বৃত্ত (Circle)

প্রশ্নমালা IV A

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. (a) $(0, 0)$ কেন্দ্র এবং 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=r^2$.

(b) (h, k) কেন্দ্র এবং 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

(h,k) কেন্দ্র এবং (α,β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=(\alpha-h)^2+(\beta-k)^2$

(c) $(-g, -f)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, যেখানে ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(d) (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

(e) একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, বৃত্ত + k(সরলরেখা)=0; ধ্রুবক $k\neq 0$

(f) দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, প্রথম বৃত্ত + k (দ্বিতীয় বৃত্ত) = 0; ধ্রুবক $k\neq 0$.

(g) $f(x, y)=0$ বৃত্ত ও $g(x, y)=0$ সরলরেখার (অথবা, $f(x, y)=0$ ও $g(x, y)=0$ বৃত্তদ্বয়ের) ছেদবিন্দু এবং (α, β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ
$$\frac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)}=\frac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)};\ f(\alpha,\beta)\neq 0,\ g(\alpha,\beta)\neq 0$$

(h) খন্ডিকার পদ্ধতিঃ যেকোন দুইটি বিন্দু (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+k\{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)\}=0$; ধ্রুবক $k\neq 0$

2. (a) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}$ এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{f^2-c}$.

(b) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{r^2-k^2}$ এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{r^2-h^2}$.

3. (a) (r_1,θ_1) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ
$$a^2=r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)$$

(b) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ
$r^2+2r(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0$, যার কেন্দ্র $(\sqrt{g^2+f^2}, \tan^{-1}\frac{f}{g})$,
ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র ঃ

1. $f(x, y)=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (x_1,y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $f(x, y)=f(x_1,y_1)$
2. x-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (x_1,y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2+y^2}{y}=\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}$.
3. কেন্দ্র (h,k) এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2=0$
4. কেন্দ্র (h,k) এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2=0$

প্রশ্নমালা – IV A

1. $ax^2+2bxy-2y^2+8x+12y+6=0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, 'a' ও 'b' এর মান নির্ণয় কর। অতপর বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $ax^2+2bxy-2y^2+8x+12y+6=0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, xy এর সহগ, $2b=0$

$\Rightarrow b=0$ এবং x^2 ও y^2 এর সহগ দুইটি সমান অর্থাৎ $a=-2$.

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হবে,
$-2x^2-2y^2+8x+12y+6=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2(-2)x+2(-3)y-3=0$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, -3)$ এবং
ব্যাসার্ধ $=\sqrt{2^2+3^2-(-3)}=\sqrt{4+9+3}=4$

2. (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা IV B

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে $y = mx + c$ রেখাটি স্পর্শক হওয়ার শর্ত, $c = \pm r\sqrt{m^2+1}$ ।

$\therefore$ $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

3. বহিঃস্থ যেকোন বিন্দু (x_1, y_1) হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $(xx_1 + yy_1 + gx + gx_1 + fy + fy_1 + c)^2 = (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,
$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0.$

5. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,
$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

6. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ,
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

7. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তেরর কোন জ্যা এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে তার সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

8. $S_1 = 0$ ও $S_2 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$.

9. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর প্রতিবিম্ব

(a) x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2 + 2gx-2fy + c=0$

(b) y অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2 - 2gx+2fy + c=0$

(c) $ax + by + c= 0)$ রেখার সাপেক্ষে ঃ এ রেখার সাপেক্ষে প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ এর প্রতিবিম্ব (g', f') কে কেন্দ্র এবং প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ব্যাসার্ধ ধরে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় প্রতিবিম্ব।

প্রশ্নমালা IV B

1(a) $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়েছে। দেখাও যে, $x + y = 4$ রেখাটি ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

প্রমাণ ঃ $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-9) + (y-7)(y-1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0 \cdots (1)$

প্রদত রেখা $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \cdots (2)$

(1) এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + (4-x)^2 - 12x - 8(4-x) + 34 = 0$

$\Rightarrow x^2+16-8x+x^2-12x-32+8x+34 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 \Rightarrow x = 3$

$\therefore (2) \Rightarrow y = 4 - 3 = 1$

$\therefore$ (2) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের সাথে শূধুমাত্র $(3,1)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore$ $x + y = 4$ রেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু $(3,1)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-9) + (y-7)(y-1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{36 + 16 - 34} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ থেকে প্রদত রেখা $x + y = 4$ অর্থাৎ $x + y - 4 = 0 \ldots\ldots \cdots (2)$ এর লম্ব

দূরত্ব $= \frac{|6+4-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ ঃ (2) রেখার উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ,

$x - y = 6 - 4 \Rightarrow x - y = 2 \cdots (3)$

$(2) + (3) \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

(3) হতে পাই, $3 - y = 2 \Rightarrow y = 1$.

$\therefore$ (2) ও (3) রেখার ছেদবিন্দু $(3, 1)$ যা নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দু।

1(b) দেখাও যে, $y - 3x = 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০১]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখা $y - 3x = 10$ হতে $y = 3x + 10 \cdots(1)$ এর মান প্রদত্ত বৃত্তে বসিয়ে পাই, $x^2 + (3x + 10)^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 10 = 0$

$\Rightarrow 10x^2 + 60x + 90 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$\therefore (1) \Rightarrow y = 3.(-3) + 10 = -9 + 10 = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তের সাথে শুধুমাত্র $(-3,1)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-3,1)$.

1(c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৪; ঢা. '০৪,'০৭'১১; রা. '০৫, '১২; য.'০৫, '০৮,'১১ ; চ.'০৫,'০৮; মা.বো.'০৫;]

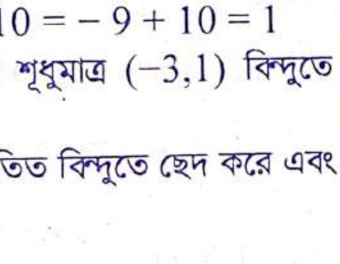
সমাধান : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4 + 9 - c} = \sqrt{13 - c}$

x-অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এর দূরত্ব $= |3| = 3$

বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore \sqrt{13 - c} = 3$

$\Rightarrow 13 - c = 9 \therefore c = 4$



আবার, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ 2.

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 0)$.

1(d) দেখাও যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭; মা.'০৩]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0 \cdots(1)$ বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9 + 16 - 15} = \sqrt{10}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ থেকে $x - 3y = 5$ অর্থাৎ $x - 3y - 5 = 0 \cdots \cdots (2)$ রেখার লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{|3 - 3 \times (-4) - 5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{1+9}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ।}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ : $x - 3y - 5 = 0$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $3x + y = 3 \times 3 - 4 = 9 - 4$

$\therefore 3x + y = 5$ (Ans.)

2(b) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2 m^2 + 2al = 1$ হয়।[কু. '০৮; ঢা. '০৮; রা.'১১; সি. '০৪; ব. '০৫,'০৯; চ. '০৮,'১০; মা.'০৩; দি.'০৯; য.'১১]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{a^2} = a$

বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ থেকে $lx + my = 1$ অর্থাৎ $lx + my - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|la - 1|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \frac{|la - 1|}{\sqrt{l^2 + m^2}} = a$

$\Rightarrow |la - 1|^2 = a^2(l^2 + m^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (la - 1)^2 = a^2 l^2 + a^2 m^2$

$\Rightarrow l^2 a^2 - 2la + 1 = a^2 l^2 + a^2 m^2$

$\therefore a^2 m^2 + 2al = 1$ (Showed)

2. (b) $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [য.'০৬,'১২ ; কু. '০৫,'১৩; রা.'০৫,'১৩; ঢা.'০৬; য.'০৬; ব.'০৮]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= a$

বৃত্তের কেন্দ্র (0 , 0) থেকে $px + qy = 1$ অর্থাৎ $px + qy - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-1|}{\sqrt{p^2+q^2}}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \ \left|\frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2}}\right| = a \Rightarrow p^2+q^2 = \frac{1}{a^2}$ এ থেকে

স্পষ্ট যে, (p , q) বিন্দুটি $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ বৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ (p , q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

2(c) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর। [রা. '০৮,'১২; কু.'০৪,'১০; সি. '০৮; মা.'০৫,'০৯; য.'১১; চ.'১১; ব.'১২; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (4, 1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2+1^2-4} = \sqrt{13}$

বৃত্তের কেন্দ্র (4 , 1) থেকে $3x + by - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{12+b-1}{\sqrt{9+b^2}}\right| = \left|\frac{11+b}{\sqrt{9+b^2}}\right|$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \ \left|\frac{11+b}{\sqrt{9+b^2}}\right| = \sqrt{13}$

$\Rightarrow (11 + b)^2 = 13(9 + b^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 117 + 13b^2$

$\Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 11b - 2 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 12b + b - 2 = 0$

$\Rightarrow 6b(b-2) + 1(b-2) = 0$

$\Rightarrow (b-2)(6b+1) = 0$

$\therefore$ b = 2 বা, $-1/6$

3(d) (4 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্ত $3x + 4y - 1=0$ ও $x - 3=0$ রেখা দুইটিকে স্পর্শ করে। r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হলে দেখাও যে, $r^2 - 20r + 40 = 0$.

প্রমাণ : ধরি, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \cdots (1)$

(1) বৃত্ত (4 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \ (4-h)^2 + (1-k)^2 = r^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে $3x + 4y - 1 = 0$ ও $x - 3 = 0$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে $\frac{|3h+4k-1|}{\sqrt{9+14}} = \frac{|3h+4k-1|}{5}$ ও $\frac{|h-3|}{\sqrt{1}}$

(1) বৃত্তটি প্রদত্ত রেখা দূইটিকে স্পর্শ করলে,

$|h-3| = r \Rightarrow h - 3 = \pm r \Rightarrow h = \pm r + 3$

এবং $\frac{|3h+4k-1|}{5} = r \Rightarrow 3h + 4k - 1 = \pm 5r$

$\Rightarrow 3(\pm r + 3) + 4k - 1 = \pm 5r \quad [\because h = \pm r + 3]$

$\Rightarrow \pm 3r + 9 + 4k - 1 = \pm 5r$

$\Rightarrow 4k + 8 = \pm 2r \Rightarrow 2k = \pm r - 4$

$\Rightarrow k = \frac{\pm r - 4}{2}$

(2) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(4 \mp r - 3)^2 + (1 - \frac{\pm r - 4}{2})^2 = r^2$

$\Rightarrow (1 \mp r)^2 + \frac{(2 \mp r + 4)^2}{4} = r^2$

$\Rightarrow 4(1 \mp 2r + r^2) + (36 \mp 12r + r^2) = 4r^2$

$\Rightarrow 4 \mp 8r + 4r^2 + 36 \mp 12r + r^2 = 4r^2$

$\Rightarrow r^2 \mp 20r + 40 = 0$

কিন্তু বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $r>0$ বলে r এর কোন ধনাত্মক বাস্তব মান $r^2 + 20r + 40 = 0$ কে সিদ্ধ করে না।

$\therefore \ r^2 - 20r + 40 = 0$ (Showed)

3. (a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৫; রা.'০৭; ঢা.'১০]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (1,2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2+2^2+4} = 3$

ধরি, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (1,2) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \frac{|4.1+3.2+k|}{\sqrt{16+9}} = 3 \Rightarrow |4+6+k| = 15$

$\Rightarrow k + 10 = \pm 15 \;\therefore k = 5, -25$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$4x + 3y - 25 = 0, 4x + 3y + 5 = 0$

3(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০১]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(1,2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

ধরি, $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + k = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(1,2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \frac{|3.1 - 4.2 + k|}{\sqrt{9+16}} = 3 \Rightarrow |3 - 8 + k| = 15$

$\Rightarrow k - 5 = \pm 15 \;\therefore k = 20, -10$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + 20 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$

4.(a) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০১,'০৯; রা.'০৪; য.'০৭; কু.'১১]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{2^2 + 4^2 - 2}$ $= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ধরি, অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে এরূপ স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

অর্থাৎ $x + y - a = 0 \cdots \cdots (1)$ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(-2, 4)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $3\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|-2+4-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |2 - a| = 6$

$\Rightarrow a - 2 = \pm 6 \;\therefore a = 8, -4$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x + y + 4 = 0$, $x + y - 8 = 0$

4 (b) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'১০; ব.'১১; কু.'য,'১২]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 4$

ধরি, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ

$$y = \tan 30^0 \times x + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \times x + c$$

$\Rightarrow x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0 \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 4 এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{1+3}} = 4 \Rightarrow |\sqrt{3}c| = 8 \Rightarrow c = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$

5. $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের এটি ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \cdots (1)$ বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{5b}{2}, -6b)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{25b^2}{4} + 36b^2}$

$$= \sqrt{\frac{25b^2 + 144b^2}{4}} = \sqrt{\frac{169b^2}{4}} = \frac{13b}{2}$$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং কেন্দ্র $(\frac{5b}{2}, -6b)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{-6b}{5b/2}x$

$\Rightarrow 5y = -12x \;\therefore 12x + 5y = 0$

২য় অংশ ঃ ধরি, মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ

$y = mx \Rightarrow mx - y = 0 \cdots \cdots (2)$

(1) বৃত্তের স্পর্শক (2) বলে,

$$\frac{|m.\frac{5b}{2} - (-6b)|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{13b}{2}$$

$\Rightarrow \dfrac{|5m+12|b}{2\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{13b}{2}$

$\Rightarrow |5m+12|^2 = 13^2(\sqrt{m^2+1})^2$

$\Rightarrow 25m^2 + 120m + 144 = 169(m^2+1)$

$\Rightarrow 169m^2 + 169 = 25m^2 + 120m + 144$

$\Rightarrow 144m^2 - 120m + 25 = 0$

$\Rightarrow (12m-5)^2 = 0 \Rightarrow 12m - 5 = 0$

$\Rightarrow m = \dfrac{5}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $\dfrac{5}{12}x - y = 0$

$\Rightarrow 5x - 12y = 0$

6. (a) $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[সি. '০২; রা. '০৯]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.4 + y.(-11) - \dfrac{3}{2}(x+4) + 5(y-11) - 15 = 0$

$[xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$ সূত্র দ্বারা।]

$\Rightarrow 8x - 22y - 3x - 12 + 10y - 110 - 30 = 0$

$\therefore 5x - 12y - 152 = 0$ (Ans.)

6(b) $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$ বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব। [প্র.ভ.প. '০০]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $x.6 + y.(-3) = 45$

$\Rightarrow 2x - y = 15 \Rightarrow y = 2x - 15 \cdots (1)$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0 \cdots\cdots(2)$ বৃত্তে $y = 2x - 15$ বসিয়ে পাই,

$x^2 + (2x-15)^2 - 4x + 2(2x-15) - 35 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 60x + 225 - 4x + 4x - 30 - 35 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 60x + 160 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-8) = 0$

$\Rightarrow x = 4, 8$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $y = 2.4 - 15 = 8 - 15 = -7$
এবং $y = 2.8 - 15 = 16 - 15 = 1$

$\therefore$ (1) রেখাটি (2) বৃত্তকে $A(4, -7)$ ও $B(8, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(2) বৃত্তের $A(4, -7)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.4 + y.(-7) - 2(x+4) + (y-7) - 35 = 0$

$\Rightarrow 4x - 7y - 2x - 8 + y - 7 - 35 = 0$

$\Rightarrow 2x - 6y - 50 = 0 \Rightarrow x - 3y - 25 = 0$, যার ঢাল $= -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

আবার (2) বৃত্তের $B(8, 1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.8 + y.1 - 2(x+8) + (y+1) - 35 = 0$

$\Rightarrow 8x + y - 2x - 16 + y + 1 - 35 = 0$

$\Rightarrow 6x + 2y - 50 = 0 \Rightarrow 3x + y - 25 = 0$, যার ঢাল $= -\dfrac{3}{1} = -3$.

এ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= \dfrac{1}{3} \times -3 = -1$

$\therefore$ A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব।

7. (a) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব. '০৫; সি. '০৯; রা. '১০; দি. '১১]

সমাধান ঃ ধরি, 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \beta)$, যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 20$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore 4 + \beta^2 = 20 \Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4, -4$

$\therefore$ 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,4)$ এবং $(2,-4)$
প্রদত্ত বৃত্তের $(2,4)$ এবং $(2,-4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x.2 + y.4 = 20 \Rightarrow x + 2y = 10$
এবং $x.2 + y.(-4) = 20 \Rightarrow x - 2y = 10$

7. (b) $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের 2 কোটিবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৮]

সমাধান ঃ ধরি, 2 কোটিবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2)$, যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 13$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore \alpha^2 + 4 = 13 \Rightarrow \alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3, -3$

$\therefore$ 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3,2)$ এবং $(-3,2)$

প্রদত্ত বৃত্তের (3,2) এবং (−3,2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x.3 + y.2 = 13 \Rightarrow 3x + 2y = 13$

এবং $x.(-3) + y.2 = 13 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

8. (a) $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [য.'০২; কু.'১৩; চ.'১১]

সমাধান: $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 - \frac{1}{2}.1 + \frac{3}{2}(-1) + \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ একক।

8. (b) $(3, -3)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [য.'০১]

সমাধান : $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-4, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{16+4+5} = 5$

ধরি, $(3, -3)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = m(x-3)$ অর্থাৎ $mx - y - 3m - 3 = 0$

এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(-4, -2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 5 এর সমান হবে।

$\therefore \left|\frac{-4m + 2 - 3m - 3}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 5$

$\Rightarrow (-7m-1)^2 = 25(m^2+1)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 49m^2 + 14m + 1 = 25m^2 + 25$

$\Rightarrow 24m^2 + 14m - 24 = 0$

$\Rightarrow 12m^2 + 7m - 12 = 0$

$\Rightarrow 12m^2 + 16m - 9m - 12 = 0$

$\Rightarrow 4m(3m+4) - 3(3m+4) = 0$

$\Rightarrow (3m+4)(4m-3) = 0$

$\therefore m = -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{3}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 9 \therefore 3x - 4y = 21$ এবং

$y + 3 = -\frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow 3y + 9 = -4x + 12$

$\therefore 4x + 3y = 3$

২য় অংশ : $(3, -3)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + 8.3 + 4.(-3) - 5}$

$= \sqrt{9 + 9 + 24 - 12 - 5} = \sqrt{25} = 5$ একক।

9. (a) $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x - y - 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩; সি.'০৯; দি.'১০; য.'১২]

সমাধান : বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(1, -3)$ হতে $2x - y - 4 = 0$ স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|2.1 + 3 - 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ $(1, -3)$ কেন্দ্র ও $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = (\frac{1}{\sqrt{5}})^2$

$\Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9) = 1$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 50 - 1 = 0$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$

9. (b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। [সি.'০৩,'১১]

সমাধান : ধরি, x-অক্ষের উপর অবস্থিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x + y + 1 = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(\alpha, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|\alpha + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |\alpha + 1| = 2$

$\Rightarrow \alpha + 1 = \pm 2 \therefore \alpha = 1, -3$

$\therefore$ বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র $(1, 0)$ এবং $(-3, 0)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 2$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ (Ans.) এবং

$(x+3)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = 2$

$\therefore x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0$ (Ans.)

9. (c) (p, q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হবে $px + qy = 0$. [কু.'০৩; য.'০৭]

সমাধান ঃ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (p , q) হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব = $\sqrt{p^2+q^2}$

$\therefore$ (p , q) কেন্দ্র ও $\sqrt{p^2+q^2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2 + q^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 = p^2 + q^2$

$\therefore x^2 + y^2 - px - qx = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ $x^2 + y^2 - px - qx = 0$ বৃত্তের মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.0 + y.0 - \frac{1}{2}p(x+0) - \frac{1}{2}q(y+0) = 0$

$\Rightarrow -px - qy = 0 \therefore px + qy = 0$ (Proved)

10. (a) $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের একটি জ্যা । উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪; দি.'০৯; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, $y = 2x$ অর্থাৎ $2x - y = 0 \cdots (1)$ রেখা এবং $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 10x + k(2x - y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-10 + 2k)x - ky = 0 \cdots (2)$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{-10+2k}{2}, -\frac{-k}{2})$

$= (5-k, \frac{k}{2})$

প্রদত্ত রেখাটি (2) বৃত্তের ব্যাস বলে এর কেন্দ্র $2x - y = 0$ রেখার উপর অবস্থিত হবে।

$\therefore 2(5-k) - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 4k - k = 0$

$\Rightarrow 5k = 20 \Rightarrow k = 4$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + (-10 + 8)x - 4y = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি : $y = 2x \cdots (1)$ হতে y এর মান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 + (2x)^2 = 10x$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$

$\Rightarrow 5x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের জ্যা (1) এর প্রান্তবিন্দু দুইটি (0,0) এবং (2,4).

(0,0) এবং (2,4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)(x-2) + (y-0)(y-4) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (Ans.)

10. (b) (3 , 7) ও (9 , 1) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, বৃত্তটি $x - y + 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। [চ.'০৫; কু.'০৯; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ (3 , 7) ও (9 , 1) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-9) + (y-7)(y-1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0 \cdots (1)$

২য় অংশ ঃ (1) বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 4) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{36+16-34} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

এখন কেন্দ্র (6 , 4) থেকে $x - y + 4 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{6-4+4}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

$\therefore$ বৃত্তটি প্রদত্ত রেখাকে স্পর্শ করে।

11. (a) (3, –1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫; কু.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore c = g^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তটি (2, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 4 + 0 + 4g + 0 + c = 0$

$\Rightarrow 4 + 4g + g^2 = 0 \ [\because c = g^2]$

$\Rightarrow (g+2)^2 = 0 \Rightarrow g + 2 = 0 \Rightarrow g = -2$

(2) হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$

আবার (1) বৃত্তটি $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বলে, $9 + 1 + 6g - 2f + c = 0$

$\Rightarrow 10 + 6.(-2) - 2f + 4 = 0$

$\Rightarrow 14 - 12 - 2f = 0 \Rightarrow 2 - 2f = 0 \Rightarrow f = 1$

(1) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

২য় অংশ ঃ ধরি, মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0, m \neq 0$.

এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(2, -1)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{4+1-4} = 1$ এর সমান হবে।

$\therefore |\frac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}}| = 1 \Rightarrow (2m+1)^2 = m^2 + 1$

$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 = m^2 + 1$

$\Rightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Rightarrow 3m + 4 = 0$

$\Rightarrow m = -\frac{4}{3}$

$\therefore$ মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ

$y = -\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x + 3y = 0$ (Ans.)

11 (b) b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক, x-অক্ষ এবং $3y = 4x$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = b^2 \cdots (1)$; এখানে h, k উভয়ই ধনাত্মক ।

(1) বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $b = |$ কেন্দ্রের কোটি $| = |k| = k$

আবার, (1) বৃত্ত $3y = 4x$ অর্থাৎ $4x - 3y = 0$ রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h, k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ b এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|4h - 3k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = b \Rightarrow |4h - 3b| = 5b$

$\Rightarrow 4h - 3b = \pm 5b$

$\therefore 4h = 8b$ অথবা, $4h = -2b$

$\Rightarrow h = 2b$ অথবা, $h = -\frac{b}{2}$; কিন্তু $h>0$.

$\therefore h = 2b$.

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x - 2b)^2 + (y - b)^2 = b^2$

$\Rightarrow x^2 - 4bx + 4b^2 + y^2 - 2by + b^2 + b^2 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4bx - 2by + 4b^2 = 0$ (Ans.)

11 (c) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি (3, 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক । বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; কু.'০৭]

সমাধান ঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r = কেন্দ্র (3, 4) হতে প্রদত্ত স্পর্শকের লম্বদূরত্ব $= \frac{|6+12-5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

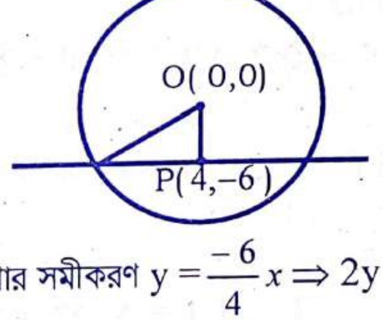
$\therefore$ বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ

$= 2\sqrt{r^2 - h^2}$, এখানে h = কেন্দ্রের ভুজ = 3

$= 2\sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2\sqrt{13-9} = 2.2 = 4$

12. (a) $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, – 6) বিন্দুতে অবস্থিত। [চ.'০৯; দি.'০৯,'১১;রা.'০৫;য.'০৬; ঢা.'০৭; মা.'০৪; কু.'১০; সি.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 144$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(4, -6)$.



OP রেখার সমীকরণ $y = \frac{-6}{4}x \Rightarrow 2y = -3x$

$\Rightarrow 3x + 2y = 0$

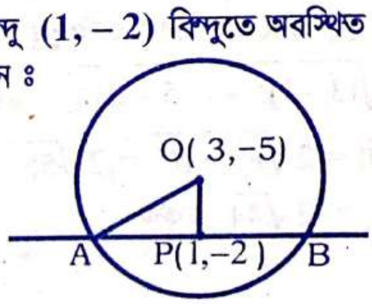
$P(4, -6)$ বিন্দুগামী এবং $3x + 2y = 0$ রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$2x - 3y = 2.4 - 3.(-6) = 8 + 18 = 26$

$\therefore 2x - 3y = 26$ (Ans.)

12. (b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (1, – 2) বিন্দুতে অবস্থিত।

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ এর কেন্দ্র $O(3, -5)$ এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(1, -2)$.

OP রেখার ঢাল $= \frac{-5+2}{3-1} = \frac{-3}{2}$

$OP \perp AB$ বলে, AB এর ঢাল $= \frac{2}{3}$

$\therefore$ $P(1, -2)$ বিন্দুগামী $\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট নির্ণেয় জ্যা AB এর সমীকরণ, $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$

$\Rightarrow 3y + 6 = 2x - 2$

$\therefore$ $2x - 3y - 8 = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ $OP = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+5)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

OA = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 5^2 + 21}$

$= \sqrt{9 + 25 + 21} = \sqrt{55}$

OAP সমকোণী ত্রিভুজে OA অতিভুজ।

$\therefore$ $AP^2 = OA^2 - OP^2 = 55 - 13 = 42$

$\Rightarrow AP = \sqrt{42}$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $AB = 2\ AP = 2\sqrt{42}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের যে জ্যাটি $(1, -2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ, $x.1 + y.(-2) - 3(x + 1) + 5(y - 2) - 21 = 1^2 + (-2)^2 - 6.1 + 10.(-2) - 21$, [$T = S_1$ সূত্রের সাহায্যে ।]

$\Rightarrow x - 2y - 3x - 3 + 5y - 10 = 1 + 4 - 6 - 20$

$\Rightarrow -2x + 3y - 13 + 21 = 0$

$\therefore$ $2x - 3y - 8 = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -5)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}$.

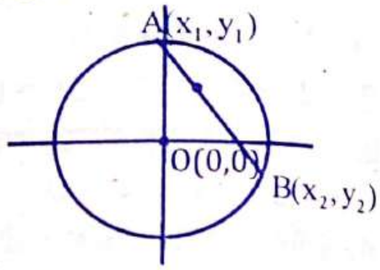
কেন্দ্র $(3, -5)$ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(1, -2)$ এর দূরত্ব $d = \sqrt{(3-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{13}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{55-13}$

$= 2\sqrt{44}$ একক।

(c) $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যাকে (1, 2) বিন্দু 1:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

সমাধানঃ



মনে করি, AB জ্যা এর প্রান্তবিন্দু $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ যাকে C(1, 2) বিন্দু 1:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ $C \equiv \left(\frac{1\times x_2 + 2\times x_1}{1+2}, \frac{1\times y_2 + 2\times y_1}{1+2}\right)$

$\therefore$ $\frac{2x_1 + x_2}{3} = 1 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 3 \cdots$ (i)

ধরি, C(1, 2) বিন্দুগামী জ্যা এর সমীকরণ,

$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m + 2 \cdots$(ii)

এখন, $x^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow x^2 + (mx - m + 2)^2 = 9$, [(ii) দ্বারা]

$\Rightarrow x^2 + m^2x^2 + m^2 + 4 - 2m^2x - 4m + 4mx = 9$

$\Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + (-2m^2 + 4m)x + m^2 - 4m - 5 = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{-2m^2 + 4m}{m^2 + 1} = \frac{2m^2 - 4m}{m^2 + 1} \ldots$(iii)

$x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4m - 5}{m^2 + 1} \ldots$ (iv)

(i)− (iii) $\Rightarrow x_1 = 3 - \frac{2m^2 - 4m}{m^2 + 1}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3m^2 + 3 - 2m^2 + 4m}{m^2 + 1} = \frac{m^2 + 4m + 3}{m^2 + 1}$

(i) ও (iv) হতে পাই,

$x_1(3 - 2x_1) = \frac{m^2 - 4m - 5}{m^2 + 1}$

$\Rightarrow \frac{m^2 + 4m + 3}{m^2 + 1}\{3 - 2\frac{m^2 + 4m + 3}{m^2 + 1}\}$

$$= \frac{m^2-4m-5}{m^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2+4m+3}{m^2+1}.\frac{3m^2+3-2m^2-8m-6}{m^2+1} = \frac{m^2-4m-5}{m^2+1}$$

$\Rightarrow (m^2+4m+3)(m^2-8m-3)$
$= (m^2+1)(m^2-4m-5)$

$\Rightarrow m^4-8m^3-3m^2+4m^3-32m^2-12m+3m^2-24m-9 = m^4-4m^3-5m^2+m^2-4m-5$

$\Rightarrow m^4-4m^3-32m^2-36m-9 = m^4-4m^3-4m^2-4m-5$

$\Rightarrow 28m^2+32m+4=0$

$\Rightarrow 7m^2+8m+1=0$

$\Rightarrow 7m^2+7m+m+1=0$

$\Rightarrow 7m(m+1)+1(m+1)=0$

$\Rightarrow (m+1)(7m+1)=0 \Rightarrow m=-1, -\frac{1}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

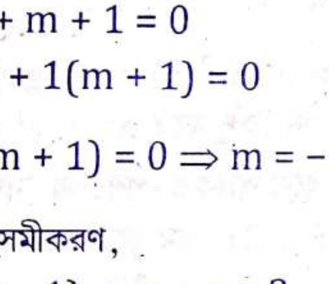
$y-2=-1(x-1) \Rightarrow x+y=3$

অথবা, $y-2=-\frac{1}{7}(x-1) \Rightarrow 7y-14=-x+1$

$\Rightarrow x+7y=15$

(d) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ বৃত্তের একটি জ্যা AB কেন্দ্রে 60^0 কোণ উৎপন্ন করলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন A(8,4)।

সমাধান:



$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ বৃত্তের কেন্দ্র C(3, 4) এবং ব্যাসার্ধ = AC = AB = 5 একক।

AB জ্যা কেন্দ্রে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \angle C + \angle A + \angle B = 180^0$

$\Rightarrow 60^0 + 2\angle A = 180^0$, [$\because AC = BC$]

$\Rightarrow 2\angle A = 120^0 \Rightarrow \angle A = \angle B = 60^0$

$\therefore AB = AC = BC = 5$

$BM \perp CM$ হলে,

$CM = BC\cos 60^0 = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$BM = BC\sin 60^0 = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

এখন, A(8, 4) এবং কেন্দ্র C(3, 4) এর y-স্থানাঙ্ক অভিন্ন বলে AC হবে x- অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3+CM, 4\pm BM)$

$= (3+\frac{5}{2}, 4\pm\frac{5\sqrt{3}}{2})$

$= (\frac{11}{2}, 4\pm\frac{5\sqrt{3}}{2})$

13. (a) $x^2+y^2+6x+2y+6=0$ ও $x^2+y^2+8x+y+10=0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2+y^2+6x+2y+6=0$

এবং $S_2 \equiv x^2+y^2+8x+y+10=0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1-S_2=0 \Rightarrow -2x+y-4=0$

$\Rightarrow 2x-y+4=0 \cdots\cdots (1)$

ধরি, এ সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2+6x+2y+6+k(2x-y+4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(6+2k)x+(2-k)y+6+4k=0 \cdots (2)$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-k-3, \frac{k-2}{2})$, যা সাধারণ জ্যা (1) এর উপর অবস্থিত।

$\therefore 2(-k-3)-\frac{k-2}{2}+4=0$

$\Rightarrow -4k-12-k+2+8=0$

$\Rightarrow -5k-2=0 \Rightarrow k=-\frac{2}{5}$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 - \frac{2}{5}(2x - y + 4) = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 30x + 10y + 30 - 4x + 2y - 8 = 0$

∴ $5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$

13 (b) $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ও $(x - q)^2 + (y - p)^2 = r^2$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণদ্বয়কে লিখা যাই,

$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$

এবং $x^2 + y^2 - 2qx - 2py + p^2 + q^2 - r^2 = 0$

∴ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(-2p + 2q)x + (-2q + 2p)y = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \cdots\cdots (1)$

১ম বৃত্তের কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ $= r$

কেন্দ্র (p, q) থেকে (1) সাধারণ জ্যা এর লম্বদূরত্ব

$$d = \frac{|p - q|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|p-q|}{\sqrt{2}}$$

∴ সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$$= 2\sqrt{r^2 - \frac{|p-q|^2}{(\sqrt{2})^2}} = \sqrt{4r^2 - \frac{4(p-q)^2}{2}}$$

$$= \sqrt{4r^2 - 2(p-q)^2} \text{ (Ans.)}$$

13 (c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৫;'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow (-4 + 5)x + (6 - 8)y + (-36 + 43) = 0$

∴ $x - 2y + 7 = 0$ (Ans.)

