac{9-8}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $2\pm i, \frac{1}{2}$

(xi) $x^3-5x^2+17x-13=0$ সমীকরণের একটি মূল 1, সুতরাং $x-1$ প্রদত্ত সমীকরণের বহুপদী রাশির একটি উৎপাদক হবে।

$\therefore\ x^3-5x^2+17x-13$
$=x^3-x^2-4x^2+4x+13x-13$
$=x^2(x-1)-4x(x-1)+13(x-1)$
$=(x-1)(x^2-4x+13)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ, $(x-1)(x^2-4x+13)=0$

একটি মূল 1 এবং অপর মূলদ্বয় $x^2-4x+13=0$ হতে পাওয়া যাবে।

$\therefore$ অপর মূলদ্বয় $=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.13}}{2.1}$

$=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$

$=\frac{4\pm\sqrt{6^2\times(-1)}}{2}=\frac{4\pm6\sqrt{-1}}{2}$

$=2\pm3\sqrt{-1}=2\pm3i$ $[\because i^2=-1]$

$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $1, 2+3i, 2-3i$ **(Ans.)**

(xii) $x^3+x^2+4x+4=0$ সমীকরণের একটি মূল $2i$ যা একটি জটিল সংখ্যা। কিন্তু জটিল মূল জোড়ায় থাকে। সুতরাং দ্বিতীয় মূলটি $-2i$।
ধরি, তৃতীয় মূল α
প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই,

$2i+(-2i)+\alpha=-1$

বা, $\alpha=-1$

$\therefore$ মূলত্রয়, যথাক্রমে $\pm2i, -1$

10. (i) দেওয়া আছে, একটি মূল, $Z=-2-2\sqrt{3}i$

$\therefore$ অপর মূলটি হবে $\bar{Z}=-2+2\sqrt{3}i$

ধরি, তৃতীয় মূল $=t$

প্রশ্নমতে,

$Z\bar{Z}t=80$

বা, $(-2-2\sqrt{3}i).(-2+2\sqrt{3}i).t=80$

বা, $\{(-2)^2-(2\sqrt{3}i)^2\}.t=80$

বা, $(4-4.3i^2).t=80$

বা, $(4+12).t=80$

বা, $t=\frac{80}{16}=5$

এখন, $Z+\bar{Z}+t=-2-2\sqrt{3}i-2+2\sqrt{3}i+5$
$=5-4=1$

$Z\bar{Z}+\bar{Z}t+tZ$
$=(-2-2\sqrt{3}i)(-2+2\sqrt{3}i)+(-2+2\sqrt{3}i).5+5(-2-2\sqrt{3}i)$
$=(4-4.3i^2)+10\sqrt{3}i-10-10-10\sqrt{3}i$
$=16-20=-4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^3-(Z+\bar{Z}+t)x^2+(Z\bar{Z}+\bar{Z}t+tZ)x-Z\bar{Z}t=0$

বা, $x^3-x^2-4x-80=0$ **(Ans.)**

(ii) $x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58 = 0$ ... ... (i)
সমীকরণটির একটি মূল $5 + 2i$ হলে অপর একটি মূল হবে $5 - 2i$.
মনে করি, সমীকরণটির অবশিষ্ট মূল দুইটি α, β
$\therefore$ মূলগুলির যোগফল, $5 + 2i + 5 - 2i + \alpha + \beta = 13$
বা, $\alpha + \beta + 10 = 13$
$\therefore \alpha + \beta = 3$ ... ... (ii)
আবার, মূলগুলির গুণফল, $(5 + 2i)(5 - 2i)\alpha\beta = 58$
বা, $(25 - 4i^2)\alpha\beta = 58$
বা, $\{25 - 4(-1)\}\alpha\beta = 58$
বা, $29\alpha\beta = 58$
$\therefore \alpha\beta = 2$ ... ... (iii)
এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= 3^2 - 4.2 = 1$
$\therefore \alpha - \beta = \pm 1$.
(+) চিহ্ন ব্যবহার করে পাই, $\alpha - \beta = 1$ ... ... (iv)
(ii) ও (iv) যোগ করে পাই,
$2\alpha = 4 \;\therefore \alpha = 2$
α এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,
$2 + \beta = 3 \;\therefore \beta = 1$
(–) চিহ্ন ব্যবহার করেও একই মূল পাওয়া যায়।
$\therefore$ নির্ণেয় অপর মূলগুলি $5 - 2i, 2, 1$ **(Ans.)**

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ, $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ ... ... (i)
আমরা জানি, সমীকরণের জটিল মূল যুগলে থাকে। যেহেতু $1 + i$ প্রদত্ত সমীকরণটির একটি জটিল মূল কাজেই অপর মূলটি হবে $1 - i$.
মনে করি, সমীকরণটির অবশিষ্ট মূল দুইটি α, β
$\therefore$ মূলগুলোর যোগফল, $1 + i + 1 - i + \alpha + \beta = 5$
বা, $2 + \alpha + \beta = 5$ বা, $\alpha + \beta = 5 - 2$
$\therefore \alpha + \beta = 3$ ... ... (ii)
আবার, মূলগুলোর গুণফল, $(1 + i)(1 - i)\alpha\beta = 4$
বা, $(1 - i^2)\alpha\beta = 4$
বা, $(1 + 1)\alpha\beta = 4$ $[\because i^2 = -1]$
বা, $2\alpha\beta = 4$
$\therefore \alpha\beta = 2$ ... ... (iii)
এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= (3)^2 - 4.2 = 9 - 8 = 1$
$\therefore \alpha - \beta = \pm 1$
(+) চিহ্ন ব্যবহার করে পাই, $\alpha - \beta = 1$ ... ... (iv)
(ii) নং ও (iv) নং যোগ করে পাই, $2\alpha = 4$
$\therefore \alpha = 2$
α এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $2 + \beta = 3$
বা, $\beta = 3 - 2$
$\therefore \beta = 1$
(-) চিহ্ন ব্যবহার করেও একই মূল পাওয়া যায়।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $1 + i, 1 - i, 2, 1$

11. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে, $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = \frac{-3b}{a}$ ... ... (1)

$$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3c}{a} \quad \text{... ... (2)}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \quad \text{... ... (3)}$$

(i) $\sum(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) + (\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$
$= \beta\gamma - \alpha\beta - \gamma^2 + \gamma\alpha + \gamma\alpha - \beta\gamma - \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta - \gamma\alpha - \beta^2 + \beta\gamma$
$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$
$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\}$
$= 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha + \beta + \gamma)^2$
$= \frac{9c}{a} - \frac{9b^2}{a^2}$
$= \frac{9(ac - b^2)}{a^2}$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:
$\sum(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = \sum(\beta\gamma - \alpha\beta - \gamma^2 + \alpha\gamma)$
$= \sum\beta\gamma - \sum\alpha\beta - \sum\gamma^2 + \sum\alpha\gamma$
$= \sum\alpha\beta - \sum\alpha\beta - \sum\gamma^2 + \sum\alpha\beta$
$= \sum\alpha\beta - \sum\gamma^2 = \sum\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$
$= \frac{3c}{a} - (\alpha + \beta + \gamma)^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
$= \frac{3c}{a} - 9\frac{b^2}{a^2} + \frac{2.3c}{a} = \frac{3ca - 9b^2 + 6ca}{a^2}$
$= \frac{9(ca - b^2)}{a^2}$ **(Ans.)**

(ii) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1) = (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1)$
$= \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1$
$= \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1$
$= \frac{d^2}{a^2} + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta.\beta\gamma + \beta\gamma.\gamma\alpha + \gamma\alpha.\alpha\beta) + (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 1$
$= \frac{d^2}{a^2} + \frac{9c^2}{a^2} - 2.\frac{-d}{a}.\frac{-3b}{a} + \frac{9b^2}{a^2} - \frac{6c}{a} + 1$
$= \frac{d^2 + 9c^2 - 6bd + 9b^2 - 6ac + a^2}{a^2}$
$= \frac{a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6ac - 6bd + d^2}{a^2}$ **(Ans.)**

12. (a) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল α, β ও γ হলে $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -p$
$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$
$\alpha\beta\gamma = -r$
তাহলে, $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$
$= \alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta\gamma}{\gamma\alpha + \beta\gamma} = -(p + \gamma) + \frac{2r}{q - \alpha\beta}$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} = -(p+\alpha) + \dfrac{2r}{q-\beta\gamma}$

এবং $\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} = -(p+\beta) + \dfrac{2r}{q-\gamma\alpha}$

(i) $\Sigma\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} + \dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}$

$= -[3p + (\alpha+\beta+\gamma)] + 2r\left[\dfrac{1}{q-\alpha\beta} + \dfrac{1}{q-\beta\gamma} + \dfrac{1}{q-\gamma\alpha}\right]$

$= -[3p - p] + 2r.\dfrac{(q-\beta\gamma)(q-\gamma\alpha) + (q-\alpha\beta)(q-\gamma\alpha) + (q-\alpha\beta)(q-\beta\gamma)}{(q-\alpha\beta)(q-\beta\gamma)(q-\gamma\alpha)}$

$= -2p + 2r.\dfrac{3q^2 - 2q(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{q^3 - q^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma q(\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha\beta\gamma)^2}$

$= -2p + 2r.\dfrac{3q^2 - 2q^2 + (-r)(-p)}{q^3 - q^3 + (-r)q(-p) - r^2}$

$= -2p + 2r.\dfrac{q^2+pr}{pqr - r^2} = -2p + \dfrac{2q^2+2pr}{pq-r}$

$= \dfrac{-2p^2q + 2pr + 2q^2 + 2pr}{pq-r} = \dfrac{-2p^2q + 4pr + 2q^2}{pq-r}$ **(Ans.)**

(ii) $\Sigma\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\beta} + \dfrac{\gamma}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\gamma}$

$= \dfrac{\alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \alpha^2\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$= \dfrac{\alpha^2\gamma + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

$= \dfrac{\alpha(\alpha\gamma+\alpha\beta) + \beta(\beta\gamma+\alpha\beta) + \gamma(\alpha\gamma+\beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$= \dfrac{\alpha(q-\beta\gamma) + \beta(q-\alpha\gamma) + \gamma(q-\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma}$

$[\because \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = q]$

$= \dfrac{\alpha q - \alpha\beta\gamma + \beta q - \alpha\beta\gamma + \gamma q - \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$= \dfrac{q(\alpha+\beta+\gamma) - 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$= \dfrac{-pq+3r}{-r}$

$= \dfrac{pq-3r}{r}$ **(Ans.)**

(iii) $\Sigma\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$

$= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta.\beta\gamma + \beta\gamma.\gamma\alpha + \gamma\alpha.\alpha\beta)$

$= q^2 - 2\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha)$

$= q^2 - 2.(-r).(-p)$

$= q^2 - 2pr$ **(Ans.)**

(iv) $\Sigma\alpha^3\beta = \alpha^3\beta + \beta^3\gamma + \gamma^3\alpha + \alpha\beta^3 + \beta\gamma^3 + \gamma\alpha^3$

$= \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 + \gamma^3\alpha + \gamma\alpha^3$

$= \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) + \beta\gamma(\beta^2+\gamma^2) + \gamma\alpha(\gamma^2+\alpha^2)$

$= \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\gamma^2) + \beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) + \gamma\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta^2)$

$= \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \alpha\beta\gamma^2 + \beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \beta\gamma\alpha^2 + \gamma\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \gamma\alpha\beta^2$

$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma^2 - \beta\gamma\alpha^2 - \gamma\alpha\beta^2$

$= \{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma(\gamma+\alpha+\beta)$

$= \{(-p)^2 - 2q\}q - (-r)(-p)$

$= p^2q - 2q^2 - pr$

$= q(p^2-2q) - pr$ **(Ans.)**

(v) $\Sigma\dfrac{1}{\alpha^2\beta} = \dfrac{1}{\alpha^2\beta} + \dfrac{1}{\alpha^2\gamma} + \dfrac{1}{\alpha\beta^2} + \dfrac{1}{\beta^2\gamma} + \dfrac{1}{\gamma^2\beta} + \dfrac{1}{\gamma^2\alpha}$

$= \dfrac{\beta\gamma^2 + \gamma\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \beta\alpha^2 + \alpha\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \dfrac{\beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \gamma\beta^2 + \alpha\beta^2 + \gamma\alpha^2 + \beta\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \dfrac{\gamma(\beta\gamma+\alpha\gamma) + \beta(\beta\gamma+\alpha\beta) + \alpha(\gamma\alpha+\alpha\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

$= \dfrac{\gamma(q-\alpha\beta) + \beta(q-\alpha\gamma) + \alpha(q-\beta\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$ $[\because \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = q]$

$= \dfrac{\gamma q - \alpha\beta\gamma + \beta q - \alpha\beta\gamma + \alpha q - \alpha\beta\gamma}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$= \dfrac{q(\alpha+\beta+\gamma) - 3\alpha\beta\gamma}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$= \dfrac{q(-p) - 3(-r)}{(-r)^2}$

$= \dfrac{-pq+3r}{r^2}$

$= \dfrac{3r-pq}{r^2}$ **(Ans.)**

(vi) আমরা জানি,

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\}$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3(-r) = (-p)\{(-p)^2 - 3.q\}$; [(i), (ii), (iii) নং থেকে]

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 + 3c = -p^3 + 3pq$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3pq - p^3 - 3r$ **(Ans.)**

(b) দেওয়া আছে, $mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$

সমীকরণটির মূলগুলো α, β ও γ হলে,

$\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{-n}{m}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \dfrac{q}{m}$ এবং $\alpha\beta\gamma = \dfrac{-r}{m}$

এখন, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$

$= (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$= (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$$= \frac{-n}{m}\left\{\left(\frac{-n}{m}\right)^2 - 3.\frac{q}{m}\right\} + 3\left(\frac{-r}{m}\right)$$

$$\therefore \sum\alpha^3 = -\frac{n^3}{m^3} + \frac{3nq}{m^2} - \frac{3r}{m} \textbf{ (Ans.)}$$

13. দেওয়া আছে,

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c.

