প্রশ্নমালা IX A

নিচের সীমাগুলির মান নির্ণয় কর :

1.(a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

সমাধানঃ ধরি $x = 2 + h$. $\therefore$ $h\to 0$, যখন $x\to 2$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{(2+h)^2-5(2+h)+6}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{4+4h+h^2-10-5h+6}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h(h-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{h+4}{h-1} = \frac{0+4}{0-1}$

$= -4$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতিঃ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = -4$ (Ans.)

1(b) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+4)^3-(x-8)^2}{x(x-3)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+12x^2+48x+64-x^2+16x-64}{x(x-3)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+12x^2+48x+64-x^2+16x-64}{x(x-3)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+11x^2+64x}{x(x-3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+11x+64)}{x(x-3)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+11x+64}{x-3} = \frac{0^2+11.0+64}{0-3}$

$= \frac{64}{-3} = -21\frac{1}{3}$ (Ans.)

2(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$ [সি. '০৩]

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+3x})^2-(\sqrt{1-4x})^2}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1+3x-1+4x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{7x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{7}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x}}$

$= \frac{7}{\sqrt{1+3.0}+\sqrt{1-4.0}} = \frac{7}{1+1} = \frac{7}{2}$

2(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ [ব. '০৯,'১৩]

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x})^2-(\sqrt{1-3x})^2}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1+3x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}$

$= \frac{5}{\sqrt{1+2.0}+\sqrt{1-3.0}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$ (Ans.)

2(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}$

$= \lim_{x\to 0}\{\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}} \times \frac{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}}\}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2-1-x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{(1+x^3-1-x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{x(x^2-1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{(x^2-1)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$= \frac{(0-1)(\sqrt{1+0^3}+\sqrt{1+0})}{(0^2-1)(\sqrt{1+0^2}+\sqrt{1+0})} = \frac{2}{2} = 1$$

3(a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{x^4(6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}} = \frac{2-0+0}{6+0-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3(b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ [চ.'০০]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x(1-\frac{1}{3^{2x}})}{3^x(1+\frac{1}{3^{2x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

3(c) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\frac{2x-1}{x+5} = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{5}{x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} = \ln\frac{2-0}{1+0}$$

$= \ln 2$ (Ans.)

3.(d) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{b}{2^x}$ [সি.'০৫]

ধরি, $\frac{b}{2^x}=\theta$. এখানে $x\to\infty$ বলে $2^x\to\infty$

$\therefore\ \theta = \frac{b}{2^x} \to 0$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{b}{2^x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{b}{\theta}\sin\theta$$

$$= b\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = b\,.\,1 = b$$

4.(a) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{x^{7/2}-a^{7/2}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ [ঢা.'০৩]

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a}(x^{7/2}-a^{7/2})}{\lim\limits_{x\to a}(x^{1/2}-a^{1/2})} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{7/2}-a^{7/2}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{1/2}-a^{1/2}}{x-a}}$$

$$= \frac{\frac{7}{2}a^{\frac{7}{2}-1}}{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}} \quad [\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}]$$

$$= (\frac{7}{2}\times\frac{2}{1})\,a^{\frac{7}{2}-1-\frac{1}{2}+1} = 7a^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}} = 7a^3 \text{ (Ans.)}$$

4(b) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{x^{5/2}-a^{5/2}}{x^{3/5}-a^{3/5}}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a}(x^{5/2}-a^{5/2})}{\lim\limits_{x\to a}(x^{3/5}-a^{3/5})} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{5/2}-a^{5/2}}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{3/5}-a^{3/5}}{x-a}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}a^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}-1}} \quad [\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}]$$

$$= (\frac{5}{2}\times\frac{5}{3})\,a^{\frac{5}{2}-1-\frac{3}{5}+1} = \frac{25}{6}\,a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{25}{6}\,a^{\frac{25-6}{10}} = \frac{25}{6}\,a^{\frac{19}{10}} \text{ (Ans.)}$$

5(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2}$ [প্র.ভ.প.'৮৫]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x}{2}}{\frac{9x^2}{4}.\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2.3}{4} \lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right\}^2 = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}$$

5.(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{3x^2}$ [সি.'০৮,'১২;কু.'১১; রা.'০৭,'১০; চ.'০৬; য.'০৮,'১২; ব.'০৮; ঢা.'১০; দি.'১১]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{7x}{2}}{3.\frac{49x^2}{4}.\frac{4}{49}}$$

$$= (\frac{2}{3}\times\frac{49}{4}) \lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(7x/2)}{7x/2}\right\}^2$$

$$= \frac{49}{6}.1 = \frac{49}{6} \text{ (Ans.)}$$

6. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$

[ব.'০১; মা.'০৫ সি.'০৪]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(2x+3x)\sin\frac{1}{2}(3x-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{5}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$= 2\times 1\times\frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{ (Ans.)}$$

6(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$ [কু.'০৩]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(2x+4x)\sin\frac{1}{2}(4x-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 3x \sin x}{x^2}$$

$$= 2.\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times 3$$

$$= 2\times 1\times 1\times 3 = 6 \text{ (Ans.)}$$

6. (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ [ব'১২; য.'১৩]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}(ax+bx)\sin\frac{1}{2}(bx-ax)}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}} \times \frac{a+b}{2} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}} \times \frac{b-a}{2}$$

$$= 2\times 1\times\frac{a+b}{2}\times 1\times\frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

6(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$

[য.'০৫; কু.'১৪]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+2\cos^2 x-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x(\cos x-1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x(-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$= -4\lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right\}^2 \times\frac{1}{4}\times \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$= -4\times 1\times\frac{1}{4}\times\cos 0 = -1\times 1 = -1$$

6(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

[য.'০৯; রা.'১১; চ,'১৩]

$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x\to 0} (\cos x + \cos 2x)$

$= 1 \times (\cos 0 + \cos 0)$

$= 1 + 1 = 1$ (Ans.)

7.(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ [রা.'০৯; ব.'১১, '১৪; কু.'১০; সি.'০৯; মা.'১৩; ঢা.'১১,'১৫]

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x . 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$

$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \times \lim_{x\to 0} \left\{\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right\}^2 \times \frac{1}{4}$

$= 2\times 1\times 1\times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

7(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^3}$ [মা.'০৪,'০৭]

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x(1-\cos 2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x . 2\sin^2 x}{x^3}$

$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x} \times 2 \times \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$= 2\times 1\times 2\times 1 = 4$ (Ans.)

7(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$ [ঢা.'০৯]

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x . 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

7(d) $\lim_{x\to y} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$ [কু.'০৫]

$= \lim_{x\to y} \frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{x-y}$

$= 2. \lim_{x\to y} \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \times \frac{1}{2} \times \lim_{x\to y} \cos\frac{x+y}{2}$

$= 2\times 1\times \frac{1}{2} \cos\frac{y+y}{2} = \cos y$ (Ans.)

7(e) $\lim_{x\to\alpha} \frac{\tan x - \tan\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{x-\alpha}$

$= \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha}{(x-\alpha)\cos x\cos\alpha}$

$= \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin(x-\alpha)}{(x-\alpha)\cos x\cos\alpha}$

$= \frac{1}{\cos\alpha} \lim_{(x-\alpha)\to 0} \frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha} \times \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{\cos x}$

$= \frac{1}{\cos\alpha} \times 1 \times \frac{1}{\cos\alpha} = \sec^2\alpha$ (Ans.)

8.(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx}$ [ঢা.'০৬]

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{\lim_{ax\to 0} \frac{\tan ax}{ax} \times a}{\lim_{bx\to 0} \frac{\sin bx}{bx} \times b}$

$= \frac{1\times a}{1\times b} = \frac{a}{b}$ (Ans.)

8(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ [চ.'০১]

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}$

$= \frac{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(ax/2)}{ax/2}\right\}^2 \times \frac{a^2}{4}}{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(bx/2)}{bx/2}\right\}^2 \times \frac{b^2}{4}} = \frac{1\times\frac{a^2}{4}}{1\times\frac{b^2}{4}} = \frac{a^2}{b^2}$

8(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$ [ঢা.'০৫; কু.'০৭]

$= \lim_{x\to0} \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(7x+9x)\sin\frac{1}{2}(9x-7x)}{2\sin\frac{1}{2}(3x+5x)\sin\frac{1}{2}(5x-3x)}$

$= \lim_{x\to0} \dfrac{\sin 8x \sin x}{\sin 4x \sin x} = \lim_{x\to0} \dfrac{2\sin 4x\cos 4x}{\sin 4x}$

$= 2\lim_{x\to0} \cos 4x = 2\cos 0 = 2 \,.\, 1 = 2$

8(d) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$ [চ.,মা.'০৩; দি.'১২]

$= \lim_{x\to0} \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(7x-x)\cos\frac{1}{2}(7x+x)}{\sin 6x}$

$= \lim_{x\to0} \dfrac{2\sin 3x\cos 4x}{2\sin 3x\cos 3x} = \lim_{x\to0} \dfrac{\cos 4x}{\cos 3x}$

$= \dfrac{\cos 0}{\cos 0} = \dfrac{1}{1} = 1$ (Ans.)

8(e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \{\sec x(\sec x - \tan x)\}$ [ঢা.'০৭]

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

8. (f) $\lim_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$

[চ.'০৯; ব.'১০; সি.'১৪; প্র.ভ.প.'০৪]

$= \lim_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

$= \lim_{x\to0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0} \tan\dfrac{x}{2}$

$= \tan\dfrac{0}{2} = \tan 0 = 0$ (Ans.)

8(g) $\lim_{\theta\to0} \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\tan\theta}\right)$ [ঢা.'০১; রা.'১৩]

$= \lim_{\theta\to0} \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \lim_{\theta\to0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$

$= \lim_{\theta\to0} \dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta . 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \lim_{x\to0} \dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}$

$= \lim_{\theta\to0} \dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \dfrac{1}{2} = 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (Ans.)

8(h) $\lim_{x\to0} \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ [রা.'০৪]

$= \dfrac{1+\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{1+0}{1} = 1$ (Ans.)

9(a) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{2x^2+x}$ [চ.'০২]

$= \lim_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{x(2x+1)} = \dfrac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{\lim_{x\to0}(2x+1)}$

$= \dfrac{1\times 2}{2\times 0+1} = 2$ (Ans.)

9(b) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x^2}{x} = \lim_{x^2\to0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} \times \lim_{x\to0} x$

$= 1\times 0 = 0$ (Ans.)

10.(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

[য. '০৪; ব. '০৬; ঢা.'১৩ রা.'১৪]

ধরি, $x = \dfrac{\pi}{2} + h$. $\because x \to \dfrac{\pi}{2}$ $\therefore h \to 0$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{h\to0} \dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{-\sin h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{-2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\tan\frac{h}{2} = -\tan\frac{0}{2} = -\tan 0 = 0$$

10(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)\tan x$ [চ.'১০]

ধরি, $\frac{\pi}{2}-x=h$. $\because x\to\frac{\pi}{2}$ $\therefore h\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} h\tan(\frac{\pi}{2}-h) = \lim_{h\to 0} h\cot h$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{\tan h} = 1$$

10(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x-\tan x}{\frac{\pi}{2}-x}$ [ব.'০২]

ধরি, $\frac{\pi}{2}-x=h$. $\because x\to\frac{\pi}{2}$ $\therefore h\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\tan x}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sec(\frac{\pi}{2}-h)-\tan(\frac{\pi}{2}-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec} h-\cot h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sin h}-\frac{\cos h}{\sin h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h\sin h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h.2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

10(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$ [য.'০৬,'১০; কু.'০৮]

ধরি, $\frac{\pi}{2}-x=h$. $\because x\to\frac{\pi}{2}$ $\therefore h\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-h)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2(h/2)}{(h/2)^2\times 4}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right\}^2 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

10(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1-\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/4)}-\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x.\cos\frac{\pi}{4}.\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\sin(\pi/4)\cos x-\sin x\cos(\pi/4)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x.\sin 2(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x.2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.1.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 1 \text{ (Ans.)}$$

11.(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$

ধরি, $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow \sin\theta = x$

$\because x\to 0 \quad \therefore \theta \to 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1$

11(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1}(3x)}{4x}$

ধরি, $\sin^{-1}(3x) = \theta \Rightarrow \sin\theta = 3x$

$\because x\to 0 \quad \therefore \theta\to 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1}(3x)}{4x} = \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\frac{4}{3}\sin\theta}$

$= \dfrac{3}{4}\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta} = \dfrac{3}{4}\times 1 = \dfrac{3}{4}$ (Ans.)

12. (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - (1+x)^7}{\ln(1+x)}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\{1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} \cdots\} - (1 + 7x + 21x^2 + \cdots)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(2-7)x + (2-21)x^2 + \cdots}{x(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots)}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-5 - 19x + \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots} = \dfrac{-5 - 19\times 0 + 0 + \cdots}{1 - \frac{0}{2} + \frac{0^2}{3} - 0 + \cdots}$

$= \dfrac{-5}{1} = -5$ (Ans.)

12(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\{1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \cdots\} - 1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x\{\ln a + \frac{x(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^2(\ln a)^3}{3!} + \cdots\}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\{\ln a + \dfrac{x(\ln a)^2}{2!} + \dfrac{x^2(\ln a)^3}{3!} + \cdots\}$

$= \ln a + \dfrac{0\times(\ln a)^2}{2!} + \dfrac{0^2(\ln a)^3}{3!} + \cdots\cdots\}$

$= \ln a$

12(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$ [কু.'০১; মা.বো.'০৯; রা.'১২]

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\{1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \cdots) - 1}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \cdots}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}(1 + \dfrac{\sin x}{2!} + \dfrac{\sin^2 x}{3!} + \cdots)$

$= 1 + \dfrac{\sin 0}{2!} + \dfrac{\sin^2 0}{2!} + \cdots = 1 + 0 + 0 \cdots$

$= 1$

12(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{-x}}{x}$ [প্র.ভ.প.'০৬]

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}[\{1 + x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2!} + \dfrac{(x\ln a)^3}{3!} + \cdots\}$

$- \{1 - x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2!} - \dfrac{(x\ln a)^3}{3!} + \cdots\}]$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\{2x\ln a + 2\dfrac{(x\ln a)^3}{3!} + \cdots\cdots\}$

$= 2\lim_{x\to 0}\{\ln a + \dfrac{x^2(\ln a)^3}{3!} + \dfrac{x^4(\ln a)^5}{5!} + \cdots\}$

$= 2\lim_{x\to 0}\{\ln a + \dfrac{0^2(\ln a)^3}{3!} + \dfrac{0^4(\ln a)^5}{5!} + \cdots\}$

$= 2\ln a$ (Ans.)

12(e) $\lim_{x\to\infty}(1 + \dfrac{b}{x})^{\frac{x}{a}}, a > 0, b > 0$

$= \lim_{x\to\infty}(1 + \dfrac{b}{x})^{\frac{x}{a}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\{1+\frac{\frac{x}{a}}{1!}.\frac{b}{x}+\frac{\frac{x}{a}(\frac{x}{a}-1)}{2!}(\frac{b}{x})^2+$$

$$+\frac{\frac{x}{a}(\frac{x}{a}-1)(\frac{x}{a}-2)}{3!}(\frac{x}{a})^3+\cdots\cdots\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\{1+\frac{b}{a}+\frac{\frac{x^2}{a^2}(1-\frac{a}{x})}{2!}\frac{b^2}{x^2}+$$

$$\frac{\frac{x^3}{a^3}(1-\frac{a}{x})(1-\frac{2a}{x})}{3!}\frac{b^3}{x^3}+\cdots\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\{1+\frac{b}{a}+\frac{1-\frac{a}{x}}{2!}\frac{b^2}{a^2}+$$

$$\frac{(1-\frac{a}{x})(1-\frac{2a}{x})}{3!}\frac{b^3}{a^3}+\cdots\}$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{1-0}{2!}\frac{b^2}{a^2}+\frac{(1-0)(1-0)}{3!}\frac{b^3}{a^3}+\cdots$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{1}{2!}(\frac{b}{a})^2+\frac{1}{3!}(\frac{b}{a})^3+\cdots\cdots=e^{\frac{b}{a}}$$

12(f) $f(x)=\sin x$ **হলে,** $\lim_{h\to0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$ **এর মান নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'০০]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+nh)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{nh}{2}\cos\frac{1}{2}(2x+nh)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\times\frac{n}{2}\lim_{h\to0}\cos\frac{1}{2}(2x+nh)$$

$$=2\times1\times\frac{n}{2}\times\cos\frac{1}{2}(2x+n\times0)$$

$= n\cos x$ (Ans.)

(g) $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}-\cos bx}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\{1+ax+\frac{(ax)^2}{2!}+\cdots\}-\{1-\frac{(ax)^2}{2!}+\frac{(ax)^4}{4!}-\cdots\}}{\{1+bx+\frac{(bx)^2}{2!}+\cdots\}-\{1-\frac{(bx)^2}{2!}+\frac{(bx)^4}{4!}-\cdots\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax+2\frac{(ax)^2}{2!}+\frac{(ax)^3}{3!}+\cdots}{bx+2\frac{(bx)^2}{2!}+\frac{(bx)^3}{3!}+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a+2\frac{a^2x}{2!}+\frac{a^3x^2}{3!}+\cdots}{b+2\frac{b^2x}{2!}+\frac{b^3x^2}{3!}+\cdots}$$

$$=\frac{a+2.0+0+\cdots}{b+2.0+0+\cdots}=\frac{a}{b}\ \text{(Ans.)}$$

(h) $\lim_{x\to0}\frac{12-6x^2-12\cos x}{x^4}$

ধরি, $x=2y$ $\because x\to0$ $\therefore y\to0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{12-6x^2-12\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{12-6(2y)^2-12\cos2y}{(2y)^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{12-24y^2-12\cos2y}{16y^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3(1-\cos2y)-6y^2}{4y^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3.2\sin^2y-6y^2}{4y^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3\{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\infty\}^2-3y^2}{2y^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3[y^2-\frac{2y^4}{3!}+\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{2}{5!}\}y^6+\cdots\infty\}^2-3y^2}{2y^4}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3[y^2-\frac{2y^4}{3!}+\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{2}{5!}\}y^6+\cdots\infty]-3y^2}{2y^4}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{-\frac{6}{3!}+3\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{2}{5!}\}y^2+\cdots\infty}{2}\right]$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{-1+3\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{2}{5!}\}y^2+\cdots\infty}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

13. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{(1+0)(2+0)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ (Ans.)}$$

13(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{r=1}^{n} r^3$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{1}{n})^2}{4n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{4} = \frac{(1+0)^2}{4} = \frac{1}{4} \text{ (Ans.)}$$

13(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1.3+2.4+\cdots\cdots+n(n+2)}{n^3}$

সমাধান :মনে করি, $1.3+2.4+\cdots+n(n+2)$ ধারার nতম পদ u_n.

$\therefore\ u_n = n(n+2) = n^2+2n$

$$\therefore 1.3+2.4+\cdots+n(n+2) = \sum_{n=1}^{n} n^2 + 2\sum_{n=1}^{n} n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)(\frac{2n+1}{6}+1)$$

$$= n(n+1)\frac{2n+1+6}{6} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1.3+2.4+\cdots\cdots+n(n+2)}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+7)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{7}{n})}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{7}{n})}{6} = \frac{(1+0)(2+0)}{6} = \frac{1}{3}$$

14. যদি $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ হয়, তবে **(a)** $\lim_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি $x = 1+h$

$$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{2(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h\to 0+}\frac{2+2h}{1-1-h}$$

$$= \lim_{h\to 0+}\frac{2+2h}{-h} = \lim_{h\to 0+}(-\frac{2}{h}-2)$$

$$= -\infty-2 = -\infty \text{ (Ans.)}$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{h\to 0-}\frac{2(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h\to 0-}\frac{2+2h}{1-1-h}$$

$$= \lim_{h\to 0-}\frac{2+2h}{-h} = \lim_{h\to 0-}(-\frac{2}{h}-2)$$

$$= +\infty-2 = +\infty \text{ (Ans.)}$$

(b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ এবং $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1-x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(\frac{1}{x}-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-1}$$

$$= \frac{2}{0-1} = -2 \text{ (Ans.)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x(\frac{1}{x}-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-1}$$

$$=\frac{2}{-0-1}=-2 \text{ (Ans.)}$$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5})$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x+5-2x-6}{(x-1)(x+3)(3x+5)}$ (১)

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)(3x+5)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x+3)(3x+5)}=\frac{1}{(1+3)(3.1+5)}$ (১)

$=\frac{1}{4.8}=\frac{1}{32}$ (Ans.)

16.(a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$ (১)

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(3+\sqrt{x^2+5})=3+\sqrt{2^2+5}$

$=3+3=6$ (Ans.) (১)

16(b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}$ [প্র.ভ.প.'৮৩]

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}$ (১)

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{(x^2-1)-(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{x^2-1-x+1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1})}{x(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{x}$

$=\frac{\sqrt{1^2-1}-\sqrt{1-1}}{1}=\frac{0}{1}=0$ (Ans.) (১)

16(c) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}}{h}$ [সি.'০১]

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{\{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}\}\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$ (১)

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{\{(x+h)^{1/2}\}^2-\{x^{1/2}\}^2}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{x+h-x}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{h\{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}\}}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{(x+h)^{1/2}+x^{1/2}}$

$=\frac{1}{(x+0)^{1/2}+x^{1/2}}=\frac{1}{x^{1/2}+x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (১)

16.(d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(a-\sqrt{a^2-x^2})(a+\sqrt{a^2+x^2})}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$ (১)

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2-(\sqrt{a^2-x^2})^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{a^2-a^2+x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a+\sqrt{a^2-0^2}}=\frac{1}{a+a}=\frac{1}{2a} \quad (১)$$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}-3} \quad (১)$$

$$=\frac{2+0}{0+0-3}=-\frac{2}{3} \quad (১)$$

18.(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2.\frac{x^2}{4}} \quad (১)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}\ \text{(Ans.)} \quad (১)$$

18(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$ (১)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to0}\sin\frac{x}{2}=1.\ \sin\frac{0}{2}$$

$$=1.0=0\ \text{(Ans.)} \quad (১)$$

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin\pi x-\sin3\pi x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^3\pi x}{x^3}=4\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^3.\pi^3 \quad (১)$$

$$=4\times1\times\pi^3=4\pi^3 \quad (১)$$

20.(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\sin3x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\times5}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times3}$ (১)

$$=\frac{1\times5}{1\times3}=\frac{5}{3}\ \text{(Ans.)} \quad (১)$$

20. (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x-\sin2x}{2x+3\sin4x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(6-\frac{\sin2x}{x})}{x(2+3\frac{\sin4x}{x})}=\frac{6-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times2}{2+3\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\times4} \quad (১)$$

$$=\frac{6-1\times2}{2+3\times1\times4}=\frac{6-2}{2+12}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}\ \text{(Ans.)} \quad (১)$$

21(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin2x}{\cos2x}$ [প্র.ভ.প. ৮৬]

ধরি, $x=\frac{\pi}{4}+h$. $\because x\to\frac{\pi}{4}\ \therefore h\to0$ (১)

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin2x}{\cos2x}=\lim_{h\to0}\frac{1-\sin2(\frac{\pi}{4}+h)}{\cos2(\frac{\pi}{4}+h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+2h)}{\cos(\frac{\pi}{2}+2h)}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos2h}{-\sin2h} \quad (১)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\sin^2h}{-2\sin h\cos h}=-\lim_{h\to0}\tan h \quad (১)$$

$$=-\lim_{h\to0}\frac{\tan h}{h}\times h=-1\times0=0\ \text{(Ans.)} \quad (১)$$

21(b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

ধরি, $\pi-x=h$. $\because x\to\pi\ \therefore h\to0$ (১)

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{h\to0}\frac{\sin(\pi-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=1\ \text{(Ans.)} \quad (১)+(১)$$

22(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots)}{1+x-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)} \quad (১)+(১)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\cdots}{1+x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\cdots\cdots)}{x^2(-\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}-\cdots\cdots)} \quad (১)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\cdots\cdots}{-\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}-\cdots\cdots}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{0}{3}+\frac{0^2}{4}-\cdots}{-\frac{1}{2!}-\frac{0}{3!}-\cdots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1 \quad (১)$$

22.(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\ln(1-5x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5x-\frac{(5x)^2}{2}+\frac{(5x)^3}{3}-\frac{(5x)^4}{4}+\cdots}{-5x-\frac{(5x)^2}{2}-\frac{(5x)^3}{3}-\frac{(5x)^4}{4}-\cdots} \quad (২)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5-\frac{5^2x}{2}+\frac{5^3x^2}{3}-\frac{5^4x^3}{4}+\cdots}{-5-\frac{5^2x}{2}-\frac{5^3x^2}{3}-\frac{5^4x^3}{4}-\cdots} \quad (১)$$

$$= \frac{5-\frac{5^2.0}{2}+\frac{5^3 0^2}{3}-\frac{5^4 0^3}{4}+\cdots}{-5-\frac{5^2.0}{2}-\frac{5^3 0^2}{3}-\frac{5^4 0^3}{4}-\cdots}$$

$$= \frac{5}{-5}=-1 \text{ (Ans.)} \quad (১)$$

22.(c) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{(2x+5)/x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{2+5/x}$

$$= \lim_{x\to 0}(1+2x)^2 \lim_{x\to 0}(1+2x)^{5/x} \quad (১)$$

$$= (1+2.0)^2\times\{\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{10} \quad (১)$$

$$= e^{10} \text{ (Ans.)} \quad (১)$$

23. $f(x)=\begin{cases} e^{-|x|/2}, & \text{যখন } -1<x<0 \\ x^2\;, & \text{যখন } 0<x<2 \end{cases}$ হলে

$\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

সমাধানঃ $x=0$ বিন্দুতে

ডানদিকবর্তী লিমিট $=\lim_{x\to 0_+} f(x)=\lim_{x\to 0_+} x^2=0^2=0$ (১)

বামদিকবর্তী লিমিট $=\lim_{x\to 0_-} f(x)$

$$=\lim_{x\to 0_-} e^{-|x|/2}=e^{-|0|/2}=e^0=1 \quad (১)$$

বামদিকবর্তী লিমিট ও ডানদিকবর্তী লিমিট বিদ্যমান আছে কিন্তু সমান নয়।

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নাই। (১)

24. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(x^2+2x-8)(x-2)}}{x^2-4}$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

সমাধানঃ $x=2$ বিন্দুতে

ডানদিকবর্তী লিমিট $=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{(x^2+2x-8)(x-2)}}{x^2-4}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{(x+4)(x-2)(x-2)}}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{(x-2)^2(x+4)}}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|\sqrt{(x+4)}}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2-x)\sqrt{(x+4)}}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-\sqrt{x+4}}{x+2}=-\frac{\sqrt{2+4}}{2+2}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

বামদিকবর্তী লিমিট $=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|\sqrt{(x+4)}}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)\sqrt{(x+4)}}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{x+4}}{x+2} = \dfrac{\sqrt{2+4}}{2+2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

বামদিকবর্তী লিমিট ও ডানদিকবর্তী লিমিট বিদ্যমান কিন্তু সমান নয়।

$\therefore \lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{(x^2+2x-8)(x-2)}}{x^2-4}$ এর মান বিদ্যমান নাই।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

L'Hospital's rule : কার্যপ্রণালী ঃ যদি $x = a$ এর জন্য $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ভগ্নাংশটি অনির্ণেয় আকার যেমন $\dfrac{0}{0}$ বা $\dfrac{\infty}{\infty}$ হয়, তবে অনির্ণেয় আকার শেষ না হওয়া পর্যন্ত ভগ্নাংশের লব এবং হরকে পৃথকভাবে অন্তরীকরণ **(differentiation)** করতে হবে। অতঃপর নতুন ভগ্নাংশে পদত্ত $x = a$ স্থাপন করে ফাংশনের সীমায়িত মান নির্ণয় করতে হয়।

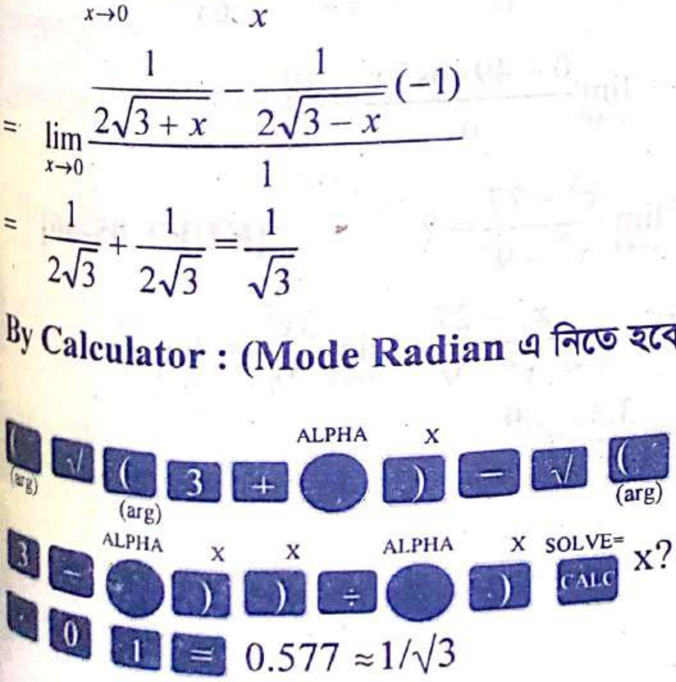
1. যখন $x \to 0$, লিমিট $\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$ কত? **[DU 04-05, NU 08-09, 05-06]**

$Sol^n: \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}(-1)}{1}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

By Calculator : (Mode Radian এ নিতে হবে)



2. যখন $x \to 0$, লিমিট $\dfrac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x}$ কত? **[DU 03-04, RU 06-07, 04-05; KU 03-04]**

$Sol^n: \lim_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{(\cos x+\cos 2x).1 + x(-\sin x - 2\sin x)}{\cos x}$

$= \dfrac{(\cos.0+\cos 2.0).1 + 0.(-\sin 0 - 2\sin 0)}{\cos 0} = 2$

3. যখন $x \to 0$, লিমিট $\dfrac{\sin 3x}{x}$ কত? **[DU 99-00, RU 06-07]**

$Sol^n: \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x}{1}$

$= 3\cos 0 = 3$

4. যখন $x \to 0$, লিমিট $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ কত? **[KU 03-04]**

$Sol^n: \lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x + \sin x}{6x}$

$= \dfrac{1}{6}\lim_{x\to 0}\{2(\sec^2 x.\sec^2 x$

$+ \tan x.2\sec^2 x\tan x) + \cos x\}$

$= \dfrac{1}{6}\{2(1+0)+1\} = \dfrac{1}{2}$

5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)^2}{x} = ?$ **[DU 08-09]**

$Sol^n: \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(4x^2).8x}{1}$

$= \cos(4.0).8.0 = 0$

6. যখন $x \to \dfrac{\pi}{2}$, লিমিট $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ কত? **[DU 00-01, RU 06-07]**

$Sol^n: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{0}{1} = 0$

7. যখন $x \to 2$, লিমিট $\frac{\sin(x-2)}{x-2}$ কত?

[CU 07-08]

Sol^n : $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)}{1}$

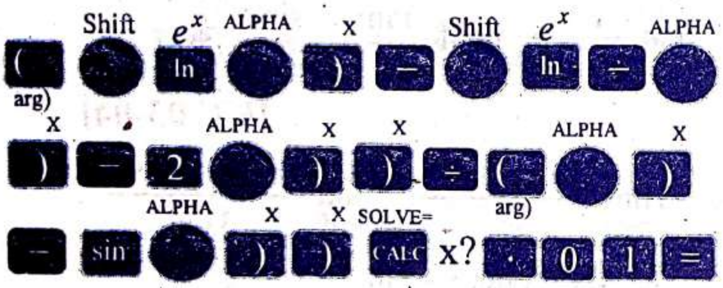
$= \cos(2-2) = \cos 0 = 1$

8. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ কত?

[SU 04-05]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$



$1.99 \approx 2$

9. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{a^x - 1}{x}$ কত? **[CU 08-09; RU 02-03]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x \ln a}{1} = a^0 \log_e a$

$= \log_e a$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{-2x}}{\ln(1+x)}$, $0 < x < 1$ এর মান কত?

[SU 04-05, KU 03-04]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{-2x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2$

11. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\sin^{-1} x}{x}$ কত? **[CU 08-09; RU 07-08; IU 04-05]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$

12. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\tan^{-1} x}{x}$ কত? **[DU 06-07]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1+0^2} = 1$

13. যখন $x \to 0$, লিমিট $\frac{\tan^{-1}(2x)}{x}$ কত?

[DU 07-08; CU 07-08; NU 06-07]

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+4x^2}}{1} = \frac{2}{1+4.0^2} = 2$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = ?$ **[BUET 03-04]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 7x}{3x^2} = ?$ **[BUET 07-08]**

Sol^n : $\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 7x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0 + 7\sin 7x}{6x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{0 + 49\cos 7x}{6} = \frac{49}{6}$

16. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = ?$ **[KUET 05-06]**

Sol^n : $\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to 3}\frac{3x}{2}$

$= \frac{3.3}{2} = \frac{9}{2}$

অন্তরীকরণ (প্রশ্নমালা IXB)

1. যদি $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \le 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1-x, & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং $x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ।

সমাধানঃ $x = 0$ বিন্দুতে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$ এবং $f(0) = -0 = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

$x = 1$ বিন্দুতে, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-x) = 1-1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1^+} f(x) \ne \lim_{x\to 1^-} f(x)$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

2. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a = \pm 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণঃ $x = 0$ বিন্দুতে,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2 \text{ এবং } f(0) = 1$$

$\therefore$ $a \ne \pm 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = \pm 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, $a = \pm 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রদত্ত একটি বাস্তব ফাংশন । দেখাও যে, f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

প্রমাণঃ $x = 2$ বিন্দুতে, $f(2) = 3,$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2)$$
$$= 2 + 2 = 4$$

এবং $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2)$$
$$= 2 + 2 = 4$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \ne f(2)$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ): $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $(2x)^n - b^n$ [চ.'০২]

ধরি, $y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

অন্তরীকরণ (প্রশ্নমালা IXB)

1. যদি $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \le 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1-x, & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং $x=1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ।

সমাধানঃ $x = 0$ বিন্দুতে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$ এবং $f(0) = -0 = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

$x = 1$ বিন্দুতে, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-x) = 1-1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1^+} f(x) \ne \lim_{x\to 1^-} f(x)$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

2. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a = \pm 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণঃ $x = 0$ বিন্দুতে,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1 \times a^2 = a^2 \text{ এবং } f(0) = 1$$

$\therefore$ $a \ne \pm 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = \pm 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, $a = \pm 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রদত্ত একটি বাস্তব ফাংশন । দেখাও যে, f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

প্রমাণঃ $x = 2$ বিন্দুতে, $f(2) = 3,$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2)$$
$$= 2 + 2 = 4$$

এবং $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2)$$
$$= 2 + 2 = 4$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \ne f(2)$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ): $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4, & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $(2x)^n - b^n$ [চ.'০২]

ধরি, $y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 2^n \dfrac{d}{dx}(x^n) - \dfrac{d}{dx}(b^n)$

$= 2^n (nx^{n-1}) - 0$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n nx^{n-1}$ (Ans.)

1(b) $\dfrac{d}{dx}(x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}})$

$= \dfrac{d}{dx}(x^{1+\frac{1}{2}} + x^{2+\frac{1}{2}} + x^{2-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= \dfrac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= \dfrac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= 2.\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + \dfrac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$

$= 3x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (Ans.)

1(c) $\dfrac{d}{dx}(a^x + x^a - e^x)$

$= \dfrac{d}{dx}(a^x) + \dfrac{d}{dx}(x^a) - \dfrac{d}{dx}(e^x)$

$= a^x \ln a + a x^{a-1} - e^x$ (Ans.)

1(d) $\dfrac{d}{dx}(\log_a x + \log_{10} x^a + e^{\ln x} + \ln x + e^x)$

$= \dfrac{d}{dx}(\log_a x + a\log_{10} x + x + \ln x + e^x)$

$= \dfrac{1}{x\ln a} + a\dfrac{1}{x\ln 10} + 1 + \dfrac{1}{x} + e^x$

(e) $\dfrac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + \ln x^a)$

$= \dfrac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + a\ln x)$

$= 3\cos x + 4.\dfrac{1}{x} - 2a^x \ln x + a\dfrac{1}{x}$

2. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(a) sin2x [ঢা.'০৫; ব.'১৩]

মনে করি, $f(x) = \sin 2x$

$\therefore f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\sin 2x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[2\cos\dfrac{2x+2h+2x}{2}\sin\dfrac{2x+2h-2x}{2}]$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\cdot 2\cos(2x+h)\sin h$

$= 2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\cos(2x+h)$

$= 2.1.\cos(2x+0) = 2\cos 2x$

2.(b) cos 3x [ঢা.'০২; রা.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 3x$.

$\therefore f(x+h) = \cos 3(x+h) = \cos(3x+3h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\cos 3x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(3x+3h)-\cos 3x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[2\sin\dfrac{3x+3h+3x}{2}\sin\dfrac{3x-3h-3x}{2}]$

$= 2\lim\limits_{h\to 0}\sin(3x+\dfrac{3h}{2}) \times -\lim\limits_{\frac{3h}{2}\to 0}\dfrac{\sin(3h/2)}{3h/2}\times\dfrac{3}{2}$

$[\because h\to 0 \therefore \dfrac{3h}{2}\to 0]$

$= 2\sin(3x+0).(-1.\dfrac{3}{2}) = -3\sin 3x$

2(c) cos ax [রা.'০১]

মনে করি, $f(x) = \cos ax$.

$\therefore f(x+h) = \cos a(x+h) = \cos(ax+ah)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\cos ax) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(ax+ah)-\cos ax}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{ax+ah+ax}{2}\sin\frac{ax-ah-ax}{2}]$

$= 2\lim_{h\to 0}\sin(ax+\frac{ah}{2})\times -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(ah/2)}{ah/2}\times\frac{a}{2}$

$= 2\sin(ax+0).(-1.\frac{a}{2}) = -a\sin ax$

2(d) tan 2x [চ.'০১]

মনে করি, $f(x) = \tan 2x$.

