অষ্টম অধ্যায়

স্থিতিবিদ্যা

Statics

পদার্থ বিজ্ঞানের (Physical science) একটি শাখা হিসেবে বলবিদ্যাকে সংজ্ঞায়িত করা হয় যা বস্তুর স্থিতি বা গতির ধর্ম নিয়ে আলোচনা করে। যেকোনো পেশাগত ও কারিগরি সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে বিজ্ঞানের এ শাখার জুড়ি মেলা ভার। বলবিদ্যার শাখা হিসেবে স্থিতিবিদ্যাও এর ব্যতিক্রম নয়। স্থিতিবিদ্যা হচ্ছে Rigid body mechanics এর অংশ যা বস্তুর ভারসাম্য, সাম্যাবস্থা ও বস্তুর অবস্থানের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করে। জ্যামিতির প্রায়োগিক জ্ঞান ও বলের মূলনীতির ওপর ভিত্তি করে স্থিতিবিদ্যার মূলনীতি প্রণীত হয়। প্রাচীনকাল হতেই স্থিতিবিদ্যার ব্যবহার চলে আসছে। পারিপার্শ্বিক বস্তুর সাপেক্ষে কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন না হলে তাকে স্থিতিশীল বলা হয়।

স্থিতিবিদ্যায় বলের ক্রিয়াবিদ্যা, ক্রিয়ারেখা, ক্রিয়ার মান ও দিক সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণার প্রয়োজন। এছাড়া টান, আকর্ষণ, বিকর্ষণ, প্রতিক্রিয়া, ঘর্ষণ, ওজন, লম্বিবল ইত্যাদি সম্পর্কে জ্ঞাত থাকতে হয়। সমগ্র স্থিতিবিদ্যার চারটি ভিত্তি হলো বলসমূহের নিরপেক্ষতার সূত্র, বল স্থানান্তরিত-করণের সূত্র, ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সূত্র এবং বলের সামান্তরিক সূত্র।

প্রাচীন গ্রিসে দুইটি ভিন্ন বিষয়বস্তু উদঘাটনের ক্ষেত্রে স্থিতিবিদ্যার অবতারণা হয়। প্রথমটি হয়েছে লিভার, হেলানো তল ও এর ভারসাম্য এবং অপরটি হচ্ছে পরিবেশে বিদ্যমান বস্তুর স্থির ধর্মের ব্যাখ্যা। প্রাচীনকালেই মানুষ পাথর ছোঁড়া, তীর নিক্ষেপ ও লিভারের ব্যবহারে স্থিতিবিদ্যার মূলনীতি ব্যবহার করে। প্রাচীন বিজ্ঞানী হিপোক্রাস, টলেমি, আর্কিমিডিস ও এরিস্টটলের হাত ধরেই স্থিতিবিদ্যার প্রায়োগিক শাখার উৎপত্তি। আধুনিক বিজ্ঞানীদের মধ্যে ষষ্ঠদশ শতাব্দীতে ডাচ্ গণিতবিদ সাইমন স্টেভিন (1548-1620) বলের ত্রিভুজ সূত্র প্রকাশ করে এর সাথে সামান্তরিক সূত্রের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করেন। পরবর্তীতে ফরাসি গণিতবিদ ও ধর্মতত্ত্ববিদ বার্নার্ড লামি (1640-1715) সামান্তরিক সূত্রের ওপর কাজ করে স্থিতিবিদ্যাকে আধুনিক শাখা হিসেবে প্রতিষ্ঠা করেন। বর্তমানে বড় বড় দালান, সেতু, অত্যাধুনিক শক্তিশালী বোমা ও মেশিনারী যন্ত্রপাতি তৈরিতে স্থিতিবিদ্যার মূলনীতির অবদান অনস্বীকার্য।

নাম	: স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Isaac Newton)
জন্ম	: ৪ জানুয়ারি, ১৬৪৩
অবদান	: গণিত, পদার্থবিজ্ঞান, জ্যোর্তিবিজ্ঞান এবং দর্শন
আবিষ্কার	: নিউটনীয় বলবিজ্ঞান, সর্বজনীন মহাকর্ষ, ক্যালকুলাস, আলোকবিজ্ঞান, দ্বিপদী উপপাদ্য, ফিলোসফিসা ন্যাচারালিস প্রিন্সিপিয়া ম্যাথামেটিকা, বলের মৌলিক ধর্মাবলী ও সামান্তরিক সূত্র আবিষ্কার করেন।
অর্জন	: ১৬৭২ সালে লন্ডনের রয়েল সোসাইটি কর্তৃক প্রদত্ত ফেলোশিপ (FRS) অর্জন করেন। ১৭০৫ সালে নাইট ব্যাচেলর উপাধি পান।
মৃত্যু	: ৩১ মার্চ, ১৭২৭

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- বলবিদ্যার প্রাথমিক ধারণাসমূহ বর্ণনা করতে পারবে।
- বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তরবিধি বর্ণনা করতে পারবে।
- বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কোনো কণার উপর কার্যরত দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবে এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবে।
- নির্দিষ্ট দিকে একটি বলের অংশক নির্ণয় করতে পারবে।
- লম্বাংশকের সাহায্যে কোনো কণার উপর কার্যরত সমতলীয় বলজোটের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবে।
- কোনো কণার উপর কার্যরত বলজোটের সাম্যাবস্থা কী তা বর্ণনা করতে পারবে।
- কোনো কণার উপর কার্যরত তিনটি বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্র বর্ণনা, প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- কোনো কণার উপর কার্যরত তিনটি বলের সাম্যাবস্থার লামির সূত্র বর্ণনা, প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- কোনো কণার উপর কার্যরত সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত নির্ণয় করতে পারবে।
- প্রযোজ্য ক্ষেত্রে জড়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- লেখের সাহায্যে একাধিক বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ ও ২ : বলবিদ্যার প্রাথমিক ধারণা, বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তরবিধি, বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া, দুইটি বলের লব্ধি।
- পাঠ-৩ ও ৪ : বলের অংশক, বলজোটের লব্ধি।
- পাঠ-৫ : উদাহরণমালা।
- পাঠ-৬ ও ৭ : অনুশীলনী-৪(A)
- পাঠ-৮ ও ৯ : বলজোটের সাম্যাবস্থা, সাম্যাবস্থায় ত্রিভুজ সূত্র, সাম্যাবস্থার লামির উপপাদ্য, সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত।
- পাঠ-১০ ও ১১: উদাহরণমালা, অনুশীলনী-৪(B)
- পাঠ-১২ : জড়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বলের লব্ধি।
- পাঠ-১৩ ও ১৪ : উদাহরণমালা, অনুশীলনী-৪(C)
- পাঠ-১৫ ও ১৬ : ব্যবহারিক।

পাঠ-১ ও ২

8.1 বলবিদ্যার প্রাথমিক ধারণা (Elementary Ideas of Mechanics)

'বলবিদ্যা' শব্দটির বিশ্লেষণ করলে এর অর্থ দাঁড়ায়-বল সংশ্লিষ্ট জ্ঞান। সুতরাং বলবিদ্যা অধ্যয়ন করলে, বল কি, তার প্রকারভেদ এবং প্রয়োগ সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জন সম্ভব। আমরা জানি প্রয়োজন, উদ্দীপনা ও উৎসাহ এই তিনটি বিষয়ের কারণেই মানুষ নতুন নতুন আবিষ্কার করে চলেছে। বর্তমান এই আধুনিক বিশ্বের অতি সহজসাধ্য দুইটি শব্দ হচ্ছে, বস্তুর স্থিতি ও গতি, এই শব্দযুগল সম্পর্কে গাণিতিক ধারণা পাওয়ার জন্য 'বল' সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন অত্যাবশ্যক।

বস্তুর স্থিতি ও গতি: যদি সময়ের পরিবর্তনে কোনো বস্তু তার পারিপার্শ্বিক বস্তুসমূহের সাপেক্ষে অবস্থান পরিবর্তন না করে তবে বস্তুটিকে স্থিতিশীল বা **স্থির বস্তু** এবং বস্তুর অবস্থাকে **স্থিতি অবস্থা** বলা হয়।

আর যদি পারিপার্শ্বিক বস্তুসমূহের সাপেক্ষে অবস্থান পরিবর্তন করে তবে ঐ বস্তুটিকে **গতিশীল বস্তু** এবং তার অবস্থাকে **গতিশীল অবস্থা** বলা হয়।

দার্শনিক ও বিজ্ঞানীদের মতে, 'বিশ্বব্রহ্মান্ডের কোনো বস্তুই স্থির নয়'। কেননা সৌরজগতের প্রতিটি গ্রহ ও নক্ষত্রই গতিশীল। তাহলে স্থিতির প্রসঙ্গ কেন আসছে, এ বিষয়টি স্পষ্টভাবে বোঝানোর জন্য নিম্নের উদাহরণ দেওয়া হলো:

ক্লাসে পাঠদানের সময় শিক্ষক চেয়ারে বসে শিক্ষার্থীদের জিজ্ঞেস করলেন, আমি স্থির না গতিশীল এর সঠিক উত্তর কী হবে? সঠিক উত্তর হলো— 'গতিশীল'। কারণ, যে পৃথিবীতে দাঁড়িয়ে শিক্ষক পাঠদান করছেন সেই পৃথিবী প্রচণ্ড বেগে সূর্যের চতুর্দিকে এবং নিজ অক্ষের চতুর্দিকে পরিভ্রমণ করছে। কিন্তু যদি প্রশ্নটি এমন হতো, 'আমি তোমাদের সাপেক্ষে স্থির না গতিশীল?' তাহলে সঠিক উত্তর হতো 'স্থির'। অর্থাৎ বস্তুর স্থিতি অবস্থা ও গতিশীল অবস্থা একটি আপেক্ষিক বিষয় যা Theory of Relativity নামে পদার্থবিদ্যা ও ফলিত গণিতের উচ্চতর শ্রেণিতে পাঠ্য বিষয় হিসেবে অন্তর্ভুক্ত।

আমরা বস্তুটিকে স্থির বা গতিশীল বলার জন্য অবশ্যই পারিপার্শ্বিক বা চতুর্দিকে অবস্থিত বস্তুর সাপেক্ষেই বিবেচনা করব। কারণ ব্যবহারিক জীবনে এটি আমাদের সর্বদা প্রয়োজন, অর্থাৎ এর গুরুত্ব অপরিসীম।

বল (Force): যা কোনো স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তাকে গতিশীল করে বা করতে চায় এবং কোনো গতিশীল বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তার গতির পরিবর্তন করে বা করতে চায় তাকে **বল** বলা হয়।

যেমন: একটি ফুটবল একজন খেলোয়াড় হতে অন্য খেলোয়াড়ের নিকট এমনিতেই যায় না। ফুটবলের উপর বল প্রয়োগের ফলেই সেটা ঘটে। আবার গোল করার লক্ষ্যে ফুটবলটি ছুড়ে দিলে গোলকিপার তা ধরে ফেলে এক্ষেত্রেও তাকে বল প্রয়োগ করতে হয়েছে।

বলবিদ্যা (Mechanics): যে শাস্ত্রে কোনো বস্তুর স্থিতি বা গতিশীল অবস্থা সম্পর্কে আলোচনা করা হয় তাকে বলবিদ্যা বলা হয়। বলবিদ্যা দুইটি অংশে বিভক্ত। যথা: (i) স্থিতি বিদ্যা, (ii) গতিবিদ্যা।

স্থিতিবিদ্যা (Statics): বলবিদ্যার যে শাখায় স্থিতিশীল বস্তুর উপর কার্যরত বল সম্পর্কিত আলোচনা করা হয় তাকে স্থিতিবিদ্যা বলা হয়।

গতিবিদ্যা (Dynamics): বলবিদ্যার যে শাখায় গতিশীল বস্তুর উপর কার্যরত বল সম্পর্কিত আলোচনা করা হয় তাকে গতিবিদ্যা বলা হয়।

8.2 বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তর বিধি (Transmissibility of point of application of force)

একটি বল কোনো জড়বস্তুর কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করলে যে ফলাফল পাওয়া যায় বস্তুর ওপর অবস্থিত ঐ বলের ক্রিয়া রেখার অপর যে কোনো বিন্দুতে একই ক্রিয়ারেখা বরাবর বলটিকে প্রয়োগ করা হলেও একই ফলাফল পাওয়া যাবে।

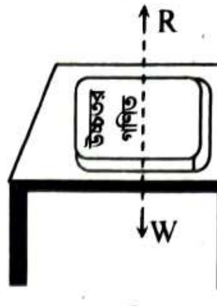
মনে করি, **F** বলটি কোনো জড় বস্তুর A বিন্দুতে AX রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। AX রেখার উপর জড় বস্তুর ওপর একটি বিন্দু B নিই। এখন B তে BA এবং BX বরাবর দুইটি সমান বল **F** প্রয়োগ করি। সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগের ফলে বস্তুটির অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

এখন A বিন্দুতে AB বরাবর কার্যরত **F** বল এবং B বিন্দুতে BA বরাবর কার্যরত **F** বল পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী হওয়ায় তারা একে অপরকে নিষ্ক্রিয় করবে।

সুতরাং বস্তুটির উপর একমাত্র কার্যরত বল হলো B বিন্দুতে BX বরাবর ক্রিয়ারত **F** বল। এই বলটি A বিন্দুতে AX বরাবর ক্রিয়ারত **F** বলের সমান। অতএব বলের ক্রিয়াবিন্দু বলের কার্যরেখার যেকোনো বিন্দুতে ধরা যায়।

8.3 বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া (Action and Reaction of Forces)

যখন কোনো বস্তু অপর একটি বস্তুর উপর ঠেস (বা হেলান) দেওয়া অথবা একটি বস্তু অপর কোনো বস্তুর উপর রাখা হয় অথবা একটি বস্তু যখন অপর একটি বস্তুকে আঘাত করে তখন বস্তুদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দুতে উভয় বস্তুর উপরই একটি করে বল ক্রিয়া করে। প্রথম বস্তুটি দ্বিতীয় বস্তুর উপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে **ক্রিয়া** এবং দ্বিতীয় বস্তুটি প্রথম বস্তুর উপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে **প্রতিক্রিয়া** বলা হয়।



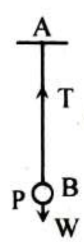
নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে, ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী।
ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া আরও স্পষ্টভাবে বোঝার জন্য পাশের চিত্রটি লক্ষ করি:

একটি টেবিলের উপর একটি বই রাখা আছে। এখানে বইটি টেবিলের উপর যে বল প্রয়োগ করেছে ঠিক সমপরিমাণ বল টেবিলও বই এর উপর প্রয়োগ করেছে। বই দ্বারা টেবিলে যে বল প্রয়োগ হয়েছে তাকে ক্রিয়া এবং টেবিল দ্বারা বইয়ের যে বল প্রয়োগ হয়েছে তাকে **প্রতিক্রিয়া** বলা হয়। এখানে উভয় বলই বই ও টেবিলের সাথে পরস্পর লম্ব।

8.3.1 বিভিন্ন প্রকারের বল (Different kinds of forces)

উৎস বা প্রয়োগ ক্ষেত্রের উপর ভিত্তি করে বলকে বিভিন্ন নামে নামকরণ করা হয়েছে। যেমন:

টান (Tension): কোনো বস্তুকে একটি সরু রশি বা তার দ্বারা টানা হলে ঐ রশি বা তার বরাবর বস্তুটির উপর যে বল ক্রিয়া করে তাকে **টান** বলা হয়।



চিত্রে W ওজনের একটি বস্তু P সুতা দিয়ে বেঁধে সুস্থিত রাখা হয়েছে। এখানে, BA বরাবর সুতার টান, T ক্রিয়াশীল থেকে P বস্তুটিকে ঝুলিয়ে রাখতে সাহায্য করে।

চাপ (Pressure): যখন একটি বস্তুকে অপর একটি বস্তুর উপর রাখা হয়, তখন প্রথম বস্তুটি দ্বিতীয় বস্তুর উপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে **চাপ** বলা হয়।

ঠেলা (Thrust): অনেক সময় দেখা যায় বাস (বা অন্য কোনো গাড়ী) কোনো স্থানে রাখা ছিল, এখন স্টার্ট দেওয়ার সময় স্টার্ট নিচ্ছে না। এমতাবস্থায় বাসটিকে কতকগুলি লোক বল প্রয়োগে সামনে বা পিছনে সরানোর চেষ্টা করে এবং গড়ালেই ড্রাইভার স্টার্ট করতে সক্ষম হন। এই ক্ষেত্রে যে বল প্রয়োগে গাড়ীকে গড়ানো হয় তাকে **ঠেলা** বা ধাক্কা বলা হয়।

ঘর্ষণ (Friction): একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর উপর দিয়ে (স্পর্শ করে) চলতে গেলে বাধাপ্রাপ্ত হয়। যেমন- তুমি যদি একটি ফুটবলে শট দাও তবে তা কিছুক্ষণ ভূমিতে গড়ানোর পরে থেমে যাবে। ফুটবলটি নিশ্চয়ই কোনো বাধার কারণে থেমে গেছে। এখানে ভূমির স্পর্শে গড়ানোর কারণে যে বল বাধা হিসেবে কাজ করে তাকে **ঘর্ষণ** বল বা সংক্ষেপে ঘর্ষণ এবং যে বিন্দুতে স্পর্শ করে ঐ বিন্দুকে ঘর্ষণ বিন্দু বলা হয়।

আকর্ষণ (Attraction): বাহ্যিক কোনো বল (যেমন- চাপ, ঠেলা, ধাক্কা) প্রয়োগ ব্যতিরেকে একে অপরকে স্পর্শ করেনি এরূপ দুইটি বস্তু যে বলের ক্রিয়ার কারণে একে অপরের দিকে অথবা যে কোনো একটি অপরটির দিকে অগ্রসর হয় বা হওয়ার প্রবণতা সৃষ্টি হয় তাকে **আকর্ষণ** বল বা সংক্ষেপে আকর্ষণ বলে। যেমন, একটি লৌহ খণ্ড চুম্বকের আকর্ষণে চুম্বকের দিকে অগ্রসর হয়, পৃথিবীর আকর্ষণে বৃন্তচ্যুত ফল মাটিতে পড়ে।

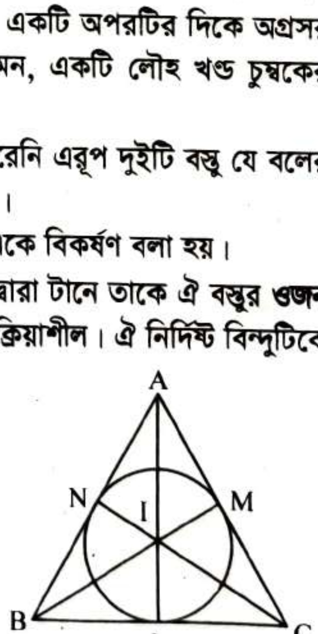
বিকর্ষণ (Repulsion): বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ ব্যতিরেকে একে অপরকে স্পর্শ করেনি এরূপ দুইটি বস্তু যে বলের ক্রিয়ার ফলে একটি অন্যটি থেকে সরে যায়, তাকে **বিকর্ষণ** বল বা সংক্ষেপে বিকর্ষণ বলে।

চুম্বকের সমজাতীয় দুই মেরু কাছাকাছি আনলে চুম্বকদ্বয় পরস্পর হতে দূরে সরে যাবে। একে বিকর্ষণ বলা হয়।

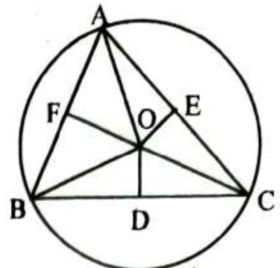
ওজন (Weight): কোনো বস্তুকে পৃথিবী তার কেন্দ্রের দিকে যে পরিমাণ আকর্ষণ বল দ্বারা টানে তাকে ঐ **বস্তুর ওজন** বলা হয়। বস্তুর ওজন সর্বদা বস্তুর ওপরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াশীল। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বস্তুর ভারকেন্দ্র (Centre of gravity) বলা হয়।

বলবিদ্যায় ব্যবহৃত কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা:

(i) অন্তঃকেন্দ্র (Incentre): ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **অন্তঃকেন্দ্র** বলা হয়। অন্তঃকেন্দ্র হলো ত্রিভুজে অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I। কেননা IA, IB, IC যথাক্রমে A, B ও C কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

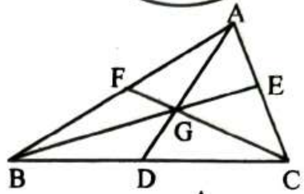


(ii) পরিকেন্দ্র (Circumcentre): ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** বলা হয়। পরিকেন্দ্র হলো ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

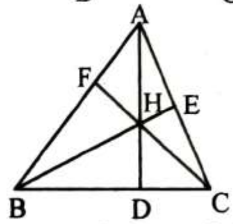


ΔABC-এর পরিকেন্দ্র O; A, B, C বিন্দু হতে সমদূরবর্তী। $OA = OB = OC$ এবং OD, OE, OF যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুত্রয়ের লম্বদ্বিখণ্ডক।

(iii) ভরকেন্দ্র (Centroid): কোনো ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** বলা হয়। ভরকেন্দ্র প্রতিটি মধ্যমাকেই 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। চিত্রে, G ভরকেন্দ্র; AD, BE ও CF মধ্যমা।

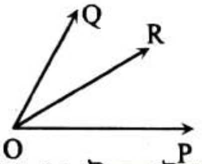


(iv) লম্বকেন্দ্র (Orthocentre): কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুই হলো **লম্বকেন্দ্র**।
চিত্রে, ΔABC এর লম্বকেন্দ্র H.



8.4 দুইটি বলের লব্ধি (Resultant of two forces)

একই সময়ে কোনো বস্তুকণার উপর দুইটি বল প্রযুক্ত হলে, এই বলদ্বয়ের সম্মিলিত ক্রিয়াফল যদি বস্তুকণাটির উপর নির্দিষ্ট দিকে একটি মাত্র বলের ক্রিয়াফলের সমান হয়, তবে ঐ একটি মাত্র বলকে প্রযুক্ত বল দুইটির লব্ধি বল বলে।
চিত্রে O একটি বস্তুকণা এবং O তে ক্রিয়ারত দুইটি বল **P** ও **Q** এর সম্মিলিত ক্রিয়াফল অপর বল **R** এর সমান হলে, **R** বলকে **P** ও **Q** বল দুইটির লব্ধি বল বলে। এখানে $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$

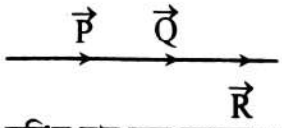


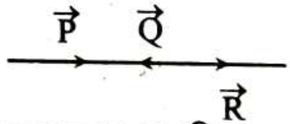
বাস্তব পরিচয়: দুর্ঘটনাবশত একটি রেলগাড়ী (ট্রেন) লাইনচ্যুত হয়ে পার্শ্বে পড়ে আছে। এই গাড়ীখানা লাইনের উপরে উঠানোর জন্য কোনো রিলিফ ট্রেনের দুইটি ক্রেন একত্রে ব্যবহার করতে হয়। কিন্তু অন্য আর একটি রিলিফ ট্রেন আছে যার একটি ক্রেন ব্যবহার করেই ঐ রেলগাড়ীটি লাইনের উপরে উঠানো যায়। এখানে পূর্বোক্ত ক্রেন দুইটির লব্ধি বল হলো পরবর্তী একটি ক্রেনের বল।

কাজ: দুইটি বলের লব্ধি বলের মান কখন শূন্য হয়, এরকম কয়েকটি উদাহরণ দাও।

8.4.1 দুইটি বলের লব্ধির মান ও দিক (Magnitude and direction of resultant of two forces)

একই সরলরেখায় একই দিকে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান হবে বলদ্বয়ের সমষ্টির সমান এবং দিক হবে বলদ্বয়ের দিক বরাবর।

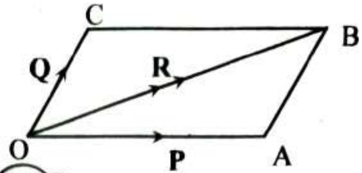




আবার একই সরলরেখায় বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান হবে বলদ্বয়ের অন্তরের সমান এবং দিক হবে বৃহত্তর বলের দিক বরাবর।
১ম চিত্রানুসারে, **P** ও **Q** বলদ্বয়ের লব্ধি **R** হলে $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$ এবং দিক হবে প্রদত্ত **P** ও **Q** এর দিকে।
২য় চিত্রানুসারে, **P** ও **Q** বলদ্বয়ের লব্ধি **R** এবং $\mathbf{P} > \mathbf{Q}$ হলে, $\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ এবং **R** এর দিক হবে **P** এর দিকে।
আবার, $\mathbf{Q} > \mathbf{P}$ হলে, $\mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ এবং **R** এর দিক হবে **Q** এর দিকে।
কোনো বস্তুর একটি বিন্দুতে দুইটি বল একই সময়ে ভিন্ন ভিন্ন দিকে ক্রিয়াশীল হলে, তাদের লব্ধি "বলের সামান্তরিক সূত্রের" দ্বারা নির্ণয় করা হয়।

8.4.2 বলের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram law of forces) [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ১২, ০৭; দি: বো: ১৩; কু: বো: ১১, ০৯, ০৭; চ: বো: ১৫, ১৩, ০৮; সি: বো: ১১, ০৭; য: বো: ০৯, ০৬; ব: বো: ১৫, ১২; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]

বর্ণনা (Statement): যদি কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান ও দিক সূচিত হয় তবে তাদের লব্ধির মান ও দিক সামান্তরিকের উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।



ব্যাখ্যা: মনে করি, OABC সামান্তরিকের O বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বল **P** ও **Q** যথাক্রমে সন্নিহিত বাহু OA ও OC দ্বারা সূচিত।

অর্থাৎ ভেক্টর সূচকে প্রকাশ করলে $\overrightarrow{OA} = \mathbf{P}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \mathbf{Q}$
এখানে **P** ও **Q** উভয়েই ভেক্টর রাশি। সুতরাং ভেক্টর যোজনের সামান্তরিক বিধি অনুসারে তাদের যোগফল বা লব্ধি সামান্তরিক OABC এর কর্ণ OB দ্বারা সূচিত হবে। ধরি, **P** ও **Q** এর লব্ধি **R**; তাহলে **R** এর মান ও দিক কর্ণ OB দ্বারা সূচিত হবে।

ভেক্টর সূচকে প্রকাশ করলে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ অর্থাৎ $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R}$

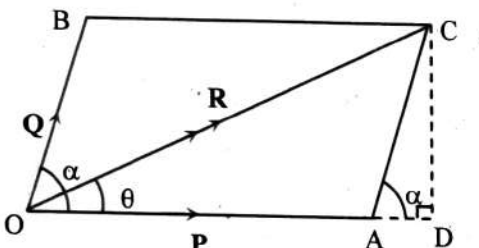
জেনে রাখো

বিখ্যাত বৃটিশ বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন ১৬৮৭ সালে বলের সামান্তরিক সূত্রটি বর্তমান আকারে লিপিবদ্ধ করেন।

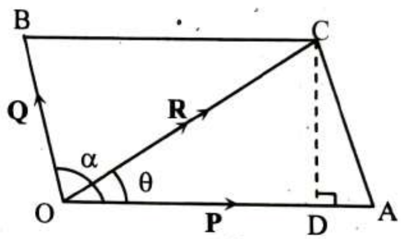
8.4.3 পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়

[রা: বো: ১৬, ১২, ০৭; দি: বো: ১৩; কু: বো: ১১, ০৯, ০৭; চ: বো: ১৫, ১৩, ০৮; সি: বো: ১১, ০৭; য: বো: ০৯, ০৬; ব: বো: ১৫, ১২; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১২, ১০]

মনে করি, O বিন্দুতে একটি কণার উপর একই সময়ে α কোণে দুইটি বল **P** ও **Q** ক্রিয়াশীল। OA এবং OB রেখাংশ দ্বারা যথাক্রমে **P** ও **Q** বলের মান ও দিক সূচিত করা হলো। এখানে $\angle AOB = \alpha$, OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি। ধরি **P** ও **Q** বল দুইটির লব্ধি বল **R** এবং এই বলটি **P** বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OC কর্ণটি **R** এর মান ও দিক নির্দেশ করে।



১ম চিত্র



২য় চিত্র

১ম চিত্রানুসারে, OA এর বর্ধিতাংশ এর উপর CD লম্ব অঙ্কন করি,

তাহলে ΔADC হতে, $\cos CAD = \dfrac{AD}{AC}$ বা, $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AC}$ $[\because AC \parallel OB]$

বা, $AD = Q\cos\alpha$ $[\because Q = OB = AC]$

$\sin CAD = \sin\alpha = \dfrac{CD}{AC}$ বা, $CD = Q\sin\alpha$ এবং $OD = OA + AD = P + Q\cos\alpha$

২য় চিত্রানুসারে, OA এর উপর CD লম্ব অঙ্কন করি।

ΔACD হতে, $\cos CAD = \dfrac{AD}{AC}$ বা, $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AD}{AC}$ বা, $AD = -Q\cos\alpha$

$\sin CAD = \dfrac{CD}{AC}$ বা, $CD = Q\sin\alpha$ এবং $OD = OA - AD = P + Q\cos\alpha$

এখন উভয় চিত্রের ক্ষেত্রেই, ΔOCD হতে পাই, $OC^2 = OD^2 + CD^2$

বা, $R^2 = (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$
$= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$, যা লব্ধির মান।

আবার, P ও R বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ অর্থাৎ $\angle COD = \theta$

সুতরাং ΔOCD হতে পাই, $\tan\theta = \dfrac{CD}{OD} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ যা লব্ধির দিক নির্দেশ করে।

বিকল্প পদ্ধতি (ভেক্টর পদ্ধতি): এখানে **P**, **Q** ও **R** বল তিনটির প্রত্যেকেই ভেক্টর এবং যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা সূচিত।

সুতরাং ΔOAC হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ বা, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\therefore \mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$ ...... (i)

বা, $\mathbf{R}.\mathbf{R} = (\mathbf{P}+\mathbf{Q}).(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = \mathbf{P}.\mathbf{P} + 2\mathbf{P}.\mathbf{Q} + \mathbf{Q}.\mathbf{Q}$

বা, $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$ $\therefore$ লব্ধির মান $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

আবার, $\mathbf{P}.\mathbf{R} = \mathbf{P}.(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = \mathbf{P}.\mathbf{P} + \mathbf{P}.\mathbf{Q} = P^2 + PQ\cos\alpha$ [(i) নং দ্বারা]

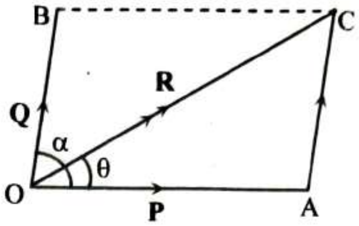
বা, $PR\cos\theta = P^2 + PQ\cos\alpha$

বা, $R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$ ...... (ii)

