দ্বিতীয় অধ্যায়

ভেক্টর (Vectors)

2.1. সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসেবে ভেক্টর

আমরা যা কিছু পরিমাপ করতে পারি তাকেই রাশি বলি। যেমন 10 সে. মি., 2 কেজি, 5 মিনিট, 6 সে. মি./সে., (cms^{-1}), 2 ডাইন ইত্যাদি। এদের মধ্যে কতকগুলি শুধুমাত্র পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার কতকগুলি শুধু পরিমাণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ, যদি একটি বস্তুর প্রথম সেকেন্ডে সরণ 7 সে. মি. এবং দ্বিতীয় সেকেন্ডে সরণ 5 সে. মি. হয়, তবে একই সরলরেখায় একই দিকে সরণ হলে দুই সেকেন্ডে বস্তুটির সরণ (7 + 5) বা, 12 সে. মি.। পক্ষান্তরে একই সরলরেখায় ১ম সেকেন্ডের পর ২য় সেকেন্ডে বিপরীত দিকে সরণ হলে দুই সেকেন্ডে সরণ (7 – 5) বা, 2 সে. মি.। তাহলে স্পষ্টভাবে বলা যায় সরণের পরিমাণ জানার সাথে সাথে এর দিকও জানার প্রয়োজন হয়। অর্থাৎ পরিমাণ ও দিক ছাড়া সরণ সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। সুতরাং প্রকৃতির সকল রাশিকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। যথা :

(*i*) **অদিক রাশি বা স্কেলার রাশি** (*Scalar*)।

(*ii*) **সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি** (Vector)।

(*i*) অদিক রাশি বা স্কেলার রাশি : যে সকল রাশি শুধুমাত্র পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় ঐ সকল রাশিকে স্কেলার রাশি বলে। অর্থাৎ স্কেলার রাশির শুধু মান আছে, কোন দিক নেই। যেমন, দৈর্ঘ্য, দূরত্ব, সময়, ভর, আয়তন, ঘনত্ব, জনসংখ্যা, জন্মহার, তাপমাত্রা, কাজ, শক্তি ইত্যাদির প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

(*ii*) সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি : যে সকল রাশি সম্পূর্ণভাবে প্রকাশের জন্য রাশির পরিমাণ ও নির্দিষ্ট দিক প্রয়োজন হয়, ঐ সকল রাশিকে ভেক্টর রাশি (সংক্ষেপে ভেক্টর) বা সদিক রাশি বলে। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে। যেমন– সরন, বল, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, ভরবেগ ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

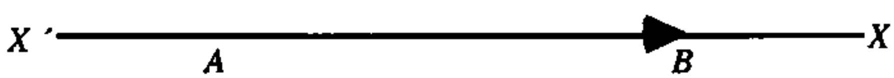
সদিক নির্দেশিত রেখাংশ : কোনো সরলরেখার এক প্রান্তকে আদি বিন্দু (Initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তবিন্দু (Terminal Point) হিসেবে চিহ্নিত করলেই ঐ সরল রেখাটি একটি দিক নির্দেশিত রেখাংশ (directed line segment) হবে। যদি কোন সরলরেখার আদি বিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হয়, তাহলে AB রেখাংশটি দিক নির্দেশিত রেখাংশ হবে এবং একে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.2. জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর

প্রত্যেক রেখাংশের তিনটি পরিচয় আছে। যথা :

(*i*) **ধারক রেখা** (Support) (*ii*) **দৈর্ঘ্য** এবং (*iii*) **দিক**।

(*i*) ধারক রেখা : কোন সরলরেখার একটি অংশকে কোন দিক নির্দেশিত রেখাংশ সূচিত করা হলে, উক্ত সরলরেখাটিকে ঐ রেখাংশের ধারক রেখা বলে। অর্থাৎ ধারক রেখাটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত এবং দিক নির্দেশিত রেখাংশটি ধারক রেখার একটি অংশ। যেমন : AB রেখাংশের ধারক রেখা $X'X$.



(*ii*) দৈর্ঘ্য: $\overrightarrow{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য হল A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান, যা $|\overrightarrow{AB}|$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

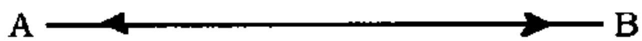
(*iii*) দিক : $\overrightarrow{AB}$ এর দিক A বিন্দু হতে B বিন্দুর দিকে। অপর পক্ষে $\overrightarrow{BA}$ এর দিক B বিন্দু হতে A বিন্দুর দিকে। অর্থাৎ উভয়ের ধারক রেখা এবং দৈর্ঘ্য (বা পরিমাণ) অভিন্ন, কিন্তু দিক ভিন্ন।

অতএব প্রত্যেক সদিক নির্দেশিত রেখাংশের (directed line segment) ধারক রেখা, দৈর্ঘ্য এবং দিক থাকে।

মন্তব্য : প্রত্যেক সদিক নির্দেশিত রেখাংশ একটি ভেক্টর।

ভেক্টর রাশিকে একটি অক্ষর অথবা একটি সদিক রেখাংশ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং ভেক্টরের প্রতীকের উপরে ($\rightarrow$) চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এ পুস্তকে মোটা করে ছাপা অক্ষরগুলিও ভেক্টর নির্দেশ করে। যেমন ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$.

আবার $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{P}$ হলে, $\overrightarrow{BA} = -\boldsymbol{P}$ এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| =$ ভেক্টরের পরম মান।



(2) ভেক্টরের সমতা *(Equal vector)* **:** দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান হবে, যদি তাদের দৈর্ঘ্য ও দিক একই হয় এবং ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হয়।

(3) সদৃশ ভেক্টর *(Parallel vector)* **:** যদি দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল এবং এদের দিক একই হয়, তবে ভেক্টর দুইটিকে সদৃশ ভেক্টর বলে। সদৃশ ভেক্টর দুইটির মান (দৈর্ঘ্য) অসমানও হতে পারে।

(4) বিপরীত ভেক্টর : যদি দুইটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় কিন্তু দিক বিপরীত হয়, তবে একটিকে অপরটির বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। যেমন, ভেক্টর $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ হলে, এর বিপর্যীত ভেক্টর $\overrightarrow{BA} = -\boldsymbol{a}$ হবে।

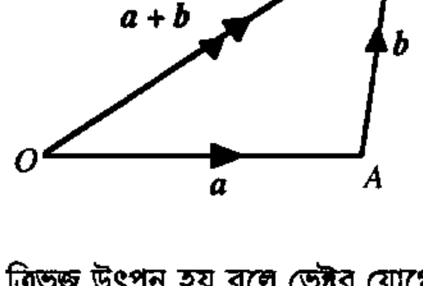
(5) শূন্য ভেক্টর *(Null vector or Zero Vector)* **:** কোন ভেক্টরের দৈর্ঘ্য শূন্য হলে, তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের আদিবিন্দু এবং অন্তবিন্দু একই। অর্থাৎ আদি বিন্দু ও অন্তবিন্দু দুইটির উভয়ে A হলে $|\overrightarrow{AA}| = 0$. শূন্য ভেক্টরকে $\mathbf{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

2.3. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক

ভেক্টর যোগের সংজ্ঞা : কোনো একটি ভেক্টর $\boldsymbol{a}$ এর অন্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\boldsymbol{b}$ অঙ্কন করা হলে, ভেক্টর দুইটির যোগফল ভেক্টর $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ এর আরম্ভবিন্দু $\boldsymbol{a}$ এর আরম্ভবিন্দু এবং অন্তবিন্দু হবে $\boldsymbol{b}$ এর অন্তবিন্দু।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র

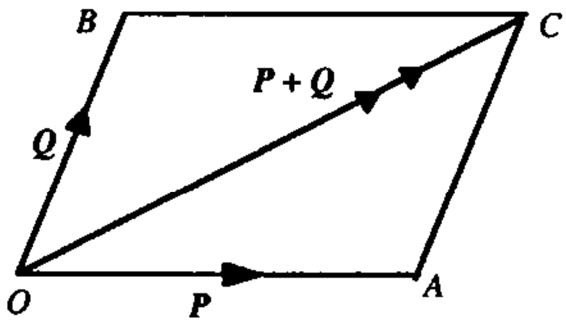
মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$ এমন দুইটি ভেক্টর যেন $\boldsymbol{a}$ এর অন্তবিন্দু এবং $\boldsymbol{b}$ এর আদিবিন্দু একই। তাহলে, $\boldsymbol{a}$ এর আদিবিন্দু O এবং $\boldsymbol{b}$ এর অন্তবিন্দু B সংযোগ রেখাংশ $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরকে $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি (বা লব্ধি) বলা হয় এবং $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



অর্থাৎ $\Delta\, OAB$ থেকে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

দ্রষ্টব্য : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ সমান্তরাল না হলে $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ এবং $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে ভেক্টর যোগের এই পদ্ধতিকে ত্রিভুজ সূত্র বলে।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক–সূত্র



সংজ্ঞা : কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ এর মান ও দিক সূচিত করা হলে, $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ ভেক্টর দুইটির সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণ $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করবে।

প্রমাণ : মনে করি, যে কোন বিন্দু O থেকে অংকিত $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ ভেক্টর দুইটি যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত করা হল। $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OC যোগ করি। তাহলে, O বিন্দুগামী সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ ভেক্টর দুইটির যোগফল (লব্ধি) সূচিত করবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$.

