1. (a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্স দুইটির সমষ্টি ও অন্তর নির্ণয় কর। [কু.'০৫;দি.'১১]

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-4 & 4+6 & -1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 3+7 \\ 5+5 & 4+4 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+4 & 4-6 & -1-2 \\ 0-1 & 1-3 & 3-7 \\ 5-5 & 4-4 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

হলে, $7A - 5B$ নির্ণয় কর। [কু.'০২]

সমাধানঃ $7A - 5B =$

$$7\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 7 & -7 \\ 14 & 21 & 28 \\ -28 & 35 & 42 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -20 & 30 \\ 10 & 0 & -35 \\ 15 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-5 & 7+20 & -7-30 \\ 14-10 & 21-0 & 28+35 \\ -28-15 & 35-25 & 42-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

2(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **হলে,**

AB ও BA নির্ণয় কর। [য.'০৯]

সমাধান ঃ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+12 & 0-6 \\ -12+10 & 0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0 & 24+0 \\ 2+3 & 12-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

2(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ **হলে**

দেখাও যে, $AB = BA = I_3$

[কু.'০৮; সি.'০৫, '১০; য.'০৮; ঢা.'১০; চ.'১২; মা.'১১]

প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4+0 \\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\therefore AB = BA = I_3$ (Showed)

2(c) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ গুণন প্রক্রিয়ায় বিনিময়যোগ্য। [ঢা.'০৫; চ.'০৮]

প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6-0-5 & -2+0+2 & 2+0-2 \\ 15-15+0 & -5+6+0 & 5-5+0 \\ 0-15+15 & 0+6-6 & 0-5+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6-5+0 & 0-1+1 & -3+0+3 \\ -30+30+0 & 0+6-5 & 15+0-15 \\ 10-10+0 & 0-2+2 & -5+0+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BA$

$\therefore$ A ও B গুণন প্রক্রিয়ায় বিনিময়যোগ্য। (Showed)

3(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB ও BA নির্ণয় কর।

[রা.'০৮ ; সি.'১২,'১৪; চ.'১০; য.'১২;দি.'১৩; মা.'১২]

(ii) দেখাও যে , AB ≠ BA

[ব.,য.'০৭;ঢা.'০৮; চ.'১১; সি.'১২; ব.,সি.,দি.'১৩]

(i) সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

(ii) প্রমাণ: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ এবং

$BA = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$

3(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, **AB নির্ণয় কর।** [ব.'০৩]

সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+4 & -4+5 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (Ans.)

3(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে,

(i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [ব. মা.'০৯;য.'১৩]

(ii) দেখাও যে, (AB)C = A (BC) [য.'০৪]

(i) সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ (Ans.)

(ii) প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

এখন , $(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8+10 & 16+15 \\ 20+26 & 40+39 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10+8 & 17+14 \\ 30+16 & 51+28 \\ 0+4 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ (Showed)

4(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **এবং** $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

হলে দেখাও যে, (AB)C =A(BC) [য.'০৬; কু.'১৫]

প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 & 0+1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$

এখন , $(AB)\,C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+9+1 \\ 8+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$

$A\,(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+5 \\ 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)\,C = A\,(BC)$ (Showed)

4(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ও $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

হলে , (i) AB এবং AC নির্ণয় কর। [সি.'০৭]

(ii) দেখাও যে , AB + AC = A (B + C).

[য.'০৭; ব.'১১]

(i) সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

(ii) প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0-1 & 2+2 \\ 1+0 & 2+4 \\ 0+3 & -1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

এখন , $AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - B^2$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 13 & -13 & 7 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 13 & -14 & 7 \\ 5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ **হলে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A^2 + 3A - 10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$** **[য.'১৫]**

সমাধান: $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 2-8 \\ 3-12 & 6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-18 & -6+44 \\ 21+36 & -18-88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^2 + 3A - 10I = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+3-10 & -6+6+0 \\ -9+9+0 & 22-12-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. (a) সমাধান ঃ মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বইয়ের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$P = [100 \ \ 125 \ \ 110]$,

$$Q = \begin{bmatrix} 70.00 - 60.00 \\ 102.00 - 90.00 \\ 96.00 - 85.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.00 \\ 11.00 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $= P \times Q$

$$= [100 \ \ 125 \ \ 110] \times \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.00 \\ 11.00 \end{bmatrix}$$

$$= [1000.00 + 1500.00 + 1210.00]$$

$\therefore$ মোট লাভ $= 3710.00$ টাকা

6(b) সমাধান ঃ মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বিক্রীত কলমের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$P = \begin{bmatrix} 140 & 155 & 132 \\ 130 & 100 & 148 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 2.00 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $= P \times Q$

$$= \begin{bmatrix} 140 & 155 & 132 \\ 130 & 100 & 148 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.50 \\ 2.00 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 210.00 + 310.00 + 165.00 \\ 195.00 + 200.00 + 185.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 685.00 \\ 580.00 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ মোট লাভ $= (685.00 + 580.00)$ টাকা
$= 1265.00$ টাকা

7. (a) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(b) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

(c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ এবং $A^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর **[চুয়েট' ০৯-১০]**

সমাধান ঃ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\therefore\ A^2=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\ \cos 2\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\ \ldots$

$\therefore\ 2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{Z}.$

(d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 6 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-2I_2$

হলে a, b, x, y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 6 & -3\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 6\\ y & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y & 6-3\\ x-y & 6+3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}x+y & 3\\ x-y & 9\end{bmatrix}$

আবার, $\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-2I_2$

$=\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9 & a+b-3\\ 3 & ab+2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9+2 & a+b-3\\ 3 & ab+2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & a+b-3\\ 3 & ab+4\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $\begin{bmatrix}x+y & 3\\ x-y & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & a+b-3\\ 3 & ab+4\end{bmatrix}$

$\therefore\ x+y=11\cdots\cdots(i),\ x-y=3\cdots\cdots(ii)$

$a+b-3=3\cdots\cdots(iii),\ ab+4=9\cdots(v)$

$(i)+(ii)\Rightarrow 2x=14\Rightarrow x=7$ এবং $y=4$

(v) হতে, $ab=5\Rightarrow a=\frac{5}{b}$

(iii) হতে, $\frac{5}{b}+b-6=0$

$\Rightarrow b^2-6b+5=0\Rightarrow(b-5)(b-1)=0$

$\Rightarrow b=1, 5$

$b=1$ হলে, $a=5$; $b=5$ হলে, $a=1$.

$\therefore\ a=1$ অথবা 5, $a=5$ অথবা 1, $x=7$, $y=4$

(e) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 5\\ 5 & -5 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 1 & -3 & -3\\ -1 & 4 & 4\end{bmatrix}$

এবং $C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ -3 & -4 & 1\end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$(AB+C)'=B'A'+C'$

(f) $\begin{bmatrix}x & 4 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\begin{bmatrix}x & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}x & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x+4+0\\ x-2\\ 0+8-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x+4\\ x-2\\ 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2x^2+4x+4x-8+16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2x^2+8x+8\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $2x^2+8x+8=0$

$\Rightarrow x^2+4x+4=0\Rightarrow(x+2)^2=0$

$\Rightarrow x=-2$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 9\\ -2 & 5 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

(a) $\begin{bmatrix}3x-2y\\ 2x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

(b) ম্যাট্রিক্সের ক্রম এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB\neq BA$

(c) দেখাও যে, $C^2+3C-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(a) **সমাধান:** $\begin{bmatrix}3x-2y\\ 2x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$

$\therefore\ 3x-2y=6\cdots(i),\ 2x+5y=4\cdots(ii)$

$5\times(i)+2\times(ii) \Rightarrow 15x+4x=30+8$

$\Rightarrow \quad 19x=38 \Rightarrow x=2$

(i) হতে, $6-2y=6 \Rightarrow -2y=0 \Rightarrow y=0$

$\therefore \quad (x, y)=(2, 0)$

(b) A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3, [সা.স. $\times$ ক.স.]

B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×2.

$\therefore$ AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×2,

[A ম্যাট্রিক্সের সা.স. $\times$ B ম্যাট্রিক্সের ক.স.]

$\therefore$ BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×3,

[A এর সা.স. $\times$ B এর ক.স.]

$\therefore \quad AB \neq BA$.

(c) $C^2=C.C=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+6 & 2-8\\3-12 & 6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}$

$3C=3\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\9 & -12\end{bmatrix}$

$10I_2=10\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix}$

$\therefore \quad C^2+3C-10I$

$=\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\9 & -12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7 & -6\\-9 & 22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\9 & -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & 0\\0 & -10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7+3-10 & -6+6\\-9+9 & 22-12-10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore \quad C^2+3C-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা -IB

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & p & p^2\\1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}=p(p-1)^2(p^2-1)$

[ঢা.'০২,'১২; রা.'১১; কু.'০৯,'১৫; য.'০৯; চ.'১২,'১৫; মা.'১৩,'১৫; বুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ : L.H.S. $=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & p & p^2\\1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\1-p & p(1-p) & p^2\\1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4\end{vmatrix}$

[c_1-c_2 এবং c_2-c_3]

$=1\{(1-p)p^2(1-p^2)-p(1-p)(1-p^2)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে।]

$=(1-p)(1-p^2)(p^2-p)$

$=(1-p)(1-p^2)\,p\,(p-1)$

$=p(p-1)^2(p^2-1)=$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\2a & a+b & 2b\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3$ [ঢা.'০১; সি.'০৩]

প্রমাণ : L.H.S. $=\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\2a & a+b & 2b\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a(a-b) & b(a-b) & b^2\\a-b & a-b & 2b\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

[c_1-c_2 এবং c_2-c_3]

$=1\{a(a-b)(a-b)-b(a-b)(a-b)\}$

[শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে।]

$=(a-b)^2(a-b)=(a-b)^3=$ R.H.S.

(Proved)

1(c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}=0$

[য.'০৩;চুয়েট'০৫-০৬]

L.H.S. $=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\a-b & b-c & c\\a^2-b^2+ca-bc & b^2-c^2+ab-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

[$c_1'=c_1-c_2$ এবং $c_2'=c_2-c_3$]

$=1\{a-b)(b^2-c^2+ab-ca)$

$5\times(i)+2\times(ii) \Rightarrow 15x+4x=30+8$

$\Rightarrow$ $19x=38 \Rightarrow x=2$

(i) হতে, $6-2y=6 \Rightarrow -2y=0 \Rightarrow y=0$

$\therefore$ $(x, y)=(2, 0)$

(b) A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3, [সা.স. × ক.স.]

B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×2.

$\therefore$ AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×2,

[A ম্যাট্রিক্সের সা.স. × B ম্যাট্রিক্সের ক.স.]

$\therefore$ BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×3,

[A এর সা.স. × B এর ক.স.]

$\therefore$ $AB \neq BA$.

(c) $C^2 = C.C = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1+6 & 2-8\\ 3-12 & 6+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}$

$3C = 3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix}$

$10I_2 = 10\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

$\therefore$ $C^2+3C-10I$

$= \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-10 & 0\\ 0 & -10\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}7+3-10 & -6+6\\ -9+9 & 22-12-10\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ $C^2+3C-10I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা -IB

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

[ঢা.'০২,'১২; রা.'১১; কু.'০৯,'১৫; য.'০৯; চ.'১২,'১৫; মা.'১৩,'১৫; বুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1-p & p(1-p) & p^2\\ 1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4\end{vmatrix}$

$[c_1-c_2$ এবং $c_2-c_3]$

$= 1\{(1-p)p^2(1-p^2) - p(1-p)(1-p^2)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (1-p)(1-p^2)(p^2-p)$

$= (1-p)(1-p^2)\,p\,(p-1)$

$= p(p-1)^2(p^2-1) =$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = (a-b)^3$ [ঢা.'০১; সি.'০৩]

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}a(a-b) & b(a-b) & b^2\\ a-b & a-b & 2b\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$[c_1-c_2$ এবং $c_2-c_3]$

$= 1\{a(a-b)(a-b) - b(a-b)(a-b)\}$

[শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3 =$ R.H.S.