এবং $\mathbf{P}\times\mathbf{R} = \mathbf{P}\times(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = \mathbf{P}\times\mathbf{P} + \mathbf{P}\times\mathbf{Q} = \mathbf{0} + \mathbf{P}\times\mathbf{Q}$

বা, $\hat{n}PR\sin\theta = \hat{n}PQ\sin\alpha$ [$\because \mathbf{P}\times\mathbf{P} = \mathbf{0}$]

বা, $R\sin\theta = Q\sin\alpha$ ...... (iii)



সমীকরণ (ii) ও (iii) হতে পাই, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$, যা লব্ধির দিক নির্দেশ করে।

দ্রষ্টব্য: $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ সূত্রটি কেবলমাত্র $P + Q\cos\alpha \neq 0$ এর জন্য প্রযোজ্য।

8.4.3.1 কয়েকটি প্রয়োজনীয় অনুসিদ্ধান্ত

অনুসিদ্ধান্ত-1: যখন P ও Q বলদ্বয় সমান ও একই রেখার বিপরীতমুখী; এ ক্ষেত্রে $\alpha = 180°$ এবং

$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos180° = 2P^2 - 2P^2 = 0$ [$\because P = Q$] $\therefore R = 0$

সুতরাং একই সরলরেখার একই বিন্দুতে বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি শূন্য (0)। অর্থাৎ বলদ্বয়ের কোনো প্রভাব বস্তুকণার ওপর পড়ে না। এ অবস্থাকে সাম্যাবস্থা (Equilibrium position) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত-2: যখন P ও Q বলদ্বয় একই রেখায় ক্রিয়াশীল (মান সমান বা অসমান উভয় ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য); এক্ষেত্রে দুই ধরনের অবস্থা হতে পারে, একটি হল তাদের দিক একই অপরটি হল দিক ভিন্ন।

প্রথমত: P ও Q এর দিক একই হলে, $\alpha = 0°$ এবং $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos0°} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = P + Q$

সুতরাং কোনো বিন্দুতে একই রেখায় একই দিকে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি উক্ত বলদ্বয়ের সমষ্টির সমান এবং এটাই বৃহত্তম লব্ধি।

দ্বিতীয়ত: P ও Q এর দিক বিপরীত হলে, $\alpha = 180°$ এবং $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos180°}$

$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = (P - Q)$; যখন $P > Q$

সুতরাং কোনো বিন্দুতে একই রেখায় বিপরীত দিকে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি উক্ত বলদ্বয়ের অন্তরের সমান এবং এটাই ক্ষুদ্রতম লব্ধি।

$P > Q$ হলে $R = P - Q$ এবং $P < Q$ হলে $R = Q - P$ অর্থাৎ R এর দিক হবে বড়টির দিকে।

অনুসিদ্ধান্ত-3: $P \perp Q$ অর্থাৎ P ও Q সমকোণে ক্রিয়ারত হলে, $\alpha = 90°$

এক্ষেত্রে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos90°} = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$

অনুসিদ্ধান্ত-4: P ও Q সমান হলে,

$$R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha} = \sqrt{2P^2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{এবং } \tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$$

সুতরাং কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

অনুসিদ্ধান্ত-5. দুটি বলের মান একই হারে বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে তাদের লব্ধির দিকের কোন পরিবর্তন হয় না:

ধরি, P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

এখন, P ও Q বলদ্বয়কে একই হারে 'a' গুণ করা হল এবং লব্ধি aP বলের সাথে θ_1 কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে $\theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{a\,Q\sin\alpha}{aP + aQ\cos\alpha}$

$$= \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \theta$$

অর্থাৎ লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে।

বি:দ্র: উভয়ক্ষেত্রেই P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপরিবর্তিত বিবেচনা করা হয়েছে।

উদাহরণ-1. 7 ও 8 কিলোগ্রাম ওজনের দুইটি বলের লব্ধি 13 কিলোগ্রাম হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, 7 কেজি ও 8 কেজি ওজনের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore 13^2 = 7^2 + 8^2 + 2.7.8\cos\alpha$ বা, $169 = 49 + 64 + 112\cos\alpha$

বা, $169 - 113 = 112\cos\alpha$ বা, $56 = 112\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{56}{112} = \dfrac{1}{2} = \cos 60° \quad \therefore \alpha = 60°$

মনে করি, লব্ধি 7 কিলোগ্রাম ওজনের ক্রিয়া রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan\theta = \frac{8\sin 60°}{7 + 8\cos 60°} = \frac{8.\frac{\sqrt{3}}{2}}{7 + 8.\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{11}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{11}\right)$$

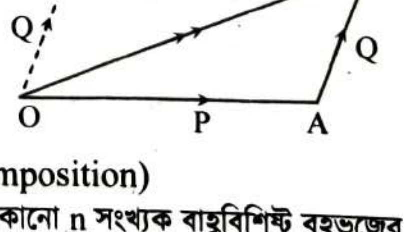
কাজ:
1. দেখাও যে, **(a)** বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ যত বাড়ে লব্ধির মান তত হ্রাস পায়। **(b)** লব্ধি বল সর্বদাই বৃহত্তর বলের দিকে বেশি হেলানো থাকে।
2. P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধির মান P হলে, বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।
3. দুইটি বল পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়ারত থাকলে লব্ধি $2\sqrt{10}$ N। আবার এরা 120° কোণে কার্যরত থাকলে এদের লব্ধি $2\sqrt{7}$ N। বলদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।

8.4.4 বল সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle law of forces of composition)

বর্ণনা: একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান ও দিক কোনো ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা সূচিত হলে, বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক ত্রিভুজটির বিপরীত ক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু দ্বারা সূচিত হবে।

প্রমাণ: মনে করি, একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q এর মান ও দিক যথাক্রমে OAB ত্রিভুজের OA ও AB বাহু দ্বারা সূচিত। OB কে কর্ণ ধরে, OABC সামান্তরিক অঙ্কন করি।

যেহেতু AB || OC, সুতরাং OC বাহু দ্বারা সূচিত বলটিও Q হবে। এখন বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে OA ও OC বাহু দুইটি দ্বারা সূচিত বলদ্বয়ের লব্ধি সামান্তরিকের কর্ণ OB দ্বারা সূচিত হবে।

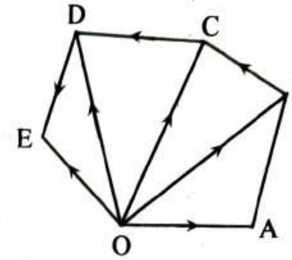


ভেক্টরের সাহায্যে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ বা, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

8.4.5 বল সংযোজনের বহুভুজ সূত্র (Polygon law of forces of composition)

বর্ণনা: একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত (n – 1) সংখ্যক বলের মান ও দিক কোনো n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের একই ক্রমে গৃহীত (n – 1) সংখ্যক বাহু দ্বারা সূচিত হলে, বলগুলির লব্ধির মান ও দিক ঐ বহুভুজের বিপরীতক্রমে গৃহীত অবশিষ্ট n তম বাহু দ্বারা সূচিত হবে।

প্রমাণ: মনে করি, একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল পাঁচটি বলের মান ও দিক যথাক্রমে OABCDE ষড়ভুজের একই ক্রমে গৃহীত OA, AB, BC, CD ও DE বাহুগুলি দ্বারা সূচিত। এখন বল সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ …… (i)



এবং ΔOBC হতে পাই, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ …… (ii)

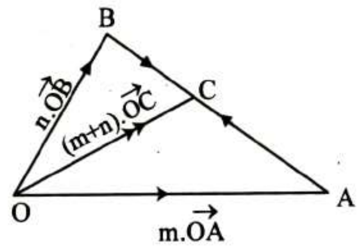
(i) ও (ii) হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ বা, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

একইভাবে ত্রিভুজ সূত্রটি প্রয়োগ করলে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$

অর্থাৎ ষড়ভুজের একই ক্রমে গৃহীত পাঁচটি বাহু দ্বারা বলগুলি সূচিত হলে বলগুলির লব্ধির মান ও দিক ষড়ভুজটির বিপরীতক্রমে গৃহীত অবশিষ্ট ষষ্ঠতম বাহু দ্বারা সূচিত হয়। একই উপায়ে যে কোনো বহুভুজের জন্য সূত্রটি প্রমাণ করা যায়।

8.4.6 (m, n) উপপাদ্য: যদি $m.\overrightarrow{OA}$ এবং $n.\overrightarrow{OB}$ দুইটি বল যথাক্রমে OA এবং OB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং C বিন্দু AB কে এমনভাবে বিভক্ত করে যেন $AC : BC = n : m$ বা, $m.AC = n.BC$ হয় তবে উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি $(m + n).\overrightarrow{OC}$ হবে।

প্রমাণ: মনে করি, $m.\overrightarrow{OA}$ এবং $n.\overrightarrow{OB}$ দুইটি বল যথাক্রমে OA এবং OB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। AB যোগ করি এবং ইহার উপর C বিন্দুকে এমনভাবে স্থাপন করি যেন $m.AC = n.BC$ হয়। OC যোগ করি।



ভেক্টর প্রতীকে, ΔOAC হইতে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore m.\overrightarrow{OA} + m.\overrightarrow{AC} = m.\overrightarrow{OC}$ …… (i)

আবার, ΔOBC হইতে,

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \quad \therefore n.\overrightarrow{OB} + n.\overrightarrow{BC} = n.\overrightarrow{OC}$ …… (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

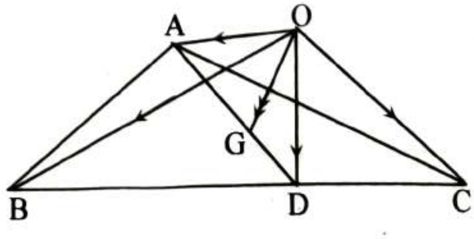
$m.\overrightarrow{OA} + n.\overrightarrow{OB} + m.\overrightarrow{AC} + n.\overrightarrow{BC} = (m + n).\overrightarrow{OC}$

কিন্তু $m.\overrightarrow{AC}$ এবং $n.\overrightarrow{BC}$ বলদ্বয় পরস্পর সমান, বিপরীতমুখী ও একই সরলরেখায় ক্রিয়া করে বলে এরা একে অপরকে নিষ্ক্রিয় করে। অর্থাৎ $m.\overrightarrow{OA} + n.\overrightarrow{OB} = (m + n).\overrightarrow{OC}$ সুতরাং $m.\overrightarrow{OA}$ এবং $n.\overrightarrow{OB}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $(m + n).\overrightarrow{OC}$।

অনুসিদ্ধান্ত-2. $m = n = 1$ হলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$, যেখানে C বিন্দুটি হলো AB রেখার মধ্যবিন্দু।

উদাহরণ-2: যদি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হয়, তবে দেখাও যে, O বিন্দুতে কার্যরত $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ বলত্রয়ের লব্ধি $3.\overrightarrow{OG}$ হবে।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের সমতলে O যেকোনো একটি বিন্দু। O, A; O, B; O, C ও O, D যোগ করি। AD মধ্যমা। $\therefore$ D বিন্দুটি BC এর মধ্যবিন্দু।



(m, n) উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2.\overrightarrow{OD}$

বা, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OD}$

বা, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 1.\overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OD}$

$= (1 + 2)\overrightarrow{OG}$ [(m, n) উপপাদ্য]

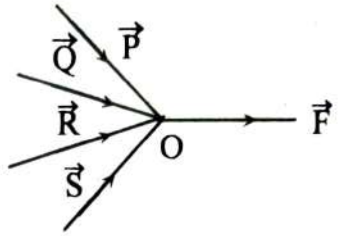
$= 3.\overrightarrow{OG}$ [$\because AG : DG = 2 : 1$]

পাঠ-৩ ও ৪

8.5 বলের অংশক বা উপাংশ (Component of forces)

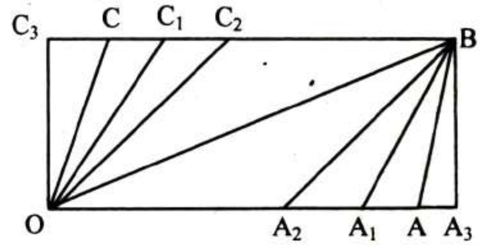
কোনো বস্তুকণার ওপর একাধিক বল প্রযুক্ত হওয়ার ফলে যে প্রভাব পড়ে যদি কোনো একটি বল প্রয়োগ করলেও ঐ একই প্রভাব পড়ে, তবে প্রথমোক্ত একাধিক বলগুলির প্রত্যেককে পরের ঐ একটি বলের অংশক বলে।

যেমন: মনে করি, **P, Q, R** ও **S** এই চারটি বল একটি বস্তুকণা O তে ক্রিয়া করে এবং তাদের সম্মিলিত ক্রিয়াফল অপর একটি বল $\vec{F}$ এর ক্রিয়ার সমান। তাহলে **P, Q, R** ও **S** কে **F** বলের অংশক বলা হয়।



8.5.1 বল বিভাজন (বা বিশ্লেষণ) (Resolution of forces)

একটি বলকে দুই বা ততোধিক বলে বিভক্ত করাকে বলের বিভাজন বলে। বলের বিভাজনের একটি সুনির্দিষ্ট বর্ণনা নিম্নে দেওয়া হলো:



বলের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী (8.4.2), আমরা জানি, কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের একটি মাত্র লব্ধি থাকে এবং বলদ্বয়কে ধারণকারী রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে একটি সামান্তরিক অংকন করা যায়, যার কর্ণ দ্বারা লব্ধি বলটি সূচিত।

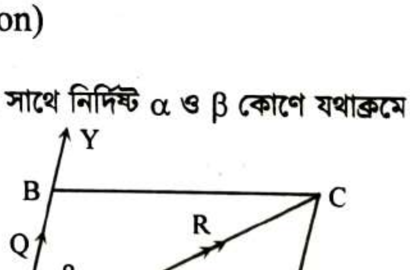
কিন্তু লব্ধি নির্দেশক কর্ণের উভয় পার্শ্বে নির্দিষ্ট কোণে আনত জোড়া জোড়া সন্নিহিত বাহু ধরে অসংখ্য সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়। প্রত্যেক জোড়া সন্নিহিত বাহু হবে ঐ সামান্তরিকের কর্ণে যে বলটি উপস্থিত তার অংশক বা উপাংশ অর্থাৎ লব্ধি বলের অংশক। যেহেতু কর্ণ একটি, কিন্তু সামান্তরিক অসংখ্য অঙ্কন করা সম্ভব, কাজেই একটি বলকে বিভাজন করলে অসংখ্য অংশক বা উপাংশ পাওয়া যায়।

চিত্রে $OABC$, OA_1BC_1, OA_2BC_2 এবং OA_3BC_3 প্রত্যেকেই OB কর্ণবিশিষ্ট সামান্তরিক।
OB কর্ণ দ্বারা সূচিত বলটির বিভিন্ন অংশক বা উপাংশ দেখানো হয়েছে।

8.5.2 একটি নির্দিষ্ট দিকে কোনো বলের অংশক বা উপাংশ নির্ণয়
(Determination of components of a forces in a fixed direction)

অথবা, বলের সাইন সূত্র (Sine Law of forces)

মনে করি, একটি বল R যা OC রেখাংশ দ্বারা সূচিত। OC এর উভয় পার্শ্বে তার সাথে নির্দিষ্ট α ও β কোণে যথাক্রমে OX ও OY সরলরেখাদ্বয় অবস্থিত।



তাহলে $\angle COX = \alpha$ এবং $\angle COY = \beta$

এখন C থেকে OX এর উপর CA এবং OY এর উপর CB সরলরেখাংশ টানি যেন $AC \parallel OY$ এবং $BC \parallel OX$ হয়। তাহলে OACB একটি সামান্তরিক এবং OC এর একটি কর্ণ।

সুতরাং R বলটির অংশক OA ও OB বরাবর পাওয়া যাবে।

ধরি, OA এবং OB দ্বারা যথাক্রমে P ও Q বল সূচিত। এখন ΔOAC হতে সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC} \text{ বা, } \frac{OA}{\sin BOC} = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin\{\pi - (\alpha + \beta)\}}$$

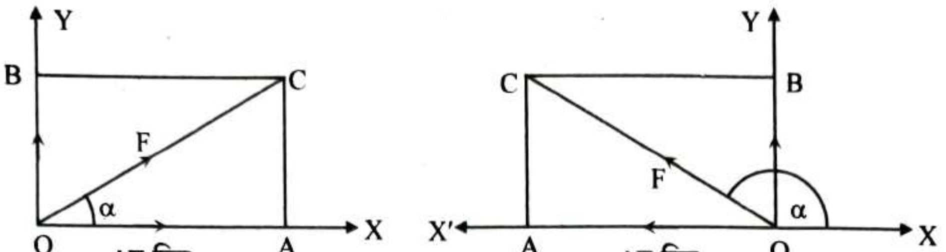
$$\therefore \frac{P}{\sin \beta} = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \begin{bmatrix} \because OB \parallel AC \\ \because OB = AC = Q \end{bmatrix}$$

অতএব অংশকদ্বয় ও তাদের লব্ধি বলের প্রত্যেকেই, একটি অপর দুইটির মধ্যবর্তী কোণের সাইনের সমানুপাতিক। **এই সূত্রটি বলের সাইন সূত্র হিসেবে পরিচিত।**

কাজ: এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q দুইটি বল, এদের লব্ধি R বলের উভয় দিকে পরস্পর 30° ও 60° কোণে আনত। বলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

৪.৫.৩ বলের লম্বাংশ (Resolved parts of forces)

কোন নির্দিষ্ট বলকে যদি পরস্পর লম্ব দুটি রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল দুটি বলের অংশে বিভক্ত করা হয় তবে অংশ দুটির প্রতিটি ঐ নির্দিষ্ট বলের লম্বাংশ।



১ম চিত্র ২য় চিত্র

মনে করি, OX ও OY পরস্পর দুইটি লম্ব সরলরেখা এবং OX এর সাথে α কোণে আনত একটি সরলরেখা OC, যা একটি নির্দিষ্ট বল F-কে সূচিত করে। এখানে OX বা OX′ হল অনুভূমিক রেখা এবং OY হল উল্লম্ব রেখা।
C থেকে OX (বা OX′) এর উপর CA এবং OY এর উপর CB লম্ব আঁকি। তাহলে OACB একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হয়। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে F বলের লম্বাংশদ্বয় যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত হবে।

১ম চিত্রানুসারে, $\cos COA = \dfrac{OA}{OC}$

বা, $OA = OC\cos\alpha = F\cos\alpha$

$\sin COA = \dfrac{AC}{OC}$

বা, $AC = OC\sin\alpha$

বা, $OB = F\sin\alpha$

সুতরাং X-অক্ষের সাথে α কোণে আনত বলের লম্বাংশদ্বয় যথাক্রমে $F\cos\alpha$ ও $F\sin\alpha$

দ্বিতীয় চিত্রানুসারে, $\cos COA = \dfrac{OA}{OC}$

বা, $OA = OC\cos(180° - \alpha) = -F\cos\alpha$

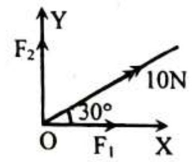
$\sin COA = \dfrac{AC}{OC}$

বা, $AC = OC\sin(180° - \alpha)$

বা, $OB = F\sin\alpha$

সুতরাং X′-অক্ষের (X-অক্ষের ঋণাত্মক দিক) সাথে $180° - \alpha$ কোণে আনত বলের লম্বাংশদ্বয় যথাক্রমে $-F\cos\alpha$ ও $F\sin\alpha$

উদাহরণ-3. চিত্র থেকে পরস্পর লম্ব দিকে 10N বলের আনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ নির্ণয় কর।

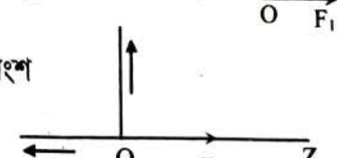


সমাধান: মনে করি, 10N বলের আনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশ যথাক্রমে F_1 ও F_2

$F_1 = 10\cos30° = 10.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ N, $F_2 = 10\sin30° = 10 \times \dfrac{1}{2} = 5$N

কাজ: মান নির্ণয় কর:

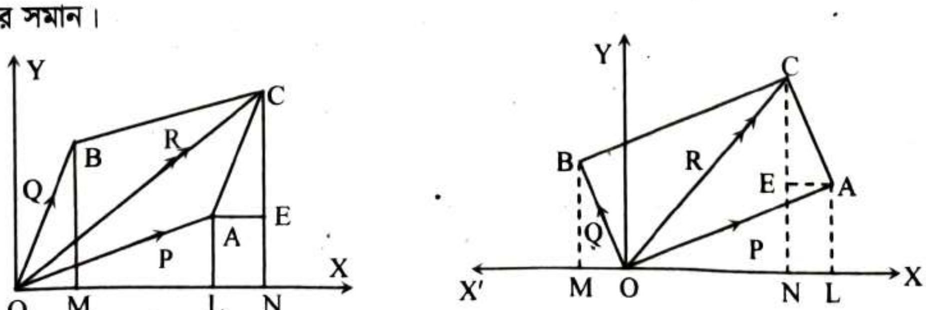
(i) OZ বরাবর F এর লম্বাংশ **(ii)** ZO বরাবর F এর লম্বাংশ
(iii) OZ এর উপর লম্ব বরাবর F এর লম্বাংশ



৪.৫.৪ লম্বাংশ উপপাদ্য (Theorem on Resolved parts)

[ঢা: বো: ১১, ০৭; রা: বো: ১০, ০৫; দি: বো: ১১, ০৯; চ: বো: ১২, ০৯, ০৭; সি: বো: ১২, ০৯, ০৬; য: বো: ১৬, ১৫, ১৩, ১১, ০৭; ব: বো: ১৬, ০৯, ০৬; কুঃ বোঃ ১৬, ১৫]

বর্ণনা: কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের কোনো নির্দিষ্ট দিকের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ বলদ্বয়ের লব্ধির একই দিকে লম্বাংশের সমান।

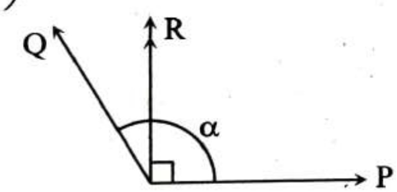


১ম চিত্র ২য় চিত্র

প্রমাণ: মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটি যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত। তাহলে OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি R সূচিত হবে।
ধরি, OX রেখাটি নির্দিষ্ট দিক নির্দেশ করে, অর্থাৎ OX বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নির্ণয় করতে হবে।
A, B ও C বিন্দু থেকে OX বা OX' (২য় চিত্রে) এর ওপর যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে OX বরাবর P, Q এবং R বলের লম্বাংশ যথাক্রমে OL, OM এবং ON হবে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $OL + OM = ON$
এখন A হতে CN এর উপর AE লম্ব অংকন করি।
ΔACE ও ΔOBM সর্বসম। কারণ ΔOBM ও ΔACE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $OB = AC$ সামান্তরিকের বিপরীতবাহু বলে, অনুরূপ কোণ $\angle BOM = \angle CAE$. $\therefore OM = AE = LN$
১ম চিত্রে, OX বরাবর সকল লম্বাংশগুলিই ধনাত্মক কিন্তু ২য় চিত্রে, Q এর লম্বাংশ ঋণাত্মক যা '−OM' এর সমান।
সুতরাং ১ম চিত্রানুসারে, OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি $= OL + OM$
$= OL + LN = ON$, যা, OX বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ।
২য় চিত্রানুসারে, OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি $= OL - OM = OL - LN = ON$, যা OX বরাবর লব্ধি R এর লম্বাংশ।
অতএব কোনো নির্দিষ্ট দিকে দুইটি বলের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।
দ্রষ্টব্য: (i) যদি P, Q ও তাদের লব্ধি R, OX এর সাথে যথাক্রমে α, β ও θ কোণ উৎপন্ন করে তবে উপরোক্ত সূত্রানুসারে, $P\cos\alpha + Q\cos\beta = R\cos\theta$ পাওয়া যাবে।
(ii) একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুই এর অধিক সংখ্যক একতলীয় বলের ক্ষেত্রেও এই উপপাদ্যটি সত্য।
বিশেষ দ্রষ্টব্য: P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে, $R = \sqrt{Q^2 - P^2}$ এবং বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ

$\cos^{-1}\left(\frac{-P}{Q}\right)$; যেখানে $P < Q$

প্রমাণ:

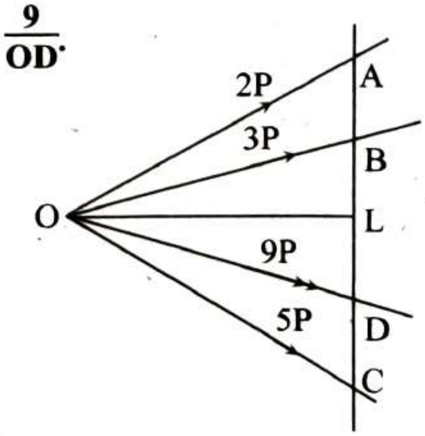


মনে করি, P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α। P ও R এর অন্তর্গত কোণ 90°।
P বরাবর লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$P\cos0° + Q\cos\alpha = R\cos90°$ বা, $P + Q\cos\alpha = 0$ বা, $Q\cos\alpha = -P$ বা, $\cos\alpha = -\frac{P}{Q}$ $\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$

এবং লব্ধি $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P(-P))} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2P^2} = \sqrt{Q^2 - P^2}$

উদাহরণ-4. O বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2P, 3P, 5P বলগুলির লব্ধি 9P, যদি কোন ছেদক এদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে দেখাও যে, $\frac{2}{OA} + \frac{3}{OB} + \frac{5}{OC} = \frac{9}{OD}$.



সমাধান: মনে করি, O বিন্দু হতে OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে 2P, 3P, 5P মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি 9P, OD বরাবর ক্রিয়া করে। AD ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু থেকে AD ছেদকের ওপর OL লম্ব টানি। OL বরাবর 2P, 3P, 5P বলগুলির লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।
এখন OL বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,
$2P\cos AOL + 3P\cos BOL + 5P\cos COL = 9P\cos DOL$
বা, $2P\frac{OL}{OA} + 3P\frac{OL}{OB} + 5P\frac{OL}{OC} = 9P.\frac{OL}{OD}$ বা, $\frac{2}{OA} + \frac{3}{OB} + \frac{5}{OC} = \frac{9}{OD}$.

কাজ: 1. α কোণে আনত দুইটি বল $5\sqrt{3}N$ ও $10N$ এর লব্ধি R, $5\sqrt{3}N$ বলের ওপর লম্ব হলে লব্ধির মান ও বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

2. খাড়া ভাবে উপরের দিকে কার্যরত 8N মানের একটি বলের দুইটি অংশকের মধ্যে আনুভূমিক দিকে একটি অংশকের মান 6N হলে অপরটির মান কত?

3. 2P ও 3P বল দুইটি O বিন্দুতে কার্যরত এবং এদের লব্ধির মান 4P. যদি কোনো ছেদক এদের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দু ছেদ করে; দেখাও যে, $\frac{2}{OP}+\frac{3}{OQ}=\frac{4}{OR}$.