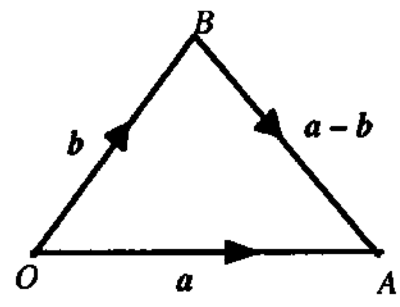
এখানে OB এবং AC সমান ও সমান্তরাল বলে তারা একই ভেক্টর সূচিত করে। সুতরাং $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{Q}$

অতএব $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ সূত্র থেকে]

মন্তব্য : দুই বা ততোধিক (সসীম সংখ্যক) ভেক্টরের যোগফলকে ভেক্টরগুলির লব্ধি বলে।

2.3.1. ভেক্টর বিয়োগ : যদি দুইটি ভেক্টর $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ এর আরম্ভ বিন্দু একই হয়, তাহলে $\boldsymbol{b}$ এর অন্তবিন্দু এবং $\boldsymbol{a}$ এর অন্তবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ দ্বারা $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর বিয়োগফল $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ ভেক্টর নির্দেশ করে।

মনে করি $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, এখানে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ ভেক্টর দুইটির উভয়ের আদিবিন্দু O এবং $\boldsymbol{b}$ ও $\boldsymbol{a}$ এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে B ও A। সুতরাং $\overrightarrow{BA}$ রেখাংশটি $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ভেক্টর সূচিত করবে। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ–সূত্র থেকে পাই



$\Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ [উভয় দিকে $\overrightarrow{BO}$ যোগ করে]

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ [$\because$ $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ হলে $\overrightarrow{BO}=-\boldsymbol{b}$]

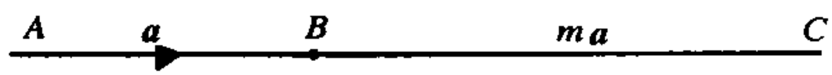
$\therefore \overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}$.

2.3.2. ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক

কোন ভেক্টরকে একটি বাস্তব সংখ্যা বা স্কেলার দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ভেক্টর হয়। মনে করি $\boldsymbol{a}$ যেকোনো একটি ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা বা স্কেলার। তাহলে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের $m\ (m>0)$ গুণিতক $m\boldsymbol{a}$ দ্বারা একটি ভেক্টর বোঝায়, যার মান $|m\boldsymbol{a}|$ এবং দিক হবে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের দিকে। যদি m–এর মান ঋণাত্মক হয় অর্থাৎ $m<0$, তাহলে $m\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের দিক হবে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের বিপরীত দিকে। $m=0$ হলে $m\boldsymbol{a}$ একটি শূন্য ভেক্টর হবে এবং এর কোন নির্দিষ্ট দিক নেই। আবার $\boldsymbol{a}$ এবং $m\boldsymbol{a}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা এক অথবা সমান্তরাল হতে পারে।

ধারক রেখা এক বা অভিন্ন :



ধারক রেখা সমান্তরাল :

যখন $AB \parallel CD$ এবং $CD=m\,(AB)$

লক্ষণীয় : যদি দুইটি ভেক্টরের ধারকরেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয়, তাহলে যেকোনো একটি ভেক্টরকে অন্যটির স্কেলার গুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $CB = 2\,AC$ এবং $\vec{AC} = \boldsymbol{a}$ হলে, $\vec{CB} = 2\boldsymbol{a}$ এবং $\vec{BC} = -2\,\boldsymbol{a}$.

2.4. দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি

:$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং m ও n দুইটি স্কেলার রাশি বা বাস্তব সংখ্যার জন্য

(i) $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}$ [ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি]

(ii) $(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R})$, [সহযোজন বিধি]

(iii) $m\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}m$ [স্কেলার গুণিতকের বিনিময় বিধি]

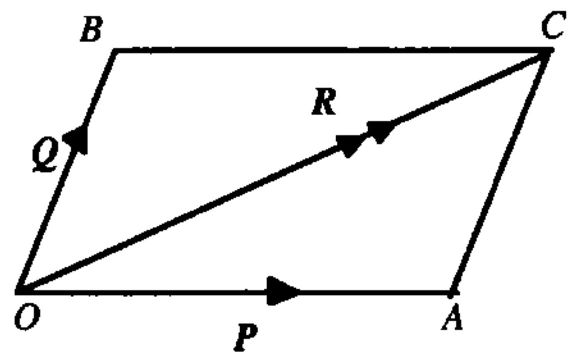
(i v) $m(n\boldsymbol{P}) = mn\boldsymbol{P}$ [স্কেলার গুণিতকের সহযোজন বিধি]

(v) $(m + n)\,\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{P}$ [স্কেলার গুণনের বন্টন বিধি]

(vi) $m(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) = m\boldsymbol{P} + m\boldsymbol{Q}$ [স্কেলার গুণনের বন্টন বিধি]

প্রমাণ : (i) ভেক্টরের যোগের বিনিময় বিধি (Commutative law of addition) :

মনে করি, ΔOAC–এর $\vec{OA}$, $\vec{AC}$ দ্বারা যথাক্রমে $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ দুইটি ভেক্টর সূচিত করা হল। ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজের–সূত্রানুসারে, $\vec{OC}$ এদের লব্ধির মান ও দিক সূচিত করবে। ধ রি, লব্ধি, $\vec{OC} = \boldsymbol{R}$.



$\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ ... (i) অর্থাৎ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$

এখন $OACB$ সামান্তরিকটি অংকন করি। তাহলে $OA = BC$

এবং $OA \parallel BC$. আবার $AC = OB$ এবং $AC \parallel OB$.

সুতরাং $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$ ... (ii)

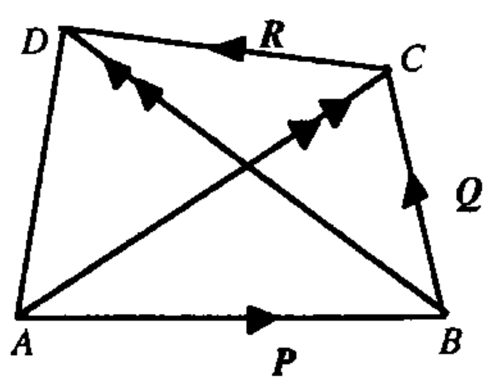
(i) ও (ii) থেকে আমরা পাই, $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OB} + \vec{BC}$

অর্থাৎ $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}$

$\therefore$ ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি প্রমাণিত।

(ii) ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি (Associative law of addition) :

মনে করি, $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ ও $\boldsymbol{R}$ ভেক্টরকে যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ ও $\vec{CD}$ দ্বারা সূচিত করা হল। এখন AD, BD ও AC যোগ করি। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই,



ΔABC–এ, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$

ΔACD–এ, $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{R}$ ... (i)

আবার, ΔBCD–এ, $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}$

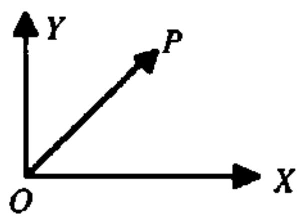
এবং ΔABD–এ, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \boldsymbol{P} + (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R})$ ... (ii)

(i) ও (ii) থেকে আমরা পাই, $(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R})$.

অর্থাৎ ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি প্রমাণিত।

2.5. সমতলে ভেক্টরের অংশক

অবস্থান ভেক্টর : কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য যেকোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর **অবস্থান ভেক্টর** বলা হয়।



মনে করি, x–অক্ষ ও y–অক্ষ O বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করেছে। তাহলে, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর হল $\overrightarrow{OP}$. এখানে O বিন্দুকে **ভেক্টর–মূলবিন্দু** (vector origin) বলা হয়।

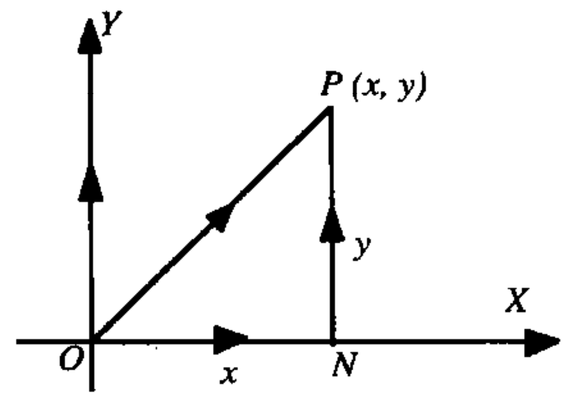
(1) একক ভেক্টর (Uni t Vector) : যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য (পরম মান) একক, তাকে একক ভেক্টর বলা হয়।

যদি $|\overrightarrow{OP}| \neq 0$ হয়, তবে একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}$ (ধরি), যেখানে $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$.

অর্থাৎ, কোন ভেক্টরকে তার দৈর্ঘ্য (পরম মান) দ্বারা ভাগ করলেই ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য r হলে, আমরা জানি ভেক্টর, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. সুতরাং $\mathbf{r}$ এর অংশক $\mathbf{a}$ এবং $\mathbf{b}$. কিন্তু $\mathbf{r}$ কে কর্ণ ধরে অসংখ্যক সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়। ফলে $\mathbf{a}$ ও $\mathbf{b}$ এর অসংখ্য মান পাওয়া যায়।

মনে করি, x–অক্ষ এবং y–অক্ষ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $P(x, y)$ একটি বিন্দু হলে, O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$. P বিন্দু থেকে OX এর উপর লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$. [ত্রিভুজ সূত্র থেকে]

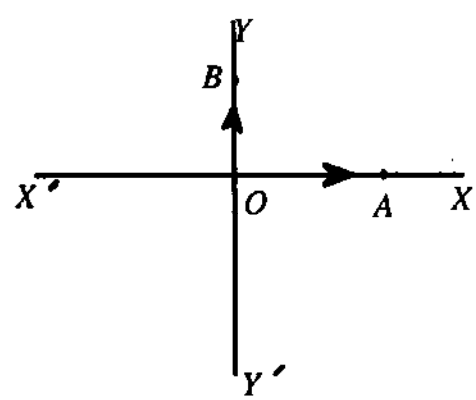


কিন্তু $\overrightarrow{ON} = x\,\mathbf{i}$ এবং $\overrightarrow{NP} = y\,\mathbf{j}$, যেখানে $\mathbf{i}$ এবং $\mathbf{j}$ যথাক্রমে x এবং y এর একক ভেক্টর।

সুতরাং, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ এর অংশক $x\,\mathbf{i}$ এবং $y\,\mathbf{j}$. অর্থাৎ অংশক অনন্যভাবে নির্ণয় করা যায়।

2.6. একক ভেক্টর i , j .

