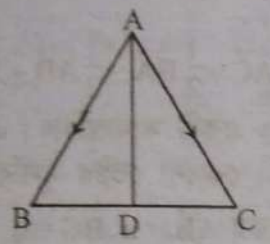
ভেক্টর
Vectors

অনুশীলনী-2(A) এর সমাধান

1.(i) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; AD যোগ করি।

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$,



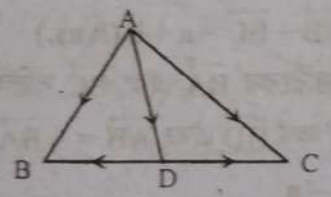
$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD}$

কিন্তু BC এর মধ্যবিন্দু D হওয়ায়, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ (দেখানো হলো)

(ii)



দেওয়া আছে, D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। A, D যোগ করি।
ΔABD ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\therefore \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$

বা, $AB^2 = AD^2 + DB^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}$

$= AD^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}$ ... ... (i)

$[\because \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}]$

আবার, ΔACD হতে

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

বা, $AC^2 = AD^2 + DC^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD}$

$= AD^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ ... ... (ii)

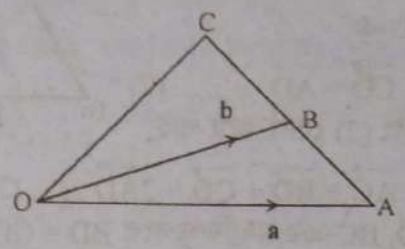
(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2) + 2\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ $[\because \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 0]$

(দেখানো হলো)

(iii)



ΔOAC হতে, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$ [$\because$ B, AC এর মধ্যবিন্দু]

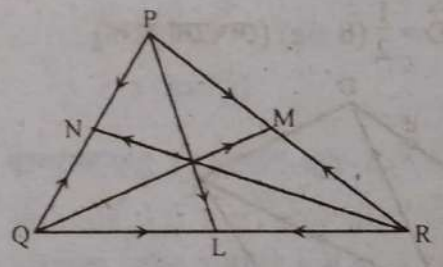
$= \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ [ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ $\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$]

$= \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

$= \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$\therefore \overrightarrow{OC} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **(Ans.)**

(iv)



দেওয়া আছে, L, M, N যথাক্রমে QR, RP ও PQ বাহুর মধ্যবিন্দু।

P, L; Q, M; R, N যোগ করি।

এখন, ΔPQL হতে পাই, $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QL}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RL}$ ... ... (ii) [ΔPRL হতে]

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + (\overrightarrow{QL} + \overrightarrow{RL}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

$[\because \overrightarrow{QL} + \overrightarrow{RL} = 0]$

অনুরূপভাবে, $2\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR}$ এবং $2\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}$

যোগ করে,

$2(\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}$

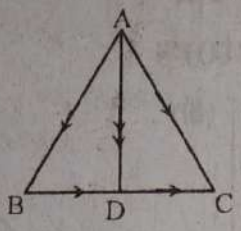
$= (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP})$

$= \mathbf{0}$

$\therefore \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = \mathbf{0}$

Scanned with CamScanner

2(i) ABC একটি ত্রিভুজ। এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D;



ΔABD-এ

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ ... ... (1)

ΔACD-এ

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ... ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD}$ ... ... (3)

কিন্তু D, BC-এর মধ্যবিন্দু বলে BD = CD.

আবার, BD ও CD একই রেখায় এবং $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর বিপরীতমুখী।

অতএব, $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 0$

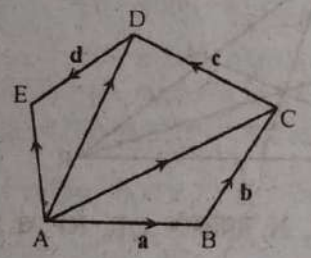
সুতরাং (3) হতে পাই, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$

$\therefore \mathbf{c} + \mathbf{b} = 2\overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (দেখানো হলো)

(ii)



ABCDE পঞ্চভুজে A মূলবিন্দু। A, C; A, D যোগ করি।

এখন, ΔABC এ ভেক্টরের সাহায্যে পাই,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

আবার, ΔACD এ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

এবং ΔADE এ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$

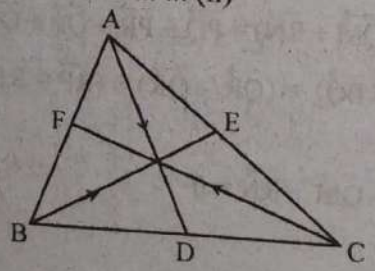
সুতরাং $\overrightarrow{AE} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ (দেখানো হলো)

3.(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ ... ... (i)

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$ ... ... (ii)



(i) এবং (ii) যোগ করে, $2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

বা, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ [$\because \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$]

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ **(Ans.)**

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA}$

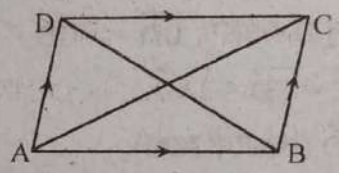
$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ **(Ans.)**

$\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CA}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর A, C ও B, D যোগ করি। কোনো ভেক্টর মূলবিন্দু সাপেক্ষে ABCD সামান্তরিকের $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$.

তাহলে, $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{a}$



$\therefore$ কর্ণ, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(Ans.)**

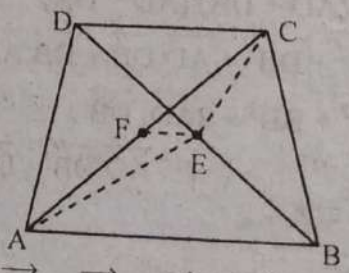
ABCD সামান্তরিকের $\overrightarrow{BA}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ $\overrightarrow{BD}$ এবং $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{BA} = -\mathbf{a}$

$\therefore$ কর্ণ, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. **(Ans.)**

4.(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$ [$\because$ E, BD-এর মধ্যবিন্দু]

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CE}$



$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

$= 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE}) = 2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE})$

$= 2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} + 2\overrightarrow{FE}) = 2(2\overrightarrow{FE})$ [$\because \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} = 0$]

$= 4\overrightarrow{FE}$ (প্রমাণিত)

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ (প্রমাণিত)

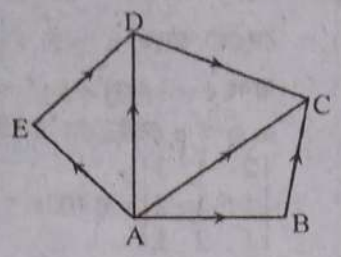
Scanned with CamScanner

(ii) ABCDE একটি পঞ্চভুজ। A, C ও A, D যোগ করি।

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$



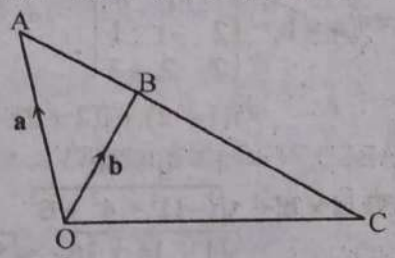
যোগ করে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$ (প্রমাণিত)

5.(i) মনে করি, ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a**, **b**; $\overrightarrow{AB}$ কে এরূপে বর্ধিত করা হলো যেন $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ হয়। OA, OB, OC যোগ করি।



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 3(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 3\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$

আবার, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 3\mathbf{a} = \overrightarrow{OC}$ বা, $\overrightarrow{OC} = 3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

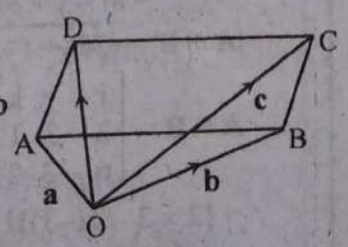
$\therefore$ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$. **(Ans.)**

(ii) ABCD একটি সামান্তরিক। ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B, C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a**, **b**, **c**; OA, OB, OC, OD যোগ করি।

তাহলে, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$



আবার, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

$\therefore$ D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$

$= \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

অনুচ্ছেদ-2.8 | পৃষ্ঠা-৪৮

মনে করি, মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক O(0, 0, 0)

$\overrightarrow{OA} = (3-0)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k}$

$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = (-1-0)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k}$

$= -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} - (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} - 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$= -4\hat{i} + 3\hat{j}$ **(Ans.)**

$|\overrightarrow{AB}| = |-4\hat{i} + 3\hat{j}|$

$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16 + 9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ **(Ans.)**

অনুচ্ছেদ-2.12 | পৃষ্ঠা-৫১

1. মনে করি, (3, 2, 1) এবং (4, 1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** ও **b**.

$\therefore$ $\mathbf{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সরলরেখার সমীকরণ- $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

$= (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

$= (1-t)(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + t(4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} - 3t\hat{i} - 2t\hat{j} - t\hat{k} + 4t\hat{i} + t\hat{j} - 2t\hat{k}$

$= (3+t)\hat{i} + (2-t)\hat{j} + (1-3t)\hat{k}$

ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ। **(Ans.)**

2. মনে করি (2, –1, 3) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর **a** এবং (1, 3, 2) ও (3, 5, 1) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর **b** ও **c**.

$\therefore$ $\mathbf{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

এবং $\mathbf{b} - \mathbf{c} = (1-3)\hat{i} + (3-5)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$

$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

সুতরাং (2, –1, 3) বিন্দুগামী এবং (1, 3, 2) ও (3, 5, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{c})$

$= 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + t(-2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ যেখানে t প্যারামিটার।

$= (2-2t)\hat{i} - (1+2t)\hat{j} + (3+t)\hat{k}$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

অনুচ্ছেদ-2.14.2 | পৃষ্ঠা-৫৩

1. দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 3\hat{i} - 2\hat{k} + 5\hat{j}$ ও $\mathbf{b} = 2\hat{i} + \hat{k} - \hat{j}$

$\therefore$ a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$b\cos\theta = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(3\hat{i} - 2\hat{k} + 5\hat{j}).(2\hat{i} + \hat{k} - \hat{j})}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (5)^2}}$$

$$= \frac{6 - 2 - 5}{\sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{-1}{\sqrt{38}} \text{ (Ans.)}$$

2. দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j}$ ও $\mathbf{B} = 5\hat{i} + \hat{k} - 2\hat{j}$

$\therefore$ A ভেক্টর বরাবর B ভেক্টরের উপাংশ $= \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|}\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$

$$= \frac{(2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j}).(5\hat{i} + \hat{k} - 2\hat{j})}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \cdot \frac{(2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j})}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{10 - 2 - 2}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \cdot \frac{2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j}}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{9}} \cdot \frac{2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{9}(2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j})$$

$$= \frac{2}{3}(2\hat{i} - 2\hat{k} + \hat{j}) \text{ (Ans.)}$$

অনুচ্ছেদ-2.16.3 | পৃষ্ঠা-৫৪

1. দেওয়া আছে, $\mathbf{b} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ ভেক্টরটির মান, $|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{25 + 16 + 1} = \sqrt{42}$ **(Ans.)**

2. দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

মনে করি, a ও b এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ

আমরা জানি, $\cos\theta = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$

$$= \frac{(3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}).(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{3 - 4 - 6}{\sqrt{9 + 16 + 4}.\sqrt{1 + (-1)^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{29}.\sqrt{11}} = \frac{-7}{\sqrt{319}}$$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{319}}\right)$ **(Ans.)**

3. দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

a ও b ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে এদের ডট গুণন শূন্য হবে। অর্থাৎ $\mathbf{a.b} = 0$

$\therefore \mathbf{a.b} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).(3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

$= 6 - 4 - 2 = 0$

সুতরাং a ও b ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। **(দেখানো হলো)**

অনুচ্ছেদ-2.19.1 | পৃষ্ঠা-৫৫

1. দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

এবং $\mathbf{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

a, b ও c ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হবে যদি

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

$\therefore$ এখন, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1 - 4) + 1(2 - 1) + 3(2 + 1)$

$= -10 + 1 + 9 = 0$

$\therefore$ a, b ও c ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।

(দেখানো হলো)

2. মনে করি, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ও $\mathbf{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

তাহলে, লম্ব একক ভেক্টর $\hat{n}$ হলে, $\hat{n} = \pm\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$

এখন $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(1 - 2) + \hat{j}(2 + 2) + \hat{k}(4 + 2)$

$= -\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

এবং $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 6^2}$

$= \sqrt{1 + 16 + 36} = \sqrt{53}$

$\therefore \hat{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{53}}(-\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$ **(Ans.)**

উদাহরণ-1-12 এর কাজ | পৃষ্ঠা-৫৮

$\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$|\mathbf{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

$|\mathbf{B}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7$

$\mathbf{A.B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}).(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2.6 + 2(-3) + 1.2 = 8$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} + 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$= 8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{74}$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \{2 \times 2 - 1(-3)\}\hat{i} - (2 \times 2 - 6 \times 1)\hat{j} + \{2(-3) - 2 \times 6\}\hat{k}$

$= 7\hat{i} + 2\hat{j} - 18\hat{k}$

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-18)^2} = \sqrt{377}$

Scanned with CamScanner

(i) A ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর,

$\hat{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{3}(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

এবং B ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর,

$\hat{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{7}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) A ও B এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর,

$\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{74}}(8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$

(iii) A ও B এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|} = \frac{8}{3 \times 7} \quad \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$

(iv) A ও B ভেক্টরের ওপর বা সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর, $\pm\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{377}}(7\hat{i} + 2\hat{j} - 18\hat{k})$

(v) A বরাবর B ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ, $\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} = \frac{8}{3}$

এবং B বরাবর A ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{8}{7}$

(vi) A বরাবর B ভেক্টরের উপাংশ, $\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|}\hat{a} = \frac{8}{3}\hat{a}$

এবং B বরাবর A ভেক্টরের উপাংশ $= \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}\hat{b} = \frac{8}{7}\hat{b}$

অনুশীলনী-2(B) এর সমাধান

1. (i) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$ **(Ans.)**

$|\mathbf{B}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ **(Ans.)**

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} + 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$ **(Ans.)**

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) - (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} - 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{42}$ **(Ans.)**

$2\mathbf{B} = 2(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \mathbf{A} - 2\mathbf{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} - (6\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} - 6\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$= -4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A} - 2\mathbf{B}| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\mathbf{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\mathbf{c} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর $= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

$= \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ **(Ans.)**

এবং প্রাপ্ত লব্ধি ভেক্টরের মান

$= \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$ **(Ans.)**

(iii) এখানে, $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$

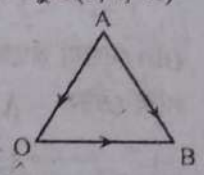
$\overrightarrow{OB} = -4\hat{i} + 5\hat{j} + 0\hat{k} = -4\hat{i} + 5\hat{j}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4\hat{i} + 5\hat{j}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})$

$= -4\hat{i} - 2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{j} - 7\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}$ **(Ans.)**

2. (i) প্রদত্ত আদি বিন্দু A (1, 1, 4) এবং প্রান্তবিন্দু B(3, 4, –2)



$\therefore \overrightarrow{OA} = \hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ **(Ans.)**

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, O মূল বিন্দু,

A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = 0.\hat{i} + 1.\hat{j} + 2.\hat{k}$

$= \hat{j} + 2\hat{k}$ **(Ans.)**

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB} = -\hat{i} + 3\hat{j}$ **(Ans.)**

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OC} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ **(Ans.)**

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (-\hat{i} + 3\hat{j}) - (\hat{j} + 2\hat{k}) = -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ **(Ans.)**

