Trigonometry (ত্রিকোণমিতি)

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঃ

১। r ব্যাসার্ধের বৃত্তে s দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করলে $s = r\theta$

Remember: θ অবশ্যই রেডিয়ানে ব্যবহার করতে হবে ।

২। **জ্যামিতিক কোণ ঃ** একই প্রান্ত বিশিষ্ট দুইটি রশ্মি যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে জ্যামিতিক কোণ বলা হয়।

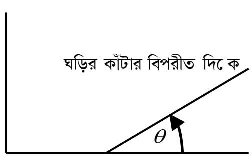
Remember : (i) সীমা: $0^{\circ} \leq$ জ্যামিতিক কোণ $\leq 360^{\circ}$ (ii) জ্যামিতিক কোণ ঋণাত্মক হতে পারে না।

৩। **ত্রিকোণমিতিক কোণঃ** একটি স্থির বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার প্রথম অবস্থান হতে শেষ অবস্থানে আসতে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাকে ত্রিকোণমিতিক কোণ বলা হয় ।

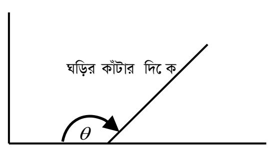
ত্রিকোণমিতিক কোণ সাধারনত দুই প্রকার ঃ

(i) ধনাত্মক কোণ ঃ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন হলে ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন হয়। (চিত্র-১)

(ii) ঋনাত্মক কোণ ঃ ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণন হলে ঋনাত্মক কোণ উৎপন্ন হয়। (চিত্র-২)



(চিত্র -১)



(চিত্র -২)

৪। **কোণ পরিমাপ করা হয় তিন পদ্ধতিতে ঃ**

(i) **ষাট মূলক /sexagesimal (English) পদ্ধতি ঃ** কোণকে ডিগ্রী ($^{\circ}$) এককে পরিমাপ করা হয়।

$360^0 = 4$ সমকোণ, $1^0 = 60'$ (মিনিট) , $1' = 60''$ (সেকেন্ড)

(ii) **বৃত্তীয় / Circular পদ্ধতি ঃ** কোণকে রেডিয়ান (^{c}) এককে পরিমাপ করা হয়। $180^0 = \pi^c$ (রেডিয়ান)

(iii) **শতমূলক / Centesimal (French) পদ্ধতি ঃ** কোণ কে গ্রেডিয়ান (^0g) এককে পরিমাপ করা হয় ।

$400^0g = 4$ সমকোণ, $1^0g = 100'$ (শতমূলক মিনিট) ,$1'$(শতমূলক মিনিট) $= 100''$ (শতমূলক সেকেন্ড)

Note: সামরিক বাহিনীর বিভিন্ন শাখায় কোণের নতুন একক হিসেবে মিল (mil) ব্যবহৃত হয়। 6400 মিল (mil) = 360°

ডিগ্রী, রেডিয়ান ও গ্রেডিয়ানের মধ্যে সম্পর্ক ঃ

(i)$1^0 = \frac{\pi}{180}^c$ (রেডিয়ান) $= (\frac{9}{10})^0g$ (গ্রেডিয়ান)$= \frac{160}{9}$ মিল (mil)

(ii) 1^c (রেডিয়ান) $= (\frac{180}{\pi})^{\circ}$(ডিগ্রী), $1^0 g$ (গ্রেডিয়ান) $= (\frac{10}{9})^{\circ}$(ডিগ্রী) , 1mil (মিল) $= (\frac{9}{160})^{\circ}$(ডিগ্রী)

৫। $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\quad$ $\mathrm{cosec}\,(-\theta) = -\mathrm{cosec}\theta$

$\boldsymbol{\cos(-\theta) = \cos\theta}$ $\quad$ $\boldsymbol{\sec(-\theta) = \sec\theta}$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\quad$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

৬। $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\quad \therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ $\quad \therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ $\quad \therefore \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ $\quad \therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ $\therefore \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - 1$ $\therefore \mathrm{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

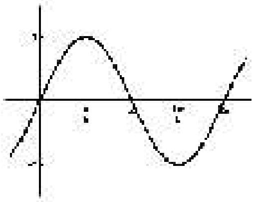
৭। **ত্রিকোণমিতিক ফাংশন/বৃত্তীয় ফাংশন ঃ** $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$

৮। **ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ ঃ**

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	ডোমেন	সর্বনিম্ন মান	সর্বোচ্চ মান	রেঞ্জ
$\sin\theta$	$\mathbb{R}$	-1	$+1$	$[-1,1]$
$\cos\theta$	$\mathbb{R}$	-1	$+1$	$[-1,1]$
$\tan\theta$	$\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$	$-\infty$	$+\infty$	$(-\infty, +\infty)$ বা $\mathbb{R}$
$\cot\theta$	$\mathbb{R} - \{ n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \}$	$-\infty$	$+\infty$	$(-\infty, +\infty)$ বা $\mathbb{R}$
$\sec\theta$	$\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$	$-\infty$	$+\infty$	$\mathbb{R} - (-1,1)$ বা $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\mathrm{cosec}\,\theta$	$\mathbb{R} - \{ n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \}$	$-\infty$	$+\infty$	$\mathbb{R} - (-1,1)$ বা $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