$\therefore\ a + b + c = p$

$ab + bc + ca = q$ এবং $abc = r$

(i) $$\sum\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a}\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\frac{1}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{bc + ca + ab}{abc}\right)^2 - 2\left(\frac{a + b + c}{abc}\right)$$

$$= \left(\frac{q}{r}\right)^2 - \left(\frac{2p}{r}\right) \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{q^2}{r^2} - \frac{2p}{r} = \frac{q^2 - 2pr}{r^2} = \frac{1}{r^2}(q^2 - 2pr) \textbf{ (Ans.)}$$

(ii) $$\sum\frac{1}{a^2c^2} = \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{1}{a^2b^2c^2}\{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\{p^2 - 2q\} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{1}{r^2}(p^2 - 2q) \textbf{ (Ans.)}$$

(iii) $$\sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$
$$= p^2 - 2q \textbf{ (Ans.)}$$

(iv) $$\sum\frac{1}{a^2b} = \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{a^2c} + \frac{1}{b^2c} + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{c^2a} + \frac{1}{c^2b}$$

$$= \frac{bc^2 + cb^2 + ca^2 + ac^2 + ab^2 + ba^2}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{bc^2 + ac^2 + cb^2 + ab^2 + a^2b + ca^2}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{c(bc + ca) + b(bc + ab) + a(ab + ac)}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{c(q - ab) + b(q - ca) + a(q - bc)}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{cq - abc + bq - abc + aq - abc}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{q(a + b + c) - 3abc}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{pq - 3r}{r^2} \textbf{ (Ans.)}$$

(v) $(a + b)(b + c)(c + a) = (p - c)(p - a)(p - b)$

$= (p^2 - ap - cp + ac)(p - b)$

$= p^3 - p^2b - ap^2 + abp - cp^2 + cpb + apc - abc$

$= p^3 - p^2(a + b + c) + p(ab + bc + ca) - abc$

$= p^3 - p^2.p + p.q - r$

$= p^3 - p^3 + pq - r = pq - r$ **(Ans.)**

14. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ

তাহলে মূল-সহগ সম্পর্ক অনুসারে,

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ...... (i)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ ...... (ii)

এবং $\alpha\beta\gamma = -r$ ...... (iii)

(i) $\sum(\beta - \gamma)^2 = (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2$

$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$

$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2 \times 0 - 6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= -6q$ **(Ans.)**

(ii) $\sum\alpha^4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$

$= \{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\}^2$
$- 2\{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta.\beta\gamma + \beta\gamma.\gamma\alpha + \gamma\alpha.\alpha\beta)\}$

$= (-2q)^2 - 2\{q^2 - 2\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha)\}$

$= 4q^2 - 2q^2\ [\because \alpha + \beta + \gamma = 0]$

$= 2q^2$ **(Ans.)**

(iii) $$\Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\beta^2 + \gamma}{\beta\gamma}\right) + \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma}\right)\left(\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\alpha\gamma}\right) + \left(\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\alpha\gamma}\right)\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right)$$

$$= \left\{\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right\}\left\{\frac{(\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma}{\beta\gamma}\right\} + \left\{\frac{(\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma}{\beta\gamma}\right\}\left\{\frac{(\gamma + \alpha)^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}\right\} + \left\{\frac{(\gamma + \alpha)^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}\right\}\left\{\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right\}$$

$$= \left(\frac{\gamma^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\alpha^2 - 2\beta\gamma}{\beta\gamma}\right) + \left(\frac{\alpha^2 - 2\beta\gamma}{\beta\gamma}\right)\left(\frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}\right) + \left(\frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}\right)\left(\frac{\gamma^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{\gamma^2\alpha^2 - 2\beta\gamma^3 - 2\alpha^3\beta + 4\alpha\beta^2\gamma}{\alpha\beta^2\gamma} + \frac{\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma - 2\beta^3\gamma + 4\alpha\beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma^2} + \frac{\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3 - 2\gamma^3\alpha + 4\alpha^2\beta\gamma}{\alpha^2\beta\gamma}$$

$$= \frac{\gamma^3\alpha^3 - 2\alpha\beta\gamma^4 - 2\alpha^4\beta\gamma + 4\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^3\beta^3 - 2\alpha^4\beta\gamma - 2\alpha\beta^4\gamma + 4\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \beta^3\gamma^3 - 2\alpha\beta^4\gamma - 2\alpha\beta\gamma^4 + 4\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$= \frac{\alpha^3\beta^3 + \beta^3\gamma^3 + \alpha^3\gamma^3 - 4\alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) + 12\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$= \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2-\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2-\alpha^2\beta\gamma)+3\gamma^2\beta^2\gamma^2-4\alpha\beta\gamma(3\alpha\beta\gamma)+12\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$= \frac{q\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)-(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)\}-12(\alpha\beta\gamma)^2+15(\alpha\beta\gamma)^2}{r^2}$$

$$= \frac{q\{r^2-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\}-12q^2+15r^2}{r^2} = \frac{q^3+3r^2}{r^2}$$ **(Ans.)**

15. (i) মনে করি, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো $a - d$, a ও $a + d$.

$\therefore\ a - d + a + a + d = -p$ বা, $3a = -p$

$\therefore\ a = -\frac{p}{3}$ …… (i)

$(a-d)a + a(a+d) + (a+d)(a-d) = q$

বা, $a^2 - ad + a^2 + ad + a^2 - d^2 = q$

বা $3a^2 - d^2 = q$ …… (ii)

এবং $(a-d).a.(a+d) = -r$

বা, $a(a^2 - d^2) = -r$ …… (iii)

(iii) নং সমীকরণে $a = -\frac{p}{3}$ বসিয়ে পাই,

$-\frac{p}{3}\left(\frac{p^2}{9} - d^2\right) = -r$

বা, $\frac{p^2}{9} - d^2 = \frac{3r}{p}$

বা, $d^2 = \frac{p^2}{9} - \frac{3r}{p}$

আবার, (ii) নং সমীকরণে d^2 ও a^2 এর মান বসিয়ে পাই, $3.\frac{p^2}{9} - \frac{p^2}{9} + \frac{3r}{p} = q$.

বা, $2.\frac{p^2}{9} + \frac{3r}{p} = q$ বা, $2p^3 + 27r = 9pq$

$\therefore\ 2p^3 - 9pq + 27r = 0$ যা নির্ণেয় শর্ত। **(Ans.)**

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ধরি, সমীকরণটির মূলত্রয় $\frac{\alpha}{r}$, α ও αr।

$\therefore\ \alpha + \frac{\alpha}{r} + \alpha r = \frac{-b}{a}$ বা, $\alpha(1 + \frac{1}{r} + r) = \frac{-b}{a}$ …… (i)

আবার, $\frac{\alpha}{r}.\alpha + \alpha.\alpha r + \alpha r.\frac{\alpha}{r} = \frac{c}{a}$

বা, $\alpha^2(\frac{1}{r} + r + 1) = \frac{c}{a}$ …… (ii)

এবং $\frac{\alpha}{r}.\alpha.\alpha r = \frac{-d}{a}$ বা, $\alpha^3 = \frac{-d}{a}$ …… (iii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{\alpha(\frac{1}{r}+1+r)}{\alpha^2(\frac{1}{r}+r+1)} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}$

বা, $\frac{1}{\alpha} = -\frac{b}{c}$

$\therefore\ \alpha = -\frac{c}{b}$

α এর মান (iii)নং বসিয়ে পাই, $\left(-\frac{c}{b}\right)^3 = -\frac{d}{a}$

বা, $-\frac{c^3}{b^3} = -\frac{d}{a}$

$\therefore\ ac^3 = b^3d$ যা নির্ণেয় শর্ত। **(Ans.)**

(iii) মনে করি, $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় $\alpha - k$, α, $\alpha + k$

$\therefore\ \alpha - k + \alpha + \alpha + k = -\frac{3b}{a}$

বা, $3\alpha = \frac{-3b}{a}$ বা, $\alpha = \frac{-b}{a}$

$(\alpha-k)\alpha + \alpha(\alpha+k) + (\alpha+k)(\alpha-k) = \frac{3c}{a}$

বা, $\alpha^2 - \alpha k + \alpha^2 + \alpha k + \alpha^2 - k^2 = \frac{3c}{a}$

বা, $2\alpha^2 + \alpha^2 - k^2 = \frac{3c}{a}$ ………….. (i)

এবং $(\alpha-k)\alpha.(\alpha+k) = -\frac{d}{a}$

বা, $\alpha^2 - k^2 = -\frac{d}{a\alpha}$

(i) এ $\alpha^2 - k^2$ এবং α এর মান বসিয়ে,

$2\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{d}{a\alpha} = \frac{3c}{a}$

বা, $2\frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{d}{a\left(-\frac{b}{a}\right)}\right) = \frac{3c}{a}$ $[\because \alpha = -\frac{b}{\alpha}]$

বা, $\frac{2b^2}{a^2} + \frac{d}{b} - \frac{3c}{a} = 0$

বা, $2b^3 + a^2d - 3abc = 0$ এটিই নির্ণেয় শর্ত।

(iv) ধরি, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণটির মূলত্রয় α, β ও γ

$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = p$ ……… (i)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ ……… (ii)

$\alpha\beta\gamma = r$ ……… (iii)

প্রশ্নমতে, $\alpha + \beta = 0$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $\gamma = p$

$\therefore$ (ii) হতে, $\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = q$

বা, $\alpha\beta + \gamma . 0 = q$

$\therefore$ $\alpha\beta = q$

(iii) হতে, $\alpha\beta\gamma = r$

$\therefore$ $pq = r$ যা নির্ণেয় শর্ত। **(Ans.)**

(v) মনে করি, $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ এর মূলগুলি $\alpha - k, \alpha, \alpha + k$

$\alpha - k + \alpha + \alpha + k = \frac{-(-9)}{1}$

বা, $3\alpha = 9$ বা, $\alpha = 3$

$(\alpha - k)\alpha + \alpha(\alpha + k) + (\alpha + k)(\alpha - k) = 23$

বা, $\alpha^2 - \alpha k + \alpha^2 + \alpha k + \alpha^2 - k^2 = 23$

বা, $3\alpha^2 - k^2 = 23$

বা, $3.3^2 - k^2 = 23$ $[\because \alpha = 3]$

বা, $27 - 23 = k^2$ বা, $k^2 = 4$ বা, $k = \pm 2$

$\therefore$ মূলগুলি $3 - 2, 3, 3 + 2$ অথবা $3 - (-2), 3, 3 - 2$

বা, 1, 3, 5 অথবা 5, 3, 1

$\therefore$ নির্ণেয় মূলগুলি 1, 3, 5 **(Ans.)**

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. গ; **2.** ঘ; **3.** খ; **4.** খ;

5. খ; **ব্যাখ্যা:** নিশ্চায়ক $= (-p)^2 - 4.1.1$
$= p^2 - 4$

মূলদ্বয় জটিল যখন $p^2 - 4 < 0$,

বা, $p^2 < 4 \therefore -2 < p < 2$

6. ক; **ব্যাখ্যা:** নিশ্চায়ক $= (-m)^2 - 4.2.3$
$= m^2 - 24$

$\therefore$ মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে যখন,

$m^2 - 24 > 0$

বা, $m^2 > 24$

$\therefore m > 2\sqrt{6}$ অথবা $m < -2\sqrt{6}$

7. গ;

8. গ; **ব্যাখ্যা:** $\alpha + \beta = \frac{12}{3} = 4$

$\alpha\beta = 1$

$\therefore$ $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= (4)^2 - 4.1$
$= 16 - 4 = 12$

$\therefore$ $(\alpha - \beta) = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
$= 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

9. ঘ; **ব্যাখ্যা:** মূলদ্বয়ের গুণফল, $3 \times (-2) = \frac{r}{1}$

বা, $r = -6 \therefore r^2 = 36$

10. গ; **11.** খ;

12. খ; **ব্যাখ্যা:** $(a + b) = -\frac{11}{3}$ এবং $ab = \frac{4}{3}$

$\therefore$ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = \frac{73}{9}$

$\therefore$ $(a - b) = \frac{\sqrt{73}}{3}$

এখন, $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{(ab)^2} = \frac{(b + a)(b - a)}{(ab)^2}$

$= \frac{-(a + b)(a - b)}{(ab)^2} = \frac{-\left(\frac{-11}{3}\right) \times \frac{\sqrt{73}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{11\sqrt{73}}{16}$

13. ঘ; **ব্যাখ্যা:** $(a + b) = -4$ এবং $ab = 3$

$\therefore$ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
$= (-4)^2 - 4.3 = 4$

$\therefore$ $(a - b) = 2$ $[\because a > b]$

$\therefore$ $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
$= 2^3 + 3.3.2$
$= 8 + 18 = 26$

14. খ; **ব্যাখ্যা:** $(a + b + c) = -p$

$(ab + bc + ca) = q$

এখন, $(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$

বা, $(-p)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = p - 2q$

$\therefore$ $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2p - 4q$

15. গ; **16.** ঘ;

17. ঘ; **ব্যাখ্যা:** একটি মূল $5 - \sqrt{-4}$ বা, $5 - \sqrt{4}i$ হলে অপর মূল হবে $5 + \sqrt{4}i$

$\therefore$ গুণফল $= (5 + \sqrt{4}i)(5 - \sqrt{4}i)$
$= (5)^2 - (2i)^2$
$= 25 - 4i^2$
$= 25 + 4$
$= 29$

18. খ; **19.** ঘ; **20.** খ;

21. গ; **ব্যাখ্যা:** জটিল মূলদ্বয় ω ও ω^2

এখন, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\therefore$ $\omega + \omega^2 = -1$

22. ক; **23.** গ;

24. ক; **ব্যাখ্যা:** মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে,

$(-k)^2 - 4.1.1 > 0$

বা, $k^2 > 4$

$\therefore$ $k > 2$ অথবা, $k < -2$

25. ঘ; 26. ক; 27. খ; 28. গ 29. ক; 30. ক; 31. ক;
32. খ; 33. খ;
34. ক; ব্যাখ্যা: (iii) সঠিক নয়। কারণ, $\Sigma\alpha\beta\gamma = -\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$
35. খ; 36. ক; 37. গ;
38. ক; ব্যাখ্যা: $(-5)^2 - 4(3+k).1 = 0$
বা, $25 - 12 - 4k = 0$
বা, $4k = 13$
$\therefore k = \frac{13}{4}$
39. ঘ;
40. গ; ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = -\frac{(-5)}{3} = \frac{5}{3}$ এবং $\alpha\beta = \frac{1}{3}$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5 \text{।}$$

41. খ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\alpha^2}.\frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2 = 9$
42. গ; ব্যাখ্যা: $a = 7, b = 12, c = 5$
$\therefore \alpha^2$ ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ:
$a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$
বা, $7^2x^2 - (12^2 - 2.7.5)x + 5^2 = 0$
$\therefore 49x^2 - 74x + 25 = 0$
43. খ; ব্যাখ্যা: $\alpha^2 + \beta^2 = -\left(\frac{-74}{49}\right) = \frac{74}{49}$

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{25}{49}$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2\\ &= (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2\\ &= \left(\frac{74}{49}\right)^2 - 2.\frac{25}{49}\\ &= \frac{3026}{2401}\end{aligned}$$

44. ক;
45. গ; ব্যাখ্যা: $\Sigma\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta.(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{b}{c}\right)^3 - 3.\frac{-a}{c}.\frac{b}{c}\\ &= \frac{b^3}{c^3} + \frac{3ab}{c^2}\\ &= \frac{b^3 + 3abc}{c^3}\end{aligned}$$

46. খ; 47. খ;
48. খ; ব্যাখ্যা: α, β মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণ হবে,
$x^2 - x + 1 = 0$
$\alpha + \beta = 1$
$\alpha\beta = 1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta((\alpha+\beta)\\ &= 1^3 - 3.1.1\\ &= -2\end{aligned}$$

49. গ; ব্যাখ্যা: $(\alpha + \beta) = 1$ এবং $\alpha\beta = 1$

$$\begin{aligned}&\frac{a}{\beta^2} + \alpha + \frac{a}{\alpha^2} + \beta\\ =\ & a\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + \alpha + \beta\\ =\ & a\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right) + (\alpha+\beta)\\ =\ & a\frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{1^2} + 1\\ =\ & a\left(\frac{1-2}{1}\right) + 1\\ =\ & -a + 1\end{aligned}$$

50. ঘ;
51. খ; ব্যাখ্যা: $(x-1)^3 + (x-1) = 0$
বা, $(x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$
$\therefore x = 1$ $\quad x^2 - 2x + 2 = 0$
$\therefore x = 1 \pm i$
52. ঘ;
53. ক; ব্যাখ্যা: $\alpha + \beta = \frac{5}{6}, \alpha\beta = \frac{1}{6}$

$$\therefore x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta} = 0$$

বা, $x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \frac{5/6}{1/6}x + 6 = 0 \therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

54. গ; 55. ঘ; 56. গ;
57. খ; ব্যাখ্যা: একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে, অপরটি $\frac{1}{1-i}$

$\therefore$ সমীকরণ $x^2 - \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right)x + \frac{1}{1+i}.\frac{1}{1-i} = 0$

বা, $x^2 - \frac{1+i+1-i}{1^2 - i^2}x + \frac{1}{1^2 - i^2} = 0$

বা, $x^2 - \frac{2}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ বা, $2x^2 - 2x + 1 = 0$

58. গ; ব্যাখ্যা:

$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{1}{6}, \alpha\beta\gamma = -13$

$$\begin{aligned}\Sigma(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\\ &= 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}\\ &\qquad - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= 2.0 - 6\left(-\frac{1}{6}\right) = 1\end{aligned}$$

59. **খ; ব্যাখ্যা:** ধরি, মূলদ্বয় α ও 2α

$\therefore \alpha + 2\alpha = \frac{b}{7} \therefore \alpha = \frac{b}{21}$

এবং $2\alpha^2 = \frac{8}{7} \therefore \left(\frac{b}{21}\right)^2 = \frac{8}{14}$