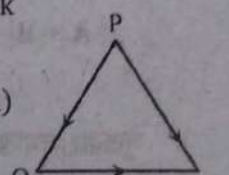
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (\hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$ **(Ans.)**

3. (i) দেওয়া আছে, P (1, 1, 1) এবং Q (3, 2, –1)



$\therefore \overrightarrow{OP} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \overrightarrow{OQ} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ **(Ans.)**

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Scanned with CamScanner

$\vec{PQ}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{3}$

$= \frac{2}{3}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}-\frac{2}{3}\hat{k} = \frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ **(Ans.)**

(ii) লব্ধি ভেক্টর $= \mathbf{A}+\mathbf{B}$

$= (4\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})+(-\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k})$

$= (4-1)\hat{i}+(5-5)\hat{j}+(-3-1)\hat{k}$

$= 3\hat{i}-4\hat{k}$

লব্ধি ভেক্টরের মান $= |\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

সুতরাং সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}|}$

$= \frac{3\hat{i}-4\hat{k}}{5} = \frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{k} = \frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{k})$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = -\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

লব্ধি ভেক্টর $= \mathbf{A}+\mathbf{B} = 3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

$= (3-1)\hat{i}+(2+1)\hat{j}+(-2-4)\hat{k}$

$= 2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$

লব্ধি ভেক্টরের মান $= |\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

সুতরাং, সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}}{7}$

$= \frac{2}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{6}{7}\hat{k} = \frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $\mathbf{A} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2+(10)^2+(-11)^2}$

$= \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$

$\therefore$ $|\mathbf{A}|$ ভেক্টরটির সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$

$= \frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15} = \frac{2}{15}\hat{i}+\frac{10}{15}\hat{j}-\frac{11}{15}\hat{k}$

$= \frac{2}{15}\hat{i}+\frac{2}{3}\hat{j}-\frac{11}{15}\hat{k} = \frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

তাহলে, লব্ধি ভেক্টর $= \mathbf{A}+\mathbf{B}$

$= 2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$= 3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$

সুতরাং সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{7}$

$= \frac{1}{7}(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})$ **(Ans.)**

4. **(i)** প্রদত্ত ভেক্টরত্রয়, $\mathbf{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\mathbf{c} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore$ $(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 1-1+1 = 1$

$(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = (\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = 1-1-1 = -1$

$(\mathbf{c}.\mathbf{a}) = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 1+1-1 = 1$

$\therefore$ $(\mathbf{a}.\mathbf{b})+(\mathbf{b}.\mathbf{c})+(\mathbf{c}.\mathbf{a}) = 1-1+1 = 1$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$

তাহলে, $\mathbf{A}.\mathbf{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

$= 3.6+(-2)(-3)+1.2$

$= 18+6+2 = 26$ **(Ans.)**

5. **(i)** প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়, $\mathbf{A} = 9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$

$\therefore$ $\mathbf{A}.\mathbf{B} = (9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}).(4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k})$

$= 36-6-30 = 36-36 = 0$

$\because$ $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 0$; সুতরাং ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$

আমরা জানি, $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 0$ হলে তারা পরস্পর লম্ব হবে।

$\therefore$ $\mathbf{A}.\mathbf{B} = (8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}).(4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}) = 32-2-30 = 0$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। **(দেখানো হলো)**

(iii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}+3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k} = 4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}-3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k} = -2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

এখন, $(\mathbf{A}+\mathbf{B}).(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

$= (4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}).(-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$

$= 4(-2)+1.3+(-1)(-5) = -8+3+5 = 0$

$\therefore$ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ ও $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। **(প্রমাণিত)**

6. **(i)** ধরি, $\mathbf{A} = 2\hat{i}+\lambda\hat{j}-\hat{k}$, $\mathbf{B} = \hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

$\therefore$ $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 0$

বা, $(2\hat{i}+\lambda\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}) = 0$

বা, $2-2\lambda+3 = 0$ $\therefore$ $\lambda = \frac{5}{2}$ **(Ans.)**

(ii) প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, তাদের স্কেলার গুণন শূন্য হবে।

$\therefore$ $(2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}).(4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}) = 0$

বা, $8-2a-2 = 0$

বা, $6-2a = 0$ বা, $2a = 6$ $\therefore$ $a = 3$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $\mathbf{P} = a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ... ... (i)

মনে করি, x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$.

Scanned with CamScanner

(ক) যেহেতু x-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$

ধরি, $\mathbf{Q} = \hat{i}$

লম্ব হতে হলে, $\mathbf{P.Q} = 0$

বা, $(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}).(\hat{i}) = 0$ বা, $a = 0$

$\therefore$ $a = 0$ হলে (i) নং ভেক্টরটি x-অক্ষের ওপর লম্ব হবে। **(Ans.)**

(খ) y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{j}$; ধরি, $\mathbf{R} = \hat{j}$

লম্ব হতে হলে, $\mathbf{P} . \mathbf{R} = 0$

বা, $(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) . (\hat{j}) = 0 \therefore b = 0$

$b = 0$ হলে (i) নং ভেক্টরটি y-অক্ষের ওপর লম্ব হবে।

(গ) z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{k}$; ধরি, $\mathbf{S} = \hat{k}$

লম্ব হতে হলে, $\mathbf{P.S} = 0$

বা, $(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) . (\hat{k}) = 0 \therefore c = 0$

$c = 0$ হলে (i) নং ভেক্টরটি z অক্ষের ওপর লম্ব হবে।

7.(i) $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14} \therefore a^2 = 14$

$|\mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{35} \therefore b^2 = 35$

$|\mathbf{c}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \therefore c^2 = 21$

এখন, $a^2 + c^2 = 14 + 21 = 35 = b^2$

এবং $\mathbf{a.c} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k})$

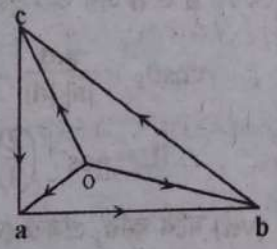
$= 6 - 2 - 4 = 0$

অতএব, ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। যার **a** এবং **c** বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ এক সমকোণ এবং **b** অতিভুজ। (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

এবং $\mathbf{c} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$

মনে করি, ভেক্টর মূলবিন্দু O সাপেক্ষে বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a, b** ও **c**



তাহলে, $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ob} - \overrightarrow{oa}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} - 4\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$

$= -2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ $|\overrightarrow{ab}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

আবার, $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{oc} - \overrightarrow{ob} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} - 2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$= \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{bc}| = \sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

আবার, $\overrightarrow{ca} = \overrightarrow{oa} - \overrightarrow{oc} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k} - 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$

$= \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{ca}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{18}$

$\therefore |\overrightarrow{ca}|^2 = 18$

যেহেতু $|\overrightarrow{ab}| = |\overrightarrow{bc}|$ সমান, সেহেতু ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

আবার, $(|\overrightarrow{bc}|)^2 + (|\overrightarrow{ab}|)^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9$

$= 18 = |\overrightarrow{ca}|^2$

$\therefore$ ভেক্টর তিনটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। (দেখানো হলো)

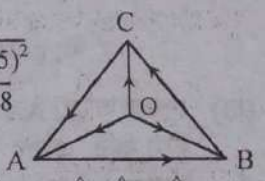
(iii) মনে করি, ভেক্টর মূলবিন্দু O সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

তাহলে $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$



আবার, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) - (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$

$= -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$

আবার, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}|$

অতএব ΔABC হলো সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। (দেখানো হলো)

8.(i) দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times (-1)}{\sqrt{1 + (-2)^2 + (-3)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{2 - 2 + 3}{\sqrt{14}.\sqrt{6}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{4 \times 21}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right)$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\mathbf{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} + 11\hat{k}$

মনে করি, **A.B** এর মধ্যবর্তী কোণ θ.

$\therefore \mathbf{A.B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$ বা, $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}$ ..... (i)

এখন, $\mathbf{A.B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(2\hat{i} + 10\hat{j} + 11\hat{k})$

$= 4 + 20 - 11 = 13$

$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

এবং $|\mathbf{B}| = \sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (11)^2} = \sqrt{225} = 15$

$\therefore$ (i) নং হতে, $\cos\theta = \dfrac{13}{3 \times 15}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{13}{45} \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{13}{45}\right)$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

মনে করি, এদের মধ্যবর্তী কোণ θ.

তাহলে, $\mathbf{A.B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$

এখন, $|\mathbf{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\mathbf{B}| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$

এবং $\mathbf{A.B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2.6 + 2(-3) + (-1).2 = 12 - 6 - 2 = 4$

সুতরাং, $4 = 3.7\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{4}{21} \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right)$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $A = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $B = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ.

$\therefore \mathbf{A.B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$ .....(i)

$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\mathbf{B}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$

$\mathbf{A.B} = \left(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}\right).\left(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}\right)$

$= 2 - 12 - 3 = 2 - 15 = -13$

(i) নং হতে, $-13 = \sqrt{14}\sqrt{26}\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{-13}{\sqrt{14}.\sqrt{26}}$

$= \dfrac{-13}{\sqrt{14}.\sqrt{2}.\sqrt{13}} = \dfrac{-\sqrt{13}}{\sqrt{28}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{13}}{\sqrt{28}} = \dfrac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{-13}{2\sqrt{91}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{13}{2\sqrt{91}}\right)$ **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore 2\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}\right) + \left(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)$

$= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

এবং $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) + \left(6\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)$

$= 7\hat{i} + \hat{k}$

ধরি, $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ এবং $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ এর অন্তঃস্থকোণ θ

সুতরাং আমরা পাই,

$(2\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = |2\mathbf{a} + \mathbf{b}|\,|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|\cos\theta$

বা, $\left(5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}\right).\left(7\hat{i} + \hat{k}\right)$

$= \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2}.(\sqrt{7^2 + 1^2})\cos\theta$

বা, $35 - 4 = (\sqrt{25 + 9 + 16}).(\sqrt{49 + 1})\cos\theta$

বা, $31 = \sqrt{50}\sqrt{50}\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{31}{50} \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{31}{50}\right)$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টর, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

এবং x-অক্ষ বরাবর ভেক্টর $\mathbf{b} = \hat{i}$

ভেক্টর **a** ও **b** এর অন্তর্গত কোণ θ_x হলে,

$$\cos\theta_x = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{i}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}.1} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \theta_x = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ **(Ans.)**

মনে করি, y অক্ষ বরাবর ভেক্টর $\mathbf{c} = \hat{j}$.

ভেক্টর **a** ও **c** এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ_y হলে,

$$\cos\theta_y = \frac{\mathbf{a.c}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{j}}{\sqrt{2^2 - (-1)^2 + (2)^2}.1} = -\frac{1}{3}$$

$\therefore \theta_y = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ **(Ans.)**

আবার, মনে করি, z অক্ষ বরাবর ভেক্টর, $\mathbf{d} = \hat{k}$.

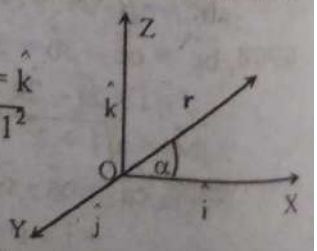
ভেক্টর **a** ও **d** এর অন্তর্ভুক্ত কোণ φ হলে,

$$\cos\theta_z = \frac{\mathbf{a.d}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{d}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}.1} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \theta_z = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ **(Ans.)**

(vii) মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টর, $\mathbf{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে এবং x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$



ধরি, $\mathbf{a} = \hat{i}$, $\mathbf{b} = \hat{j}$ এবং $\mathbf{c} = \hat{k}$

এখন, $|\mathbf{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$

$= \sqrt{3}$

এবং $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2} = 1$

ডট গুণন হতে, $\mathbf{r.a} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{a}|\cos\alpha$

বা, $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}).\hat{i} = \sqrt{3}.1.\cos\alpha$

Scanned with CamScanner

বা, $1 = \sqrt{3}\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{r}\,.\,\mathbf{b} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{b}|\cos\beta$

বা, $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).\hat{j} = \sqrt{3}\,.1\cos\beta$

বা, $1 = \sqrt{3}\cos\beta$ $\therefore \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

এবং $\mathbf{r}\,.\,\mathbf{c} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\,.\,\hat{k} = \sqrt{3}\cos\gamma$

বা, $1 = \sqrt{3}\cos\gamma$ $\therefore \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \alpha = \beta = \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

সুতরাং **r** ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত। **(দেখানো হলো)**

(viii) মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টর $\mathbf{r} = \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{r}| = |\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

x-অক্ষ বরাবর ভেক্টর $\mathbf{a} = \hat{i}$ $\therefore |\mathbf{a}| = |\hat{i}| = 1$

y-অক্ষ বরাবর ভেক্টর $\mathbf{b} = \hat{j}$ $\therefore |\mathbf{b}| = |\hat{j}| = 1$

z-অক্ষ বরাবর ভেক্টর $\mathbf{c} = \hat{k}$ $\therefore |\mathbf{c}| = |\hat{k}| = 1$

r ভেক্টরটি x, y, z অক্ষের সাথে যথাক্রমে $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \cos\theta_x = \frac{\mathbf{r.a}}{|\mathbf{r}||\mathbf{a}|} = \frac{(\hat{j}+2\hat{k}).i}{\sqrt{5}.1} = 0 = \cos 90^\circ \therefore \theta_x = 90^\circ$$

$$\therefore \cos\theta_y = \frac{\mathbf{r.b}}{|\mathbf{r}||\mathbf{b}|} = \frac{(\hat{j}+2\hat{k}).j}{\sqrt{5}.1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \therefore \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\therefore \cos\theta_z = \frac{\mathbf{r.c}}{|\mathbf{r}||\mathbf{c}|} = \frac{(\hat{j}+2\hat{k}).k}{\sqrt{5}.1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \therefore \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণগুলি: $90^\circ, \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ও $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ **(Ans.)**

9. (i) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

আমরা জানি, $\mathbf{A.B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$

$\therefore \mathbf{A.B} = A$ (**A** বরাবর **B** এর অভিক্ষেপ)

$\therefore$ **A** ভেক্টরের ওপর **B** ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|}$

$$= \frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

$$= \frac{1}{3}(2-6+12) = \frac{8}{3} \text{ (Ans.)}$$

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

তাহলে, $\mathbf{a.b} = ab\cos\theta = b$ (**b** বরাবর **a** এর অভিক্ষেপ)

$\therefore$ **b** এর ওপর **a** এর অভিক্ষেপ $= \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}|}$

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}).(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{-2-6-1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{-9}{\sqrt{6}} \text{ (Ans.)}$$

(iii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

B ভেক্টরের ওপর **A** ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\mathbf{B.A}}{|\mathbf{B}|} = \frac{(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}$$

$$= \frac{12-6+2}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7}$$

$\therefore$ **B** ভেক্টরের ওপর **A** ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \frac{8}{7}$ **(Ans.)**

10. (i) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\mathbf{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$

B ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর

$$= \frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{\sqrt{2^2+10^2+(-11)^2}} = \frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15} = \hat{b}$$