$\therefore f(x+h) = \tan 2(x+h) = \tan(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(2x+2h)-\tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \sin 2x\cos(2x+2h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\sin(2x+2h-2x)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\times 2\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 1\times 2\times\frac{1}{\cos(2x+0)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

$$= 2\sec^2 2x$$

2(e) sec 2x [য. '০২,'০৭; চ.'০৭,'১০]

মনে করি, $f(x) = \sec 2x$.

$\therefore f(x+h) = \sec 2(x+h) = \sec(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(2x+2h)-\sec 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{\cos(2x+2h)} - \frac{1}{\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x - \cos(2x+2h)}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+2x+2h}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= 2\frac{\sin(2x+0)}{\cos(2x+0)\cos 2x}\times 1$$

$$= \frac{2\sin 2x}{\cos 2x\cos 2x} = 2\tan 2x\ \sec 2x$$

2(f) e^{2x} [রা.'০৩]

মনে করি, $f(x) = e^{2x}$.

$\therefore f(x+h) = e^{2(x+h)} = e^{2x+2h}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x+2h}-e^{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}.e^{2h}-e^{2x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2x}}{h}(e^{2h}-1)$$

$$= e^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}\times 2$$

$$= e^{2x}\times 1\times 2 = 2e^{2x},\ [\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\ ]$$

2. (g) cosec ax

মনে করি, $f(x) = \text{cosec}\ ax$.

$\therefore f(x+h) = \text{cosec}\ (ax+ah)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec}\ ax) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{cosec}(ax+ah)-\text{cosec}\,ax}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{\sin(ax+ah)} - \frac{1}{\sin ax}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin ax - \sin(ax+ah)}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{ax-ax-ah}{2}\cos\frac{ax+ax+ah}{2}}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{2\sin(-\frac{ah}{2})\cos(ax+\frac{h}{2})}{h\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= -2\lim_{h\to0}\frac{\sin ah/2}{ah/2}\times\frac{a}{2}\times\lim_{h\to0}\frac{\cos(ax+h/2)}{\sin(ax+ah)\sin ax}$$

$$= -2\times1\times\frac{\cos(ax+0)}{\sin(ax+0)\sin ax}$$

$$= -a\times\frac{\cos ax}{\sin ax\sin ax}$$

$$= -a\cot ax\ \operatorname{cosec} ax$$

2(h) $\cos 2x$ [মা.বো.'০৪; ব.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 2x$.

$\therefore\ f(x+h) = \cos2(x+h) = \cos(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cos2x) = \lim_{h\to0}\frac{\cos(2x+2h)-\cos2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x-2h-2x}{2}]$$

$$= 2\lim_{h\to0}\sin(2x+h)\times-\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= 2\sin(2x+0).(-1) = -2\sin2x$$

2(i) e^{ax} [ব'০৫,'০৯; ঢা.'০৬; য., দি.'১১; কু.'১৩]

মনে করি, $f(x) = e^{ax}$

$\therefore\ f(x+h) = e^{a(x+h)} = e^{ax+ah}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(e^{ax}) = \lim_{h\to0}\frac{e^{ax+ah}-e^{ax}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{e^{ax}.e^{ah}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{ax}}{h}(e^{ah}-1)$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[\{1+ah+\frac{(ah)^2}{2!}+\frac{(ah)^3}{3!}+\cdots\}-1]$$

$$= e^{ax}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(ah+\frac{a^2h^2}{2!}+\frac{a^3h^3}{3!}+\cdots\cdots)$$

$= e^{ax}\lim_{h\to0}(a+\frac{a^2h}{2!}+\frac{a^3h^2}{3!}+$ h- এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ)

$$= e^{ax}(a+0+0+\cdots\cdots) = ae^{ax}$$

2(j) $\log_a x$ [চ.'০৮; ঢা.'১১; য.'১২,'১৪; দি.'১৪]

ধরি, $f(x) = \log_a x = \log_a e\times\log_e x$

$$= \frac{\ln x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\therefore\ f(x+h) = \frac{\ln(x+h)}{\ln a}$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}[\frac{\ln(x+h)}{\ln a}-\frac{\ln x}{\ln a}]$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h\ln a}ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to0}\frac{1}{h\ln a}ln(1+\frac{h}{x})$$

$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\cdots\cdots]$$

$= \frac{1}{\ln a}\lim_{h\to0}[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+$ h-এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ]

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}-0 = \frac{1}{x\ln a}$$

(k) $e^{\sqrt{x}}$

মনে করি, $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$\therefore\ f(x+h) = e^{\sqrt{x+h}}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(y+h)-f(y)}{h}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = \lim_{h\to0}\frac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h}\ \ldots\ \ldots\ (i)$$

ধরি, $\sqrt{x} = z\ \cdots\ \cdots$ (ii) এবং

$\sqrt{x+h} = z + k \cdots \cdots$ (iii)

(iii) − (ii) $\Rightarrow \sqrt{x+h} - \sqrt{x} = k$

$h \to 0$ হলে $k \to 0$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+k} - e^z}{k} \cdot \frac{k}{h}$

$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{z+k} - e^z}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{k\to 0} \frac{e^z . e^k - e^z}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{h}{x}} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{k\to 0} \frac{e^z(e^k - 1)}{k} . \sqrt{x} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+\frac{h}{x}} - 1}{h}$

$= e^z \lim_{k\to 0} \frac{(e^k - 1)}{k} . \sqrt{x} \lim_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^{1/2} - 1}{h}$

$= e^{\sqrt{x}}.1.\sqrt{x} \lim_{h\to 0} \frac{\{1 + \frac{1}{2}.\frac{h}{x} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{h^2}{x^2} + \cdots\} - 1}{h}$

$= e^{\sqrt{x}} . \sqrt{x} \lim_{h\to 0} \{\frac{1}{2}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{h}{x^2} + \cdots\}$

$= e^{\sqrt{x}} . \sqrt{x} . \frac{1}{2} . \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3. (a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে x^5 এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = x^5$. $\therefore f(2) = 2^5$

$\therefore f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x-2}$

$= 5 \times (2)^4 \quad [\because \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}]$

$= 5 \times 16 = 80$

3 (b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে e^{mx} এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = e^{mx}$ $\therefore f(a) = e^{ma}$

$\therefore f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a} \frac{e^{mx} - e^{ma}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^{ma}(e^{mx-ma} - 1)}{x-a}$

$= e^{ma} \lim_{x-a\to 0} \frac{e^{m(x-a)} - 1}{m(x-a)} \times m$

$= me^{ma}.1 \qquad [\because \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1]$

$= me^{ma}$

3(c) মূল নিয়মে $x = \frac{\pi}{4}$ -তে $\tan x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \tan x$. $\therefore f(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore f'(\frac{\pi}{4}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}}{(x - \frac{\pi}{4})\cos x \cos\frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{(x - \frac{\pi}{4})\cos x \cos\frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{x-\frac{\pi}{4}\to 0} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x \cos\frac{\pi}{4}}$

$= 1.\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$

প্রশ্নমালা IX D

x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $\frac{d}{dx}\{x^2 \ln(x)\}$

$\sqrt{x+h} = z + k \cdots \cdots$ (iii)

(iii) − (ii) $\Rightarrow \sqrt{x+h} - \sqrt{x} = k$

$h \to 0$ হলে $k \to 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{z+k}-e^z}{k}.\frac{k}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^{z+k}-e^z}{k}.\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^z.e^k-e^z}{k}.\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{h}{x}}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^z(e^k-1)}{k}.\sqrt{x}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{h}{x}}-1}{h}$$

$$= e^z\lim_{k\to 0}\frac{(e^k-1)}{k}.\sqrt{x}\lim_{h\to 0}\frac{(1+\frac{h}{x})^{1/2}-1}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x}}.1.\sqrt{x}\lim_{h\to 0}\frac{\{1+\frac{1}{2}.\frac{h}{x}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{h^2}{x^2}+\cdots\}-1}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x}}.\sqrt{x}\lim_{h\to 0}\{\frac{1}{2}.\frac{1}{x}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{h}{x^2}+\cdots\}$$

$$= e^{\sqrt{x}}.\sqrt{x}.\frac{1}{2}.\frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

3. (a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে x^5 এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = x^5$. $\therefore f(2) = 2^5$

$$\therefore f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5}{x-2}$$

$$= 5\times (2)^4 \quad [\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}]$$

$$= 5\times 16 = 80$$

3 (b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে e^{mx} এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = e^{mx}$ $\therefore f(a) = e^{ma}$

$$\therefore f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{e^{mx}-e^{ma}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{e^{ma}(e^{mx-ma}-1)}{x-a}$$

$$= e^{ma}\lim_{x-a\to 0}\frac{e^{m(x-a)}-1}{m(x-a)}\times m$$

$$= me^{ma}.1 \qquad [\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1]$$

$$= me^{ma}$$

3(c) মূল নিয়মে $x = \frac{\pi}{4}$ -তে $\tan x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \tan x$. $\therefore f(\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4}$

$$\therefore f'(\frac{\pi}{4}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}}{(x-\frac{\pi}{4})\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{(x-\frac{\pi}{4})\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x-\frac{\pi}{4}\to 0}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$$

প্রশ্নমালা IX D

x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1(a) $\frac{d}{dx}\{x^2\ln(x)\}$

$= x^2 \frac{d}{dx}\{ln(x)\} + ln(x)\frac{d}{dx}(x^2)$

$= x^2 \frac{1}{x} + ln(x).(2x) = x + 2x\, ln(x)$

1(b) $5e^x \log_a x$ [ব.'০৮;দি.'১৩]

মনে করি, $y = 5e^x \log_a x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 5\{e^x \frac{d}{dx}(\log_a x) + \log_a x \frac{d}{dx}(e^x)\}$

$= 5\{e^x \frac{1}{x\ln a} + \log_a x.\ e^x\}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{5e^x \log_a x\} = 5e^x\{\frac{1}{x\ln a} + \log_a x\}$

1(c) $\log_{10} x$ [দি.'১১,'১৩]

মনে করি, $y = \log_{10} x = \log_{10} e \times \log_e x$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\log_e 10} \times \ln x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x\ln 10}$ (Ans.)

1(d) $\log_a x$ [ঢা.'১৩]

মনে করি, $y = \log_a x = \log_a e \times \log_e x$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\log_e a} \times \ln x = \frac{1}{\ln a} \times \ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}$ (Ans.)

2. (a) $a^x \ln(x) + be^x \sin x$

$\frac{d}{dx}\{a^x \ln(x) + be^x \sin x\} = a^x \frac{d}{dx}\{\ln(x)\}$

$+ \ln(x)\frac{d}{dx}(a^x) + b\{e^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(e^x)\}$

$= a^x \frac{1}{x} + \ln(x)(a^x lna) + b\{e^x(\cos x) + \sin x(e^x)\}$

$= a^x\{\frac{1}{x} + lna\ \ln(x)\} + b e^x(\cos x + \sin x)$

2(b) $x^2 \log_a x - x^3 \ln a^x + 6x e^x \ln x$

ধরি, $y = x^2 \log_a x - x^3 \ln a^x + 6x e^x \ln x$

$= x^2 \log_a x - x^4 \ln a + 6x e^x \ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\log_a x) + \log_a x \frac{d}{dx}(x^2) - \ln a \frac{d}{dx}(x^4) + 6\{x e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + x \ln x \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \ln x \frac{d}{dx}(x)\}$

$= x^2 \frac{1}{x\ln a} + \log_a x.(2x) - \ln a.(4x^3) + 6\{x e^x.\frac{1}{x} + x \ln x.e^x + e^x \ln x.1\}$

$= x(\frac{1}{\ln a} + 2\log_a x - 4x^2 \ln a) + 6e^x(1 + x\ln x + \ln x)$

3. (a) মনে করি, $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+a^2)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}$

$= \frac{(x^2+a^2).1 - x(2x+0)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x^2+a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{x}{x^2+a^2}) = \frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}$

3(b) $\frac{d}{dx}(\frac{1-\tan x}{1+\tan x})$ [দি.'১০; ব.'১৩]

$= \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(1-\tan x) - (1-\tan x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$

$$= \frac{(1+\tan x)(-\sec^2 x)-(1-\tan x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(-1-\tan x-1+\tan x)\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} \quad \text{(Ans.)}$$

3(c) $\frac{d}{dx}(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}) =$ [কু.'০৪]

$$\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(1+\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2} \quad \text{(Ans.)}$$

3(d) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

[ঢা.'১৩; ব. '০৭; রা.'০৯; চ.'১২; দি.'১৪]

$$\frac{d}{dx}(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}) =$$

$$\frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(\cos x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x+1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2} \quad \text{(Ans.)}$$

3(e) $\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$

[ব.'১০; রা., কু.'০৮; য.'১৩; ঢা.'১৪]

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x} = \frac{\cos x-(2\cos^2 x-1)}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{(1-\cos x)(1+2\cos x)}{1-\cos x} = 1+2\cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}) = -2\sin x$$

3(f) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ [ঢা.'০৯; ব.'০৯,'১১; য.'১৪]

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}}$$

$$= \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} = 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}) = 0 \text{ (Ans.)}$$

3(g) ধরি, $y = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}\frac{d}{dx}(x\ln x)-x\ln x\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}[\sqrt{1+x^2}(x.\frac{1}{x}+\ln x)-x\ln x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}]$$

$$= \frac{1}{1+x^2}[\frac{(1+x^2)(1+\ln x)-x^2\ln x}{\sqrt{1+x^2}}]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1+x^2+\ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, $y = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)+\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)- \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})]$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}[\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}]$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\ln x(1+x^2)+1+x^2-x^2\ln x}{x(1+x^2)\ln x}$$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1+x^2+\ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$ (Ans.)

প্রশ্নমালা IX E

1.(a) $(1+\sin 2x)^2$ [চ.'০৪]

ধরি, $y = (1+\sin 2x)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(1+\sin 2x)\frac{d}{dx}(1+\sin 2x)$

$= 2(1+\sin 2x)(0+\cos 2x)\frac{d}{dx}(2x)$

$= 2(1+\sin 2x)\cos 2x\,(2.1)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(1+\sin 2x)^2\} = 4\cos 2x(1+\sin 2x)$

1(b) a^{px+q} [চ'০১]

ধরি, $y = a^{px+q}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{px+q}.\,lna\,\frac{d}{dx}(px+q)$

$[\because \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a\ ]$

$= a^{px+q}.\,lna\,(p.1+0)$

$\therefore \frac{d}{dx}(a^{px+q}) = p\,a^{px+q}.\,lna$ (Ans.)

1(c) $a^{\cos x}$ [চ.'০০]

$\frac{d}{dx}(a^{\cos x}) = a^{\cos x}.\,lna.\,\frac{d}{dx}(\cos x)$

$= a^{\cos x}.\,lna.\,(-\sin x)$

$= -a^{\cos x}\sin x.\,lna$

1(d) $10^{\ln(\sin x)}$ [সি.'০২ '০৫; চ.'০৭]

ধরি, $y = 10^{\ln(\sin x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}$

$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$

$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{1}{\sin x}(\cos x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{10^{\ln(\sin x)}\} = 10^{\ln(\sin x)}.\,ln10.\cot x$

1(e) $10^{ln(\tan x)}$

ধরি, $y = 10^{\ln(\tan x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^{\ln(\tan x)}.ln10\,\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\}$

$= 10^{\ln(\tan x)}.ln10\,\frac{1}{\tan x}\frac{d}{dx}(\tan x)$

$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{\cos x}{\sin x}(\sec^2 x)$

$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x}$

$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{2}{2\sin x\cos x}$

$= 10^{\ln(\sin x)}.ln10\,\frac{2}{\sin 2x}$

$= 2\operatorname{cosec} 2x\,.10^{\ln(\sin x)}.ln10$

1(f) $a^{ln(\cos x)}$ [রা.'০৫]

ধরি, $y = a^{\ln(\cos x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{\ln(\cos x)}.lna\,\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\}$

$= a^{\ln(\cos x)}.lna\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x)$

$= a^{\ln(\cos x)}.ln\,a\,\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{a^{\ln(\cos x)}\} = -\tan x\,a^{\ln(\cos x)}\,lna$

1(g) $e^{2\ln(\tan 5x)}$ [ব.'০৬,'১১; কু.'০৭; সি.'১০,'১৩]

$e^{2\ln(\tan 5x)} = e^{\ln(\tan 5x)^2} = (\tan 5x)^2$

$\therefore \frac{d}{dx}\{e^{2\ln(\tan 5x)}\} = 2\tan 5x\,\frac{d}{dx}(\tan 5x)$

$= 2\tan 5x(\sec^2 5x)\frac{d}{dx}(5x)$

$= 2\tan 5x\sec^2 5x\,(5)$

$= 10\tan 5x\sec^2 5x$

1(h) $(ln\sin x^2)^n$ [সি.'০৬; রা.'০৯]

ধরি, $y = (ln\sin x^2)^n$

$\frac{dy}{dx} = n\,(ln\sin x^2)^{n-1}\frac{d}{dx}(ln\sin x^2)$

$= n\,(ln\sin x^2)^{n-1}.\frac{1}{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1+x^2+\ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$ (Ans.)

প্রশ্নমালা IX E

1.(a) $(1+\sin 2x)^2$ [চ.'০৪]

ধরি, $y=(1+\sin 2x)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=2(1+\sin 2x)\frac{d}{dx}(1+\sin 2x)$

$=2(1+\sin 2x)(0+\cos 2x)\frac{d}{dx}(2x)$

$=2(1+\sin 2x)\cos 2x\,(2.1)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(1+\sin 2x)^2\}=4\cos 2x(1+\sin 2x)$

1(b) a^{px+q} [চ'০১]

ধরি, $y=a^{px+q}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=a^{px+q}.\ln a\frac{d}{dx}(px+q)$

$[\because \frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a]$

$=a^{px+q}.\ln a(p.1+0)$

$\therefore \frac{d}{dx}(a^{px+q})=p\,a^{px+q}.\ln a$ (Ans.)

1(c) $a^{\cos x}$ [চ.'০০]

$\frac{d}{dx}(a^{\cos x})=a^{\cos x}.\ln a.\frac{d}{dx}(\cos x)$

$=a^{\cos x}.\ln a.(-\sin x)$

$=-a^{\cos x}\sin x.\ln a$

1(d) $10^{\ln(\sin x)}$ [সি.'০২ '০৫; চ.'০৭]

ধরি, $y=10^{\ln(\sin x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}$

$=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$

$=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{1}{\sin x}(\cos x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{10^{\ln(\sin x)}\}=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10.\cot x$

1(e) $10^{\ln(\tan x)}$

ধরি, $y=10^{\ln(\tan x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=10^{\ln(\tan x)}.\ln 10\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\}$

$=10^{\ln(\tan x)}.\ln 10\frac{1}{\tan x}\frac{d}{dx}(\tan x)$

$=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{\cos x}{\sin x}(\sec^2 x)$

$=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x}$

$=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{2}{2\sin x\cos x}$

$=10^{\ln(\sin x)}.\ln 10\frac{2}{\sin 2x}$

$=2\,\text{cosec}\,2x.10^{\ln(\sin x)}.\ln 10$

1(f) $a^{\ln(\cos x)}$ [রা.'০৫]

ধরি, $y=a^{\ln(\cos x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=a^{\ln(\cos x)}.\ln a\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\}$

$=a^{\ln(\cos x)}.\ln a\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x)$

$=a^{\ln(\cos x)}.\ln a\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{a^{\ln(\cos x)}\}=-\tan x\,a^{\ln(\cos x)}\ln a$

1(g) $e^{2\ln(\tan 5x)}$ [ব.'০৬,'১১; কু.'০৭; সি.'১০,'১৩]

$e^{2\ln(\tan 5x)}=e^{\ln(\tan 5x)^2}=(\tan 5x)^2$

$\therefore \frac{d}{dx}\{e^{2\ln(\tan 5x)}\}=2\tan 5x\frac{d}{dx}(\tan 5x)$

$=2\tan 5x(\sec^2 5x)\frac{d}{dx}(5x)$

$=2\tan 5x\sec^2 5x(5)$

$=10\tan 5x\sec^2 5x$

1(h) $(\ln\sin x^2)^n$ [সি.'০৬; রা.'০৯]

ধরি, $y=(\ln\sin x^2)^n$

$\frac{dy}{dx}=n(\ln\sin x^2)^{n-1}\frac{d}{dx}(\ln\sin x^2)$

$=n(\ln\sin x^2)^{n-1}.\frac{1}{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)$

$= n\,(ln \sin x^2)^{n-1}.\dfrac{1}{\sin x^2}(\cos x^2)\,(2x)$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{(ln \sin x^2)^n\} = nx\cot x^2 (ln \sin x^2)^{n-1}$

1(i) $\cos(e^{\tan^2 2x})$

$\dfrac{d}{dx}\{\cos(e^{\tan^2 2x})\} = \dfrac{d\{\cos(e^{\tan^2 2x})\}}{d(e^{\tan^2 2x})}$

$\dfrac{d(e^{\tan^2 2x})}{d(\tan^2 2x)} \cdot \dfrac{d(\tan^2 2x)}{d(\tan 2x)} \dfrac{d(\tan 2x)}{d(2x)} \dfrac{d(2x)}{dx}$

$= -\sin(e^{\tan^2 2x}).\, e^{\tan^2 2x}.2\tan 2x.\sec^2 2x.2$

$= -4\tan 2x \sec^2 2x \sin(e^{\tan^2 2x})\, e^{\tan^2 2x}$

1(j) $\dfrac{d}{dx}(\sin^3 x^2)$ [চ.'০৯]

$= \dfrac{d(\sin x^2)^3}{d(\sin x^2)} \dfrac{d(\sin x^2)}{d(x^2)} \dfrac{d(x^2)}{dx}$

$= 3(\sin x^2)^2.\cos x^2.2x$

$= 6x \sin^2 x^2 \cos x^2$ (Ans.)

1(k) $e^{5\ln(\tan x)}$ [চ.'১২]

$= e^{\ln(\tan x)^5} = (\tan x)^5$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{e^{5\ln(\tan x)}\} = 5\tan^4 x \dfrac{d}{dx}(\tan x)$

$= 5\tan^4 x \sec^2 x$

1(*l*) $x^n \ln(2x)$. [চ.'০৭]

মনে করি, $y = x^n \ln(2x)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = x^n \dfrac{d}{dx}\{ln(2x)\} + ln(2x)\dfrac{d}{dx}(x^n)$

$= x^n \dfrac{1}{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) + ln(2x).nx^{n-1}$

$= x^{n-1}\dfrac{1}{2}.(2) + nx^{n-1} ln(2x)$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{x^n \ln(2x)\} = x^{n-1}\{1 + n\, ln(2x)\}$

1(m) $x\sqrt{\sin x}$ [ঢা.'০৮]

মনে করি, $y = x\sqrt{\sin x} = x(\sin x)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{d}{dx}\{(\sin x)^{\frac{1}{2}}\} + (\sin x)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx}(x)$

$= x.\dfrac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(\sin x) + \sqrt{\sin x}.1$

$= \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}(\cos x) + \sqrt{\sin x}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(x\sqrt{\sin x}) = \dfrac{x\cos x + 2\sin x}{2\sqrt{\sin x}}$

1(n) $e^{ax}\tan^2 x$ [ঢা.'০৯]

মনে করি, $y = e^{ax}\tan^2 x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = e^{ax}\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) + \tan^2 x\dfrac{d}{dx}(e^{ax})$

$= e^{ax}(2\tan x)\dfrac{d}{dx}(\tan x) + \tan^2 x.e^{ax}(a)$

$= e^{ax}\tan x(2\sec^2 x + a\tan x)$ (Ans.)

2.(a) $ln(\cos x)$ [রা.'০৩,'০৫,'১০]

$\dfrac{d}{dx}\{ln(\cos x)\} = \dfrac{1}{\cos x}\dfrac{d}{dx}(\cos x)$

$= \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$ (Ans.)

2(b) $ln(e^x + e^{-x})$ [কু.'০৮]

$\dfrac{d}{dx}\{ln(e^x + e^{-x})\} = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}\dfrac{d}{dx}(e^x + e^{-x})$

$= \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2(c) $\log_x a$ [রা.'০১; চ.'০৬;'০৮]

$\log_x a = \log_x e \times \log_e a = ln\, a\dfrac{1}{\log_e x}$

$= ln\, a\dfrac{1}{\ln x} = ln\, a\,(ln\, x)^{-1}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\log_x a) = ln\, a\{-1(ln\, x)^{-2}\dfrac{d}{dx}(ln\, x)\}$

$= -ln\, a\dfrac{1}{(\ln x)^2}.\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

2(d) $\log_{10} 3x$ [য.'০৬,'১৩]

$$\log_{10} 3x = \log_{10} e \times \log_e 3x = \frac{1}{\log_e 10}\ln(3x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_{10} 3x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{3x}\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{3x}(3.1) = \frac{1}{x\ln 10} \text{ (Ans.)}$$

2(e) $\log_a x + \log_x a$

$$= \log_a e \times \log_e x + \log_x e \times \log_e a$$

$$= \frac{1}{\log_e a}\times \ln x + \frac{1}{\log_e x}\times \ln a$$

$$= \frac{1}{\ln a}\times \ln x + \ln a \times (\ln x)^{-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_a x + \log_x a)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} + \ln a \times \{-1(\ln x)^{-2}\frac{1}{x}\}$$

$$= \frac{1}{x\ln a} - \frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$$

2(f) ধরি, $y = \log_x \tan x = \log_x e \times \log_e \tan x$

$$= \frac{1}{\log_e x}\times \ln(\tan x) = \frac{\ln(\tan x)}{\ln x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x \frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} - \ln(\tan x)\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x \frac{1}{\tan x}\sec^2 x - \ln(\tan x).\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x}\ln(\tan x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{x}\ln(\tan x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{2x\ln x \operatorname{cosec} 2x - \ln(\tan x)}{x(\ln x)^2} \text{ (Ans.)}$$

2(g) $ln(\sin 2x)$ [ঢা.'১১; সি.'১৩]

$$\frac{d}{dx}\{ln(\sin 2x)\} = \frac{1}{\sin 2x}\frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{\sin 2x}(\cos 2x)\frac{d}{dx}(2x) = 2\cot 2x$$

(h) $\ln(\sin x^2)$ [রা.'১১]

$$\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x^2)\} = \frac{1}{\sin x^2}\frac{d}{dx}(\sin x^2)$$

$$= \frac{1}{\sin x^2}(\cos x^2)\frac{d}{dx}(x^2) = 2x\cot x^2$$

(i) $\ln(\ln x)$ [মা.'১৪]

$$\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x\ln x} \text{ (Ans.)}$$

3(a) $ln\,[x - \sqrt{x^2-1}]$ [রা. '০২; কু. '০৩; চ.'০৫]

$$\frac{d}{dx}\{ln\,(x - \sqrt{x^2-1})\}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\frac{d}{dx}(x - \sqrt{x^2-1})$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\{1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x)\}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ (Ans.)}$$

3(b) $ln\,[x - \sqrt{x^2+1}]$ [রা. '০২; কু. '০৩,'১০]

$$\frac{d}{dx}\{ln\,(x - \sqrt{x^2+1})\}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}(x - \sqrt{x^2+1})$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\{1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\{\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ (Ans.)}$$

3(c) $ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$ [কু.'০১]

$\frac{d}{dx}\{ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})\}$

$=\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$

$=\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}+\frac{1}{2\sqrt{x-b}}\}$

$=\frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}\{\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{2\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}}\}$

$=\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ (Ans.)

3(d) $ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$ [চ.'০০]

ধরি, $y=ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$

$= lne^x+\frac{3}{2}\{ln(x-1)-ln(x+1)\}$

$= x+\frac{3}{2}\{ln(x-1)-ln(x+1)\}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=1+\frac{3}{2}\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\}$

$=1+\frac{3}{2}\{\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}\}$

$=1+\frac{3}{2}\{\frac{2}{x^2-1}\}=\frac{x^2-1+3}{x^2-1}$

$=\frac{x^2+2}{x^2-1}$ (Ans.)

4. (a) $\frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}$ [চ.'০৭; য.'০৬]

$\frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}$

$=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{-\cos 2x}{1}=-\cos 2x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x})=\sin 2x.2=2\sin 2x$

4(b) $\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$ [কু.'০৩]

$=\left(\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\right)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=\tan^2 x$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2=2\tan x\frac{d}{dx}(\tan x)$

$=2\tan x\sec^2 x$

4(c) $ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [ঢা.'০৭,'১৩; রা.'১১; কু.'১৪]

$= ln\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=ln\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}=ln\tan\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\}=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{\sin x}=\text{cosec}\, x$ (Ans.)

4(d) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ [প্র.ভ.প. ৮৩; রা.'১১]

ধরি, $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-x}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x})-\sqrt{1+x}\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x})^2}$

$=\frac{\sqrt{1-x}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.1-\sqrt{1+x}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)}{1-x}$

$=\frac{\sqrt{1-x}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.1-\sqrt{1+x}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)}{1-x}$

$$= \frac{1-x+1+x}{2(1-x)\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{2}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

4.(e) $\ln \sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ **[দি.'১২; প্র.ভ.প.'০৫]**

$$= \ln\left(\frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\tan^2\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln\tan\frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\ln \sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \frac{2}{3}\frac{\sec^2(x/2)}{\tan(x/2)}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sin x} = \frac{2}{3}\operatorname{cosec} x$$

5. (a) $\sin^2[ln(\sec x)]$ **[রা.'০৭,'১৩; কু.,সি., মা.বো.'০৯; চ.'১১; ঢা.'১২; য.,দি.'১৩]**

ধরি, $y = \sin^2[ln(\sec x)]$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}^2}{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}}\frac{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}}{d\{\ln(\sec x)\}}\frac{d\{\ln(\sec x)\}}{d(\sec x)}\frac{d(\sec x)}{dx}$$

$$= 2\sin[\ln(\sec x)]\cos[\ln(\sec x)]\frac{1}{\sec x}\sec x\tan x$$

$$= \tan x\ \sin[2\ln(\sec x)]$$

5(b) $\sin^2\{ln(x^2)\}$

[য.'০৭,'০৮; চ.'০৬,'১৩; ঢা.,সি,'১৪]

$$\frac{d}{dx}[\sin^2\{ln(x^2)\}] = \frac{d[\sin\{\ln(x^2)\}]^2}{d[\sin\{\ln(x^2)\}]}\frac{d[\sin\{\ln(x^2)\}]}{d[\ln(x^2)]}\frac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)}\frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= 2\sin\{\ln(x^2)\}\cos\{\ln(x^2)\}\frac{1}{x^2}.2x$$

$$= \frac{2}{x}\sin\{2\ln(x^2)\} = \frac{2}{x}\sin\{4\ln(x)\}$$

5(c) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ **[চ.'০১; ঢা.'০৫,'০৭]**

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin\sqrt{x}})$$

$$= \frac{d(\sqrt{\sin\sqrt{x}})}{d(\sin\sqrt{x})}\frac{d(\sin\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})}\frac{d(\sqrt{x})}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \text{ (Ans.)}$$

5(d) $\cos(lnx) + ln(\tan x)$

[ব.'০৩; সি.'০৬]

$$\frac{d}{dx}\{\cos(lnx) + ln(\tan x)\}$$

$$= \frac{d}{dx}\{\cos(lnx)\} + \frac{d}{dx}\{ln(\tan x)\}$$

$$= -\sin(lnx).\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}.\sec^2 x$$

$$= -\frac{1}{x}\sin(lnx) + \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{2\sin x\cos x} - \frac{1}{x}\sin(lnx)$$

$$= 2\ \text{cesec}\ 2x - \frac{1}{x}\sin(lnx)$$

5(e) $2\operatorname{cosec}2x\cos(ln\tan x)$ **[রা.'০৬]**

$$\frac{d}{dx}\{2\operatorname{cosec}2x\cos(ln\tan x)\}$$

$$= 2\left[\operatorname{cosec}2x\frac{d}{dx}\{\cos(ln\tan x)\} + \cos(ln\tan x)\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}2x)\right]$$

$= 2\,[\text{cosec } 2x\ \{-\sin(ln\ \tan x)\}.\dfrac{1}{\tan x}.$
$\sec^2 x + \cos(ln\tan x)\,(-\text{cosec}2x\cot 2x.\ .2)]$
$= 2\,[-\text{cosec } 2x\ \ \sin(ln\ \tan x)\}.\dfrac{\cos x}{\sin x}.$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\text{cosec}2x\cot 2x\cos(ln\tan x)]$
$= 2[-\text{cosec } 2x\ \sin(ln\tan x)\}\dfrac{2}{2\sin x\cos x}$
$-2\text{cosec}2x\cot 2x\cos(ln\tan x)]$
$= -4[\text{cosec}^2 2x\ \sin(ln\tan x)\}$
$+ \text{cosec } 2x\cot 2x\cos(ln\tan x)]$

5(f) $\dfrac{d}{dx}\{1+\tan(1+\sqrt{x})\}^{1/3}$

$= \dfrac{1}{3}\{1+\tan(1+\sqrt{x})\}^{\frac{1}{3}-1}\{0+\sec^2(1+\sqrt{x})\}$
$(0+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$

$= \dfrac{1}{6\sqrt{x}}\{1+\tan(1+\sqrt{x})\}^{-\frac{2}{3}}\sec^2(1+\sqrt{x})$

5(g) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{\tan e^{x^2}})$ [য.'০৯]

$= \dfrac{d(\sqrt{\tan e^{x^2}})}{d(\tan e^{x^2})}\dfrac{d(\tan e^{x^2})}{d(e^{x^2})}\dfrac{d(e^{x^2})}{d(x^2)}\dfrac{d(x^2)}{dx}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\tan e^{x^2}}}\sec^2 e^{x^2}\ .e^{x^2}.2x = \dfrac{xe^{x^2}\sec^2 e^{x^2}}{\sqrt{\tan e^{x^2}}}$

5(h) $\dfrac{d}{dx}\{\sin^2\log(\sec x)\}$ [সি.'১২]

$= 2\sin\{\log(\sec x)\}.\cos\{\log(\sec x)\}\times$
$\dfrac{d}{dx}\{\log(\sec x)\}$

$= \sin\{2\log(\sec x)\}\times\dfrac{1}{\sec x\ln 10}\dfrac{d}{dx}(\sec x)$

$= \dfrac{\sin\{2\log(\sec x)\}}{\sec x\ln 10}\sec x\ .\tan x$

$= \dfrac{\sin\{2\log(\sec x)\}.\tan x}{\ln 10}$

5(i) $\dfrac{d}{dx}(\sin\sqrt{x})$ [সি.'১২; কু.'১৩]

$= \cos\sqrt{x}\ \dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \cos\sqrt{x}\ .\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

6.(a) ধরি, $y = x^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ [রা.'০১]

$\therefore \ln y = 2\ln x + \dfrac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

ইহাকে এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 2.\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x}(-1)]$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y[\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2}\{\dfrac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\}]$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x^2\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}[\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2}\{\dfrac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\}]$

$= 2x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{(1+x)}(1-x)^{3/2}}$

6(b) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ [কু.'০৪; ঢা.'০৬,'০৯; য.'১৩]

$\dfrac{d}{dx}(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\dfrac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\ e^{\sqrt{x}}\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \dfrac{(e^{\sqrt{x}})^{1-\frac{1}{2}}}{2}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$ (Ans.)

6.(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$ [চ.'০০]

$= \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$= \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-x-2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+2)(x+1)}} \text{ (Ans.)}$$

6(d) $\frac{d}{dx}\{\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\}$ [কু.'০৯]

$$=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx}(x+1)^2+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x-1})-\frac{1}{(x+4)^3}\frac{d}{dx}(x+4)^3-\frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)\right]$$

$$=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{3(x+4)^2}{(x+4)^3}-\frac{1}{e^x}(e^x)\right]$$

$$=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1\right]$$

7.(a) $\frac{\ln(\cos x)}{x}$ [ঢা.'০৬; সি.'০৭;'০৯,'১১; ব.'১০]

$$\frac{d}{dx}\{\frac{\ln(\cos x)}{x}\}$$

$$=\frac{x\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)-\ln(\cos x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)-\ln(\cos x).1}{x^2}$$

$$=\frac{\{x\tan x+\ln(\cos x)}{x^2}$$

7(b) ধরি , $y=\frac{e^{-3x}(3x+5)}{7x-1}$ [য.'০৫]

$$\therefore \ln y=\ln e^{-3x}+\ln(3x+5)-\ln(7x-1)$$
$$=-3x+\ln(3x+5)-\ln(7x-1)$$

ইহাকে এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-3+\frac{1}{3x+5}(3)-\frac{1}{7x-1}(7)$$

$$=\frac{-3(21x^2+32x-5)+21x-3-21x-35}{(3x+5)(7x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y\frac{-63x^2-96x+15-38}{(3x+5)(7x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e^{-3x}(3x+5)}{7x-1}\cdot\frac{-(63x^2+96x+23)}{(3x+5)(7x-1)}$$

$$=\frac{-(63x^2+96x+23)e^{-3x}}{(7x-1)^2}$$

7. (c) $\frac{x^4}{\ln x}$ [ঢা.'০৪]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{\ln x}\right)=\frac{\ln x\frac{d}{dx}(x^4)-x^4\frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

$$=\frac{\ln x(4x^3)-x^4\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{x^3(4\ln x-1)}{(\ln x)^2}$$

8. (a) $\cos x°$ [রা.'০৪]

$$\cos x°=\cos\frac{\pi x}{180}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x°)=-\sin\frac{\pi x}{180}.\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$=-\sin x°.\frac{\pi}{180}=-\frac{\pi}{180}\sin x°$$

8(b) $e^{5x}\sin x°$ [সি.'০২]

$$=e^{5x}\sin\frac{\pi x}{180}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{5x}\sin\frac{\pi x}{180}\right)=e^{5x}.\cos\frac{\pi x}{180}\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)+\sin\frac{\pi x}{180}.e^{5x}\frac{d}{dx}(5x)$$

$$=e^{5x}.\cos x°.\left(\frac{\pi}{180}\right)+\sin x°.e^{5x}.5$$

$$=e^{5x}\left(\frac{\pi}{180}\cos x°+5\sin x°\right)$$

8(c) $2x°\cos 3x°$ [চ.'০৩; য.'০৫; কু.'১০,'১৩; সি. '০৬,'০৮,'১১; ব., রা.'০৭,'১৪; দি.'০৯,'১১]

$$2x°\cos 3x°=2\frac{\pi x}{180}\cos\frac{3\pi x}{180}$$

$\therefore \frac{d}{dx}(2\,x^\circ \cos\,3x^\circ) = \frac{\pi}{90}[x\,(-\sin\frac{3\pi x}{180}).$
$\frac{d}{dx}(\frac{3\pi x}{180}) + \cos\frac{3\pi x}{180}\,\frac{d}{dx}(x)\,]$

$= \frac{\pi}{90}[x\,(-\sin 3x^\circ\,).\,(\frac{3\pi}{180}) + \cos 3x^\circ.1\,]$

$= \frac{\pi}{90}(\cos 3x^\circ - \frac{\pi}{60}x\sin 3x^\circ)$

প্রশ্নমালা IX F

1. (a) $\sqrt{\sin^{-1}x^5}$ **[রা.'০৪, '০৬]**

$\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin^{-1}x^5}) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^5)$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}}\,\frac{d}{dx}(x^5)$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}\sqrt{1-x^{10}}}(5\,x^4)$

$= \frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}\sqrt{1-x^{10}}}$

1.(b) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ **[চ. '০৫; ব. '০৫;য.'০৯]**

$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sin e^x)\} = \frac{d\{\tan^{-1}(\sin e^x)\}}{d(\sin e^x)}$

$\frac{d(\sin e^x)}{d(e^x)}\frac{d(e^x)}{dx}$

$= \frac{1}{1+(\sin e^x)^2}(\cos e^x).\,e^x = \frac{e^x\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$

1(c) $\sin^{-1}(\sin e^{x}) = e^x$ **[চ.'০৪]**

$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sin e^{x})\} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

1(d) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\sqrt{xe^x}\,)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{xe^x})^2}}\,\frac{d}{dx}(\sqrt{xe^x}\,)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}}\,\frac{1}{2\sqrt{xe^x}}\,\frac{d}{dx}(xe^x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{xe^x(1-xe^x)}}\,(xe^x+e^x\,)$

$= \frac{e^x(1+x)}{2\sqrt{xe^x(1-xe^x)}}$ (Ans.)