বা, $b^2 = \frac{4 \times 21^2}{7}$

বা, $b^2 = 252$

$\therefore b = \sqrt{252} = \pm 6\sqrt{7}$

60. **ক; ব্যাখ্যা:** $5x^2 - 7x + 10 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{7}{5}$

$\alpha\beta = \frac{10}{5} = 2$

$\therefore -\alpha, -\beta$ বিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - (-\alpha - \beta)x + (-\alpha)(-\beta) = 0$

বা, $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 + \frac{7}{5}x + 2 = 0$

$\therefore 5x^2 + 7x + 10 = 0$

61. **খ; ব্যাখ্যা:** $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + 3k + 1 = 0$

$\because$ মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা

$\therefore \frac{3k+1}{k^2-3} = 1$ [যেহেতু, মূলদ্বয়ের গুণফল = 1]

বা, $k^2 - 3 = 3k + 1$

বা, $k^2 - 3k - 4 = 0$

বা, $k(k-4) + (k-4) = 0$

বা, $(k-4)(k+1) = 0 \therefore k = 4, -1$

62. **খ; ব্যাখ্যা:** $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$

ধরি, মূলগুলি, $\alpha, -\alpha, \beta$

তাহলে, $\alpha - \alpha + \beta = \frac{-16}{4} = -4$

বা, $\beta = -4$

আবার, $\alpha(-\alpha)\beta = \frac{36}{4} = 9$

বা, $4\alpha^2 = 9$ বা, $\alpha = \pm\frac{3}{2}$

$\therefore$ মূলগুলি $= \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, -4$

63. **ঘ; ব্যাখ্যা:** $2x^3 + 3x^2 + 6x - 65 = 0$

বা, $2x^3 - 5x^2 + 8x^2 - 20x + 26x - 65 = 0$

বা, $x^2(2x-5) + 4x(2x-5) + 13(2x-5) = 0$

বা, $(2x-5)(x^2 + 4x + 13) = 0$

অপর মূলদ্বয়, $x^2 + 4x + 13 = 0$ হতে পাওয়া যাবে

বা, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$

64. **গ; ব্যাখ্যা:** $3x^3 - 2x^2 + 1 = 3x^3 - 2x^2 + 0.x + 1 = 0$

$\therefore$ মূলগুলি, α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{3}, \alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$

এখন, $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta$

$= (\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2) + (\alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma^2) - 3\alpha\beta\gamma$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$

$= \frac{2}{3}.0 - 3\left(\frac{-1}{3}\right) = 1$

65. **গ; ব্যাখ্যা:** $x^3 - 4x + 3 = 0$

বা, $x^3 - x^2.0 - 4x + 3 = 0$

তাহলে, $a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = -4$ এবং $abc = -3$

এখন, $\sum c^3 = a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

$= 0 \times (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3(-3) = -9$

66. **খ; ব্যাখ্যা:** অভেদ এর উভয় পার্শ্বে বিভিন্ন ঘাতের সহগ ও ধ্রুবকের মান সমান থাকে।

x^3 এর সহগ সমীকৃত করে, $2A = 4 \Rightarrow A = 2$

ধ্রুবক সমীকৃত করে: $5B = 5 \therefore B = 1$

67. **ক; ব্যাখ্যা:** প্রশ্নমতে, $x^2 - 4x + 4 = 0$

বা, $(x-2)^2 = 0$ বা, $x = 2, 2$

এখানে, $f(x) = 0$

বা, $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$

বা, $x^3 - 4x^3 + 4x - 3x^2 + 12x - 12 = 0$

বা, $x(x^2 - 4x + 4) - 3(x^2 - 4x + 4) = 0$

বা, $(x-3)(x^2 - 4x + 4) = 0$ বা, $x = 3$

$\therefore$ মূলগুলো, 2, 2, 3

68. **ঘ; ব্যাখ্যা:** $x^3 + (2a-3)x^2 - 8ax + 6a = 0$

ধরি, সমীকরণের মূলদ্বয় α, α, β

$\alpha + \alpha + \beta = -(2a-3)$

বা, $2\alpha + \beta = 3 - 2a$

বা, $2\alpha + 3 = 3 - 2a$

বা, $2\alpha = -2a$

$\therefore a = -\alpha$

$\alpha.\alpha.\beta = -6a$

বা, $3a^2 = -6a$

$\therefore a = -2$ [$\because a \neq 0$]

$\therefore$ অপর মূলদ্বয় 2, 2

69. **গ; ব্যাখ্যা:** যেহেতু, মূলদ্বয় সমান

$\therefore \{b(c-a)\}^2 - 4a(b-c)c(a-b) = 0$

বা, $b^2(c-a)^2 - 4ac(b-c)(a-b) = 0$

বা, $b^2c^2 + a^2b^2 - 2b^2ac - 4ac(ab - b^2 - ac + bc) = 0$

বা, $b^2c^2 + a^2b^2 - 2b^2ac - 4a^2bc + 4b^2ac + 4a^2c^2 - 4c^2ab = 0$

বা, $b^2c^2 + a^2b^2 + 4a^2c^2 + 2b^2ac - 4a^2bc - 4c^2ab = 0$

বা, $(bc + ab - 2ac)^2 = 0$

বা, $bc + ab = 2ac$

বা, $\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} + \left(\frac{b}{c}\right) = 2$

70. ঘ; ব্যাখ্যা: $3x^3 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0; \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0; \alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}$

এখন, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$

$= 0 + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

71. খ; ব্যাখ্যা: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$a + b = 2, ab = -1$

$\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 2^2 - 2(-1) = 4 + 2 = 6$

72. গ; ব্যাখ্যা: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, মূলদ্বয় $\alpha, \beta \therefore \alpha\beta = \frac{5}{2}$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ মূলদ্বয় $\beta, \gamma \therefore \beta\gamma = 3$

$\therefore \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{5/2}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\gamma + \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{11}{6 - 5} = 11$

$\therefore \frac{\gamma + \alpha}{\gamma - \alpha} = 11 : 1$

73. খ; ব্যাখ্যা: $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$

$(x - 1)^2$ এর সর্বনিম্ন মান 0

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ব নিম্ন মান 4

74. গ; ব্যাখ্যা: $x^2 + ax + b = 0$ এর মূলদ্বয় সমান

$\therefore a^2 - 4b = 0$

$x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4

$\therefore \alpha + 4 = -a$ এবং $\alpha.4 = 8$

$\Rightarrow \alpha = 2 \quad \therefore a = -6$

$\therefore (-6)^2 - 4b = 0$ বা, $b = 9$

75. খ; ব্যাখ্যা: $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ এর পৃথায়ক শূন্য হবে।

$\therefore \{2(k + 3)\}^2 - 4(k + 1)(2k + 3) = 0$

বা, $4(k^2 + 6k + 9) - 4(2k^2 + 3k + 2k + 3) = 0$

বা, $4(k^2 + 6k + 9 - 2k^2 - 5k - 3) = 0$

বা, $-k^2 + k + 6 = 0$

বা, $k^2 - k - 6 = 0$

বা, $k^2 - 3k + 2k - 6 = 0$

বা, $(k - 3)(k + 2) = 0$

$\therefore k = -2, 3$

76. ক; ব্যাখ্যা: একটি মূল $\sqrt{-5} - 1$ বা, $-1 + \sqrt{5}i$ হলে অপর মূলটি হবে $-1 - \sqrt{5}i$

$\therefore$ সমীকরণ, $x^2 - (-1 + \sqrt{5}i - 1 - \sqrt{5}i)x + (-1 + \sqrt{5}i)(-1 - \sqrt{5}i) = 0$

বা, $x^2 + 2x + \{(-1)^2 - (\sqrt{5}i)^2\} = 0$

$\therefore x^2 + 2x + 6 = 0$

77. ঘ;

78. ক; ব্যাখ্যা: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$\therefore \alpha + \beta = 7$ এবং $\alpha\beta = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - (\alpha + \beta + \alpha\beta)x + (\alpha + \beta)(\alpha\beta) = 0$

বা, $x^2 - (7 + 12)x + 7 \times 12 = 0$

$\therefore x^2 - 19x + 84 = 0$

79. ঘ;

80. ঘ; ব্যাখ্যা: পৃথায়ক $= (11 + k)^2 - 4(3k + 1).9$

$= 121 + 22k + k^2 - 108k - 36$

$= k^2 - 86k + 85$

$\therefore k^2 - 86k + 85 < 0$

বা, $(k - 85)(k - 1) < 0$

$\therefore 1 < k < 85$

81. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{x^3} - \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} - r = 0$

বা, $1 - px + qx^2 - rx^3 = 0$

$\therefore rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

82. খ; ব্যাখ্যা: $\alpha^3 - \beta^3 = 152$

বা, $(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = 152$

বা, $8^3 + 3.\alpha\beta.8 = 152$

বা, $24\alpha\beta = 152 - 512 = -360$

বা, $\alpha\beta = -15$

এখন, $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = 8^2 - 60 = 4$

$\therefore \alpha + \beta = \pm 2$

এখন, $\alpha + \beta = 2$ {ধনাত্মক মান নিয়ে}

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 2x - 15 = 0$

83. খ; 84. গ;

85. ক; ব্যাখ্যা: $x^2 - 11x + a = 0$

$x^2 - 14x + 2a = 0$

α সাধারণ মূল

$\alpha^2 - 11\alpha + a = 0$

$\alpha^2 - 14\alpha + 2a = 0$

$\therefore \frac{\alpha^2}{-22a + 14a} = \frac{\alpha}{a - 2a} = \frac{1}{-14 + 11}$

বা, $\frac{\alpha^2}{-8a} = \frac{\alpha}{-a} = \frac{1}{-3}$

$\therefore \frac{\alpha^2}{24a} = \frac{\alpha^2}{a^2}$

$\therefore a^2 = 24a$

বা, $a(a - 24) = 0$

$\therefore a = 0, 24$

86. খ; ব্যাখ্যা: পৃথায়ক $= a^4 - 4.1.a^4 = -3a^4 < 0$

$\therefore$ মূলদ্বয় জটিল হবে।

▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. **ক** প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + 2mx + m = 0$

নিশ্চায়ক $= (2m)^2 - 4.1.m$

$= 4m^2 - 4m = 4m(m-1)$

মূলদ্বয় পরস্পর সমান ও বাস্তব হতে হলে,

নিশ্চায়ক $= 0$

বা, $4m(m-1) = 0$

বা, $m(m-1) = 0$

প্রশ্নমতে, $m \neq 0$

$\therefore m - 1 = 0$

বা, $m = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $m = 1$

খ দেওয়া আছে, $x^2 + 2mx + m = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{2m}{1} = -2m$

$\alpha\beta = \frac{m}{1} = m$

$\alpha\beta^{-2}$ ও $\beta\alpha^{-2}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha\beta^{-2} + \beta\alpha^{-2}$

$= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$

$= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{(-2m)^3 - 3.m.(-2m)}{m^2}$

$= \frac{-8m^3 + 6m^2}{m^2}$

$= \frac{2m^2(3-4m)}{m^2}$

$= 2(3-4m)$ [$\because m \neq 0$]

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta^{-2} . \beta\alpha^{-2}$

$= \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{m}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 2(3-4m)x + \frac{1}{m} = 0$

$\therefore mx^2 - 2m(3-4m)x + 1 = 0$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $x^2 + 2mx + m = 0$ এবং $x^2 + 5x + 1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি γ

$\therefore \gamma^2 + 2m\gamma + m = 0$ ... ... (i)

$\gamma^2 + 5\gamma + 1 = 0$ ... ... (ii)

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$\frac{\gamma^2}{2m - 5m} = \frac{\gamma}{m-1} = \frac{1}{5-2m}$

বা, $\frac{\gamma^2}{-3m} = \frac{\gamma}{m-1} = \frac{1}{5-2m}$

$\therefore \gamma = \frac{-3m}{m-1}$ আবার, $\gamma = \frac{m-1}{5-2m}$

$\therefore \frac{-3m}{m-1} = \frac{m-1}{5-2m}$

বা, $(m-1)^2 = -15m + 6m^2$

বা, $m^2 - 2m + 1 = -15m + 6m^2$

বা, $5m^2 - 13m - 1 = 0$

বা, $5m^2 - 1 = 13m$

$\therefore m - \frac{1}{5m} = \frac{13}{5}$ [5m দ্বারা ভাগ করে]

(দেখানো হলো)

2. **ক** দেওয়া আছে, $ax^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 4 : 5

ধরি, সমীকরণের মূলদ্বয় $4\alpha, 5\alpha$

$\therefore 4\alpha + 5\alpha = -\frac{-b}{a}$

বা, $9\alpha = \frac{b}{a}$

$\therefore \alpha = \frac{b}{9a}$

আবার, $4\alpha . 5\alpha = \frac{c}{a}$

বা, $20\alpha^2 = \frac{c}{a}$

বা, $20\left(\frac{b}{9a}\right)^2 = \frac{c}{a}$

বা, $20\frac{b^2}{81a^2} = \frac{c}{a}$

বা, $\frac{20b^2}{81a} = c$

$\therefore 20b^2 = 81ac$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় 2, α ও β

$\therefore 2 + \alpha + \beta = -\frac{-9}{2} = \frac{9}{2}$

বা, $\alpha + \beta = \frac{9}{2} - 2$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{5}{2}$

আবার, $2\alpha\beta = -\frac{2}{2}$ $\therefore \alpha\beta = -\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{\alpha} - \beta\right)$ ও $\left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{\alpha} - \beta + \frac{1}{\beta} - \alpha$

$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - (\alpha + \beta)$

$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - (\alpha + \beta) = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}$

$= -5 - \frac{5}{2} = \frac{-15}{2}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{1}{\alpha} - \beta\right)\left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right)$

$= \frac{1}{\alpha\beta} - 1 - 1 + \alpha\beta$

$= \frac{1}{\alpha\beta} - 2 + \alpha\beta$

$= -2 - 2 - \frac{1}{2}$

$= -4 - \frac{1}{2} = \frac{-9}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \left(-\frac{15}{2}\right)x - \frac{9}{2} = 0$

$\therefore$ $2x^2 + 15x - 9 = 0$ **(Ans.)**

গ ধরি, $ax^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

$\therefore$ $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

আবার, ধরি, $ax^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ ও δ

$\therefore$ $\gamma + \delta = \frac{c}{a}$ এবং $\gamma\alpha = \frac{b}{a}$

প্রশ্নমতে, $|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta| = k$

$\therefore$ $|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$

বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4 . \frac{b}{a}$

বা, $\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{c^2}{a^2} - \frac{4b}{a}$

বা, $b^2 - 4ac = c^2 - 4ab$

বা, $b^2 - c^2 + 4ab - 4ac = 0$

বা, $(b + c)(b - c) + 4a(b - c) = 0$

বা, $(b - c)(b + c + 4a) = 0$

যেহেতু $c \neq b$ $\therefore b - c \neq 0$

$\therefore$ $b + c + 4a = 0$ **(দেখানো হলো)**

3. ক দেওয়া আছে, দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3 - 2i$

আমরা জানি, জটিল মূলগুলো অনুবন্ধী আকারে আসে।

$\therefore$ অপর মূলটি হবে $3 + 2i$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= 3 - 2i + 3 + 2i = 6$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= (3 - 2i)(3 + 2i)$

$= 3^2 - (2i)^2$

$= 9 + 4 = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 6x + 13 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $3x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$ সমীকণের মূলগুলি α, β ও γ

$\therefore$ $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{3}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{5}{3}$

এখন, $\sum\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$

$= \frac{4}{3} . \frac{1}{3} - 3\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{9} + 5$

$= \frac{4 + 45}{9} = \frac{49}{9}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p ও q

$\therefore$ $p + q = -\frac{b}{a}$

বা, $b = -(p + q)a$ ... ... (i)

$pq = \frac{c}{a}$ বা, $c = pqa$ ... ... (ii)