8.6 বলজোটের লব্ধি (Resultant of a system of forces)

লম্বাংশের সাহায্যে সমতলীয় বলজোটের লব্ধি নির্ণয়

মনে করি, O নির্দিষ্ট বিন্দু এবং OX নির্দিষ্ট রেখা। এখন $OX \perp OY$ অঙ্কন করি।

ধরি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots, P_n$ সমতলীয় বলগুলি যথাক্রমে $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots\ldots\ldots$ রেখা দ্বারা সূচিত এবং OX এর সাথে যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n$ কোণ উৎপন্ন করে।

মনে করি বলগুলির লব্ধি R, OA দ্বারা সূচিত এবং OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

যেহেতু কোন নির্দিষ্ট দিকে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের লম্বাংশ সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ একই দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান। অতএব OX ও OY বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots\ldots, + P_n\cos\alpha_n \ldots = X$ (ধরি)

এবং $R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots\ldots, + P_n\sin\alpha_n \ldots = Y$ (ধরি)

তাহলে, $X^2 + Y^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ [বর্গ করার পর যোগ করে]

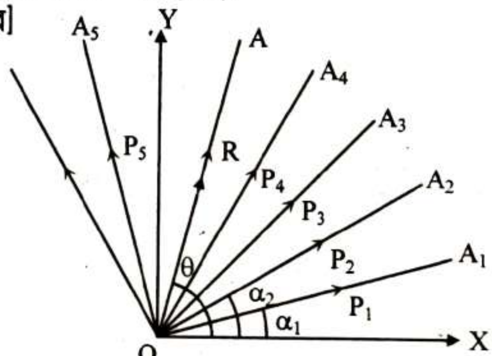
বা, $R = \sqrt{X^2+Y^2}$

এবং $\frac{Y}{X} = \tan\theta$ [ভাগ করে]

বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$

এখানে $\mathbf{R = \sqrt{X^2+Y^2}}$ দ্বারা লব্ধির মান এবং

$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}}$ দ্বারা লব্ধির দিক পাওয়া যায়।



উদাহরণ-5. একটি বিন্দুতে 7, 13 ও 19 গ্রাম ওজনের বলত্রয় একই ক্রমে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, O বিন্দু হতে OA, OB ও OC বরাবর যথাক্রমে 7, 13 ও 19 গ্রাম ওজনের বলত্রয় ক্রিয়া করে এবং এদের লব্ধি R, OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। OA এবং OA এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

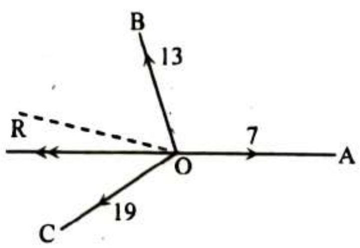
$R\cos\theta = 7\cos0° + 13\cos120° + 19\cos240°$

$= 7.1 + 13\left(-\frac{1}{2}\right) + 19\cos(180° + 60°)$

$= 7 - \frac{13}{2} - 19\cos60°$

$= 7 - \frac{13}{2} - 19.\frac{1}{2}$

$= \frac{14-13-19}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \ldots\ldots\ldots$ (i)



এবং $R\sin\theta = 7\sin0° + 13\sin120° + 19\sin240°$

$= 7.0 + 13\sin(180° - 60°) + 19\sin(180° + 60°)$

$= 0 + 13\sin60° - 19\sin60° = -6\sin60°$

$= -6.\frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করি,

$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (-9)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2$

বা, $R^2 = 81 + 27 = 108 = 36 \times 3 \quad \therefore R = 6\sqrt{3}$ গ্রাম ওজন

(ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে $\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{-3\sqrt{3}}{-9}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan30° = \tan(180° + 30°) = \tan210°$

$\therefore \theta = 30°$ অথবা $210°$

যেহেতু OA এবং OA এর উপর লম্বাংশদ্বয় বিয়োগবোধক কাজেই θ এর মান $30°$ না হয়ে $210°$ হবে।

$\therefore$ লব্ধির মান $6\sqrt{3}$ গ্রাম ওজন এবং লব্ধি OA এর সাথে $210°$ কোণে আনত।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: পাঠ ৩ ও ৪ এর আলোকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সমাধানের জন্য কিছু বিশেষ কৌশল নিম্নে দেয়া হলো:

1. কোন বিন্দুতে পরস্পর θ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতম বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে, $\cos\theta = -\frac{\text{ক্ষুদ্রতম বল}}{\text{বৃহত্তম বল}}$
2. কোন বিন্দুতে পরস্পর α কোণে P ও Q বলদ্বয় ক্রিয়ারত। P ও Q এর পরিবর্তে V ও W বলদ্বয় ক্রিয়ারত থাকলে যদি লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে তাহলে $\frac{P}{Q} = \frac{V}{W}$.
3. P ও Q বলদ্বয় (P>Q) পরস্পর Q কোণে ক্রিয়ারত। P কে n গুণ বৃদ্ধি করলে লব্ধিও যদি n গুণ বৃদ্ধি পায় তাহলে, $\cos\theta = -\frac{(n+1)Q}{2np}$ আবার Q (Q>P) কে n গুণ বৃদ্ধি করলে লব্ধি যদি n গুণ বৃদ্ধি পায় তাহলে, $\cos\theta = -\frac{(n+1)P}{2nQ}$
4. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু দ্বারা সূচিত P, Q, R বলত্রয় সমান্তর ধারাভুক্ত হলে লব্ধির মান = $\sqrt{3} \times$ সাধারণ অন্তর।

কাজ: একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল বরাবর একই ক্রমানুসারে কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 1, 2, 3 একক মানের বল তিনটির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

পাঠ-৫

উদাহরণমালা

উদাহরণ-6. কোনো বিন্দুতে 3P এবং 2P দুইটি বলের লব্ধি R; প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ করলে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ১৪-১৫; বুয়েট-০৩-০৪; কু: বো: ০৭; সি: বো: ০৭]

সমাধান: মনে করি, বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α।

বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, $R^2 = (3P)^2 + (2P)^2 + 2.3P.\ 2P.\cos\alpha$

বা, $R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 12P^2.\cos\alpha$ বা, $R^2 = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha$ ……… (i)

প্রশ্নের দ্বিতীয় শর্তানুসারে, 6P এবং 2P বলের লব্ধি 2R

$\therefore (2R)^2 = (6P)^2 + (2P)^2 + 2.6P.2P.\cos\alpha$ বা, $4R^2 = 36P^2 + 4P^2 + 24P^2\cos\alpha$

বা, $4R^2 = 40P^2 + 24P^2\cos\alpha \quad \therefore R^2 = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$; [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে] …… (ii)

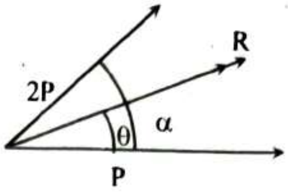
(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে, $0 = 3P^2 + 6P^2\cos\alpha$ বা, $6P^2\cos\alpha = -3P^2$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos120°$

$\therefore \alpha = 120°$

উদাহরণ-7. কোনো বিন্দুতে P এবং 2P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৮-০৯; চুয়েট ১১-১২; ব: বো: ১১]

সমাধান: মনে করি, P এবং 2P বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি P এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan\theta = \dfrac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha}$

আবার, বলদ্বয় 2P এবং 2P + 8 হলে, $\tan\theta = \dfrac{(2P+8)\sin\alpha}{2P + (2P+8)\cos\alpha}$

শর্তানুসারে, $\dfrac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha} = \dfrac{(2P+8)\sin\alpha}{2P + (2P+8)\cos\alpha}$

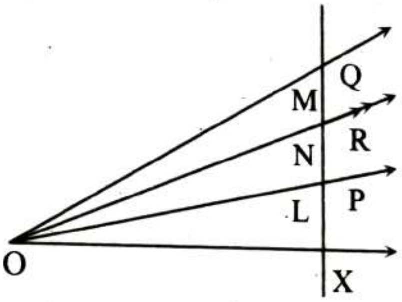
বা, $\dfrac{2P + (2P+8)\cos\alpha}{P + 2P\cos\alpha} = \dfrac{(2P+8)\sin\alpha}{2P\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{2P + (2P+8)\cos\alpha - P - 2P\cos\alpha}{P + 2P\cos\alpha} = \dfrac{(2P+8)\sin\alpha - 2P\sin\alpha}{2P\sin\alpha}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{P + 8\cos\alpha}{P(1 + 2\cos\alpha)} = \dfrac{8\sin\alpha}{2P\sin\alpha}$ বা, $\dfrac{P + 8\cos\alpha}{1 + 2\cos\alpha} = 4$ বা, $P + 8\cos\alpha = 4 + 8\cos\alpha$ $\therefore P = 4$

উদাহরণ-8. O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, একটি ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাগুলিকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{P}{OL} + \dfrac{Q}{OM} = \dfrac{R}{ON}$. [রুয়েট ১১-১২; ব: বো: ১৪; য: বো: ০৮; চ: বো: ০৬]

সমাধান: মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং উহারা যথাক্রমে OL, OM ও ON বরাবর ক্রিয়াশীল। ML ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু থেকে ML বর্ধিতাংশের ওপর OX লম্ব অঙ্কন করি। OX বরাবর লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,



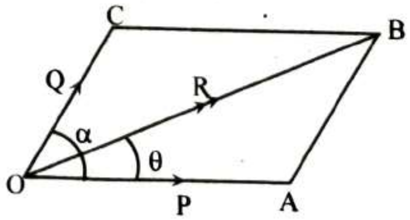
$P\cos LOX + Q\cos MOX = R\cos NOX$

বা, $P\dfrac{OX}{OL} + Q\dfrac{OX}{OM} = R\dfrac{OX}{ON}$ $\therefore \dfrac{P}{OL} + \dfrac{Q}{OM} = \dfrac{R}{ON}$

উদাহরণ-9. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{P}{2Q}}\right)$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$ [রা: বো: ১৩; দি: বো: ১৬; য: বো: ১৩, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: মনে করি, OABC সামান্তরিকের O বিন্দুতে OA বরাবর P মানের বল, OC বরাবর Q মানের বল ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি R, OB বরাবর ক্রিয়ারত।

ধরি, P ও Q এর অন্তর্গত কোণ α এবং P এর দিক ও R এর দিকের অন্তর্গত কোণ θ.



প্রশ্নমতে, P এর দিকে R এর লম্বাংশ = Q $\therefore R\cos\theta = Q$

তাহলে P এর দিক বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে,

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos\alpha$

বা, $Q = P + Q\cos\alpha$ .... (i) $[\because Q = R\cos\theta]$

বা, $P = Q(1 - \cos\alpha)$

বা, $P = 2Q\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

বা, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$

বা, $\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

$\therefore \alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, $\alpha = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$

আবার, $P + Q\cos\alpha = Q$ বা, $\cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$

এখন, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

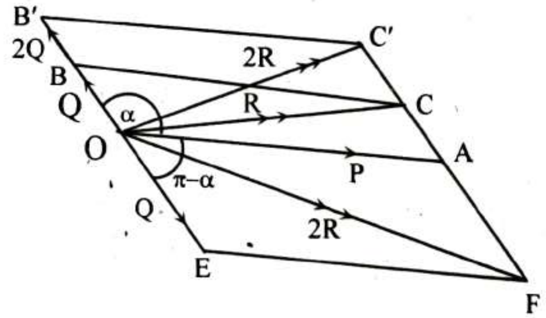
$= P^2 + Q^2 + 2PQ\frac{(Q-P)}{Q}$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2$

$= Q^2 - P^2 + 2PQ$

$\therefore R = \sqrt{(Q^2 - P^2 + 2PQ)}$

উদাহরণ-10. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি R; Q এর মান দ্বিগুণ করলে R দ্বিগুণ হয়। আবার Q কে বিপরীতমুখী করলেও R দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.



সমাধান: মনে করি, P এবং Q বল দুইটি O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে OA এবং OB বরাবর ক্রিয়ারত রয়েছে এবং এদের লব্ধি R কে OC দ্বারা সূচিত করা হলো।

সুতরাং, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ ... ... (i)

OB বরাবর কার্যরত 2Q মানের বল ও OA বরাবর ক্রিয়ারত P মানের বলের লব্ধিকে OC′ দ্বারা সূচিত করি।

সুতরাং $(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 2P.(2Q).\cos\alpha$

$\therefore 4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha$ ... ... (ii)

OB এর বিপরীত দিকে OE বরাবর ক্রিয়াশীল Q বল এবং OA বরাবর ক্রিয়ারত P বলের লব্ধির মান 2R ধরলে OEFA সামান্তরিকের কর্ণ OF এদের লব্ধির মান 2R সূচিত করবে।

এক্ষেত্রে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= (\pi - \alpha)$

সুতরাং, $(2R)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha)$

$\therefore 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$ ... ... (iii)

(i) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$5R^2 = 2P^2 + 2Q^2 \quad \therefore 2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0$ ... ... (iv)

(iii) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে যোগ করে পাই,

$12R^2 = 3P^2 + 6Q^2$

বা, $4R^2 = P^2 + 2Q^2 \quad \therefore P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0$ ... ... (v)

(iv) ও (v) বজ্রগুণন করে পাই,

$\frac{P^2}{-8+10} = \frac{Q^2}{-5+8} = \frac{R^2}{4-2}$ বা, $\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$ বা, $\frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\therefore P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

পাঠ-৬ ও ৭

অনুশীলনী-8(A)

Type-I

1. (i) পরস্পর 60° কোণে কার্যরত দুইটি সমান বলের লব্ধি $3\sqrt{3}$ একক। সমান বলদ্বয় নির্ণয় কর।

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি P বলের দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। P বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণ 30° হয়। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১১-১২]

(iii) দুইটি সমান বল কোনো একটি কণার উপর ক্রিয়ারত। এদের লব্ধির বর্গ বল দুইটির গুণফলের তিনগুণের সমান হলে বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

(iv) একই বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 14 একক এবং এরা যখন লম্বিকভাবে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধি 10 একক। ক্ষুদ্রতম লব্ধি নির্ণয় কর।

(v) কোনো বিন্দুতে দুইটি বল এমনভাবে ক্রিয়ারত আছে যে, তাদের একটিকে বিপরীতমুখী করলে এদের লব্ধির দিক এক সমকোণে ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের মান সমান।

(vi) কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি তাদের একটির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে এবং অপরটির এক-তৃতীয়াংশ হয়। দেখাও যে, বলদ্বয়ের মানের অনুপাত $3 : 2\sqrt{2}$ । [বুয়েট ১২-১৩; য: বো: ১০]

(vii) P, Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫]

(viii) কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R; Q এর মান 2 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধি দ্বিগুণ হয়। কিন্তু P কে বিপরীতমুখী করলে লব্ধির মান অপরিবর্তিত থাকে এবং P বলের উপর লম্ব হয়। প্রমাণ কর যে, $R = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{3Q-4}}$.

(ix) 8N ও 6N মানের দুটি বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৬(ক)]

(x) কোনো বিন্দুতে 2P এবং Q মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত আছে। যদি $Q = 3P$ হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক করে বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৬(খ)]

(xi) কোন বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৬(ক)]

Type-II

2. (i) P এবং Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ; বল দুইটির অবস্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি যদি φ কোণে সরে যায় তবে দেখাও যে, $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$. [ঢা: বো: ০৯]

(ii) $P + Q$ এবং $P - Q$ বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $P : Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$. [চ: বো: ০৪]

(iii) $P+Q$ এবং $P-Q$ বলদ্বয় 2α কোণে ক্রিয়াশীল এবং তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$. [রা:বো: ০৯; কু:বো: ০৬; চ:বো: ১৫; সি:বো: ১৩; ব:বো: ০৮]

(iv) কোনো বিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি $\sqrt{3}$ Q এবং তা P বলের দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P = Q$ অথবা $P = 2Q$. [সি: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১০]

(v) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি R। Q বলকে দ্বিগুণ করলে লব্ধি P বলের দিকের উপর লম্ব হয়। দেখাও যে, $Q = R$.

(vi) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের সমষ্টির এক তৃতীয়াংশ হলে দেখাও যে, তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $\cos^{-1}\left\{\frac{PQ - 4(P^2 + Q^2)}{9PQ}\right\}$

(vii) সমমানের দুইটি বল কোন বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি উৎপন্ন হয়, তা তারা 2β কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি হয় তার দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$.

[ঢা: বো: ১৫; রা: বো: ১০, ০৫; কু: বো: ১২]

(viii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F এবং G. প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণের মান α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

[য: বো: ১৪; দি: বো: ১২]

3. (i) θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$, উক্ত কোণটি $(90° - \theta)$ হলে লব্ধির মান $(2m - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{m - 1}{m + 1}$.

[ঢা: বো: ১২, ০৮; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১২]

(ii) α কোণে হেলানো OA এবং OB বরাবর ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R বলটি OA এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। Q পরিবর্তিত হয়ে Q' হলে তাদের লব্ধি R' বলটি OA এর সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে। $\alpha \neq \pi$ হলে দেখাও যে, $\frac{R'}{R} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin(\alpha - \theta')}$. [দি বো:, ব: বো: ১১]

(iii) ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান cosA এবং cosB এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান sin C এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ এবং $\frac{1}{2}(C + A - B)$ অংশে বিভক্ত করে। [ঢা: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১১]

(iv) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে, তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2 - Q^2}{Q}$, $(P > Q)$

[ঢা: বো: ১৬, ১৩; রা: বো: ১৫, ০৮; দি: বো: ১৪; কু: বো: ১০; সি: বো: ১৫; য: বো: ১২, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

(v) যদি α কোণে নত দুইটি রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এর ক্রিয়ারেখা P এর ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে দেখাও যে, ঐ একই α কোণে নত রেখা দুইটি বরাবর যথাক্রমে $(P + R)$ ও Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি এবং $(P + R)$ মানের বলের অর্ন্তভুক্ত কোণ $\frac{\theta}{2}$.

(vi) OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়ারত P ও Q মানের বল দুইটির লব্ধি OA এর উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P' এবং Q' মানের বল দুইটির লব্ধি OB এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $PP' = QQ'$.

Type-III

4. (i) P মানের চারটি সমান বল ABCD বর্গক্ষেত্রের AB, CB, AD, DC বাহু বরাবর ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

(ii) P, 3P, $\sqrt{3}$P এবং $\sqrt{3}$P মানের একতলীয় চারটি বল যথাক্রমে OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়াশীল। যদি $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = \angle 90°$ এবং $\angle COD = 120°$ হয়, তবে বলগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

(iii) ABCD একটি রম্বস। এর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O তে 3N, 4N, 9 N এবং 10N বলগুলি যথাক্রমে OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়া করে। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

(iv) একই বিন্দুতে একই ক্রমে ক্রিয়ারত $R - S$, R, $R + S$ বলত্রয় কোনো সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি নির্ণয় কর।

(v) কোনো কণার উপর P, Q, R মানের তিনটি একতলীয় বল ক্রিয়ারত আছে। Q ও R, R ও P এবং P ও Q এর অন্তর্গত কোণ যথাক্রমে α, β, γ হলে দেখাও যে, তাদের লব্ধি $= [P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR\cos\alpha + 2RP\cos\beta + 2PQ\cos\gamma]^{\frac{1}{2}}$

(vi) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল দিকে P মানের তিনটি সমান বল কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধি **(a)** $P\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

[বুয়েট ০০-০১; ঢা: বো: ১০]

(b) $P\sqrt{1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

(vii) কোনো সুষম ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দু থেকে 1, 2, 3, 4 ও 5 মানের বলগুলি যথাক্রমে অপর কৌণিক বিন্দুগুলির দিকে ক্রিয়ারত আছে। বলগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

(viii) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত বলগুলোর মান এদের অনুষঙ্গী শীর্ষ কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

(ix) ABC ত্রিভুজের বাহু বরাবর একইক্রমে কার্যরত তিনটি সমবিন্দু বলের মান এদের স্ব স্ব ক্রিয়ারেখার বিপরীত কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

Type-IV

5. (i) 4P এবং 3P বল দুইটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং 5P তাদের লব্ধি। যদি কোনো ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{4}{OL} + \frac{3}{OM} = \frac{5}{ON}$.

[কু: বো: ১১, ০৫; দি: বো: ১৩; চ: বো: ১৩, ০৮; রা: বো: ০৭; সি: বো: ১৪, ০৯]

(ii) ABCD চতুর্ভুজের AB, CB, CD এবং AD বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $k.AB$, $l.CB$, $m.CD$ ও $n.AD$ মানের চারটি বল সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রমাণ কর যে, $km = nl$.

(iii) ABC ত্রিভুজের সমতলে O একটি বিন্দু। BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F। প্রমাণ কর যে, $\vec{OD}$, $\vec{OF}$ এবং $\vec{EO}$ বলগুলির লব্ধি $\vec{OB}$ এর সমান হবে।

উত্তরমালা

1. **(i)** 3 একক; **(ii)** 120°; **(iii)** 60°; **(iv)** 2 একক;

(vii) $2\sqrt{P^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + Q^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $\tan^{-1}\left\{\dfrac{(P - Q)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{P\cos^2\frac{\alpha}{2} + Q\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right\}$ **(ix)** $2\sqrt{13}$N **(x)** 6N;

(xi) 150°, 120°, 90°;

4. **(i)** 2P যা DC রেখার সমান্তরালে; **(ii)** 2P যা OB বরাবর ক্রিয়াশীল।

(iii) $6\sqrt{2}$ N, O বিন্দুতে OC এর সাথে 45° কোণে ক্রিয়াশীল।

(iv) $\sqrt{3}$ S, লব্ধি R – S বলের সাথে 210° কোণে ক্রিয়াশীল; **(vii)** $2\sqrt{19 + 10\sqrt{3}}$, $\tan^{-1}\left(4 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

পাঠ-৮ ও ৯

8.7 বলজোটের সাম্যাবস্থা (Equilibrium of a system of forces) [দি: বো: ১৬]

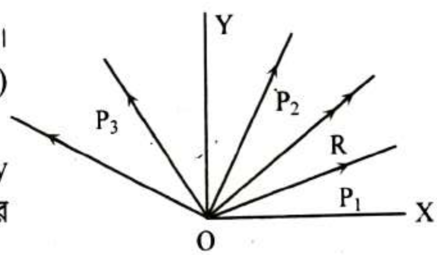
যখন দুই বা ততোধিক বল কোনো বস্তুর উপর কার্যরত হয়ে একে অপরকে নিষ্ক্রিয় করে এবং যার ফলে ঐ বলগুলির লব্ধি বলের মান শূন্য হয় এমতাবস্থায় বস্তুটি কোনো গতিপ্রাপ্ত হবে না। অর্থাৎ বস্তুটি পূর্বের ন্যায় স্থির থাকবে। এক্ষেত্রে বলগুলির অবস্থাকে সাম্যাবস্থা বলে। এটি উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, যদি প্রদত্ত বলগুলির একটি বল অবশিষ্ট বলগুলির লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী হয়, তবে এরা সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করবে। কাজেই সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থার মূলতত্ত্ব হলো "সুস্থিত বলসমূহের লব্ধির মান শূন্য"। সুতরাং কিছুসংখ্যক সমবিন্দু বল স্থিতাবস্থার সৃষ্টি করলে যেকোনো দিকে এদের বিশ্লিষ্টাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি শূন্য হবে।

8.7.1 কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত

(Condition of equilibrium of a system of coplaner forces acting on a particle)

মনে করি, $P_1, P_2, P_3, \ldots \ldots \ldots$ কতকগুলি সমতলীয় বল নির্দিষ্ট O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। বলগুলির লব্ধি R এবং পরস্পর লম্বিক OX ও OY বরাবর বলগুলির লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি যথাক্রমে X ও Y দ্বারা সূচিত করা হলে,

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$



আমরা জানি, বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদের লব্ধির মান শূন্য হয়। অর্থাৎ $R = 0$ বা, $X^2 + Y^2 = 0$ হবে। কিন্তু X ও Y এর উভয়েই শূন্য (0) না হলে তাদের বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না। সুতরাং $X = 0, Y = 0$

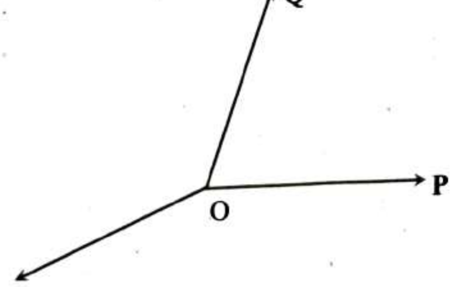
অতএব সমতলীয় বলজোট সাম্যাবস্থায় থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত (necessary condition) হল লম্বরেখা OX ও OY বরাবর তাদের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

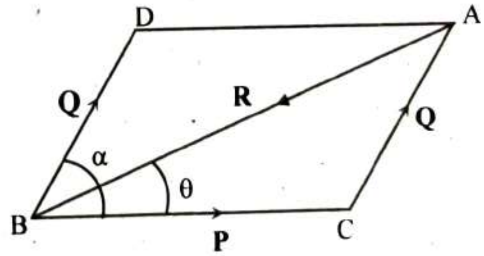
বিপরীতক্রমে $X = 0, Y = 0$ হলে $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0$ হবে। অর্থাৎ বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে। এই শর্তই হল বলজোটের সাম্যাবস্থায় থাকার পর্যাপ্ত (Sufficient condition) শর্ত।

8.8 সাম্যাবস্থায় বলের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of Forces in Equilibrium)

[ঢা: বো: ১২, ০৯; রা: বো: ১৩, ০৮; দি: বো: ১০; কু: বো: ১২, ০৬; চ: বো: ১০, ০৫; সি: বো: ১৩; য: বো: ১০, ০৭]

বর্ণনা (statement): কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে সূচিত করা যায় তবে বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।





প্রমাণ: মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল **P, Q** ও **R** এর মান ও দিক যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহু দ্বারা সূচিত। প্রমাণ করতে হবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

$BC \parallel AD$ এবং $CA \parallel BD$ অঙ্কন করে BCAD সামান্তরিক গঠন করি। সমান্তরাল হওয়ায় CA ও BD দ্বারা একই বল **Q** সূচিত হবে।

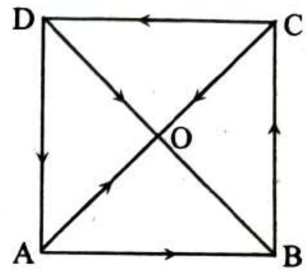
এখন বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, BC ও BD দ্বারা সূচিত **P** ও **Q** এর লব্ধি **R**, BA দ্বারা সূচিত এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত হবে। অর্থাৎ এই বলটি AB দ্বারা সূচিত **R** বলের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী হবে এবং পরস্পর নিষ্ক্রিয় করবে। সুতরাং বল তিনটি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করবে।

ভেক্টর পদ্ধতি: মনে করি, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল **P, Q** ও **R** এর মান ও দিক যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়।
প্রমাণ করতে হবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। অর্থাৎ $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$
BCAD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করি। CA ও BD বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল বলে, BD বাহু দ্বারা **Q** বলকে মানে ও দিকে নির্দেশ করা যায়।

এখন, $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$

উদাহরণ-1. ABCD একটি বর্গ। $\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ এবং $\overrightarrow{DB}$ বলগুলি একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

সমাধান: মনে করি, ABCD বর্গের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O.



$\therefore \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} + 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BD}$

$= 2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DB}$

$= \mathbf{0}$ [বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে]

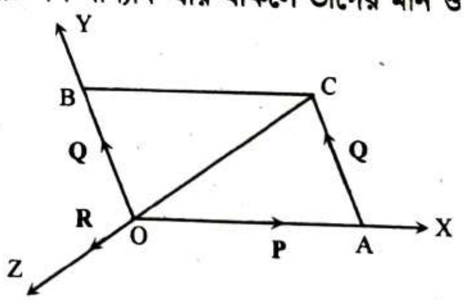
$\therefore$ বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

কাজ: একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত কতকগুলি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত আলোচনা কর।

8.8.1 বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত উপপাদ্য (Converse law of triangle law of forces)

বর্ণনা (Statement): কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদের মান ও দিক একইক্রমে গৃহীত কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যাবে।

প্রমাণ: মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল **P, Q** ও **R** সাম্যাবস্থায় আছে।
OX ও OY থেকে কোনো নির্দিষ্ট এককের পরিমাপে যথাক্রমে OA এবং OB অংশ কেটে নিই যেন উহারা **P** ও **Q** বলদ্বয়কে (মানে ও দিকে) সূচিত করে। OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন করে CO যোগ করি।



যেহেতু **P, Q** ও **R** বল তিনটি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে, সুতরাং **R** বলটি **P** ও **Q** এর লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী হবে। অর্থাৎ **R** বলটি মানে ও দিকে CO দ্বারা সূচিত হবে। আবার OB || AC হওয়ায় **Q** বলটি মানে ও দিকে AC দ্বারা সূচিত হবে।
অতএব **P, Q** ও **R** বল তিনটি মানে ও দিকে OAC ত্রিভুজের একই ক্রমে তিনটি বাহু যথাক্রমে OA, AC ও CO দ্বারা সূচিত হলো।

বিকল্প প্রমাণ (ভেক্টর পদ্ধতি): মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল **P, Q** ও **R** সাম্যাবস্থায় আছে।
OX ও OY হতে কোন নির্দিষ্ট এককের পরিমাপে যথাক্রমে OA ও OB অংশ কেটে নেই যেন উহারা **P** ও **Q** বলদ্বয়কে (মানে ও দিকে) সূচিত করে। OACB সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করে CO যোগ করি।

$\therefore \overrightarrow{OA} = \mathbf{P}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \mathbf{Q}$

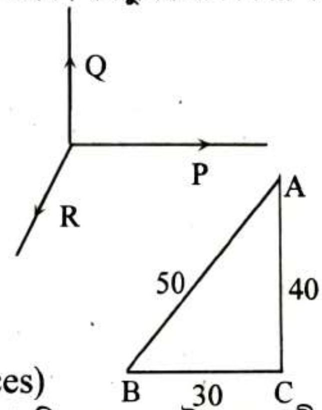
আবার, OB || AC এবং OB = AC $\therefore \vec{AC} = Q$

এখন, $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ [সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে]
যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে

$\therefore \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$ বা, $\vec{OC} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$ বা, $\mathbf{R} = -\vec{OC} = \vec{CO}$
$\therefore$ **P, Q** এবং **R** বলত্রয়কে OAC ত্রিভুজের OA, AC ও CO বাহু দ্বারা মানে, দিকে ও একইক্রমে সূচিত করা যায়।

উদাহরণ-2. P, Q, R সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 30, 40, 50 সে.মি.। P ও Q বলদ্বয়ের সমষ্টি 42 গ্রাম ওজন। বলগুলির মান নির্ণয় কর।

সমাধান: P ও Q বলদ্বয়ের সমষ্টি 42 গ্রাম
যেহেতু $BC^2 + CA^2 = AB^2$ বা, $30^2 + 40^2 = 50^2$
$\therefore \Delta ABC$ এর $\angle C = 90°$
যেহেতু বলগুলি সুস্থিত এবং ΔBCA এর বাহুগুলির সমান্তরাল কাজেই বলত্রয়কে অনুসঙ্গী বাহুত্রয় দ্বারা সূচিত করা যায়।



$$\therefore \frac{P}{30} = \frac{Q}{40} = \frac{R}{50} \text{ বা, } \frac{P}{3} = \frac{Q}{4} = \frac{R}{5} = \frac{P+Q}{3+4} = \frac{42}{7} = 6$$

$\therefore$ P = 18 গ্রাম ওজন, Q = 24 গ্রাম ওজন এবং R = 30 গ্রাম ওজন।

8.8.2 বলের লম্বত্রিভুজ সূত্র (Perpendicular triangle law of forces)

বর্ণনা (Statement): কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান যদি কোনো ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত তিনটি বাহুর সমানুপাতিক এবং দিক আনুষঙ্গিক বাহু সমূহের উপর লম্ব (সকল বলের দিক হয় বহির্মুখী অথবা অন্তর্মুখী) হয়, তবে বলগুলি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।
প্রয়োগ বিন্দুকে স্থির রেখে সবগুলি বলকে একই সাথে এক সমকোণে (90°) আবর্তন করলে, বল তিনটি একটি ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত বাহুত্রয় দ্বারা সূচিত হয়। সুতরাং বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

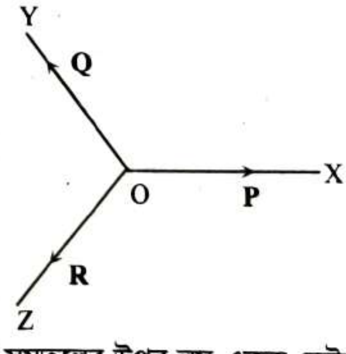
8.9 সাম্যাবস্থার লামির উপপাদ্য (Lami's Theorem of Equilibrium)

[ঢা: বো: ১৬, ১৫, ১৩, ১০, ০৮, ০৬; রা: বো: ১৫, ১১, ০৯, ০৬; দি: বো: ১৬, ১৫, ১২; কু: বো: ১৩, ১০, ০৮, ০৫; চ: বো: ১৬, ১১, ০৬; সি: বো: ১৬, ১৫, ১০, ০৮, ০৫; য: বো: ১২, ১০, ০৮; ব: বো: ১৩, ১১, ০৮, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১৩, ১১]

বর্ণনা: কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটি বলের ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

প্রমাণ: ভেক্টর পদ্ধতি : মনে করি O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়ারত **P, Q** ও **R** সমতলীয় বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$$



যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে, কাজেই–

$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ... ... (i)

বা, $\mathbf{R} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{0}$ [উভয় পক্ষে **R** দ্বারা ভেক্টর গুণন করে]

বা, $\mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \mathbf{Q} + \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$

বা, $\mathbf{R} \times \mathbf{P} - \mathbf{Q} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ [$\because \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ এবং $\mathbf{R} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$]

বা, $|\mathbf{R} \times \mathbf{P}| = |\mathbf{Q} \times \mathbf{R}|$

বা, $|RP \sin ZOX\, \hat{n}| = |QR \sin YOZ\, \hat{n}|$ [এখানে $\hat{n}$ বলগুলির অবস্থানকারী সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর]

বা, $RP \sin ZOX = QR \sin YOZ$

বা, $P \sin ZOX = Q \sin YOZ$

$\therefore \dfrac{P}{\sin YOZ} = \dfrac{Q}{\sin ZOX}$ ... ... (ii)

অনুরূপভাবে (i) নং কে **P** দ্বারা ভেক্টর গুণন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY} \qquad \text{.........(iii)}$$

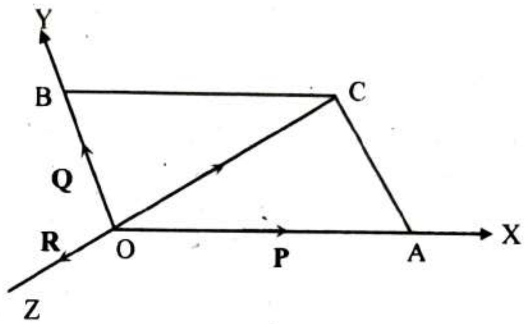
(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$$

অর্থাৎ প্রত্যেকটি বলের মান অপর বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

বিকল্প প্রমাণ (জ্যামিতিক পদ্ধতি)

মনে করি, O বিন্দুতে সমতলীয় **P, Q** ও **R** মানের বল তিনটি যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়াশীল হয়ে সাম্যাবস্থায় আছে।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$

OX ও OY থেকে নির্দিষ্ট এককের পরিমাপে OA এবং OB রেখাংশ কেটে নেই যেন এরা যথাক্রমে **P** ও **Q** বলদ্বয়ের মান ও দিক সূচিত করে। OACB সামান্তরিকটি পূর্ণ করি। O, C যোগ করি। বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OC কর্ণ দ্বারা **P** ও **Q** বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক সূচিত করা হয়। যেহেতু **P, Q, R** সাম্যাবস্থায় থাকে কাজেই **R** বলটি অবশ্যই **P** ও **Q** বলদ্বয়ের সমান ও বিপরীতমুখী হবে। অর্থাৎ CO রেখাংশ দ্বারা **R** বলের মান ও দিক নির্দেশ করবে। আবার OACB সামান্তরিক বলে AC = OB = Q.