14.(a) দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর। [ব.'১১]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(1, -2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{1 + 4 + 31} = 6$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(-2, 2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{4 + 4 - 7} = 1$.

∴ $C_1 C_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = 5 = 6 - 1 = r_1 - r_2$

∴ প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

সাধারণ স্পর্শক অর্থাৎ সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(-2 - 4)x + (4 + 4)y + (-31 - 7) = 0$

$\Rightarrow -6x + 8y - 38 = 0$

∴ $3x - 4y + 19 = 0$ (Ans.)

এ সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ C_1C_2 কে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অর্থাৎ $r_1 : r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করবে। অতএব, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{6.(-2) - 1.1}{6 - 1}, \frac{6.2 - 1.(-2)}{6 - 1}\right) = \left(-\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

14(b) দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর যেকোন বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c' - c}$.

প্রমাণ : ধরি, (α, β) প্রথম বৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু।

∴ $\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta = -c \cdots(1)$

এখন (α, β) বিন্দু থেকে দ্বিতীয় বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c'}$

$= \sqrt{-c + c'} = \sqrt{c' - c}$ (Showed)

15.(a) মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮,'১১; রা.'১০,'১৩; সি.'১০; য.'০৫; চ. '০৬,'০৯,'১৩ ব.'১২]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25 - 20} = \sqrt{5}$

ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$\therefore \dfrac{|5m-0|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow 25m^2 = 5(m^2+1)$

$\Rightarrow 5m^2 = m^2 + 1 \Rightarrow 4m^2 = 1 \therefore m = \pm\dfrac{1}{2}$

$(3m+1)^2 = m^2 + 1$

$\therefore$ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ $y = \dfrac{1}{2}x \Rightarrow x - 2y = 0$

এবং $y = -\dfrac{1}{2}x \Rightarrow x + 2y = 0$

15(b) মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \quad \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+4-9} = 2$

ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$\therefore \dfrac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow (3m-2)^2 = 4(m^2+1)$

$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4m^2 + 4$

$\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \Rightarrow m(5m-12) = 0$

$\therefore m = 0, \dfrac{12}{5}$

$\therefore$ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ $y = 0$ এবং $y = \dfrac{12}{5}x.$

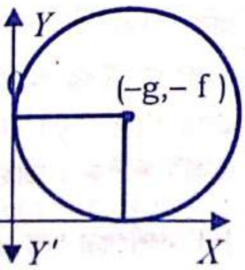
এখন $y = \dfrac{12}{5}x$ রেখা $y = 0$ রেখা অর্থাৎ x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = m$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\dfrac{12}{5}$, যা স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ।

16.(a) $x = 0, y = 0$ ও $x = a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য.'০১; রা.'০৫; কু.'০৪,'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore f^2 = c$ এবং $g^2 = c$

$\therefore g^2 = f^2 = c$

আবার, বৃত্তটি $x = a$ অর্থাৎ $x - a = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ এর সমান হবে।

$\therefore \dfrac{|-g-a|}{\sqrt{1}} = \sqrt{g^2+f^2-c}$

$\Rightarrow g^2 + 2ag + a^2 = g^2 + f^2 - c$

$\Rightarrow 2ag + a^2 = f^2 - f^2 \quad [\because c = f^2]$

$\Rightarrow 2ag + a^2 = 0 \therefore g = -\dfrac{a}{2}$

$\therefore c = g^2 = (-\dfrac{a}{2})^2 = \dfrac{a^2}{4}$ এবং

$f^2 = g^2 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow f = \pm\dfrac{a}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2(-\dfrac{a}{2})x + 2(\pm\dfrac{a}{2})y + \dfrac{a^2}{4} = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - ax \pm ay + \dfrac{1}{4}a^2 = 0$ (Ans.)

16.(b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। **[প্র.ভ.প. '০৪]**

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{2}$

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore r = |h| = |k|$

$\Rightarrow r = -h = -k = \sqrt{2}$ [$\because$ কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore h, k < 0$]

$\therefore h = k = -\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 2$

$\therefore x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

16(c) $(-5, -6)$ বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + 4y - 11 = 0$ রেখাকে $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (1 , 2) বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ

$(x-1)^2+(y-2)^2=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y+5=0 \cdots (1)$

$(-5 , -6)$ বিন্দুগামী এবং (1) বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখা $3x+4y-11=0$ এর ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2+y^2-2x-4y+5}{3x+4y-11}=\frac{25+36+10+24+5}{-15-24-11}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2-2x-4y+5}{3x+4y-11}=\frac{100}{-50}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y+5=-6x-8y+22$$

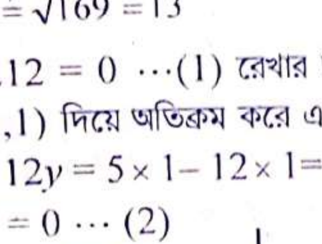
$$\therefore x^2+y^2+4x+4y-17=0$$

17. $12x+5y=212$ সরলরেখা হতে $x^2+y^2-2x-2y=167$ বৃত্তের উপর যে বিন্দুটির দূরত্ব ক্ষুদ্রতম তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O(1, 1) এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{1+1+167}=\sqrt{169}=13$

$12x+5y-212=0 \cdots (1)$ রেখার উপর লম্ব এবং কেন্দ্র O(1 ,1) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $5x-12y=5\times1-12\times1=-7$

$\Rightarrow 5x-12y+7=0 \cdots (2)$



(1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দু M হলে,

$$M\equiv\left(\frac{35-2544}{-144-25},\frac{-1060-84}{-144-25}\right)$$

$$=\left(\frac{-2509}{-169},\frac{-1144}{-169}\right)=\left(\frac{193}{13},\frac{88}{13}\right)$$

$$\therefore OM=\sqrt{\left(1-\frac{193}{13}\right)^2+\left(1-\frac{88}{13}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{32400+5625}{169}}=\sqrt{\frac{38025}{169}}=15$$

ধরি, নির্ণেয় বিন্দুটি A (α , β)।

$\therefore$ OA = 13 এবং

AM = OM − OA = 15 − 13 = 2

OA : AM = 13 : 2

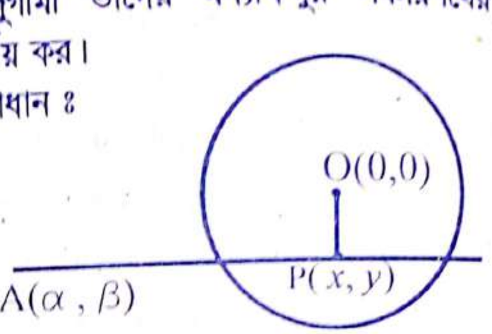
$$\therefore \alpha=\frac{13\times\frac{193}{13}+2\times1}{13+2}=\frac{195}{15}=13$$

$$\text{এবং } \beta=\frac{13\times\frac{88}{13}+2\times1}{13+2}=\frac{90}{15}=6$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13 , 6)।

18.(a) $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের যেসব জ্যা (α , β) বিন্দুগামী তাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=r^2$ এর কেন্দ্র O(0 , 0) এবং $A(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর P(x , y) যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে, $OP \perp AP$.

$\therefore$ OP এর ঢাল × AP এর ঢাল = −1

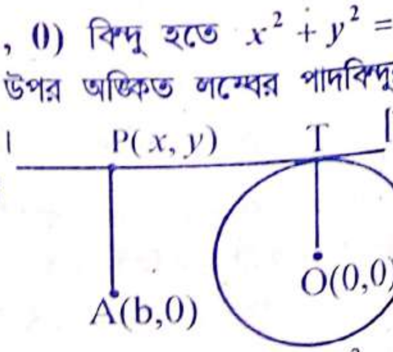
$$\Rightarrow \frac{0-y}{0-x}\times\frac{y-\beta}{x-\alpha}=-1$$

$$\Rightarrow y(y-\beta)=-x(x-\alpha)$$

$\therefore x(x-\alpha)+y(y-\beta)=0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

18. (b) (b , 0) বিন্দু হতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ



ধরি, A(b,0) বিন্দু হতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর P(x , y) যেকোন একটি বিন্দু PT যেকোন একটি স্পর্শক। তাহলে, $AP \perp PT$.

$$\therefore \text{PT স্পর্শকের ঢাল, } m=-\frac{b-x}{0-y}=\frac{b-x}{y}$$

$\therefore$ PT স্পর্শকের সমীকরণ,

$Y = mX \pm a\sqrt{m^2+1}$, যা P(x, y) বিন্দুগামী.

$\therefore\ y = mx \pm a\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow y = \frac{b-x}{y}x \pm a\sqrt{\frac{(b-x)^2}{y^2}+1}$

$\Rightarrow y^2 = bx - x^2 \pm a\sqrt{(b-x)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - bx = \pm a\sqrt{(b-x)^2+y^2}$

$\therefore\ (x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2\{(b-x)^2 + y^2\}$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

18 (c) (h , k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। (h, k) বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (h , k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 12 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{h^2 + k^2 - 12}$ এবং (h , k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের $= \sqrt{h^2 + k^2 + 5h + 5k}$

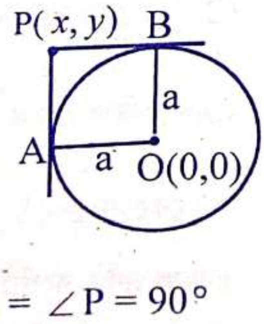
প্রশ্নমতে, $\sqrt{h^2+k^2-12} = 2\sqrt{h^2+k^2+5h+5k}$

$\Rightarrow h^2 + k^2 - 12 = 4(h^2 + k^2 + 5h + 5k)$

$\Rightarrow 3h^2 + 3k^2 + 20h + 20k + 12 = 0$

এখন h কে x দ্বার এবং k কে y দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $3x^2 + 3y^2 + 20x + 20y + 12 = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

18 (d) যেসব বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৮]



সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ এর কেন্দ্র O(0 , 0) এবং সঞ্চারপথের উপর P(x , y) যেকোন একটি বিন্দু থেকে অঙ্কিত PA ও PB স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব ।

PAOB চতুর্ভুজে, $\angle A = \angle B = \angle P = 90°$

$\therefore\ \angle O = 90°$. তাছাড়া, AO = OB = a

$\therefore$ PAOB একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

$\therefore\ PO^2 = PA^2 + AO^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + a^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 2a^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow y - mx = \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2(1 + m^2)$

$\Rightarrow (x^2 - a^2)m^2 - 2mxy + y^2 - a^2 = 0$

মূলদ্বয় m_1 ও m_2 হলে, শর্তমতে, $m_1 m_2 = -1$

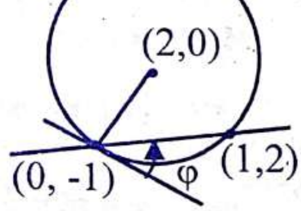
$\therefore\ \frac{y^2-a^2}{x^2-a^2} = -1 \Rightarrow y^2 - a^2 = -x^2 + a^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 2a^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

18(e) $3x - y - 1 = 0$ সরলরেখা $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ বৃত্তকে যে সূক্ষ্মকোণে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $(x-2)^2 + y^2 = 5 \cdots (1)$ এবং সরলরেখা $3x - y - 1 = 0$

অর্থাৎ $y = 3x - 1 \cdots (2)$



(1) এ y- এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5$

$\Rightarrow 10x^2 - 10x = 0$

$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

(2) হতে পাই, $y = -1, 2$

$\therefore$ (2) রেখা (1) বৃত্তকে (0, −1) ও (1,2) বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (2,0).

(0, −1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ (0, −1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল = − 2

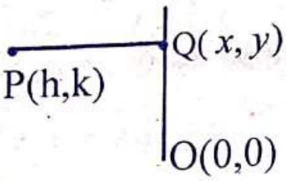
(2) রেখার ঢাল = 3.

ধরি, নির্ণেয় কোণ φ .

$\therefore\ \tan\varphi = \left|\frac{3+2}{1+3.(-2)}\right| = 1 \therefore\ \varphi = 45°$

18(f) দেখাও যে, P(h , k) বিন্দু থেকে মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের প্রাদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

প্রমাণ ঃ ধরি, P(h , k) বিন্দু থেকে মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর Q(x,y) যেকোন একটি বিন্দু ।



তাহলে, $OQ \perp PQ$

$\therefore$ OQ এর ঢাল $\times$ PQ এর ঢাল $= -1$

$\Rightarrow \frac{y}{x} \times \frac{y-k}{x-h} = -1 \Rightarrow y^2 - ky = -x^2 - hx$

$\Rightarrow \therefore x^2 + y^2 + hx + ky = 0$, যা একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

$\therefore$ সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত।

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

19. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a (১)

ধরি, x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ $y = \tan(\tan^{-1}\frac{2}{5})x + c$ (১)

$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x + c \Rightarrow 2x - 5y + 5c = 0 \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0 , 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|5c|}{\sqrt{4+25}} = a \Rightarrow |5c| = \sqrt{29}\,a$ (১)

$\Rightarrow 5c = \pm\sqrt{29}\,a \quad \therefore c = \pm\frac{\sqrt{29}a}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$2x - 5y + 5(\pm\frac{\sqrt{29}a}{5}) = 0.$

$\Rightarrow 2x - 5y \pm \sqrt{29}a = 0$ (Ans.) (১)

20. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a. (১)

ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$ অর্থাৎ $cx + by - ab = 0 \cdots (1)$

(1) রেখাটি অক্ষ দুইটির সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}bc$ (১)

প্রশ্নমতে ; $\frac{1}{2}bc = a^2 \Rightarrow bc = 2a^2 \cdots (2)$

আবার, (1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0 , 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।(১)

$\therefore \left|\frac{0-0-bc}{\sqrt{c^2+b^2}}\right| = a \Rightarrow b^2c^2 = a^2(b^2+c^2)$

$\Rightarrow b^2c^2 = \frac{bc}{2}(b^2+c^2)$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2bc \Rightarrow (b-c)^2 = 0$

$\therefore b - c = 0 \Rightarrow b = c$

$\therefore (2) \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = c = \pm\sqrt{2}a$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{\pm\sqrt{2}a} + \frac{y}{\pm\sqrt{2}a} = 1$

$\therefore x + y = \pm a\sqrt{2}$ (Ans.) (১)

21. দেখাও যে, x-অক্ষ $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4 + \frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2}$ (১)

এখন x-অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ এর দূরত্ব $= |$ কেন্দ্রের কোটি $| = |\frac{5}{2}| = \frac{5}{2} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ। (১)

$\therefore$ x-অক্ষ প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

২য় অংশ ঃ ধরি মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ (১)

$y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\frac{5}{2}$ এর সমান হবে। (১)

$\therefore \ |\frac{2m - 5/2}{\sqrt{m^2 + 1}}| = \frac{5}{2}$ (১)

$\Rightarrow \frac{(4m-5)^2}{4} = \frac{25}{4}(m^2 + 1)$

$\Rightarrow 16m^2 - 40m + 25 = 25m^2 + 25$

$\Rightarrow 9m^2 + 40m = 0 \ \therefore m = -\frac{40}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y = -\frac{40}{9}x$

$\therefore \ 40x + 9y = 0$ (Ans.) (১)

22. মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3y + x = 20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি ব্যাসের সমীকরণ $y = 3x$.

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots(1)$

(1) বৃত্ত মূলবিন্দুগামী। $\therefore \ c = 0$ (১)

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, $y = 3x$ ব্যাসের উপর অবস্থিত। (১)

$\therefore \ -f = 3(-g) \Rightarrow f = 3g \cdots(2)$

আবার, $3y + x = 20$ অর্থাৎ $x + 3y - 20 = 0$ রেখা (1) বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(-g, -f)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।

$\therefore \ \frac{|-g - 3f - 20|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ (১)

$\Rightarrow (g + 3f + 20)^2 = 10(g^2 + f^2)$ [$\because$ c=0]

$\Rightarrow (g + 9g + 20)^2 = 10(g^2 + 9g^2)$ [$\because$ f = 3g]

$\Rightarrow 100(g + 2)^2 = 100g^2$

$\Rightarrow g^2 + 4g + 4 = g^2 \Rightarrow g = -1$

(2) হতে পাই, $f = 3.(-1) = -3$

(1) এ f, g ও c এর মান বসিয়ে পাই, (১)

$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ (Ans.)

23. $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y=2x\cdots(1)$ হতে y এর মান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 + (2x)^2 = 10x$ (১)

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$

$\Rightarrow 5x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তবিন্দু দুইটি (0,0) এবং (2,4). (১)

(0,0) এবং (2,4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, (১)

$(x - 0)(x - 2) + (y - 0)(y - 4) = 0$

$\therefore \ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

এখন $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ বৃত্তের (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.2 + y.4 - (x + 2) - 2(y + 4) = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y - x - 2 - 2y - 8 = 0$ (১)

$\therefore \ x + 2y - 10 = 0$ (Ans.)

24. (3, –1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + y = 10$ রেখাকে (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (3, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0\cdots$ (1) (১)

(3, –1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) বৃত্ত ও $3x + y - 10 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-3)^2 + (y-1)^2}{(3-3)^2 + (-1-1)^2} = \frac{3x + y - 10}{3\times(3) + (-1) - 10} \quad (১)+(১)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1}{0 + 4} = \frac{3x + y - 10}{9 - 1 - 10}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10}{4} = \frac{3x + y - 10}{-2}$$

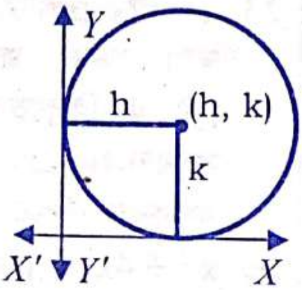
$\Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10 = -6x - 2y + 20$

$\therefore \ x^2 + y^2 = 10$ (Ans.)

25. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x = 0$, $y = 0$, $3x - 4y = 12$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$



বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore\ r = |k| = k$ এবং

$r = |h| = h$ (১)

[$\because$ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore h, k > 0$]

$\therefore\ h = k = r$ (১)

আবার, বৃত্তটি $3x - 4y = 12$ অর্থাৎ $3x - 4y - 12 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে।

অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ r এর সমান হবে।

$\therefore\ \dfrac{|3h - 4k - 12|}{\sqrt{9+16}} = r$ (১)

$\Rightarrow |3h - 4h - 12| = 5h$ [$\because h = k = r$]

$\Rightarrow |h + 12| = 5h \Rightarrow h + 12 = \pm 5h$

$\therefore\ 4h = 12 \Rightarrow h = 3$ অথবা, $-6h = 12 \Rightarrow h = -2$

কিন্তু $h > 0\ \therefore h = k = r = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ (১)

26. $2\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - y = 6$ রেখাকে (1, – 3) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের (1, – 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$x.1 + y.(-3) + g(x+1) + f(y-3) + c = 0$ (১)

$\Rightarrow x - 3y + gx + g + fy - 3f + c = 0$

$\Rightarrow (1+g)x + (-3+f)y + g - 3f + c = 0$

প্রশ্নমতে, এ রেখা এবং $3x - y = 6$ অভিন্ন।

$\therefore\ \dfrac{1+g}{3} = \dfrac{-3+f}{-1} = \dfrac{g-3f+c}{-6}$ (১)

$\dfrac{1+g}{3} = \dfrac{-3+f}{-1}$ হতে পাই, $1 + g = 9 - 3f$

$\Rightarrow g = 8 - 3f \cdots (2)$

$\dfrac{-3+f}{-1} = \dfrac{g-3f+c}{-6}$ হতে পাই,

$-18 + 6f = g - 3f + c$

$\Rightarrow c = -18 + 9f - g = -18 + 9f - 8 + 3f$

$= 12f - 26$

আবার (1) বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\therefore\ \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow (8-3f)^2 + f^2 - 12f + 26 = 40$ (১)

$\Rightarrow 64 - 48f + 9f^2 + f^2 - 12f - 14 = 0$

$\Rightarrow 10f^2 - 60f + 50 = 0$

$\Rightarrow f^2 - 6f + 5 = 0 \Rightarrow (f-5)(f-1) = 0$

$\therefore\ f = 1, 5$

$f = 1$ ধরে, $g = 8 - 3 = 5$, $c = 12 - 26 = -14$

$f = 5$ ধরে, $g = 8 - 15 = -7$, $c = 60 - 26 = 34$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 14 = 0$ এবং

$x^2 + y^2 - 14x + 10y - 34 = 0$ (১)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ (1, – 3) বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$. (১)

ধরি, এ বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখার ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 + k(3x-y-6) = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 3kx - ky - 6k = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2+3k)x + (6-k)y + 10 - 6k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) এর ব্যাসার্ধ $= 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\dfrac{2-3k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{k-6}{2}\right)^2 - 10 + 6k} = 2\sqrt{10}$ (১)

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}(4 - 12k + 9k^2 + k^2 - 12k + 36) - 10 + 6k = 40$

$\Rightarrow 4 - 12k + k^2 + k^2 - 12k + 36 - 200 + 24k = 0$

$\Rightarrow 10k^2 - 160 = 0 \Rightarrow k^2 = 16\ \therefore k = \pm 4$

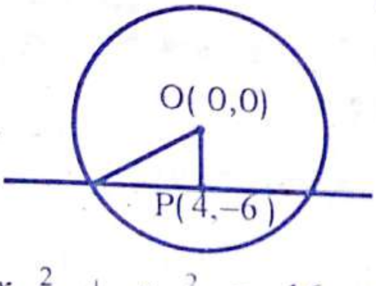
$\therefore$ (1) হতে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 14 = 0$ এবং

$x^2 + y^2 - 14x + 10y + 34 = 0$ (১)

27. $x^2 + y^2 = 16$ **বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (– 2 , 3) বিন্দুতে অবস্থিত।** [য.'০০]

সমাধান ঃ



প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 16$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(-2, 3)$. (১)

OP রেখার সমীকরণ $y = \frac{3}{-2}x \Rightarrow -2y = 3x$

$\Rightarrow 3x + 2y = 0$ (১)

$P(-2, 3$ বিন্দুগামী এবং $3x + 2y = 0$ রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$2x - 3y = 2.(-2) - 3.3 = -4 - 9 = -13$

$\therefore 2x - 3y + 13 = 0$ (Ans.) (১) + (১)

28. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ **ও** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ **বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 8x - 8y + 24 = 0$ (১)

$\therefore x - y + 3 = 0 \cdots (1)$ (Ans.)

এখন S_1 বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ

$r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 3} = \sqrt{2}$ (১)

কেন্দ্র $(-2, 1)$ হতে $x - y + 3 = 0$ এর লম্বদূরত্ব $d = \frac{|-2-1+3|}{\sqrt{1+1}} = 0$ (১)

$\therefore$ সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$= 2\sqrt{2-0} = 2\sqrt{2}$ একক। (১)

29. $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$ **বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ** $x - y + 2 = 0$. **উক্ত জ্যা এর দৈর্ঘ্য এবং এ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} = 0$ বৃত্তের (১)

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ এবং

ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{(\frac{29}{6})^2 + (\frac{19}{6})^2 - \frac{56}{3}}$ (১)

$= \sqrt{\frac{841 + 361 - 672}{36}} = \sqrt{\frac{530}{36}}$

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ থেকে $x - y + 2 = 0$

জ্যা এর লম্বদূরত্ব $d = \frac{|\frac{29}{6} - \frac{19}{6} + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{11}{3\sqrt{2}}$ (১)

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$ (১)

$= 2\sqrt{\frac{530}{36} - \frac{121}{18}} = 2\sqrt{\frac{530 - 242}{36}}$

$= 2\sqrt{\frac{288}{36}} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ একক।

২য় অংশ ঃ ধরি, প্রদত্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + k(x - y + 2) = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-\frac{29}{3} + k)x + (-\frac{19}{3} - k)y + \frac{56}{3} + 2k = 0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{29}{6} - \frac{k}{2}, \frac{19}{6} + \frac{k}{2})$, যা $x - 2y + 7 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (১)

$\therefore \frac{29}{6} - \frac{k}{2} - \frac{19}{3} - k + 7 = 0$ (১)

$\Rightarrow 29 - 3k - 38 - 6k + 42 = 0$

$\Rightarrow -9k = -33 \Rightarrow k = \frac{11}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + \frac{11}{3}(x - y + 2) = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 29x - 19y + 56 + 11x - 11y + 22 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2+y^2)-18x-30y+78=0$

$\therefore\ x^2+y^2-6x-10y+26=0$ (Ans.) (১)

30. $x^2+y^2-6x+8y+21=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2+y^2-6x+8y+21=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(3,-4)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{3^2+4^2-21}=2$ (১)

ধরি, x-অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $y+k=0 \cdots\cdots (1)$ (১)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(3,-4)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore\ \frac{|-4+k|}{\sqrt{1}}=2 \Rightarrow |-4+k|=2$ (১)

$\Rightarrow k-4=\pm 2\ \therefore k=6, 2$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$y+6=0,\ y+2=0$ (১)

31. $3x+4y=k$ রেখাটি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০১; ব.'০৩,'০৭; রা.'০৬; সি.'১২]

সমাধান ঃ $x^2+y^2=10x$ অর্থাৎ $x^2+y^2-10x=0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{5^2}=5$ (১)

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ থেকে $3x+4y=k$ অর্থাৎ $3x+4y-k=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $=\frac{|15-k|}{\sqrt{9+16}}$

$=\frac{|15-k|}{5}$ (১)

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে। (১)

$\therefore\ \frac{|15-k|}{5}=5 \Rightarrow |k-15|=25$

$\Rightarrow k-15=\pm 25\ \therefore k=40$ বা, -10 (১)

32. $ax+2y-1=0$ রেখাটি $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৪]

প্রমাণ ঃ $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(4,1)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{4^2+1^2-4}=\sqrt{13}$ (১)

বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 1)$ থেকে $ax+2y-1=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $=|\frac{4a+2-1}{\sqrt{a^2+4}}|=|\frac{4a+1}{\sqrt{a^2+4}}|$ (১)

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore\ |\frac{4a+1}{\sqrt{a^2+4}}|=\sqrt{13}$ (১)

$\Rightarrow (4a+1)^2=13(a^2+4)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 16a^2+8a+1=13a^2+52$

$\Rightarrow 3a^2+8a-51=0$

$\Rightarrow 3a^2+17a-9a-51=0$

$\Rightarrow a(3a+17)-3(3a+17)=0$

$\Rightarrow (3a+17)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3$ বা, $-17/3$ (১)

33. দেখাও যে, $x+2y=17$ রেখাটি $x^2+y^2-2x-6y=10$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[রা.'০২]**

প্রমাণ ঃ $x^2+y^2-2x-6y=10$ অর্থাৎ $x^2+y^2-2x-6y-10=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(1,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{1+9+10}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 3)$ থেকে $x+2y=17$ অর্থাৎ $x+2y-17=0$ রেখার লম্বদূরত্ব

$=\frac{|1+6-17|}{\sqrt{1+4}}$ (১)

$=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক। (১)

২য় অংশ ঃ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রম করে। অতএব, $x+2y=17$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র $(1,3)$ দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ,

$2x-y=2.1-3=-1$ (১) + (১)

$\therefore\ 2x-y+1=0$

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

34. (a) $(2, -3)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান: বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(2-3)^2+(-3-4)^2}$

$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ,

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{50})^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$ (Ans.)

(b) $2x^2+2y^2+10x-12y-1=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: $2x^2+2y^2+10x-12y-1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+5x-6y-\frac{1}{2}=0$ কে বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=\frac{5}{2}, f=-3, c=\frac{1}{2}$

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{\frac{25}{4}+9-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{25+36-2}{4}} = \sqrt{\frac{59}{4}} = \frac{\sqrt{59}}{2}$ (Ans.)

