ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্স : aij যেকোন সংখ্যা হলে,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots . a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots . a_{mn} \end{bmatrix}$$

i = 1,2,3--------------------m → সারির সংখ্যা

j = 1,2,3--------------------n → কলামের সংখ্যা

aij কে ভূক্তি বলে যার অবস্থান i তম রাশি ও j তম কলামের ছেদবিন্দুতে।

উদাহরণঃ a_{32} ভূক্তির অবস্থানঃ ৩য় সারি ও ২য় কলামের ছেদবিন্দুতে।

বিভিন্ন প্রকারের ম্যাট্রিক্স :

১. **সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix) :** একটি মাত্র সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে সারি ম্যাট্রিক্স বলে।
উদাহরণঃ $A=[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n}]$ i আকার : $1\times n$

২. **কলাম ম্যাট্রিক্স :** একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক বলে।

উদাহরণঃ $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ আকার : $m\times 1$.

৩. **বর্গ ম্যাট্রিক্স :** যে ম্যাট্রিক্স এর সারি কলামের সংখ্যা সমান। m= n

উদাহরণঃ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots . a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots . a_{mn} \end{bmatrix}$ আকারঃ $m\times m$ বা $n\times n$ এবং ক্রম (order) : n

বর্গ ম্যাট্রিক্স এর কর্ণ বরাবর $(a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{nn})$, উপাদানগুলোকে বর্ণস্থিত ভূক্তি (Diagonal entries) বলে।

৪. **ট্রেস :** কর্ণস্থিত ভূক্তিগুলোর সমষ্টিকে ঐ ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস বলে। ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস (Trace) = $(a_{11} + a_{22} + a_{33})$

৫. **কর্ণ ম্যাট্রিক্স :** যে বর্গ ম্যাট্রিক্স এর কর্ণস্থিত ভূক্তি ব্যাতিত অন্যসব ভূক্তি শূণ্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।
উদাহরণঃ

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

৬. **স্কেলার ম্যাট্রিক্স :** বর্গ ম্যাট্রিক্স এর কর্ণ বরাবর ভূক্তিগুলোর মান সমান হলে ঐ কর্ণ ম্যাট্রিক্সকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণঃ ধরি, $a_{11}= a_{22}= a_{33}= a$

$A= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ক্রম = 3

৭. **অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity Matrix) :** যে স্কেলার ম্যাট্রিক্স এর কর্ণস্থিত ভূক্তি গুলো 1 তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে। এদের $I_2, I_3,$ --------I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

৮. **শূণ্য ম্যাট্রিক্স (Zero Matrix) :** যে ম্যাট্রিক্স এর প্রতিটি উপাদান শূণ্য তাকে শূণ্য ম্যাট্রিক্স বলে।

দুটি ম্যাট্রিক্স সমান হওয়ার শর্ত :

দুটি সমান ম্যাট্রিক্স : $(a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n}$ হবে যদি $a_{ij}= b_{ij}$ হয় যেখানে $1\leq i \leq m$ এবং $1\leq j \leq m$.

উদাহরণ :- $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, p=2, q=3, r= -4, s= -1

ম্যাট্রিক্স এর যোগ : $A= (a_{ij})_{m\times n}$, $(b_{ij})_{m\times n}$ হলে $A+B = (c_{ij})_{m\times n}$ আকার : $m\times n$ যেখানে, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

উদাহরণ :- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -6 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্স এর গুণ এর শর্ত:

