ভেক্টর

 # ভেক্টরের যোগের এবং স্কেলার গুনিকত গঠনের মৌলিক বিধিসমূহঃ

এখানে $\vec{a}, \ \overrightarrow{b}, \ \vec{c},$ যে কোনো ভেক্টর এবং m, n যে কোনো স্কেলার।

(1). $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (2). $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(3). এমন একটি ভেক্টর অর্থাৎ 0 ভেক্টরের অস্তিত্ব আছে যার জন্য $\vec{a} + 0 = \vec{a} = 0 + \vec{a}$

(4). প্রতিটি ভেক্টর $\vec{a}$ এর একটি অনন্য বিপরীত ভেক্টর $-\vec{a}$ রয়েছে যার জন্য $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

(5). $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$; (6). $(mn)\,\vec{a} = m(n\vec{a})$; (7) $1(\vec{a}) = \vec{a}$

(8). $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{a}$

 # ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ

$\vec{r}$ ভেক্টরকে $\vec{a}, \ \overrightarrow{b}, \ \vec{c},$ ....প্রভৃতি ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলে। যদি এরূপ কতকগুলি স্কেলার x,y,z ....পাওয়া যায় যেন, $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + \cdots$ ... ... হয়।

উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় $2\,\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ প্রভৃতি ভেক্টরগুলি $\vec{a}, \ \overrightarrow{b}, \ \vec{c},$ ভেক্টরএর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ। ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সামাবেশ গঠন ভেক্টরের যোগ বা বিয়োগ এবং স্কেলার গুণিকত গঠনের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

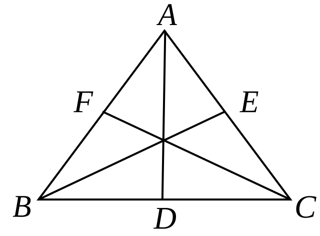
 # সমতলীয় ভেক্টর (সমবিন্দুগামী **ভেক্টর** ,ঘূর্নয়মান পাখার মত **ভেক্টর**) **ঃ**

একগুচ্ছ ভেক্টরকে সমতলীয় বলা হয় যদি তাদের ধারক রেখাগুলি একই সমতলের সমান্তরাল হয়। একতলীয় সমপ্রান্তিক ভেক্টরগুলির ধারকসমূহ একই তলে অবস্থান করে।$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\,(\vec{a} + \vec{b}) = 0$

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\,(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

PHASE-01:ভেক্টর রাশির ধর্ম সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুগুলি মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F



$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ কে $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ এবং $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ....(i) ; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.......................(ii)

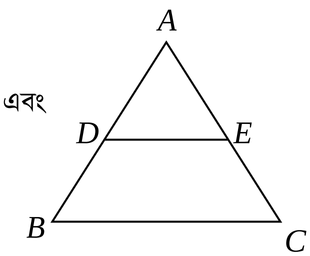
(i)ও (ii) নং যোগ করে , $2\overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ বা, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \;\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA} \therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\,; \overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{FA}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CF}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{\mathrm{FA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

EXAMPLE-02: ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করযে, ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য তা অর্ধেক।

সমাধান : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি)$= 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = 2\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ এই ভেক্টর সমতার তাৎপর্য দ্বিবিধ। (কেননা $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{AE}$ এবং $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$



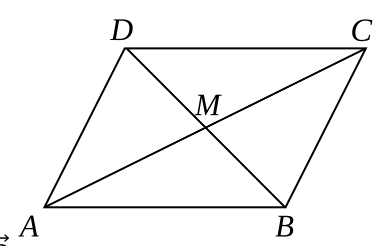
প্রথমত, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা সমান্তরাল (এক্ষেত্রে তারা অবশ্যই এক রেখা নয়) এবং

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|2\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|$ অর্থাৎ BC =2DE বা DE = $\frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)

EXAMPLE-03: ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।

সমাধান : ABCD একটি সামান্তরিক, যার কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

দেখাতে হবে AM = MC এবং BM= MD.



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী , $\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. ....(i)

এবং $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{DC}$.....................(ii)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, সুতরাং $\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ ভেক্টর দুইটির ধারক রেখা AC; সুতরাং এদের বিয়োগফল ভেক্টরের ধারক রেখাও AC.

