ষষ্ঠ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometric Ratios)

6. ত্রিকোণমিতি

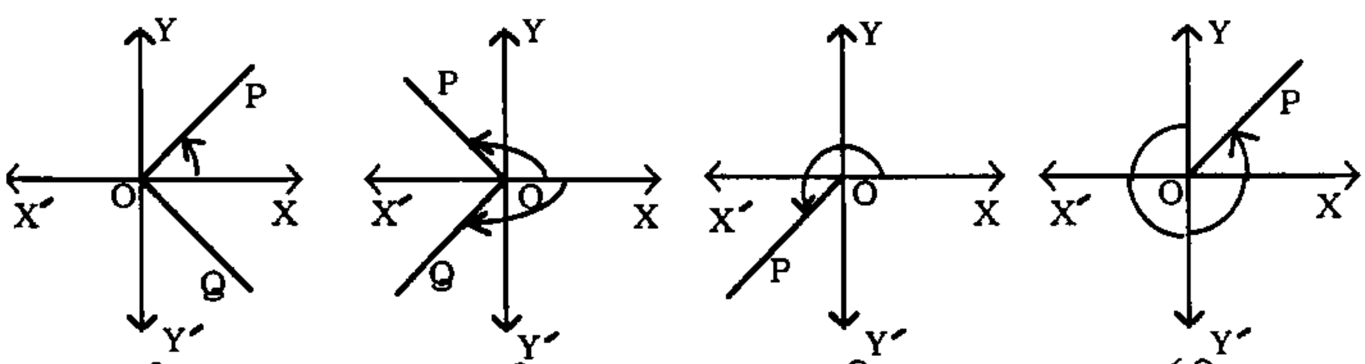
ত্রিকোণমিতির ইংরেজি প্রতিশব্দ "*Trigonometry*". এ শব্দটি গ্রীক ভাষায় ব্যবহৃত হয়। এ শব্দের বিশ্লেষণ করলে ত্রিকোণমিতি বলতে আমরা ঐ বিজ্ঞানকেই বুঝি যার সাহায্যে ত্রিভুজের বিভিন্ন অংশের পরিমাপ করা যায়। গোড়ার দিকে ত্রিকোণমিতি আবিষ্কারের মূল উদ্দেশ্য এর মধ্যেই সীমাবদ্ধ ছিল। কিন্তু নতুন নতুন অনুপাত ও তত্ত্ব আবিষ্কারের ফলে এ বিজ্ঞানের পরিধি হয়েছে ব্যাপক। সুতরাং, আধুনিককালে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভ করতে হলে ত্রিকোণমিতিতে জ্ঞানার্জন হল অপরিহার্য।

ত্রিকোণমিতিকে দুইটি শাখায় বিভক্ত করা হয়েছে। এদের একটি সমতলীয় ত্রিকোণমিতি (***Plane Trigonometry***) এবং অপরটি গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (***Spherical Trigonometry***) । এ পুস্তকে আমাদের আলোচনা সমতলীয় ত্রিকোণমিতির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে ।

6.1. ত্রিকোণমিতিতে কোণের সংজ্ঞা

সাধারণ জ্যামিতির সংজ্ঞানুসারে একই প্রান্তবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন রশ্মি কোণ উৎপন্ন করে। এ ধারণায় কোণের পরিমাণ হয় ধনাত্মক। আবার এর পরিমাণ কখনও চার সমকোণের, বা 360 ডিগ্রির বেশি হতে পারে না। অর্থাৎ, সাধারণ জ্যামিতিতে কোণের পরিমাণ শূন্য ডিগ্রি এবং 360 ডিগ্রির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

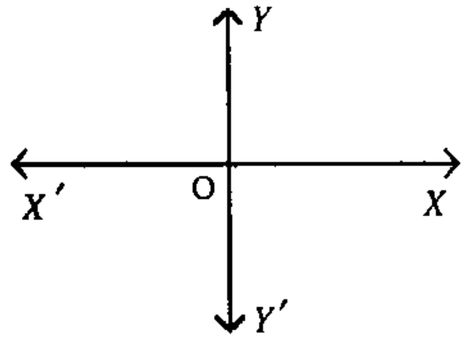
কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা হল যে, এর উৎপত্তি হয় একটি রশ্মির ঘূর্ণনের ফলে। একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে পৌছতে যে পরিমাণে আবর্তিত হয় তা রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাণ। রশ্মিটি যদি এর আদি অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করে, তবে একে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী **ধনাত্মক কোণ** (***Positive angle***) ধরা হয় এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে আবর্তনের ফলে যে কোণ উৎপন্ন করে তা **ঋণাত্মক কোণ** (***Negative angle***)।



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র ৪র্থ চিত্র

উপরের চিত্রগুলিতে $\angle XOP$ ধনাত্মক এবং $\angle XOQ$ ঋণাত্মক। চিত্রগুলি থেকে স্পষ্টতঃ বুঝা যায় কোণের পরিমাণ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক এবং 360 ডিগ্রির বেশি হতে পারে না।

6.1.1. চতুর্ভাগ বা চৌকণ (Quadrant) ঃ



পাশের চিত্র লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, লম্বভাবে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা অর্থাৎ অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা সমতলটি চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। এদের প্রত্যেকটি অংশকে একটি চতুর্ভাগ (কোয়াড্রেন্ট) বলা হয়। সমতলের XOY, YOX', $X'OY'$ এবং $Y'OX$ অংশকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয়।

নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে অবস্থানে পৌঁছায় ঐ অবস্থানকে **শেষ অবস্থান** বলা হয়।

6.2. কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ

ত্রিকোণমিতিতে কোণের পরিমাপের জন্য সাধারণত তিন প্রকারের পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এ পদ্ধতিগুলি ঃ

(ক) ষাটমূলক পদ্ধতি (*Sexagesimal system*),

(খ) শতমূলক পদ্ধতি (*Centesimal system*),

(গ) বৃত্তীয় পদ্ধতি (*Circular system*) ।

আমরা কেবল ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতি বিষয়ে আলোচনা করব।

সংজ্ঞানুসারে, সমকোণের পরিমাপ স্থির, বা ধ্রুব (*Constant*)। ত্রিকোণমিতিতে এক সমকোণকে মূল একক ধরা হয়।

(ক) ষাটমূলক পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে সমকোণকে সমান নব্বই অংশে বিভক্ত করলে প্রতি অংশে যে পরিমাপের কোণ পাওয়া যায় তাকে এক ডিগ্রি বলা হয়। প্রতি ডিগ্রিকে ষাট ভাগে বিভক্ত করলে এক অংশকে বলা হয় এক মিনিট। আবার প্রতি মিনিটকে সমান ষাট ভাগে বিভক্ত করলে এক অংশকে বলা হয় এক সেকেন্ড। সুতরাং, আমরা পাই, এক সমকোণ = $90°$ (নব্বই ডিগ্রি), $1° = 60'$ (ষাট মিনিট), $1' = 60''$ (ষাট সেকেন্ড)

(খ) বৃত্তীয় পদ্ধতি : গণিতের অন্যান্য শাখার পুস্তকে এই পদ্ধতির ব্যবহারই সাধারণত করা হয়। এই পদ্ধতিতে মূল একক হলো এক রেডিয়ান। 1^c প্রতীকের মাধ্যমে এক রেডিয়ান প্রকাশ করা হয়। **যেকোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ এর কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান।** রেডিয়ান একটি ধ্রুবক (*Constant*) কোণ।

কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক :

ষাটমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ = $90°$ বা, 2 সমকোণ = $180°$.

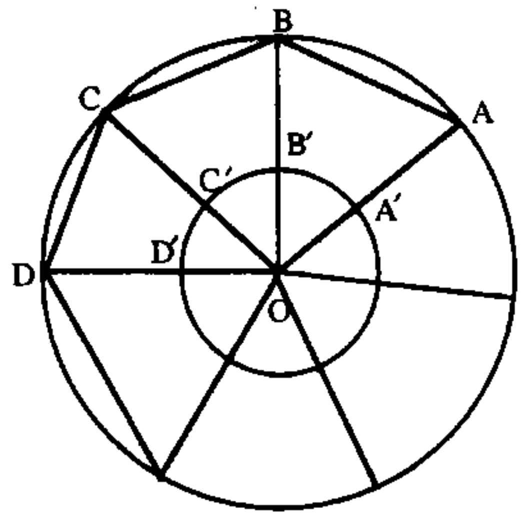
বৃত্তীয় পদ্ধতিতে, $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ = 1 রেডিয়ান বা, 2 সমকোণ = π রেডিয়ান অর্থাৎ, π^c

$\therefore$ 2 সমকোণ = $180° = \pi^c$ অর্থাৎ, $\pi^c = 180°$.

মন্তব্য ঃ উচ্চতর গণিতশাস্ত্রে কোণের পরিমাপকে সাধারণত রেডিয়ানে ধরা হয় এবং এজন্য এককের উল্লেখ থাকে না। সুতরাং কোনও কোণের পরিমাপকে π দ্বারা নির্দেশ করলে বুঝতে হবে যে, ঐ কোণের পরিমাপ হলো π রেডিয়ান ; অর্থাৎ ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে $180°$ হয়। কিন্তু মনে রাখতে হবে π হল একটি ধ্রুব সংখ্যা যার আসন্ন মানকে $\frac{22}{7}$ বা 3.14159 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) ধরা হয়।

6.2.1. উপপাদ্য : যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও এর ব্যাসের অনুপাত হলো ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে করি, O হলো দুইটি বৃত্তের সাধারণ কেন্দ্র। বড় বৃত্তটিতে n সংখ্যক সমান বাহুবিশিষ্ট ABC ..... বহুভুজ অঙ্কন করি। OA, OB, OC, OD, ... যোগ করি। এই রেখাগুলি ছোট বৃত্তটিকে যথাক্রমে A', B', C', D', ... বিন্দুতে ছেদ করল। এখন AB, BC, CD, ... যোগ করি। তাহলে $A'B'C'D'$... ক্ষেত্রটি ছোট বৃত্তে অন্তর্লিখিত n সংখ্যক সমান বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ হবে।



তাহলে,

$OA = OB$ (বড় বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

এবং $OA' = OB'$ (ছোট বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

সুতরাং, $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$ এবং AOB কোণটি OAB এবং $OA'B'$ ত্রিভুজদ্বয়ের সাধারণ কোণ।

অতএব, OAB এবং $OA'B'$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OA}{OA'}$ বা, $\dfrac{n.AB}{n.A¢B¢} = \dfrac{OA}{OA¢}$

বা, $\dfrac{n.AB}{OA} = \dfrac{n.A'B'}{OA'}$

অর্থাৎ, $\dfrac{\text{বড় বৃত্তে অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

$= \dfrac{\text{ছোট বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$ ..... (i)

এখন, বহুভুজের বাহুসংখ্যা, n যতই বেশি হবে, AB এবং অন্যান্য বাহুর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হবে। এভাবে যদি n এর মানকে অসীম পর্যন্ত বাড়ানো হয়, তবে উভয় বহুভুজের বাহুগুলি বৃত্তের পরিধির উপর সমাপাতিত হবে। অতএব, এক্ষেত্রে (i) নং হতে পাওয়া যায় :

$$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

বা, $\dfrac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাস}} = \dfrac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাস}}$

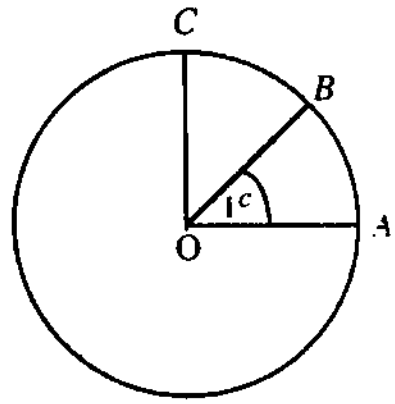
$\therefore \dfrac{\text{কোনো বৃত্তের পরিধি}}{\text{এর ব্যাস}} = \text{ধ্রুবক}$ ..... (ii)

এই ধ্রুবককে π দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অধিকাংশ গণিতশাস্ত্রবিদ 500 দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান নির্ণয় করেছেন। সাধারণত এর আসন্ন মানকে (*Approximate value*) ধরা হয় $\dfrac{22}{7}$ বা, 3.14159 (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r এবং ব্যাসকে d ধরা হয়, তবে (*ii*) নং থেকে পাই,

$\dfrac{\text{পরিধি}}{d} = \pi$ বা, পরিধি $= \pi d = 2\pi r$.

6.2.2. রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সমান AB বৃত্তচাপ চিহ্নিত করি। তাহলে, সংজ্ঞানুযায়ী

$\angle AOB = 1^c$.

OA সরলরেখার উপর OC লম্ব আঁকি। তাহলে, $\angle AOC =$ এক সমকোণ এবং বৃত্তচাপ $AC =$ বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} . 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$.

সাধারণ জ্যামিতি হতে আমরা জানি যে, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।

সুতরাং, $\dfrac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \dfrac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

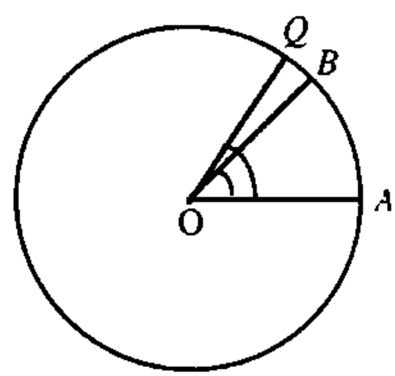
বা, $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOC} = \dfrac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC} = \dfrac{r}{\frac{\pi r}{2}}$

বা, $\dfrac{\text{এক রেডিয়ান}}{\text{এক সমকোণ}} = \dfrac{2}{\pi}$ বা, এক রেডিয়ান $= \dfrac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ

সুতরাং, এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ, কারণ π এবং এক সমকোণের মান ধ্রুবক।

6.3. রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের সূত্র

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য :



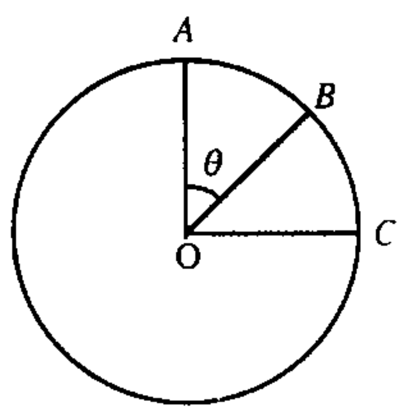
মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং বৃত্তটির AQ চাপ এর কেন্দ্রে $\angle AOQ = \theta$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। যদি $\angle AOB = 1^c$ রেডিয়ান হয়, তাহলে

$\dfrac{\angle AOQ}{AQ \text{ চাপ}} = \dfrac{\angle AOB}{AB \text{ চাপ}}$

বা, $\dfrac{\angle AOQ}{AQ \text{ চাপ}} = \dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{r}$

$\therefore AQ$ চাপ $= r\theta$.

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল :



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক এবং বৃত্তটির AB চাপ এর কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। OA রেখাংশের উপর লম্ব OC রেখাংশ অঙ্কন করি। তাহলে,

$\dfrac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\angle AOB} = \dfrac{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\angle AOC}$

বা, $\dfrac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\theta}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2\theta}{\pi}$

$\therefore$ বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{2\theta}{\pi} \times \dfrac{1}{4}\pi r^2$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2} r^2\theta$ বর্গ একক, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে

[$\because$ বৃত্তকলা ক্ষেত্র $= \dfrac{1}{4} \times$ বৃত্তক্ষেত্র এবং বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$.]

সমস্যা ও সমাধান

উদাহরণ 1. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণিভুক্ত। এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটিকে যথাক্রমে রেডিয়ান ও ডিগ্রীতে প্রকাশ করলে এদের অনুপাত হয় $\pi : 90$; কোণগুলির পরিমাপকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, কোণগুলি হলো $(\alpha-\beta)^c, \alpha^c, (\alpha+\beta)^c$

যেহেতু ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি = 2 সমকোণ = π^c, সুতরাং,

$(\alpha-\beta)+\alpha+(\alpha+\beta)=\pi$ বা, $3\alpha = \pi \quad \therefore \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

আবার ক্ষুদ্রতম কোণ $= (\alpha-\beta)^c = (\alpha-\beta) \times \dfrac{180}{\pi}$ ডিগ্রি

এখন শর্তানুসারে, $(\alpha+\beta) : \dfrac{(\alpha-\beta)180}{\pi} = \pi : 90$

বা, $\dfrac{(\alpha+\beta)\pi}{2(\alpha-\beta)} = \pi$

বা, $\alpha+\beta = 2(\alpha-\beta)$

বা, $3\beta = \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ [α এর মান বসিয়ে]

$\therefore \beta = \alpha = \dfrac{\pi}{9}$

সুতরাং কোণগুলি হলো $\dfrac{2\pi^c}{9}, \dfrac{\pi^c}{9}$ এবং $\dfrac{4\pi^c}{9}$.

উদাহরণ 2. একটি বৃত্তচাপ 30 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $60° = \dfrac{\pi \times 60}{180}$ রেডিয়ান $= \dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

যেহেতু বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $s = r\theta$, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে

$\therefore$ নির্ণেয় চাপের দৈর্ঘ্য $= 30 \times \dfrac{\pi}{3}$ মিটার $= 31.42$ মিটার।

যেহেতু বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল$= \dfrac{1}{2} r^2\theta$, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times 30 \times \dfrac{\pi}{3}$ বর্গ মিটার $= 471.24$ বর্গ মিটার

প্রশ্নমালা 6.1

1. দুইটি কোণের যোগফল ও অন্তরফল যথাক্রমে 25^c এবং $35°$ হলে, কোণ দুইটির মান ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ($\pi = 3.1416$)

2. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $x°$, $25°$ এবং $\frac{11\pi}{36}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

3. একটি গাড়ির চাকা 200 বার আবর্তিত হয়ে 800 মিটার অতিক্রম করে। চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

4. একটি বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $24°$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃত্তের ব্যাস 49 মিটার হয়, তবে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

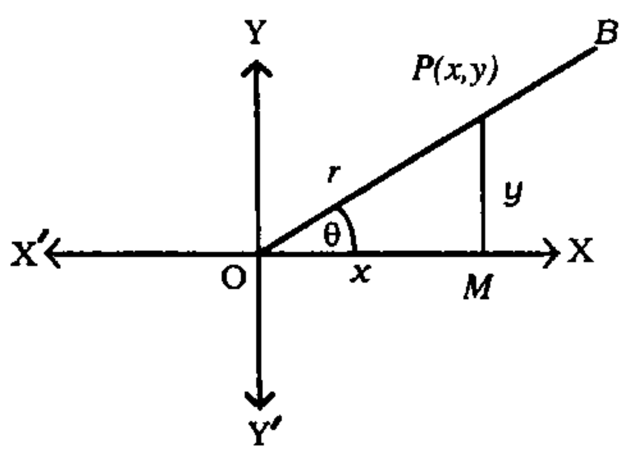
5. এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 5 কি. মি. গতিবেগে পরিভ্রমণ করে 15 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি ঐ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\frac{5\pi}{12}$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

6. একটি গাড়ি বৃত্তাকার পথে প্রতি সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে $28°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 60 মিটার হয়, তবে গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

6.4. ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত

আমরা জানি, একটি রশ্মির ঘূর্ণনের ফলে কোণের উৎপত্তি হয়। নির্দিষ্ট পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে অবস্থানে থাকে তার যে কোন বিন্দু (প্রান্ত বিন্দু ছাড়া) থেকে আদি অবস্থানের উপর লম্ব অঙ্কন করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায়। এ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাপকে পরস্পর ভাগ করলে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায়। এ অনুপাতগুলিকে ত্রিকোণমিতিতে বিশিষ্ট নামে অভিহিত করা হয়।

(a) এখানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির আলোচনা করার সময় নির্দিষ্ট কোণকে সূক্ষ্মকোণের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখা হবে। অবশ্য যেকোনো পরিমাপের কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির বিস্তারিত আলোচনা পরের অনুচ্ছেদে করা হবে।



মনে করি, ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি OX অবস্থান থেকে শুরু করে OB অবস্থানে যেতে যে কোণ উৎপন্ন করেছে তাকে θ দ্বারা সূচিত করা হলো। এখন রশ্মিটির শেষ অবস্থান OB এর O বিন্দু ব্যতীত যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ থেকে রশ্মিটির আদি অবস্থান, OX এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হবে। তাহলে, $OM = x$, $PM = y$.

OP বাহুকে r দ্বারা সূচিত করলে $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

এখন POM ত্রিভুজের বাহুগুলি দ্বারা নিচের অনুপাতগুলি গঠিত হয় ঃ

$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{PM}, \frac{OP}{OM}$ এবং $\frac{OM}{PM}$.