1(e) $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$ **[সি.'০১]**

$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\,\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\,\frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$

1(f) $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2})\}$

$= \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\frac{d}{dx}(\tan\frac{x}{2})$

$= \frac{1}{1+\frac{(a-b)\sin^2(x/2)}{(a+b)\cos^2(x/2)}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{(a+b)\cos^2(x/2)}{a(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2})+b(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}$
$.\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\frac{1}{\cos^2(x/2)}$

$= \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{2(a+b\cos x)} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$

1.(g) $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})^2}}$

$\therefore \frac{d}{dx}(2x^\circ \cos 3x^\circ) = \frac{\pi}{90}[x(-\sin\frac{3\pi x}{180}).$
$\frac{d}{dx}(\frac{3\pi x}{180}) + \cos\frac{3\pi x}{180}\frac{d}{dx}(x)]$

$= \frac{\pi}{90}[x(-\sin 3x^\circ).(\frac{3\pi}{180}) + \cos 3x^\circ.1]$

$= \frac{\pi}{90}(\cos 3x^\circ - \frac{\pi}{60}x\sin 3x^\circ)$

প্রশ্নমালা IX F

1. (a) $\sqrt{\sin^{-1}x^5}$ **[রা.'০৪, '০৬]**

$\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin^{-1}x^5}) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^5)$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}}\frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}}\frac{d}{dx}(x^5)$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}\sqrt{1-x^{10}}}(5x^4)$

$= \frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1}x^5}\sqrt{1-x^{10}}}$

1.(b) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ **[চ. '০৫; ব. '০৫;য.'০৯]**

$\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sin e^x)\} = \frac{d\{\tan^{-1}(\sin e^x)\}}{d(\sin e^x)}$

$\frac{d(\sin e^x)}{d(e^x)}\frac{d(e^x)}{dx}$

$= \frac{1}{1+(\sin e^x)^2}(\cos e^x).e^x = \frac{e^x\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$

1(c) $\sin^{-1}(\sin e^x) = e^x$ **[চ.'০৪]**

$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sin e^x)\} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

1(d) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}\sqrt{xe^x})$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{xe^x})^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{xe^x})$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}}\frac{1}{2\sqrt{xe^x}}\frac{d}{dx}(xe^x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{xe^x(1-xe^x)}}(xe^x+e^x)$

$= \frac{e^x(1+x)}{2\sqrt{xe^x(1-xe^x)}}$ (Ans.)

1(e) $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$ **[সি.'০১]**

$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$

1(f) $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2})\}$

$= \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\frac{d}{dx}(\tan\frac{x}{2})$

$= \frac{1}{1+\frac{(a-b)\sin^2(x/2)}{(a+b)\cos^2(x/2)}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{(a+b)\cos^2(x/2)}{a(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2})+b(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}$
$.\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\frac{1}{\cos^2(x/2)}$

$= \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{2(a+b\cos x)} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$

1.(g) $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})^2}}$

$$\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$=\frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}\quad\frac{(-b^2+a^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{b^2+a^2\cos^2 x-a^2-b^2\cos^2 x}}$$

$$=\frac{-(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}}$$

$$=\frac{-(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$$

1(h) ধরি, $y=\sec^{-1}(\frac{x^2+1}{x^2-1})=-\sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$=-\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-2\tan^{-1}x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{-2}{1+x^2}$$

2. (a) $x\sin^{-1}x$ [সি.'০১]

$$\frac{d}{dx}(x\sin^{-1}x)=x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)+\sin^{-1}x\ \frac{d}{dx}(x)$$

$$=x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x.1$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x$$

2(b) $x^2\ \sin^{-1}(1-x)$ [রা.'০৬; ব.'০৮; ঢা.'১৪]

$$\frac{d}{dx}\{x^2\ \sin^{-1}(1-x)\}$$

$$=x^2\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(1-x)\}+\sin^{-1}(1-x)\ \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=x^2\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)+\sin^{-1}(1-x).2x$$

$$=-\frac{x^2}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}+2x\sin^{-1}(1-x)$$

$$=2x\sin^{-1}(1-x)\ -\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

2(c) $\frac{d}{dx}\{e^x\sin^{-1}x\}$ [য.'০৪]

$$=e^x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)+\sin^{-1}x\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$=e^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x.\ e^x$$

$$=e^x(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x)$$

2.(d) $\tan^{-1}(\frac{x^2}{e^x})+\tan^{-1}(\frac{e^x}{x^2})$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{x^2}}{1-\frac{x^2}{e^x}.\frac{e^x}{x^2}}=\tan^{-1}\frac{\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{x^2}}{1-1}$$

$$=\cot^{-1}\frac{1-1}{\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{x^2}}=\cot^{-1}0=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\frac{x^2}{e^x})+\tan^{-1}(\frac{e^x}{x^2})\}=\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2})=0$$

2(e) $\frac{d}{dx}(\tan x\sin^{-1}x)$ [ঢা.'০৫]

$$=\tan x\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)+\sin^{-1}x\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$=\tan x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x.(\sec^2 x)$$

$$=\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}+\sec^2 x\sin^{-1}x$$

2(f) $(x^2+1)\tan^{-1}x-x$ [ঢা.,য.'১১; কু.,দি.'১২]

মনে করি, $y=(x^2+1)\tan^{-1}x-x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2+1)\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \tan^{-1}x\frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{d}{dx}(x)$

$= (x^2+1)\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x \times (2x) - 1$

$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\} = 2x\tan^{-1}x$

3.(a) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ [কু.'০৩]

$= \tan^{-1}\frac{1-x}{1+1.x} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}x$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}) = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x)$

$= 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$ (Ans.)

3(b) $\cot^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ [চ.'০১,'১০; য.'০৫]

$= \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-1.x}$

$= \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\cot^{-1}\frac{1-x}{1+x}\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x)$

$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

3(c) $\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ [কু.'০০]

$= \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+1.\sqrt{x}} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\sqrt{x}$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{x})$

$= 0 - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= -\frac{1}{1+x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

3(d) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}$ [য.'০২,'১১; ঢা.'০৯,'১১; ব.'০৯; চ.'১২; কু.'১৩ প্র.ভ.প. '০৬]

$= \tan^{-1}\frac{a(1+\frac{b}{a}x)}{a(1-\frac{b}{a}x)} = \tan^{-1}\frac{1+\frac{b}{a}x}{1-1.\frac{b}{a}x}$

$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(\frac{b}{a}x) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(\frac{b}{a}x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}\} = \frac{d}{dx}\{\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(\frac{b}{a}x)\}$

$= 0 - \frac{1}{1+(\frac{b}{a}x)^2}\frac{d}{dx}(\frac{b}{a}x)$

$= \frac{a^2}{a^2+b^2x^2}.\frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}$

3(e) $\tan^{-1}\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}$ [প্র.ভ.প. '৯৬]

$= \tan^{-1}\frac{\frac{a\cos x}{b\cos x} - \frac{b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x}{b\cos x} + \frac{a\sin x}{b\cos x}} = \tan^{-1}\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}.\tan x}$

$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}\tan x = \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\} = 0 - 1 = -1$

3(f) $\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}$. [চ. '০৬; সি. '০৪; রা. য. ০৭]

$= \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}\frac{1-x}{1+1.x}$

$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x)$

$= 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$ ((Ans.)

3(g) ধরি, $y = \cos^{-1}(\frac{1+x}{2})^{1/2}$ [চ.'০৯]

এবং $x = \cos\theta$. তাহলে, $\theta = \cos^{-1}x$ এবং

$y = \cos^{-1}\{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\}^{1/2} = \cos^{-1}(\cos^2\frac{\theta}{2})^{1/2}$

$= \cos^{-1}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(\frac{1+x}{2})^{1/2}\} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\cos^{-1}x)$

$= \frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}$

3(h) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ [ব.'১৩; বুয়েট.'০৯]

$= \tan^{-1}\frac{b(\frac{a}{b}+x)}{b(1-\frac{a}{b}.x)} = \tan^{-1}(\frac{a}{b}) + \tan^{-1}(x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}\} = \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\frac{a}{b})\} + \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(x)\}$

$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

4.(a) ধরি, $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ [য.'০২,'১২,'১৪]

এবং $x = \tan\theta$. তাহলে, $\theta = \tan^{-1}x$ এবং

$y = \sin^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^{-1}\cos 2\theta$

$= \sin^{-1}\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$= \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x) = 0 - 2\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}) = \frac{-2}{1+x^2}$

4(b) $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$ [য.'০৬; চ.'০৭]

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$

$= 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$ (Ans.)

4(c) $\sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$ [য.'০৬; কু. ০৯; সি.'১০]

$= \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sec^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$

$= 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$ (Ans.)

4(d) $\tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}$ [ব.'০৪]

$= \tan^{-1}\frac{2.2x}{1-(2x)^2} = 2\tan^{-1}(2x)$

$[\because \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x]$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{4x}{1-4x^2}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(2x)\}$

$= 2\frac{1}{1+(2x)^2}.2 = \frac{4}{1+4x^2}$ (Ans.)

4(e) $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

[চ.'০৯; রা.'০৬; সি.'০৯,'১২; ব.'১১; দি.'১৩]

$= \tan^{-1}\frac{2.2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2} = 2\tan^{-1}(2\sqrt{x})$

$[\because \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x]$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(2\sqrt{x})\}$

$= 2\frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$

$$= \frac{2}{1+4x}.2.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)} \text{ (Ans.)}$$

4(f) $\sin^{-1}\frac{4x}{1+4x^2}$ [সি.'০২]

$= \sin^{-1}\frac{2.2x}{1+(2x)^2} = 2\tan^{-1}(2x)$.

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{4x}{1+4x^2}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(2x)\}$

$= 2\frac{1}{1+(2x)^2}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{4}{1+4x^2}$ (Ans.)

4(g) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$

$= \frac{2}{1+x^2}$ (Ans.)

4(h) $\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}$ [ঢা.'০১]

$= \sin^{-1}\frac{2.3x}{1+(3x)^2} = 2\tan^{-1}(3x)$

$[\because \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x]$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(3x)\}$

$= 2\frac{1}{1+(3x)^2}\frac{d}{dx}(3x) = \frac{2}{1+9x^2}.3$

$= \frac{9}{1+9x^2}$ (Ans.)

4.(i) $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [চ'০৬,'১১; ঢা.'০৭; সি.'১১]

$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2} = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}) = \frac{d}{dx}\{2\tan^{-1}(\sqrt{x})\}$

$= 2\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{2}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ (Ans.)

5.(a) ধরি, $y = \cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}\}$

[য.'০১,'১০; কু.'১০]

এবং $x = \sin\theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}x$ এবং

$y = \cos^{-1}(2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}\}$

$= \cos^{-1}(2\cos\theta\sin\theta) = \cos^{-1}\sin 2\theta$

$= \cos^{-1}\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta) = \frac{\pi}{2}-2\theta$

$= \frac{\pi}{2} - 2\sin^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - 2\sin^{-1}x)$

$= 0 - 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

5(b) ধরি, $y = \sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$ [কু.'০৮; সি.'১৩]

এবং $ax = \sin\theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}(ax)$ এবং

$y = \sin^{-1}\{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin\theta\cos\theta\} = \sin^{-1}\sin 2\theta$

$= 2\theta = 2\sin^{-1}(ax)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}\frac{d}{dx}(ax)$

$= \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

5(c)) ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ [রা.'০২]

এবং $2x = \sin\theta$.

$\therefore 2\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ এবং

$y = \tan^{-1}\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \tan^{-1}\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan^{-1}(2\tan\theta)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(2\tan\theta)^2}\frac{d}{d\theta}(2\tan\theta).\frac{d\theta}{dx}$

$$= \frac{1}{1+4\tan^2\theta}.2\sec^2\theta.\frac{2}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}.\frac{2}{\cos^2\theta}.\frac{2}{\cos\theta}$$

$$= \frac{4}{(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{4}{(1+3\sin^2\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{4}{\{1+3(2x)^2\}\sqrt{1-(2x)^2}}$$

$$= \frac{4}{(1+12x^2)\sqrt{1-4x^2}}$$

বিকল্প পদ্ধতি: ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)^2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{16x^2}{1-4x^2}}.\frac{\sqrt{1-4x^2}(4)-4x\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{(\sqrt{1-4x^2})^2}$$

$$= \frac{1-4x^2}{1-4x^2+16x^2}.\frac{4(1-4x^2)+16x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \frac{4-16x^2+16x^2}{(1+12x^2)\sqrt{1-4x^2}} = \frac{4}{(1+12x^2)\sqrt{1-4x^2}}$$

5(d) ধরি, $y = \sin^{-1}\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$ এবং

$x = \sin\theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}x$ এবং

$$y = \sin^{-1}\frac{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sin^{-1}(\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$$

$$= \sin^{-1}(\sin\theta.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta)$$

$$= \sin^{-1}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) = \theta+\frac{\pi}{4} = \sin^{-1}x+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{(Ans.)}$$

6.(a) ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [রা.'০৩]

এবং $x = \sec\theta$. তাহলে, $\theta = \sec^{-1}x$ এবং

$$y = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\cot\theta = \tan^{-1}\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\pi}{2}-\theta = \frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x) = 0-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6.(b) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ [সি.'০৫,'০৭; প্র.ভ.প.'১০]

ধরি, $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ এবং $x = \cos\theta$.

তাহলে, $\theta = \cos^{-1}x$ এবং

$$y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

6(c) $\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ [বুয়েট,'০৯]

ধরি, $y=\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ এবং $x=\cos\theta$

$\therefore\ y=\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right)$

$=\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)}}\right)$

$=\sin^4(\cot^{-1}\cot\frac{\theta}{2})=\sin^4\frac{\theta}{2}=\{\frac{1}{2}(2\sin^2\frac{\theta}{2})\}^2$

$=\{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\}^2=\frac{1}{4}(1-x)^2$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}\times2(1-x)\times(-1)=-\frac{1}{2}(1-x)$

6(d) $\tan(\sin^{-1}x)$ [চ.'০২,'০৯;কু.'০৮,'১১; রা.'০৮; ব.'০৯,'১২; ঢা.,য.,সি.'১০; ঢা.'১২; দি.'১৩]

$\frac{d}{dx}\{\tan(\sin^{-1}x)\}=\sec^2(\sin^{-1}x).\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$

$=\frac{1}{\cos^2(\sin^{-1}x)}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1}{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1}{1-\{\sin(\sin^{-1}x)\}^2}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ (Ans.)

7.(a) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ [সি.'১৪;য.'০৭; চ.'১৩]

$=\tan^{-1}(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x})=\tan^{-1}(\frac{1+\sin x}{\cos x})$

$=\tan^{-1}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\tan^{-1}\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}$

$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$

$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}(1-\tan\frac{x}{2})}=\tan^{-1}\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$

$=\tan^{-1}(1)+\tan^{-1}\tan(\frac{x}{2})=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$

$\therefore\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sec x+\tan x)\}=\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$

$=\frac{1}{2}$ (Ans.)

7(b) $\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}$ [ঢা.'০৫,'১৩]

$=\tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\tan^{-1}\frac{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}$

$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}(1-\tan\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}=\tan^{-1}\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}$

$=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\tan(\frac{x}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$

$\therefore\ \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x})=\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$

$=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

7(c) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [রা.'১০; কু.'১১; ব.'১২]

$= \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}} = \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\dfrac{x}{2}}$

$= \tan^{-1}\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}$

7(d) $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

[ব.'০২; চ. '০৮; রা. '০৯,'১১; দি.'০৯,'১১]

ধরি, $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ এবং $x = \cos\Theta$

তাহলে, $\Theta = \cos^{-1} x$ এবং

$y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$

$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}}\right)$

$= \sin(2\tan^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2}) = \sin(2.\dfrac{\theta}{2}) = \sin\Theta$

$= \sin(\cos^{-1}x) = \sin\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$= \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x)$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{\sin(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}})\} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

প্রশ্নমালা IX G

$\dfrac{dy}{dx}$ **নির্ণয় কর ঃ 1. (a)** $x = \sqrt{t},\ y = t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ এবং

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}) = \dfrac{d}{dt}(t - t^{-\frac{1}{2}})$

$= 1 - (-\dfrac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}-1} = 1 + \dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{t}}(2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t})$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\times\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}(2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t})\times\dfrac{2\sqrt{t}}{1}$

$= 2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t}$

1.(b) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}\cdots\cdots(1),\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}\cdots(2)$

$(2)\div(1) \Rightarrow \dfrac{y}{x} = t$

(1) হতে পাই, $x = \dfrac{3a\dfrac{y}{x}}{1+(\dfrac{y}{x})^3} = \dfrac{3ay}{x}\times\dfrac{x^3}{x^3+y^3}$

$\Rightarrow\ x = \dfrac{3ax^2y}{x^3+y^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 3axy$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 3a(x\dfrac{dy}{dx} + y)$

$\Rightarrow\ (y^2 - ax)\dfrac{dy}{dx} = ay - x^2\ \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

1(c) $x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi),\ y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$

$\dfrac{dx}{d\phi} = \dfrac{d}{d\phi}\{a(\cos\phi + \phi\sin\phi)\}$

$= a(-\sin\phi + \phi\cos\phi + \sin\phi) = a\phi\cos\phi$

$\dfrac{dy}{d\phi} = \dfrac{d}{d\phi}\{a(\sin\phi - \phi\cos\phi)\}$

$= a(\cos\phi + \phi\sin\phi - \cos\phi) = a\phi\sin\phi$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{d\phi}}{\dfrac{dx}{d\phi}} = \dfrac{a\phi\sin\phi}{a\phi\cos\phi} = \tan\phi$

1(*d*) $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}\ ,\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}a^{\sin^{-1}t}\ln a\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

7(c) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [রা.'১০; কু.'১১; ব.'১২]

$= \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}} = \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\dfrac{x}{2}}$

$= \tan^{-1}\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}) = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}$

7(d) $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

[ব.'০২; চ. '০৮; রা. '০৯,'১১; দি.'০৯,'১১]

ধরি, $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ এবং $x = \cos\Theta$

তাহলে, $\Theta = \cos^{-1}x$ এবং

$y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$

$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}}\right)$

$= \sin(2\tan^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2}) = \sin(2.\dfrac{\theta}{2}) = \sin\Theta$

$= \sin(\cos^{-1}x) = \sin\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$= \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x)$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{\sin(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}})\} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

প্রশ্নমালা IX G

$\dfrac{dy}{dx}$ **নির্ণয় কর ঃ 1. (a)** $x = \sqrt{t},\ y = t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ এবং

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}) = \dfrac{d}{dt}(t - t^{-\frac{1}{2}})$

$= 1 - (-\dfrac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}-1} = 1 + \dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{t}}(2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t})$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\times\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}(2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t})\times\dfrac{2\sqrt{t}}{1}$

$= 2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t}$

1.(b) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}\cdots\cdots(1),\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}\cdots(2)$

$(2)\div(1) \Rightarrow \dfrac{y}{x} = t$

(1) হতে পাই, $x = \dfrac{3a\dfrac{y}{x}}{1+(\dfrac{y}{x})^3} = \dfrac{3ay}{x}\times\dfrac{x^3}{x^3+y^3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{3ax^2y}{x^3+y^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 3axy$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 3a(x\dfrac{dy}{dx} + y)$

$\Rightarrow (y^2 - ax)\dfrac{dy}{dx} = ay - x^2 \ \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

1(c) $x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi),\ y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$

$\dfrac{dx}{d\phi} = \dfrac{d}{d\phi}\{a(\cos\phi + \phi\sin\phi)\}$

$= a(-\sin\phi + \phi\cos\phi + \sin\phi) = a\phi\cos\phi$

$\dfrac{dy}{d\phi} = \dfrac{d}{d\phi}\{a(\sin\phi - \phi\cos\phi)\}$

$= a(\cos\phi + \phi\sin\phi - \cos\phi) = a\phi\sin\phi$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{d\phi}}{\dfrac{dx}{d\phi}} = \dfrac{a\phi\sin\phi}{a\phi\cos\phi} = \tan\phi$

1(d) $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}a^{\sin^{-1}t}\ln a\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$= \frac{\ln a\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{x\ln a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{a^{\cos^{-1}t}})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}} a^{\cos^{-1}t}\ln a \frac{1}{-\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\frac{\ln a\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{y\ln a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = -\frac{y\ln a}{2\sqrt{1-t^2}}\times\frac{2\sqrt{1-t^2}}{x\ln a}$$

$$= -\frac{y}{x}$$

2. (a) $x^{\frac{1}{x}}$ [ব.'০৪; চ.'১৩;সি.'০৭,'০৯; ঢা., য.'০৮]

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{x}}) = x^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})]$$

$$[\because \frac{d}{dx}(u^v) = u^v\{v\frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\frac{dv}{dx}\}]$$

$$= x^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x\frac{d}{dx}(x^{-1})]$$

$$= x^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2} + \ln x.(-x^{-2})] = x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2})$$

$$= x^{\frac{1}{x}}.\frac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x) \quad \text{(Ans.)}$$

2. (b) $\frac{d}{dx}(1+x)^x$ [ব.'১৩]

$$= (1+x)^x[x\frac{d}{dx}\{\ln(1+x)\} + \ln(1+x)\frac{d}{dx}(x)]$$

$$[\because \frac{d}{dx}(u^v) = u^v\{v\frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\frac{dv}{dx}\}].$$

$$= (1+x)^x[x\frac{1}{1+x} + \ln(1+x).1]$$

$$= (1+x)^x\{\frac{x}{1+x} + \ln(1+x)\}$$

2(c) $(1+x^2)^{2x}$ [য.'০৬]

$$\frac{d}{dx}\{(1+x^2)^{2x}\} = (1+x^2)^{2x}$$

$$[2x\frac{d}{dx}\{\ln(1+x^2)\} + \ln(1+x^2)\frac{d}{dx}(2x)]$$

$$= (1+x^2)^{2x}[\frac{2x}{1+x^2}(2x) + \ln(1+x^2).(2)]$$

$$= 2(1+x^2)^{2x}[\frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2)]$$

2(d) $(1+x^2)^{x^2}$ [সি.'০১]

$$\frac{d}{dx}(1+x^2)^{x^2} = (1+x^2)^{x^2}$$

$$[x^2\frac{d}{dx}\{\ln(1+x^2)\} + \ln(1+x^2)\frac{d}{dx}(x^2)]$$

$$= (1+x^2)^{x^2}[\frac{x^2}{1+x^2}(2x) + \ln(1+x^2).(2x)]$$

$$= 2x(1+x^2)^{x^2}[\frac{x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2)]$$

2(e) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ [ব.'১২;চ.'১০; কু.'১১; প্র.ভ.প.'০৫]

$$\frac{d}{dx}\{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\}$$

$$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x}) + \ln\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})]$$

$$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}]$$

$$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}]$$

$$= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}[\frac{1+\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}] \quad \text{(Ans.)}$$

2(f) ধরি, $y = x^{\ln x}$ [রা.'০২; কু.'০৮; সি.'১১]

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\ln x}[\ln x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\ln x)]$$

$$[\because \frac{d}{dx}(u^v) = u^v[v\frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\frac{dv}{dx}].$$

$$= x^{\ln x}[2\ln x.\frac{1}{x}] = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(x^{\ln x}) = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x}$

2(g) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^x = (\sin^{-1}x)^x$

$[x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin^{-1}x)\} + \ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\sin^{-1}x)^x [x\frac{1}{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1}x).1]$

$= (\sin^{-1}x)^x [\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x} + \ln(\sin^{-1}x)]$

2(h) $\frac{d}{dx}(\sin x)^x$ [য.'০৭]

$=(\sin x)^x [x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x)\frac{d}{dx}(x)]$

$=(\sin x)^x [x\frac{1}{\sin x}.\cos x + \ln(\sin x).1]$

$=(\sin x)^x [x\cot x + \ln(\sin x)]$

2(i) $\frac{d}{dx}(lnx)^x$

$= (lnx)^x [x\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (lnx)^x [x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \ln(\ln x).1]$

$= (lnx)^x [\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)]$

2 (j) $\frac{d}{dx}(\log_{10}x)^x = (\log_{10}x)^x$

$[x\frac{d}{dx}\{\ln(\log_{10}x)\} + \ln(\log_{10}x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\log_{10}x)^x [x\frac{1}{\log_{10}x}.\frac{1}{x\ln 10} + \ln(\log_0 x).1]$

$= (\log_{10}x)^x [\frac{1}{\ln 10\log_{10}x} + \ln(\log_{10}x)]$

2(k) $x^{\cos^{-1}x}$ [কু.'১০,'১৩; সি. ' ০৬,'০৮; ঢা. '১০, '১৩; রা. '০৫, '০৭; ব.'০৬,'১০; দি.'০৯; য.'১০]

$\frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1}x})$

$= x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)]$

$= x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x.\frac{1}{x} + \ln x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}]$

$= x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}]$

2(*l*) $\frac{d}{dx}(x^{-1/x})$ [বুয়েট''০৭]

$=x^{-1/x}[-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(-\frac{1}{x})]$

$= x^{-1/x}[-\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x\{-(-\frac{1}{x^2})\}]$

$=x^{-1/x} \times \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+1/x}}(\ln x - 1)$

3(a) $\frac{d}{dx}(e^{x^x}) = e^{x^x}\frac{d}{dx}(x^x)$

$=e^{x^x}x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$=e^{x^x}.x^x\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}$

$= e^{x^x}.x^x(1+\ln x)$

3(b) $\frac{d}{dx}(x^{e^x})$

$= x^{e^x}[e^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^x)]$

$=x^{e^x}[e^x\frac{1}{x} + \ln x.e^x]$

$= x^{e^x}e^x(\frac{1}{x} + \ln x)$

(c) $\frac{d}{dx}(a^{a^x})$ [দি.'১২]

$= a^{a^x}.lna.\frac{d}{dx}(a^x)$

$= a^{a^x}lna.a^x.lna = a^{a^x}a^x(lna)^2$

3(d) $(\cot x)^{\tan x}$ [চ.'০৫; ব., দি.'০৯; য.'১২]

$\frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x} = (\cot x)^{\tan x}$

$[\tan x\frac{d}{dx}\{\ln(\cot x)\} + \ln(\cot x)\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}[\frac{\tan x}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x) +$

$\ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x} +$

$\ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}[-\sec^2 x + \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x[\ln(\cot x) - 1]$

4. (a) x^{x^x} [রা.'০৬,'০৮; য.'১১; প্র.ভ.প.'০৫]

$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x}[x^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^x)]$

$= x^{x^x}[x^x.\frac{1}{x} + \ln x. x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x) +$

$\ln x\frac{d}{dx}(x)\}]$

$= x^{x^x}. x^x[\frac{1}{x} + \ln x.\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= x^{x^x}.x^x[\frac{1}{x} + \ln x.(1 + \ln x\}]$

4(b) $(x^x)^x$ [য.,মা.'০৯; কু.'০৫; ঢা.,ব.,দি.'১১; রা.'১২]

$(x^x)^x = x^{x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^x)^x = x^{x^2}[x^2\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^2)]$

$= x^{x^2}[x^2.\frac{1}{x} + \ln x.(2x)]$

$= x^{x^2}[x + 2x\ln x] = (x^x)^x.x[1 + 2\ln x]$

4(c) $\frac{d}{dx}(\sec x)^{x^x} = (\sec x)^{x^x}$

$[x^x\frac{d}{dx}\{\ln(\sec x)\} + \ln(\sec x)\frac{d}{dx}(x^x)]$

$= (\sec x)^{x^x}[x^x\frac{1}{\sec x}.\sec x\tan x +$

$\ln(\sec x).x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)\}]$

$= (\sec x)^{x^x}.x^x[\tan x + \ln(\sec x)\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= (\sec x)^{x^x}. x^x[\tan x + (1 + \ln x)\ln(\sec x)]$

5.(a) $\frac{d}{dx}(x^x \ln x)$ [কু. '০৪; দি.'১০; ব.'১২]

$= x^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x.\frac{1}{x} + \ln x. x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)\}$

$= x^x[\frac{1}{x} + \ln x.\{x.\frac{1}{x} + \ln x.1\}]$

$= x^x\{\frac{1}{x} + \ln x.(1 + \ln x)\}$

5(b) $\frac{d}{dx}(ax)^{bx}$

$= (ax)^{bx}[bx\frac{d}{dx}\{\ln(ax)\} + \ln(ax)\frac{d}{dx}(bx)]$

$= (ax)^{bx}[bx.\frac{1}{ax}.a + \ln(ax).b]$

$= (ax)^{bx}.b[1 + \ln(ax)]$

5(c) ধরি, $y = (xe^x)^{\sin x}$

$\therefore \ln y = \ln(xe^x)^{\sin x} = \sin x(\ln x + \ln e^x)$

$= \sin x(\ln x + x)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x(\frac{1}{x} + 1) + (\ln x + x)\cos x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y[(\frac{1}{x} + 1)\sin x + (\ln x + x)\cos x]$

$= (xe^x)^{\sin x}[\sin x.(\frac{1}{x} + 1) + (\ln x + x)\cos x]$

5(d) $\frac{d}{dx}(e^{x^2} + x^{x^2})$ [ঢা.'০৬,'১২]

$= \frac{d}{dx}(e^{x^2}) + \frac{d}{dx}(x^{x^2})$

$= e^{x^2}(2x) + x^{x^2}[x^2\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^2)$

$= 2xe^{x^2} + x^{x^2}[\frac{x^2}{x} + \ln x.(2x)]$

$= 2xe^{x^2} + x^{x^2}[x + 2x\ln x]$

5(e) $\frac{d}{dx}\{(\tan x)^x + x^{\tan x}\}$

$= \frac{d}{dx}(\tan x)^x + \frac{d}{dx}(x^{\tan x})$

$= (\tan x)^x\,[x\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x)\frac{d}{dx}(x)]$

$+ x^{\tan x}[\tan x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\tan x)^x\,[x\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x + \ln(\tan x).1]$

$+ x^{\tan x}[\tan x.\frac{1}{x} + \ln x.\sec^2 x]$

$= (\tan x)^x\,[x\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\cos^2 x} + \ln(\tan x)]$

$+ x^{\tan x}[\frac{1}{x}\tan x + \sec^2 x\ln x]$

$= (\tan x)^x\,[2x\,\mathrm{cosec}\,2x + \ln(\tan x)]$

$+ x^{\tan x}[\frac{1}{x}\tan x + \sec^2 x\ln x]$

5.(f) $\frac{d}{dx}(x^{\ln x} + x^{\log x})$

$= \frac{d}{dx}(x^{\ln x}) + \frac{d}{dx}(x^{\ln x})$

$= x^{\ln x}\,[\ln x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\ln x)]$

$+ x^{\log x}\,[\log x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(\log x)]$

$= x^{\ln x}\,2\ln x.\frac{1}{x} + x^{\log x}\,[\log x.\frac{1}{x} + \ln x.\frac{1}{x\ln 10}]$

$= \frac{2\ln x}{x}.x^{\ln x} + x^{\log x}\,[\frac{\log x}{x} + \frac{\ln x}{x\ln 10}]$

5(g) $\frac{d}{dx}\{(\ln x)^x + (\log_{10} x)^x\}$

$= \frac{d}{dx}(\ln x)^x + \frac{d}{dx}(\log_{10} x)^x$

$= (\ln x)^x\,[x\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x)\frac{d}{dx}(x)] +$

$(\log_{10} x)^x\,[x\frac{d}{dx}\{\ln(\log_{10} x)\} + \ln(\log_{10} x)\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\ln x)^x\,[x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \ln(\ln x).1] +$

$(\log_{10} x)^x\,[x\frac{1}{\log_{10} x}.\frac{1}{x\ln 10} + \ln(\log_{10} x).1]$

$= (\ln x)^x\,[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)] +$

$(\log_{10} x)^x\,[\frac{1}{\ln 10\log_{10} x} + \ln(\log_{10} x)]$

5(h) $\frac{d}{dx}\{(\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}\}$

$= \frac{d}{dx}(\tan x)^{\cot x} + \frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x}$

$= (\tan x)^{\cot x}\,[\cot x\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x)$

$\frac{d}{dx}(\cot x)] + (\cot x)^{\tan x}\,[\tan x\frac{d}{dx}\{\ln(\cot x)\}$

$+ \ln(\cot x)\frac{d}{dx}(\tan x)]$

$= (\tan x)^{\cot x}\,[\frac{\cot x}{\tan x}\sec^2 x + \ln(\tan x).$

$(-\mathrm{cosec}^2 x)] + (\cot x)^{\tan x}\,[\frac{\tan x}{\cot x}$

$(-\mathrm{cosec}^2 x) + \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\tan x)^{\cot x}\,[\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{1}{\cos^2 x} - \ln(\tan x).$

$\mathrm{cosec}^2 x] + (\cot x)^{\tan x}\,[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}$

$+ \ln(\cot x).(\sec^2 x)]$

$= (\tan x)^{\cot x}.\mathrm{cosec}^2 x\,[1 - \ln(\tan x)]$

$+ (\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x\,[\ln(\cot x) - 1]$

5(i) $\frac{d}{dx}(x^x\log_{10} x)$ [চ.'১২]

$= x^x\frac{d}{dx}(\log_{10} x) + \log_{10} x\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x\frac{1}{x\ln 10} + \log_{10} x\,[x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x)$

$+ \ln x\frac{d}{dx}(x)\}]$

$$= \frac{x^x}{x\ln 10} + x^x \log_{10} x \ \{x\frac{1}{x} + \ln x\}$$

$$= \frac{x^x}{x\ln 10} + x^x \log_{10} x \ \{1 + \ln x\}$$

প্রশ্নমালা IX H

1. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(a) $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$ [প্র.ভ.প. '০৬]

$\therefore \ln(x^a y^b) = \ln(x-y)^{a+b}$

$\Rightarrow \ln(x^a) + \ln(y^b) = (a+b)\ln(x-y)$

$\Rightarrow a\ln x + b\ln y = (a+b)\ln(x-y)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$a.\frac{1}{x} + b.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (a+b)\frac{1}{x-y}(1-\frac{dy}{dx})$$

or, $(\frac{b}{y} + \frac{a+b}{x-y})\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{x-y} - \frac{a}{x}$

or, $\frac{bx-by+ay+by}{y(x-y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{ax+bx-ax+ay}{x(x-y)}$

or, $\frac{bx+ay}{y(x-y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{bx+ay}{x(x-y)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

1(b) $y = \sin(x+y)^2$ [রা.'০৪; কু.'০৭; য.'১১]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2 \frac{d}{dx}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2.2(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$$

$$\Rightarrow \{1-2(x+y)\cos(x+y)^2\}\frac{dy}{dx} = 2(x+y)\cos(x+y)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1-2(x+y)\cos(x+y)^2}$$

1(c) $x + y = \sin^{-1}(y/x)$

$$\Rightarrow \sin(x+y) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sin(x+y)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = x\cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx}) + \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \{1-x\cos(x+y)\}\frac{dy}{dx} = x\cos(x+y) + \sin(x+y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\cos(x+y)+\sin(x+y)}{1-x\cos(x+y)}$$

1. (d) $x^2 = 5y^2 + \sin y$ [প্র.ভ.প.'০৬]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x = 10y\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y+\cos y} \ (\text{Ans.})$$

1(e) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ [প্র.ভ.প.'০৩]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(\cos x)^y [y\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\} + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx}]$$

$$= (\sin y)^x [x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin y)\} + \ln(\sin y)\frac{d}{dx}(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\cos x}(-\sin x) + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sin y}(\cos y)\frac{dy}{dx} + \ln(\sin y).1$$

$$[\because (\cos x)^y = (\sin y)^x]$$

$$\Rightarrow \{\ln(\cos x) - x\cot y\}\frac{dy}{dx} = \ln(\sin y) + y\tan x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\sin y) + y\tan x}{\ln(\cos x) - x\cot y}$$

1(f) $\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x + y = \sqrt{xy}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(x\frac{dy}{dx} + y.1)$$

$= \frac{x^x}{x\ln 10} + x^x \log_{10} x \ \{x\frac{1}{x} + \ln x\}$

$= \frac{x^x}{x\ln 10} + x^x \log_{10} x \ \{1 + \ln x\}$

প্রশ্নমালা IX H

1. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

(a) $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$ [প্র.ভ.প. '০৬]

$\therefore ln(x^a y^b) = ln(x-y)^{a+b}$

$\Rightarrow ln(x^a) + ln(y^b) = (a+b)\ ln(x-y)$

$\Rightarrow a\ lnx + b\ ln\ y = (a+b)\ ln(x-y)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$a.\frac{1}{x} + b.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (a+b)\frac{1}{x-y}(1-\frac{dy}{dx})$

or, $(\frac{b}{y} + \frac{a+b}{x-y})\frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{x-y} - \frac{a}{x}$

or, $\frac{bx-by+ay+by}{y(x-y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{ax+bx-ax+ay}{x(x-y)}$

or, $\frac{bx+ay}{y(x-y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{bx+ay}{x(x-y)}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

1(b) $y = \sin(x+y)^2$ [রা.'০৪; কু.'০৭; য.'১১]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2\ \frac{d}{dx}(x+y)^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2.2(x+y)(1+\frac{dy}{dx})$

$\Rightarrow \{1-2(x+y)\cos(x+y)^2\}\frac{dy}{dx} = 2(x+y)\cos(x+y)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1-2(x+y)\cos(x+y)^2}$

1(c) $x + y = \sin^{-1}(y/x)$

$\Rightarrow \sin(x+y) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sin(x+y)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = x\cos(x+y)(1+\frac{dy}{dx}) + \sin(x+y)$

$\Rightarrow \{1-x\cos(x+y)\}\frac{dy}{dx} = x\cos(x+y) + \sin(x+y)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\cos(x+y)+\sin(x+y)}{1-x\cos(x+y)}$

1. (d) $x^2 = 5y^2 + \sin y$ [প্র.ভ.প.'০৬]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x = 10y\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y+\cos y}$ (Ans.)