এখন, $cx^2 - 5bx + 25a = 0$

বা, $pqax^2 + 5(p + q)ax + 25a = 0$

বা, $pqx^2 + 5(p + q)x + 25 = 0$ $[\because a \neq 0]$

বা, $pqx^2 + 5px + 5qx + 25 = 0$

বা, $px(qx + 5) + 5(qx + 5) = 0$

বা, $(qx + 5)(px + 5) = 0$

$\therefore$ $qx + 5 = 0$ অথবা, $px + 5 = 0$

বা, $qx = -5$ বা, $px = -5$

$\therefore$ $x = -\frac{5}{q}$ $\therefore x = -\frac{5}{p}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয় $-\frac{5}{q}, -\frac{5}{p}$ **(Ans.)**

4. ক দেওয়া আছে, $x^2 + bx - 6b = 0$ ... ... (i)

$\therefore$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $= b^2 - 4.1(-6b)$

$= b^2 + 24b$

প্রশ্নমতে, $b^2 + 24b = -44$

বা, $b^2 + 24b + 44 = 0$

বা, $b^2 + 22b + 2b + 44 = 0$

বা, $b(b + 22) + 2(b + 22) = 0$

বা, $(b + 22)(b + 2) = 0$

$\therefore$ $b + 22 = 0$ অথবা, $b + 2 = 0$

বা, $b = -22$ বা, $b = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $b = -22, -2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x^2 + bx - 6b = 0$ ... ... (i)

$x^2 - 2x - b = 0$ ... ... (ii)

ধরি, (i) ও (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূলটি α

$\therefore$ $\alpha^2 + b\alpha - 6b = 0$ ... ... (iii)

$\alpha^2 - 2\alpha - b = 0$ ... ... (iv)

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{\alpha^2}{-b^2 - 12b} = \frac{\alpha}{-6b + b} = \frac{1}{-2 - b}$$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{-b(b + 12)} = \dfrac{\alpha}{-5b} = \dfrac{1}{-(b + 2)}$

$\therefore$ $\dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \dfrac{-b(b + 12)}{-5b}$ আবার, $\alpha = \dfrac{-5b}{-(b + 2)}$

$\therefore$ $\alpha = \dfrac{b(b + 12)}{5b}$ $\quad\therefore \alpha = \dfrac{5b}{b + 2}$

$\therefore$ $\dfrac{b(b + 12)}{5b} = \dfrac{5b}{b + 2}$

বা, $b(b + 12)(b + 2) = 25b^2$

বা, $b(b^2 + 2b + 12b + 24) = 25b^2$

বা, $b(b^2 + 14b + 24) - 25b^2 = 0$

বা, $b(b^2 + 14b + 24 - 25b) = 0$

বা, $b(b^2 - 11b + 24) = 0$

বা, $b(b^2 - 8b - 3b + 24) = 0$

বা, $b\{b(b - 8) - 3(b - 8)\} = 0$

বা, $b(b - 8)(b - 3) = 0$

$\therefore$ $b = 0, 8, 3$ **(Ans.)**

গ ধরি, $x^2 + 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore$ $\alpha + \beta = -2b$ $\quad\therefore |\alpha + \beta| = 2b$

এবং $\alpha\beta = b^2 - a^2$

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + b)^2 - 4\alpha\beta$

$= (-2b)^2 - 4(b^2 - a^2)$

$= 4b^2 - 4b^2 + 4a^2 = 4a^2$

$\therefore$ $\alpha - \beta = \pm 2a$

$\therefore$ $|\alpha - \beta| = 2a$

প্রশ্নমতে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় হবে 2b ও 2a

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, x^2 – (মূলদ্বয়ের যোগফল) x + মূলদ্বয়ের গুণফল = 0

বা, $x^2 - (2b + 2a)x + 2b \cdot 2a = 0$

$\therefore$ $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$ **(Ans.)**

5. ক $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়।

অর্থাৎ, সমীকরণের পৃথায়ক = 0 হয়।

অর্থাৎ, $\{2(k + 3)\}^2 - 4(k + 1)(2k + 3) = 0$

বা, $k^2 + 6k + 9 - (2k^2 + 5k + 3) = 0$

বা, $k^2 + 6k + 9 - 2k^2 - 5k - 3 = 0$

বা, $-k^2 + k + 6 = 0$

বা, $k^2 - k - 6 = 0$

বা, $k^2 - 3k + 2k - 6 = 0$

বা, $k(k - 3) + 2(k - 3) = 0$

বা, $(k + 2)(k - 3) = 0$

$\therefore$ $k = 3, -2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k = 3, -2$ **(Ans.)**

খ $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূল ও সহগের সম্পর্ক হতে পাই, $\beta + \gamma = -\dfrac{n}{m}$ ... ... (i) এবং $\beta\gamma = \dfrac{l}{m}$

(i) হতে, $m\beta + m\gamma = -n$ বা, $m\beta + n = -m\gamma$

$m\gamma + n = -m\beta$

তাহলে, $(m\beta + n)^{-2} + (m\gamma + n)^{-2}$

$$= \frac{1}{(m\beta + n)^2} + \frac{1}{(m\gamma + n)^2}$$

$$= \frac{1}{(-m\gamma)^2} + \frac{1}{(-m\beta)^2} = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left\{\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2\gamma^2}\right\} = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{(\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma}{(\beta\gamma)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left\{\frac{\left(\frac{-n}{m}\right)^2 - \frac{2l}{m}}{\left(\frac{l}{m}\right)^2}\right\} = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{n^2 - 2ml}{m^2} \times \frac{m^2}{l^2}\right\}$$

$$= \frac{n^2 - 2ml}{m^2l^2}$$

সুতরাং $(m\beta + n)^{-2} + (m\gamma + n)^{-2} = \dfrac{n^2 - 2ml}{m^2l^2}$

(দেখানো হলো)

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $mx^2 + nx + l = 0$

বা, $mx^2 + nx + n = 0$ $[\because l = n]$

ধরি, সমীকরণটির মূলদ্বয় $a\alpha$ এবং $b\alpha$

$a\alpha + b\alpha = -\dfrac{n}{m}$ এবং $a\alpha.b\alpha = \dfrac{n}{m}$

$\therefore a + b = -\dfrac{n}{m\alpha}$ ... ... (i)

$\therefore ab = \dfrac{n}{m\alpha^2}$ ... ... (ii)

এখন, $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$

$=\frac{-\frac{n}{m\alpha}}{\sqrt{\frac{n}{m\alpha^2}}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$=-\frac{n}{m\alpha}.\frac{\sqrt{m}\cdot\alpha}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}=-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}=0$

$\therefore\ \sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{m}}=0$ **(দেখানো হলো)**

6. ক প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{1}{x}+\frac{1}{g-x}=\frac{1}{h}$

$g=h=2$ হলে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$

বা, $\frac{2-x+x}{x(2-x)}=\frac{1}{2}$

বা, $\frac{2}{2x-x^2}=\frac{1}{2}$

বা, $4=2x-x^2$

$\therefore\ x^2-2x+4=0$

সমীকরণের নিশ্চায়ক $=(-2)^2-4.1.4$

$=4-16=-12$

যেহেতু নিশ্চায়ক <0

সেহেতু মূলদ্বয় জটিল ও অসমান।

খ দেওয়া আছে, $2x^3-x^2-22x-24=0$ এর দুইটি মূলের অনুপাত $3:4$

ধরি, মূল দুইটি 3α এবং 4α

প্রদত্ত সমীকরণ,

$2x^3-x^2-22x-24=0$

বা, $x^3-\frac{1}{2}x^2-11x-12=0$

বা, $x^3-\frac{1}{2}x^2+(-11)x-12=0$ ... ... (i)

ধরি (i) নং সমীকরণের তৃতীয় মূল a

$3\alpha+4\alpha+a=\frac{1}{2}$ ... ... (ii)

$3\alpha.4\alpha+4\alpha.a+a.3\alpha=-11$ ... ... (iii)

এবং $3\alpha.4\alpha.a=12$ ... ... (iv)

(ii) হতে পাই, $a=\frac{1}{2}-7\alpha$ ... ... (v)

a এবং মান (iii) নং এ বসিয়ে

$12\alpha^2+4\alpha.\left(\frac{1}{2}-7\alpha\right)+3\alpha\left(\frac{1}{2}-7\alpha\right)=-11$

বা, $12\alpha^2+2\alpha-28\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha-21\alpha^2=-11$

বা, $-37\alpha^2+\frac{7\alpha}{2}=-11$

বা, $-74\alpha^2+7\alpha=-22$

বা, $-74\alpha^2+7\alpha+22=0$

বা, $74\alpha^2-7\alpha-22=0$

বা, $74\alpha^2-44\alpha+37\alpha-22=0$

বা, $2\alpha(37\alpha-22)+1(37\alpha-22)=0$

বা, $(37\alpha-22)(2\alpha+1)=0$

বা, $\alpha=\frac{22}{37}$ হলে (v) নং হতে

$a=\frac{1}{2}-\frac{7\times22}{37}=\frac{-271}{74}$

কিন্তু (iv) নং হতে, $3\times\frac{22}{37}\times\frac{4\times22}{37}\times\frac{-271}{74}\neq12$

$\therefore\ \alpha\neq\frac{22}{37}$

$\therefore\ 2\alpha+1=0$

বা, $\alpha=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ 3\alpha=3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$4\alpha=4.\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

α এর মান (v) নং এ বসিয়ে

$a=\frac{1}{2}-7.\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $4, \frac{-3}{2}, -2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{g-x}=\frac{1}{h}$

বা, $\frac{g-x+x}{x(g-x)}=\frac{1}{h}$

বা, $\frac{g}{x(g-x)}=\frac{1}{h}$

বা, $x(g-x)=gh$

বা, $gx-x^2=gh$

$\therefore\ x^2-gx+gh=0$ ... ... (i)

মনে করি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore\ \alpha+\beta=g$ এবং $\alpha\beta=gh$

প্রশ্নানুসারে, $\alpha-\beta=\pm p$

বা, $(\alpha-\beta)^2=p^2$

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2$

বা, $g^2-4gh=p^2$

বা, $g^2-2.g.2h+(2h)^2-4h^2=p^2$

বা, $(g-2h)^2=p^2+4h^2$

বা, $g-2h=\pm\sqrt{p^2+4h^2}$

$\therefore\ g=2h\pm\sqrt{p^2+4h^2}$ **(দেখানো হলো)**

7. ক দেওয়া আছে, $\alpha + \beta = 3$

$\alpha^3 + \beta^3 = 7$

বা, $(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 7$

বা, $3^3 - 3\alpha\beta.3 = 7$

বা, $27 - 9\alpha\beta = 7$

বা, $9\alpha\beta = 27 - 7$

বা, $9\alpha\beta = 20$

$\therefore \alpha\beta = \frac{20}{9}$

$\therefore$ α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 - 3x + \frac{20}{9} = 0$

$\therefore 9x^2 - 27x + 20 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় u ও v

$\therefore u + v = -\frac{-6}{4} = \frac{3}{2}$

$uv = \frac{1}{4}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $= u + \frac{1}{v} + v + \frac{1}{u}$

$= u + v + \frac{u+v}{uv} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}$

$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(u + \frac{1}{v}\right)\left(v + \frac{1}{u}\right)$

$= uv + 1 + 1 + \frac{1}{uv}$

$= \frac{1}{4} + 2 + 4 = \frac{25}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{25}{4} = 0$

বা, $4x^2 - 30x + 25 = 0$ **(Ans.)**

গ ধরি, সমীকরণটির একটি মূল α, তাহলে অপরটি 2α

$\therefore \alpha + 2\alpha = -\frac{2(b+c)}{2c} = -\frac{b+c}{c}$

সুতরাং, $\alpha = -\frac{b+c}{3c}$ ... ... (i)

এবং $\alpha . 2\alpha = \frac{3b - 2c}{2c}$

সুতরাং, $2\alpha^2 = \frac{3b-2c}{2c}$ ... ... (ii)

(i) নং থেকে α এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$2\left(-\frac{b+c}{3c}\right)^2 = \frac{3b-2c}{2c}$

বা, $\frac{2(b^2 + c^2 + 2bc)}{9c} = \frac{3b-2c}{2}$

বা, $4b^2 + 22c^2 - 19bc = 0$

বা, $4b^2 - 11bc - 8bc + 22c^2 = 0$

বা, $b(4b - 11c) - 2c(4b - 11c) = 0$

বা, $(b - 2c)(4b - 11c) = 0$

$\therefore b = 2c$ অথবা, $4b = 11c$ **(দেখানো হলো)**

8. ক প্রশ্নমতে, $px^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় β ও γ.

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \beta + \gamma = \frac{-2}{p}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \beta\gamma = \frac{1}{p}$

$\therefore \beta\gamma^{-1} + \gamma\beta^{-1} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\gamma\beta}$

$= \frac{(\beta+\gamma)^2 - 2\beta\gamma}{\gamma\beta} = \frac{(\beta+\gamma)^2}{\gamma\beta} - 2$

$= \frac{\left(\frac{-2}{p}\right)^2}{\frac{1}{p}} - 2 = \frac{4}{p} - 2$ **(Ans.)**

খ যেহেতু মূলদ সহগ বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে

সুতরাং একটি মূল $\frac{1}{2+\sqrt{-3}}$ হলে অপরটি হবে $\frac{1}{2-\sqrt{-3}}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \frac{1}{2+\sqrt{-3}} + \frac{1}{2-\sqrt{-3}}$

$= \frac{2-\sqrt{-3}+2+\sqrt{-3}}{(2+\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3})} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{2+\sqrt{-3}} \times \frac{1}{2-\sqrt{-3}} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{1}{7} = 0$

$\therefore 7x^2 - 4x + 1 = 0$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$px^2 + 2x + 1 = 0$ .... (i)

এবং $x^2 + 2x + p = 0$ ....(ii)

(i) এবং (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূল α

$\therefore p\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ .... (iii)

$\alpha^2 + 2\alpha + p = 0$ .... (iv)

(iii) এবং (iv) নং হতে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসরণ করে

পাই, $\frac{\alpha^2}{2p-2} = \frac{\alpha}{1-p^2} = \frac{1}{2p-2}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2(p-1)} = \frac{\alpha}{-(p^2-1)} = \frac{1}{2(p-1)}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2(p-1)} = \frac{\alpha}{-(p+1)(p-1)} = \frac{1}{2(p-1)}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{-(p+1)} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha}{-(p+1)}$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]

বা, $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{-(p+1)}$

বা, $\alpha = \frac{-2}{(p+1)}$

আবার, $-\frac{\alpha}{(1+p)} = \frac{1}{2}$ [২য় এবং ৩য় অনুপাত হতে]

বা, $\alpha = \frac{-(p+1)}{2}$

তাহলে, $-\frac{2}{p+1} = -\frac{(p+1)}{2}$

বা, $(p+1)^2 = 4$

বা, $p + 1 = \pm 2$

বা, $p = \pm 2 - 1$

$\therefore$ $p = 1$ অথবা, -3 **(দেখানো হলো)**

9. ক মূলদ্বয়ের যোগফল $= 2 - 3 = -1$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= 2(-3) = -6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $x^2 - (-1)x - 6 = 0$

$\therefore$ $x^2 + x - 6 = 0$ **(Ans.)**

খ $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β ও γ হলে, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-3b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3c}{a}$

বামপক্ষ $= \sum(\alpha - \beta)^2 = \sum(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$

$= \sum\alpha^2 - 2\sum\alpha\beta + \sum\beta^2$

$= \sum\alpha^2 - 2\sum\alpha\beta + \sum\alpha^2$

$= 2\sum\alpha^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2.\frac{3c}{a}$

$= 2\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - \frac{6c}{a}$

$= 2\left(\frac{9b^2}{a^2} - \frac{6c}{a}\right) - \frac{6c}{a}$

$= \frac{18b^2}{a^2} - \frac{12c}{a} - \frac{6c}{a} = \frac{18b^2}{a^2} - \frac{18c}{a}$

$= \frac{18(b^2 - ac)}{a^2}$ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \frac{1}{x-r} = 0$