θ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতির বিভিন্ন অনুপাতের নামকরণ উপরের অনুপাতগুলি থেকে করা হয়েছে।

$\frac{PM}{OP}$ অনুপাতের নামকরণ করা হয়েছে θ কোণের সাইন (*sine*) অর্থাৎ, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$

$\frac{OM}{OP}$ " θ " কোসাইন (*cosine*) অর্থাৎ, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$

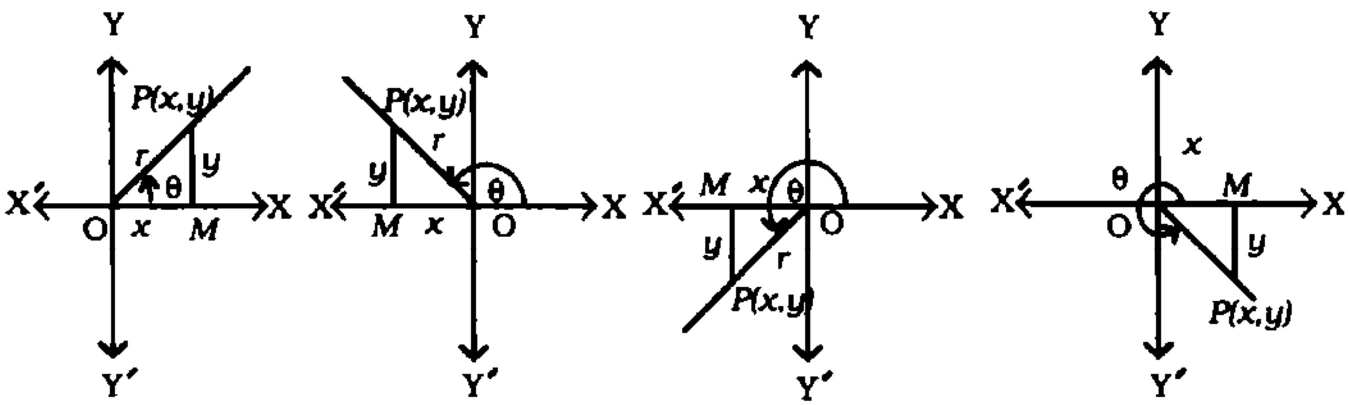
$\frac{PM}{OM}$ " θ " টেনজেন্ট (*tangent*) অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$

$\frac{OP}{PM}$ " θ " কোসেকেন্ট (*cosecant*) অর্থাৎ, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{y}$

$\frac{OP}{OM}$ θ " সেকেন্ট (*secant*) অর্থাৎ, $\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{r}{x}$

$\frac{OM}{PM}$ " θ " কোটেনজেন্ট (*cotangent*) অর্থাৎ, $\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$.

(*b*) যেকোনো কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র ৪র্থ চিত্র

মনে করি, XOX' এবং YOY' লম্বভাবে পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা অর্থাৎ স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। তাহলে, এ দুইটি সরলরেখা দ্বারা সমতলক্ষেত্রটি চারটি চতুর্ভাগে বিভক্ত হয়েছে।

এখন কোণ উৎপন্নকারী একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে ঘূর্ণন শুরু করে যে কোন পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে এ চারটি চতুর্ভাগের যে কোন একটিতে অবস্থান করবে। ধরি, এ শেষ অবস্থানে পৌঁছতে রশ্মিটি θ কোণ উৎপন্ন করেছে। রশ্মিটির এ শেষ অবস্থান, OP এর যে কোন বিন্দু P থেকে XOX' উপর PM লম্ব অংকন করায় POM সমকোণী ত্রিভুজটি গঠিত হল।

সুতরাং, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{y},\ \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{r}{x},\ \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}.$$

কিন্তু এক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের সময় প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বাহুর চিহ্নের বিবেচনাও করতে হবে। এ প্রচলিত রীতির বিশদ্ আলোচনা পরের অনুচ্ছেদে করা হবে।

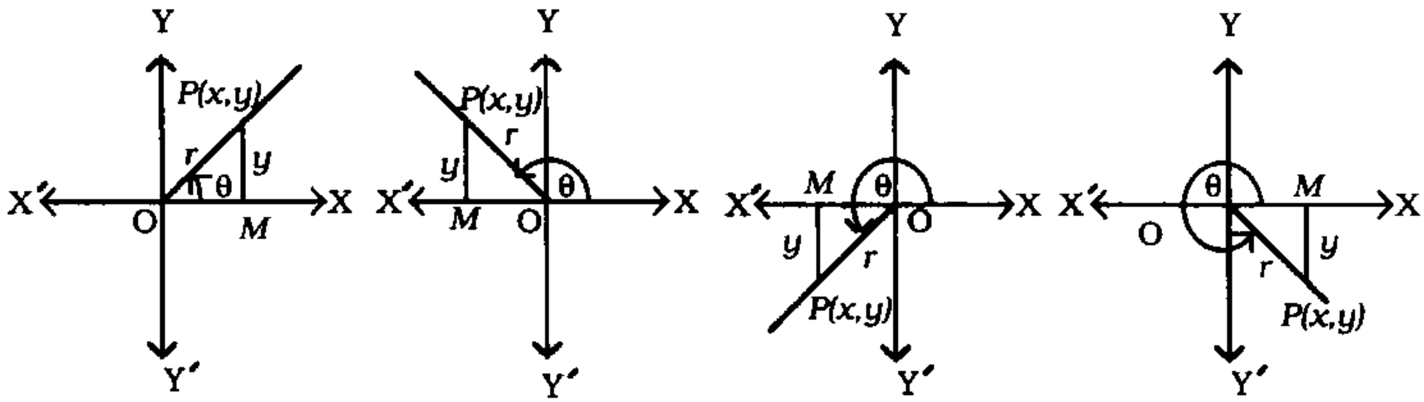
মন্তব্য : উপরের আলোচনায় θ কে অক্ষীয় কোণ ও P বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়নি। $0°$, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$ ইত্যাদি কোণকে অক্ষীয় কোণ বলা হয়।

6.5. চতুর্ভাগ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন (*Signs of trigonometrical ratios*)

লেখচিত্রের মত OX ও OY এর সমান্তরাল দিকে দূরত্ব পরিমাপ করলে ঐ দূরত্বকে ধনাত্মক এবং OX' ও OY' এর সমান্তরাল দিকের দূরত্বের পরিমাপকে ঋণাত্মক ধরা হয়। অবশ্য ব্যাসার্ধ ভেক্টর, OP এর দিকে দূরত্ব পরিমাপ করলে তাকে সব সময় ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়।

মনে করি, আদর্শ অবস্থানে কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মির আদি অবস্থান OX ও শেষ অবস্থান OP. তাহলে, $\angle XOP = \theta$. কোণটি অক্ষীয় কোণ এবং P মূলবিন্দু না হলে (অর্থাৎ, আদর্শ অবস্থানে), P বিন্দুটি চারটি চতুর্ভাগের যে কোন একটিতে অবস্থান করবে।

নিচের চারটি চিত্র লক্ষ করি :



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র ৪র্থ চিত্র

$P(x,y)$ বিন্দু থেকে x- অক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি। তাহলে, $OM = x$ এবং $PM = y$.

এখন $OP = r$ ধরা হলে, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{y}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{r}{x}, \quad \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}.$$

আগেই বলা হয়েছে r এর মান ধনাত্মক, সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির চিহ্ন x ও y এর চিহ্নের উপর নির্ভর করে । চিত্র থেকে আমরা সহজেই x ও y এর চিহ্ন বের করতে পারি। অর্থাৎ চারটি চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির চিহ্ন কি হবে? – তা নির্ণয় করা যায়।

নিচের ছকে অনুপাতগুলোর চিহ্ন দেখানে হলো :

চতুর্ভাগ	x	y	r	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
প্রথম	+	+	+	+	+	+
দ্বিতীয়	−	+	+	+	−	−
তৃতীয়	−	−	+	−	−	+
চতুর্থ	+	[illegible]	+	−	+	−

নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি শেষ পর্যায়ে কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে তা জানতে পারলে শিক্ষার্থীরা পাশের চিত্রের সাহায্যে অতি সহজেই অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে পারবে।

sin, cosec } ধনাত্মক	সব } ধনাত্মক
tan, cot } ধনাত্মক	cos, sec } ধনাত্মক

6.6. ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহের মধ্যে সম্পর্ক

অনুচ্ছেদ 6.4 থেকে আমরা পাই,

(i) $\sin\theta = \frac{x}{r}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{x}$

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\frac{r}{x}} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\cos\theta = \frac{y}{r}$ এবং $\sec\theta = \frac{r}{y}$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\frac{r}{y}} = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\sin\theta = \frac{x}{r}$, $\cos\theta = \frac{y}{r}$, $\tan\theta = \frac{x}{y}$, এবং $\cot\theta = \frac{y}{x}$

(iv) অনুচ্ছেদ 6.4 এর চিত্র থেকে, $x^2 + y^2 = r^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ...... (1)

(v) অনুচ্ছেদ 6.4 এর চিত্র থেকে, $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{r^2}{y^2}$ [y^2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ...... (1)

আবার x^2 দ্বারা ভাগ করে, $1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$

$\therefore 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ ...... (3)

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (1), (2) এবং (3) সূত্রগুলি থেকে আমরা পাই

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$,

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$ ইত্যাদি।

মন্তব্য ঃ প্রচলিত রীতি অনুযায়ী $(\sin\theta)^2$ এর পরিবর্তে $\sin^2\theta$ লেখা হয়। অন্যান্য অনুপাতের ক্ষেত্রেও তা প্রযোজ্য।

6.6.1. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা

আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা অঋণাত্মক, সুতরাং $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর প্রত্যেকটির মান অঋণাত্মক হবে। আবার এদের যোগফল = 1. অতএব এদের কোনটির মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। অর্থাৎ, $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান + 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিংবা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

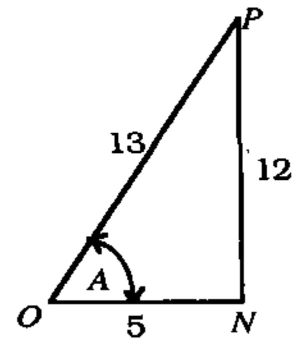
তাহলে, θ এর পরিমাণ যত বড় বা ছোটই হয়, $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান $+1$ এবং -1 এর মধ্যে সীমাবন্ধ থাকবে অর্থাৎ, $(-1 \le \sin\theta \le 1)$ এবং $(-1 \le \cos\theta \le 1)$.

যেহেতু আমরা জানি, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$; সুতরাং $\sec\theta$ বা $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিংবা -1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। যেমন, $\sec\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান $\cdot 3$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\cdot 7$ ইত্যাদি হতে পারে না।

মন্তব্য : $\tan\theta$ বা $\cot\theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর বা, -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. যদি A সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A = \frac{12}{13}$ হয়, তবে $\cot A$ এর মান নির্ণয় কর ।



সমাধান : প্রদত্ত শর্তানুসারে OPN সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করি।

তাহলে, $y = 12$ এবং $r = 13$.

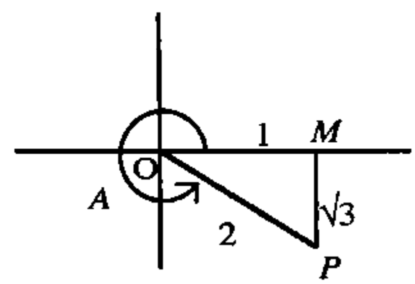
যেহেতু $\sin A = \frac{y}{r}$, সুতরাং, $\angle PON = \angle A$.

$\therefore\ x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$

সুতরাং, $\cot A = \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$.

উদাহরণ 2. যদি A কোণের পরিমাণ 270 ডিগ্রি ও 360 ডিগ্রির মধ্যে সীমাবন্ধ থাকে এবং $\cos A = \cdot 5$ হয়, তাহলে অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত শর্তানুসারে OPM সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হয়েছে। যেহেতু কোণের পরিমাণ 270 ডিগ্রি ও 360 ডিগ্রির মধ্যে সীমাবন্ধ থাকে, সুতরাং OP রেখা, অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান রশ্মিটির শেষ অবস্থানটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে ।



যেহেতু $\cos A = \cdot 5 = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ চিত্র থেকে আমরা পাই, $OM = 1$ এবং $OP = 2$.

আবার যেহেতু চতুর্থ চতুর্ভাগে PM এর মান ঋণাত্মক , সুতরাং

$PM = -\sqrt{OP^2 - OM^2} = -\sqrt{4-1} = -\sqrt{3}.$

$\therefore\ \sin A = -\sqrt{3}/2,\ \tan A = -\sqrt{3},\ \operatorname{cosec} A = -2/\sqrt{3},\ \sec A = 2$ এবং $\cot A = -1/\sqrt{3}$.

উদাহরণ 3. যদি $\tan\theta + \sec\theta = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

সমাধান : এখানে $\tan\theta + \sec\theta = x$ $\quad \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

$\Rightarrow \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$ $\quad \Rightarrow \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$ $\quad \therefore\ \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

উদাহরণ 4. যদি $\cos\alpha + \sec\alpha = \frac{5}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha = 2^n + 2^{-n}$.

সমাধান : এখানে $\cos\alpha + \sec\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 2) = 0$$

যেহেতু $(\cos\alpha - 2) \neq 0$, $\therefore\ 2\cos\alpha - 1 = 0$, অর্থাৎ, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ \cos^n\alpha + \sec^n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n = \frac{1}{2^n} + 2^n = 2^{-n} + 2^n = 2^n + 2^{-n}.$$

উদাহরণ 5. $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(\Sigma \tan A)^2 = \Sigma \tan^2 A$.

সমাধান : আমরা পাই , $(\Sigma \tan A)^2 = (\tan A + \tan B + \tan C)^2$

$$= \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2\tan B\tan C + 2\tan C\tan A + 2\tan A\tan B$$
$$= \Sigma \tan^2 A + 2\tan A\tan B\tan C(\cot A + \cot B + \cot C)$$
$$= \Sigma \tan^2 A + 2\tan A\tan B\tan C \times 0 = \Sigma \tan^2 A.$$

প্রশ্নমালা 6.2

নিচের অভেদাবলীর সত্যতা প্রমাণ কর :

1. $(a\cos x - b\sin x)^2 + (a\sin x + b\cos x)^2 = a^2 + b^2$.
2. $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$.
3. (i) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$; (ii) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$.
4. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.
5. $\frac{1+(\operatorname{cosec} x\tan y)^2}{1+(\operatorname{cosec} z\tan y)^2} = \frac{1+(\cot x\sin y)^2}{1+(\cot z\sin y)^2}$.
6. $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = (1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2$.
7. $\frac{\cos^4 x}{\cos^2 y} + \frac{\sin^4 x}{\sin^2 y} = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos^4 y}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 y}{\sin^2 x} = 1$.
8. যদি $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হয়, তবে $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।
9. যদি $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
10. যদি $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = 2$.
11. যদি $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.
12. যদি $\tan^2\theta = 1 - e^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sec\theta + \tan^3\theta\operatorname{cosec}\theta = (2-e^2)^{3/2}$.
13. যদি $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ এবং $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$.

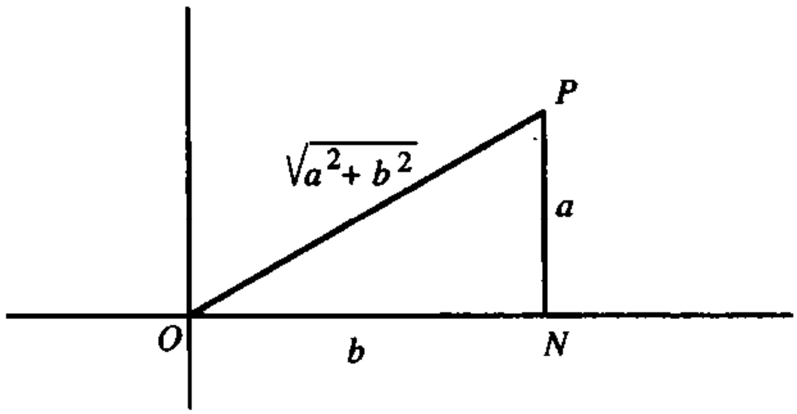
14. যদি $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$.

15. যদি A কোণ $90°$ ও $180°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং $\sin A = \cdot 8$ হয়, তবে $\tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

16. যদি $a \cos\theta - b \sin\theta = c$ হয়, তবে দেখাও যে, $a \sin\theta + b \cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

17. যদি $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(\sum \sin A)^2 = \sum \sin^2 A$.

6.7. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন



উপরের চিত্র থেকে লক্ষ করি,

যখন $\theta = 0, a = 0$. অতএব, $\sin 0 = \frac{0}{b} = 0, \cos 0 = \frac{b}{b} = 1, \tan 0 = \frac{0}{b} = 0,$

$\cot 0 = \frac{b}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত; $\sec 0 = \frac{b}{b} = 1$এবং $\operatorname{cosec} 0 = \frac{b}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত।

এখন $[0, 2\pi]$ ব্যবধিতে $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মান নিচের ছকে দেখানো হলো :

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
0	0	1	0	অসংজ্ঞায়িত	1	অসংজ্ঞায়িত
$\frac{\pi}{2}$	1	0	অসংজ্ঞায়িত	0	অসংজ্ঞায়িত	1
π	0	-1	0	অসংজ্ঞায়িত	-1	অসংজ্ঞায়িত
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	অসংজ্ঞায়িত	0	অসংজ্ঞায়িত	-1
2π	0	1	0	অসংজ্ঞায়িত	1	অসংজ্ঞায়িত

উপরের ছকটি সতর্কভাবে পর্যবেক্ষণ করে প্রত্যেক ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন নিম্নোক্তভাবে দেখানো হলো :

(i) যখন $\theta = 0$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1, \tan\theta = 0$, $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত,

$\sec\theta = 1$, $\operatorname{cosec}\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

কিন্তু $\theta \to 0+$ হলে, $\cot\theta \to +\infty$ এবং $\operatorname{cosec}\theta \to +\infty$.

(ii) যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$;

$$0 < \sin\theta < 1$$
$$1 > \cos\theta > 0$$
$$0 < \tan\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2}- \text{ হলে}, \tan\theta \to +\infty]$$
$$+\infty > \cot\theta > 0$$
$$1 < \sec\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2}- \text{ হলে}, \sec\theta \to +\infty]$$
$$+\infty > \operatorname{cosec}\theta > 1$$

(iii) যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$, $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\cot\theta = 0$, $\sec\theta$ অসংজ্ঞায়িত এবং $\operatorname{cosec}\theta = 1$.

(iv) যখন $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$;

$$1 > \sin\theta > 0$$
$$0 > \cos\theta > -1$$
$$-\infty < \tan\theta < 0 \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2}- \text{ হলে}, \tan\theta \to -\infty]$$
$$0 > \cot\theta > -\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2}- \text{ হলে}, \cot\theta \to -\infty]$$
$$-\infty < \sec\theta < -1 \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2}- \text{ হলে}, \sec\theta \to -\infty]$$
$$1 < \operatorname{cosec}\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{\pi}{2}- \text{ হলে}, \operatorname{cosec}\theta \to +\infty]$$

(v) যখন $\theta = \pi$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$, $\tan\theta = 0$, $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\sec\theta = -1$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

(vi) যখন $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$;

$$0 > \sin\theta > -1$$
$$-1 < \cos\theta < 0$$
$$0 < \tan\theta < +\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{3\pi}{2}- \text{ হলে}, \tan\theta \to +\infty]$$
$$+\infty > \cot\theta > 0 \quad [\because \theta \to \pi_+ \text{ হলে}, \cot\theta \to +\infty]$$
$$-1 > \sec\theta > -\infty \quad [\because \theta \to \tfrac{3\pi}{2}- \text{ হলে}, \sec\theta \to +\infty]$$
$$-\infty < \operatorname{cosec}\theta < -1. \quad [\because \theta \to \pi_+ \text{ হলে}, \operatorname{cosec}\theta \to -\infty]$$

(vii) যখন $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = -1$, $\cos\theta = 0$, $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\cot\theta = 0$, $\sec\theta$ অসংজ্ঞায়িত এবং $\operatorname{cosec}\theta = -1$.