B ভেক্টর বরাবর **A** ভেক্টরের উপাংশ $= \frac{\mathbf{B.A}}{|\mathbf{B}|}\,.\,\hat{b}$

$$= \frac{(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}).(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{2^2+10^2+(-11)^2}}\,\hat{b}$$

$$= \frac{4+20-11}{\sqrt{225}}\,.\,\hat{b} = \frac{13}{15}\cdot\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$$

$$= \frac{13}{225}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$$

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$ ও $\mathbf{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

a এর দিকে **b** এর অংশক $= \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}|^2}\,.\,\mathbf{a}$

$$= \frac{(7\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k})\,.\,(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})}{|\mathbf{a}|^2}\,.\,\mathbf{a}$$

$$= \frac{7-12-12}{\{\sqrt{7^2+(-6)^2+6^2}\}^2}\,.\,(7\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k})$$

$$= \frac{-17}{\{\sqrt{(49+36+36)}\}^2}\,.\,(7\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k})$$

$$= -\frac{17}{121}(7\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

আবার, **b** এর দিকে **a** এর অংশক $= \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}|^2}\,.\,\mathbf{b}$

$$= \frac{-17}{\{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\}^2}\,.\,(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$$

$$= -\frac{17}{9}(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

Scanned with CamScanner

(iii) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$, $\mathbf{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

A ভেক্টরের দিক বরাবর B ভেক্টরের উপাংশ $= \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|^2}.\mathbf{A}$

$= \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}).(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})}{\{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}\}^2}.\mathbf{A}$

$= \frac{6 - 6 - 4}{\{\sqrt{1 + 4 + 4}\}^2}.(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$= -\frac{4}{9}(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ **(Ans.)**

11. (i) মনে করি, (2, 3, 1) এবং (1, 1, 3) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** এবং **b**

$\therefore \mathbf{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} - t\mathbf{a} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

$= (1 - t)(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + t(\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} - 2t\hat{i} - 3t\hat{j} - t\hat{k} + t\hat{i} + t\hat{j} + 3t\hat{k}$

$= (2 - t)\hat{i} + (3 - 2t)\hat{j} + (1 + 2t)\hat{k}$

ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ। **(Ans.)**

(ii) মনে করি, (4, 1, –2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর **a** এবং (3, 2, 1) ও (5, 3, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ ভেক্টর **b**

$\mathbf{a} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\mathbf{b} = (5 - 3)\hat{i} + (3 - 2)\hat{j} + (-4 - 1)\hat{k} = 2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore$ (4, 1, –2) বিন্দুগামী এবং (3, 2, 1) ও (5, 3, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + t(2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k})$

$= (4 + 2t)\hat{i} + (1 + t)\hat{j} - (2 + 5t)\hat{k}$

ইহাই নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ। **(Ans.)**

12. $F = 7\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ নিউটন

মনে করি মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক O (0, 0, 0)

এবং প্রদত্ত বস্তুর অবস্থান P(2, 4, –1), Q(4, 6, –3)

$\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $\overrightarrow{OQ} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$

$d = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} - (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

$= 4\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} - 2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

কাজ, $W = F.d = (7\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$= 14 - 8 - 4 = 2$ জুল **(Ans.)**

13. এখানে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{b} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$ এখন a ও b বিন্দুগামী সরলরেখার

ভেক্টর সমীকরণ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + t(3\hat{i} + 4\hat{j} - 10\hat{k})$

$= (2 + 3t)\hat{i} + (3 + 4t)\hat{j} + (4 - 10t)\hat{k}$ (দেখানো হলো)

(2, 3, 4) ও (5, 7, –6) বিন্দুগামী কার্তেসীয় সমীকরণ

$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y - 3}{7 - 3} = \frac{z - 4}{-6 - 4}$

$\therefore \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 4}{-10}$ **(Ans.)**

14.(i) দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

এবং $\mathbf{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2 - 2) - \hat{j}(4 + 1) + \hat{k}(-4 - 1)$$

$= -5\hat{j} - 5\hat{k}$

$$\therefore \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(5 + 10) - \hat{j}(-15) + \hat{k}(-15)$

$= 15\hat{i} + 15\hat{j} - 15\hat{k}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\mathbf{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} + \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} = 3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

এবং $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) = \hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(1 - 21) - \hat{j}(3 + 3) + \hat{k}(-21 - 1)$

$= -20\hat{i} - 6\hat{j} - 22\hat{k}$ **(Ans.)**

(iii) আমরা জানি, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \eta\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta$;

যেখানে, θ হলো ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ এবং η হলো **A** ও **B** তলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর।

$\therefore |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \eta\,\mathbf{AB}\sin\theta = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta$

বা, $\sin\theta = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|}$ [$\because |\eta| = 1$, কারণ η একটি একক ভেক্টর]

$$\text{এখন, } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4 - 3) - \hat{j}(4 - 1) + \hat{k}(6 - 2)$$

$= \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

$|\mathbf{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ ও $|\mathbf{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}}$ $\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}}\right)$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

15.(i) মনে করি, প্রদত্ত কর্ণদ্বয়, $\mathbf{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\mathbf{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

আমরা জানি,

A ও **B** কর্ণবিশিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ বর্গ একক।

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4-6) + \hat{j}(-2-12) + \hat{k}(-9-1)$$

$$= -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 196 + 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $\mathbf{P} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{Q} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

এবং $\mathbf{R} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = (2-1)\hat{i} + (-1-3)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (-1-1)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-2)\hat{k}$$

$$= -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

আমরা জানি, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ বর্গ একক

এখন, $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(-4-1) - \hat{j}(1-2) + \hat{k}(-1-8)$$

$$= -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 1 + 81} = \sqrt{107}$$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গ একক **(Ans.)**

(iii) ধরি, $a = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $b = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (9+4)\hat{i} - (6+1)\hat{j} + (8-3)\hat{k} = 13\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |a \times b|$

$$= \sqrt{13^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{169 + 49 + 25} = \sqrt{243}$$

$= 15.59$ বর্গ একক **(Ans.)**

16. (i) প্রদত্ত বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে

A (5, 2, –3), B (–3, –2, 1), C (3, –2, 11) এবং D (–1, – 4, 13)

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (-3-5)\hat{i} + (-2-2)\hat{j} + (1+3)\hat{k}$$

$$= -8\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

এবং $\overrightarrow{CD} = (-1-3)\hat{i} + (-4+2)\hat{j} + (13-11)\hat{k}$

$$= -4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

মনে করি, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর অন্তর্গত কোণ θ

তাহলে, $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CD}|}$

$$= \frac{(-8\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}).(-4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + (4)^2}.\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{32 + 8 + 8}{\sqrt{96}\sqrt{24}} = \frac{48}{48}$$

$\therefore \cos\theta = 1$ বা, $\cos\theta = \cos 0° \therefore \theta = 0°$

সুতরাং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল। **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $\mathbf{P} = 2\hat{i} + a\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\mathbf{Q} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k}$

P ও **Q** পরস্পর সমান্তরাল,

$2\hat{i} + a\hat{j} - 3\hat{k} = m(6\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k})$

বা, $\hat{i}(2 - 6m) + \hat{j}(a + 3m) + \hat{k}(-3 + 9m) = 0$

$\therefore 2 - 6m = 0$ ... ... (i)

$a + 3m = 0$ ... ... (ii)

এবং $-3 + 9m = 0$ ... ... (iii)

(i) নং হতে, $2 - 6m = 0$ বা, $-6m = -2 \therefore m = \frac{1}{3}$

(ii) নং এ $m = \frac{1}{3}$ বসিয়ে, $a + 3m = 0$

বা, $a = -3m$ বা, $a = -3.\frac{1}{3} \therefore a = -1$ **(Ans.)**

17. (i) প্রদত্ত ভেক্টর, $\mathbf{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এবং $\mathbf{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

ভেক্টরত্রয় একই সমতলে হবে যদি, $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3(12-5) + 2(-4-10) + 1(1+6)$$

$$= 3 \times 7 + 2(-14) + 1 \times 7$$

$$= 21 - 28 + 7 = 28 - 28 = 0$$

$\therefore$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত। **(দেখানো হলো)**

Scanned with CamScanner

(ii) মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টরত্রয়, $\mathbf{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{C} = 4\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$

যেহেতু ভেক্টরত্রয় সমতলীয়, সুতরাং আমরা পাই,

$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$

বা, $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

বা, $2(2\lambda - 3) + 1(12 + \lambda) + 1(-1 - 8) = 0$

বা, $4\lambda - 6 + 12 + \lambda - 9 = 0$

বা, $5\lambda = 3 \therefore \lambda = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

18. **(i)** মনে করি, $\mathbf{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\mathbf{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

তাহলে লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}$ হলে, $\hat{\eta} = \pm \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$

এখন $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(2 + 2) - \hat{j}(4 - 1) + \hat{k}(-4 - 1)$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

এবং $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\therefore \hat{\eta} = \pm \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \pm \frac{1}{5\sqrt{2}}(4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}$

বা, $\hat{\eta} = \pm \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$

$\therefore \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(6 + 9) - \hat{j}(-2 + 12) + \hat{k}(6 + 24)$

$= 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$

এবং $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + 30^2}$

$= \sqrt{225 + 100 + 900} = \sqrt{1225} = 35$

$\therefore \hat{\eta} = \pm \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35}$

$= \pm \frac{5(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})}{35}$

$= \pm \frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ **(Ans.)**

(iii) মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টর, $\mathbf{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

তাহলে, লম্ব ভেক্টর $\hat{\eta}$ হলে, $\hat{\eta} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$

এখন, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(1 - 2) - \hat{j}(-1 - 1) + \hat{k}(2 + 1)$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

$\therefore \hat{\eta} = \pm \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(2 + 4) + \hat{j}(4 - 1) + \hat{k}(-2 - 4)$

$= 6\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

এবং $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 9 + 36}$

$= \sqrt{81} = 9$

$\therefore \hat{\eta} = \pm \frac{6\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{9} = \pm \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ **(Ans.)**

19. ধরি, $\mathbf{A} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ ও $\mathbf{B} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(b_1c_2 - c_1b_2) - \hat{j}(a_1c_2 - a_2c_1) + \hat{k}(a_1b_2 - b_1a_2)$

$\therefore |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}$

আবার, $\mathbf{A}.\mathbf{B} = (a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}).(a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k})$

$= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

আবার, $|\mathbf{A}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$; $|\mathbf{B}| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$

বামপক্ষ $= |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A}.\mathbf{B}|^2$

$= (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2$

$= b_1^2c_2^2 + c_1^2b_2^2 - 2b_1b_2c_1c_2 + a_1^2c_2^2 + a_2^2c_1^2 - 2a_1a_2c_1c_2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2b_1b_2c_1c_2 + 2a_1a_2c_1c_2$

$= b_1^2c_2^2 + c_1^2b_2^2 + a_1^2c_2^2 + a_2^2c_1^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$

ডানপক্ষ $= |\mathbf{A}|^2.|\mathbf{B}|^2$

$= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$

$= a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

Scanned with CamScanner

20. ধরি, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
ও $\mathbf{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন $= \mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ঘন একক

এখানে, $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (4-1)\hat{i} - (2+3)\hat{j} + (-1-6)\hat{k}$

$= 3\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$

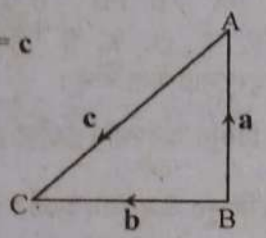
$\therefore \mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}).(3\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k})$

$= |6 + 15 - 28|$ ঘন একক

$= |-7| = 7$ ঘন একক **(Ans.)**

অনুশীলনী-2(C) এর সমাধান

1. (i) মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ এবং AB, BC এর ওপর লম্ব।



মনে করি, $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$

ΔABC থেকে,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

বা, $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ বা, $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

বা, $\mathbf{c}.\mathbf{c} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}).\mathbf{c}$

বা, $c^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}).(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ [$\because \mathbf{c}.\mathbf{c} = c^2$, $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$]

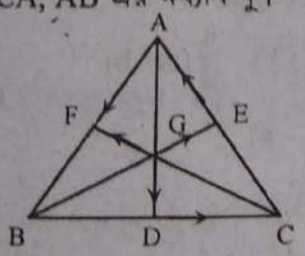
বা, $c^2 = \mathbf{b}.\mathbf{b} - \mathbf{b}.\mathbf{a} - \mathbf{b}.\mathbf{a} + \mathbf{a}.\mathbf{a} = b^2 - 2(\mathbf{b}.\mathbf{a}) + a^2$

$= b^2 + a^2$ [$\because$ **a**, **b** এর উপর লম্ব, $\therefore \mathbf{b}.\mathbf{a} = 0$]

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের বর্গ অপর দুই-বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান। (প্রমাণিত)

(ii) মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a**, **b**, **c** এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



তাহলে, D-এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$

E- এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{a}}{2}$

এবং F-এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$

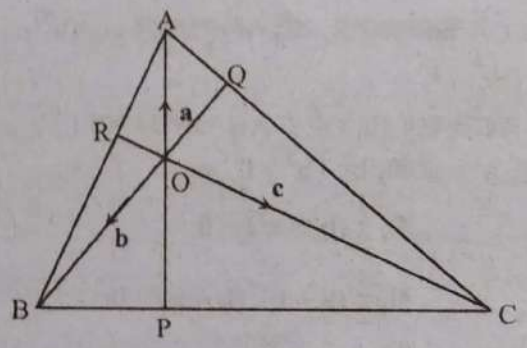
G বিন্দুটি AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে

G এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1.\mathbf{a} + 2\left(\dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}\right)}{1 + 2} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে, BE এবং CF মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃবিভক্তকারী বিন্দুদ্বয়ের উভয়ের অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$.