1(e) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ [প্র.ভ.প.'০৩]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(\cos x)^y[y\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\} + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx}]$

$= (\sin y)^x\ [x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin y)\} + \ln(\sin y)\frac{d}{dx}(x)]$

$\Rightarrow \frac{y}{\cos x}(-\sin x) + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx}$

$= \frac{x}{\sin y}(\cos y)\frac{dy}{dx} + \ln(\sin y).1$

$[\because (\cos x)^y = (\sin y)^x]$

$\Rightarrow \{\ln(\cos x) - x\cot y\}\frac{dy}{dx} = \ln(\sin y) + y\tan x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\sin y) + y\tan x}{\ln(\cos x) - x\cot y}$

1(f) $\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 1$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x + y = \sqrt{xy}$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(x\frac{dy}{dx} + y.1)$

$$\Rightarrow (1-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}})\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}-1$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{y}-\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2\sqrt{y}-\sqrt{x})} \text{ (Ans.)}$$

2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

2(a) $x^y = e^{x-y}$ [য.বো.'০৫]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x^y[y\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{dy}{dx}] = e^{x-y}(1-\frac{dy}{dx})$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx} = 1-\frac{dy}{dx} \quad [\because x^y = e^{x-y}]$$

$$\Rightarrow (1+\ln x)\frac{dy}{dx} = 1-\frac{y}{x} = \frac{x-y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x(1+\ln x)}$$

2(b) $y+x = x^{-y}$ [রা.'১১; য.'১৩; প্র.ভ.প. '৯৫]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx}+1 = x^{-y}[-y\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(-y)]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+1 = x^{-y}[\frac{-y}{x}-\ln x\frac{dy}{dx}]$$

$$\Rightarrow (1+x^{-y}\ln x)\frac{dy}{dx} = -1-y.x^{-y-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+yx^{-y-1}}{1+x^{-y}\ln x} \text{ (Ans.)}$$

2(c) $x^y + y^x = 1$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x^y[y\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{dy}{dx}] + y^x[x\frac{d}{dx}(\ln y)+\ln y\frac{d}{dx}(x)] = 0$$

$$\Rightarrow x^y[\frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}]+y^x[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y.1] = 0$$

$$\Rightarrow (x^y\ln x+xy^{x-1})\frac{dy}{dx} = -(x^{y-1}y+y^x\ln y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{y-1}y+y^x\ln y}{x^y\ln x+xy^{x-1}}$$

2(d) $x^p y^p = (x+y)^{p+q}$

$$\therefore p\ln x+q\ln y = (p+q)\ln(x+y)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y}(1+\frac{dy}{dx})$$

$$\Rightarrow (\frac{q}{y}-\frac{p+q}{x+y})\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y}-\frac{p}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{qx+qy-py-qy}{y(x+y)}\frac{dy}{dx} = \frac{px+qx-px-py}{(x+y)x}$$

$$\Rightarrow \frac{qx-py}{y(x+y)}\frac{dy}{dx} = \frac{qx-py}{(x+y)x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ (Ans.)}$$

2(e) $y = x^{y^x} \therefore \ln y = y^x \ln x \cdots(1)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y^x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(y^x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y^x\frac{1}{x}+\ln x.\,y^x\{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\ln y}{x\ln x}+\ln y\{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y\}$$

[(1) দ্বারা]

$$\Rightarrow (\frac{1}{y}-\frac{x}{y}\ln y)\frac{dy}{dx} = \ln y(\frac{1}{x\ln x}+\ln y)$$

$$\Rightarrow (\frac{1-x\ln y}{y})\frac{dy}{dx} = \ln y(\frac{1+x\ln x\ln y}{x\ln x})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y(1+x\ln x\ln y)}{x\ln x(1-x\ln y)}$$

(f) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\ldots\infty}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\ldots\infty}}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{xy} \Rightarrow y^2 = xy \Rightarrow y = x$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = 1$ (Ans.)

2.(g) $ln\,(xy) = x + y$ [রা.'০৫; কু. '০৬]

$\Rightarrow ln\,x + ln\,y = x + y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y + x\frac{dy}{dx} = xy + xy\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x(1-y)\frac{dy}{dx} = y(x-1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)} \text{ (Ans.)}$$

2(h) $\log_{10}(x^n y^n) = x^n + y^n$ [বুয়েট ০৭-০৮]

$$\Rightarrow n\log_{10} x + n\log_{10} y = x^n + y^n$$

$$\Rightarrow n\log_{10} e \times \log_e x + n\log_{10} e \times \log_e y = x^n + y^n$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$n\frac{\log_{10} e}{x} + n\frac{\log_{10} e}{y}\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\log_{10} e}{y} - y^{n-1}\right)\frac{dy}{dx} = x^{n-1} - \frac{\log_{10} e}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{10} e - y^n}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^n - \log_{10} e}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^n - \log_{10} e)}{x(\log_{10} e - y^n)}$$

3.(a) **$\tan y = \sin x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।**

প্রমাণ : $\tan y = \sin x$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sin^2 x} \times \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \text{ (Ans.)}$$

3(b) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ [প্র.ভ.প. '০২, '০৪]

প্রমাণ : $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$$

$$\Rightarrow x^2(1+y) = y^2(1+x) \quad \text{[বর্গ করে।]}$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + xy(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0$$

$x + y + xy = 0$ হলে, $(1+x)y = -x$

$$\Rightarrow y = \frac{-x}{1+x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)(-1) + x(1)}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1-x+x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

3.(c) $x = a(t - \sin t)$ এবং $y = a(1+\cos t)$ হলে, দেখাও যে, $t = \frac{5\pi}{3}$ যখন $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$.

[প্র.ভ.প. '৮৫]

প্রমাণ : $\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a(0 - \sin t)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{-a\sin t}{a(1-\cos t)}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = -\cot\frac{t}{2}$$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$ হলে, $\cot\frac{t}{2} = -\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \tan\frac{t}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{t}{2} = \tan\frac{5\pi}{6} \therefore \frac{t}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{3}$$

3(d) $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$f'(0) = \left(2\ln\frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$

প্রমাণ: $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ $\therefore f(0) = (\frac{a}{b})^{a+b}$

এবং $\ln\{f(x)\} =$

$$(a+b+2x)\{\ln(a+x) - \ln(b+x)\}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (a+b+2x)\{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\} + \{\ln(a+x) - \ln(b+x)\}2.$$

$$\therefore f'(0) = f(0)\,[(a+b)(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + 2(\ln a - \ln b)]$$

$$\Rightarrow f'(0) = (\frac{a}{b})^{a+b}[(a+b)(\frac{b-a}{ab}) + 2\ln\frac{a}{b}]$$

$$\therefore f'(0) = (2\ln\frac{a}{b} + \frac{b^2-a^2}{ab})(\frac{a}{b})^{a+b}$$

(e) $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x ....\infty}}}$ হলে,

প্রমাণ কর যে, $(2y-1)\frac{dy}{dx} + \sin x = 0.$

প্রমাণ : $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x ....\infty}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x \cdots \infty}}}}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\cos x + y} \Rightarrow y^2 = \cos x + y$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = -\sin x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (2y-1)\frac{dy}{dx} + \sin x = 0$$

3(f) $x^{y^n} = y^{x^n}$ হলে দেখাও যে,

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{n+1}(n\ln x - 1)}{x^{n+1}(n\ln y - 1)}$ [বুয়েট ০৮–০৯]

প্রমাণ : $x^{y^n} = y^{x^n}$ $\therefore y^n \ln x = x^n \ln y \cdots(1)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{y^n}{x} + \ln x.(ny^{n-1})\frac{dy}{dx} = \frac{x^n}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y.nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow y^{n+1} + x\ln x.ny^n\frac{dy}{dx} = x^{n+1}\frac{dy}{dx} + y\ln y.nx^n$$

$$\Rightarrow (nx\ln x.y^n - x^{n+1})\frac{dy}{dx} = y\ln y.nx^n - y^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{nyx^n\ln y - y^{n+1}}{nxy^n\ln x - x^{n+1}}$$

$$= \frac{ny.y^n\ln x - y^{n+1}}{nx.x^n\ln y - x^{n+1}} \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$= \frac{y^{n+1}(n\ln x - 1)}{x^{n+1}(n\ln y - 1)}$$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

1. (a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে $\sqrt[3]{x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$$\therefore f'(2) = \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{x^{1/3} - 2^{1/3}}{x-2} \quad (১)$$

$$= \frac{1}{3}\times 2^{\frac{1}{3}-1} \quad [\because \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}] \quad (১)$$

$$= \frac{1}{3}\times 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\times 4^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

(b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে $\cos^2 x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \cos^2 x$. $\therefore f(a) = \cos^2 a$

$$\therefore f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad (১)$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\cos^2 x - \cos^2 a}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sin(x+a)\sin(a-x)}{x-a} \quad (১)$$

$$[\because \cos^2 B - \cos^2 A = \sin(A+B)\sin(A-B)]$$

$$= -\lim_{x-a\to0}\frac{\sin(x-a)}{x-a}.\lim_{x\to a}\sin(x+a) \quad (১)$$

$$= -1.\sin(a+a) = -\sin 2a \text{ (Ans.)} \quad (১)$$

x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

2. $\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x^2 - 4x - 9)$

$$= 5\frac{d}{dx}(x^3) + 3\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(9) \quad (১)$$

$= 5(3x^2) + 3(2x) - 4 - 0$

$= 15x^2 + 6x - 4$ (Ans.) (১)

3. $\frac{d}{dx}(2x^3 - 4x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{2}{3}} + 7)$

$= 2\frac{d}{dx}(x^3) - 4\frac{d}{dx}(x^{\frac{5}{2}}) + \frac{7}{2}\frac{d}{dx}(x^{-\frac{2}{3}}) + \frac{d}{dx}(7)$ (১)

$= 2(3x^2) - 4(\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}) + \frac{7}{2}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}) + 0$

$= 6x^2 - 10x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{5}{3}}$ (Ans.) (১)

4. $(2x)^n - b^n$ [চ.'০২]

$(2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

$\therefore \frac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n \frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(b^n)$ (১)

$= 2^n n x^{n-1} - 0 = 2^n n x^{n-1}$ (১)

5(a) $x^2 \log_a x + 7e^x \cos x$ [সি.'০৪]

$\frac{d}{dx}(x^2 \log_a x + 7e^x \cos x) = x^2 \frac{d}{dx}(\log_a x)$

$+ \log_a x \frac{d}{dx}(x^2) + 7\{e^x \frac{d}{dx}(\cos x) +$

$\cos x \frac{d}{dx}(e^x)\}$ (১) + (১)

$= x^2 \frac{1}{x \ln a} + \log_a x\ (2x) +$

$7\{e^x(-\sin x) + \cos x \cdot e^x\}$ (১) + (১)

$= x(\frac{1}{\ln a} + 2\log_a x) + 7e^x(\cos x - \sin x)$

5(b) $\sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)}$ [প্র.ভ.প.'১৩]

$\sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)} = \sin^2 2x + e^{\ln(\cos 2x)^2}$

$= \sin^2 2x + (\cos 2x)^2$ (১)

$= \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\sin^2 2x + e^{2\ln(\cos 2x)}\} = \frac{d}{dx}(1) = 0$ (১)

5(c) $5e^x \ln x$ [য.'০৪]

মনে করি, $y = 5e^x \ln x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 5\{e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x)\}$ (১)

$= 5\{e^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\,(e^x)\}$ (১)

$\therefore \frac{d}{dx}(5e^x \ln x) = 5e^x(\frac{1}{x} + \ln x)$

6.(a) $\frac{d}{dx}(\frac{x^n + \tan x}{e^x - \cot x}) =$

$\frac{1}{(e^x - \cot x)^2}\{(e^x - \cot x)\frac{d}{dx}(x^n + \tan x)$

$-(x^n + \tan x)\frac{d}{dx}(e^x - \cot x)\}$ (১)

$= \frac{1}{(e^x - \cot x)^2}\{(e^x - \cot x)(nx^{n-1} + \sec^2 x)$

$-(x^n + \tan x)(e^x + \operatorname{cosec}^2 x)\}$ (১) + (১)

6(b) $\frac{d}{dx}(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x})$

$= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1-\cos x) - (1-\cos x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$ (১)

$= \frac{(1+\cos x)(\sin x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{\sin x(1 + \cos x + 1 - \cos x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (১)

6(c) $\frac{x\sin x}{x + \cos x}$ [রা.'০০]

$\frac{d}{dx}(\frac{x\sin x}{x + \cos x}) = \frac{1}{(x+\cos x)^2}[(x + \cos x)$

$\frac{d}{dx}(x\sin x) - x\sin x \frac{d}{dx}(x + \cos x)]$ (১)

$= \frac{1}{(x+\cos x)^2}[(x + \cos x)(x\cos x + \sin x.1)$

$- x\sin x(1 - \sin x)]$ (১) +(১)

$= \frac{1}{(x+\cos x)^2}[(x^2\cos x + x\sin x + x\cos^2 x +$

$\cos x\sin x - x\sin x + x\sin^2 x]$

$= \frac{x(\sin^2 x+\cos^2 x)+x^2\cos x+\cos x\sin x}{(x+\cos x)^2}$

$= \frac{x+(x^2+\sin x)\cos x}{(x+\cos x)^2}$ (Ans.) (১)

6.(d) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$= 1-\cos x$ (১)

$\therefore \frac{d}{dx}(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}) = \sin x$ (১)

6(e) $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ [য.'০৯]

$\frac{d}{dx}(\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}) =$

$\frac{(1+\sin^2 x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$ (১)

$= \frac{(1+\sin^2 x)(-\sin x) - \cos x(2\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2}$ (২)

$= \frac{-\sin x(1+\sin^2 x+2\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$

$= \frac{-\sin x(2+\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$ (১)

7. **(a)** ধরি, $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$

$\therefore \frac{dy}{dx} = n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})$ (১)

$= n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\{1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x\}$ (২)

$= n(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \frac{d}{dx}((x+\sqrt{1+x^2})^n) = \frac{n(x+\sqrt{1+x^2})^n}{\sqrt{1+x^2}}$ (১)

7(b) $\frac{d}{dx}\{\text{cosec}(e^{x^2})\}$

$= \frac{d\{\text{cosec}(e^{x^2})\}}{d(e^{x^2})}\frac{d(e^{x^2})}{d(x^2)}\frac{d(x^2)}{dx}$ (১)

$= -\text{cosec}(e^{x^2})\cot(e^{x^2}).(e^{x^2}).2x$ (২)

[সি.'০১]

$= -2x\, e^{x^2}\,\text{cosec}(e^{x^2})\cot(e^{x^2})$ (Ans.)

8(a) $\log_x 5$ [প্র.ভ.প. '৮৮]

$\log_x 5 = \log_x e\times\log_e 5 = ln\, 5\frac{1}{\log_e x}$ (১)

$= ln\, 5\frac{1}{\ln x} = ln\, 5\,(ln\, x)^{-1}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log_x a) = ln5\,\{-1(ln\, x)^{-2}\frac{d}{dx}(ln\, x)\}$

$= -ln\, 5\,\frac{1}{(\ln x)^2}.\frac{1}{x} = -\frac{\ln 5}{x(\ln x)^2}$ (১)

8(b) $\ln(\sin e^{x^2})$ [প্র.ভ.প. '৯৫]

$\frac{d}{dx}\{\ln(\sin e^{x^2})\}$

$= \frac{1}{\sin(e^{x^2})}\{\cos(e^{x^2})\}e^{x^2}.2x$ (২)

$= 2x e^{x^2}\cot(e^{x^2})$

8(c) $\frac{d}{dx}\{ln(\tan\frac{x}{2})\}$

$= \frac{d\{\ln(\tan\frac{x}{2})\}}{d(\tan\frac{x}{2})}\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{d(\frac{x}{2})}\frac{d(\frac{x}{2})}{dx}$ (১)

$= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\frac{1}{\cos^2(x/2)}$ (১)

$= \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x} = \text{cosec}x$ (১)

9.(a) $\frac{d}{dx}\{ln(ax^2+bx+c)\}$

$= \frac{1}{ax^2+bx+c}\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)$ (১)

$= \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ (Ans.) (১)

9(b) $\frac{d}{dx}\{ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\}$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$ (১)

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}(2x)\}$ (২)

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\{\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\}$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ (Ans.) (১)

9.(c) $ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$

$= ln(\sqrt{x+1}-1) - ln(\sqrt{x+1}+1)$ (১)

$\therefore \frac{d}{dx}\{ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (২)

$= \frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$= \frac{2}{2\sqrt{x+1}(x+1-1)} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ (Ans.) (১)

10.(a) $\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = \left(\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\right)^2$ (১)

$= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2 = 2\tan x\frac{d}{dx}(\tan x)$ (১)

$= 2\tan x . \sec^2 x$ (১)

10. (b) $[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^n$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$\frac{d}{dx}[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^n = n[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^{n-1}$

$\frac{\sqrt{1-x^2}.1 - x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{(\sqrt{1-x^2})^2}$ (৩)

$= n[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^{n-1}\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$= n[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]^{n-1}\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ (১)

10(c) $\frac{d}{dx}\{x\, lnx\, ln(lnx)\}$

$= x\, lnx\frac{d}{dx}\{ln(lnx)\} + x\, ln(lnx)\frac{d}{dx}(lnx)$

$+ lnx\, ln(lnx)\frac{d}{dx}(x)$ (১)

$= x\, lnx\frac{1}{ln\,x}.\frac{1}{x} + x\, ln(lnx)\frac{1}{x} +$

$lnx\, ln(lnx) .1$ (২)

$= 1 + ln(lnx)(1+lnx)$ (১)

10(d) $\frac{d}{dx}(\sin x\ \sin 2x\ \sin 3x)$

$= \sin x\ \sin 2x\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin x\ \sin 3x$

$\frac{d}{dx}(\sin 2x) + \sin 2x\ \sin 3x\frac{d}{dx}(\sin x)$ (১)

$= \sin x\ \sin 2x\ (\cos 3x).3 + \sin x \sin 3x\ (\cos$

$2x).2 + \sin 2x\ \sin 3x\ (\cos x).\ 1$ (২)

$= 3\sin x \sin 2x \cos 3x + 2\sin x \sin 3x \cos 2x$

$+ \sin 2x\ \sin 3x \cos x$ (১)

11(a) $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$

$= e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + e^{-\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(-\sqrt{x})$ (১)

$= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (১)

11(b) $\frac{d}{dx}(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}})$

$= e^{-x} \frac{d}{dx}(-x) + e^{\frac{1}{x}} \frac{d}{dx}(\frac{1}{x})$ (১)

$= -e^{-x}.1 + e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}) = -(e^{-x} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}})$(১)

12(a) ধরি , $y = ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$= \frac{1}{2}\{\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)\}$ (১)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\{\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{(-\cos x)}{1-\sin x}\}$ (২)

$= \frac{1}{2}\frac{\cos x(1-\sin x+1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$= \frac{1}{2}\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$ (১)

12(b) ধরি, $y = \cos\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}$ [প্র.ভ.প. ৮৯]

$\frac{dy}{dx} = -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{d}{dx}(\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x})$ (১)

$= -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{d}{dx}(\frac{1-x^2}{1+x^2})$

$= -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$ (২)

$= -\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}\frac{2x(-1-x^2-1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\sin\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x}$ (১)

12(c) $e^{3x}\cos x^\circ = e^{3x}\cos\frac{\pi x}{180}$ (১)

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{3x}\cos x^\circ) = e^{3x}.(-\sin\frac{\pi x}{180})\frac{d}{dx}(\frac{\pi x}{180})$

$+ \cos\frac{\pi x}{180}.e^{3x}\frac{d}{dx}(3x)$ (২)

$= -e^{3x}.\sin x^\circ.(\frac{\pi}{180}) + \cos x^\circ.e^{3x}.3$

$= e^{3x}(3\cos x^\circ - \frac{\pi}{180}\sin x^\circ)$ (১)

13(a) $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(e^{\tan^{-1}x})\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(e^{\tan^{-1}x})^2}}\frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1}x})$ (১)

$= \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\tan^{-1}x}}}e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}$ (১)

$= \frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)\sqrt{1-e^{2\tan^{-1}x}}}$

13(b) $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})\}$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x})^2}}$

$\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}$ (৩)

$= -\frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}$

$\frac{(-b^2+a^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$

$= \frac{-(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{b^2+a^2\cos^2 x-a^2-b^2\cos^2 x}}$

$= \frac{(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}}$

$= \frac{(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}}$

$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$ (১)

13(c) $\sin^{-1}(\frac{2x^{-1}}{x+x^{-1}}) = \sin^{-1}(\frac{2/x}{x+1/x})$

$= \sin^{-1}(\frac{2}{x^2+1})$ (১)

$\therefore \frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\frac{2x^{-1}}{x+x^{-1}})\}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{(x^2+1)^2}}} 2\frac{d}{dx}(x^2+1)^{-1}$ (১)

$= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1-4}} 2(-1)(x^2+1)^{-2}.2x$ (১)

$= \frac{-4x(x^2+1)^{-1}}{\sqrt{x^4+2x^2-3}} = \frac{-4x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2-3}}$ (১)

13(d) $\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}x \ \ln(\sin^{-1}x)\}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$= \cos^{-1}x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin^{-1}x)\} +$

$\ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$ (১)

$= \cos^{-1}x\frac{1}{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\ln(\sin^{-1}x)}{-\sqrt{1-x^2}}$ (২)

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\{\frac{\cos^{-1}x}{\sin^{-1}x} - \ln(\sin^{-1}x)\}$ (১)

13(e) $\cot^{-1}(\frac{x^2}{e^x}) + \cot^{-1}(\frac{e^x}{x^2})$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= \tan^{-1}(\frac{e^x}{x^2}) + \tan^{-1}(\frac{x^2}{e^x})$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}}{1-\frac{e^x}{x^2}.\frac{x^2}{e^x}} = \tan^{-1}\frac{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}}{1-1}$ (১)

$= \cot^{-1}\frac{1-1}{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}} = \cot^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\cot^{-1}(\frac{x^2}{e^x}) + \cot^{-1}(\frac{e^x}{x^2})\} = \frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}) = 0$ (১)

13(f) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ax}}$ [প্র.ভ.প. '১৬]

$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{x}\sqrt{a}} = \tan^{-1}\sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{a}$ (১)

$\therefore \frac{d}{dx}\{\tan^{-1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ax}}\}$

$= \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{a})$ (১)

$= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + 0$ (১)

$= \frac{1}{1+x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ (১)

14(a) ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ এবং

$x^2 = \cos\theta$. তাহলে, $\theta = \cos^{-1}x^2$ এবং (১)

$y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}$

$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2\cos^2(\theta/2)}-\sqrt{2\sin^2(\theta/2)}}{\sqrt{2\cos^2(\theta/2)}+\sqrt{2\sin^2(\theta/2)}}$ (১)

$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}\{\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)\}}{\sqrt{2}\{\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)\}}$

$= \tan^{-1}\frac{\cos(\theta/2)\{1-\tan(\theta/2)\}}{\cos(\theta/2)\{1+\tan(\theta/2)\}}$

$= \tan^{-1}\frac{1-\tan(\theta/2)}{1+\tan(\theta/2)} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$ (১)

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2}\{-\frac{1}{1+(x^2)^2}\}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (১)

14. (b) ধরি, $y = \sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ এবং $x = \cos\Theta$

তাহলে, $\theta = \cos^{-1}x$ এবং

$y = \sec^{-1}\frac{1}{2\cos^2\theta-1} = \sec^{-1}\frac{1}{\cos 2\theta}$ (১)

$= \sec^{-1}\sec 2\theta = 2\Theta = 2\cos^{-1}x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2\cos^{-1}x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.) (১)

14(c) $\dfrac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\}$ [সি.'০১]

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$ (১)

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}\dfrac{1}{1+x^2}$ (১)

$= \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$ (Ans.)

14(d) $\tan^{-1}\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ [প্র.ভ.প. '০৫]

$= \tan^{-1}\dfrac{\cos x(1-\tan x)}{\cos x(1+\tan x)} = \tan^{-1}\dfrac{1-\tan x}{1+1.\tan x}$

$= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}(\tan x) = \dfrac{\pi}{4} - x$ (১)

$\therefore \dfrac{d}{dx}\{\tan^{-1}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{\pi}{4}-x)$

$= 0 - 1 = -1$ (Ans.) (১)

$\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

15(a) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1+\cos\theta)$ [প্র.ভ.প. '০৬]

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\{a(\theta-\sin\theta)\} = a(1-\cos\theta)$ (১)

$\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\{a(1+\cos\theta)\} = a(0-\sin\theta)$ (১)

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$ (১)

$= \dfrac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\dfrac{\theta}{2}$ (১)

15(b) $\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{\ln x} = (\sin x)^{\ln x}$

$= [\ln x\dfrac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x)\dfrac{d}{dx}(\ln x)]$ (১)

$= (\sin x)^{\ln x}[\ln x\dfrac{1}{\sin x}.\cos x + \ln(\sin x).\dfrac{1}{x}]$

$= (\sin x)^{\ln x}[\ln x.\cot x + \dfrac{\ln(\sin x)}{x}]$ (১)

15(c) $\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{\tan x} = (\sin x)^{\tan x}$

$[\tan x\dfrac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x)\dfrac{d}{dx}(\tan x)]$ (১)

$= (\sin x)^{\tan x}[\dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x).\sec^2 x]$ (১)

$= (\sin x)^{\tan x}[1 + \sec^2 x.\ln(\sin x)]$

15(d) $\dfrac{d}{dx}(\tan x)^{\ln x} = (\tan x)^{\ln x}$

$[\ln x\dfrac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x)\dfrac{d}{dx}(\ln x)]$ (১)

$= (\tan x)^{\ln x}[\ln x\dfrac{1}{\tan x}\sec^2 x + \ln(\tan x).\dfrac{1}{x}]$ (২)

$= (\tan x)^{\ln x}[\ln x\dfrac{\cos x}{\sin x}.\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\ln(\tan x)}{x}]$

$= (\tan x)^{\ln x}[\ln x\dfrac{2}{2\sin x\cos x} + \dfrac{\ln(\tan x)}{x}]$

$= (\tan x)^{\ln x}[2\ln x.\operatorname{cosec}2x + \dfrac{\ln(\tan x)}{x}]$ (১)

15(e) $\dfrac{d}{dx}(\ln x)^{\ln x} = (\ln x)^{\ln x}$

$[\ln x\dfrac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x)\dfrac{d}{dx}(\ln x)]$ (১)

$= (\ln x)^{\ln x}[\ln x\dfrac{1}{\ln x}.\dfrac{1}{x} + \ln(\ln x).\dfrac{1}{x}]$

$= \dfrac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}[1 + \ln(\ln x)]$ (১)

15.(f) $\dfrac{d}{dx}(\ln x)^{\tan^{-1}x} = (\ln x)^{\tan^{-1}x}$

$[\tan^{-1}x\dfrac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x)\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)]$ (১)

$= (\ln x)^{\tan^{-1}x}[\tan^{-1}x\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}+\frac{\ln(\ln x)}{1+x^2}]$ (১)

$= (\ln x)^{\tan^{-1}x}[\frac{\tan^{-1}x}{x\ln x}+\frac{\ln(\ln x)}{1+x^2}]$

(g) $\frac{d}{dx}(\tan x)^{\cos^{-1}x} = (\tan x)^{\cos^{-1}x}$

$[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\}+\ln(\tan x)\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)]$ (১)

$= (\tan x)^{\cos^{-1}x}[\frac{\sec^2 x.\cos^{-1}x}{\tan x}-\frac{\ln(\tan x)}{\sqrt{1-x^2}}]$ (১)

(h) $(\sin^{-1}x)^{\ln x}$ [প্র.ভ.প. '৯৬]

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^{\ln x} = (\sin^{-1}x)^{\ln x}$

$[\ln x\frac{d}{dx}\{\ln(\sin^{-1}x)\}+\ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(\ln x)]$ (১)

$=(\sin^{-1}x)^{\ln x}[\frac{\ln x}{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\ln(\sin^{-1}x)}{x}]$ (১)

$= (\sin^{-1}x)^{\ln x}[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}+\frac{\ln(\sin^{-1}x)}{x}]$

16.(a) $\frac{d}{dx}(x^x+x^{1/x}) = \frac{d}{dx}(x^x)+\frac{d}{dx}(x^{1/x})$ (১)

$= x^x\{x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)\}+$

$x^{1/x}\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})\}$ (১)

$=x^x\{x.\frac{1}{x}+\ln x.1\}+ x^{1/x}\{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}+\ln x.(-\frac{1}{x^2})\}$ (১)

$= x^x(1+\ln x) + x^{1/x}.\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$=x^x(1+\ln x) + x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ (১)

16. (b) $\frac{d}{dx}(x^x . x^{\cos^{-1}x})$.

$= x^x\frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1}x}) + x^{\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}(x^x)$ (১)

$= x^x.x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\ln x)$

$+\ln x\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)]+x^{\cos^{-1}x}.x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x)$

$+\ln x\frac{d}{dx}(x)]$ (১)

$= x^x.x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x}+\frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}]$

$+x^{\cos^{-1}x}.x^x[x.\frac{1}{x}+\ln x.1]$ (১)

$= x^x.x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x}-\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+1+ln x]$ (১)

17(a) $x = y.\ln(xy) \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln x+\ln y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{y.1-x.\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ (২)

$\Rightarrow xy-x^2\frac{dy}{dx} = y^2+xy\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow y(x-y) = x(x+y)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ (১)

17(b) $y = \cot(x+y) \Rightarrow \cot^{-1}y = x+y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$-\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 1+\frac{dy}{dx}$ (১)

$\Rightarrow (-\frac{1}{1+y^2}-1)\frac{dy}{dx} = 1$

$\Rightarrow -\frac{1+1+y^2}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{2+y^2}$ (Ans.) (১)

17(c) $y = \tan(x+y)$ [প্র.ভ.প. '৮৯]

$\Rightarrow \tan^{-1}y = x+y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \quad (১)$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{1+y^2}-1)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1-1-y^2}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1 \;\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1+y^2}{y^2} \quad (১)$$

17. (d) $x^2+y^2=\sin(xy)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=\cos(xy)\,(x\frac{dy}{dx}+y) \quad (১)$$

$$\Rightarrow \{2y-x\cos(xy)\}\frac{dy}{dx}=y\cos(xy)-2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\cos(xy)-2x}{2y-x\cos(xy)} \quad (১)$$

(e) $\cos y=x\cos(a+y)\Rightarrow x=\frac{\cos y}{\cos(a+y)}$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1=\frac{\cos(a+y)(-\sin y)\frac{dy}{dx}-\cos y\{-\sin(a+y)\}\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)} \quad (২)$$

$$1=\frac{\{\sin(a+y)\cos y-\cos(a+y)\sin y\}\frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$\cos^2(a+y)=\sin(a+y-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a} \text{ (Ans.)} \quad (১)$$

17(f) $e^{2x}+5y^3=3\cos(xy)$ **[প্র.ভ.প. '১৫]**

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$e^{2x}.2+15y^2\frac{dy}{dx}=3\{-\sin(xy)\}\frac{d}{dx}(xy) \quad (২)$$

$$\Rightarrow 2e^{2x}+15y^2\frac{dy}{dx}=-3\sin(xy)(x\frac{dy}{dx}+y) \quad (১)$$

$$\Rightarrow \{15y^2+3x\sin(xy)\}\frac{dy}{dx}=-2e^{2x}+3y\sin(xy)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2e^{2x}+3y\sin(xy)}{15y^2+3x\sin(xy)} \quad (১)$$

18(a) $y=x^y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=x^y[y\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{dy}{dx}] \quad (১)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y[\frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}] \quad [\because x^y=y]$$

$$\Rightarrow (1-y\ln x)\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x(1-y\ln x)} \text{ (Ans.)} \quad (১)$$

18(b) $x^y y^x=1$ **[প্র.ভ.প. '০২]**

$$\therefore y\ln x+x\ln y=0 \quad (১)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y\frac{1}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}+x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y=0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow y^2+xy\ln x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{dy}{dx}+xy\ln y=0$$

$$\Rightarrow (xy\ln x+x^2)\frac{dy}{dx}=-(xy\ln y+y^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y(x\ln y+y)}{x(y\ln x+x)} \quad (১)$$

18(c) $(\sin x)^{\cos y}+(\cos x)^{\sin y}=a$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(\sin x)^{\cos y}[\cos y\frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\}+\ln(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos y)]+(\cos x)^{\sin y}[\sin y\frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\}+\ln(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin y)]=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow (\sin x)^{\cos y}[\cos y\cot x+\ln(\sin x)(-\sin y)\frac{dy}{dx}]+(\cos x)^{\sin y}[\sin y(-\tan x)+\ln(\cos x).\cos y\frac{dy}{dx}]=0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow \{(\cos x)^{\sin y}\ln(\cos x).\cos y$$

$-(\sin x)^{\cos y}\ \ln(\sin x)\ \sin y\ \}\dfrac{dy}{dx}=(\cos x)^{\sin y}$

$\sin y\tan x-(\sin x)^{\cos y}\ \cos y\cot x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=$

$$\frac{(\cos x)^{\sin y}\sin y\tan x-(\sin x)^{\cos y}\cos y\cot x}{(\cos x)^{\sin y}\ln(\cos x)\cos y-(\sin x)^{\cos y}\ln(\sin x)\sin y} \quad (১)$$

19. $y=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **হলে, দেখাও যে,**

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

প্রমাণ : ধরি, $x=\cos\theta\Rightarrow\theta=\cos^{-1}x$ (১)

$\therefore y=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}}$ (১)

$=\tan^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x$ (১)

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (২)

20. $x=1$ বিন্দুতে $y=x^2$ ফাংশনের অন্তরক আকার সমীকরণ থেকে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন $dx=\delta x=2$.

সমাধান : ধরি, $f(x)=y=x^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=2x\Rightarrow dy=2x\ dx$ (১)

$\Rightarrow dy=2\times1\times2$, $[\because x=1, dx=2]$

$\Rightarrow dy=4$ (১)

আবার, $\delta y=f(x+\delta x)-f(x)$

$=f(1+2)-f(1)=f(3)-f(1)$

$=3^2-1^2=9-1=8.$ (১)

21. $x=3$ বিন্দুতে $y=\dfrac{x^2}{3}+1$ ফাংশনের অন্তরক আকার সমীকরণ থেকে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন $dx=\delta x=3$.