(Proved)

1(c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix} = 0$

[য.'০৩;চুয়েট'০৫-০৬]

L.H.S. $= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-b & b-c & c\\ a^2-b^2+ca-bc & b^2-c^2+ab-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1-c_2$ এবং $c_2' = c_2-c_3]$

$= 1\{a-b)(b^2-c^2+ab-ca)$

$- (b-c)(a^2 - b^2 + ca - bc)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)\{(b-c)(b+c) + a(b-c)\}$
$\quad - (b-c)\{(a-b)(a+b) + c(a-b)\}$

$= (a-b)(b-c)(a+b+c) - (a-b)(b-c)$
$(a+b+c) = 0 = $ R.H.S. (Proved)

1(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$ [ব.'০১]

প্রমাণঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & 1 \\ 0 & -y & 1+y \end{vmatrix}$

$[c_1 - c_2, c_2 - c_3]$

$= 1\{xy - 0\} = xy = $ R.H.S. (Proved)

1(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ $(a+b+c)$ [চ.'০৫; ব.'১০]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{bmatrix}$

$[c_1 - c_2$ এবং $c_2 - c_3]$

$= 1\{(a-b)(b^3-c^3) - (b-c)(a^3-b^3)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)$
$\quad - (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$

$= (a-b)(b-c)\{b(c-a) + (c-a)(c+a)\}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = $ R.H.S.

(Proved)

1(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ [চ.'১০]

L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$[r_1 - r_2, r_2 - r_3]$

$= 1\{(a-b)(b^2-c^2) - (a^2-b^2)(b-c)\}$

[১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)(b-c)(b+c) - (a-b)(a+b)(b-c)$

$= (a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

1(g) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a+b)(c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & 1 \\ c+a-b & b^2 & 1 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & 0 \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)$

$\begin{vmatrix} -2 & a+b & 0 \\ -2 & b+c & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\{1.(-2b-2c$
$\quad +2a+2b)$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$= \text{R.H.S.}$ (Proved)

1(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$]

$= 1\{(x-y)(x+y)(y-z)(y^2+yz+z^2) - (y-z)(y+z)(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$= (x-y)(y-z)(xy^2+xyz+xz^2+y^3+y^2z+yz^2-x^2y-xy^2-y^3-zx^2-xyz-y^2z)$

$= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2-x^2y-zx^2)$

$= (x-y)(y-z)\{xz(z-x)+y(z-x)(z+x)\}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

$= \text{R.H.S.}$ (Proved)

2. বিস্তার না করে প্রমাণ কর ঃ

(a) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$

[রা.'১৫; ঢা.'০৯; য.'১৩; কুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$

$= \dfrac{abc.abc}{abc} \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = \text{M.H.S.}$

এখন, $abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$ [$c_3' = c_3 + c_1$]

$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= abc(a+b+c).0 = 0 = \text{R.H.S.}$

[$\because$ দুইটি কলাম একই ।]

2(b) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-b \\ 1 & x_1 & y_1-b \\ 1 & x_2 & y_2-b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & y-b \\ 1 & a & y_1-b \\ 1 & a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & b \\ 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-b \\ 1 & 1 & y_1-b \\ 1 & 1 & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} - a.0$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b.0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$

(Proved)

2(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

[সি.'০৭;চ.'১১]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1+b \\ 1 & x_2 & y_2+b \\ 1 & x_3 & y_3+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & y_1+b \\ 1 & a & y_2+b \\ 1 & a & y_3+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \\ 1 & x_3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1+b \\ 1 & 1 & y_2+b \\ 1 & 1 & y_3+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \text{b}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \text{a}.0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \text{b}.0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

2(d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ [য.'১৫]

প্রমাণ ঃ **LH.S.=** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ q & r & p+q \\ y & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ q & p & p+q \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ r & r & p+q \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} c & a & a \\ r & p & p \\ z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$+ (-)\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$= (-)(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + (-)(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \text{R.H.S.(Proved)}$$

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= 2\ (a+b+c)^3$

[ব.'০৬; য.'০৭; দি.'০৯.'১১;মা.'১৪; য.'১৫]

L.H.S.

$$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$= 2(\text{a}+\text{b}+\text{c})\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(\text{a}+\text{b}+\text{c})\begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$$

$= 2(\text{a}+\text{b}+\text{c})\,1\{-(\text{a}+\text{b}+\text{c}) \times -(\text{a}+\text{b}+\text{c})\}$

$= 2(\text{a}+\text{b}+\text{c})^3 = \text{R.H.S.}$

3(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$= 1 + x_1 + x_2 + x_3$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}1+x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1+x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3\\ 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2 & x_3\\ 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$=(1+x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1+x_2 & x_3\\ 1 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$=(1+x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & x_2 & 1+x_3\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$

$=(1+x_1+x_2+x_3).1(1-0)$

$=1+x_1+x_2+x_3$

3(c) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$

[সি.'০৮; মা.বো.'০৯; ব.'১২]

L.H.S.$=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=\text{abc}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\text{abc}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a-b & b-c & c\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\text{abc}.1\{(a-b)(b^2-c^2)-(b-c)(a^2-b^2)\}$

$=\text{abc}\{(a-b)(b-c)(b+c)-(a-b)(b-c)(a+b)\}$

$=\text{abc}\,(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$=\text{abc}\,(a-b)(b-c)(c-a)$

= R.H.S. (Proved)

3(d) $\begin{vmatrix}a+x & b+x & c+x\\ a+y & b+y & c+y\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ **[ঢা.'০১; বুয়েট'১০-১১]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}a+x & b+x & c+x\\ a+y & b+y & c+y\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c+x\\ a-b & b-c & c+y\\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 1 & c+x\\ 1 & 1 & c+y\\ a+b & b+c & c^2\end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}0 & 0 & x-y\\ 1 & 1 & c+y\\ a+b & b+c & c^2\end{vmatrix}$

$[r_1'=r_1-r_2]$

$=(a-b)(b-c)(x-y)(b+c-a-b)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

= R.H.S. (Proved)

3.(e) $\begin{vmatrix}a & a & a\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$

[চ.'০৩ ; রা .'০৫]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}a & a & a\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a^4\end{vmatrix}$

$=a\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1-a & a(1-a) & a^2\\ (1-a)(1+a) & a^2(1-a)(1+a) & a^4\end{vmatrix}$

$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$

$=a^2(1-a)^2\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a^2\\ 1+a & a(1+a) & a^4\end{vmatrix}$

$=a^2(1-a)^2\{a(1+a)-(1+a)\}$

$=a^2(1-a)^2(a+a^2-1-a)$

$=a^2(1-a)^2(a^2-1)$ = R.H.S. (Proved)

3(f) $\begin{vmatrix}2 & a & b+c\\ 2 & b & c+a\\ 2 & c & a+b\end{vmatrix}=0$ **[য.'০০]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**= $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 + c_3]$

$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c).\ 0 = 0 =$ R.H.S.

[∴ দুইটি কলাম একই ।]

3(g) $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ **[কু.'০৫]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**= $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 + c_3]$

$= 3(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= 3(a+b+c).\ 0 = 0 =$ R.H.S.

[∴ দুইটি কলাম একই ।]

3(h) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ **[রা.'০৪; বুয়েট'১১–১২]**

L.H.S.= $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a+b+c) & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & (a+b+c) & c-a-b \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b+c).1(a+b+c)^2$

$= (a+b+c)^3 =$ R.H.S. (Proved)

4.(a) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$

[ব.'১৩; কুয়েট'০৭-০৮; বুয়েট'০৯-১০; বুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**= $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \log x - \log y & \log y - \log z & \lg z \\ \log 2x - \log 2y & \log 2y - \log 2z & \log 2z \\ \log 3x - \log 3y & \log 3y - \log 3z & \log 3z \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \lg z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 2z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 3z \end{vmatrix}$

$= \log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lg z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix}$

$= \log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z} \times 0 = 0 =$ R.H.S.

4(b) $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)$ $(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ **[ব.'০৩]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**= $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= 1\{ (\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) -$
$(\sin\alpha - \sin\beta)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma)$
$= (1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$-(\sin\alpha - \sin\beta)(1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\gamma)$
$= -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin^2\beta - \sin^2\gamma)$
$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\beta + \sin\gamma)$
$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)\,.$
$(-\sin\alpha - \sin\beta + \sin\beta + \sin\gamma)$
$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$
= R.H.S. (Proved)

5. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[চ.'০২,'০৪; সি.'০৬,'০৯; রা.'০৮]

প্রমাণ **:** L.H.S. $= \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & b \\ 2c & 0 & -c \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= abc\{2c(2ab - 0)\} = abc.4abc$
$= 4a^2b^2c^2$ = R.H.S. (Proved)

5(b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[কু.'০৪,'১২]

প্রমাণ **:** L.H.S. $= \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a\ +b^2 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab^2+ac^2 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & bc^2+a^2b & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & ca^2+b^2c \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{abc}abc \begin{vmatrix} b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -2c^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ -2b^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - (c_2 + c_3)]$

$= 2c^2(a^2b^2 + b^4 - b^2c^2) -$
$2b^2(b^2c^2 - c^4 - c^2a^2)$
$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2) - b^2c^2(b^2 - c^2 - a^2)$
$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2 - b^2 + c^2 + a^2\}$
$= 2b^2c^2.2a^2 = 4a^2b^2c^2$ = R,H.S. (Proved)

5.(c) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

[য.'০৪,'০৮; রা.'১৩,'১৫]

প্রমাণ **:** L.H.S. $= \begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} x & z & x+z \\ x+y & y & x \\ y & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} -2z & z & x+z \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} 0 & -y & x \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_3]$

$= xyz(-2z)(-xy - xy) = -2xyz^2(-2xy)$
$= 4x^2y^2z^2$ = R.H.S. (Proved)

5(d) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$=(1+a^2+b^2)^3$

[রা.'০৯; য.'০২; সি.'১০,'১৩; কুয়েট'০৩-০৪, ১১-১২]

$$\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}1+a^2-b^2 & 2ab & -2b\\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a\\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b\\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a\\ 2b-b+a^2b+b^3 & -2a+a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$[c_1'=c_1-bc_3, c_2'=c_2+ac_3]$$

$$=\begin{vmatrix}1+a^2+b^2 & 0 & -2b\\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a\\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & -2b\\ 0 & 1 & 2a\\ b & -a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+b^2)^2\{1(1-a^2-b^2+2a^2)+b(0+2b\}$$
$$=(1+a^2+b^2)^2(1+a^2-b^2+2b^2)$$
$$=(1+a^2+b^2)^3=\text{R.H.S.}\quad \text{(Proved)}$$

5(e) $\begin{vmatrix}a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}=(b^2-ac)$

$(ax^2+2bxy+cy^2)$ [য.'১০, '১২,'১৪, ঢা.'১০,'১৫; দি., রা.,সি.'১২; চ.'১৩,'১৫ ; ব. '১৪]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix}ax & bx & ax^2+bxy\\ by & cy & bxy+cy^2\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix}0 & 0 & ax^2+2bxy+cy^2\\ by & cy & bxy+cy^2\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}$$

$$[r_1'=r_1+(r_2-r_3)]$$

$$=\frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)$$
$$(b^2xy+bcy^2-acxy-bcy^2)$$

$$=\frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)xy$$
$$=(b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)=\text{R.H.S.}$$

5(f) $\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & bc\\ (c+a)^2 & b^2 & ca\\ (a+b)^2 & c^2 & ab\end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2)$

$(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [চ.'০৬]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & bc\\ (c+a)^2 & b^2 & ca\\ (a+b)^2 & c^2 & ab\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2-a^2 & a^2 & bc\\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & ca\\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & ab\end{vmatrix}\quad [c_1'=c_1-c_2]$$

$$=\begin{vmatrix}(a+b+c)(b+c-a) & a^2 & bc\\ (a+b+c)(c+a-b) & b^2 & ca\\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & ab\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}b+c-a & a^2 & bc\\ c+a-b & b^2 & ca\\ a+b-c & c^2 & ab\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}-2(a-b) & (a-b)(a+b) & -c(a-b)\\ -2(b-c) & (b-c)(b+c) & -a(b-c)\\ a+b-c & c^2 & ab\end{vmatrix}$$

$$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}-2 & a+b & -c\\ -2 & b+c & -a\\ a+b-c & c^2 & ab\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)$$
$$\begin{vmatrix}0 & -(c-a) & -(c-a)\\ -2 & b+c & -a\\ a+b-c & c^2 & ab\end{vmatrix}$$

$$[r_1'=r_1-r_2]$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -2 & b+c & -a\\ a+b-c & c^2 & ab\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).(-1)$
$[-2c^2 + 2ab - \{(a+b)^2 - c^2\}]$
$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)(-1)$
$(-2c^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab + c^2)$
$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
$(-1)(-1)(a^2+b^2+c^2)$
$= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$
$=$ R.H.S. (Proved)