সুতরাং, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। (প্রমাণিত)

(iii) মনে করি, ABC ত্রিভুজের B ও C শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব যথাক্রমে BQ এবং CR পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। AO যোগ করে তাকে বর্ধিত করি যেন BC-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে, OP ও BC পরস্পর লম্ব।

মনে করি, ভেক্টর মূলবিন্দু O সাপেক্ষে A, B, C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a**, **b**, **c**

$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} \quad \therefore \overrightarrow{BQ} = -\mu\mathbf{b}$

$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} \quad \therefore \overrightarrow{CR} = -\lambda\mathbf{c}$

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} \quad \therefore \overrightarrow{AP} = -m\mathbf{a}$

এখানে μ, λ, m প্রত্যেকটিই স্কেলার।

আবার, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

যেহেতু BQ ও AC পরস্পর লম্ব,

$\therefore -\mu\mathbf{b}.(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$

বা, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{c}$

আবার যেহেতু CR ও AB পরস্পর লম্ব,

$\therefore -\lambda\mathbf{c}.(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$

বা, $\mathbf{a}.\mathbf{c} = \mathbf{b}.\mathbf{c}$

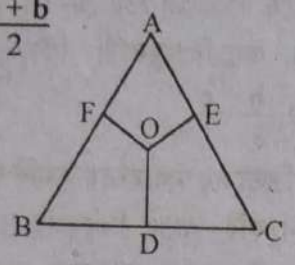
$\therefore \mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{c} = \mathbf{c}.\mathbf{a}$

বা, $-m\mathbf{a}.(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0$

অর্থাৎ AP ও BC পরস্পর লম্ব। সুতরাং ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু। (প্রমাণিত)

Scanned with CamScanner

(iv) মনে করি, BC ও CA বাহুদ্বয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। মনে করি, ভেক্টর মূলবিন্দু O সাপেক্ষে A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a, b, c**; তাহলে BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু D, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}, \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}, \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$



কিন্তু $\overrightarrow{OD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ পরস্পর লম্ব,

$\therefore \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$ বা, $b^2 = c^2$

$\overrightarrow{OE}$ ও $\overrightarrow{CA}$ পরস্পর লম্ব; তাই অনুরূপভাবে $c^2 = a^2$

$\therefore a^2 = b^2 = c^2$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{OF}$ ও $\overrightarrow{AB}$ পরস্পর লম্ব।

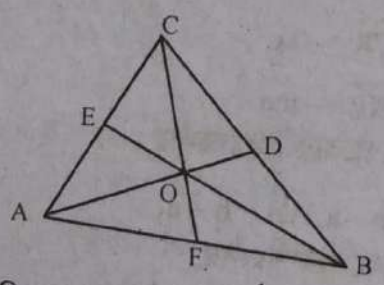
যেহেতু, $b^2 = a^2$ বা, $b^2 - a^2 = 0$

বা, $\frac{1}{2}(b^2 - a^2) = 0$

বা, $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = 0$

অর্থাৎ $\overrightarrow{OF}$ ও $\overrightarrow{AB}$ পরস্পর লম্ব। সুতরাং ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

(v) মনে করি, কোনো বিন্দু থেকে A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a, b** ও **c** এবং BC, CA ও AB বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F



তাহলে, D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c})$

মনে করি, O বিন্দু দ্বারা AD রেখা k ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

তাহলে, O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\frac{2\mathbf{a}+k(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{2(k+1)}$ …… (i)

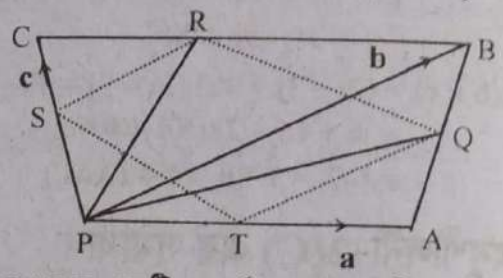
আবার, যে বিন্দু দ্বারা BE রেখা k ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়, তার অবস্থান ভেক্টর, $\frac{2\mathbf{b}+k(\mathbf{c}+\mathbf{a})}{2(k+1)}$ …… (ii)

(i) ও (ii) নং একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে, যদি k = 2 হয়। সুতরাং, k = 2 হলে, AD ও BE মধ্যমাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করবে এবং O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, CF মধ্যমা যে বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয় তার অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$

সুতরাং, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং তাদের ছেদবিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। **(প্রমাণিত)**

(vi)



মনে করি, PABC একটি চতুর্ভুজ এবং P বিন্দুর সাপেক্ষে A, B এবং C-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a, b, c**।

$\therefore \overrightarrow{PA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{PB} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{PC} = \mathbf{c}$

ধরি, T, Q, R, S যথাক্রমে PA, AB, BC এবং PC বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু।

T বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\mathbf{c}$

এখন, $\overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$

অতএব, $\overrightarrow{SR}$ এবং $\overrightarrow{TQ}$ ভেক্টর দুইটি সমান।

আবার, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

$= \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

$= \frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$

এবং $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PT}$

$= \frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$

$= \frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$

অতএব, $\overrightarrow{QR}$ এবং $\overrightarrow{TS}$ ভেক্টর দুইটি সমান।

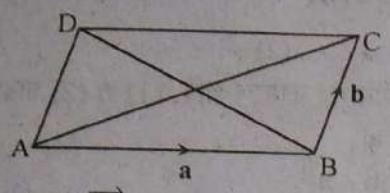
$\therefore$ TQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

Scanned with CamScanner

(vii) মনে করি, ABCD সামান্তরিকের $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$;

তাহলে, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{a}$

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]



$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

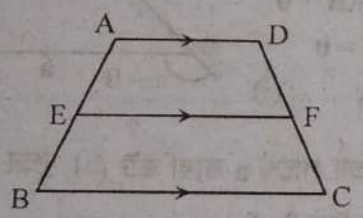
$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} + a^2 + b^2 - 2\mathbf{a}.\mathbf{b}$$
$$= 2(a^2 + b^2)$$

$= 2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{AD}^2$

= সামান্তরিকের চার বাহুর বর্গের সমষ্টি। **(প্রমাণিত)**

(viii) মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং BC ও AD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। E ও F যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু। E, F যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF, AD ও BC-এর সমান্তরাল এবং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$



প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ ।

$\therefore \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$

$\therefore$ E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

[$\because$ E, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$

[$\because$ F, CD এর মধ্যবিন্দু]

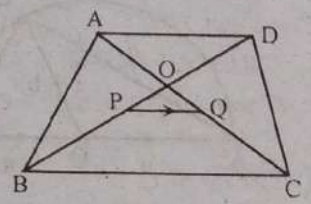
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b})$$
$$= \frac{1}{2}\{(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a})\}$$
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে কারণ, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ **(প্রমাণিত)**

(ix) ABCD ট্রাপিজিয়ামের কর্ণ AC ও BD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O।

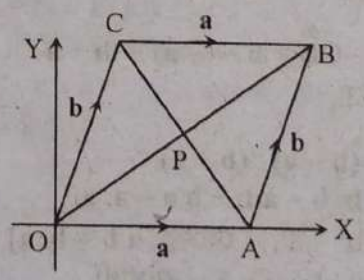
$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$
$$= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AO} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{PB})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$$



যেহেতু BC || AD এবং PQ || BC

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(BC - AD)$ **(প্রমাণিত)**

(x) মনে করি, OABC একটি রম্বস। O মূলবিন্দু এবং OB ও AC কর্ণদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।



ধরি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$

ΔOAB হতে, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

যেহেতু O মূলবিন্দু এবং $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, তখন A এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{a}$।

অনুরূপভাবে, C এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{b}$ এবং B এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

কর্ণ OB এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{0 + \mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$

$$= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$$

Scanned with CamScanner

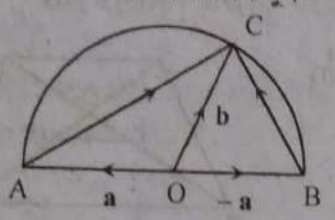
পুনরায়, কর্ণ AC এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$

সুতরাং কর্ণ OB ও AC এর মধ্যবিন্দু একই।
অর্থাৎ, এরা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
আবার, আমরা পাই,

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$
$$= (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$
$$= b^2 - a^2 = b^2 - b^2 = 0 \quad [\because \mathbf{a} = \mathbf{b}]$$

সুতরাং, OB ও AC পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ এরা পরস্পর সমকোণে অবস্থান করে।
সুতরাং রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

(xi) মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB একটি ব্যাস এবং C পরিধির ওপর একটি বিন্দু।



ধরি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{b},$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $\mathbf{a} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$

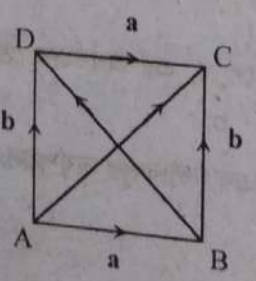
বা, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

তদ্রূপ, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \mathbf{b} - (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
এখন, ডট গুণন নিয়ে,

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = (\mathbf{b}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}+\mathbf{a})$$
$$= \mathbf{b}.\mathbf{b} - \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{a} - \mathbf{a}.\mathbf{a}$$
$$= b^2 - a^2, \ [\text{যেহেতু, } \mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}]$$
$$= 0 \quad [\because a = b = \text{ব্যাসার্ধ}]$$

সুতরাং, $AC \perp BC$ অর্থাৎ, $\angle ACB = 90°$
অতএব, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(xii) মনে করি, ABCD একটি রম্বস এবং
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \mathbf{a}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$
AC ও BD এর দুইটি কর্ণ
ΔABC হতে পাই,



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ... ... (1)

আবার, ΔABD হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ ... ... (2)

যদি কর্ণদ্বয় সমান হয় তাহলে পাই, (1) ও (2) দ্বারা

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|$

বা, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2$

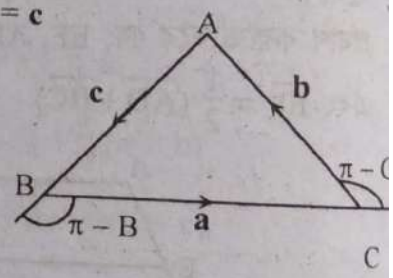
বা, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{b}-\mathbf{a}).(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

বা, $2\mathbf{a}.\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}.\mathbf{b}$

$\therefore \ \mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$

সুতরাং **a** ও **b** ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।
অর্থাৎ $\angle BAD = 90°$ অর্থাৎ রম্বসের কর্ণদ্বয় সমান হলে এ প্রত্যেকটি কোণ সমকোণী হয়। সুতরাং রম্বসটি একটি বর্গক্ষেত্র।

2. (i) মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$,
$\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$
তখন আমরা পাই,



$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$

বা, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

$\therefore -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয় পাশে **a** দ্বারা ডট (.) গুণন করে পাই,

$\mathbf{a}.(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$

বা, $-a^2 = ab\cos(\pi - C) + ac\cos(\pi - B)$

বা, $-a^2 = -ab\cos C - ac\cos B$

$\therefore a = b\cos C + c\cos B$. **(প্রমাণিত)**

(ii) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CA}$
$$= -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA}$$
$$= -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$$

বা, $|\overrightarrow{CA}|^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + (-\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{CA})$

বা, $b^2 = -\mathbf{b}.\mathbf{a} - \mathbf{b}.\mathbf{c}$

বা, $b^2 = ab\cos(\pi - C) + bc\cos(\pi - A)$

বা, $-b^2 = -ab\cos C - bc\cos A$

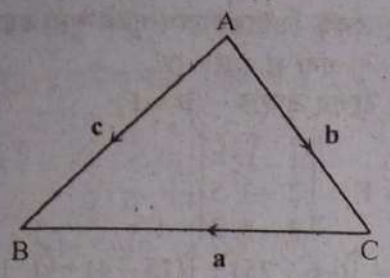
বা, $b = a\cos C + c\cos A$.

$\therefore b = a\cos C + c\cos A$ **(প্রমাণিত)**

Scanned with CamScanner

(iii) মনে করি, ΔABC-এ $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ এবং $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$

তাহলে $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ ... ... (i)



(i) নং এর উভয় পক্ষকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা ডট (.) গুণন করে পাই,

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$

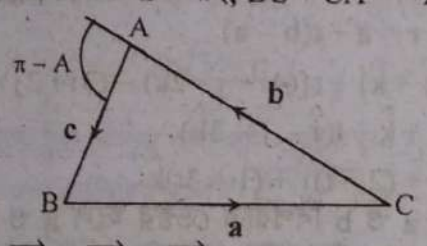
বা, $bc\cos A + ac\cos B = c^2$

বা, $c = b\cos A + a\cos B$ [উভয় পক্ষকে c দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore c = a\cos B + b\cos A$ (প্রমাণিত)

(iv) মনে করি, ΔABC একটি ত্রিভুজ এবং $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$

ভেক্টর যোজন বিধি হতে পাই, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$



তাহলে, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ বা, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

বা, $-\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$

বা, $(-\mathbf{a})^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2$ [বর্গ করে]

বা, $(-\mathbf{a}).(-\mathbf{a}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}).(\mathbf{b} + \mathbf{c})$

বা, $a^2 = \mathbf{b}.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.\mathbf{b} + \mathbf{c}.\mathbf{c}$

বা, $a^2 = \mathbf{b}.\mathbf{b} + \mathbf{c}.\mathbf{c} + 2.\mathbf{b}.\mathbf{c}$

বা, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - A)$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

অথবা, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (প্রমাণিত)

(v) মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$.

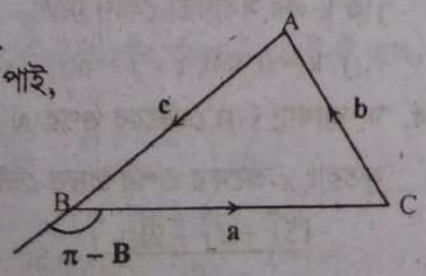
ভেক্টর যোজন বিধি হতে পাই,

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$

বা, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

বা, $-\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ ... ... (i)



(i) নং এর উভয়পক্ষকে b দ্বারা ডট (.) গুণন করে পাই,

$\mathbf{b}.(-\mathbf{b}) = \mathbf{b}.(\mathbf{a} + \mathbf{c})$

বা, $-b^2 = -(\mathbf{a} + \mathbf{c}).(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ [(i) নং হতে]

বা, $b^2 = \mathbf{a}.\mathbf{a} + \mathbf{c}.\mathbf{c} + 2.\mathbf{a}.\mathbf{c}$

বা, $b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos(\pi - B)$

বা, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\therefore \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ (প্রমাণিত)

(vi) যে কোনো ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ... ... (i)

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ ... ... (ii)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + c^2 + a^2 - 2ca\cos B + a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

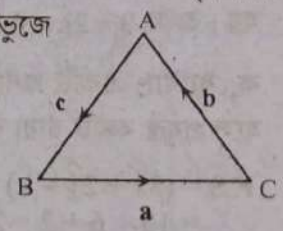
বা, $0 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

বা, $-(a^2 + b^2 + c^2) = -2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

(প্রমাণিত)

(vii) মনে করি, চিত্রে, ABC ত্রিভুজে



$\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$

$\therefore$ আমরা পাই, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

$\therefore \mathbf{a} + \mathbf{c} = -\mathbf{b}$

কিন্তু $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$= (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$

$= (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

$= \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ [$\because \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$] ... ... (i)

$\mathbf{c} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

$= (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c}$ [$\because \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ বা, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$]

$= \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{c}$

$= \mathbf{b} \times \mathbf{c} + 0$

$= \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ... ... (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে,

$\therefore \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

বা, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$

বা, $ab\sin(\pi - C) = bc\sin(\pi - A) = ca\sin(\pi - B)$

বা, $ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$

বা, $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$

বা, $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (প্রমাণিত)

Scanned with CamScanner

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর ও ব্যাখ্যা

1. গ; ব্যাখ্যা: কোনো ভেক্টরকে ঐ ভেক্টরের মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

2. ক; ব্যাখ্যা: $\frac{-10\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{(-10)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{101}}(-10\hat{i}+\hat{j})$

3. ঘ; ব্যাখ্যা: $\left|a\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{1}{4}\hat{k}\right| = 1$ বা, $\sqrt{a^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} = 1$

বা, $a^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} = 1$

বা, $a^2 = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16} = \frac{16-4-1}{16} = \frac{11}{16}$ $\therefore a = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$

4. ঘ; ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $|\mathbf{P}| = \sqrt{13}$

বা, $\sqrt{a^2+4+9} = \sqrt{13}$

বা, $a^2 = 0$ $\therefore a = 0$

5. খ; ব্যাখ্যা: $\mathbf{A.B} = (5\hat{i}+0.\hat{j}+0.\hat{k}).(0.\hat{i}+10\hat{j}+0.\hat{k})$
$= 5.0+10.0+0 = 0$

6. খ; ব্যাখ্যা: $\mathbf{a.b} = 1.2+(-.2)(-1)+1(-4)$
$= 2+2-4 = 0$

7. ক; ব্যাখ্যা: ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে যদি তাদের ডট্ গুণন শূন্য হয়। অর্থাৎ $9+2\lambda-4 = 0$ $\therefore \lambda = -\frac{5}{2}$

8. ক; ব্যাখ্যা: একটি কণার ওপর **F** বল প্রয়োগে **S** সরণ হলে প্রযুক্ত বলটি দ্বারা কাজের পরিমাণ হবে
$\mathbf{F.S} = (3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}).(5\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})$
$= 15+6+2 = 23$

9. খ; ব্যাখ্যা: যেকোনো বিন্দু P(x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