মনে করি, পরস্পর দণ্ডায়মান দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' যথাক্রমে x–অক্ষ এবং y–অক্ষ। x–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{i}$ এবং y–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{j}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



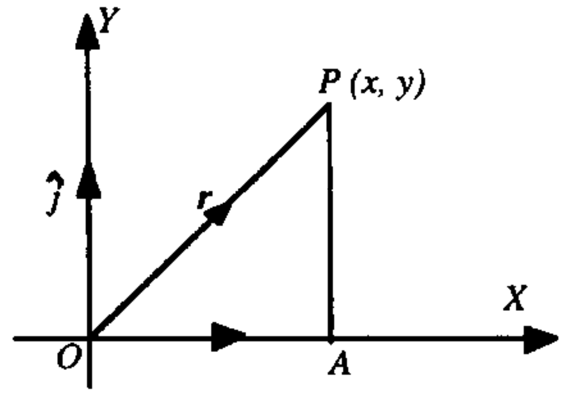
যেমন, $\mathbf{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x}$, যেখানে $|\overrightarrow{OA}| = x$

এবং $\mathbf{j} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{y}$, যেখানে $|\overrightarrow{OB}| = y$

সুতরাং, দ্বিমাত্রিক জগতে যেকোনো বিন্দুর অবস্থান, ভেক্টরকে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করা যায়।

2.7. ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ

মনে করি, OX ও OY রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। তাহলে O মূলবিন্দু এবং OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে x ও y–অক্ষ নির্দেশ করে। x ও y- অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}$ ও $\mathbf{j}$ নেয়া হল। ধরি XY সমতলে অবস্থিত কোন একটি বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y). P থেকে x–অক্ষের উপর PA লম্ব টানি এবং OP যোগ করি। সুতরাং $OA = x$ এবং $AP = y$. ধরি $OP = r$.



একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি, যে কোন ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\text{ঐ ভেক্টর}}{\text{ঐ ভেক্টরের পরম মান}}$

অতএব x–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর, $\mathbf{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x}$ এবং

y– " " " " " $\mathbf{j} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{AP} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{y}$

$\therefore \overrightarrow{OA} = x\,\mathbf{i}$ এবং $\overrightarrow{AP} = y\,\mathbf{j}$.

এখন দুইটি ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ–সূত্রানুসারে $\Delta\, OAP$ থেকে আমরা পাই

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

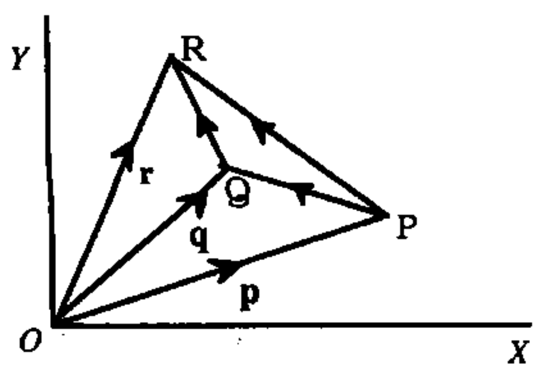
$$\therefore \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}\,.$$

আবার OAP সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই, $OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$.

সুতরাং $\overrightarrow{OP}$, অর্থাৎ $\boldsymbol{r}$ ভেক্টর দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.8. অবস্থান ভেক্টর

মনে করি, অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ দ্বারা সূচিত হলো। তাহলে, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ কে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ কে যথাক্রমে $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। । x–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{i}$ এবং y–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\mathbf{j}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। পাশের ছবি থেকে,



$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ [ত্রিভুজ সূত্র]

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$

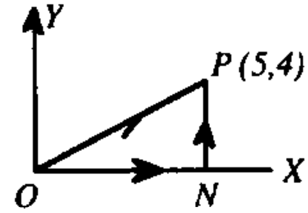
অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$.

$\overrightarrow{QR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}$.

সাধারণভাবে, A ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী ভেক্টরকে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ : $P(5, 4)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

মনে করি, OX এবং OY যথাক্রমে x- অক্ষ এবং y-অক্ষ। $P(x, y)$ বিন্দুটি স্থাপন করে OP যোগ করি। OX এর উপর PN লম্ব আঁকি। সুতরাং $ON = 5$ এবং $NP = 4$. এখন OPN ত্রিভুজ থেকে P-এর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$ [ত্রিভুজ সূত্র থেকে]

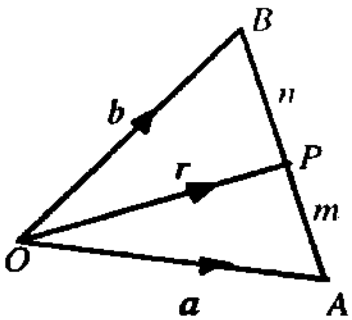


$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = 5\boldsymbol{i} + 4\mathbf{j}.$

2.9. দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টর

(a) বিভক্তিকরণ সূত্র : A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এবং P বিন্দুটি AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি O মূলবিন্দু এবং P বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর $\boldsymbol{r}$. OA, OB এবং OP যোগ করি।



তাহলে, $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB}$ b এবং $\overrightarrow{OP} = r$.

শর্তানুসারে, $AP : PB = m : n$

অর্থাৎ $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \left(\dfrac{m}{n}\right) \overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(\dfrac{m}{n}\right)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

$\Rightarrow \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} = \dfrac{m}{n}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r})$

$$\Rightarrow n\,\boldsymbol{r} - n\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{b} - m\,\boldsymbol{r} \Rightarrow (m + n)\boldsymbol{r} = m\,\boldsymbol{b} + n\,\boldsymbol{a} \quad \therefore \boldsymbol{r} = \frac{m\,\boldsymbol{b} + n\,\boldsymbol{a}}{m + n}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. P বিন্দুটি AB এর মধ্যবিন্দু হলে, $m = n$ হবে এবং মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$\boldsymbol{r} = \frac{m\,\boldsymbol{b} + m\,\boldsymbol{a}}{m + m} = \frac{m\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}{2m} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

অর্থাৎ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{r}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{OP}$ যেখানে OP হলো OAB ত্রিভুজের একটি মধ্যমা।

অনুসিদ্ধান্ত 2. P বিন্দুটি AB কে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে, $\boldsymbol{r} = \dfrac{m\,\boldsymbol{b} - n\,\boldsymbol{a}}{m - n}$.

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর অর্ধেক ও সমান্তরাল। [ঢা. '০৫, '০৯; রা. য. ব. '০৮; সি. য. '১২

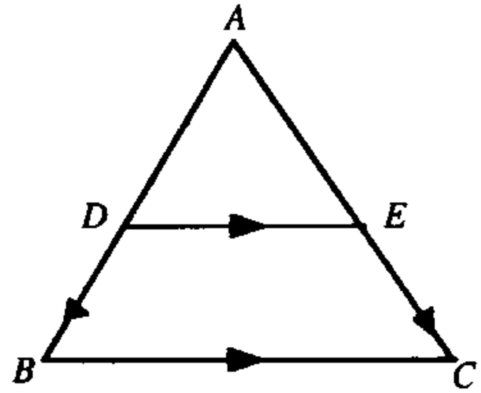
সমাধান : মনে করি, ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ DE. প্রমাণ করতে হবে $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$.

ADE ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ .....(i)

তদ্রূপ, ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ......(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$



এখন (ii) থেকে $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ বা, $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) দ্বারা]

অতএব, $\left|\overrightarrow{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$

অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2}BC.$

$\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা এক অথবা সমান্তরাল হতে পারে। কিন্তু এক্ষেত্রে ধারকরেখা ভিন্ন। সুতরাং $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা সমান্তরাল। সুতরাং $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC.$

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

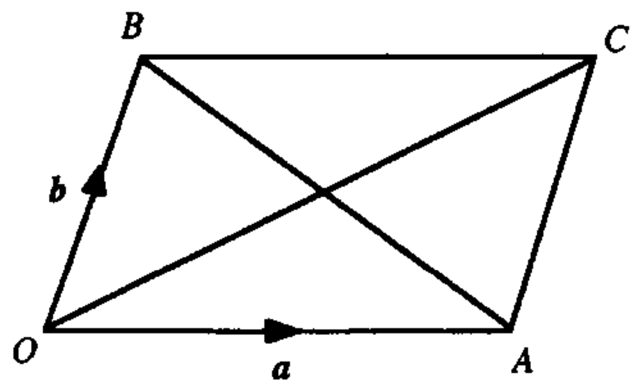
[রা. কু. ঢা. '০৫; চ. '০৬, '০৮; রা. '১২; ব. দি. '১৩]

সমাধান : মনে করি, $OACB$ সামন্তরিকের OC এবং AB দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে এরা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরি এবং $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$.

যেহেতু OA এবং BC সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, তদ্রূপ, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$.



এখন A ও B বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$.

তাহলে AB কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

আবার ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে আমরা পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, তাহলে

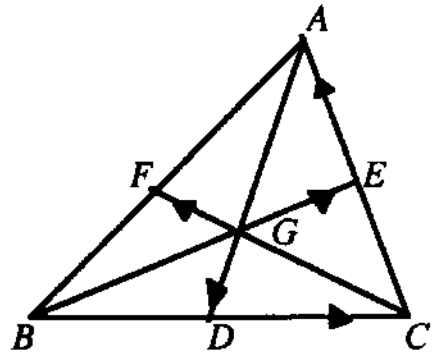
OC কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$.