6. (a) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ [ব.'১১]

$= \boldsymbol{4(a+b)(b+c)(c+a)}$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$

$= -2a\{4bc - (b+c)^2\} - (a+b)\{-2c(b+a)$
$-(b+c)(c+a)\} + (a+c)\{(a+b)(b+c) +$
$2b(c+a)\}$
$= -8abc + 2a(b+c)^2 + 2c(a+b)^2 +$
$2(a+b)(b+c)(c+a) + 2b(c+a)^2$
$= -8abc + 2a(b^2+2bc+c^2) +$
$2c(a^2+2ab+b^2) + 2b(c^2+2ca+a^2) +$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= -8abc + 2ab^2 + 4abc + 2ac^2 + 2ca^2 +$
$4abc + 2b^2c + 2bc^2 + 4abc + 2a^2b +$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= 2\{ab^2 + 2abc + ac^2 + ca^2 + a^2b + b^2c$
$+ bc^2\} + 2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= 2\{a(b+c)^2 + a^2(b+c) + bc(b+c)\} +$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= 2(b+c)(ab + ca + a^2 + bc) +$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= 2(b+c)\{a(c+a) + b(c+a)\} +$
$2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= 2(b+c)(c+a)(a+b) + 2(a+b)(b+c)(c+a)$
$= 4(a+b)(b+c)(c+a) =$ R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি ,

$$D = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$$

$a+b=0$ i.e. $b=-a$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} -2a & 0 & a+c \\ 0 & 2a & -a+c \\ c+a & c-a & -2c \end{vmatrix}$$

$= -2a(-4ac-(c-a)^2\} + (c+a)\{0-2a(c+a)\}$
$= 2a(c+a)^2 - 2a(c+a)^2 = 0$
$\therefore (a+b)$, D এর একটি উৎপাদক ।
অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $(b+c)$ এবং $(c+a)$ নির্ণায়ক D এর উৎপাদক।

যেহেতু D একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক এবং $(a+b)(b+c)(c+a)$ একটি তৃতীয় ক্রমের উৎপাদক , সুতরাং D এর অপর একটি উৎপাদক k থাকতে পারে যা ধ্রুবক ।

$$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = k(a+b)(b+c)(c+a)$$

এখন, উভয় পক্ষে $a=b=c=1$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = k.2.2.2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8k \Rightarrow 32 = k = 4$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

6(b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \boldsymbol{abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a(\frac{1}{a}+1) & b.\frac{1}{b} & c.\frac{1}{c} \\ a.\frac{1}{a} & b(\frac{1}{b}+1) & c.\frac{1}{c} \\ a.\frac{1}{a} & b.\frac{1}{b} & c(\frac{1}{c}+1) \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ 1(1-0)$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ = R.H.S. (Proved)

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$. [য.'০১; কু.'০৮,'০৯]

সমাধান ঃ $A_1 = a_1$ এর সহগুণক $= b_2c_3 - b_3c_2$

$B_1 = b_1$ এর সহগুণক $= -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$C_1 = c_1$ এর সহগুণক $= a_2b_3 - a_3b_2$

L.H.S. $= a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$

$= a_2(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2\{-(a_2c_3 - a_3c_2)\} +$
$c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 +$
$a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 = 0$ = R.H.S. (Proved)

8. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [য.'০৫]

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - (c_2 + c_2)]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$= -2z(-xy - xy) = -2z(-2xy) = 4xyz$

8(b) সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 2a & 2c & c-a \\ 0 & 2b & a+b \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= 2.2\begin{vmatrix} b & 0 & c-b \\ a & c & c-a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

$= 4\{b(ca + bc - bc + ab) + (c - b)(ab - 0)\}$
$= 4\{abc + ab^2 + abc - ab^2\}$
$= 4.2abc = 8abc$ (Ans.)

9. সমাধান কর :

(a) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৭; চ.'০৭]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_2)]$

$$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$$

[ক্যালকুলেটরের সাহায্যে উত্তর যাচাই করা যায়।]

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **[ব.'১৫]**

$\therefore\ |A| = 2(-4+1) + 1(2-1) - 1(-1+2)$

$= -6 + 1 - 1 = -6$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj (A)}$

$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

(e) সমাধান: ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ **[সি.'১৫]**

$\therefore\ |A| = 2(55-25) - 2(22-10) + 2(10-10)$

$= 60 - 24 = 36$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 30,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -12, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = -12,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 18,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj (A)}$

$= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}^T$

$= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ম্যাট্রিক্স$= \begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

(f) সমাধান: ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **[কু.'১৫]**

$\therefore\ |A| = 3(1-0) + 4(-2-0) + 2(2+1)$

$= 3 - 8 + 6 = 1$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj (A)}$

$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(g) সমাধান: ধরি, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **[ঢা.'১৫]**

$\therefore \ |A| = 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6)$
$= 0 + 8 - 10 = -2$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3, \ A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$\therefore \ A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$

$= \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

$= \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

13. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

সমাধান ঃ (a) দেওয়া আছে, $2x + 3y = 4$ **[চ.'০১]**
$x - y = 7$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25,$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$

$\therefore \ x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-25}{-5} = 5, \ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{10}{-5} = -2$

13(b) দেওয়া আছে, $x + y + z = 1$
$x + 2y + z = 2$
$x + y + 2z = 0$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(1-0) = 1$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(0+1) = 1$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(2-1) = 1$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(-1-0) = -1$

$\therefore \ x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1}{1} = 1, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{1}{1} = 1,$

$z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{-1}{1} = -1$

13(c) দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y + 3z \\ 2x + 3y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad x+2y-z=5$

$3x-y+3z=7$

$2x+3y+z=11$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$=1(-1-9)-2(3-6)-1(9+2)$

$=-10+6-11=-15$

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 7 & -1 & 3\\ 11 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$=\ 5(-1-9)-2(7-33)-1(21+11)$

$=\ -50+52-32=-30$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 3 & 7 & 3\\ 2 & 11 & 1\end{vmatrix}$$

$=\ 1(7-33)-5(3-6)-1(33-14)$

$=\ -26+15-19=-30$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 7\\ 2 & 3 & 11\end{vmatrix}$$

$=\ 1(-11-21)-2(33-14)+5(9+2)$

$=-32-38+55=-15$

$\therefore \quad x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-30}{-15}=2,\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-30}{-15}=2,$

$z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{-15}{-15}=1$

সম্ভাব্য ধাপ (Step) সহ কিছু সমস্যা:

14. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}bc & ca & ab\\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c}\\ \dfrac{1}{a}+b & \dfrac{1}{b}+c & \dfrac{1}{c}+a\end{vmatrix}=0$$ [প্র.ভ.প.'১৪]

প্রমাণঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}bc & ca & ab\\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c}\\ \dfrac{1}{a}+b & \dfrac{1}{b}+c & \dfrac{1}{c}+a\end{vmatrix}$

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}bc & ca & ab\\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c}\\ \dfrac{1}{a}+b & \dfrac{1}{b}+c & \dfrac{1}{c}+a\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}abc & abc & abc\\ a.\dfrac{1}{a} & b.\dfrac{1}{b} & c.\dfrac{1}{c}\\ a(\dfrac{1}{a}+b) & b(\dfrac{1}{b}+c) & c(\dfrac{1}{c}+a)\end{vmatrix}$$ (১)

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1+ab & 1+bc & 1+ca\end{vmatrix}$$

$=0$ [$\because$ দুইটি সারি একই।] (১)

$=\text{R.H.S.}$

15. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix}x+a & a & a\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}=x^2(x+a+b+c)$$

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}x+a & a & a\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1+(r_2+r_3)]$ (১)

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & x+b & b\\ c & c & x+c\end{vmatrix}$$ (১)

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & b \\ 0 & -x & x+c \end{vmatrix} \quad (১)$$

$$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$$

$= (x+a+b+c)(x^2 - 0)$

$= x^2(x+a+b+c) =$ R.H.S. (Proved) (১)

16. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin c \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin A - \sin B & \sin B - \sin C & \sin C \\ \cos A - \cos B & \cos B - \cos C & \cos C \end{bmatrix}$

$[c_1 - c_2, c_2 - c_3]$ (১)

$= (\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) - (\sin B - \sin C)(\cos A - \cos B)$ (১)

$= 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\ 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}$

$-2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\ 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$ (১)

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}[\cos\frac{A+B}{2}\ \sin\frac{B+C}{2}$

$- \cos\frac{B+C}{2}\ \sin\frac{A+B}{2}]$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}\cos(\frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2})$ (১)

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\ \sin\frac{B-C}{2}\ \sin\frac{C-A}{2} =$ R.H.S.

(Proved)

17. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^3$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{\text{abc}}\begin{vmatrix} -abc & abc+ab^2 & abc+ac^2 \\ abc+a^2b & -abc & abc+bc^2 \\ abc+a^2c & abc+b^2c & -abc \end{vmatrix} \quad (১)$$

$$= \frac{1}{\text{abc}}\text{abc}\begin{vmatrix} -bc & ca+ab & ab+ac \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ab+bc+ca & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_2)]$ (১)

$$= (\text{ab} + \text{bc} + \text{ca})\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{bc} + \text{ab} & -\text{ca} & \text{ab} + \text{bc} \\ \text{bc} + \text{ca} & \text{ca} + \text{bc} & -\text{ab} \end{vmatrix}$$

$= (\text{ab} + \text{bc} + \text{ca})$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ bc+ab+ca & -(ca+ab+ca) & ab+bc \\ 0 & ca+bc+ab & -ab \end{vmatrix} \quad (১)$$

$[c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= (\text{ab}+\text{bc}+\text{ca}).1\{(\text{ab}+\text{bc}+\text{ca})(\text{ab}+\text{bc}+\text{ca}) - 0\}$

$= (\text{ab}+\text{bc}+\text{ca})^3 = 0 =$ R.H.S. (১)

17 (b) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$

L.H.S. $= \begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & b^2-ca & c^2-ab \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & a^2-bc & b^2-ca \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} \quad (১)$$

$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} \cdots \text{(i)} \quad (১)$$

এখন, $\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c) \\ 0 & -(c-a)(c+a+b) & -(a-b)(a+b+c) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$ (১)

$= \begin{vmatrix} 0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c) \\ 0 & -(c-a)(a+b+c) & -(a-b)(a+b+c) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} 0 & -(a-b) & -(b-c) \\ 0 & -(c-a) & -(a-b) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2 1.\{(a-b)^2 - (b-c)(c-a)\}$ (১)

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2-2ab-bc+c^2+ab-ca)$

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(i) হতে আমরা পাই ,

$\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$

$= \{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}^2$

$= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2 =$ R.H.S. (Proved) (১)

17(c) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

$= abc\,(a+b+c)^3$

L.H.S.$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} c(a+b)^2 & c^2a & bc^2 \\ ca^2 & a(b+c)^2 & a^2b \\ b^2c & ab^2 & b(c+a)^2 \end{vmatrix}$ (১)

$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

অতপর , উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য ।

17(d) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

$= 2\,(b+c)\,(c+a)(a+b)$

L.H.S. $= \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b & -(b+c) & -b \\ a+b & b+c & -a \\ -(a+b) & b+c & a+b+c \end{vmatrix}$ (১)

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b)(b+c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$ (১)

$= (a+b)(b+c)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -b \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

$= (a+b)(b+c)\{-2(-a-b-c+b)\}$ (১)

$= (a+b)(b+c)(-2)(-1)(c+a)$

$= 2(a+b)(b+c)(c+a) =$ R.H.S. (১)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

18. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-1-9 & -4+0+0 & 6+5+9 \\ 1-3+0 & -2+0+0 & 3+15+0 \\ 5+0+6 & -10+0+0 & 15+0-6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -4 & 20 \\ -2 & -2 & 18 \\ 11 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ AB এর ট্রেস $= -8 - 2 + 9 = -1$ (Ans.)

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & -y & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$;

$C = A - B$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = A - B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & x & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & -y & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 0 & y-x \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & -2+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & y-x \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

$\therefore x + y = 5 \cdots$ (i), $y - x = 0 \Rightarrow y = x$

(i) হতে, $y + y = 5 \Rightarrow y = x = \frac{5}{2}$

$\therefore (x, y) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

(c) $3\begin{bmatrix} s & v & w \\ x-y & x & v \\ w & u & s \end{bmatrix}$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: $3\begin{bmatrix} s & v & w \\ x-y & x & v \\ w & u & s \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3s & 3v & 3w \\ 3x-3y & 3x & 3v \\ 3w & 3u & 3s \end{bmatrix}$$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।

$\therefore 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3x - 3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

$\therefore (x, y) = (0, -\frac{1}{3})$ (Ans.)