10. গ; ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i}+(-1+3)\hat{j}+(-6-4)\hat{k}$
$= -\hat{i}+2\hat{j}-10\hat{k}$

11. খ; ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP} = -5\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$

$= \frac{-5\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{33}}(5\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

12. ঘ; ব্যাখ্যা: $\cos\theta = \frac{\mathbf{P.Q}}{|\mathbf{P}||\mathbf{Q}|} = \frac{6.(-7)}{\sqrt{36}.\sqrt{49}} = \frac{-42}{42} = -1$
$\therefore \theta = \cos^{-1}(-1) = 180°$

13. গ; ব্যাখ্যা: $\cos\theta = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$
$= \frac{(-2)(-4)+(-2).2+1.(-4)}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+4+16}} = \frac{8-4-4}{3.6} = 0$
$\therefore \theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

14. গ; ব্যাখ্যা: উৎপন্ন কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}}\right)$
$= \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$

15. ক; ব্যাখ্যা: একই ভেক্টরের ক্রস গুণন শূন্য হয়।
$\therefore \mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$ এবং $\mathbf{B}\times\mathbf{B} = 0$

16. গ; ব্যাখ্যা: বলের ভ্রামক $= |\mathbf{P}\times\mathbf{F}|$

এখন, $\mathbf{P}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$
$= \hat{i}(-6+25)+\hat{j}(15-4)+\hat{k}(-10+9)$
$= 19\hat{i}+11\hat{j}-\hat{k}$
$\therefore |\mathbf{P}\times\mathbf{F}| = \sqrt{483}$

17. গ; ব্যাখ্যা: $\mathbf{P}\times\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9i-6j$
$\therefore |\mathbf{P}\times\mathbf{Q}| = \sqrt{9^2+(-6)^2} = \sqrt{117}$

18. গ; ব্যাখ্যা: $(\hat{j}\times\hat{k}).\hat{i} = \hat{i}.\hat{i} = 1$

19. খ; ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} = -\hat{i}+2\hat{k}$ $\therefore AB = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$
যেহেতু O, AB এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং $AO = \frac{\sqrt{5}}{2}$

20. ক; ব্যাখ্যা: $\mathbf{r} = \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$
$= (3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+t\{(4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})-(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\}$
$= 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}+t(\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})$
$= (3+t)\hat{i}+(2-t)\hat{j}+(1-3t)\hat{k}$

21. খ; ব্যাখ্যা: **a** ও **b** বিপরীত ভেক্টর হলে **a** ও **b** এর মান সমান হবে কিন্তু দিক বিপরীত হবে। অর্থাৎ **a** $= -$ **b** হবে।

22. ঘ; ব্যাখ্যা: r (x, y, z) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর
$\mathbf{r} = \hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$
দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর **a** ও **b** হলে এই দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হবে
$\mathbf{r} = \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = (1-t)\,\mathbf{a}+t\mathbf{b}$
$= (1-t)(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+t(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$
বা, $\mathbf{r} = (1+3t)\hat{i}+(2-5t)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$.

23. ঘ; ব্যাখ্যা: $\hat{i}$ ও $\hat{i}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $0°$ $\therefore \hat{i}\times\hat{i} = 0$
$\hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $90°$
$\therefore \hat{j}.\hat{k} = 0$ এবং $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{n}|\hat{i}||\hat{j}|\sin 90° = \hat{k}$ $[\because \hat{n} = \hat{k}]$

24. ঘ; ব্যাখ্যা: i. **B** ভেক্টরের ওপর **A** এর অভিক্ষেপ $= \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{B}|}$
সুতরাং x-অক্ষের ওপর প্রদত্ত ভেক্টরের অভিক্ষেপ
$= \frac{(5\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k}).\hat{i}}{}$

Scanned with CamScanner

ii. প্রদত্ত ভেক্টরের z অক্ষ বরাবর উপাংশ

$$\frac{(5\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k}).\hat{k}}{|\hat{k}|}.\hat{k} = -2\hat{k}$$

iii. যেকোনো ভেক্টর **A** এর দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$

25. খ; ব্যাখ্যা: i. সঠিক নয়। কারণ, $|\mathbf{A}| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

ii. $\mathbf{A}\times\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 8\hat{j}$

$\therefore |\mathbf{A}\times\hat{k}| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$

iii. $(8\hat{i}+6\hat{j}).\hat{j} = 6$

26. খ; ব্যাখ্যা: ii. সঠিক নয়। কারণ, $\mathbf{P}\times\mathbf{Q} = 0$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

$$\therefore \mathbf{P}\times\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & 1 & -6 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (5-36)\hat{i} - (45+24)\hat{j} + (-54-4)\hat{k}$$

$$= -31\hat{i} - 69\hat{j} - 58\hat{k}$$

27. ক; ব্যাখ্যা: iii. সঠিক নয়। কারণ, **A** ভেক্টরের উপর **B** ভেক্টরের অংশক $= \left(\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{\mathbf{A}}\right)\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{A}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{3}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

28. ঘ; ব্যাখ্যা: P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$

অবস্থান ভেক্টরের মান $\sqrt{1^2+2^2+4^2} = \sqrt{21}$

অবস্থান ভেক্টরের বরাবর একক ভেক্টর $\frac{1}{\sqrt{21}}(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})$

29. খ; ব্যাখ্যা: ii. সঠিক নয়। কারণ, $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{n}\,AB\sin\theta$

30. গ; ব্যাখ্যা: $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 1.\sqrt{3}+1.3+1.(-2) = \sqrt{3}+3-2$

$= 1+\sqrt{3}$

31. ঘ; ব্যাখ্যা: **B** ভেক্টরের ওপর **A** ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3+9+4}} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$$

32. ক; ব্যাখ্যা: $\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{C} = 3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}-(-2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})+2(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}) = 7\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{C}| = \sqrt{7^2+(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{59}$

33. খ; ব্যাখ্যা: **C** ভেক্টর ও y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{C}.\hat{j}}{|\mathbf{C}||\hat{j}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

34. খ; ব্যাখ্যা: $(-1-3)\hat{i}+(1+2)\hat{j}+(1-1)\hat{k}$

$= -4\hat{i}+3\hat{j}$

35. ক; ব্যাখ্যা: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = 5$

36. খ; ব্যাখ্যা: $\mathbf{A}.\mathbf{B} = 2\times6+2\times(-3)+2\times(-1)$

$= 12-6-2 = 4$

37. খ; ব্যাখ্যা: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

38. ক; ব্যাখ্যা: সামান্তরিকের কর্ণ $= \mathbf{a}+\mathbf{b}$

$= 2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{i}+5\hat{j} = 8\hat{j}$

39. খ; ব্যাখ্যা: একক ভেক্টর $= \frac{8\hat{j}}{\sqrt{8^2}} = \hat{j}$

40. খ; ব্যাখ্যা: $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= Q\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P} = \frac{(5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}}$$

$$= \frac{10-3-4}{\sqrt{38}} = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

41. গ; ব্যাখ্যা: $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\mathbf{a}-\mathbf{b} = -2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

$\therefore (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 4(-2)+1(3)+(-1)(-5)$

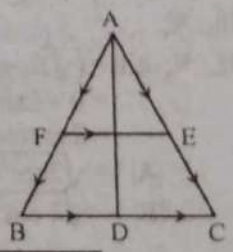
$= -8+3+5 = 0$

42. খ; ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$= 2\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FF}$

$= \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}$



43. ঘ; ব্যাখ্যা: প্রশ্নমতে, $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+a^2} = 1$

বা, $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+a^2 = 1$

বা, $a^2 = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$

বা, $a^2 = \frac{23}{36} \therefore a = \pm\frac{\sqrt{23}}{6}$

44. গ; ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5\hat{i}-10\hat{j}-5\hat{k}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+100+25} = 5\sqrt{6}$

45. ক; ব্যাখ্যা: ব্যাখ্যা: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0$

বা, $2(-2a+12)-1(3a-4)-1(-9+2) = 0$

বা, $-7a = -35 \therefore a = 5$

Scanned with CamScanner

46. ঘ; ব্যাখ্যা: B ভেক্টরের উপর A ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= A\cos\theta = \frac{\mathbf{A.B}}{B} = \frac{24-4+15}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}}$$

$$= \frac{35}{\sqrt{50}} = \frac{35\sqrt{2}}{\sqrt{50}.\sqrt{2}} = \frac{35\sqrt{2}}{10}$$

47. গ; ব্যাখ্যা: ধরি, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{p.q}}{p.q} = \cos^{-1}\frac{(-8+3+5)}{\sqrt{18}\sqrt{38}}$

$$= \cos^{-1}(0) = 90°$$

48. খ; ব্যাখ্যা: যেহেতু XOZ তলের সমান্তরাল সুতরাং $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে।

$$\therefore (3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}).\left(\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{k}\right) = \frac{12}{5} + 0 - \frac{12}{5} = 0$$

$\therefore$ লম্ব একক ভেক্টর $= \frac{1}{5}(4\hat{i} - 3\hat{k})$

49. গ; ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (4-1)\hat{i} - (6+5)\hat{j} + (-3-10)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - 11\hat{j} - 13\hat{k}$$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \sqrt{3^2 + (-11)^2 + (-13)^2} = \sqrt{299}$ বর্গ একক

50. খ;

51. ঘ; $\mathbf{A.B} = (\sqrt{2}\cos\alpha\hat{i} - \sqrt{2}\sin\alpha\hat{j}).(-\sqrt{2}\cos\alpha\hat{j} + \sqrt{2}\sin\alpha\hat{k})$

$$= 0 + 2\sin\cos\alpha + 0$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$|\mathbf{A}| = \sqrt{2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \sqrt{2}$

$|\mathbf{B}| = \sqrt{2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha)} = \sqrt{2}$

$\therefore$ A ও B এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}\right)$

$$= \cos^{-1}(\sin\alpha . \cos\alpha)$$

52. ঘ; ব্যাখ্যা: বলের লব্ধি

$\mathbf{F} = (4+3)\hat{i} + (1+1)\hat{j} + (-3-1)\hat{k} = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

সরণ $\mathbf{S} = (5-1)\hat{i} + (4-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ কাজ $= \mathbf{F.S} = 7.4 + 2.2 + (-4).(-4) = 28 + 4 + 16 = 48$

53. গ;

54. ঘ; ব্যাখ্যা: যেহেতু ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল। সুতরাং কার্ল $\overline{V} \times \hat{v} = 0$ হয়।

বা, $\left(\hat{i}\frac{d}{dx} + \hat{j}\frac{d}{dy} + \hat{k}\frac{d}{dz}\right) \times \{(x + y + az)\hat{i} + (bx + 3y - z)\hat{j} + (3x + cy + z)\hat{k}\} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ x+y+az & bx+3y-z & 3x+cy+z \end{vmatrix} = 0$

বা, $\hat{i}(c+1) - \hat{j}(3-a) + \hat{k}(b-1) = 0$

$\therefore c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1; 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3;$

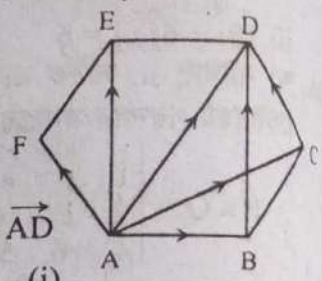
$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \therefore (a, b, c) = (3, 1, -1)$

55. ক;

56. ঘ; ব্যাখ্যা: লম্ব একক ভেক্টর $= \pm\frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|}$

$$= \pm\frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|} = \pm\frac{10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}}{\sqrt{230}}$$

57. ক; ব্যাখ্যা:



ΔACD-এ, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$ ..... (i)

[সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি বাহু সমান]

আবার, ΔABD-এ, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$ [(i) নং হতে]

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AD}$

58. খ; 59. গ; 60. খ; 61. ঘ; 62. গ;

সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. ক এখানে, A বিন্দুর অবস্থানে ভেক্টর $= 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

C বিন্দুর অবস্থানে ভেক্টর $= 5\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\mathbf{A} + \mathbf{C} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + (5\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$

$= 7\hat{i} + 6\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{A} + \mathbf{C}| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $\mathbf{F} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= \hat{i} + 3\hat{j} + (z-2)\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর বস্তুটির সরণ $= \overrightarrow{AB}$ বরাবর F এর লব্ধ অভিক্ষেপ $= \frac{\mathbf{F}.\overrightarrow{AB}}{|\mathbf{F}|}$

$\therefore |\mathbf{F}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\mathbf{F}.\overrightarrow{AB} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} + 3\hat{j} + (z - 2\hat{k})$

$= 2.1 + (-2).3 + 1.(z-2) = z - 6$

শর্তমতে, $\frac{\mathbf{F}.\overrightarrow{AB}}{|\mathbf{F}|} = 0$ বা, $\frac{z-6}{3} = 0 \therefore z = 6$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

গ $\overrightarrow{CA} = (5\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

C বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক $= \overrightarrow{CA} \times \mathbf{F}$

$$\therefore \overrightarrow{CA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2+4) - \hat{j}(3-4) + \hat{k}(-6-4)$$

$$= 6\hat{i} + \hat{j} - 10\hat{k}$$

নির্ণেয় বলের ভ্রামকের মান $= \sqrt{6^2 + 1^2 + (-10)^2}$

$= \sqrt{36 + 1 + 100} = \sqrt{137}$ **(Ans.)**

2. ক এখানে, $\mathbf{B} = 4\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-2)^2} = \sqrt{69}$$

$\therefore$ **B** বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{69}}(4\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k})$ **(Ans.)**

খ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়,

$\overrightarrow{QP} = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{QR} = 2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(5+3) - \hat{j}(-5+6) + \hat{k}(1+2)$$

$$= 8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{8^2 + 1^2 + 3^2}$

$= \sqrt{74}$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ **B** ও $\overrightarrow{QR}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\mathbf{B} \times \overrightarrow{QR}}{|\mathbf{B} \times \overrightarrow{QR}|}$$

$$\therefore \mathbf{B} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-35+2)\hat{i} - (-20+4)\hat{j} + (4-14)\hat{k}$$

$$= -33\hat{i} + 16\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore |\mathbf{B} \times \overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-33)^2 + 16^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{1089 + 256 + 100}$$

$$= \sqrt{1445} = \sqrt{289 \times 5} = 17\sqrt{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{1}{17\sqrt{5}}(-33\hat{i} + 16\hat{j} - 10\hat{k})$ **(Ans.)**

3. ক মনে করি, প্রদত্ত (2, – 1, 2) এবং (5, 1, 4) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** এবং **b**.

সুতরাং $\mathbf{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\mathbf{b} = 5\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore$ প্রদত্ত (2, –1, 2) এবং (5, 1, 4) দুটি বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ যেখানে t প্যারামিটার।

বা, $\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

বা, $\mathbf{r} = (1-t)(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + t(5\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$

$\therefore \mathbf{r} = (2+3t)\hat{i} + (-1+2t)\hat{j} + (2+2t)\hat{k}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, বল $\mathbf{F} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

মনে করি, (2, –1, 2) বিন্দু থেকে (5, 1, 4) বিন্দু পর্যন্ত কণাটির সরণ **S**.