সমাধান : ধরি, $f(x)=y=\dfrac{x^2}{3}+1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}x\Rightarrow dy=\dfrac{2}{3}x\ dx$ (১)

$\Rightarrow dy=\dfrac{2}{3}\times3\times3$, $[\because x=3, dx=3]$ (১)

$\therefore dy=6$

আবার, $\delta y=f(x+\delta x)-f(x)$

$=f(3+3)-f(3)=f(6)-f(3)$ (১)

$=(\dfrac{6^2}{3}+1)-(\dfrac{3^2}{3}+1)$

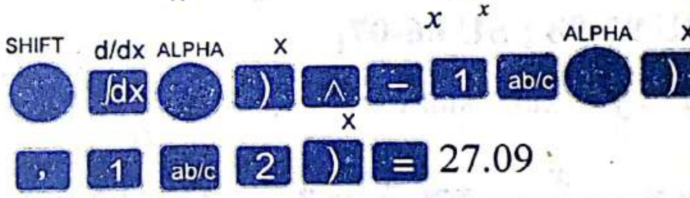
$=12-3=9$ (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $y=x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান- **[BUET 07-08]**

$Sol^n: \dfrac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{x}}[-\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}+\ln x(+\dfrac{1}{x^2})]$

$=x^{-\frac{1}{x}}.\dfrac{1}{x^2}(\ln x-1)=\dfrac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x-1)$



27.09

. Option গুলোতে x = ½ বসালে $\dfrac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x-1)$

$=27.09$ হয়।

2. $\dfrac{d}{dx}(\log_x e)=?$ **[DU 08-09]**

$Sol^n: \dfrac{d}{dx}(\log_x e)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{\ln x})=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

3. $\dfrac{d}{dx}\{\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=?$ **[DU 07-08]**

$Sol^n: \dfrac{d}{dx}\{\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}.(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4. $y = \sqrt{\sec x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[DU 00-01]**

$Sol^n: \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec x}}.\sec x \tan x$

$= \frac{\sqrt{\sec x}\tan x}{2} = \frac{y}{2}\tan x$

5. $y = \cos\sqrt{x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[DU 03-04]**

$Sol^n: \frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

6. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ হলে, $\frac{df}{dx} = ?$ **[DU 01-02]**

$Sol^n: \frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

7. $y = \log_e(2x)^{1/3}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[DU 98-99]**

$Sol^n: \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\{\log_e(2x)\} = \frac{1}{3.2x}(2) = \frac{1}{3x}$

8. $y = \sin^{-1}\sin(x+1)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[DU 97-98 ; SU 06-07]

$Sol^n: y = \sin^{-1}\sin(x+1) = x+1 \therefore \frac{dy}{dx} = 1$

9. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[NU 07-08]**

$$Sol^n: \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+1}.1 - x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

10. $\frac{d}{dx}(a^x) = ?$ **[KU,RU07-08;IU 02-03]**

$Sol^n: \frac{d}{dx}(a^x) = a^x lna$

11. $\frac{d}{dx}(\log_a m^2) = ?$ **[CU 07-08]**

$Sol^n: \frac{d}{dx}(\log_a m^2) = 0$

12. $x = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d}{dx}(x^2e^{2x}\log_e 2x) = ?$

[RU 07-08]

$Sol^n: \frac{d}{dx}(x^2e^{2x}\log_e 2x)$

$= x^2e^{2x}.\frac{1}{2x}(2) + x^2(e^{2x}.2)\log_e 2x$

$+ (2x).e^{2x}\log_e 2x$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d}{dx}(x^2e^{2x}\log_e 2x)$

$= \frac{1}{4}e.2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}e$

13. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\infty}}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[SU 06-07, 05-06; RU 03-04; IU 06-07]

$Sol^n: y = \sqrt{x+y} \Rightarrow y^2 = x+y$

$\therefore\ 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

14. $y = \cos^{-1}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[RU 06-07]

$Sol^n: y = \cos^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1} = -2\tan^{-1}x$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

15. $y = (\log_a x)(\log x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[RU 05-06]**

$Sol^n: \frac{dy}{dx} = (\log_a x)\frac{1}{x\ln 10} + \frac{1}{x\ln a}(\log x)$

ie. $\frac{dy}{dx} = (\log_a x)\frac{\log_a e}{x} + \frac{\log_{10} a}{x}(\log x)$

16. $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ **[IU 05-06; CU 02-03]**

$Sol^n: y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}x$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

17. $\tan y = \dfrac{2t}{1-t^2}, \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = ?$ **[SU 04-05; JU 06-07]**

Sol^n : $y = \tan^{-1}\dfrac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1} t$,

$x = \sin^{-1}\dfrac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1} t \therefore y = x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1$

18. $x^y = e^{x-y}$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = ?$ **[SU 06-07]**

Sol^n : $y\ln x = x - y \Rightarrow y = \dfrac{x}{1+\ln x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\ln x).1 - x.\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$$

19. $y = f(x)$ হলে, $\dfrac{d}{dx}(e^y) = ?$ **[CU 07-08]**

Sol^n : $\dfrac{d}{dx}(e^y) = e^y\dfrac{dy}{dx}$

20. $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$ হলে, $\dfrac{dy}{dx} = ?$ **[DU 07-08]**

Sol^n : $2x + 3(x\dfrac{dy}{dx} + y.1) + 10y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (3x+10y)\dfrac{dy}{dx} = -(2x+3y)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+3y}{3x+10y}$

21. $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ হলে, $3(y^2-1)\dfrac{dy}{dx} = ?$ **[DU 04-05]**

Sol^n : $y^3 = x + x^{-1} + 3.x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})$

$\Rightarrow y^3 = x + \dfrac{1}{x} + 3y$

$\therefore 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + 3\dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 3(y^2-1)\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ (Ans.)

প্রশ্নমালা IX I

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

1. $D^n(x^n) = n!$ **2.** $D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax}$

3. $D^n\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

4. $D^n\{\ln(ax+b)\} = \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$

5. $D^n\{\sin(ax+b)\} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+ax+b\right)$

6. $D^n(\cos ax) = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}+ax\right)$

7. $D^n[e^{ax}\cos(bx+c)] = (a^2+b^2)^{n/2} e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

1 $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$ হলে, y_2 নির্ণয় কর এবং $x = 4$ হলে, y_2 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 4\times\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 0 + 2\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 6x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = 6\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = 3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$x = 4$ হলে, $y_2 = 3.4^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.4^{-\frac{3}{2}}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{8} = \frac{24-1}{16} = \frac{23}{16}$$

2. $y = \sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 - y = 0$ [রা.'০৪; ব.'০৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin x$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos x$, $y_2 = -\sin x$, $y_3 = -\cos x$,

$y_4 = \sin x = y$

$\therefore\ y_4 - y = 0$ (Showed)

3.(a) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ [ঢা.'০৭; য.'০৭; কু.'০৮; প্র.ভ.প.'০৪]

প্রমাণঃ এখানে, $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}y = x+1$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y.\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

উভয় পক্ষকে $2\sqrt{x}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x} \quad \text{(Showed)}$$

3(b) $y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ [য.'০৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1-x^2} = -xy$$

$$\therefore\ (1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad \text{(Showed)}$$

3(c) $y = px + \frac{q}{x}$ হলে, দেখাও যে, $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2p$ [কু.'০২; চ.'০৫; য.,ঢা.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = px + \frac{q}{x} \Rightarrow xy = px^2 + q$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x\frac{dy}{dx} + y.1 = p(2x) + 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 2px$$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.1+\frac{dy}{dx}=2p$$

$$\therefore\ x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=2p \text{ (Showed)}$$

4.(a) $y=ax^2+\frac{b}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x^2y_2-xy_1-2y=0$

[ব. '০২; ঢা. '০৬; কু. '০৯; সি.'১৩; য.,দি.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=ax^2+\frac{b}{\sqrt{x}}=ax^2+bx^{-\frac{1}{2}}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1=2ax-\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}-1}=2ax-\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$y_2=2a+\frac{3}{4}bx^{-\frac{3}{2}-1}=2a+\frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$$

এখন, $2x^2y_2-xy_1-2y=4ax^2+\frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$

$$-(2ax^2-\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}})-(2ax^2+2bx^{-\frac{1}{2}})$$

$$=4ax^2+\frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}-2ax^2+\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$-2ax^2-2bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$=4ax^2-4ax^2+2bx^{-\frac{1}{2}}-2bx^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$\therefore\ 2x^2y_2-xy_1-2y=0 \text{ (Showed)}$$

4(b) $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$ হলে, দেখাও যে, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y$ [রা.'০৬; য.'১২; কু. '০৬; সি. '০৮, '১০; মা.'০৯; চ.'১১,'১৩; দি.'১১; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2px-\frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=2p+\frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$$

এখন, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=4px^2+\frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$

$$-(2px^2-\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}})$$

$$=4px^2+\frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}-2px^2+\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2px^2+2qx^{-\frac{1}{2}}=2(px^2+qx^{-\frac{1}{2}})=2y$$

$$\therefore\ 2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2y \quad \text{(Showed)}$$

5.(a) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ হলে, দেখাও যে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=y^2$ [চ.'০৩]

প্রমাণঃ $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Rightarrow 2y=e^x+e^{-x}\cdots(1)$

$$\therefore\ 2\frac{dy}{dx}=e^x-e^{-x}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(e^x-e^{-x})^2 \quad [\text{ বর্গ করে।}]$$

$$=(e^x+e^{-x})^2-4e^xe^{-x}$$

$$=(2y)^2-4 \quad [\because e^x+e^{-x}=2y]$$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=y^2 \quad \text{(Showed)}$$

5(b) $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ হলে, দেখাও যে, $y_2-m^2y=0$ [য.'০৭; ব.'০৮,'১৩; দি.'১০; সি.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$

$$\therefore\ y_1=\frac{d}{dx}(Ae^{mx}+Be^{-mx})=Ame^{mx}-Bme^{-mx}$$

$$y_2=Am^2e^{mx}+Bm^2e^{-mx}$$

$$=m^2(Ae^{mx}+Be^{-mx})$$

$$=m^2y \quad [\because y=Ae^{mx}+Be^{-mx}]$$

$$\therefore\ y_2-m^2y=0 \text{ (Showed)}$$

6(a) $y=\sec x$ হলে, দেখাও যে, $y_2=y(2y^2-1)$ [রা. '০৭; চ. '০৬, ০৮,'১৪; সি. '০৭; ব. '০৬; য. '০৮, '১১; কু.'১০; মা.'১২,'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sec x$

$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$y_2 = \sec x.\sec^2 x + \tan x.\sec x \tan x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$

$= \sec x(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$

$\therefore y_2 = y(2y^2 - 1)$ $[\because y = \sec x]$

6(b) $y = \tan x + \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

[রা. '১০,'১৪; কু. '০৩; সি.'১৩; ব.,ঢা.'১৪]

প্রমাণ : এখানে, $y = \tan x + \sec x \cdots (1)$

(1) -এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{1-\sin x} \cdots (2)$

(2) -এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1-\sin x)^2}\frac{d}{dx}(1-\sin x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x(\cos^2 x + 2\sin x + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ (Showed)

6(c) $y = \sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0$

[য.'০৫; সি.'০৬,'১১; কু.'০৭; ব.'০৯]

প্রমাণ : এখানে, $y = \sin(\sin x) \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos(\sin x).\cos x \cdots (2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 = \cos(\sin x).(-\sin x) +$

$\cos x.\{-\sin(\sin x)\}.\cos x$

$= -\sin x\cos(\sin x) - \cos^2 x.\sin(\sin x)$

$= -\sin x.\frac{y_1}{\cos x} - \cos^2 x.y$ [(1) ও (2) হতে।]

$= -y_1 \tan x - y\cos^2 x$

$\therefore y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0$ (Showed)

7. (a) $y = (p+qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ [য. '০২; ব'০৯; দি.'১৩]

প্রমাণ : এখানে, $y = (p+qx)e^{-2x} \ldots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = (p+qx).e^{-2x}(-2) + e^{-2x}(0+q)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y + qe^{-2x}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2y = qe^{-2x} \ldots \ldots (2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = -2qe^{-2x}$

$= -2(\frac{dy}{dx} + 2y)$ [(2) দ্বারা।]

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ (Showed)

7(b) $y = (e^x + e^{-x})\sin x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_4 + 4y = 0$ [ঢা.'০৪; রা.'০৬; দি.'১২]

প্রমাণ : এখানে, $y = (e^x + e^{-x})\sin x \cdots (1)$

$\therefore y_1 = (e^x + e^{-x})\cos x + (e^x - e^{-x})\sin x$

$y_2 = (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x})\cos x$

$+ (e^x - e^{-x})\cos x + (e^x + e^{-x})\sin x$

$= 2(e^x - e^{-x})\cos x$

$y_3 = 2\{(e^x + e^{-x})\cos x - (e^x - e^{-x})\sin x\}$

$y_4 = 2[\{(e^x - e^{-x})\cos x - (e^x + e^{-x})\sin x\}$

$-\{(e^x + e^{-x})\sin x + (e^x - e^{-x})\cos x\}]$

$= 2\{(e^x - e^{-x})\cos x - (e^x + e^{-x})\sin x$

$-(e^x + e^{-x})\sin x - (e^x - e^{-x})\cos x\}$

$= 2\{-2(e^x + e^{-x})\sin x\}$

$= -4y$ [(1) দ্বারা।]

$\therefore\ y_4 + 4y = 0$ (Showed)

7(c) $y = e^x \cos x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ [দি.'১০;চ.'১২;ব.'১৩; মা.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^x \cos x \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$

$\Rightarrow y_1 = y - e^x \sin x$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow y_1 - y = -e^x \sin x \cdots(2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - y_1 = -e^x \sin x - e^x \cos x$

$= y_1 - y - y$ [(1) ও (2) দ্বারা।]

$\therefore\ y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ (Showed)

7(d) $y = e^{ax} \sin bx$ হলে, দেখাও যে,

$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$ [সি.'০২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{ax} \sin bx \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^{ax}.\cos bx.b + \sin bx\,.\,e^{ax}.a$

$= b\,e^{ax}\cos bx + ay$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow y_1 - ay = b\,e^{ax}\cos bx \cdots\cdots(2)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_2 - a\,y_1 = b\{ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx\}$

$\Rightarrow y_2 - a\,y_1 = a(be^{ax}\cos bx) - b^2 e^{ax}\sin bx$

$= a(y_1 - ay) - b^2 y$ [(1) ও (2) দ্বারা।]

$\therefore\ y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$

8.(a) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ হলে, দেখাও যে, $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ [চ.'০৭'; ঢা.'০৯; রা.'১৩;সি.'১৪]

প্রমাণ ঃ $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x) \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = a\{-\sin(\ln x).\frac{1}{x}\} + b\cos(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$xy_2 + y_1.1 = -a\cos(\ln x).\frac{1}{x} - b\sin(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\}$

$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -y$ [(1) দ্বারা।]

$\therefore\ x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ (Showed)

8(b) $y = x^2 \ln(x)$ হলে দেখাও যে, $y_3 x = 2$ [প্র.ভ.প.'০৬]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = x^2 \ln(x)$

$\therefore\ y_1 = x^2\frac{1}{x} + \ln(x).2x = x + 2x\ln(x)$

$y_2 = 1 + 2\{x\frac{1}{x} + \ln(x).1\} = 1 + 2 + 2\ln(x)$

$y_3 = 0 + 2.\frac{1}{x}\ \therefore\ y_3 x = 2$ (Showed)

8(c) $y = \ln(\sin x)$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ [চ.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \ln(\sin x)$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} = \frac{1}{\sin x}(\cos x)$

$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(-\text{cosec}^2 x)$

$= -2\cos ecx\,(-\cos ecx\cot x$

$= 2\cos ec^2 x\cot x = 2\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{\cos x}{\sin x}$

$\therefore\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ (Showed)

9.(a) $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$ [য.'১০;ব.'১০,'১৪;সি.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m \cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})$$

$$= m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$= \frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\ y_1 = my$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1^2 = m^2y^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2).2y_1y_2 + y_1^2(0+2x) = m^2 2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1x = m^2y$

$\therefore\ (1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ (Showed)

9(b) $y = \sqrt{(4+3\sin x)}$ **হলে, দেখাও যে,** $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ **[য.'১৩;কু.'১১,'১৪; চ.'১০; ঢা. '০৮; রা.'১২; সি.'১২;দি.'১১]**

প্রমাণ ঃ $y = \sqrt{(4+3\sin x)} \Rightarrow y^2 = 4+3\sin x$

$\Rightarrow y^2 - 4 = 3\sin x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = 3\cos x$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} = 3(-\sin x)$$

$\Rightarrow 2y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2(\dfrac{dy}{dx})^2 = -(y^2-4)$ [(1) দ্বারা।]

$\therefore\ 2y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2(\dfrac{dy}{dx})^2 + y^2 = 4$

9(c) $y = \ln[x+\sqrt{a^2+x^2}]$ **হলে, দেখাও যে,** $(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0$ **[চ.'১০,'১৪; য.'১৪]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \ln[x+\sqrt{a^2+x^2}] \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}})$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$\Rightarrow y_1\sqrt{a^2+x^2} = 1 \Rightarrow y_1^2(a^2+x^2) = 1$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1^2(0+2x) + (a^2+x^2)\ 2y_1y_2 = 0$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0$ (Showed)

10.(a) $y = e^{a\sin^{-1}x}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

[য.'০৯; ঢা.'১১,'১৪; সি.'০৯; ব.'১১; কু'১২; রা.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{a\sin^{-1}x} \cdots\cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ y_1 = ay$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1^2 = a^2y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\,2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = a^2(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)\ y_2 - xy_1 = a^2y$ (Showed)

10(b) $y = e^{4\sin^{-1}x}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y$ **[চ.'০২]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{4\sin^{-1}x} \ldots\cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{4\sin^{-1}x}.\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\ y_1 = 4y$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1-x^2)\ y_1^2 = 16y^2$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)\,2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = 16(2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y$ (Showed)

10(c) $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ [য.'০৪;কু.'০৬;ব.'০৭; দি.'০৯]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = e^{\tan^{-1}x} \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = e^{\tan^{-1}x}.\dfrac{1}{1+x^2} = y.\dfrac{1}{1+x^2}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ (Showed)

10.(d) $y = \tan^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0$ [রা.'০২;ঢা.'০৫; কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan^{-1}x \cdots\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = 0$

$\therefore (1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0$ (Showed)

10(e) $ln\, y = a\sin^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - x\,y_1 - a^2y = 0$ [ঢা.'০৭]

প্রমাণ ঃ এখানে, $ln\, y = a\sin^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{1}{y}y_1 = a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\; y_1 = ax$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^{\,2} = a^2y^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^{\,2}(-2x) = a^2.2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - x\,y_1 - a^2y = 0$

10(f) $\ln(y) = \tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ [রা.'০৫,'০৮,'১০;য.'১০;কু.'১১; ঢা.,ব.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে, $\ln(y) = \tan^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{1}{y}y_1 = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

10(g) $y = \sin^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ [সি.'০১,'০৫]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \sin^{-1}x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = 1$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^{\,2} = 1$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1(-2x) = 0$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (Showed)

11.(a) $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [কু.'১২; য.'১১; চ.'১২; ঢা.'১৩]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\dfrac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(1) দ্বারা।]

11(b) $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$ [সি.'০৬]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y = \tan(m\tan^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x).\dfrac{m}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m\tan^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1+x^2)y_2 + y_1(2x) = m.2yy_1$

$\therefore (1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$

11(c) $\mathbf{y=\sin(m\sin^{-1}x)}$ **হলে, দেখাও যে, $\mathbf{(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0}$**

[ব.'১১;ঢা.'১০;রা.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sin(m\sin^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = \text{m}\cos(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2(1-y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = m^2(-2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = -m^2y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ (Showed)

11(d) $\mathbf{y=\cos(2\sin^{-1}x)}$ **হলে, দেখাও যে, $\mathbf{(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0}$** [প্র.ভ.প.'০৬]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\cos(2\sin^{-1}x)\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = -\sin(2\sin^{-1}x).\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = -2\sin(2\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\sin^2(2\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\{1-\cos^2(2\sin^{-1}x)\}$

$(1-x^2)y_1^2 = 4(1-y^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4(-2yy_1)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = -4y$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0$ (Showed)

11(e) $\mathbf{y=(\sin^{-1}x)^2}$ **হলে, প্রমাণ কর যে, $\mathbf{(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0}$** [ব.'০৮; রা.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=(\sin^{-1}x)^2\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = 2(\sin^{-1}x).\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = 2(\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4(\sin^{-1}x)^2 = 4y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4y_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (Showed)

11(f) $\mathbf{y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2}$ **হলে, প্রমাণ কর যে, $\mathbf{(1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0}$** [প্র.ভ.প.'০৫]

প্রমাণ ঃ এখানে, $2y=(\sin^{-1}x)^2\cdots(1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y_1 = 2(\sin^{-1}x).\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = (\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = (\sin^{-1}x)^2 = 2y$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 2y_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0$ (Showed)

12(a) $\mathbf{\cos\sqrt{y} = x}$ **হলে, দেখাও যে, $\mathbf{(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0}$** [য.'০৬,'০৮,'১২; চ.'০৬; রা. '০৭,'০৯; সি.'১০; ব.'১০; ঢা.'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে, $\cos\sqrt{y} = x \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$-\sin\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} y_1 = 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{y} = - y_1 \sin\sqrt{y}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$4y = y_1^2 \sin^2\sqrt{y} = y_1^2(1-\cos^2\sqrt{y})$

$\Rightarrow 4y = y_1^2(1-x^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$4y_1 = 2y_1 y_2(1-x^2) + y_1^2(-2x)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$2 = y_2(1-x^2) - xy_1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (Showed)

12(b) $x = \sin\sqrt{y}$ **হলে, দেখাও যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ **[ব.'১২; ঢা. '০৮; কু.'০৮; চ.'১১]**

প্রমাণ ঃ এখানে, $x = \sin\sqrt{y} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\cos\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} y_1 = 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{y} = y_1 \cos\sqrt{y}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$4y = y_1^2 \cos^2\sqrt{y} = y_1^2(1-\sin^2\sqrt{y})$

$\Rightarrow 4y = y_1^2(1-x^2)$ [(1) দ্বারা।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$4y_1 = 2y_1 y_2(1-x^2) + y_1^2(-2x)$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$2 = y_2(1-x^2) - xy_1$

$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ (Showed)

12(c) $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2y_2 + xy_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ **[প্র.ভ.প.'০৪]**

প্রমাণ ঃ $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{x}\,y \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\cos x = \sqrt{x}\, y_1 + y.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow 2\cos x = \frac{2xy_1 + y}{\sqrt{x}}$

$$-2\sin x = \frac{\sqrt{x}(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - (2xy_1 + y)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x}y = \frac{1}{2x\sqrt{x}}[2x(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - 2xy_1 - y]$$

$\Rightarrow -4x^2y = 4x^2y_2 + 6xy_1 - 2xy_1 - y$

$\Rightarrow -4x^2y = 4x^2y_2 + 4xy_1 - y$

$\Rightarrow 4(x^2y_2 + xy_1 + x^2y) = y$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + x^2y = \frac{y}{4}$

$\therefore x^2y_2 + xy_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

13.(a) $x = a(\theta + \sin\theta)$ **ও** $y = a(1-\cos\theta)$ **হলে,** $\frac{\theta}{2}$ **এর মাধ্যমে** $\frac{dy}{dx}$ **ও** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\frac{\theta}{2}) = \frac{d}{d\theta}(\tan\frac{\theta}{2}).\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{a.2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2a}\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}$$

13(b) $2x = t + t^{-1}$ এবং $2y = t - t^{-1}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^3}{(t^2-1)^3}$

প্রমাণ ঃ এখানে, $2x = t + t^{-1} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2+1}{t}$

$$\therefore \quad 2\frac{dx}{dt} = \frac{t(2t+0)-(t^2+1).1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

এবং $2y = t - t^{-1} = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t} = \frac{t^2-1}{t}$

$$\therefore \quad 2\frac{dy}{dt} = \frac{t(2t-0)-(t^2-1).1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2}\times\frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{t^2+1}{t^2-1}) = \frac{d}{dt}(\frac{t^2+1}{t^2-1}).\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{(t^2-1).2t-(t^2+1).2t}{(t^2-1)^2}\times\frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$= \frac{2t(t^2-1-t^2-1)}{(t^2-1)^2}\times\frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^2}{(t^2-1)^3}$$

14. নিচের ফাংশনগুলোর nতম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(a) মনে করি, $y = \ln x$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^{1-1}x^{-1}$$

$$y_2 = (-1)x^{-2} = (-1)^{2-1}x^{-2}$$

$$y_3 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2(1.2)x^{-3}$$

$$= (-1)^{3-1}\{1.(3-1)\}x^{-3}$$

$$y_4 = (-1)(-2)(-3)x^{-2} = (-1)^3(1.2.3)x^{-4}$$

$$= (-1)^3\{1.2.(4-1)\}x^{-4}$$

অনুরূপভাবে,

$$y_n = (-1)^{n-1}\{1.2.3.\cdots\cdots(n-1)\}x^{-n}$$

$\therefore \ln x$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

14(b) মনে করি, $y = \frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$

$$\therefore \quad y_1 = (-1)(a-x)^{-2}(-1) = 1.(a-x)^{-1-1}$$

$$y_2 = (-2)(a-x)^{-3}(-1) = (1.2)(a-x)^{-2-1}$$

$$y_3 = (1.2)(-3)(x-a)^{-4}(-1)$$

$$= (1.2.3)(a-x)^{-3-1}$$

অনুরূপভাবে, $y_n = (1.2.3.\cdots\cdots n)(x-a)^{-n-1}$

$\therefore \frac{1}{a-x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

14 (c) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n}(\cos^3 x) = \frac{1}{4}\{\frac{d^n}{dx^n}(3\cos x) + \frac{d^n}{dx^n}(\cos 3x)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{3\cos(\frac{n\pi}{2}+x) + 3^n\cos(\frac{n\pi}{2}+3x)\}$$

14(d) $e^{3x}\sin^2 x$ [প্র.ভ.প '০১]

$$= e^{3x}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{3x} - e^{3x}\cos 2x\}$$

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}\sin^2 x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}) - \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}\cos 2x)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3^n e^{3x} - (3^2+2^2)^{\frac{n}{2}}e^{3x}\cos(2x + n\tan^{-1}\frac{2}{3})\}$$

$$=\frac{e^{3x}}{2}\{3^n-(\sqrt{13})^n\cos(2x+n\tan^{-1}\frac{2}{3})\}$$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন :

15. $y=x^2-2+\frac{1}{x^2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $y=x^2-2+\frac{1}{x^2}=x^2-2+x^{-2}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx}=2x-0+(-2)x^{-3}$ (১)

$\frac{d^2y}{dx^2}=2+(-2)(-3)x^{-4}=2+\frac{6}{x^4}$ (১)

$\frac{d^3y}{dx^3}=(-2)(-3)(-4)x^{-5}=-\frac{24}{x^5}$ (১)

16. $y=a\cos x+b\sin x$ হলে, দেখাও যে, $y_4-y=0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=a\cos x+b\sin x$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1=a(-\sin x)+b\cos x$ (১)

$y_2=a(-\cos x)+b(-\sin x)$ (১)

$y_3=a\sin x+b(-\cos x)$

$y_4=a\cos x+b\sin x=y$

$\therefore\ y_4-y=0$ (Showed) (১)

17. $y=\frac{x}{x+2}$ হলে, দেখাও যে, $x\,y_1=y(1-y)$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\frac{x}{x+2}\Rightarrow x+2=\frac{x}{y}$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$1=\frac{y.1-xy_1}{y^2}\Rightarrow y^2=y-xy_1$ (১)

$\Rightarrow xy_1=y-y^2\ \therefore x\,y_1=y(1-y)$ (Showed) (১)

18. (a) $y=a\,x^{n+1}+bx^{-n}$ হলে, দেখাও যে, $x^2\,y_2=n(n+1)y$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=a\,x^{n+1}+bx^{-n}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1=a\,(n+1)x^n+b\,(-n)x^{-n-1}$ (১)

$y_2=a\,(n+1)nx^{n-1}+b\,(-n)(-n-1)x^{-n-2}$ (১)

এখন, $x^2\,y_2=n(n+1)ax^{n+1}+n(n+1)bx^{-n}$

$\Rightarrow x^2\,y_2=n(n+1)(ax^{n+1}+bx^{-n})$

$\therefore\ x^2\,y_2=n(n+1)y$ (Showed) (১)

18. (b) $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ হলে, দেখাও যে, $4y^3\,y_2=4ac-b^2$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

x-এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1=\frac{1}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}(2ax+b)$ (২)

$$y_2=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}.(2a)-\frac{(2ax+b)^2}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}}{(2\sqrt{ax^2+bx+c})^2}\quad (১)$$

$$\Rightarrow y_2=\frac{4a(ax^2+bx+c)-4ax^2-4abx-b^2}{4(\sqrt{ax^2+bx+c})^3}$$

$$\Rightarrow y_2=\frac{4a^2x^2+4abx+4ac-4ax^2-4abx-b^2}{4y^3}$$

$\therefore 4y^3y_2=4ac-b^2$ (Showed) (১)

19. (a) $y=\sqrt{\cos 2x}$ হলে, দেখাও যে, $(y\,y_1)^2=1-y^4$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\sqrt{\cos 2x}\Rightarrow y^2=\cos 2x$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2yy_1=-\sin 2x.2\Rightarrow yy_1=-\sin 2x$ (২)

$\Rightarrow (yy_1)^2=\sin^2 2x$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow (yy_1)^2=1-\cos^2 2x$

$=1-(y^2)^2$ [$\because y^2=\cos 2x$]

$\therefore\ (y\,y_1)^2=1-y^4$ (Showed) (১)

19. (b) $y=\tan\sqrt{1-x}$ হলে, দেখাও যে, $2\,y_1\sqrt{1-x^2}+(1+y^2)=0$

প্রমাণ ঃ এখানে, $y=\tan\sqrt{1-x}$ ……(1)

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sec^2\sqrt{1-x}.\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) \quad (২)$$

$$\Rightarrow 2y_1\sqrt{1-x} = -(1+\tan^2\sqrt{1-x})$$

$$\Rightarrow 2y_1\sqrt{1-x} = -(1+y^2) \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\therefore \ 2y_1\sqrt{1-x} + (1+y^2) = 0 \text{ (Showed)} \quad (১)$$

19(c) $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$ হলে, দেখাও যে, $2\cot x\frac{dy}{dx} + y = 0$

প্রমাণ : এখানে, $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}} \Rightarrow y^2\sec x = 16$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y^2\sec x\tan x + \sec x.2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

উভয় পক্ষকে $y\sec x$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$y\tan x + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{y}{\cot x} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore 2\cot x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{(Showed)} \quad (১)$$

20. $y = (a+bx)e^{2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0$

প্রমাণ : এখানে, $y = (a+bx)e^{2x} \dots \dots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = (a+bx).e^{2x}(2) + e^{2x}(0+b) \quad (২)$$

$$\Rightarrow y_1 = 2y + be^{2x} \cdots (2) \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_2 = -2y_1 + be^{2x}.2$$

$$\therefore \ y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0 \quad \text{(Showed)} \quad (১)$$

21(a) $y = x^n \ln x$ হলে, দেখাও যে, $xy_1 = ny + x^n$

প্রমাণ : এখানে, $y = x^n \ln x \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = x^n\frac{1}{x} + \ln x.nx^{n-1} \quad (৩)$$

উভয় পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে পাই,

$$xy_1 = x^n + nx^n\ln x = x^n + ny \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\therefore \ xy_1 = ny + x^n \quad \text{(Showed)} \quad (১)$$

21(b) $y = \sqrt{1+x^2}\ ln(x+\sqrt{1+x^2})$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)(y_1-1) = xy$

প্রমাণ : $y = \sqrt{1+x^2}\ ln(x+\sqrt{1+x^2}) \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sqrt{1+x^2}\ \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\} + ln(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x) \quad (৩)$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\ ln(x+\sqrt{1+x^2}).\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + y.\frac{x}{1+x^2} \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = (1+x^2) + xy$$

$$\therefore \ (1+x^2)(y_1-1) = xy \quad \text{(Showed)} \quad (১)$$

22. $y = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - x(y_1-2) + y = 0$

প্রমাণ : এখানে, $y = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) - 1 \quad (২)$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 - \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = -\frac{x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1 = -x(y+x) \quad [(1) \text{ দ্বারা।}]$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1 + xy + x^2 = 0$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 + y_1(-2x) + xy_1 + y + 2x = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + y + 2x = 0$$

$$\therefore \ (1-x^2)y_2 - x(y_1-2) + y = 0 \quad (১)$$

23(a) $y = \sin\sqrt{x}$ হলে, দেখাও যে, $4x(y_1)^2 + y^2 = 1$

প্রমাণ : এখানে, $y = \sin\sqrt{x}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (২)

$\Rightarrow 2\sqrt{x}\ y_1 = \cos\sqrt{x}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$4x\ y_1^{\ 2} = \cos^2\sqrt{x} = 1 - \sin^2\sqrt{x} = 1 - y^2$

$\therefore\ 4x\ y_1^{\ 2} + y^2 = 1$ (Showed) (১)

23(b) $y = \cos\sqrt{x}$ **হলে, দেখাও যে,** $4x(y_1)^2 + y^2 = 1$

প্রমাণ : এখানে, $y = \cos\sqrt{x}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (২)

$\Rightarrow 2\sqrt{x}\ y_1 = -\sin\sqrt{x}$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$4x\ y_1^{\ 2} = \sin^2\sqrt{x} = 1 - \cos^2\sqrt{x} = 1 - y^2$

$\therefore\ 4x\ y_1^{\ 2} + y^2 = 1$ (Showed) (১)

24. $y = (1 - x^2)^n$ **হলে, দেখাও যে,**

$(1 - x^2)\, y_1 + 2nxy = 0$

প্রমাণ : এখানে, $y = (1 - x^2)^n$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = n(1 - x^2)^{n-1}(-2x)$ (২)

উভয় পক্ষকে $(1 - x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$y_1(1 - x^2) = -2nx(1 - x^2)^n = -2nxy$

$\therefore\ (1 - x^2)\, y_1 + 2nxy = 0$ (Showed) (১)

25. $y = \tan x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2 = 2y(1 + y^2)$

প্রমাণ : এখানে, $y = \tan x$

$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (১)

$y_2 = \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\sec x.\sec x \tan x$ (১)

$= 2\tan x \sec^2 x = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$

$\therefore\ y_2 = 2y(1 + y^2)$ (Showed) (১)

26. $y = ax\sin x$ **হলে, দেখাও যে,** $x^2 y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$

প্রমাণ : $y = ax\sin x \Rightarrow \frac{y}{x} = a\sin x \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{xy_1 - y.1}{x^2} = a\cos x$ (২)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{x^2(xy_2 + y_1.1 - y_1) - (xy_1 - y).2x}{x^4} = -a\sin x$ (১)

$\Rightarrow \frac{x(x^2 y_2 - 2xy_1 + 2y)}{x^4} = -\frac{y}{x}$ [(1) দ্বারা।]

$\Rightarrow x^2 y_2 - 2xy_1 + 2y = -x^2 y$

$\therefore\ x^2 y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$ (Showed) (১)

27. $x = \sin t$ **এবং** $y = \sin pt$ **হলে, দেখাও যে,** $(1 - x^2)\, y_2 - x\, y_1 + p^2 y = 0.$

প্রমাণ : এখানে, $x = \sin t$ এবং $y = \sin pt$

$\therefore\ t = \sin^{-1} x$ এবং $pt = \sin^{-1} y$

$\therefore\ p\sin^{-1} x = \sin^{-1} y$ (১)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$p\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, y_1$ (১)

$\Rightarrow p^2(1 - y^2) = (1 - x^2)y_1^{\ 2}$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$p^2(-2yy_1) = (1 - x^2)2y_1 y_2 + (-2x)y_1^{\ 2}$ (১)

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$-p^2 y = (1 - x^2)y_2 - xy_1$

$(1 - x^2)\, y_2 - x\, y_1 + p^2 y = 0.$ (১)

28. নিচের ফাংশনগুলির n তম অন্তরজ (y_n) নির্ণয় কর।

(a) $\frac{1}{x}$ [ঢ.'০২] (b) $\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

(c) $\sin x \sin 3x$

(a) মনে করি, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\therefore\ y_1 = (-1)x^{-2} = (-1)^1 x^{-1-1}$ (১)

$y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2(1.2)x^{-2-1}$ (১)

$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3(1.2.3)x^{-3-1}$ (১)

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^n(1.2.3.\cdots\cdots n)x^{-n-1}$

$\frac{1}{x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (Ans.) (১)

28(b) ধরি, $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)} + \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)}$ (১)

$= \frac{2}{(x-1)(-1)(-2)} + \frac{5}{(1)(x-2)(-1)} + \frac{10}{(2)(1)(x-3)}$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$\therefore y_n = \frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-1}) - 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-2}) + 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-3})$ (১)

$= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$ (২)

(c) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ (১)

$\therefore \frac{d^n}{dx^n}(\sin x \sin 3x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x) - \frac{d^n}{dx^n}(\cos 4x)\}$ (১)

$= \frac{1}{2}\{2^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 2x) - 4^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 3x)\}$ (২)

প্রশ্নমালা IX J

1. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

(2, 2) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - 2 = 4(x-2) \Rightarrow 4x - y - 6 = 0$

2. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার (4,–3) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 - y^2 = 7$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$(4, -3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-3}$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{4}{-3}(x-4)$

$\Rightarrow 4x - 16 = -3y - 9 \quad \therefore 4x + 3y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 3 = \frac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 12 \quad \therefore 3x - 4y - 24 = 0$

3(a) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে , ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৯; য.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান ঃ $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$

$\Rightarrow y(x^2 - 5x + 6) - x + 7 = 0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 7$.

$\therefore$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে (7,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2 - 5x + 6)\frac{dy}{dx} + y(2x-5) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{x^2 - 5x + 6}$

$(7, 0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{49 - 35 + 6} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{20}(x - 7)$

$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3(1.2.3)x^{-3-1}$ (১)

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^n(1.2.3.\cdots\cdots n)x^{-n-1}$

$\frac{1}{x}$ এর nতম অন্তরক সহগ $= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ (Ans.) (১)

28(b) ধরি, $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$= \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)}$

$+ \frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)}$ (১)

$= \frac{2}{(x-1)(-1)(-2)} + \frac{5}{(1)(x-2)(-1)} + \frac{10}{(2)(1)(x-3)}$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

$\therefore y_n = \frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-1}) - 5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-2}) +$

$5\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x-3})$ (১)

$= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$ (২)

(c) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ (১)

$\therefore \frac{d^n}{dx^n}(\sin x \sin 3x) = \frac{1}{2}\{\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x)$

$- \frac{d^n}{dx^n}(\cos 4x)\}$ (১)

$= \frac{1}{2}\{2^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 2x) - 4^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 3x)\}$ (২)

প্রশ্নমালা IX J

1. $y = x^3 - 2x^2 + 2$ বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 2 \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

(2, 2) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - 2 = 4(x-2) \Rightarrow 4x - y - 6 = 0$

2. $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার (4,–3) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'১২; সি.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2 - y^2 = 7$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$(4, -3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-3}$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{4}{-3}(x-4)$

$\Rightarrow 4x - 16 = -3y - 9 \therefore 4x + 3y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 3 = \frac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 12 \therefore 3x - 4y - 24 = 0$

3(a) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে , ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৯; য.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান ঃ $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$

$\Rightarrow y(x^2 - 5x + 6) - x + 7 = 0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 7$.