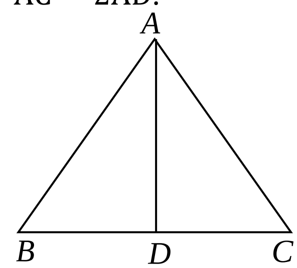
$\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{\mathrm{MD}}$ ভেক্টর দুইটির ধারক রেখা DB; সুতরাং এদর বিয়োগফল ভেক্টরের ধারক রেখাও DB.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ এবং $\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{\mathrm{MD}}$ এই দুইটির সমান ভেক্টর ধারক ভিন্ন ও পরস্পরছেদী রেখা হওয়ার সিদ্ধান্ত হয় যে ,এরা প্রত্যেকেই শূন্য ভেক্টর। কেননা দুইট অশূন্য সমান ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল রেখা হতে হবে।)

সুতরাং $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$ এবং $\left(\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{\mathrm{MD}}\right) = 0$, ফলে $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ এবং $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{\mathrm{MD}}$

অতএব, $\mathrm{AM} = \mathrm{MC}$ এবং $DM = \mathrm{MD}$, সুতরাং প্রমাণিত হলো যে, M বিন্দু উভয় কর্ণের মধ্যবিন্দু।

EXAMPLE-04: ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.



সমাধান : ABC একটি ত্রিভুজ । এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$..................(i)

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$....................(ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ....(iii)

কিন্তু D, BC মধ্যন্দিু বলে BD = CD; আবার BD ও CD একই রেখায় এবং $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ ও $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ পরস্কর বিপরীতমুখী । অতএব, $\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ সুতরাং $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (দেখানো হল

EXAMPLE-05: ABC ত্রিভজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{DC}} = 0$

সমাধান : $\overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| \cos\theta = \mathrm{DA}.\mathrm{BD}\cos\theta$,

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right| \cos(180^0 - \theta) = DA.\ DC\ \cos\theta$,

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \mathrm{DA}.\mathrm{BD}\cos\theta - DA.\ DC\cos\theta = \mathrm{DA}.\mathrm{BD}\cos\theta - \mathrm{DA}.\mathrm{BD}\cos\theta = 0$

EXAMPLE-06: দেখাও যে, রম্বসের কর্ণগুলি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

সমাধান : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 - \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 = 0$

অতএব, AC এবং BD পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ, রম্বসের কর্ণগুলি পরস্পর লম্ব। (দেখানো হল)

Try yourself :

(i)ABC একটি ত্রিভুজ ; D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু । যদি$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{c}$ এবং $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}$, হয় তবে দেখাও যে

$AD = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

(ii) ABC একটি ত্রিভুজ; BC, CA এবং AB বাহুর মধ্য বিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E ও F । $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলিকে $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর ঃ $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$, $AD = -\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$

(iii) ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC ও BD এর কর্ণ । $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর ঃ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

(iv) দেওয়া আছে যে, $-\vec{l} + 2\vec{m} = 2\vec{n}$; $5\vec{l} - 2\vec{m} = 3\vec{k}$; $\vec{l}, \vec{m}$ - কে $\vec{n}$ এবং $\vec{k}$ এর যোগাশ্রয়ী সামাবেশে প্রকাশ পায়। **উত্তর ঃ** $\vec{l} = \frac{2\vec{n}+3\vec{k}}{4}$, $\vec{m} = \frac{10\vec{n}+3\vec{k}}{8}$

(v) OQR ত্রিভুজে, $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$; PQ রেখার উপর R এমন একটি বিন্দু যেন PQ =QR । দেখাও যে, $\overrightarrow{RP} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

(vi) $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \vec{a} + \vec{b}$ OPQR কি প্রকারের চতুর্ভুজ নির্ণয় কর। উত্তর সামান্তরিক

(vii) OQR ত্রিভুজে QR, RP ও PQ বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M, ও N হলে প্রমাণ কর যে,

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = 0$$

(viii) একটি ত্রিভুজের দুইট মাধ্যমার দৈর্ঘ্য সমান হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

(ix) দেখাও যে একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু গুলি হতে সমদূরর্তী।