(viii) যখন $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$:

$-1 < \sin\theta < 0$

$0 < \cos\theta < 1$

$-\infty < \tan\theta < 0$ $\quad [\because \theta \to \frac{3\pi}{2}+$ হলে, $\tan\theta \to -\infty]$

$0 > \cot\theta > -\infty$ $\quad [\because \theta \to 2\pi-$ হলে, $\cot\theta \to -\infty]$

$+\infty > \sec\theta > 1$ $\quad [\because \theta \to \frac{3\pi}{2}+$ হলে, $\sec\theta \to +\infty]$

$-1 > \text{cosec}\,\theta > -\infty.$ $\quad [\because \theta \to 2\pi-$ হলে, $\text{cosec}\,\theta \to -\infty]$

(ix) যখন $\theta = 2\pi$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $\tan\theta = 0$, $\cot\theta$ অসংজ্ঞায়িত, $\sec\theta = 1$ এবং $\text{cosec}\,\theta$ অসংজ্ঞায়িত।

6.8. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র

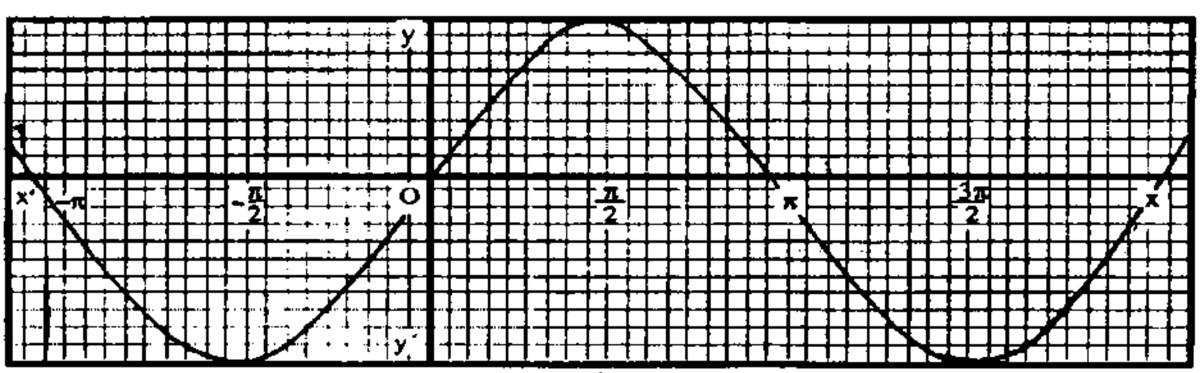
বীজগাণিতিক ফাংশনের মত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনেরও লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়। লেখচিত্র অঙ্কন করার নিয়ম সম্পর্কে জ্যামিতিতে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে লেখচিত্র অঙ্কনের নিয়ম সম্পর্কে অতি প্রয়োজনীয় বিষয়ের উল্লেখ করা হবে মাত্র।

ধরি $y = \sin x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

প্রথমে ছক–কাগজে লম্বভাবে দণ্ডায়মান দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা XOX' এবং YOY' অঙ্কন করি। এরাই যথাক্রমে x –অক্ষ এবং y–অক্ষ।

এখন x এর কয়েকটি সুবিধাজনক মানের জন্য y এর আনুষঙ্গিক মান বের করে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে ছক–কাগজে কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করে স্থাপিত বিন্দুগুলি পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। কখনও কখনও নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধতার মধ্যে লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্য বলা হয়ে থাকে। শিক্ষার্থীদের স্মরণ রাখতে হবে যে, x-স্থানাঙ্কের জন্য এক রকম স্কেল নির্বাচন করলেও y-স্থানাঙ্কের জন্য সুবিধানুযায়ী অন্য রকম স্কেল ব্যবহার করা যায়। সুতরাং, ছক-কাগজের আকার ও লেখচিত্র অঙ্কনের সীমাবদ্ধতার কথা মনে রেখে সুবিধাজনকভাবে স্কেল নির্বাচন করা সম্ভব।

(ক) সাইন ফাংশনের লেখচিত্র



সাইন–লেখচিত্র

মনে করি, $y = \sin x.$

এখানে $x = -180°$ থেকে শুরু করে $x = 360°$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \sin x$ এর আনুষঙ্গিক মান নেয়া হল। এ মানগুলি নিচের তালিকায় সাজানো হয়েছে।

x	$-180°$	$-150°$	$-120°$	$-90°$	$0°$	$60°$	$90°$	$180°$	$240°$	$360°$
y বা, $\sin x$	0	$-\cdot50$	$-\cdot87$	-1	0	$\cdot87$	1	0	$-\cdot87$	0

স্কেল : x – অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$; y – অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 0{\cdot}1$.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি নির্বাচিত স্কেল অনুযায়ী ছক–কাগজে স্থাপন করা হল। বিন্দুগুলি পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে সাইন–লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে লেখচিত্রটি $x = -180°$ থেকে $x = 360°$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।

মন্তব্য 2. সাইন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখচিত্রের কোথাও ছেদ (*Break*) নেই এবং এর আকার ঢেউয়ের মত।

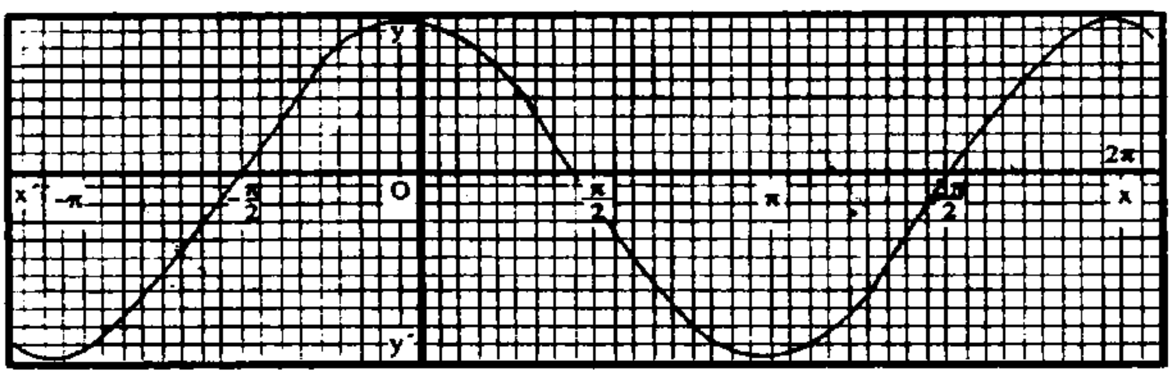
(ii) লেখচিত্র থেকে সহজেই বুঝা যায় যে, সাইন অনুপাতের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান হলো যথাক্রমে 1 এবং – 1.

(iii) সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান তখনই পাওয়া যায় যখন x এর মান $90°$ এর বিজোড় গুণিতকের সমান হয়।

(iv) মূলবিন্দুতে এবং যে সকল বিন্দুর জন্য x এর মান $90°$ এর জোড় গুণিতকের সমান হয়, ঐক্ষেত্রে সাইন অনুপাতের মান শূন্য হয়।

(v) যেহেতু $\sin(360° + x) = \sin x$, সুতরাং $0°$ এবং $360°$ এর মধ্যে অঙ্কিত লেখচিত্রটি ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

(খ) কোসাইন ফাংশনের লেখচিত্র



কোসাইন—লেখচিত্র

মনে করি, $y = \cos x$.

$-180°$ থেকে শুরু করে $360°$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর, অর্থাৎ, $\cos x$ এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	$-180°$	$-120°$	$-90°$	$-30°$	$0°$	$60°$	$90°$	$150°$	$180°$	$360°$
y বা, $\cos x$	-1	$-\cdot50$	0	$\cdot87$	1	$\cdot50$	0	$-\cdot87$	$-\cdot1$	1

স্কেল : x – অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$; y– অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 0{\cdot}1$.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি নির্বাচিত স্কেল অনুযায়ী ছক কাগজে স্থাপন করে এদেরকে পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে কোসাইন-লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে লেখচিত্রটি $x = -180°$ থেকে $x = 360°$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।

মন্তব্য ঃ কোসাইন – লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ

(i) লেখচিত্রটিকে 90° ডানে অথবা 90° বামে সরানো হলে তা সাইন লেখচিত্রের অনুরূপ হবে, যেহেতু

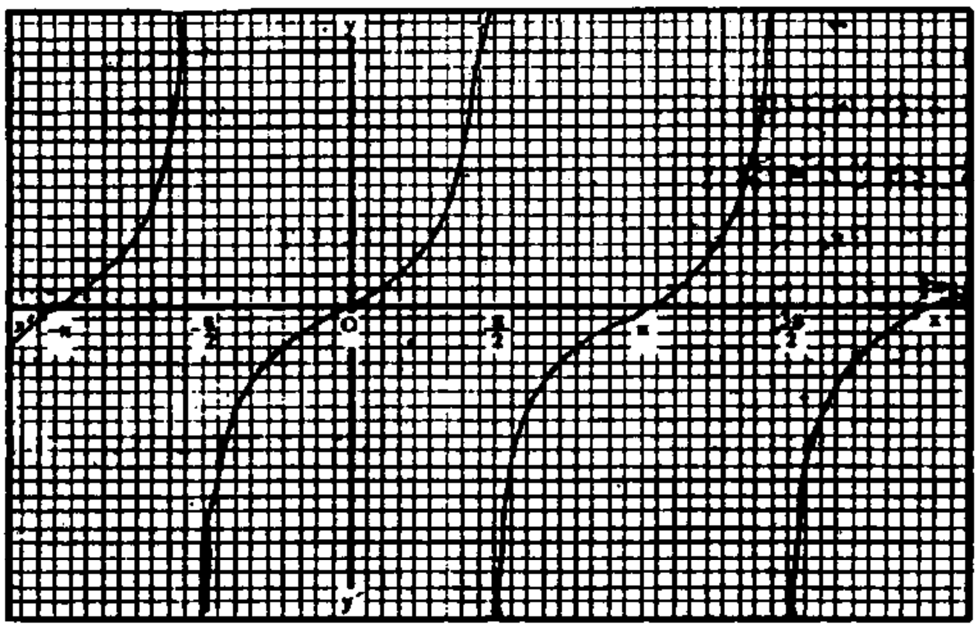
$$\sin(90° + x) = \cos x, \text{ বা, } \cos(x - 90°) = \sin x.$$

(ii) লেখচিত্র থেকে স্পষ্টত বুঝা যায় যে কোসাইন অনুপাতের সর্বোচ্চ মান $= 1$ এবং সর্বনিম্ন মান $= -1$.

(iii) মূল বিন্দুতে এবং যে সকল বিন্দুতে x এর মান 180° এর গুণিতকের সমান হয়, ঐক্ষেত্রে কোসাইন অনুপাতের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

(iv) x এর পরিবর্তে $-x$ স্থাপন করলে $y = \cos x$ অপরিবর্তিত থাকে বলে লেখচিত্রটি y–অক্ষের সঙ্গে সাদৃশ্যপূর্ণ (*symmetrical*) হবে।

(গ) টেনজেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র



মনে করি, $y = \tan x$.

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর আনুষঙ্গিক মান টেনজেন্ট-সারণী থেকে বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হল :

x	–80°	–60°	–40°	0°	80°	120°	160°	180°	240°	260°
y বা, $\tan x$	– 5.67	–·1.73	0.84	0	5.67	– 1.73	– 0·36	0	1.73	5.67

স্কেল : x -অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10°; y - অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = ·28.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করে পেন্সিলের সাহায্যে যোগ করলে টেনজেন্ট–লেখচিত্র পাওয়া যায়।

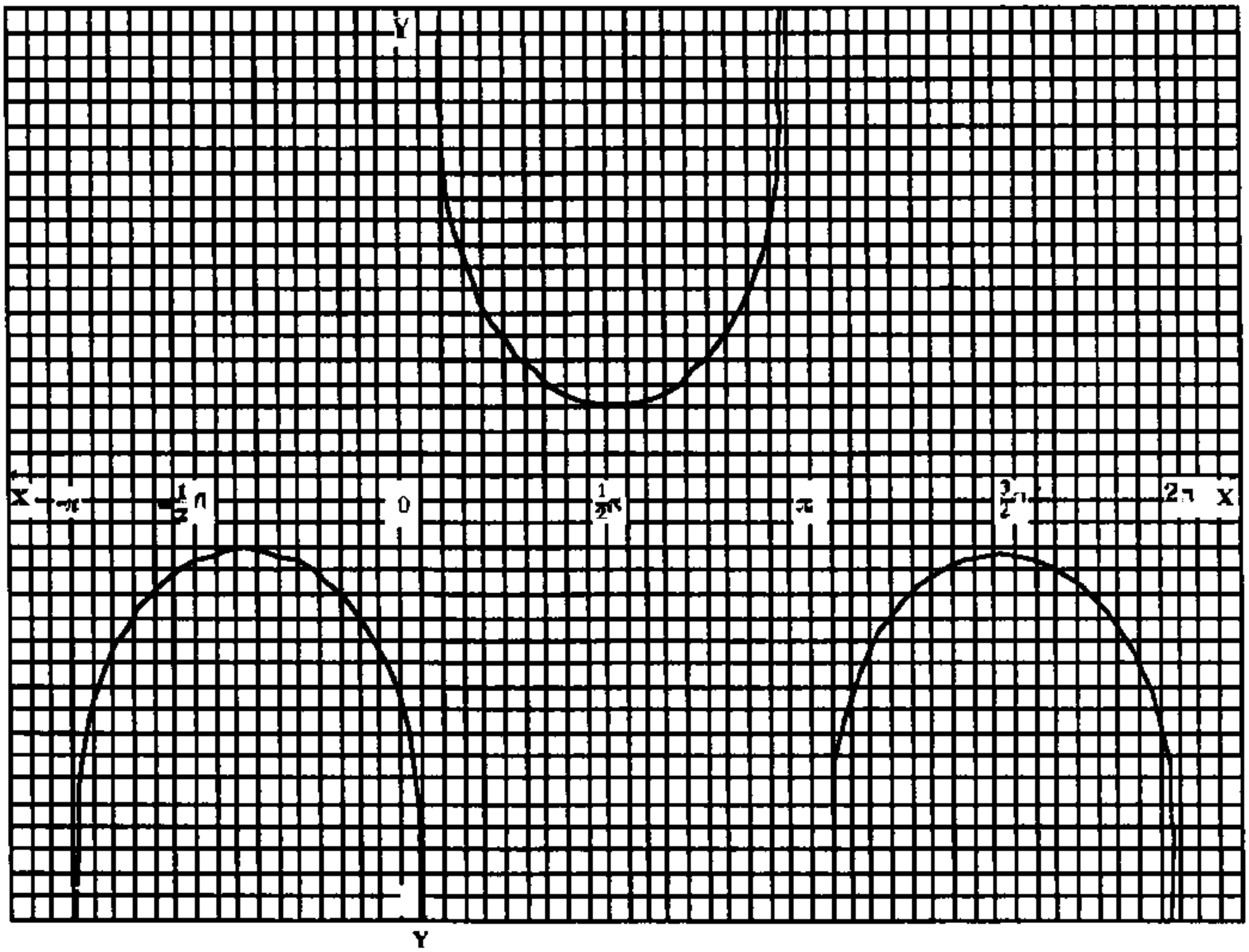
মন্তব্য ঃ টেনজেন্ট–লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ

(i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন (*Continuous*) নয়। এটি ভিন্ন ভিন্ন শাখায় বিভক্ত । যখন x–এর মান 90° কোণের বিজোড় গুণিতকের সমান হয়, তখনই লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) – 90° এবং 90° কোণের মধ্যে যে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়, তা ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

(iii) 90° এর বিজোড় গুণিতকের সমান কোণের ভুজের বিন্দুগামী y–অক্ষের সমান্তরাল করে যে রেখাগুলি টানা যায় এদের এবং লেখচিত্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্রমশঃ কমতে থাকে, কিন্তু এরা কখনও লেখচিত্রকে স্পর্শ করে না।

(ঘ) কোসেকেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র।



মনে করি, $y = \text{cosec } x$.

এখন, $\text{cosec } x = \dfrac{1}{\sin x}$ সম্পর্কের সাহায্যে গ্রহণ করে x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো:

x	$-90°$	$-70°$	$-50°$	$-10°$	$10°$	$70°$	$100°$	$120°$	$150°$	$170°$
y বা, cosec x	-1	-1.06	-1.31	-5.76	5.76	$1{\cdot}06$	1.02	$1{\cdot}16$	2	$5{\cdot}76$

স্কেল : x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$;

y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের তিন বাহু $= 1$.

এ স্কেলের সাহায্যে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক–কাগজে স্থাপন করে সংযুক্ত করলে কোসেকেন্ট লেখচিত্র পাওয়া যায়।

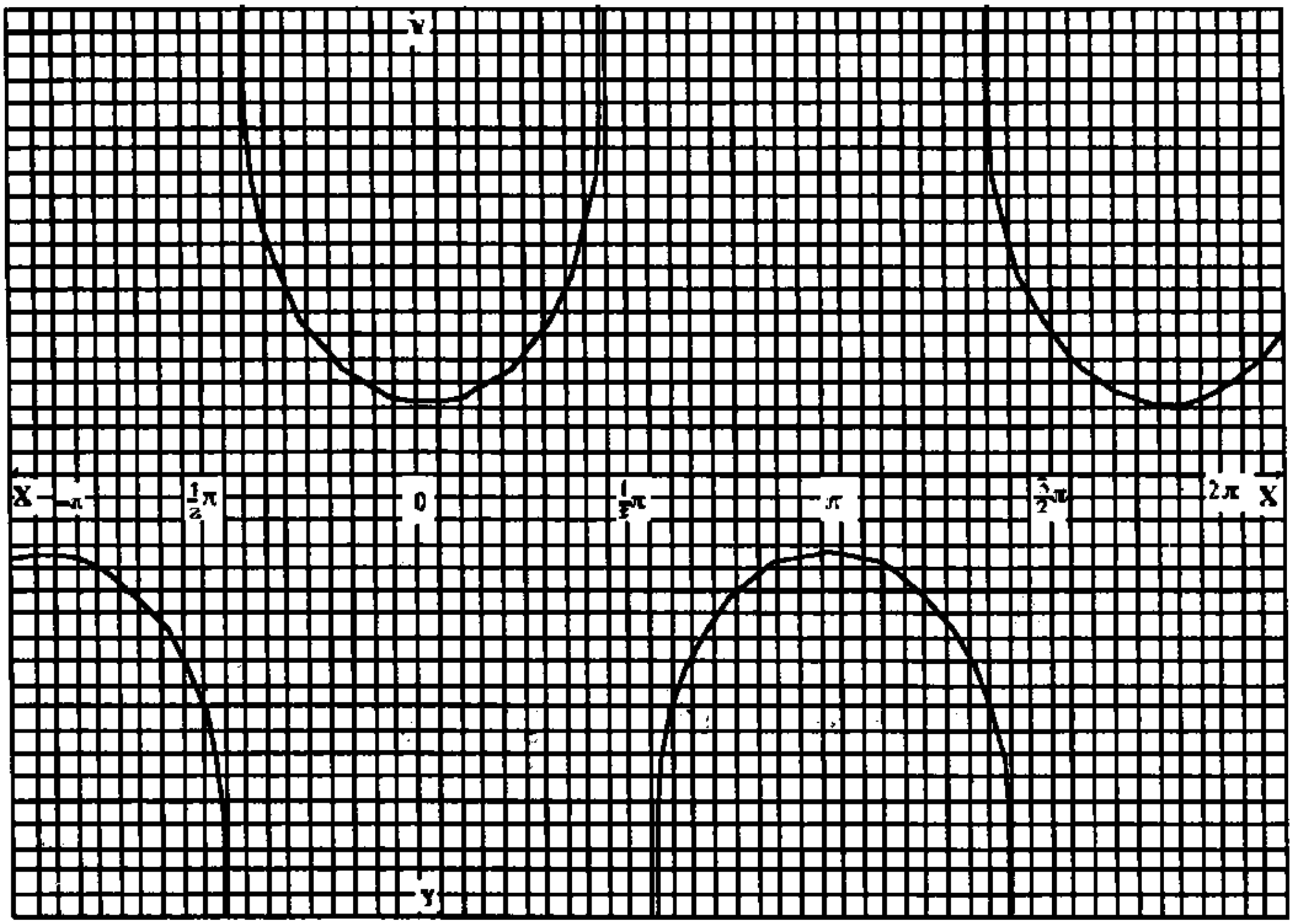
মন্তব্য : কোসেকেন্ট লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য।

(i) লেখচিত্রটি বিভিন্ন অংশে বিভক্ত হয়ে বিচ্ছিন্ন থাকে। $180°$ এর যে কোন গুণিতকের সমান কোণের জন্য যে সব বিন্দু পাওয়া যায় ঐ সব বিন্দুতে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) 0 এবং 2π কোণের মধ্যে যে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় তা ডানে এবং বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

(iii) লেখচিত্র হতে সহজেই লক্ষ করা যায় যে, x-এর যেকোনো মানের জন্য cosec x এর $+1$ এবং -1 এর মধ্যবর্তী কোনও মান নাই।

(ঙ) সেকেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র।



মনে করি, $y = \sec x$.

এখন, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ সম্পর্কের সাহায্যে গ্রহণ করে x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	$-180°$	$-120°$	$-100°$	$0°$	$80°$	$120°$	$150°$	$180°$
y বা, $\sec x$	-1	-2	0.17	1	0.17	-2	$-1{\cdot}15$	-1

x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 10°$;

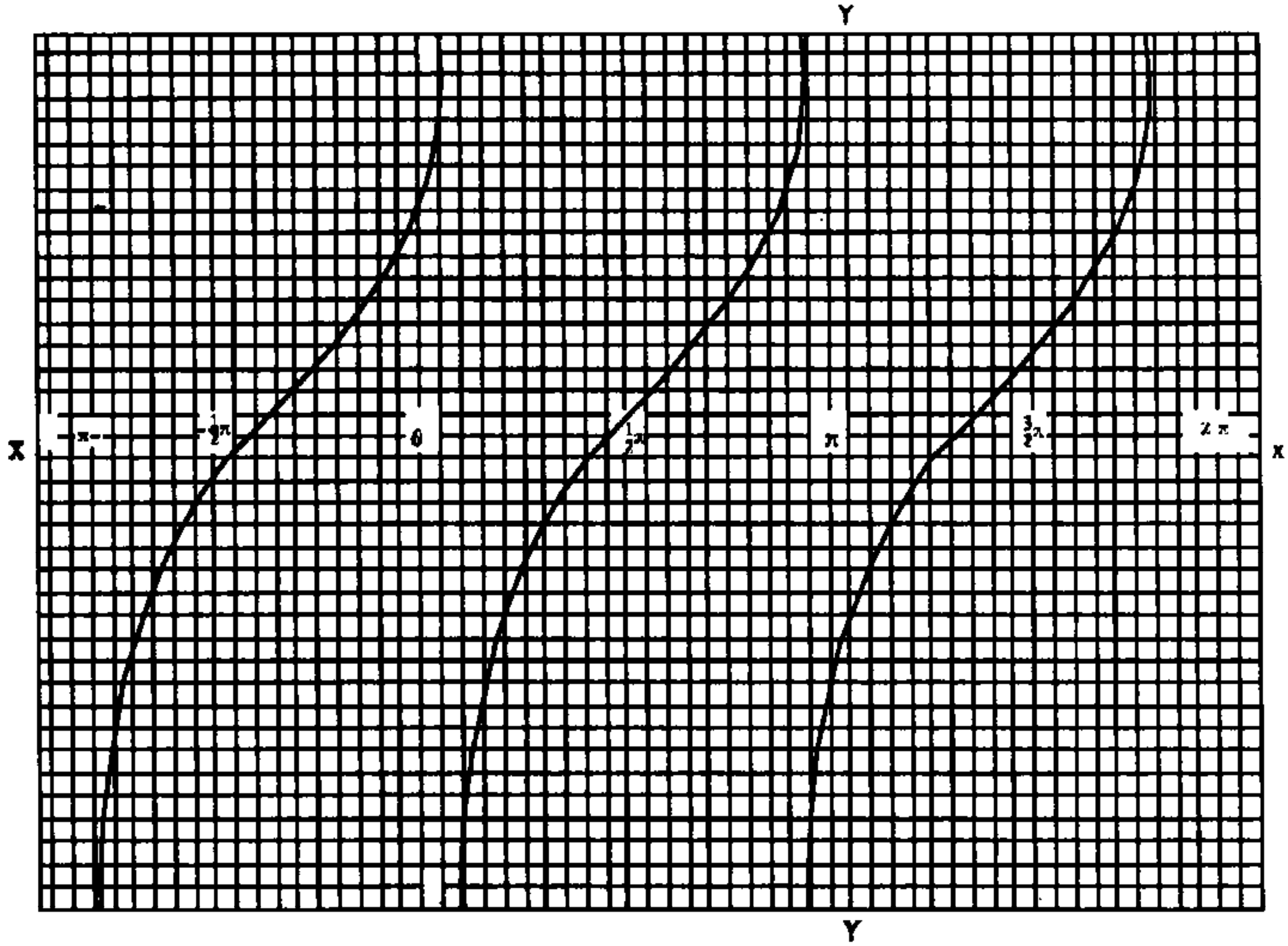
y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের তিন বাহু $= 1$.

