বাস্তব সংখ্যা

বাস্তব সংখ্যা

বাস্তব সংখ্যার সেট:

সাধারণ আলোচনা ঃ

N⊂Z⊂Q⊂R

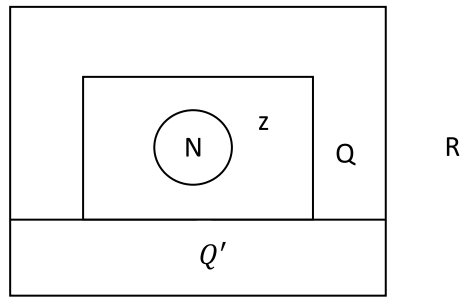
N⊂Z⊂ $Q^{'}$ ⊂R

Q∪Q' =R

Q∩ Q' = ∅

Q ও Q' কি ধরণের সংখ্যা?

Ans: মূলদ ও অমূলদ



বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য সমূহঃ

(1) আবদ্ধতা (Clousure): বাস্তব সংখ্যা যোগ ও গুণন প্রক্রিয়ার জন্য আবদ্ধ। (i) a+b ∈ R (ii) a.b ∈ R

(2) অনন্যতা (Uniqueness): যদি a,b,c,d ∈ R এবং a = b ও c = d হয় তবে,

(i) a+c = b+d (ii) ac =bd.

(3).বিনিময় বিধি (Commutative Law): বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণন প্রক্রিয়া বিনিময় যোগ্য। যদি a,b ∈ R হয়। তবে (i) a+b=b+a (ii) a.b=b.a

(4). সংযোগ বিধি (Associative Law): a,b,c ∈ R হলে (i) (a+b)+c = a+(b+c)   (ii) (ab)c = a(bc)

[Note: বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুন প্রক্রিয়ার জন্য সংযোগ নিয়ম খাটে]

(5).বণ্টন বিধি (Distributive Law): বাস্তব সংখ্যার গুণন যোগের উপর বণ্টন যোগ্য, যদি a,b,c ∈ R হয় তবে, (i) a(b+c)=ab+bc   (ii) (b+c)a=ba+ca=ab+ca.

(6) অভেদকের অস্তিত্ব (Existance of identity): R- সেটে একটি এবং কেবল একটি সংখ্যা 0 এবং $1 \neq 0$ আছে যে, সকল $a \in R$ এর জন্য (i) a+0=0+a=a   (ii) a.1 = 1.a হয়। অতএব 0 এবং 1 যোগ ও গুণের অভেদক।

(1) সকল R এর জন্য -a∈ R এবং a+(-a)=(-a)+a = 0

(2) প্রত্যেক অশূন্য বাস্তব সংখ্যার জন্য $a^{-1} = \frac{1}{a} \in R$এবং $a.a^{-1} = a^{-1}a = 1$

-a কে a এর যৌগিক বিপরীতক (additive inverse) a^{-1} কে a এর গৌনিক বিপরীতক (multiplication inverse) বলে।

(vii) a,b ∈R হলে a > b অথবা b<a হবে।

(viii) a,b,c $\in$R হলে a > b, b>c হলে a>c হবে।

(ix) a,b,c $\in$R হলে a > b হয় তাহলে c > o হলে ac > bc এবং c < o হলে ac < bc

(x) $a \neq 0$, b $\neq$0 এবং a>b হলে $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(xi) a,b $\in$R এবং a > b হলে a-b > 0

(xii) $a < 0 \;\; b < 0,$ এবং a > b হলে - a < -b

মন্তব্যঃ

(1) যদি c > o হয় তাহলে c ধনাত্মক সংখ্যা এবং c < o ঋনাত্মক সংখ্যা।
(2) কোন অসমতাকে ঋনাত্বক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে অসমতাটির দিক বিপরীত হয়।
(3) যে সব সংখ্যার বর্গ ধনাত্বক ঐ সংখ্যাগুলি বাস্তব হয়।

বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্নতা ধর্মঃ উর্ধ্বসীমাঃ $S = \left\{\frac{1}{2}, 1,2, \frac{1}{2}, 3\right\} \therefore s$ এর উর্ধ্বসীমা = 3