(c) $3x^2+3y^2+3x-6y-1=0$ দ্বারা x- অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x^2+3y^2+3x-6y-1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+x-2y-\frac{1}{3}=0$ কে বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=\frac{1}{2}, f=-1, c=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা x- অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ

$=2\sqrt{g^2-c} = 2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

(d) $3x^2+3y^2+10x-12y+c=0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x^2+3y^2+10x-12y+c=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+\frac{10}{3}x-4y+\frac{c}{3}=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{5}{3}, 2)$

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = |বৃত্তের কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক| = 2

(e) $(x-3)^2+(y+a)^2=r^2$ বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -a)$ এবং ব্যাসার্ধ $= r$

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore r = |3| = |-a|$

$\Rightarrow r = 3, |-a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$

(f) $(2,3)$ ও $(-1,-2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত দ্বারা x- অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(2,3)$ ও $(-1,-2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)(x+1)+(y-3)(y+2)=0$

$\Rightarrow x^2-x-2+y^2-y-6=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-x-y-8=0$

ইহাকে বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-\frac{1}{2}$, $f=-\frac{1}{2}, c=-8$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা x- অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ

$=2\sqrt{g^2-c} = 2\sqrt{\frac{1}{4}+8} = 2\sqrt{\frac{33}{4}} = \sqrt{33}$

(g) $(2,3)$ এবং $x^2+y^2+10x-12y-3=0$ বৃত্ত ও $x+y=1$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2+y^2+10x-12y-3=0$ বৃত্ত ও $x+y=1$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+10x-12y-3+k(x+y-1)=0$, যা $(2, 3)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 2^2+3^2+10\times2-12\times3-3+k(2+3-1)=0$

$\Rightarrow 4+9+20-36-3+4k=0$

$\Rightarrow 4k=6 \Rightarrow k=\frac{3}{2}$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2+y^2+10x-12y-3+\frac{3}{2}(x+y-1)=0$$
$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 20x-24y-6 + 3x + 3y-2= 0$
$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 23x - 21y - 8 = 0$

(h) $(1, 1)$, $(-1,-2)$ ও $(2,-2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $(1, 1)$, $(-1,-2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)(x+1) + (y-1)(y+2) + k\{(x-1)(1+2) - (y-1)(1+1)\} = 0$
$\Rightarrow x^2-1+ y^2 + y-2 + k(3x - 3 - 2y + 2) = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + y-3 + k(3x - 2y - 1) = 0$, যা $(2, -2)$ বিন্দুগামী।
$\therefore 2^2+ (-2)^2 + 2-3 + k\{3.2 -2(-2)-1\}= 0$
$\Rightarrow 4 + 4 - 1 + k(6 + 4 -1) = 0$
$\Rightarrow 9k = -7 \Rightarrow k = -\frac{7}{9}$
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,
$$x^2 + y^2 + y-3 - \frac{7}{9}(3x - 2y - 1) = 0$$
$\Rightarrow 9x^2 + 9y^2 + 9y - 27- 21x + 14y + 7= 0$
$\therefore 9x^2 + 9y^2 - 21x + 23y - 20 = 0$

(i) পোলগামী বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(5, 60^0)$.

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a। তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ,
$a^2 = r^2 + 5^2 - 2r.5\cos(\theta - 60^0) \cdots (1)$
(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$ বিন্দুগামী বলে,
$a^2 = 0^2 + 25 - 10.0.\cos(0^0 - 60^0)$
$\Rightarrow a = 5.$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,
$25 = r^2 + 25 - 10r\cos(\theta - 60^0)$
$\Rightarrow r^2 = 10r\cos(\theta - 60^0)$

(j) $r^2 - 4r(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta) + 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $r^2 - 4r(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta) + 15 = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$g = -2\sqrt{3}$, $f = 2$, $c = 15.$
$\therefore \sqrt{g^2+f^2} = \sqrt{12+4} = 4$, $\tan^{-1}\frac{-f}{-g} = \tan^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$
$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $(4, -\frac{\pi}{6})$

(k) একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 8 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IV B এর 18(b) দ্রষ্টব্য।

(l) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(5, -7)$ এবং তা y-অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $=|$বৃত্তটির কেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক$|$ $= |5| = 5$
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-5)^2 + (y + 7)^2 = 5^2$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 14y + 49 = 25$
$\Rightarrow x^2 + y^2 -10x + 14y + 49 = 0$ (Ans.)

(m) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -3)$
$\therefore$ $(2, 5)$ ও $(4, -3)$ বিন্দুগামী রেখা নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ,
$(x - 2)(5 + 3) - (y-5)(2 - 4) = 0$
$\Rightarrow 8(x - 2) + 2(y - 5) = 0$
$\Rightarrow 4x - 8 + y - 5 = 0$
$\Rightarrow 4x + y - 13 = 0$ (Ans.)

(n) $y - 3x = 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $y - 3x = 10 \Rightarrow y = 3x + 10 \cdots (i)$
এর মান বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$x^2 + (3x + 10)^2 = 10$
$\Rightarrow x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 10 = 0$
$\Rightarrow 10x^2 + 60x + 90 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 2.x.3 + 3^2 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -3, y = 3.(-3) + 10 = 1$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-3, 1)$ (Ans.)

(o) $(2, -1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $4x - y - 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $(2, -1)$ হতে $4x - y - 8 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{|4\times2-(-1)-8|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|8+1-8|}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (\frac{1}{\sqrt{17}})^2$$

$\Rightarrow 17(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1) = 1$

$\Rightarrow 17x^2 + 17y^2 - 68x + 34y + 85 - 1 = 0$

$\Rightarrow 17x^2 + 17y^2 - 68x + 34y + 84 = 0$

[বি.দ্র.: বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয়, একটি জ্যা কোনো বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় ইত্যাদি ২ নম্বর প্রশ্নের জন্য উপযোগী ।]

35. (a) $A(2,3)$ ও $B(-1,-2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা AB ও অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র দিয়া অতিক্রম করে।

সমাধান: AB এর সমীকরণ,

$(x-2)(3+2) - (y-3)(2+1) = 0$

$\Rightarrow 5x - 10 - 3y + 9 = 0 \Rightarrow 5x - 3y - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{1/5} + \frac{y}{-1/3} = 1$$

$\therefore$ AB ও অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$(\frac{1/5}{3}, \frac{-1/3}{3}) = (\frac{1}{15}, \frac{-1}{9})$$

ধরি, $A(2,3)$ ও $B(-1,-2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$(x-2)(x+1) + (y-3)(y+2) + k\{(x-2)(3+2) - (y-3)(2+1)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 + y^2 - y - 6 + k\{5x - 10 - 3y + 9\} = 0$, যা $(\frac{1}{15}, \frac{-1}{9})$ বিন্দুগামী।

$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - y - 8 + k\{5x - 3y - 1\} = 0$, যা $(\frac{1}{15}, \frac{-1}{9})$ বিন্দুগামী।

$$\therefore (\frac{1}{15})^2 + (\frac{-1}{9})^2 - \frac{1}{15} - (\frac{-1}{9}) - 8 + k\{5.\frac{1}{15} - 3(\frac{-1}{9}) - 1\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{225} + \frac{1}{81} - \frac{1}{15} + \frac{1}{9} - 8 + k(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2331 - 147015}{18225} - \frac{1}{3}k = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{3(-144684)}{18225} = -\frac{16076}{675}$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - x - y - 8 - \frac{16076}{675}\{5x - 3y - 1\} = 0$$

$\Rightarrow 675x^2 + 675y^2 - 675x - 675y - 5400 - 80380x + 48228y + 16076 = 0$

$\Rightarrow 675x^2 + 675y^2 - 81055x + 47553y - 80380x + 48228y + 10676 = 0$

(b) $A(3,1)$ ও $B(6,3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় হতে সমপরিমাণ অংশ ছেদ করে।

সমাধান: ধরি, $A(3,1)$ ও $B(6,3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$(x-3)(x-6) + (y-1)(y-3) + k\{(x-3)(1-3) - (y-1)(3-6)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 4y + 3 + k\{-2x + 6 + 3y - 3\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9 - 2k)x + (-4 + 3k)y + 21 + 3k = 0$, যা অক্ষদ্বয় হতে সমপরিমাণ অংশ ছেদ করে।

$$\therefore (\frac{-9-2k}{2})^2 = (\frac{-4+3k}{2})^2$$

$\Rightarrow 2k + 9 = \pm(3k - 4)$

$\therefore 2k + 9 = 3k - 4 \Rightarrow k = 13$,

$2k + 9 = -3k + 4 \Rightarrow k = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (-9 - 26)x + (-4 + 39)y + 21 + 39 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 35x + 35y + 60 = 0$

অথবা, $x^2 + y^2 + (-9 + 2)x + (-4 - 3)y + 21 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x - 7y + 18 = 0$

(c) $5x + 4y = 20$ সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র ও ভরকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $5x + 4y = 20 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ (ধরি) OAB এর শীর্ষত্রয় O(0, 0), A(4, 0) এবং B(0, 5)

এখানে, OAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

ΔOAB এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র AB অতিভুজের মধ্যবিন্দু $= (\frac{4+0}{2}, \frac{0+5}{2}) = (2, \frac{5}{2})$

আবার, ΔOAB এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{0+4+0}{3}, \frac{0+0+5}{3}) = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(2-\frac{4}{3})^2 + (\frac{5}{2}-\frac{5}{3})^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + (\frac{5}{6})^2}$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{16+25}{36}} = \frac{\sqrt{41}}{6}$ একক।

(d) (7, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 + 10x - 12y - 3 = 0$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

সমাধান: $x^2 + y^2 + 10x - 12y - 3 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (−5, 6) এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25 + 36 + 3} = \sqrt{25 + 36 + 3} = 8$

(7, 1) ও (−5, 6) কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব

$= \sqrt{(7+5)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ r।

প্রশ্নমতে, $r + 8 = 13 \Rightarrow r = 13 - 8 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 14x - 2y = 0$ (Ans.)

(e) $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং A(2, − 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 - 6x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $O(3, -\frac{5}{2})$

$\therefore$ A(2, − 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ =

$OA = \sqrt{(3-2)^2 + (-\frac{5}{2}+1)^2}$

$= \sqrt{1 + (-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}}$

$\therefore$ A(2, − 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = (\sqrt{\frac{13}{4}})^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 5y + \frac{25}{4} = \frac{13}{4}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5y + 3 = 0$

(f) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 3 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক।

সমাধান: নির্ণেয় বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে 3 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে বলে ইহা (−3, 0) ও (3, 0) বিন্দুগামী হবে।

ধরি, (−3, 0) ও (3, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + 3)(x - 3) + (y-0)(y-0) + k\{(x + 3)(0-0) - (y - 0)(-3 - 3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9 + y^2 + 6ky = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6ky - 9 = 0$

ইহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, − 3k) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{0^2 + (-3k)^2 + 9} = \sqrt{9k^2 + 9}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{9k^2 + 9} = 5 \Rightarrow 9k^2 + 9 = 25$

$\Rightarrow 9k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm\frac{4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 6(\pm\frac{4}{3})y - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \pm 8y - 9 = 0$

(g) 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=5^2 \cdots$ (i)

(i) বৃত্তটি x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore |k|=5 \Rightarrow k=\pm 5$ এবং

$(2-h)^2+(0\pm 5)^2=25$

$\Rightarrow (2-h)^2=0 \Rightarrow h=2$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশ $=2\sqrt{r^2-h^2}$

$=2\sqrt{5^2-2^2}=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$ (Ans.)

(h) $(2, 3)$ বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র $x+y=3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সমাধান: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \cdots$ (i),

যেখানে, $h>0, k>0$

(i) বৃত্তটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী।

$\therefore (2-h)^2+(3-k)^2=r^2 \cdots\cdots$ (ii)

(i) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $r=k \cdots$ (iii)

আবার, (i) বৃত্তটির কেন্দ্র (h, k) প্রদত্ত রেখা $x+y=3$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore h+k=3 \Rightarrow h=3-k \cdots\cdots$ (iv)

(i) এ r ও h এর মান বসিয়ে পাই,

$(2-3+k)^2+(3-k)^2=k^2$

$\Rightarrow k^2-2k+1+k^2-6k+9=k^2$

$\Rightarrow k^2-8k+10=0$

$$\therefore k=\frac{8\pm\sqrt{64-4.1.10}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{64-40}}{2}$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{24}}{2}=4\pm\sqrt{6}$$

(iv) হতে, $h=3-4\pm\sqrt{6}$

$\therefore h=-1+\sqrt{6}$, $[\because h>0]$

(iii) হতে, $r=k=4\pm\sqrt{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x+1-\sqrt{6})^2+(y-4\pm\sqrt{6})^2=(4\pm\sqrt{6})^2$

(i) $\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $x+y=1$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots$ (i)

(i) বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow g^2+f^2-c=10 \cdots\cdots$ (ii)

(i) বৃত্তটি $(-1, -1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 1+1-2g-2f+c=0$

$\Rightarrow 2g+2f-c=2 \cdots\cdots$ (iii)

(i) বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ প্রদত্ত রেখা $x+y=1$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore -g-f+1=0 \Rightarrow g+f=1 \cdots\cdots$ (iv)

$2\times$(iv) $-$ (iii) $\Rightarrow c=2-2 \Rightarrow c=0$

(ii) ও (iv) হতে পাই, $g^2+(1-g)^2-0=10$

$\Rightarrow g^2+1-2g+g^2=10 \Rightarrow 2g^2-2g-9=0$

$$\therefore g=\frac{2\pm\sqrt{4-4.2(-9)}}{2.2}=\frac{2\pm\sqrt{4+72}}{4}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{76}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{19}}{2}=\frac{1+\sqrt{19}}{2},\frac{1-\sqrt{19}}{2}$$

$$\therefore f=1-g=1-\frac{1+\sqrt{19}}{2},1-\frac{1-\sqrt{19}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{19}}{2},\frac{1+\sqrt{19}}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+(1+\sqrt{19})x+(1-\sqrt{19})y=0$

অথবা, $x^2+y^2+(1-\sqrt{19})x+(1+\sqrt{19})y=0$

(j) $x^2+y^2-4x-6y=5$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $5x-12y-3=0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{4+9+5}=3\sqrt{2}$

ধরি, $5x-12y-3=0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ, $5x-12y+k=0 \cdots\cdots$ (i)

(i) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক বলে, বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) থেকে (i) এর লম্ব দূরত্ব $\frac{|5\times2-12\times3+k|}{\sqrt{5^2+12^2}}$ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \frac{|5\times2-12\times3+k|}{\sqrt{5^2+12^2}} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |10-36+k| = 39\sqrt{2}$

$\Rightarrow |k-26| = 39\sqrt{2}$

$\Rightarrow k-26 = \pm39\sqrt{2} \Rightarrow k = 26\pm39\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$5x-12y+26\pm39\sqrt{2} = 0$

(k) $(-3, -1)$ বিন্দু থেকে $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ঃ $x^2+y^2-4x-6y-3=0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(2,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{4+9+3}=4$

ধরি, $(-3, -1)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ

$y+1 = m(x+3)$

$\Rightarrow mx-y+3m-1 = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ 4 এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|2m-3+3m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 4 \Rightarrow \frac{|5m-4|}{\sqrt{m^2+1}} = 4$

$\Rightarrow (5m-4)^2 = 16(m^2+1)$

$\Rightarrow 25m^2-40m+16 = 16m^2+16$

$\Rightarrow 9m^2-40m = 0 \Rightarrow m(9m-40) = 0$

$\Rightarrow m = 0, \frac{40}{9}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $y+1=0$ এবং

$y-4 = \frac{40}{9}(x+5)$

$\Rightarrow 9y-36 = 40x+200$

$\therefore 40x-9y+236 = 0$

(l) $y=2x$ রেখাটি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2+y^2-10x=0$ বৃত্ত ও এর $y=2x$ জ্যা এর ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2-10x+k(2x-y)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(-10+2k)x-ky=0$, যার কেন্দ্রে $(5-k, \frac{k}{2})$ ব্যাস $y=2x$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{k}{2} = 2(5-k) \Rightarrow k = 20-4k \Rightarrow 5k = 20$

$\Rightarrow k = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2-10x+4(2x-y)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-10x+8x-4y=0$

$\therefore x^2+y^2-2x-4y=0$ (Ans.)

(m) $x^2+y^2=10$ বৃত্তটিকে $y-3x=10$ রেখাটি স্পর্শ করবে কিনা যাচাই করে স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2+y^2=10 \cdots$ (i) বৃত্তের সমীকরণে $y-3x=10 \Rightarrow y=3x+10 \cdots$ (ii) এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+(3x+10)^2 = 10$

$\Rightarrow x^2+9x^2+60x+100 = 10$

$\Rightarrow 10x^2+60x+90 = 0$

$\Rightarrow x^2+6x+9 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0$

$\therefore x=-3, y=3.(-3)+10=1$

$\therefore$ (ii) সরলরেখা (i) বৃত্তকে কেবল $(-3, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, (i) বৃত্তকে (ii) সরলরেখা স্পর্শ করবে।

ধরি, ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক (a, b). তাহলে (a, b) ও $(-3, 1)$ এর মধ্যবিন্দু হবে (i) বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$.

$\therefore (\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}) = (0, 0)$

$\therefore \frac{a-3}{2} = 0 \Rightarrow a=3, \frac{b+1}{2} = 0 \Rightarrow b=-1$

$\therefore$ ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(3, -1)$

(n) $(3, -2)$ বিন্দুগামী একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(3, -1)$ বিন্দুগামী একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: যে বৃত্ত x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে তার কেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক = 2 এবং

ব্যাসার্ধ r = | কেন্দ্রের y- স্থানাঙ্ক | = $|h|$ (ধরি)

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-2)^2+(y-h)^2=|h|^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2hy+h^2=h^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2hy=0 \cdots\cdots$ (i)

(i) বৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 3^2+(-2)^2-4.3-2h(-2)+4=0$

$\Rightarrow 9+4-12+4h+4=0 \Rightarrow 4h=-5$

$\Rightarrow h=-\frac{5}{4}$

$\therefore$ (i) হতে, $x^2+y^2-4x-2(-\frac{5}{4})y+4=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-2(-\frac{5}{4})y+4=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4=0$

এখন, $(0, 0)$ বিন্দু থেকে এ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$(x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4)\{0^2+0^2-4.0+\frac{5}{2}.0+4\}=\{x.0+y.0-2(x+0)+\frac{5}{4}(y+0)+4\}^2$, [$SS_1=T^2$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow 4(x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4)=(-2x+\frac{5}{4}y+4)^2$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2-16x+10y+16=4x^2+\frac{25}{16}y^2+16-5xy-16x+10y$

$\Rightarrow (4-\frac{25}{16})y^2+5xy=0$

$\Rightarrow y\{(64-25)y+80x\}=0$

$\Rightarrow y=0, 39y+80x=0$

$\therefore$ মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ $80x+39y=0$ (Ans.)

(o) $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ ও $x^2+y^2-4x+6y-21=0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $S_1\equiv x^2+y^2+4x-2y+3=0$ ও $S_2\equiv x^2+y^2-4x+6y-21=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1-S_2=0 \Rightarrow 8x-8y+24=0$

$\Rightarrow x-y+3=0 \cdots\cdots$ (i)

$x^2+y^2+4x-2y+3=0$ বৃত্ত ও (i) সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+4x-2y+3+k(x-y+3)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(4+k)x+(-2-k)y+3+3k=0$

প্রশ্নমতে, এ বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{k+4}{2}, \frac{k+2}{2})$, (i) সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে।

$\therefore -\frac{k+4}{2}-\frac{k+2}{2}+3=0$

$\Rightarrow -k-4-k-2+6=0 \Rightarrow k=0$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+4x-2y+3=0$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. **Sol^n :** $\sqrt{2^2+3^2-c}=3$
   $\Rightarrow c=13-9=4 \therefore$ Ans. (d)
2. **Sol^n :** সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)
3. **Sol^n :** $r=\sqrt{4^2+3^2}=5 \therefore$ ব্যাস $=10$
   $\therefore$ Ans. (c)
4. **Sol^n :** $(x-h)^2+(y-k)^2=k^2$
   $\therefore$ Ans. (b)
5. **Sol^n :** উভয় অক্ষ কে স্পর্শ করার শর্ত $g^2=f^2=c$
   $\therefore k=\pm 4, c=16 \therefore$ Ans.(c)
6. **Sol^n :** বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী বলে, $c=0$ এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $f^2=c=0$. $\therefore$ Ans.(c)

7. **Sol^n :** $(0,1)$ ও $(1,0)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু স্থানাঙ্ক $(\frac{0+1}{2},\frac{1+0}{2})$ বৃত্তের কেন্দ্র। $\therefore$ Ans.(c)

8 **Sol^n :** বৃত্তটির ব্যাস 10. $\therefore$ Ans.(c)

9 **Sol^n :** $r = a\cos\theta \Rightarrow r^2 = a.\, r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2-ax=0$ $\therefore$ কেন্দ্র $(\frac{a}{2},0)$

$\therefore$ Ans.(a)

10. **Sol^n :** সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $x^2+y^2+2x+3y+1-(x^2+y^2+4x+3y+2)=0$

$\Rightarrow 2x+1=0$ $\therefore$ Ans.(d)

11. **Sol^n :** ব্যাসার্ধ $=\sqrt{3^2+4^2-15}=\sqrt{10}$,

y-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{4^2-15}=2.$

$\therefore$ Ans.(b)

12. **Sol^n :** $y=\frac{-4}{3}x \Rightarrow 4x+3y=0$.

$\therefore$ Ans (c)

13. **Sol^n :** ধরি, y-অক্ষের সমান্তরাল বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ, $x=a \Rightarrow x-a=0$.

$\therefore \frac{3-a}{\sqrt{1}}=\pm 4$

$\Rightarrow a=3-4,\ 3+4$ অর্থাৎ $-1, 7$

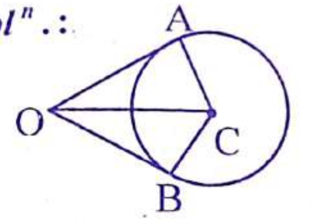
$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $x+1=0,\ x-7=0$

$\therefore$ Ans. (c)

14. *Sol^n* .: $x^2+y^2+2x+4y-1/3=0$
কেন্দ্র $=(-2/2, -4/2)=(-1,-2)$ $\therefore$ Ans. (d)

15. *Sol^n* .: বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{4^2+3^2}=5$
$(4, 3)$ ও $(1, 3)$ এর দূরত্ব $=|4-1|=3$
$(4, 3)$ ও $(9, 3)$ এর দূরত্ব $=|4-9|=5$
$(4, 3)$ ও $(0, 2)$ এর দূরত্ব $=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$
$(4, 3)$ ও $(8, 4)$ এর দূরত্ব $=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$
$(9, 3)$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। $\therefore$ Ans. (b)

16. *Sol^n* .:



বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$
$OA=OB=\sqrt{0+c}=\sqrt{c}$
OABC চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল
$=2\times OAC$ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
$=2\times\frac{1}{2}(OA\times AC)$
$=\sqrt{c}\,\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$
$\therefore$ Ans. (b)

17. *Sol^n* .: বৃত্তটির কেন্দ্র $(2, -3)$.

$\therefore$ ব্যাসটির সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-5}=\frac{y+3}{-3-7}$

$\Rightarrow -10x+20=-3y-9$

$\Rightarrow 10x-3y-29=0$ $\therefore$ Ans.(a)

18. *Sol^n* .: $(0, -1)$ বিন্দু দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়
বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $=2\sqrt{4+9-5}=2\sqrt{8}$ এবং
$\sqrt{1+1-4+6+5}=3$. $\therefore$ Ans. (c)

19. *Sol^n* . বৃত্তের সমীকরণে xy এর সহগ শূন্য।
$\therefore\ -2+k=0 \Rightarrow k=2$. $\therefore$ Ans. (c)

20. *Sol^n* . x^2 ও y^2 এর সহগ সমান। তাই $a=2$

$\therefore$ Ans. (a)

21. *Sol^n* . $4^2+(-3)^2-16=9>0$
$\therefore$ বৃত্তের বাইরে। $\therefore$ Ans. (c)

22. *Sol^n* . ব্যাসার্ধ $=\sqrt{12^2+5^2-0}=13$

$\therefore$ Ans. (c)

23. *Sol^n* . প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2+3x+5y-\frac{1}{2}=0$

$\therefore r=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{5}{2})^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9+25+2}{4}}=3$

$\therefore$ Ans. (a)

24. *Sol*^{n}. $(x-9)(x+5)+(y+9)(y-5)=0$
$\Rightarrow x^2-4x-45+y^2+4y-45=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-4x+4y-90=0$
$\therefore$ Ans.(b)

25. *Sol*^{n}. প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-2,-3)$.
নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-8x-10y=(-2)^2+(-3)^2-8(-2)-10(-3)$
$\Rightarrow x^2+y^2-8x-10y-59=0 \therefore$ Ans.(d)

26. *Sol*^{n}. (a) option টির কেন্দ্র $(-1, 11)$, যা প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত। $\therefore$ Ans.(a)

27. *Sol*^{n}. $x^2+y^2-2.5x-2.5y+5^2=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-10x-10y+25=0$
$\therefore$ Ans.(d)

28. *Sol*^{n}. প্রদত্ত option গুলোর মধ্যে (c) এর ক্ষেত্রে $g^2=c$. $\therefore$ Ans.(c)

29. *Sol*^{n}. ত্রিভুজটির বাহু a হলে, $\frac{a}{\sin A}=2R$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin 60^0}=2.1 \Rightarrow a=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore$ Ans.(c)

30. *Sol*^{n}. $x^2+y^2-5bx+12by=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{5b}{2},-6b)$

$\therefore$ মূলবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ,
$-6bx-\frac{5b}{2}y=0 \Rightarrow 12x+5y=0$

$\therefore$ Ans.(b)

31. *Sol*^{n}. x অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{r^2-k^2}=2\sqrt{3^2-3^2}=0$

$\therefore$ Ans. (a)

32. *Sol*^{n}. $S_1-S_2=0$
$\Rightarrow -2x-1=0 \Rightarrow 2x=-1$ $\therefore$ Ans. (a)

33. *Sol*^{n}. $x^2+y^2+3x-2y-\frac{11}{4}=0$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+1^2+\frac{11}{4}}$
$=\sqrt{\frac{9+4+11}{4}}=\sqrt{\frac{24}{4}}=\sqrt{6}$

$\therefore$ Ans.(d)

34. *Sol*^{n}. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{16+9-16}=3$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\pi r^2=9\pi$ $\therefore$ Ans.(b)

35. *Sol*^{n}. $\therefore$ (4, 1) বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।
$\therefore$ Ans. (a)

36. *Sol*^{n}. $x^2+2y^2=4$ একটি বৃত্তের সমীকরণ নয়
$\therefore$ Ans. (b)

37. *Sol*^{n}. বৃত্তটির y অক্ষের ছেদকৃত অংশের পরিমাণ
$=2\sqrt{f^2-c}$
$=2\sqrt{9-1}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ $\therefore$ Ans. (c)

38. *Sol*^{n}. ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$
$=\sqrt{4+9-1}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (c)

39. *Sol*^{n}. $3x^2+3y^2-6x-9y-3=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-2x-3y-1=0$
$\therefore$ x-অক্ষের ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{g^2-c}$
$=2\sqrt{1^2+1}=2\sqrt{2}$ $\therefore$ Ans. (a)

40. *Sol*^{n}. বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1-S_2=0$
$\Rightarrow -x-y+6=0 \Rightarrow x+y-6=0$
$\therefore$ Ans. (c)

41. Sol^n.: $(x-2)^2+(y+3)^2=3^2$ $\therefore$ Ans. (d)

42. *Sol*^{n}. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে ছেদ করবে না, যখন $g^2<c$ হবে। $\therefore$ Ans. (a)

43. *Sol*^{n}. ব্যাসার্ধ $=|$ কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক $|=4$
$\therefore$ Ans. (b)

44. *Sol*^{n}. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

45. ***Sol*"**. কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(-\frac{1}{2\times3}, \frac{-2}{2\times3})$

$=(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ $\therefore$ Ans. (c)

46. ***Sol*"**. y – অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য
$=2\sqrt{f^2-c}$ $=2\sqrt{4+1}=2\sqrt{5}$ $\therefore$ Ans. (c)

47. ***Sol*"**. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য
$=\sqrt{1^2+(-1)^2-3(1)-4(-1)+7}$
$=\sqrt{1+1-3+4+7}$ $=\sqrt{10}$ $\therefore$ Ans. (b)

48. ***Sol*"**. বৃত্তের সমীকরণ, $(x+3)^2+y^2=3^2$
$\Rightarrow x^2+6x+y^2=0$ $\therefore$ Ans. (b)

49. ***Sol*"**. বৃত্তটির যে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল উহার সমীকরণ,
$x=2(-3) \Rightarrow x+6=0$ $\therefore$ Ans. (d)

50. ***Sol*"**. কেন্দ্রের স্থানাংক
$=(-\frac{-5}{2\times2}, -\frac{7}{2\times2})=(\frac{5}{4}, -\frac{7}{4})$ $\therefore$ Ans. (a)

51. ***Sol*"**. $2x^2+2y^2=20x-32$
$\Rightarrow$ $x^2+y^2-10x+16=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক
$=(-\frac{-10}{2}, -\frac{0}{2})=(5,0)$ $\therefore$ Ans. (b)

52. ***Sol*"**. (2,0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,
$2.x+y.0-5(x+2)+16=0$
$\Rightarrow 2x-5x-10+16=0$
$\Rightarrow -3x+6=0 \Rightarrow x-2=0$ $\therefore$ Ans. (c)

53. ***Sol*"**. বৃত্তের কেন্দ্র $=(6,-2)$, যা $x+3y=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে $\therefore$ Ans. (c)

54. ***Sol*"**. স্পর্শকের সমীকরণ,
$x.0+y.2-(x+0)-2(y+2)+4=0$
$\Rightarrow 2y-x-2y-4+4=0 \Rightarrow x=0$ $\therefore$ Ans. (a)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত):

1. **$x^2+y^2-5x=0$ ও $x^2+y^2+3x=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব কত? [DU 06-07]**

***Sol*"**. কেন্দ্র $(\frac{5}{2},0)$ ও $(-\frac{3}{2},0)$ এর দূরত্ব $=|\frac{5}{2}+\frac{3}{2}|$

2. **$x^2+y^2-4x-6y+c=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান– [DU 00-01,01-02; RU 07-08; NU 05-06]**

***Sol*"**. $c=$ (x এর সহগের অর্ধেক $)^2=4$

3. **$x^2+y^2-4x-6y+4=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক – [NU 07-08]**

***Sol*"**. স্পর্শবিন্দু $\equiv$ ($-$x এর সহগের অর্ধেক,0)=(2,0)

4. **$x^2+y^2=81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হলে জ্যা এর সমীকরণ – [JU 05-06; KU 03-04]**

***Sol*"**. $x.(-2)+y.3=(-2)^2+3^2$
$\Rightarrow 2x-3y+13=0$

5. **$x^2+y^2-4x+6y-36=0$ এবং $x^2+y^2-5x+8y-43=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ [RU 07-08; KUET 05-06]**

***Sol*"**. $(-4+5)x+(6-8)y-36+43=0$
$\Rightarrow x-2y+7=0$

6. **(4,3) বিন্দুতে কেন্দ্র ধরে কত ব্যাসার্ধ বৃত্ত অঙ্কন করলে $x^2+y^2=4$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে? [IU07-08]**

***Sol*"**. $r\pm2=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$
$\therefore$ $r=7$ বা, 3

7. **$(x-3)^2+(y-4)^2=25$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে 3 একক দূরত্বে অবস্থিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য – [IU 07-08]**

***Sol*"**. জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{5^2-3^2}=8$

8. **$x^2+y^2=100$ বৃত্ত দ্বারা $x+7y-50=0$ রেখার ছেদাংশের পরিমাণ – [KU 07-08]**

***Sol*"**. এখানে $r=10, d=\frac{|0+0-50|}{\sqrt{1+49}}=\sqrt{50}$

$\therefore$ ছেদাংশের পরিমাণ $=2\sqrt{r^2-d^2}$
$=2\sqrt{100-50}=2\sqrt{50}=10\sqrt{2}$

9. **$2x-3y-9=0$ রেখাটি যে বৃত্তকে স্পর্শ করে তার কেন্দ্র (1,2) এর ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{5+c}$। c এর মান কত? [RU 06-07]**

Sol^n. $r = \sqrt{5+c} = \dfrac{|2.1-3.2-9|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \sqrt{13}$

$\therefore\ c = 13-5 = 8$

10. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং এবং $2x + \sqrt{5}\,y - 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ হবে– [CU-07-08; JU 07-08]

Sol^n. $(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\dfrac{2.0+5.0-1}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}})^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = \dfrac{1}{9}\ \therefore 9(x^2+y^2) = 1$

11. মূলবিন্দু থেকে (1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে বৃত্তটির সমীকরণ– [RU 07-08]

Sol^n. (1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত $x^2+y^2-2x-4y+c = 0$ এবং (0,0) বিন্দু থেকে এ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{c}$. $\therefore \sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-4y+4 = 0$

12. একটি বৃত্তের সমীকরণ হল $2x^2+2y^2 = 25$। 5 একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি জ্যা কেন্দ্রে কত রেডিয়ান কোণ তৈরী করবে? [SU 06-07]

Sol^n. $2x^2+2y^2 = 25 \Rightarrow x^2+y^2 = (\dfrac{5}{\sqrt{2}})^2$

$$\cos\theta = \frac{(5/\sqrt{2})^2+(5/\sqrt{2})^2-5^2}{2.\frac{5}{\sqrt{2}}.\frac{5}{\sqrt{2}}} = 0$$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. A(2, – 4), B(–3, 1) এবং C(1, 1) তিনটি বিন্দু।

(a) C বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র A বিন্দুতে অবস্থিত।

সমাধান :নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = AC

$= \sqrt{(2-1)^2+(-4-1)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)^2+(y+4)^2 = (\sqrt{26})^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+8y+16-26 = 0$

$\therefore x^2+y^2-4x+8y-6 = 0$ (Ans.)