এখন তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে পেন্সিলের সাহায্যে সংযুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তা হলো সেকেন্ট–লেখচিত্র।

মন্তব্য : (i) কোসেকেন্ট লেখচিত্রের মতই সেকেন্ট লেখচিত্র বিচ্ছিন্ন থাকে। 90° এর বিজোড় গুণিতকের সমান কোণের জন্য যে বিন্দুগুলি পাওয়া যায় সেই বিন্দুগুলিতে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(ii) লেখচিত্র হতে সহজেই লক্ষ করা যায় যে, sec x এর জন + 1 এবং – 1 এর মধ্যবর্তী কোনো মান নাই।

(চ) কোটেনজেন্ট ফাংশনের লেখচিত্র।



মনে করি $y = \cot x$.

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ সম্পর্কের সাহায্যে গ্রহণ করে x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর আনুষঙ্গিক মান বের করে নিচের তালিকায় সাজানো হলো :

x	$-170°$	$-140°$	$-100°$	$-60°$	$-10°$	$10°$	$50°$	$120°$	$150°$	$160°$	$240°$
y, বা cot x	5.67	1.19	0.18	– 0.38	– 5.67	5.67	0.84	–0.58	–1.73	–2.75	–5.76

স্কেল : x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = $10°$;

y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = .34.

এখন এই নির্বাচিত স্কেলের সাহায্যে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে সংযুক্ত করে কোটেনজেন্ট–লেখচিত্র পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 6.3

1. **নিচের ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর :**

(ক) $y = \sin 2x$; যখন $0 \le x \le 2\pi$;

(খ) $y = \sin 3x$; ($x = 0$ হতে $x = 2\pi$ পর্যন্ত)

(গ) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \le x \le \pi$;

(ঙ) $y = \cos 2x$, যখন $0 \le x \le 2\pi$.

(চ) $y = \cos 3\theta$, যখন $0 \le \theta \le \pi$.

প্রশ্নমালা 6.4

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. (*a*) বৃত্তকলা বলতে কী বুঝায়?

(*b*) রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তকলার সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

(*c*) 20 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কোনো বৃত্তচাপ এর কেন্দ্রে $50°$ কোণ উৎপন্ন করলে ঐ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য এবং চাপটির উপর দণ্ডায়মাণ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. (*a*) $75°$ কে রেডিয়ান পরিমাপে প্রকাশ কর।

(*b*) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $50°$ এবং $\frac{\pi^c}{3}$. তৃতীয় কোণটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

(*c*) একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমণ শ্রেণিভুক্ত। এদের সাধারণ অন্তর $20°$ হলে, কোণগুলি রেডিয়ান পরিমাপে নির্ণয় কর।

3. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে, $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta\ b}$ এর মাণ নির্ণয় কর।

(*a*) যখন $0° < \theta < 90°$.

(*b*) যখন $180° < \theta < 270°$.

(*c*) যখন $a = b$.

4. (*a*) θ কোণের যেকোনো মানের জন্য কি $9\sin^2\theta + 3\sin\theta = 20$ হতে পারে?

(*b*) যদি $a \neq b$ হয়, তবে $\sec\theta = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ কি সম্ভব? যদি হ্যাঁ সূচক হয়, তবে কেন ?

(*c*) $\cos^2\theta = \frac{(a+b)^2}{4ab}$ কি সম্ভব? যদি এরূপ হয়, তবে কখন?

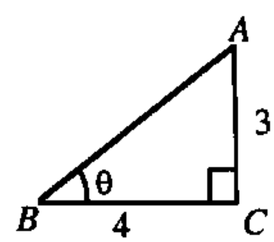
বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

5. $\sin\theta = \frac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান –

(a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{5}{12}$

(c) $\pm\frac{12}{5}$ (d) $\pm\frac{5}{12}$

6. পাশের সমকোণী ত্রিভুজ থেকে $(\sin\theta + \cos\theta)$ এবং $(\tan\theta + \cot\theta)$ এর অনুপাত হবে –



(a) 3 ៖ 7 (b) 25 ៖ 12

(c) 84 ៖ 125 (d) 7 ៖ 25

7. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ হলে, $\cos\theta - \sin\theta$ এর মান হবে –

(a) $\pm\sqrt{2}\sin\theta$ (b) $2\sin\theta$

(c) $\sqrt{2}\sin\theta$ (d) $\sqrt{2\sin\theta}$

8. $\sin A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan A \tan B$ এর মান হবে –

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{3}{2}$

9. $\cot\theta = \frac{12}{5}$ হলে, $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান হবে –

(a) $\frac{13}{17}$ (b) $\frac{17}{13}$

(c) $-\frac{7}{13}$ (d) $-\frac{13}{17}$

10. $\operatorname{cosec}^2\theta \tan\theta + \sec^2\theta \cot\theta$ এর সমান হবে –

(a) $2\sin\theta\cos\theta$ (b) $\sin\theta\cos\theta$

(c) $2\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$ (d) $\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

11. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ হলে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ এর মান–

(a) 7 (b) $\frac{1}{7}$

(c) $-\frac{1}{7}$ (d) -7

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 6.1

1. 733°.7, 698°.7. **2.** 100. **3.** 0.6376 মিটার। **4.** 10.26 মিটার, 125.72 বর্গ মিটার। **5.** 15.91 মিটার। **6.** প্রতি ঘণ্টায় 52.78 কিলোমিটার।

প্রশ্নমালা 6.2

8. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. **15.** $-1{\cdot}3$.

প্রশ্নমালা 6.4

1. **(a)** $\frac{5\pi^c}{12}$; **(b)** $\frac{7\pi^c}{18}$; **(c)** $\frac{5\pi^c}{18}, \frac{\pi^c}{3}, \frac{7\pi^c}{18}$,

2. **(b)** $\frac{1}{2}r^2\theta$; **(c)** 17.45 সেন্টিমিটার,, 174.53 বর্গ সেন্টিমিটার।

3. **(a)** $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$; **(b)** $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, **(c)** অসংজ্ঞায়িত।

4. **(a)** না ; **(b)** হ্যাঁ, কারণ $2ab \le (a^2 + b^2)$; **(c)** তা কেবল তখন সম্ভব, যখন $a = b$.

5. *c*. **6.** *c*. **7.** *a*. **8.** *b*. **9.** *b*. **10.** *c*. **11.** *c*.

সপ্তম অধ্যায়

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometrical Ratios of Associated Angles)

7.1. সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

***n* একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে, $(n.360° + \theta)$ কোণের অনুপাত :**

ত্রিকোণমিতিক কোণের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান থেকে শুরু করে $\theta,\ 360° + \theta,\ -360° + \theta,\ 2 \times 360° + \theta,\ -2 \times 360° + \theta,\ 3 \times 360° + \theta,\ -3 \times 360° + \theta$ ইত্যাদি কোণের যেকোনো কোণই উৎপন্ন করুক না কেন এর শেষ অবস্থান হবে একই স্থানে। অর্থাৎ n যদি একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে $(n.\ 360° + \theta)$ থেকে প্রাপ্ত যে কোন কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি একই স্থানে অবস্থান করবে।

যেহেতু ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান থেকে ঘূর্ণন শুরু করলে এর শেষ অবস্থানের উপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ভর করে, সুতরাং এটি স্পষ্ট যে, $(n.360° + \theta)$ থেকে প্রাপ্ত প্রত্যেকটি কোণের জন্য একটি নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান একই হবে। তাহলে , আমরা নিচের সম্পর্কগুলি সহজেই পাই ঃ

$\sin (n.360° + \theta) = \sin \theta,\quad \cos (n.360° + \theta) = \cos \theta,$

$\operatorname{cosec} (n.360° + \theta) = \operatorname{cosec} \theta,\quad \sec (n.360° + \theta) = \sec \theta,$

$\tan (n.360° + \theta) = \tan \theta$ এবং $\cot (n.360° + \theta) = \cot \theta.$

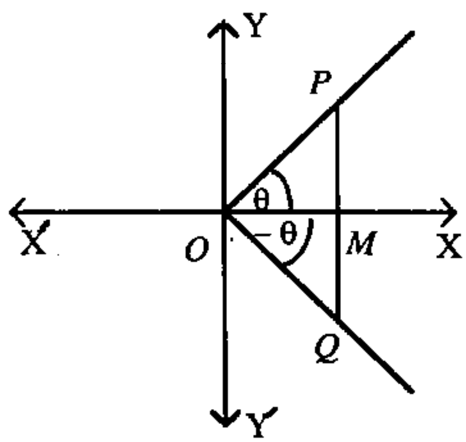
রেডিয়ান পরিমাপে সম্পর্কগুলি ঃ $\sin (2n\pi + \theta) = \sin \theta,\quad \cos (2n\pi + \theta) = \cos \theta$ ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ (ক) $\sin (1110°) = \sin (3.360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2},$

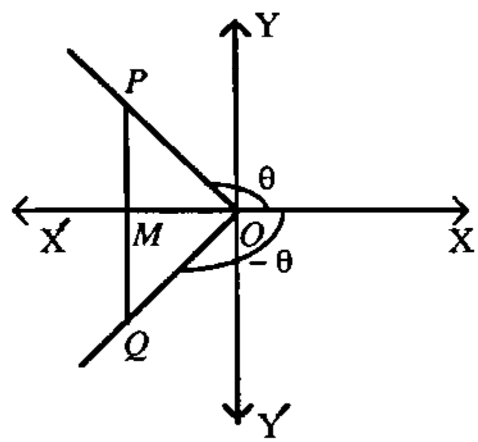
(খ) $\sec (-1755°) = \sec (-5.360° + 45°) = \sec 45° = \sqrt{2},$

(গ) $\cos (-31\pi/4) = \cos (-4.2\pi + \pi/4) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

7.1.1. $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি ঐ একই অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে θ কোণের সম-পরিমাপের XOQ কোণ উৎপন্ন করে; তাহলে, $\angle XOQ = -\theta.$

OP এর যে কোন বিন্দু P থেকে XOX' এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করে এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন তা OQ কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। এখন সাধারণ জ্যামিতি থেকে আমরা জানি যে, OPM এবং OQM ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। [$\because$ উভয় চিত্রানুযায়ী, $\angle POM = \angle QOM$, $\angle OMP = \angle OMQ$ এবং OM বাহু সাধারণ]

সুতরাং আমরা পাই, $PM = QM$ এবং $OP = OQ$.

অতএব, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(-\theta) = \sin XOQ = \frac{-QM}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta) = \cos XOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos\theta,$$

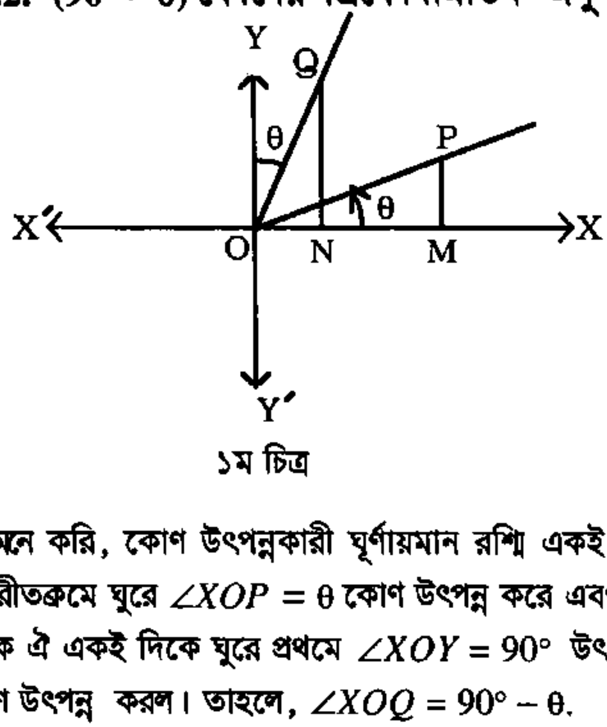
$$\tan(-\theta) = \tan XOQ = \frac{-QM}{OM} = -\frac{PM}{OM} = -\tan XOP = -\tan\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে সহজেই পাওয়া যায়

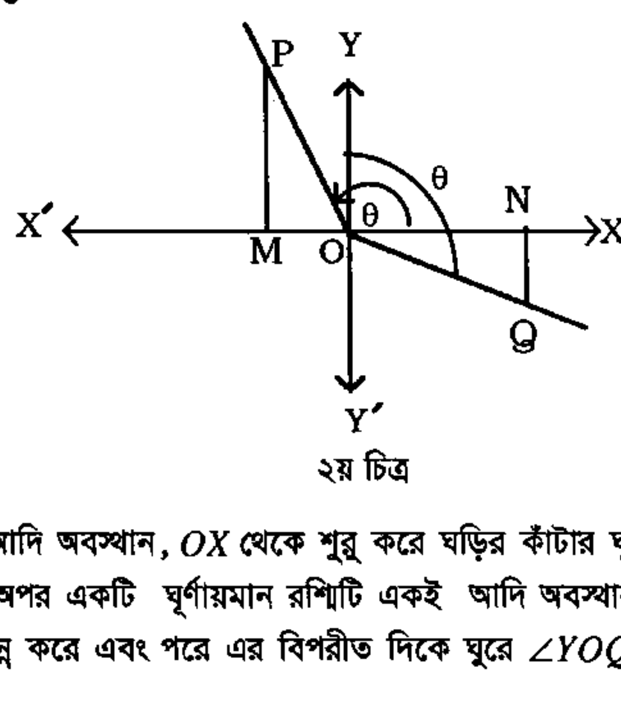
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$ এবং $\cot(-\theta) = -\cot\theta$.

উদাহরণ । $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.1.2. $(90° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে এবং অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি একই আদি অবস্থান OX থেকে ঐ একই দিকে ঘুরে প্রথমে $\angle XOY = 90°$ উৎপন্ন করে এবং পরে এর বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOQ = 90° - \theta$.

θ এবং $(90° - \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মিদ্বয় যে অবস্থানে থাকে ঐ বাহুদ্বয় থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' এর উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। $\therefore$ $QN = OM$ এবং $ON = PM$.

অতএব, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী ,

$$\sin(90° - \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos\theta,$$

$$\cos(90° - \theta) = \cos XOQ = \frac{ON}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin XOP = \sin\theta,$$

$$\tan(90° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QN}{ON} = \frac{OM}{PM} = \cot XOP = \cot\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে সহজেই দেখানো যায়

$\text{cosec}\,(90° - \theta) = \sec\theta$, $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$ এবং $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে উপরোক্ত অনুপাতগুলি হলো :

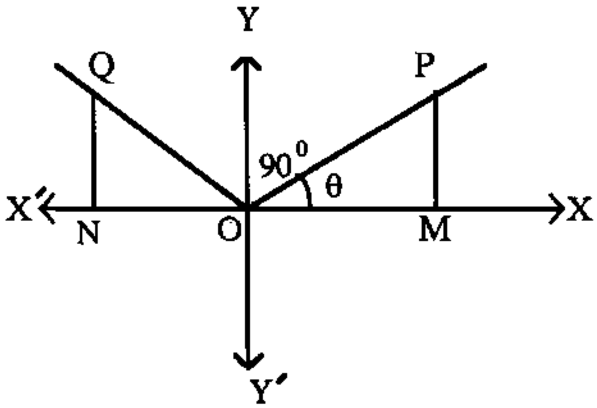
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ ইত্যাদি।

মন্তব্য ঃ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনও বলা হয়। সাইন এবং কোসাইনকে পরস্পরের সহ-ফাংশন বলে। অনুরূপভাবে, সেকেন্ট এবং কোসেকেন্টকেও পরস্পরের সহ–ফাংশন বলা হয়। তদ্রূপ, টেনজেন্ট ও কোটেনজেন্ট হল পরস্পরের সহ–ফাংশন। যদি দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হয়, তবে একটিকে অপরটির পরিপূরক বলা হয়। তাহলে, 30° এবং 60° কোণদ্বয়ের একটি অপরটির পরিপূরক।

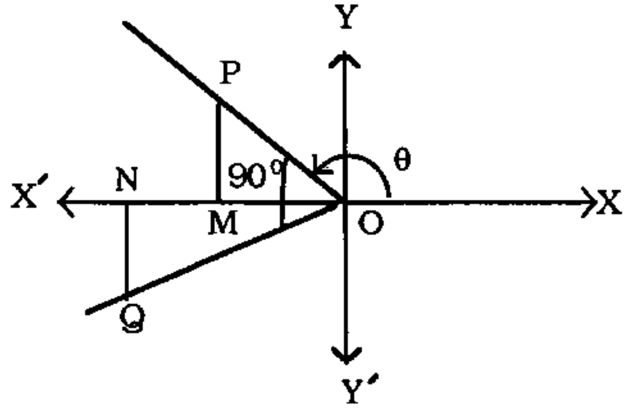
সুতরাং, একটি কোণের ত্রিকোণমিতিক ফাংশন = এর পরিপূরকের সহ–ফাংশন।

উদাহরণ । **(ক)** $\cos 30° = \sin 60°$, **(খ)** $\tan 25° = \cot 65°$, **(গ)** $\sec 80° = \text{cosec}\,10°$.

7.1.3. (90° + θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ এবং রশ্মিটি ঐ একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90°$ কোণ চিহ্নিত করে।

তাহলে, $\angle XOQ = 90° + \theta$.

θ এবং (90° + θ) কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে দুইটি অবস্থানে থাকে তা থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' এর উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। সুতরাং $QN = OM$ এবং $ON = PM$.

∴ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(90° + \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos XOP = \cos\theta,$$

$$\cos(90° + \theta) = \cos XOQ = \frac{-ON}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta,$$

$$\tan(90° + \theta) = \tan XOQ = \frac{QN}{-ON} = -\frac{OM}{PM} = -\cot XOP = -\cot\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে আমরা পাই, $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$,

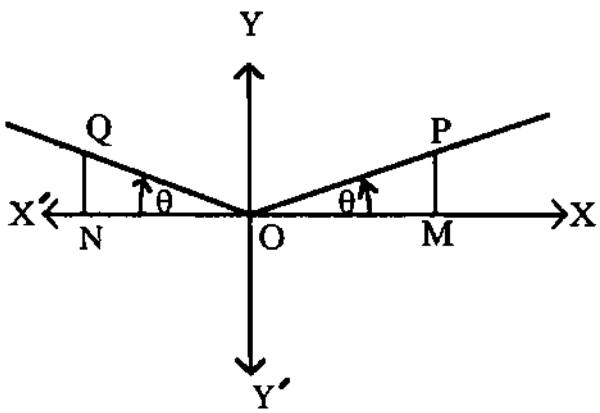
$\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে অনুপাতগুলি হলো :

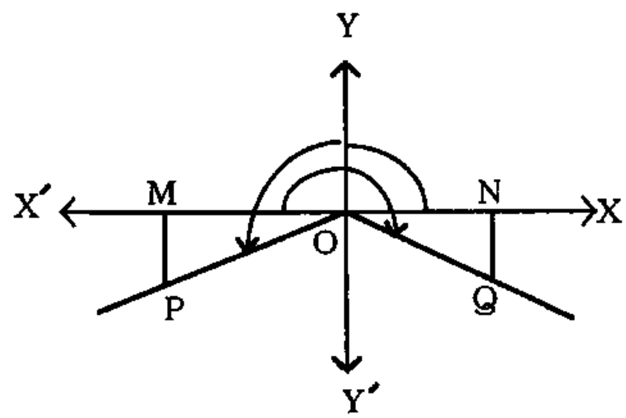
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$ ইত্যাদি।

উদাহরণ। $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.1.4. (180° – θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে এবং কোণ উৎপন্নকারী অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান, OX থেকে ঐ একই দিকে ঘুরে $XOX' = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করল।

তাহলে, $\angle XOQ = 180° - \theta$.