যেহেতু AB ও OC কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর অভিন্ন। সুতরাং সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(d) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

[ব. য. কু. '১০; ঢা. '০৮, '১০; কু. চ. রা. '১২]

সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



তাহলে D এর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}$

E " " " $\dfrac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2}$

এবং F " " " $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$

G বিন্দুটি AD মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে G এর অবস্থান ভেক্টর

$$= \frac{1\boldsymbol{a} + 2\left(\dfrac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}\right)}{1+2}$$

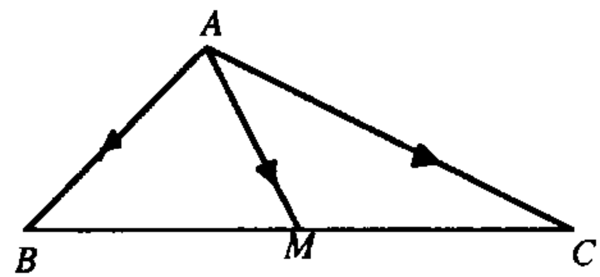
$$= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$$

অনুরূপভাবে দেখান যায় যে, BE এবং CF মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুদ্বয়ের উভয়ের অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$. সুতরাং ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

(e) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু M হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

[ঢা.. '০৮; য. '০৯; রা. '১১; য. '১৩]

সমাধান : ABM ত্রিভুজে,



$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র]

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$

[স্ব-স্ব পক্ষের সাথে ডট গুণন করে]

$[\because \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2]$

$\Rightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2\,\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$ ....(i)

তদ্রূপ ACM ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$

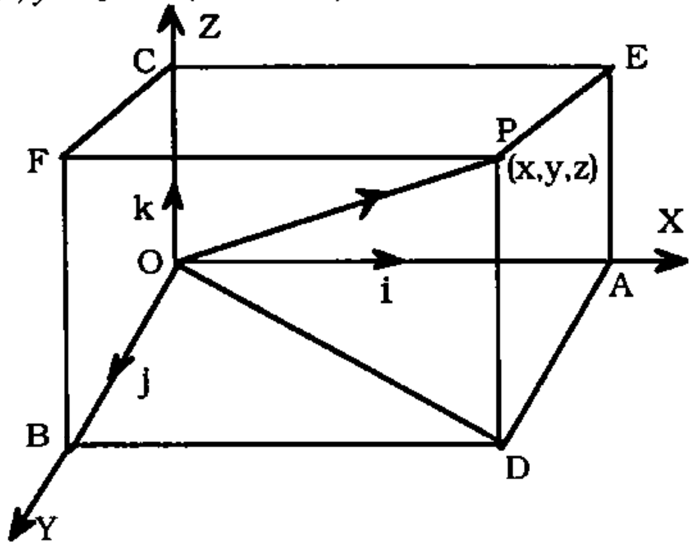
$\Rightarrow AC^2 = AM^2 + MB^2 + 2\,\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}$ ....(ii) যেহেতু $MC^2 = MB^2$

$(i) + (ii) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2\,(AM^2 + MB^2) + 2\,\overrightarrow{AM}\,(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2\,(AM^2 + MB^2)$ $[\because \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0]$

2.10. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয়

মনে করি, OX, OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে এবং এ রেখাত্রয় যথাক্রমে x, y ও z–অক্ষ (আয়ত–অক্ষ) নির্দেশ করে।



ধরি x, y ও z–অক্ষের দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ এবং যেকোনো বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z)।

তাহলে, চিত্র থেকে আমরা পাই, $OA = x$, $OB = y$ এবং $OC = z$.

আবার একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি,

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{x} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x\mathbf{i}$$

তদ্রূপ $\overrightarrow{OB} = y\,\mathbf{j}$ এবং $\overrightarrow{OC} = z\,\mathbf{k}$

মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$

যার আদিবিন্দু (initial point) O এবং শীর্ষবিন্দু (terminal point) P.

এখন OP এর দৈর্ঘ্য $= r$ হলে,

ΔOPD এ, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP}$ ... (i) এবং ΔOBD এ, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ ... (ii)

অতএব, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ | $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OC}$ এবং যখন x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\therefore \boxed{\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}$$

সুতরাং, $\overrightarrow{OP}$ এর অংশক যথাক্রমে $x\,\mathbf{i}$, $y\,\mathbf{j}$, $z\,\mathbf{k}$.

2.11. ত্রিমাত্রিক জগতে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ [অনুচ্ছেদ 2.10 এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

মনে করি, OX, OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। তাহলে, এ রেখাত্রয় যথাক্রমে x, y ও z–অক্ষ (আয়ত–অক্ষ) নির্দেশ করে।

x, y ও z–অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে যথাক্রমে $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন,

$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{OA}}{x}$, যেখানে $|\overrightarrow{OA}| = x$,

$\mathbf{j} = \frac{\overrightarrow{OB}}{y}$, যেখানে $|\overrightarrow{OB}| = y$

$\mathbf{k} = \frac{\overrightarrow{OC}}{z}$, যেখানে $|\overrightarrow{OC}| = z$

সুতরাং ত্রিমাত্রিক জগতে যেকোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করা যায়।

2.12. ভেক্টরকে i , j, k এর মাধ্যমে প্রকাশ

মনে করি, P(2, 3, – 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে i , j, k এর মাধ্যমে নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : P(2, 3, – 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ [অনুচ্ছেদ 2.10 থেকে]

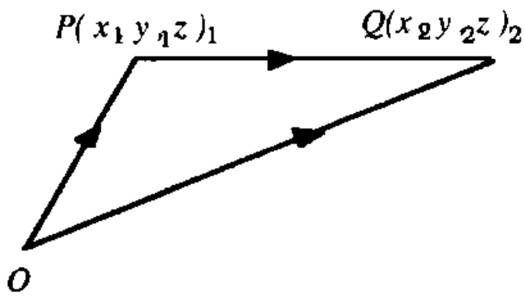
ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য নির্ণয় :

$OP^2 = OD^2 + DP^2$ [$\because DP \perp OD$] $= OB^2 + BD^2 + DP^2$ [$\because BD \perp OB$]

$= OA^2 + OB^2 + OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$

ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

সুতরাং OP বরাবর একক ভেক্টর, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|r|} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$



দ্রষ্টব্য : $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ দুইটি বিন্দু হলে

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$

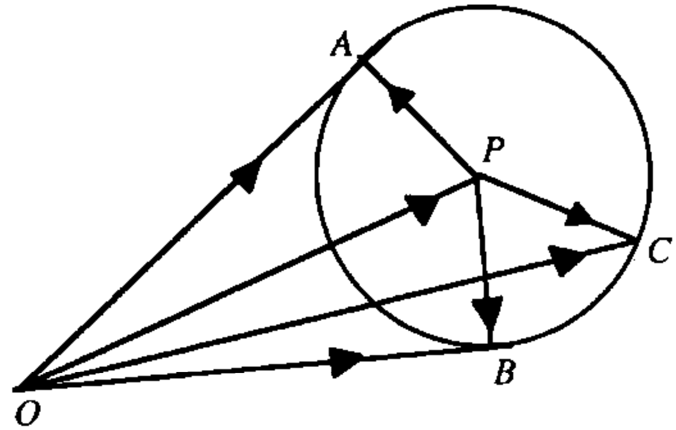
$= (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}.$

$$\boxed{P \text{ ও } Q \text{ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর } = \frac{P + Q}{|P + Q|}.}$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে $A(1, -1, -1)$, $B(3, 3, 1)$ এবং $C(-1, 4, 4)$ বিন্দু তিনটি একটি গোলকের (Sphere) উপর অবস্থিত, যার কেন্দ্র $P(0, 1, 2)$.

সমাধান : মনে করি O মূলবিন্দু।



তাহলে, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\overrightarrow{OC} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

এখন $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{OP} = (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\therefore \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}, \left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$\left|\overrightarrow{PC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$

$\therefore PA = PB = PC = \sqrt{14} =$ গোলকের ব্যাসার্ধ। সুতরাং প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি গোলকের উপর অবস্থিত।

উদাহরণ 2. $P(1, 1, 1)$ এবং $Q(3, 2, -1)$ দুইটি বিন্দু হলে, $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর ও এর সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, O মূলবিন্দু। সুতরাং $\overrightarrow{OP} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

এবং $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর $\eta = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \dfrac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right).$

2.13. ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে i , j , k মাধ্যমে প্রকাশ

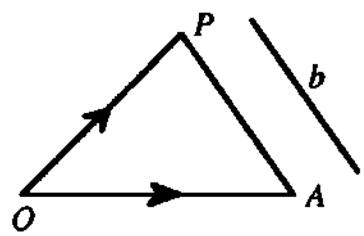
মনে করি, $\boldsymbol{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

যোগফল : $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\,\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}$

ভেক্টর গুণিতক : $\lambda A = \lambda A_1\mathbf{i} + \lambda A_2\mathbf{j} + \lambda A_3\mathbf{k}$, যখন λ একটি স্কেলার। দ্বিমাত্রিক জগতে (XY কাঠামো) শুধু i , j এর সংশ্লিষ্ট রাশিগুলি থাকবে।

2.14. সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

(i) একটি সরলরেখা A বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং একটি ভেক্টর b এর সমান্তরাল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।



মনে করি, O মূলবিন্দু এবং A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং রেখাটির উপর P যেকোনো একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$.