$\therefore \mathbf{S} = (5-2)\hat{i} + (1+1)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

বল ও সরণের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, বলটি দ্বারা কাজের পরিমাণ $= |\mathbf{F}|\ |\mathbf{S}| \cos\theta$ একক

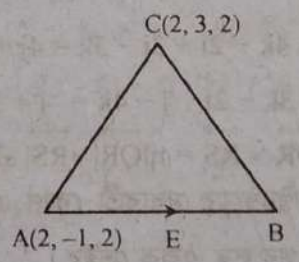
$= \mathbf{F}.\mathbf{S}$

$= (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ একক

$= 6 - 4 + 2$ একক

$= 4$ একক **(Ans.)**

গ



মনে করি, $\mathbf{F} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ বলটি A(2, –1, 2) বিন্দুতে AB বরাবর ক্রিয়ারত এবং ঘূর্ণন কেন্দ্র C(2, 3, 2)

$\therefore \overrightarrow{AC} = (2-2)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (2-2)\hat{k} = 4\hat{j}$

$\therefore$ বলের ভ্রামকের মান $= |\mathbf{F} \times \overrightarrow{AC}|$ একক।

$$\text{এখন } \mathbf{F} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-4) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(8+0)$$

$$= -4\hat{i} + 8\hat{k}$$

$\therefore |\mathbf{F} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় বলের ভ্রামকের মান $= 4\sqrt{5}$ একক। **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

4. ক দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{P} = \hat{i} + 2\hat{k}$,
$\mathbf{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{k} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ A বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\overrightarrow{PQ}$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$ [যেখানে t প্যারামিটার]

$\therefore \mathbf{r} = (-1 + t)\hat{i} + (2 - 3t)\hat{j} + (2 + t)\hat{k}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\mathbf{R} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{S} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$\overrightarrow{PR} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{k} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{QS} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k} = -\hat{i} + 7\hat{j}$

$$\therefore \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(0 - 14) + \hat{j}(-2 - 0) + \hat{k}(7 + 1)$

$= -14\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{QS}$ কর্ণ দ্বারা গঠিত PQRS সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QS}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + (-2)^2 + 8^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{196 + 4 + 64} = \frac{1}{2}\sqrt{264} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 66}$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{66} = \sqrt{66}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

গ $\overrightarrow{QR} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k} = 4\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{RS} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

আমরা জানি, $\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{RS} = \hat{\eta}|\overrightarrow{QR}|\ |\overrightarrow{RS}| \sin\theta$

যেখানে, θ হলো ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ এবং $\hat{\eta}$ হলো $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{RS}$ তলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর।

$\therefore |\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{RS}| = |\hat{\eta}|\ |\overrightarrow{QR}|\ |\overrightarrow{RS}| \sin\theta$

বা, $|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{QR}|\ |\overrightarrow{RS}| \sin\theta$

$$\therefore \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{RS}|}{|\overrightarrow{QR}|\ |\overrightarrow{RS}|}$$

$\therefore |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$

$$\therefore \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{RS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-4 - 3) + \hat{j}(-1 + 0) + \hat{k}(0 + 4)$

$= -7\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{RS}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{49 + 1 + 16} = \sqrt{66}$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{17}.\sqrt{11}}$

বা, $\theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{66}{17 \times 11}}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{6}{17}}$ (দেখানো হলো)

5. ক দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$,
$\mathbf{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} - 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$= -2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$ **(Ans.)**

খ $$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4 - 1) - \hat{j}(2 + 3) + \hat{k}(-1 - 6)$

$= 3\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$

সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন $= |\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ ঘন একক

$\therefore \mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}).(3\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k})$

$= 6 + 15 - 28 = -7$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনবস্তুটির আয়তন $= |-7| = 7$ ঘন একক **(Ans.)**

গ $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(3 - 8) - \hat{j}(-2 - 4) + \hat{k}(4 + 3)$$

$= -5\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{110} = 10.49$

$\therefore |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{9 + 25 + 49} = \sqrt{83} = 9.11$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(-4 + 6) - \hat{j}(12 - 4) + \hat{k}(-9 + 2)$$

$= 2\hat{i} - 8\hat{j} - 7\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{c} \times \mathbf{a}| = \sqrt{4 + 64 + 49} = \sqrt{117} = 10.82$

ঘনবস্তুটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 2(|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| + |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|)$ বর্গ একক

$= 2(10.49 + 9.11 + 10.82)$ বর্গ একক

$= 2 \times 30.42$ বর্গ একক $= 60.84$ বর্গ একক **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

6. **ক** দেওয়া আছে, A(1, 2, 3), B(– 1, –1, 8)

A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

এখন, A(**a**) ও B(**b**) বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, যেখানে t প্যারামিটার

$\Rightarrow \mathbf{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$\Rightarrow \mathbf{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(-2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$\Rightarrow \mathbf{r} = (1 - 2t)\hat{i} + (2 - 3t)\hat{j} + (3 + 5t)\hat{k}$. এটিই A'B বাহুর ভেক্টর সমীকরণ। **(Ans.)**

খ $\overrightarrow{OB} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

ধরি, $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

আবার, x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$.

এখন, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{66}$

$\overrightarrow{OB}.\hat{i} = -1$, $\overrightarrow{OB}.\hat{j} = -1$ এবং $\overrightarrow{OB}.\hat{k} = 8$

আবার, $\overrightarrow{OB}.\hat{i} = |\overrightarrow{OB}|\,|\hat{i}|\cos\alpha$

$\Rightarrow -1 = \sqrt{66}.1.\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{66}} \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{66}}\right)$ **(Ans.)**

$\overrightarrow{OB}.\hat{j} = |\overrightarrow{OB}|\,|\hat{j}|\cos\beta$

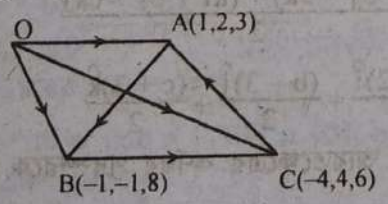
$\Rightarrow -1 = \sqrt{66}.1\cos\beta$

$\Rightarrow \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{66}} \therefore \beta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{66}}\right)$ **(Ans.)**

এবং $\overrightarrow{OB}.\hat{k} = |\overrightarrow{OB}|\,|\hat{k}|\cos\gamma \Rightarrow 8 = \sqrt{66}\cos\gamma$

$\therefore \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{66}}\right)$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(1, 2, 3), B(– 1, – 1, 8), C(– 4, 4, 6) এবং মূলবিন্দু O।



A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OB} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OC} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} + \hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}$

$= -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}$

এবং $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + 4\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$

এখন, AB + BC > CA, BC + CA > AB

এবং CA + AB > BC।

∴ ABC একটি ত্রিভুজ।

আবার, AB = BC = CA ∴ ABC ত্রিভুজটি সমবাহু।

অর্থাৎ প্রদত্ত A, B, C বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। **(দেখানো হলো)**

7. **ক** দেওয়া আছে, $\mathbf{P} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

∴ **P** ভেক্টরের ওপর **Q** ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$= Q\cos\theta = \frac{\mathbf{P}.\mathbf{Q}}{|\mathbf{P}|}$

$= \frac{3.3 + (-3).(-2) + 4.4}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{9 + 6 + 16}{\sqrt{9 + 9 + 16}}$

$= \frac{31}{\sqrt{34}}$ **(Ans.)**

খ $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= (-12 + 8)\hat{i} - (12 - 12)\hat{j} + (-6 + 9)\hat{k}$

$= -4\hat{i} + 3\hat{k}$

$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = (3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) - (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = -\hat{j}$

$\therefore (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}).(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = (-4\hat{i} + 3\hat{k}).(-\hat{j})$

$= (-4).0 + 0.(-1) + 3.0 = 0$

∴ **(P × Q) ও (P – Q) ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। (দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$= \frac{1}{2}\{(3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) + (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})\}$

$= \frac{1}{2}(6\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k})$

$\therefore |\mathbf{r}| = \sqrt{\frac{1}{2^2}\{6^2 + (-5)^2 + 8^2\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(36 + 25 + 64)}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} \times 125} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Scanned with CamScanner

মনে করি, r ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 ও θ_3 কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, x, y ও z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$.

তাহলে, $\cos\theta_1 = \dfrac{\mathbf{r}.\hat{i}}{|\mathbf{r}||\hat{i}|} = \dfrac{\frac{1}{2}(6\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}).\hat{i}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}.1} = \dfrac{6}{5\sqrt{5}}$

$$\therefore\ \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{5}}\right) = 57.54^\circ$$

আবার, $\cos\theta_2 = \dfrac{\mathbf{r}.\hat{j}}{|\mathbf{r}||\hat{j}|} = \dfrac{\frac{1}{2}(6\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}).\hat{j}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}.1} = \dfrac{-5}{5\sqrt{5}}$

$$\therefore\ \theta_2 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 116.57^\circ$$

এবং $\cos\theta_3 = \dfrac{\mathbf{r}.\hat{k}}{|\mathbf{r}||\hat{k}|} = \dfrac{\frac{1}{2}(6\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k})}{\frac{5\sqrt{5}}{2}.1} = \dfrac{8}{5\sqrt{5}}$

$$\therefore\ \theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{5}}\right) = 44.31^\circ$$

$\therefore$ Y-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ 116.57° বৃহত্তম। **(Ans.)**

8. ক দেওয়া আছে, $\mathbf{r}_1 = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}+\lambda(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$

$\mathbf{r}_2 = 9\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\mu(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

দিক নির্দেশক ভেক্টর ব্যবহার করে পাই,

$\mathbf{a} = \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$; $\mathbf{b} = 4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

a ও b পরস্পর লম্ব হবে যদি, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ হয়

এখন, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = (\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}).(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$
$= 4-2-2 = 0$

সুতরাং সাবমেরিন দুটির গতিপথ পরস্পর লম্ব।

(দেখানো হলো)

খ $\mathbf{r}_1 = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}+\lambda(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}) = \begin{pmatrix}3+\lambda\\4-2\lambda\\-5+2\lambda\end{pmatrix}$

$\mathbf{r}_2 = 9\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\mu(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = \begin{pmatrix}9+4\mu\\1+\mu\\-2-\mu\end{pmatrix}$

ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে, $\begin{pmatrix}3+\lambda\\4-2\lambda\\-5+2\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9+4\mu\\1+\mu\\-2-\mu\end{pmatrix}$

অর্থাৎ $3+\lambda = 9+4\mu$ ... ... (i)

$4-2\lambda = 1+\mu$ ... ... (ii)

(i) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে যোগ করি,

$6+2\lambda+4-2\lambda = 18+8\mu+1+\mu$

বা, $10 = 19+9\mu \therefore \mu = -1$

μ এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $3+\lambda = 9+4(-1) \therefore \lambda = 2$

এখন যদি এদের গতিপথ পরস্পর ছেদ করে, তবে

$-5+2\lambda = -2-\mu$ ... ... (iii) সমীকরণটি অবশ্যই সত্য হবে।

সুতরাং $\mu = -1$ এবং $\lambda = 2$ (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $= -5+2.2 = -1$

ডানপক্ষ $= -2-(-1) = -1$

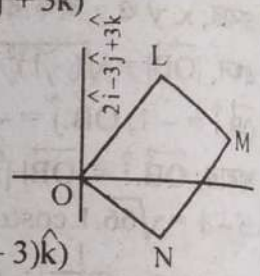
অর্থাৎ তাদের গতিপথ পরস্পরকে ছেদ করে এবং ছেদবিন্দু

$$\begin{pmatrix}9+4\mu\\1+\mu\\-2-\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9+4(-1)\\1+(-1)\\-2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$$

অর্থাৎ A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $5\hat{i}-\hat{k}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

$\overrightarrow{LM} = (5\hat{i}+\hat{j}+c\hat{k})-(2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k})$
$= 3\hat{i}+4\hat{j}+(c-3)\hat{k}$



$\because$ OLMN আয়তক্ষেত্র।

সুতরাং $OL \perp LM$.

$\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{LM} = OL.LM.\cos\theta$

বা, $(2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}).(3\hat{i}+4\hat{j}+(c-3)\hat{k})$
$= OL.LM\cos 90^\circ = 0$

বা, $6-12+3(c-3) = 0$

বা, $3c = 15 \therefore c = 5$

OM কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(5\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k})$
$= \frac{5}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{5}{2}\hat{k}$

LN কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$= \dfrac{\text{L বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} + \text{N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর}}{2}$

$= \dfrac{(2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k})+(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})}{2}$

$= \dfrac{(a+2)\hat{i}}{2}+\dfrac{(b-3)\hat{j}}{2}+\dfrac{(c+3)\hat{k}}{2}$

যেহেতু, আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর সমান।

$\therefore \dfrac{a+2}{2}\hat{i}+\dfrac{b-3}{2}\hat{j}+\dfrac{c+3}{2}\hat{k} = \dfrac{5}{2}\hat{i}+\dfrac{1}{2}\hat{j}+\dfrac{5}{2}\hat{k}$

ভেক্টরের শর্তানুসারে সহগ সমীকৃত করে,

$\frac{a+2}{2} = \frac{5}{2}$	$\frac{b-3}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{c+3}{2} = \frac{5}{2}$
$\therefore a = 3$	$\therefore b = 4$	$\therefore c = 2$

$\therefore$ N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= 3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$

Scanned with CamScanner

9. **ক** A(1, 2, 3) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টর $\mathbf{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

আমরা জানি, A(**a**) বিন্দুগামী ও $\vec{b}$ এর সমান্তরাল রেখার ভেক্টর সমীকরণ, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, যেখানে t প্যারামিটার।

$\Rightarrow \mathbf{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= (1 + 2t)\hat{i} + (2 - t)\hat{j} + (3 + t)\hat{k}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\mathbf{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\mathbf{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\mathbf{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

a ও **b** এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ হলে,

$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = 5\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}$

এখন, **c** এর দিক বরাবর **R** এর অংশক $= \frac{\mathbf{c}.\mathbf{R}}{|\mathbf{c}|}\hat{\mathbf{c}}$ ..... (i)

এখন, $\mathbf{c}.\mathbf{R} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}).(5\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k})$

$= 1.5 + 2.0 - 2(-1) = 5 + 0 + 2 = 7$

$|\mathbf{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$

$\therefore \hat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3}$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই,

c এর দিক বরাবর **R** এর অংশক $= \frac{7}{3}\left(\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3}\right)$

$= \frac{7}{9}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\mathbf{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\mathbf{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\therefore \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2 - 2) - \hat{j}(-4 - 1) + \hat{k}(4 + 1)$

$= 0\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

ধরি, ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ.