θ এবং $(180° - \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে দুইটি অবস্থানে থাকে ঐ রেখা থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' রেখার উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore PM = QN$ এবং $OM = ON$.

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin(180° - \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin XOP = \sin\theta,$$

$$\cos(180° - \theta) = \cos XOQ = \frac{-ON}{OQ} = -\frac{OM}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta,$$

$$\tan(180° - \theta) = \tan XOQ = \frac{QN}{-ON} = -\frac{PM}{OM} = -\tan XOP = -\tan\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে আমরা পাই

$\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$ এবং $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে উপরোক্ত অনুপাতগুলি হলো :

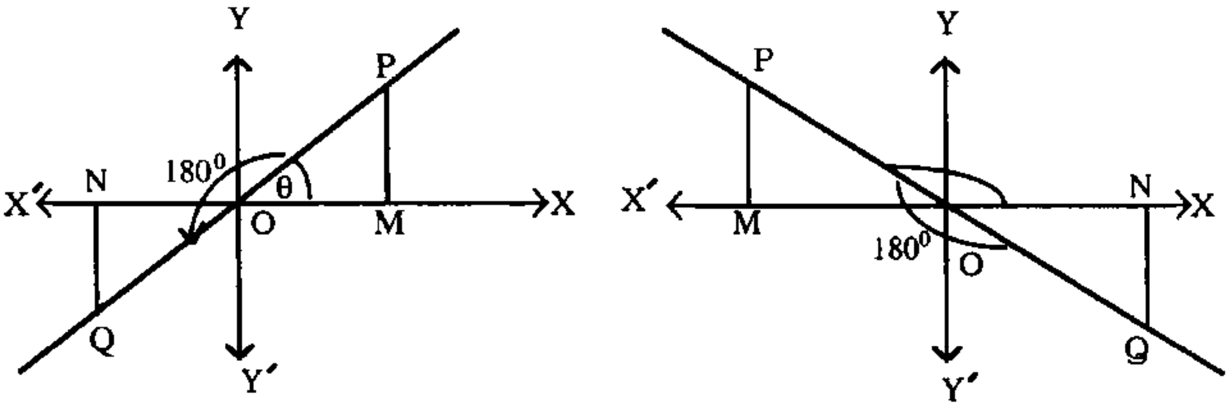
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ ইত্যাদি

উদাহরণ । (ক) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

(খ) $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$,

(গ) $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$.

7.1.5. (180° + θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



১ম চিত্র ২য় চিত্র

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। আবার রশ্মিটি ঐ একই দিকে ঘুরে $\angle POQ = 180^\circ$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOQ = 180^\circ + \theta$.

θ এবং $(180^\circ + \theta)$ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি যে অবস্থানে থাকে ঐ অবস্থানের রশ্মিদ্বয় থেকে যথাক্রমে OP এবং OQ এমনভাবে নেয়া হল যেন $OP = OQ$ হয়। XOX' রেখার উপর PM এবং QN লম্বদ্বয় অংকন করি। তাহলে, OPM এবং OQN ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান। $\therefore\ QN = PM$ এবং $ON = OM$.

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\sin(180^\circ + \theta) = \sin XOQ = \frac{-QN}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\sin XOP = -\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = \cos XOQ = \frac{-ON}{OQ} = -\frac{PM}{OP} = -\cos XOP = -\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan XOQ = \frac{-QN}{-ON} = \frac{PM}{OM} = \tan XOP = \tan\theta.$$

উপরোক্ত অনুপাতের ফলাফল থেকে আমরা পাই,

$\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$ এবং $\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$.

রেডিয়ান পরিমাপে উপরোক্ত অনুপাতগুলি হল : $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$, ইত্যাদি।

উদাহরণ । (ক) $\cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$,

(খ) $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$,

(গ) $\operatorname{cosec}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

7.1.6. (270° – θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(270^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিচের প্রক্রিয়ায়ও এদের ফলাফল বের করা যায়। যেমন,

$\sin(270^\circ - \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin(90^\circ - \theta) = -\cos\theta$;

অনুরূপভাবে, $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$, $\tan(270^\circ - \theta) = \cot\theta$ ইত্যাদি।

7.1.7. $(270° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$(270° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে বের করতে পারি। কিন্তু এ ফলাফল নিচের প্রক্রিয়ায়ও নির্ণয় করা যায়। যেমনঃ

$$\sin(270° + \theta) = \sin\{180° + (90° + \theta)\} = -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta,$$

তদ্রূপ, $\cos(270° + \theta) = \sin\theta$, $\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$ ইত্যাদি।

7.1.8. $(360° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(360° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু অনুপাতগুলি নিচের প্রক্রিয়ায়ও বের করা যায়। যেমন :

$$\sin(360° - \theta) = \sin\{270° + (90° - \theta)\} = -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta,$$

অনুরূপভাবে, $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$, $\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$ ইত্যাদি।

7.1.9. দুইটি প্রয়োজনীয় নিয়ম

প্রথম নিয়ম ঃ যদি θ কে 90 ডিগ্রির জোড় গুণিতকের সঙ্গে ধনাত্মক বা, ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত করা হয় (যেমন $180° - \theta$, $180° + \theta$, $360° - \theta$ ইত্যাদি), তবে ঐ কোণের অনুপাতকে কেবল θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাতের রূপান্তর হয় না। কিন্তু এর চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় করতে θ কে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করে দেখতে হবে যে, সংযুক্ত কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে? এরপর চতুর্ভাগ–নিয়ম অনুযায়ী অনুপাতের চিহ্ন সহজেই নির্ণয় করা যায়।

দ্বিতীয় নিয়ম ঃ যদি θ কে 90 ডিগ্রির বিজোড় গুণিতকের সঙ্গে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত করা হয় (যেমন $90° - \theta$, $90° + \theta$, $270° - \theta$ ইত্যাদি), তবে ঐ কোণের অনুপাতকে কেবল θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাতটি এর সহ–অনুপাতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু এর চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) নির্ণয় করতে θ কে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করে দেখতে হবে যে, সংযুক্ত কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে? এরপর চতুর্ভাগ–নিয়ম অনুযায়ী অনুপাতের চিহ্ন সহজেই নির্ণয় করা যায়।

7.1.10. যেকোনো পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণের অনুপাতে প্রকাশ করা

যেকোনো পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়। এর জন্য নিচের পদক্ষেপ গ্রহণ করতে হবে :

(1) যদি প্রদত্ত কোণের পরিমাপ $360°$ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ কোণ থেকে $360°$ কিংবা 360 ডিগ্রির গুণিতক বাদ দিলে তা $360°$ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণে পরিবর্তিত হয়। আগেই প্রমাণ করা হয়েছে যে, প্রদত্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এরূপ পরিবর্তিত কোণের ঐ একই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সমান। যেমন ঃ

$\sec(1270°) = \sec(360° \times 3 + 190°) = \sec 190°$.

(2) আবার যদি প্রদত্ত কোণের পরিমাপ $-360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে ঐ কোণ থেকে $-360°$ কিংবা $-360°$ ডিগ্রির গুণিতক বাদ দিয়ে এটিকে ধনাত্মক এবং $360°$ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণে পরিবর্তন করা যায়। এ ক্ষেত্রেও প্রমাণ করা হয়েছে যে, প্রদত্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এরূপ পরিবর্তিত কোণের ঐ একই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সমান হয়। যেমন,

(ক) $\cos(-1000°) = \cos(-360° \times 3 + 80°) = \cos 80°$ এবং

(খ) $\tan(-1880°) = \tan(-360° \times 6 + 280°) = \tan 280°$ ইত্যাদি।

(3) উপরে বর্ণিত দুইটি পদক্ষেপের একটির সাহায্যে যে কোন পরিমাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে কোনো কোনো ক্ষেত্রে ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে পরিবর্তন করা সম্ভব না হলেও এদেরকে $360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়। তখন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাথে এমন কোণ সংযুক্ত থাকে যাকে $90° \pm \theta$, বা $180° \pm \theta$, বা $360° - \theta$ আকারে প্রকাশ করে অনুচ্ছেদ 7.1.9 এর নিয়মানুযায়ী অনুপাতটিকে θ (ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ । $\sin(3825°) = \sin(360° \times 10 + 225°) = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\cos 18° + \cos 162° + \cos 234° + \cos 1386°$.

সমাধান : $\cos 18° + \cos 162° + \cos 234° + \cos 1386°$

$$= \cos 18° + \cos(180° - 18°) + \cos(270° - 36°) + \cos(360° \times 4 - 54°)$$
$$= \cos 18° - \cos 18° - \sin 36° + \cos 54°$$
$$= - \sin 36° + \cos(90° - 36°) = - \sin 36° + \sin 36° = 0 \cdot$$

উদাহরণ 2. যদি $x = r\sin(\theta + 45°)$ এবং $y = r\sin(\theta - 45°)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = r^2$.

সমাধান : আমরা পাই $x^2 + y^2 = r^2\sin^2(\theta + 45°) + r^2\sin^2(\theta - 45°)$

$$= r^2\{\sin^2(90° + \theta - 45°) + \sin^2(\theta - 45°)\}$$
$$= r^2\{\cos^2(\theta - 45°) + \sin^2(\theta - 45°)\} = r^2.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর : $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

সমাধান : $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

$$= \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$$
$$= \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \left\{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 + \cos^2\frac{\pi}{12}$$
$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} + \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right\} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right\} + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর : $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$.

সমাধান : নির্ণেয় মান $= \cot 9° \cot 27° \cot 45° \cot 63° \cot 81°$ [$\because \pi = 180°$]

$$= \cot 9° \cot 27° .1. \cot(90° - 27°) \cot(90° - 9°)$$
$$= \cot 9° \cot 27° \tan 27° \tan 9° = 1 .$$ [$\because \cot 9° \tan 9° = 1$ ইত্যাদি]

উদাহরণ 5. যদি $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}.$$ [য. '১২]

সমাধান : আমরা পাই, $\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$

[$\because \frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$, অর্থাৎ কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং এ চতুর্ভাগে সাইন এবং কোসেকেন্ট ছাড়া অন্যান্য অনুপাত ঋণাত্মক]

অতএব, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5/13}{-12/13} = -\frac{5}{12}$.

এখন $$\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta} = \frac{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{-\frac{18}{12}}{-\frac{25}{5}} = \frac{3}{10}.$$

প্রশ্নমালা 7.1

1. **মান নির্ণয় কর ঃ**

   (i) $\sin 675°$, **(ii)** $\tan 1305°$, **(iii)** $\sec 510°$, **(iv)** $\operatorname{cosec} 765°$, **(v)** $\cot 3750°$, **(vi)** $\sin(-1395°)$, **(vii)** $\sec(-2580°)$, **(viii)** $\cot(-1530°)$, **(ix)** $\tan(-1590°)$.

2. **মান নির্ণয় কর ঃ** $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right)$ এবং $\tan\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{19\pi}{3}\right)$.

3. **মান নির্ণয় কর ঃ**

   (i) $\cos 198° + \sin 432° + \tan 168° + \tan 12°$;

   (ii) $\cos 420° \sin(-300°) - \sin 870° \cos 570°$;

   (iii) $\sin 780° \cos 390° - \sin 330° \cos(-300°)$;

   (iv) $\tan\frac{17\pi}{4}\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \sec\left(-\frac{34\pi}{3}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

4. দেখাও যে, $\cos A + \sin\left(\frac{23\pi}{2}+A\right) - \sin\left(\frac{23\pi}{2}-A\right) + \cos(17\pi + A) = 0$.

5. নিচের অনুপাতগুলোকে 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং ধনাত্মক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করঃ

   (i) $\sin(-65°)$, **(ii)** $\tan(-246°)$, **(iii)** $\sin 843°$, **(iv)** $\cot(-1054°)$, **(v)** $\sec 1327°$ এবং **(vi)** $\operatorname{cosec}(-756°)$.

6. **মান নির্ণয় কর ঃ**

   (i) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$;

   (ii) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$; [ব. '১০; য. '১১]

   (iii) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$; [ঢা. '১৩]

   (iv) $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$.

   (v) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$. [য. '০৬]

7. যদি n এর মান যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে, $\cos(2n\pi \pm \frac{\pi}{4})$ এর মান সব সময় $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হয়।

8. যদি $\alpha = \frac{11\pi}{4}$ হয়, তবে $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

9. যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হয়, তবে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান কত?

10. **প্রমাণ কর :**

    (i) $\cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \ldots\ \ldots\ \ldots + \cos^2 80° = 4$,

    (ii) $\sin^2 15° + \sin^2 20° + \sin^2 25° + \ldots\ \ldots\ \ldots + \sin^2 75° = \frac{13}{2}$,

    (iii) $\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \ldots\ \ldots\ \ldots + \sin^2 177° = 15$.

11. **প্রমাণ কর :** $\sin\theta + \sin(\pi+\theta) + \sin(2\pi+\theta) + \ldots\ldots\ldots + \sin(n\pi+\theta)$
$= \sin\theta$, বা 0; যখন n যথাক্রমে জোড় ও বিজোড় সংখ্যা ।

12. যদি $ABCD$ চতুর্ভুজের কোণগুলি যথাক্রমে A, B, C, D হয়, তবে দেখাও যে,

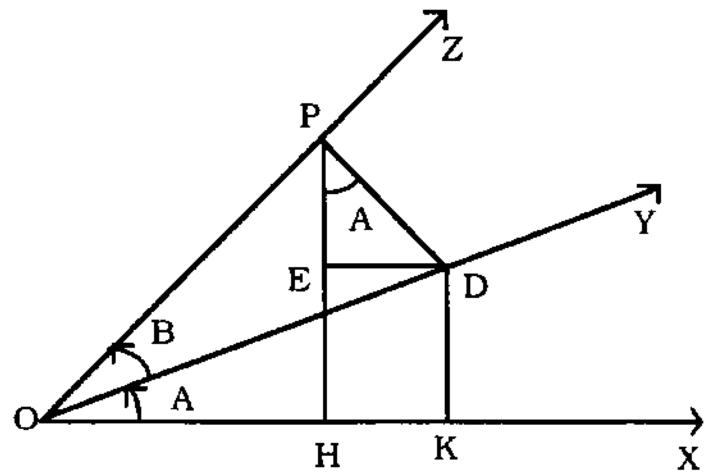
(i) $\cos\frac{1}{2}(A+C) + \cos\frac{1}{2}(B+D) = 0$; (ii) $\sin(A+B+C) + \sin(A+B+C+2D) = 0$.

13. যদি $\theta = \frac{\pi}{20}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot\theta.\cot 3\theta.\cot 5\theta.\cot 7\theta \ldots\ldots \cot 19\theta = -1$.

7.2. যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of compound angle*)

যৌগিক কোণ (*compound angle*) ঃ দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলা হয় । যেমন ঃ $A+B, A-B, A+B-C, A-B-C$ ইত্যাদি যৌগিক কোণ।

7.2.1. সূত্র ঃ A এবং B কোণদ্বয় ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম এবং $(A+B) < 90°$ হলে,
$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ এবং $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.



প্রমাণ ঃ মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ একই রশ্মি আরও অধিক দূর একই দিকে অগ্রসর হয়ে $\angle YOZ = B$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOZ = A + B$.

এখন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর একটি বিন্দু P থেকে OX এবং OY এর উপর যথাক্রমে PH এবং PD লম্বদ্বয় আঁকি। আবার D বিন্দু থেকে OX এবং PH এর উপর যথাক্রমে DK এবং DE লম্বদ্বয় আঁকি।

তাহলে, স্পষ্টতঃ
$\angle DPE = 90° - \angle PDE = \angle EDO = \angle A$.
এখন POH সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই

$$\sin(A+B) = \frac{PH}{OP} = \frac{EH+PE}{OP} = \frac{DK+PE}{OP} = \frac{DK}{OP} + \frac{PE}{OP} = \frac{DK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} + \frac{PE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$
$$= \sin A\cos B + \cos\angle DPE.\sin B = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$\therefore \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

পুনরায় $$\cos(A+B) = \frac{OH}{OP} = \frac{OK-HK}{OP} = \frac{OK-DE}{OP} = \frac{OK}{OP} - \frac{DE}{OP} = \frac{OK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} - \frac{DE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$
$$= \cos A\cos B - \sin\angle DPE.\sin B = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$\therefore \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

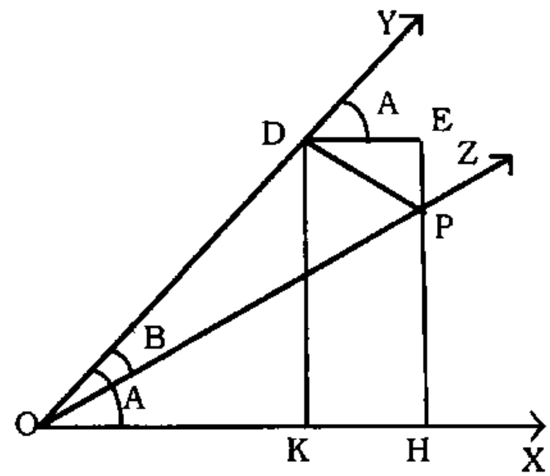
7.2.2. সূত্র ঃ A ও B কোণদ্বয় সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক এবং $A > B$ হলে,

$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ এবং $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, একটি কোণ উৎপন্নকারী রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = \angle A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ একই রশ্মি এখন ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে $\angle YOZ = \angle B$ উৎপন্ন করল।

তাহলে, $\angle XOZ = A - B$.

এখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P নিয়ে OX এবং OY এর উপর যথাক্রমে PH এবং PD লম্বদ্বয় অংকন করি। আবার D বিন্দু থেকে OX এবং HP এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে DK এবং DE লম্বদ্বয় আঁকি । তাহলে, স্পষ্টত $\angle DPE = 90° - \angle PDE = \angle EDY = \angle A$.



এখন POH সমকোণী ত্রিভুজ থেকে

$$\sin (A-B) = \frac{PH}{OP} = \frac{EH-PE}{OP} = \frac{DK-PE}{OP} = \frac{DK}{OP} - \frac{PE}{OP} = \frac{DK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} - \frac{PE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos \angle DPE \sin B = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$\therefore$ **$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.**

$$\cos (A-B) = \frac{OH}{OP} = \frac{OK+KH}{OP} = \frac{OK + DE}{OP}$$

$$= \frac{OK}{OP} + \frac{DE}{OP} = \frac{OK}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} + \frac{DE}{PD}\cdot\frac{PD}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin \angle DPE . \sin B = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$\therefore$ **$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.**

মন্তব্য : যেকোনো পরিমাপের A ও B এরজন্য 7.2.1 এবং 7.2.2 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

7.2.3. প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, (ii) $\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

প্রমাণ ঃ (i) $\tan (A+B) = \dfrac{\sin (A+B)}{\cos (A+B)} = \dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

(ii) $\tan (A-B) = \dfrac{\sin (A-B)}{\cos (A-B)} = \dfrac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

মন্তব্য ঃ উপরোক্ত সূত্র দুইটি জ্যামিতিক নিয়মেও প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

7.2.3. অনুসিদ্ধান্ত : (i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$;
(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$.

প্রমাণ ঃ

(i) বাম পক্ষ $= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$
$= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$
$= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - \sin^2 B (1 - \sin^2 A) = \sin^2 A - \sin^2 B$
$= (1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B) = \cos^2 B - \cos^2 A$.

(ii) বাম পক্ষ $= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B)$
$= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B$
$= \cos^2 A (1 - \sin^2 B) - \sin^2 B (1 - \cos^2 A)$
$= \cos^2 A - \sin^2 B = (1 - \sin^2 A) - (1 - \cos^2 B) = \cos^2 B - \sin^2 A$.

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর ঃ $\sin 75°, \cos 75°, \tan 15°$.

সমাধান ঃ $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{6} + \sqrt{2}\right]$$

$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{6} - \sqrt{2}\right].$$

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\cot\theta - \cot 2\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \dfrac{\sin 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \sin\theta}{\sin\theta \sin 2\theta}$

$$= \frac{\sin(2\theta - \theta)}{\sin\theta \sin 2\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta \sin 2\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} = \operatorname{cosec} 2\theta.$$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর যে, $\cos 68° 20' \cos 8° 20' + \cos 81°40' \cos 21°40' = \frac{1}{2}$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষ $= \cos(90° - 21° 40') \cos 8° 20' + \cos(90° - 8° 20') \cos 21° 40'$
$= \sin 21° 40' \cos 8° 20' + \sin 8° 20' \cos 21° 40'$
$= \sin(21° 40' + 8° 20') = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = \tan 18°$

সমাধান ঃ বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos 27° - \cos(90° - 27°)}{\cos 27° + \cos(90° - 27°)} = \dfrac{\cos 27° - \sin 27°}{\cos 27° + \sin 27°}$

$$= \frac{1 - \tan 27°}{1 + \tan 27°} = \frac{\tan 45° - \tan 27°}{1 + \tan 45° \tan 27°}$$

$= \tan(45° - 27°) = \tan 18°$.

উদাহরণ 5. যদি $a \sin(x+\theta) = b \sin(x-\theta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(a-b)\tan x + (a+b)\tan\theta = 0$.