(x) দেখাও যে, একটি ট্রাপিজিযামের অসমান্রাল বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল এবং তাদের যোগফলের অর্ধেক।

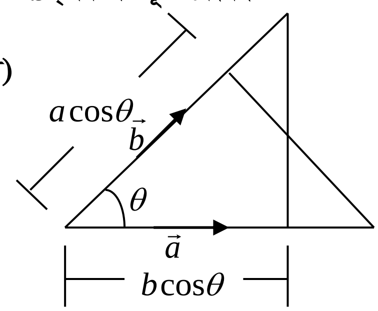
(xi) দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

PHASE-02: ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুনণ সম্পর্কিক সমস্যাবলী

প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ ঃ স্কেলার গুনণ ও এর বিধি ঃ

(i) স্কেলার গুনণ, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta$; $0^0 \leq \theta \leq 180^0$ যেখানে θ হলো $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর অন্তর্ভূক্ত কোণ।

$= |\vec{a}|.$($\vec{a}$ এর উপর $\vec{b}$ এর অভিক্ষেপ) $= |\vec{b}|.$($\vec{b}$ এর উপর $\vec{a}$ এর অভিক্ষেপ)



$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর অন্তর্ভূক্ত কোণ, $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

$\vec{a}$ এর দিক বরাবর একক ভেক্টর ,$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$; $\vec{a}$ এর সমান্তরালেএকক ভেক্টর ,$\hat{a} = \pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

উপাংশ ঃ $\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ একটি ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য হচ্ছে b ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং দিক হচ্ছে $\vec{a}$ এর দিক।

$\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য $=|\vec{b}|\cos\theta$, যেখানে θ হচ্ছে, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ।

$\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য

$=|\vec{b}|\cos\theta, = |\vec{b}|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|b|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.\vec{b} = \hat{a}.\vec{b}$

যেখানে $\hat{a}$, $\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একটি একক ভেক্টর। সুতরাং $\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ $=(\hat{a}.\vec{b})\hat{a}$

(ii) স্কেলার গুণজের চিহ্ন ঃ θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\cos\theta > 0$ এবং $\vec{a}.\vec{b} > 0$,

θ সমকোণ হলে, $\cos\theta = 0$ এবং $\vec{a}.\vec{b} = 0$;

θ স্থূলকোণ হলে, $\cos\theta < 0$ এবং $\vec{a}.\vec{b} < 0$

শর্ত ঃ দুইট ভেক্টরের স্কেলার গুণজ 0 হলে, দুইট ভেক্টরের অন্তত একটি শূন্য হবে অথবা ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে।

(iii) স্কেলার গুণজের ধর্ম ঃ

(a) স্কেলার গুণন বিনিময়যোগ্য অর্থাৎ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ স্কেলার গুণনের সংজ্ঞা থেকেই এটা অনুধাবনযোগ্য ।

(b) $\vec{a}.(-\vec{b}) = -(\vec{a}.\ \vec{b})$ এবং $(-\vec{a}).(-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{b}$, যে কোনো দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর জন্য ।

(c) m, n দুইটি স্কেলার এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টর হলে, $m\vec{a}.n\vec{b} = mn(\vec{a}.\vec{b})$

(d) $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$, যে কোনো তিনটি ভেক্টর- এর জন্য $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ অর্থাৎ, স্কেলার গুণন বণ্টন বিধি মেনে চলে।

(iv) উপাংশের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের স্কেলার **গুণনঃ**

মনে করি, $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = b_1\ \hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$

$|\vec{a}|^2 = \vec{a}.\vec{a} = \left(a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}\right).\left(a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}\right) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\therefore |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ **,** $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোন θ হলে,

$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$,

ভেক্টর গুনণ ও এর বিধি ঃ

(i) ভেক্টর গুনণ, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\theta.\hat{\eta}\ ; 0^0 \leq \theta \leq 180^0$

যেখানে θ হলো $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ্এর অন্তর্ভূক্ত কোণ ।যেখানে $\hat{\eta}$ হলো $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ যে তলে সেই তলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর।

$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\theta} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ **শর্তঃ(a)$\theta = 90^o$ হলে, $\hat{\eta} = \pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ $(b)\theta = 0^o$ হলে, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হয়।** অর্থাৎ, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