(b) A, B ও C বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে A(2, –4) ও B(–3, 1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-2)(x+3)+(y+4)(y-1)+$
$k\{(x-2)(-4-1)-(y+4)(2+3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2+x-6+y^2+3y-4+$
$k(-5x+10-5y-20) = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+x+3y-10+$
$k(-5x-5y-10) = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি C(1, 1) বিন্দুগামী বলে,
$1+1+1+3-10+k(-5-5-10) = 0$

$\Rightarrow -20\,k = 4 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{5}$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2+y^2+x+3y-10-$
$\dfrac{1}{5}(-5x-5y-10) = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+x+3y-10+x+y+2 = 0$

$\therefore x^2+y^2+2x+4y-8 = 0$, যার ব্যাসার্ধ

$= \sqrt{1^2+2^2+8} = \sqrt{1+4+8} = \sqrt{13}$

(c) A ও B কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের AB ব্যাসের সমান্তরাল স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : A(2 , –4) ও B(–3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = AB এর মধ্যবিন্দু $= (\dfrac{2-3}{2}, \dfrac{-4+1}{2}) = (-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2+3)^2+(-4-1)^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{25+25} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

আবার, A ও B বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ, $\dfrac{x-2}{2+3} = \dfrac{y+4}{-4-1}$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+4}{-5} \Rightarrow x-2 = -y-4$

$\Rightarrow x+y+2=0$

ধরি, $x+y+2=0$ ব্যাসের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $x+y+k=0 \cdots$ (ii)

(i) বৃত্ত (ii) রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\frac{5}{\sqrt{2}}$ এর সমান হবে।

$\therefore \dfrac{|-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+k|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow k-2 = \pm 5 \Rightarrow k = 2 \pm 5 \Rightarrow k = 7, -3$

(ii) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x+y+7=0$ এবং $x+y-3=0$

2. $x^2+y^2-4x-6y+c=0$ **বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।**

(a) $x^2+y^2=49$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তের যে জ্যাটি $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ,

$x.(-2)+y.3 = (-2)^2+3^2$

[$xx_1+yy_1 = x_1{}^2+y_1{}^2$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow -2x+3y = 4+9$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ, $2x-3y+13=0$

(b) স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IV B এর 1(c) দ্রষ্টব্য।

(c) প্রদত্ত বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্ত y-অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IV A এর 4(c) দ্রষ্টব্য।

3. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(-6, 5)$, $B(-3, -4)$ এবং $C(2,1)$.

(a) $r^2 = -4r\cos\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক হতে পাই, $r^2 = x^2+y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$\therefore r^2 = -4r\cos\theta$ হতে পাই,

$x^2+y^2 = -4x \Rightarrow x^2+y^2+4x=0$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $= (-\frac{4}{2}, \frac{0}{2}) = (-2, 0)$

(b) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: খলিফার নিয়মানুসারে $(-6,5)$ ও $(-3,-4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x+6)(x+3)+(y-5)(y+4)+$
$k\{(x+6)(5+4)-(y-5)(-6+3)\}=0$

$\Rightarrow x^2+9x+18+y^2-y-20+$
$k(9x+54+3y-15)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+9x-y-2+$
$k(9x+3y+39)=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলে,

$4+1+18-1-2+k(18+3+39)=0$

$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

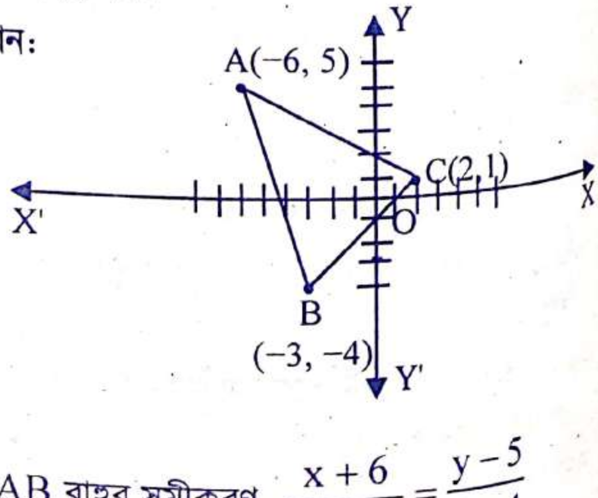
$x^2+y^2+9x-y-2-3x-y-13=0$

$\therefore x^2+y^2+6x-2y-15=0$, যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-3, 1)$.

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র $(-3, 1)$

(c) $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:



AB বাহুর সমীকরণ, $\dfrac{x+6}{-6+3} = \dfrac{y-5}{5+4}$

$\Rightarrow \dfrac{x+6}{-3} = \dfrac{y-5}{9} \Rightarrow 3x+18 = -y+5$

$\Rightarrow 3x + y + 13 = 0$

BC বাহুর সমীকরণ, $\dfrac{x+3}{-3-2} = \dfrac{y+4}{-4-1}$

$\Rightarrow \dfrac{x+3}{-5} = \dfrac{y+4}{-5} \Rightarrow x + 3 = y + 4$

$\Rightarrow x - y - 1 = 0$

AC বাহুর সমীকরণ, $\dfrac{x+6}{-6-2} = \dfrac{y-5}{5-1}$

$\Rightarrow \dfrac{x+6}{-8} = \dfrac{y-5}{4} \Rightarrow x + 6 = -2y + 10$

$\Rightarrow x + 2y - 4 = 0$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির প্রতিটি কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে।

এখন, AB ও BC বাহুর সমীকরণের ধ্রুবক পদের চিহ্ন বিপরীত বলে $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

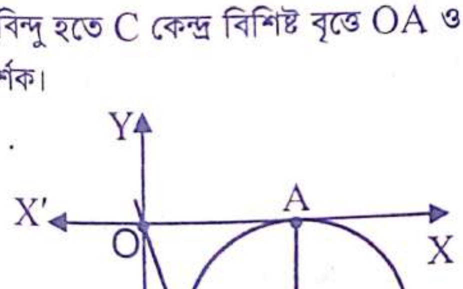
$$\frac{3x+y+13}{\sqrt{9+1}} = -\frac{x-y-1}{\sqrt{1+1}}$$

$\Rightarrow \sqrt{2}(3x + y + 13) = -\sqrt{10}(x - y - 1)$

$\Rightarrow 3x + y + 13 = -\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + \sqrt{5}$

$\Rightarrow (3 + \sqrt{5})x + (1 - \sqrt{5})y + 13 - \sqrt{5} = 0$

4. O বিন্দু হতে C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে OA ও OB দুইটি স্পর্শক।



(a) $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 = 3$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'০১]

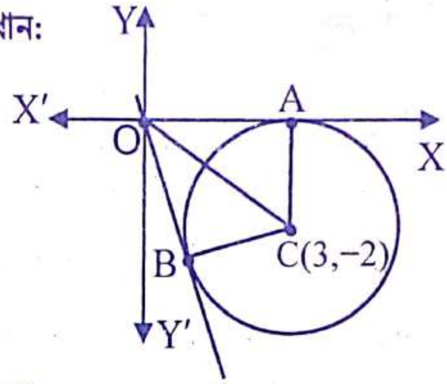
সমাধান : $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 = 3$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{3}{2} = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 - \frac{3}{2}} = \sqrt{4 + 9 - \frac{3}{2}}$

$= \sqrt{13 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{26-3}{2}} = \sqrt{\frac{23}{2}}$ একক।

(b) OACB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore AC = AB =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=$ | কেন্দ্রের কোটি |

$= |-2| = 2$

এখন, $OC = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$OA = OB = \sqrt{13 - 4} = 3$

এখানে, OACB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $=$

2 (OAC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$= 2 \times \frac{1}{2}(OA \times AC) = 3 \times 2 = 6$ বর্গ একক।

(c) AB স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -2)$ বলে এর সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 \cdots$ (i)

(0, 0) বৃন্দু হতে (i) বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা AB এর সমীকরণ,

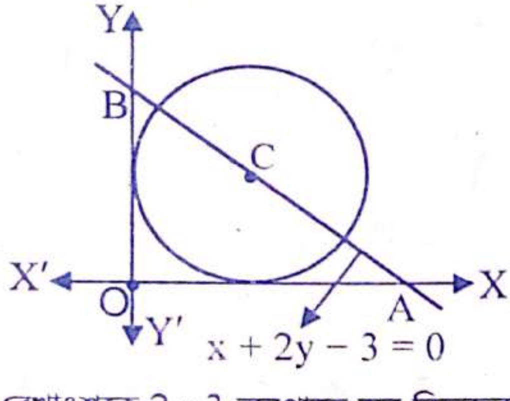
$(x.\ 0) + (y.\ 0) - 3(x + 0) + 2(y + 0) + 9 = 0$

$\Rightarrow 0 + 0 - 3x + 2y + 9 = 0$

$\Rightarrow -3x + 2y + 9 = 0$

$\therefore \ 3x - 2y - 9 = 0$

5. চিত্রে, C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।



(a) AB রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্ত:বিভক্তকরী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: AB এর সমীকরণ, $x + 2y - 3 = 0 \cdots (i)$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3/2} = 1$

$\therefore$ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 0) ও $(0, \frac{3}{2})$

$\therefore$ AB রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্ত:বিভক্তকরী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{2\times 0 + 3\times 3}{2+3}, \frac{2\times\frac{3}{2} + 3\times 0}{2+3}) = (\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$$

(b) (−2, −3) বিন্দু হতে AB এর উপর লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x + 2y - 3 = 0 \cdots (i)$ এর উপর লম্ব এবং (−2, −3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$2x - y = 2\times(-2) - (-3)$

$\Rightarrow 2x - y = -4 + 3$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \cdots (ii)$

$(i) + 2\times(ii) \Rightarrow x + 4x - 3 + 2 = 0$

$\Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

(ii) হতে পাই, $2\times\frac{1}{5} - y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$

$\therefore$ লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.

(c) C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত। ধরি, বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (h, h), যা $x + 2y - 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore h + 2h - 3 = 0 \Rightarrow 3h = 3 \Rightarrow h = 1$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 1) এবং ব্যাসার্ধ $= |h| = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (Ans.)

6. $A \equiv (-7, 1)$, $B \equiv (-1, 3)$

(a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(6, \frac{\pi}{4})$ ও ব্যাসার্ধ 5 .

সমাধান : $(6, \frac{\pi}{4})$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 6^2 - 2r.6\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow 25 = r^2 + 36 - 12r(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow r^2 + 11 - 12r(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow r^2 - 6\sqrt{2}\, r(\cos\theta + \sin\theta) + 11 = 0$

(b) একটি বৃত্ত A ও B বিন্দুগামী যার কেন্দ্র রেখার $x + 2 = 0$ উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (−7 , 1) ও (−1, 3) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x+7)(x+1) + (y-1)(y-3) + k\{(x+7)(1-3) - (y-1)(-7+1)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 + y^2 - 4y + 3 +$

$k(-2x-14+6y-6)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(8-2k)x+(-4+6k)y$
$+10-20k=0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(-\frac{8-2k}{2},-\frac{-4+6k}{2})=$ $(k-4, 2-3k)$, $x+2=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore k-4+2=0 \Rightarrow k=2$

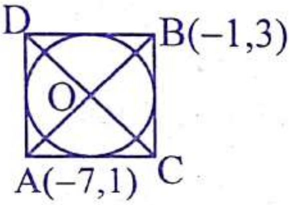
k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2+y^2+(8-4)x+(-4+12)y+10-40=0$

$\therefore x^2+y^2+4x+8y-30=0$ (Ans.)

(c) AB একটি বর্গের কর্ণ হলে, বর্গের অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি, ACBD বর্গের অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্র **O**.

$\therefore$ কেন্দ্র O এর স্থানাঙ্ক = AB কর্ণের মধ্যবিন্দু

$=(\frac{-7-1}{2},\frac{1+3}{2})=(-4,2)$

$AB=\sqrt{(-7+1)^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$

বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $AC=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

বর্গের অন্তঃবৃত্তের ব্যসার্ধ $=\frac{1}{2}$ (বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য)

$=\frac{1}{2}(2\sqrt{5})=\sqrt{5}$

$\therefore$ বর্গের অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ,

$(x+4)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow x^2+8x+16+y^2-4y+4=5$

$\Rightarrow x^2+y^2+8x-4y+15=0$ (Ans.)

7. $x^2+y^2-4y=0 \cdots$ (i), $y-2=0 \cdots$ (ii) এবং $P\equiv(0,3)$

(a) $(-2, 3)$ বিন্দু হতে $2x^2+2y^2=3$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2=3$ অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{3}{2}=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-2)^2+(3)^2-\frac{3}{2}}$

$=\sqrt{4+9-\frac{3}{2}}=\sqrt{13-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{26-3}{2}}$

$=\sqrt{\frac{23}{2}}$ একক।

(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র P এবং যা (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দুগামী । বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2-4y+k(y-2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4y+ky-2k=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(k-4)y-2k=0 \cdots$ (i), যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0,-\frac{k-4}{2})$

প্রশ্নমতে, $-\frac{k-4}{2}=3 \Rightarrow k-4=-6$

$\Rightarrow k=-2$

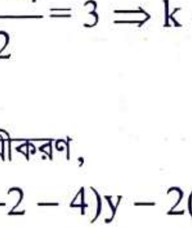
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+(-2-4)y-2(-2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-6y+4=0$ (Ans.)

(c) P এবং (6, 5) একটি বর্গের প্রান্তবিন্দু হলে, বর্গটির অপর শীর্ষ দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



ধরি, PQRS বর্গের PR কর্ণের শীর্ষবিন্দু P(0, 3) ও R(6 , 5).

$\therefore\ PR = \sqrt{(0-6)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

PR কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{0+6}{2}, \frac{3+5}{2}) = (3,4)$

এবং এর সমীকরণ,

$(x-0)(3-5) - (y-3)(0-6) = 0$

$\Rightarrow -2x + 6y - 18 = 0$

$\Rightarrow x - 3y + 9 = 0 \cdots\cdots (1)$

$\therefore$ PR কর্ণের লম্বসমদ্বিখন্ডক QS কর্ণের সমীকরণ

$3x + y = 3.3 + 4 \Rightarrow 3x + y = 13 \cdots (2)$

PR কর্ণের সমান্তরাল $\frac{1}{2}PR = \sqrt{10}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ,

$x - 3y + 9 \pm \sqrt{10}\sqrt{1^2 + 3^2} = 0$

$\Rightarrow x - 3y + 9 \pm 10 = 0$

$\therefore x - 3y - 1 = 0 \cdots\cdots (3)$ এবং

$x - 3y + 19 = 0 \cdots\cdots (4)$

$(2)\times 3 + (3) \Rightarrow 9x + x = 39 + 1 \Rightarrow x = 4$

(2) হতে, $3\times 4 + y = 13 \Rightarrow y = 1$

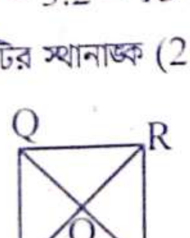
আবার, $(2)\times 3 + (4) \Rightarrow 10x = 39 - 19$

$\Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$

(2) হতে, $y = 13 - 3.2 = 13 - 6 = 7$

$\therefore$ অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 7) ও (4, 1)

বিকল্প পদ্ধতি:



ধরি, PQRS বর্গের PR কর্ণের শীর্ষবিন্দু P(0, 3) ও R(6 , 5).

$\therefore\ PR = \sqrt{(0-6)^2 + (3-5)^2}$

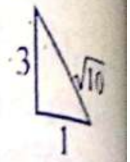
$= \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

PR কর্ণের মধ্যবিন্দু O এর স্থানাঙ্ক $(\frac{0+6}{2}, \frac{3+5}{2}) = (3,4)$

PR কর্ণের ঢাল $= \frac{3-5}{0-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

PR কর্ণের উপর লম্ব QS কর্ণের ঢাল $= -3$

$\tan\theta = -3$ হলে,



$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ও $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

অথবা, $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ও $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\therefore$ O(3,4) বিন্দু হতে $\frac{1}{2}PR = \sqrt{10}$ একক দূরবর্তী QS এর উপর অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(3 + \sqrt{10}\cos\theta, 4 + \sqrt{10}\sin\theta)$

$= (3 + \sqrt{10}\ (-\frac{1}{\sqrt{10}}), 4 + \sqrt{10}\ .\frac{3}{\sqrt{10}})$

$= (3 - 1, 4 + 3) = (2, 7)$

আবার, $(3 + \sqrt{10}\cos\theta, 4 + \sqrt{10}\sin\theta)$

$= (3 + \sqrt{10}\ .\frac{1}{\sqrt{10}}, 4 + \sqrt{10}\ (-\frac{3}{\sqrt{10}}))$

$= (3 + 1, 4 - 3) = (4, 1)$

$\therefore$ অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 7) ও (4, 1)

8. $3x - y = 6 \cdots\cdots$ (i) এবং $P \equiv (1, -3)$

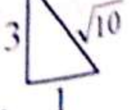
(a) (i) রেখার P বিন্দুতে লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - y = 6$ রেখার $P(1, -3)$ বিন্দুতে লম্বরেখার সমীকরণ, $x + 3y = 1 + 3(-3)$

$\Rightarrow x + 3y = 1 - 9 \therefore x + 3y + 8 = 0$

(b) P বিন্দু হতে $4\sqrt{10}$ একক দূরবর্তী (i) রেখায় দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - y = 6 \cdots\cdots$ (i) রেখার ঢাল, $\tan\theta = 3$.



$\therefore \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ও $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

অথবা, $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ও $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

P(1, −3) বিন্দু হতে $4\sqrt{10}$ একক দূরবর্তী (i) রেখাস্থ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$(1+4\sqrt{10}\cos\theta, -3+4\sqrt{10}\cos\theta)$

$=(1+4.1, -3+4.3) = (1+4, -3+12)$

$=(5, 9)$; যখন $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ও $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

এবং $(1+4\sqrt{10}\cos\theta, -3+4\sqrt{10}\cos\theta)$

$=(1-4, -3-4.3)$

$=(-3, -15)$; যখন $\sin\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{10}}$ ও $\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

(c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (i) সরলরেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যার ব্যাসার্ধ $2\sqrt{10}$.

সমাধান: P(1 , − 3) বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)^2+(y+3)^2=0.$

ধরি, এ বৃত্ত ও $3x-y=6$ ⋯ ⋯ (i) রেখার ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2+(y+3)^2+k(3x-y-6)=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9+3kx-ky-6k=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(-2+3k)x+(6-k)y+10-6k=0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) এর ব্যাসার্ধ $=2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2-3k}{2}\right)^2+\left(\frac{k-6}{2}\right)^2-10+6k}=2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(4-12k+9k^2+k^2-12k+36)-10+6k=40$

$\Rightarrow 4-12k+k^2+k^2-12k+36-200+24k=0$

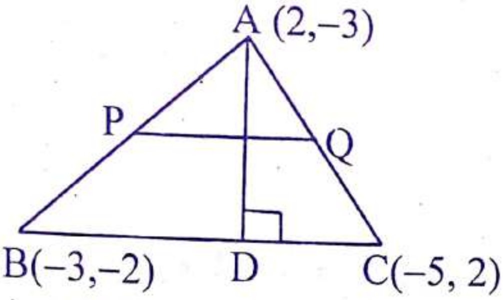
$\Rightarrow 10k^2-160=0 \Rightarrow k^2=16 \therefore k=\pm 4$

$\therefore$(1) হতে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+10x+2y-14=0$ এবং

$x^2+y^2-14x+10y+34=0$

9. চিত্রে, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q



(a) AD নির্ণয় কর।

সমাধান: B(−3,−2) ও C(−5, 2) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ,

$(x+3)(-2-2)-(y+2)(-3+5)=0$

$\Rightarrow -4(x+3)-2(y+2)=0$

$\Rightarrow 2(x+3)+1(y+2)=0$

$\Rightarrow 2x+6+y+2=0$

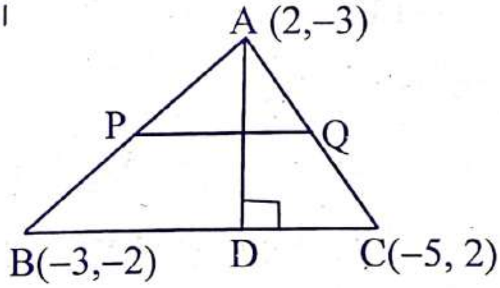
$\Rightarrow 2x+y+8=0$

$\therefore$ A (2,−3) বিন্দু হতে BC রেখার লম্ব দূরত্ব AD

$=\dfrac{|2\times2-3+8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|4-3+8|}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ একক।

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\{(-3-2)\hat{i}+(-2+3)\hat{j}\}$

$=-\frac{5}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+0\hat{k}$

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\{(-5-2)\hat{i}+(2+3)\hat{j}\}$

$=-\frac{7}{2}\hat{i}+\frac{5}{2}\hat{j}+0\hat{k}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -5/2 & 1/2 & 0\\ -7/2 & 5/2 & 0\end{vmatrix}$

$= (0-0)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (-\frac{25}{4} + \frac{7}{4})\hat{k}$

$= -\frac{18}{4}\hat{k} = -\frac{9}{2}\hat{k}$

ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}|$

$= \frac{1}{2}|-\frac{9}{2}\hat{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-\frac{9}{2})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$ ব.এ.

(c) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $A(2, -3)$ ও $B(-3, -2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)(x+3) + (y+3)(y+2) + k\{(x-2)(-3+2) - (y+3)(2+3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 + y^2 + 5y + 6 + k(-x + 2 - 5y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + x + 5y + k(-x - 5y - 13) = 0 \cdots$(i), যা $C(-5, 2)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 25 + 4 - 5 + 10 + k(5 - 10 - 13) = 0$

$\Rightarrow 34 + k(-18) = 0 \Rightarrow k = \frac{17}{9}$

(i) হতে,

$x^2 + y^2 + x + 5y + \frac{17}{9}(-x - 5y - 13) = 0$

$\Rightarrow 9x^2 + 9y^2 + 9x + 45y - 17x - 85y - 221 = 0$

$\Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 8x - 40y - 221 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{9}x - \frac{40}{9}y - \frac{221}{9} = 0$, যার ব্যাসার্ধ

$= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(\frac{4}{9})^2 + (\frac{20}{9})^2 + \frac{221}{9}}$

$= \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{400}{81} + \frac{221}{9}} = \sqrt{\frac{16+400+1989}{81}}$

$= \sqrt{\frac{2405}{81}} = \frac{\sqrt{2405}}{9}$ (Ans.)

10. $3x - 4y + 8 = 0 \cdots$ (i) ও $3x + 4y - 1 = 0 \cdots \cdots$ (ii) দুইটি সরলরেখা।

(a) $P(0, b)$ বিন্দু (i) ও (ii) সরলরেখা হতে সমদূরবর্তী হলে b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(0, b)$ বিন্দু (i) ও (ii) সরলরেখা হতে সমদূরবর্তী।

$\therefore \frac{3.0 - 4b + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{3.0 + 4b - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$\Rightarrow -4b + 8 = \pm(4b - 1)$

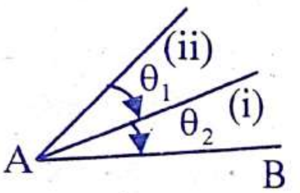
'−' নিয়ে, $-4b + 8 = -4b + 1 \Rightarrow 8 = 1$, যা গ্রহনযোগ্য নয়।

'+' নিয়ে, $-4b + 8 = 4b - 1 \Rightarrow 8b = 9$

$\Rightarrow b = \frac{9}{8}$ (Ans.)

(b) (i) রেখাটি AB ও (ii) রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের একটি সমদ্বিখন্ডক হলে, AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, AB রেখার ঢাল m_2, $3x-4y+8=0 \cdots$ (i) রেখার ঢাল, $m = \frac{3}{4}$ এবং $3x+4y-1=0 \cdots$ (ii) রেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{3}{4}$.

(i), (ii) ও AB রেখাত্রয়ের ছেদবিন্দু

$= (\frac{4-32}{12+12}, \frac{24+3}{12+12}) = (\frac{-28}{24}, \frac{27}{24})$

$= (\frac{-7}{6}, \frac{9}{8})$

(ii) ও (i) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং (i) ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m - m_2}{1 + m m_2}$ পরস্পর সমান।

$\therefore \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + m m_2}$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{1+(-\frac{3}{4})\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{4}-m_2}{1+\frac{3}{4}m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{16-9} = \frac{3-4m_2}{4+3m_2} \Rightarrow \frac{-6}{7} = \frac{3-4m_2}{4+3m_2}$$

$$\Rightarrow -24-18m_2 = 21-28m_2$$

$$\Rightarrow -24-18m_2 = 21-28m_2$$

$$\Rightarrow 10m_2 = 45 \Rightarrow m_2 = \frac{9}{2}$$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ $y-\frac{9}{8}=\frac{9}{2}(x+\frac{7}{6})$

$$\Rightarrow \frac{8y-9}{8} = \frac{9}{2}(\frac{6x+7}{6})$$

$$\Rightarrow \frac{8y-9}{8} = \frac{3(6x+7)}{4}$$

$$\Rightarrow 8y-9 = 36x+42$$

$$\Rightarrow 36x-8y+51 = 0 \text{ (Ans.)}$$

(c) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের ব্যাসার্ধ 5 ও যাদের কেন্দ্র (ii) রেখার উপর অবস্থিত এবং যারা (i) সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ ধরি, 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2+(y-k)^2=5^2 \cdots(1)$

(1) এর কেন্দ্র (h, k), $3x+4y-1=0 \cdots$(ii) রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore 3h+4k-1=0 \cdots \cdots (2)$

(1) বৃত্ত $3x-4y+8=0\cdots$ (i) রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h, k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 5 এর সমান হবে।

$$\therefore \frac{|3h-4k+8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3h-4k+8|}{5} = 5$$

$\Rightarrow |3h-4k+8| = 25 \Rightarrow 3h-4k+8 = \pm 25$

$\therefore 3h-4k-17=0 \cdots \cdots (3)$ এবং

$3h-4k+33=0 \cdots \cdots (4)$

$(2)+(3) \Rightarrow 6h-18=0 \Rightarrow h=3$

(2) হতে, $9+4k-1=0 \Rightarrow k=-2$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-3)^2+(y+2)^2=25$ (Ans.)

আবার, $(2)+(4) \Rightarrow 6h+32=0$

$$\Rightarrow h = -\frac{16}{3}$$

(2) হতে, $3(-\frac{16}{3})+4k-1=0$

$$\Rightarrow -16+4k-1=0 \Rightarrow k=\frac{17}{4}$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$(x+\frac{16}{3})^2+(y-\frac{17}{4})^2=25 \text{ (Ans.)}$$

11. $x^2+y^2-6x+6y-18=0 \cdots \cdots$ (i) ও $x^2+y^2-ay=0 \cdots \cdots$ (ii) দুইটি বৃত্ত।

(a) $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$=\frac{1}{2}$ {$(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব }

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-3)^2+(3+4)^2}$$

$=\frac{1}{2}\sqrt{25+49}=\frac{1}{2}\sqrt{74}$ বর্গ একক।

(b) (i) বৃত্তের কেন্দ্র $O_1(3, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ,

$$r_1=\sqrt{3^2+3^2+18}=\sqrt{36}=6$$

(ii) বৃত্তের কেন্দ্র $O_2(0, \frac{a}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ,

$$r_2=\sqrt{0^2+(\frac{a}{2})^2-0}=\frac{a}{2}$$

প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করবে।

$$\therefore \sqrt{(3-0)^2+(-3-\frac{a}{2})^2}=|6-\frac{a}{2}|$$

$$\Rightarrow 9+9+2.3.\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}=|6-\frac{a}{2}|^2$$

$\Rightarrow 18 + 3a + \frac{a^2}{4} = 36 - 6a + \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow 9a = 18 \Rightarrow a = 2$ (Ans.)

(c) $y = x$ সরলরেখা (i) নং বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে (i) বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0 \cdots$ (i)

বৃত্তে $y = x$ বসিয়ে পাই,

$x^2 + x^2 - 6x + 6x - 18 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, -3$

$\therefore y = 3, -3$

$\therefore$ $y = x$ সরলরেখা (i) নং বৃত্তকে A(3, 3) ও B(−3, −3) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ (i) বৃত্তের A(3, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.3 + y.3 - 3(x + 3) + 3(y + 3) - 18 = 0$

$\Rightarrow x + y - x - 3 + y + 3 - 6 = 0$

$\Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y - 3 = 0$ (Ans.)