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a \sin(x+\theta) = b \sin(x-\theta)$

বা, $a(\sin x \cos\theta + \cos x \sin\theta) = b(\sin x \cos\theta - \cos x \sin\theta)$

বা, $(a-b)\sin x \cos\theta + (a+b)\cos x \sin\theta = 0$

বা, $(a-b)\tan x + (a+b)\tan\theta = 0$. [উভয়পক্ষকে $\cos\theta \cos x$ দ্বারা ভাগ করে]

উদাহরণ 6. θ কোণকে α ও β অংশে এমনভাবে বিভক্ত করা হল যেন $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$ হয়, প্রমাণ কর যে, $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$.

সমাধান ঃ যেহেতু θ কোণকে α ও β অংশে বিভক্ত করা হয়েছে, $\therefore \theta = \alpha + \beta$.

আবার, $\tan\alpha : \tan\beta = x : y \Rightarrow \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{x}{y}$

$\therefore \dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{x-y}{x+y}$ [যোজন ও বিয়োজন প্রক্রিয়ায়]

বা, $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad \therefore \sin(\alpha-\beta) = \dfrac{x-y}{x+y}\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$.

প্রশ্নমালা 7.2

1. মান নির্ণয় কর :
   (i) $\sin 15^\circ$, (ii) $\sin 105^\circ$, (iii) $\tan 75^\circ$, (iv) $\sec 165^\circ$, (v) $\operatorname{cosec} 375^\circ$.
2. A এবং B কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম হলে এবং
   (i) যদি $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ হয়, তবে $\sin(A+B)$ এবং $\cos(A+B)$ এর মান নির্ণয় কর।
   (ii) যদি $\cot A = \frac{11}{2}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ হয়, তবে $\cot(A-B)$ এবং $\tan(A+B)$ এর মান নির্ণয় কর।
   (iii) যদি $\sec A = \frac{17}{8}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{5}{4}$ হয়, তবে $\sec(A+B)$ এর মান নির্ণয় কর।
3. মান নির্ণয় কর :
   (i) $\sin 28^\circ 32' \sin 88^\circ 32' + \sin 61^\circ 28' \sin 1^\circ 28'$
   (ii) $\cos 17^\circ 40' \sin 77^\circ 40' + \cos 107^\circ 40' \sin 12^\circ 20'$
   (iii) $\dfrac{\tan 68^\circ 35' - \cot 66^\circ 25'}{1 + \tan 68^\circ 35' \cot 66^\circ 25'}$.

প্রমাণ কর : (4-18)

4. $\cos x \sin(y-z) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y) = 0$.
5. $\sin x \sin(x+30^\circ) + \cos x \sin(x+120^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
6. $\cos(x-60^\circ)\cos(x-30^\circ) - \sin(x-60^\circ)\sin(x+330^\circ) = \sin 2x$.
7. $\sin(n+1)\theta \sin(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta\cos(n-1)\theta = \cos 2\theta$.
8. $\dfrac{\tan(3\theta-2\varphi) + \tan 2\varphi}{1 - \tan(3\theta-2\varphi)\tan 2\varphi} = \tan 3\theta$.
9. $\tan 36^\circ + \tan 9^\circ + \tan 36^\circ \tan 9^\circ = 1$. [ব. '০৪]
10. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\sin C \sin A} + \dfrac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B} = 0$.

11. $1 + \tan 2A \tan A = \sec 2A$.

12. $\sin A + \sin (A + 120°) + \sin (A - 120°) = 0$.

13. $\operatorname{cosec} (x - y) = \dfrac{\sec x \sec y}{\tan x - \tan y}$.

14. $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$.

15. $\tan \left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan \left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{4 \sin 2\alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}$.

16. **(i)** $\dfrac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \tan 53°$. **(ii)** $\dfrac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = \sqrt{3}$.

17. যদি $\dfrac{\sin (\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} = \dfrac{2 \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot \alpha - \cot \gamma = 2 \cot \beta$. [কু. '১২]

18. যদি $\tan \beta = \dfrac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot \gamma + \cot \alpha = 2 \cot \beta$.

19. যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয়, তবে দেখাও যে,
(i) $\tan A = \tan B + \tan C$; [দি. ব. কু. '১৩] **(ii)** $\tan B \tan C = 2$.

20. যদি $A + B = \dfrac{\pi}{4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$.

21. **(i)** $\sin (A - B - C)$ এবং $\cos (A - B + C)$ কে বিস্তৃত কর।
(ii) $\cot (A + B + C)$ কে $\cot A, \cot B, \cot C$ পদে প্রকাশ কর।

22. যদি $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $1 + \cot \alpha \tan \beta = 0$. [য. '০৭]

23. **(i)** যদি $\cot \alpha + \cot \beta = a$, $\tan \alpha + \tan \beta = b$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(a - b)\tan \theta = ab$. [ঢা. '১১; ব. '০৮; চ. '১২]
(ii) যদি $\theta + \varphi = \alpha$ এবং $\tan \theta = k \tan \varphi$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin (\theta - \varphi) = \dfrac{k - 1}{k + 1} \sin \alpha$.

24. **(i)** যদি $m \sin (\theta - \alpha) = n \sin (\theta + \alpha)$ হয়, তবে দেখাও যে, $(m - n) \tan \theta = (m + n) \tan \alpha$.
(ii) যদি $a \cos (x + a) = b \cos (x - a)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(a + b) \tan x = (a - b) \cot \alpha$.

25. **(i)** যদি $\cot \theta = \dfrac{a \cos x - b \cos y}{a \sin x + b \sin y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{\sin (\theta - x)}{\sin (\theta + y)} = \dfrac{b}{a}$. [ঢা. '০৫]
(ii) $a \sin (\theta + \alpha) = b \sin (\theta + \beta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot \theta = \dfrac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha}$. [য. '০৫]

26. যদি $\tan \theta = \dfrac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi}$ এবং $\tan \varphi = \dfrac{y \sin \theta}{1 - y \cos \theta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \dfrac{x}{y}$.

27. যদি $\cos (A + B) \sin (C + D) = \cos (A - B) \sin (C - D)$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\cot A \cot B \cot C = \cot D$.

28. যদি $\tan \theta = \dfrac{a \sin x + b \sin y}{a \cos x + b \cos y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a \sin (\theta - x) + b \sin (\theta - y) = 0$.

29. যদি $\tan \beta = \dfrac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1 - n \sin^2 \alpha}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan (\alpha - \beta) = (1 - n) \tan \alpha$.

30. যদি $\sqrt{2} \cos A = \cos B + \cos^3 B$ এবং $\sqrt{2} \sin A = \sin B - \sin^3 B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\sin (A - B) = \pm\dfrac{1}{3}$. [ঢা. '০৪]

7.2.4. যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থেকে কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত

যৌগিক কোণের অনুপাত থেকে আমরা পাই

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A + B)$ ... . (i)

এবং $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A - B)$ ... . (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)}$ .... **(1)**

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)}$ ...... **(2)**

আবার, $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A + B)$ ... . (iii)

এবং $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A - B)$ ... . (iv)

এখন (iii) এবং (iv) যোগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)}$ .... **(3)**

(iv) থেকে (iii) বিয়োগ করে আমরা পাই, $\mathbf{2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)}$ .... **(4)**

মনে করি, $A + B = C$ এবং $A - B = D$ তাহলে, $A = \dfrac{C + D}{2}$ এবং $B = \dfrac{C - D}{2}$.

এখন (1) থেকে (4) পর্যন্ত সূত্রে A এবং B এর পরিবর্তে এদের জন্য উপরে প্রাপ্ত মান স্থাপন করে আমরা যথাক্রমে পাই

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2};\quad \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2};\quad \cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}.$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. দেখাও যে, (ক) $\cos 70° - \cos 10° + \sin 40° = 0$,

(খ) $\sin 10° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{8}$.

সমাধান ঃ (ক) বাম পক্ষ $= \cos 70° - \cos 10° + \sin 40°$

$$= 2 \sin 40° \sin (-30°) + \sin 40° = -2 \sin 40° \sin 30° + \sin 40°$$

$$= -2 \sin 40° \cdot \frac{1}{2} + \sin 40° = -\sin 40° + \sin 40° = 0.$$

(খ) বাম পক্ষ $= \sin 10° \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \sin 70° \sin 50° = \frac{1}{2} \sin 10° (\cos 20° - \cos 120°)$

$$= \frac{1}{2} \sin 10° \left(\cos 20° + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos 20° \sin 10° + \frac{1}{4} \sin 10°$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \cos 20° \sin 10° + \frac{1}{4} \sin 10° = \frac{1}{4} (\sin 30° - \sin 10°) + \frac{1}{4} \sin 10°$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \sin 10°\right) + \frac{1}{4} \sin 10° = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \sin 10° + \frac{1}{4} \sin 10° = \frac{1}{8}.$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} 10° - 2 \sin 70° = 1$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষ $= \dfrac{1}{2 \sin 10°} - 2 \sin 70° = \dfrac{1 - 4 \sin 70° \sin 10°}{2 \sin 10°}$

$$= \frac{1 - 2 (\cos 60° - \cos 80°)}{2 \sin 10°} = \frac{1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \cos 80°\right)}{2 \sin 10°} = \frac{2 \cos 80°}{2 \sin 10°}$$

$$= \frac{\cos (90° - 10°)}{\sin 10°} = \frac{\sin 10°}{\sin 10°} = 1.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\sin 27° + \cos 27° = \sqrt{2}\cos 18°$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষ $= \sin 27° + \cos(90° - 63°) = \sin 27° + \sin 63°$

$$= 2\sin\frac{27° + 63°}{2}\cos\frac{63° - 27°}{2} = 2\sin 45°\cos 18° = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 18°$$

$$= \sqrt{2}\cos 18°.$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\sin\theta + \sin 5\theta + \sin 9\theta + \sin 13\theta}{\cos\theta + \cos 5\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta} = \tan 7\theta$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষ $= \dfrac{(\sin 13\theta + \sin\theta) + (\sin 9\theta + \sin 5\theta)}{(\cos 13\theta + \cos\theta) + (\cos 9\theta + \cos 5\theta)}$

$$= \frac{2\sin 7\theta\cos 6\theta + 2\sin 7\theta\cos 2\theta}{2\cos 7\theta\cos 6\theta + 2\cos 7\theta\cos 2\theta}$$

$$= \frac{2\sin 7\theta(\cos 6\theta + \cos 2\theta)}{2\cos 7\theta(\cos 6\theta + \cos 2\theta)} = \frac{\sin 7\theta}{\cos 7\theta} = \tan 7\theta.$$

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে, $\tan 54° = \tan 36° + 2\tan 18°$.

সমাধান ঃ আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan 54° = \tan 36° + 2\tan 18°$,

অর্থাৎ, $\tan 54° - \tan 36° = 2\tan 18°$

এখন, $\tan 54° - \tan 36°$

$$= \frac{\sin 54°}{\cos 54°} - \frac{\sin 36°}{\cos 36°} = \frac{\sin 54°\cos 36° - \sin 36°\cos 54°}{\cos 54°\cos 36°}$$

$$= \frac{\sin(54° - 36°)}{\cos 54°\cos 36°} = \frac{2\sin 18°}{2\cos 54°\cos 36°} = \frac{2\sin 18°}{\cos 90° + \cos 18°} = \frac{2\sin 18°}{\cos 18°} = 2\tan 18°.$$

সুতরাং, $\tan 54° = \tan 36° + 2\tan 18°$.

প্রশ্নমালা 7.3

প্রমাণ কর ঃ (প্রশ্ন 1 – 15)

1. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = \cot\frac{1}{2}(A + B)\cot\frac{1}{2}(B - A)$.

2. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan\frac{1}{2}(A + B)\cot\frac{1}{2}(A - B) = 5 + 2\sqrt{6}$.

3. $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = 0$.

4. **(a)** $\cos A + \cos(120° - A) + \cos(120° + A) = 0$.

(b) $\sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta) = 0$. [ঢা. '১২]

5. $\sin\theta\sin(60° - \theta)\sin(60° + \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$.

6. $\sec\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sec 2\theta$.

7. **(i)** $\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° = \dfrac{1}{16}$.

(ii) $\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80° = \dfrac{3}{16}$.

(iii) $\tan 20°\tan 40°\tan 80° = \sqrt{3}$. [ব. '০৭; কু. '০৯; রা. '১০]

(iv) $16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{14\pi}{15} = 1$. [সি. '১১; দি. '১২; ব. '১৩]

8. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha.$

9. $\dfrac{\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta + \sin\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cos\theta} = \tan 2\theta.$

10. $\dfrac{\cos 8\theta + 6\cos 6\theta + 13\cos 4\theta + 8\cos 2\theta}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta} = 2\cos\theta.$

11. $4\cos\theta\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+\theta\right) = \cos 3\theta$.

12. (i) $\cos 85^\circ + \sin 85^\circ = \sqrt{2}\cos 40^\circ$, [চ. '০৫]
(ii) $\sin 18^\circ + \cos 18^\circ = \sqrt{2}\cos 27^\circ$.

13. $\tan 70^\circ = \tan 20^\circ + 2\tan 50^\circ$. [য. ঢা. '১০]

14. $\tan\dfrac{45^\circ+\theta}{2}\tan\dfrac{45^\circ-\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1}$. [ঢা. কু. '০৮; ব. '০৯; য. '১১]

15. $\cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ) = \dfrac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1}$.

16. যদি $A \neq B$ এবং $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A + B = \frac{\pi}{2}$. [কু. '১২]

17. যদি $\sin x = m\sin y$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}(x-y) = \dfrac{m-1}{m+1}\tan\frac{1}{2}(x+y)$.

18. যদি $\alpha + \beta = \theta$ এবং $\cos\alpha = k\cos\beta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \dfrac{1-k}{1+k}\cot\frac{1}{2}\theta$.

19. যদি $(\theta - \varphi)$ সূক্ষ্ম এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = 0$.

7.2.5. গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of multiple angles*)

$2A$, $3A$, $4A$ ইত্যাদি কোণকে A কোণের গুণিতক কোণ বলা হয়। এখন আমরা $2A$, $3A$ ইত্যাদি কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করব।

(ক) $2A$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা জানি $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ এবং
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

প্রথম সূত্রে $B = A$ বসিয়ে আমরা পাই, $\mathbf{\sin 2A} = \sin A\cos A + \cos A\sin A = \mathbf{2\sin A\cos A}$ ....(i)

দ্বিতীয় সূত্রে $B = A$ বসিয়ে আমরা পাই, $\mathbf{\cos 2A} = \cos A.\cos A - \sin A\sin A = \mathbf{\cos^2 A - \sin^2 A}$ ...(ii)

আবার (ii) সূত্রের ডান পক্ষকে কেবল $\sin A$, বা $\cos A$ অনুপাতে পরিবর্তন করে আমরা পাই

$\mathbf{\cos 2A} = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = \mathbf{1 - 2\sin^2 A}$ ... ...(iii)

এবং $\mathbf{\cos 2A} = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \mathbf{2\cos^2 A - 1}$ ... (iv)

পক্ষ পরিবর্তন করে (iii) এবং (iv) থেকে আমরা পাই

$\mathbf{1 - \cos 2A = 2\sin^2 A;}$ ... ... (v)

এবং $\mathbf{1 + \cos 2A = 2\cos^2 A;}$ ... ... (vi)

(v) কে (vi) দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই, $\mathbf{\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A}$ . ... (vii)

আবার $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$ সূত্রে $B = A$ বসিয়ে আমরা পাই

$\mathbf{\tan 2A} = \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A.\tan A} = \mathbf{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}}$ .... (viii)

উদাহরণ :

(i) $\sin 4\theta = \sin(2.2\theta) = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$;

(ii) $\sin 8\theta = \sin(2.4\theta) = 2\sin 4\theta\cos 4\theta$;

(iii) $\cos 16\theta = \cos(2.8\theta) = \cos^2 8\theta - \sin^2 8\theta = 1 - 2\sin^2 8\theta = 2\cos^2 8\theta - 1$.

(খ) sin 2A এবং cos 2A অনুপাতকে tan A অনুপাতে প্রকাশ করা

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A = 2\tan A\cdot\frac{1}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \mathbf{\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$= \frac{1}{\sec^2 A}\cdot(1 - \tan^2 A) = \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A} = \mathbf{\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}}.$$

(গ) 3A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A\\ &= 2\sin A\cos A.\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A = \mathbf{3\sin A - 4\sin^3 A}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A+A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A\\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A.\sin A\\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A) = \mathbf{4\cos^3 A - 3\cos A}.\end{aligned}$$

$$\tan 3A = \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A} = \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\cdot\tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A} = \mathbf{\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}}.$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. cos 5θ এর মান cos θ অনুপাতে প্রকাশ কর। **[রা. '১১]**

সমাধান : $\cos 5\theta = \cos(\theta + 4\theta) = \cos\theta\cos 4\theta - \sin\theta\sin 4\theta$

$$\begin{aligned}&= \cos\theta(2\cos^2 2\theta - 1) - \sin\theta.2\sin 2\theta\cos 2\theta\\ &= \cos\theta\{2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1\} - 2\sin\theta.2\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)\\ &= \cos\theta\{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\} - 4\cos\theta(1-\cos^2\theta)(2\cos^2\theta - 1)\\ &= \cos\theta\{8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\} - 4\cos\theta(3\cos^2\theta - 2\cos^4\theta - 1)\\ &= 8\cos^5\theta - 8\cos^3\theta + \cos\theta - 12\cos^3\theta + 8\cos^5\theta + 4\cos\theta\\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

সমাধান : $\cos^4 x = \frac{1}{4}4\cos^4 x = \frac{1}{4}(2\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cdot 2\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

উদাহরণ 3. যদি $\tan\theta = \frac{y}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x$.

সমাধান : দেওয়া আছে $\tan\theta = \frac{y}{x}$, বা $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$, বা $y\cos\theta = x\sin\theta$

$$\therefore x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x(1 - 2\sin^2\theta) + y.\,2\sin\theta\cos\theta$$
$$= x - 2x\sin^2\theta + 2\sin\theta.\,y\cos\theta$$
$$= x - 2x\sin^2\theta + 2x\sin^2\theta = x\,.$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $4\cos^3 x\sin 3x + 4\sin^3 x\cos 3x = 3\sin 4x$.

সমাধান : বা, প, $= 2\cos^2 x.2\sin 3x\cos x + 2\sin^2 x.2\cos 3x\sin x$
$$= 2\cos^2 x.(\sin 4x + \sin 2x) + 2\sin^2 x(\sin 4x - \sin 2x)$$
$$= 2\sin 4x.\,(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin 2x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= 2\sin 4x + 2\sin 2x\cos 2x = 2\sin 4x + \sin 4x = 3\sin 4x.$$

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে, $\cos^3 x + \cos^3(120° + x) + \cos^3(240° + x) = \frac{3}{4}\cos 3x$.

সমাধান : আমরা জানি $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ বা, $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

$$\therefore \cos^3 x + \cos^3(120° + x) + \cos^3(240° + x)$$
$$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) + \frac{1}{4}\{\cos 3(120° + x) + 3\cos(120° + x)\} + \frac{1}{4}\{\cos 3(240° + x) + 3\cos(240° + x)\}$$
$$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) + \frac{1}{4}\{\cos(360° + 3x) + 3\cos(120° + x)\} + \frac{1}{4}\{\cos(720° + 3x) + 3\cos(240° + x)\}$$
$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos(120° + x) + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos(240° + x)$$
$$= \frac{3}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cdot 2\cos(180° + x)\cos 60°$$
$$= \frac{3}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cdot 2(-\cos x)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos 3x\,.$$

প্রশ্নমালা 7.4

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1-3)

1. $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$.　　**2.** $\dfrac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = \tan\theta$.

3. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$.　[সি. '০৫; রা. '১০]

4. যদি $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta = 3$.

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 5 – 16)

5. $\cos nA\cos(n + 2)A - \cos^2(n + 1)A + \sin^2 A = 0$.

6. $\dfrac{\cos(45° + A)}{\cos(45° - A)} = \sec 2A - \tan 2A$　[ব. '০৪]

7. $\dfrac{\sin\alpha - \sqrt{1 + \sin 2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1 + \sin 2\alpha}} = \cot\alpha$; যখন α ধনাত্মক ও সূক্ষ্মকোণ।

8. $\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x} = \tan^3 x$.　**9.** $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$.

10. $\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$.   11. $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$.

12. $\tan A \tan (60^\circ + A) \tan (120^\circ + A) = -\tan 3A$.

13. $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4x}}}$. [য. '০৫; দি. '০৯]

14. (i) $4(\sin^3 10^\circ + \cos^3 20^\circ) = 3(\sin 10^\circ + \cos 20^\circ)$;

(ii) $4(\sin^3 25^\circ + \cos^3 5^\circ) = 3\sqrt{3} \sin 55^\circ$.

15. (i) $\cos^2 (A - 120^\circ) + \cos^2 A + \cos^2 (A + 120^\circ) = \frac{3}{2}$. [দি. '১৩]

(ii) $\sin^2 (60^\circ + A) + \sin^2 A + \sin^2 (60^\circ - A) = \frac{3}{2}$. [রা. '১২; চ. '১১]

16. $\sin^3 x + \sin^3 (120^\circ + x) + \sin^3 (240^\circ + x) = -\frac{3}{4}\sin 3x$. [রা. '০৬, সি. '১০; চ. '০৭]

17. যদি $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 12 \cos A \cos B \cos C$.

18. যদি $\tan\theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos 2\theta = \sin 4\varphi$.

19. যদি $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$.

20. যদি $\tan\alpha = 2\tan\beta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{3\sin 2\alpha}{1 + 3\cos 2\alpha}$.

21. যদি $(A + B) \neq 0$ এবং $\sin A + \sin B = 2\sin(A + B)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$.

22. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta = \cot\theta$. [সি. '০৮]

23. প্রমাণ কর যে, (i) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$. [সি. চ. '১২; দি. '১১; য. রা. '১৩]

(ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \dfrac{1}{\cos 20^\circ} = 4$. [য. ঢা. '১০]

24. যদি $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\cos^2\dfrac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ [সি. '০৩; কু. '০৮]

7.2.6. উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of sub-multiple angles*)

$\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{4}$ ইত্যাদি কোণকে θ কোণের উপ-গুণিতক কোণ বলা হয়।

$$\sin\theta = \sin\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) = \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta + \cos\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta = 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta; \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) = \cos^2\tfrac{1}{2}\theta - \sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta; \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$\tan\theta = \tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\theta\right) = \frac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1 - \tan^2\frac{1}{2}\theta} \quad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(ii) থেকে আমরা পাই, $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$ ..... (iv) $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ ..... (v)

(v) ÷ (iv) $\Rightarrow \tan^2\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ ...... (vi)

7.2.7. 18° এবং 36° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\theta = 18^\circ$. তাহলে, $5\theta = 90^\circ$; $\therefore\ 2\theta = 5\theta - 3\theta = 90^\circ - 3\theta$

সুতরাং, $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$ বা, $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

যেহেতু $\cos\theta$, অর্থাৎ $\cos 18^\circ$ এর মান শূন্য নয়, অতএব উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1-\sin^2\theta) - 3$ বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

অর্থাৎ, $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. [$\because$ $\sin 18^\circ$ ধনাত্মক]

আবার $$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2\cdot\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

এবং $$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর ঃ $\tan 7\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

সমাধান ঃ আমরা পাই, $$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{\sin 7\frac{1}{2}^\circ}{\cos 7\frac{1}{2}^\circ} = \frac{2\sin^2 7\frac{1}{2}^\circ}{2\sin 7\frac{1}{2}^\circ\cos 7\frac{1}{2}^\circ} = \frac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$ [$\sin 15^\circ$ এবং $\cos 15^\circ$ এর মান স্থাপন করে]

$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4}{2} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

উদাহরণ 2. যদি $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$ **[কু. '১১]**

সমাধান ঃ আমরা জানি, $\sin\alpha + \sin\beta = a$ ....(i) এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ ..... (ii)

প্রথমে (i) এবং (ii) কে বর্গ এবং পরে যোগ করে আমরা পাই

$2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$ বা, $2 + 2\cos(\alpha-\beta) = a^2+b^2$

বা, $2\{1+\cos(\alpha-\beta)\} = a^2+b^2$ বা, $4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = a^2+b^2$

বা, $\sec^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \dfrac{4}{a^2+b^2}$ বা, $\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \dfrac{4}{a^2+b^2} - 1$

বা, $\tan^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$ $\therefore \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$

প্রশ্নমালা 7.5

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1-9)

1. $\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}$.

2. $\cos^2\dfrac{A}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$.

3. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. [য. '১২]

4. $\cos^4\dfrac{A}{2}+\sin^4\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{4}(3+\cos 2A)$.

5. $\cos 2A=8\cos^4\dfrac{A}{2}-8\cos^2\dfrac{A}{2}+1$.

6. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+60^\circ\right)+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-60^\circ\right)=\dfrac{3}{2}$. [ব. '১১]

7. (i) $2\sin\dfrac{\pi}{16}=2\sin 11^\circ15'=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, [ব. '১২; ঢা. '০৮; দি. ব. '১০]

(ii) $2\cos\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. [কু. '১৩] (iii) $2\cos 7\dfrac{1^\circ}{2}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. [কু. চ. '১০]

8. $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}=\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$.

9. $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1$.

10. যদি $\sin\alpha+\sin\beta=a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.
[রা. '০৩, '০৮; সি. '১১]

11. যদি $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\varphi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos\varphi=\dfrac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$. [সি. '১২; রা. '০৯]

12. $(A+B)\neq 0$ এবং $\sin A+\sin B=2\sin(A+B)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{3}$.

7.2.8. বিশেষ ধরনের ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

উদাহরণ 1. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

সমাধান : যেহেতু $A+B+C=\pi$, $\therefore \dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$

$$\therefore \tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2} \quad \text{বা,}\ \frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$\text{বা,}\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

উদাহরণ 2. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$. [চ. '১১]

সমাধান : বা, প, $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]$

$=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\sin C.2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C$.

উদাহরণ 3. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$ [চ. '১৩; ব. '১২]

সমাধান : বাম পক্ষ $= (\cos A + \cos B) + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} + \cos C$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$ $\left[\because \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right]$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right] + 1 = 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right] + 1$

$= 2\sin\frac{C}{2} \cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1 = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

উদাহরণ 4. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1.$$ [রা. '১৩; ঢা. '১১, '১৩; দি. '০৯]

সমাধান : $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) + \cos^2 C = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(2 + \cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C$ $[\because \cos(A + B) = -\cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos C] = 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

$= 1 - \cos C . 2\cos A \cos B = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1.$

উদাহরণ 5. যদি $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1.$$ [ঢা. ব. '০১]

সমাধান : $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{2}(2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta) + \sin^2\gamma$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta) + \sin^2\gamma$ [$\because 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ এবং $2\sin^2\beta = 1 - \cos 2\beta$]

$= \frac{1}{2}\{2 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)\} + \sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \sin^2\gamma$

$= 1 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin^2\gamma$

$= 1 - \sin\gamma\cos(\alpha - \beta) + \sin^2\gamma$ [$\because \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, অর্থাৎ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma$]

$= 1 - \sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \sin\gamma] = 1 - \sin\gamma[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$= 1 - \sin\gamma . 2\sin\alpha\sin\beta = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

এখন পক্ষান্তর করে আমরা পাই

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1.$

প্রশ্নমালা 7.6

$A+B+C=\pi$ হলে, প্রমাণ করঃ (প্রশ্ন 1-10)

1. $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$

2. $\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \tan 3B \tan 3C.$

3. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C.$ [কু. '০১]

4. $\cos A - \cos B + \cos C + 1 = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

5. (i) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$ [য. '০৮]

(ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$ [য. '০২]

6. $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C.$ [রা. '১১, সি. '০৭, '১৩]

7. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C.$

8. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$

9. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$ [য. '০৪; কু. '০৯]

10. $\sin (B + C - A) + \sin (C + A - B) + \sin (A + B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C.$ [চ. '০৪, ব.'০৬]

$A+B+C=\frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 11-12)

11. $\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1.$

12. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \sin C = 0.$ [কু. '১১; দি. '১২; ব. '১৩]

13. যদি $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$ [সি. '০১]

14. যদি $\alpha + \beta + \gamma = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - 1.$ [রা. '০২, কু. '০৩]

(ii) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$

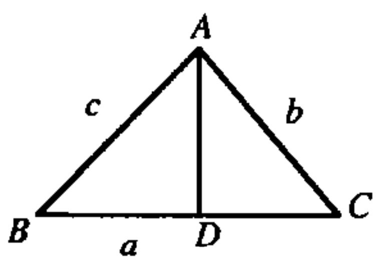
15. যদি $\alpha + \beta = \gamma$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$

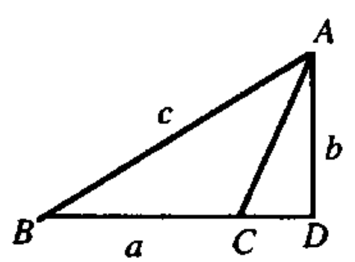
16. যদি $A + B + C = n\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$

17. যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $A = B = C.$ [ব. '০৭]

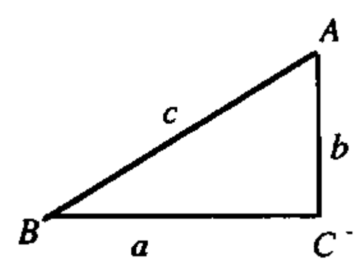
7.3. ত্রিভুজের সাইন সূত্র : ABC ত্রিভুজে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ [ঢা. '১৩; রা. '১২; কু. ব. '১০]



চিত্র 1



চিত্র 2



চিত্র 3

(a) ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (চিত্র 1)। শীর্ষ A থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

ABD ত্রিভুজ থেকে, $AD = c \sin B$, ACD ত্রিভুজ থেকে, $AD = b \sin C$

$\therefore c \sin B = b \sin C \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ...... (i)

অনুরূপভাবে, শীর্ষ B থেকে AC এর উপর লম্ব অঙ্কন করে পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ ...... (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

ABC ত্রিভুজের C কোণটি স্থূল (চিত্র 2)। শীর্ষ A থেকে BC এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

ABD ত্রিভুজ থেকে, $AD = c \sin B$

ACD ত্রিভুজ থেকে, $AD = b \sin (180° - C) = b \sin C$

$\therefore c \sin B = b \sin C \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

চিত্র 3 এর ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। শীর্ষ A থেকে BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলে তা AC এর সংজ্ঞে মিলে যাবে।

$\therefore AD = b = b \sin C$ [$\because C = 90°$]

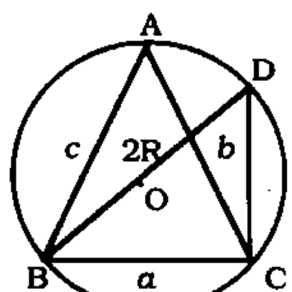
আবার, ABC ত্রিভুজ থেকে $AD = c \sin B$ $\therefore b \sin C = c \sin B \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

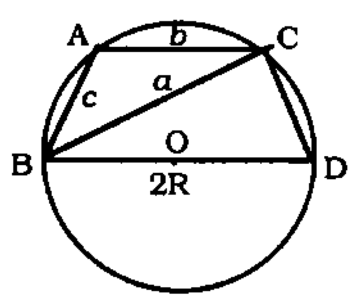
সুতরাং, যেকোনো ধরনের ABC ত্রিভুজ থেকে $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

(b) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, যখন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধের পরিমাণ R হয়। [রা. '০৮]

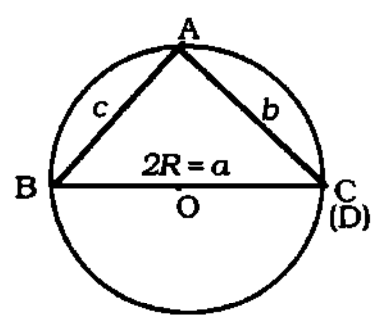
প্রমাণ :



প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র



তৃতীয় চিত্র

প্রথম চিত্রে $\angle A$ সূক্ষ্ম এবং দ্বিতীয় চিত্রে $\angle A$ স্থূল।

মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R.

প্রথম এবং দ্বিতীয় চিত্রে BO যোগ করে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন তা বৃত্তের পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D, C যোগ করি।

তৃতীয় চিত্রানুযায়ী, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং এক্ষেত্রে BD রেখা BC এর সঙ্গে মিলে যাবে।

এখন প্রথম এবং দ্বিতীয় চিত্র থেকে আমরা পাই

$$BD = 2R \text{ এবং } \angle BCD = 90°.$$

সুতরাং, BCD ত্রিভুজ থেকে $\sin \angle BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$ .... (i)

যেহেতু প্রথম চিত্রানুযায়ী, $\angle BDC = \angle A$ এবং দ্বিতীয় চিত্রানুযায়ী $\angle BDC = \pi - A$; অতএব, উভয়ক্ষেত্রে $\sin \angle BDC = \sin A$.

সুতরাং, (i) থেকে আমরা পাই $\sin A = \frac{a}{2R}$ বা, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

এখন তৃতীয় চিত্রানুযায়ী, $BD = a$ অর্থাৎ, $2R = a$ বা, $\frac{a}{1} = 2R$

অর্থাৎ, $\frac{a}{\sin 90°} = 2R$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$. সুতরাং, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

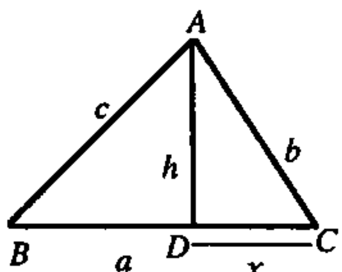
অনুরূপভাবে, A, O যোগ করে বর্ধিত করলে তা বৃত্তের পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করবে। এখন C, E এবং B, E যথাক্রমে যোগ করে দেখান যায় যে,

$\frac{b}{\sin B} = 2R$ এবং $\frac{c}{\sin C} = 2R$. অতএব, আমরা পাই $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

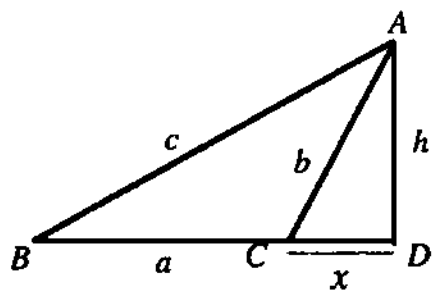
7.4. ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র : ABC ত্রিভুজে

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

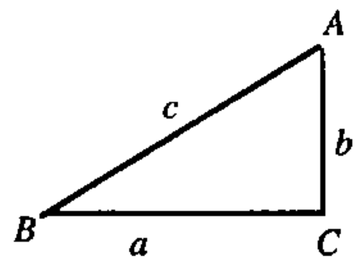
প্রমাণ :



k´go KY©



KÆfL~ KY©



চিত্র 3

BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করি [প্রথম চিত্র]। মনে করি, $CD = x$ এবং $AD = h$.

ADC ত্রিভুজ থেকে $h^2 = b^2 - x^2$

ADB ত্রিভুজ থেকে $h^2 = c^2 - (a - x)^2$

$\therefore b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ ...... (i)

আবার ACD ত্রিভুজ থেকে, $\frac{x}{b} = \cos C$ অর্থাৎ, $x = b \cos C$

$\therefore$ (i) থেকে আমরা পাই $b^2 = c^2 - a^2 + 2ab \cos C$. [x-এর মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করি [দ্বিতীয় চিত্র]। ADC ত্রিভুজ থেকে $h^2 = b^2 - x^2$

ADB ত্রিভুজ থেকে $h^2 = c^2 - (a + x)^2$

$\therefore b^2 - x^2 = c^2 - (a + x)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 - 2ax$ ...... (i)

আবার ACD ত্রিভুজ থেকে, $\frac{x}{b} = \cos (180° - C) = - \cos C$ অর্থাৎ, $x = - b \cos C$

$\therefore$ (i) থেকে $b^2 = c^2 - a^2 + 2ab \cos C$. [x-এর মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

মন্তব্য : যখন $C = 90°$, সূত্রটি হবে $c^2 = a^2 + b^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

অর্থাৎ, $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C \therefore \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

সুতরাং, যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ থেকে $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

অনুরূপভাবে, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ এবং $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ সূত্র দুইটি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

7.4.1. যে কোন ত্রিভুজ ABC–এ প্রমাণ কর :

$$a = b \cos C + c \cos B, \qquad b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

প্রমাণ : অনুচ্ছেদ 7.4 এর চিত্রগুলি লক্ষ করি।

যদি C একটি সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে ১ম চিত্রানুযায়ী,

$$BC = BD + DC = AB \cos \angle ABD + AC \cos \angle ACD \quad \therefore a = c \cos B + b \cos C.$$

যদি C একটি স্থূলকোণ হয়, তবে ২য় চিত্রানুযায়ী,

$$BC = BD - CD = AB \cos \angle ABD - AC \cos \angle ACD$$
$$= c \cos B - b \cos (\pi - C) = c \cos B + b \cos C \quad \therefore a = c \cos B + b \cos C.$$

আবার C একটি সমকোণ হলে, ৩য় চিত্রানুযায়ী,

$$BC = AB \cos B, \ \therefore a = c \cos B = c \cos B + b \cos C. \ [\because \cos C = \cos 90° = 0]$$

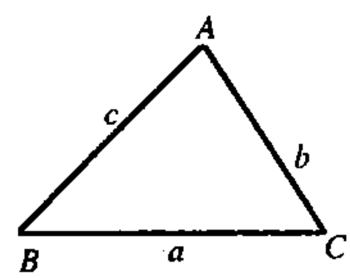
সুতরাং, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $a = b \cos C + c \cos B$.

অনুরূপভাবে, অন্যান্য সম্পর্কও গঠন করা যায়।

7.4.2. যেকোনো ত্রিভুজ ABC–এ

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}, \ \tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}, \ \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2},$$

প্রমাণ : যে কোন ত্রিভুজ ABC–এ



$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ [ত্রিভুজ সূত্র থেকে] বা, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

$$\therefore \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{b-c}{b+c} = \cot \frac{B+C}{2} \tan \frac{B-C}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2} \quad [\because A + B + C = \pi]$$

$$\therefore \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে অন্য দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

7.4.3. $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ অনুপাতগুলিকে ত্রিভুজের বাহুর পরিমাপে প্রকাশ করা

(i) আমরা জানি, $2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

যদি ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেককে s দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে

$2s = a+b+c$

এখন $a-b+c = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b)$ এবং

$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c)$.

সুতরাং, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}$

বা, $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$, $\therefore\ \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

[$\because$ ত্রিভুজের যে কোন কোণ $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, $\therefore \frac{A}{2} < 90°$, অর্থাৎ $\sin\frac{A}{2}$ এর মান ধনাত্মক]

(ii) আমরা জানি $2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc}$$

$\therefore\ 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s.\,2(s-a)}{2bc}$ অর্থাৎ, $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$, $\therefore\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

(iii) আবার $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

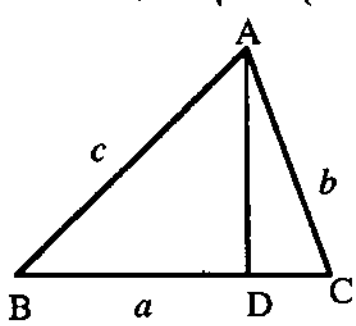
অনুরূপভাবে, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ ইত্যাদির মান ত্রিভুজের বাহুর পরিমাপে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং, আমরা পাই

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

7.4.3. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফলকে Δ দ্বারা সূচিত করা হল। BC বাহুর উপর লম্ব, AD অঙ্কন করি।



তাহলে, ACD ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই

$AD = AC\ \sin\angle ACD = b\ \sin C.$

এখন জ্যামিতি থেকে আমরা জানি, $\Delta = \frac{1}{2}BC.\,AD\ \therefore\ \Delta = \frac{1}{2}a.b\ \sin C = \frac{1}{2}ab\ \sin C.$

আবার যেহেতু ABC ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই $AD = c \sin B$, $\therefore \Delta = \frac{1}{2} ca \sin B$.

অনুরূপভাবে, B বিন্দু থেকে AC এর উপর লম্ব অঙ্কন করে দেখান যায় যে, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$.

সুতরাং, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$.

অর্থাৎ, $\Delta = \frac{1}{2} \times$ (দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফল) $\times$ (এদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন অনুপাত)।

আবার $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc . 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$= bc . \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} . \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$ [অনুচ্ছেদ 6.6 অনুযায়ী]

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

উপরোক্ত সম্পর্কে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ স্থাপন করে আমরা পাই

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$= \frac{1}{4} \{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\}^{1/2}.$$

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c) \sin^2 \frac{A}{2}$.

সমাধান ঃ বা, প, $= a \cos B + a \cos C = (c - b \cos A) + (b - c \cos A)$ [অনুচ্ছেদ 6.5 অনুযায়ী]

$$= (b+c) - (b+c) \cos A = (b+c)(1 - \cos A) = (b+c). 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 2(b+c) \sin^2 \frac{A}{2}.$$

উদাহরণ 2. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2} = s^2$.

সমাধান ঃ বামপক্ষ $= bc . \frac{s(s-a)}{bc} + ca . \frac{s(s-b)}{ca} + ab . \frac{s(s-c)}{ab} = s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)$

$$= 3s^2 - s(a+b+c) = 3s^2 - 2s^2 = s^2. \ [\because 2s = a+b+c]$$

উদাহরণ 3. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2-c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2} \sin 2C = 0$.

সমাধান ঃ বাম পক্ষের ১ম পদ $= \frac{b^2-c^2}{a^2} . \sin 2A = \frac{4R^2 \sin^2 B - 4R^2 \sin^2 C}{4R^2 \sin^2 A} . 2 \sin A \cos A$

$$= \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A} . 2 \cos A = \frac{\sin (B+C) \sin (B-C)}{\sin A} . 2 \cos A$$

$$= 2 \sin (B-C) \cos A \ [\because \sin (B+C) = \sin A]$$

$$= -2 \sin (B-C) \cos (B+C) [\because \cos A = -\cos (B+C)]$$

$$= -(\sin 2B - \sin 2C) = \sin 2C - \sin 2B$$

অনুরূপভাবে, ২য় পদ $= \sin 2A - \sin 2C$ এবং ৩য় পদ $= \sin 2B - \sin 2A$.

এখন তিনটি পদ যোগ করলে বাম পক্ষ $= 0$.

উদাহরণ 4. যদি একটি ত্রিভুজে $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $C = 45°$ বা, $135°$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2a^2 + 2b^2c^2$

বা, $a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$ বা, $(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}ab$ বা, $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos C = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\cos 45° = \cos 45°$, বা $\cos(180° - 45°)$ $\therefore C = 45°$ বা, $135°$.

প্রশ্নমালা 7.7

ABC ত্রিভুজ থেকে প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1 – 22)

1. $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$.

2. $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$. [দি. '০৯; কু. '১৩]

3. $\cos(B - C) + \cos A = \dfrac{bc}{2R^2}$.