OAP ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$

বা, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

$= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$ .... (i)

কিন্তু $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরটি $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল। কাজেই, $\overrightarrow{AP} = \lambda\,\boldsymbol{b}$, যখন λএকটি স্কেলার।

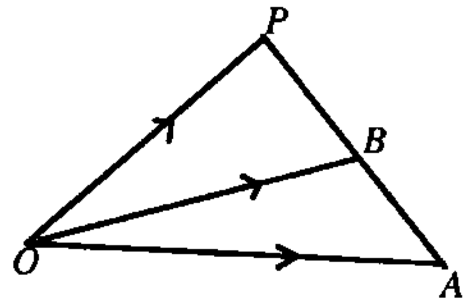
(i) থেকে, $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$

বা, $\lambda\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$ বা, $\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}}$ যা নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ।

অনু : সরলরেখাটি যদি মূলবিন্দুগামী হয়, তাহলে $\boldsymbol{a} = 0$, সুতরাং মূলবিন্দুগামী এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\boxed{\boldsymbol{r} = \lambda\,\boldsymbol{b}}$

(ii) দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ :

মনে করি, O মূলবিন্দু, রেখাটি A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির উপর P যে কোনো একটি বিন্দু। ধরি, A, B ও P বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ এবং $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$,.



পাশের চিত্র থেকে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

এখন $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই। সুতরাং

$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, যখন λ স্কেলার।

$= \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

আবার, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{r} - \boldsymbol{a}$

$\therefore \mathbf{r} = (1 - \lambda)\,\boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{b}$, যা দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ।

2.15. ভেক্টরের স্কেলার গুণন

একটি সংখ্যার সাথে অপর একটি সংখ্যার গুণনের মত একটি ভেক্টরের সাথে অন্য একটি ভেক্টরের গুণন হয়। ভেক্টর গুণন দুই প্রকার : (i) স্কেলার বা ডট (.) গুণন এবং (ii) ভেক্টর গুণন বা ক্রস ($\times$) গুণন।

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা : দুইটি ভেক্টরের মান (দৈর্ঘ্য) এবং এদের অন্তর্গত কোণের কোসাইন এর গুণফলকে ভেক্টর দুইটির **স্কেলার গুণন** বলে। এ গুণফল একটি স্কেলার রাশি। এজন্য একে স্কেলার গুণন বলে। আবার এ প্রকার গুণন বোঝাতে ভেক্টরদ্বয়ের মাঝে ডট (.) দেয়া হয়। এজন্য একে ডট গুণন বলে।

$\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ দুইটি ভেক্টর এবং এদের অন্তর্গত কোণ θ হলে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ –এর স্কেলার বা ডট গুণন

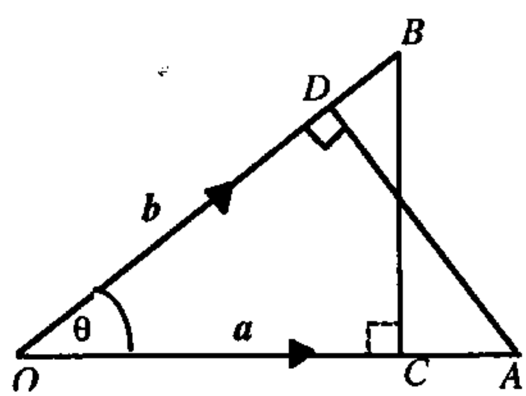
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| . |\boldsymbol{b}| \cos\theta = a\mathrm{b}\cos\theta$. যখন $0 \le \theta \le \pi$ এবং $|\boldsymbol{a}| = a$, $|\boldsymbol{b}| = b$

2.15.1. ভেক্টরের অভিক্ষেপ (*Projecti on*) ও উপাংশ (Resolved part).

(i) একটি ভেক্টরের উপর অন্য একটি ভেক্টরের অভিক্ষেপ :

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ এবং ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ, $\angle AOB = \theta$. B বিন্দু থেকে OA এর উপর BC লম্ব অংকন করি। তাহলে, $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ বা সংক্ষেপে অভিক্ষেপ,

$OC = |\boldsymbol{b}|\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\quad \left[\because \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta\right]$



তদ্রূপ $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $OD = |\boldsymbol{a}|\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

(ii) একটি ভেক্টরের দিক বরাবর অপর একটি ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক :

উপরের চিত্র থেকে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ, $OC = |\boldsymbol{b}| \cos\theta$.

ধরি $\boldsymbol{a}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

এখন অভিক্ষেপ $OC = |\boldsymbol{b}| \cos\theta$ কে একক ভেক্টর $\hat{a}$ দ্বারা গুণ করলে গুণফল $\overrightarrow{OC}$,একটি ভেক্টর হবে, যা $\boldsymbol{a}$ ভেক্টর বরাবর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক।

অর্থাৎ $\boldsymbol{a}$ ভেক্টর বরাবর $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের উপাংশ $\overrightarrow{OC} = |\boldsymbol{b}| \cos\theta\, \hat{a} = \frac{\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\hat{a}$

তদ্রূপ $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরের দিকে $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক $= \frac{\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\hat{b}$.

দ্রষ্টব্য : কোন ভেক্টরের উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি এবং অভিক্ষেপ স্কেলার রাশি। উপাংশ এবং অভিক্ষেপের পরম মান (দৈর্ঘ্য) সমান।

2.16. স্কেলার গুণজের ধর্ম

বিনিময় বিধি : (i) $\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b} = ab\cos\theta = ba\cos\theta = \boldsymbol{b} . \boldsymbol{a}$

সুতরাং $\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} . \boldsymbol{a}$ অর্থাৎ স্কেলার গুণজ বিনিময় বিধি (Commutative law) মেনে চলে।

(ii) **বণ্টন বিধি :** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) . \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} . \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} . \boldsymbol{c}$

(iii) θ সূক্ষ্মকোণ হলে, স্কেলার গুণন ধনাত্মক হবে এবং স্থূলকোণ হলে ঋণাত্মক হবে।

(iv) $\theta = 90^\circ$ হলে, $\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b} = ab\cos 90^\circ = 0$.

সুতরাং দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হবার শর্ত হলো ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণজ শূন্য।

সুতরাং আয়ত অক্ষ পদ্ধতির ক্ষেত্রে $\mathbf{i} . \mathbf{j} = 1.1\cos 90^\circ = 0$ তদ্রূপ $\mathbf{j} . \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} . \mathbf{i} = 0$

আবার $\mathbf{i} . \mathbf{i} = 1.1\cos 0 = 1$; তদ্রূপ $\mathbf{j} . \mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k} . \mathbf{k} = 1$

অতএব $\mathbf{i} . \mathbf{j} = \mathbf{j} . \mathbf{k} = \mathbf{k} . \mathbf{i} = 0$, যেহেতু $\theta = 90^\circ$ এবং $\mathbf{i} . \mathbf{i} = \mathbf{j} . \mathbf{j} = \mathbf{k} . \mathbf{k} = 1$, যেহেতু এখানে $\theta = 0$.

অনুসিদ্ধান্ত : $\boldsymbol{a} . \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}|\cos 0 = a.a = a^2$ অর্থাৎ $a^2 = \boldsymbol{a} . \boldsymbol{a}$.

দুইটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় :

$\boldsymbol{A} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta. \Rightarrow \cos\theta = \frac{\boldsymbol{A} . \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{\Sigma x_1^2}\sqrt{\Sigma x_2^2}},$$

যেহেতু $\boldsymbol{A} . \boldsymbol{B} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) . (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

যখন $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{\Sigma x_1^2}$ এবং $|\boldsymbol{B}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{\Sigma x_2^2}$

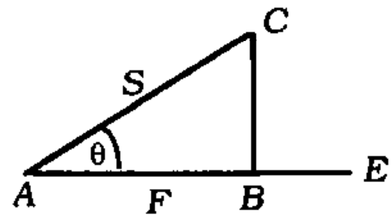
2.16.1. স্কেলার গুণজের ধর্মের প্রয়োগ

মনে করি, একটি বস্তুর উপর $\mathbf{F}$ বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\mathbf{S} = \overrightarrow{AC}$, যখন F বলটি AE বরাবর ক্রিয়াশীল।

F বলের দিকে সরণ S এর মান $= AB = AC \cos\theta$

আমরা জানি, কাজ = বলের মান × বলের দিকে সরণের মান।

$$\therefore W = F \times AB$$
$$= F \times AC \cos\theta$$
$$= FS \cos\theta$$
$$= \boldsymbol{F} \,.\, \boldsymbol{S}$$



সুতরাং দেখা যাচ্ছে, কাজ = $\boldsymbol{F}$ এবং $\boldsymbol{S}$ এর স্কেলার গুণন। কাজেই, কাজ একটি স্কেলার রাশি।

উদাহরণ : একটি কণার উপর $\boldsymbol{F} = (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})N$ বল প্রয়োগে কণাটির সরণ $\boldsymbol{r} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$মি. প্রযুক্ত বলটি কর্তৃক কাজের পরিমাণ কত?

সমাধান : আমরা জানি,

কাজ = বল এবং সরণের স্কেলার গুণজ

$$\therefore W = \boldsymbol{F} \,.\, \boldsymbol{r}$$
$$= (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}).(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \;[\because \mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1;\ \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = \mathbf{i.j} = 0]$$
$$= 10 + 9 - 8 = 11 \text{ Joule}$$

2.17. স্কেলার গুণজ

দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ :

মনে করি, $\boldsymbol{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

তাহলে, $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \,.\, (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \;[\because \mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1;\ \mathbf{i.j} = \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = 0]$$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $A = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ভেক্টরটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ভেক্টর A এর মান, $|A| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7.$

উদাহরণ 2. যদি $A = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ এবং $B = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ হয়, তাহলে (i) $|A + B|$ (ii) $2A + B$ নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) $A + B = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) + (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = (3 - 2)\mathbf{i} + (-1 + 4)\mathbf{j} + (-4 - 3)\mathbf{k}$

$$= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\therefore |A + B| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 9 + 49} = \sqrt{59}$$

(ii) $2A + B = 2(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) + (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$$= 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k} - 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

উদাহরণ 3. $A = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ **এবং** $B = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **দুইটি ভেক্টর। দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্ব।**

সমাধান : মনে করি, A ও B ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ.