$\therefore$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে (7,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2 - 5x + 6)\frac{dy}{dx} + y(2x-5) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x-5)}{x^2 - 5x + 6}$

$(7, 0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{49 - 35 + 6} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{20}(x - 7)$

$\Rightarrow x - 20y - 7 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y = -20(x-7)$

$\Rightarrow 20x + y - 140 = 0$

3(b) দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোন স্পর্শক দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [ব. '০২; কু.'০৯; রা.'১৪]

সমাধান ঃ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \cdots (1)$

(1) কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0 \;\therefore\; \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

বক্ররেখার উপর (x_1, y_1) যেকোন বিন্দুতে

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=\sqrt{a}\cdots(2) \text{ এবং } \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x_1}-\sqrt{x_1}\,y_1=-x\sqrt{y_1}+x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1}+y\sqrt{x_1}=\sqrt{x_1}\,y_1+x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1}+y\sqrt{x_1}=\sqrt{x_1y_1}\,(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1})$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1}+y\sqrt{x_1}=\sqrt{x_1y_1}\,\sqrt{a} \quad [(2) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_1}}+\frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_1}}=1$$

$\therefore$ অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল

$=\sqrt{a}\sqrt{x_1}+\sqrt{a}\sqrt{y_1}=\sqrt{a}(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1})$

$=\sqrt{a}\sqrt{a}=a$

$\therefore$ যেকোন স্পর্শকের ক্ষেত্রে কর্তিত অংশের যোগফল $= a$, যা একটি ধ্রুবক।

4. $y=x^3-3x^2+2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; রা.'০৫,'১০; য.'০৯; দি.'১২]

সমাধান ঃ $y=x^3-3x^2+2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-6x$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\; 3x^2-6x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$

$\Rightarrow x=0, 2$

$x=0$ হলে, $y=2$

$x=2$ হলে, $y=8-12+2=-2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0, 2)$, $(2,-2)$

5.(a) $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৪, '০৭; য.'০৮; চ. '০৬; কু. '০৬; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ $x^2+2ax+y^2=0 \cdots\cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+2a+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x+a}{y}$$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy}=0$

$$\therefore\; -\frac{y}{x+a}=0 \Rightarrow y=0$$

(1) এ $y=0$ বসিয়ে পাই, $x^2+2ax=0$

$\Rightarrow x(x+2a)=0 \;\therefore x=0, -2a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)$, $(-2a, 0)$

5(b) $x^2+4y^2=8$ উপবৃত্তের যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু., রা., চ.'০৪; ব. '০৫; য.'০৬; সি.'০৭; দি.'০৯;কু.'১১]

সমাধান ঃ $x^2+4y^2=8 \cdots\cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+8y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{8y}=-\frac{x}{4y}$$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy}=0$

$$\therefore\; -\frac{4y}{x}=0 \Rightarrow y=0$$

(1) এ $y=0$ বসিয়ে পাই, $x^2=8 \;\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$

5(c) $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ **বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৬,'১০; চ. '০৭,'১১; ব. '০৯,'১৪; সি.'০৯,'১২; রা.'১৩; য.'১৩]**

সমাধান : $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ ... ... (1)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$

$= \frac{x(2\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$\therefore \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(2\sqrt{1-x^2}-1)} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1$ হলে, $y = 1^2 + \sqrt{1-1} = 1$

$x = -1$ হলে, $y = (-1)^2 + \sqrt{1-1} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(1, 1)$, $(-1, 1)$

(d) $x^2 + 4x + y^2 = 0$ **বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু.'০৩]**

সমাধান : $x^2 + 4x + y^2 = 0$ ... ... (1)

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\therefore 2x + 4 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+2}{y}$

স্পর্শক x- অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$\therefore -\frac{y}{x+2} = 0 \Rightarrow y = 0$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 + 4x = 0$

$\Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, -4$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)$, $(-4, 0)$

5(e) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ **বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর। [সি.'০৮; কু.'০৭, '১৩; রা.'০৮,'১২; দি.'১০; ঢা.'১১; চ.'১৩; য.'১২]**

সমাধান : $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ ... ... (1)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$

স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\frac{dy}{dx} = \pm 1 \therefore 3x^2 - 6x - 2 = \pm 1$

'+' নিয়ে, $3x^2 - 6x - 2 = 1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$

'–' নিয়ে, $3x^2 - 6x - 2 = -1$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.3.(-1)}}{2.3} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$

$= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ বিন্দুর ভুজ $1 \pm \sqrt{2}$, $\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

6. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ **বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [কু., ঢা.'১০; সি.'১১; দি.'১৩]**

সমাধান : $y = (x+1)(x-1)(x-3) \cdots (1)$

$\frac{dy}{dx} = (x+1)(x-1)\frac{d}{dx}(x-3) + (x+1)$

$(x-3)\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1)(x+3)\frac{d}{dx}(x+1)$

$= (x+1)(x-1) + (x+1)(x-3) +$
$(x-1)(x-3)$

যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ সব বিন্দুর y –স্থানাঙ্ক $= 0$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -1, 1, 3$

$\therefore$ বিন্দুগুলো $(-1,0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$

$\therefore$ $(-1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (-2)(-4) = 8$

$(1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (2)(-2) = -4$

$(3, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= (4)(2) = 8$

7.(a) **a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে। [সি.'০৬,'১০,'১৪ ; ব.'০৪,'০৮,'১২ ; চ.'০৬ ;**

য.'০৪,'০৮ ; রা.'০৪,'০৭,'০৯ ; ঢা.'০৮; কু.'১২,'১৪]

সমাধান ঃ $y = ax(1-x) = a(x - x^2)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = c(1-2x)$

মূলবিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = a(1+0) = a$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\dfrac{dy}{dx} = \tan(\pm 60^0)$

$\therefore a = \tan(\pm 60^0) = \pm\sqrt{3}$

(b) c-এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। [কু.'০৬; ব.'০৬; য.'০৭; চ.'১২; ঢা.'১৪]

সমাধান ঃ $y = cx(1+x) = c(x + x^2)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = c(1+2x)$

মূলবিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = c(1+0) = c$

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\dfrac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^0)$

$\therefore c = \tan(\pm 30^0) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

8(a) কোন সরলরেখায় একটি গতিশীল কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ দূরত্ব অতিক্রম করে। a, b, c ধ্রুবক এবং t সময় পরে কণাটির বেগ v হলে, দেখাও যে, $4a(s-c) = v^2 - b^2$ [য., চ.'০৫; দি.'০৯; কু.'১৪]

সমাধান ঃ এখানে $s = at^2 + bt + c \quad \cdots\cdots(1)$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = 2at + b$$

$\therefore$ t সেকেন্ডে পর কণাটির বেগ $v = 2at + b$

$\Rightarrow v^2 = 4a^2t^2 + 4abt + b^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(s-c)$ [(1) দ্বারা]

$\therefore 4a(s-c) = v^2 - b^2$

8(b) যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায় , তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। [ব. '০৬; চ.'০৮;দি.'১১; রা.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, t সময়ে প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং ক্ষেত্রফল A . তাহলে , $A = \pi r^2$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2r\pi\frac{dr}{dt}$$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{dr}{dt} =$ ধ্রুবক [$\because$ ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়।]

$\therefore \dfrac{dA}{dt} =$ ধ্রুবক $\times r$ [$\because 2\pi\dfrac{dr}{dt}$ একটি ধ্রুবক]

$\Rightarrow \dfrac{dA}{dt} \propto r$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক।

8(c) যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সে.মি. পরিমাণ বৃদ্ধি পায়, তাহলে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বুয়েট.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য x সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল A বর্গ সে.মি.। তাহলে,

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 2x\frac{dx}{dt} \quad \cdots\cdots (i)$$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{3}$ এবং $\dfrac{dA}{dt} = 12$

(i) হতে পাই, $12 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2x \times \sqrt{3}$

$\Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$ $\therefore$ বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সে.মি.।

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

9. (a) $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ বক্ররেখার (2, 5) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৩]

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 4x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 4$ (১)

(2, 5) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) + 4$ (১)

$$= 12 - 8 + 4 = 8$$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2,5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - 5 = 8(x-2) \Rightarrow 8x - y - 11 = 0 \quad (১)$$

9(b) $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$ বক্ররেখার $(2,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০২]

সমাধান ঃ $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x - 5x\frac{dy}{dx} - 5y + 2y\frac{dy}{dx} - 5 + 6\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow -(5x - 2y - 6)\frac{dy}{dx} = -(2x - 5y - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5y - 5}{5x - 2y - 6}$$

$(2, 1)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-5-5}{10-2-6} = \dfrac{-6}{2} = -3 \quad (১)$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - 1 = -\frac{1}{-3}(x-2) \quad (১)$$

$$\Rightarrow 3y - 3 = x - 2 \quad \therefore x - 3y + 1 = 0$$

9. (c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ অধিবৃত্তের $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৩]

সমাধান ঃ $x^3 - 3xy + y^3 = 3$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - x)\frac{dy}{dx} = 3(y - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$(1, -1)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1-1}{1-1} \quad (১)$

অর্থাৎ $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)_{(1,-1)} = \dfrac{0}{-2} = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(1,-1)}(y+1) = x - 1$$

$$\Rightarrow 0.(y+1) = x - 1 \quad \therefore x - 1 = 0 \quad (১)$$

9. (d) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০০]

সমাধান ঃ $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3ax\frac{dy}{dx} - 3ay + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \quad (২)$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1} \quad (১)$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = -\dfrac{y_1^2 - ax_1}{ay_1 - x_1^2}(x - x_1)$

$$\Rightarrow (y - y_1)(ay_1 - x_1^2) + (x - x_1)(y_1^2 - ax_1) \quad (১)$$

9. (e) দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ [ব.'০১]

প্রমাণ ঃ $y^2 = 4ax$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad (১)$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{y_1} \quad (১)$

$\therefore$ প্রদত্ত পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \dfrac{2a}{y_1}(x - x_1) \quad (১)$

$$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$$

$\Rightarrow yy_1 - 4ax_1 = 2a(x - x_1)$; যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore yy_1 = 2a(x + x_1)$ (Showed) (১)

9(f) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **বক্ররেখার** (x_1, y_1) **বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}}$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের

সমীকরণ $y - y_1 = -\dfrac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}}(x - x_1)$ (১)

$$\Rightarrow yy_1^{-\frac{1}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}} = -xx_1^{-\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}}$$

$\Rightarrow xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু (1) বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Ans.) (১)

10. (a) $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$ **বক্ররেখার (3,2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।** **[চ.'০২]**

সমাধান ঃ $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx} - 4 - 6\frac{dy}{dx} = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow 2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$(3, 2)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{2-3} = -2$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(3, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow 2x + y = 8$ (১)

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3)$

$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \therefore x - 2y + 1 = 0$ (১)

10. (b) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ **বক্ররেখার (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।** **[চ.'০৮,'১১]**

সমাধান ঃ $y = x^3 - 2x^2 + 4$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$ (১)

$(2, 4)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = 3\times4 - 8 = 4$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 4 = 4(x - 2)$

$\Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \therefore 4x - y - 4 = 0$ (১)

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 4 = -\dfrac{1}{4}(x - 2)$

$\Rightarrow 4y - 16 = -x + 2 \therefore x + 4y - 18 = 0$ (১)

10. (c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ **বৃত্তের (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।** **[য.'০৩; রা.'১১]**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 6 - 10\frac{dy}{dx} = 0 \quad (১)$$

$$\Rightarrow 2(y-5)\frac{dy}{dx} = -2(x-3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-5}$$

$(1, 2)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1-3}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 1)$ (১)

$\Rightarrow 3y - 6 = -2x + 2 \therefore 2x + 3y - 8 = 0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y-2=\frac{3}{2}(x-1)$

$\Rightarrow 2y-4= 3x-3 \therefore 3x-2y+1=0$ (১)

10. (d) $y=x^3-3x+2$ **বক্ররেখার** $(2, -2)$ **বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $y=x^3-3x+2 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-3$ (১)

$(2,-2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=3\times4-3=9$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y+2=9(x-2)$ (১)

$\Rightarrow y+2=9x-18 \therefore 9x-y-20=0$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y+2=-\frac{1}{9}(x-2)$

$\Rightarrow 9y+18=-x+2 \therefore x-9y-16=0$ (১)

11. (a) $y(x-2)(x-3)-x+3=0$ **বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে** x**-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [চ.'০৫]

সমাধান ঃ $y(x-1)(x-2)-x+3=0$

$\Rightarrow y(x^2-3x+2)-x+3=0 \cdots(1)$

বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y=0$. (1) এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=3$.

$\therefore$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে $(3,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। (১)

(1) বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(x^2-3x+2)\frac{dy}{dx}+y(2x-3)-1=0$ (১)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-y(2x-3)}{x^2-3x+2}$

$(3,0)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{9-9+2}=\frac{1}{2}$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y=\frac{1}{2}(x-3)$

$\Rightarrow x-2y-3=0$ (১)

11(b) প্রমাণ কর যে, $3x^2+4xy+5y^2-4=0$ **বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে** $3x+2y=0$ **ও** $2x+5y=0$ **রেখাকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে অঙ্কিত স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।**

প্রমাণ ঃ $3x^2+4xy+5y^2-4=0\cdots(1)$

$3x+2y=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x$ হতে y-এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$3x^2+4x(\frac{-3}{2}x)+5(\frac{-3}{2}x)^2-4=0$

$\Rightarrow 3x^2-6x^2+\frac{45x^2}{4}-4=0$

$\Rightarrow -12x^2+45x^2=16 \therefore x=\pm\frac{4}{\sqrt{33}}$

$\therefore x=\frac{4}{\sqrt{33}}$ হলে, $y=-\frac{3}{2}\times(\frac{4}{\sqrt{33}})=-\frac{6}{\sqrt{33}}$

$x=-\frac{4}{\sqrt{33}}$ হলে, $y=-\frac{3}{2}\times(-\frac{4}{\sqrt{33}})=\frac{6}{\sqrt{33}}$

$\therefore$ (1) বক্ররেখাটি $3x+2y=0$ রেখাকে $(\frac{4}{\sqrt{33}},-\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}},\frac{6}{\sqrt{33}})$ বিন্দুতে ছেদ করে। (১)

(1) কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$6x+4x\frac{dy}{dx}+4y+10y\frac{dy}{dx}=0$ (১)

$\Rightarrow 2(2x+5y)\frac{dy}{dx}=-2(3x+2y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3x+2y}{2x+5y}$

$(\frac{4}{\sqrt{33}},-\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}},\frac{6}{\sqrt{33}})$ উভয় বিন্দুতে $3x+2y=0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+2y}{2x+5y}=0$ (১)

$\therefore$ এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। (১)

আবার, $2x+5y=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{5}x$ হতে y- এর মান (1) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3x^2+4x(-\frac{2}{5}x)+5(-\frac{2}{5}x)^2-4=0$

$\Rightarrow 15x^2-8x^2+4x^2-20=0$

$\Rightarrow 11x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

$\therefore x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ হলে, $y = -\frac{2}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{55}}$

$x = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ হলে, $y = -\frac{2}{5} \times (-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}) = \frac{4}{\sqrt{55}}$

$\therefore$ (1) বক্ররেখাটি $2x + 5y = 0$ রেখাকে $(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}})$ ও $(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}})$ বিন্দুতে ছেদ করে। (১)

$(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}})$ ও $(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}})$ উভয় বিন্দুতে $2x + 5y = 0$ অর্থাৎ $\frac{dx}{dy} = -\frac{2x+5y}{3x+2y} = 0$ (১)

$\therefore$ এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের লম্ব অর্থাৎ y-অক্ষের সমান্তরাল। (১)

12(a) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০০]

সমাধান : $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$ (১)

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(2x-1) = 0 \therefore x = -1, \frac{1}{2}$ (১)

$x = -1$ হলে, $y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = 4.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{4} - 6.\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{2+3-8}{4} = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ বিন্দু দুইটি $(-1, 6)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ (১)

12(b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৯; ব.'১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \cdots \cdots (1)$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$ (১)

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore \frac{1-x}{y} = 0 \Rightarrow x = 1$

(1) এ x = 1 বসিয়ে পাই, $1 + y^2 - 2.1 - 3 = 0$ (১)

$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(1, 2)$, $(1, -2)$ (১)

12. (c) $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫]

সমাধান : $y = (x-3)^2(x-2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (x-3)^2.1 + 2(x-3)(x-2)$ (১)

$= (x-3)(x-3+2x-4)$

$= (x-3)(3x-7)$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore (x-3)(3x-7) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{7}{3}$

$x = 3$ হলে, $y = (3-3)^2(3-2) = 0$ (১)

$x = \frac{7}{3}$ হলে, $y = (\frac{7}{3} - 3)^2(\frac{7}{3} - 2)$

$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(3, 0)$, $(\frac{7}{3}, \frac{4}{27})$ (১)

12. (d) $y^3 = x^2(2a - x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ.'০৭]

সমাধান : $y^3 = x^2(2a - x)$

$\therefore\ 3y^2 \dfrac{dy}{dx} = x^2(-1) + 2x\,(2a - x)$ (২)

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ (১)

$\therefore\ \dfrac{x(4a-3x)}{2y} = 0 \Rightarrow x = 0\,, \dfrac{4a}{3}$

$x = 0$ হলে, $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \dfrac{4a}{3}$ হলে, $y^3 = \dfrac{16a^2}{9}(2a - \dfrac{4a}{3})$

$\Rightarrow\ y^3 = \dfrac{16a^2}{9} \times \dfrac{2a}{3}\ \ \therefore y = \dfrac{2a\sqrt[3]{4}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)\,, (\dfrac{4}{3}a\,, \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}a)$ (১)

13. (a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(1\,,\,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [রা.'০১]

সমাধান ঃ $y = 3x^2 + 2x - 1\ \ \therefore \dfrac{dy}{dx} = 6x + 2$ (১)

$(1, 0)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = 6 \times 1 + 2 = 8$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 8 (১)

13. (b) $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

সমাধান ঃ $x^2 + xy + y^2 = 4$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + x\dfrac{dy}{dx} + y + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ (২)

$\Rightarrow (x + 2y)\dfrac{dy}{dx} = -\,(2x + y)$

$\Rightarrow\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$

$(2, -2)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4-2}{2-4} = 1$ (১)

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $(2,-2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 1.(১)

13. (c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি $(2\,,\,1)$ দিয়ে অতিক্রম করে। ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [চ.'০৩]

সমাধান ঃ $x^3 - 3xy + y^3 = 3$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$3x^2 - 3x\dfrac{dy}{dx} - 3y.1 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 0$ (২)

$\Rightarrow\ -3(x - y^2)\ \dfrac{dy}{dx} = -\,3(\,x^2 - y)$

$\Rightarrow\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y}{x - y^2}$

$(2\,,\,1)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$ (১)

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল 3 (১)

14. (a) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ $y = ax(1 - x) = a(\,x - x^2\,)$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = a\,(1 - 2x)$ (১)

মূলবিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = a\,(1 + 0) = a$ (১)

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\dfrac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^0)$ (১)

$\therefore\ a = \tan(\pm 30^0) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (১)

14. (b) $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়। যদি মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b, c এর মান নির্ণয়। [ঢা.'০১]

সমাধান ঃ $y = ax^2 + bx + c$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = 2ax + b$ (১)

মূলবিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = b$ (১)

কিন্তু মূলবিন্দুতে ঢাল , $\dfrac{dy}{dx} = 2\ \therefore b = 2$ (১)

বক্ররেখাটি মূলবিন্দু এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore\ \ 0 = a.0 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ এবং

$1 = a + b + c \Rightarrow 1 = a + 2 + 0 \Rightarrow a = -1$

$\therefore a = -1, b = 2, c = 0$ (১)

15. (a) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। 2 সেকেন্ড শেষে তার বেগ এবং থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [ঢ.'০২; সি.'০৪]

সমাধান : এখানে $s = 63t - 6t^2 - t^3$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$ (১)

$\therefore$ t সময় পর কণাটির বেগ $= 63 - 12t - 3t^2$

$\therefore$ 2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= (63 - 24 - 12)$ একক/সেকেন্ড $= 27$ একক/সেকেন্ড (Ans.) (১)

আবার কণাটির থেমে যাবে যখন বেগ $\frac{ds}{dt} = 0$ (১)

$\therefore 63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 + 4t - 21 = 0$

$\Rightarrow (t-3)(t+7) = 0 \therefore t = 3 \quad [\because t \neq -7]$

$\therefore$ থামার পূর্বে কণাটি 3 সেকেন্ড চলেছিল এবং 3 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = (189 - 54 - 27)$
$= 108$ একক। (১)

15(b) একটি কণা সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন $s = \sqrt{t}$ হয়। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ ঋণাত্মক এবং বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। [সি.'০২]

প্রমাণ : $s = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \therefore \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ (১)

এবং $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ (১)

$\therefore$ কণাটির বেগ $= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ এবং (১)

ত্বরণ $= -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} = -2(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})^3 = -2\times$ (বেগ $)^3$

$\therefore$ ত্বরণ ঋণাত্মক এবং তা বেগের ঘনফলের সমানুপাতিক। (১)

15(c) একটি বস্তুর গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$ হলে দেখাও যে, এর ত্বরণ সর্বদাই ধনাত্মক এবং $t = 10$ হলে এর গতিবেগ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

প্রমাণ : গতির সমীকরণ $s = t^3 + \frac{1}{t^3}$

$\therefore$ t সময়ে গতিবেগ, $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - \frac{3}{t^4}$ (১)

যখন $t = 10$, গতিবেগ $= 300 - \frac{3}{10^4}$

$= 299.99$ একক (প্রায়) (১)

$\therefore t = 10$ হলে,

আবার t সময়ে ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t + \frac{12}{t^5} > 0$ (১)

$[\because t > 0]$

$\therefore$ ত্বরণের মান সব সময় ধনাত্মক। (১)

15. (d) একটি কণা সরলপথে এমনভাবে চলে যেন t সময়ে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \sqrt{2t}$ হয়। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। [ঢা.'০১]

প্রমাণ : এখানে $s = \sqrt{2t} = \sqrt{2}\, t^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ কণাটির বেগ $= \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}.\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}}$ (২)

ত্বরণ $= \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}t^{-\frac{3}{2}} = -(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}})^3$ (১)

$= -($ বেগ $)^3$

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক। (১)

15. (e) একটি পুকুরের একটি বৃত্তাকার ঢেউ এর পরিধির বৃদ্ধির হার 'a' ফুট/সেকেন্ড। দেখাও যে, এর ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার $a/2\pi$ ফুট / সেকেন্ড। [প্র.ভ.প.'৯৭]

প্রমাণ : মনে করি, t সেকেন্ডে প্রদত্ত বৃত্তাকার ঢেউ এর ব্যাসার্ধ r ফুট এবং পরিধির S ফুট .

তাহলে, $S = 2\pi r$ (১)

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi r) = 2\pi\frac{dr}{dt}$ (১)

প্রশ্নমতে, $\frac{dS}{dt} = a$ [$\because$ পরিধির বৃদ্ধির হার 'a'] (১)

$\therefore\ a = 2\pi \dfrac{dr}{dt} \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{a}{2\pi}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার $\dfrac{a}{2\pi}$ ফুট/সেকেন্ড। (১)

15. (f) একটি গতিশীল কণার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে u এবং f ধ্রুবক। দেখাও যে, t সময়ে তার বেগ u + ft এবং ত্বরণ f.

প্রমাণ : এখানে $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$\therefore$ t সময়ে কণাটির বেগ, $\dfrac{ds}{dt} = u + ft$ এবং

t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = f$ (২)

15. (g) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ মিটার। 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান ঃ এখানে $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

$\therefore$ t সেকেন্ডে কণাটির বেগ, $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + 4$ (১)

এবং t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2$ (১)

$\therefore$ 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= \frac{3}{2}.25 + 10 + 4$

$= 51.5\ ms^{-1}$ (১)

এবং ত্বরণ $= (3 \times 5 + 2)\ ms^{-2} = 17\ ms^{-2}$ (১)

প্রশ্নমালা IX K

1. (a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 18$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 15$

$= 3(x-1)^2 + 15 > 0$, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

(b) দেখাও যে, x = 1 বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore\ f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1$

$= -2 < 0$

$\therefore\ x = 2$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি হ্রাস পায়।

2. নিম্নের ফাংশনগুলি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় ও কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4,\ -1 \le x \le 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\therefore\ f'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$

এখানে, $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুটি $-1 \le x \le 2$ ব্যবধিকে $-1 \le x < 1$ এবং $1 < x \le 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 \le x < 1$ এর জন্য $6(x-1) < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$\therefore\ -1 \le x < 1$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন হ্রাস পায়।

আবার, $1 < x \le 2$ এর জন্য $6(x-1) > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore\ 1 < x \le 2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

(b) $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2,\ -1 \le x \le 3$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2$

$\therefore\ f'(x) = (x-2)^3 \times 2(x+1)$

$+ (x+1)^2 \times 3(x-2)^2$

$= (x-2)^2(x+1)\{2(x-3) + 3(x+1)\}$

$= (x-2)^2(x+1)(2x - 6 + 3x + 3)$

$= (x-2)^2(x+1)(5x-3)$

$\therefore\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3/5, 2$

$\therefore \quad a = 2\pi\dfrac{dr}{dt} \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{a}{2\pi}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার $\dfrac{a}{2\pi}$ ফুট/সেকেন্ড। (১)

15. (f) একটি গতিশীল কণার t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে u এবং f ধ্রুবক। দেখাও যে, t সময়ে তার বেগ u + ft এবং ত্বরণ f.

প্রমাণ : এখানে $s = ut + \dfrac{1}{2}ft^2$

$\therefore$ t সময়ে কণাটির বেগ, $\dfrac{ds}{dt} = u + ft$ এবং

t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = f$ (২)

15. (g) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ মিটার। 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান ঃ এখানে $s = \dfrac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

$\therefore$ t সেকেন্ডে কণাটির বেগ, $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + 4$ (১)

এবং t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2$ (১)

$\therefore$ 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= \dfrac{3}{2}.25 + 10 + 4$

$= 51.5 \text{ ms}^{-1}$ (১)

এবং ত্বরণ $= (3\times 5 + 2)\text{ ms}^{-2} = 17 \text{ ms}^{-2}$ (১)

প্রশ্নমালা IX K

1. (a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 18$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 15$

$= 3(x-1)^2 + 15 > 0$, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

(b) দেখাও যে, x = 1 বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore f'(1) = 3\times 1^2 - 6\times 1 + 1 = 3 - 6 + 1$

$= -2 < 0$

$\therefore \quad x = 2$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি হ্রাস পায়।

2. নিম্নের ফাংশনগুলি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় ও কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, -1 \le x \le 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\therefore \quad f'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$

এখানে, $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুটি $-1 \le x \le 2$ ব্যবধিকে $-1 \le x < 1$ এবং $1 < x \le 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 \le x < 1$ এর জন্য $6(x-1) < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$\therefore \quad -1 \le x < 1$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন হ্রাস পায়।

আবার, $1 < x \le 2$ এর জন্য $6(x-1) > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore \quad 1 < x \le 2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

(b) $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2, -1 \le x \le 3$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2$

$\therefore \quad f'(x) = (x-2)^3 \times 2(x+1)$

$+ (x+1)^2 \times 3(x-2)^2$

$= (x-2)^2(x+1)\{2(x-3) + 3(x+1)\}$

$= (x-2)^2(x+1)(2x - 6 + 3x + 3)$

$= (x-2)^2(x+1)(5x-3)$

$\therefore \; f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3/5, 2$

$x = -1, 3/5, 2$ বিন্দুগুলি $-1 \le x \le 3$ ব্যবধিকে $-1 < x < 3/5$, $3/5 < x < 2$ এবং $2 < x < 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 < x < 3/5$ এর জন্য $f'(x) < 0$.

$\therefore -1 < x < 3/5$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

$3/5 < x < 2$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$\therefore 3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$2 < x < 3$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$\therefore 3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

3. x এর কোন মানের জন্য নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

(a) ধরি, $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ [য.'০৭]

$$\therefore f'(x) = \frac{(x-10)(2x-7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x-10)^2}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\therefore \frac{(x-10)(2x-7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x-10)^2} = 0$$

$\Rightarrow 2x^2 - 27x + 70 - x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-16) = 0 \Rightarrow x = 4, 16$

$\therefore$ $x = 4$ ও 16 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

(b) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ [কু.'০৪]

ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$\therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 1, 2, 3$

$\therefore$ $x = 1, 2$ ও 3 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

4. $f(x) = x - x^2 - x^3$ এর সন্ধিবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x) = x - x^2 - x^3$

$\therefore f'(x) = 1 - 2x - 3x^2$

সন্ধিবিন্দুতে, $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0$

$\therefore x = -1, \dfrac{1}{3}$

$x = -1$ হলে, $f(x) = -1 - 1 + 1 = -1$

$x = \dfrac{1}{3}$ হলে, $f(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27}$

$= \dfrac{9-3-1}{27} = \dfrac{5}{27}$

$\therefore$ নির্ণেয় সন্ধিবিন্দু $(-1, -1)$, $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{27})$

5. নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর :

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ [চ.'০৪; রা.'১১]

সমাধান : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ এবং

$f''(x) = 12x - 18$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \;\therefore x = 1, 2$

এখন, $f''(1) = 12 \times 1 - 18 = -6 < 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

এর মান $= f(1) = 2 - 9 + 12 + 5 = 19 - 9 = 10$

আবার, $f''(2) = 12 \times 2 - 18 = 24 - 18 = 6 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 + 5$

$= 16 - 36 + 24 + 5 = 45 - 36 = 9$

5(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

[রা.'০৫,'১০; ব.'০৮; সি.'০৮; চ.'০৯,'১১]

সমাধান : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$ এবং

$f''(x) = 6x - 6$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \;\therefore x = 5, -3$

এখন, $f''(-3) = 6\times -3 - 6 = -24 < 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

এর মান $= f(-3) = -27 - 27 + 135 + 13$

$= 148 - 54 = 94$

আবার, $f''(5) = 6\times 5 - 6 = 24 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 5$ এবং

এর মান $= f(5) = 125 - 75 - 225 + 13$

$= 138 - 300 = -162$

5(c) $x(12-2x)^2$ [য.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) = x(12-2x)^2$

$= 4x(6-x)^2$

$\therefore$ $f'(x) = 4x.2(6-x)(-1) + 4(6-x)^2.1$

$= 4(6-x)(-2x+6-x)$

$= 4(6-x)(6-3x) = 12(6-x)(2-x)$

এবং $f''(x) = 12\{(6-x)(-1) + (2-x)(-1)\}$

$= 12(-6+x-2+x) = 24(x-4)$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12(6-x)(2-x) = 0 \;\therefore x = 2, 6$

এখন, $f''(2) = 24(2-4) = -48 < 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = 8(6-2)^2 = 128$

আবার, $f''(6) = 24(6-4) > 0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 6$ এবং

এর মান $= f(6) = 8(6-6)^2 = 0$

5(d) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

[ব.'০১; ঢা.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, $y = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cos x + 6\cos x(-\sin x)$

$= 2\cos x(1 - 3\sin x)$ এবং

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos x(-3\cos x) + 2(1 - 3\sin x)(-\sin x)$

$= -6\cos^2 x - 2\sin x + 6\sin^2 x$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0$

$\therefore \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{3}$

$\cos x = 0$ হলে $\sin x = 1$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 + 6 > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশন লঘুমান হবে যখন $\cos x = 0$ এবং

এর মান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3$

আবার, $\sin x = \frac{1}{3}$ হলে $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6.\frac{8}{9} - 2.\frac{1}{3} + 6.\frac{1}{9} < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশন গুরুমান হবে যখন $\sin x = \frac{1}{3}$ এবং এর

মান $= 1 + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{8}{9} = \frac{3+2+8}{3} = \frac{13}{3}$

5(e) $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{y}$, যখন $x + y = 2$

সমাধান ঃ $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x}$ $[\because x + y = 2]$

$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{36}{(2-x)^2}(-1)$

$= -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2}$

এবং $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{8}{x^3} + \frac{72}{(2-x)^3}$

চরম মানের জন্য, $\frac{du}{dx} = 0$

$\Rightarrow -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2} = 0$

$\Rightarrow -4(4 - 4x + x^2) + 36x^2 = 0$

$\Rightarrow -16 + 16x - 4x^2 + 36x^2 = 0$

$\Rightarrow 32x^2 + 16x - 16 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2x+1)(x-1)=0 \therefore x = 1, -\frac{1}{2}$

$x=1$ এর জন্য, $\frac{d^2u}{dx^2} = 8 + 72 > 0$

$\therefore x=1$ এর জন্য, u এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x} = \frac{4}{1} + \frac{36}{2-1} = 40$

আবার $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -64 + \frac{72}{(2+\frac{1}{2})^3} = -64 + \frac{72\times 8}{125} < 0$$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য, u এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= \frac{4}{-\frac{1}{2}} + \frac{36}{2+\frac{1}{2}} = -8 + \frac{72}{5} = \frac{32}{5}$

6.(a) দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [রা.'০৬; কু.'০৮; ঢা.'০৫,'১১; ব.'০৯; য.,চ., সি.'১০,'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$\therefore x=-1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

$\therefore x = 1$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$\therefore x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

6(b) দেখাও যে, $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান 12. [রা,'০৩,'০৮; ব.'০৫,'১০; কু.'১০; চ.,দি.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, $y = 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \therefore e^x = \pm\frac{3}{2}$

$e^x = \frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} > 0$

$\therefore e^x = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

6(c) দেখাও যে, $\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান e. [ঢা.'০৭; কু.'০৯]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

$$\therefore f'(x) = \frac{\ln(x).1 - x\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{\{\ln(x)\}^2.\frac{1}{x} - \{\ln(x) - 1\}2\ln(x).\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^4}$$

$$= \frac{\ln(x)\{\ln(x) - 2\ln(x) + 2\}}{x\{\ln(x)\}^4} = \frac{-\ln(x) + 2}{x\{\ln(x)\}^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \therefore x = e$

এখন, $f''(e) = \frac{-1+2}{e(1)^3} = \frac{1}{e} > 0$

$\therefore x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore \frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান $= f(e) = \frac{e}{1} = e$

6(d) দেখাও যে, $\frac{\ln x}{x}$ এর লঘুমান $\frac{1}{e}$.

প্রমাণ : মনে করি, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{x\frac{1}{x}-\ln x.1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x)=\frac{x^2(-\frac{1}{x})-(1-\ln x).2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$$\therefore \quad \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow \ln x=1 \therefore x=e$$

এখন, $f''(e)=\frac{-3+2.1}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$

$\therefore \quad x=e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore \quad \frac{x}{\ln(x)}$ এর গুরুমান $=f(e)=\frac{1}{e}$

6. (e) দেখাও যে, $(x)^{\frac{1}{x}}$ এর গুরুমান $(e)^{\frac{1}{e}}$.

প্রমাণ : ধরি, $f(x)=(x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore f'(x)=(x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})]$$

$$=(x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}.\frac{1}{x}+\ln x(-\frac{1}{x^2})]$$

$$=(x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x]=(x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})$$

এবং $f''(x)=(x)^{\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}(\frac{1-\ln x}{x^2})$

$$=(x)^{\frac{1}{x}}\frac{x^2(-\frac{1}{x})-(1-\ln x).2x}{x^4}+(\frac{1-\ln x}{x^2})(x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})$$

$$=(x)^{\frac{1}{x}}\frac{-x(1+2-2\ln x)}{x^4}+(x)^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)^2}{x^4}$$

$$=(x)^{\frac{1}{x}}\frac{-3+2\ln x}{x^3}+(x)^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)^2}{x^4}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$$\therefore \quad (x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1-\ln x}{x^2})=0 \Rightarrow \ln x=1 \therefore x=e$$

এখন, $f''(e)=(e)^{\frac{1}{e}}\frac{-3+2.1}{e^3}+0=(e)^{\frac{1}{e}}\frac{-1}{e^3}<0$

$\therefore \quad x=e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore \quad (x)^{\frac{1}{x}}$ এর গুরুমান $=f(e)=(e)^{\frac{1}{e}}$

7. দেখাও যে, $\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x=\frac{\pi}{3}$.

প্রমাণ : মনে করি, $f(x)=\sin x(1+\cos x)$

$$\therefore \quad f'(x)=\sin x(-\sin x)+(1+\cos x)\cos x$$

$$=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$$

$$=\cos x+\cos 2x$$

এবং $f''(x)=-\sin x-2\sin 2x$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$$\therefore \quad \cos x+\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow \cos x+2\cos^2 x-1=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.2.(-1)}}{2.2}=\frac{-1\pm 3}{4}$$

$$\therefore \quad \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

এখন, $f''(\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

$\therefore \quad \sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x=\frac{\pi}{3}$

8.(a) দেখাও যে, $f(x)=x^3-6x^2+24x+4$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। [য.'০১,'১১]

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x)=x^3-6x^2+24x+4$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8) = 3\{(x-2)^2 + 4\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

8(b) দেখাও যে, $f(x) = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$, $x \neq b$ এর কোনো গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$

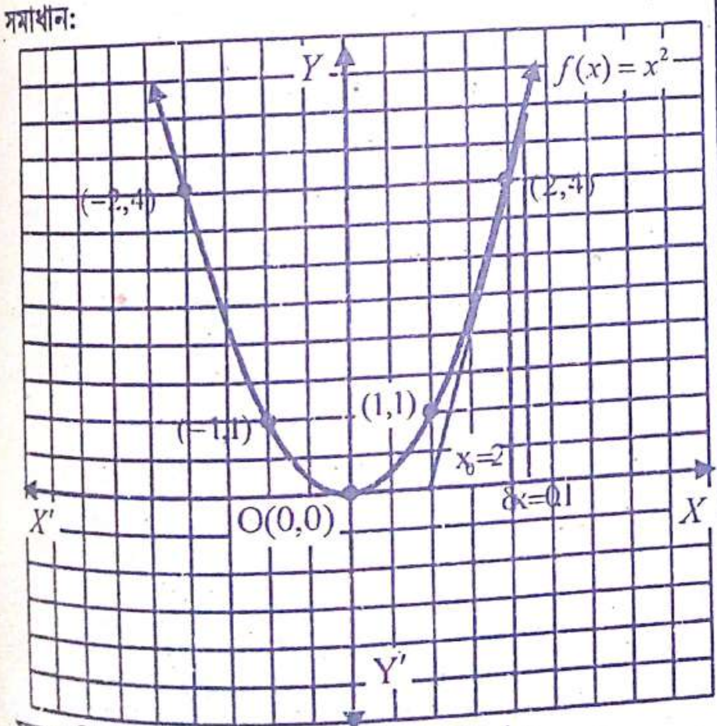
$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\sin^2(x+b)}[\sin(x+b).\cos(x+a) - \sin(x+a)\cos(x+b)]$$

$= \dfrac{\sin(x+b-x-a)}{\sin^2(x+b)} = \dfrac{\cos(b-a)}{\sin^2(x+b)}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

9. (a) $f(x) = x^2$ এর লেখচিত্র ব্যবহার করে $(2\cdot1)^2$ এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, $x_0 = 2$ এবং $x_0 + \delta x = 2\cdot1$

$\therefore \delta x = 0\cdot1$

এখন, $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\therefore f'(2) = 2\times2 = 4.$

$\therefore f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\delta x$

$\Rightarrow f(2\cdot1) \approx f(2) + f'(2)\times0\cdot1$

$\Rightarrow (2\cdot1)^2 \approx 2^2 + 4\times0\cdot1 \Rightarrow (2\cdot1)^2 \approx 4 + 0\cdot4$

$\therefore (2\cdot1)^2 \approx 4\cdot4$ (Ans.)