যেহেতু, একই বিন্দু O তে ক্রিয়ারত **P, Q** ও **R** বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং চিত্রানুসারে, OAC ত্রিভুজের OA, AC এবং CO বাহু দ্বারা বল তিনটিকে মানে ও দিকে সূচিত করা যাবে।

এখন, ΔOAC হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{CO}{\sin OAC}$$

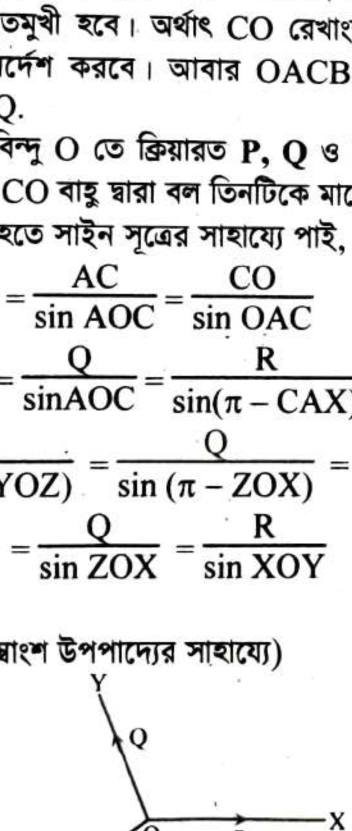
বা, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin(\pi - CAX)}$

বা, $\frac{P}{\sin(\pi - YOZ)} = \frac{Q}{\sin(\pi - ZOX)} = \frac{R}{\sin(\pi - XOY)}$

$\therefore \frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$

বিকল্প প্রমাণ:

বিকল্প প্রমাণ (লম্বাংশ উপপাদ্যের সাহায্যে)



মনে করি, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর যথাক্রমে P, Q ও R মানের সমতলীয় বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$

প্রমাণ: যেহেতু বলত্রয় O বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় রয়েছে ফলে যে কোন দিক বরাবর বলত্রয়ের লম্বাংশের সমষ্টি শূন্য হবে। এখন OX বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$P\cos 0 + Q\cos XOY + R\cos(2\pi - ZOX) = 0$$

বা, $P + Q\cos XOY + R\cos ZOX = 0$ ... ... (i)

আবার, OX এর উপর লম্বরেখা বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$P\sin 0 + Q\sin XOY + R\sin(2\pi - ZOX) = 0$$

বা, $0.P + Q\sin XOY - R\sin ZOX = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) হতে বজ্রগুণন পদ্ধতির সাহায্যে পাই,

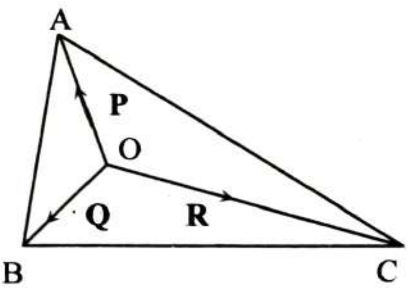
$$\frac{P}{-\cos XOY\sin ZOX - \sin XOY\cos ZOX} = \frac{Q}{0 + \sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY - 0}$$

বা, $\dfrac{P}{-\sin(XOY + ZOX)} = \dfrac{Q}{\sin ZOX} = \dfrac{R}{\sin XOY}$

বা, $\dfrac{P}{-\sin(2\pi - YOZ)} = \dfrac{Q}{\sin ZOX} = \dfrac{R}{\sin XOY}$

বা, $\dfrac{P}{\sin YOZ} = \dfrac{Q}{\sin ZOX} = \dfrac{R}{\sin XOY}$

উদাহরণ-3. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে যথাক্রমে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। প্রমাণ কর যে, $\dfrac{P}{\sin 2A} = \dfrac{Q}{\sin 2B} = \dfrac{R}{\sin 2C}$.



সমাধান: মনে করি, **P, Q, R** বলত্রয় ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। সুতরাং লামির উপপাদ্য হতে পাই,

$$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$$

বা, $\dfrac{P}{\sin 2A} = \dfrac{Q}{\sin 2B} = \dfrac{R}{\sin 2C}$

[যেহেতু কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ $\therefore \angle BOC = 2A, \angle AOC = 2B, \angle AOB = 2C$]

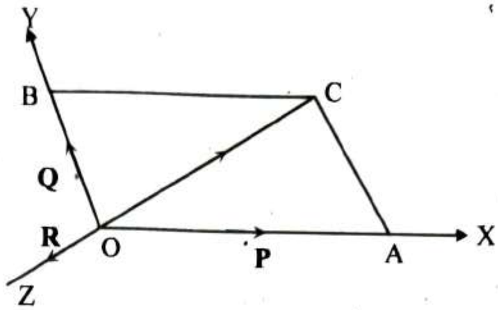
8.9.1 লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of Lami's Theorem) [য: বো: ০৫]

বর্ণনা: কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বলের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির ক্রিয়ারেখার অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হলে এবং কোনটিই অপর দুইটির লব্ধির সমান না হলে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণ: মনে করি, **P, Q** ও **R** তিনটি সমতলীয় বল O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ বরাবর এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন $\dfrac{P}{\sin YOZ} = \dfrac{Q}{\sin ZOX} = \dfrac{R}{\sin XOY}$ ... ... (i)

প্রমাণ করতে হবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

এখন নির্দিষ্ট পরিমাপে, OX হতে OA অংশ কেটে নিই যেন OA দ্বারা মানে ও দিকে **P** বলটি সূচিত হয়। OY || AC এবং OZ কে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন AC কে C বিন্দুতে ছেদ করে। OACB সামান্তরিক গঠন করি।



ΔOAC হতে পাই, $\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin COA} = \frac{CO}{\sin OAC}$

বা, $\frac{OA}{\sin COY} = \frac{AC}{\sin(\pi - ZOX)} = \frac{CO}{\sin(\pi - CAX)}$

বা, $\frac{OA}{\sin(\pi - YOZ)} = \frac{AC}{\sin ZOX} = \frac{CO}{\sin(\pi - XOY)}$

বা, $\frac{OA}{\sin YOZ} = \frac{AC}{\sin ZOX} = \frac{CO}{\sin XOY}$ .... (ii)

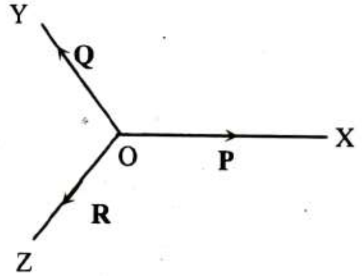
(i) ও (ii) হতে পাই $\frac{P}{OA} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{CO}$ .... (iii)

কিন্তু OA রেখাংশ মান ও দিকে **P** বল সূচিত করে, অর্থাৎ P = OA

তাহলে, (iii) হতে পাই, Q = AC এবং R = CO

সুতরাং একই বিন্দু O তে ক্রিয়ারত তিনটি বল মানে ও দিকে OAC ত্রিভুজের একই ক্রমের OA, AC এবং CO বাহু দ্বারা সূচিত হয়েছে। অতএব বলের ত্রিভুজ সুত্রানুসারে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

ভেক্টর পদ্ধতি: মনে করি, **P, Q** ও **R** বলত্রয় O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY এবং OZ বরাবর এমনভাবে ক্রিয়ারত



যেন, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ .... (i)

প্রমাণ করতে হবে যে, বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

অর্থাৎ $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$ হয়।

(i) হতে পাই, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX}$

বা, $P \sin ZOX = Q \sin YOZ$

বা, $RP \sin ZOX = RQ \sin YOZ$

বা, $|\mathbf{R}|\,|\mathbf{P}|\,(\sin ZOX)\hat{n} = |\mathbf{Q}|\,|\mathbf{R}|\,(\sin YOZ)\hat{n}$ [এখানে $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যা **P, Q** ও **R** ধারণকারী সমতলের উপর লম্ব]

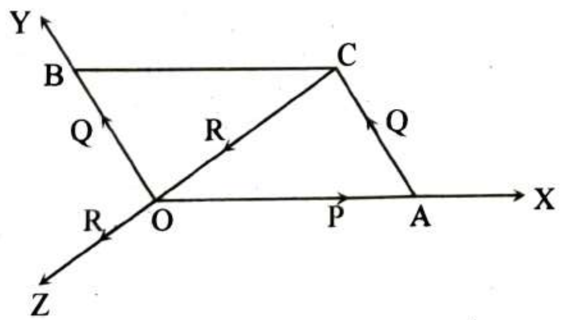
বা, $\mathbf{R} \times \mathbf{P} = \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$

বা, $\mathbf{R} \times \mathbf{P} = -\mathbf{R} \times \mathbf{Q}$ বা, $\mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{R} \times \mathbf{Q} + \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ [$\because \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$]

বা, $\mathbf{R} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{0}$ বা, $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$

অতএব **P, Q** ও **R** বল তিনটি সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: সাম্যাবস্থায় বলের ত্রিভুজ সূত্র ও লামির উপপাদ্যের সমন্বয়:



মনে করি, P, Q ও R বল তিনটি যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। P ও Q কে যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা সূচিত করে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করা হল। তাহলে, সাম্যাবস্থায় বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী P, Q ও R বল তিনটি ΔOAC এর OA, AC ও CO বাহুত্রয় দ্বারা মানে ও দিকে একইক্রমে গৃহীত হবে।

আবার লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$

বা, $\frac{P}{\sin (\pi - BOC)} = \frac{Q}{\sin (\pi - AOC)} = \frac{R}{\sin(\pi - OAC)}$

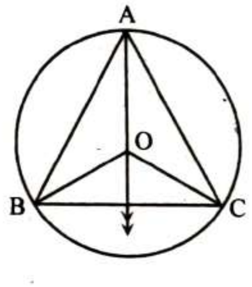
বা, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin OAC}$

বা, $\frac{P}{\sin OCA} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin OAC}$

$\therefore \frac{P}{OA} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{CO} \left[\because \frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC}\right]$

উদাহরণ-4. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় দ্বারা দুইটি বলের মান ও দিক সূচিত হলো। যদি এদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হয় তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O.



$\therefore \angle AOB = 2C$

$\therefore \angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180°$

বা, $2\angle OAB = 180° - \angle AOB$ [$\because$ O পরিকেন্দ্র, অর্থাৎ, $OA = OB = OC$, $\therefore \angle OBA = \angle OAB$]

বা, $2\angle OAB = 180° - 2C$

বা, $\angle OAB = 90° - C$

অনুরূপভাবে $\angle OAC = 90° - B$, বলের সাইনের সূত্র হতে পাই,

$\frac{AB}{\sin OAC} = \frac{AC}{\sin OAB}$ বা, $\frac{AB}{\sin (90° - B)} = \frac{AC}{\sin (90° - C)}$ বা, $\frac{AB}{\cos B} = \frac{AC}{\cos C}$ ... ... (i)

আবার, ABC ত্রিভুজ হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ ... ... (ii)

(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{\sin C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos C}$ বা, $\sin B \cos B = \sin C \cos C$ বা, $2\sin B \cos B = 2\sin C \cos C$

বা, $\sin 2B = \sin 2C$ বা, $2B = 2C$ বা, $B = C$ বা, $AB = AC$

অথবা $\sin 2B = \sin 2C$ বা, $\sin 2B = \sin(180° - 2C)$ বা, $2B = 180° - 2C$

বা, $B = 90° - C$ বা, $B + C = 90°$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু।

কাজ: 1. একই আনুভূমিক রেখায় a দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি মসৃণ ও অপ্রসারী রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। W ওজনের একটা আংটা গড়িয়ে যখন B বিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে অবস্থান করে, তখন তাকে আনুভূমিক P বলের সাহায্যে স্থির অবস্থায় রাখা হয়। প্রমাণ কর যে, সুতার টান $= \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2}$ এবং $P = \frac{aW}{l}$.

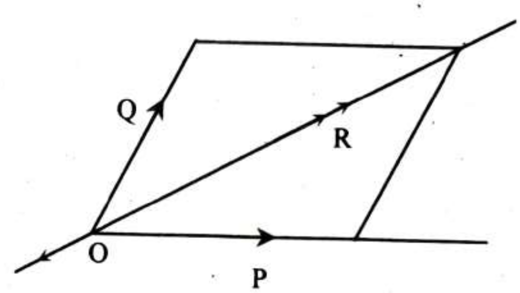
2. W ওজন বিশিষ্ট সমরূপ দণ্ডের A প্রান্তটি একটি কব্জার চতুর্দিকে অবাধে ঘুরতে পারে। এর এক প্রান্ত একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। যদি দণ্ডটি আনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত হয়, তবে দেখাও যে, কব্জার প্রতিক্রিয়ার মান $W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\alpha + 1}$ এবং এর দিক নির্ণয় কর।

8.10 সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত

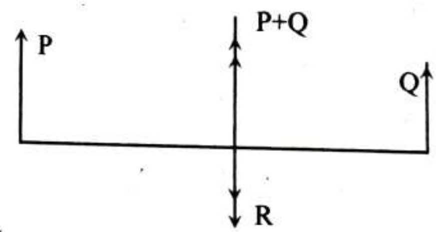
(Condition of Equilibrium of Coplanar Forces)

উপপাদ্য-1. কোনো জড়বস্তুর ওপর কার্যরত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এরা হয় সমবিন্দু হবে অথবা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

মনে করি P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে। এদের যে কোন দুইটি বল P ও Q হয় সমবিন্দু হবে অথবা পরস্পর সমান্তরাল হবে।



প্রথম ক্ষেত্রে: মনে করি, P ও Q বলদ্বয়ের ক্রিয়া বিন্দু O, বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এদের লব্ধি O বিন্দু দিয়ে যাবে। প্রদত্ত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি তৃতীয় বল R এর সমান ও বিপরীতমুখী হবে। সুতরাং তৃতীয় বল R এর ক্রিয়ারেখাও P ও Q বলদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হবে। সুতরাং P, Q, R বল তিনটি সমবিন্দুগামী।



দ্বিতীয় ক্ষেত্রে: P ও Q বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল। সমান্তরাল বলের সূত্রানুসারে এদের লব্ধিও P ও Q বলের সমান্তরাল হবে। যেহেতু বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে কাজেই P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তৃতীয় বল R এর সমান এবং একই রেখায় বিপরীতমুখী হবে। সুতরাং এক্ষেত্রে R বলের ক্রিয়া রেখা P ও Q বল দুইটির সমান্তরাল হবে।

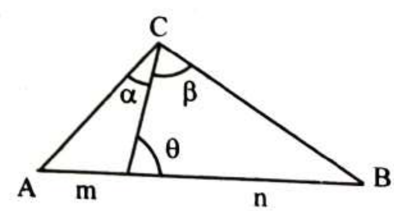
$\therefore$ কোনো জড় বস্তুর ওপর কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এরা হয় সমবিন্দু হবে অথবা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

কোনো জড় বস্তুর ভারসাম্য সম্বলিত প্রশ্ন সমাধানের জন্য সাম্যাবস্থার সাধারণ শর্তাবলী ছাড়াও নিম্নবর্ণিত বিষয়গুলি বিশেষভাবে স্মরণযোগ্য:

i. সঠিক জ্যামিতিক চিত্র বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। অংকিত চিত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য, কোণ ইত্যাদি জ্যামিতিক সম্পর্কীয় সমীকরণগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। ত্রিকোণমিতিক cot সূত্রের ব্যবহার কোনো কোনো ক্ষেত্রে অপরিহার্য। ত্রিকোণমিতিক cot সূত্র

(a) $(m + n) \cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$

(b) $(m + n) \cot\theta = n\cot A - m\cot B$



ii. সুস্থিত এক বিন্দুগামী বলের ক্ষেত্রে সমস্যা সমাধানের জন্য ক্ষেত্রবিশেষে লামির সূত্র, বলত্রিভুজ সূত্র, বলত্রিভুজের সূত্রের বিপরীত সূত্র ব্যবহৃত হয়। বলগুলি যদি অসমান্তরাল ও সাম্যাবস্থায় থাকে তবে বলদ্বয়ের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হবে।

iii. বলগুলির ক্রিয়ারেখা যদি সমান্তরাল না হয় তবে সাম্যাবস্থায় নিমিত্তে এরা অবশ্যই কোনো সাধারণ বিন্দুতে মিলিত হবে।

iv. সংস্পর্শজনিত সৃষ্ট ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সব সময় সমান ও বিপরীতমুখী হবে।

v. সম্পূর্ণ মসৃণ তলের প্রতিক্রিয়া তলের উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

vi. কোনো সমরূপ দণ্ডের ওজন দন্ডটির মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করে যা ঐ দন্ডের ভারকেন্দ্র।

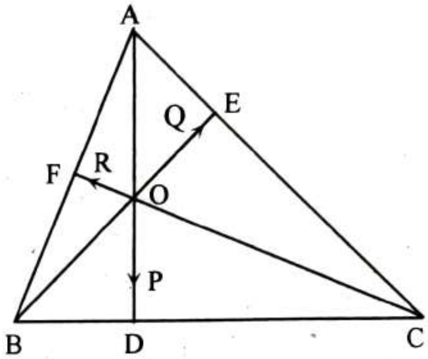
পাঠ-১০ ও ১১

উদাহরণমালা

উদাহরণ-5. P, Q, R বল তিনটি কোনো ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু হতে যথাক্রমে তাদের বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = a ঃ b ঃ c।

[ঢা: বো: ১১; ব: বো: ১২, ০৭; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩]

সমাধান: ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর ওপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q, R এর ক্রিয়ারেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। কাজেই বলগুলির ক্রিয়াবিন্দু O হিসেবে বিবেচনা করা যায়। আবার বলত্রয় সাম্যাবস্থা তৈরি করে বলে লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,



$$\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin EOD}$$

যেহেতু AEOF চতুর্ভূজে $\angle AEO = \angle AFO = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle EOF + \angle A = \pi$ বা, $\angle EOF = \pi - A$

অনুরূপভাবে, $\angle DOF = \pi - B$ এবং $\angle EOD = \pi - C$

$$\therefore \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)}$$

বা, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$ ... ... (i)

এখন, ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

অর্থাৎ P ঃ Q ঃ R = a ঃ b ঃ c

উদাহরণ-6. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I তে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = $\cos\frac{A}{2}$ ঃ $\cos\frac{B}{2}$ ঃ $\cos\frac{C}{2}$। [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১৬; চ: বো: ০৫]

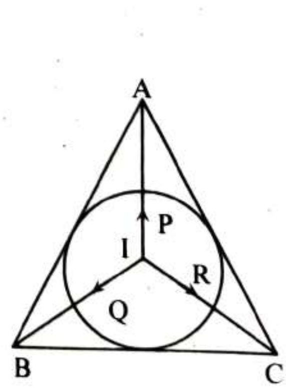
সমাধান: ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P, Q, R বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

কাজেই লামির সূত্র অনুযায়ী, $\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin AIC} = \frac{R}{\sin AIB}$ ... ... (i)

এখানে, $\angle ABI = \angle CBI = \frac{B}{2}$ [যেহেতু, I অন্তঃকেন্দ্র]

$\angle BCI = \angle ACI = \frac{C}{2}$

$\angle CAI = \angle BAI = \frac{A}{2}$



$$\therefore \angle BIC = \pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \pi - \frac{1}{2}(B + C)$$

$$= \pi - \frac{1}{2}(\pi - A) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$$

অনুরূপভাবে, $\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$ এবং $\angle AIC = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$

$\therefore$ (i) নং হতে, $\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}$

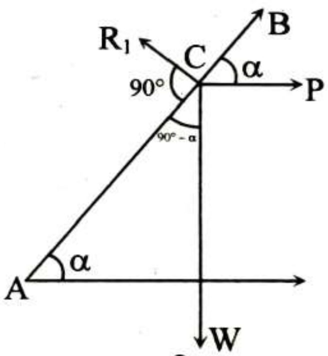
বা, $\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

$\therefore\ P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

উদাহরণ-7. একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল দুইটি পৃথক বল P ও Q এর প্রত্যেকে একাকী W ওজনের কোনো বস্তুকে সমতলের উপর স্থিরভাবে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$ ।

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৬(খ); ব: বো: ১৫; চ: বো: ০৯]

সমাধান: ১ম চিত্রে,



চিত্র-১

α কোণে হেলানো তল AB এর ওপর C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুকে ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত P বল স্থির অবস্থায় রাখে। হেলানো তলটির ওপর বস্তুটির চাপ R_1 ধরা হলে বল R_1, P, W ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।

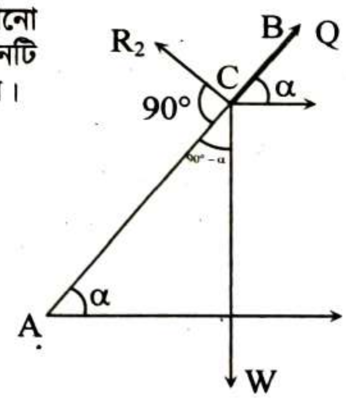
R_1 চাপ AB এর সাথে লম্বিক দিকে হবে।

লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{R_1}{\sin 90°} = \frac{P}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)}$

বা, $\frac{R_1}{1} = \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$

$\therefore\ P = \frac{W\sin\alpha}{\cos\alpha}$ বা, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{W}{P}$ বা, $\cot^2\alpha = \frac{W^2}{P^2}$ ... ... (i)

২য় চিত্রে,



চিত্র-২

হেলানো তলটির দৈর্ঘ্যের দিকে Q বল ক্রিয়াশীল হওয়ায় W ওজনের বস্তুটি হেলানো তলটির ওপর স্থির অবস্থায় থাকে। বস্তুর চাপ R_2 ধরলে R_2, Q, W বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে এবং R_2 চাপ হেলানো তলের সাথে লম্বিক দিকে ক্রিয়াশীল থাকবে।

লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{R_2}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{Q}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin 90°}$

বা, $\frac{R_2}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{1}$

$\therefore\ Q = W\sin\alpha$ বা, $\frac{Q}{\sin\alpha} = W$

বা, $\frac{W}{Q} = \text{cosec}\alpha$

বা, $\frac{W^2}{Q^2} = \text{cosce}^2\alpha$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

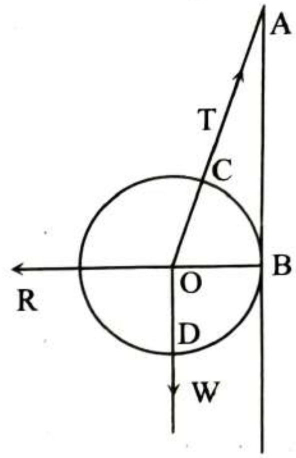
$\frac{W^2}{Q^2} - \frac{W^2}{P^2} = \text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha$

বা, $W^2\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}\right) = 1$

বা, $W^2\left(\frac{P^2 - Q^2}{P^2Q^2}\right) = 1$

$\therefore\ W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$

উদাহরণ-8. ***l*** **দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার একপ্রান্ত কোনো খাড়া দেওয়ালে আটকানো আছে এবং তার অপর প্রান্ত a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোনো বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, সুতাটির টান** $\dfrac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$ **।** [বুয়েট ০৪-০৫; কু: বো: ১৫; দি: বো: ০৯; য: বো: ১৩; ব: বো: ০৬]



সমাধান: BCD গোলকের কেন্দ্র O এবং গোলকটি B বিন্দুতে দেওয়ালকে স্পর্শ করে।. একটি রশি AC এর C প্রান্ত গোলকের ওপর ও A প্রান্ত দেওয়ালে আটকানো আছে। গোলকের ওজন W এর কার্যরেখা OD, যা উল্লম্ব। B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল R, BO বরাবর ক্রিয়া করে।

ধরি, রশির টান = T, CA বরাবর ক্রিয়াশীল।

সাম্যাবস্থার জন্য AC সুতার টানের ক্রিয়ারেখা CA বরাবর ক্রিয়া করবে এবং O বিন্দুগামী হবে। কাজেই, OC এবং CA একই রেখা হবে। O বিন্দুতে, T, W, R সাম্যাবস্থায় আছে।

$\therefore$ লামির উপপাদ্য থেকে পাই, $\dfrac{T}{\sin W \wedge R} = \dfrac{W}{\sin R \wedge T} = \dfrac{R}{\sin T \wedge W}$

$\therefore \dfrac{T}{\sin 90^\circ} = \dfrac{W}{\sin(\pi - AOB)}$

বা, $T = \dfrac{W}{\sin AOB}$ বা, $T = \dfrac{W}{\frac{AB}{OA}}$

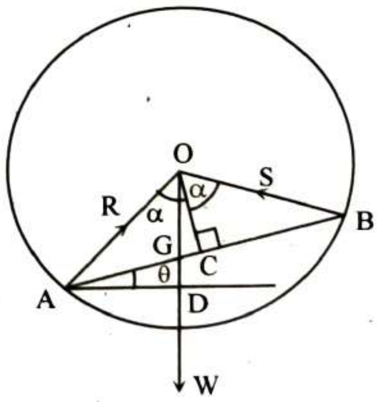
বা, $T = \dfrac{OA}{AB}.W = \dfrac{W(l+a)}{\sqrt{2la+l^2}}$ $\therefore T = \dfrac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$

এখানে, $OA = l + a$

এবং $AB = \sqrt{(a+l)^2 - a^2}$

$= \sqrt{2al + l^2}$

উদাহরণ-9. একটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র একে a এবং b অংশে বিভক্ত করে। এটি একটি মসৃণ গোলকের মধ্যে রাখা হলো। যদি সাম্যাবস্থায় দণ্ডটি ভূমির সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে এবং গোলকের কেন্দ্রে 2α কোণ তৈরি করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$ **।**



সমাধান: মনে করি, দণ্ডটি AB এবং এটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট গোলকের মধ্যে ভূমির সাথে θ কোণে অবস্থিত। দণ্ডটির A এবং B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R এবং S যথাক্রমে AO এবং BO বরাবর ক্রিয়ারত। দণ্ডটির ওজন W দণ্ডটির ওপর G-তে নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। দণ্ডটি ভারসাম্যে থাকায়, W এর ক্রিয়া রেখাও O বিন্দুগামী হবে।

এখন, C, AB এর মধ্যবিন্দু $\therefore OC \perp AB$

$AG = a, BG = b,$

$\angle AOC = \angle BOC = \alpha$ এবং $\angle BAD = \theta$

$\therefore \angle COG = 90^\circ - \angle CGO = 90^\circ - \angle AGD = \theta$

সুতরাং $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AG}{BG} = \dfrac{AC - CG}{BC + CG} = \dfrac{OC\tan AOC - OC\tan COG}{OC\tan BOC + OC\tan COG} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\theta}{\tan\alpha + \tan\theta}$

বা, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\theta}{\tan\alpha - \tan\theta}$

বা, $\dfrac{b-a}{b+a} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\theta - \tan\alpha + \tan\theta}{\tan\alpha + \tan\theta + \tan\alpha - \tan\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\tan\alpha}$

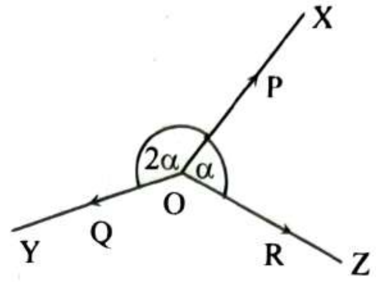
$\therefore \tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

উদাহরণ-10. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে,প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q - P)$।

[বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ১২; দি: বো: ১১; সি: বো: ১৬, ১২; য: বো: ০৯, ০৭; ব: বো: ০৯]

সমাধান: O বিন্দুতে যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। P ও R এর অন্তর্গত কোণ মনে করি α; তাহলে শর্তানুসারে P ও Q এর অন্তর্গত কোণ 2α.