এখন $A.B = (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$\Rightarrow |A|\,|B| \cos\theta = 15 - 21 + 6 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 = \cos 90° \Rightarrow \theta = 90°$

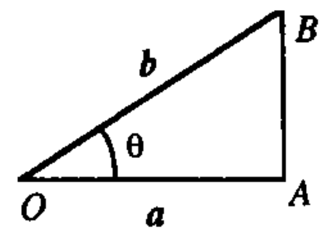
$\therefore$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

উদাহরণ 4. **যদি** $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **এবং** $b = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **দুইটি ভেক্টর হয়, তবে** a **ভেক্টরের উপর** b **ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও** a **ভেক্টর বরাবর** b **ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।**

সমাধান : a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$OA = b\cos\theta = \frac{ab\cos\theta}{a} = \frac{a\,.\,b}{a} = \frac{(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}).(4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}}$$

$$= \frac{4+16-2}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6.$$



২য় অংশ : a ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \dfrac{a}{|a|} = \dfrac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3}$

$\therefore$ a ভেক্টর বরাবর b এর উপাংশ $= \dfrac{a.b}{|a|}(\hat{a}) = \dfrac{6}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}.$

উদাহরণ 5. λ **এর মান নির্ণয় কর যেন** $a = 2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$, **এবং** $b = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **পরস্পর লম্ব হয়।**

সমাধান : আমরা জানি, দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে এদের ডট বা স্কেলার গুণফল শূন্য অর্থাৎ ভেক্টর দুইটি লম্ব হলে $a.b = 0$

বা, $2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}).(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0$

বা, $8 - 2\lambda - 1 = 0$ [$\because$ $\mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1; \mathbf{j.k} = \mathbf{k.i} = \mathbf{i.j} = 0$]

বা, $2\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = \dfrac{7}{2}.$

উদাহরণ 6. $a = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **ভেক্টর বরাবর** $b = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।**

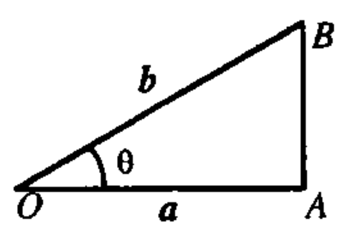
[রা. য. '১১]

সমাধান : a ভেক্টর বরাবর b ভেক্টরের উপাংশ

= (a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ) (a ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর)

$= OA\,(\hat{a}) = (b\cos\theta)(\hat{a})$, যখন a এবং b ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ

$$= \frac{ab\cos\theta}{a}(a) = \frac{a\,.\,b}{|a|}(a)$$



$$= \frac{(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}).(5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})(\hat{a})}{\sqrt{4+1+4}}$$

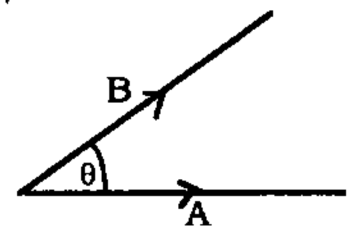
$$= \frac{10-3-4}{3}(a) = 1\,\frac{(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}).$$

উদাহরণ 7. $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ হলে, A ও B এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, A ও B এর অন্তর্গত কোণ θ.

অতএব $A \cdot B = |A||B|\cos\theta$ ....((i)

যখন $|A| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $|B| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$



$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 3\sqrt{35}\cos\theta$

$\Rightarrow 2 - 6 - 5 = 3\sqrt{35}\cos\theta$

$\Rightarrow -9 = 3\sqrt{35}\cos\theta.$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{-3}{\sqrt{35}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-3}{\sqrt{35}}\right).$

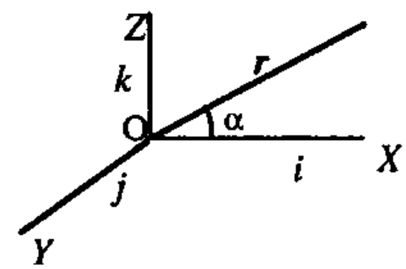
উদাহরণ 8. দেখাও যে, $r = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত।

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত r ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যথাক্রমে α, β, γ কোণ উৎপন্ন করে এবং x, y ও z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

ধরি, $a = \mathbf{i}$, $b = \mathbf{j}$ এবং $c = \mathbf{k}$.

এখন $|r| = |\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. এবং $|a| = |\mathbf{i}| = \sqrt{1^2} = 1$.

ডট বা স্কেলার গুণন করে আমরা পাই,



$r \cdot a = |r||a|\cos\alpha$

বা, $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = (\sqrt{3})\, 1 \cos\alpha$ বা, $1 = \sqrt{3}\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

তদ্রূপ, $r \cdot b = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = \sqrt{3}\cos\beta$ বা, $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

এবং $r \cdot c = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \sqrt{3}\cos\gamma$

বা, $1 = \sqrt{3}\cos\gamma$ বা, $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\therefore \alpha = \beta = \gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

সুতরাং, r ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত।

উদাহরণ 9. $3\,i + 5j$ বিন্দুগামী এবং $2\,i + 4\mathbf{j}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, a বিন্দুগামী এবং b ভেক্টরের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$\mathbf{r} = a + \lambda b$ .... (i)

যেখানে, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $a = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ এবং $b = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

(i) থেকে পাই, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \lambda(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

বা, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (3 + 2\lambda)\mathbf{i} + (5 + 4\lambda j)$ যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 2.1

1. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলিকে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

2. $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

3. (*i*) $ABCDE$ একটি পঞ্চভুজ। $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$, এবং $\overrightarrow{DE} = \boldsymbol{d}$ হলে, দেখাও যে,

$$\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}.$$

(*ii*) $ABCDE$ পঞ্চভুজ হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = 0.$

(*iii*) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B. যদি $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ কে $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [দি. '১২; ঢা. '১৩]

4. (*i*) $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. হলে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ নির্ণয় কর।
[রা. য. চ. '১২; ঢা. '১৩] উ: $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}, 7$

(*ii*) $\boldsymbol{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \boldsymbol{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ হলে, $(\boldsymbol{a}.\,\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}.\,\boldsymbol{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [য. '০৯] উ: 1.

5. (*i*) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ এবং $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ হলে, দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। [সি. চ. '১০; ঢা. চ. '১৩]

(*ii*) প্রমাণ কর যে, $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} - 3j - 5\,\mathbf{k}$ এবং $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$ ভেক্টরত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

(*iii*) দেখাও যে, $\boldsymbol{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \boldsymbol{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \boldsymbol{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। [ঢা. '০৪; ব. '১২]

6. (*i*) $\boldsymbol{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{Q} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$ হলে, $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা. '০৬; য. '১১, '১৩; ঢা. '১২] উ: $\left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$.

(*ii*) $P(1, 1, 1)$ এবং $Q(3, 2, -1)$ দুইটি বিন্দু হলে, $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর এবং এর সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. '০৯] উ: $\overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{i} + \hat{j} - 2\,\mathbf{k}, \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

(*iii*) $\boldsymbol{U} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{V} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ হলে, $\boldsymbol{U}$ এবং $\boldsymbol{V}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ: $\frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}}{5}$.

(*iv*) $2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

7. (*i*) দেখাও যে, $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ পরস্পরের উপর লম্ব।

(*ii*) $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 11\,\mathbf{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

[সি. '১০; ঢা. '১২] উ: $\cos^{-1}\left(\frac{13}{45}\right)$

8. (*i*) a এর মান কত হলে $a\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $2a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ পরস্পর লম্ব হবে। উঃ 1, – 2.
[ঢা. '০৮; সি. রা. '১২; কু. য. '১৩]

(*ii*) যদি $2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ও $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হয়, তবে λ এর মান নির্ণয় কর।
[সি. '০৬] উঃ $\lambda = \frac{5}{2}$.

9. (*i*) $A = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\vec{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ হলে, A ও B এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। উঃ 90^0

(*ii*) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।
[রা. য. দি. '১০; ঢা. চ. '১১; চ. ব. দি. সি. রা. '১৩] উঃ $\cos^{-1} 2/3$, $\cos^{-1} 1/3$, $\cos^{-1} (-2/3)$

(*iii*) $3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।
[য. '০৮] উঃ $\cos^{-1} 3/7$, $\cos^{-1} (-6/7)$, $\cos^{-1} 2/7$

10. (*i*) $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\vec{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $A.B$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।
[সি. '০৬; চ. '১০] উঃ $\cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$

(*ii*) $A = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ হলে, $A.B$ এবং এদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।
[রা. ব. '১১; য. '১৩] উঃ $\cos^{-1}\left(\frac{-4\sqrt{6}}{21}\right)$

(*iii*) $A = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ হলে, A এবং B এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।
[সি. '০৮] উঃ $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}\right)$

11. (ক) কোন একটি বস্তু কণার উপর নিম্নোক্ত চারটি ভেক্টর ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।
$A = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $B = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $C = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $D = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. উঃ $\sqrt{5}$.

(খ) $a = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $b = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ এবং $c = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ হলে, নিম্ন লিখিত ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর :
(*i*) $a - 2b$; (*ii*) $3b + a$; (*iii*) $2a - 3c$ উঃ (*i*) $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ (*ii*) $17\mathbf{j}$ (*iii*) $13\mathbf{j}$.