$A= (a_{ij})_{m\times n}$ ও $B=(b_{ij})_{n\times p}$ দুটি ম্যাট্রিক্স যাদের আকার : $m\times n$ ও $n\times p$ প্রথম ম্যাট্রিক্স এর কলামের সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স এর সারির সংখ্যার সমান হলে ম্যাট্রিক্স দুটির গুণ (AB) নির্ণয় করা সম্ভব হবে অথবা অসম্ভব। উপরোক্ত ম্যাট্রিক্স দুটিতে A এর কলামের সংখ্যা B এর সারির সংখ্যার সমান। সুতরাং AB নির্ণয় বরা যাবে এক্ষেত্রে, AB এর আকার হবে, $m\times p$.। BA নির্ণয় করা যাবে কিনা? $n\times p \rightarrow m\times n$, $p\neq m$ সুতরাং BA নির্ণয় করা যাবে না। $AB= (c_{ik})_{m\times p}$ যেখানে, $cik = a_{11} b_{ik} + a_{12}b_{2k}+$--------$+ a_{in}b_{nk}$. যখন, $1\leq i \leq m$ এবং $1\leq k \leq p$.

উদাহরণ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ AB = ?

সমাধান : A এর আবার : 2×3 = m×n, B ; ; : 3×3 = n×n. সুতরাং n = n বলে AB গুণনযোগ্য AB এর আকার হবে = m×n

B এর প্রথম কলামের ভূক্তি B-এর দ্বিতীয় কলামের ভূক্তি, B-এর তৃতীয় কলামের ভূক্তি

$AB = \begin{bmatrix} 1.1+2.1+1.0 & 1.2+2.3+1.1 & 1.7+2.3+1.1 \\ 3.1+0.1+4.0 & 3.2+0.3+4.1 & 3.7+0.3+4.1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 14 \\ 3 & 10 & 25 \end{bmatrix}$

প্রথম সারির প্রথম ভূক্তি A -এর প্রথম সারির ভূক্তির সাথে B-এর প্রথম কলামের অনুরূপ ভূক্তির সাথে গুণ হয়ে যোগ হয় । প্রথম সারির দ্বিতীয় ভূক্তি : A -এর প্রথম সারির ভূক্তির সাথে B-এর দ্বিতীয় কলামের অনুরূপ ভূক্তির সাথে গুণ হয়ে যোগ হয়।

স্কেলার গুণন:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ হলে $KA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$

উদাহরণ ঃK$\|[A]\| = 7$ হলে, $|A| = ?$

সমাধান ঃ $K|A| = K\|[A]\| \Rightarrow \begin{vmatrix} KA_x & KA_y & KA_z \\ KB_x & KB_y & KB_z \\ KC_x & KC_y & KC_z \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow K.K.K \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow |A| = \frac{7}{K^3}\ (Ans:)$

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স : কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সকে ট্রান্সপোজ করলে যদি ম্যাট্রিক্সটি অপরিবর্তীত থাকে তবে তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = A^T$

কেবল কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স ই-প্রতিসম হতে পারে। প্রধান কর্ণের সাপেক্ষে ম্যাট্রিক্সটির ভূক্তিগুলো প্রতিসম হয়।

$A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$ (i ও j এর সকল ভূক্তির জন্য)

উদাহরণ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i=j & j=i \\ i-j=0 & j-i=0 \end{matrix}$$

7,4,3 প্রধান কর্ণ যার সাপেক্ষে ভূক্তি বসানো হয়েছে এমনভাবে যাতে i=j ও j=i হয়। $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এটা কি ধরণের ম্যাট্রিক্স

বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (skew symetrix matrix) : A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার প্রধান কর্ণ বরাবর ভূক্তিগুলো (0,0,0) এবং যাকে ট্রান্সপোজ করলে ঋনাত্বক A পাওয়া যায়। অর্থাৎ $-A = A^T$, $A = (a_{ij})$ হলে $a_{ij} = -a_{ji}$

উদাহরণ : $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (Trace = 0),

জটিল প্রতিসম ম্যাট্রিক্স : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 2-i & i \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 1-i & -i \end{bmatrix}$

$AA' = B$ যেখানে B হলো অনুবন্ধী জটিল প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। $\begin{bmatrix} 4+2 & 4+2i-i+1 \\ 4-2i+i+1 & 4+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5+i \\ 5+i & 7 \end{bmatrix}$