(c) $\theta = 180^o$ হলে, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল ও পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়। অর্থাৎ, $\vec{b} \times \vec{a} = 0$

(d) দুইটি অশূন্য ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\underline{a} \times \underline{b} = 0$. অন্যভাবে , $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

(ii) ভেক্টর গুণজের ধর্ম ঃ

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ **, বা** $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$ অর্থাৎ, ভেক্টর গুণন বণ্টন বিধি মেনে চলে।

(b) m, n দুইটি স্কেলার এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টর হলে, $m\vec{a} \times n\vec{b} = mn(\vec{a} \times \vec{b})$

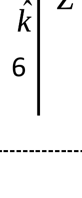
(c) $\vec{a}, \vec{b}\ \vec{c}$, যে কোনো তিনটি ভেক্টর- এর জন্য $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

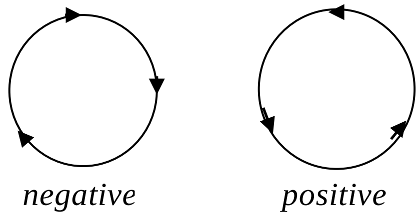
ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতিঃ

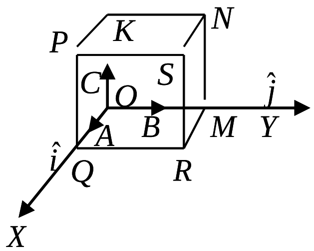
অতএব, $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ এখানে $\vec{r}$ ভেক্টরকে তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ হিসেবে প্রকাশ করা হয়েছে যেন, (x,y,z), OX, OY, OZ-অক্ষরেখাগুলির সাপেক্ষে P বিন্দুর আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক।

দ্রষ্টব্যঃ $\hat{\imath}.\hat{\imath} = 1$, $\hat{\jmath}.\hat{\jmath} = 1$, $\hat{k}.\hat{k} = 1$, $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{\imath} = 0$, $\hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\jmath} = 0$ এবং $\hat{k}.\hat{\imath} = \hat{\imath}.\hat{k} = 0$

$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$ এবং $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{k} \times \hat{\imath}$, $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$

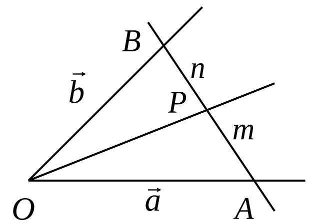






বিভক্তিকরণ সূত্রঃ

মনে করি, O মূলবিন্দু এবং $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ যথাক্রমে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর সেখানে $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

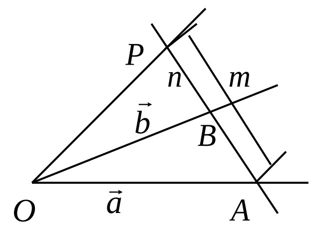


P বিন্দু AB -কে এমন ভাবে অন্তর্বিভক্ত করে যেন, $\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$..................(i)

(i) হতে পাই , n.AP = m. BP $\therefore$ n. $\overrightarrow{AP} = m.\overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{PB}$ ভেক্টর দুইটিকে তাদের আদি ও প্রান্ত বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টরে প্রকাশ কররে।

$n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$ অথবা $(m+n)\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}$



$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ →অন্তঃস্থভাবে বিভক্তির ক্ষেত্রে

$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n} = \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ →বহিস্থঃভাবে বিভক্তির ক্ষেত্রে

দ্রষ্টব্য ঃ A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ হলে AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

সরলরেখার ভেক্টর সমীকরন ঃ

$\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + \lambda\underline{b}$ যেখানে λ একটি প্যারামিটার।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, ও $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ সমীকরন হতে পাওয়া যায় $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} + t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$\Rightarrow (x-a_1)\hat{i} + (y-a_2)\hat{j} + (z-a_3)\hat{k} = t(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$.