বা, $\frac{(x-q)(x-r) + (x-p)(x-r) + (x-p)(x-q)}{(x-p)(x-q)(x-r)} = 0$

বা, $x^2 - qx - rx + qr + x^2 - px - rx + pr + x^2 - px - qx + pq = 0$

বা, $3x^2 - 2qx - 2rx - 2px + pq + qr + rp = 0$

বা, $3x^2 - 2x(p + q + r) + (pq + qr + rp) = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হবে যদি সমীকরণটির পৃথায়ক, $D \geq 0$ হয়।

এখন, পৃথায়ক, $D = \{-2(p+q+r)\}^2 - 4 \times 3(pq + qr + rp)$

$= 4(p + q + r)^2 - 12(pq + qr + rp)$

$= 4\{(p + q + r)^2 - 3(pq + qr + rp)\}$

$= 4\{p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + rp) - 3(pq + qr + rp)\}$

$= 4\{p^2 + q^2 + r^2 - (pq + qr + rp)\}$

$= 4(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)$

$= 4 \times \frac{1}{2}\{(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\}$

$[\because (p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 = 2(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)]$

$= 2\{(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\}$

p, q, r প্রত্যেকেই বাস্তব হলে অবশ্যই

$(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 \geq 0$ হবে

অর্থাৎ পৃথায়ক, $D \geq 0$

$\therefore$ দৃশ্যকল্প-II এ বর্ণিত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে। **(প্রমাণিত)**

10. ক $x^2 + 2x + k = 0$ সমীকরণে একটি মূল 2

ধরি, অপর মূল α

$\therefore \alpha + 2 = -2$

বা, $\alpha = -2 - 2$ $\therefore \alpha = -4$

$\therefore$ অপর মূল -4 **(Ans.)**

খ আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $= (5 + y)$, প্রস্থ $= (4 + y)$ এবং উচ্চতা $= (3 + y)$

আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\{(5 + y)(4 + y) + (4 + y)(3 + y) + (3 + y)(5 + y)\}$

$= 2\{20 + 9y + y^2 + 12 + 7y + y^2 + 15 + 8y + y^2\}$

$= 2(3y^2 + 24y + 47)$

$= 6y^2 + 48y + 94$

প্রশ্নমতে, $6y^2 + 48y + 94 = 148$

বা, $6y^2 + 48y + 94 - 148 = 0$

বা, $6y^2 + 48y - 54 = 0$

বা, $y^2 + 8y - 9 = 0$

বা, $y^2 + 9y - y - 9 = 0$

বা, $(y + 9)(y - 1) = 0$ $\therefore y = 1, -9$

কিন্তু $y \neq -9$, কেননা মাত্রা বৃদ্ধি ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ $y = 1$ **(Ans.)**

গ আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ ঘন মি.

প্রতিটি বাহু x মি. বৃদ্ধি করায়, দৈর্ঘ্য $= (5 + x)$ মি.

প্রস্থ $= (4 + x)$ মি., উচ্চতা $= (3 + x)$ মি.

$\therefore$ এখন ঘনবস্তুটি আয়তন $(5 + x)(4 + x)(3 + x)$ ঘন মি.

শর্তমতে, $(5+x)(4+x)(3+x) = 60 \times 2$

বা, $60 + (5\times4 + 4\times3 + 5\times3)x + 12x^2 + x^3 = 120$

$\therefore\ x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$

দেওয়া আছে, মূলগুলো α, β ও γ

এখানে, $\alpha + \beta + \gamma = -12$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 47$

$\alpha\beta\gamma = 60$

নির্ণেয় রাশি $= \Sigma\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$

$= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$

$= \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma}\right)$

$= \frac{\alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\beta}{\alpha\beta\gamma} + 3 - 3$

$= \frac{\alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\beta + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} - 3$

$= \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) + \beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) + \gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma} - 3$

$= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} - 3$

$= \frac{(-12)(47)}{60} - 3 = \frac{-564 - 180}{60}$

$= \frac{-744}{60} = \frac{-62}{5}$ **(Ans.)**

11. ক দেওয়া আছে,

$4x(x^2 - 1) + 2x + 5 = 0$

বা, $4x^3 - 4x + 2x + 5 = 0$

বা, $4x^3 - 2x + 5 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ

$\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়, $px^2 + qx + 1 = 0$

$qx^2 + px + 1 = 0$

মনে করি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α সুতরাং α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হবে অর্থাৎ,

$p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ ... ... (i)

$q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং থেকে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই,

$\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2 - q^2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{q-p}{q-p} = 1$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]

এবং $\alpha = -\frac{1}{p+q}$ [২য় ও ৩য় অনুপাত হতে]

তাহলে, $-\frac{1}{p+q} = 1$ বা, $-(p+q) = 1$

$\therefore\ p + q + 1 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ ভুল সমীকরণটি, $qx^2 + px + 1 = 0$

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় হবে

$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4.q.1}}{2.q}$

বা, $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}$ ... ... (iii)

আবার, $p + q + 1 = 0$

বা, $q + 1 = -p$ বা, $p = -(q+1)$

p এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই,

$x = \frac{-\{-(q+1)\} \pm \sqrt{\{-(q+1)\}^2 - 4q}}{2q}$

বা, $x = \frac{(q+1) \pm \sqrt{q^2 + 2q + 1 - 4q}}{2q}$

বা, $x = \frac{(q+1) \pm \sqrt{q^2 - 2q + 1}}{2q}$

বা, $x = \frac{(q+1) \pm \sqrt{(q-1)^2}}{2q}$

বা, $x = \frac{(q+1) \pm (q-1)}{2q}$

$\therefore$ একটি মূল $= \frac{(q+1) + (q-1)}{2q}$ ['+' চিহ্ন নিয়ে]

$= \frac{2q}{2q} = 1$

এবং অপর মূল $= \frac{(q+1) - (q-1)}{2q}$ ['+' চিহ্ন নিয়ে]

$= \frac{2}{2q} = \frac{1}{q}$

$\therefore$ মূলদ্বয় $1, \frac{1}{q}$ **(Ans.)**

12. ক প্রদত্ত সমীকরণ: $x^2 - px + q = 0$ ... ... (i)

ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$

$\therefore\ \alpha + \beta = p$

এবং $\alpha\beta = q$

শর্তমতে, $|\alpha - \beta| = 1$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

বা, $p^2 - 4q = 1$

বা, $p^2 = 1 + 4q$

বা, $p^2 + 4q^2 = 4q^2 + 4q + 1$

বা, $p^2 + 4q^2 = (2q+1)^2$

নির্ণেয় মান $= (2q+1)^2$ **(Ans.)**

খ (i) নং সমীকরণ $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

উপরোক্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হওয়ায়

$\alpha + \beta = 2a$ এবং $\alpha\beta = a^2 - b^2$

$|\alpha + \beta|$ এবং $|\alpha - \beta|$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2 - (|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|)x + |\alpha + \beta|\,|\alpha - \beta| = 0$

বা, $x^2 - \left((\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}\right)x + (\alpha + \beta) . \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - \left(\sqrt{(2a)^2} + \sqrt{(2a)^2 - 4(a^2 - b^2)}\right)x + \sqrt{(2a)^2} . \sqrt{(2a)^2 - 4(a^2 - b)^2} = 0$

বা, $x^2 - \left(2a + \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}\right)x + 2a . \sqrt{(4a^2 - 4a^2 + 4b^2)} = 0$

বা, $x^2 - (2a + 2b)x + 2a . 2b = 0$

$\therefore\ x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$

উপরোক্ত সমীকরণের মূলদ্বয় p, q হওয়ায়

$p + q = -\frac{b}{a}$ এবং $pq = \frac{c}{a}$

আবার, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - \frac{2b}{a}x + 4 = 0$

বা, $pqx^2 + 2(p + q)x + 4 = 0$

বা, $pqx^2 + 2px + 2qx + 4 = 0$

বা, $px(qx + 2) + 2(qx + 2) = 0$

বা, $(qx + 2)(px + 2) = 0$

$\therefore\ x = -\frac{2}{q}, -\frac{2}{p}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয়ঃ $-\frac{2}{q}, -\frac{2}{p}$

13. **ক** মূলদ সহগবিশিষ্ট সমীকরণের একটি মূল $1 + \sqrt{2}$ হলে, অপর মূলটি $1 - \sqrt{2}$ হবে

$\therefore 1 + \sqrt{2}$ এবং $1 - \sqrt{2}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2 - \{(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})\}x + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 0$

বা, $x^2 - 2x + 1 - 2 = 0 \quad \therefore x^2 - 2x - 1 = 0$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - ax + b = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হওয়ায়

$\alpha + \beta = a$ এবং $\alpha\beta = b$

$\therefore\ \frac{b}{a - \alpha}$ এবং $\frac{b}{a - \beta}$ মূলদ্বয়ের যোগফল

$= \frac{b}{a - \alpha} + \frac{b}{a - \beta} = b\,\frac{a - \beta + a - \alpha}{(a - \alpha)(a - \beta)}$

$= b . \frac{2a - (\alpha + \beta)}{a^2 - (\alpha + \beta)a + \alpha\beta} = b . \frac{2a - a}{a^2 - a.a + b} = \frac{ab}{b} = a$

এবং গুণফল $= \frac{b}{a - \alpha} . \frac{b}{a - \beta}$

$= \frac{b^2}{a^2 - (\alpha + \beta)a + \alpha\beta}$

$= \frac{b^2}{a^2 - a.a + b} = b$

$\therefore\ \frac{b}{a - \alpha}$ এবং $\frac{b}{a - \beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ:

$x^2 - \left(\frac{b}{a - \alpha} + \frac{b}{a - \beta}\right)x + \frac{b}{a - \alpha} . \frac{b}{a - \beta} = 0$

$\therefore\ x^2 - ax + b = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ,

$x^2 - ax + b = 0$ ... ... (ii)

ধরি, (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \alpha + 1$

সুতরাং $\alpha + \alpha + 1 = a$ বা, $2\alpha + 1 = a$

বা, $2\alpha = a - 1 \qquad \therefore \alpha = \frac{a - 1}{2}$

এবং $\alpha(\alpha + 1) = b$

বা, $\alpha^2 + \alpha = b$ বা, $\left(\frac{a - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - 1}{2}\right) = b$

বা, $\frac{a^2 - 2a + 1}{4} + \frac{a - 1}{2} - b = 0$

বা, $\frac{a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 - 4b}{4} = 0$

$\therefore\ a^2 - 4b - 1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

14. **ক** প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 - 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ ....(i)

(i) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক

$D = \{-2(p + q)\}^2 - 4.2.(p^2 + q^2)$

$= 4(p + q)^2 - 8(p^2 + q^2)$

$= 4(p^2 + 2pq + q^2) - 8p^2 - 8q^2$

$= 4p^2 + 8pq + 4q^2 - 8p^2 - 8q^2$

$= -4p^2 + 8pq - 4q^2$

$= -4(p^2 - 2pq + q^2) = -4(p - q)^2$

$p \neq q$ হওয়ায় $(p - q)^2 > 0$ এবং নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হবে।

সুতরাং উক্ত সমীকরণের মূলগুলো জটিল হবে।

খ প্রদত্ত সমীকরণ, $px^2 + qx + r = 0$

বা, $x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p} = 0$

বা, $x^2 - \left(-\frac{q}{p}\right)x + \frac{r}{p} = 0$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হওয়ায়

$\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$

$\alpha\beta = \frac{r}{p}$

দেওয়া আছে, $\alpha - \beta = 1$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

বা, $\left(-\frac{q}{p}\right)^2-4.\frac{r}{p}=1$

বা, $\frac{q^2}{p^2}-\frac{4r}{p}=1$

বা, $q^2-4rp=p^2$

$\therefore$ $p^2-q^2+4rp=0$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $px^2+qx+r=0$

বা, $x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}=0$

বা, $x^2-\left(-\frac{q}{p}\right)x+\frac{r}{p}=0$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, α^2 হওয়ায়

$\alpha+\alpha^2=-\frac{q}{p}$ .... (ii)

এবং $\alpha.\alpha^2=\frac{r}{p}$ বা, $\alpha^3=\frac{r}{p}$ .... (iii)

বামপক্ষ $=\left(\frac{p-q}{r-q}\right)^3$

$=\left(\frac{1-\frac{q}{p}}{\frac{r}{p}-\frac{q}{p}}\right)^3$ [লব ও হরকে p দ্বারা ভাগ করে]

$=\left(\frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^3+\alpha+\alpha^2}\right)^3$ (ii) ও (iii) হতে]

$=\left\{\frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha(1+\alpha+\alpha^2)}\right\}^3=\frac{1}{\alpha^3}$

$=\frac{p}{r}$ [(iii) হতে]

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

15. ক $|z-5|=3$ বা, $|x+iy-5|=3$

বা, $|(x-5)+iy|=3$ বা, $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=3$

বা, $(x-5)^2+y^2=3^2$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র (5, 0) ও ব্যাসার্ধ 3 একক। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$

পৃথায়ক $=\{-(k+2)\}^2-4(k-1)4$

$=k^2+4k+4-16k+16$

$=k^2-12k+20$

$=k^2-10k-2k+20$

$=k(k-10)-2(k-10)$

$=(k-2)(k-10)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(k-2)(k-10)=0$

$\therefore$ $k=2$ অথবা $k=10$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k=2$ বা 10 **(Ans.)**

গ (i) সমীকরণের $n=0$ হলে $x^2+(-1)^0px+q=0$

বা, $x^2+px+q=0$.

ধরি, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β

$\therefore$ $\alpha+\beta=-p$ ... ... (i)

$\alpha\beta=q$ ... ... (ii)

এবং প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\alpha-\beta=\pm1$ ... ... (iii)

(i) এর উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই, $(\alpha+\beta)^2=p^2$

বা, $(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta=p^2$

বা, $1+4q=p^2$ [(ii) ও (iii) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $p^2+4q^2=1+4q+4q^2$

[উভয়পক্ষে $4q^2$ (একটি ধ্রুবক) যোগ করে]

$\therefore$ $p^2+4q^2=(1+2q)^2$ **(প্রমাণিত)**

16. ক $\frac{i}{4+i}=\frac{i(4-i)}{(4+i)(4-i)}$

$=\frac{4i-i^2}{16-i^2}=\frac{1+4i}{17}=\frac{1}{17}+i\frac{4}{17}$

যা $A+iB$ আকারের যেখানে $A=\frac{1}{17}$ এবং $B=\frac{4}{17}$

খ ধরি, (i) এবং (ii) নং সমীকরণের সাধারণ মূল α

$\therefore$ $\alpha^2+a\alpha+b=0$

$\alpha^2+b\alpha+a=0$

$\frac{\alpha^2}{a^2-b^2}=\frac{\alpha}{b-a}=\frac{1}{b-a}$

বা, $\frac{\alpha^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{\alpha}{-(a-b)}=\frac{1}{-(a-b)}$

বা, $\frac{\alpha^2}{a+b}=\frac{\alpha}{-1}$ বা, $\frac{\alpha}{a+b}=-1$

বা, $\alpha=-(a+b)$ .... (iii)

আবার, $\frac{\alpha}{-(a-b)}=\frac{1}{-(a-b)}$

বা, $\alpha=1$ .... (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে, $1=-(a+b)$

$\therefore$ $a+b+1=0$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, (i) এবং (ii) নং সমীকরণের অপর মূল দুইটি যথাক্রমে β এবং γ

(খ) হতে পাই, সাধারণ মূল $\alpha=1$

$\therefore$ $\alpha\beta=b$ [(i) নং সমীকরণের জন্য]

বা, $1.\beta=b$ বা, $\beta=b$

এবং $\alpha\gamma=a$ [(ii) নং সমীকরণের জন্য]

বা, $1.\gamma=a$ বা, $\gamma=a$

$\therefore$ β এবং γ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ

$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$

বা, $x^2-(a+b)x+ab=0$

(খ) হতে পাই, $a+b=-1$

$\therefore$ $x^2-(-1)x+ab=0$

বা, $x^2+x+ab=0$

$\therefore$ অপর মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $x^2+x+ab=0$ **(Ans.)**

17. ক নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি মূল $(2 + 2\sqrt{3}i)$ হলে অপর মূলটি $(2 - 2\sqrt{3}i)$;
কারণ বাস্তব সহগবিশিষ্ট জটিল মূল জোড়ায় থাকে।
নির্ণেয় সমীকরণটি,
$$x^2 - (2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i)x + (2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2^2 - (2\sqrt{3}i)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 12 = 0$$
$\therefore x^2 - 4x + 16 = 0$ **(Ans.)**

খ মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও α^2

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27}$

এবং $\alpha.\alpha^2 = \alpha^3 = \frac{-(m+2)}{27}$ ……… (i)

$\therefore \alpha + \alpha^2 = \frac{-2}{9}$ বা, $9\alpha + 9\alpha^2 = -2$

বা, $9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$

বা, $9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$

বা, $3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$

বা, $(3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

(i) নং এ $\alpha = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে,

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{(m+2)}{27}$

বা, $\frac{-8}{27} = -\frac{(m+2)}{27}$

বা, $m + 2 = 8$

বা, $m = 6$

আবার, (i) নং এ $\alpha = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{(m+2)}{27}$

বা, $\frac{-1}{27} = -\frac{(m+2)}{27}$

বা, $m + 2 = 1$

বা, $m = -1$

$\therefore$ $m = 6, -1$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m = 0$ এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α.