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x & -7 \end{bmatrix}$;

$C = A + B$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = A + B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & x & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 1+1 & y+3 \\ 1+1 & 3+2 & 5+3 \\ 5+5 & 1+x & -2-7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & y+3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 10 & 1+x & -9 \end{bmatrix}$$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

$\therefore 1 + x = 8 \Rightarrow x = 7, y + 3 = 10 \Rightarrow y = 7$

$\therefore (x, y) = (7, 7)$ (Ans.)

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & y \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$;

$C = A - B$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = A - B$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & y \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4 & x-1 & 0+3 \\ 0-1 & 1-5 & 2-y \\ 2-5 & -2-8 & 1+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & x-1 & 3 \\ -1 & -4 & 2-y \\ -3 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$\therefore x - 1 = -(-1) \Rightarrow x = 1 + 1 = 2,$

$2 - y = -(-10) \Rightarrow -y = 10 - 2$

$\Rightarrow y = -8$

$\therefore (x, y) = (2, -8)$ (Ans.)

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ y & 3 & x \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। Ans. $(4, -1)$

(g) $A = \begin{bmatrix} -5 & y & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স হলে (x, y) নির্ণয় কর। Ans. $(2, -8)$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6-5-3 \\ 2+1-12 \\ 14-2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\therefore \ (x, y, z) = (-2, -9, 9)$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 7 & -3 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $C = A - B$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $C = A - B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 7 & -3 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & -3-1 & 3+1 \\ 3-2 & a-0 & 3-3 \\ 7-5 & -3-2 & a-0 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & -5 & a \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3(a^2 + 0) - 1(-4a + 20) + 2(0 - 4a) = 0$

$\Rightarrow 3a^2 + 4a - 20 - 8a = 0$

$\Rightarrow 3a^2 - 4a - 20 = 0$

$\Rightarrow 3a^2 - 10a + 6a - 20 = 0$

$\Rightarrow a(3a - 10) + 2(3a - 10) = 0$

$\Rightarrow (3a - 10)(a + 2) = 0$

$\therefore \ a = -2, \dfrac{10}{3}$ (Ans.)

20. (a) সমাধান পদ্ধতিতে $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 2(-2 - 9) = -22$

$$\begin{array}{|ccccc} 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -1-9 & 9+2 & 6-3 \\ 0-2 & 0-0 & -6-0 \\ -6-0 & 0-0 & 0+4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -10 & -2 & -6 \\ 11 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -10 & -2 & -6 \\ 11 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/11 & 1/11 & 3/11 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -3/22 & 3/11 & -2/11 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ হলে (x, y, z) নির্ণয় কর।

সমাধান : : ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+8) - 1(-5+2) + 7(-20-1)$$
$$= 27 + 3 - 147 = 117$$

$$\begin{array}{|ccccc} 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{Adj }(A) = \begin{bmatrix} 1+8 & 28-1 & -2-7 \\ -2+5 & 3-7 & -35+6 \\ -20-1 & 1-12 & 3+5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 27 & -9 \\ 3 & -4 & -29 \\ -21 & -11 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -21 \\ 27 & -4 & -11 \\ -9 & -29 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj }(A)$$

$$= \frac{1}{117}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -21 \\ 27 & -4 & -11 \\ -9 & -29 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/13 & 1/39 & -7/39 \\ 3/13 & -4/117 & -11/117 \\ -1/13 & -29/117 & 8/117 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & 1/39 & -7/39 \\ 3/13 & -4/117 & -11/117 \\ -1/13 & -29/117 & 8/117 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/13 & 1/39 & -7/39 \\ 3/13 & -4/117 & -11/117 \\ -1/13 & -29/117 & 8/117 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{13}+\frac{1}{39}+\frac{21}{39} \\ \frac{6}{13}-\frac{4}{117}+\frac{33}{117} \\ -\frac{2}{13}-\frac{29}{117}-\frac{24}{117} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6+1+21}{39} \\ \frac{54-4+33}{117} \\ \frac{-18-29-24}{117} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28/39 \\ 83/117 \\ -71/117 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (x, y, z) = \left(\frac{28}{39}, \frac{83}{117}, -\frac{71}{117}\right)$$

21. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ এবং $AB = BA = I$ হলে B নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = BA = I \therefore B = A^{-1}$

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 1(2-15) + 1(-4-10)$$
$$= -13 - 14 = -27$$

$$\begin{array}{|ccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\text{Adj }(A) = \begin{bmatrix} 2-15 & 10+4 & 6+2 \\ 0-2 & -2-0 & -2-3 \\ -5-0 & 0-5 & -1+2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 14 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \\ -5 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & -2 & -5 \\ 14 & -2 & -5 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj }(A)$$

$$= -\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -13 & -2 & -5 \\ 14 & -2 & -5 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 13/27 & 2/27 & 5/27 \\ -14/27 & 2/27 & 5/27 \\ -8/27 & 5/27 & -1/27 \end{bmatrix}.$$

(b) $\frac{x}{11}-\frac{2y}{11}+\frac{3z}{11}=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+\frac{z}{5}=\frac{x}{3}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1$

সমীকরণ জোটটি ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে সমাধান কর। উ: $x=2$, $y=0$, $z=3$

সমাধান:

22. (a) $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$ হলে $f(A) = I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$

$\therefore\ f(A) = A^3 + 3A^2 - A = I$

$\Rightarrow (A^{-1}A)A^2 + 3(A^{-1}A)A - A^{-1}A = A^{-1}I$

$\Rightarrow IA^2 + 3IA - I = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A^2 + 3A - I$

এখন, $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 16+0-2 & 0+0-4 & -4+0+1 \\ 12+3+4 & 0+1+8 & -3+2-2 \\ 8+12-2 & 0+4-4 & -2+8+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14 & -4 & -3 \\ 19 & 9 & -3 \\ 18 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3A = 3\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 14 & -4 & -3 \\ 19 & 9 & -3 \\ 18 & 0 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 12 & -3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14+12-1 & -4+0-0 & -3-3-0 \\ 19+9-0 & 9+3-1 & -3+6+0 \\ 18+6-0 & 0+12+0 & 7-3-1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 25 & -4 & -6 \\ 27 & 11 & 3 \\ 24 & 12 & 3 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(b) $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$ । $f(A)$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$

$\therefore\ f(A) = A^3 - 4A^2 - I$

প্রশ্নমতে, $f(A)$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

$\therefore\ A^3 - 4A^2 = I$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A^2 - 4(A^{-1}.A)A = A^{-1}.I$

$\Rightarrow I.A^2 - 4(I.A) = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A^2 - 4A$

এখন, $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 25+2-6 & 5+0-8 & -10+2+6 \\ 10+0+6 & 2+0+8 & -4+0-6 \\ 15+8-9 & 3+0-12 & -6+8+9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 21 & -3 & -2 \\ 16 & 10 & -10 \\ 14 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 4 & -8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 12 & 16 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix} 21 & -3 & -2 \\ 16 & 10 & -10 \\ 14 & -9 & 11 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 20 & 4 & -8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 12 & 16 & -12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 21-20 & -3-4 & -2+8 \\ 16-8 & 10-0 & -10-8 \\ 14-12 & -9-16 & 11+12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 8 & 100 & -18 \\ 2 & -25 & 23 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন দ্রুত সমাধানের জন্য কিছু কৌশল:

কৌশল -১: AB নির্ণয়যোগ্য হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম = A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা × B ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা

(AB)C নির্ণয়যোগ্য হলে (AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম = A ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা × C ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা

A এর মাত্রা $m \times n$ হলে A^T এর মাত্রা $n \times m$

কৌশল -২ : $AI^3 = AI = A$, $A \pm I$ এর ক্ষেত্রে এর মুখ্য কর্ণের ভুক্তির সাথে 1 করে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।

যেকোনো ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স I এর বিপ্রতীত ম্যাট্রিক্স I .

কৌশল -৩ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে , $ad = bc$.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের Adj. $= \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

কৌশল -৪ : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

কৌশল -৫ : A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হলে $|4A| = 4^3\,|A|$.

ম্যাট্রিক্সে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও A^{-1} নির্ণয় কর।

Declaring Matrix A:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 1 = 1 = 1 = 2

= (−) 3 = 4 = 3 = (−) 2 =

3 SHIFT RCL (STO)

এভাবে Matrix B Declare করি।

এভাবে Matrix B Declare করি।

SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 1 (A) ×

SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 2 (B) =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

AC SHIFT [MAT] 4 3 (MAT) 1 x^{-1} =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

নির্ণায়কে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয়:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 3 = 1 = 2 = 4

= 3 = 2 = 3 = 5 = AC SHIFT 4

এর ডান দিক চাপতে হবে। 1 (Det) SHIFT 4

3 1 (A) = 24

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি কর্ণ, স্কেলার ও অভেদক ম্যাট্রিক্স।
2. অপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$. ∴ Ans,: ক.
3. প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হবে যেখানে $i \neq j$।
   $\therefore a = 4$. ∴ Ans. : ক.
4. সমাধান: $|A| = B \Rightarrow 6 + 4 = p(0 + 2)$
   $10 = 2p \Rightarrow p = 5$ ∴ Ans. : ঘ.
5. বিপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য এবং (i, j) ও

A এর মাত্রা $m \times n$ হলে A^T এর মাত্রা $n \times m$

কৌশল -২ : $AI^3 = AI = A$, $A \pm I$ এর ক্ষেত্রে এর মুখ্য কর্ণের ভুক্তির সাথে 1 করে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।

যেকোনো ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স I এর বিপ্রতীপ ম্যাট্রিক্স I.

কৌশল -৩ : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে , $ad = bc$.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের $Adj. = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

কৌশল -৪ : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

কৌশল -৫ : A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হলে $|4A| = 4^3 |A|$.

ম্যাট্রিক্সে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও A^{-1} নির্ণয় কর।

Declaring Matrix A:

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 1 = 1 = 1 = 2

= (-) 3 = 4 = 3 = (-) 2 = 3 =

SHIFT STO

3 SHIFT RCL

এভাবে **Matrix B Declare** করি।

এভাবে **Matrix B Declare** করি।

SHIFT [MAT]

SHIFT 4 3 (MAT) 1 (A) ×

SHIFT [MAT]

SHIFT 4 3 (MAT) 2 (B) =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

SHIFT [MAT] x^{-1}

AC SHIFT 4 3 (MAT) 1 x^{-1} =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

নির্ণায়কে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয়:

MODE SHIFT

MODE 3 times 2 (MAT) SHIFT 4 1 1 (A)

3 = 3 = 3 = 1 = 2 = 4

SHIFT

= 3 = 2 = 3 = 5 = SHIFT 4

SHIFT

এর ডান দিক চাপতে হবে। 1 (Det) SHIFT 4

3 1 (A) = 24

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি কর্ণ, স্কেলার ও অভেদক ম্যাট্রিক্স।
2. অপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$. $\therefore$ Ans,: ক.
3. প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হবে যেখানে $i \neq j$।

   $\therefore a = 4$. $\therefore$ Ans. : ক.
4. সমাধান: $|A| = B \Rightarrow 6 + 4 = p(0 + 2)$

   $10 = 2p \Rightarrow p = 5$ $\therefore$ Ans. : ঘ.
5. বিপ্রতিসম (Skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য এবং (i, j) ও

(j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$.

$\therefore$ Ans. খ.

6. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত , যেখানে $i \neq j$; যা প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের নিয়ম মেনে চলে।

$\therefore$ Ans. খ.

7. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি বর্গ ম্যাট্রিক্স ও স্কেলার ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে কিন্তু একক ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে। $\therefore$ Ans. খ.

8. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি বর্গ ম্যাট্রিক্স ও স্কেলার ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে কিন্তু অভেদ ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে। $\therefore$ Ans. খ.

9. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি প্রদত তিন প্রকারের ম্যাট্রিক্স এর নিয়ম মেনে চলে কিন্তু এর নিয়ম মেনে চলে।

$\therefore$ Ans. ঘ.

10. $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 1\\-1 & z\\y & -3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 3\\4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 1\\-1 & z\\y & -3\end{bmatrix}$

$\therefore (x, y, z) = (3, 4, 3)$ $\therefore$ Ans.: খ.

11. $AX = B$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$\therefore (x, y) = (1, 2)$ $\therefore$ Ans.: খ.