Note: s$\in$S $\Rightarrow M \geq s$ এর জন্য M' Sএর উর্ধ্বসীমা হবে যদি $M' > M$ হয় $\therefore S$ এর অসংখ্য উর্ধ্বসীমা থাকতে পারে।

ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমাঃ উর্ধ্বসীমাগুলোর মধ্যে লঘিষ্ট সীমা দ্বারা sups প্রকাশ করা হয়।

$S = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots \dots \dots, \frac{n}{n+1}\right\}$

n = 0 এর জন্য s এর একটি নিম্নসীমা $= 0$

n = 1 এর জন্য s এর একটি নিম্নসীমা $= \frac{1}{2}$

n = -1 এর জন্য s এর কোন নিম্নসীমা $= \infty$

n = $+\infty$এর জন্য s এর সর্বশেষ নিম্নসীমা $= 1$

$(-\infty, +\infty)$ বাস্তব সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত।

গরিষ্ট নিম্নসীমাঃ নিম্নেসীমিত সেটের গরিষ্ট নিম্নসীমাকে গরিষ্ট নিম্নসীমা বলে। Inf দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$S = \{-\infty \dots . -3, -2, -1, 0,1,2,3 \dots . \infty\}$ S এখানে supSও InfS কত?

InfS = o,-1,-2...... ∞

supS = o, 1, 2...... ∞

$\therefore S$ সেটটি নির্দিষ্ট ব্যাবধি দ্বারা প্রকাশ করতে হবে। এছাড়া নির্ণয় করা যথেষ্ট হবেনা।

$S = \{x: x \in \mathrm{R}, 5x^2 - 16x + 3 \leq 0\}, S$ সেটের নিম্নসীমা ও লঘিষ্ট নিম্নসীমা কত?

$S = \left\{x: \frac{1}{5} \leq x \leq 3\right\}$ supS = 3,InfS = $\frac{1}{5}$নিজে করঃ $S = \{x: x \in \mathrm{Z}, 9 \leq x^2 < 81\}$ হয় তবে supS ও InfS নির্ণয় কর

Ans: supS = 8, InfS = 3. আবার supS = - 3, InfS =-8. Note: x∈R হলে, supS = 9, InfS =3 এবং supS =-3 InfS=-9

পরম মানের ধর্মাবলীঃ

a,b∈R এর জন্যঃ

(1) $|a| \geq a$, $|ab| = |a||b|$

(2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} [b \neq 0],$ $|a + b| \leq |a| + |b|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

-x 0 x

$|\leftarrow x \rightarrow|\leftarrow x \rightarrow|$

Type-1: মান নির্ণয়

EXAMPLE-1: $||2 - 5| - |-8||$

$= ||-3| - |-7|| = |3 - 7| = |-4| = 4\ Ans.$

Type-2: পরম মান চিহ্নে সাহায্যে প্রকাশ কর

EXAMPLE-1: $-1 < 2x - 1 < 5$

সমাধান: $\frac{-1+5}{2}$ বা 2 সব পক্ষ হতে বিয়োগ করে পাই

$\Rightarrow -1-2 < 2x-1-2 < 5-2 \Rightarrow -3 < 2x-3 < 3. \Rightarrow |2x-3| < 3.$

EXAMPLE-2: (ii) b < x < a

সমাধান: $\frac{b+a}{2}$ সব পক্ষ হতে বিয়োগ করে পাই,

$b - \frac{b+a}{2} < x - \frac{b+a}{2} < a - \frac{b+a}{2} \Rightarrow b - a < 2x - (b+a) < a - b$

$\Rightarrow -(a-b) < 2x - (b+a) < a - b \therefore |2x - (b+a)| < (a-b)$

নিজে চেষ্টা কর: (i) $-2 < 3 - x < 8$; Ans $|x-6| < 5$

(ii) $-1 < 2x - 3 < 5$; Ans $|2x-5| < 3$

(iii) দেখাও যে, $a < b$ ও k ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $a < \frac{a+bk}{1+K} < b$

Type-3: অসমতার সমাধান সেট সংখ্যারেখায় প্রদর্শন সম্পর্কিত সমস্যাবলী

EXAMPLE-1: $\frac{1}{|1-5x|} \leq 3$ (যেখানে, $x \neq \frac{1}{5}$)