সুতরাং $r\alpha^2 - 2n\alpha + 4m = 0$ ……… (i)

$m\alpha^2 + n\alpha + r = 0$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে,
$$\frac{\alpha^2}{-2nr - 4mn} = \frac{\alpha}{4m^2 - r^2} = \frac{1}{nr + 2mn}$$

এখানে, $\frac{\alpha}{4m^2 - r^2} = \frac{1}{nr + 2mn}$ $\therefore \alpha = \frac{4m^2 - r^2}{n(2m + r)}$

আবার, $\frac{\alpha^2}{-2nr - 4mn} = \frac{\alpha}{4m^2 - r^2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-2n(2m + r)}{4m^2 - r^2}$

$\Rightarrow \frac{4m^2 - r^2}{n(2m + r)} = \frac{-2n(2m + r)}{4m^2 - r^2}$

$\Rightarrow (4m^2 - r^2)^2 = -2n^2(2m + r)^2$

$\Rightarrow (2m + r)^2(2m - r)^2 + 2n^2(2m + r)^2 = 0$

$\therefore (2m + r)^2\{(2m - r)^2 + 2n^2\} = 0$

হয়, $(2m + r)^2 = 0$

$\therefore 2m + r = 0$ অথবা, $(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ **(প্রমাণিত)**

18. ক দেওয়া আছে, $(m - 1)x^2 - (m + 2)x + 4 = 0$

পৃথায়ক $= \{-(m + 2)\}^2 - 4(m - 1)4$
$= m^2 + 4m + 4 - 16m + 16$
$= m^2 - 12m + 20 = m^2 - 10m - 2m + 20$
$= m(m - 10) - 2(m - 10) = (m - 2)(m - 10)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে যদি পৃথায়ক শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(m - 2)(m - 10) = 0$ হয়,

$\therefore m = 2$ অথবা $m = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = 2$ বা 10

খ দেওয়া আছে, $f(x) = px^2 + qx + r$

প্রশ্নমতে, $f(x) = 0$

$\therefore px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β.

যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-q}{p}$ এবং গুণফল, $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

আবার, $rx^2 + 4qx + 16p = 0$

বা, $\frac{r}{p}x^2 - 4\left(\frac{-q}{p}\right)x + \frac{16p}{p} = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - 4(\alpha + \beta)x + 16 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - 4\alpha x - 4\beta x + 16 = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - 4) - 4(\beta x - 4) = 0$

$\therefore (\alpha x - 4)(\beta x - 4) = 0$

হয়, $\alpha x - 4 = 0$ অথবা, $\beta x - 4 = 0$

বা, $\alpha x = 4$ $\therefore x = \frac{4}{\alpha}$ বা, $\beta x = 4$ $\therefore x = \frac{4}{\beta}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয় $\frac{4}{\alpha}$ এবং $\frac{4}{\beta}$

গ $f(x) = 0$ $\therefore px^2 + qx + r = 0$ …… (i)

এবং $g(x) = 0$ $\therefore rx^2 + qx + p = 0$ …… (ii)

ধরি, (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α।

$\therefore p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$ …… (iii)

এবং $r\alpha^2 + q\alpha + p = 0$ …… (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে,
$$\frac{\alpha^2}{pq - qr} = \frac{\alpha}{r^2 - p^2} = \frac{1}{pq - qr}$$

$\therefore$ $\frac{\alpha^2}{-q(r - p)} = \frac{\alpha}{(r + p)(r - p)}$

বা, $\frac{\alpha}{-q} = \frac{1}{r + p}$ $\therefore \alpha = \frac{-q}{r + p}$ …… (v)

আবার, $\frac{\alpha}{r^2-p^2}=\frac{1}{pq-qr}$

বা, $\frac{\alpha}{(r+p)(r-p)}=\frac{1}{-q(r-p)}$

বা, $\frac{\alpha}{r+p}=\frac{-1}{q}$

বা, $\alpha=\frac{-(r+p)}{q}$ [(v) নং হতে]

বা, $\frac{-q}{r+p}=\frac{-(r+p)}{q}$

বা, $(p+r)^2=q^2$

$\therefore$ $p+r=\pm q$ ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

19. ক দেওয়া আছে, $P(x)=mx^3+nx^2+qx+r$

$m=0, n=q=r=1$ এবং $P(x)=0$ হলে,

$0=0.x^3+1.x^2+1.x+1$ বা, $x^2+x+1=0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক $=1^2-4.1.1=1-4=-3<0$

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় জটিল এবং অসমান। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P(x)=mx^3+nx^2+qx+r$

$P(x)=0$ হলে, $mx^3+nx^2+qx+r=0$

সমীকরণটির মূলগুলো α, β ও γ হলে,

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-n}{m}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{q}{m}$ এবং $\alpha\beta\gamma=\frac{-r}{m}$

এখন, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=\frac{-n}{m}\left\{\left(\frac{-n}{m}\right)^2-3.\frac{q}{m}\right\}+3.\frac{-r}{m}$

$\therefore \Sigma\alpha^3=-\frac{n^3}{m^3}+\frac{3nq}{m^2}-\frac{3r}{m}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P(x)=mx^3+nx^2+qx+r$

দেওয়া আছে, $P(x)=0$, $m=0$, $n=2$, $q=1$, $r=-1$

$\therefore 0=2x^2+x-1$

বা, $2x^2+x-1=0$

ধরি, সমীকরণটির মূলদ্বয় a ও b

তাহলে, $a+b=\frac{-1}{2}, ab=-\frac{1}{2}$

এখন, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\times\frac{-1}{2}$

$=\frac{1}{4}+2=\frac{1+8}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore a-b=\pm\frac{3}{2}$

শর্তানুসারে, $|a-b|=\frac{3}{2}$

$(a+b)$ ও $|a-b|$ মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণ,

$x^2-\{(a+b)+(|a-b|)\}x+(a+b)(|a-b|)=0$

বা, $x^2-\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}=0$

বা, $x^2-x-\frac{3}{4}=0$ $\therefore 4x^2-4x-3=0$ **(Ans.)**

20. ক দেওয়া আছে, $z=-2+2i$

$(-2, 2)$ বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হওয়ায়,

মূখ্য আর্গুমেন্ট $=\pi-\tan^{-1}(1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=x^3+2x^2+x+3$

আবার, $f(x)=0$

$\therefore x^3+2x^2+x+3=0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β, γ হলে, ত্রিঘাত সমীকরণের মূলের সম্পর্ক হতে পাই,

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-2}{1}=-2, \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{1}=1$

এবং $\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{1}=-3$

এখন, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha-3\alpha\beta-3\beta\gamma-3\gamma\alpha)$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3(-3)=(-2)\{(-2)^2-3.1\}$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+9=-2\{4-3\}$

বা, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-2-9$

$\therefore \Sigma\alpha^3=-11$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $z=-2+2i$

$\therefore \overline{z}=-2-2i$

আবার, $\overline{z}=(a^2+2)+ib$

$\therefore -2-2i=(a^2+2)+ib$ ... ... (i)

(i) এর উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক রাশি সমীকৃত করে পাই,

$a^2+2=-2$ এবং $b=-2$

বা, $a^2=-4$ $\therefore a=\pm 2i$

$\therefore$ a এর মান জটিল ও b এর মান বাস্তব। **(Ans.)**

21. ক $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ ... ... (i)

নিশ্চায়ক $= (-2m)^2 - 4.1.(8m - 15) = 4m^2 - 32m + 60$

$= 4(m^2 - 8m + 15) = 4(m^2 - 5m - 3m + 15)$

$= 4\{m(m-5) - 3(m-5)\} = 4(m-5)(m-3)$

যেহেতু (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান।

সুতরাং, $4(m-5)(m-3) = 0 \Rightarrow (m-3)(m-5) = 0$

$\therefore m = 3$ অথবা 5 **(Ans.)**

খ $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় u ও v।

যোগফল, $u + v = -p$ এবং গুণফল, $uv = q$

অপর সমীকরণ, $qx^2 + px + 1 = 0$

$\Rightarrow uvx^2 - (u+v)x + 1 = 0$

$\Rightarrow uvx^2 - ux - vx + 1 = 0$

$\Rightarrow ux(vx - 1) - 1(vx - 1) = 0$

$\therefore (ux - 1)(vx - 1) = 0$

হয়, $ux - 1 = 0$ অথবা, $vx - 1 = 0$

$\Rightarrow ux = 1 \qquad \Rightarrow vx = 1$

$\therefore x = \frac{1}{u} \qquad \therefore x = \frac{1}{v}$

$\therefore qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$

(দেখানো হলো)

গ $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2 - i$ যা একটি জটিল সংখ্যা। কিন্তু, জটিল মূল জোড়ায় থাকে। সুতরাং এর দ্বিতীয় মূলটি $2 + i$।

ধরি, তৃতীয় মূলটি α।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হতে পাই, $2 + i + 2 - i + \alpha = \frac{9}{2}$

বা, $4 + \alpha = \frac{9}{2}$ বা, $\alpha = \frac{9}{2} - 4 = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ মূলত্রয় যথাক্রমে $2 \pm i, \frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির বাস্তব মূল $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{8x^2 - 6x + 1}{8} = 0$

$\therefore 8x^2 - 6x + 1 = 0$ **(Ans.)**

22. ক দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

এখানে, $f(x) = 0$

বা, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণটির সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac$ এর সাহায্যে (i) নং সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নিশ্চিতভাবে জানা যায়।

(i) $b^2 - 4ac > 0$ ও পূর্ণবর্গ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে।

(ii) $b^2 - 4ac < 0$ হলে, মূলদ্বয় জটিল ও অসমান হবে।

(iii) $b^2 - 4ac = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

(iv) $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ না হলে, মূলদ্বয় বাস্তব, অমূলদ ও অসমান হবে।

খ দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

এখন, $f(x) = 0$ বা, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

বা, $a\alpha + a\beta = -b$

বা, $a\alpha + b = -a\beta$ ... ... (ii)

আবার, $a\beta + b = -a\alpha$ ... ... (iii)

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ .... (iv)

এখন, $(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3} = (-a\beta)^{-3} + (-a\alpha)^{-3}$

$= -\frac{1}{a^3\beta^3} - \frac{1}{a^3\alpha^3} = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\alpha^3}\right)$

$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right) = -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}\right\}$

$= -\frac{1}{a^3}\left\{\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^3 - 3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{-b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}\right\} = -\frac{1}{a^3}\frac{\left(\frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}\right)}{\frac{c^3}{a^3}}$

$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right) \times \frac{a^3}{c^3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3c^3}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 0$

বা, $ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

এবং $g(x) = 0$ বা, $cx^2 + bx + a = 0$ ... ... (ii)

মনে করি, (ii) নং সমীকরণের একটি মূল α

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের একটি মূল 2α

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ ... (iii)

এবং (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$a(2\alpha)^2 + b(2\alpha) + c = 0$

বা, $4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ ... ... (iv)

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ এ বজ্রগুণন পদ্ধতি ব্যবহার করে পাই, $\frac{\alpha^2}{bc - 2ab} = \frac{\alpha}{4a^2 - c^2} = \frac{1}{2bc - 4ab}$

এখন, $\alpha^2 = \frac{bc - 2ab}{2bc - 4ab}$

বা, $\alpha^2 = \frac{(bc - 2ab)}{2(bc - 2ab)}$ $\therefore \alpha^2 = \frac{1}{2}$

আবার, $\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}$

বা, $\alpha^2 = \left(\frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{1}{2} = \left\{\frac{(2a)^2 - c^2}{2b(c - 2a)}\right\}^2$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{(2a + c)^2 (2a - c)^2}{4b^2 \{-(2a - c)\}^2}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{(2a + c)^2 (2a - c)^2}{4b^2(2a - c)^2}$

বা, $2b^2 (2a - c)^2 = (2a + c)^2 (2a - c)^2$

বা, $2b^2 (2a - c)^2 - (2a + c)^2 (2a - c)^2 = 0$

বা, $(2a - c)^2 \{2b^2 - (2a + c)^2\} = 0$

$\therefore$ $(2a - c)^2 = 0$ অথবা, $2b^2 - (2a + c)^2 = 0$

বা, $2a - c = 0$ $\therefore$ $2b^2 = (2a + c)^2$

$\therefore$ $2a = c$

সুতরাং, $2a = c$ অথবা $2b^2 = (2a + c)^2$ **(দেখানো হলো)**

23. **ক** আমরা জানি, এককের কাল্পনিক মূলদ্বয়

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ এবং $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

অর্থাৎ $2\omega = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2\omega^2 = -1 - \sqrt{-3}$

$\therefore$ $(-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7 = (2\omega)^7 + (2\omega^2)^7$
$= 2^7\omega^7 + 2^7\omega^{14} = 128(\omega^7 + \omega^{14})$
$= 128(\omega + \omega^2) = 128 \times (-1) = -128$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = 2 + 4i - i^2 = 2 + 4i - (-1)$
$= 2 + 4i + 1 = 3 + 4i$

$\overline{z}$, z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

$\therefore$ $\overline{z} = 3 - 4i$

$\overline{z}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{3 - 4i}$

ধরি, $\sqrt{3 - 4i} = x + iy$ ... ... (i)

বা, $3 - 4i = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2y^2$

$\therefore$ $3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xiy$

উভয় পক্ষের বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $x^2 - y^2 = 3$ ... ... (ii)

এবং $2xy = -4$

এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$
$= (3)^2 + (2xy)^2$
$= 9 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = \pm 5$

কিন্তু $x^2 + y^2 \neq -5$ কারণ দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফল ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ $x^2 + y^2 = 5$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2x^2 = 8$ বা, $x^2 = 4$ $\therefore x = \pm 2$

x এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$4 - y^2 = 3$ বা, $y^2 = 1$ $\therefore$ $y = \pm 1$

x ও y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $\pm 2 \pm i$

$\therefore$ বর্গমূলের মডুলাস $= \sqrt{(\pm 2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{5}$

$\therefore$ $\overline{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$

গ প্রদত্ত সমীকরণ, $px^2 + qx + r = 0$

দেওয়া আছে, মূলদ্বয় α, β

$\therefore$ $\alpha + \beta = \frac{-q}{p}$ এবং $\alpha\beta = \frac{r}{p}$

$\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)x + \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{4}{\alpha\beta} = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{-\frac{q}{p}}{\frac{r}{p}}\right)x + \frac{4}{\frac{r}{p}} = 0$

বা, $x^2 + \frac{2q}{r}x + 4 \times \frac{p}{r} = 0$

$\therefore$ $rx^2 + 2qx + 4p = 0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ **(Ans.)**

24. **ক** $2x^2 + 5x - 9 = 0$

বা, $16x^2 + 40x - 72 = 0$ [8 দ্বারা গুণ করে পাই]

বা, $16x^2 + 40x + 25 - 97 = 0$

বা, $(4x + 5)^2 - (\sqrt{97})^2 = 0$

বা, $(4x + 5 + \sqrt{97})(4x + 5 - \sqrt{97}) = 0$

হয়, $4x + 5 + \sqrt{97} = 0$ অথবা, $4x + 5 - \sqrt{97} = 0$

বা, $4x = -5 - \sqrt{97}$ বা, $4x = -5 + \sqrt{97}$

$\therefore$ $x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{4}$ $\therefore$ $x = \frac{-5 + \sqrt{97}}{4}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $mx^2 + nx + l = 0$
$lx^2 + nx + m = 0$

মনে করি, α সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল।

$\therefore$ $m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$ ... ... (i)

এবং $l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$

(–) করে, $\alpha^2(m - l) + l - m = 0$

বা, $\alpha^2(m - l) - (m - l) = 0$

বা, $(m - l)(\alpha^2 - 1) = 0$

কিন্তু $m - l \neq 0$ [সমীকরণদ্বয় একই হবে $m = l$ হলে]

$\therefore$ $\alpha^2 - 1 = 0$ বা, $\alpha = \pm 1$

এখন, (i) নং হতে পাই,

$m(\pm 1)^2 + n(\pm 1) + l = 0$

বা, $m \pm n + l = 0$

$\therefore$ $m + l = \pm n$ **(দেখানো হলো)**

গ $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = \frac{-n}{m}$

$\alpha\beta = \frac{l}{m}$

এখন, $ml(x^2+1) - (n^2 - 2ml)x = 0$

বা, $\frac{ml(x^2+1)}{m^2} - \frac{1}{m^2}(n^2 - 2ml)x = 0$ [m^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{l}{m}(x^2+1) - \left(\frac{n^2}{m^2} - 2\frac{l}{m}\right)x = 0$

বা, $\frac{l}{m}(x^2+1) - \left\{\left(\frac{-n}{m}\right)^2 - 2\frac{l}{m}\right\}x = 0$

বা, $\alpha\beta(x^2+1) - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + \alpha\beta - \alpha^2 x - \beta^2 x = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x + \alpha\beta - \beta^2 x = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0$

$\therefore$ $\beta x - \alpha = 0$ অথবা, $\alpha x - \beta = 0$

বা, $x = \frac{\alpha}{\beta}$ বা, $x = \frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ **(Ans.)**

25. **ক** আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$.