12. A(−4, 3) ও B(12, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু C.

(a) ΔAOB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর;যেখানে O মূলবিন্দু।

সমাধান: $\delta_{AOB} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 36) = -32$

$\therefore$ ΔAOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} | \delta_{AOB} |$

$= \frac{1}{2} | -32 | = 16$ বর্গ একক।

(b) AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করে বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: A(−4, 3) ও B(12, −1) এর সংযোগ রেখা AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + 4)(x - 12) + (y - 3)(y + 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 48 + y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$; ইহাকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$g = -4, f = -1, c = -51$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$= 2\sqrt{(-1)^2 + 51} = 2\sqrt{1 + 51}$

$= 4\sqrt{13}$ একক।

(c) (2, 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা C বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান: A(−4, 3) ও B(12, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-4 + 12}{2}, \frac{3 - 1}{2}) = (4, 1)$ ও (2, 1)

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = C(4,1) ও (2, 1) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 0} = 2$

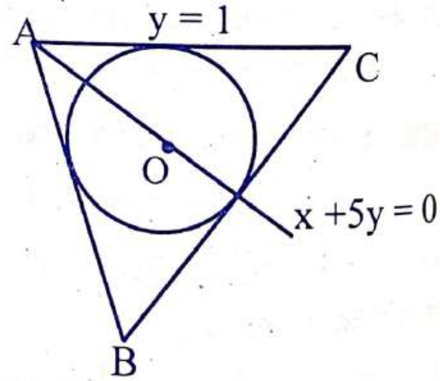
$\therefore$ (2, 1) কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ (Ans.)

13. চিত্রে, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র O.



(a) P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 2, 7) ও (3, 4, −1) হলে $|\overrightarrow{PQ}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{PQ} = (3 - 4)\hat{i} + (4 - 2)\hat{j} + (-1 - 7)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = | -\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} |$

$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 4 + 64} = \sqrt{69}$

(b) AB বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB বাহুর ঢাল m_2, $x+5y=0\cdots$(i) রেখার ঢাল, $m=-\frac{1}{5}$ এবং $y=1\cdots$ (ii) বাহুর ঢাল, $m_1=0$.

(i), (ii) ও AB রেখাত্রয়ের ছেদবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক $=(-5, 1)$

(ii) ও (i) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m_1-m}{1+m_1m}$ এবং (i) ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\frac{m-m_2}{1+mm_2}$ পরস্পর সমান।

$$\therefore \frac{m_1-m}{1+m_1m}=\frac{m-m_2}{1+mm_2}$$

$$\Rightarrow \frac{0+\frac{1}{5}}{1+0(-\frac{1}{5})}=\frac{-\frac{1}{5}-m_2}{1+(-\frac{1}{5})m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{-1-5m_2}{5-m_2}\Rightarrow 5-m_2=-5-25m_2$$

$$\Rightarrow 24m_2=-10\Rightarrow m_2=-\frac{5}{12}$$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ $y-1=-\frac{5}{12}(x+5)$

$\Rightarrow 12y-12=-5x-25$

$\Rightarrow 5x+12y+13=0$ (Ans.)

(c) বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 1 হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, 1 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2+(y-k)^2=1^2\cdots(1)$

(1) এর কেন্দ্র (h, k), $x+5y=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore h+5k=0\cdots\cdots(2)$

(1) বৃত্ত $y-1=0$ রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h , k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 1 এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|k-1|}{\sqrt{1^2}}=1\Rightarrow k-1=\pm 1\Rightarrow k=2, 0$

$k=2$ হলে, $h=-5k=-5.2=-10$

$k=0$ হলে, $h=-5k=-5.0=0$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ,

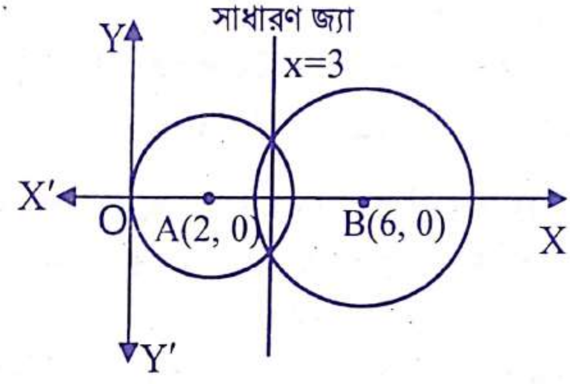
$(x-0)^2+(y-0)^2=1^2\Rightarrow x^2+y^2=1$

অথবা, $(x+10)^2+(y-2)^2=1$

$\Rightarrow x^2+20x+100+y^2-4y+4=1$

$\Rightarrow x^2+y^2+20x-4y+103=0$

14.



(a) $3x+4y+1=0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x+4y+1=0\Rightarrow 3x+4y=-1$

$\Rightarrow \frac{x}{-1/3}+\frac{y}{-1/4}=1$, যা x-অক্ষকে $P(-\frac{1}{3},0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $Q(0,-\frac{1}{4})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ

$$=PQ=\sqrt{(-\frac{1}{3}-0)^2+(0+\frac{1}{4})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{16+9}{144}}=\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{5}{12}$$

(b) B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: A(2, 0) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 2

$\therefore$ A(2, 0) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)^2+y^2=2^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2=4$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x=0\cdots\cdots$(i)

B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে এর সমীকরণ,

$(x-6)^2+y^2=r^2$

$\Rightarrow x^2-12x+36+y^2-r^2=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-12x+36-r^2=0\cdots\cdots$(ii)

(ii) ও (i) বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$-4x + 12x - 36 + r^2 = 0$

$\Rightarrow 8x - 36 + r^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{36 - r^2}{8}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{36 - r^2}{8} = 3 \Rightarrow 36 - r^2 = 24$

$\Rightarrow r^2 = 36 - 24 = 12$

$\therefore$ (ii) হতে, $x^2 + y^2 - 12x + 36 - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0$

(c) B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $2\sqrt{3}$ হলে, A বিন্দু হতে B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, A(2, 0) বিন্দু হতে B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$y = m(x - 2) \Rightarrow mx - y - 2m = 0 \cdots$(i)

$\therefore$ B(6, 0) হতে (i) স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধ $2\sqrt{3}$ এর সমান হবে। অর্থাৎ,

$\dfrac{m.6 - 0 - 2m}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{4m}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 16m^2 = 12(m^2+1) \Rightarrow 4m^2 = 3(m^2+1)$

$\Rightarrow 4m^2 - 3m^2 = 3 \Rightarrow m^2 = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের ঢাল, $m_1 = \sqrt{3}, m_2 = -\sqrt{3}$

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= \tan^{-1}\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}(-\sqrt{3})} = \tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{3}}{1-3}$

$= \tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ (Ans.)

15. A(−3, −2), B(4,1), C(5, −2) তিনটি বিন্দু, $x^2 + y^2 = a^2 \cdots$ (i) একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(a) A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে কোন বিন্দুটি 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

সমাধান : মনে করি, A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $D(x_1, y_1)$ বিন্দুটি 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore x_1 = \dfrac{3\times4+1\times(-3)}{3+1} = \dfrac{12-3}{4} = \dfrac{9}{4}$

$y_1 = \dfrac{3\times1+1\times(-2)}{3+1} = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(\dfrac{9}{4}, \dfrac{1}{4})$

(b) A বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : BC এর ঢাল, $m = \dfrac{1+2}{4-5} = -3$

$\therefore$ BC এর উপর লম্বরেখার ঢাল $= -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$ A(−3, −2) বিন্দুগামী এবং $\dfrac{1}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট লম্বরেখাটির সমীকরণ, $y - (-2) = \dfrac{1}{3}(x+3)$

$\Rightarrow 3y + 6 = x + 3 \Rightarrow x - 3y = 3$

$\Rightarrow \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-1} = 1 \cdots\cdots$ (1)

$\therefore$ (1) লম্বরেখাটি দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $= |-1| = 1$ একক।

(c) (i) বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\dfrac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a

ধরি, x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\dfrac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ $y = \tan(\tan^{-1}\dfrac{2}{5})x + c$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{5}x + c \Rightarrow 2x - 5y + 5c = 0 \cdots$(1)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0, 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|5c|}{\sqrt{4+25}} = a \Rightarrow |5c| = \sqrt{29}\,a$

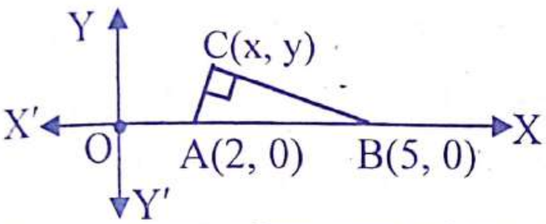
$\Rightarrow 5c = \pm\sqrt{29}\,a \;\therefore\; c = \pm\frac{\sqrt{29}a}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$2x - 5y + 5(\pm\frac{\sqrt{29}a}{5}) = 0$

$\Rightarrow 2x - 5y \pm \sqrt{29}a = 0$ (Ans.)

16.



(a) AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করে বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ

$(x-2)(x-5) + (y-0)(y-0) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 + y^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x + 10 = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-\frac{-7}{2}, -\frac{0}{2}) = (\frac{7}{2}, 0)$

(b) দেখাও যে, C বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

প্রমাণ: এখানে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle C = 90^0$.

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\Rightarrow (2-5)^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (x-5)^2 + (y-0)^2$

$\Rightarrow 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 - 10x + 25 + y^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 14x + 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x + 10 = 0$, ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ C বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

(c) C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 1) হলে O বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের প্রাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: B(5, 0) ও C(3, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$(x-5)(0-1) - (y-0)(5-3) = 0$

$\Rightarrow -x + 5 - 2y = 0$

$\Rightarrow x + 2y - 5 = 0 \cdots\cdots (i)$

O(0, 0) বিন্দুগামী ও (i) রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \cdots (ii)$

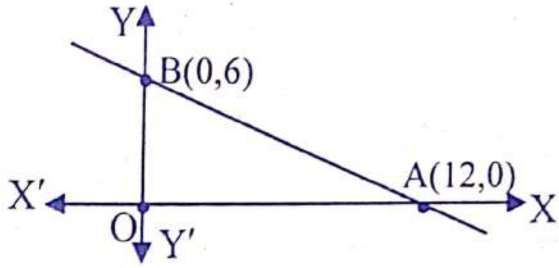
(i) এ $y = 2x$ বসিয়ে পাই,

$x + 2\times 2x - 5 = 0 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$

(ii) হতে, $y = 2\times 1 = 2$

$\therefore$ লম্বের প্রাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 2) (Ans.)

17.



(a) O হতে AB এর মধ্যবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: AB এর মধ্যবিন্দু P (ধরি) এর স্থানাঙ্ক

$(\frac{0+12}{2}, \frac{6+0}{2}) = (6,3)$

$\therefore\; OP = \sqrt{(0-6)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{36+9}$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ একক।

(b) AB রেখার সমান্তরাল এবং 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: A(12,0) ও B(0,6) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow x + 2y = 12$

$\Rightarrow x + 2y - 12 = 0 \cdots\cdots (i)$

ধরি, (i) এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$x + 2y + k = 0 \cdots\cdots (ii)$

(i) ও (ii) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \frac{|k+12|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|k+12|}{\sqrt{5}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+12|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow k + 12 = \pm 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow k = -12 \pm 2\sqrt{5}$

$\therefore$ AB রেখার সমান্তরাল এবং 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ $x + 2y - 12 \pm 2\sqrt{5} = 0$

(c) A ও B বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

সমাধান: A(12,0) ও B(0,6) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x-12)(x-0)+(y-0)(y-6)+k\{(x-12)(0-6)-(y-0)(12-0)\}=0$

$\Rightarrow x^2-12x+y^2-6y+k\{-6x+72-12y\}=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(-12-6k)x+(-6-12k)y+72k=0 \cdots\cdots$ (i)

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$(-\frac{-12-6k}{2},-\frac{-6-12k}{2})=(6+3k,3+6k)$

এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(6+3k)^2+(3+6k)^2-72k}$

$=\sqrt{36+36k+9k^2+9+36k+36k^2-72k}$

$=\sqrt{45+45k^2}$

(i) নং বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে,

$\therefore$ ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক |

$\Rightarrow \sqrt{45+45k^2}=|3+6k|$

$\Rightarrow 45+45k^2=9+36k+36k^2$

$\Rightarrow 9k^2-36k+36=0$

$\Rightarrow k^2-4k+4=0 \Rightarrow (k-2)^2=0$

$\Rightarrow k=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+(-12-6\times2)x+(-6-12\times2)y+72\times2=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-24x-30y+144=0$

18. P, Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 3), (1, −2) ও (5, 4) .

(a) PQ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্ত:বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু ও R বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: P(2, 3) ও Q(1, −2) এর সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্ত:বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(\frac{2\times1+3\times2}{2+3},\frac{2\times(-2)+3\times3}{2+3})$

$=(\frac{2+6}{5},\frac{-4+9}{5})=(\frac{8}{5},1)$

$\therefore (\frac{8}{5},1)$ ও R(5, 4) বিন্দুর দূরত্ব

$=\sqrt{(\frac{8}{5}-5)^2+(1-4)^2}$

$=\sqrt{(\frac{8-25}{5})^2+(-3)^2}=\sqrt{\frac{289}{25}+9}$

$=\sqrt{\frac{289+225}{25}}=\frac{\sqrt{514}}{5}$ একক।

(b) cos PQR নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{QP}=(2-1)\hat{i}+(3+2)\hat{j}=\hat{i}+5\hat{j}$

$\overrightarrow{QR}=(5-1)\hat{i}+(4+2)\hat{j}=4\hat{i}+6\hat{j}$

$\therefore |\overrightarrow{QP}|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ এবং

$|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$

$\therefore \cos PQR=\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RP}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{RP}|}$

$=\frac{(\hat{i}+5\hat{j})\cdot(4\hat{i}+6\hat{j})}{\sqrt{26}\sqrt{52}}=\frac{1\times4+5\times6}{26\sqrt{2}}$

$=\frac{34}{26\sqrt{2}}=\frac{17}{13\sqrt{2}}$

(c) P, Q ও R বিন্দুগামী বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: P(2, 3) ও Q(1, −2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)(x-1)+(y-3)(y+2)+k\{(x-2)(3+2)-(y-3)(2-1)\}=0$

$\Rightarrow x^2-3x+2+y^2-y-6+k(5x-10-y+3)=0$

$\Rightarrow x^2-3x+y^2-y-4+k(5x-y-7)=0 \cdots\cdots$ (i)

(i) বৃত্তটি R(5, 4) বিন্দুগামী বলে,

$5^2-3\times5+4^2-4-4+k(5\times5-4-7)=0$

$\Rightarrow 25-15+16-8+k(25-11)=0$

$\Rightarrow 18+14k=0 \Rightarrow k=-\frac{18}{14}=-\frac{9}{7}$

(i) এ $k = -\frac{9}{7}$ বসিয়ে পাই,

$x^2 - 3x + y^2 - y - 4 - \frac{9}{7}(5x - y - 7) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-3 - \frac{45}{7})x + (-1 + \frac{9}{7})y - 4 + 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{66}{7}x + \frac{2}{7}y + 5 = 0$

বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(g, f) = (\frac{33}{7}, -\frac{1}{7})$

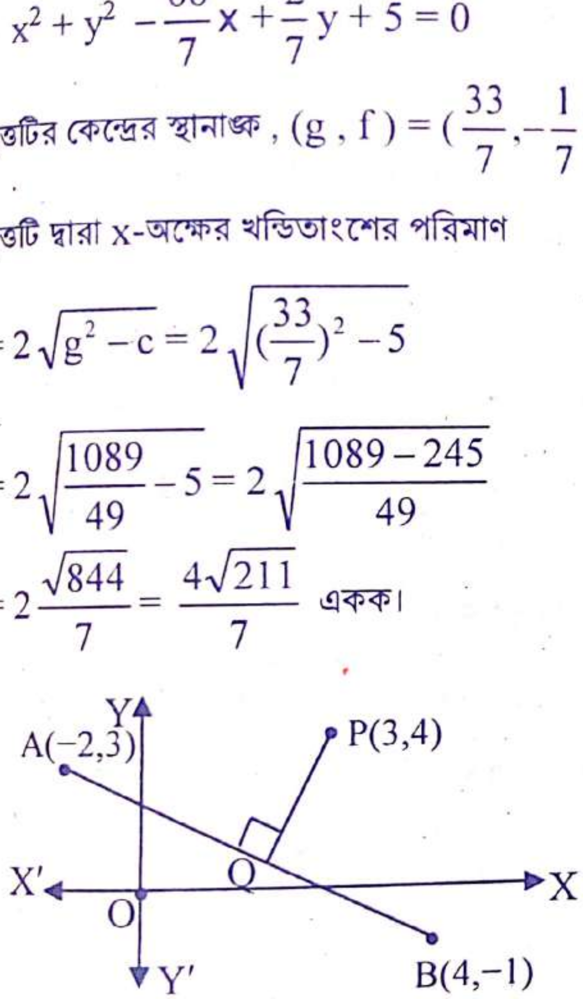
$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ

$= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(\frac{33}{7})^2 - 5}$

$= 2\sqrt{\frac{1089}{49} - 5} = 2\sqrt{\frac{1089 - 245}{49}}$

$= 2\frac{\sqrt{844}}{7} = \frac{4\sqrt{211}}{7}$ একক।

19.



(a) AB রেখাংশকে y-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, AB রেখাংশকে y-অক্ষ $k : 1$ অনুপাতে C বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore C \equiv (\frac{k \times 4 + 1 \times (-2)}{k+1}, \frac{k \times (-1) + 1 \times 3}{k+1})$

$= (\frac{4k - 2}{k+1}, \frac{-k + 3}{k+1})$

C বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর x-স্থানাঙ্ক = 0

$\therefore \frac{4k - 2}{k+1} = 0 \Rightarrow 4k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k : 1 = 1 : 2$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $1 : 2$.

(b) Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: A(−2, 3) ও B(4, −1) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x+2}{-2-4} = \frac{y-3}{3+1}$

$\Rightarrow \frac{x+2}{-6} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow \frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{2}$

$\Rightarrow 2x + 4 = -3y + 9$

$\Rightarrow 2x + 3y - 5 = 0 \cdots \cdots (i)$

(i) এর উপর লম্ব PQ রেখার সমীকরণ,

$3x - 2y + k = 0$; যা P(3, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 3 \times 3 - 2 \times 4 + k = 0 \Rightarrow k = 8 - 9 = -1$

$\therefore$ PQ রেখার সমীকরণ, $3x - 2y - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x = 1 + 2y \Rightarrow x = \frac{1+2y}{3}$ □ (ii)

$2x + 3y - 5 = 0$

(i) হতে পাই, $2\frac{1+2y}{3} + 3y - 5 = 0$

$\Rightarrow 2 + 4y + 9y - 15 = 0$

$\Rightarrow 13y = 13 \Rightarrow y = 1$

(ii) হতে, $x = \frac{1 - 2 \times 1}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (-\frac{1}{3}, 1)$

(c) P, B, O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের B বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: P(3, 4) ও B(4, −1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 3)(x - 4) + (y - 4)(y + 1) + k\{(x-3)(4 + 1) - (y - 4)(3-4)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 + y^2 - 3y - 4 +$

$k\{5x - 15 + y - 4\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x - 3y + 8 + k(5x + y - 19) = 0$ ⋯ ⋯ (i); যা O(0, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 0 + 8 + k(0 - 19) = 0 \Rightarrow k = \frac{8}{19}$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x^2 + y^2 - 7x - 3y + 8 + \frac{8}{19}(5x + y - 19) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x - 3y + 8 + \frac{40}{19}x + \frac{8}{19}y - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-7 + \frac{40}{19})x + (-3 + \frac{8}{19})y = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{93}{19}x - \frac{49}{19}y = 0$ ⋯ ⋯ (ii)

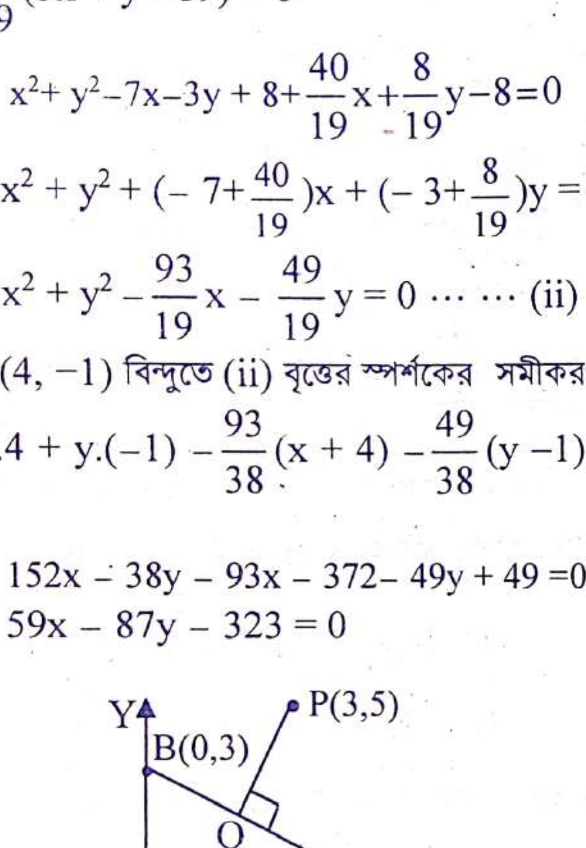
$\therefore B(4, -1)$ বিন্দুতে (ii) বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.4 + y.(-1) - \frac{93}{38}(x + 4) - \frac{49}{38}(y - 1) = 0$

$\Rightarrow 152x - 38y - 93x - 372 - 49y + 49 = 0$

$\Rightarrow 59x - 87y - 323 = 0$

20.



(a) AB বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{16+9} = 5$

$\therefore$ AB বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(AB)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}5^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।

(b) PQ কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y = 12$ ⋯ ⋯ (i)

(i) এর উপর লম্ব P(3, 5) বিন্দুগামী PQ রেখার সমীকরণ, $4x - 3y = 4\times3 - 3\times5$

$\Rightarrow 4x - 3y = 12 - 15$

$\Rightarrow 4x = 3y - 3 \Rightarrow x = \frac{3y-3}{4}$ ⋯ ⋯ (ii)

(i) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$3\times\frac{3y-3}{4} + 4y = 12$

$\Rightarrow 9y - 9 + 16y = 48$

$\Rightarrow 25y = 57 \Rightarrow y = \frac{57}{25}$

(i) হতে, $x = \frac{3\times\frac{57}{25} - 3}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{171-75}{100} = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{24}{25}, \frac{57}{25})$

$\therefore$ PQ কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)(x - \frac{24}{25}) + (y - 5)(y - \frac{57}{25}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (3 + \frac{24}{25})x + \frac{72}{25} + y^2 - (5 + \frac{57}{25})y + \frac{285}{25} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{99}{25}x - \frac{182}{25}y + \frac{357}{25} = 0$

(c) ΔOAB এর অন্ত:কেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, OA বাহুর সমীকরণ $y = 0$

OB বাহুর সমীকরণ $x = 0$ এবং

AB বাহুর সমীকরণ $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

OAB ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90°$

$\therefore \angle OAB$ ও $\angle OBA$ সূক্ষ্মকোণ।

স্পষ্টতঃ $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের ঢাল ধনাত্মক । অতএব, $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{y}{\sqrt{1^2}} = \frac{x}{\sqrt{1^2}} \quad \therefore\ y = x \cdots (1)$$

BO ও BA বাহুর জন্য,

$a_1a_2 + b_1b_2 = 1.\ 3 + 0.4 > 0$

$\therefore \angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1^2}}$$

$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5x$

$\Rightarrow 8x + 4y - 12 = 0$

$\therefore\ 2x + y - 3 = 0$

$\Rightarrow 2x + x - 3 = 0$,[(1) হতে]

$\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

(1) হতে, $y = x = 1$

$\therefore \Delta OAB$ এর অন্ত:কেন্দ্র (1,1)

21. $3x - 4y + 6 = 0$ ও $4x + 3y - 12 = 0$ রেখা x-অক্ষকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে এবং পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

(a) $hx + y - 3 = 0$ রেখাটি (2, 1) বিন্দুগামী হলে, $(\sqrt{2}, 3)$ বিন্দু হতে রেখাটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $hx + y - 3 = 0 \cdots \cdots$ (i) রেখাটি (2, 1) বিন্দুগামী বলে, $2h + 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow 2h = 2 \Rightarrow h = 1$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x + y - 3 = 0$

$\therefore (\sqrt{2}, 3)$ বিন্দু হতে $x + y - 3 = 0$ রেখাটির

দূরত্ব $= \dfrac{|\sqrt{2}+3-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ একক।

(b) $5x + 3y - 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং (i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখা দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: (i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 6 + k(4x + 3y - 12) = 0$

$\Rightarrow (3 + 4k)x + (-4 + 3k)y + 6 - 12k = 0$, যা $5x + 3y - 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

$$\therefore \frac{3+4k}{5} = \frac{-4+3k}{3}$$

$\Rightarrow -20 + 15k = 9 + 12k$

$\Rightarrow 15k - 12k = 9 + 20$

$\Rightarrow 3k = 29 \Rightarrow k = \dfrac{29}{3}$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $(3 + 4\times\dfrac{29}{3})x + (-4 + 3\times\dfrac{29}{3})y + 6 - 12\times\dfrac{29}{3} = 0$

$\Rightarrow (9+116)x + (-12+87)y + 18 - 348 = 0$

$\Rightarrow 125x + 75y - 330 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{125}{330}x + \dfrac{75y}{330} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{x}{66/25} + \dfrac{y}{22/5} = 1$

$\therefore$ y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $= \dfrac{22}{5} = 4.4$

(c) ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x - 4y + 6 = 0 \cdots$ (i)

$4x + 3y ; 12 = 0 \cdots \cdots$ (ii)

(i) হতে পাই, $3x - 4y = -6$

$\Rightarrow \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3/2} = 1$ এবং

(ii) হতে পাই, $4x + 3y = 12$

$\Rightarrow \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাদ্বয় x-অক্ষকে যথাক্রমে $B(-2, 0)$ ও $C(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$(i)\times 3 + (ii)\times 4 \Rightarrow 9x + 16x + 18 - 48 = 0$

$\Rightarrow 25x = 30 \Rightarrow x = \dfrac{6}{5}$

(i) হতে, $3\times\dfrac{6}{5} - 4y + 6 = 0$

$\Rightarrow 4y = 6 + \dfrac{18}{5} \Rightarrow y = \dfrac{30+18}{20} = \dfrac{48}{20} = \dfrac{12}{5}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5})$.

$B(-2, 0)$ ও $C(3, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,
$(x+2)(x-3)+(y-0)(y-0)+$
$k\{(x+2)(0-0)-(y-0)(-2-3)\}=0$
$\Rightarrow x^2-x-6+y^2+k(5y)=0 \cdots \cdots$ (iii)

(iii) বৃত্তটি $A(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$ বিন্দুগামী।

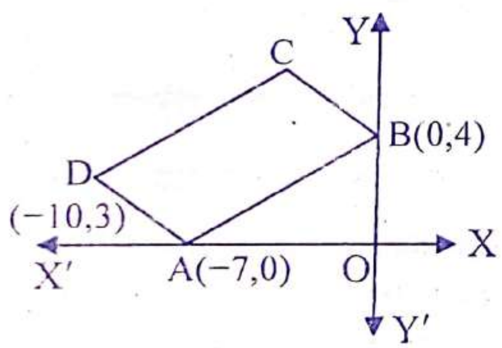
$\therefore (\frac{6}{5})^2+(\frac{12}{5})^2-\frac{6}{5}-6+5k\times\frac{12}{5}=0$

$\Rightarrow \frac{36}{25}+\frac{144}{25}-\frac{36}{5}+12k=0$

$\Rightarrow \frac{36+144-180}{25}+12k=0 \Rightarrow k=0$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ,
$x^2+y^2-x-6=0$

22. চিত্রে, ABCD একটি সামান্তরিক।



(a) D বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $A(-7, 0)$ ও $B(0, 4)$ বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-7}+\frac{y}{4}=1$

$\Rightarrow 4x-7y=-28 \Rightarrow 4x-7y+28=0$

$\therefore$ D বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব

$=\frac{|4(-10)-7\times3+28|}{\sqrt{16+49}}=\frac{|-40-21+28|}{\sqrt{65}}$

$=\frac{33}{\sqrt{65}}$ (Ans.)

(b) CD কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের D বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

ABCD সামান্তরিকে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{-10+0}{2}, \frac{3+4}{2})=(-5, \frac{7}{2})$ এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{-7+x}{2}, \frac{0+y}{2})$ অভিন্ন।

$\therefore \frac{-7+x}{2}=-5 \Rightarrow x=-10+7=-3$

$\frac{0+y}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow y=7$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(-3, 7)$, $(-10, 3)$

$\therefore$ CD কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,
$(x+3)(x+10)+(y-7)(y-3)=0$
$\Rightarrow x^2+13x+30+y^2-10y+21=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+13x-10y+51=0$

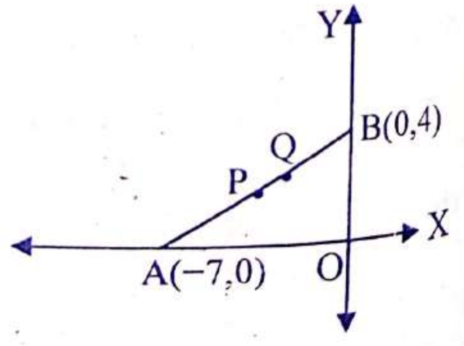
$D(-10, 3)$ বিন্দু হতে এ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $x(-10)+y(3)+\frac{13}{2}(x-10)-5(y+3)+51=0$

$\Rightarrow -10x+3y+\frac{13x-130}{2}-5y-15+51=0$

$\Rightarrow -20x+6y+13x-130-10y+72=0$
$\Rightarrow -7x-4y-58=0$
$\therefore 7x+4y-58=0$

(c) ΔAOB এর পরিকেন্দ্র P হলে এবং $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডক AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করলে ΔPOQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



$\angle AOB=90^0$ বলে, ΔAOB এর পরিকেন্দ্র AB এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, $P\equiv(\frac{-7+0}{2}, \frac{0+4}{2})=(-\frac{7}{2}, 2)$

আবার, $\angle AOB$ এর সমদ্বিখন্ডক AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে বলে, $AQ : BQ = OA : OB$

$\Rightarrow AQ : BQ = 7 : 4$

$\therefore Q \equiv (\frac{7\times 0+4\times(-7)}{7+4}, \frac{7\times 4+4\times 0}{7+4})$

$= (\frac{-28}{11}, \frac{28}{11})$

$\therefore \Delta POQ$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(-\frac{7}{2}-0)(0-\frac{28}{11})-(2-0)(0+\frac{28}{11})|$

$[\frac{1}{2}|(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3)|$ সূত্র দ্বারা।]

$= \frac{1}{2}|\frac{7}{2}\times\frac{28}{11}-2\times\frac{28}{11}|$

$= \frac{1}{2}|\frac{98}{11}-\frac{56}{11}| = \frac{1}{2}|\frac{42}{11}| = \frac{21}{11}$ বর্গ একক।

23. $A \equiv (3, 4)$, $B \equiv (-3, -1)$

(a) A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $A \equiv (3, 4)$, $B \equiv (-3, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ $k : 1$ অনুপাতে C বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore C \equiv (\frac{k\times(-3)+1\times 3}{k+1}, \frac{k\times(-1)+1\times 4}{k+1})$

$= (\frac{-3k+3}{k+1}, \frac{-k+4}{k+1})$

C বিন্দু x-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে, এর y-স্থানাঙ্ক শূন্য হবে।

$\therefore \frac{-k+4}{k+1} = 0 \Rightarrow -k+4 = 0$

$\Rightarrow k = 4 \Rightarrow k : 1 = 4 : 1$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $4 : 1$.