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $(x-a_1) = tb_1, (y-a_2) = tb_2, (z-a_3) = tb_3$

$\Rightarrow \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3} = t$ অর্থাৎ, সরলরেখার ভেক্টর সমীরকণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ এর কার্তেলীয় সমীকরনণ

$\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3} (= t)$, অনরূপভাবে, মূলবিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সামান্তরাল $\underline{r} = t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x}{b_1} = \frac{y}{b_2} = \frac{z}{b_3} (= t)$

নোট: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{4}$ এর ভেক্টর সমীকরন $\underline{r}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}+t(2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+4\hat{k})$

(ii) A($\underline{a}$) ও B($\underline{b}$) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরন $\underline{r}=\underline{a}+t\underline{b}$ অর্থাৎ, $\underline{r}=\underline{a}+(\underline{b}-\underline{a})+t\underline{b}$

মনে করি, O মূলবিন্দু এবং A, B ও AB এর উপর যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}=\underline{a}, \overrightarrow{OB}=\underline{b}$ ও $\overrightarrow{OP}=\underline{r}$ ।

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\underline{b}-\underline{a}\ \ \therefore \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}=t(\ \underline{b}-\underline{a}\ )$; [P, AB এর উপর অবস্থিত ।]

এখন , $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\ \therefore \underline{r}=\underline{a}+t(\ \underline{b}-\underline{a}\ )=(1-t)\underline{a}+t$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\underline{a}\ (a_1+a_2+a_3)$ ও $\underline{b}\ (b_1+b_2+b_3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীরকণ $\underline{r}=\underline{a}+t(\ \underline{b}-\underline{a}\ )$

এর কার্তেসীয় সমীরকণ $=\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}=\frac{z-a_3}{b_3-a_3}$

* দুইটি ভেক্টরের গুণন বা ক্রস গুণনঃ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটির ভেক্টর গুণনকে $\underline{a}\times\underline{b}=|\underline{a}|\ |\underline{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় , যেখানে θ হচ্ছে $\underline{a}$ ভেক্টর হতে $\underline{b}$ ভেক্টরের দিকে একটি ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণনে যে ক্ষুদ্রতর কোণ উৎপন্ন হয় তা এবং $\hat{n}$ হচ্ছে একটি একক ভেক্টর যা $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটির ভেক্টর সমতলের উপর লম্ব । $\hat{n}$ এর দিক $\underline{a}$ ভেক্টর হতে $\underline{b}$ ভেক্টরের দিকে ঘূর্ণায়নমান একটি ডানহাতি স্ক্রুর অগ্রসর হওয়ার দিক। $\therefore\ \hat{n}$ এর দিক অর্থাৎ $\underline{a}\times\underline{b}$ এর দিক $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির সমতলের উপরের দিক যখন একটি ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে হয় অর্থাৎ θ ধনাত্মক হয়; অথাব নিচের দিকে যখন ডানহাতি স্ক্রুর ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের দিকে হয় অর্থাৎ θ ধনাত্মক হয়।

মনে করি, OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA}=\underline{a}, \overrightarrow{OB}=\underline{b}$ এবং $< AOB\ =\theta$, B হতে OA এর উপর লম্ব l ।

$\therefore \underline{a}\times\underline{b}=|\underline{a}|\ |\underline{b}|\sin\theta\,\hat{n}=a(b\sin\theta\,)\hat{n}=al\,\hat{n}$, $[\sin\theta=\frac{1}{OB}\Rightarrow l=OB\sin\theta=\mathrm{b}\sin]$

$=\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরের সমতলের উপরে লম্ব দিকে OACB সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল $|\underline{a}\ \times\ \underline{b}|$ ।

OACB সামান্তরিকের দুটি কর্ণ $\overrightarrow{OC}=\underline{a}$ ও $\overrightarrow{AB}=\underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল $|\underline{a}\ \times\ \underline{b}|$

অতএব, OAB ত্রিভুজের $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হলে তার ক্ষেত্রফল ঃ $\frac{1}{2}|\underline{a}\ \times\ \underline{b}|$ ।

দ্রষ্টব্য ঃ $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=|\hat{\imath}|\ |\hat{\jmath}|\sin 90^0\,\hat{n}=\hat{k};\ \hat{\jmath}\times\hat{\imath}=|\hat{\jmath}|\ |\hat{\imath}|\sin(-90^0)\,\hat{n}=-\hat{k},\ \ \hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath},\ \ \hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath},$