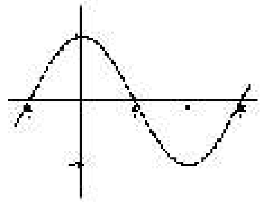
৯। বৃত্তীয় ও বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের লেখচিত্র ঃ

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $[-1,1]$
Period: 2π



$f(x)=\sin x$

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $[-1,1]$
Period: 2π

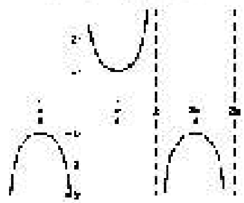


$f(x)=\cos x$

Domain: $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$
Range: $(-\infty,\infty)$
Period: π

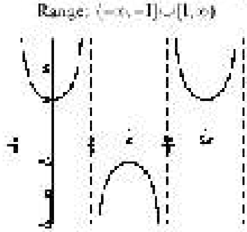
$f(x)=\tan x$

Domain: $((k-1)\pi,k\pi)$
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



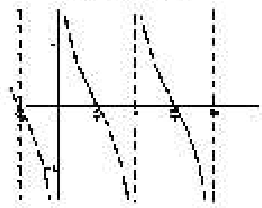
$f(x)=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

Domain: $\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$



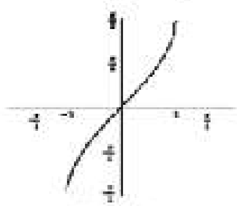
$f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

Domain: $((k-1)\pi,k\pi)$
Range: $(-\infty,\infty)$



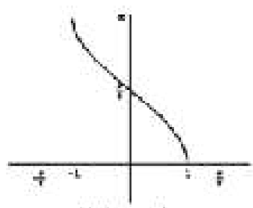
$f(x)=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$

Domain: $[-1,1]$
Range: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



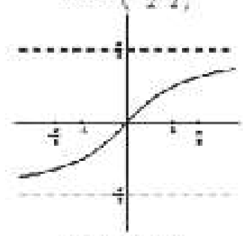
$f(x)=\sin^{-1}x$
$f(x)=\arcsin x$

Domain: $[-1,1]$
Range: $[0,\pi]$



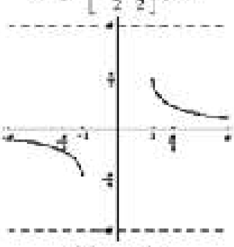
$f(x)=\cos^{-1}x$
$f(x)=\arccos x$

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



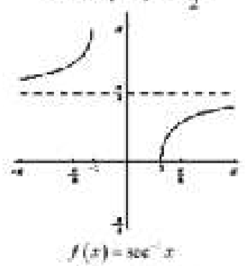
$f(x)=\tan^{-1}x$
$f(x)=\arctan x$

Domain: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
Range: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], y\neq 0$



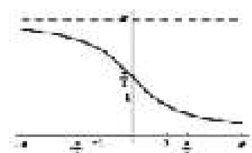
$f(x)=\csc^{-1}x$
$f(x)=\operatorname{arccsc} x$

Domain: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
Range: $[0,\pi], y\neq\frac{\pi}{2}$



$f(x)=\sec^{-1}x$
$f(x)=\operatorname{arcsec} x$

Domain: $(-\infty,\infty)$
Range: $(0,\pi)$



$f(x)=\cot^{-1}x$
$f(x)=\operatorname{arccot} x$

সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঃ

১। $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\quad$ $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\quad$ $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ $\quad$ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ $\quad$ $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

২। $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

৩। $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ $\quad$ $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ $\quad$ $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

৪। $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\quad$ $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$\mathbf{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}}$

৫। $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\quad$ $\mathbf{4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A}$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ $\quad$ $\mathbf{4\cos^3 A = 3\cos A + \cos 3A}$

$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$ $\quad$ $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

৬। যেকোন ত্রিভুজ ABC–এ,

(i) **সাইন সূত্র ঃ** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$; যেখানে R হচ্ছে ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।

(ii) **কোসাইন সূত্র ঃ** $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(iii) $a = b\cos C + c\cos B$; $b = c\cos A + a\cos C$; $c = a\cos B + b\cos A$

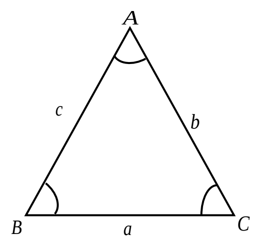
৭। **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ** ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ হলে,

$\Delta = \frac{1}{2}\,bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; যেখানে s ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা

$= \frac{abc}{4R}$ [পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R]

$= rs$ [ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা s এবং অন্তঃব্যাসার্ধ r]



$AB = c,\ BC = a, CA = b$

অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{a+b+c}{2}$

৮। **ট্যানজেন্ট সূত্র :** (i) $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(ii) $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

(iii) $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$