(b) A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: A (3, 4), B (−3, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(\frac{3-3}{2}, \frac{4-1}{2}) = (0, \frac{3}{2})$

AB এর ঢাল $= \frac{4-(-1)}{3-(-3)} = \frac{4+1}{3+3} = \frac{5}{6}$

$\therefore$ AB এর উপর লম্বরেখার ঢাল $= -\frac{6}{5}$

$\therefore (0, \frac{3}{2})$ বিন্দুগামী এবং $-\frac{6}{5}$ ঢাল বিশিষ্ট নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ $y-\frac{3}{2} = -\frac{6}{5}(x-0)$

$\Rightarrow \frac{2y-3}{2} = -\frac{6}{5}x \Rightarrow 10y - 15 = -12x$

$\Rightarrow 12x + 10y - 15 = 0$ (Ans.)

(c) A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x + 3y - 12 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

সমাধান: A (3, 4), B (−3, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র AB এর মধ্যবিন্দু $(0, \frac{3}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ AB

$= \frac{1}{2}\sqrt{(3+3)^2+(4+1)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{36+25} = \frac{1}{2}\sqrt{61}$

এখন, $4x + 3y - 12 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots \cdots$ (i)

(i) রেখাটি A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক হলে, $(0, \frac{3}{2})$ হতে (i) এর লম্ব দূরত্ব হবে ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}\sqrt{61}$ এর সমান।

$\therefore \frac{|4\times 0+3\times\frac{3}{2}+k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{61}$

$\Rightarrow \frac{9}{2}+k = \pm\frac{5\sqrt{61}}{2} \Rightarrow k = \pm\frac{5\sqrt{61}}{2} - \frac{9}{2}$

$\Rightarrow k = \frac{5\sqrt{61}-9}{2}, \frac{-5\sqrt{61}-9}{2}$

∴ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$4x + 3y + \frac{5\sqrt{61}-9}{2} = 0,$

$4x + 3y - \frac{5\sqrt{61}-9}{2} = 0$

24. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \cdots$ (i)

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0 \cdots$ (ii)

$3x - 4y = 12 \cdots$ (iii)

(a) $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ

$= |$কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক$| = |-3| = 3$

∴ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ, $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

(b) (i) ও (ii) নং বৃত্তের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: (i) ও (ii) নং বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 - (x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21) = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y + 3 + 4x - 6y + 21 = 0$

$\Rightarrow 8x - 8y + 24 = 0$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0 \cdots\cdots$ (iv)

(i) বৃত্ত ও (iv) সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 + k(x - y + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (4 + k)x + (-2 - k)y + 3 + 3k = 0 \cdots$ (v)

(iv) রেখাটি (v) বৃত্তের একটি ব্যাস। সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\frac{4+k}{2}, \frac{2+k}{2}\right)$ রেখাটির উপর অবস্থিত হবে।

$\therefore -\frac{4+k}{2} - \frac{2+k}{2} + 3 = 0$

$\Rightarrow -4 - k - 2 - k + 6 = 0$

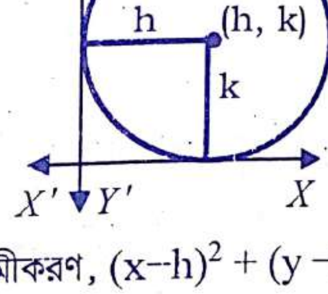
$\Rightarrow -2k = 0 \Rightarrow k = 0$

∴ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 + 0 \times (x - y + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

(c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং যা অক্ষদ্বয় ও (iii) রেখাকে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ



ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore r = |k| = k$ এবং $r = |h| = h$

[∵ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, ∴ $h, k > 0$]

$\therefore h = k = r$

আবার, বৃত্তটি $3x - 4y = 12$ অর্থাৎ $3x - 4y - 12 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ r এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|3h - 4k - 12|}{\sqrt{9+16}} = r$

$\Rightarrow |3h - 4h - 12| = 5h,$ [∵ $h = k = r$]

$\Rightarrow |-h - 12| = 5h \Rightarrow |h + 12| = 5h$

$\Rightarrow h + 12 = \pm 5h$

$\therefore 4h = 12 \Rightarrow h = 3$ অথবা, $-6h = 12 \Rightarrow h = -2$

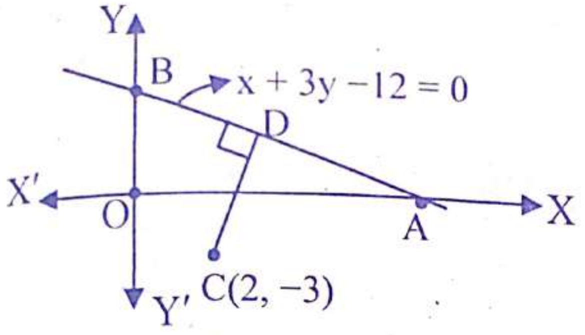
কিন্তু $h > 0 \quad \therefore h = k = r = 3$

∴ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9$

$\therefore x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

25. 

(a) A বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow x + 3y = 12 \Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$.

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (12, 0).

(b) D এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে CD নির্ণয় কর।

সমাধান: $x + 3y - 12 = 0 \cdots \cdots$ (i) এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $3x - y + k = 0 \cdots$ (ii), যা C(2, −3) বিন্দুগামী।

$\therefore 3\times2 - (-3) + k = 0 \Rightarrow 6 + 3 + k = 0$

$\Rightarrow k = -9$

(ii) এ k এর মান বসিয়ে, $3x - y - 9 = 0 \cdots$ (iii)

(i) + (iii) × 3 $\Rightarrow x + 9x - 12 - 27 = 0$

$\Rightarrow 10x = 39 \Rightarrow x = \frac{39}{10}$

(iii) হতে, $3 \times \frac{39}{10} - y - 9 = 0$

$\Rightarrow y = -9 + \frac{117}{10} = \frac{-90 + 117}{10} = \frac{27}{10}$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{39}{10}, \frac{27}{10})$ C(2, −3)

$\therefore CD = \sqrt{(2 - \frac{39}{10})^2 + (-3 - \frac{27}{10})^2}$

$= \sqrt{(-\frac{19}{10})^2 + (-\frac{57}{10})^2}$

$= \sqrt{\frac{361 + 3249}{100}} = \sqrt{\frac{3610}{100}} = \frac{19}{\sqrt{10}}$ একক।

(c) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র AB এর উপর অবস্থিত এবং যা P(5, −1) ও Q(4, −2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান: P(5, −1) ও Q(4, −2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 5)(x - 4) + (y + 1)(y + 2) +$
$k\{(x-5)(-1 + 2) - (y + 1)(5 - 4)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 + y^2 + 3y + 2 + k(x - 5 - y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9 + k)x + (3 - k)y + 22 - 6k = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) নং বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{9-k}{2}, \frac{k-3}{2})$, যা AB রেখা $x + 3y - 12 = 0$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{9-k}{2} + 3\frac{k-3}{2} - 12 = 0$

$\Rightarrow 9 - k + 3k - 9 - 24 = 0$

$\Rightarrow 2k = 24 \Rightarrow k = 12$

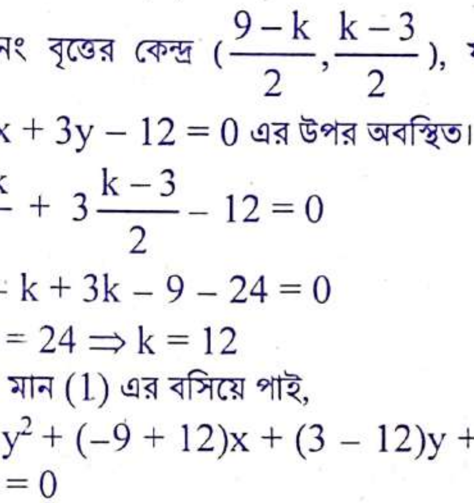
k-এর মান (1) এর বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + (-9 + 12)x + (3 - 12)y + 22 - 6.12 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 9y + 22 - 72 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 9y - 50 = 0$

26. চিত্রে, P, Q, R যথাক্রমে AB, AC ও BC এর মধ্যবিন্দু।



(a) A কে কেন্দ্র করে C বিন্দুগামী অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

A(1, 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = AC

$= \sqrt{(1-5)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$

(b) E বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: P বিন্দুর স্থানাঙ্ক = $(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2})$

$= (2, \frac{5}{2})$

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{1+5}{2}, \frac{1-2}{2}) = (3, -\frac{1}{2})$

R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{3+5}{2}, \frac{4-2}{2}) = (4,1)$

$\therefore P(2, \frac{5}{2})$ ও $Q(3, -\frac{1}{2})$ বিন্দুগামী PQ এর সমীকরণ,

$(x-2)\{\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2})\} - (y - \frac{5}{2})(2-3) = 0$

$\Rightarrow (x-2)\frac{5+1}{2} + (y - \frac{5}{2}) = 0$

$\Rightarrow 6(x-2) + (2y-5) = 0$

$\Rightarrow 6x - 12 + 2y - 5 = 0$

$\Rightarrow 6x + 2y - 17 = 0 \cdots \cdots$ (i)

PQ অর্থাৎ $6x + 2y - 17 = 0$ এর উপর লম্ব $R(4, 1)$ বিন্দুগামী RE রেখার সমীকরণ,

$2x - 6y = 2\times4 - 6\times1 \Rightarrow 2x - 6y = 2$

$\Rightarrow x - 3y - 1 = 0 \ldots$ (ii)

$(i) - 6\times(ii) \Rightarrow 2y + 18y - 17 + 6 = 0$

$\Rightarrow 20y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{20}$

(ii) হতে, $x - 3\times\frac{11}{20} - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1 + \frac{33}{20} = \frac{53}{20}$

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{53}{20}, \frac{11}{20})$

(c) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান: $B(3, 4)$ ও $C(5, -2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x-3)(x-5) + (y-4)(y+2) + k\{(x-3)(4+2) - (y-4)(3-5)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 + y^2 - 2y - 8 + k\{6x - 18 + 2y - 8\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 + k(6x + 2y - 26) = 0$, যা $A(1, 1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 1^2 + 1^2 - 8 - 2 + 7 + k(6 + 2 - 26) = 0$

$\Rightarrow -1 + k(-18) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{18}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 - \frac{1}{18}(6x + 2y - 26) = 0$

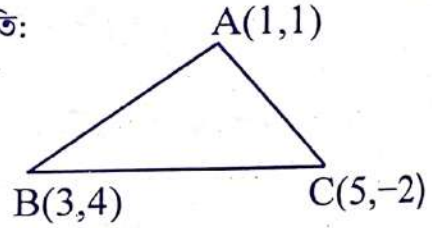
$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-8 - \frac{1}{3})x + (-2 - \frac{1}{9})y + 7 + \frac{13}{9} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{9}y + \frac{76}{9} = 0$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র $(-\frac{-25}{2\times3}, -\frac{-19}{2\times9})$

$= (\frac{25}{6}, \frac{19}{18})$

বিকল্প পদ্ধতি:



BC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3+5}{2}, \frac{4-2}{2}) = (4, 1)$

BC এর ঢাল $= \frac{4+2}{3-5} = -3$

$\therefore$ BC এর লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$y - 1 = \frac{1}{3}(x-4) \Rightarrow 3y - 3 = x - 4$

$\Rightarrow x = 3y + 1 \cdots\cdots$ (i)

আবার, AB এর মধ্যবিন্দু $(2, \frac{5}{2})$

AB এর ঢাল $= \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ AB এর লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$y - \frac{5}{2} = -\frac{2}{3}(x-2)$

$\Rightarrow 6y - 15 = -4x + 8$

$\Rightarrow 6y - 15 = -4(3y+1) + 8$,[(i) দ্বারা]

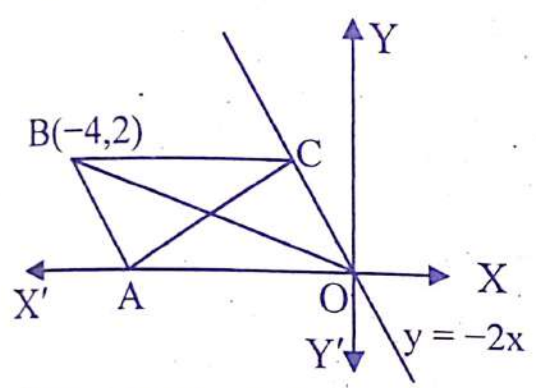
$\Rightarrow 6y - 15 = -12y - 4 + 8$

$\Rightarrow 18y = 19 \Rightarrow y = \frac{19}{18}$

(i) হতে, $x = 3.\frac{19}{18} + 1 = \frac{25}{18}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র $(\frac{25}{6}, \frac{19}{18})$

27. চিত্রে, OABC একটি সামান্তরিক।



(a) B বিন্দুগামী AB এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: OC বাহুর সমীকরণ,

$y = -2x \Rightarrow 2x + y = 0$

OABC একটি সামান্তরিক বলে OC || AB.

$\therefore$ AB অর্থাৎ OC এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $x - 2y + k = 0 \cdots$ (i), যা B(−4, 2) বিন্দুগামী।

$\therefore -4 - 2\times2 + k = 0 \Rightarrow k = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x - 2y + 8 = 0$

(b) প্রমাণ কর যে, OB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণের দ্বিগুণ।

সমাধান: OB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x + 4) + (y - 0)(y - 2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \cdots \cdots$ (i)

ইহাকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের সাথে তুলনা করে পাই, $g = 2, f = -1, c = 0$

(i) বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ

$= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{2^2 - 0} = 4$ এবং

(i) বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ

$= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(-1)^2 - 0} = 2$

$\therefore$ x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণের দ্বিগুণ।

(c) AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: B(−4,2) বিন্দুগামী OC বাহু $2x + y = 0$ এর সমান্তরাল বাহু AB এর সমীকরণ $2x + y = 2(-4) + 2$

$\Rightarrow 2x + y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-6} = 1$, যা x-অক্ষকে A(−3, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হলে OB এর মধ্যবিন্দু $(\frac{-4+0}{2}, \frac{2+0}{2}) = (-2,1)$ ও AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{x_1 - 3}{2}, \frac{y_1 + 0}{2})$ অভিন্ন।

$\therefore \frac{x_1 - 3}{2} = -2 \Rightarrow x_1 - 3 = -4 \Rightarrow x_1 = -1$

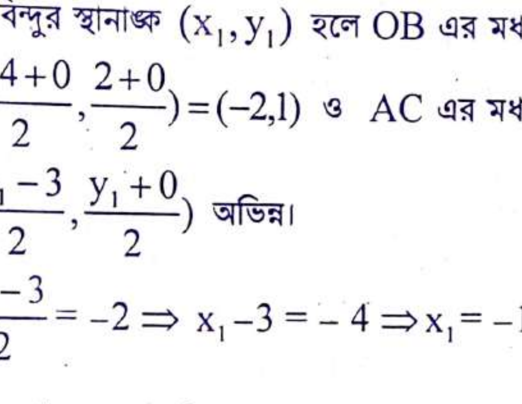
$\frac{y_1}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = 2$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−1, 2).

$\therefore$ A(−3, 0) ও C(−1, 2) বিন্দুগামী AC এর সমীকরণ $(x + 3)(0 - 2) - (y - 0)(-3 + 1) = 0$

$\Rightarrow -2x - 6 + 2y = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0$

28.



(a) BD রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান : চিত্রানুযায়ী B ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 1) ও (0, −3).

$\therefore$ BD রেখার ঢাল $= \frac{1+3}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$

(b) AC রেখার 5 একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 1) ও (4, −3).

$\therefore A(0, 1)$ ও $C(4, -3)$ বিন্দুগামী AC রেখার সমীকরণ,

$(x - 0)(1 + 3) - (y - 1)(0 - 4) = 0$

$\Rightarrow 4x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0 \cdots$ (i)

ধরি, (i) এর সমান্তরাল নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ,

$x + y + k = 0 \cdots \cdots$ (ii)

(i) ও (ii) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \frac{|k+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+1|}{\sqrt{2}} = 5 \Rightarrow k + 1 = \pm 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow k = \pm 5\sqrt{2} - 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $x+y \pm 5\sqrt{2} - 1 = 0$

(c) PQ নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রায়িত প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = প্রদত্ত ABCD বর্গের কর্ণ AC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{0+4}{2}, \frac{1-3}{2}) = (2, -1)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ (বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য) $= \frac{1}{2}$ DC$= \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$\therefore$ (2,−1) কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \cdots \cdots$ (1)

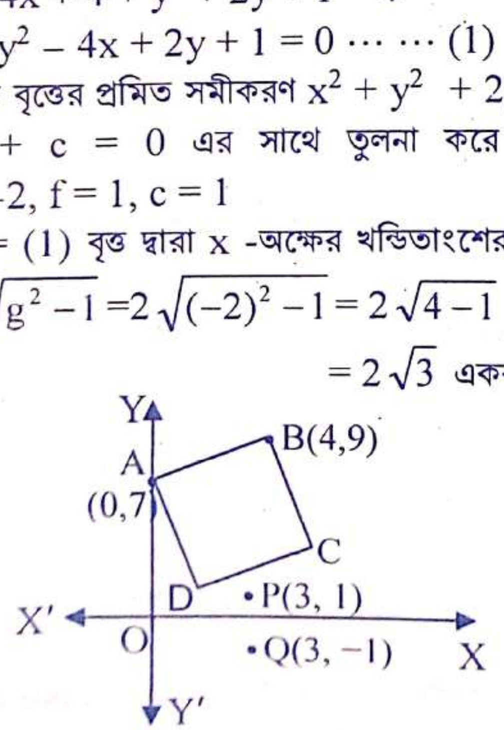
ইহাকে বৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2, f = 1, c = 1$

$\therefore$ PQ = (1) বৃত্ত দ্বারা x -অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য

$= 2\sqrt{g^2 - 1} = 2\sqrt{(-2)^2 - 1} = 2\sqrt{4-1}$

$= 2\sqrt{3}$ একক।

29.



(a) P বিন্দুগামী $2x - 3y + 10 = 0$ এর লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $2x - 3y + 10 = 0$ এর লম্বরেখার সমীকরণ $3x + 2y + k = 0 \cdots \cdots$ (i), যা P(3, 1) বিন্দুগামী।

$\therefore 3 \times 3 + 2 \times 1 + k = 0$

$\Rightarrow k = -9 - 4 = -11$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $3x + 2y - 11 = 0$

(b) Q বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + y = 10$ রেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : P(3, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0 \cdots \cdots$ (1)

(1) বৃত্ত ও $3x + y = 10$ রেখার ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + k(3x + y - 10) = 0$, যা Q(3, −1) বিন্দুগামী।

$\therefore (3 - 3)^2 + (-1-1)^2 + k\{3 \times 3 + (-1) - 10\} = 0$

$\Rightarrow 4 + k(9 - 1 - 10) = 0$

$\Rightarrow 4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ,

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 2(3x + y - 10) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 6x + 2y - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10 = 0$ (Ans.)

(c) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র হলে D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2}$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

AB বাহুর সমীকরণ,

$(x - 0)(7 - 9) - (y - 7)(0 - 4) = 0$

$\Rightarrow -2x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow x - 2y + 14 = 0$

A(0,7) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব AD বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2 \times 0 + 7$

$\Rightarrow 2x + y - 7 = 0 \cdots \cdots$ (1)

AB এর সমান্তরাল $2\sqrt{5}$ একক দূরবর্তী DC বাহুর সমীকরণ,

$x-2y+14 \pm 2\sqrt{5}\,\sqrt{1^2+2^2}=0$

$\Rightarrow x-2y+14 \pm 10=0$

$\therefore x-2y+24=0 \cdots\cdots (2)$

$x-2y+4=0 \cdots \cdots (3)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 11)$

আবার, (1) ও (3) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 3)$

উদ্দীপকের চিত্রানুযায়ী D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 3)$.

30. দৃশ্যকল্প-১: $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $x - y + 2 = 0$.

দৃশ্যকল্প-২: $(0, 7)$ ও $(6, 5)$ বিন্দুদ্বয় একটি বর্গের কর্ণের শীর্ষবিন্দু

(a) $(6, 5)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-1, 3)$ ও $(0, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সমাধান : $(-1, 3)$ ও $(0, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{-1+0}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

$\therefore (6, 5)$ ও $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ বিন্দুগামী নির্ণেয় সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$(x-6)(5-5) - (y-5)\left(6+\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0$

(b) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{29}{6}, \frac{19}{6}\right)$ এবং

ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{\left(\frac{29}{6}\right)^2 + \left(\frac{19}{6}\right)^2 - \frac{56}{3}}$

$= \sqrt{\frac{841+361-672}{36}} = \sqrt{\frac{530}{36}}$

কেন্দ্র $\left(\frac{29}{6}, \frac{19}{6}\right)$ থেকে $x - y + 2 = 0$ জ্যা এর

লম্বদূরত্ব $d = \dfrac{\left|\frac{29}{6} - \frac{19}{6} + 2\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{11}{3\sqrt{2}}$

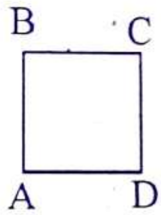
$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$= 2\sqrt{\frac{530}{36} - \frac{121}{18}} = 2\sqrt{\frac{530-242}{36}}$

$= 2\sqrt{\frac{288}{36}} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ একক।

(c) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত বর্গের অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান : ধরি, ABCD বর্গের AC কর্ণের শীর্ষবিন্দু $A(0, 7)$ ও $C(6, 5)$.



$\therefore \quad AC = \sqrt{(0-6)^2 + (7-5)^2}$

$= \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

AC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$

$= (3, 6)$

AC কর্ণের সমীকরণ,

$(x-0)(7-5) - (y-7)(0-6) = 0$

$\Rightarrow 2x + 6y - 42 = 0 \Rightarrow x + 3y - 21 = 0$

$\therefore (3, 6)$ বিন্দুগামী AC কর্ণের উপর লম্ব BD কর্ণের সমীকরণ, $3x - y = 3 \times 3 - 6$

$\Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x - 3 \cdots\cdots (1)$

ABCD বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে AC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)(x-6) + (y-7)(y-5) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 12y + 35 = 0 \cdots (2)$

(1) হতে y -এর মান (2) এর বসিয়ে,

$x^2 - 6x + (3x-3)^2 - 12(3x-3) + 35 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9x^2 - 18x + 9 - 36x + 36 + 35 = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - 60x + 80 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, 4$

$\therefore$ (1) হতে, $y = 3\times 2 - 3 = 3$, যখন $x = 2$

এবং $y = 3\times 4 - 3 = 9$, যখন $x = 4$

$\therefore$ বর্গের অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2,3) ও (4, 9)

31. $A \equiv (2, 2)$, $B \equiv (6, 4)$

(a) $r = 2a \sin\theta$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : $r = 2a\sin\theta \Rightarrow r^2 = 2a\, r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2ay$,

$[\because x^2 + y^2 = r^2, y = r\sin\theta]$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ay = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ = a একক।

(b) AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান : AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = AB এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$

$= (4,3)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(2-6)^2 + (2-4)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{16+4} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

ধরি, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx$

$\Rightarrow mx - y = 0 \cdots\cdots$ (i)

(i) রেখাটি AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র (4,3) হতে এর লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$\therefore \frac{|m\times 4 - 3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow |4m-3|^2 = 5(m^2+1)$

$\Rightarrow 16m^2 - 24m + 9 = 5m^2 + 5$

$\Rightarrow 11m^2 - 24m + 4 = 0$

$\Rightarrow 11m^2 - 22m - 2m + 4 = 0$

$\Rightarrow 11m(m-2) - 2(m-2) = 0$

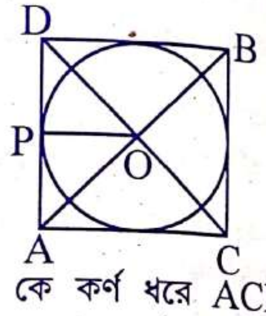
$\Rightarrow (m-2)(11m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, \frac{2}{11}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $2x - y = 0$ এবং

$\frac{2}{11}x - y = 0 \Rightarrow 2x - 11y = 0$

(c) দেখাও যে, AB কে কর্ণ ধরে একটি বর্গের অমত্মঃবৃত্তের সমীকরণ $2x^2 + 2y^2 - 16x - 12y + 45 = 0$

সমাধান :



মনে করি, AB কে কর্ণ ধরে ACBD বর্গের অমত্মঃবৃত্তের কেন্দ্র O, যা AB ও CD কর্ণের মধ্যবিন্দু। সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র O(4, 3)।

$OP \perp AD$ হলে, OAP সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, OA অতিভুজ, OP = AP হবে।

$\therefore OP^2 + AP^2 = OA^2$

$\Rightarrow OP^2 + OP^2 = (\frac{1}{2}AB)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

$\Rightarrow 2OP^2 = 5 \Rightarrow OP = \sqrt{\frac{5}{2}}$, যা নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore (4, 3)$ কেন্দ্র ও $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের

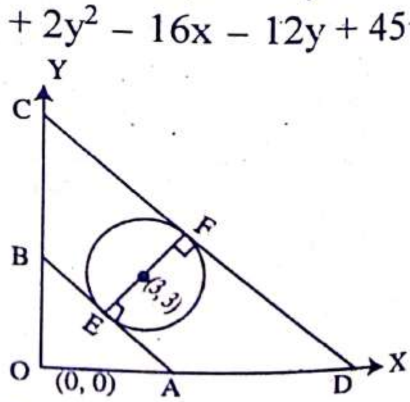
সমীকরণ, $(x-4)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{\frac{5}{2}})^2$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 16x - 12y + 50 = 5$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 16x - 12y + 45 = 0$

32. [দি.২০১৭]



চিত্রে OA = 4 এবং OB = 3

(a) $3(x^2+y^2)-5x+y+1=0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3(x^2+y^2)-5x+y+1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}=0$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{-5/3}{2},-\frac{1/3}{2})=(\frac{5}{6},-\frac{1}{6})$

ও ব্যাসার্ধ $\sqrt{(\frac{5}{6})^2+(\frac{1}{6})^2-\frac{1}{3}}$

$=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{25+1-12}{36}}$

$=\sqrt{\frac{14}{36}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$ একক

(b) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $OA=4$ এবং $OB=3$ বলে, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow 3x+4y=12 \cdots$ (i)

প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ = বৃত্তের হতে কেন্দ্র (3, 3) হতে (i) এর লম্ব দূরত্ব $=\frac{|3.3+4.3-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$=\frac{|9+12-12|}{5}=\frac{9}{5}$

$\therefore$ চিত্রে প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2+(y-3)^2=(\frac{9}{5})^2$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-6y+9=\frac{81}{25}$

$\Rightarrow 25(x^2+y^2-6x-6y)+450-81=0$

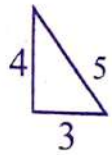
$\Rightarrow 25(x^2+y^2-6x-6y)+369=0$

(c) $AB||CD$ হলে F ও D বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB সরলরেখার ঢাল $=-\frac{a}{b}=-\frac{3}{4}$

AB এর উপর লম্বরেখা EF এর ঢাল $=\frac{4}{3}$

$\tan\theta=\frac{4}{3}$ হলে,



$\sin\theta=\frac{4}{5}$ ও $\cos\theta=\frac{3}{5}$

অথবা, $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ ও $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\therefore$ চিত্রানুযায়ী বৃত্তের কেন্দ্র (3,3) হতে এর ব্যাসার্ধের সমপরিমাণ অর্থাৎ $\frac{9}{5}$ একক দূরবর্তী EF এর উপর অবস্থিত F বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$=(3+\frac{9}{5}\cos\theta,\ 3+\frac{9}{5}\sin\theta)$

$=(3+\frac{9}{5}.\frac{3}{5},\ 3+\frac{9}{5}.\frac{4}{5})=(\frac{102}{25},\frac{111}{25})$

AB এর সমান্তরাল F বিন্দুগামী CD রেখার সমীকরণ,

$3x+4y=3\times\frac{102}{25}+4\times\frac{111}{25}$

$\Rightarrow 3x+4y=\frac{306+444}{25}=\frac{750}{25}=30$

$\Rightarrow \frac{x}{10}+\frac{y}{15/2}=1$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (10, 0)

$\therefore$ F ও D বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ

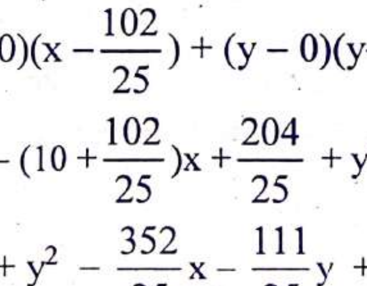
$(x-10)(x-\frac{102}{25})+(y-0)(y-\frac{111}{25})=0$

$\Rightarrow x^2-(10+\frac{102}{25})x+\frac{204}{25}+y^2-\frac{111}{25}y=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{352}{25}x-\frac{111}{25}y+\frac{1020}{25}=0$

$\Rightarrow 25(x^2+y^2)-352x-111y+1020=0$

33. দৃশ্যকল্প-I: [ঢা.বো. ২০১৭]



দৃশ্যকল্প-II: $3x+4y=2$.