12. $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 0+0\\3+12 & 16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\15 & 16\end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans.: গ.

13. $\left.\begin{array}{l}2x-5y=3\\2x-3y=1\end{array}\right\}$ সমীকরণ জোটের সহগ ম্যাট্রিক্স.

$\begin{bmatrix}2 & -5\\2 & -3\end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans.: ঘ.

14. $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-1\\3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans.: গ.

15. AB এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ B এর কলাম সংখ্যা = 2×3 $\therefore$ Ans. খ

16. i ও iii সত্য এবং B এর ক্রম 2×3.

$\therefore$ Ans.: গ.

17. $\begin{vmatrix}5 & 6 & 7\\1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 4 & 4\\1 & 2 & 3\\4 & 4 & 1\end{vmatrix}=0$ $[r_1'=r_1-r_2, r_3'=r_3+r_2]$

$\therefore$ Ans.: গ.

18. $|A| = B \Rightarrow 15 + 9 = -p(0-12)$

$\Rightarrow 12p = 24 \Rightarrow p = 2$ $\therefore$ Ans. ক

19. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের মূখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত। $\therefore$ Ans. খ

20. $A-2B=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ঘ

21. $|A| = -6,\ 2|A| = \begin{bmatrix}2 & 6\\4 & 0\end{bmatrix}$ কিন্তু B কটি অভেদ ম্যাট্রিক্স নয়। $\therefore$ Ans. গ.

22. i ও ii কিন্তু C ব্যতিক্রমীর ক্ষেত্রে $a = 4, -2$

$\therefore$ Ans. গ

23. সব তথ্যিই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

24. $AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$

$\therefore 4\ AB = \begin{bmatrix}12\end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. খ

25. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

26. (2, 3) তম ভুক্তি -2 এর সহগুণক

$= -(7 + 12) = -19$ $\therefore$ Ans. ক

27. $\det(A) = 5(15 - 14) = 5$ $\therefore$ Ans. গ

28. (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক 2 . $\therefore$ Ans. গ

29. (AB)C এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ C এর কলাম সংখ্যা = 2×1 $\therefore$ Ans. খ

30. $A^T-B^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}$

Ans. ঘ

31. নির্ণায়কের মান $= 4-6 = -2$
$\therefore$ **Ans.** ক

32. $A^{-1} = \frac{1}{2-0}\begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Ans. ক

33. $4(C + I_2) = 4(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$
$= 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
$\therefore$ $|4(C + I_2)| = 4^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 16(-2) = -32$
$\therefore$ Ans. ক.

34. C ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য নয় বলে ইহা ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স নয়। $\therefore$ Ans. গ

35. নিয়ম: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের Adj. $= \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ এর Adjoint matrix
$= \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ঘ

36. $(2, 3)$ তম ভুক্তির সহগুণক
$= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -(12+7) = -19$ $\therefore$ Ans. ক

37. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

38. $\det(A) = 5(15-14) = 5$ $\therefore$ Ans. গ

39. ১ম ও ২য় কলামের অনুরূপ ভূক্তির অনুপাত সমান (1/2) বলে নির্ণয়কের মান শূন্য। $\therefore$ Ans. খ

40. $(1, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক $= -(-9-54)$
$= 63$ $\therefore$ Ans. ঘ

41. (2, 3) তম ভুক্তি a, (3, 2) তম ভুক্তি 4 এর সমান হবে। $\therefore$ Ans. ক

42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ হলে
$AB = \begin{bmatrix} 1+0 & -6 \\ -2+0 & 0-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$
$\therefore$ Ans. খ

43. AB এর ক্রম = A এর সারির সংখ্যা $(3) \times$ B এর কলাম সংখ্যা $(3) = 3 \times 3$ $\therefore$ Ans. খ

44. $(1, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক $-(-2) = 2$
$\therefore$ Ans. গ

45. নিয়ম: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হলে, $ad = bc$.
$x = \frac{7 \times 10}{2} = 35$ $\therefore$ Ans. ক

46. $B^{-1} = \frac{1}{-45+42}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ +7 & 5 \end{bmatrix}$
$= \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. গ

47. Correction: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
(AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম কত?
ক. 2×3 খ. 2×1 গ. 2×1 ঘ. অনির্ণেয়
A এর কলাম সংখ্যা (2) ও B এর সারি সংখ্যা (3) অসমান বলে AB অর্থাৎ (AB)C নির্ণয়যোগ্য নয়। $\therefore$ Ans. ঘ

48. A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{6-3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ক

49. $(2, 1)$ তম ভুক্তির সহগুণক $= -2$ $\therefore$ Ans. ক

50. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স নির্ণায়কের মান $= 0$
$\therefore$ Ans. খ

51. **নিয়ম:** $AI = A$, $A \pm I$ এর ক্ষেত্রে এর মূখ্য কর্ণের ভুক্তির সাথে 1 করে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করতে হবে।
$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ বলে $AB = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
$\therefore$ Ans. গ

52. $A^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
$\therefore$ Ans. ঘ

53. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এবং

$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+y \\ 2x+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\therefore (x, y) = (1, 1)$

$\therefore$ Ans. ঘ

54. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 3+12 & 0+16 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. গ

55. $x + y = 4,\ x - y = 2 \Rightarrow 2x = 6,\ 2y = 2$

$\therefore\ (x,y) = (3, 1)$ $\therefore$ Ans. ক

56. ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$(m-2)(m-3) - 12 = 0$

$\Rightarrow\ m^2 - 5m + 6 - 12 = 0$

$\Rightarrow\ m^2 - 5m - 6 = 0 \Rightarrow (m-6)(m+1) = 0$

$\therefore m = 6, -1$ $\therefore$ Ans. খ

57. কতগুলি সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজিয়ে উভয় পাশে | | দ্বারা আবদ্ধ করলে **নির্ণায়ক** উৎপন্ন হয়।

$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ একটি নির্ণায়ক। $\therefore$ Ans. ঘ

58. $2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ক

59. $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. গ

60. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ বলে সব তথ্যই সত্য।

$\therefore$ Ans. ঘ

61. $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ x+1 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

এবং $A = B$ বলে, $x + 1 = 7 \Rightarrow x = 6$

$\therefore$ Ans. ক

62. আয়তাকার ম্যাট্রিক্স যার ক্রম 2×3; যা নির্ণায়ক আকারে প্রকাশ যোগ্য নয়। $\therefore$ Ans. ক

63. A এর ক্রম 2×3. $\therefore$ A^T এর ক্রম 3×2

$\therefore$ Ans. গ

64. দুইটি ম্যাট্রিক্সের যোগ বা বিয়োগের ক্ষেত্রে তাদের ক্রম অবশ্যই সমান হতে হবে। আবার দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণের ক্ষেত্রে ১ম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ২য় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হতে হবে। $\therefore$ AB নির্ণয়যোগ্য

$\therefore$ Ans. ক

65. $A^{-1} = \frac{1}{15+12}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ক

66. $(1, 2)$ তম অনুরাশি $= 12 - 6 = 6$

$\therefore$ Ans. খ [বি.দ্র.: প্রথমে সহজ option যাচাই করতে হবে]

67. AB এর ক্রম $= 3 \times 1$ $\therefore$ Ans. গ

68. $(1, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক $= -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$= a_3c_2 - a_2c_3$ $\therefore$ Ans. খ

69. -6 এর অনুরাশির মান $= (-30 + 30) = 0$

$\therefore$ Ans. খ

70. $|A|$ এর মান $= -5(-35 + 36) - 4(50 - 48) - 3(-60 + 56) = -5 - 8 + 12 = -1$

$\therefore$ Ans. খ

71. BA এবং A^TB^T নির্ণয়যোগ্য। $\therefore$ Ans. গ

72. $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 2y - x = -1 \end{array}\right\}$ সমীকরণ জোটের ম্যাট্রিক্স

আকার $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. ক

73. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ এর নির্ণায়কের মান অশূন্য বলে তার বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়যোগ্য। $\therefore$ Ans. ঘ

74. $AB = \begin{bmatrix} 4-6 & 4-6 \\ -4+6 & -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ঘ

75. ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$(m-2)(m-3)-12=0$

$\Rightarrow\ m^2-5m+6-12=0$

$\Rightarrow\ m^2-5m-6=0 \Rightarrow (m-6)(m+1)=0$

$\therefore\ m=6,-1\ \ \therefore$ Ans. ক

76. $A^{-1}=\frac{1}{49-48}\begin{bmatrix}7 & -6\\ -8 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -8 & 7\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. গ

77. যদি $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$ হয় তবে,

X এর কলাম সংখ্যা (1) ও A^2 এর সারি সংখ্যা (2) অসমান বলে X A^2 নির্ণয়যোগ্য নয়।

$\therefore$ Ans. ঘ

78. $|2A|=2\times2\times2|A|=8\times(-7)=-56$.

$2A\times(2A)^{-1}=I\Rightarrow (2A)^{-1}=\frac{I}{2A}$

$\therefore |(2A)^{-1}|=\frac{|I|}{|2A|}=\frac{1}{-56}$ $\therefore$ Ans. খ

79. I এর ক্রম 3×3 হওয়ায় I^3 একটি 3×3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স হবে। $\therefore AI^3=A$

$\therefore$ Ans. খ

80. *iii* নং option সত্য নয়। $\therefore$ Ans. ক

81. বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore$ Ans. খ

82. $\begin{vmatrix}p & 2 & q+r\\ q & 2 & r+p\\ r & 2 & p+q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p & 2 & p+q+r\\ q & 2 & p+q+r\\ r & 2 & p+q+r\end{vmatrix}, [c_3'=c_3+c_1]$

$=0$

$\therefore$ Ans. ক

83. AB এর ক্রম = A এর সারি সংখ্যা $\times$ B এর কলাম সংখ্যা = 2×3 $\therefore$ Ans. খ

84. (2, 1) তম ভূক্তির সহগুণক $=-(0-7)=7$

$\therefore$ Ans. ঘ

85. A ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিসমূহ সমান নয় বলে ইহা স্কেলার ম্যাট্রিক্স নয়। $\therefore$ Ans. খ

86. $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}$

$\therefore$ Ans. ঘ

87. BA ম্যাট্রিক্সর ক্রম 4×3 $\therefore$ Ans. গ

88. অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান নয় বলে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি স্কেলার নয়। $\therefore$ Ans. খ

89. $A^{-1}=\frac{1}{32-30}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 8\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. ক

90. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ এর (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক $=-(0-2)=2$ $\therefore$ Ans. গ

91. প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এর (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্নযুক্ত হয়। $\therefore\ a=4$

$\therefore$ Ans. ঘ

92. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

93. $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ এর মান $=(0-2)=-2$

$\therefore$ Ans. খ

94. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ এবং

$AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}3x+y\\ 2x+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ 2x=4\Rightarrow x=2, 3x+y=6\Rightarrow y=0$

$\therefore (x,y)=(2,0)$ $\therefore$ Ans. ক

95. ১ম ও ২য় সারি সমান হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হয়। সেক্ষেত্রে, p = 3. $\therefore$ Ans. ঘ

96. $A-2I=\begin{vmatrix}3-2 & 5 & 1\\ 4 & 0-2 & 2\\ 1 & 6 & 4-2\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}$

$\therefore$ Ans. খ

97. AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম = 4×4 $\therefore$ Ans. গ

98. সব তথ্যই সত্য। $\therefore$ Ans. ঘ

99. i নং Option নির্ণায়কের বৈশিষ্ট মেনে চলে।
$\therefore$ Ans. ক

100. $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{bmatrix}$

$\therefore$ Ans. খ

101. $\begin{vmatrix}4 & 0 & 8\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{vmatrix}$ এর ১ম ও ৩য় কলামের অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত সমান হওয়ায় এর মান শূন্য।

102. যেকোনো ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স I এর বিপ্ররীত ম্যাট্রিক্স I. $\therefore$ Ans. খ

103. ম্যাট্রিক্স এর কোনো মান নেই। $|A-B|=0$ এর সমার্থক- $|A|=0$ অথবা $|B|=0$ $\therefore$ Ans. খ

ভর্তি পরীক্ষার MCQ (অতিরিক্ত) ঃ

ম্যাট্রিক্স ঃ

1. যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর সমান – [DU 05-06; Jt.U 08-09, 09-10; JU.09-10; R.U.08-09]

Sol^n.: $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -15 & -3\end{bmatrix}$

[বি.দ্র.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্সের সমাধান করা যায়।]

2. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ হলে, A^2 সমান– [DU 04-05; RU,'07-08; JU.09-10]

Sol^n.: $A^2=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4-9 & -6-6\\ 6+6 & -9+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -12\\ 12 & -5\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ হলে AB কত? [CU 07-08]

a. $\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 9\end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\end{bmatrix}$

Sol^n.: AB এর মাত্রা হবে $(3\times1).(1\times3)=3\times3$

4. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2i\\ 0 & 2i & 0\\ 2i & 0 & 0\end{bmatrix}$ হলে, A^2+4I সমান- [CU 06-07]

Sol^n.: $A^2+4I=\begin{bmatrix}0 & 0 & (2i)^2\\ 0 & (2i)^2 & 0\\ (2i)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{bmatrix}$

5. $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ হলে $M^2=$? [CU 02-03]

Sol^n.: $M^2=\begin{bmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}x-y & 1\\ 7 & x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ হলে $(x,y)=?$ [DU 02-03]

Sol^n.: $x-y=8, x+y=2 \therefore (x,y)=(5,-3)$

7. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$ হলে $(x,y)=?$ [CU 05-06]

Sol^n.: $3x+2y=5$, $x-2y=7$

$\therefore (x, y) = (3, -2)$

8. $\begin{bmatrix} p-4 & 8 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে যদি p এর মান –** **[DU 09-10, 07-08]**

$Sol^n.$: $(p-4)(p+2)-16=0$
$\Rightarrow p^2-2p-8-16=0 \Rightarrow p^2-2p-24=0$
$\therefore p=-6, 4$

9. $\begin{bmatrix} \alpha+3 & 6 \\ 5 & \alpha-4 \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে যদি α এর মান –** **[Jt.U 07-08]**

$Sol^n.$: $(\alpha+3)(\alpha-4)-30=0$
$\Rightarrow \alpha^2-\alpha-42=0 \therefore \alpha=7, -6$

কৌশল ঃ 2×2 অব্যতীক্রমী ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স** $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

10. যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **হয় তবে $A^{-1}=?$** **[DU 06-07; Jt.U 06-07]**

$Sol^n.$: $A^{-1}=\dfrac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

11. যদি $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **হয় তবে $A^{-1}=?$** **[Jt.U 07-08]**

$Sol^n.$: $A^{-1}=\dfrac{1}{5+6}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **হলে AB কত?**
[BUET 08-09; NU 09-10;CU 07-08]

a. $\begin{bmatrix} 4 & -29 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ **d.** $[11]$

$Sol^n.$: AB ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = A এর সারি $\times$ B এর কলাম = 3×3 $\therefore$ Ans. b.

13. যদি $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ **হয়, তবে XA^2 হবে–** **[BUET 11-12]**

A. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ D. কোনটি নয়।

$Sol^n.$: XA^2 নির্ণয় যোগ্য নয়।

14. A, B, C ম্যাট্রিক্সগুলির মাত্রা যথাক্রমে 4×5, 5×4, 4×2 হলে $(A^T+B)C$ এর মাত্রা হবে- **[BUET 10-11]**

$Sol^n.$: A^T এর মাত্রা $=5\times4$, (A^T+B) এর মাত্রা $=5\times4$, $(A^T+B)C=5\times2$

নির্ণায়ক ঃ

1. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ **এর মান–**
[DU 08-09, 05-06, Jt.U06-07; RU 05-06;KUET 10-11, 08-09; BAU 08-09]

A. 4xyz B. 3xyz C. 2xyz D. xyz

$Sol^n.$: $x=1, y=2, z=3$ হলে

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=24$ (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

Option গুলোতে $x=1$, $y=2$, $z=3$ বসালে $A=24$ হয়। $\therefore$ **Ans. A.**

2. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ **এর মান কত? [RU 07-08]**

A. $(a-b)(b-c)(c-a)$ B. $(a^2-b^2)(b-c)(c-a)$
C. $(a-b)(b^2-c^2)(c-a)$ D. $(a-b)(b-c)(c^2-a^2)$

$Sol^n.$: $a=1, b=2, c=3$ হলে, $\Delta=2$

Option গুলোতে $a=1$, $b=2$, $c=3$ বসালে $A=2$ হয়। $\therefore$ **Ans. A.**

অন্যভাবে বলা যায়– নির্ণায়কে a, b, c এর উপস্থিতি সমভাবে বলে নির্ণায়কের মানেও a, b, c এর উপস্থিতি সমভাবে হবে।

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ হলে $x = ?$

[DU 03-04; CU 02-03]

$Sol^n.$: $x = a$ হলে $C_1 = C_2$ হয় . $\therefore \Delta = 0$

$x = b$ হলে $C_1 = C_3$ হয় . $\therefore \Delta = 0$

$\therefore \quad x = a$ or b

4. $\begin{vmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 10 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 90 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান – **[Jt.U 08-09]**

$Sol^n.$: এখানে $r_3 = 3r_2$. $\therefore \Delta = 0$

5. x এর মান কত হলে $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$ হবে–

$Sol^n.$: $x = 0$ হলে $\Delta = 0$ হয় । **[BUET 05-06]**

$x = 2$ হলে $\Delta = 2\,(4-4) = 0$ হয় ।

6. $\begin{vmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হলে a এর মান কত হবে? **[DU 07-08]**

$Sol^n.$: $a^2 + a - 12 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0$

$\therefore \quad a = -5$ or 4

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ক. AB নির্ণয় কর।

সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ (Ans.)

খ. দেখাও যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা IA এর 5(a) নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য ।

গ. A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = -3$, $A_{12} = -4, A_{21} = -2, A_{22} = 1$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{bmatrix}$

ক. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AB এর ট্রেস নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12-2-3 & -6+0+0 & 3+6+3 \\ 4+1+0 & -2+0+0 & 1-3+0 \\ 16+0-2 & -8+0+0 & 4+0+2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 & -6 & 12 \\ 5 & -2 & -2 \\ 14 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore$ AB এর ট্রেস $= 7 - 2 + 6 = 11$ (Ans.)

খ. C ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = \begin{bmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{bmatrix}$

ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ।

$\therefore \quad |C| = \begin{vmatrix} x+2 & 3 & 5 \\ 5 & x+3 & 2 \\ 4 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+10 & 3 & 5 \\ x+10 & x+3 & 2 \\ x+10 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+10)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & x+3 & 2 \\ 1 & 2 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow (x+10)\begin{vmatrix}0 & -x & 3\\ 0 & x+1 & -x-2\\ 1 & 2 & x+4\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (x+10)\,1.(x^2+2x-3x-3)=0$

$\Rightarrow (x+10)(x^2-x-3)=0$

$x+10=0$ হলে, $x=-10$

$x^2-x-3=0$ হলে,

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4.1(-3)}}{2.1}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$\therefore\ x=-10,\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

গ. $x=1$ এবং $DC=\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}$ হলে D নির্ণয় কর।

সমাধান: $x=1$ হলে, $C=\begin{bmatrix}3 & 3 & 5\\ 5 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $DC=\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}$

$\therefore\ D=\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}C^{-1}$

এখন, $|C|=\begin{vmatrix}3 & 3 & 5\\ 5 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{vmatrix}$

$=3(20-4)-3(25-8)+5(10-16)$

$=48-51-30=-33$

$$\begin{array}{|ccccc}3 & 3 & 5 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4\\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4\end{array}$$

$$\text{Adj}(C)=\begin{bmatrix}20-4 & 8-25 & 10-16\\ 10-15 & 15-20 & 12-6\\ 6-20 & 25-6 & 12-15\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}16 & -17 & -6\\ -5 & -5 & 6\\ -14 & 19 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}16 & -5 & -14\\ -17 & -5 & 19\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$\therefore\ C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\text{Adj}(C)$

$$=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}16 & -5 & -14\\ -17 & -5 & 19\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ D=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\ 15 & 15 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & -5 & -14\\ -17 & -5 & 19\\ -6 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}-112+85-6 & 35+25+6 & 98-95-3\\ 240-255-84 & -75-75+84 & -210+285-42\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-33}\begin{bmatrix}-33 & 66 & 0\\ -99 & -66 & 33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

3. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & p & p^2\\ 1 & p^2 & p^4\end{bmatrix}$.

ক. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ হলে A^2+A নির্ণয় কর।

সমাধান: A^2+A

$$=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-9 & -6-6\\ 6+6 & -9+4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & -12\\ 12 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5+2 & -12-3\\ 12+3 & -5+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -15\\ 15 & -3\end{bmatrix}$$

খ. প্রমাণ কর যে, $|A^{-1}|=p(p-1)^2(p^2-1)$

সমাধান: প্রশ্নমালা IB এর 1(a) নং প্রশ্ন।

গ. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

$A^{-1}\times\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 11\end{bmatrix}$, যখন $p=2$.

সমাধান: $p=2$ হলে,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2^2\\ 1 & 2^2 & 2^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 16\end{bmatrix}$$

$$4C = 4\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 8 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; AB + 4C - I = \begin{bmatrix} -6 & -7 & 7 \\ 12 & -37 & 23 \\ -5 & -14 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 8 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+0-1 & -7+4+0 & 7+12+0 \\ 12+4+0 & -37+8-1 & 23+4+0 \\ -5+8+0 & -14+12+0 & 12+4-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -3 & 19 \\ 16 & -30 & 27 \\ 3 & -2 & 15 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. $(C^T)^{-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C^T ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক, $|C^T| = 0(2-3) - 1(1-9) + 2(1-6) = 0 + 8 - 10 = -2$

C^T এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স, $\text{Adj}(C^T)$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & -(1-9) & 1-6 \\ -(1-2) & 0-6 & -(0-3) \\ 3-4 & -(0-2) & 0-1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (C^T)^{-1} = \frac{1}{|C^T|}\text{Adj}(C^T)$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} a+5 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে,

$$\begin{vmatrix} a+5 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 10 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

খ. $|(2AB)^{-1}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-2+0 & 1-4+1 & 0+4-1 \\ 3+1+0 & 3+2-3 & 0-2+3 \\ 2-3+0 & 2-6-1 & 0+6+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 2AB = 2\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |2AB| = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & -10 & 14 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 8\{-1(14+5) + 2(28+1) + 3(-20+2)\}$$

$$= 8\{-19 + 58 - 54\} = -120$$

এখন, $(2AB)(2AB)^{-1} = I$

$$\Rightarrow \quad (2AB)^{-1} = \frac{I}{2AB}$$

$$\therefore \quad |(2AB)^{-1}| = \frac{|I|}{|2AB|} = \frac{1}{-120}$$

গ. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর:

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$$

এখন, $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-1&3\\2&3&1\end{vmatrix}$

$=1(-1-9)-2(3-6)-1(9+2)$
$=-10+6-11=-15$

$$\therefore \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-1-9&-(3-6)&9+2\\-(2+3)&1+2&-(3-4)\\6-1&-(3+3)&-1-6\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-10&3&11\\-5&3&1\\5&-6&-7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-10&-5&5\\3&3&-6\\11&1&-7\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$=\frac{1}{-15}\begin{bmatrix}-10&-5&5\\3&3&-6\\11&1&-7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/5&-1/5&2/5\\-11/15&-1/15&7/15\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/5&-1/5&2/5\\-11/15&-1/15&7/15\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\7\\11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}+\frac{7}{3}-\frac{11}{3}\\-\frac{5}{5}-\frac{7}{5}+\frac{22}{5}\\-\frac{55}{15}-\frac{7}{15}+\frac{77}{15}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$\therefore x=2, y=2, z=1$

8. $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$, $f(x)=x^3-2x^2+3x$

ক. $\begin{bmatrix}1&-5&3\\4&0&5\\9&6&8\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী কিনা প্রমাণ কর।

প্রমাণঃ $\begin{vmatrix}1&-5&3\\4&0&5\\9&6&8\end{vmatrix}=1(0-30)+5(32-45)$
$+3(24-0)$
$=-30-65+72=-23\neq0$

$\therefore$ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী নয়।

খ. $AB=I$ হলে B নির্ণয় কর।

সমাধানঃ যেহেতু $AB=I$ সুতরাং $B=A^{-1}$

দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{vmatrix}$$

$=2(-4+1)+1(2-1)-1(-1+2)$
$=-6+1-1=-6$

$$\therefore \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-4+1&-(2-1)&-1+2\\-(-2-1)&4+1&-(-2+1)\\-1-2&-(2+1)&-4+1\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-3&-1&1\\3&5&1\\-3&-3&-3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-1&5&-3\\1&1&-3\end{bmatrix}$$

$$\therefore B=A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-1&5&-3\\1&1&-3\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. $f(A)=I$ সমীকরণ হতে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x)=x^3-2x^2+3x$