(গ) $A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং $B = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হলে, দেখাও যে, $(A + B)$ এবং $(A - B)$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। [ঢা. '০৮; দি. ব. '১০; চ. ব. '১২]

12. যদি $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $b = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হয়, তবে $2a + b$ এবং $a + 2b$ এর অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর।
উঃ $\cos^{-1}\left(\frac{31}{50}\right)$

13. (*i*) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(1, -1, 1)$ বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর লিখ এবং $\left|\vec{AB}\right|$ ও $\left|\vec{AC}\right|$ নির্ণয় কর। উঃ $A = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $B = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $C = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, 3, $\sqrt{6}$

(*ii*) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে $A(2, -1, 7)$, $B(-4, 5, 0)$ হলে $\left|\vec{AB}\right|$ নির্ণয় কর। উঃ 11

(*iii*) $(2, 3, 1)$ এবং $(3, 1, -2)$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। উঃ 7.

14. দেখাও যে, $A = 9\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $B = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

15. দেখাও যে, $A = 8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $B = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [য. '১২]

16. ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যে, $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। উঃ $-\frac{9}{4}$

17. $2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [কু. রা. '০৫] উ: 3.

18. $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ হলে, A ও B এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। উ: $\cos^{-1}\frac{4}{21}$.

19. (i) দেখাও যে, $a = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $b = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।
(ii) দেখাও যে, $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ এবং $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

20. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। উ: $\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{7}}$

21. $A = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ এবং $B = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। উ: $\cos^{-1}\left(\frac{-18}{7\sqrt{61}}\right)$

22. $a = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $b = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [কু. '১৩] উ: $\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

23. $A = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ও $B = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ হলে $(2A + B)$ এবং $(6A - 3B)$ এর মান নির্ণয় কর।
উ: $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

24. $A = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $B = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\vec{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ হলে $(B + 2A)$, $\left(\vec{C} - A\right)$ নির্ণয় কর।
উ: $8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

25. $A = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $B = \sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; A ভেক্টরের উপর B ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[কু. '০৪, '০৬; দি. '১১; চ. কু. '১২] উ: $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 1)$.

26. $a = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর $b = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। উ: $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
[ব. চ. '১১; ঢা. '১২]

27. $a = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ এবং $b = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে, a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও a ভেক্টর বরাবর b ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। উ: 4, $\frac{8}{7}\mathbf{i} - \frac{12}{7}\mathbf{j} + \frac{24}{7}\mathbf{k}$

28. $A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর বরাবর $B = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ভেক্টরের অংশক এবং B এর উপর A এর অভিক্ষেপ নির্ণয়। উ: $\frac{20}{9}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2)$, $\frac{20}{11}$

29. (i) $A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ এবং $B = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ হলে, A ভেক্টরের উপর B ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ কত?
[সি. '০৬] উ: $\frac{8}{3}$
(ii) $B = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপর $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[কু. '১১; সি. '১২; রা. '১৩] উ: $\frac{8}{7}$

30. যদি $a = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $b = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হয়, তবে a ভেক্টরের উপর b ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উ: $19/\sqrt{6}$ বর্গ একক

31. $A = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $B = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ হলে, B এর দিক বরাবর A এর অংশক নির্ণয় কর।
[দি. কু. '১০; সি. '১১] উ: $\frac{13}{225}(2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k})$

32. $a = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $b = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ হলে b ভেক্টরের উপর a এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উ: $\frac{9}{\sqrt{14}}$.
[য. '০৬]

2.18. ভেক্টরের ভেক্টর গুণন

সংজ্ঞা : দুইটি ভেক্টরের মানের গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন এর গুনফলকে ভেক্টর দুইটির ভেক্টর গুণন বলে। এ গুণফল একটি ভেক্টর যার দিক হবে ভেক্টর দুইটির সমতলে লম্বভাবে স্থাপিত ডানহাতের স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেদিকে।

$\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, এদের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর $\boldsymbol{c}$ হলে,

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (পড়তে হবে a ক্রস $\boldsymbol{b}$)

$$= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta\, \boldsymbol{n} = ab \sin\theta\, \boldsymbol{n}$$

যখন $(0 \le \theta \le \pi)$ এবং $\boldsymbol{n}$ একটি $\boldsymbol{c}$–এর দিক নির্দেশক একক ভেক্টর, যা $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর সমতলের উপর লম্ব।

মন্তব্য : ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে $(\times)$ ক্রস ব্যবহার করা হয় এজন্য ভেক্টর গুণনকে ক্রসগুণনও বলা হয়।

2.18.1. ভেক্টর গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

$OACB$ সামান্তরিকের OA এবং OB সন্নিহিত বাহু দুইটি দ্বারা যথাক্রমে a এবং b ভেক্টর দুইটি সূচিত করা হল। যদি $\angle AOB = \theta$ হয়, তাহলে

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \vec{OA} \times \vec{OB} = \left|\vec{OA}\right| \left|\vec{OB}\right| \sin\theta\, \hat{n}$$

যেখানে $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর। উল্লেখ ডানহাতি স্ক্রু $\boldsymbol{a}$ থেকে $\boldsymbol{b}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘূর্ণন হলে $\hat{n}$ এর দিক OD বরাবর এবং $\boldsymbol{b}$ থেকে $\boldsymbol{a}$ এর দিকে ঘূর্ণন হলে $\hat{n}$ এর দিক DO বরাবর হবে।

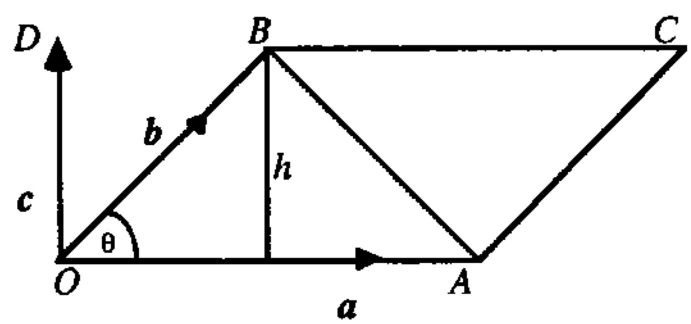
আবার $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = (OA)\,(OB) \sin\theta$

$= (OA)$ h, যখন h$= OB \sin\theta$

$= 2.\frac{1}{2} OA.$h

$= 2 \times \Delta OAB$

$= OACB$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।



সুতরাং দুইটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের পরম মান সংশ্লিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

2.19. ভেক্টর গুণজের ধর্ম

(*i*) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ অর্থাৎ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, কারণ এদের মান ও ধারক রেখা অভিন্ন কিন্তু দিক ভিন্ন। সুতরাং ভেক্টর গুণন বিনিময় নিয়ম (Commutative law) মেনে চলে না।

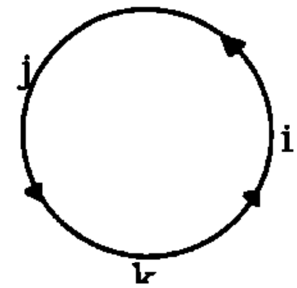
(*ii*) $\theta = 0$ বা, π হলে, $\sin\theta = 0$

$\therefore \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ অর্থাৎ দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণজ শুন্য হবে।

সুতরাং দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হবার শর্ত তাদের ভেক্টর গুণজ শুন্য।

(*iii*) $\theta = 90°$ হলে, $\sin\theta = 1$

$\therefore \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab \sin\theta\, \boldsymbol{n} = ab\, \boldsymbol{n}$, যেখানে $\boldsymbol{n}$ হলো $\boldsymbol{c}$ এর দিক নির্দেশক একক ভেক্টর, যা $\boldsymbol{a}$ ও $\boldsymbol{b}$ এর সমতলের উপর লম্ব।



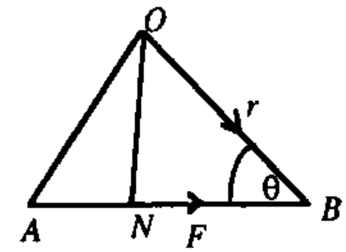
(ri) আয়ত অক্ষ পদ্ধতির ক্ষেত্রে $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$, যেহেতু $\theta=0$

এবং $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$

কিন্তু $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}==-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$

অর্থাৎ তীর চিহ্ন বরাবর ক্রম ঠিক রাখলে ভেক্টর গুণজ ধনাত্মক এবং এর বিপরীত ক্রম হলে ভেক্টর গুণজ ঋণাত্মক।

2.19.1. ভেক্টর গুণজের প্রয়োগ



মনে করি, একটি বস্তু O বিন্দুতে আটকানো আছে। বস্তুটির উপর $\boldsymbol{F}$ বল প্রয়োগ করা হলো। $\boldsymbol{F}$ বলটির মান ও দিক $\overrightarrow{AB}$ রেখাংশ দ্বারা সূচিত হলো। B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}$, $ON\perp AB$ এবং $\angle OBN=\theta$, কাজেই $ON=r\sin\theta$. তাহলে, O বিন্দুর সাপেক্ষে $\boldsymbol{F}$ বলের মোমেন্ট ভেক্টর $=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}$

$=Fr\sin\theta\,\hat{n}$ [$\hat{n}$ হলো $\boldsymbol{F}$ ও $\boldsymbol{r}$ এর সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর]

এবং মোমেন্টের পরিমান $=|\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r}|=Fr\sin\theta$

$=F\times$($\boldsymbol{F}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{r}$ ভেক্টরের উল্লম্ব অংশক)

$\therefore$ বলের মোমেন্ট একটি ভেক্টর রাশি।

2.20. ভেক্টর গুণজ

ভেক্টর গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ : [ঢা. '০১; সি. '০২]

মনে করি $\boldsymbol{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k}$.