(a) $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta + 4r\sin\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 6x + 4y$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0 \cdots\cdots$ (i)

$\therefore$ (i) বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

(b) দৃশকল্প-I হতে দেখাও যে বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$ ৪

প্রমাণ: মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots$ (1)

(i) বৃত্ত y-অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore f^2 = c \cdots\cdots(2)$ এবং

$0^2 + (-3)^2 + 2g.0 + 2f(-3) + c = 0$

$\Rightarrow 9 - 6f + f^2 = 0 \Rightarrow (f-3)^2 = 0 \Rightarrow f = 3$

(2) হতে, $c = f^2 = 3^2 = 9$

আবার, (i) বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 8$

$\Rightarrow 2\sqrt{g^2 - c} = 8 \Rightarrow \sqrt{g^2 - 9} = 4$

$\Rightarrow g^2 - 9 = 16 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = \pm 5$

কিন্তু চিত্রানুসারে $g = -5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2(-5)x + 2(3)y + 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$

(c) নির্ণেয় বৃত্তের এরূপ দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা দৃশ্যকল্প-II রেখার উপর লম্ব হয়। ৪

সমাধান: নির্ণেয় বৃত্ত $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$ এর কেন্দ্র $(5, -3)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{5^2 + 3^2 - 9} = 5$

দৃশ্যকল্প-II রেখা $3x + 4y = 2$ এর উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ (ধরি), $4x - 3y + k = 0$

$\therefore \frac{|4.5 - 3(-3) + k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5$

$\Rightarrow |20 + 9 + k| = 25 \Rightarrow 29 + k = \pm 25$

$\Rightarrow k = \pm 25 - 29 = -4, -54$

$\therefore$ দুটি স্পর্শকের সমীকরণ $4x - 3y - 4 = 0$ এবং $4x - 3y - 54 = 0$

34. তিনটি বিন্দুর স্থানাংক $A(a,-1), B(0,-2)$ এবং $C(-2,-4)$। [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

(a) $(-2, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক নির্ণয় কর। ২

সমাধান: $(-2, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক

$= (\sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{2})^2}, \tan^{-1}\frac{-\sqrt{2}}{-2})$

$= (\sqrt{4+2}, \pi + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= (\sqrt{6}, 180^0 + 35\cdot26^0)$

$= (\sqrt{6}, 215\cdot26^0)$ (Ans.)

(b) উদ্দীপকের আলোকে AB এর মধ্যবিন্দুর ভুজ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ হলে, C বিন্দুগামী AB এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $A(a,-1), B(0,-2)$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{a+0}{2}, \frac{-1-2}{2})$

প্রশ্নমতে, $\frac{a+0}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{5}$

$A(\sqrt{5},-1), B(0,-2)$ বিন্দুগামী AB রেখার ঢাল

$= \frac{-1+2}{\sqrt{5}-0} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ AB এর লম্বরেখার ঢাল $= -\sqrt{5}$

$\therefore C(-2,-4)$ বিন্দুগামী AB এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $y + 4 = -\sqrt{5}(x+2)$

$\Rightarrow y + 4 = -\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{5}x + y + 2\sqrt{5} + 4 = 0$

(c) উদ্দীপকের আলোকে ΔABC এর ক্ষেত্রফল 1 হলে, C কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং A বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|(a-0)(-2+4)-(-1+2)(0+2)|$

$= \frac{1}{2}|2a-2| = |a-1|$

প্রশ্নমতে, $|a-1| = 1 \Rightarrow a-1 = \pm 1 \Rightarrow a = 2, 0$

এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= CA$

$= \sqrt{(-2-2)^2+(-4+1)^2}$; যখন $a = 2$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

আবার, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(-2-0)^2+(-4+1)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; যখন $a = 0$

$\therefore$ C কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং A বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x+2)^2+(y+4)^2 = 5^2$,

$(x+2)^2+(y+4)^2 = (\sqrt{13})^2$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y+4)^2 = 25$,

$(x+2)^2+(y+4)^2 = 13$

35. দৃশ্যকল্প: $x^2+y^2-10x-16y+64=0$ একটি বৃত্ত এবং $4x+3y+8=0$ একটি রেখা।

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

(a) $2x^2+2y^2+4x+6y+8=0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: $2x^2+2y^2+4x+6y+8=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2x+3y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$= (-\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}) = (-1, -\frac{3}{2})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(-1)^2+(-\frac{3}{2})^2-4}$

$= \sqrt{1+\frac{9}{4}-4} = \sqrt{\frac{4+9-16}{4}} = \sqrt{\frac{-3}{4}}$, যা বাস্তব নয়।

(b) দৃশ্যকল্পের বৃত্তটিকে $3x-4y-8=0$ রেখাটি স্পর্শ করবে কিনা যাচাই করে স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 8

সমাধান: বৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2-10x-16y+64=0$ এ

$3x-4y-8=0 \Rightarrow 4y=3x-8 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-2$

বসিয়ে পাই,

$x^2+(\frac{3}{4}x-2)^2-10x-16(\frac{3}{4}x-2)+64=0$

$\Rightarrow x^2+\frac{9}{16}x^2-2.\frac{3}{4}x.2+2^2-10x$
$-12x+32+64=0$

$\Rightarrow x^2+\frac{9}{16}x^2-3x+4-10x$
$-12x+32+64=0$

$\Rightarrow \frac{25}{16}x^2-25x+100=0$

$\Rightarrow 25x^2-400x+1600=0$

$\Rightarrow x^2-16x+64=0 \Rightarrow (x-8)^2=0$

$\Rightarrow x=8$

$\therefore y=\frac{3}{4}x-2=\frac{3}{4}\times 8-2=6-2=4$

দৃশ্যকল্পের বৃত্তটিকে $3x-4y-8=0$ রেখাটি কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং বৃত্তটিকে রেখাটি স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(8, 4)$।

এখন, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2-10x-16y+64=0$ এর কেন্দ্র $(5, 8)$.

ধরি, স্পর্শ বিন্দু $(8, 4)$ গামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক (x, y) হলে,

$\frac{8+x}{2}=5 \Rightarrow x = 10-8 = 2$

$\frac{4+y}{2}=8 \Rightarrow y = 16-4 = 12$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দু $(8, 4)$ গামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(2, 12)$ (Ans.)

(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -1)$ যা দৃশ্যকল্পের রেখাকে স্পর্শ করে। সে বৃত্তের $(1, -1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: $(0,-1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ

= কেন্দ্র $(0,-1)$ হতে $4x+3y+8=0$ এর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|4\times 0+3\times(-1)+8|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-3+8|}{5}$

$= \frac{5}{5} = 1$

$\therefore (0,-1)$ কেন্দ্র ও 1 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)^2+(y+1)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+2y+1 = 1$

$\Rightarrow x^2+y^2+2y = 0$

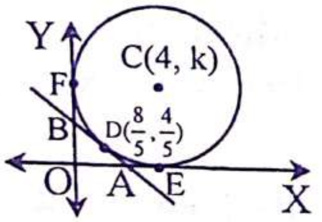
এখন, এ বৃত্তের $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.1 + y.(-1) + (y-1) = 0$

$\Rightarrow x - y + y - 1 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$, যা y-অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ বৃত্তের $(1, -1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয়যোগ্য নয়।

36. [য.বো.'১৭]



চিত্রে C বৃত্তের কেন্দ্র ।

(a) $\overline{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\overline{Q} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\overline{P}+\overline{Q}$ এবং $\overline{P}-\overline{Q}$ পরস্পর লম্ব।

সমাধান: $\overline{P}+\overline{Q} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\overline{P}-\overline{Q} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} - 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$= -2\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$

$(\overline{P}+\overline{Q})\cdot(\overline{P}-\overline{Q}) = (4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})\cdot(-2\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$

$= -8 + 3 + 5 = 0$

$\therefore$ $\overline{P}+\overline{Q}$ এবং $\overline{P}-\overline{Q}$ পরস্পর লম্ব।

(b) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা C, E ও F বিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান: উদ্দীপকের বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্র $C(4,k)$ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore$ $k = 4$, $E \equiv (4,0)$, $F \equiv (0,4)$

$E(4,0)$, $F(0,4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-4)(x-0) + (y-0)(y-4) +$

$k\{(x-4)(0-4) - (y-0)(4-0)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + k(-4x + 16 - 4y) = 0$,

যা $C(4,4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 16-16+16-16 + k(-16+16-16) = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ (Ans.)

(c) বৃত্তটির AB স্পর্শকের সমান্তরাল অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: C, D বিন্দুগামী ব্যাসের ঢাল

$= \frac{4-\frac{4}{5}}{4-\frac{8}{5}} = \frac{20-4}{20-8} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ C, D বিন্দুগামী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল $= -\frac{3}{4}$

C, D বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্ত $G(\alpha, \beta)$ হলে,

$\frac{\frac{8}{5}+\alpha}{2} = 4 \Rightarrow \alpha = 8 - \frac{8}{5} = \frac{32}{5}$,

$\frac{\frac{4}{5}+\alpha}{2} = 4 \Rightarrow \alpha = 8 - \frac{4}{5} = \frac{36}{5}$

$\therefore$ $G(\frac{32}{5}, \frac{36}{5})$ বিন্দুগামী ও $-\frac{3}{4}$ ঢালবিশিষ্ট অপর স্পর্শকের সমীকরণ,

$(y - \frac{36}{5}) = -\frac{3}{4}(x - \frac{32}{5})$

$\Rightarrow 4(5y-36) = -3(5x-32)$

$\Rightarrow 20y - 144 = -15x + 96$

$\Rightarrow 15x + 20y - 240 = 0$

$\therefore$ $3x + 4y - 48 = 0$

37. $x^2+y^2+6x+8y+21=0, x^2+y^2=9;$ $x+y=6.$ [রা.বো.'১৭]

(a) উদ্দীপকের ১ম বৃত্তের x^2, y^2, x এবং y এর সহগগুলি একত্রে ব্যবহার করে কতটি সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান: উদ্দীপকের ১ম বৃত্তের x^2, y^2, x এবং y এর সহগ যথাক্রমে 1, 1, 6, 8 একত্রে ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় $\frac{4!}{2!} = 12$ সংখ্যক।

(b) দেখাও যে, উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $(-\frac{9}{5};-\frac{12}{5})$ বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

সমাধান: $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $A(-3, -4)$ ও

ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = \sqrt{25-21} = 2$

$x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের কেন্দ্র $B(0, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $r_2 = 3$

বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $C(-\frac{9}{5};-\frac{12}{5})$ বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, $AC+BC=r_1+r_2$ হবে।

এখন, $AC = \sqrt{(-3+\frac{9}{5})^2 + (-4+\frac{12}{5})^2}$

$= \sqrt{(\frac{-15+9}{5})^2 + (\frac{-20+12}{5})^2}$

$= \sqrt{\frac{36+64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$

$BC = \sqrt{(0+\frac{9}{5})^2 + (0+\frac{12}{5})^2}$

$= \sqrt{\frac{81+144}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore$ $AC + BC = 2 + 3 = 5$ এবং

$r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$

$\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $(-\frac{9}{5};-\frac{12}{5})$ বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

(c) উদ্দীপকের ১ম বৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুগামী এবং ২য় বৃত্তের কেন্দ্রগামী বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষ থেকে খন্ডিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: উদ্দীপকের ১ম বৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 + k(x + y - 6) = 0,$

যা ২য় বৃত্তের কেন্দ্র (0,0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $0 + 0 + 6.0 + 8.0 + 21 + k(0 + 0 - 6) = 0$

$\Rightarrow k = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 + \frac{7}{2}(x + y - 6) = 0$

$\Rightarrow$ $2x^2 + 2y^2 + 12x + 16y + 42 + 7x + 7y - 42 = 0$

$\therefore$ $2x^2 + 2y^2 + 19x + 23y = 0$ (Ans.)

38. একটি রিক্সার সামনের চাকা $x^2+y^2-2x-1=0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত। [কু.বো.'১৭]

(a) মূলবিন্দুগামী যে রেখা $2x + 5y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $2x + 5y + 6 = 0$ এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $5x - 2y + k = 0 \cdots \cdots$ (i); যা মূলবিন্দু (0,0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ $5\times 0 - 2\times 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $5x - 2y = 0$

(b) রিক্সাটির চাকার একটি স্পর্শক $x + y + 1 = 0$ হবে কিনা যাচাই করে স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ এ

$x + y + 1 = 0 \Rightarrow y=-x-1$ বসিয়ে পাই,

$x^2 + (-x-1)^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore y=-x-1=-1$

দৃশ্যকল্পের বৃত্তটিকে $x + y + 1 = 0$ রেখাটি কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং বৃত্তটিকে রেখাটি স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -1)$।

এখন, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2-2x-1=0$ এর কেন্দ্র $(1, 0)$.

ধরি, স্পর্শ বিন্দু $(0, -1)$ গামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক (x, y) হলে,

$\frac{0+x}{2}=1 \Rightarrow x = 2,\quad \frac{-1+y}{2}=0 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দু $(0, -1)$ গামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(2, 1)$ (Ans.)

(c) $(-1,-1)$ ও $(3,0)$ বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র চাকাটির $(2,1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর অবস্থিত।

সমাধান: $x^2+y^2-2x-1=0$ বৃত্তের $(2,1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.2 + y.1 - (x + 2) - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x + y - x - 2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x + y - 3 = 0 \cdots\cdots$ (i)

$(-1, -1)$ ও $(3,0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + 1)(x - 3) + (y + 1)(y - 0) + k\{(x + 1)(-1-0) - (y+1)(-1-3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 + y + k(-x - 1 + 4y + 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 + y + k(-x + 4y + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2-k)x + (1+4k)y - 3 + 3k = 0$ $\cdots\cdots$(ii), যার কেন্দ্র $(\frac{2+k}{2}, \frac{1+4k}{2})$, (i) রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{2+k}{2} + \frac{1+4k}{2} - 3 = 0$

$\Rightarrow 2 + k + 1 + 4k - 6 = 0$

$\Rightarrow 5k - 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{5}$

(ii) হতে পাই, $x^2 + y^2 + (-2-\frac{3}{5})x + (1+4.\frac{3}{5})y - 3 + 3.\frac{3}{5} = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 13x + 17y - 15 + 9 = 0$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 13x + 17y - 6 = 0$ (Ans.)

39. দৃশ্যকল্প: $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6=0$;
$x + 2y + 1=0$ **[ব.বো.'১৭]**

(a) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 5y - 2 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-\frac{-4}{2}, -\frac{5}{2}) = (2, -\frac{5}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ

$= \sqrt{2^2 + (-\frac{5}{2})^2 - (-2)} = \sqrt{4 + \frac{25}{4} + 2}$

$= \sqrt{\frac{24+25}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

(b) একটি বৃত্তের সমীরকণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র দৃশ্যকল্প দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং যা মূলবিন্দু ও দৃশ্যকল্প দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

সমাধান: মূলবিন্দু $(0, 0)$ ও দৃশ্যকল্প দ্বারা প্রকাশিত বৃত্ত $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$ এর কেন্দ্র $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x + \frac{3}{2}) + (y - 0)(y - \frac{5}{2}) + k\{(x - 0)(0 - \frac{5}{2}) - (y-0)(0 + \frac{3}{2})\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 - \frac{5}{2}y + k\{-\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (\frac{3}{2} - \frac{5}{2}k)x + (-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}k)y = 0,$

যার কেন্দ্র $(-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}k, \frac{5}{4} + \frac{3}{4}k)$ প্রদত্ত সরলরেখা $x + 2y + 1 = 0$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}k + 2(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}k) + 1 = 0$

$\Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}k + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}k + 1 = 0$

$\Rightarrow -3 + 5k + 10 + 6k + 4 = 0$

$\Rightarrow 11k = -11 \Rightarrow k = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (\frac{3}{2} + \frac{5}{2})x + (-\frac{5}{2} + \frac{3}{2})y = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - y = 0$ (Ans.)

(c) বৃত্তটির যে জ্যাটি $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমান্তরাল এবং $(1, 2)$ বিন্দু হতে $5\frac{1}{2}$ একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$ বৃত্তের যে জ্যাটি $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ,

$$x.(-2) + y.3 + \frac{3}{2}(x-2) - \frac{5}{2}(y+3) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -4x + 6y + 3x - 6 - 5y - 15 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow -x + y - 9 = 0 \Rightarrow x - y + 9 = 0 \cdots (i)$$

(i) রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$$x - y + k = 0 \cdots \cdots (ii)$$

$(1, 2)$ বিন্দু হতে (ii) দূরত্ব

$$= \frac{|1-2+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} = 5\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|k-1|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{2}$

$$\Rightarrow k - 1 = \pm\frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow k = 1 \pm \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 11 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow k = -\frac{51}{2}, \frac{59}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমান্তরাল সরলরেখাগুলির সমীকরণ,

$$x - y + \frac{\pm 11 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2}y \pm 11 + \sqrt{2} = 0 \text{ (Ans.)}$$

ব্যবহারিক

পরীক্ষণের নাম ঃ $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হতে পাই,

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (y - 4)^2 = 5^2 - (x + 3)^2$$

$$\Rightarrow y - 4 = \pm\sqrt{(5 + x + 3)(5 - x - 2)}$$

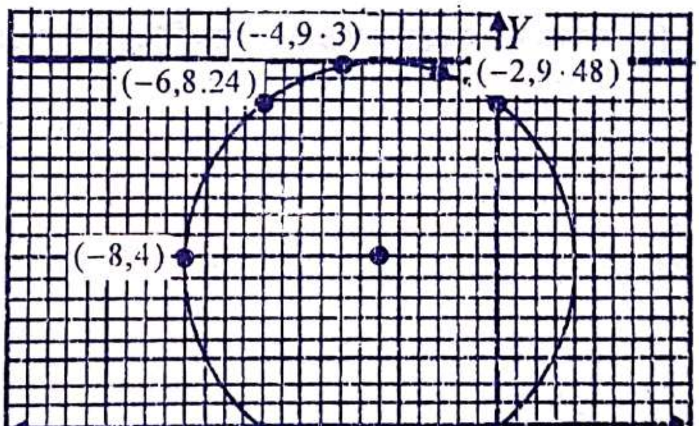
$$\Rightarrow y = 4 \pm \sqrt{-(x+8)(x-3)} \cdots \cdots (i)$$

এ $(x+8)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 3$ অর্থাৎ $x \in [-8, 3]$ এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি :

x	−8	−6	−6	−4	−4
y	4	8·24	−·24	9.29	−1·29
x	−2	−2	0	0	
y	9·48	−1·48	8·89	−0·89	

2. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে মুক্তহস্তে সংযোগ করে প্রদত্ত (i) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



লেখের বৈশিষ্ট্য ঃ

1. লেখচিত্রটি একটি বৃত্ত।

2. লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

সতর্কতা ঃ

1. গ্রাফ পেপার সুষম বর্গক্ষেত্র বিশিষ্ট কিনা দেখে নেই।

2. শার্পনার দিয়ে পেন্সিল সরু করে নেই।

সমাধান ঃ (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-a)^2+(y-b)^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2$

$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=a^2+b^2$

$\therefore x^2+y^2-2ax-2by=0$ (Ans.)

3. (a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2,-1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[কু.'০৫; য.'১০; দি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(-\frac{-4}{2},-\frac{5}{2})=(2,-\frac{5}{2})$,যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(2,-\frac{5}{2})$ হতে $(2,-1)$ বিন্দুর দূরত্ব $=|-\frac{5}{2}+1|=\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+\frac{25-9}{4}=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+5y+4=0$

$\therefore x^2+y^2-4x+5y+8=0$ (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $x^2+y^2-4x+5y=2^2+1^2-4.2+5(-1)=4+1-8-5$]

3(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4,-5)$ এবং এটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুইটি থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; য.'০৮; কু.'১৪]

সমাধান ঃ কেন্দ্র $(4,-5)$ এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীরকণ,

$x^2+y^2+2(-4)x+2(5)y=0$

$\therefore x^2+y^2-8x+10y=0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-4$, $f=5$, $c=0$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{4^2-0}=8$ এবং

বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{5^2-0}=10$

4. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4,-8)$ এবং তা y-অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; ঢা.'০২]

সমাধান ঃ $(4,-8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের ভুজ | = | 4 | = 4

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2+(y+8)^2=4^2$

$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2+16y+64=16$

$\therefore x^2+y^2-8x+16y+64=0$

[MCQ এর জন্য, $x^2+y^2-8x+16y+8^2=0$]

4. (b) $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.'০৭]

সমাধান ঃ $(-5,7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক |= |7|= 7

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x+5)^2+(y-7)^2=7^2$

$\Rightarrow x^2+10x+25+y^2-14y+49=49$

$\therefore x^2+y^2+10x-14y+25=0$

4. (c) $(2, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y-অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। [রা.'০১; কু.'০৯]

সমাধান ঃ $(2, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের কোটি| = | 3 | = 3

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2+(y-3)^2=3^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=9$

$\therefore x^2+y^2-4x-6y+4=0$

এখন বৃত্তটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-2$, $f=-3$, $c=4$

$\therefore$ বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$

5. একটি বৃত্ত $(-6, 5)$, $(-3, -4)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[ব.'০২;দি.'০৯]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-6, 5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + 6)(x + 3) + (y - 5)(y + 4) + k\{(x + 6)(5 + 4) - (y - 5)(-6 + 3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 + k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 + k(9x + 3y + 39) = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলে,

$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$

$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-\frac{6}{2}, -\frac{-2}{2})$ $= (-3, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+1-(-15)} = 5$

[MCQ : $\frac{(x+6)(x+3)+(y-5)(y+4)}{9(x+6)-(-3)(y-5)}$ $= \frac{(2+6)(2+3)+(1-5)(1+4)}{9(2+6)-(-3)(1-5)}$]

6. (a) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৮; ব. '১০,'১২; সি. '০৬; য. '০৭; কু. '০৭; রা.'১০,'১৩]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)(x + 2) + (y + 2)(y - 0) + k\{(x - 3)(-2-0) - (y + 2)(3 + 2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 + y^2 + 2y + k(-2x + 6 - 5y - 10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-1-2k)x + (2 - 5k)y - 6 - 4k = 0 \cdots\cdots (1)$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{1+2k}{2}, -\frac{2-5k}{2})$, $2x-y=3$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore 2\frac{1+2k}{2} - (-\frac{2-5k}{2}) = 3$

$\Rightarrow 2 + 4k + 2 - 5k = 6$

$\Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (-1+4)x + (2+10)y - 6 + 8 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$ (Ans.)

6. (b) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; রা.'০৮; য.'১২]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 3)(x - 6) + (y - 5)(y - 4) + k\{(x - 3)(5-4) - (y - 5)(3 - 6)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 + k(x - 3 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9 + k)x + (-9 + 3k)y + 38 - 18k = 0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{9-k}{2}, \frac{9-3k}{2})$, $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{9-k}{2} + 2.\frac{9-3k}{2} = 10$

$\Rightarrow 9 - k + 18 - 6k = 20$

$\Rightarrow -7k = -7 \Rightarrow k = 1$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 38 - 18 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ (Ans.)

7. (a) x-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু., রা., ব.'০৩; দি.'১০; সি.১৪]

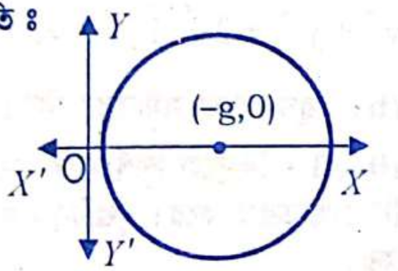
সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-6)+(y-5)(y-4)+$
$k\{(x-3)(5-4)-(y-5)(3-6)\}=0$
$\Rightarrow x^2-9x+18+y^2-9y+20+$
$k(x-3+3y-15)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+(-9+k)x+(-9+3k)y$
$+38-18k=0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{k-9}{2}, \frac{9-3k}{2})$, x-অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore \frac{9-3k}{2}=0 \Rightarrow k=3$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,
$x^2+y^2+(-9+3)x+38-54=0$
$\therefore x^2+y^2-6x-16=0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি ঃ



ধরি, কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+c=0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটি (3, 5) ও (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 9+25+6g+c=0$
$\Rightarrow 34+6g+c=0 \cdots\cdots (2)$ এবং
$36+16+12g+c=0$
$\Rightarrow 52+12g+c=0 \cdots\cdots (3)$
$(3)-(2) \Rightarrow 18+6g=0 \Rightarrow g=-3$
$\therefore$ (2) হতে পাই, $34-18+c=0 \Rightarrow c=-16$
(1) এ g ও c এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2+y^2-6x-16=0$ (Ans.)

7. (b) y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং (p , q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা. '০২; সি. '০৪; য. '০৫; ঢা. '১২; রা.,চ.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$
(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।
$\therefore g=0$
বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) ও (p, q) বিন্দুগামী।
$\therefore 0+0+c=0 \Rightarrow c=0$ এবং
$p^2+q^2+2qf+0=0$
$\Rightarrow f=-\frac{p^2+q^2}{2q}$
(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,
$x^2+y^2+2(-\frac{p^2+q^2}{2q})y=0$
$\therefore q(x^2+y^2)=(p^2+q^2)y$ (Ans.)

7. (c) (3, 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা.'০২, '০৬; ব.'০২,'১১]

সমাধানঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3 , 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,
$(x-3)(x-7)+(y-0)(y-0)+$
$k\{(x-3)(0-0)-(y-0)(3-7)\}=0$
$\Rightarrow x^2-10x+21+y^2+k(4y)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-10x+4ky+21=0 \cdots (1)$
(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(5, -2k)$ এবং ব্যাসার্ধ
$=\sqrt{5^2+(-2k)^2-21}=\sqrt{4+4k^2}$
(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে ।
$\therefore \sqrt{4+4k^2}=|5|$
$\Rightarrow 4+4k^2=25 \Rightarrow 4k^2=21$
$\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$
k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,
$x^2+y^2-10x+4(\pm\frac{\sqrt{21}}{2})y+21=0$
$\therefore x^2+y^2-10x\pm 2\sqrt{21}y+21=0$

বিকল্প পদ্ধাতি ঃ ধরি , y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$
$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+k^2=0 \cdots (1)$
(1) বৃত্তটি (3 , 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী ।
$\therefore 9-6h+k^2=0 \cdots\cdots (2)$ এবং
$49-14h+k^2=0 \cdots\cdots (3)$
$(2)-(3) \Rightarrow -40+8h=0 \Rightarrow h=5$

(2) এ $h = 5$ বসিয়ে পাই, $9 - 30 + k^2 = 0$

$\Rightarrow k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\sqrt{21}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$

7. **(d) (1,1) ও (2,2) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। [য.'০৩]**

সমাধান: খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (1 , 1) ও (2, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-1)(x-2) + (y-1)(y-2) + k\{(x-1)(1-2) - (y-1)(1-2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + y^2 - 3y + 2 + k(-x + 1 + y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-3-k)x + (-3 + k)y + 4 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{k+3}{2}, \frac{3-k}{2})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(\frac{k+3}{2})^2 + (\frac{3-k}{2})^2 - 4}$

$= \sqrt{\frac{k^2 + 6k + 9 + k^2 - 6k + 9 - 16}{4}}$

$= \sqrt{\frac{2(k^2+1)}{4}} = \sqrt{\frac{k^2+1}{2}}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\frac{k^2+1}{2}} = 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 2$

$\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, যখন $k = 1$ এবং

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, যখন $k = -1$

8. **(a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য.'০৫; ব.'১১]**

সমাধান : নির্ণেয় বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে বলে তা (2 , 0) ও (−2 , 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (2, 0) ও (−2, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x-2)(x+2) + (y-0)(y-0) + k\{(x-2)(0-0) - (y-0)(2+2)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 + y^2 + k(-4y) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4ky - 4 = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 2k) এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{0^2 + (2k)^2 + 4} = \sqrt{4k^2 + 4}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{4k^2 + 4} = 5 \Rightarrow 4k^2 + 4 = 25$

$\Rightarrow 4k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 - 4(\pm\frac{\sqrt{21}}{2})y - 4 = 0$

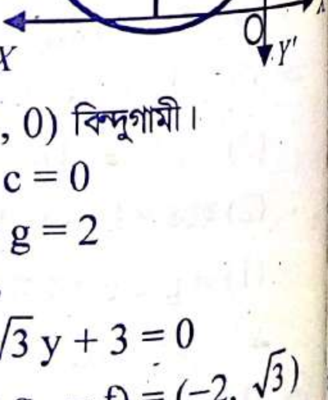
$\therefore x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0$ (Ans.)

8. **(b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (− 1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৬; য.'১০]**

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।



$\therefore f^2 = c$ এবং

$-f = \sqrt{3}$

$\Rightarrow f = -\sqrt{3}$

$\therefore c = (-\sqrt{3})^2 = 3$ X

আবার, (1) বৃত্তটি(− 1, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore 1 + 0 - 2g + 0 + c = 0$

$\Rightarrow 1 - 2g + 3 = 0 \Rightarrow g = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

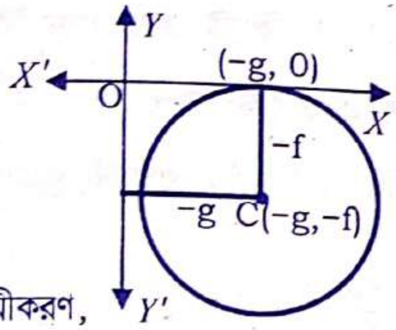
$x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

২য় অংশ ঃ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) = (-2, \sqrt{3})$

এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 3 - 3} = 2$

8. **(c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (3, − 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।[কু.'০৮; সি.'১১; ঢা.'১২; প্র.ভ.প. '৯৯]**

সমাধান ঃ



ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore\ g^2 = c$ এবং $-g = 2 \Rightarrow g = -2$

$\therefore\ c = (2)^2 = 4$

আবার, (1) বৃত্তটি $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ 9+1+6g-2f+c=0$

$\Rightarrow 10-12-2f+4=0$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

$\Rightarrow 2f=2 \Rightarrow f=1$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

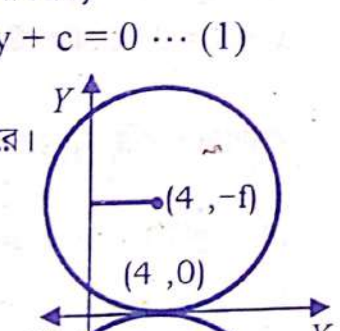
$x^2+y^2-4x+2y+4=0$ (Ans.)

9. **(a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে। [ঢা.,রা.,য.,চ'০৯; সি. '১২; কু.'১০,'১২; য.'১১; রা.'১২]**

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।



$\therefore\ c = g^2 \cdots (2)$ এবং

$16+8g+c=0$

$\Rightarrow 16+8g+g^2=0$

$\Rightarrow (g+4)^2=0$

$\Rightarrow g=-4$

$\therefore\ (2) \Rightarrow c = g^2 = 16.$

আবার, (1) বৃত্তটি y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

$\therefore\ 2\sqrt{f^2-c} = 6 \Rightarrow \sqrt{f^2-16} = 3$

$\Rightarrow f^2-16=9 \Rightarrow f^2=25 \Rightarrow f=\pm 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2-8x\pm 10y+16=0$ (Ans.)

9. **(b) $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা.'০০; ব.'০৪; কু.'০৮; দি.'১০]**

সমাধান ঃ $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x+4)(x-12)+(y-3)(y+1)=0$

$\Rightarrow x^2-8x-48+y^2-2y-3=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-2y-51=0$ (Ans.)