যেহেতু বলত্রয় ভারসাম্য আছে,



তাই লামির সূত্রানুসারে, $\dfrac{P}{\sin(360° - 3\alpha)} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin 2\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{-\sin 3\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{4\sin^2\alpha - 3} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{4(1-\cos^2\alpha) - 3} = \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha} = \dfrac{Q-P}{4\cos^2\alpha}$

$\therefore \dfrac{Q}{1} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$ ... (i) এবং $\dfrac{Q-P}{4\cos^2\alpha} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$ ... (ii)

এখন (i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$\dfrac{Q.(Q-P)}{4\cos^2\alpha} = \left(\dfrac{R}{2\cos\alpha}\right)^2$

বা, $R^2 = Q(Q - P)$ **(প্রমাণিত)**

বিকল্প সমাধান:

O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা রক্ষা করে।

ধরি, $P \wedge R = \alpha \quad \therefore P \wedge Q = 2\alpha$

OX বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে,

$P\cos 0° + Q\cos 2\alpha + R\cos(-\alpha) = 0$

বা, $P + Q\cos 2\alpha + R\cos\alpha = 0$

বা, $P + Q(2\cos^2\alpha - 1) + R\cos\alpha = 0$ ... ... (i)

OX এর ওপর লম্ব বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে

$P\sin 0° + Q\sin 2\alpha + R\sin(-\alpha) = 0$

বা, $Q.\ 2\sin\alpha\cos\alpha - R\sin\alpha = 0 \quad [\because \sin\alpha \neq 0]$

বা, $2Q\cos\alpha = R$ বা, $\cos\alpha = \dfrac{R}{2Q}$

(i) এ $\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে $P + Q\left(2.\dfrac{R^2}{4Q^2} - 1\right) + R.\dfrac{R}{2Q} = 0$

বা, $P + \dfrac{R^2}{2Q} - Q + \dfrac{R^2}{2Q} = 0$ বা, $P + \dfrac{R^2}{Q} - Q = 0$ বা, $PQ + R^2 - Q^2 = 0$

বা, $R^2 = Q^2 - PQ$

$\therefore R^2 = Q(Q - P)$ **(প্রমাণিত)**

অনুশীলনী-৪(B)

Type-I

1. (i) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। $2\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{BC}, 3\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ বলসমূহ একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে, দেখাও যে, এরা ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

(ii) ΔABC এর পরিকেন্দ্র O হতে BC, CA, AB বাহুর ওপর যথাক্রমে OD, OE ও OF লম্ব অঙ্কন করা হলো। দেখাও যে, $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CO}$ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকবে।

(iii) $4 : 7 : 11$ অনুপাতের তিনটি বল কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। বল তিনটি কী সাম্যাবস্থায় থাকবে?

(iv) $1 : 2 : 3$ অনুপাতের তিনটি বল কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। বল তিনটি কী সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে?

(v) কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\sqrt{3}$, 2 এবং 1 একক ওজনের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। এদের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলি নির্ণয় কর।

(vi) 1, 1 ও $\sqrt{2}$ মানের তিনটি বল একটি বস্তুর উপর যথাক্রমে S, T ও U বরাবর ক্রিয়া করে ভারসাম্য রাখে। (S, T) এবং (T, U) এর অন্তর্ভুক্ত কোণগুলি নির্ণয় কর।

(vii) কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। তাদের প্রথম ও দ্বিতীয়টির মধ্যবর্তী কোণ $90°$ এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির মধ্যবর্তী কোণ $120°$ হলে, বলগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

(viii) পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি সুতা একটি বস্তুকে ভারসাম্যে রাখলে এবং তাদের একটি খাড়া রেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করলে, সুতা দুইটির টানের অনুপাত নির্ণয় কর।

(ix) 5 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি বল দ্বারা ভারসাম্যে রাখা হয়েছে। এদের একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। বলদ্বয় নির্ণয় কর.।

(x) O বিন্দুতে নির্দিষ্ট দিকে কার্যরত বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। O বিন্দুগামী কোনো বৃত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়া রেখাগুলিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করলে, দেখাও যে, বলত্রয়ের মান ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হবে।

(xi) যদি P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে P, Q এবং R, P এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [যশোর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৬(ক)]

Type-II

2. (i) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O বিন্দুতে OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলগুলি ক্রিয়ারত আছে। তারা ভারসাম্য সৃষ্টি করলে দেখাও যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$ ।

(ii) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে IA, IB, IC বরাবর P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত আছে। তারা ভারসাম্য সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P^2 : Q^2 : R^2 = a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$ ।

(iii) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB, AD বরাবর যথাক্রমে X ও Y বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে। C হতে A এর দিকে CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বলটির দ্বারা তাদের সমতা রক্ষা করা হলে, দেখাও যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$ । [য: বো: ০৫]

(iv) সমান দৈর্ঘ্যের তিনটি একতলীয় সরলরেখা OA, OB, OC যদি O বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত না হয় এবং P, Q, R বল তিনটি যদি উক্ত রেখাগুলি বরাবর এমনভাবে কার্যরত থাকে যেন $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$ তাহলে, দেখাও যে, P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে।

(v) রম্বসাকৃতি একখানা সুষম পাতের একটি ধার ভূমিতলের সমান্তরাল ও একটি কোণ $120°$; রম্বসটির কেন্দ্র হতে কর্ণ বরাবর P ও Q বলদ্বয় প্রয়োগ করে একে খাড়া রাখা হলো, $P > Q$ হলে দেখাও যে, $P^2 = 3Q^2$. [চ: বো: ১০]

Type-III

3. (i) ACB সুতাটির দুই প্রান্ত একই আনুভূমিক রেখাস্থ A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিঁট দিয়ে বাঁধা হয়েছে। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য a, b, c এবং তার ক্ষেত্রফল Δ হলে, দেখাও যে, সুতাটির CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$। [ঢা: বো: ০৭; চ: বো: ০৭]

(ii) $2l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB আনুভূমিক সরলরেখার A ও B প্রান্তে l ও $2l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সুতার প্রান্তদ্বয় আবদ্ধ রয়েছে। তাদের অপর প্রান্তদ্বয় গিঁট দিয়ে C বিন্দুতে বাঁধা এবং W ওজনের বস্তু বহন করে। সুতাদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

(iii) 31 সে.মি. দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই আনুভূমিক রেখায় 25 সে. মি. দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 7 সে.মি. দূরে তার সাথে 5 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো। সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।

(iv) একই আনুভূমিক রেখায় c একক দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে l একক দীর্ঘ একটি সরু রশির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। অবাধে ঝুলানো W একক ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তুকে বহন করে এমন একটি মসৃণ ওজনবিহীন আংটি ঐ রশির উপর দিয়ে গড়িয়ে চলাচল করতে পারে। দেখাও যে, রশির টান $= \frac{lW}{2\sqrt{l^2 - c^2}}$।

[চ: বো: ১২; কু: বো: ১৬; সি: বো: ০৬]

(v) ভূমিতলের সাথে α ও β কোণে হেলানো দুইটি মসৃণ তল তাদের নিম্ন প্রান্তে মিলিত হয়েছে। W ওজনের একটি গোলক তাদের মধ্যে স্থিরাবস্থায় আছে। তলদ্বয়ের প্রত্যেকটির উপর গোলকের প্রদত্ত চাপ নির্ণয় কর।

(vi) P, Q বলদ্বয় যথাক্রমে একটি নত সমতলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে থেকে প্রত্যেকেই এককভাবে মসৃণ তলের উপরস্থ W ওজনের বস্তু ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$ বা $W = \frac{PQ}{\sqrt{Q^2 - P^2}}$।

[রা: বো: ১১; কু: বো: ১৪, ০৯; চ: বো: ১৪; সি: বো: ১০; য: বো: ১১; ব: বো: ১৬, ১৪]

(vii) দুইটি বলের প্রত্যেকটি আলাদাভাবে W ওজনের একটি বস্তুকে একটি হেলানো তলের উপর সুস্থিত রাখে। উক্ত বলদ্বয়ের একটি হেলানো তল বরাবর এবং অপরটি অনুভূমিকের সমান্তরালে ক্রিয়া করে। দুইটি ভিন্ন ক্ষেত্রে, বস্তুর উপর তলের প্রতিক্রিয়া বল যথাক্রমে R ও R′ হলে, প্রমাণ কর যে, $RR' = W^2$.

(viii) 17 সে.মি. দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় 13 সে.মি. দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সে.মি. দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো। সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৬(গ)]

Type-IV

4. (i) একই আনুভূমিক রেখায় a দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি মসৃণ ও অপ্রসারী রশির দুই প্রান্ত বাঁধা আছে। W ওজনের একটি আংটি গড়িয়ে যখন B বিন্দুর ঠিক নিচে অবস্থান করে, তখন তাকে অনুভূমিক P বলের সাহায্যে স্থির রাখা হয়। প্রমাণ কর যে, $P = \frac{aW}{l}$ এবং সুতার টান $= \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2}$

(ii) ভূমির সাথে α কোণে আনত একটি মসৃণ তলের উপর স্থাপিত একটি বস্তুকে তলের দৈর্ঘ্য বরাবর ক্রিয়াশীল বল P_1 এবং আনুভূমিক বল P_2 মিলিতভাবে তলের উপর সুস্থিত রক্ষা করে। α, P_1, P_2 প্রত্যেকের মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সুস্থিত থাকে। দেখাও যে, $P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$

(iii) একটি উল্লম্ব তলে অবস্থিত 10 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বস্তুর সাথে লম্ব ভাবে অবস্থিত 5 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বল, আনুভূমিকের সাথে $60°$ কোণে ক্রিয়ারত একটি বল F এবং F এর সাথে সমকোণে ক্রিয়ারত অপর একটি বল R সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে দেখাও যে, $F - \sqrt{3}R + 10 = 0$ এবং $\sqrt{3}F + R - 20 = 0$। [বুয়েট ০৩-০৪]

(iv) AB ও AC মসৃণ তলদ্বয় ভূমিতলের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে হেলানো আছে। A বিন্দুর খাড়া উপরে D বিন্দুতে একটি কপিকলের উপর দিয়ে একটি সুতার দুই প্রান্তে সংযুক্ত W এবং 2W ওজনের দুইটি বস্তু যথাক্রমে AB ও AC তলের উপর বসানো আছে। সুতার অংশদ্বয় যথাক্রমে AB ও AC এর সাথে β ও α কোণ উৎপন্ন করলে, প্রমাণ কর যে, $\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$.

5. (i) ভূমির সাথে α কোণে আনত একটি মসৃণ তলের উপর একটি বস্তু উল্লম্বের সাথে γ কোণে আনত একটি রশির সাহায্যে সুস্থিত রয়েছে। তলের নতি $\beta(> \alpha)$ হলে এবং উল্লম্বের সাথে রশির আনতি অপরিবর্তিত থাকলে বস্তুকে সুস্থিত রাখতে রশির টান দ্বিগুণ করতে হবে। প্রমাণ কর যে, $\cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta$।

(ii) একটি ভারী সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালে ঠেস দিয়ে এবং অপর প্রান্ত এই খাড়া দেওয়ালের সাথে θ কোণে আনত অপর একটি মসৃণ তলের উপর অবস্থিত। সাম্যাবস্থায় দণ্ডটি অনুভূমিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, দেখাও যে, $\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\theta$।

(iii) আনুভূমিকের সাথে α কোণে নত সুষম দণ্ড AB এর ওপরের প্রান্ত A একটি মসৃণ খুঁটির উপরের প্রান্তের সংস্পর্শে রয়েছে। নিচের প্রান্ত B, A বিন্দুর সম-উচ্চতায় অবস্থিত C বিন্দুর সঙ্গে আনুভূমিকের সাথে β কোণে আনত একটি সরু তার দ্বারা যুক্ত। প্রমাণ কর যে, $\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$।

(iv) ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত O একটি বিন্দু। $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, O বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দু।

6. (i) 2a দীর্ঘ একটি ভারী সমরূপ দণ্ডের এক প্রান্তকে একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের সংস্পর্শে রেখে এটি হতে b দূরত্বে একটি মসৃণ খুঁটির উপর দণ্ডটি সুস্থিত রয়েছে। প্রমাণ কর যে, খাড়া রেখার সাথে দণ্ডটির নতি θ হলে, $\theta = \sin^{-1}(b/a)^{1/3}$।

(ii) 2a দীর্ঘ একটি ভারী সুষম দণ্ড একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালে ঠেস দিয়ে দেওয়ালটি হতে b দূরত্বে অবস্থিত একটি খাড়া মসৃণ খুঁটির উপর সুস্থিত রয়েছে। অনুভূমিক রেখার সাথে দণ্ডের নতি ϕ হলে, দেখাও যে, $\phi = \cos^{-1}(b/a)^{1/3}$।

উত্তরমালা

1. **(iii)** সাম্যাবস্থায় থাকবে না। **(iv)** সাম্যাবস্থায় থাকবে না। **(v)** $150°, 120°$ ও $90°$ **(vi)** $90°$ এবং $135°$ **(vii)** $\sqrt{3} : 1 : 2$ **(viii)** $\sqrt{3} : 1$ **(ix)** $5\sqrt{3}$ ও 10 কেজি ওজন **(xi)** $90°, 135°$;

3. **(ii)** $T_1 = \frac{7W}{2\sqrt{15}}, T_2 = \frac{W}{\sqrt{15}}$ **(iii)** $4\frac{4}{5}$ কেজি ওজন ও $1\frac{2}{5}$ কেজি ওজন।

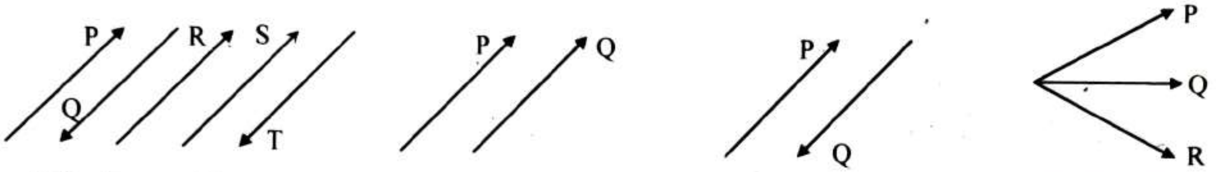
(v) $\frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ **(viii)** $\frac{36}{13}$ kg; $\frac{15}{13}$ kg

পাঠ-১২

8.11 জড়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বলের লব্ধি
(Resultant of parallel forces acting on a rigid body)

8.11.1 সমান্তরাল, সদৃশ সমান্তরাল ও অসদৃশ সমান্তরাল বল
(Parallel, like Parallel and Unlike Parallel Forces)

দুই বা ততোধিক বলের ক্রিয়ারেখাগুলি সমান্তরাল হলে বলগুলিকে **সমান্তরাল** বল বলা হয়।
দুইটি সমান্তরাল বলের দিক একই হলে বল দুইটিকে **সদৃশ সমান্তরাল** বল বলা হয়।
দুইটি সমান্তরাল বলের দিক বিপরীতমুখী হলে বল দুইটিকে **অসদৃশ সমান্তরাল** বল বলা হয়।



সমান্তরাল বলের চিত্র (এখানে P, Q, R, S ও T বলগুলি সমান্তরাল)

সদৃশ সমান্তরাল বলের চিত্র (এখানে P ও Q সদৃশ সমান্তরাল)

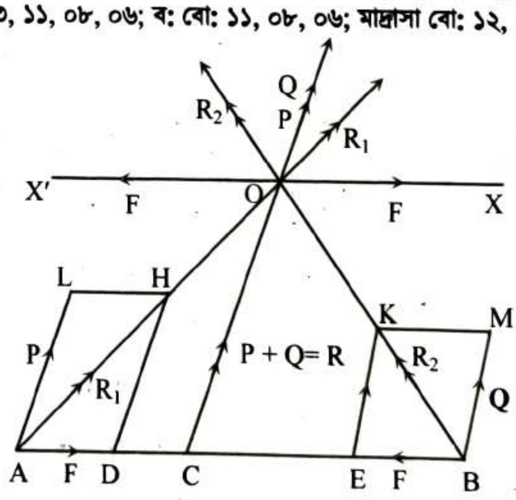
অসদৃশ সমান্তরাল বলের চিত্র (এখানে P ও Q অসদৃশ সমান্তরাল)

অসমান্তরাল বলের চিত্র (এখানে P, Q ও R বলত্রয় অসমান্তরাল)

8.11.2 দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান, দিক ও ক্রিয়াবিন্দু (Magnitude, Direction and Point of Action of the Resultant of Two Like Parallel Forces)

[ঢা: বো: ১৫, ১৩, ১১, ০৬; রা: বো: ১৫, ১২, ১০, ০৮, ০৬; দি: বো: ১৫, ১২, ১০; কু: বো: ১৩, ১০, ০৭, ০৫; চ: বো: ১৫, ১৩, ১১, ০৮, ০৬; সি: বো: ১৬, ১৫, ১৩, ১০, ০৮, ০৬; য: বো: ১৩, ১১, ০৮, ০৬; ব: বো: ১১, ০৮, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]

মনে করি, কোনো জড়বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q ক্রিয়ারত। AL ও BM সরলরেখা দ্বারা মানে ও দিকে P ও Q বল দুইটিকে সূচিত করা হলো।
A, B যোগ করি এবং AB রেখাংশের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে AB ও BA বরাবর F মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করি। এই বলদ্বয়কে মানে ও দিকে AD ও BE দ্বারা সূচিত করি। বল দুইটি পরস্পর সমান ও একই সরলরেখায় বিপরীতমুখী হওয়ায় পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে। ADHL এবং BEKM সামান্তরিকদ্বয় অঙ্কন করি।
ধরি, A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও F বলের লব্ধি R_1 এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও F বলের লব্ধি R_2।



তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, কর্ণ AH ও কর্ণ BK দ্বারা যথাক্রমে R_1 ও R_2 লব্ধিদ্বয় সূচিত হবে।
এখন AH ও BK বর্ধিত করি, ধরি তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল XOX′ এবং AL বা BM এর সমান্তরাল করে OC রেখা অঙ্কন করি যেন তা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।
R_1 ও R_2 লব্ধি বলদ্বয়ের ক্রিয়া বিন্দু A ও B হতে O বিন্দুতে স্থানান্তর করি। তাহলে O বিন্দুতে AO বরাবর ক্রিয়ারত R_1 বলকে AL এর সমান্তরাল CO বরাবর P বল এবং AD এর সমান্তরাল OX বরাবর F বলে বিভাজিত করা যায়।
অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে BO বরাবর ক্রিয়ারত R_2 বলকে BM এর সমান্তরাল CO বরাবর Q বল এবং BE এর সমান্তরাল OX′ বরাবর F বলে বিভাজিত করা যায়।
O বিন্দুতে একই XOX′ রেখার OX ও OX′ বরাবর F মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল ক্রিয়ারত হওয়ায় তারা পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে।

সুতরাং; কেবলমাত্র P ও Q বল দুইটির লব্ধি (P + Q), CO বরাবর অর্থাৎ P ও Q এর সমান্তরাল দিকে C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়: যেহেতু $AL \parallel DH \parallel CO$

সুতরাং ΔADH ও ΔACO সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AC}{CO} = \dfrac{AD}{DH} = \dfrac{AD}{AL} = \dfrac{F}{P} \quad \therefore P.AC = F.CO \qquad \ldots\ldots\ldots (i)$

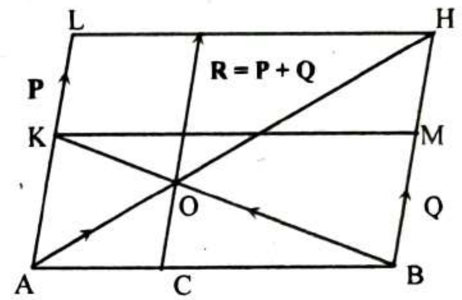
অনুরূপে, ΔBOC ও ΔBEK সদৃশ হতে পাই

$\therefore Q.BC = F.CO \qquad \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) হতে, $P.AC = Q.BC$ বা, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{Q}{P}$

অতএব, C বিন্দুটি AB রেখাকে অন্তস্থভাবে বল দুইটির ব্যস্তানুপাতে বিভক্ত করে।

বিকল্প পদ্ধতি (ভেক্টর পদ্ধতি): মনে করি কোনো জড়বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল **P** ও **Q** যথাক্রমে AL ও BM দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশিত।



এখন A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$ বলদ্বয় প্রয়োগ করি। এদের ক্রিয়ারেখা একই এবং মান পরস্পর সমান কিন্তু দিক বিপরীতমুখী।

কাজেই $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$ এবং এ বলদ্বয় নির্ণেয় লব্ধিকে প্রভাবিত করবে না।

ABHL ও BAKM সামান্তরিকদ্বয় এবং তাদের কর্ণ AH ও BK অঙ্কন করি। মনে করি কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে এবং O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত **P** ও **Q** বল দুইটির ক্রিয়া রেখার সমান্তরাল রেখা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, **P** ও **Q** বলের লব্ধি **R**

তাহলে, $\mathbf{R} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \quad [\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}]$

$= (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA})$

$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BK}$ [বলের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী]

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OK} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH})$

এখন বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BM} = \mathbf{Q}$ যা O বিন্দুতে BM এর সমান্তরাল রেখা CO বরাবর ক্রিয়াশীল। অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AL} = \mathbf{P}$ যা O বিন্দুতে AL এর সমান্তরাল রেখা CO বরাবর ক্রিয়াশীল।

এখন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু O হতে C তে স্থানান্তর করলে পাই,

$R = P + Q$, যা C বিন্দুতে CO বরাবর ক্রিয়াশীল।

C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়: ΔABH ও ΔAOC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{CO} \qquad \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, ΔABK ও ΔBOC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AK}{CO} \qquad \ldots\ldots\ldots (ii)$

(ii) ÷ (i) হতে পাই, $\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BH}$

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BM}{AL} = \frac{Q}{P}$

$\therefore$ $P.AC = Q.BC$

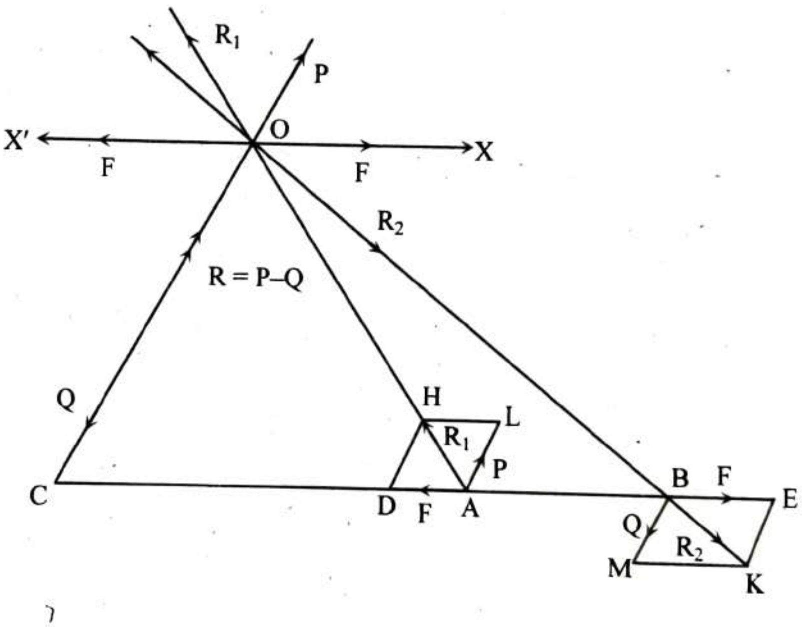
বা, $\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$

$\therefore$ C বিন্দুটি AB রেখাকে অন্তস্থভাবে বল দুইটির মানের ব্যস্তানুপাতে বিভক্ত করে।

8.11.3 দুইটি অসদৃশ ও অসমান বলের লব্ধির মান, দিক ও ক্রিয়াবিন্দু (Magnitude, Direction and Point of Action of the Resultant of Two Unlike and Unequal Parallel Forces)

[ঢা বো: ১৬, ১২, ১০, ০৯, ০৭, ০৫; দি: বো: ১৬, ১৩, ১১, ০৯; য: বো: ১৬, ১৫, ১২, ০৯, ০৭, ০৫; চ: বো: ১২, ১০, ০৫; ব: বো: ১৬, ১৫, ১২, ০৯, ০৭, ০৫; সি: বো: ১২, ০৯, ০৭, ০৫; রা: বো: ১৬, ১৩, ১০, ০৯, ০৭, ০৫; কু: বো: ১৬, ১৫, ১১, ০৮, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১১]

মনে করি, কোনো জড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল P ও Q ক্রিয়ারত। $P>Q$ ধরে মানে ও দিকে বলদ্বয়কে যথাক্রমে AL ও BM সরলরেখা দ্বারা সূচিত করি।



AB যোগ করি এবং AB রেখাংশের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে BA ও AB বরাবর F মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করি।

এই বলদ্বয়কে মানে ও দিকে AD ও BE দ্বারা সূচিত করি। বল দুইটি সমান ও একই সরলরেখায় বিপরীতমুখী হওয়ায় পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে।

ADHL এবং BEKM সামান্তরিকদ্বয় অঙ্কন করি। মনে করি, A বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও F বলের লব্ধি R_1 এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও F বলের লব্ধি R_2। তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে, কর্ণ AH ও BK দ্বারা যথাক্রমে R_1 ও R_2 লব্ধিদ্বয় সূচিত হবে।

AH ও BK বর্ধিত করি, ধরি তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল XOX′ এবং AL বা BM এর সমান্তরাল করে OC রেখা অঙ্কন করি যেন তা বর্ধিত AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

R_1 ও R_2 লব্ধি বল দুইটির ক্রিয়া বিন্দু A ও B হতে O বিন্দুতে স্থানান্তর করি। তাহলে O বিন্দুতে AO বরাবর ক্রিয়ারত R_1 বলকে AL এর সমান্তরাল CO বরাবর P বল এবং AD এর সমান্তরাল OX′ বরাবর F বলে বিভাজিত করা যায়।

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে OB বরাবর ক্রিয়ারত R_2 বলকে BM এর সমান্তরাল OC বরাবর Q বল এবং BE এর সমান্তরাল OX বরাবর F বলে বিভাজিত করা যায়।

O বিন্দুতে একই রেখায় OX ও OX′ বরাবর F মানের দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল ক্রিয়া করায় তারা পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করে।

সুতরাং কেবলমাত্র P ও Q বল দুইটির লব্ধি P – Q বলটি বৃহত্তর P বলের সাথে সমমুখী সমান্তরাল দিকে (CO বরাবর) C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হবে।

C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়: যেহেতু AL || DH || CO সুতরাং ΔHLA ও ΔACO সদৃশ

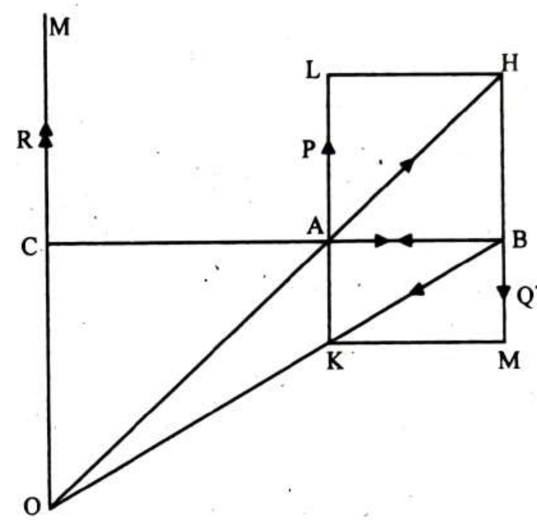
$\therefore \dfrac{CA}{OC} = \dfrac{LH}{AL} = \dfrac{AD}{AL} = \dfrac{F}{P} \quad \therefore P.CA = F.OC$ ... ... (i)

অনুরূপে, ΔBCO ও ΔBEK সদৃশ হতে পাই $Q.BC = F.CO$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) হতে, $P.CA = Q.BC$ বা, $\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{Q}{P}$

অতএব, C বিন্দুটি AB রেখাকে বহিস্থভাবে বল দুইটির ব্যস্তানুপাতে বিভক্ত করে।

বিকল্প পদ্ধতি (ভেক্টর পদ্ধতি): মনে করি কোন জড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে দুইটি অসমান অসদৃশ সমান্তরাল বল **P** ও **Q** (**P** > **Q**) যথাক্রমে $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{BM}$ দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত।



A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$ বলদ্বয় প্রয়োগ করি। যেহেতু বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা একই এবং মান পরস্পর সমান কিন্তু দিক বিপরীতমুখী। কাজেই $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \underline{0}$ এবং এ বলদ্বয় নির্ণেয় লব্ধিকে প্রভাবিত করবে না।

ABHL ও BAKM সামান্তরিকদ্বয় ও তাদের কর্ণ AH ও BK অঙ্কন করি।

HA ও BK বর্ধিত করি, যেন তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। আবার O বিন্দুতে, প্রদত্ত বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল করে OC রেখা অঙ্কন করি যেন, তা বর্ধিত BA কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি **P** ও **Q** বলের লব্ধি **R**

তাহলে $\mathbf{R} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} \quad [\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}]$

$= (\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BK}$ [বলের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী]

$= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{KO}$

$= (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK})$

এখন বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AL} = \mathbf{P}$ যা O বিন্দুতে OC বরাবর ক্রিয়াশীল।

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BM} = \mathbf{Q}$ যা O বিন্দুতে CO বরাবর ক্রিয়াশীল।

এখন O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বল দুইটি একই রেখা বরাবর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হওয়ায় লব্ধির মান উহাদের বিয়োগফলের সমান।

$\therefore$ **R = P – Q** যা O বিন্দুতে OC বরাবর ক্রিয়াশীল। লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার C বিন্দুতে স্থানান্তর করে পাই **R = P – Q** যা C বিন্দুতে CM বরাবর ক্রিয়াশীল।

C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়:

ΔABH ও ΔAOC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{CO}$ ... ... (i)

আবার, ΔABK ও ΔBOC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AK}{CO}$ ... ... (ii)

(ii) ÷ (i) হতে পাই,

$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AK}{BH} \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BM}{AL} \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{Q}{P}$

$\Rightarrow P.AC = Q.BC$

অতএব C বিন্দুটি AB রেখাকে **P** ও **Q** বলদ্বয়ের মানের ব্যস্তানুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

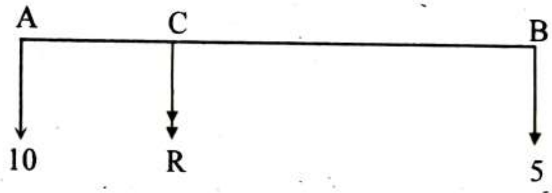
বিশেষ দ্রষ্টব্য: সদৃশ ও বিসদৃশ সমান্তরাল উভয়ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $P.AC = Q.BC$

বা, $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{P+Q}{BC+AC}$ [সদৃশ সমান্তরাল] এবং $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{P-Q}{BC-AC}$ [বিসদৃশ সমান্তরাল]

বা, $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{P+Q}{AB}$ এবং $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{P-Q}{AB}$

উদাহরণ-1. 39 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 10 কেজি ও 5 কেজি ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি ও প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর যখন (i) বলদ্বয় সদৃশ (ii) বলদ্বয় অসদৃশ।

সমাধান: (i) মনে করি, A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 10 কেজি ও 5 কেজি ওজনের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি $R = (10 + 5)$ বা, 15 কেজি ওজন।



$\therefore 10 \times AC = 5 \times BC$

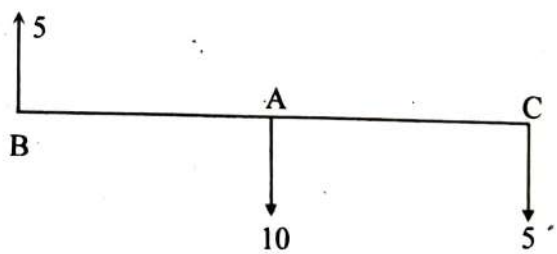
বা, $\dfrac{AC}{5} = \dfrac{BC}{10}$

বা, $\dfrac{AC}{1} = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AC+BC}{1+2} = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{39}{3} = 13$

$\therefore AC = 13$ এবং $BC = 26$

$\therefore$ লব্ধি 15 কেজি এবং এটি বৃহত্তর বল হতে 13 সে.মি. দূরে ক্রিয়া করে।

(ii) মনে করি, A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 10 ও 5 কেজি ওজনের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি বর্ধিত BA কে C বিন্দুতে ছেদ করে এবং এদের লব্ধি = $(10 - 5)$ বা, 5 কেজি ওজন।



$\therefore 10 \times AC = 5 \times BC$

বা, $\dfrac{BC}{10} = \dfrac{AC}{5}$

বা, $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{AC}{1} = \dfrac{BC-AC}{2-1} = \dfrac{AB}{1} = 39$

$\therefore AC = 39$ সে.মি.