কর্ণস্থিত উপাদানগুলো বাস্তব । $\begin{bmatrix} 6 & 5+i & i \\ 5+i & 7 & -2i \\ i & -2i & 8 \end{bmatrix}$ জটিল প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। কর্ণস্থিত ভূক্তিগুলোর সাপেক্ষে প্রতিসম।

$a_{ij} = 0$, $a_{ji} = 0$ $1 \le i \le j \le n$; $a_{i1i2}a_{i2i3}$...............$a_{iki1} = a_{i2i1}a_{i3i2}$................$a_{i1ik}$ $(i_1, i_2, \ldots\ldots i_k)$

$\begin{bmatrix} -6 & 5-i & -i \\ 5-i & -7 & 2i \\ -i & 2i & -8 \end{bmatrix}$ symetrix with digonal -6-7-8.

ভূক্তিগুলোর একটি ক্রম:1,0,1,0,6,0,120,05250,0 থেকে গঠিত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ একটি skew symetrix matrix

উদ্‌ঘাতিক ম্যাট্রিক্স : $A^n = A$, $A^k = A^{k-1}A = A.A = A$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Indempotent: $AA' = A$, $A^n = A = A^{n-1}A = A.A = A$

ব্যতিক্রমী বা Singular Matrix: যে Matrix এর মান শূন্য। যেমন: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ x এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটি Singular হবে। সমাধান:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(6-18) - 1(6x - 6x^2) + 9(6x - 2x^2) = 0$$

$$\Rightarrow -12x^2 + 48x - 36 = 0 \Rightarrow x = 1,3\ Ans.$$

অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স: যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণয়কের মান অশূন্য। $|A| \neq 0$

Type-1: ম্যাট্রিক্স এর গুণন সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB = BA = I_3$

সমাধান:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times 1 + (-4)\times 2 + 2\times 3 & 3\times 2 + (-4)5 + 2\times 7 & 3\times(-2) + (-4)\times 1(-4) + 2(-5) \\ (-2)\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 & (-2)\times 2 + 1\times 5 + 0\times 7 & (-2)\times(-2) + 1\times(-4) + 0\times(-5) \\ -1\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 3 & (-1)\times 2 + (-1)\times 5 + 1\times 7 & -1\times(-2) + (-1)(-4) + 1\times(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 3 + 2(-2) + (-2)(-1) & 1(-4) + 2\times 1 + (-2)(-1) & 1\times 2 + 2\times 0 + (-2)\times 1 \\ (-2)\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 & 2(-4) + 5\times 1 + (-4)(-1) & 2\times 2 + 5\times 0 + (-4)\times 1 \\ -1\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 3 & 3(-4) + 7\times 1 + (-5)(-1) & 3\times 2 + 7\times 0 + (-5)\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Try yourself: (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$

এবং $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে প্রমাণ কর $(AB)C = A(BC)$

Type-2: ম্যাট্রিক্স এর বর্গ ও ঘন নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $A^3 - 2A^2 + A - 2I = 5A$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 2A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -18 & -2 & -26 \\ -10 & -6 & -14 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 5A$$

Try yourself: (i) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $A^2 + 4A - 5I$ একটি 3×3 আকারে শূন্য ম্যাট্রিক্স

Ans. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে, $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $A^3 - 6A^2 + 7A - 2I = 0$ যেখানে একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স

Type-3: ব্যাবহারিক প্রয়োগ

EXAMPLE-01: একটি দোকানে ড্রেসিং টেবির, চেয়ার ও খাট বিক্রয়ের চার্ট দেয়া হল-

দ্রব্যের নাম	প্রথম দিনে বিক্রয় সংখ্যা	দ্বিতীয় দিনে বিক্রয় সংখ্যা	তৃতীয় দিনে বিক্রয় সংখ্যা	প্রতিটি দ্রব্যে লাভ (%)
ড্রেসিং টেবিল	7	12	5	টাকা 30
চেয়ার	20	25	50	টাকা 20
খাট	5	22	6	টাকা 25