(b) $x = 0$ **বিন্দুর সন্নিকটে** $f(x) = \sqrt{1+x}$ **ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করে** $\sqrt{0\cdot9}$ **এবং** $\sqrt{1\cdot1}$ **এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: $f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$\therefore f(0) = \sqrt{1+0} = 1$ এবং $f(0) = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কওে পাই,

$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$

[$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x \cdots\cdots (1)$

(1) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$\sqrt{1-0\cdot1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(-0\cdot1)$

$\Rightarrow \sqrt{0\cdot9} \approx 1 - 0\cdot05 \Rightarrow \sqrt{0\cdot9} \approx 0\cdot95$

আবার, (1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

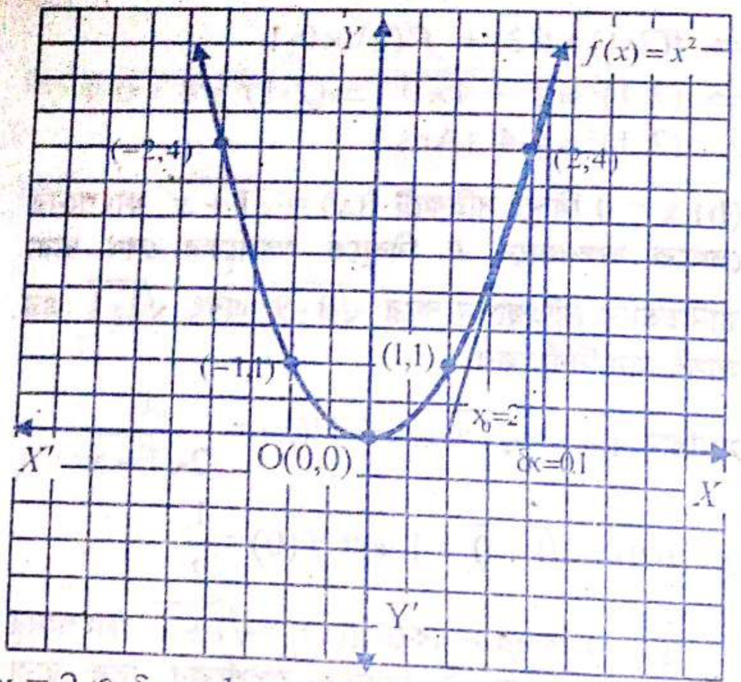
$\sqrt{1+0\cdot1} \approx 1 + \dfrac{1}{2}(0\cdot1)$

$\Rightarrow \sqrt{1\cdot1} \approx 1 + 0\cdot05 \Rightarrow \sqrt{1\cdot1} \approx 1\cdot05$

$\sqrt{0\cdot9}$ এবং $\sqrt{1\cdot1}$ এর আসন্ন মান যথাক্রমে $0\cdot95$ এবং $1\cdot05$.

10. (a) $y = x^2$ **স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে** δy **ও** dy **চিহ্নিত কর।** $x = 2$ **ও** $\delta x = dx = 1$ **হলে** δy **ও** dy **নির্ণয় কর।**

সমাধান: নিমেণ $f(x) = y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(2 + 1) - f(2)$

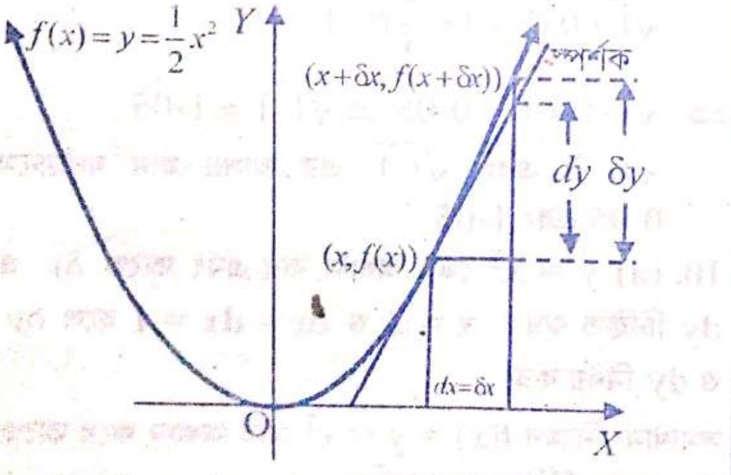
$= f(3) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

এখন, $f(x) = y = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\therefore \quad dy = f'(x)\,dx = f'(2) \times 1 = 2 \times 2 = 4$

(b) $y = \frac{1}{2}x^2$ স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর। $x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: নিম্নে $f(x) = y = x^2$ স্কেচ অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে,

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(3 + 3) - f(3)$

$= f(6) - f(3) = \frac{1}{2}(6^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(36 - 9)$

$= 13.5$

এখন, $f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$\therefore \quad dy = f'(x)\,dx = f'(3) \times 3 = 3 \times 3 = 9$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

11. x এর কোন মানের জন্য, $x(12 - 2x)^2$ এর গুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

মনে করি, $f(x) = x(12 - 2x)^2$

$\therefore \quad f'(x) = x \cdot 2(12 - 2x)(-2) + (12 - 2x)^2 \cdot 1$

$= (12 - 2x)(-4x + 12 - 2x)$ (২)

$= 12(6 - x)(2 - x)$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 12(6 - x)(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 2, 6$ (১)

$\therefore$ $x = 2$ ও 6 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে। (১)

12. নিচের ফাংশনগুলির গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর:

(a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ [ব.'০৩]

সমাধান: ধরি, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

$\therefore \quad f'(x) = x^2 + x - 6$ এবং $f''(x) = 2x + 1$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$

$\therefore \quad x = -3, 2$ (১)

এখন, $f''(-3) = -6 + 1 = -5 < 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

এর মান $= f(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 + 8 = \frac{43}{2}$ (১)

আবার, $f''(2) = 4 + 1 = 5 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

এর মান $= f(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8 = \frac{2}{3}$ (১)

12. (b) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ [কু.'০১]

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$\therefore \quad f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

এবং $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 0, 1, 3$ (১)

এখন, $f''(0) = 0, f''(1) = 20 - 60 + 30 < 0$

এবং $f''(3) = 540 - 540 + 90 > 0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

এর মান $= f(1) = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$ (১)

আবার, $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 3$ এবং

এর মান $= f(3) = 243 - 405 + 135 - 1 = -28$ (১)

13. দেখাও যে, $(1/x)^x$ এর গুরুমান $(e)^{\frac{1}{e}}$.

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = (\frac{1}{x})^x$

$\therefore f'(x) = (\frac{1}{x})^x [x\frac{d}{dx}(\ln\frac{1}{x}) + \ln\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x)]$ (১)

$= (\frac{1}{x})^x [x\frac{d}{dx}(-\ln x) - \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= (\frac{1}{x})^x [x(-\frac{1}{x}) - \ln x.1] = -(\frac{1}{x})^x (1 + \ln x)$

এবং $f''(x) = -(\frac{1}{x})^x \frac{d}{dx}(1 + \ln x) -$

$(1 + \ln x)\frac{d}{dx}\{(\frac{1}{x})^x\}$

$= -(\frac{1}{x})^x \frac{1}{x} - (1 + \ln x)\{-(\frac{1}{x})^x (1 + \ln x)\}$

$= (\frac{1}{x})^x \{-\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\}$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$.

$\therefore -(\frac{1}{x})^x (1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\therefore x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (১)

এখন, $f''(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}(-e + 0) = -e.(e)^{\frac{1}{e}} < 0$

$\therefore x = \frac{1}{e}$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore (1/x)^x$ এর গুরুমান $= f(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}$ (১)

14. দেখাও যে, x^x লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = x^x$

$\therefore f'(x) = x^x [x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x [x.\frac{1}{x} + \ln x.1] = x^x(1 + \ln x)$ (১)

এবং $f''(x) = x^x \frac{d}{dx}(1 + \ln x) -$

$(1 + \ln x)\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x.\frac{1}{x} + (1 + \ln x)\{x^x(1 + \ln x)\}$

$= x^x\{\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\}$ (১)

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad x^x(1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. (১)

এখন, $f''(\frac{1}{e}) = (e)^{\frac{1}{e}}(e + 0) = e.(e)^{\frac{1}{e}} > 0$

$\therefore \quad x^x$ লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$ (১)

15. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 27$ (১)

$= 3(x^2 - 4x + 9) = 3\{(x-2)^2 + 5\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। (১)

16. দেখাও যে, $f(x) = \dfrac{ax + b}{ax + c}$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ঃ এখানে $f(x) = \dfrac{ax + b}{ax + c}$

$\therefore \quad f'(x) = \dfrac{(ax + c).a - (ax + b).a}{(ax + c)^2}$ (১)

$= \frac{(ax+c-ax-b)a}{(ax+c)^2} = \frac{(c-b)a}{(ax+c)^2}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। (১)

17. u বেগে উর্ধ্বমুখী দিকে নিক্ষিপ্ত কোনো কণা t সময়ে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌঁছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore \frac{dh}{dt} = u - \frac{1}{2}g.2t = u - gt$ এবং

$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$ (১)

চরম মানের জন্য, $\frac{dh}{dt} = 0$

$\Rightarrow u - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u}{g}$ (১)

এখন, $t = \frac{u}{g}$ এর জন্য, $\frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$

$\therefore h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ বৃহত্তম হবে যখন $t = \frac{u}{g}$. (১)

$\therefore$ বৃহত্তম উচ্চতা $= u.\frac{u}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{u}{g})^2$

$= \frac{u^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{g} = \frac{u^2}{2g}$ (১)

এবং সেখানে পৌঁছার সময় $= \frac{u}{g}$

18. u বেগে ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত কোন কণা t সময়ে $u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}g\,t^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌঁছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $h = u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}g\,t^2$

$\therefore \frac{dh}{dt} = u\sin\alpha - \frac{1}{2}g.2t = u\sin\alpha - gt$ এবং

$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$ (১)

চরম মানের জন্য, $\frac{dh}{dt} = 0$

$\Rightarrow u\sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ (১)

এখন, $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ এর জন্য, $\frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$

$\therefore u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ বৃহত্তম হবে যখন $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$ (১)

$\therefore$ বৃহত্তম উচ্চতা $= u\sin\alpha.\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{u\sin\alpha}{g})^2$

$= \frac{u^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{u^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

এবং সেখানে পৌঁছার সময় $= \frac{u\sin\alpha}{g}$ (১)

19. $y = x^2 + 2$ বক্ররেখা হতে (3, 2) বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দু হতে (3, 2) বিন্দুর দূরত্ব,

$s = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ (১)

$\Rightarrow s = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$, $[\because y - 2 = x^2]$

$\therefore \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + x^4}\,\{2(x-3) + 4x^3\}$ (১)

$= (2x^3 + x - 3)\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ এবং

$\frac{d^2s}{dx^2} = (2x^3 + x - 3)^2\sqrt{(x-3)^2 + x^4} + (6x+1)\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ (১)

$x = 1$ এর জন্য, $\frac{ds}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2s}{dx^2} = 7\sqrt{5} > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $= \sqrt{(1-3)^2 + 1^4} = \sqrt{5}$ একক (১)

বিকল্প পদ্ধতি : $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2x$ এবং (x, y) ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{y-2}{x-3}$. (২)

$\therefore$ $(3,2)$ বিন্দু হতে $y = x^2 + 2$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুটি ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত হলে,

$$2x \times \frac{y-2}{x-3} = -1 \Rightarrow 2x \cdot x^2 = -(x-3)$$

$\Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$

$\therefore x = 1$ ও $y = 1^2 + 2 = 3$ (১)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব = $(1, 3)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$ একক। (১)

20. জনৈক কৃষক 800 ফুট দীর্ঘ্য তারের বেড়ার সাহায্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র ঘিরে ফেলতে পারে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হওয়া দরকার।

সমাধান ঃ মনে করি, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x ফুট ও প্রস্থ y ফুট। তাহলে,

$2(x + y) = 800 \Rightarrow x + y = 400$

$\Rightarrow y = 400 - x$

এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = xy = x(400 - x)$

$= 400x - x^2$ (১)

$\therefore \frac{dA}{dx} = 400 - 2x$ এবং $\frac{d^2A}{dx^2} = -2$ (১)

বৃহত্তম ক্ষেত্রফলের জন্য, $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 400 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 200$ (১)

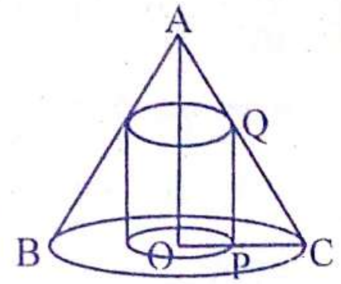
এক্ষেত্রে, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, $y = 400 - 200 = 200$

$\therefore$ $x = 200$, $y = 200$ এর জন্য A এর মান বৃহত্তম হয়।

$\therefore$ কৃষক তারের বেড়া দ্বারা যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র ঘিরে ফেলে তার দৈর্ঘ্য 200 ফুট এবং প্রস্থ 200 ফুট। (১)

21. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

সমাধান ঃ মনে করি কোণের উচ্চতা OA = h, ভূমির ব্যাসার্ধ OC = r . এ কোণের মধ্যে একটি সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে যার ভূমির ব্যাসার্ধ OP = x.



এখন, ΔPQC ও ΔAOC সদৃশকোণী ত্রিভূজদ্বয় হতে পাই, $\frac{PQ}{OA} = \frac{PC}{OC} \Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{OC - OP}{OC}$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{h} = \frac{r-x}{r} \Rightarrow PQ = \frac{h(r-x)}{r} \quad (১)$$

সিলিন্ডারের বক্রতল S হলে, $S = 2\pi x \times PQ$

$$\Rightarrow S = 2\pi x \frac{h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2) \quad (১)$$

$$\therefore \frac{dS}{dx} = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x), \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi h}{r}(0 - 2) \quad (১)$$

এখন গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য , $\frac{dS}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{2\pi h}{r}(r - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2} \quad (১)$$

অর্থাৎ সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ (কোণের ভূমির ব্যাসার্ধ)

এক্ষেত্রে, $\frac{d^2S}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0$

$\therefore$ সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হলে সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক। (১)

22. একটি আম বাগানে প্রতি একরে 30টি গাছ আছে এবং প্রতি গাছে গড়ে 400টি আম ধরে। প্রতি একরে অতিরিক্ত একটি গাছের জন্য মোটামোটি 10টি আমের ফলন কমে। আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে কতটি গাছ থাকা উচিত?

সমাধান ঃ মনে করি, সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে গাছের সংখ্যা $(30 + x)$ থাকা প্রয়োজন। তাহলে, প্রতি গাছে আমের সংখ্যা $= (400 - 10x)$. (১)

আমের ফলন y হলে, $y = (30 + x)(400-10x)$ (১)

$\Rightarrow y = 1200 + 100x - 10x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 100 - 20x$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -20$ (১)

সর্বোচ্চ ফলনের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5$

এক্ষেত্রে, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$

$\therefore$ x = 5 হলে ফলন সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে (30 + 5) = 35 টি গাছ থাকা উচিত। (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ

1. $y = \cos x + \sin x$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$ [CU 07-08]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = -\sin x + \cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x - \sin x$

2. কি শর্তে $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = 0$

[SU 08-09; CU 03-04]

Sol^n. $n > m$

3. $y = x^n$ ফাংশনের (n + 1) তম অন্তরক সহগ কত? [CU 07-08]

Sol^n. $y_n = n!$ $\therefore y_{n+1} = 0$

4. $y = e^{ax}$ ফাংশনের y_n কত হবে? [CU 06-07]

Sol^n. $y_n = a^n e^{ax}$

5. $y = (2x-5)^3$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ কত? [IU 02-03]

Sol^n. $\frac{d^3y}{dx^3} = {}^3P_3 . 2^3 (2x-5)^{3-3} = 6.8 = 48$

6. $x^2 + y^2 = 25$ হলে (3, − 4) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ কত? [DU 01-02; NU 06-07]

Sol^n. $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\therefore$ (3, −4) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$

7. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **বক্ররেখার মূলবিন্দুতে নতির পরিমাণ কত?** [DU 00-01]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12 = -12$ (মূলবিন্দুতে)

8. $3x^2 - 7y^2 + 4xy - 8x = 0$ **বক্ররেখাটির (−1, 1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত?** [DU 02-03]

Sol^n. $6x - 14y\frac{dy}{dx} + 4x\frac{dy}{dx} + 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow -6 - 14\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{-18} = -\frac{5}{9}$

9. $y = x^{\frac{1}{2}}$ **বক্ররেখার যেবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে তা হল–** [CU 07-08, 04-05]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} = \tan 45^0 = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ এবং $y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ বিন্দু $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

10. $y = x^2 + 1$ হলে কোন বিন্দুতে y ও $\frac{dy}{dx}$ এর মান সমান? [IU 07-08]

Sol^n. $\frac{dy}{dx} = 2x$ $\therefore y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 + 1 = 2$

$\therefore$ বিন্দুটি (1, 2)

11. কোন গতিশীল বস্তু t সেকেন্ডে $5t + 2t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করলে 3 সেকেন্ড পর তার গতিবেগ কত হবে? [KU 06-08]

Sol^n. $S = 5t + 2t^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v = 5 + 4t$

$\therefore$ 3 সেকেন্ড পর গতিবেগ = 5 + 12 = 17 ft/sec

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. $Sol^n : \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$ [DU 13-14]

$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2.1} = \frac{-\cos 0}{2} = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ Ans. (b)

2. Sol^n : সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

3. $Sol^n : f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$\therefore f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{1}{2} + 1(x-1)$

$= x - \frac{1}{2} = x - 0{\cdot}5$ $\therefore$ Ans. (d)

4. $Sol^n : \delta y = f(x+\delta x) - f(x)$

$= f(2+1) - f(2) = \frac{1}{2}(3^2 - 2^2)$

$= \frac{1}{2}(9-4) = \frac{5}{2} = 2{\cdot}5$ $\therefore$ Ans.(b)

5. $Sol^n : dx = \delta x = 1$

$f'(x) = x \;\therefore f'(1) = 1$

$dy = f'(1)\,dx = 1\times 1 = 1$ $\therefore$ Ans. (a)

6. $Sol^n : f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

এখন, $f(1) = 3 - 6 + 4 = 1$

$\therefore$ চরমবিন্দু $(1, 1)$. $\therefore$ Ans. (d)

7. $Sol^n : \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x^2)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(4x^2)\times 8x}{1} = \cos 0\times 8\times 0 = 0$

$\therefore$ Ans. (b)

8. $Sol^n : \frac{d}{dx}(x^x) = x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x[x\times\frac{1}{x} + \ln x.1] = x^x(1+\ln x)$

$\therefore$ Ans. (d)

9. $Sol^n : f(x) = x + x^{-1} \;\therefore f'(x) = 1 - x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$.

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ এর জন্য $f''(x) < 0$ এবং $f(x) = -2$

$\therefore$ Ans. (a)

10. $Sol^n : y = x^3 - 5x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3} = 3! = 6$.

$\therefore$ Ans. (c)

11. $Sol^n : y = x + x^{-1}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

রেখাটির ঢাল শূন্য হলে, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = \pm 1$ $\therefore$ Ans. (b)

12. $Sol^n : \lim_{x\to\alpha}\frac{4+3x-x^2}{7+2x+3x^2}$ [দি.বো. ২০১৭]

$= \frac{\text{coefficient of } x^2}{\text{coefficient of } x^2} = \frac{-1}{3}$ $\therefore$ Ans. (c)

13. $Sol^n : y = x^2 - x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 1$

(2,3) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 2\times 2 - 1 = 3$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{3}$ $\therefore$ Ans.(d) [দি.বো. '১৭]

14. $Sol^n : \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

$\therefore$ Ans. (a) [দি.বো. ২০১৭]

15. $Sol^n : \int \sec^2\frac{1}{2}x\,dx = 2\tan\frac{1}{2}x + C$

$\therefore$ Ans.(b) [দি.বো. ২০১৭]

16. $Sol^n : \lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1} - 3^{-x}}{4.3^x + 3^{-x}}$ [সি. বো. ২০১৭]

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x(3-3^{-2x})}{3^x(4+3^{-2x})}=\frac{(3-0)}{(4+0)}=\frac{3}{4}$$

$\therefore$ Ans. (b)

17. **Sol^n :** $\frac{d}{dx}\log_2 x=\log_2 e.\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln 2}$

$\therefore$ Ans. (d) [সি. বো. ২০১৭]

18. **Sol^n :** $\frac{d}{dx}(5^x)=5^x\ln 5$

$\therefore$ Ans. (c) [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

19. **Sol^n :** $\frac{d}{dx}(a^{10})=0$

$\therefore$ Ans. (d) [য .বো.'১৭]

20. **Sol^n :** সব তথ্যই সত্য।

$\therefore$ Ans.(d) [য .বো.'১৭]

21. **Sol^n :** $y=e^{\sqrt{x}}$ $\therefore$ $y_1=e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$=e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\therefore$ Ans.(c) [রা.বো.'১৭]

22. **Sol^n :** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2-4}=\frac{2}{3}$ [রা.বো.'১৭]

$\therefore$ Ans. (c)

23. চরম মানের জন্য $f'(x)=x^2-5x+6$

$=(x-3)(x-2)=0\Rightarrow x=2,3$

$\therefore$ Ans. (d) [রা.বো.'১৭]

24. $\frac{d}{dx}(e^{\sin^2 x})=e^{\sin^2 x}(2\sin x\cos x)$

$=e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ $\therefore$ Ans. (a) [কু.বো.'১৭]

25. $f(x)=\sin x$ $\therefore$ $f'(x)=\cos x$ [কু.বো.'১৭]

$f'(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}>0$ $\therefore$ Ans. (a)

26. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty$ $\therefore$ Ans.(a) [ব.বো.'১৭]

27. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sin 2x}/\sin x+\cos x\right)$ [ব.বো.'১৭]

$\frac{d}{dx}(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x})=\frac{d}{dx}(1)=0$

$\therefore$ Ans. (b)

28. **Sol^n :** $\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{2}-3x)}{3x}$ [চ. বো. ২০১৭]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-3x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$$

$\therefore$ Ans. (c)

29. **Sol^n :** $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x\Rightarrow f'''(x)=\sin x$

$\Rightarrow f'''(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ [চ.বো.২০১৭]

$\therefore$ Ans. (d)

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ এবং $g(x)=x^2$

(a) $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IXG এর 2(k) দ্রষ্টব্য।

(b) দেখাও যে, $f(x)$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IXK এর 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) $g(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IXK এর 10(a) দ্রষ্টব্য।

2. $y(x-2)(x-3)-x+7=0$ ... ... (i)

এবং $y=\sqrt{(4+3\sin x)}$ ... ... (ii)

(a) $x=1$ ও $\delta x=dx=1$ হলে $f(x)=x+\frac{1}{x}$ এর জন্য δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$x=1$ ও $\delta x=dx=1$ হলে,

$\delta y=f(x+\delta x)-f(x)=f(1+1)-f(1)$

$=f(2)-f(1)=2+\frac{1}{2}-(1+\frac{1}{1})$

$=2+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$ (Ans.)

এখন, $f(x)=y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore dy=f'(x)\,dx=f'(1)\times 1=1-1=0$

(b) (ii) এর সাহায্যে দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=4$

সমাধান: প্রশ্নমালা IX I এর 9(b) দ্রষ্টব্য।

(c) (i) যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX J এর 3 দ্রষ্টব্য।

3. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

$y=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$

(a) $x^2\sin^{-1}(1-x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ব.'০৮;দি.'১২; ঢা.'১৪]

সমাধান: প্রশ্নমালা IX F এর 2(b) দ্রষ্টব্য।

(b) L এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX A এর 7(a)দ্রষ্টব্য।

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে দেখাও যে,

$x^2y_2+xy_1+y=0$

সমাধান: প্রশ্নমালা IX I এর 8(a) দ্রষ্টব্য।

4. $f(x)=17-15x+9x^2-x^3$ একটি ফাংশন ।

(a) $x=1$ বিন্দুর সন্নিকটে $g(x)=x+\frac{1}{x}$ এর যোগাশ্রয়ী অসন্নমান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $g(x)=x+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore g(1)=1+1=2,\ g'(1)=1-1=0$

$x=1$ বিন্দুর সন্নিকটে $g(x)$ এর যোগাশ্রয়ী অসন্নমান, $g(x)\approx 2+g'(1)(x-1)$

[$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ সূত্র দ্বারা]

$\Rightarrow g(x)\approx 2$ (Ans.)

(b) f(x) কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ -3 দ্রষ্টব্য।

(c) f(x) এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ -3 দ্রষ্টব্য।

5. $f(x)=\text{coesc } x$

$g(x)=17-15x+9x^2-x^3$

(a) প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=6$

সমাধান: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$

[রা.'০৯; ব.'১১; ঢা.'১৪; কু.'১৪; সি.'১৯; মা.'১৩]

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})$

$=3+\sqrt{4+5}=6$ (Proved)

(b) মূল নিয়মে $f(\frac{\pi}{2}+x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

$f(x)=\text{cosec } x$,

$f(\frac{\pi}{2}+x)=\text{cosec}(\frac{\pi}{2}+x)=\sec x.$

সমাধান: প্রশ্নমালা IX C এর ১২.৮ দ্রষ্টব্য।

(c) যে সকল ব্যবধিতে $g(x)$ ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান তা নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ 3(ii) দ্রষ্টব্য।

6. $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = e^{-x}$

(a) x-এর সাপেক্ষে $\frac{1-\cot x}{1+\cot x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cot x}{1+\cot x}\right)$

$$= \frac{(1+\cot x)\frac{d}{dx}(1-\cot x) - (1-\cot x)\frac{d}{dx}(1+\cot x)}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cot x)\operatorname{cosec}^2 x + (1-\cot x)\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{2\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

(b) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(y)-g(y)}{\sin y}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = e^x, \therefore f(y) = e^y,$

$g(x) = e^{-x}, \therefore g(y) = e^{-y}.$

$$\therefore \lim_{y\to 0}\frac{f(y)-g(y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - e^{-y}}{\sin y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{e^{2y}-1}{e^y \sin y} = \frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{2y}-1}{2y}}{e^0 \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}$$

$$= 2.\frac{1}{1.1} = 2 \text{ Ans.} \quad \left[\because \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1\right]$$

(c) $y = f(a\sin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে,

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y$

সমাধান: $f(x) = e^x$

$\therefore y = f(a\sin^{-1}x) = e^{a\sin^{-1}x}.$

অতপর প্রশ্নমালা IX I এর 10(a) দ্রষ্টব্য।

7. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ এবং

$g(x) = \tan x$

(a) $e^{-\sqrt{\tan 3x}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(e^{-\sqrt{\tan 3x}})$

$$= -e^{-\sqrt{\tan 3x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{\tan 3x})$$

$$= -e^{-\sqrt{\tan 3x}}.\frac{1}{2\sqrt{\tan 3x}}\frac{d}{dx}(\tan 3x)$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-\sqrt{\tan 3x}}.\frac{\sec^2 3x}{\sqrt{\tan 3x}}.$$

(b) যে সকল ব্যবধিতে f(x) বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ হলে, $6(x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 2$

$x = 1, 2$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<1$, $1<x<2$ এবং $x>2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x<1$ এর জন্য, $x-1<0$ ও $x-2<0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore$ $-\infty<x<1$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

আবার, $1<x<2$ এর জন্য $x-1>0$ ও $x-2<0$, কাজেই $f'(x)<0$.

$\therefore$ $1<x<2$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে, $x>2$ এর জন্য $x-1>0$ ও $x-2>0$, কাজেই $f'(x)>0$.

$\therefore$ $2<x<\infty$ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $-\infty<x<1$ ও $2<x<\infty$ ব্যবধিতে f(x) বৃদ্ধি পায় এবং $1<x<2$ ব্যবধিতে f(x) হ্রাস পায়।

(c) $gof(x) + \{g(x)\}^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $gof(x) = g\{f(x)\}$

$= g(2x^3 - 9x^2 + 12x - 3)$

$= \tan(2x^3 - 9x^2 + 12x - 3)$

$\therefore \frac{d}{dx}[gof(x) + \{g(x)\}^{f(x)}]$

$+\frac{d}{dx}(\tan x)^{2x^3-9x^2+12x-3}$

$=\frac{d}{dx}\{\tan(2x^3-9x^2+12x-3)\}$

$= \sec^2(2x^3-9x^2+12x-3) \times$

$(6x^2-18x+12) + (\tan x)^{2x^3-9x^2+12x-3}$

$[(2x^3-9x^2+12x-3)\frac{1}{\tan x}\sec^2 x +$

$\log(\tan x)\{6x^2-18x+12\}]$

$=(6x^2-18x+12)\sec^2 f(x) + g(x)^{f(x)}$

$[\frac{f(x)}{\sin x\cos x} + (6x^2-18x+12)\log(\tan x)]$

8. $f(x) = \sec 5x$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x - 3$

(a) x-এর সাপেক্ষে $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX D এর 3(d) দ্রষ্টব্য।

(b) লিমিট হিসাবে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX C এর ১২.৮ দ্রষ্টব্য।

(c) $g(x)$ এর গুরুমান নির্ণয় কর।

সমাধান : $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x - 3$

$\therefore$ $g'(x) = x^2 - 3$ এবং $g''(x) = 2x$

$\therefore$ চরমবিন্দুর জন্য, $g'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

এখন, $g''(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} < 0.$

$g''(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} > 0$

$\therefore$ $x = -\sqrt{3}$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা

$\therefore g(-\sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) - 3$

$= 2\sqrt{3} - 3$ Ans.

9. $y = x^2 + 2x \cdots (i)$,

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5.9^x - 9^{-x}}{4.9^x + 9^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5.9^x - 9^{-x}}{4.9^x + 9^{-x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5.9^x - \frac{1}{9^x}}{4.9^x + \frac{1}{9^x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9^x(5 - \frac{1}{9^{2x}})}{9^x(4 + \frac{1}{9^{2x}})}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{1}{9^{2x}}}{4 + \frac{1}{9^{2x}}} = \frac{5-0}{4+0} = \frac{5}{4}$

(b) $f(x)$ যে ব্যবধিতে হ্রাস বা বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

$\therefore$ $f'(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

$x = 2$ এবং $x = -3$ হলে $f'(x) = 0$ হয়।

$x = -3, 2$ মানদ্বয় যেকোনো বাস্তব সংখ্যাকে $x<-3$, $-3 < x < 2$ এবং $x>2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

$x<-3$ এর জন্য $f'(x) > 0.$

$\therefore$ $x<-3$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

$-3 < x < 2$ এর জন্য $f'(x) < 0$

$\therefore$ $-3 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

আবার, $x>2$ এর জন্য $f'(x) > 0.$

$\therefore$ $x>2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

(c) (i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে মূলবিন্দু O ও A বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, বক্ররেখাটির লঘুমান B বিন্দুতে বিদ্যমান। AB এর নতি নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^2 + 2x \cdots \cdots (i)$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে $A(x_1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ $x^2 + 2x$

$\therefore$ $x_1^2 + 2x_1 = 0, \therefore x_1 = 0, -2.$

$\therefore$ $A \equiv (-2, 0)$

এখন, $y_1 = 2x + 2$ এবং $y_2 = 2$

চরমবিন্দুর জন্য, $y_1 = 0$

$\Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = -1$ বিন্দুতে, $y_2 = 2 > 0$ এবং

$y = (-1)^2 + 2(-1) = -1$

$\therefore$ $x = -1$ বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখাটির লঘুমান বিদ্যমান। প্রশ্নমতে, $B \equiv (-1,-1)$

AB এর নতি $= \dfrac{0-(-1)}{-2-(-1)} = \dfrac{1}{-1} = -1.$

10. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

(a) $(\sin x)^{\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $y = (\sin x)^{\sin x}$

$\therefore$ $\ln y = \sin x\ (\ln \sin x)$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x + \ln \sin x \times \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\sin x}[\cos x + \cos x \ln \sin x]$$

(b) মূলবিন্দু হতে $f(x)$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3.$

$\therefore$ $(2, -2)$ বিন্দুতে $f'(x) = 3 \times 4 - 3 = 9$

$f(x)$ বক্ররেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - (-2) = 9(x - 2)$

$\Rightarrow 9x - y - 20 = 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু হতে এ রেখার দূরত্ব $= \dfrac{|-20|}{\sqrt{9^2 + (-1)^2}}$

$= \dfrac{20}{\sqrt{82}}$ একক

(c) $f(x)$ বক্ররেখার A বিন্দুতে গুরুমান ও B বিন্দুতে লঘুমান বিদ্যমান। AB নির্ণয় কর।

$y = x^3 - 3x + 2 \therefore \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$ এবং

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1$এর জন্য, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6.1 = 6 > 0$ এবং

$y = 1^3 - 3.1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

আবার, $x = -1$ এর জন্য,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6.(-1) = -6 < 0$ এবং

$y = (-1)^3 - 3.(-1) + 2$

$= -1 + 3 + 2 = 4$

$\therefore$ $f(x)$ বক্ররেখার $(-1, 4)$ বিন্দুতে গুরুমান ও $(1, 0)$ বিন্দুতে লঘুমান বিদ্যমান।

প্রশ্নমতে, $A \equiv (-1, 4), B \equiv (1, 0).$

$\therefore$ $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}.$

11. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} \cdots$ (i),

$x^2 + y^2 = 16 \cdots$ (ii)

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} 5^x \tan\dfrac{a}{5^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\dfrac{a}{5^x} = \theta.$

এখানে $x \to \infty$ বলে $5^x \to \infty$

$\therefore$ $\theta = \dfrac{a}{5^x} \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} 5^x \sin\frac{a}{5^x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{a}{\theta}\sin\theta$$

$$= a\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = a.1 = a \text{ (Ans.)}$$

(b) $\{f(x)\}^{\sin^{-1}x} + (\sin^{-1}x)^{f(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}[\{f(x)\}^{\sin^{-1}x} + (\sin^{-1}x)^{f(x)}]$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x} \times \dfrac{d}{dx}\{\sin^{-1}x \ln f(x)\} +$

$(\sin^{-1}x)^{f(x)} \times \dfrac{d}{dx}\{f(x)\ln(\sin^{-1}x)\}$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x}[\sin^{-1}x \frac{d}{dx}(\ln\frac{x^3}{x^2+1}) +$

$\ln f(x)\frac{d}{dx}\sin^{-1}x]$

$+(\sin^{-1}x)^{f(x)}[f(x)\frac{d}{dx}\ln(\sin^{-1}x)+$

$\ln(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{x^2+1})]$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x}[\sin^{-1}x \times \frac{x^2+1}{x^3} \times \frac{(x^2+1)3x^2 - x^3.2x}{(x^2+1)^2}$

$+\ln f(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}] + (\sin^{-1}x)^{f(x)}[f(x)$

$\times \frac{1}{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$

$\ln(\sin^{-1}x).\frac{(x^2+1)3x^2 - x^3.2x}{(x^2+1)^2}]$

$= \{f(x)\}^{\sin^{-1}x}[\frac{x^2+3}{x(x^2+1)}\sin^{-1}x + \frac{\ln f(x)}{\sqrt{1-x^2}}] +$

$(\sin^{-1}x)^{f(x)}[\frac{f(x)}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} +$

$\frac{x^2(x^2+3)\ln(\sin^{-1}x)}{(x^2+1)^2}]$

(c) (ii) নং বৃত্তের যে যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে অন্তরজের সাহায্যে বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 = 16 \cdots \cdots$ (i)

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

কিন্তু স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{3} = -\frac{x}{y}$

$\therefore x = -\sqrt{3}y$........ (ii).

(i) হতে পাই, $(-\sqrt{3}y)^2 + y^2 = 16$

$\Rightarrow 3y^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ (ii) হতে পাই, $x = \pm 2\sqrt{3}$

সমীকরণ (ii) হতে দেখা যায় x ও y এর মান বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{3},-2)$ ও $(-2\sqrt{3}, 2)$

12. $f(x) = \cot 3x$, $g(x) = \cos 3x$

(a) $f'(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \cot 3x$,

$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}(\cot 3x)$

$= -\text{cosec}^2 3x\frac{d}{dx}(3x)$

$= -3\text{cosec}^2 3x$ (Ans.)

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{2}-x)+g(\frac{\pi}{2}-x)}{x^3}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{2}-x)+g(\frac{\pi}{2}-x)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cot 3(\frac{\pi}{2}-x)+\cos 3(\frac{\pi}{2}-x)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cot(\frac{3\pi}{2}-3x)+\cos(\frac{3\pi}{2}-3x)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x - \sin 3x}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x(1-\cos 3x)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x.2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^3}$

$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x} \times 3 \times \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2 \times \frac{9}{4}$

$= 2\times 1\times 3\times 1\times\frac{9}{4} = \frac{27}{2}$ (Ans.)