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর বলের বিপরীতে লব্ধি 5 কেজি ওজন যা বৃহত্তর বল থেকে 39 সে.মি. দূরে ক্রিয়া করে।

কাজ: 1. 5 মিটার দীর্ঘ সমরূপ AB তক্তাটি A ও B বিন্দুতে দুইটি খুঁটির উপর অবস্থিত। A বিন্দু থেকে 2 মিটার দূরত্বে তক্তার ওপর 80 কেজি ওজনের একজন লোক দাড়ালে, খুঁটিদ্বয়ের উপর কী পরিমাণ চাপ পড়বে তা নির্ণয় কর।

2. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি 36 ডাইন যা এদের একটি হতে 5 সে.মি. এবং অপরটি হতে 7 সে.মি. দূরে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।

3. A এবং B দুইটি কিলকের ওপর 8(আট) মিটার দীর্ঘ একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্ত স্থাপিত রয়েছে। দণ্ডের ওপরস্থ C বিন্দুতে একটি ভারী ওজন ঝুলছে। যদি $AC = 3BC$ হয় এবং B বিন্দুতে চাপের পরিমাণ 5 কিলোগ্রাম বেশি হয়, তবে বস্তুটির ওজন নির্ণয় কর।

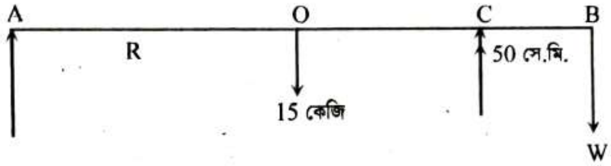
পাঠ-১৩ ও ১৪

উদাহরণমালা

উদাহরণ-2. 4 মিটার দীর্ঘ এবং 15 কেজি ওজনের AB একটি সমরূপ তক্তা দুইটি অবলম্বনের ওপর স্থির আছে। একটি অবলম্বন A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 50 সে.মি. ভিতরে অবস্থিত। একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর ওপর দিয়ে B প্রান্তে পৌছতে সক্ষম হলে বালকটির ওজন কত?

সমাধান: মনে করি, 15 কেজি ওজনের AB সমরূপ তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। একটি অবলম্বন A বিন্দুতে এবং অপর অবলম্বন B বিন্দু থেকে 50 সে.মি. ভিতরে C বিন্দুতে অবস্থিত।

$\therefore$ AB = 4 মিটার, $AO = BO = \frac{4}{2} = 2$ মিটার



BC = 50 সে.মি. $= \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ মিটার।

$OC = OB - BC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ মিটার।

ধরি, বালকটির ওজন W, যা B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

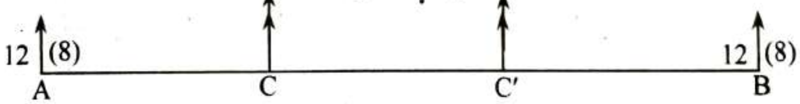
যেহেতু বালকটি তক্তাটিকে না উল্টিয়ে B বিন্দুতে পৌছাতে সক্ষম। তক্তাটি সুস্থিত থাকবে যদি ওজনদ্বয়ের লব্ধি (15 + W), C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। $\therefore 15.OC = W.BC$

বা, $15 \times \frac{3}{2} = W.\frac{1}{2}$ বা, W = 45 কেজি

$\therefore$ বালকটির ওজন 45 কেজি।

উদাহরণ-3. 12 কেজি ও 8 কেজি মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোনো কঠিন বস্তুর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। বল দুইটির অবস্থান পরস্পর পরিবর্তন করা হলে তাদের লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু AB বরাবর কত দূরে সরে যাবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 12 কেজি ও 8 কেজি মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করছে।



$\therefore \quad 12.AC = 8.BC$

বা, $3.AC = 2.BC$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{3}{2} = \frac{BC}{AC}$ বা, $\frac{3+2}{2} = \frac{BC+AC}{AC}$

বা, $\frac{5}{2} = \frac{AB}{AC}$ $[\because AB = BC + AC]$

$\therefore \quad AC = \frac{2}{5}AB \quad \text{... ... ... (i)}$

আবার, বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যদি লব্ধি C′ বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাহলে

$12.\,BC' = 8.AC'$

বা, $3.BC' = 2.AC'$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{2}{3} = \frac{BC'}{AC'}$ বা, $\frac{2+3}{3} = \frac{BC'+AC'}{AC'}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{5}{3} = \frac{AB}{AC'}$ $[\because AB = BC' + AC']$

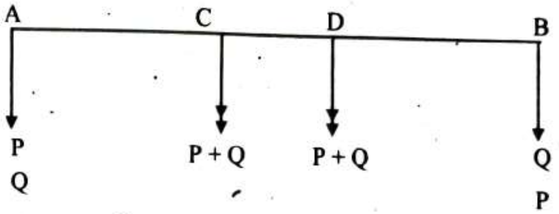
$\therefore \quad AC' = \frac{3}{5}AB \quad \text{... ... ... (ii)}$

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই, $AC' - AC = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) AB$ $\therefore CC' = \frac{1}{5} AB$ $[\because CC' = AC' - AC]$

অর্থাৎ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর $\frac{1}{5}$ AB দূরে সরে যায়।

উদাহরণ-4. কোনো অনড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ক্রিয়ারত দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P > Q) এর পরস্পরের অবস্থান বিনিময় করলে, দেখাও যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যাবে, যখন $d = \frac{P - Q}{P + Q} AB$। [ঢা: বো: ১৬; রা: বো: ১৩; কু: বো: ১২; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৫]

সমাধান: মনে করি, A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q (P > Q) বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে।



তাহলে, $P. AC = Q. BC$

বা, $P.AC = Q(AB - AC)$

বা, $(P + Q) AC = Q.AB$

$\therefore AC = \frac{Q}{P + Q} . AB$ ……… (i)

এখন, P ও Q বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে Q ও P বলদ্বয় ক্রিয়া করবে এবং মনে করি, তাদের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

তাহলে, $Q. AD = P. BD$

বা, $Q. AD = P(AB - AD)$ বা, $(P + Q) AD = P.AB$ $\therefore AD = \frac{P}{P + Q} . AB$ ……… (ii)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $d = CD = AD - AC = \frac{P}{P + Q} . AB - \frac{Q}{P + Q} .AB$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= \frac{1}{P + Q} (P - Q). AB$ $\therefore d = \frac{P - Q}{P + Q} .AB$

উদাহরণ-5. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে,

(i) $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$. [বুয়েট ৯৮-৯৯; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১২; রা: বো: ১৪, ০৭]

(ii) P ঃ Q ঃ R = sin A ঃ sin B ঃ sin C [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৬(খ); চুয়েট ০৩-০৪; দি: বো: ১৩; সি: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ব: বো: ১৬, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১, ১০]

সমাধান: ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। A, B, C কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, I হলো, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।
যেহেতু বল তিনটির লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু I, কাজেই Q এবং R বলদ্বয়ের লব্ধি অবশ্যই বর্ধিত AI রেখার D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। যেহেতু AD রেখা A কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

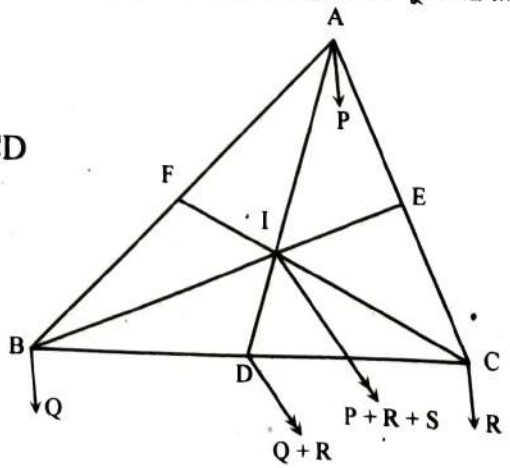
$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ……… (i)

কিন্তু Q ও R এর লব্ধি D বিন্দুগামী হওয়ায়, $Q.BD = R.CD$

বা, $\frac{BD}{CD} = \frac{R}{Q}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{R}{Q} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}$



$$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB} \text{ বা, } \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \text{ .... (iii)}$$

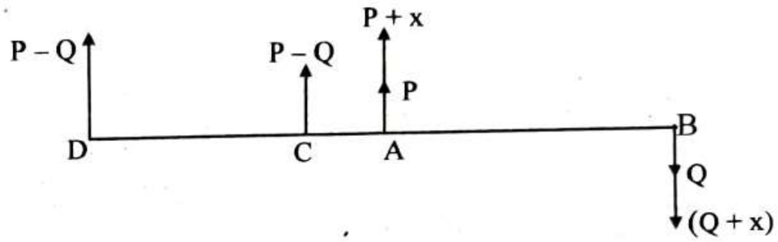
আবার, ΔABC হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .... (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে পাই, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$ বা, $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

উদাহরণ-6. দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P > Q) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত। P এবং Q এর প্রত্যেককে x পরিমাণে বৃদ্ধি করলে দেখাও যে, তাদের লব্ধিটি d দূরত্বে সরে যাবে, যখন $d = \frac{x}{P - Q}.AB$।

[ঢা: বো: ১৫, ১৩, ০৫; য: বো: ১৬, ১৫; রা: বো: ১০; চ: বো: ০৯; কু: বো: ১৬, ০৫; ব: বো: ১৪, ০৬]

সমাধান: মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি (P – Q) বলটি বর্ধিত BA এর উপরস্থ C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



তাহলে, $P.AC = Q.BC$

বা, $P.AC = Q.(AB + AC)$

বা, $(P - Q).AC = Q.AB$

$$\therefore AC = \frac{Q}{P - Q}.AB \text{ ... ... (i)}$$

এখন, P ও Q এর প্রত্যেককে x পরিমাণে বৃদ্ধি করলে, A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল হবে $(P + x)$ এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল হবে $(Q + x)$ এবং তাদের লব্ধি $(P + x) - (Q + x)$ বা $(P - Q)$ বলটি বর্ধিত BA এর ওপরস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, $(P + x).AD = (Q + x).BD$

বা, $(P + x).AD = (Q + x).(AB + AD)$ বা, $(P - Q).AD = (Q + x).AB$

$$\therefore AD = \frac{Q + x}{P - Q}.AB \text{ ... ... (ii)}$$

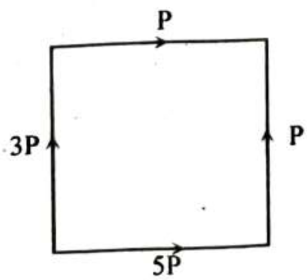
(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $d = CD = AD - AC = \frac{Q + x}{P - Q}.AB - \frac{Q}{P - Q}.AB = \frac{1}{P - Q}(Q + x - Q).AB$

$$\therefore d = \frac{x}{P - Q}.AB$$

উদাহরণ-7. দৃশ্যকল্প-I: W ওজনের একটি সামান্তরিক আকৃতির পাতের সন্নিহিত বাহুদ্বয় বরাবর P ও 2P মানের দুটি বল ক্রিয়ারত থেকে পাতটিকে সুস্থিত রাখে, যেখানে W ওজনের ক্রিয়ারেখা P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব হয়। P বলের ক্রিয়ারেখা ভূমির সমান্তরাল।

দৃশ্যকল্প-II: একটি বর্গক্ষেত্রের চার বাহু বরাবর নিম্নোক্ত উপায়ে বলগুলো ক্রিয়ারত



ক. $\sqrt{3}$ একক মানের দুইটি সমান বল 120° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধি বলের মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-I হতে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-II এ ক্রিয়ারত বলগুলির লব্ধি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. লব্ধির মান $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{3}\cos 120°}$

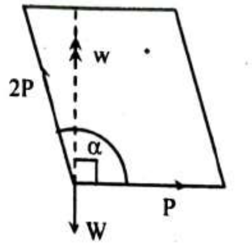
$= \sqrt{3 + 3 + 2 \times 3\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$

খ. দেওয়া আছে, বলদ্বয় P ও 2P, W ওজনের সামান্তরিককে স্থির রাখে এবং ধরি, ক্রিয়া রেখার মধ্যবর্তী কোণ α অর্থাৎ P ও 2P বলদ্বয়ের লব্ধি W

তাহলে আমরা পাই,

$\tan 90° = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha}$



বা, $\frac{P + 2P\cos\alpha}{2P\sin\alpha} = \cot 90°$

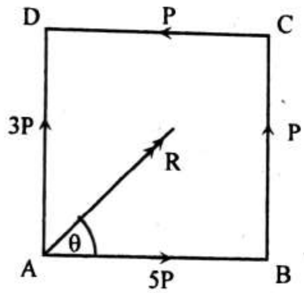
বা, $P + 2P\cos\alpha = 0$

বা, $2P\cos\alpha = -P$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ বা, $\alpha = 120°$

$\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°।

গ.



বলগুলির ক্রিয়া বিন্দুকে A বিন্দুতে স্থানান্তর করি।

ধরি, বলগুলির লব্ধি R, 5P বলের ক্রিয়ারেখা AB এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

AB বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 5P\cos0° + P\cos90° + P\cos180° + 3P\cos90° = 5P + 0 - P + 0 = 4P$

আবার, AB এর লম্ব AD বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\sin\theta = 5P\sin0° + P\sin90° + P\sin180° + 3P\sin90° = 0 + P + 0 + 3P = 4P$

$\therefore$ লব্ধির মান, $R = \sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2} = \sqrt{(4P)^2 + (4P)^2} = 4\sqrt{2}\,P$

অতএব, নির্ণেয় লব্ধি $4\sqrt{2}P$ একক

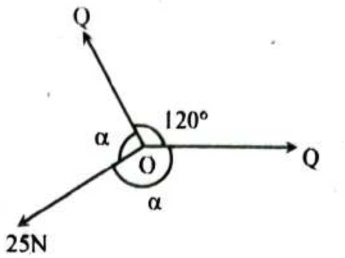
উদাহরণ-8. 200 সে.মি. দীর্ঘ AB হালকা দণ্ডটির A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 12 কেজি ও 8 কেজি মানের দুইটি বস্তু ঝুলানো আছে।

ক. কোন বিন্দুতে Q মানের দুইটি সমান বল 120° কোণে ক্রিয়ারত। একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 25N বলের সাহায্যে এদেরকে ভারসাম্য রাখা হয়। Q-এর মান নির্ণয় কর।

খ. বস্তুদ্বয় স্থান বিনিময় করলে লব্ধি কত দূরে সরে যাবে?

গ. এক ব্যক্তি 100 সে.মি. ব্যবধানে দণ্ডটি বস্তুসহ দুই হাত দিয়ে বহন করতে চান। কোন অবস্থানের জন্য দুই হাতের উপর প্রযুক্ত বল সমান হবে?

সমাধান: ক. যেহেতু বলদ্বয় সমান এবং 25N বলের সাথে একই বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে, কাজেই 25N বলের সাথে উভয় বলই সমান কোণ উৎপন্ন করবে।



ধরি, Q ও 25N বলের অন্তর্গত কোণ α,

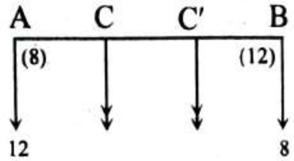
$\therefore \alpha + \alpha + 120° = 360°$

বা, $\alpha = 120°$

এখন লামির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$\dfrac{Q}{\sin 120°} = \dfrac{25}{\sin 120°}$ বা, $Q = 25N$

খ. মনে করি, 200 সে.মি. দীর্ঘ AB হালকা দণ্ডটির A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 12 কেজি ও 8 কেজি মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল ওজন বল ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করছে।



$\therefore\ 12.AC = 8.BC$

বা, $3AC = 2BC$

বা, $3AC = 2(AB - AC)$

বা, $3AC = 2AB - 2AC$

বা, $5AC = 2AB$

বা, $AC = \dfrac{2}{5}AB$

বা, $AC = \dfrac{2}{5}.200$ [$\because AB = 200$ সে.মি.]

$\therefore\ AC = 80$ সে.মি.

আবার, বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যদি লব্ধি C′ বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তাহলে, $8AC' = 12BC'$

বা, $2AC' = 3BC'$

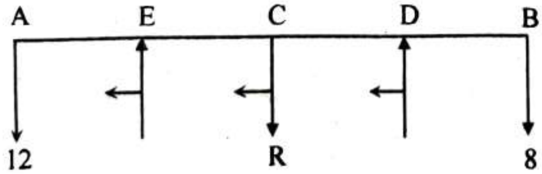
বা, $2AC' = 3(AB - AC')$

বা, $5AC' = 3AB$ বা, $AC' = \dfrac{3}{5}.AB$

বা, $AC' = \dfrac{3}{5}.200$ $\therefore AC' = 120$ সে.মি.

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর সরে যাবে (120 – 80) সে.মি. = 40 সে.মি.

গ.



মনে করি, E ও D বিন্দুতে দুই হাত স্থাপন করে AB দন্ডের A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 12 কেজি ও 8 কেজি ওজন স্থাপন করলে দুই হাতের উপর সমান চাপ পড়ে। সুতরাং C হবে DE এর মধ্যবিন্দু

এখানে, AB = 200 সে.মি., DE = 100 সে.মি.

$\therefore CE = CD = 100 \div 2 = 50$ সে.মি.

'খ' হতে পাই, $AC = 80$ সে.মি. এবং $BC = 200 - 80 = 120$ সে.মি.

$\therefore AE = AC - CE = 80 - 50 = 30$ সে.মি.

এবং $BD = BC - CD = 120 - 50 = 70$ সে.মি.

$\therefore$ A প্রান্ত হতে 30 সে.মি. দূরে একটি হাত এবং B প্রান্ত থেকে 70 সে.মি. দূরে অপর হাতটি থাকবে।

অনুশীলনী-৪(C)

Type-I

1. (i) 5 মিটার লম্বা আনুভূমিক একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটি রয়েছে।

(a) এক প্রান্ত থেকে 4 মিটার দূরে 500 কেজি ওজনের একটি ভারী বস্তু ঝুলানো হলে। খুঁটির ঠেস বিন্দু দুইটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

(b) একটি খুঁটি যদি 200 কেজি চাপ সহ্য করতে পারে তবে অপর খুঁটি থেকে সর্বোচ্চ কত দূরে 500 কেজি ওজন ঝুলানো যাবে?

(ii) দুইজন লোকের একজন এক প্রান্ত থেকে $\frac{1}{2}$ মিটার দূরে এবং অপর জন অপর প্রান্ত থেকে $\frac{1}{4}$ মিটার দূরে 85 কেজি ওজনের 5 মিটার লম্বা একটি সুষম দণ্ড বয়ে নিয়ে যাচ্ছে। কে কী পরিমাণ ওজন বহন করবে?

(iii) 3.5 মিটার দীর্ঘ একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে 21 ও 49 কেজি ওজনের দুইটি বস্তু ঝুলানো আছে। একটি লোক এক হাত দিয়ে দুইটি বস্তুকেই সমভাবে বহন করতে চায়। সে দণ্ডটির কোথায় ধরবে এবং কত ওজন বহন করবে?

(iv) 6 মিটার লম্বা একটি সুষম তক্তা দুইটি খুঁটির সাহায্যে সুস্থিত আছে। একটি খুঁটি তক্তার এক প্রান্তে ও অপর খুঁটিটি তক্তার অপরপ্রান্ত হতে 1 মিটার ভিতরে অবস্থিত। এই প্রান্তে সর্বোচ্চ 30 কেজি ওজন ঝুলানো হলেও যদি তক্তাটি সুস্থিত থাকে তবে তক্তার ওজন কত?

(v) মিটার প্রতি 2 কিলোগ্রাম ওজনের একটি সুষম দণ্ডের এক প্রান্তে 6 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বস্তু ঝুলালে ঐ প্রান্ত থেকে 2 মিটার দূরত্বে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(vi) একই আনুভূমিক রেখায় দুইটি মসৃণ খুঁটির A ও B এর ওপর একটি হালকা দণ্ড অবস্থিত। দন্ডের C বিন্দুতে একটি ভারী বস্তু ঝুলানো হলো। যদি $AC = 3BC$ হয় এবং B বিন্দুতে চাপ A বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম বেশি হয় তবে বস্তুটির ওজন নির্ণয় কর।

(vii) একটি সোজা সুষম রডের একপ্রান্তে 10 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলানো হলে ঐ প্রান্ত হতে 1 মিটার দূরে একটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থির থাকে। খুঁটির ওপর চাপের পরিমাণ 30 কেজি ওজন হলে রডটির ওজন ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বুয়েট ১২-১৩]

(viii) W ওজনের 10 মিটার দীর্ঘ একটি সুষম বারকে ভূমির সমান্তরাল একই সরলরেখাস্থ দুইটি পেরেকের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে, উহার একপ্রান্ত একটি পেরেক হতে 2 মিটার বাহিরে আছে। পেরেকদ্বয়ের দূরত্ব কত হলে তাদের একটির উপর চাপ অপরটির উপর চাপের তিনগুণ হবে?

(ix) একজন লোক একটি লাঠি কাঁধের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। যদি তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a ও x হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তার কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ হবে $W\left(1+\frac{a}{x}\right)$.

[ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ১৫; দি: বো: ১৬; সি: বো: ০৫; ব: বো: ১০]

(x) 2a দীর্ঘ এবং W ওজন বিশিষ্ট একটি সুষম তক্তা b দূরত্বে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে অবস্থিত। একে না উল্টিয়ে এর দুই প্রান্তে পর্যায়ক্রমে সর্বাধিক W_1 এবং W_2 ওজন ঝুলানো যায়। প্রমাণ কর যে, $\frac{W_1}{W+W_1}+\frac{W_2}{W+W_2}=\frac{b}{a}$

(xi) একটি সমরূপ তক্তার এক প্রান্তে P মানের একটি ওজন স্থাপন করলে ইহা হতে a দূরত্বে একটি খুঁটির উপর তক্তাটি আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে এবং P এর স্থলে Q মানের ওজন স্থান করলে ইহা হতে b দূরত্বে একটি খুঁটির উপর তক্তাটি সুস্থিত থাকে। দেখাও যে, তক্তার ওজন $\frac{Pa-Qb}{b-a}$ এবং দৈর্ঘ্য $\frac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$.

(xii) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 12 ডাইন। তাদের একটি হতে 3 সে. মি. ও অপরটি হতে 4 সে. মি. দূরে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।

(xiii) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল 14 সে. মি. দূরত্বে এমনভাবে ক্রিয়া করছে যে, তারা 28 গ্রাম ওজনের একটি বলের সমতুল্য এবং তাদের বৃহত্তর বলটি প্রদত্ত বলটি হতে 6 সে. মি. দূরে অবস্থিত। বলদ্বয় নির্ণয় কর।

(xiv) একটি বৃত্তাকার পাতে একটি বর্গাকার ছিদ্র করা হল। পাতের ব্যাসার্ধ ছিদ্রটির কোণাকুণি দুই প্রান্তের দূরত্বের সমান। পাতের ব্যাস a হলে দেখাও যে এর কেন্দ্র হতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $= \dfrac{a}{8\pi - 4}$

Type-II

2. (i) 32 সে.মি. ব্যবধানে একটি সুষম হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে 4 N ও 12 N মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। প্রত্যেকের সাথে একই পরিমাণ বল বৃদ্ধি করলে এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 6 সে.মি. দূরে সরে যায়। প্রত্যেকের সাথে কি পরিমাণ বল বৃদ্ধি করা হয়েছে?

(ii) 20 সে. মি. দীর্ঘ AB হালকা দণ্ডটি 10 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর আনুভূমিকভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W এবং 3W ওজন ঝুলানো হলে পেরেক দুইটির কোন অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে?

(iii) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q $(P > Q)$ এর প্রত্যেকের মান যদি সমপরিমাণে বর্ধিত করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।
[ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৪; কু: বো: ১৩, ০৯; চ: বো: ১৩, ০৭; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১৩, ১১]

Type-III

3. (i) দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের Q কে $\dfrac{P^2}{Q}$-তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে এদের লব্ধির অবস্থান একই থাকে। [চ: বো: ০৫; য: বো: ১০]

(ii) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে যদি লব্ধির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $P = Q$.

(iii) P ও Q মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P, Q এর বদলে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, $S = R - \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$.
[বুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ০৯; কু: বো: ১১, ০৯; চ: বো: ১৪; য: বো: ১৪]

(iv) P ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে Q এর দিকে x দূরে সরালে দেখাও যে, তাদের লব্ধি $\dfrac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে। [ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৫, ১০; কু: বো: ০৭; চ: বো: ১১; সি: বো: ১৬, ১৫, ১৪, ০৯, ০৭, ০৫; য: বো: ১২, ১০; ব: বো: ০৮]

(v) কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q এর সাথে একই সমতলে b দূরত্বে দুইটি সমান S মানের বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলকে প্রযুক্ত করলে, দেখাও যে, মিলিত বলগুলির লব্ধি $\dfrac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ১১]

Type-IV

4. (i) P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দুতে ক্রিয়ারত এবং তাদের মান a, b, c এর সমানুপাতিক। দেখাও যে, তাদের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করবে।

(ii) কোনো ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলিতে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, $P = Q = R$
[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৬(গ); ঢা: বো: ১৪, ০৮; রা: বো: ০৫; কু: বো: ১০; চ: বো: ০৭; সি: বো: ০৮; য: বো: ০৭; ব: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]

(iii) ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের লম্ব কেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে,

(a) $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$.

[ঢা: বো: ১২; দি: বো: ১১, ০৯; কু: বো: ০৬; চ: বো: ১৫, ১২, ০৬; ব: বো: ০৭; য: বো: ০৮; সি: বো: ১০]

(b) $P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2) = R(a^2 + b^2 - c^2)$ [চ: বো: ০৯; ব: বো: ০৫]

(iv) P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। তাদের সাধারণ দিক যাই হোক না কেন, তাদের লব্ধি যদি সর্বদাই ঐ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হয়। তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$

(v) P, Q, R সমমুখী সমান্তরাল বল তিনটি ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। তাদের সাধারণ দিক যাই হোক না কেন, লব্ধিটি সর্বদাই পরিকেন্দ্রে ক্রিয়া করলে, প্রমাণ কর যে,
$P : Q : R = a \cos A : b \cos B : c \cos C$. [চ: বো: ১০]

(vi) O বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং AO বরাবর P মানের বলটি ক্রিয়া করছে। দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত P বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B : \sin 2C$.

[রা: বো: ১২; কু: বো: ১৫, ১২; দি: বো: ১২; ব: বো: ১২; ঢা: বো: ০৯; সি: বো: ১৪; য: বো: ০৬]

(vii) একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P : Q : R = 1 : 2 : 3$.

[চ: বো: ১৬; সি: বো: ১১, ০৬; য: বো: ০৯, ০৫; ব: বো: ১৫, ০৯]

Type-V

5. (i) W ওজন বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার টেবিলের চারটি পায়া টেবিলটির কিনারায় পরস্পর সমান দূরত্বে লাগান আছে। দেখাও যে, টেবিলটি উল্টিয়ে ফেলার জন্যে $(\sqrt{2} + 1)W$ এর সামান্য কিছু বেশি ওজনই যথেষ্ট।

(ii) ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। সমান বাহু AB ও AC প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 6 মিটার। A, B, C বিন্দুতে একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে 12, 12 ও 18 কেজি/মিটার। বলটির মান ও গতিপথ নির্ণয় কর।

(iii) একটি ভারী গাড়ির চাকার ওজন W এবং ব্যাসার্ধ 15 ইঞ্চি। চাকার কেন্দ্র বিন্দুতে ন্যূনতম কী পরিমাণ বল ভূমির সমান্তরালে প্রয়োগ করলে চাকাটি 8 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি খাড়া প্রতিবন্ধকতা পার হতে পারবে?

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. 6N এবং 11N বল দুইটি মধ্যবর্তী কোণ কত হলে লব্ধি 17N হবে?
ক. $0°$ খ. $30°$ গ. $60°$ ঘ. $90°$

2. দুইটি সমান বলের লব্ধি বলদ্বয়ের সমান হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?
ক. $0°$ খ. $30°$ গ. $60°$ ঘ. $120°$

3. P_1, P_2, P_3 বলত্রয় যথাক্রমে একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি বরাবর মানে ও দিকে একই ক্রমে ক্রিয়ারত। বলত্রয়ের লব্ধি নিচের কোনটি হবে?
ক. $\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$ খ. 1 গ. 0 ঘ. $R_1 + R_2 + R_3$

4. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল R এবং S এর ক্রিয়ারেখার অবস্থান বিনিময় করলেও এদের লব্ধির ক্রিয়া বিন্দুর অবস্থান পরিবর্তন হয় না। এক্ষেত্রে নিচের কোনটি সত্য?
ক. $\frac{R}{S} = 1$, খ. $\frac{R}{S} = 2$ গ. $\frac{R}{S} = 3$ ঘ. $\frac{R}{S} = 4$

5. 12 N এবং 8N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 15 মিটার লম্বা একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে কার্যরত হলে বৃহত্তর বল থেকে লব্ধি কত মিটার দূরে ক্রিয়া করে?
ক. 2 মিটার খ. 6 মিটার গ. 8 মিটার ঘ. 12 মিটার

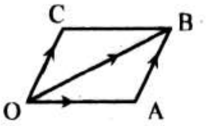
6. দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 15 dyne। লব্ধি তাদের একটি হতে 3 cm এবং অপরটি হতে 5cm দূরে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের মান কোনটি?