4. $a\sin\left(\dfrac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\dfrac{A}{2}$. [য. ঢা. '১০; চ. সি.'১১]

5. $\cos C - \cos B = 2\left(\dfrac{b-c}{a}\right)\cos^2\dfrac{A}{2}$. [দি. '১০; ঢা. '১১]

6. যে কোন ত্রিভুজ *ABC* এ $\angle A = 60°$ হলে, দেখাও যে $b + c = 2a\cos\dfrac{B-C}{2}$. [ঢা. '১০; কু. '১১]

7. $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$. [সি. '০৭]

8. $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$.

9. $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$.

10. $\dfrac{(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

11. $\dfrac{\sin(B - C)}{\sin A} = \dfrac{b\cos C - c\cos B}{b\cos C + c\cos B}$.

12. $a\sin(B - C) + b\sin(C - A) + c\sin(A - B) = 0$.

13. $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2} + b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} + c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = 0$.

14. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\sin A$.

15. $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$.

16. $a^3\sin(B - C) + b^3\sin(C - A) + c^3\sin(A - B) = 0$.

17. $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$. [রা. '১৩]

18. $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$.

19. $c^2 = (a - b)^2\cos^2\dfrac{C}{2} + (a + b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}$. [কু. '০৯]

20. $(b - c)\cot\dfrac{A}{2} + (c - a)\cot\dfrac{B}{2} + (a - b)\cot\dfrac{C}{2} = 0$.

21. $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$.

22. $\frac{1}{a}\sin A + \frac{1}{b}\sin B + \frac{1}{c}\sin C = \frac{6\Delta}{abc}$.

23. (*a*) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c এবং $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ হলে, দেখাও যে, ABC ত্রিভুজে $C = 60°$. [ঢা. '১২; ব. চ. '১১]

(*b*) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c এবং $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর। [সি. '১০; দি. '১১]

(*c*) যদি $a = 2b$, এবং $A = 3B$ হয়, তবে ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। [কু. '১২]

24. যদি ABC ত্রিভুজে $A = 75°$, $B = 45°$ হয়, তবে দেখাও যে $c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

25. যদি ABC ত্রিভুজে $\cos A = \sin B - \cos C$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। [চ. '১২; ব. '১০; সি. '১১; কু. '১৩]

26. যদি একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে m, n এবং $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ হয়, তবে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর।

27. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাপ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি স্থূলকোণী। স্থূলকোণটি নির্ণয় কর। [কু. চ. '১০]

28. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাপ যথাক্রমে 13, 14 ও 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. '০৯]

প্রশ্নমালা 7.8

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. ক্যালকুলেটার ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর :

(*a*) $\cot 855°$ (*b*) $\sin 15°$ (*c*) $\frac{\sin 135° + \cot 830°}{\sec 600° + \text{cosec } 930°}$

2. (*a*) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ থেকে $\sin(A-B)$ নির্ণয় কর।

(*b*) $\cot 2\theta$ কে $\cot\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(*c*) $\sin 4A$ কে $\sin A$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

3. (*a*) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60° হলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত হবে $1 : \sqrt{3} : 2$.

(*b*) ABC ত্রিভুজে $a = 3$ cm., $b = 4$ cm,, $c = \sqrt{19}$ cm. হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর।

(*c*) একটি ত্রিভুজের বাহুগলি a, b, c এবং $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

4. নিচের কোন দুইটি সঠিক –

(a) $\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$; (b) $\cos(-\theta) = -\cos\theta$;

(c) $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$; (d) $\tan(360° - \theta) = \tan\theta$.

5. $\sin 50° + \sin 70° - \cos 80°$ এর মান –

(a) 1 (b) 0 (c) $\sin 10°$ (d) $\frac{1}{2}$.

6. $\tan 40° \tan 50° \tan 60°$ এর মান –

(a) $\tan 10°$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$.

7. $\sin 26° 20' \cos 63° 40' + \sin 153° 40' \sin 423° 40'$ এর মান –

(a) -1 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$.

8. $\tan 17° + \tan 28° + \tan 17° \tan 28° =$ কত?

(a) 1 (b) -1 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $\frac{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta} =$ কত?

(a) $\cos\theta$ (b) $\sin\theta$ (c) $\cot\theta$ (d) $-\cos\theta$.

10. $A \neq B$ এবং $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে, $A + B =$ কত?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$.

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 7.1

1. (i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, (ii) 1, (iii) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, (iv) $\sqrt{2}$, (v) $-\sqrt{3}$, (vi) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (vii) 2, (viii) 0, (ix) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $-\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3. (i) 0, (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) 1, (iv) $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\right)$.

5. $-\cos 25°$, (ii) $-\cot 24°$, (iii) $\cos 33°$, (iv) $\cot 26°$, (v) $-\operatorname{cosec} 23°$, (vi) $-\operatorname{cosec} 36°$.
6. (i) 2, (ii) 2, (iii) 2, (iv) 2. (u). 0.

প্রশ্নমালা 7.2

1. (i) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, (ii) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, (iii) $2 + \sqrt{3}$, (iv) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$, (v) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

2. (i) 1 এবং 0, (ii) $-\frac{278}{29}$ এবং $\frac{1}{2}$. (iii) $-\frac{85}{36}$. 3. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) 1.

21. (i) $\cos A \cos B \cos C (\tan A - \tan B - \tan C - \tan A \tan B \tan C)$;
এবং $\cos A \cos B \cos C (1 + \tan A \tan B + \tan B \tan C - \tan C \tan A)$.
(ii) $\frac{\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C}{\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B - 1}$.

প্রশ্নমালা 7.7

23. (*b*) 60°, (*c*) 90°, 30°, 60°. 26. 120°. 27. 120°. 28. 84 বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 7.8

1. (a) -1; (b) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; (c) $-\frac{1}{24}\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2. (a) $\sin A \cos B - \cos A \sin B$; (b) $\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$; (c) $4 \sin A (1 - 2\sin^2 A)\sqrt{1 - \sin^2 A}$.

3. (b) 77°.98; (c) 60°. 4. (a) ও (c). 5. (b). 6. b. 7. c. 8. a. 9. c. 10. c.

ব্যবহারিক

ত্রিভুজে তিনটি কোণ ও তিনটি বাহু আছে। এদের মধ্যে যেকোনো চারটি ত্রিকোণমিতিক সূত্রের সাহায্যে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। সুতরাং ত্রিভুজের তিনটি রাশি (তাদের মধ্যে কমপক্ষে একটি বাহু) জানা থাকলে সংশ্লিষ্ট সূত্রের সাহায্যে চতুর্থটি নির্দিষ্টভাবে নির্ণয় করা যায়। ত্রিভুজের তিনটি রাশির পরিমাপ (প্রদত্ত) ব্যবহার করে ত্রিভুজের অপর তিনটির পরিমাপ নির্ণয় করাকেই ত্রিভুজের সমাধান বোঝায়।

ত্রিভুজের যে তিনটি রাশির মান জানা থাকলে এর অপর রাশিগুলি নির্দিষ্টভাবে নির্ণয় করা সম্ভব তা শ্রেণিভুক্ত করে নিচে দেওয়া হলো :

(ক) তিনটি বাহু, অথবা

(খ) দুইটি বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ, অথবা

(গ) দুইটি কোণ ও একটি বাহু, অথবা

(ঘ) দুইটি বাহু ও এদের একটির বিপরীত কোণ।

7.5. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে

মনে করি, যেকোনো ত্রিভুজ, ABC এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c. এখন ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেককে s অর্থাৎ, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ধরলে, ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা পাই,

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$ এবং

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

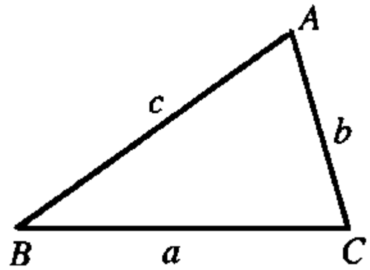
সূত্রগুলির যেকোনো একটি ব্যবহার করে A কোণের পরিমাপ নির্ণয় করা যায়।

অনুরূপ সূত্র থেকে B এবং C কোণদ্বয় নির্ণয় করা হয়।

সমস্যা নং 7.5	তারিখ : ....

সমস্যা : একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 9cm, 10 cm, 11cm. হলে, দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : মনে করি, $a = 9$ cm. $b = 10$ cm. এবং $c = 11$ cm. তাহলে, b এর বিপরীত কোণ B নির্ণয় করতে হবে। পর্যায়ক্রমে অনুচ্ছেদ 7.5 এ উল্লেখিত চারটি সূত্র এবং 'সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটার' ব্যবহার করে B এর মান নির্ণয় করি।



(a) প্রথম পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য থেকে $s = \frac{1}{2}(9 + 10 + 11)$ cm. = 15 cm. নির্ণয় করি।

2. সূত্রে a, b, c, s এর মান বসিয়ে

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(15-11)(15-9)}{11\times 9}} = \sqrt{\frac{4\times 6}{11\times 9}} = 0.492366$$

$\therefore \frac{B}{2} = 29°29'46''$ (প্রায়) বা, B = 58°59′32″ (প্রায়)।

ফল সংকলন :

a	b	c	s	দ্বিতীয় বাহু, b	$\sin\frac{B}{2}$	$\frac{B}{2}$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	15 cm.	10 cm.	0.492366	29°29′46″	58°59′32″

(b) দ্বিতীয় পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য থেকে $s = \frac{1}{2}(9 + 10 + 11)$ cm. = 15 cm. নির্ণয় করি।

2. সূত্রে a, b, c, s এর মান বসিয়ে

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{15(15-10)}{9\times 11}} = \sqrt{\frac{15\times 5}{9\times 11}} = 0.870388$$

$\therefore \frac{B}{2} = 29°29'46''$ (প্রায়) বা, $B = 58°59'32''$ (প্রায়)।

ফল সংকলন :

a	b	c	s	দ্বিতীয় বাহু, b	$\cos\frac{B}{2}$	$\frac{B}{2}$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	15 cm.	10 cm.	0.870388	29°29′46″	58°59′32″

(c) তৃতীয় পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য থেকে $s = \frac{9+10+11}{2}$ cm. = 15 cm. নির্ণয় করি।

2. সূত্রে a, b, c, s এর মান বসিয়ে $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(15-11)(15-9)}{15(15-10)}} = \sqrt{\frac{4\times 6}{15\times 5}} = 0.565685$

$\therefore \frac{B}{2} = 29°29'46''$ (প্রায়) বা, $B = 58°59'32''$ (প্রায়)

ফল সংকলন :

a	b	c	s	দ্বিতীয় বাহু, b	$\tan\frac{B}{2}$	$\frac{B}{2}$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	15 cm.	10 cm.	0.565685	29°29′46″	58°59′32″

(d) চতুর্থ পদ্ধতি :

তত্ত্ব : সূত্র $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

কার্যপদ্ধতি :

1. সূত্রে a, b, c এর মান বসিয়ে

$\cos B = \dfrac{11^2 + 9^2 - 10^2}{2 \times 11 \times 9} = \dfrac{121 + 81 - 100}{2 \times 11 \times 9} = 0.515151 \therefore B = 58°59'32''$ (প্রায়)।

a	b	c	$\cos B$	B
9 cm.	10 cm.	11 cm.	0.515151	58°59′32″

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজে $a = 74$ cm. $b = 26$ cm. $c = 60$ cm. হলে, $\angle A$ এর মান নির্ণয় কর।
উ : 112°37′12″(প্রায়)

2. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 5 cm., 6 cm. এবং 7 cm. হলে, ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।
উ : 78°27′48″(প্রায়)

3. একটি ত্রিভুজের বাহগুলি যথাক্রমে 24 cm., 19 cm. এবং 15 cm. হলে, ঐ ত্রিভুজের প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ নির্ণয় কর। উ : 88°59′42″(প্রায়)

4. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 56 cm, 65 cm. এবং 33 cm. হলে, ঐ ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণটি নির্ণয় কর। উ : 30°30′38″ (প্রায়)

7.6. ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ দেওয়া আছে

মনে করি, যেকোনো ত্রিভুজ, ABC এর তিনটি কোণ যথাক্রমে A, B, C. তাহলে, ত্রিভুজ সূত্র $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ অর্থাৎ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ থেকে $a : b : c$ নির্ণয় করা যায়।

সমস্যা নং 7.6	তারিখ : ....

সমস্যা : একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে 50°, 60°, 70° . বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অণুপাত $a : b : c$ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : সূত্র $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

অর্থাৎ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

কার্য পদ্ধতি :

1. $\sin 50° = 0.766$, $\sin 60° = 0.866$ এবং $\sin 70° = 0.940$ নির্নয় করি।

2. সূত্রে $\sin 50°$, $\sin 60°$, $\sin 70°$ এর মান বসিয়ে $a : b : c = 0.766 : 0.866 : 0.940$ নির্ণয় করি।

সুতরাং $a : b : c = 766 : 866 : 940 = 383 : 433 : 470.$

ফল সংকলন :

$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$	$a : b : c$
0.766	0.866	0.940	766 : 866 : 940 = 383 : 433 : 470

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে $70°, 80°, 30°$ হলে, $a : b : c$ নির্ণয় কর।
উ : 188 : 177 : 100.

2. একটি ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটি যথাক্রমে $95°$ ও $30°$. ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।
উ : 996 : 819 : 500.

3. ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}$ এবং $\frac{17\pi}{36}$ হলে, $a : b : c$ নির্ণয় কর।
উ : 707 : 766 : 996.

7.7. দুইটি কোণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে

আমরা জানি, $A + B + C = 180°$, যেখানে প্রদত্ত কোণদ্বয়ের মান বসিয়ে তৃতীয় কোণের মান বের করা যায়। এরপর $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্র প্রয়োগ করে অপর বাহুদ্বয়ের মান নির্ণয় করতে হবে।

সমস্যা নং 7.7	তারিখ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজে $a = 39$ cm., $A = 81°$ এবং $B = 27°$ হলে, ত্রিভুজটির অপর বাহুদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : সূত্র $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

কার্যপদ্ধতি :

1. $A + B + C = 180°$ থেকে $C = 180° - 81° - 27° = 72°$ নির্ণয় করি।
2. প্রদত্ত সূত্র থেকে $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ বা, $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{39 \sin 27°}{\sin 81°}$ [a, A, B এর মান বসিয়ে]
$\therefore b = 17.93$ cm. (প্রায়)।
3. আবার প্রদত্ত সূত্রে থেকে $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ বা, $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{39 \sin 72°}{\sin 81°}$ [a, C, A এর মান বসিয়ে]
$\therefore c = 37.55$ cm. (প্রায়)।

ফল সংকলন :

a	A	B	$C = 180° - A - B$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
39 cm.	81°	27°	72°	17.93 cm.	37.55 cm.

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজে $A = 38°20'$, $B = 45°$ এবং $b = 64$ cm. হলে, c এর মান নির্ণয় কর।
উ: 89.9 cm. (প্রায়)।

2. ABC ত্রিভুজে $B = 45°$, $C = 10°$ এবং $a = 200$ cm. হলে, b এর মান নির্ণয় কর।
উ: 172.64 cm. (প্রায়)।

3. ABC ত্রিভুজে $B = 70°30'$, $C = 78°10'$ এবং $a = 102$ cm. হলে, b ও c এর মান নির্ণয় কর।
উ: $b = 185$ cm. $c = 192$ cm.

4. ABC ত্রিভুজের $B = 52°28'$, $C = 93°40'$ এবং $a = 19$ সে.মি. হলে, অপর বাহুদ্বয় নির্ণয় কর।
উ: $b = 27.04$ সে.মি., $c = 34.02$ সে.মি.।

7.8.1. ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে

মনে করি, যে কোন ত্রিভুজ ABC এর দুইটি বাহু a, b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ C দেওয়া আছে। আমরা জানি, $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$. এ সূত্রে প্রদত্ত a, b, C এর মান বসিয়ে $(A-B)$ নির্ণয় করা যায়।

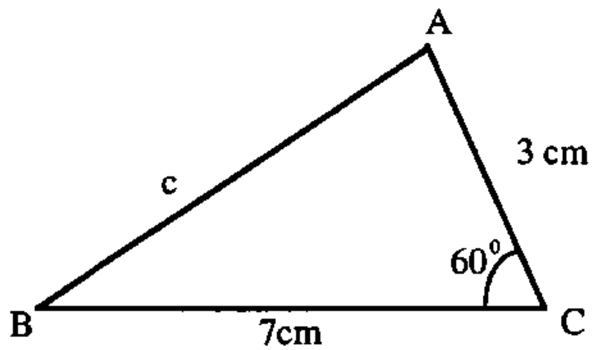
আবার $A + B + C = 180°$. যা থেকে $A + B$ নির্ণয় করা যায় [$\because \angle C$ দেওয়া আছে]। এরপর সমাধান করে A ও B এর মান নির্ণয় করা হয়।

সমস্যা নং 7.8.1	তারিখ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজে $a = 7$ cm., $b = 3$ cm. এবং $C = 60°$ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : সূত্র $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$.



কার্যপদ্ধতি :

1. সূত্রে a, b এবং C এর মান বসিয়ে

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{7-3}{7+3}\cot 30° = \frac{4}{10\tan 30°} = 0.692820$$

$$\therefore \frac{A-B}{2} = 34°.42'54'' \text{ বা, } \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 34°.42'54'' \text{ .... (i)}$$

2. যেহেতু $A + B + C = 180°$, সুতরাং $A + B + 60° = 180°$ বা, $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 60°$ ....(ii)

3. (i) এবং (ii) সমাধান করে, $A = 94°42'54''$, $B = 25°.17'6''$.

ফল সংকলন :

a	b	$\angle C$	$\frac{A}{2} - \frac{B}{2}$	$\frac{A}{2} + \frac{B}{2}$	$\angle A$	$\angle B$
7 cm.	3 cm.	60°	34°.42′54″	60°	94°.42′54″	25°.17′6″

শ্রেণির কাজ :

1. ABC ত্রিভুজে $a = 100$ cm., $b = 80$ cm. এবং $C = 60°$ হলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর।
   উ : $A = 70°53'36''$, $B = 49°6'24''$, $c = 91.5$ cm.
2. ABC ত্রিভুজে $b = 9$ cm., $c = 6$ cm. এবং $A = 60°$ হলে, B এবং C এর মান নির্ণয় কর।
   উ : $B = 79°6'24''$, $C = 40°53'36''$.
3. ABC ত্রিভুজে $a = 21$, $b = 11$ এবং $C = 34°42'30''$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।
   উ : $A = 117°38'44''$, $B = 27°38'46''$.

7.8.2. দুইটি বাহু এবং তাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে

মনে করি, ABC ত্রিভুজের b, c এবং B দেওয়া আছে। তাহলে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ থেকে ত্রিভুজের অপর রাশিগুলো নির্ণয় করা যায়।

সমস্যা নং 7.8.2	তারিখ :

সমস্যা : ABC ত্রিভুজে $b = 16$ cm., $c = 25$ cm. এবং $B = 33^\circ$ হলে, C এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান :

তত্ত্ব : সূত্র $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত তথ্য সূত্রে বসিয়ে $\frac{16}{\sin 33^\circ} = \frac{25}{\sin C}$

বা, $\sin C = \frac{25 \sin 33^\circ}{16} = 0.850998$

$\therefore C = 58^\circ 19' 13''$ (প্রায়)।

2. আমরা পাই $\sin C = \sin 58^\circ 19' 13'' = \sin(180^\circ - 58^\circ 19' 13'')$

সুতরাং, $C = 58^\circ 19' 13''$ বা, $121^\circ 40' 47''$.

যেহেতু $c > b$ (প্রদত্ত), $\therefore C > B$. সুতরাং, C এর উভয় মানই গ্রহণযোগ্য।

ফল সংকলন : $C = 58^\circ 19' 13''$ বা, $121^\circ 40' 47''$.

মন্তব্য : সূত্র থেকে আমরা পাই $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$

(i) যদি $c \sin B > b$ হয়, তবে ডানপক্ষের মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হবে। যেহেতু $\sin C$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না, সুতরাং এক্ষেত্রে C এর সমাধান পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ প্রদত্ত তথ্য নিয়ে কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

(ii) যদি $c \sin B = b$ হয়, তবে C এর মান 90° হবে। অর্থাৎ, ত্রিভুজটি হবে সমকোণী।

(iii) যদি $c \sin B < b$ হয়, এবং $b < c$ হয়, তবে C এর জন্য প্রাপ্ত স্থূলকোণটি গ্রহণযোগ্য হবে না।

(iv) যদি $c \sin B < b$ হয়, এবং $b < c$ হয়, তবে C এর জন্য প্রাপ্ত উভয় মানই গ্রহণযোগ্য। এক্ষেত্রে ত্রিভুজ সমাধানে দ্ব্যর্থক্ষেত্র (ambiguous case) বলা হয়।

শ্রেণির কাজ :

1. যদি ABC ত্রিভুজে $A = 30^\circ$, $a = 4$ cm, $b = 8$ cm. হয়, তাহলে C এর মান নির্ণয় কর। উঃ 60°.

2. যদি ABC ত্রিভুজে $a = 5$ cm., $b = 4$ cm. এবং $A = 45^\circ$ হয়, তাহলে ত্রিভুজটির অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। উঃ $B = 34^\circ 26' 58''$, $C = 100^\circ 33' 2''$,

3. ABC ত্রিভুজে $a = 9$ cm., $b = 12$ cm. এবং $A = 30^\circ$ হলে, C এর মান নির্ণয় কর।
উঃ $11^\circ 48' 36''$, $C = 108^\circ 11' 24''$,