$\therefore f(A)=A^3-2A^2+3A$

প্রশ্নমতে, $f(A)=I\Rightarrow A^3-2A^2+3A=I$

$\Rightarrow A^{-1}(A.A^2-2A.A+3A)=A^{-1}I$

$\Rightarrow (A^{-1}.A).A^2-2(A^{-1}A).A+3(A^{-1}A)$
$=A^{-1}$

$\Rightarrow I.A^2 - 2(I.A) + 3I = A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = A.A - 2A + 3I$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1-1 & -2+2+1 & -2-1-2 \\ 2-2+1 & -1+4-1 & -1-2+2 \\ 2-1+2 & -1+2-2 & -1-1+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-4+3 & 1+2+0 & -5+2+0 \\ 1-2+0 & 2+4+3 & -1-2+0 \\ 3-2+0 & -1+2+0 & 2-4+3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 9 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

ক. $(A+B)^T$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 2-1 & 2+3 \\ 2+3 & 5+0 & 2+5 \\ 2+5 & 5+2 & 11+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

খ. $|3(B^2+I)|$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $B^2 = B.B$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-3+15 & -3+0+6 & 9-5+18 \\ 9+0+25 & -3+0+10 & 9+0+30 \\ 15+6+30 & -5+0+12 & 15+10+36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 3 & 22 \\ 34 & 7 & 39 \\ 51 & 7 & 61 \end{bmatrix}$$

$$B^2 + I = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 22 \\ 34 & 7 & 39 \\ 51 & 7 & 61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 3 & 22 \\ 34 & 8 & 39 \\ 51 & 7 & 62 \end{bmatrix}$$

$$3(B^2+I) = 3\begin{bmatrix} 22 & 3 & 22 \\ 34 & 8 & 39 \\ 51 & 7 & 62 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times22 & 3\times3 & 3\times22 \\ 3\times34 & 3\times8 & 3\times39 \\ 3\times51 & 3\times7 & 3\times62 \end{bmatrix}$$

$$|3(B^2+I)| = \begin{vmatrix} 3\times22 & 3\times3 & 3\times22 \\ 3\times34 & 3\times8 & 3\times39 \\ 3\times51 & 3\times7 & 3\times62 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times3\times3\begin{vmatrix} 22 & 3 & 22 \\ 34 & 8 & 39 \\ 51 & 7 & 62 \end{vmatrix}$$

$= 9\{22(496-273) - 3(2108-1989)$
$+ 22(238-408)\}$
$= 9(4906 - 357 - 3740) = 7281$ (Ans.)

গ. $(AB)^{-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+6+10 & -2+0+4 & 6+10+12 \\ 6+15+10 & -2+0+4 & 6+25+12 \\ 6+15+55 & -2+0+22 & 6+25+66 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 2 & 28 \\ 31 & 2 & 43 \\ 76 & 20 & 97 \end{bmatrix}$

$\therefore \ |AB| = \begin{vmatrix} 22 & 2 & 28 \\ 31 & 2 & 43 \\ 76 & 20 & 97 \end{vmatrix}$

$= 22(194-860) - 2(3007-3268) +$
$28(620-152)$
$= -14652 + 522 + 13104 = -1026$

$\therefore \ Adj(AB)$

$= \begin{bmatrix} 194-860 & -(3007-3268) & 620-152 \\ -(194-560) & 2134-2128 & -(440-152) \\ 86-56 & -(946-868) & 44-62 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -666 & 261 & 468 \\ 366 & 6 & -288 \\ 30 & -76 & -18 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -666 & 366 & 30 \\ 261 & 6 & -76 \\ 468 & -288 & -18 \end{bmatrix}$

$\therefore \ (AB)^{-1} = \dfrac{1}{|AB|} Adj(AB)$

$= \dfrac{1}{-1026}\begin{bmatrix} -666 & 366 & 30 \\ 261 & 6 & -76 \\ 468 & -288 & -18 \end{bmatrix}$ (Ans.)

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং

$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ক. $BC = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $BC = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10+12 & 15+16 \\ 4+3 & 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 31 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3a \\ y & z \end{bmatrix}$

$\therefore \ 3a = 31 \Rightarrow a = \dfrac{31}{3}$ (Ans.)

খ. $B^2 + 3C + I$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $B^2 + 3C + I$

$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 25+8 & 20+4 \\ 10+2 & 8+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 33 & 24 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 33+6+1 & 24+9+0 \\ 12+9+0 & 9+12+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 40 & 33 \\ 21 & 22 \end{bmatrix}$ (Ans.)

গ. $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \ A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \ |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(10-4) + 1(4-3)$

$= 6 + 1 = 7$

$\therefore \ Adj(A^T) = \begin{bmatrix} 10-4 & -(-2-0) & -1-0 \\ -(4-3) & 2-0 & -(1-0) \\ 8-15 & -(4+3) & 5+2 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -7 & -7 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ (A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|}\,Adj(A^T)$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ক. $A^{-1}B$ নির্ণয় যোগ্য কিনা ব্যাখ্যা কর।

সমাধান: A^{-1} এর কলাম সংখ্যা 3 এবং B এর কলাম সংখ্যা 3 পরস্পর সমান। সুতরাং $A^{-1}B$ নির্ণয় যোগ্য।

খ. A নির্ণয় কর।

সমাধান: $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1-5) = -4$

$$Adj(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 0-3 & -(-1-0) & -1-0 \\ -(1-2) & 1-0 & -(1-0) \\ 3-0 & -(3+2) & 0+1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}\,Adj(A^{-1})$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

গ. $A^{-1}X = B$ হলে ক্রেমারেরর নিয়মানুসারে x, y, z নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^{-1}X = B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+y+2z \\ -x+0y+3z \\ 0x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x + y + 2z = 1$

$-x + 0y + 3z = 3$

$0x + y + z = 2$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-3) - 1(3-6) + 2(3-0)$$

$= -3 + 3 + 6 = 6$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4-10) = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-4) = -2$$

$$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

ক. **বিস্তার না করে প্রমাণ কর :**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

খ. প্রমাণ কর যে, $D = (1 - a + a^2)^2(a+1)^2$

[বুয়েট'১২-১৩]

গ. A^3 নির্ণয় কর এবং তা থেকে A^{-1} কত হবে তা সিদ্ধান্ত নাও।

ক. **প্রমাণ : L.H.S.=** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (-)(-)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

খ. প্রমাণ: $\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1-a+a^2 & -a & a^2 \\ 1-a+a^2 & 1 & -a \\ 1-a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & -a-1 & a^2+a \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & -(a+1) & a(a+1) \\ 0 & (1+a)(1-a) & -(a+1) \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)(a+1)^2\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 1-a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)(a+1)^2(1-a+a^2)$$

$$= (1-a+a^2)^2(a+1)^2$$

গ. সমাধান :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A^2A = I$ হতে সিদ্ধান্ত হয় যে, A^{-1} বিদ্যমান এবং

$$A^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ক. A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী কিনা যাচাই কর।

সমাধান: A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে এর নির্ণায়ক $|A|$ এর মান শূন্য হবে।

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(1-9) - 3(3-9) + 3(9-3)$$
$$= -8 + 18 + 18 = -8 \neq 0$$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী নয়।

খ. $A^2 + 4B - I$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^2 = A.\,A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+9+9 & 3+3+9 & 3+9+3 \\ 3+3+9 & 9+1+9 & 9+3+3 \\ 3+9+3 & 9+3+3 & 9+9+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{vmatrix}$$

$$4B = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 + 4B - I$

$$= \begin{vmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 22 & 23 & 19 \\ 23 & 22 & 19 \\ 19 & 19 & 22 \end{vmatrix}$$

গ. B^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |B| = 1(2-1) - 2(4-1) + 1(2-1)$$
$$= 1 - 6 + 1 = -4$$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} 2-1 & -(4-1) & 2-1 \\ -(4-1) & 2-1 & -(1-2) \\ 2-1 & -(1-2) & 1-4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (B)^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj } (B)$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা I B এর 2(a) নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য।

খ. প্রমাণ কর যে, $D = 2(a+b+c)^3$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা I B এর 3(a) নং প্রশ্নের উত্তর দ্রষ্টব্য।

গ. A নির্ণয় কর।

সমাধান: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |A^{-1}| = -1(5-0) - 2(10-0)$$
$$- 3(-4-4)$$
$$= -5 - 20 + 24 = -1$$

$$\text{Adj}(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 5-0 & -(10-0) & -4-4 \\ -(10-6) & -5+12 & -(2-8) \\ 0+3 & -(0+6) & -1-4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{Adj}(A^{-1})$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

15. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

ক. $|A|$ এর $(2, 3)$ ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ এর $(2, 3)$ ভুক্তির সহগুণক

$$= (-1)^{2+3}(2-8) = -1(-6) = 6$$

খ. $A^2 - 5A + 4I$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4-12 & -2+2+6 & 3+0-15 \\ -2+2+0 & 4+1+0 & -6+0+0 \\ -4-4+20 & 8-2-10 & -12+0+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 0 & 5 & -6 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$5A = 5\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & -10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^2 - 5A + 4I = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 0 & 5 & -6 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & -10 & 25 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7+5+4 & 6-10+0 & -12+15+0 \\ 0-10+0 & 5-5+4 & -6+0+0 \\ 12-20+0 & -4+10+0 & 13-25+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -10 & 4 & -6 \\ -8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. প্রমাণ কর যে, $D = (c-a)(a^2 + b^2 + c^2)$

প্রমাণ: $$D = \begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -(c-a) & -(c-a) \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$[r_1' = r_1 - r_2]$$

$$= (c-a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix}$$

$$[c_2' = c_2 - c_3]$$

$= (c-a).(-1)[-2c^2 + 2ab - \{(a+b)^2 - c^2\}]$

$= (c-a)(-1)$

$\qquad (-2c^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab + c^2)$

$= (c-a)(-1)(-1)(a^2 + b^2 + c^2)$

$= (a^2 + b^2 + c^2)(c-a) = $ R.H.S. (Proved)

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

ক. B ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, P এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $B = \begin{bmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$ বলে,

$$|B| = \begin{vmatrix} p-5 & 2 \\ 2 & p-2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (p-5)(p-2) - 4 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 7p + 10 - 4 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 7p + 6 = 0 \Rightarrow (p-6)(p-1) = 0$

$\therefore\ p = 1, 6$ (Ans.)

খ. A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore\ |A| = 1(6-3) = 3$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 12-15 & -(8-5) & 6-3 \\ -(0-3) & 0-1 & -(0-0) \\ 0-3 & -(0-2) & 0-0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

গ. $AX = C$ হলে ক্রেমার এর নিয়মানুসারে y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0x+0y+z \\ 2x+3y+5z \\ x+3y+4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ 0x + 0y + z = 2$

$2x + 3y + 5z = 3$

$x + 3y + 4z = 5$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(6-3) = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -2(8-5) + 1(10-3)$$

$$= -6 + 7 = 1$$

$$\therefore \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{3} \ \text{(Ans.)}$$

17. $D = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ক. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = I$ হলে, B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি অভেদ ম্যাটিক্স ।

খ. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিসমূহ নির্ণয় কর। **[বুয়েট' ০৯-১০]**

গ. প্রমাণ কর যে, $D = (a+1)(b+1)(c+1)\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1\right)$

ক. **সমাধান:** ধরি, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

তাহলে, $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, যেহেতু $AB = I$, সুতরাং, $B = A^{-1}$

$$\therefore \ B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

খ. **সমাধান:** এখানে, $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = (I)B = B$

$$\Rightarrow B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} \\ 10-8 & 17-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

B ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিসমূহ 1, 2, 2, 3

গ. $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a+1 & -(b+1) & 0 \\ a+1 & 0 & -(c+1) \end{vmatrix}$$

$$[r'_2 = r_2 - r_1, \ r'_3 = r_3 - r_1]$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{-(b+1)}{b+1} & \frac{0}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{0}{b+1} & \frac{-(c+1)}{c+1} \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\left\{-\frac{1}{a+1}(1-0) - \frac{b}{b+1}(-1-0) + \frac{c}{c+1}(0+1)\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{1}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{-\frac{a+1-a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\left\{-\frac{a+1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}\right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)\left\{\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1\right\}$$

$$= \text{R.H.S.} \ \text{(Proved)}$$

18. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 6\\ -1 & 5 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a^2 & 1 & a\\ a & a^2 & 1\end{vmatrix}$

ক. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix}0 & b-a & c-a\\ a-b & 0 & c-b\\ a-c & b-c & 0\end{vmatrix}=0$

প্রমাণঃ $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}0 & b-a & c-a\\ a-b & 0 & c-b\\ a-c & b-c & 0\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-a\\ a-b & b-c & c-b\\ a-b & b-c & 0\end{vmatrix}$$

$$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$$

$=0$, [$\because$ ১ম ও ২য় কলামের অনুরূপ ভুক্তির অনুপাত $(a-b):(b-c)$ সমান।]

$=$ R.H.S. (Proved)

খ. প্রমাণ কর যে, $D=(a^3-1)^2$

প্রমাণ : $\text{L.H.S.}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a^2 & 1 & a\\ a & a^2 & 1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+a+a^2 & a & a^2\\ 1+a+a^2 & 1 & a\\ 1+a+a^2 & a^2 & 1\end{vmatrix}, [c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$$

$$=(a^2+a+1)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & 1 & a\\ 1 & a^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a^2+a+1)\begin{vmatrix}0 & a-1 & a(a-1)\\ 0 & 1-a^2 & a-1\\ 1 & a^2 & 1\end{vmatrix}$$

$$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$$

$=(a^2+a+1)1\{(a-1)^2-a(a-1)(1-a)(1+a)\}$

$=(a^2+a+1)(a-1)^2(1+a+a^2)$

$=(a^2+a+1)^2(a-1)^2=(a^3-1)^2=$ R.H.S.