$\therefore \mathbf{b} \times \mathbf{c} = |\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin\theta\, \hat{n}$ যেখানে $\hat{n}$ হলো **b** ও **c** এর উপর লম্ব একক ভেক্টর।

$\therefore |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin\theta\, |\hat{n}|$

$\Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}.\sin\theta$ $[\because |\hat{n}| = 1]$

$\Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{6}.3.\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$ **(দেখানো হলো)**

10. **ক** যেহেতু $x\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k}$ একক ভেক্টর

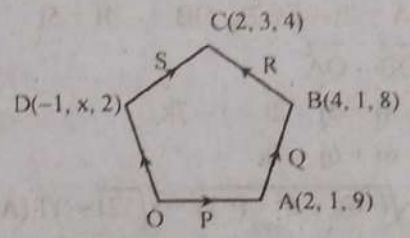
$\therefore \left|x\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k}\right| = 1$

বা, $\sqrt{x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ বা, $\sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4}} = 1$

বা, $4x^2 + 2 = 4$ বা, $4x^2 = 4 - 2 = 2$

বা, $x^2 = \frac{1}{2}$ $\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

খ



চিত্র হতে, $\mathbf{P} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{A} - \mathbf{O} = 2\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k}$

$\mathbf{Q} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k})$

$= 2\hat{i} - k$

$\mathbf{R} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} - 4\hat{i} - \hat{j} - 8\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

ভেক্টর যোগের সহযোজন সূত্র হতে পাই,

$\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}$

$\therefore \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 2\hat{i} - \hat{k} - 2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = 2\hat{j} - 5\hat{k}$

$\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = 2\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k} + 2\hat{j} - 5\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

আবার, $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k} + 2\hat{i} - \hat{k} = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}$

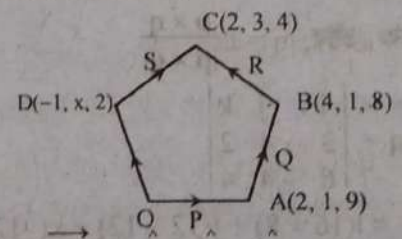
$\therefore (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R} = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k} - 2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\because \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}$

সুতরাং **P, Q, R** ভেক্টর যোগের সহযোজন সূত্র মেনে চলে। **(দেখানো হলো)**

গ



দেওয়া আছে, $\overrightarrow{OD} = -\hat{i} + x\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{(-1)^2 + x^2 + 4}$

বা, $9 = \sqrt{1 + x^2 + 4}$ $[\because \overrightarrow{OD}$ এর মান 9]

বা, $9 = \sqrt{5 + x^2}$

বা, $5 + x^2 = 81$ বা, $x^2 = 76$ $\therefore x = \sqrt{76}$

$\therefore |3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$

Scanned with CamScanner

$\therefore \overrightarrow{OD}$ ও $3\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(-\hat{i}+\sqrt{76}\hat{j}+2\hat{k}).(3\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})}{9.\sqrt{29}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{-3+4\sqrt{76}-4}{9\sqrt{29}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{4\sqrt{76}-7}{9\sqrt{29}} \text{ (Ans.)}$$

11. **ক** ধরি, $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = -4\hat{i}+5\hat{j}$

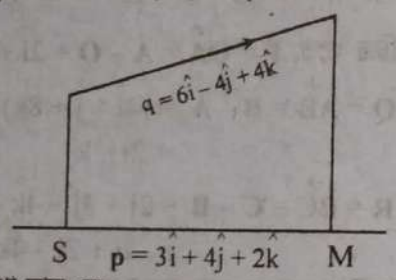
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= -4\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{i}+\hat{j}-7\hat{k}$

$= -6\hat{i}+6\hat{j}-7\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2+6^2+(-7)^2} = \sqrt{121} = 11$ **(Ans.)**

খ



চিত্র হতে দেখা যায় যে,

SM = p ভেক্টরের উপর q ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{p.q}{|p|}$

$$= \frac{(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}).(6\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k})}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}$$

$$= \frac{18-16+8}{\sqrt{9+16+4}}$$

$$\therefore SM = \frac{10}{\sqrt{29}} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $p = 3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $q = 6\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k}$

লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm\frac{p\times q}{|p\times q|}$

$$\therefore p\times q = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(16+8)+\hat{j}(12-12)+\hat{k}(-12-24)$$

$$= 24\hat{i}-36\hat{k}$$

$$\therefore |p\times q| = \sqrt{(24)^2+(-36)^2}$$

$$= \sqrt{(12\times 2)^2+(12\times 3)^2}$$

$$= \sqrt{12^2(4+9)} = 12\sqrt{13}$$

$$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{24\hat{i}-36\hat{k}}{12\sqrt{13}} = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}(2\hat{i}-3\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

12. **ক** প্রদত্ত বিন্দু P(1, 3, 2), Q(2, – 1, 3)

$\therefore \overrightarrow{OP} = \hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

$= \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = (\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$

$= 2-3+6 = 5$ **(Ans.)**

খ Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OR} = \mathbf{b} = -\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$.

এখন, Q(**a**) ও R(**b**)বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী QR রেখার ভেক্টর সমীকরণ, $\mathbf{r} = \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, যেখানে t প্যারামিটার

$= 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}+t(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})$

$= 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}+t(-3\hat{i}+3\hat{j})$

$= (2-3t)\hat{i}+(-1+3t)\hat{j}+3\hat{k}$. **(Ans.)**

কার্তেসীয় সমীকরণ

$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = (2-3t)\hat{i}+(-1+3t)\hat{j}+3\hat{k}$

$x = 2-3t$	$y = -1+3t$	$z = 3$
বা, $x-2 = -3t$	বা, $y+1 = 3t$	বা, $z-3 = 0.t$
$\therefore \frac{x-2}{-3} = t$	$\therefore \frac{y+1}{3} = t$	$\therefore \frac{z-3}{0} = t$

$\therefore \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{0}$ ইহাই নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ।

(Ans.)

গ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = \hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OQ} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OR} = -\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

OPQ ত্রিভুজ হতে পাই, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$= 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}-\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$

$= \hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$

আবার, OQR ত্রিভুজ হতে পাই, $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ} = -\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

$= -3\hat{i}+3\hat{j}+0\hat{k}$

$$\text{এখন, } \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-3)-\hat{j}(0+3)+\hat{k}(3-12)$$

$$= -3\hat{i}-3\hat{j}-9\hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-9)^2} = \sqrt{99}$$

$\therefore \Delta PQR$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{99} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

13. **ক** দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \mu\hat{k}$, $\mathbf{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \mathbf{a}.\mathbf{b} = 2.3 + 1(-2) + \mu.4 = 4\mu + 4$

a ও b পরস্পর লম্ব হলে, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$

$\Rightarrow 4\mu + 4 = 0 \therefore \mu = -1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\mathbf{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \mu\hat{k}$, $\mathbf{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হলে, $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & \mu \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2(-10 + 12) - 1(15 - 4) + \mu(-9 + 2) = 0$

$\Rightarrow 2.2 - 1.11 - 7\mu = 0$

$\Rightarrow -7 - 7\mu = 0 \Rightarrow -7\mu = 7 \therefore \mu = -1.$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\mathbf{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\mathbf{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

b ও c দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}$.

$$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}$$

এখন, $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-10 + 12) - \hat{j}(15 - 4) + \hat{k}(-9 + 2)$

$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{174}$

$\therefore \hat{\eta} = \pm\dfrac{2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{174}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{174}}\left(2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}\right)$ **(Ans.)**

14. **ক** দেওয়া আছে, $\mathbf{M} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\mathbf{N} = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$

তাহলে, লব্ধি ভেক্টর $= \mathbf{M} + \mathbf{N}$

$= 4\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k} + 3\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k} = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ লব্ধি ভেক্টরের মান $= |\mathbf{M} + \mathbf{N}|$

$= \sqrt{7^2 + 2^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{69}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}$

তাহলে, $\hat{\eta} = \pm\dfrac{\mathbf{M} \times \mathbf{N}}{|\mathbf{M} \times \mathbf{N}|}$

$$\therefore \mathbf{M} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-30 + 6) + \hat{j}(6 + 24) + \hat{k}(-12 - 15)$

$= -24\hat{i} + 30\hat{j} - 27\hat{k}$

এবং $|\mathbf{M} \times \mathbf{N}| = \sqrt{(-24)^2 + (30)^2 + (-27)^2}$

$= \sqrt{576 + 900 + 729} = \sqrt{2205} = 21\sqrt{5}$

$\therefore \hat{\eta} = \pm\dfrac{-24\hat{i} + 30\hat{j} - 27\hat{k}}{21\sqrt{5}}$

$= \pm\dfrac{1}{7\sqrt{5}}(-8\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k})$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\mathbf{P} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$P = |\mathbf{P}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \therefore P^2 = 9$

$M = |\mathbf{M}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45} \therefore M^2 = 45$

$N = |\mathbf{N}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{54} \therefore N^2 = 54$

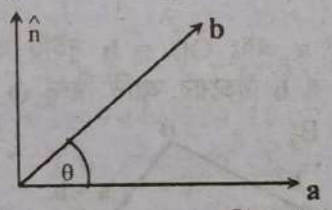
এখন, $P^2 + M^2 = 9 + 45 = 54 = N^2$

এবং $\mathbf{P}.\mathbf{M} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 8 - 10 + 2 = 0$

অতএব, ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে যার P ও M বাহুর মধ্যবর্তী কোণ এক সমকোণ এবং N অতিভুজ। (দেখানো হলো)

15. **ক**



দুইটি ভেক্টর a এবং b এর মধ্যবর্তী কোণ θ, $0 \le \theta \le \pi$ হলে, $\hat{n}\, ab \sin\theta$ কে ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই গুণনকে $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ এবং $\hat{n}$ ঘূর্ণায়মান ডানমুখী স্ক্রুর দিকমুখী একটি একক ভেক্টর যা a ও b উভয়ের ওপর লম্ব।

খ $\mathbf{P}.\mathbf{Q} = (2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}).(a\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$= 2a - 18 + 3 = 2a - 15$

যেহেতু, ভেক্টরদ্বয় লম্ব, সেহেতু $\mathbf{P}.\mathbf{Q} = 0$

অর্থাৎ, $2a - 15 = 0 \therefore a = \dfrac{15}{2}$

সুতরাং $Q = \dfrac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

এখন, Q ভেক্টরটি x-অক্ষের সাথে θ_1 কোন উৎপন্ন করলে,

$$\theta_1 = \cos^{-1}\frac{\left(\frac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}\right).\hat{i}}{\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 3^2 + (-1)^2}.\sqrt{1^2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{225}{4} + 9 + 1}}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{2} \times \frac{2}{\sqrt{265}}\right) = \cos^{-1}\frac{15}{\sqrt{265}} \text{ (Ans.)}$$

Scanned with CamScanner

গ দেওয়া আছে, $\mathbf{P} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = a\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

যেহেতু $a = 4 \therefore \mathbf{Q} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\mathbf{P}$ এবং $\mathbf{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}|}$

$$\therefore \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(6+9) + \hat{j}(-12+2) + \hat{k}(6+24)$$

$$= 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

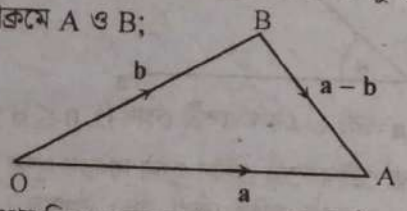
$$\therefore |\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = \sqrt{1225} = 35$$

$$\therefore \text{লম্ব একক ভেক্টর} = \pm \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35}$$

$$= \pm\left(\frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}\right) \textbf{(Ans.)}$$

16. ক **ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রের দ্বারা দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল প্রকাশ:**

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ দুইটি অসমান্তরাল ভেক্টর। এখানে $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ উভয়ের আদি বিন্দু O এবং প্রান্ত বিন্দু যথাক্রমে A ও B;



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে পাই, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$

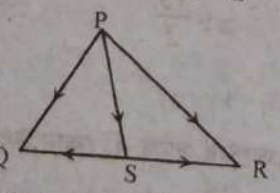
বা, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$

[উভয় পার্শ্বে $\overrightarrow{BO}$ যোগ করে]

বা, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ $[\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}]$

বা, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ $\therefore \overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ **(দেখানো হলো)**

খ



দেওয়া আছে, S, QR বাহুর মধ্যবিন্দু। P, S যোগ করি। ΔPQS ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ}$

বা, $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ}).(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ})$

বা, $PQ^2 = PS^2 + SQ^2 + \overrightarrow{PS}.\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{SQ}.\overrightarrow{PS}$

$= PS^2 + QS^2 + 2\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{SQ}$ ..... (i)

$[\because \overrightarrow{PS}.\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SQ}.\overrightarrow{PS}]$

আবার, ΔPRS হতে, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$

$\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PR} = (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}).(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR})$

বা, $PR^2 = PS^2 + SR^2 + \overrightarrow{PS}.\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SR}.\overrightarrow{PS}$

$= PS^2 + SR^2 + 2\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{SR}$ ..... (ii)

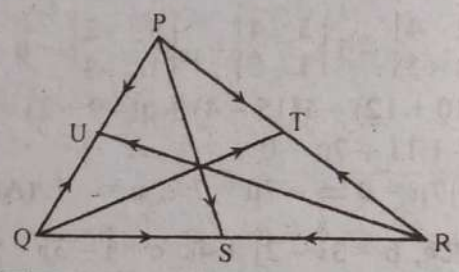
(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2) + 2\overrightarrow{PS}(\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{SR})$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$ $[\because \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{SR} = 0]$

(প্রমাণিত)

গ



দেওয়া আছে, S, T, U যথাক্রমে QR, RP ও PQ বাহুর মধ্যবিন্দু। P, S; Q, T; R, U যোগ করি।

এখন, ΔPQS হতে পাই, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$ ..... (i)

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$ ..... (ii) [ΔPRS হতে]

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + (\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RS}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

$[\because \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{RS} = 0]$

অনুরূপভাবে, $2\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR}$ এবং $2\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}$ যোগ করে,

$2(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{RU}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}$

$= (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP}) = 0$

$\therefore \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{RU} = \mathbf{0}$ **(দেখানো হলো)**

17. ক $|(2D)^{-1}| = \dfrac{1}{|2D|} = \dfrac{1}{2^3|D|} = \dfrac{1}{8(-7)} = -\dfrac{1}{56}$ **(Ans.)**

খ $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$, $\mathbf{B} = 4\hat{i} + 9\hat{j} + 5\hat{k}$,

$\mathbf{C} = 6\hat{i} + \sqrt{61}\hat{j} + 5\hat{k}$ $[\because m = \sqrt{61}]$

$|\mathbf{A}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7$, $|\mathbf{B}| = \sqrt{4^2 + 9^2 + 5^2} = \sqrt{122}$,

$|\mathbf{C}| = \sqrt{6^2 + (\sqrt{61})^2 + 5^2} = \sqrt{122}$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

আবার, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ α হলে,

$$\cos\alpha = \frac{7^2 + (\sqrt{122})^2 - (\sqrt{122})^2}{2 \times 7\sqrt{122}} \quad \therefore \alpha = 71.53°$$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী ও সমদ্বিবাহু **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

গ দেওয়া আছে, $m = 1$ এবং $Q\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$ [m = 1 বসিয়ে]

$\therefore \begin{bmatrix} 2x & +6y & +3z \\ 4x & +9y & +5z \\ 6x & +y & +5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$

$\therefore 2x + 6y + 3z = 0$

$4x + 9y + 5z = -2$

$6x + y + 5z = -8$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(45-5) - 6(20-30) + 3(4-54)$

$= 80 + 60 - 150 = -10$

$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -2 & 9 & 5 \\ -8 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 0 - 6(-10+40) + 3(-2+72)$

$= -180 + 210$

$= 30$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(-10+40) - 0 + 3(-32+12)$

$= 60 - 60 = 0$

$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 6 & 1 & -8 \end{vmatrix}$

$= 2(-72+2) - 6(-32+12) + 0$

$= -140 + 120$

$= -20$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{30}{-10} = -3,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-10} = 0,$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-20}{-10} = 2$

$\therefore x = -3, y = 0, z = 2$ **(Ans.)**

18. ক **a** ভেক্টর বরাবর **b** ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= b\cos\theta$

$= \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{(\hat{i}+2\hat{j}).(-\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$= \frac{-1+2+0}{\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A + xI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+x & 2 & 0 \\ -1 & 1+x & 3 \\ 2 & -3 & 1+x \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $|A + xI| = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 0 \\ -1 & 1+x & 3 \\ 2 & -3 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

বা, $(1+x)\{(1+x)^2+9\} - 2(-1-x-6) + 0 = 0$

বা, $(1+x)^3 + 9(1+x) - 2(-x-7) = 0$

বা, $1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 9 + 9x + 2x + 14 = 0$