(c) x এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $f(x) = A = \cot 3x$,

$\therefore\ f(x+h) = \cot 3(x+h)$.

সজ্ঞানুযায়ী পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cot 3x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cot 3(x+h)-\cot 3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\cos 3(x+h)}{\sin 3(x+h)} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 3x\cos 3(x+h) - \cos 3x \sin 3(x+h)}{h\sin 3(x+h)\sin 3x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(3x-3x-3h)}{h\sin 3(x+h)\sin 3x}$$

$$= -3\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{3h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin 3(x+h)\sin 3x}$$

$$= -3.1.\frac{1}{\sin 3x.\sin 3x} = -3\operatorname{cosec}^2 3x.$$

13. $h(x) = \ln x$ এবং $h'(x) = g(x)$

(a) $(\log_{10} x)^{x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\{(\log x)^{x^2}\}$

$$= (\log_{10} x)^{x^2}[\frac{d}{dx}\{x^2 \ln(\log_{10} x)\}]$$

$$= (\log_{10} x)^{x^2}[x^2.\frac{1}{\log_{10} x}.\frac{1}{x}\log_{10} e$$

$$+ \ln(\log_{10} x).2x]$$

$$= (\log x)^{x^2}[\frac{x\log_{10} e}{\log_{10} x} + 2x\ln(\log_{10} x)]$$

(b) প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d^2}{dx^2}\{h(x)g(x)\} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

সমাধান: $h(x) = \ln x$,

$\therefore\ h'(x) = \frac{1}{x} = g(x)$.

ধরি, $y = h(x)g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

অতপর প্রশ্নমালা IX(I) এর উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।

(c) $x^2 g'(x) + h'(\tan 2x) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} 4x = 1$

সমাধান: $x^2 g'(x) + h'(\tan 2x) = 0$

$$\Rightarrow x^2.\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\tan 2x} = 0$$

$$\Rightarrow -1 + \cot 2x = 0 \Rightarrow \cot 2x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 1 \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

আবার, $\cot 2x = 1 \Rightarrow \cot^2 2x = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 2x - 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2x \sin 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2x\cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2}{\sin 4x} = 2$$

$\therefore\ \operatorname{cosec} 4x = 1$. (Showed.)

14. $f(x) = e^x$

(a) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX(F) এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

(b) $f(x) = e^x$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে y অক্ষ ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = f(x) = e^x$ বক্ররেখা যে বিন্দুতে y অক্ষকে ছেদ করে সে বিন্দুর x - স্থানাঙ্ক শূন্য।

$\therefore\ y = e^0 = 1$.

আবার, $\frac{dy}{dx} = e^x$.

$\therefore$ (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= e^0 = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,

$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

(c) দেখাও যে, $4f(x) + 9f(-x)$ এর লঘুমান 12।

প্রমাণ : মনে করি, $y = 4f(x) + 9g(x)$

$\Rightarrow y = 4e^{x} + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^{x} - 9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{x} + 9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 4e^{x} - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^{x} = \frac{9}{e^{x}} \Rightarrow (e^{x})^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore e^{x} = \pm\frac{3}{2}$

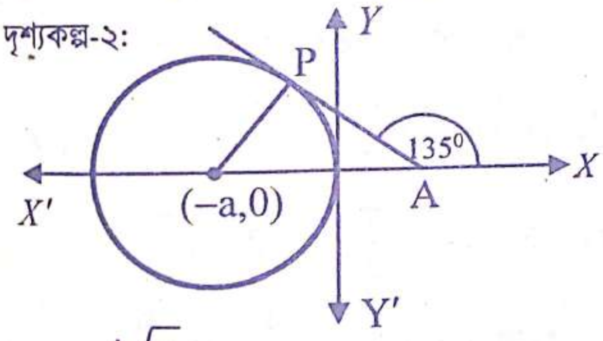
$e^{x} = \frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.\frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} > 0$

$\therefore e^{x} = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^{x} + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 4.\frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

15. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x^2e^{2x}\log_e 2x$

দৃশ্যকল্প-২:



(a) $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX(F) এর 4(e) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $f'(2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^2e^{2x}\log_e 2x$

$\therefore f'(x) = x^2e^{2x}\frac{d}{dx}(\log_e 2x) +$

$x^2\log_e 2x\frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2x}\log_e 2x\frac{d}{dx}(x^2)$

$= x^2e^{2x} \times \frac{1}{2x}.2 + x^2\log_e 2x.(2e^{2x})$

$+ e^{2x}\log_e 2x.(2x)$

$= xe^{2x} + 2x^2e^{2x}\log_e 2x + 2xe^{2x}\log_e 2x$

$\therefore f'(2) = 2e^4 + 8e^4\log_e 4 + 4e^4\log_e 4$

$= 2e^4 + 12e^4\log_e 4$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত বৃত্তের AP স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর (অন্তরজের সাহায্যে)।

সমাধান: দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + a)^2 + (y - 0)^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + y^2 = 0$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -(x + a) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের P(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$

আবার, PQ রেখার ঢাল $= \tan 135^0$

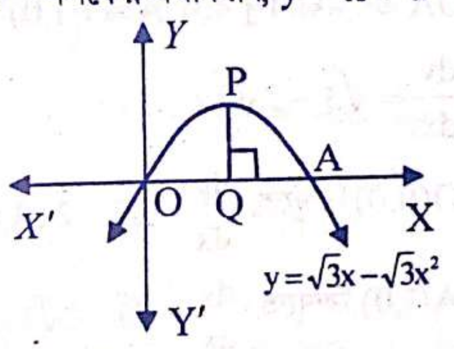
$= \tan(180^0 - 45^0) = -\tan 45^0 = -1$

PQ রেখা প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক বলে,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y} = -1 \Rightarrow x + a = y$

$\therefore$ AP স্পর্শকের সমীকরণ, $y = x + a$

16.



(a) $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX(F) এর 4(i) দ্রষ্টব্য।

(b) উদ্দীপকে উল্লেখিত বক্ররেখার চরমবিন্দু P হলে PQ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2$.

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$.

চরম মানের জন্য, $\dfrac{dy}{dx} = 0$

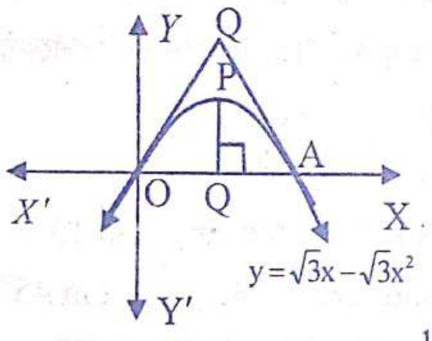
$\Rightarrow \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{1}{2}$ বিন্দুতে, $y = \sqrt{3}.\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}.\dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

প্রদত্ত বক্ররেখার চরমবিন্দু P বলে $PQ = y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(c) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, O ও P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x- অক্ষের সাথে সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

প্রমাণ:



এখানে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{4})$.

$OA \perp PQ$ বলে $Q \equiv (\dfrac{1}{2}, 0)$ এবং Q, OA এর মধ্যবিন্দু বলে $A \equiv (1,0)$

$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$

O(0,0) বিন্দুতে, $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 0 = \sqrt{3}$

A(1,0) বিন্দুতে, $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 1 = -\sqrt{3}$

$\therefore$ O(0,0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক OQ এর সমীকরণ, $y = \sqrt{3}\,x \cdots \cdots$ (i)

A(1,0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AQ এর সমীকরণ, $y - 0 = -\sqrt{3}\,(x - 1)$

$\Rightarrow y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3} \cdots \cdots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই,

$\sqrt{3}\,x = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3} \Rightarrow 2x = 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ এবং $y = \sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দু $Q(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

এখন, OA = 1,

$OQ = \sqrt{(\dfrac{1}{2})^2 + (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$

$AQ = \sqrt{(1 - \dfrac{1}{2})^2 + (0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$

$\therefore$ OAQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ O ও P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x- অক্ষের সাথে সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

17. $f(\theta) = \cos\dfrac{\theta}{2} - \sin\dfrac{\theta}{2}$, $y = x^x . x^{\cos^{-1}x}$

(a) দেখাও যে, $f(\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$

প্রমাণ: $f(\theta) = \cos\dfrac{\theta}{2} - \sin\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore f(\dfrac{\pi}{4}) = \cos\dfrac{\pi}{8} - \sin\dfrac{\pi}{8}$

$= \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{8})$

$= \sqrt{2}(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8} - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{8})$

$= \sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{8}) = \sqrt{2}\sin\dfrac{2\pi - \pi}{8}$

$\therefore f(\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$

(b) লেখচিত্রের সাহায্যে $f(\theta) = 0$ এর সমাধান কর; যেখানে $45^0 \le \theta \le 135^0$.

সমাধান : দেওয়া আছে , $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = 0$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$

মনে করি , $y = \cos\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore \ y = \sin\frac{\theta}{2}$ এবং $y = \cos\frac{\theta}{2}$

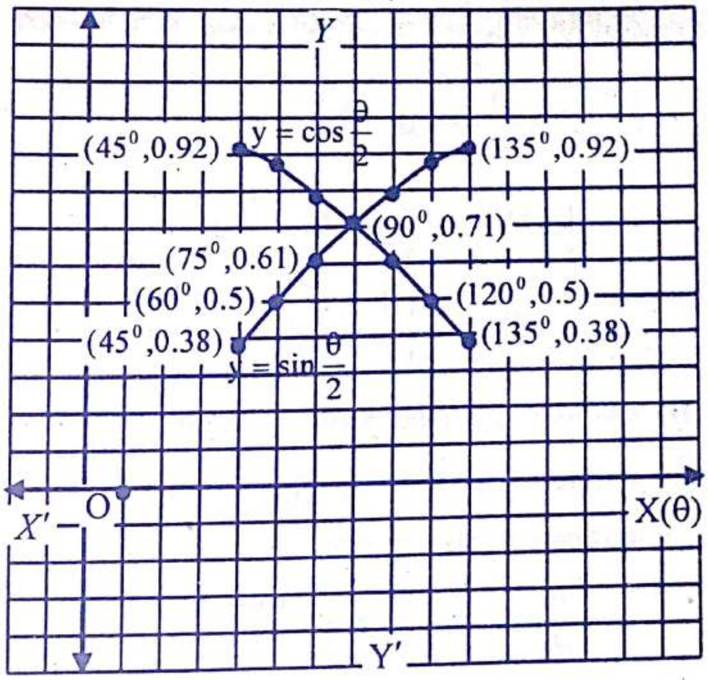
নিচের তালিকায় $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ এর জন্য $y = \sin\frac{\theta}{2}$ ও $y = \cos\frac{\theta}{2}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি:

θ	45^0	60^0	75^0	90^0
$y = \sin\frac{\theta}{2}$	0.38	0.5	0.61	0.71
$y = \cos\frac{\theta}{2}$	0.92	0.87	0.79	0.71
x	105^0	120^0	135^0	
$y = \sin\frac{\theta}{2}$	0.79	0.87	0.92	
$y = \cos\frac{\theta}{2}$	0.61	0.5	0.38	

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $=15^0$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1একক।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin\frac{\theta}{2}$ ও $y = \cos\frac{\theta}{2}$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে , প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজ হচ্ছে 90^0. সুতরাং , নির্ণেয় সমাধান , $\theta = 90^0$.



(c) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^x . x^{\cos^{-1}x}$

$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^x . x^{\cos^{-1}x})$

$= x^x \frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1}x}) + x^{\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}(x^x)$

$= x^x . x^{\cos^{-1}x}[\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)] + x^{\cos^{-1}x}.x^x[x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)]$

$= x^x . x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x} + \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}] + x^{\cos^{-1}x}.x^x[x.\frac{1}{x} + \ln x.1]$

$= x^x . x^{\cos^{-1}x}[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 + lnx]$

18. (i) $f(x) = 5^{2x}$

(ii) $g(x) = 2x^3 - 24x + 11$

(a) $\lim_{x\to\infty} 5^x \tan\frac{a}{5^x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\frac{a}{5^x} = \theta$. এখানে $x \to \infty$ বলে $5^x \to \infty$

$$\therefore \quad \theta = \frac{a}{5^x} \to 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} 5^x \sin\frac{a}{5^x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{a}{\theta}\sin\theta$$

$$= a\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = a.1 = a \text{ (Ans.)}$$

(b) মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 5^{2x}$. $\therefore f(x+h) = 5^{2(x+h)}$

অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(5^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{5^{2x+2h}-5^{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(5^{2x}.5^{2h}-5^{2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{5^{2x}}{h}(5^{2h}-1)$$

$$= 5^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{1+2h\ln 5+\frac{(2h)^2}{2!}(ln5)^2 + \cdots\cdots\}-1]$$

$$= 5^{2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\ 2h\ ln5 + \frac{2^2h^2}{2!}(ln5)^2 + \frac{2^3h^3}{3!}(ln5)^3 + \cdots\cdots]$$

$$= 5^{2x}\lim_{h\to 0}[2ln5 + \frac{2^2h}{2!}(ln5)^2 + \frac{2^3h^2}{3!}(ln5)^3 + \text{h-এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ}\ ]$$

$$= 5^{2x}.[\ 2ln5 + 0 + 0 + \cdots\ ] = 2.5^{2x}\ ln5$$

$\therefore$ $f(x)$ এর অন্তরজ $= 2.5^{2x}\ ln5$

(c) যে সকল ব্যবধিতে $g(x)$ ক্রমবর্ধমান তা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$g(x) = 2x^3 - 24x + 11$$

$$\therefore \quad g'(x) = 6x^2 - 24x = 6x(x-4)$$

$g'(x) = 0$ হলে $6x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$

$x = 0, 4$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<0$, $0<x<4$ এবং $x>4$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x<0$ এর জন্য $x<0$ ও $(x-4)<0$, কাজেই $g'(x)>0$.

$\therefore -\infty<x<0$ ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

আবার, $0<x<4$ এর জন্য $x>0$ ও $(x-4)<0$, কাজেই $g'(x)<0$.

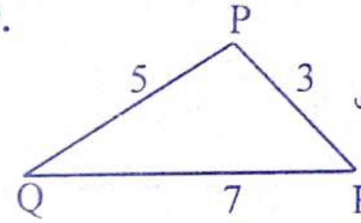
$\therefore$ $0<x<4$ ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে $x>4$ এর জন্য $x>0$ ও $(x-4)>0$, কাজেই $g'(x)>0$.

$\therefore$ $4<x<\infty$ ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $-\infty<x<0$ ও $4<x<\infty$ ব্যবধিতে $g(x)$ ক্রমবর্ধমান।

19.



এবং $y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

(a) $\tan x = \frac{b}{a}$ হলে $(a^2+b^2)\sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $(a^2+b^2)\sin 2x$

$$= (a^2+b^2)\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$= (a^2+b^2)\frac{2\times\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2} = (a^2+b^2)\frac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

$$= (a^2+b^2)\times\frac{2b}{a}\times\frac{a^2}{a^2+b^2} = 2ab \text{ (Ans.)}$$

(b) প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x(2+\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$

প্রমাণ: $y = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sin^2 x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin^2 x)(-\sin x) - \cos x(0 + 2\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^3 x - 2\sin x\cos^2 x}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^3 x - 2\sin x(1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^3 x - 2\sin x + 2\sin^3 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{\sin^3 x - 3\sin x}{(1+\sin^2 x)^2} = \frac{-\sin x(3-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(2+1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x(2+\cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

(c) দেখাও যে, PQR ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ 120^0.

প্রমাণ: PQR ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু QR বলে এর বৃহত্তম কোণ P.

ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই,

$$\cos P = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2PQ \times PR} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2\times 5\times 3}$$

$$= \frac{25+9-49}{30} = \frac{34-49}{30} = \frac{-15}{30}$$

$$\therefore \cos P = \frac{-1}{2} = \cos 120^0$$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $P = 120^0$

20. $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = e^{-x}$

(a) x-এর সাপেক্ষে $x^3 \sin(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $y = x^3 \sin(\ln x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^3 \frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\} + \sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= x^3 \cos(\ln x)\frac{1}{x} + \sin(\ln x).3x^2$$

$$= x^2 \cos(\ln x) + \sin(\ln x).3x^2$$

$$= x^2\{\cos(\ln x) + 3\sin(\ln x)\} \text{ (Ans.)}$$

(b) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(y)-g(y)}{\sin y}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=e^x$ এবং $g(x)=e^{-x}$

$\therefore f(y) = e^y, g(y) = e^{-y}$

$$\therefore \lim_{y\to 0}\frac{f(y)-g(y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - e^{-y}}{\sin y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots)-(1-\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}-\cdots)}{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdots}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2(\frac{y}{1!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots)}{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdots}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2y(\frac{1}{1!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots\cdots)}{y(1-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}-\cdots\cdots)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2(\frac{1}{1!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots\cdots)}{1-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}-\cdots\cdots}$$

$$= \frac{2(1+\frac{0^2}{3!}+0\cdots\cdots)}{1-\frac{0^2}{3!}+\frac{0^4}{5!}-\cdots\cdots} = \frac{2\times 1}{1} = 2 \text{ (Ans.)}$$

(c) দেখাও যে, $16 f(x) + 25g(x)$ এর লঘুমান 40

প্রমাণ : মনে করি, $y = 16 f(x) + 25g(x)$

$\Rightarrow y = 16 e^x + 25 e^{-x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 16e^x - 25e^{-x} \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 16e^x + 25e^{-x}$$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 16e^x - 25e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 16e^x = \frac{25}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{25}{16} \quad \therefore e^x = \pm\frac{5}{4}$.

$e^x = \frac{5}{4}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 16.\frac{5}{4} + 25\times\frac{5}{4} \square 0$

$\therefore \; e^x = \frac{5}{4}$ এর জন্য $16\, f(x) + 25g(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 16.\frac{5}{4} + 25\times\frac{4}{5} = 20 + 20 = 40$

21. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ এবং

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

(a) $e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$

$= \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) + \frac{d}{dx}(e^{-\sqrt{x}})$

$= e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + e^{-\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(-\sqrt{x})$

$= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

(b) যে সকল ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

$\therefore \; f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ হলে, $6(x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 2$

$x = 1, 2$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<1$, $1<x<2$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x < 1$ এর জন্য, $x - 1 < 0$ ও $x - 2 < 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore -\infty < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

আবার, $1 < x < 2$ এর জন্য $x - 1 > 0$ ও $x - 2 < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$\therefore \; 1 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

অপরপক্ষে, $x > 2$ এর জন্য $x - 1 > 0$ ও $x - 2 > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$\therefore \; 2 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$\therefore \; -\infty < x < 1$ ও $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ বৃদ্ধি পায় এবং $1 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ হ্রাস পায়।

(c) $g(x)$ ফাংশনের গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$\therefore \; g'(x) = 3x^2 - 6x - 45$ এবং

$g''(x) = 6x - 6$

চরমবিন্দুর জন্য, $g'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$

$\Rightarrow x(x-5) + 3(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 5, -3$

এখন, $g''(5) = 6(5-1) = 24 > 0$

$\therefore \; x = 5$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং ইহা $g(5) = 5^3 - 3\times 5^2 - 45\times 5 + 13$

$= 125 - 75 - 225 + 13 = -162$

আবার, $g''(-3) = 6(-3-1) = -24 < 0$

$\therefore \; x = -3$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা

$g(-3) = (-3)^3 - 3\times(-3)^2 - 45\times(-3) + 13$

$= -27 - 27 + 135 + 13 = 94$

22. (i) $f(x) = \sec 5x$

(ii) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

(a) x-এর সাপেক্ষে $y = \log_x 3$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = \log_x 3 = \log_x e \times \log_e 3$

$$= \ln 3 \frac{1}{\log_e x} = \ln 3 \frac{1}{\ln x} = \ln 3 (\ln x)^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \ln 3 (-1)(\ln x)^{-1-1} \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= -\ln 3 (\ln x)^{-2} \frac{1}{x}$$

$\therefore$ x-এর সাপেক্ষে $y = \log_x 3$ এর অন্তরজ

$$= \frac{-\ln 3}{x(\ln x)^2}$$

(b) লিমিট হিসাবে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: লিমিট হিসাবে $f(x)$ এর অন্তরজ

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec 2x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sec 5(x+h) - \sec 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sec(5x+5h) - \sec 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(5x+5h)} - \frac{1}{\cos 5x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos 5x - \cos(5x+5h)}{h \cos(5x+5h) \cos 5x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{5x+5x+5h}{2} \sin \frac{5x+5h-5x}{2}}{h \cos(5x+5h) \cos 5x}$$

$$= 2 \lim_{h \to 0} \frac{\sin(5x + \frac{5}{2}h)}{\cos(5x+5h)\cos 5x} \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{5}{2}h}{\frac{5}{2}h} \times \frac{5}{2}$$

$$= 5 \frac{\sin(5x + \frac{5}{2} \times 0)}{\cos(5x + 5 \times 0) \cos 5x} \times 1$$

$$= \frac{5 \sin 5x}{\cos 5x \cos 5x} = 5 \tan 5x \sec 5x$$

(c) $g(x)$ এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

সমাধান: $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

$\therefore g'(x) = x^2 + 2x - 6$ এবং

$$g''(x) = 2x + 2$$

চরমবিন্দুর জন্য, $g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 6 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+3) - 2(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, 2$$

এখন, $g''(-3) = 2(-3+1) = -4 < 0$

$\therefore x = -3$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা

$$g(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 3$$

$$= -9 + \frac{9}{2} + 18 + 3 = 12 + \frac{9}{2} = \frac{33}{2}$$

আবার, $g''(2) = 2(2+1) = 6 > 0$

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে $g(x)$ এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং ইহা $g(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 3$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 12 + 3 = \frac{8}{3} - 7 = \frac{8-21}{3}$$

$$= -\frac{13}{3}$$

23. $y = x^2 + 2x \cdots$ (i), $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x - 3$

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5.9^x - 9^{-x}}{4.9^x + 9^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5.9^x - 9^{-x}}{4.9^x + 9^{-x}}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5.9^x - \frac{1}{9^x}}{4.9^x + \frac{1}{9^x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{9^x(5 - \frac{1}{9^{2x}})}{9^x(4 + \frac{1}{9^{2x}})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{1}{9^{2x}}}{4 + \frac{1}{9^{2x}}} = \frac{5-0}{4+0} = \frac{5}{4}$$

(b) (i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^2 + 2x \cdots \cdots$ (i)

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 2x + 2$

(i) নং বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$$

$\Rightarrow x = 0, -2$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 2\times 0 + 2 = 2$$

এবং $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,0)} = 2\times 2 + 2 = 6$$

(c) f(x) এর গুরুমান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x - 3$

$\therefore$ $f'(x) = x^2 - 3$ এবং $f''(x) = 2x$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

এখন, $f''(\sqrt{3}) = 2\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 0$

$\therefore$ $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

আবার, $f''(-\sqrt{3}) = 2\times(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} < 0$

$\therefore$ $x = -3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গুরুমান আছে এবং

ইহা $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{1}{3}(-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) - 3$

$$= -\frac{1}{3}(3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} - 3$$

$$= -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3} - 3$$

24. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 3x}$

$g(x) = \text{cosec } x - \sqrt{3}\sec x$

(a) g(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $g'(x) = -\text{cosec } x\cot x - \sqrt{3}\sec x\tan x$

$\therefore$ g(x) এর অন্তরজ $= -\text{cosec } x\cot x - \sqrt{3}\sec x\tan x$

(b) f(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 3x}$

$\therefore f'(x)$

$$= \frac{(1+\sin^2 3x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin^2 3x)}{(1+\sin^2 3x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin^2 3x)(-\sin x) - \cos x(0 + 2\sin 3x\cos 3x.3)}{(1+\sin^2 3x)^2}$$

$\therefore$ g(x) এর অন্তরজ

$$= \frac{-(1+\sin^2 3x)\sin x - 6\cos x\sin 3x\cos 3x}{(1+\sin^2 3x)^2}$$

(c) প্রমাণ কর যে, $g(10^0) = 4$

প্রমাণ: L.H.S. $= g(10^0)$

$= \text{cosec } 10^0 - \sqrt{3}\sec 10^0$

$$= \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$$

$$= \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0\cos 10^0}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0\cos 10^0}$$

$$= \frac{\cos 60^0\cos 10^0 - \sin 60^0\sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 20^0}$$

$$= \frac{4\cos(60^0 + 10^0)}{\sin(90^0 - 70^0)} = \frac{4\cos 70^0}{\cos 70^0}$$

$= 4 =$ R.H.S.

25. $A = \tan 3x$, $B = \sin 3x$

(a) $\frac{dA}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A = \tan 3x$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \sec^2 3x \frac{d}{dx}(3x)$$
$$= \sec^2 3x.(3) = 3\sec^2 3x$$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{A-B}{x^3}$ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\lim_{x\to0}\frac{A-B}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\tan 3x - \sin 3x}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\tan 3x(1-\cos 3x)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\tan 3x.2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^3}$$
$$= 2\lim_{3x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}\times3\times\lim_{3x\to0}\left\{\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right\}^2\times\frac{9}{4}$$
$$= 2\times1\times3\times1\times\frac{9}{4} = \frac{27}{2} \quad \text{(Ans.)}$$

(c) x এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে A এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $f(x) = A = \tan 3x$.

$\therefore f(x+h) = \tan 3(x+h) = \tan(3x+3h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan 3x) = \lim_{h\to0}\frac{\tan(3x+3h)-\tan 3x}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(3x+3h)}{\cos(3x+3h)} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right]$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(3x+3h)\cos 3x - \sin 3x\cos(3x+3h)}{\cos(3x+3h)\cos 3x}\right]$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{\sin(3x+3h-3x)}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin 3h}{3h}\times3\times\lim_{h\to0}\frac{1}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$$
$$= 1\times3\times\frac{1}{\cos(3x+0)\cos 3x} = \frac{3}{\cos^2 3x}$$
$$= 3\sec^2 3x$$

26. দৃশ্যকল্প-I: $y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$

দৃশ্যকল্প-II: $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

(a) $y = \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$. ২

প্রশ্নমালা IX(I) এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-I এর বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 8

সমাধান ঃ $y(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$ ……(i)

যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষকে ছেদ করে ঐ সব বিন্দুর y –স্থানাঙ্ক = 0

(1) এ $0.(x+1)(x+2) - x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 4$

x এর সাপেক্ষে (i) নং সমীকরণ অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(x^2+3x+2)\frac{dy}{dx} + y(2x+3) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-y(2x+3)}{x^2+3x+2}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}_{(4,0)} = \frac{1}{4^2+3.4+2} = \frac{1}{30}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ব্রকরেখার (4, 0) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 0 = -30(x-4)$

$\Rightarrow 30x + y - 120 = 0$

(c) দৃশ্যকল্প-II এর ফাংশনের চরমমান নির্ণয় কর। 8

সমাধান ঃ $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

$\therefore h'(x) = 6x^2 - 6x - 12,$

$\therefore h''(x) = 12x - 6$

চরমবিন্দুর জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0, \therefore x=-1, 2.$

$x=-1$ বিন্দুতে, $h''(x)=-12-6=-18<0$

$\therefore$ $x=-1$ বিন্দুতে $h(x)$ লঘুমান বিদ্যমান এবং এর মান $= 2(-1)-3.1-12(-1)+1=8.$

আবার, $x=2$ বিন্দুতে, $h''(x)=24-6=18>0$

$\therefore$ $x=2$ বিন্দুতে $h(x)$ গুরুমান বিদ্যমান এবং এর মান $=2.8-3.4-12.2+1=-19.$

27. $f(u)=\sin^{-1}u$ এবং $g(u)=\ln u$ দুইটি ফাংশন। **[সিলেট বোর্ড ২০১৭]**

(a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^2}$. এর মান নির্ণয় কর। ২

সমাধান : $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta(1-\cos\theta)}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta.2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2}$

$=2\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}.\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}.\dfrac{1}{2}.\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=2.1.1.\dfrac{1}{2}.\sin 0=0$

(b) $y=\{f(2x)\}^2$ হলে দেখাও যে,

$(1-4x^2)y_2-4xy_1-8=0$ ৪

সমাধান : $f(u)=\sin^{-1}u$

$\therefore$ $f(2x)=\sin^{-1}(2x)$

এখন, $y=\{\sin^{-1}(2x)\}^2$

অতপর প্রশ্নমালা IX-I এর 11(e) দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে, $\dfrac{g(2x)}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\dfrac{2}{e}$ ।৪

প্রমাণ : $g(u)=\ln u$ $\therefore$ $g(2x)=\ln(2x)$

$\therefore$ $\dfrac{g(2x)}{x}=\dfrac{\ln(2x)}{x}$

অতপর প্রশ্নমালা IX-k এর 6(d) দ্রষ্টব্য।

28. $f(x)=x^{\tan^{-1}x}, g(x)=\log_x a,$
$h(x)=\sqrt{a+b\cos x}.$ [য.বো.'১৭]

(a) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{y}{2}}{y}$

$=2\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{y}{2}}{\dfrac{y}{2}}\right)^2.\dfrac{y}{4}=2.1.\dfrac{0}{4}=0$

(b) $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX E এর 2(e) এবং প্রশ্নমালা IX G এর 2(k) দ্রষ্টব্য।

(c) $y=h(x)$ হলে, দেখাও যে,

$2y.\dfrac{d^2y}{dx^2}+2.\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a.$

সমাধান : $y=h(x)=\sqrt{a+b\cos x}\cdots$ (i)

x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{a+b\cos x}.}\dfrac{d}{dx}(a+b\cos x)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}(0-b\sin x)$

$\Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx}=-b\sin x$

x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}.2\dfrac{dy}{dx}=-b\cos x$

$\Rightarrow 2y\dfrac{d^2y}{dx^2}.+\dfrac{dy}{dx}.2\dfrac{dy}{dx}=-b\cos x\cdots$(ii)

(i) হতে পাই, $a+b\cos x=y^2$

$\Rightarrow b\cos x=y^2-a$

(ii) হতে, $2y\frac{d^2y}{dx^2}+2(\frac{dy}{dx})^2=a-y^2$

$\therefore 2y.\frac{d^2y}{dx^2}+2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=a.$

29. $f(x)=\frac{1}{\sin x}, g(x)=\frac{1}{\tan x}, h(x)=x.$

[রা.বো.'১৭]

(a) মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

সমাধান : $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$=\lim_{x\to2}(3+\sqrt{x^2+5})=3+\sqrt{2^2+5}$

$=3+3=6$ (Ans.)

(b) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1/\sin x}{1/\tan x}=\frac{\tan x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}$

$=\sec x$

অতপর প্রশ্নমালা IX C এর ১২.৮ দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে, $h(x)+\frac{1}{h(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান : $h(x)+\frac{1}{h(x)}=x+\frac{1}{x}$

অতপর প্রশ্নমালা IX K এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

30. $y=4x(6-x)^2$ এবং $f(x)=e^{\tan^{-1}x}$ [কু.বো.'১৭]

(a) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x}$

$=2.\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to0}(\sin x)$

$=2.1.\sin0=2\times0=0$ (Ans.)

(b) y -এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y=4x(6-x)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=4x.2(6-x)(-1)+4(6-x)^2.1$

$=4(6-x)(-2x+6-x)$

$=4(6-x)(6-3x)=12(6-x)(2-x)$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=12\{(6-x)(-1)+(2-x)(-1)\}$

$=12(-6+x-2+x)=24(x-4)$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$\Rightarrow 12(6-x)(2-x)=0 \therefore x=2,6$

এখন, $f''(2)=24(2-4)=-48<0$

$\therefore f(x)$ গরিষ্ঠ মান হবে যখন $x=2$ এবং

এর মান $=f(2)=8(6-2)^2=128$

আবার, $f''(6)=24(6-4)>0$

$\therefore f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x=6$।

$\therefore y$ -এর গরিষ্ঠ মান 128

(c) প্রমাণ কর যে,

$(1+x^2)f''(x)+(2x-1)f'(x)=0$

সমাধান : প্রশ্নমালা IX I এর 10(c) এর অনুরূপ।

31. দৃশ্যকল্প-১: ABC ত্রিভুজে $a=\sqrt{3}b$ এবং $A=2B$ [ব.বো.'১৭]

দৃশ্যকল্প-২: $\ln y=bz$

(a) $\lim_{x\to0}(\text{cosec}x-\cot x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমালা IX A এর 8(f) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ABC এর কোণগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a=\sqrt{3}b$ ……(1)

এবং $A = 2B \cdots\cdots\cdots (2)$

(1) হতে , $2R \sin A = \sqrt{3}\ .2R \sin B$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{3} \sin B$

$\Rightarrow \sin 2B = \sqrt{3} \sin B$; (2) দ্বারা।

$\Rightarrow 2 \sin B \cos B = \sqrt{3} \sin B$

$\Rightarrow \sin B\ (2 \cos B - \sqrt{3}) = 0$

$\sin B = 0$ হলে , $B = 0^0$ এবং $A = 0^0$

কিন্তু ABC একটি ত্রিভুজ বলে $A = B = 0$ অসম্ভব। কাজেই, $\sin B \neq 0$

$2 \cos B - \sqrt{3} = 0$ হলে ,

$\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0$

$\therefore B = 30°$ এবং $A = 2B = 60°$

$\therefore \sin B = \frac{1}{2} = \sin 30° \Rightarrow B = 30°$

$\therefore A = 2B = 2 \times 30° = 60°$ এবং

$C = 180° - (30° + 60°)$

$= 180° - 90° = 90°$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণ তিনটি $30°, 60°, 90°$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\cos z = x$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = b^2y$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\cos z = x \Rightarrow z = \cos^{-1} x$ এবং

$\ln y = b \cos^{-1} x$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{1}{y} y_1 = b \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - x^2}\ y_1 = bx$

$\Rightarrow (1 - x^2)\ {y_1}^2 = b^2 y^2$, [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1 - x^2)\ 2y_1 y_2 + {y_1}^2(-2x) = b^2.2yy_1$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$(1 - x^2)\ y_2 - xy_1 = b^2 y$

শ্রেণির কাজ

1. $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন ।

মূলতত্ত্ব ঃ $x = x_0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x)$ ফাংশনকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করার সূত্র, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

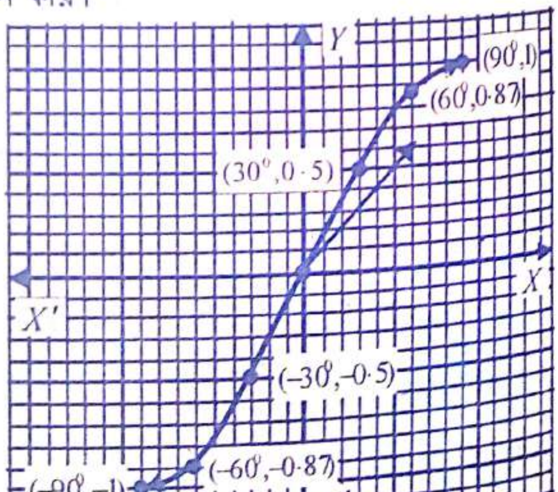
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = \sin x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	$0°$	$\pm 30°$	$\pm 60°$	$\pm 90°$
y	0	$\pm \cdot 5$	$\pm \cdot 87$	± 1

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $= 10^0$ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু $= 1$ একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = \sin x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



4. $x = 0$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।

হিসাব ঃ $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\therefore \ f(0) = \sin 0 = 0, \ f'(0) = \cos 0 = 1$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ হতে পাই,

$\sin x \approx 0 + 1(x - 0) = x$

ফলাফল ঃ $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক $y = x$ এর লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করা হল। অন্যভাবে বলা যায়, x এর মান 0 এর সন্নিকটে হলে $\sin x$ এর পরিমাণ x এর কাছাকাছি হবে।

2. $x = 2$ তে $y = x^2$ ফাংশনের লেখ অঙ্কন করে dy ও δy নির্ণয় করে লেখচিতে প্রদর্শন কর, যেখানে $dx = \delta x = 1$.

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = x^2$ ফাংশনের জন্য, $x = 2$ বিন্দুতে dy ও δy নির্ণয় , যেখানে $dx = \delta x = 1$ এবং লেখচিতে dy ও δy প্রদর্শন ।

মূলতত্ত্ব ঃ স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সম্পর্ক $dy = f'(x)dx$ এবং স্বাধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন δx এর জন্য অধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

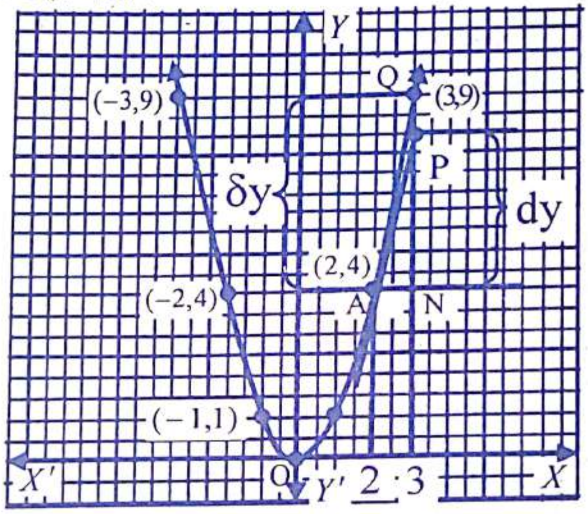
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	± 1	± 2	± 3
$f(x) = x^2$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।

4. $A(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি । $x = 3$ সরলরেখাকে স্পর্শকটি ও ফাংশনটি যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।



হিসাবঃ $y = x^2$ হতে পাই , $\frac{dy}{dx} = 2x$.

সুতরাং $dy = 2x\,dx = 2 \times 2 \times 1 = 4$

এবং $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$= (x + \delta x)^2 - (x)^2 = (2 + 1)^2 - 2^2$

$= 9 - 4 = 5$

চিত্র হতে পাই, $AN = dx = \delta x = 1$, $PN = dy$ ও $QN = \delta y$

ফলাফল ঃ $PN = dy = 4$ ও $QN = \delta y = 5$ লেখচিত্রে পদর্শন করা হলো।