$\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath},\ \hat{\imath}\times\hat{k}=-\hat{\jmath},\quad \hat{\imath}\times\hat{\imath}=|\hat{\imath}|\ |\hat{\imath}|\sin 0^0\,\hat{n}=\underline{0}, \hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\underline{0}, \hat{k}\times\hat{k}=\underline{0}$

TYPE-01: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right| \cos\theta$; $0^0 \le \theta \le 180^0$ সূত্র সম্পর্কেত গাণিতিক সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির (i) অন্তর্ভূক্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(ii) $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ ও অভিক্ষেপ বের কর এবং দেখাও যে এদর সাংখিক মান সমান।

সমাধান ঃ (i) $\vec{A}.\vec{B} = (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}).(6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}) = 6 - 6 - 4 = -4$

$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, $|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

এখন $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$ বা, $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} = \frac{-4}{21}$ বা, $\cos\theta = \frac{-4}{21}$ $\therefore$ $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right)$(উত্তর)

(ii) $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $=(\hat{a}.\vec{B})\hat{a} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|} \times \hat{a} = -\frac{4}{3}\hat{a}$; মান$= -\frac{4}{3} \times 1 = -\frac{4}{3}$

$\vec{a}$ এর উপর $\vec{b}$ এর অভিক্ষেপ$=\hat{a}.\vec{B} = -\frac{4}{3}$

EXAMPLE-02: $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

সমাধান ঃ $\vec{A} + \vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k} + 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}) - (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}) = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

$(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} - \vec{B}) = (4\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}).(-2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}) = -8 + 3 + 5 = 0$

যেহেতু , ভেক্টর দুইটির ডট গুণন শূন্য অতএব তারা পরস্পর লম্ব । (দেখানো হলো)

EXAMPLE-03: ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, যে কোনো ত্রিভুজে $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

ABC ত্রিভুজে BC, CA এবং AB বাহুর দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয়।

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}, \vec{c} = \overrightarrow{AB}$ তাহলে $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = 0$ সুতরাং $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

ফলে $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{c}).(-\vec{c})$ অথবা $\vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = \vec{c}.\vec{c}$

বা, $a^2 + 2ab\cos(\pi - C) + b^2 = c^2$ কেননা $\vec{b}.\vec{a} = ab\cos(\pi - C)$ যেহেতু $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর

অন্তভূক্ত কোণ $\pi - C$

EXAMPLE-04: a এর মান কত হলে $a\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{\imath} - \mathrm{a}\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে।

সমাধান ঃ দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে তাদের ডট গুণন শূন্য হয়।

অতএব, $(a\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(2a\hat{\imath} - \mathrm{a}\hat{\jmath} - 4\hat{k}) = 0$ বা, $2a^2 + 2a - 4 = 0$

বা, $a^2 + a - 2 = 0$ বা, $(a+2)(a-1) = 0 \therefore a = -2,1$ (উত্তর)

Example-05: $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অক্ষের সাথে যে কোণ গুলি উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\hat{\imath}.\vec{a} = 1.a\cos\boldsymbol{\theta_x} \therefore \boldsymbol{\theta_x} = \mathbf{cos^{-1}\frac{2}{3}}$, **X-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $\boldsymbol{\theta_X}$,**

$\hat{\jmath}.\vec{a} = 1.a\cos\boldsymbol{\theta_y} \therefore \boldsymbol{\theta_y} = \mathbf{cos^{-1}}\left(\frac{-1}{3}\right)$, **Y-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $\boldsymbol{\theta_Y}$,**

$\hat{k}.\vec{a} = 1.a\cos\boldsymbol{\theta_z} \therefore \boldsymbol{\theta_z} = \mathbf{cos^{-1}}\left(\frac{2}{3}\right)$, **Z-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $\boldsymbol{\theta_Z}$,**

EXAMPLE-05: $\underline{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ ও $\underline{b} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ হলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সামাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ এবং $\underline{b} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \underline{a} + \underline{b} = (3-1)\hat{\imath} + (2+1)\hat{\jmath} + (-2-4)\hat{k} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

$\therefore |\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \frac{\underline{a}+\underline{b}}{|\underline{a}+\underline{b}|} = \pm\frac{2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-6\hat{k}}{7} = \pm\frac{1}{7}(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k})$ Ans:

EXAMPLE-06: A(3, -1,2), B(1,-1,-3) ও C(4,-3,1) বিন্দু তিনটি শূন্যে অবস্থিত। ABC ত্রিভুজের কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সামাধান ঃ A(3, -1,2), B(1,-1,-3) ও C(4,-3,1) বিন্দু তিনটি অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}, \hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$, ও $4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$।

$\overrightarrow{AB} = (\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}) - (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}) = -2\hat{\imath} - 5\hat{k} \quad \therefore \overrightarrow{BA} = 2\hat{\imath} + 5\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}) - (\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}) = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}, \quad \therefore \overrightarrow{CB} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}) - (4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}) == -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \therefore \overrightarrow{AC} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

$$\therefore \cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2\hat{\imath}-5\hat{k}).(\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-\hat{k})}{\sqrt{2^2+5^2}\,\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{-2+0+5}{\sqrt{29}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{174}} \Rightarrow \angle A = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{174}}$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(2\hat{\imath}+5\hat{k}).(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+4\hat{k})}{\sqrt{2^2+5^2}\,\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = \frac{6+0+20}{\sqrt{29}\,\sqrt{29}} = \frac{26}{29} \Rightarrow \angle B = \cos^{-1}\frac{26}{29}$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\,\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})\,.\,(-3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k})}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\,\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = \frac{3+4-4}{\sqrt{6}\ \sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow \angle C = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{174}}$$

Try yourself : (i) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+3\hat{k}$, $-\hat{\imath}-\hat{\jmath}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+6\hat{k}$, দেখাও যে বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

(ii) $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B} = -\hat{\imath}+\hat{\jmath}-4\hat{k}$ হলে $\overrightarrow{A}$ ও $\overrightarrow{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Hints : লব্ধি ভেক্টর , $\vec{C} = \overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$, $\hat{c} = \frac{\vec{C}}{c}$

(iii) দেখাও যে, ভেক্টর $\vec{n} = a\hat{\imath}+b\hat{\jmath}, XY-$ সমতলে $ax+by=c$ রেখার উপর লম্ব।

(iv) প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC- তে

(a) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (b) $c = a\cos B + b\cos A$

TYPE-02: $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|\sin\theta.\hat{\eta}$;$0^0 \le \theta \le 180^0$ সূত্র সম্পর্কেত গাণিতিক সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর, যা $\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2\hat{k}$ এবং $\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব।

সমাধান ঃ $(\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2\hat{k})\times(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}) = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} = (1-4)\hat{\imath}-(-1-2)\hat{\jmath}-(2+1)\hat{k}$

$= -3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-3\hat{k} = \vec{a}\times\vec{b}$, $\hat{\eta} = \pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \pm\frac{-3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-3\hat{k}}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{-\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}}{\sqrt{3}}$

EXAMPLE-02: m এর মান কত হলে $\vec{a} = 2\hat{\imath}+m\hat{\jmath}-2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 6\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

সমাধান ঃ $\frac{2}{3} = \frac{m}{6} \therefore m = 4$

Try yourself : (i) দুইটি ভেক্টর $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath}-6\hat{\jmath}-3\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B} = 4\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় । উত্তর ঃ $\pm\frac{1}{7}(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+6\hat{k})$

(ii) প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC- তে $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$

TYPE-03: $\vec{c} = \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$; সূত্র সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}, \vec{b} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\vec{c}$ নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের সাথে একই তলে অবস্থান করে এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব।

সমাধান ঃ একই তলে অবস্থান করে বলে, $\vec{c} = \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n} = \frac{(m-n)\hat{\imath}+(m+n)\hat{\jmath}-(m+n)\hat{k}}{m-n}$

$\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব বলে , $\vec{c}.\vec{a} = 0 \Rightarrow (m-n)+(m+n)+(m+n)=0 \Rightarrow n=-3m$

$\vec{c} = \frac{4\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+2\hat{k}}{4} = \frac{1}{\sqrt{16}}(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}),$

Try yourself : $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath} - \sqrt{6}\hat{k}$, হলে এমন একটি একক ভেক্টর $\vec{c}$ নির্ণয় কর , যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\vec{a}$ এর লম্ব হবে । $\vec{a}$ এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ দুইটি ভেক্টরের লম্ব হবে।