বা, $x^3 + 3x^2 + 14x + 24 = 0$

বা, $x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 12x + 24 = 0$

বা, $x^2(x+2) + x(x+2) + 12(x+2) = 0$

$\therefore (x+2)(x^2+x+12) = 0$

হয়, $x + 2 = 0 \qquad \therefore x = -2$

অথবা, $x^2 + x + 12 = 0$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.12}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-47}}{2}$

ইহা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ x এর মান কাল্পনিক।

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $x = -2$ **(Ans.)**

গ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 6\hat{i} - 3\hat{j} + (1+2)\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ **a** ও **b** এর ওপর লম্ব একরূপ একক ভেক্টর $= \pm\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$

$= \pm\frac{6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2}}$

$= \pm\frac{6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}}{3\sqrt{6}}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

19. **ক** $2\mathbf{A}+\mathbf{C} = 2(2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}) - 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

$= 4\hat{i}+8\hat{j}+2\hat{k} - 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

$= 2\hat{i}+11\hat{j}+6\hat{k}$

$\therefore |2\mathbf{A}+\mathbf{C}| = \sqrt{2^2+11^2+6^2}$

$= \sqrt{4+121+36} = \sqrt{161}$ **(Ans.)**

খ প্রতিটি ইটের আয়তন $\mathbf{A}.(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(12-4) - 4(-8-4) + 1(-2-3)$

$= 16+48-5 = 59$ ঘন একক

$\therefore$ প্রতিটি ইটের দাম $= \dfrac{10000\times 59}{59000} = 10$ টাকা

গ প্রশ্নমতে, $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore E^2 = E\times E$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+4-2 & 2+1-8 & -4+3-8 \\ 8+4+3 & 4+1+12 & -8+3+12 \\ 2+16+4 & 1+4+16 & -2+12+16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & -9 \\ 15 & 17 & 7 \\ 22 & 21 & 26 \end{bmatrix}$

$\therefore E^3 = E^2\times E = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -9 \\ 15 & 17 & 7 \\ 22 & 21 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12-20-9 & 6-5-36 & -12-15-36 \\ 30+68+7 & 15+17+28 & -30+51+28 \\ 44+84+26 & 22+21+104 & -44+63+104 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -17 & -35 & -63 \\ 105 & 60 & 49 \\ 154 & 147 & 123 \end{bmatrix}$

$\therefore E^3 - 3E^2 - 5I$

$= \begin{bmatrix} -17 & -35 & -63 \\ 105 & 60 & 49 \\ 154 & 147 & 123 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & -15 & -27 \\ 45 & 51 & 21 \\ 66 & 63 & 78 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -17-18-5 & -35+15-0 & -63+27-0 \\ 105-45-0 & 60-51-5 & 49-21-0 \\ 154-66-0 & 147-63-0 & 123-78-5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -40 & -20 & -36 \\ 60 & 4 & 28 \\ 88 & 84 & 40 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

20. **ক** $\overrightarrow{OA} = \hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$,

$\overrightarrow{OB} = -2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= -2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k} - \hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

$= -3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $BX = C$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 2x-3y \\ 4x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$ ..... (i)

(i) এর উভয়পার্শ্ব সমীকৃত করে পাই,

$2x-3y = 3$ ..... (ii)

$4x-y = 11$ ..... (iii)

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (iii) বিয়োগ করে পাই,

$4x-6y-4x+y = 6-11$ বা, $-5y = -5$ $\therefore y = 1$

y এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই, $2x-3.1 = 3$

বা, $2x-3 = 3$ বা, $2x = 6$ $\therefore x = 3$

ধরি, (3, 1) ও (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a** ও **b**

সুতরাং $\mathbf{a} = 3\hat{i}+\hat{j}$ এবং $\mathbf{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}$ বিন্দুগামী সরলরেখার নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ, $\mathbf{r} = \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

বা, $\mathbf{r} = \mathbf{a}+t\mathbf{b}-t\mathbf{a}$ বা, $\mathbf{r} = \mathbf{a}(1-t)+t\mathbf{b}$

$= (3\hat{i}+\hat{j})(1-t)+t(2\hat{i}+3\hat{j})$

$= \hat{i}(3-3t+2t)+\hat{j}(1-t+3t)$

$\therefore \mathbf{r} = (3-t)\hat{i}+(1+2t)\hat{j}$ **(Ans.)**

গ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6-3 = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(3+6) = -9$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1(3+1) = -4$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1-2) = 3$

Scanned with CamScanner

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1(-3-1) = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

$$\therefore \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

আবার, $|A| = 1(6-3) - 1(3+6) + 1(-1-4)$
$= 3-9-5 = -11$

বামপক্ষ $= A(\text{adj } A)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-9-5 & -4+1+3 & -5+4+1 \\ 3-18+15 & -4+2-9 & -5+8-3 \\ 6+9-15 & -8-1+9 & -10-4+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} = -11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= |A|\, I_3 =$ ডানপক্ষ; যেখানে $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. **ক** দেওয়া আছে, $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

H ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি হবে যদি $H^2 = H$ হয়।

$\therefore H^2 = H \times H$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-6 & 6-4 \\ -9+6 & -6+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$= H$

$\therefore$ H ম্যাট্রিক্সটি সমঘাতি। **(Ans.)**

খ $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$,

$\overrightarrow{OB} = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$,

$\overrightarrow{OC} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - 5\hat{k}$,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \hat{i} - 2\hat{j}$

$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ দ্বারা কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (0-10)\hat{i} - (0+5)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$

$= -10\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{141}$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ ধরি, $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |F| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3(-2-9) - (-1)(2+12) + 2(-3+4)$

$= -33 + 14 + 2$

$= -17$

$$F_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2-9 = -11$$

$$F_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(2+12) = -14$$

$$F_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3+4 = 1$$

$$F_{21} = (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+6) = -4$$

$$F_{22} = (-1)^{2+2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6-8 = -2$$

$$F_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-9+4) = 5$$

$$F_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5$$

$$F_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-9-2) = 11$$

$$F_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+1 = -2$$

$$\therefore F^{-1} = \frac{1}{|F|}\text{adj } F$$

$$= \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -11 & -4 & 5 \\ -14 & -2 & 11 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

Scanned with CamScanner

22. ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} x^2-1 & -x+1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সটি ব্যাতিক্রম হলে $|A| = 0$ হবে।

$\therefore \begin{vmatrix} x^2-1 & -x+1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$

বা, $x^3 - x + x - 1 = 0$

বা, $x^3 - 1 = 0 \therefore (x-1)(x^2+x+1) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore x = 1$ $\quad \therefore x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1.1}}{2.1}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore x = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\mathbf{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $\mathbf{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$,

$\mathbf{c} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

এখানে, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4+3) + \hat{j}(1-2) + \hat{k}(6+4)$

$= 7\hat{i} - \hat{j} + 10\hat{k}$

$\therefore \mathbf{d} = 7\hat{i} - \hat{j} + 10\hat{k}$

মনে করি, **c** ও **d** এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore \mathbf{c}.\mathbf{d} = |\mathbf{c}||\mathbf{d}|\cos\theta$

বা, $7 + 1 + 20 = \sqrt{1+1+4}.\sqrt{49+1+100}.\cos\theta$

বা, $28 = \sqrt{6}.\sqrt{150}\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{28}{\sqrt{900}} = \dfrac{28}{30} = \dfrac{14}{15}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{14}{15}\right)$ **(Ans.)**

গ $\mathbf{a} + \mathbf{c} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) + (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

এবং $\mathbf{a} - \mathbf{c} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= \hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$

ধরি, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{c} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

এবং $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{c} = \hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$

আমরা জানি, **p** বরাবর **q** এর উপাংশ $= \dfrac{\mathbf{p}.\mathbf{q}}{|\mathbf{p}|^2}\mathbf{p}$

এখন, $\mathbf{p}.\mathbf{q} = (3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})$

$= 3 + 15 - 3 = 15$

এবং $|\mathbf{p}| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$

$\therefore$ **p** বরাবর **q** এর উপাংশ $= \dfrac{15}{(\sqrt{19})^2}(3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

সুতরাং **a + c** বরাবর **a − c** এর উপাংশ

$= \dfrac{15}{19}(3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ **(Ans.)**

23. ক A অভেদঘাতি হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

এখন, $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16+10-30 & 20-15+12 & 24+10+6 \\ 8-6-10 & 10+9+4 & 12-6+2 \\ -20+4-5 & -25-6+2 & -30+4+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 & 17 & 40 \\ -8 & 23 & 8 \\ -21 & -29 & -25 \end{bmatrix} \neq I$

$\therefore$ A অভেদঘাতি নয়।

খ এখানে, $a_{11} = 4, a_{21} = 2, a_{31} = -5,$

$a_{12} = 5, a_{22} = -3$ ও $a_{32} = 2$

$\therefore \mathbf{P} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\mathbf{Q} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= (4-15)\hat{i} - (8+25)\hat{j} + (-12-10)\hat{k}$

$= -11\hat{i} - 33\hat{j} - 22\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = \sqrt{(-11)^2 + (-33)^2 + (-22)^2}$

$= \sqrt{121 + 1089 + 484}$

$= 11\sqrt{14}$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব ভেক্টর $= \pm \dfrac{\mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}|}$

$= \pm \dfrac{(-11\hat{i} - 33\hat{j} - 22\hat{k})}{11\sqrt{14}}$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{14}}(\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ **(Ans.)**

গ $AX = B$ হলে পাই, $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 4x + 5y + 6z \\ 2x - 3y + 2z \\ -5x + 2y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে পাই, $4x + 5y + 6z = 7$

$2x - 3y + 2z = -1$

$-5x + 2y + z = -9$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 4(-3-4) - 5(2+10) + 6(4-15)$

$= -28 - 60 - 66$

$= -154 \neq 0$

Scanned with CamScanner

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ -9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$= 7(-3-4) - 5(-1+18) + 6(-2-27)$
$= -49 - 85 - 174$
$= -308$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ -5 & -9 & 1 \end{vmatrix}$$
$= 4(-1+18) - 7(2+10) + 6(-18-5)$
$= 68 - 84 - 138$
$= -154$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$
$= 4(27+2) - 5(-18-5) + 7(4-15)$
$= 116 + 115 - 77 = 154$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-308}{-154} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-154}{-154} = 1$

এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{154}{-154} = -1$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^t = [2 \quad 1 \quad -1]$$ **(Ans.)**

24. **ক** দেওয়া আছে,

$\mathbf{P} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\mathbf{Q} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore$ P বিন্দুগামী এবং Q ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $\mathbf{r} = \mathbf{P} + t\,\mathbf{Q}$

$= 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= (3+3t)\hat{i} - (3+2t)\hat{j} + (4+4t)\hat{k}$ **(Ans.)**

খ $\mathbf{P} - \mathbf{Q} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} - 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = -\hat{j}$

$\therefore$ P ও Q ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টর

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$
$= (-12+8)\hat{i} - (12-12)\hat{j} + (-6+9)\hat{k}$
$= -4\hat{i} + 3\hat{k}$

$\therefore (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{M} = (-\hat{j}) \cdot (-4\hat{i} + 3\hat{k}) = 0$

$\therefore$ (P – Q) ভেক্টরটি P এবং Q ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $\mathbf{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$= 3(-4+4) - (-3)(6-4) + 4(-3+2)$
$= 0 + 6 - 4 = 2$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$
$= -4 + 4 = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
$= -(6-4) = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$
$= -3 + 2 = -1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$
$= -(-6+4) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
$= 6 - 4 = 2$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$
$= -(-3+3) = 0$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$
$= -12 + 8 = -4$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
$= -(12-12) = 0$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$
$= -6 + 9 = 3$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$

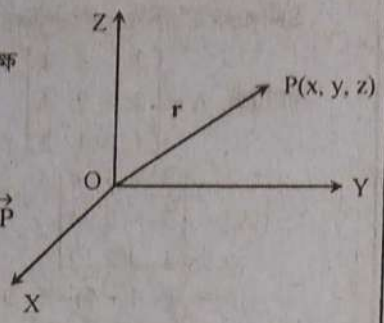
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

Scanned with CamScanner

25. ক অবস্থান ভেক্টর:

যদি প্রসঙ্গ কাঠামোয় মূল বিন্দু O এর সাপেক্ষে একটি বিন্দু P এর অবস্থানকে $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় তবে $\overrightarrow{OP}$ কে P এর অবস্থান ভেক্টর বলে।



$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ হলে, $\mathbf{r}$ কে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: যেকোনো বিন্দু P(x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

খ দেওয়া আছে,

$\mathbf{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\mathbf{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

এবং $\mathbf{C} = \hat{i} + b\hat{j} + 3\hat{k}$

A ভেক্টর বরাবর B ভেক্টরের উপাংশ

$$= \left(\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|}\right)\left(\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\right)$$

$$= \left(\frac{2+6+1}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}\right)\left(\frac{2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}\right)$$

$$= \frac{9}{14}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$$

প্রশ্নমতে,

$$\frac{9}{14}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}+b\hat{j}+3\hat{k}) = 0$$

বা, $2 + 3b - 3 = 0$

বা, $3b = 1$

$\therefore\ b = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

গ $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$= 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (-3+2)\hat{i} - (-2+1)\hat{j} + (4-3)\hat{k}$

$= -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ **A + B ও A × B** ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}).(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{3^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-3+5-2}{\sqrt{38}.\sqrt{3}}\right)$$

$= \cos^{-1}(0)$

$= 90°$ **(Ans.)**

26. ক একক ভেক্টর (Unit vector): যে ভেক্টরের মান এক (1) তাকে একক ভেক্টর বলে। অর্থাৎ **a** একটি একক ভেক্টর হলে, $|\mathbf{a}| = 1$. $|\overrightarrow{AB}| = a \neq 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ এর একক ভেক্টর $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$. একক ভেক্টর প্রকাশ করার জন্য ভেক্টর প্রতীক হিসেবে সাধারণত (^) চিহ্ন ব্যবহার করা হয় (একে পড়া হয় হ্যাট) তাহলে, $\hat{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ অর্থাৎ কোনো ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

খ দেওয়া আছে, $\mathbf{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\mathbf{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore$ **A** ভেক্টর বরাবর **B** ভেক্টরের উপাংশ

$$= \left(\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{A}\right)\left(\frac{\mathbf{A}}{A}\right)$$

$$= \left(\frac{2(-1)+(-3)(-4)+(-1)7}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}\right)\left(\frac{2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{-2+12-7}{\sqrt{14}}\right)\left(\frac{2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{14}}\right)$$

$= \frac{3}{14}(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$ **(Ans.)**

গ P(−3, −2, −1), Q(4, 0, −3) এবং S(6, −7, 8)

$\therefore \overrightarrow{PQ} = 4\hat{i} - 3\hat{k} - (-3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$

$= 4\hat{i} - 3\hat{k} + 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$= 7\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{QS} = 6\hat{i} - 7\hat{j} + 8\hat{k} - 4\hat{i} + 3\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 7\hat{j} + 11\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 11 \end{vmatrix}$$

$= (22-14)\hat{i} - (77+4)\hat{j} + (-49-4)\hat{k}$

$= 8\hat{i} - 81\hat{j} - 53\hat{k}$

$\therefore$ ΔPQS এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QS}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + (-81)^2 + (-53)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{9434}$

$= 48.564$ বর্গ একক (প্রায়) **(Ans.)**

Scanned with CamScanner