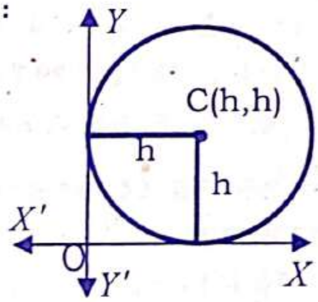
২য় অংশ ঃ $x^2+y^2-8x-2y-51=0$ কে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $g=-4$, $f=-1$ এবং $c=-51$

$\therefore$ y-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2-c}$

$= 2\sqrt{1^2-(-51)} = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$

10. **এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [চ. '০৭; য.'০৩ ; মা.বো.'০৬; সি.'০৯; কু.'১২]**

সমাধান :



ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore\ k=h$ এবং $r=|h|$

$\therefore$ (1) হতে পাই,

$(x-h)^2+(y-h)^2=|h|^2$

$\Rightarrow x^2-2hx+h^2+y^2-2hy+h^2=h^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2hy+h^2=0 \cdots (2)$

যা (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore\ 1+64-2h-16h+h^2=0$

$\Rightarrow h^2-18h+65=0$

$\Rightarrow (h-5)(h-13)=0 \ \therefore h=5, 13$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2-10x-10y+25=0$ এবং

$x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$

11. (a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6 , 0) এবং যা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা.'০৭; রা.'০৭,'১৪; ব.'০৮,'১২; চ.'০৮; মা.'০৯,'১৪; য.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - 4x + k(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4 + k)x - 3k = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{k-4}{2}, 0)$.

প্রশ্নমতে , বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 0).

$\therefore -\frac{k-4}{2} = 6 \Rightarrow k - 4 = -12 \ \therefore k = -8$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (-4 - 8)x - 3.(-8) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0$ (Ans.)

11 (b) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [য.'০২; সি.'০২; ব.'০৭; চ.'১১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত এবং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0 \cdots \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore -4 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 8x + 12y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ (Ans.)

12. (a) দেখাও যে, A(1 , 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত । A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'১০; য.'০৭; কু.,রা.,'০৯;দি.'১২;ব.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণ : ধরি, $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

$\therefore f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 4.1 + 6.1 - 12$

$= 1 + 1 + 4 + 6 - 12 = 0$

$\therefore$ A(1 , 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপর অবস্থিত।

২য় অংশ: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র$=(-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}) = (-2, -3)$

ধরি, A(1 , 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দু $B(\alpha, \beta)$.

$\therefore \frac{1+\alpha}{2} = -2 \Rightarrow 1 + \alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -5$

এবং $\frac{1+\beta}{2} = -3 \Rightarrow 1 + \beta = -6 \Rightarrow \beta = -7$

$\therefore$ ব্যাসের অপর প্রামত্মবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-5, -7)$

12 (b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি (2 , 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$

এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{-8}{2}, -\frac{6}{2}) = (4, -3)$

(2, 5) বিন্দু ও কেন্দ্র (4 , −3) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-4} = \frac{y-5}{5+3}$

$\Rightarrow 8x - 16 = -2y + 10 \Rightarrow 8x + 2y = 26$

$\therefore 4x + y = 13$ (Ans.)

12 (c) (1,1) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। [কু.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore c = g^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore -g - f = 3 \Rightarrow f = -g - 3 \cdots \cdots (3)$

আবার, বৃত্তটি (1, 1) বিন্দুগামী ।

$\therefore 1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$

$\Rightarrow 2 + 2g + 2(-g - 3) + g^2 = 0$ [(2) ও (3) দ্বারা]

$\Rightarrow 2 + 2g - 2g - 6 + g^2 = 0$

$\Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g = -2$

[প্রথম চতুর্ভাগে g ও f ঋণাত্মক ।]

এখন (2) হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$ এবং

(3) হতে পাই, $f = 2 - 3 = -1$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

12 (d) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1,1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x-7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '০৮; রা. ০৮; কু. '০৭; য. '০৬; চ.'০৯; ঢা.'১১]

সমাধান:ধরি, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{10})^2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2(x^2-2hx + h^2 + y^2-2ky + k^2) = 5 \cdots (1)$

$y = 3x - 7$ রেখার উপর (1) বৃত্তের কেন্দ্র (h , k) অবস্থিত।

$\therefore k = 3h - 7 \cdots (2)$

(1) বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 2(1 - 2h + h^2 + 1 - 2k + k^2) = 5$

$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k = 1$

$\Rightarrow 2h^2 + 2(3h-7)^2 - 4h - 4(3h-7) = 1$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow 2h^2 + 2(9h^2 - 42h + 49) - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$

$\Rightarrow 2h^2 + 18h^2 - 84h + 98 - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$

$\Rightarrow 20h^2 - 100h + 125 = 0$

$\Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0 \Rightarrow (2h-5)^2 = 0$

$\Rightarrow h = \frac{5}{2}$; (2) হতে পাই, $k = 3\frac{5}{2} - 7 = \frac{1}{2}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$2x^2 - 4.\frac{5}{2}x + 2.\frac{25}{4} + 2y^2 - 4\frac{1}{2}y + 2.\frac{1}{4} = 5$

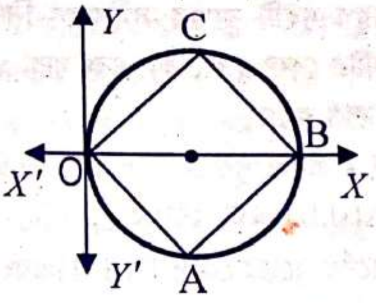
$\Rightarrow 8x^2 - 40x + 50 + 8y^2 - 8y + 2 = 20$

$\Rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x - 8y + 32 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$ (Ans.)

13. (a) $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৪]

সমাধান :



ধরি, OABC বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দু O(0,0) এবং x-অক্ষের উপর এর বিপরীত শীর্ষ B অবস্থিত।

OAB সমকোণী ত্রিভুজে,

$OB^2 = OA^2 + AB^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$ [$\because$ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 4\sqrt{2}$]

$= 32 + 32 = 64$

$\therefore OB = \pm 8 =$ B বিন্দুর ভুজ।

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\pm 8 , 0)$

OB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$(x-0)(x \pm 8) + (y-0)(y-0) = 0$

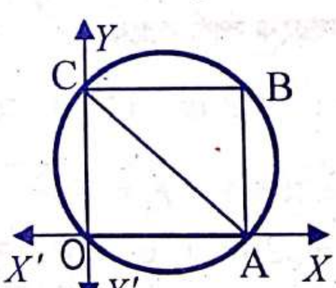
$\Rightarrow x^2 \pm 8x + y^2 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 \pm 8x = 0$ (Ans.)

13. (b) b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA ও OC কে অক্ষ ধরে দেখাও যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x+y)$.

[ঢা.'০৫; রা.'১০; ব.'১৩]

প্রমাণ ঃ



B বাহুবিশিষ্ট OABC বর্গের x ও y- অক্ষ বরাবর যথাক্রমে OA ও OC অবস্থিত হলে A ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (b,0) ও (0 ,b).

বর্গের কর্ণ AC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত পরিবৃত্তের সমীকরণ $(x-b)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0$

$\Rightarrow x^2 - bx + y^2 - by = 0$

$\therefore x^2 + y^2 = b(x+y)$ (Provsd)

14 (a) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3 , 4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। [য.'১০]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9 \cdots$ (i) এর কেন্দ্র $A(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 3$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $B(3,4)$এবং ব্যাসাধ r_2 বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$\therefore \quad r_1 + r_2 = AB \Rightarrow 3 + r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\Rightarrow r_2 = 2$

আবার, বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$r_2 - r_1 = AB \Rightarrow r_2 - 3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\therefore \quad r_2 = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত দুইটির সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 4 = 0$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ এবং

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 64 = 0$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$

14. (b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ ও $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করবে। [মা.'০৭]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$A(-a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{a^2 - c}$

$x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $B(0, -b)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{b^2 - c}$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে,

$AB = |r_1 \pm r_2|$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |\sqrt{a^2 - c} \pm \sqrt{b^2 - c}|$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 - c + b^2 - c \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$ [বর্গ করে।]

$\therefore \quad 2c = \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$

$\Rightarrow c^2 = (a^2 - c)(b^2 - c)$ [বর্গ করে।]

$\Rightarrow c^2 = a^2b^2 - b^2c - a^2c + c^2$

$\Rightarrow b^2c + a^2c = a^2b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$

$\therefore \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ হলে, প্রদত্ত রেখা দুইটি স্পর্শ করবে।

15. $x = a(\cos\theta - 1)$ এবং $y = a(\sin\theta + 1)$ হলে , বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ, ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = a(\cos\theta - 1) = a\cos\theta - a$

$\Rightarrow a\cos\theta = x - a$

আবার, $y = a(\sin\theta + 1) = a\sin\theta + a$

$\Rightarrow a\sin\theta = y - a$

এখন, $a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta = (x-a)^2 + (y-a)^2$

$\therefore \quad (x-a)^2 + (y-a)^2$, যা বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a এবং কেন্দ্র $(a, -a)$.

16. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে এরূপ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর:

সমাধান: (a) $(4, 30^0)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r.4\cos(\theta - 30^0)$

$\Rightarrow 25 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$

$\therefore \quad r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$

(b) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $a^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - 0^0)$

$\Rightarrow a^2 = r^2 + 9 - 6r\cos(\theta \cdots \cdots$ (1)

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$ বিন্দুগামী বলে,

$a^2 = 0^2 + 9 - 6.0.\cos 0^0$

$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $9 = r^2 + 9 - 6r\cos\theta$

$\Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta \Rightarrow r = 6\cos\theta$

(c) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ p. তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$p^2 = r^2 + r_1^2 - 2r r_1\cos(\theta - \theta_1) \cdots$ (1)

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$, $(a, 0^0)$, $(b, 90^0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \quad p^2 = 0^2 + r_1^2 - 2.0.r_1\cos(0^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow p^2 = r_1^2 \Rightarrow p = r_1 \cdots \cdots (2)$

$p^2 = a^2 + r_1^2 - 2.a.r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow a^2 = 2ar_1 \cos\theta_1, [\because p = r_1]$

$\Rightarrow a = 2r_1 \cos\theta_1 \cdots \cdots (3)$

এবং $p^2 = b^2 + r_1^2 - 2.b.r_1 \cos(90^0 - \theta_1)$

$\Rightarrow b^2 = 2br_1 \sin\theta_1, [\because p = r_1]$

$\Rightarrow b = 2r_1 \sin\theta_1$

(1) হতে পাই, $r_1^2 = r^2 + r_1^2$

$-2rr_1(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1)$

$r^2 = r(\cos\theta.2r_1\cos\theta_1 + \sin\theta.2r_1\sin\theta_1)$

$\therefore r = a\cos\theta + b\sin\theta$

17. বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর:

(a) **সমাধান:** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$g = -2\sqrt{3}, f = -2, c = 15.$

$\therefore \sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12 + 4} = 4, \tan^{-1}\frac{-f}{-g} =$

$\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{6})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12 + 4 - 15} = 1$

(b) $r = 2a\cos\theta \Rightarrow r^2 - 2ra\cos\theta = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -a, f = 0, c = 0.$

$\therefore \sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a,$

$\tan^{-1}\frac{-f}{-g} = \tan^{-1}\frac{0}{a} = \tan^{-1}0 = 0^0$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $(a, 0^0)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{a^2 + 0^2 - 0} = a$

18. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 7 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র (7, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 4.

$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$4^2 = r^2 + 7^2 - 2r.7\cos(\theta - 0)$

$\Rightarrow 16 = r^2 + 49 - 14r\cos\theta$

$\therefore r^2 - 14r\cos\theta + 33 = 0$ (Ans.)

(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 8 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(8, \frac{\pi}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ = 5.

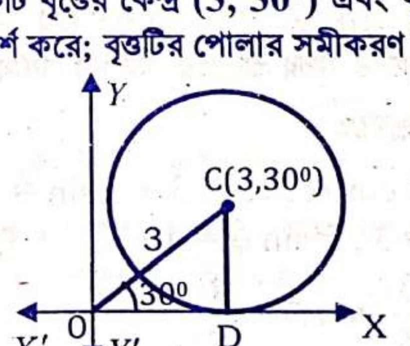
$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 8^2 - 2r.8\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow 25 = r^2 + 64 - 16r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$\therefore r^2 - 16r\sin\theta + 39 = 0.$

(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= CD = 3\sin 30^0 = \frac{3}{2}$

$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

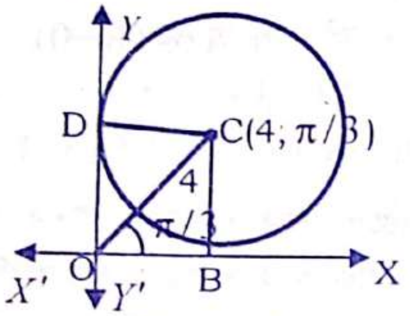
$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - 30^0)$

$\Rightarrow \frac{9}{4} = r^2 + 9 - 6r\cos(\theta - 30^0)$

$\Rightarrow 9 = 4r^2 + 36 - 24r\cos(\theta - 30^0)$

$\therefore \ 4r^2 - 24r\cos(\theta - 30^0) + 27 = 0$

(d) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং

ব্যাসার্ধ $= OB = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4.\frac{1}{2} = 2$

$\therefore$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$(2)^2 = r^2 + 4^2 - 2r.4\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow 4 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$

$\therefore \ r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + 12 = 0$

19. যদি বৃত্তের উপরস্থ (4,1) বিন্দুটি $(1 + 5\cos\theta, -3 + 5\sin\theta)$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তবে এ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে,

$4 = 1 + 5\cos\theta, \ 1 = -3 + 5\sin\theta$

$\Rightarrow 5\cos\theta = 3, \ 5\sin\theta = 4$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}, \sin\theta = \frac{4}{5}$

আমরা জানি, প্রদত্ত বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের জন্য θ এর মান $180°$ বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ অপর প্রান্তের জন্য,

$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta = -\frac{3}{5}$ এবং

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore$ (4, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক

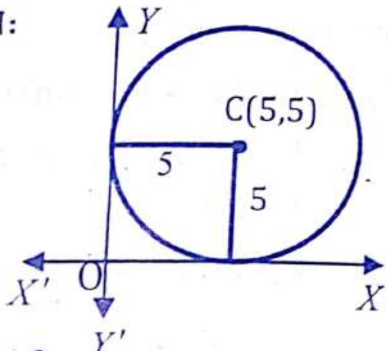
$(1 + 5\times(-\frac{3}{5}), -3 + 5\times(-\frac{4}{5}))$

$= (1-3, -3-4) = (-2, -7)$ (Ans.)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা:

20. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

সমাধান:



নির্ণেয় বৃত্তটি প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (5, 5)

এবং ব্যাসার্ধ $= |5| = 5.$ (১)

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 25$

$\therefore \ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ (Ans.)

21. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (3, – 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(2,-3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{4+9-8} = \sqrt{5}$ (১)

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(5,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{25+9-14} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু P(3, –1).

এখন $C_1P = \sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5} = r_1$ (১)

এবং $C_2P = \sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5} = r_2$

$C_1C_2 = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = C_1P + C_2P$

∴ বৃত্তের কেন্দ্র দুইটি এবং (3, –1) বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত। (১)

অতএব, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (3, –1) বিন্দুতে স্পর্শ করে। (প্রমাণিত) (১)

22. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র A(3, –3) এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{9+9+18} = 6$ (১)

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র A(0, 1) এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{0+1+0} = 1$

এখন, $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$ (১)

এবং $r_1 - r_2 = 6 - 1 = 5 = AB$

∴ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। (১)

23. (a) বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(6, \frac{\pi}{4})$ এবং ব্যাসার্ধ 5 :

সমাধান : $(6, \frac{\pi}{4})$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$5^2 = r^2 + 6^2 - 2r.6\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ (১)

$\Rightarrow 25 = r^2 + 36 - 12r(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4})$ (১)

$\Rightarrow r^2 + 11 - 12r(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow r^2 - 6\sqrt{2}\, r(\cos\theta + \sin\theta) + 11 = 0$ (১)

(b) বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(3, \frac{3\pi}{2})$ ও ব্যাসাধ 2.

সমাধান : $(3, \frac{3\pi}{2})$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$2^2 = r^2 + 3^2 - 2r.3\cos(\theta - \frac{3\pi}{2})$ (১)

$\Rightarrow 4 = r^2 + 9 - 6r\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

$\Rightarrow r^2 + 5 + 6r\cos\theta = 0$ (১)

24. দেখাও যে, $r = a\cos\theta$ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(\frac{a}{2}, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $\frac{a}{2}$.

প্রমাণ : $r = a\cos\theta \Rightarrow r^2 = ar\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = ax$ (১)

$[\because r^2 = x^2 + y^2,\ x = r\cos\theta]$

$\Rightarrow x^2 - ax + a^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$; যা বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তের কেন্দ্র (a, 0) এবং ব্যাসার্ধ = a. (১)

25. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (3, – 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = (3, – 4), যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র। (১)

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (3, – 4) হতে (3, – 1) বিন্দুর দূরত্ব = |–4 + 1| = 3 (১)

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 3^2$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9$

$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ (Ans.)

26. $x + 2 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (– 7, 1) ও (– 1, 3) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।[চ.'০৭;মা.'০৫]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (–7 , 1) ও (–1, 3) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x+7)(x+1) + (y-1)(y-3) + k\{(x+7)(1-3) - (y-1)(-7+1)\} = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 + y^2 - 4y + 3 + k(-2x - 14 + 6y - 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (8 - 2k)x + (-4 + 6k)y + 10 - 20k = 0 \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(-\frac{8-2k}{2}, -\frac{-4+6k}{2}) = (k-4, 2-3k)$, $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (১)

$\therefore k - 4 + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$ (১)

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (8 - 4)x + (-4 + 12)y + 10 - 40 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0$ (Ans.) (১)

27. **$x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।**

[কু.'১৩; সি.'১০]

সমাধান ঃ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$(x+1)(x-3) + (y+1)(y-2) + k\{(x+1)(-1-2) - (y+1)(-1-3)\} = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 - y - 2 + k(-3x - 3 + 4y + 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2 - 3k)x + (-1 + 4k)y - 5 + k = 0 \quad \cdots\cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(\frac{2+3k}{2}, \frac{1-4k}{2})$, $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (১)

$\therefore \frac{2+3k}{2} + 2 . \frac{1-4k}{2} + 3 = 0$ (১)

$\Rightarrow 2 + 3k + 2 - 8k + 6 = 0$

$\Rightarrow -5k = -10 \Rightarrow k = 2$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$x^2 + y^2 + (-2-6)x + (-1+8)y - 5 + 2 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0$ (Ans.) (১)

28. **y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 0)$ ও $(-4, 1)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।** [চ.'০৫]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore g = 0$ (১)

বৃত্তটি $(3, 0)$ ও $(-4, 1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 9 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -9$ এবং

$16 + 1 + 2f + c = 0$

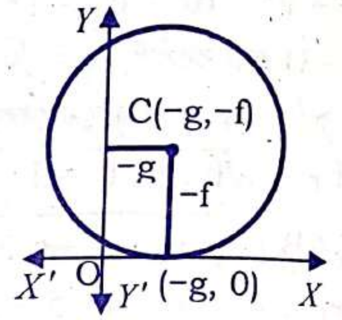
$\Rightarrow 17 + 2f - 9 = 0 \Rightarrow 2f = -8 \Rightarrow f = -4$ (১)

(1) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ (১)

29. **এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।** [য.'০০; চ.'০৩]

সমাধানঃ



ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore g^2 = c$ এবং (১)

$-g = 2 \Rightarrow g = -2$ (১)

$\therefore c = (2)^2 = 4$

আবার, (1) বৃত্তটি $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore 1 + 81 - 2g + 18f + c = 0$ (১)

$\Rightarrow 82 + 4 + 18f + 4 = 0$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

$\Rightarrow 18f = -90 \Rightarrow f = -5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ (Ans.) (১)

[MCQ এর জন্য,

$\frac{(x-2)^2 + (y-0)^2}{y} = \frac{(-1-2)^2 + (9-0)^2}{9}$]

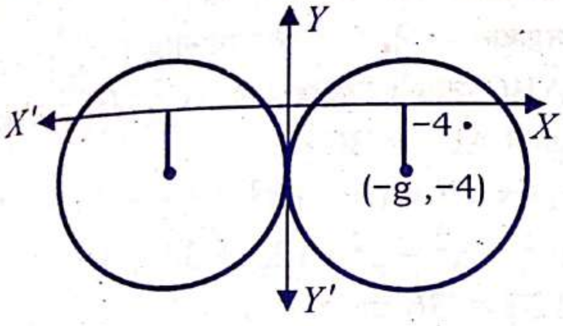
30. **এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে -4 একক দূরত্বে y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।**

[চ.'০৬;দি.'১০; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে -4 একক দূরত্বে y-অক্ষকে স্পর্শ করে অর্থাৎ $(0, -4)$ বিন্দুগামী।



$\therefore$ $c = f^2 \cdots (2)$ এবং (১)

$16 - 8f + c = 0$ (১)

$\Rightarrow 16 - 8f + f^2 = 0$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow (f-4)^2 = 0 \Rightarrow f = 4$

$\therefore$ (2) হতে পাই, $c = f^2 = 4^2 = 16$

আবার, (1) বৃত্তটি x-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

$\therefore$ $2\sqrt{g^2 - c} = 6$ (১)

$\Rightarrow \sqrt{g^2 - 16} = 3$

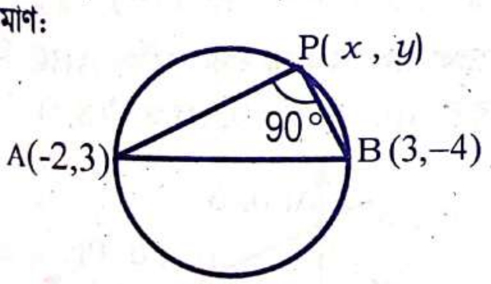
$\Rightarrow g^2 - 16 = 9 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = \pm 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$ (Ans.) (১)

31. প্রমাণ কর যে, $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$

প্রমাণ: [ঢা.'০৩]



ধরি, ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটি A(-2, 3) ও B(3 , -4) এবং P(x, y) পরিধির উপর যেকোন একটি বিন্দু।

PA এবং PB যোগ করি। যেহেতু AB ব্যাস, $\angle APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। (১)

$\therefore$ $\angle APB = 90°$

$\therefore$ (AP রেখার ঢাল) $\times$ (BP রেখার ঢাল) $= -1$ (১)

$\Rightarrow \frac{y-3}{x+2} \times \frac{y+4}{x-3} = -1$ (১)

$\Rightarrow (y-3)(y+4) = -(x+2)(x-3)$

$\therefore$ $(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$

(Proved)

32. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (0, 3) এবং যা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [চ.'০২]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 4y + k(y-2) = 0$ (১)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4+k)y - 2k = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -\frac{k-4}{2})$. (১)

প্রশ্নমতে , বৃত্তের কেন্দ্র (0 , 3).

$\therefore$ $-\frac{k-4}{2} = 3 \Rightarrow k - 4 = -6 \therefore k = -2$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + (-4-2)y - 2.(-2) = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ (Ans.) (১)

33. $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.' ৮৯, '০৪]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \cdots (1)$

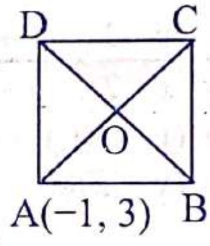
(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{-5b}{2}, -\frac{12b}{2}) = (\frac{5b}{2}, 6b)$ (১)

$\therefore$ (1) বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ $y = \frac{6b}{5b/2} x \Rightarrow y = \frac{12}{5} x$

$\therefore$ $12x + 5y = 0$ (Ans.) (১)

34. ABCD বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$. A $(-1, 3)$ হলে B, C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ABCD বর্গের পরিবৃত্ত $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$ এর কেন্দ্র $(\frac{5}{2}, -4)$ হবে ABCD বর্গের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O. (১) + (১)



ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (α, β)

AC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{5}{2}, -4)$। (১)

$\therefore \quad \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 5 + 1 = 6$ (১)

এবং $\frac{\beta + 3}{2} = -4 \Rightarrow \beta = -8 - 3 = -11$

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক $(6, -11)$.

AC এর ঢাল $= \frac{3 + 11}{-1 - 6} = -2$ (১)

ধরি, AB বাহুর ঢাল m এবং AB বাহু AC কর্ণের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \quad \frac{m + 2}{1 - 2m} = \tan 45° = 1$ (১)

$\Rightarrow m + 2 = 1 - 2m \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ AB ও DC বাহুর ঢাল $\frac{1}{3}$.

$\therefore$ A(−1, 3) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ

$y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ (১)

$\Rightarrow 3y - 9 = -x - 1 \Rightarrow x + 3y - 8 = 0 \cdots (1)$

C(6 , − 11) বিন্দুগামী (1) এর উপর লম্ব BC এর সমীকরণ $3x - y = 18 + 11$ (১)

$\Rightarrow 3x - y - 29 = 0 \cdots \cdots (2)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-87 - 8}{-1 - 9}, \frac{-24 + 29}{-1 - 9}) = (\frac{19}{2}, -\frac{1}{2})$ (১)

A(− 1, 3) বিন্দুগামী AB এর লম্ব AD এর সমীকরণ $3x - y = -3 - 3$

$\Rightarrow 3x - y + 6 = 0 \cdots (3)$

C(6 , − 11) বিন্দুগামী (3) এর উপর লম্ব CD এর সমীকরণ $x + 3y = 6 - 33 = -27$

$\Rightarrow x + 3y + 27 = 0 \cdots \cdots (4)$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{-27 - 18}{9 + 1}, \frac{6 - 81}{9 + !}) = (-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2})$ (১)

35. ABC সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0 , 0) ও B(6 , 0) । ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α, β).

ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AC^2 = BC^2 = AB^2$ (১)

এখন $AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - 6)^2 + \beta^2$ (১)

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + \beta^2$

$\Rightarrow 12\alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 3$

আবার, $AC^2 = AB^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 6^2$

$\Rightarrow 9 + \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta^2 = 27 \Rightarrow \beta = \pm 3\sqrt{3}$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, \pm 3\sqrt{3})$.

ধরি, A(0,0) দিয়ে যায় এরূপ পরিবৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \cdots (1)$ (১)

(1) বৃত্ত B(6,0) এবং $C(3, \pm 3\sqrt{3})$ বিন্দুগামী।

$\therefore \quad 36 + 12g = 0 \Rightarrow g = -3$ এবং (১)

$9 + 27 + 6g \pm 6\sqrt{3} f = 0$

$36 - 18 \pm 6\sqrt{2} f = 0 \Rightarrow \pm 6\sqrt{3} f = 18$

$\Rightarrow f = \pm \sqrt{3}$

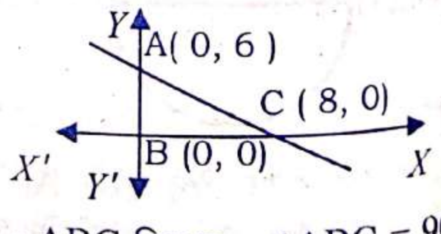
(1) এ g ও f এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 6x \pm 2\sqrt{3} y = 0$ (Ans.) (১)

36. $3x + 4y = 24$ সরলরেখা এবং অক্ষ দুইটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $3x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(0, 6), B(0, 0) ও C(8, 0). (১)



পরিবৃত্ত : ABC ত্রিভুজে, $\angle ABC = 90°$ বলে, A ও C বিন্দুদ্বয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু। (১)

$\therefore$ নির্ণেয় পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$(x - 0)(x - 8) + (y - 6)(y - 0) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ (Ans.)

অন্তঃবৃত্ত : এখানে, $a = BC = |0-8| = 8$, (১)

$b = AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

$c = AB = |6-0| = 6$

$\delta_{ABC} = 0(0-0) - 6(0-8) = 48$ (১)

এবং $a + b + c = 8 + 10 + 6 = 24$

$\therefore$ অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$= (\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c})$

$= (\frac{8\times0+10\times0+6\times8}{24}, \frac{8\times6+10\times0+6\times0}{24})$

$= (2, 2)$ (১)

অন্তঃব্যাসার্ধ $= \frac{|\delta_{ABC}|}{a+b+c} = \frac{48}{24} = 2$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ,

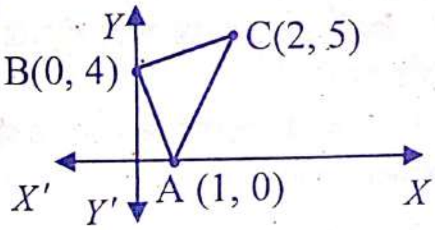
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ (Ans.) (১)

37. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(1, 0), B(0, 4) ও C(2, 5)। ABC ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



পরিকেন্দ্র: A(1, 0) ও B(0, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)(x-0) + (y-0)(y-4) = k\{(x-1)(0-4) - (y-0)(1-0)\}$ (১)

$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 4y = k(-4x + 4 - y)$, যা C(2, 5) বিন্দুগামী।

$\therefore 2^2 + 5^2 - 2 - 4\times5 = k(-4\times2 + 4\ 5)$ (১)

$\Rightarrow 4 + 25 - 2 - 20 = k(-8 + 4 - 5)$

$\Rightarrow -9k = 7 \Rightarrow k = -7/9$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগামী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - x - 4y = -\frac{7}{9}(-4x + 4 - y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - (1 + \frac{28}{9})x - (4 + \frac{7}{9})y + \frac{28}{9} = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{37}{9}x - \frac{43}{9}y + \frac{28}{9} = 0$ (১)

ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{37}{18}, \frac{43}{18})$ (১)

ভরকেন্দ্র : AB এর মধ্যবিন্দু $(\frac{1}{2}, 2)$ এবং C(2, 5) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ, (১)

$(x-2)(5-2) - (y-5)(2 - \frac{1}{2}) = 0$ (১)

$\Rightarrow 3x - 6 - \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x - 12 - 3y + 15 = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ (i)

আবার, BC এর মধ্যবিন্দু $(1, \frac{9}{2})$ এবং A(1, 0). শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$(x-1)(0 - \frac{9}{2}) - (y-0)(1-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$; (i) হতে পাই, $y = 2 + 1 = 3$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (1, 3). (১)

লম্বকেন্দ্র : AB বাহুর সমীকরণ

$(x-1)(0-4) - (y-0)(1-0) = 0$ (১)

$\Rightarrow -4x + 4 - y = 0 \Rightarrow 4x + y - 4 = 0$

$\therefore$ AB বাহুর উপর লম্ব এবং C(2 , 5) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x - 4y = 2 - 20$ (১) +(১)

$\Rightarrow x = 4y - 18 \cdots\cdots$ (ii)

আবার, BC বাহুর সমীকরণ

$(x-0)(4-5) - (y-4)(0-2) = 0$

$\Rightarrow -x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$

$\therefore$ BC বাহুর উপর লম্ব এবং A(1 , 0) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $2x + y = 2$

$\Rightarrow 2(4y - 18) + y = 2$, [(ii) দ্বারা]

$\Rightarrow 8y - 36 + y = 2$

$\Rightarrow 9y = 38 \Rightarrow y = 38/9$

(ii) হতে পাই, $x = 4\times\frac{38}{9} - 18 = -\frac{10}{9}$

ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র $(-\frac{10}{9}, \frac{38}{9})$ (১)