ক. 37.5, 22.5　　খ. 10, 25　　গ. 15, 20　　ঘ. 10, 20

7. দুইটি সমান বল P এর লব্ধি R এবং মধ্যবর্তী কোণ α হলে, যে কোনো বল ও লব্ধির মধ্যবর্তী কোণ কত হবে?

ক. $-\alpha$　　খ. $-\frac{\alpha}{2}$　　গ. $\frac{\alpha}{2}$　　ঘ. α

8. OABC সামান্তরিকটি বিবেচনা করলে ভেক্টরের যোগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী নিম্নের কোন সম্পর্কটি সঠিক?



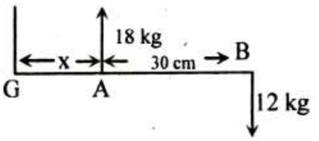
ক. $\overline{AB} + \overline{OC} = \overline{OB}$　　খ. $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

গ. $\overline{OB} + \overline{OA} = \overline{AB}$　　ঘ. $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{AB}$

9. ABC ত্রিভুজের সমতলে অবস্থিত O একটি বিন্দু। BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F। $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$ এবং $\overrightarrow{EO}$ দ্বারা সূচিত বলগুলির লব্ধি বল সূচিত হবে কোনটি দ্বারা?

ক. $\overrightarrow{OB}$　　খ. $\overrightarrow{OC}$　　গ. $\overrightarrow{OD}$　　ঘ. $\overrightarrow{OA}$

10. 30 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 18kg এবং 12 kg ওজনের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লব্ধির প্রয়োগবিন্দু 18 kg বল হতে কত দূরে ক্রিয়া করবে?



ক. 60 cm　　খ. 62 cm　　গ. 70 cm　　ঘ. 75 cm

11. একজন লোক তার কাঁধের উপর একটি লাঠির এক প্রান্তে বেঁধে বোঝা বহন করে। তার কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব 3x ও কাঁধের উপর চাপ R কিভাবে পরিবর্তিত হয়?

ক. $R \propto x^2$　　খ. $R \propto \frac{1}{x^2}$　　গ. $R \propto \frac{1}{x}$　　ঘ. $R \propto x$

12. দুটি অসমান বলের অন্তর্গত কোণ 150°, যদি লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সমান হয়, তবে বল দুটির অনুপাত নিচের কোনটি?

ক. 1 ঃ 2　　খ. $2\sqrt{2}$ ঃ 3　　গ. $\sqrt{2}$ ঃ 3　　ঘ. $\sqrt{2}$ ঃ 3

13. 20 kg ওজনের একটি বলকে পরস্পর 42° কোণে দুটি সমান অংশক বলে বিশ্লেষণ করলে অংশক বলদ্বয়ের মান কত?

ক. 7.38 kg　　খ. 8.21 kg　　গ. 10.71 kg　　ঘ. 13.19 kg

14. এক বিন্দুগামী দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 60° কমালে বল দুটির লব্ধির মান অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

ক. 45°　　খ. 40°　　গ. 30°　　ঘ. 7.5°

15. 5, 10 ও 15N মানের তিনটি বল একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরাল বরাবর একই ক্রমে কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান কত নিউটন?

ক. $4\sqrt{3}$　　খ. $9\sqrt{3}$　　গ. $5\sqrt{3}$　　ঘ. $14\sqrt{3}$

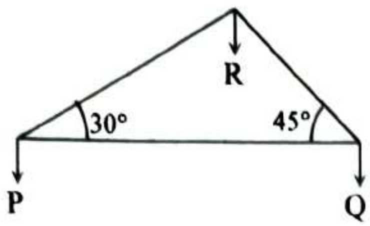
16. কোন বিন্দুতে 2, 4 এবং $2\sqrt{3}$N মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে তাদের মধ্যকার কোণগুলো নিচের কোনটি?

ক. 120°, 60°, 45　　খ. 150°, 90°, 60　　গ. 120°, 90°, 150　　ঘ. 150°, 30°, 75

17. একটি আনত সমতলে 10 kg ওজনের বস্তুকে সমতল বরাবর 2 kg ওজন বল এবং একটি অনুভূমিক বল প্রয়োগ করে বস্তুটিকে স্থির রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সাথে সমতলের নতি $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ হয়, তবে অনুভূমিক বলটির মান কত kg ওজন?

ক. 10　　খ. 8　　গ. 5　　ঘ. 2

18.



P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হলে P ঃ Q এর মান কত?

ক. $\sqrt{3} : 2$ খ. $2 : \sqrt{3}$ গ. $\sqrt{2} : 1$ ঘ. $1 : \sqrt{2}$

19.

AB = 10m হলে CD এর দৈর্ঘ্য কত? (যেখানে, AB একটি সুষম তক্তা)

ক. 1m খ. 2m গ. 3m ঘ. 4m

20. 3m দীর্ঘ এবং 30N ওজনের একটি সুষম রড একটি টেবিলের উপর এমনভাবে আছে যে এর 0.5m অংশ টেবিলের প্রান্তের বাইরে আছে। রডটিকে না উল্টিয়ে এর প্রান্তে সর্বোচ্চ কত ওজন ঝুলানো যাবে?

ক. 20N খ. 35N গ. 60N ঘ. 75N

21. 120° কোণে আনত $\sqrt{7}$ এককের দুইটি সমান বল একই বিন্দু থেকে ক্রিয়ারত–

i. লব্ধির মান $\sqrt{7}$ একক ii. লব্ধি $\sqrt{7}$ একক বলের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে

iii. লব্ধি বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. P এবং Q দুইটি বল। বল দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 3N এবং একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 7N। এদের মধ্যে—

i. P বলের মান 5N ii. Q বলের মান 2N iii. Q : P = 5 ঃ 2

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. দুজন লোক একটি পাতলা তক্তার সাহায্যে 145 kg পাথর বহন করবে। পাথর খণ্ডটি—

i. তক্তার মাঝে বসালে উভয় ব্যক্তি সমান চাপ অনুভব করবে

ii. তক্তার দৈর্ঘ্য 11 ঃ 18 অনুপাতে যে বিন্দুতে বিভক্ত হয় সে বিন্দুতে বসালে একজন আরেকজন অপেক্ষা 35 কেজি বেশি ওজন বহন করবে।

iii. তক্তার এক প্রান্তে বসালে অপরপ্রান্তের ব্যক্তির কাঁধে কোন চাপ পড়বে না।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. 5cm দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে 4N ও 1N মানের দুটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল হলে—

i. লব্ধি 1N বল হতে $6\frac{2}{3}$ cm দূরে ক্রিয়া করবে

ii. লব্ধি 4N বলের সাথে সম্মুখী হবে

iii. উভয় বলের পরিমাণ 3N বাড়ালে লব্ধি 5cm পরিমাণ সরে যাবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. 2 ও 3 একক দুটি বল 6cm দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে ক্রিয়া করলে —

i. বলদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে লব্ধি 1.2 cm সরে যায়

ii. 2 একক বলের ক্রিয়ারেখা Q বলের দিকে 2cm সরানো হলে লব্ধি 0.8cm সরে যাবে।

iii. উভয় বলের পরিমাণ দ্বিগুণ করা হলে লব্ধি 2cm সরে যাবে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (26 ও 27) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

S, T (S > T) দুইটি বল। বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 10N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4N

26. S এর মান কত?

ক. 2N খ. 7N গ. 10N ঘ. 12N

27. বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে লব্ধির মান কত?

ক. 3N খ. $\sqrt{13}$N গ. 5N ঘ. $\sqrt{79}$N

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (28 ও 29) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

S এবং T দুইটি বল (S > T) সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান হয় $2\sqrt{13}$ বল দুইটির বৃহত্তম লব্ধি 10N

28. বলদ্বয়ের ক্ষুদ্রতম লব্ধি কত?

ক. 2N খ. 4N গ. 6N ঘ. 10 N

29. S এবং T বলের অনুপাত কোনটি?

ক. 2 : 3 খ. 5 : 1 গ. 1 : 5 ঘ. 3 : 2

নিচের তথ্যের আলোকে (30 ও 31) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

PN মানের বল 5N বলের সাথে 7N লব্ধি সৃষ্টি করে। আবার, 5N এর বদলে 7N বল বিপরীতমুখী ক্রিয়া করলে লব্ধি 8N হয়।

30. P এর মান কত?

ক. 4.5N খ. 7.5N গ. 9N ঘ. 11.5N

31. PN ও 5N বলের অন্তর্গত কোণের মান কত?

ক. $\cos^{-1}\frac{1}{6}$ খ. $\cos^{-1}\frac{1}{8}$ গ. $\cos^{-1}\frac{1}{10}$ ঘ. $\cos^{-1}\frac{1}{12}$

নিচের তথ্যের আলোকে (32 ও 33) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

অনুভূমিক বরাবর দুটি বিন্দুতে একটি, সুতা বাঁধা। এতে W ওজনের একটি আংটি অবাধে গড়িয়ে পড়তে পারে। q ওজনের আংটির উপর একটি অনুভূমিক বল p ক্রিয়ারত। সাম্যাবস্থায় সুতার অংশদ্বয় উল্লম্বের সাথে 45° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে।

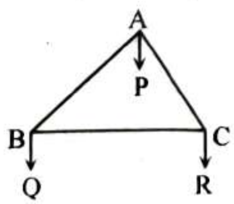
32. সুতার টান কত একক?

ক. $\frac{\sqrt{2}W}{3}$ খ. $\frac{2W}{\sqrt{2}+1}$ গ. $\frac{W}{\sqrt{2}+3}$ ঘ. $\frac{W}{2(1+\sqrt{2})}$

33. P এর মান কত একক?

ক. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}W$ খ. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}W$ গ. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}W$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{2}}W$

নিচের তথ্যের আলোকে (34 ও 35) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



ΔABC এর AC = 4cm, BC = 6cm এবং AB = 5 cm। P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয়ের লব্ধি 30 একক এবং ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্রে ক্রিয়ারত।

34. P, Q, R বল তিনটির মান যথাক্রমে কত একক?
ক. 12, 8, 10 খ. 5, 10, 15 গ. 13, 7, 10 ঘ. 10, 14, 6

35. (Q + R) বলের ক্রিয়াবিন্দু হতে B এর দূরত্ব কত?
ক. $\frac{10}{3}$ cm খ. $\frac{7}{3}$ cm গ. $\frac{5}{3}$ cm ঘ. $\frac{4}{3}$ cm

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

36. কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $2\vec{P}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\sqrt{7}\,\vec{P}$ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? [ঢা. বি. ১৯-২০]
ক. 30° খ. 90° গ. 60° ঘ. 180°

37. 16N ও 11N বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় 5x দূরত্বে অবস্থিত। যদি পরবর্তীতে বলদ্বয় 18N ও 13N হয়, তাহলে লব্ধির সরণ কত x? [খু. বি. ১৯-২০]
ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

38. 2N এবং 5N মানের দুইটি বল একই রেখায় একই দিকে ক্রিয়ারত উহাদের সর্বাধিক লব্ধি হবে– [ঢা. বি. ১৭-১৮]
ক. 7N খ. 3N গ. $\sqrt{29}$N ঘ. 5N

39. 10 ft দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রাশির এক প্রান্ত একটি খাড়া দেওয়ালের সাথে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত একটি মসৃন গোলকের উপরিস্থিত একটি বিন্দুতে সংযুক্ত রয়েছে। যদি গোলকটি দেওয়ালের সংস্পর্শে স্থিতিবস্থায় থাকে তবে রশির উপর টান কত হবে? ধরি, গোলকটির ওজন 10000 1b ও ব্যাসার্ধ 3 ft. [বুয়েট ১৫-১৬]
ক. 11277 lb খ. 10000 lb গ. 10277 lb ঘ. 9731 lb

40. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুগুলো হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে P : Q : R এর মান কত? [কুয়েট ১৭-১৮]
ক. a : b : c খ. 2a : b : c গ. 2a : 3b : c ঘ. a : b : 5c

41. 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দৈর্ঘ্যের একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু যে দূরত্বে সরে যাবে তা কত একক? [কুয়েট ১৫-১৬]
ক. 1 একক খ. 2 একক গ. 3 একক ঘ. 4 একক

42. 5N, 7N এবং 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N এবং 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [রা. বি. ১৭-১৮, বুয়েট ০৫-০৬]
ক. 30° খ. 60° গ. 90° ঘ. 120°

43. P ও Q মানের দুটি বল α কোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি R। R সর্বোচ্চ হলে α = কত? [চ. বি. ১৭-১৮, শা. প্র. বি. ০৮-০৯]
ক. 0 খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{\pi}{4}$ ঘ. $\frac{\pi}{8}$

44. 5m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ABCD বর্গক্ষেত্রটি AB, AD বাহু বরাবর যথাক্রমে 3kg ও 4kg ওজনের বল ক্রিয়া করলে B বিন্দু থেকে বলদ্বয়ের লব্ধির দূরত্ব– [ই. বি. ১৭-১৮]
ক. 5m খ. 4m গ. 2m ঘ. 1m

45. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে কি বলা হয়? [পা. প্র. বি. ১৭-১৮; খু. বি. ১৬-১৭]
ক. অন্তকেন্দ্র খ. পরিকেন্দ্র গ. ভরকেন্দ্র ঘ. লম্বকেন্দ্র

46. 12 মিটার দৈর্ঘ্যের সুষম একটি বীম AB এর ওজন 50 কেজি, যার A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 15 কেজি ও 35 কেজি ওজন ঝুলানো। A প্রান্ত হতে কত দূরত্বে শুধু একটি মাত্র অবলম্বন স্থাপন করলে ব্যবস্থাটি সুস্থিত থাকবে? [খু. প্র. বি. ১৬-১৭]
ক. 5 মিটার খ. 35/6 মিটার গ. 6 মিটার ঘ. 36/5 মিটার

47. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান্তরালে একইক্রমে সমবিন্দুতে কার্যরত 6, 10, 14 একক মানের তিনটি বেগের লব্ধির মান হবে— [ঢা. বি. ১৬-১৭]
ক. $4\sqrt{3}$ Units খ. $7\sqrt{3}$ Units গ. $10\sqrt{3}$ Units ঘ. $15\sqrt{3}$ Units

48. 8N এবং 3N দুইটি বল একটি বিন্দুতে 60° কোণে একটি বস্তুতে ক্রিয়ারত। বলদ্বয়ের লব্ধির মান— [ঢা. বি. ১৫-১৬; জ. বি. ০৯-১০]

ক. $\sqrt{73}$N খ. $\sqrt{97}$N গ. $\sqrt{55}$N ঘ. $\sqrt{11}$N

49. P, P দুইটি সমবিন্দু বলের লব্ধি P হলে, বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ— [কুয়েট ১৪-১৫]

ক. 30° খ. 60° গ. 90° ঘ. 120°

50. একবিন্দুতে 45° কোণে ক্রিয়াশীল P ও $\sqrt{2}$N বলের লব্ধি $\sqrt{10}$N হলে, P এর মান— [কুয়েট ১৪-১৫]

ক. 3N খ. 2N গ. 5N ঘ. 7N

51. এক বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তর বলটির মান 10N; এবং এদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলটির উপর লম্ব। লব্ধির মান কত? [চুয়েট ১৪-১৫]

ক. $3\sqrt{3}$N খ. $5\sqrt{3}$N গ. $5\sqrt{2}$ ঘ. কোনটিই নয়

52. P এবং 2P সমবিন্দু দুইটি বলের প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে দ্বিতীয়টির সাথে 8 একক বল বৃদ্ধি করলে এদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত? [চুয়েট ১৪-১৫]

ক. 4 একক খ. 8 একক গ. 12 একক ঘ. কোনটি নয়

53. P এবং $10\sqrt{2}$ এককের সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি P বলের উপর লম্ব এবং লব্ধির মান P বলের এক-তৃতীয়াংশ। P এর মান কত? [কুয়েট ১৪-১৫]

ক. $5\sqrt{2}$ একক খ. $6\sqrt{5}$ একক গ. 10 একক ঘ. $15\sqrt{2}$ একক

54. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, AC, ও BC বাহু বরাবর যথাক্রমে 4, 2 এবং 1 একক মানের বলত্রয় হলে, এদের লব্ধির মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮; কুয়েট ০৯-১০]

ক. $3\sqrt{3}$ খ. $2\sqrt{3}$ গ. $\sqrt{3}$ ঘ. কোনটি নয়

55. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P N এবং 12N দুইটি বলের লব্ধি $3\sqrt{7}$N, যা P এর দিকের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান— [ঢা. বি. ০৮-০৯]

ক. 9N খ. 12N গ. $2\sqrt{7}$N ঘ. 11 N

56. কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখে। সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান— [ঢা. বি. ০৮-০৯]

ক. 3N খ. $3\sqrt{3}$N গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 7N

57. দুইটি সমবিন্দু বলের বৃহত্তম লব্ধির মান 17N এবং বল দুইটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান 13N; বল দুইটির লব্ধির ক্ষুদ্রতর মান— [ঢা. বি. ০৪-০৫]

ক. 6N খ. 7N গ. 5N ঘ. 8N

58. একটি দণ্ডের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 45N এবং 15N দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। যদি এদের লব্ধি দণ্ডের C বিন্দুতে ক্রিয়া কর এবং AC = 5m হয় তবে, AB = কত? [চুয়েট ০৯-১০]

ক. 6m খ. 10m গ. 12m ঘ. কোনটি নয়

59. ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুতে 2, 2, P তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে, P এর মান— [রা. বি. ১৭-১৮; চুয়েট ১৩-১৪]

ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 5

60. W ওজনের 12m দীর্ঘ একটি সুষম দণ্ডের একপ্রান্তে 9kg. ওজন ঝুলানো আছে। ঐ প্রান্ত থেকে 5.25 m দূরে যদি একটি খুঁটির উপর দণ্ডটি আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে, তবে W = কত? [রা. বি. ১৭-১৮; বুয়েট ১২-১৩]

ক. 65 kg খ. 60 kg গ. 63 kg ঘ. 45 kg

61. 8 এবং 3 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল একটি রডের 12 c.m. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একটি মাত্র বলের ক্রিয়ায় রডটিকে সাম্যাবস্থায় রাখতে হলে, রডের ন্যূনতম দৈর্ঘ্য— [চুয়েট ০৫-০৬]

ক. 19.5 c.m. খ. 19.2 c.m গ. 15. c.m ঘ. 18 c.m

62. 3P এবং 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R, প্রথম বল দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমাণও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হবে নিচের কোনটি? [ঢা. বি. ১২-১৩]

ক. 30° খ. 60° গ. 120° ঘ. 150°

63. আনুভূমিকের সাথে θ কোণে হেলানো একটি মসৃণ তলে অবস্থিত m ভরের একটি ছোট বস্তু P এর উপর F পরিমাণ আনুভূমিক বল প্রয়োগ করা হলে F বলটি P বস্তুকে কেবল মাত্র সাম্যাবস্থায় রাখতে সামর্থ্য হয়। তাহলে F এর মান নিচের কোনটি? [বুয়েট ১০-১১]

ক. $m \cot\theta$ খ. $m \tan\theta$ গ. $mg \cot\theta$ ঘ. $mg \tan\theta$

64. একজন লোক তাঁর কাঁধে আনুভূমিকভাবে স্থাপিত 6 ফুট দীর্ঘ একটি লাঠির প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের তিনগুণ হলে কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব কত হবে? [ঢা. বি. জ. বি. ০৭-০৮]

ক. 1 ফুট খ. 2 ফুট গ. 3 ফুট ঘ. 4 ফুট

65. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের একটির মান অপরটির দ্বিগুণ হলে এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতরটির উপর লম্ব হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হবে— [ঢা. বি. ০৬-০৭, ০৫-০৬, ০৩-০৪]

ক. 110° খ. 120° গ. 135° ঘ. 150°

66. $\sqrt{3}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণ এক বিন্দুতে কাজ করে। তাদের লব্ধির মান— [ঢা. বি. ১১-১২]

ক. $\sqrt{3}$ একক খ. $4\sqrt{3}$ একক গ. 3 একক ঘ. $2\sqrt{3}$ একক

67. 5 মিটার দীর্ঘ একটি হালকা রডের দুই প্রান্তে 10.5 kg ও 24.5 kg ওজনের দুইটি বস্তু ঝুলানো আছে। একজন লোক বস্তু দুইটি সমেত রডটি আনুভূমিক অবস্থায় বহন করতে চায়। সে রডটির কম ওজন ঝুলানো স্থান থেকে কত দূরত্বে ধরবে? [বুয়েট ১১-১২]

ক. 1.5m খ. 2m গ. 3.5 m ঘ. 3 m

68. দুইজন লোক 6 m লম্বা ও 30 kg ওজনের একটি ভারী সুষম বার বহন করছে। একজন বারটির একপ্রান্ত থেকে 1 m ও অন্যজন অপর প্রান্ত থেকে 2m দূরত্বে বারটি বহন করে নিয়ে যাচ্ছে। তাদের প্রত্যেকের কে কত ওজন বহন করে? [বুয়েট ১০-১১]

ক. 10 kg, 20 kg খ. 15 kg, 15 kg গ. 12 kg, 8 kg ঘ. কোনটিই নয়

69. যদি কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের তিনগুণ হয় তাহলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান— [বুয়েট ১০-১১]

ক. 90° খ. 60° গ. 45° ঘ. 30°

70. P মানের দুইটি বলের লব্ধি $P\sqrt{2+\sqrt{2}}$ । এদের যেকোন একটির সাথে লব্ধির নতি কোনটি? [বুটেক্স ১৩-১৪]

ক. 22.5° খ. 45° গ. 120° ঘ. 90°

71. 3N ও 5N মানের দুইটি বল এক বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কোনটি? [বুয়েট ১৩-১৪]

ক. 2N খ. 3N গ. 5N ঘ. 8N

72. যদি 9 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তাদের লব্ধি অজানা বলের দুই-তৃতীয়াংশ এবং জানা বলের উপর লম্ব হয় তবে অজানা বল কোনটি? [কুয়েট ১৩-১৪]

ক. $\frac{27}{\sqrt{5}}$ একক খ. $\frac{27}{\sqrt{2}}$ একক গ. $\frac{18}{\sqrt{5}}$ একক ঘ. $\frac{18}{\sqrt{2}}$ একক

73. কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান $\sqrt{10}$ N এবং তাদের মধ্যকার কোণ 45°। উহাদের একটি বলের মান $\sqrt{2}$N হলে, অপর বল নিচের কোনটি? [কুয়েট ১৩-১৪]

ক. 2N খ. 4N গ. $\sqrt{6}$ N ঘ. $\sqrt{8}$ N

74. যদি 12 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তাদের লব্ধি অজানা বলের অর্ধেক এবং জানা বলের উপর লম্ব হয়, তবে অজানা বলটির মান কোনটি? **[কুয়েট ১২-১৩]**

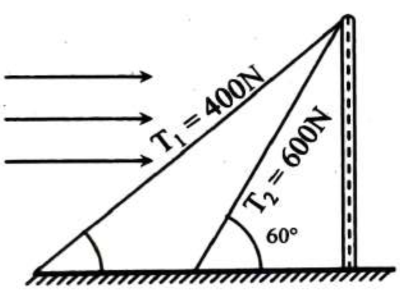
ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ একক খ. $\frac{8}{\sqrt{3}}$ একক গ. $8\sqrt{3}$ একক ঘ. $12\sqrt{3}$ একক

75. 2, $\sqrt{5}$ ও 3 মানের তিনটি বল কোন একটি বিন্দুতে কার্যরত। যদি তারা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করে, তাহলে প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কোনটি? **[বি. আই. টি. ০২-০৩]**

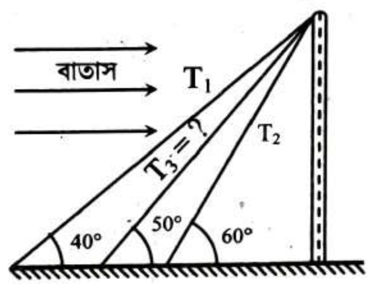
ক. 0° খ. 90° গ. 180° ঘ. 360°

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. 10 মিটার দৈর্ঘ্যের ইলেক্ট্রিক খাম্বাকে ভূমির সাথে যুক্ত দুটি টানা তার দিয়ে বাতাসের ধাক্কার বিরুদ্ধে সুস্থিত করা হয়েছে। প্রথম তারটির সর্বোচ্চ বল সহ্য ক্ষমতা 400 N এবং তা 40° কোণে ভূমির সাথে যুক্ত আছে। দ্বিতীয় তারটি সর্বোচ্চ 600N বল সহ্য করতে পারে এবং তা 60° কোণে ভূমির সাথে যুক্ত আছে।



চিত্র-১



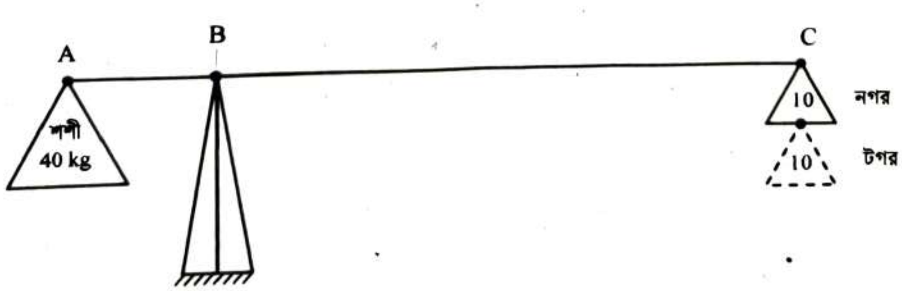
চিত্র-২

ক. বলের লম্বাংশের উপপাদ্যটি লিখ।

খ. ঝড়ে সর্বোচ্চ কত আনুভূমিক ধাক্কার বিরুদ্ধে খাম্বাটি দাড়িয়ে থাকতে পারবে? (চিত্র-১)

গ. (প্রবল কাল বৈশাখী ঝড়ে) বাতাস 1000N বলে ধাক্কা দিলে সর্বনিম্ন কত সহ্য ক্ষমতার অতিরিক্ত একটি টানা তার 50° কোণে ব্যবহার করতে হবে? (চিত্র-২)।

2. (দণ্ডের বাম প্রান্তে 40 kg ভর চাপানো আছে এবং ডান প্রান্তে 10 kg ভর আছে।)
নগর ও টগর দুই জমজ ভাই এর প্রত্যেকের ওজন 10 kg করে। তাদের বড় বোন শশীর ওজন 40 kg.। খুঁটির উপর দণ্ডায়মান 20 মিটার দণ্ডের বাম প্রান্তে শশী এবং ডানপ্রান্তে নগর দাড়ালো। অত:পর টগর ও ডানপ্রান্তে দাড়ানোর জন্য বায়না ধরল।

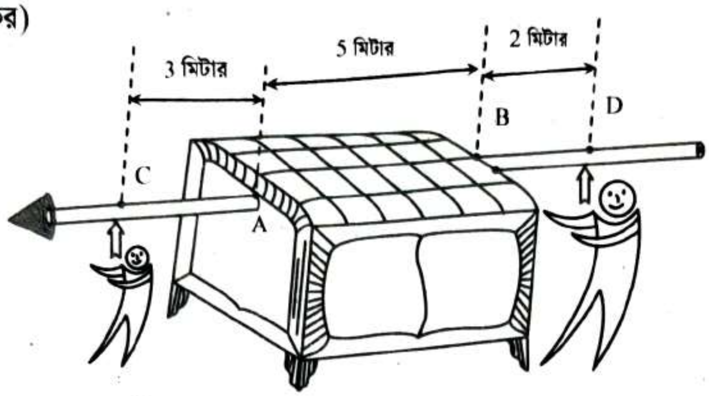


ক. দুটি সমান্তরাল বলের সদৃশ লব্ধি 14N, অসদৃশ লব্ধি 2N বলদ্বয়ের মান কত?

খ. শুধু নগর ও শশীর দণ্ডে অবস্থানকালে দণ্ডটিকে আনুভূমিক রাখার জন্য খুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

গ. বাম প্রান্তে শশী এবং ডান প্রান্তে দুই জমজ ভাই.নগর ও টগর একত্রে দাঁড়ালে খুঁটিকে কি পরিমাণ সরাতে হবে?

3. 5 মিটার দৈর্ঘ্যের পালকিতে 100 kg ওজনের রাজকন্যা বেড়াতে যাবে। 2 জন বেয়ারা পালকি বহন করবে। সম্মুখের বেয়ারা সর্বোচ্চ 40 kg ভর বহন করতে পারে এবং সেজন্যে তাকে পালকির প্রান্ত হতে সর্বনিম্ন 3 মিটার দূরত্বে কাঁধ লাগাতে হয়। পেছনের বেয়ারা পালকির পেছন প্রান্ত (B) হতে 2 মিটার দূরত্বে কাঁধ লাগায়। (পালকির ওজন অগ্রাহ্য কর)



ক. পেছনের বেয়ারাকে সর্বনিম্ন কত ওজন বহন করার ক্ষমতা থাকতে হবে?

খ. বেয়ারা দুইজনের অবস্থান অপরিবর্তিত থাকলে রাজকন্যাকে পালকির ভেতরে সম্মুখ প্রান্ত (A) হতে কত দূরে বসতে হবে?

গ. রাজকন্যা পালকির ঠিক মধ্যবিন্দুতে বসার ব্যাপারে মনস্থির করল। এতে উভয় বেয়ারা একই দিকে (সমান পরিমাণ) x দূরত্ব সরে যাওয়ার সিদ্ধান্ত নিল। বেয়ারা দুটিকে কোনদিকে একত্রে কত দূরত্ব সরে যেতে হয়েছিল?

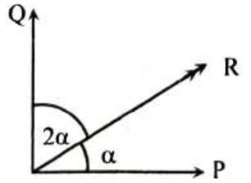
4. একটি টিউবওয়েলের (চাপকলের) সম্পূর্ণ হাতলের দৈর্ঘ্য a ফুট এবং হাতলের ঠেস বিন্দু থেকে ভার বিন্দুর দৈর্ঘ্য b ফুট। বলবাহুর শেষপ্রান্তে P kg বল প্রয়োগ করে W kg ওজনের পানি তোলা সম্ভব হলো।

ক. ABCD বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ এবং $\overrightarrow{DB}$ বলগুলোর লব্ধির মান কত?

খ. প্রমাণ কর যে, $W = P\left(\frac{a}{b} - 1\right)$

গ. P বলটিকে W ওজনের দিকে x দূরত্বে সরালে হাতলের ঠেস বিন্দুর অবস্থান কি পরিমান সরালে W ওজনের পানি তোলা যাবে?