$\therefore x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4.1.c$
$= b^2 - 4c$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = -b$

এবং $\alpha\beta = c$

এখন, $c(x^2+1) - (b^2 - 2c)x = 0$

বা, $cx^2 - (b^2 - 2c)x + c = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$

$\therefore$ $x = \frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

$\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$ **(Ans.)**

গ $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = -b$

এবং $\alpha\beta = c$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

$= -b + \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = -b + \frac{-b}{c} = \frac{-bc - b}{c}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = c + 2 + \frac{1}{c}$

$= \frac{c^2 + 2c + 1}{c} = \frac{(c+1)^2}{c}$

$\therefore$ $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)$ ও $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ,

$x^2 - \frac{-bc - b}{c}x + \frac{(c+1)^2}{c} = 0$

$\therefore$ $cx^2 + b(c+1)x + (c+1)^2 = 0$ **(Ans.)**

26. **ক** $x + iy$ এর জটিল অনুবন্ধী $x - iy$

$\therefore x - iy = \sqrt{\frac{p - iq}{r - is}}$

$\therefore (x + iy)(x - iy) = \sqrt{\frac{p + iq}{r + is}} \cdot \sqrt{\frac{p - iq}{r - is}}$

বা, $x^2 - i^2y^2 = \sqrt{\frac{(p + iq)(p - iq)}{(r + is)(r - is)}}$

বা, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2 - i^2q^2}{r^2 - i^2s^2}}$ [$\because i^2 = -1$]

বা, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}}$

$\therefore (x^2 + y^2)^2 = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}$ **(দেখানো হলো)**

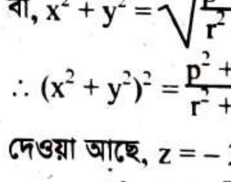
খ দেওয়া আছে, $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

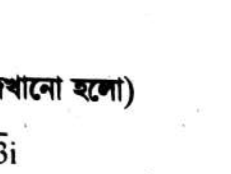
$= 1^2 - 2.1.\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2$

$= (1 - \sqrt{3}i)^2$

$\therefore \sqrt{z} = \pm(1 - \sqrt{3}i)$

ধরি, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$





$\therefore \arg z_1 = -\theta$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$= -\frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore \arg z_2 = \pi - \theta'$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, একটি মূল z

$\therefore$ অপর একটি মূল হবে $\bar{z} = -2 + 2\sqrt{3}i$

ধরি, তৃতীয় মূল = t

প্রশ্নমতে, $z\bar{z}t = 80$

বা, $(-2 - 2\sqrt{3}i).(-2 + 2\sqrt{3}i).t = 80$

বা, $\{(-2)^2 - (2\sqrt{3}i)^2\}.t = 80$

বা, $(4 - 4.3i^2).t = 80$

বা, $(4 + 12).t = 80$

বা, $t = \frac{80}{16} = 5$

এখন, $z + \bar{z} + t = -2 - 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 5$
$= 5 - 4 = 1$

$z\bar{z} + \bar{z}t + tz$
$= (-2 - 2\sqrt{3}i)(-2 + 2\sqrt{3}i) + (-2 + 2\sqrt{3}i).5 + 5(-2 - 2\sqrt{3}i)$
$= (4 - 4.3i^2) + 10\sqrt{3}i - 10 - 10 - 10\sqrt{3}i$
$= 16 - 20$
$= -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি

$x^3 - (z + \bar{z} + t)x^2 + (z\bar{z} + \bar{z}t + tz)x - z\bar{z}t = 0$

বা, $x^3 - x^2 - 4x - 80 = 0$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

অনুচ্ছেদ-4.10 | পৃষ্ঠা-১৫৬

পরীক্ষণ নং 4.10.3.1(i)	Bisection method প্রয়োগ করে সমীকরণের সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: … …

সমস্যা: Bisection method প্রয়োগ করে $x^3 - x - 4 = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূলের আসন্নমান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $f(x) = x^3 - x - 4, x \in \mathbb{R}$

আমরা জানি, f(x) ফাংশন a এবং b এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং f(a) ও f(b) পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে a এবং b এর মধ্যে f(x) = 0 সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল বিদ্যমান। ধরি মূলটির আসন্ন মান $x_0 = \frac{a+b}{2}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: একটি Scientific ক্যালকুলেটার।

কার্যপদ্ধতি:

1. x-এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য f(x) এর প্রতিসঙ্গী (corresponding) মান নির্ণয় করি।
2. খুবই নিকটবর্তী দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b নির্ণয় করি যেন f(a) এবং f(b) পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।
3. a এবং b এর গড়মান থেকে মূলের আসন্নমান নির্ণয় করি।

x	f(x)	সিদ্ধান্ত
1	$f(1) = -4 < 0$	1 এবং 2 এর মধ্যে অন্তত একটি বাস্তব মূল আছে
2	$f(2) = 2 > 0$	
$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$	$f(1.5) = -2.125 < 0$	মূলটি 1.5 এবং 2 এর মধ্যে আছে।
$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$	$f(1.75) = -0.390625 < 0$	মূলটি 1.75 এবং 2 এর মধ্যে আছে।
$x_2 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$	$f(1.875) = 0.7167968 > 0$	মূলটি 1.75 এবং 1.875 এর মধ্যে অবস্থিত।
$x_3 = \frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125$	$f(1.8125) = 0.141845 > 0$	মূলটি 1.75 এবং 1.8125 এর মধ্যে অবস্থিত।
$x_4 = \frac{1.75+1.8125}{2} = 1.78125$	$f(1.78125) = -0.129608154 < 0$	মূলটি 1.78125 এবং 1.78125 এর মধ্যে অবস্থিত।
$x_5 = \frac{1.78125+1.8125}{2} = 1.796875$	$f(1.796875) = .004802704 > 0$	মূলটি 1.78125 এবং 1.796875 এর মধ্যে অবস্থিত।

ফলাফল: দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান $= \frac{1.78125 + 1.796875}{2} = 1.7890625 \approx 1.79 = 1.79$

পরীক্ষণ নং 4.10.3.1(ii)	Bisection method প্রয়োগ করে সমীকরণের সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: … …

সমস্যা: Bisection method প্রয়োগ করে $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$ এর বাস্তব মূলের আসন্ন মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6, x \in \mathbb{R}$.

আমরা জানি, f(x) ফাংশন a ও b এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং f(a) ও f(b) পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে a ও b এর মধ্যে f(x) = 0 সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল বিদ্যমান। ধরি, মূলটির আসন্ন মান, $x_0 = \frac{a+b}{2}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: একটি Scientific ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

1. x-এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য f(x) এর প্রতিসঙ্গী (corresponding) মান নির্ণয় করি।
2. খুবই নিকটবর্তী দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b নির্ণয় করি যেন f(a) এবং f(b) পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।
3. a ও b এর গড় মান থেকে মূলের আসন্ন মান নির্ণয় করি।

x	f(x)	সিদ্ধান্ত
$a = 1$	$f(1) = 2 > 0$	1 এবং 2 এর মধ্যে অন্তত একটি বাস্তব মূল আছে।
$b = 2$	$f(2) = -6 < 0$	
$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$	$f(1.5) = -1.875 < 0$	মূলটি 1 এবং 1.5 এর মধ্যে আছে।
$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$	$f(1.25) = 0.14 > 0$	মূলটি 1.5 এবং 1.25 এর মধ্যে আছে।
$x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$	$f(1.375) = -0.85 < 0$	মূলটি 1.25 এবং 1.375 এর মধ্যে আছে।
$x_3 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125$	$f(1.3125) = -0.35 < 0$	মূলটি 1.25 এবং 1.3125 এর মধ্যে আছে।
$x_4 = \frac{1.25+1.3125}{2} = 1.28125$	$f(1.28125) = -0.105 < 0$	মূলটি 1.25 এবং 1.28125 এর মধ্যে আছে।
$x_5 = \frac{1.25+1.28125}{2} = 1.265$	$f(1.265) = 0.018$	মূলটি 1.2656 এবং 1.28125 এর মধ্যে আছে।

$\therefore$ মূলের আসন্ন মান $= \frac{1.2656 + 1.28125}{2} = 1.273 = 1.27$ (দুই দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান)

ফলাফল: মূলের আসন্ন মান 1.27 (দুই দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান)

পরীক্ষণ নং 4.10.3.1(iii)	Bisection method প্রয়োগ করে সমীকরণের সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: … …

সমস্যা: Bisection method প্রয়োগ করে $x^2e^x - 17 = 0$ এর বাস্তব মূলের আসন্ন মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $f(x) = x^2e^x - 17, x \in \mathbb{R}$.

আমরা জানি, f(x) ফাংশন a ও b এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং f(a) ও f(b) পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে a ও b এর মধ্যে f(x) = 0 সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল বিদ্যমান। ধরি, মূলটির আসন্ন মান, $x_0 = \frac{a+b}{2}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: একটি Scientific ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

1. x-এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য f(x) এর প্রতিসঙ্গী (corresponding) মান নির্ণয় করি।
2. খুবই নিকটবর্তী দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b নির্ণয় করি যেন f(a) এবং f(b) পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।
3. a ও b এর গড় মান থেকে মূলের আসন্ন মান নির্ণয় করি।

x	f(x)	সিদ্ধান্ত
$a = 1$	$f(1) = -14.28 < 0$	1 এবং 2 এর মধ্যে অন্তত একটি বাস্তব মূল আছে।
$b = 2$	$f(2) = 12.56 > 0$	
$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$	$f(1.5) = -6.916 < 0$	মূলটি 1.5 এবং 2 এর মধ্যে আছে।
$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$	$f(1.75) = 0.623 > 0$	মূলটি 1.5 এবং 1.75 এর মধ্যে আছে।
$x_2 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$	$f(1.625) = -3.59 < 0$	মূলটি 1.625 এবং 1.75 এর মধ্যে আছে।
$x_3 = \frac{1.625+1.75}{2} = 1.6875$	$f(1.6875) = -1.6 < 0$	মূলটি 1.6875 এবং 1.75 এর মধ্যে আছে।
$x_4 = \frac{1.6875+1.75}{2} = 1.719$	$f(1.719) = -0.52 < 0$	মূলটি 1.719 এবং 1.75 এর মধ্যে আছে।
$x_5 = \frac{1.719+1.75}{2} = 1.7345$	$f(1.7345) = 0.046 > 0$	মূলটি 1.719 এবং 1.7345 এর মধ্যে আছে।

$\therefore$ মূলের আসন্ন মান $= \frac{1.719 + 1.7345}{2} = 1.73$ (দুই দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান)

ফলাফল: মূলের আসন্ন মান 1.73 (দুই দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান)

পরীক্ষণ নং 4.10.3.2(i)	Newton-Raphson method প্রয়োগ করে সমীকরণের মূলের আসন্ন মান নির্ণয়	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: Newton-Raphson method প্রয়োগ করে $2x^3 - 11x^2 - 10x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূলের মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব: $y = f(x)$ যদি a ও b ব্যবধির মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(a). f(b) < 0$ হয় তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল থাকে তবে Newton Raphson পদ্ধতি অনুসারে মূলটির প্রারম্ভিক অনুমিত মূলের মান x_0 (যেখানে $f'(x_0) \neq 0$) মূলের প্রথম আসন্ন মান $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, দ্বিতীয় আসন্ন মান $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$,

সাধারণভাবে $(n + 1)$ তম আসন্ন মান, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

(i) মনে করি, $f(x) = 2x^3 - 11x^2 - 10x - 1$

(ii) $f(x)$ ফাংশনটিকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f'(x)$ নির্ণয় করি।
এখানে $f'(x) = 6x^2 - 22x - 10$

(iii) ধরি মূল সম্পর্কিত প্রারম্ভিক অনুমান, $x_0 = 1$ এখন $f'(1) = 6.1^2 - 22.1 - 10 = -26 \neq 0$

(iv) (i) নং সমীকরণে $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$ বসিয়ে ছকের মাধ্যমে $x_1, x_2, x_3, \cdots \cdots$ মূলগুলি নির্ণয় করি।
এখানে, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 - 11x_n^2 - 10x_n - 1}{6x_n^2 - 22x_n - 10}$

ফল সংকলন:

আসন্ন মান, x_{n+1}	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
১ম আসন্ন মান, x_1	$x_0 - \frac{2x_0^3 - 11x_0^2 - 10x_0 - 1}{6x_0^2 - 22x_0 - 10} = 1 - \frac{2.1^3 - 11.1^2 - 10.1 - 1}{6.1^2 - 22.1 - 10} = 0.23$
২য় আসন্ন মান, x_2	$x_1 - \frac{2x_1^3 - 11x_1^2 - 10x_1 - 1}{6x_1^2 - 22x_1 - 10} = 0.23 - \frac{2(0.23)^3 - 11(0.23)^2 - 10(0.23) - 1}{6(0.23)^2 - 22(0.23) - 10} = -0.03$
৩য় আসন্ন মান, x_3	$x_2 - \frac{2x_2^3 - 11x_2^2 - 10x_2 - 1}{6x_2^2 - 22x_2 - 10} = -0.03 - \frac{(-0.03)^3 - 11(-0.03)^2 - 10(-0.03) - 1}{6(-0.03)^2 - 22(-0.03) - 10} = -0.106$

৪র্থ আসন্ন মান, x_4	$x_3 - \frac{2x_3^3 - 11x_3^2 - 10x_3 - 1}{6x_3^2 - 22x_3 - 10} = -0.106 - \frac{2(-0.106)^3 - 11(-0.106)^2 - 10(-0.106) - 1}{6(-0.106)^2 - 22(-0.106) - 10}$ $= -0.1147$
৫ম আসন্ন মান, x_5	$x_4 - \frac{2x_4^3 - 11x_4^2 - 10x_4 - 1}{6x_4^2 - 22x_4 - 10} = -0.1147 - \frac{2(-0.1147)^3 - 11(-0.1147)^2 - 10(-0.1147) - 1}{6(0.1147)^2 - 22(-0.1147) - 10}$ $= -0.1148$