সমাধান: $\Rightarrow |1-5x| \geq 3$

(+) ve এর জন্য $1 - 5x \geq 3 \Rightarrow -5x \geq 2 \Rightarrow 5x \leq -2 \Rightarrow x \leq {}^{-2}/_{5}$

(-) ve এর জন্য $-1 + 5x \geq 3 \Rightarrow 5x \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{5}$

সমাধান সেট: $x = \left\{x : x \geq \frac{4}{5}\right\} U \left\{x : x \leq \frac{-2}{5}\right\}$ যেখানে $x \neq \frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5}$ বিন্দুতে উক্ত রেখাটি বিচ্ছিন্ন হয়ে পড়ে বলে

$\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) U \left(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}\right) U \left(\frac{4}{5}, \infty\right) \leftarrow$ সমাধান সেট

নিজে চেষ্টা কর: (i) $|3x+2|<8$ Ans. $\frac{-10}{3}<x<2 \therefore (\frac{-10}{3},2)$

(ii) $|2x-5|<3$ Ans. $1\le x\le 3 \therefore [1,3]$

(iii) $|x^2-1|<3$ Ans. $-2<x<2 \therefore (-2,2)$

Type-4: পরম মান ও বাস্তব সংখ্যার ধর্মবলী সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-1: $|a-b|\ge \big||a|-|b|\big|.\quad a,b\epsilon R$

$|a|=|(a-b)+b|\le|a-b|+|b|.$

$|a|-|b|\le|a-b|$

$\therefore |b|-|a|\le|b-a|=|a-b|.$

$|a|-|b|\ge-|a-b|$

$\therefore -|a-b|\le|a|-|b|\le|a-b|$

$\therefore \big||a|-|b|\big|\le|a-b|$ প্রমাণিত

EXAMPLE-2: $|x-1|<\frac{1}{10}$ হলে দেখাও যে $\left|x^2-1<\frac{21}{100}\right|$

$|x|-|1|\le|x-1|<\frac{1}{10}.\Rightarrow|x|<\frac{1}{10}+1=\frac{11}{10}.\Rightarrow|x|^2<\frac{121}{100}.\Rightarrow x^2<\frac{121}{100}.$

$\Rightarrow x^2-1\le|x^2|-|1|\le|x^2-1|<\frac{121}{100}-1\Rightarrow|x^2-1|<\frac{21}{100}$ proved.

নিজে চেষ্টা কর: (i) $|x-1|<\frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে, $|x^2-1|<{}^5\!/_4$

(ii) $|a-b|<|a|+|b|.[a,s\in R]$

(iii) $|a+b|\le|a|+|b|.[a,s\in R]$

(iv) $|a-c|<|a-b|+|b-c|,[a,b,c\in R]$

EXAMPLE-3: x এর কোন বাস্তব মানের জন্য: $\frac{x-1}{|x|}$ বাস্তব সংখ্যা হবে।

সমাধান: x = 0 জন্য উক্ত রেখাটি বা f(x) সংজ্ঞায়িত নয়। 0 ব্যাতিত সকল বাস্তব সংখ্যা জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত $\therefore$ সমাধান সেট R- {0}

EXAMPLE-4: $|x-1|+|2x-3| \leq 5$

(+) ve নিয়ে, $x-1+2x-3 \leq 5 \Rightarrow 3x-4 \leq 5 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$

(-) ve নিয়ে, $-(x-1)-(2x-3) \leq 5 \Rightarrow x-1+2x-3 \geq -5 \Rightarrow 3x-4 \geq -5$

$\Rightarrow 3x \geq -1 \quad \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \leq x \leq 3 \qquad or, [-\frac{1}{3}, 3] \leftarrow$ যা নির্ণেয় সমাধান।

$(x-1)(+)ve$ এবং $(2x-3)(-)ve.$অথবা $(x-1)(-)ve$ এবং $(2x-3)(+)ve.$

ধরে সমাধান করা যাবে না তাহলে পরম মানের সংজ্ঞানুযায়ী সত্য হবে না।

নিজে চেষ্টা কর: (i) $|x+1|+|x+3| < 5$ Ans: $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{|3-x|}{|x|} = 3$ Ans: $\left\{{}^{3}/_{4}, -{}^{3}/_{2}\right\}$

(iii) $|x+3| < |x-2|$ $Ans: x < -\frac{1}{2}$