উত্তরঃ $\vec{c} = l(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) + m(\hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath} - \sqrt{6}\hat{k})$, যেখানে, $3l = (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)m$ এবং

$9m^2 - 3l^2 = 1;$ $\vec{a} = \frac{1}{\lambda}[(-\sqrt{6} - \sqrt{2})\hat{\imath} + (\mp\sqrt{6})\hat{\jmath} + (\sqrt{2} - 2)\hat{k}]$, যেখানে,

$\lambda^2 = 18 + 2(\sqrt{12} + \sqrt{6} - \sqrt{2}).$

TYPE-04: $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\,(\vec{a} + \vec{b}) = 0$

সূত্র সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: ধ্রুবক a- এর মান নির্ণয় কর যেন $2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k},\ 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + a\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একইসমতলে থাকে।

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \mathbf{2(-2}\boldsymbol{a}\mathbf{+12)-1(3}\boldsymbol{a}\mathbf{-4)-1(-9+2)=-7}\boldsymbol{a}\mathbf{+26}$

শর্তানুযায়ী , $\mathbf{-7}\boldsymbol{a}\mathbf{+35=0} \Rightarrow \boldsymbol{a}\mathbf{=5}$

EXAMPLE-02: ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A (1, -1, -1), B(3, 3, 1) এবং C(-1, 4, 4) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P(0, 1,2)।

সমাধান ঃ $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = -4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CA}} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{2(-5+15)-4(20-6)+2(20-2)=20-56+36=0,}$$

$\therefore$ A , B , C বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত । P(0, 1,2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর , $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} = \hat{\imath} - 2\hat{j} - 3\hat{k}, |\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$,

$\overrightarrow{\boldsymbol{PB}} = \mathbf{3}\hat{\imath} + 2\hat{j} - \hat{k}, |\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{PC}} = \hat{\imath} + 3\hat{j} + 2\hat{k}, |\overrightarrow{\boldsymbol{PC}}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$, $\therefore$ গোলকটির কেন্দ্র P(0, 1,2) |

TYPE-05: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$সূত্র সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 5\hat{j}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 4\hat{j}$ ভেক্টরের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর লম্ব ।

সমাধান ঃ শর্তানুযায়ী রেখার সমীকরণ , $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{b}}$=$(\mathbf{3+2\lambda})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{5+4\lambda})\hat{\boldsymbol{j}}$

$$\vec{\boldsymbol{r}}.\vec{a} = 0 \Rightarrow 3\times(\mathbf{3+2\lambda}) + \mathbf{5}\times(\mathbf{5+4\lambda}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{26}} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \left(\mathbf{3+2}\times\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left(\mathbf{5+4}\times\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}}\right)\hat{\boldsymbol{j}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}(\mathbf{73}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{133}\hat{\boldsymbol{j}})$$

EXAMPLE-02: যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর হয় এবং $(x-2)\underline{a} + (y+5)\underline{b} = 0$

$\therefore$ $x - 2 = 0, y + 5 = 0 \Rightarrow x = 2, y = -5$

EXAMPLE-03: ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, (x_1, x_2) ও (y_{1}, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরন

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow x\hat{\imath} + y\hat{j} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{j} + t(x_1\hat{\imath} + y_1\hat{j} - x_1\hat{\imath} - y_1\hat{j})$

$\Rightarrow (x - x_1)\hat{\imath} + (y - y_1)\hat{j} = t(x - x_1)\hat{\imath} + t(y - y_1)\hat{j}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{\imath}$ ও $\hat{j}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $(x - x_1) = t(x - x_1), (y - y_1) = t(y - y_1)$

$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}(t)$

EXAMPLE-04: (1,2,-6) বিন্দুগামী এবং (2,-3,0) ও (4, -4,1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীরকণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, (1,2,-6) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং A(2, -3, 0) ও B(4, -4,1) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k}$ ও $4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ ।

$\overrightarrow{AB} = (4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k}) = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = \underline{b}$ (ধরি)। তাহলে, $\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সমীকরণের ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow \underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k} + t(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ (Ans:)

Try yourself : $\vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর লম্ব। Ans : $\frac{1}{13}(113\hat{i} - 23\hat{j} - 106\hat{k})$