∴ নির্ণেয় মূলের আসন্ন মান, $x_4 = -0.115$ (আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত)

ফলাফল: সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি বাস্তব মূল $= -0.115$ (আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত)

পরীক্ষণ নং 4.10.3.2(ii)	Newton-Raphson method প্রয়োগ করে সমীকরণের মূলের আসন্ন মান নির্ণয়	**তারিখ:** … …

সমস্যা: Newton-Raphson method প্রয়োগ করে $x - \sin x - 2 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূলের মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব: $y = f(x)$ যদি a ও b ব্যবধির মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(a).f(b) < 0$ হয় তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল থাকে তবে

Newton Raphson পদ্ধতি অনুসারে মূলটির প্রারম্ভিক অনুমিত মূলের মান x_0 (যেখানে $f'(x_0) \neq 0$) মূলের

প্রথম আসন্ন মান $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

এবং দ্বিতীয় আসন্ন মান $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$,

সাধারণভাবে $(n + 1)$ তম আসন্ন মান, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

(i) মনে করি, $f(x) = x - \sin x - 2$

(ii) $f(x)$ ফাংশনটিকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f'(x)$ নির্ণয় করি।
এখানে $f'(x) = 1 - \cos x$

(iii) ধরি মূল সম্পর্কিত প্রারম্ভিক অনুমান, $x_0 = 2$ এখন $f'(2) = 1 - \cos(2) = 1.42 \neq 0$

(iv) (i) নং সমীকরণে $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$ বসিয়ে ছকের মাধ্যমে $x_1, x_2, x_3, \cdots \cdots$ মূলগুলি নির্ণয় করি।
এখানে, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - 2}{1 - \cos x_n}$

ফল সংকলন:

আসন্ন মান, x_{n+1}	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
১ম আসন্ন মান, x_1	$x_0 - \frac{x_0 - \sin x_0 - 2}{1 - \cos x_0} = 2 - \frac{2 - \sin 2 - 2}{1 - \cos 2} = 2.642$
২য় আসন্ন মান, x_2	$x_1 - \frac{x_1 - \sin x_1 - 2}{1 - \cos x_1} = 2.642 - \frac{2.642 - \sin(2.642) - 2}{1 - \cos(2.642)} = 2.555$
৩য় আসন্ন মান, x_3	$x_2 - \frac{x_2 - \sin x_2}{1 - \cos x_2} = 2.554 - \frac{2.555 - \sin(2.555) - 2}{1 - \cos(2.555)}$
৪র্থ আসন্ন মান, x_4	$x_3 - \frac{x_3 - \sin x_3 - 2}{1 - \cos x_3} = 2.554 - \frac{2.554 - \sin(2.554) - 2}{1 - \cos(2.554)} = 2.554$

∴ নির্ণেয় মূলের আসন্ন মান, $x_3 = 2.554$ (আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত)

ফলাফল: সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি বাস্তব মূল $= 2.554$ (আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত)

পরীক্ষণ নং 4.10.3.2(iii)	Newton-Raphson method প্রয়োগ করে সমীকরণের মূলের আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ: ... ...

সমস্যা: Newton-Raphson method প্রয়োগ করে $xe^x - 3 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূলের মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: তত্ত্ব: $y = f(x)$ যদি a ও b ব্যবধির মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(a). f(b) < 0$ হয় তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বাস্তব মূল থাকে তবে

Newton Raphson পদ্ধতি অনুসারে মূলটির প্রারম্ভিক অনুমিত মূলের মান x_0 (যেখানে $f'(x_0) \neq 0$) মূলের

প্রথম আসন্ন মান $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

এবং দ্বিতীয় আসন্ন মান $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$,

সাধারণভাবে $(n + 1)$ তম আসন্ন মান, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

(i) মনে করি, $f(x) = xe^x - 3$

(ii) $f(x)$ ফাংশনটিকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f'(x)$ নির্ণয় করি। এখানে $f'(x) = e^x + xe^x$

(iii) ধরি মূল সম্পর্কিত প্রারম্ভিক অনুমান, $x_0 = 0.5$ এখন $f'(0.5) = 01.42e^{0.5} + 0.5e^{0.5} = 2.47 \neq 0$

(iv) (i) নং সমীকরণে $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$ বসিয়ে ছকের মাধ্যমে $x_1, x_2, x_3, \cdots \cdots$ মূলগুলি নির্ণয় করি।

এখানে, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_ne^{x_n} - 3}{e^{x_n} + x_ne^{x_n}}$

ফল সংকলন:

আসন্ন মান, x_{n+1}	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
১ম আসন্ন মান, x_1	$x_0 - \frac{x_0e^{x_0} - 3}{e^{x_0} + x_0 e^{x_0}} = 0.5 - \frac{0.5e^{0.5} - 3}{e^{0.5} + 0.5e^{0.5}} = 1.38$
২য় আসন্ন মান, x_2	$x_1 - \frac{x_1e^{x_1} - 3}{e^{x_1} + x_1 e^{x_1}} = 1.38 - \frac{1.38e^{1.38} - 3}{e^{1.38} + 1.38e^{1.38}} = 1.117$
৩য় আসন্ন মান, x_3	$x_2 - \frac{x_2 e^{x_2} - 3}{e^{x_2} - x_2 e^{x_2}} = 1.117 - \frac{1.117e^{1.117} - 3}{e^{1.117} + 1.117e^{1.117}} = 1.053$
৪র্থ আসন্ন মান, x_4	$x_3 - \frac{x_3 e^{x_3} - 3}{e^{x_3} - x_3 e^{x_3}} = 1.053 - \frac{1.053e^{1.53}}{e^{1.053} + 1.053e^{1.052}} = 1.05$
৫ম আসন্ন মান, x_5	$x_4 = \frac{x_4e^{x_4} - 3}{e^{x_4} - x_4e^{x_4}} = 1.0499 - \frac{1.0499e^{1.0499}}{e^{1.0499} + 1.0499e^{1.0499}} = 1.05$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলের আসন্ন মান, $x_4 = 1.05$ (আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত)

ফলাফল: সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের একটি বাস্তব মূল = 1.05 (আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত)

পরীক্ষণ নং 4.10.3.3(i)	লৈখিক পদ্ধতিতে সমীকরণের সমাধান নির্ণয়	তারিখ: ... ...

সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে (Graphical Method) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ সমীকরণটির মূল নির্ণয় করতে হবে।

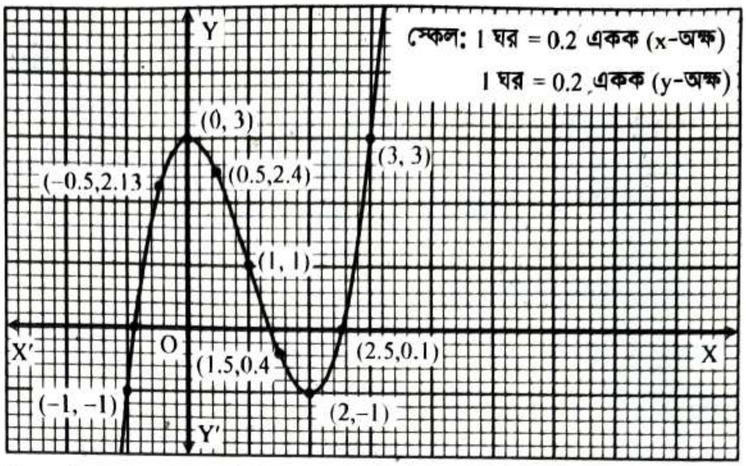
সমাধান: তত্ত্ব: মনে করি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$; $x \in \mathbb{R}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ বা, $f(x) = 0$ যেখানে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

x-অক্ষকে লেখটি যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর x স্থানাঙ্ক প্রদত্ত সমীকরণের মূল।

প্রয়োজনীয় উপকরণ:

(i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার(iv) Scientific ক্যালকুলেটর ও (v) ছক কাগজ।



কার্যপদ্ধতি:

1. x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $x^3 - 3x^2 + 3$ এর প্রতিসজ্ঞী মান নির্ণয় করি।
2. XOX' এবং YOY' কে যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ ধরি।
3. স্কেল: ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 ঘর = 1 একক ধরে বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করি।
4. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে ছক কাগজের বিন্দুগুলি যোগ করে দুইটি লেখ অঙ্কন করি।
5. লেখ দুইটি যে যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে তাদের ভুজ বা x স্থানাঙ্ক –4.4 ঘর = – 0.88, 6.75 ঘর = 1.35 এবং 12.65 ঘর = 2.53 (প্রায়) নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$x^3 - 3x^2 + 3$	−1	2.13	3	2.4	1	−0.4	−1	0.1	3

∴ নির্ণেয় মূল = −0.88, 1.35 এবং 2.53

ফলাফল: −0.88, 1.35, 2.53

পরীক্ষণ নং 4.10.3.3(ii)	লৈখিক পদ্ধতিতে সমীকরণের সমাধান নির্ণয়।	তারিখ: … … …

সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে (Graphical Method) $y = 8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0$ সমীকরণটির মূল নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মনে করি, $f(x) = 8x^3 - 20x^2 + 6x + 9$; $x \in \mathbb{R}$

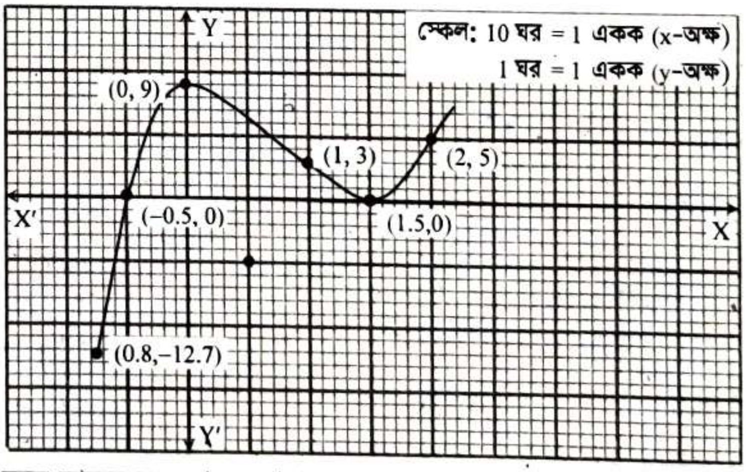
প্রদত্ত সমীকরণ, $8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0$ বা, $f(x) = 0$ যেখানে $f(x) = 8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0$

x-অক্ষকে লেখটি যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর x স্থানাঙ্ক প্রদত্ত সমীকরণের মূল।

প্রয়োজনীয় উপকরণ:

(i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর ও (v) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:



1. x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0$ এর প্রতিসজ্ঞী মান নির্ণয় করি।
2. XOX' এবং YOY' কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।
3. স্কেল: ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 ঘর = 1 একক ধরে বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করি।
4. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে ছক কাগজের বিন্দুগুলি যোগ করে লেখ অঙ্কন করি।
5. লেখটি যে যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে তাদের ভুজ বা x স্থানাঙ্ক –5 ঘর = – 0.5 এবং 15 ঘর = 1.5 (প্রায়) নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

x	−0.8	−0.5	0	1	1.5	2
$8x^3 - 20x^2 + 6x + 9$	−12.7	0	9	3	0	5

∴ নির্ণেয় মূল = −0.5, 1.5

ফলাফল: −0.5, 1.5

পরীক্ষণ নং 4.10.3.3(iii)	লৈখিক পদ্ধতিতে সমীকরণের সমাধান নির্ণয়।	তারিখ: ... ...

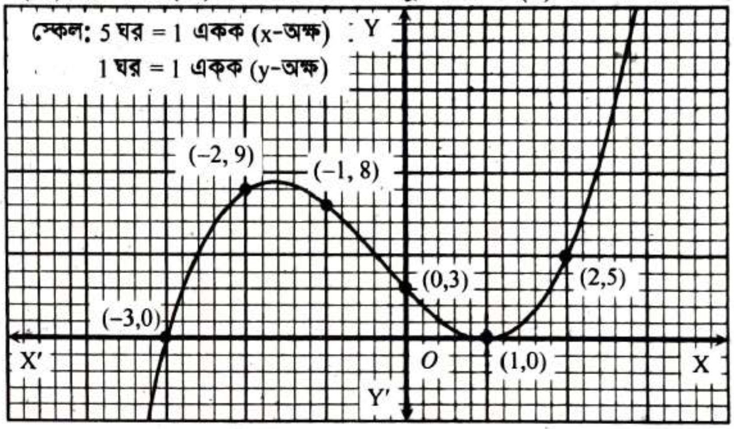
সমস্যা: লৈখিক পদ্ধতিতে (Graphical Method) $(x-1)^2(x+3)=0$ সমীকরণটির মূল নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মনে করি, $f(x)=(x-1)^2(x+3)$; $x \in \mathbb{R}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $(x-1)^2(x+3)=0$ বা, $f(x)=0$ যেখানে $f(x)=(x-1)^2(x+3)$

x-অক্ষকে লেখটি যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর x স্থানাঙ্ক প্রদত্ত সমীকরণের মূল।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর ও (v) ছক কাগজ।



কার্যপদ্ধতি:

1. x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $(x-1)^2(x+3)$ এর প্রতিসজ্ঞী মান নির্ণয় করি।
2. XOX′ এবং YOY′ কে যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ ধরি।
3. **স্কেল:** ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 ঘর = 1 একক ধরে বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করি।
4. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে ছক কাগজের বিন্দুগুলি যোগ করে দুইটি লেখ অঙ্কন করি।
5. লেখ দুইটি যে যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে তাদের ভুজ বা x স্থানাঙ্ক 15 ঘর = 3 এবং 5 ঘর = 1 (প্রায়) নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

x	−3	−2	−1	0	1	2
$(x-1)^2(x+3)$	0	9	8	3	0	5

$\therefore$ নির্ণেয় মূল = −3, 1

ফলাফল: −3, 1

▶ মৌখিক প্রশ্নের উত্তর

1. বহুপদী এক প্রকারের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে একটি অথবা একাধিক অঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক ঘাতযুক্ত চলকের পদ থাকতে পারে। বহুপদীর পদসমূহ এক বা একাধিক চলক দ্বারা গঠিত হতে পারে।
   যেমন: $f(x)=x^3+3x^2-4x+3$, $f(x, y)=x^3y+xy^3+3xy$ ইত্যাদি।
2. পরাবৃত্তাকার।
3. অপর অমূলদ সংখ্যাটি হবে $1-\sqrt{3}$ তবে এক্ষেত্রে সমীকরণটি মূলদ সহগ বিশিষ্ট হতে হবে।
4. f(a) এবং f(b) বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে (a, b) ব্যবধির মধ্যে $f(x)=0$ সমীকরণের কমপক্ষে একটি বাস্তব মূল থাকবে অথবা একাধিক মূল থাকলে মূলের সংখ্যা হবে বিজোড়।
5. f(a) এবং f(b) একই চিহ্নযুক্ত হলে (a, b) ব্যবধির মধ্যে $f(x)=0$ সমীকরণের হয় কোনো মূল থাকবে না অথবা জোড় সংখ্যক মূল থাকবে।
6. $y=f(x)$ যদি (a, b) ব্যবধির মধ্যে অবিচ্ছিন্ন এবং উক্ত ব্যবধিতে $f(x)=0$ সমীকরণের অন্তত: একটি বাস্তব মূল থাকে তবে Newton Raphson পদ্ধতি অনুসারে মূলটির প্রারম্ভিক অনুমিত মূলের মান x_0 (যেখানে $f'(x_0)\neq 0$) হলে মূলের প্রথম আসন্ন মান, $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$; দ্বিতীয় আসন্ন মান $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, ...
   $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0, 1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots\cdots$$
7. প্রারম্ভিক অনুমিত মূল x_0 হলে $f'(x_0)\neq 0$ হতে হবে।