তাহলে, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\mathbf{i}\times a_2\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k})$

$$=0+a_1b_2\,\mathbf{k}-a_1b_3\mathbf{j}-a_2b_1\,\mathbf{k}+0+a_2b_3i+a_3b_1j-a_3b_2i+0$$

$$[\,i\times i=j\times j=k\times k=0;\ i\times j=\mathbf{k};\ j\times k=i;\ i\times k=j\,]$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\,\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\,\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\mathbf{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix},$$ [ভেক্টর গুণজকে নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করে]

অনুসিদ্ধান্ত : $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ **ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে,** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c}=0$ **যখন** $\boldsymbol{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\,\mathbf{k}$

$$\Rightarrow(a_2b_3-a_3b_2)\,c_1-(a_1b_3-a_3b_1)\,c_2+(a_1b_2-a_2b_1)\,c_3=0$$

$$\Rightarrow a_1\,(b_2c_3-b_3c_2)-a_2\,(b_1c_3-b_3c_1)+a_3\,(b_1c_2-b_2c_1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0,$$ যা তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. দুইটি ভেক্টর $A = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ এবং, $B = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা. '০৬, '০৯; ব. দি. সি. '১৩]

সমাধান : আমরা জানি, $A \times B$ একটি ভেক্টর, যা A ও B উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব।

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (6+9)\,\mathbf{i} + (-12+2)\,\mathbf{j} + (6+24)\,\mathbf{k} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}.$$

এবং $|A \times B| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = \sqrt{225 + 100 + 900} = \sqrt{1225} = 35$

সুতরাং A ও B ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর

$$\eta = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{35} = \frac{5}{35}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}).$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ভেক্টরটি A ও B উভয়ের উপর লম্ব।

$\Rightarrow A.r = 0$ এবং $B.r = 0 \Rightarrow 2x - 6y - 3z = 0$ এবং $4x + 3y - z = 0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় পাই, $\dfrac{x}{6+9} = \dfrac{y}{-12+2} = \dfrac{z}{6+24} = c$ (ধরি) $\Rightarrow x = 15c, y = -10c, z = 30c$

$\therefore r = 15c\mathbf{i} - 10c\mathbf{j} + 30c\mathbf{k} \Rightarrow |r| = \sqrt{225c^2 + 100c^2 + 900c^2} = \sqrt{1225c^2} = 35c$

$\therefore A$ ও B উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর, $\dfrac{r}{|r|} = \dfrac{(15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k})\,c}{35c} = \dfrac{1}{7}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$

প্রশ্নমালা 2.2

1. (*i*) $A = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $B = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর :

   (*a*) $A \times B$ (b) $(A + B) \times (A - B)$ উ: (*a*) $10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. (b) $-20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$

   (*ii*) $A = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $B = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $C = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ হলে,

   (*a*) $A \times (B \times C)$ নির্ণয় কর। উ: $20\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$.

   (*b*) $A.(B + C) = A.B + A.C$ প্রমাণ কর।

   (*c*) $|2A - B + C|$ নির্ণয় কর। উ: 11.

2. $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর। AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: $5\sqrt{6}$ বর্গ একক

3. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু এর যথাক্রমে D, E, F হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ [রা. য. '১১; ব. সি. '১২ ; রা. দি. '১৩]

4. ABC ত্রিভুজে BC এর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ [সি. '১৩]

5. (*i*) ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ এ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। [ঢা. '০৪, '১০; ব. চ. কু. '০৬; সি. দি. '১১; কু. '১২] উ: $a=5$.

(*ii*) ধ্রুবক λ এর মান নির্ণয় কর যেন $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ এবং $\lambda\mathbf{i}-\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$ এ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। [য. '০৮] উ: $\lambda=1$.

6. A ও B কে দুইটি ভেক্টর ধরে প্রমাণ কর যে, $A.B=B.A$ কিন্তু $A\times B=-B\times A$.

7. যদি $\boldsymbol{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\boldsymbol{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ হয় তাহলে (*i*) $5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (*ii*) $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$ নির্ণয় কর।

উ: (*i*) $55\mathbf{i}+45\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (*ii*) $\dfrac{1}{\sqrt{38}}(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})$

8. (*i*) একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\boldsymbol{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{b}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ এর সমতলের উপর লম্ব। [কু. '১৩] উ: $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$

(*ii*) yz সমতলের সমান্তরাল এবং $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উ: $\frac{1}{5}(4\mathbf{j}+3\mathbf{k})$

(*iii*) $\boldsymbol{a}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{b}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব হয় এরূপ একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [কু. '০৫; রা. '১০] উ : $(-16\mathbf{i}-27\mathbf{j}-17\mathbf{k})/9\sqrt{14}$

9 (*i*) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।উ : $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}(4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$

(*ii*) $2i+j+k$ এবং $i-2j+k$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ: $\dfrac{1}{\sqrt{35}}(3\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k})$

[সি. চ. '১০; ঢা. '১১]

10 (*i*) a এর মান কত হলে $P=2\mathbf{i}+a\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ এবং $Q=6\mathbf{i}-3\mathbf{j}-9\mathbf{k}$ পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

উ: $a=-1$

(*ii*) m এর মান কত হলে $A=2\mathbf{i}+m\mathbf{j}-\mathbf{k}$ এবং $B=6\mathbf{i}+6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ সমান্তরাল হবে। উ: $m=2$

11. ABC ত্রিভুজে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ [সি. '০৫]

12. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. [ঢা. রা. য. '১০; ব. কু. '১২; চ. '১৩]

13. (*i*) ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. [য. '০৫]

(*ii*) ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $c=a\cos B+b\cos A$. [কু. চ. '১১]

14. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [কু. ব. '১১; সি. '১২; ঢা. চ. '১৩]

15. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

16. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

17. ABC ত্রিভুজে $A=90^\circ$ হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $BC^2=AB^2+AC^2$.

18. ABC ত্রিভুজের BC এর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.
[দি. চ. সি. কু. '১০; ঢা. '১২; ব. '১৩]

19 ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
[ঢা. '১০; য. দি. '১১; রা. সি. কু. '১৩]

20. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর, যে কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে উৎপন্ন চর্তুভুজটি একটি সামান্তরিক হবে। [য. '০৪]

21. (i) $2i - 4j + 3k$ বিন্দুগামী এবং $3i + j - 5k$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $xi + yj + 2k = (2 - 3\lambda)i - (4 - \lambda)j + (3 - 5\lambda)j + (3 - 4\lambda)k$

22. $3i + j + k$ এবং $2i + 2j - k$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ : $xi + yj + zk = (3 - \lambda)i + (1 + \lambda)j + (1 - 2\lambda)k$

প্রশ্নমালা 2.3

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. নিচে দুইটি ভেক্টর রাশি $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ দেওয়া হলো, যেখানে $\boldsymbol{A} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

   (a) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ এবং $\mathbf{k}$ এর ব্যাখ্যা দাও।

   (b) $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ নির্ণয় কর এবং $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, θ এর মান কত? উ : 90°

   (c) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ নির্ণয় কর।

2. তিনটি ভেক্টর রাশি নিম্নরূপ :
   $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\boldsymbol{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{C} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$

   (a) তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত কী?

   (b) a এর মান কত হলে প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে? উ : 5.

   (c) প্রদত্ত ভেক্টরত্রয়ের সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ : $\dfrac{2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k}}{\sqrt{174}}$.

3. $\boldsymbol{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{Q} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ দুইটি ভেক্টর।

   (a) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $\boldsymbol{R}$ হলে, $\boldsymbol{R}$ এর মান নির্ণয় কর। উ : 7.

   (b) লব্ধি ভেক্টরটির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। উ : $\dfrac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

   (c) প্রমাণ কর যে, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়।

4. $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

   (a) ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ কত? উ : 90°

   (b) এদের লব্ধি ভেক্টরটি নির্ণয় কর। উ : $4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

   (c) প্রমাণ কর যে, লব্ধি ভেক্টরটি প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

5. দেওয়া আছে $\boldsymbol{P} = 3\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(*a*) ভেক্টরটি কোন সমতলে অবস্থিত? প্রদত্ত ভেক্টরের সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

উ : yz.সমতলে, $\frac{3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{5}$.

(*b*) $\boldsymbol{P}$ ভেক্টরটি যে সমতলে অবস্থিত তা গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

(*c*) ভেক্টর পদ্ধতিতে যেকোনো ABC ত্রিভুজে দেখাও যে, $c = a\cos B + b\cos A$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

1. λ এর কোন মানের জন্য $2\mathbf{i} + \lambda\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?

(*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) $\frac{3}{4}$ (*c*) $\frac{5}{2}$ (*d*) 1

2. $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ এবং $6\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ভেক্টর দুইটি সমান্তরাল হলে a এর মান কত ?

(*a*) 2 (*b*) 4 (*c*) – 4 (*d*) 6

3. $\boldsymbol{P}.\boldsymbol{Q} = 4\sqrt{3}$ এবং $|\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}| = 4$ হলে, $\boldsymbol{P}$ ও $\boldsymbol{Q}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত ?

(*a*) 30° (*b*) 60° (*c*) 120° (*d*) 150°

4. $\vec{AB} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ এবং $\vec{AC} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ভেক্টর দুইটি যে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু তার ক্ষেত্রফল : (বর্গএককে)

(*a*) $3\sqrt{5}$ (*b*) $4\sqrt{6}$ (*c*) $5\sqrt{6}$ (*d*) 6

5. $\boldsymbol{P} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\boldsymbol{Q} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ হলে, $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} =$ কত?

(*a*) $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (*b*) $2\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (*c*) 0 (*d*) $6\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

6. $\boldsymbol{B} = 6\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপর $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ :

(*a*) $\frac{5}{7}$ (*b*) $\frac{7}{8}$ (*c*) $\frac{8}{7}$ (*d*) $\frac{6}{7}$

7. $2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?

(*a*) 30° (*b*) 60° (*c*) 90° (*d*) 120°

8. $2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $3\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হলে a এর মান কত?

(*a*) 2 (*b*) 3 (*c*) – 4 (*d*) 5

(*a*) (*i*) ও (*ii*) (*b*) (*ii*) ও (*iii*) (*c*) (*i*) ও (*iii*) (*d*) (*i*), (*ii*) ও (*iii*)