ম্যাট্রিক্স গুণন দ্বারা তিন দিনে মোট লাভ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনেকরি, P ও Q যথাক্রমে বিক্রিত দ্রব্যের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভের ম্যাট্রিক্স

$P = \begin{bmatrix} 7 & 20 & 5 \\ 12 & 25 & 22 \\ 5 & 22 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

মোট লাভ, $\begin{bmatrix} 7 & 20 & 5 \\ 12 & 25 & 22 \\ 5 & 22 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7\times 30 + & 20\times 20 + & 5\times 25 \\ 12\times 30 + & 25\times 20 + & 22\times 25 \\ 5\times 30 + & 22\times 20 + & 6\times 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 735 \\ 1410 \\ 740 \end{bmatrix}$$

মোট লাভ, 735+1410+740 = 2885 টাকা।

Try your self: তিন জন ক্রেতা A, B এবং C একটি দোকান হতে

A ক্রয় করল 12 ডজন নোট বুক, 6 ডজন কলম ও 10 ডজন পেন্সিল,

B ক্রয় করল 20 ডজন নোট বুক, 10 ডজন কলম ও 15 ডজন পেন্সিল,

C ক্রয় করল 10 ডজন নোট বুক, 10 ডজন কলম ও 25 ডজন পেন্সিল,

প্রতি ডজন নোটবুক, কলম ও পেন্সিল এর মূল্য 72,458,18 টাকা হলে ম্যাট্রিক্স গুণ দ্বরা প্রত্যেকের বিল নির্ণয় কর।

Ans. A, B ও C এর বিল যথাক্রমে 1332 টাকা, 2190 টাকা ও ১650 টাকা।

Type-4: বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় ও উহার প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যাবলী

বিপরীত ম্যাট্রিক্স: কিভাবে A^{-1} নির্ণয় করব: প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1. A কে ট্রান্সপোজ করতে হবে।

$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ [কলামকে সারিতে এবং সারিকে কলামে স্থানান্তর করে]

02. A এর Adjoint ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে হবে।

03. $adj, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$

3 এর সহগুণক $= A_1 = (-1)^{1+1}(-3+4) = 1$, 2 এর সহগুণক $= A_2 = (-1)^{1+2}(-3+4) = -1$

0 এর সহগুণক $= A_3 = 0$, -3 এর সহগুণক $= B_1 = (-1)^{2+1}(2-0) = -2$

-3 এর সহগুণক $= B_2 = (-1)^{2+2}(3-0) = 3$, -1 এর সহগুণক $= B_3 = (-1)^{2+3}(12-8) = -4$

4 এর সহগুণক $= C_1 = (-1)^{3+1}(-2) = -2$, 4 এর সহগুণক $= C_2 = (-1)^{3+2}(-3-0) = 3$

1 এর সহগুণক $= C_3 = (-1)^{3+3}(-9+6) = -3$

$\therefore adj, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}}{3(-3+4)+3(2-0)+4(-2+0)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Type – 05 : বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর ব্যাবহারিক প্রয়োগ:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$,x=? y=?z=?

সমাধান: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ [কলামকে সারিতে এবং সারিকে কলামে স্থানান্তর করে]

$adj, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1-9) & -(2+3) & (6-1) \\ -(3-6) & (1+2) & -(3+3) \\ (9+2) & -(3-4) & (-1-6) \end{bmatrix} \therefore adj, A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -6 \\ 11 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -6 \\ 11 & 1 & -7 \end{bmatrix}}{1(-1-9)-2(3-6)-1(9+2)} = \frac{\begin{bmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -6 \\ 11 & 1 & -7 \end{bmatrix}}{-15}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -6 \\ 11 & 1 & -7 \end{bmatrix}}{-15} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -30 \\ -30 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore (x, y, z) \equiv (2, 2, 1)$$

Try yourself: (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$ Ans:$-\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = ?$ Ans:$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$