(Proved)

গ. এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর যেন,

$AB=BA=I$ হয়।

সমাধান : $AB=BA=I$ বলে, $B=A^{-1}$.

$|A|=1(-1-30)-3(3+6)+4(15-1)$

$=-31-27+56=-2$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 6\\ 5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 6\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-31 & -9 & 14\\ 17 & 5 & -8\\ 22 & 6 & -10\end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-31 & 17 & 22\\ -9 & 5 & 6\\ 14 & -8 & -10\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B=A^{-1}=\begin{bmatrix}31/2 & -17/2 & -11\\ 9/2 & -5/2 & -3\\ -7 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

19. $M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ **[দি.২০১৭]**

ক. $\begin{bmatrix}2 & -x\\ y-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3+y\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধান : $\begin{bmatrix}2 & -x\\ y-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3+y\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

$\therefore\ y-1=4\Rightarrow y=5$

$-x=3+y\Rightarrow -x=3+5=8$

$\Rightarrow x=-8\Rightarrow x=-8$

$\therefore\ (x, y)=(-8, 5)$ (Ans.)

খ. $M^2-3M+MI$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স।

সমাধান : $M^2-3M+MI$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$-3\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}+M$$

$$=\begin{bmatrix}1+6+2 & 2-6+1 & 1-2+0\\3-9-2 & 6+9-1 & 3+3+0\\2+3+0 & 4-3+0 & 2-1+0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\-9 & 9 & 3\\-6 & -3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & -3 & -1\\-8 & 14 & 6\\5 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\-9 & 9 & 3\\-6 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-3+1 & -3-6+2 & -1-3+1\\-8-9+3 & 14+9-3 & 6+3-1\\5-6+2 & 1-3+1 & 1+0+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -7 & -3\\-14 & 20 & 8\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

গ. M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : $|M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\4 & -1 & 0\\2 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$=1(4+2)=6\neq 0$

$\therefore$ M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান।

$$\text{Adj}(M)=\begin{bmatrix}0+1 & -(0+2) & 3-6\\-(0-1) & 0-2 & -(1-4)\\-2+3 & -(-1-3) & -3-6\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\1 & -2 & 3\\1 & 4 & -9\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -2 & 4\\-3 & 3 & -9\end{bmatrix}$$

$\therefore$ M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $=\dfrac{1}{|M|}\text{ Adj}(M)$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -2 & 4\\-3 & 3 & -9\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

20. $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$ [ঢা.বো. '১৭]

ক. $A\times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর। ২

সমাধান: $A\times C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2+20+8\\8+0+12\\4+15+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\20\\37\end{bmatrix}$$

$\therefore A\times C$ এর মাত্রা 3×1

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

সমাধান : $|A|=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\4 & 0 & 3\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}$

$=1(0-9)-4(8-6)+2(12-0)$

$=-9-8+24=7\neq 0$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান।

$$\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}0-9 & -(8-6) & 12-0\\-(8-6) & 2-4 & -(3-8)\\12-0 & -(3-8) & 0-16\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}$$

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-9 & -2 & 12\\-2 & -2 & 5\\12 & 5 & -16\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

গ. $A\times B=C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর।

সমাধান : $A\times B=C$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+4y+2z \\ 4x+0y+3z \\ 2x+3y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x+4y+2z=2$
$4x+0y+3z=5$
$2x+3y+2z=4$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2(0-9) - 4(10-12) + 2(15-0)$
$= -18 + 8 + 30 = 20$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 1(10-12) - 2(8-6) + 2(16-10)$
$= -2 - 4 + 12 = 6$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 1(0-15) - 4(16-10) + 2(12-0)$
$= -15 - 24 + 24 = -15$

$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{7},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{7},$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $(x, y, z) = (\frac{20}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-15}{7})$

21. দৃশ্যকল্প-১: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

[সিলেট বোর্ড ২০১৭]

দৃশ্যকল্প-২ :

$$\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = \frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর : ২

$$\begin{pmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{pmatrix} = 0$$

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{pmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x & -a & x \\ y & -b & y \\ z & -c & z \end{pmatrix}$, $[c_3' = c_3 + c_2]$

$= 0$, [১ম ও শেষ কলামে এক]

খ. $A = B + C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

সমাধান : $A = B + C$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-2 & 3-1 & -5+2 \\ 6-4 & 4-3 & -2+2 \\ 5-1 & 2-4 & -1+6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= -3(-4-4) + 5(-1-4)$
$= 24 - 25 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান।

$$\therefore Adj(A) = \begin{bmatrix} 5-0 & -(10-0) & -4-4 \\ -(10-6) & -5+12 & -(2-8) \\ 0+3 & -(0+6) & -1-4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3\\ -10 & 7 & -6\\ -8 & 6 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -3\\ 10 & -7 & 6\\ 8 & -6 & 5\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। ৪

সমাধান:

$$\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}z=\frac{x}{4}-y+\frac{z}{4}=\frac{3x}{5}-\frac{y}{5}-\frac{2z}{5}=1$$

$$\therefore \frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}z=1 \Rightarrow 2x+3y-5z=7$$

$$\frac{x}{4}-y+\frac{z}{4}=1 \Rightarrow x-4y+z=4$$

$$\frac{3x}{5}-\frac{y}{5}-\frac{2z}{5}=1 \Rightarrow 3x-y-2z=5$$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=2(8+1)-3(-2-3)-5(-1+12)$$
$$=18+15-55=-22$$

$$D_x=\begin{vmatrix}7 & 3 & -5\\ 4 & -4 & 1\\ 5 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=7(8+1)-4(-6-5)+5(3-20)$$
$$=63+44-85=22$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 7 & -5\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}$$

$$=2(-8-5)-7(-2-3)-5(5-12)$$
$$=-26+35+35=44$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & -4 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}$$

$$=2(-20+4)-3(5-12)+7(-1+12)$$
$$=-32+21+77=66$$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D}=-\frac{22}{22}=-1,\ y=\frac{44}{-22}=-2,$$

$$z=\frac{66}{-22}=-3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান , $(x, y, z)=(-1,-2,-3)$

22. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}, B=A^t, f(x)=x^2-4x.$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

ক. $g(x)=\frac{1}{2x-3}$ ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: ধরি, $y=g(x)=\frac{1}{2x-3}$

$$\Rightarrow 2xy-3y=1 \Rightarrow 2xy=1+3y$$

$$\Rightarrow x=\frac{1+3y}{2y}$$

এখন, $x=\frac{1+3y}{2y}\in\mathbb{R}$, যদি ও কেবল যদি $y\in\mathbb{R}$ এবং $y\neq 0$.

$\therefore$ নির্ণেয় রেঞ্জ $=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$

খ. $f(B)$ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ এবং

$$f(x)=x^2-4x$$

$$\therefore B=A^t=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

এখন, $f(B)=A^2-4A=A.A-4A$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+3+1 & 2+2+2 & 2+2+0\\ 6+6+2 & 3+4+4 & 3+4+0\\ 2+6+0 & 1+4+0 & 1+4+0\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}8 & 4 & 4\\ 12 & 8 & 8\\ 4 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 6 & 4\\ 14 & 11 & 7\\ 8 & 5 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 4 & 4\\ 12 & 8 & 8\\ 4 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-8 & 6-4 & 4-4\\ 14-12 & 11-8 & 7-8\\ 8-4 & 5-8 & 5-0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$$\therefore |B|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2(4-3)$$

$$=-2\neq 0$$

$\therefore$ B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স B^{-1} বিদ্যমান।

$$\therefore \text{Adj}(B)=\begin{bmatrix}0-4 & -(0-2) & 6-2\\ -(0-2) & 0-1 & -(4-1)\\ 2-2 & -(4-3) & 4-3\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 4\\ 2 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}=\frac{1}{|B|}\text{Adj}(B)$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ -4 & 3 & -1\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

23. $x+y+z=1$........(i) [য .বো.'১৭]

$lx+my+nx=k$........(ii)

$l^2x+m^2y+n^2z=k^2$.......(iii)

ক. $2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}+F=I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

সমাধান: $2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}+F=I_2$

$$\Rightarrow F=I_2-2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 0+4\\ 0-4 & 1+2\end{bmatrix}$$

$$\therefore F=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -4 & 3\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

খ. সমীকরণগুলোকে $AX=B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে,

$$\det(A)=(l-m)(m-n)(n-l).$$

প্রমাণ : প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে $AX=B$ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ k\\ k^2\end{bmatrix};$$ যেখানে

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ l & m & n\\ l^2 & m^2 & n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ l-m & m-n & n\\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2\end{vmatrix}$$

$[c_1'=c_1-c_2, c_2'=c_2-c_3]$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ (l-m)(l+m) & (m-n)(m+n) & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & n \\ l+m & m+n & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l-m)(m-n)\{(m+n)-(l+m)\}$$

$$= (l-m)(m-n)(m+n-l-m)$$

$\therefore \quad \det(A) = (l-m)(m-n)(n-l)$

গ. x, y, z এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1, m = 2, n = -1$

সমাধান: x, y, z এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1^2 & 2^2 & (-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-3+9) = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2+4 & -(1+1) & 4-2 \\ -(1-4) & 1-1 & -(4-1) \\ -1-2 & -(-1-1) & 2-1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ [কু.বো.'১৭]

ক. x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে যদি

$\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(3x-10) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$\therefore \quad x = 0$ অথবা $x = \frac{10}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে।

খ. $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB - C^2 + 2I_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-6-15 & 2+14+0 \\ 2-3+0 & -4+7+0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 25+1 & 5-3 \\ 5-3 & 1+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22-26+2 & 16-2+0 \\ -1-2+0 & 3-10+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ. D^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ |D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= 5(-2-0) = -10$

$\therefore\ \text{Adj}(D) = \begin{bmatrix} -6-4 & -(0-2) & 0+2 \\ -(3+2) & 3+1 & -(2-1) \\ 2-2 & -(2-0) & -2-0 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -10 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ [ব.বো.'১৭]

ক. p এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ মাট্রিক্স হবে?

সমাধান: $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হবে যদি

$\begin{vmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

$\Rightarrow 5p - 10 - 12 = 0 \Rightarrow 5p - 22$

$\Rightarrow p = \frac{22}{5}$ (Ans)

খ. উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

সমাধান: $A^2 - 5A + 6I$

$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16+6 & 8+10 \\ 12+15 & 6+25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22-20+6 & 18-10+0 \\ 27-15+0 & 31-25+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$ (Ans.)

গ. উদ্দীপকের আলোকে, $AX = B$ হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে x, y নির্ণয় কর।

সমাধান: $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x+2y \\ 3x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4x + 2y = 6$

$3x + 5y = 1$

$\therefore\ D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 - 6 = 14$

$D_x = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 30 - 2 = 28$

$D_y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 18 = -14$

$\therefore\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{14} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{14} = -1,$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, -1)$