5. P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R



ক. R বরাবর P ও Q বলের উপাংশ সমান হলে $\frac{P}{Q}$ কে α এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $P = \sqrt{3}Q$ হলে α নির্ণয় কর।

গ. $R = mP$ হলে দেখাও যে, $\frac{P}{Q} - \frac{Q}{P} = m.$

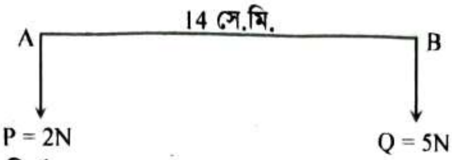
6. A বিন্দুতে অবস্থিত একটি ধনাত্মক চার্জকে ঘিরে তিনটি ঋণাত্মক চার্জ এমনভাবে অবস্থান করে যেন ধনাত্মক চার্জের সাথে তাদের আকর্ষণ বল যথাক্রমে P, Q ও R সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

ক. 60° কোণে ক্রিয়ারত 1N ও 3N মানের বলের লব্ধি কত?

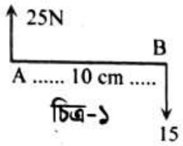
খ. P ও Q বলের অন্তর্গত কোণ P ও R বলের অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q - P)$

গ. যদি R বলের ক্রিয়ারেখা P ও Q এর অন্তর্ভুক্ত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে তবে দেখাও যে তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$

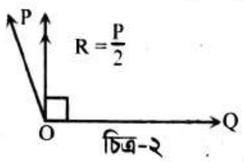
7. 5 মিটার লম্বা আনুভূমিক একটি ভরহীন দন্ডের দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটি রয়েছে। এক প্রান্ত থেকে ভিতরের দিকে 4 মিটার দূরে 500 কেজি ওজনের একটি ভারী বস্তু ঝুলানো রয়েছে।
   - ক. বস্তুটিকে কোন অবস্থানে ঝুলালে খুঁটিদ্বয়ের উপর সমান চাপ পড়বে?
   - খ. খুঁটির ঠেস বিন্দু দুইটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।
   - গ. একটি খুঁটি যদি 200 কেজি চাপ সহ্য করতে পারে তবে খুঁটি না ভেঙ্গে অপর খুঁটি থেকে সর্বোচ্চ কত দূরে উক্ত বস্তুটি ঝুলানো যাবে?

8. 

   - ক. P ও Q বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।
   - খ. P ও Q অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দুর সরণ নির্ণয় কর।
   - গ. P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দু d দূরে সরালে দেখাও যে, তাদের লব্ধি $\frac{2d}{7}$ দূরে সরে যাবে।

9. 

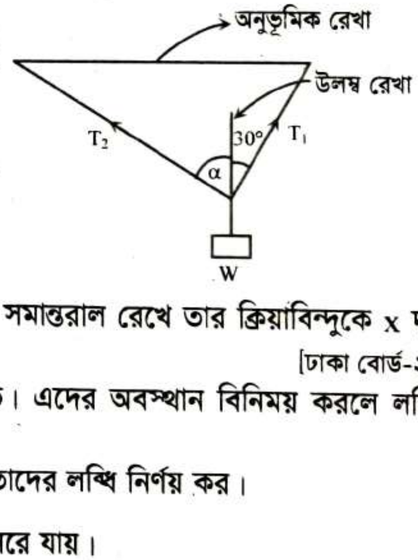
চিত্র-১



চিত্র-২

   - ক. 7 ও 5 নিউটন মানের দুইটি বল O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং তাদের লব্ধি 9 নিউটন। একটি ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাগুলিকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $\frac{7}{OA} + \frac{5}{OB} = \frac{9}{OC}$
   - খ. চিত্র-১ এ উভয় বলকে 5N পরিমাণ বৃদ্ধি করলে লব্ধি কত দূরে সরে যাবে তা নির্ণয় কর।
   - গ. চিত্র-২ হতে প্রমাণ করো যে, $P : Q = 2 : \sqrt{3}$.

10. W ওজনের বস্তু দুইটি সুতার সাহায্যে ঝুলিয়ে সাম্যাবস্থায় রাখা হল।
   - ক. $T_1 = 5N$, $T_2 = 8N$ এবং $W = 7N$ হলে α নির্ণয় কর।
   - খ. α এর মান কত হলে T_2 টানের মান সর্বনিম্ন হবে।
   - গ. $\alpha = 30°$ হলে T_2 ও T_1 নির্ণয় কর, যখন $W = 10$ N.

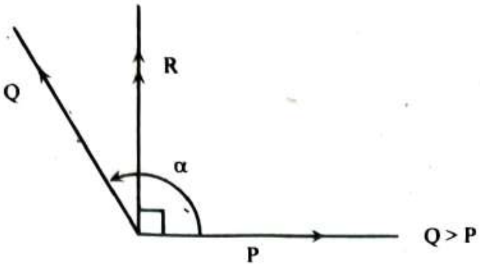


▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

11. দৃশ্যকল্প-১: P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরানো হলো। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯]
দৃশ্যকল্প-২: P ও Q(P > Q) বল দুটি পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি θ কোণে ঘুরে যায়।
   - ক. 8N ও 6N মানের দুটি বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি নির্ণয় কর।
   - খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, বল দুটির লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যায়।
   - গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$

12. দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে 2P এবং Q মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত আছে। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]
দৃশ্যকল্প-২: 5N ও 3N মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে AB = 10 সে.মি.।
   - ক. কোনো বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত একই মানের দুইটি বলের লব্ধি 4N হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর।
   - খ. দৃশ্যকল্প-১: এ যদি Q = 3P হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক করে বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় কর।
   - গ. দৃশ্যকল্প-২ এ, প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয়, তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরত্বে সরে যাবে?

13. দৃশ্যকল্প-১: [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]



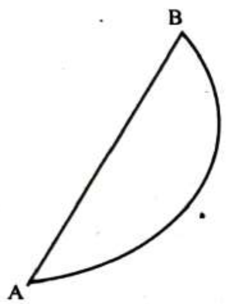
দৃশ্যকল্প-২: 17 সে.মি. দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় 13 সে.মি. দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সে.মি. দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো।

ক. P ও Q বলদ্বয় সমান হলে, R বল α কে সমদ্বিখণ্ডিত করে— প্রমাণ কর।

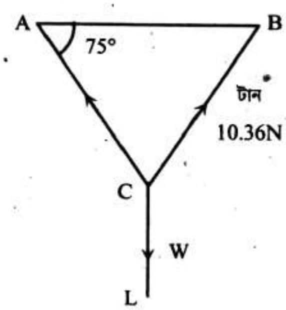
খ. $R = 15N$ এবং P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি $25N$ হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।

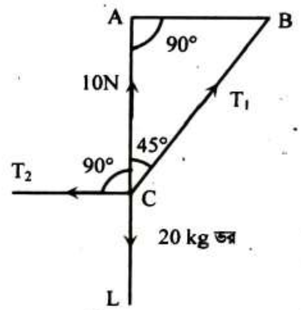
14.



চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৩

প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হাল্কা মসৃণ দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

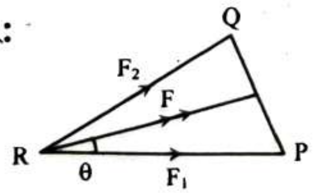
ক. ১ নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভেতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে সেটি কোথায় কীভাবে ঝুলবে চিত্র অঙ্কনপূর্বক দেখাও।

খ. ২ নং চিত্রের ক্ষেত্রে W ওজন সাম্যাবস্থায় থাকলে W এর মান কত নিউটন নির্ণয় কর।

গ. ৩ নং চিত্রে C বিন্দুতে 20 kg ভরকে সাম্যাবস্থায় ঝুলানোর জন্য T_1 এবং T_2 এর মান কত হওয়া প্রয়োজন তা নিউটন এককে নির্ণয় কর।

15. দৃশ্যকল্প-১: 16N ও 12N দুইটি সমমুখী সমান্তরাল একটি কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

দৃশ্যকল্প-২:



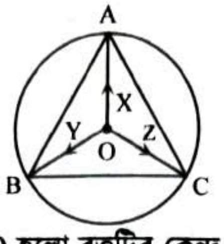
ক. কোন বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং F_1, F_2 এর লব্ধি F হলে দেখাও যে,

$$R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P).$$

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে LM বরাবর তাদের লব্ধির সরণ নির্ণয় কর।

16. [সিলেট বোর্ড -২০১৯]



O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র

ক. S মানের দুইটি সমান বল পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

খ. X, Y, Z বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $X : Y : Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$.

গ. যদি X, Y, Z মানের বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি O বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে, $X \operatorname{cosec}2A = Y \operatorname{cosec} 2B = Z \operatorname{cosec} 2C$.

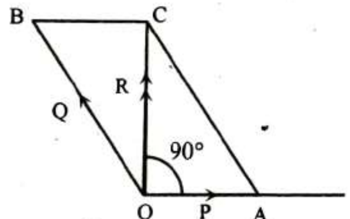
17. P ও Q দুইটি বল যেখানে $P > Q$। [যশোর বোর্ড-২০১৯]

ক. যদি P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে P, Q এবং R, P এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

খ. যদি উদ্দীপকে উল্লিখিত বলগুলো সমবিন্দুগামী হয় এবং উহাদের লব্ধি অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করে তবে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ ও লব্ধি নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে F ও G হয় এবং উহারা পরস্পর একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে বল দুইটির লব্ধিকে F, G ও $\frac{\alpha}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

18. দৃশ্যকল্প-১:



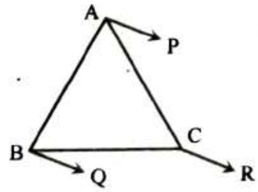
দৃশ্যকল্প-২: P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের সাথে একই সমতলে যথাক্রমে r দূরত্বে X মানের দুটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত। [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

ক. লামির সূত্রটি বর্ণনা কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে যদি $R = \frac{2}{3}Q$ হয়, তবে P ও Q বলের অনুপাত নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, এদের লব্ধি $\frac{rX}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

19.



P, Q, R বলত্রয় সমমুখী সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত। [ঢ. বো., দি. বো., সি. বো. ও য. বো. ১৮]

ক. $60°$ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি কত?

খ. বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, দেখাও যে, $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

গ. বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর ভরকেন্দ্রগামী হলে P, Q এবং R বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

20. দৃশ্যকল্প-১: W ওজনের একটি কাঁঠাল α কোণে হেলানো ডালে ঝুলছিল।

দৃশ্যকল্প-২: 8 মিটার দীর্ঘ ও 42 কেজি ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি খুটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপিত। একটি খুটি A প্রান্তে, অপরটি B প্রান্ত হতে 2 মিটার ভিতরে অবস্থিত। [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]

ক. বলের লম্বাংশের উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে হেলানো ডালের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ক্রিয়ারত F_1 এবং F_2 বল দুইটি পৃথকভাবে কাঁঠালটিকে তলের উপর স্থির রাখে। প্রমাণ কর যে, $W = \dfrac{F_1F_2}{\sqrt{F_1^2 - F_2^2}}$, যখন $F_1 > F_2$.

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে 55 কেজি ওজনের একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে B প্রান্তের দিকে কত দূর যেতে পারবে?

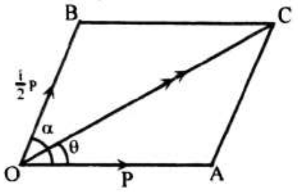
21. [ঢাকা বোর্ড, দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

ক. 100N ও 70N মানের দুইটি বলের লব্ধি কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 62° হলে বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

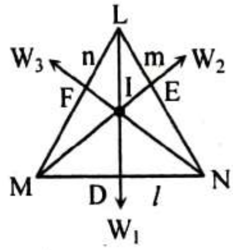
খ. P কে (R + 3) পরিমাণে এবং Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।
প্রমাণ কর যে, $R = S + \dfrac{(Q - R - 3)^2}{P - Q} - 1$.

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের সমতলে x দূরত্বের ব্যবধানে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলো। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\dfrac{xR}{P + Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

22. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]

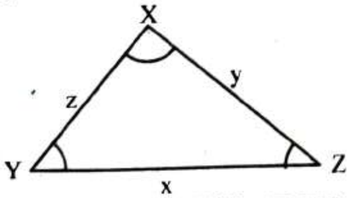
LD, ME ও NF যথাক্রমে MN, NL ও LM এর উপর লম্ব।

ক. বলের অংশক ও লব্ধি ব্যাখ্যা কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে কোন বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে? যদি বলদ্বয়ের লব্ধি P বলের $\frac{\sqrt{5}}{2}$ গুণ হয় তবে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ ও লব্ধির দিক নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত বলগুলির লব্ধি শূন্য হলে প্রমাণ কর যে, $W_1 = W_2 = W_3$ যখন $l = m = n$.

23. [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]



P, Q, R বলত্রয় ΔXYZ এর লম্ব কেন্দ্র হতে যথাক্রমে YZ, ZX ও XY বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় থাকে। আবার বলত্রয় যথাক্রমে X, Y, Z বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়া করে।

ক. "দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে"—উক্তিটির সত্যতা যাচাই কর।

খ. উদ্দীপকের বলত্রয়ের সাম্যাবস্থায় থাকার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = x ঃ y ঃ z

গ. উদ্দীপকের বলত্রয় সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, P ঃ Q ঃ R = x ঃ y ঃ z

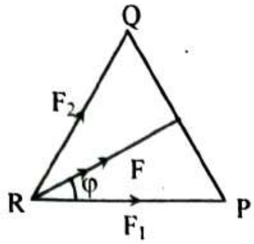
24. দৃশ্যকল্প-১ : ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 5, 7, 9 একক মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

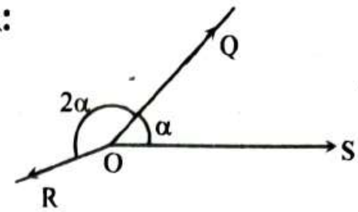
দৃশ্যকল্প-২ : 8 মিটার দীর্ঘ 12kg ওজনের একটি সুষম তক্তা দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি খুঁটি A প্রান্ত এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 1 মিটার ভিতরে অবস্থিত।

ক. 8N ও 5N মানের দুইটি বল 60° কোণে ক্রিয়ারত। বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত?

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে বলত্রয়ের লব্ধি নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে একজন বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌছালে বালকের ওজন কত?

25. দৃশ্যকল্প-১: 

দৃশ্যকল্প-২: 

[সিলেট বোর্ড-২০১৭]

ক. বলের লম্বাংশ কী ব্যাখ্যা কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং F_1, F_2 এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \varphi = \frac{1}{2}(R + Q - P)$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ Q, R, S বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $S^2 = R(R - Q)$

26. দৃশ্যকল্প-১ : L, M, N মানের সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 25, 60, 65 সে.মি.। L ও M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি 51 গ্রাম ওজন।

দৃশ্যকল্প-২ : 20 সে.মি. ব্যবধানে একটি সুষম হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে 8N ও 4N মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। [যশোর বোর্ড-২০১৭]

ক. 4N ও $2\sqrt{3}$N মানের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়া করে। 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে বলগুলির মান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ প্রত্যেক বলের মান 4N করে বৃদ্ধি করা হলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরত্বে সরে যাবে?

27. দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে P এবং 3P দুইটি বল ক্রিয়াশীল।

দৃশ্যকল্প-২: P_1 এবং P_2 দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]

ক. একটি বিন্দুর উপর ক্রিয়ারত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং শেষ বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে বল তিনটির মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ, প্রথমটিকে চারগুণ ও দ্বিতীয়টির মান 18 একক বৃদ্ধি করলে উভয়ক্ষেত্রে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ, $P_1 = 4$, $P_2 = 6$ হলে এবং বল দুইটির প্রত্যেককে 2 একক পরিমাণে বৃদ্ধি করলে লব্ধির সরণ নির্ণয় কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

1. **(i) (a)** খুঁটির একপ্রান্তে 100 কেজি ওজন এবং অপর প্রান্তে 400 কেজি ওজন। **(b)** 2 মিটার **(ii)** একজন 40 কেজি এবং অপরজন 45 কেজি **(iii)** 21 কেজি ওজন ঝুলানো প্রান্ত হতে 2.45 মিটার, 70 কেজি **(iv)** 15 কেজি **(v)** 6 মিটার **(vi)** 650 গ্রাম **(vii)** 20 কেজি এবং 3 মি. **(viii)** 4 মিটার **(xii)** 48 ডাইন ও 36 ডাইন **(xiii)** 40 ও 12 গ্রাম ওজন।

2. **(i)** 1.5N **(ii)** 7 সে.মি. এবং 3 সে.মি. **5. (ii)** 9.8 নিউটন; A হতে 12 মি. দূরে; **(iii)** $\frac{4\sqrt{11}}{7}$ W একক

বহুনির্বাচনি

1. ক	2. ঘ	3. গ	4. ক	5. খ	6. ক	7. গ	8. খ	9. ক	10. ক	11. গ	12. গ	13. গ	14. গ
15. গ	16. গ	17. গ	18. ক	19. ঘ	20. গ	21. ঘ	22. ক	23. ঘ	24. ঘ	25. ক	26. খ	27. ঘ	28. ক
29. ঘ	30. ক	31. ঘ	32. খ	33. গ	34. ক	35. ক	36. গ	37. খ	38. ক	39. গ	40. ক	41. গ	42. ঘ
43. ক	44. খ	45. খ	46. ঘ	47. ক	48. খ	49. ঘ	50. খ	51. খ	52. ক	53. খ	54. ক	55. ক	56. খ
57. খ	58. খ	59. ক	60. গ	61. খ	62. গ	63. ঘ	64. খ	65. খ	66. ক	67. গ	68. ক	69. খ	70. ক
71. ক	72. ক	73. ক	74. গ	75. খ									

সৃজনশীল

1. খ. 606.42N গ. 612.30N **2.** ক. 8N ও 6N খ. খুঁটির অবস্থান A বিন্দু হতে 4 মিটার ডানে গ. খুঁটিটিকে 2.67 মিটার ডানে সরাতে হবে **3.** ক. 60 kg খ. দূরত্ব 3 মিটার গ. বামদিকে 0.5 মিটার সরে যেতে হবে

4. ক. 0 গ. $\frac{Px}{P+W}$ **5.** ক. $\frac{P}{Q} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}$ খ. 30°

6. ক. $\sqrt{13}$N **7.** ক. মধ্য বিন্দুতে খ. 100 কে.জি.; 400 কে.জি. গ. 2 মিটার

8. ক. 7N; বলদ্বয়ের সমান্তরাল বরাবর খ. BA বরাবর 6 সে.মি. **9.** খ. 5 cm

10. ক. 90° খ. 60° গ. $\frac{10}{\sqrt{3}}$N, $\frac{10}{\sqrt{3}}$N **11.** ক. লব্ধি $2\sqrt{13}$N **12.** ক. 4N; খ. 6N; গ. 15 সে.মি.

13. খ. 8N, 17N; গ. $T_1 = \frac{36}{13}$kg, $T_2 = \frac{15}{13}$kg **14.** খ. 20.014N; গ. $186\sqrt{2}$ N, 186N হওয়া প্রয়োজন।

15. ক. 90°, 120°, 150°; গ. $\frac{1}{7}$LM **16.** ক. S

17. ক. 90°, 135°; খ. $\frac{P^2 - Q^2}{Q}$, $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$; গ. $\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

18. খ. P : Q = $\sqrt{5}$: 3; **19.** ক. $\sqrt{3}$P একক গ. P = Q = R

20. গ. 7.53 মিটার যেতে পারবে **21.** ক. 146.535N; 24.94°; **22.** খ. 90°; P বলের সাথে 26.6° কোণ উৎপন্ন করে

24. ক. $\sqrt{129}$N; খ. $2\sqrt{3}$ একক; গ. 36 কেজি;

26. ক. 7N; খ. L = 15 গ্রাম ওজন, M = 36 গ্রাম ওজন এবং N = 39 গ্রাম ওজন; গ. 20 cm;

27. ক. $R^2 = P^2 + Q^2 + \sqrt{2}PQ$; খ. 2; গ. $\frac{\text{বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{35}$

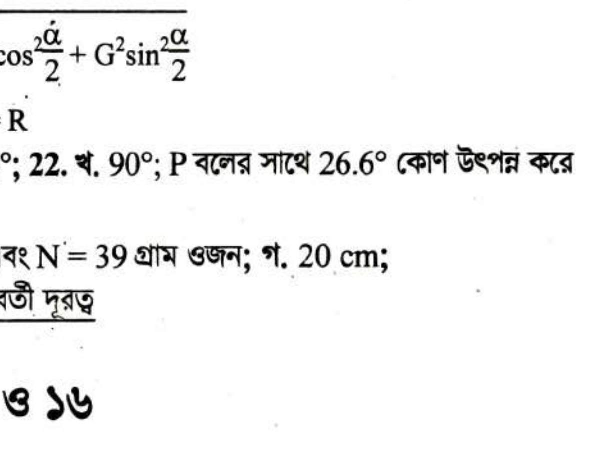
পাঠ-১৫ ও ১৬

ব্যবহারিক

8.12 লেখের সাহায্যে একাধিক বলের লব্ধি (Resultant of forces by graph)

পরীক্ষণ নং 8.12.1	লৈখিক পদ্ধতিতে বল বেগের লব্ধি নির্ণয় বিষয়ক সমস্যার সমাধান।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত 70 N ও 50 N বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 55° হলে লৈখিক পদ্ধতিতে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।



তত্ত্ব: P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ α হয় এবং লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ এবং $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা ও Scientific ক্যালকুলেটর ও গ্রাফ কাগজ।

কার্যপদ্ধতি :

i. গ্রাফ কাগজে পরস্পর লম্ব XOX′ এবং YOY′ রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. 1 সে.মি. সমান 10 একক বল ধরে 70 N বল এর আনুপাতিক OX রেখা থেকে OA = 7 সে. মি. দৈর্ঘ্য নিই।

iii. OA রেখার O বিন্দুতে ∠XOZ = 55° কোণ উৎপন্ন করি এবং OY থেকে 50 N বল প্রকাশ করার জন্য OB সমান 5 সে. মি. দৈর্ঘ্য কেটে নিই।

iv. OA এবং OB সরলরেখা দুইটিকে সন্নিহিত বাহু ধরে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি। OA এবং OB বল দুইটির লব্ধি হচ্ছে কর্ণ OC।

v. কর্ণ OC-এর দৈর্ঘ্য স্কেল দ্বারা এবং চাঁদা দ্বারা $\angle COA$-এর মান নির্ণয় করি।

ফল সংকলন:

P	Q	α	$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$	OC -এর দৈর্ঘ্য (স্কেল দ্বারা মেপে)	লব্ধির মান (অঙ্কন থেকে)
70N	50N	55°	$\sqrt{70^2 + 50^2 + 2.70.50 \cos 55°} = 106.8$	10.7 সে. মি.	$10.7 \times 10 = 107$

ভুলের পরিমাণ $= 107 - 106.8 = 0.2$

P	Q	α	$\theta = \tan^{-1} \dfrac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha}$	চাঁদার মাপে θ-এর পরিমাপ
70N	50N	55°	$\theta = \tan^{-1} \dfrac{50 \sin 55°}{70 + 50 \cos 55°} = 22.54°$	22.5°

ভুলের পরিমাণ $= 22.54 - 22.50° = 0.04°$

মন্তব্য : স্কেল এবং চাঁদার ত্রুটির জন্য সামান্য পার্থক্য হয়েছে।

পরীক্ষণ নং 8.12.2	লৈখিক পদ্ধতিতে বল বেগের লব্ধি নির্ণয় বিষয়ক সমস্যার সমাধান।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: কোন বিন্দুতে 7 N, 10 N, 11 N এবং 5 N পরিমাণ বল ক্রিয়াশীল। বলগুলি একটি নির্দিষ্ট রেখার সাথে যথাক্রমে 17°, 31°, 54° এবং 110° কোণ উৎপন্ন করে। বলগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ কর।

সমাধান: তত্ত্ব: $P_1, P_2, P_3, ...$ বলগুলি যদি কোন সরলরেখার সাথে যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ কোণ উৎপন্ন করে তবে ঐ রেখা বরবার ও ঐ রেখার লম্বিক দিক বরাবর বলগুলির লম্বাংশের সমষ্টি যথাক্রমে,
$\sum P_1 \cos\alpha_1 = X$ (ধরি) এবং $\sum P_1 \sin \alpha_1 = Y$ (ধরি) হয়। সেক্ষেত্রে লব্ধি $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ এবং ঐ নির্দিষ্ট রেখার সাথে লব্ধি θ কোণ উৎপন্ন করলে $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Y}{X}$.

উপকরণ: পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, Scientific ক্যালকুলেটর ও গ্রাফ কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

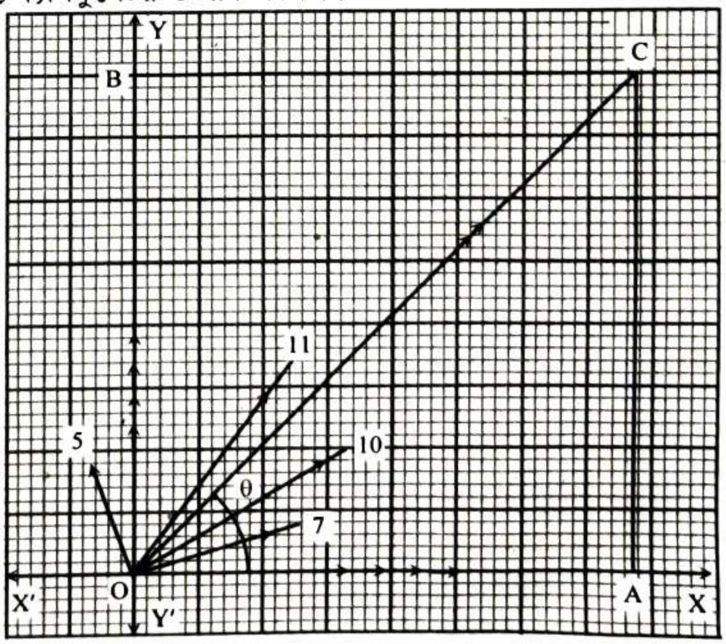
i. গ্রাফকাগজে পরস্পর লম্ব XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় আঁকি।

ii. 1 সে. মি. = 2 N বল ধরে বলগুলির সূচক রেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

iii. কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর এই বিন্দুতে OX ও OY পরস্পর লম্ব রেখা নিই।

iv OX এর সাথে 17° কোণে আনত 3.5 সে.মি. দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট রেখাংশ 7 N বলের মান ও দিক সূচিত করে।

v. অনুরূপভাবে 31° কোণে 5 সে.মি., 54° কোণে 5.5 সে.মি. এবং 110° কোণে আনত 2.5 সে. দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট রেখাংশ অঙ্কন করে যথাক্রমে 10 N, 11 N ও 5 N বলগুলির মান ও দিক সূচিত করি।



vi. OX বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নির্ণয় করে যোগ করি।

vii. OY বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নির্ণয় করে যোগ করি।

viii. OX ও OY বরাবর লম্বাংশের পৃথক পৃথক যোগফলকে যথাক্রমে X ও Y ধরে
$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ নির্ণয় করি।

ix. X ও Y বলদ্বয়কে পূর্বে উল্লেখিত স্কেলে (অর্থাৎ 2 N = 1 সে.মি.) OX ও OY বরাবর যথাক্রমে OA ও OB রেখাংশ দ্বারা সূচিত করি।

x. OACB আয়তক্ষেত্র ও তার কর্ণ OC অঙ্কন করি। তাহলে OC কর্ণদ্বারা প্রদত্ত বলগুলির লব্ধির মান ও দিক সূচিত হবে।

ফল সংকলন:

OX বরাবর লম্বাংশের সমষ্টি $= 7\cos 17° + 10 \cos 31° + 11 \cos 54° + 5 \cos 110°$
$= 20.032$ N = X (ধরি)

OY বরাবর লম্বাংশের সমষ্টি $= 7 \sin 17° + 10 \sin 31° + 11 \sin 54° + 5 \sin 110° = 20.794$ N = Y (ধরি)

X	Y	$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$	প্রকৃত মাপে OC এর দৈর্ঘ্য
20.032 N	20.794 N	28.873 N	14.45 সে.মি.

OC রেখাংশ লব্ধির মান সূচিত করে। সূত্রানুসারে লব্ধি = 28.873 N

আবার, OC = 14.45 সে.মি. দ্বারা $14.45 \times 2 = 28.90$ N পরিমাণ বল সূচিত হয়।

OC ও OX এর অন্তর্গত কোণ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{20.794}{20.032} = 46.069$

প্রকৃত মাপে (চাঁদার সাহায্যে) $\theta = 46°$

মন্তব্য: ফলাফল যাচাই করে দেখা যায় যে, সূত্রের সাহায্যে ও প্রকৃত মাপে নির্ণীত লব্ধির মান ও দিক (θ এর পরিমান) প্রায় একই। সুতরাং অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণিত হল।

কাজ: 1. লৈখিক পদ্ধতিতে কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত 52° কোণে 10 N এবং 7 N বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর এবং আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ কর।

2. লৈখিক পদ্ধতিতে কোনো কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল নিম্নোক্ত বেগদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। প্রত্যেক ক্ষেত্রে আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ কর।
(i) 48° কোণে 15 সে.মি./সে. এবং 27 সে.মি./সে. **(ii)** 152° কোণে 175 মি./সে. এবং 130 মি./ সে.

3. একই সময়ে কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত চারটি বল 20 N, 30 N, 50 N ও 80 N এবং উক্ত বিন্দুগামী কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সাথে বলগুলি যথাক্রমে 20°, 35°, 52° এবং 84° কোণ উৎপন্ন করে। লৈখিক পদ্ধতিতে বলগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর এবং সত্যতা যাচাই কর।

4. ABCDEF সুষম ষড়ভুজের A বিন্দুতে AB, AC, AD, AE ও AF বরাবর যথাক্রমে 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ ও 2 কেজি ওজনের বলগুলি ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। লেখচিত্র অঙ্কন করে যথার্থতা প্রমাণ কর।

5. কোনো কণার ওপর একই সময়ে 55° কোণে কার্যরত 180 মিটার/সেকেন্ড ও 110 মিটার/সেকেন্ড বেগদ্বয়ের মান লৈখিক পদ্ধতিতে আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করে এর যথার্থতা প্রমাণ কর।

মৌখিক প্রশ্ন

1. বলের সামান্তরিক সূত্রটি কী?
2. বলের অংশক এবং লম্বাংশক বলতে কী বোঝ?
3. সাম্যাবস্থায় বলের ত্রিভুজ সূত্রটি বল।
4. লব্ধি বল কাকে বলে?
5. P এবং Q দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধির মান ও দিক কত?
6. লামির উপপাদ্যটি কী?
7. লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি কী?