পঞ্চম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

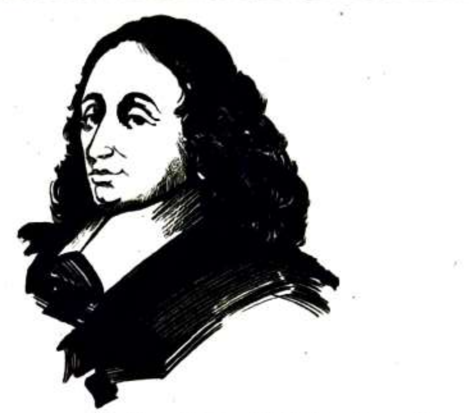
Binomial Expansions

দুইটি পদবিশিষ্ট যেকোনো রাশিই **দ্বিপদী রাশি**। যেমন: $4x + 7$, $5y - 7x$, $n + mx$, $bx^2 - ay^2$ ইত্যাদি প্রত্যেকটি এক একটি দ্বিপদী রাশি, কারণ প্রত্যেকটি দুইটি পদ দ্বারা গঠিত। বিজ্ঞানের অগ্রযাত্রার সাথে সাথে গাণিতিক হিসাবের পরিসরও ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়েছে। গাণিতিক জগতে প্রায়শই বিভিন্ন দ্বিপদী রাশির দুই বা ততোধিক শক্তির মান নির্ণয় করা প্রয়োজন হয়। শক্তিমাত্রা ছোট হলে গুণের মাধ্যমে তা নির্ণয় করা সম্ভব হয়। কিন্তু বড় হলে সেটা কষ্টসাধ্য ও সময়সাপেক্ষ। যেমন: $a + b$ এর বর্গ বা ঘন অর্থাৎ

$(a + b)^2$ বা $(a + b)^3$ সহজেই সরাসরি গুণের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়। কিন্তু $(a + b)^{50}$ বা $(a + b)^n$ [যেখানে n এর মান যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা] এর মান সরাসরি গুণের মাধ্যমে নির্ণয় করা শ্রমসাধ্য। তাছাড়া চক্রবৃদ্ধি সুদের পরিমাণ, আগামী 10 বা 20 বছরের জনসংখ্যার বৃদ্ধির হার ইত্যাদি এ জাতীয় দ্বিপদী রাশির মান একটি সাধারণ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়ে থাকে যা দ্বিপদী বিস্তৃতি নামে পরিচিত।

সুতরাং যে বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে কোনো দ্বিপদী রাশির যেকোনো শক্তিকে একটি ধারার আকারে প্রকাশ করা যায় তাকে দ্বিপদী উপপাদ্য এবং ধারাটিকে দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতি বলা হয়। সূত্রটি প্রথমে বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন উদ্ভাবন করেন।

1653 সালে ব্লেইজ প্যাসকেল (Blaise Pascal) দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগগুলো ত্রিভুজাকারে প্রকাশ করেন। তাঁর পূর্বেও বহু গণিতবিদ দ্বিপদী উপপাদ্য নিয়ে গবেষণা করেন। যেমন: খ্রিস্টপূর্ব চতুর্থ শতকে গ্রিক গণিতবিদ Euclid দ্বিতীয় ক্রমের (second order) এবং খ্রিস্টপূর্ব তৃতীয় শতকে ভারতীয় গণিতবিদ Pingala উচ্চ ক্রমের (higher order) দ্বিপদী ব্যবহার করেন। তাছাড়া দশম শতকে ভারতীয় গণিতবিদ Halayudha, একাদশ শতকে পারস্যের গণিতবিদ Omar Khayyam এবং ত্রয়োদশ শতকে চীনের গণিতবিদ Yang Hui ও প্যাসকেলের ন্যায় একই ফলাফল আবিষ্কার করেছিলেন। দ্বিপদী উপপাদ্য ক্যালকুলাস, সম্ভাবনা তত্ত্বে, বিভিন্ন সূক্ষ্ম ও জটিল হিসাব নিকাশে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। দ্বিপদী উপপাদ্যের মূল প্রয়োগ হলো কোনো তত্ত্ব, উপাত্ত ও সিদ্ধান্তকে সাধারণ রূপ দান করা।



নাম	: ব্লেইজ প্যাসকেল (Blaise Pascal)
জন্ম	: ১৯ জুন, ১৬২৩
জন্মস্থান	: ক্লেরমন্ট ফেরেন্ড, ফ্রান্স
নাগরিকত্ব	: ফরাসি
অবদান	: গণিত, পদার্থবিজ্ঞান, ধর্মতত্ত্ব এবং দর্শন
উল্লেখযোগ্য ধারনা	: প্যাসকেলের ত্রিভুজ, প্যাসকেলের সূত্র, প্যাসকেলের ক্যালকুলেটর, প্যাসকেলের উপপাদ্য, সম্ভাবনা তত্ত্ব।
উদ্ভাবন	: যান্ত্রিক গণনাকারী আবিষ্কার, বিভিন্ন কঠিন বস্তুর আয়তন নির্ণয়ে সাইক্লয়েডের প্রয়োগ।
মৃত্যু	: ১৯ আগস্ট, ১৬৬২

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- আরোহ বিধি ও আরোহ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আরোহ পদ্ধতিতে ধনাত্মক পূর্ণ সূচকের জন্য দ্বিপদী উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে।
- দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগগুলিকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ আকারে প্রকাশ করতে পারবে।
- দ্বিপদী বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ, মধ্য পদ ও সমদূরবর্তী পদসমূহ নির্ণয় করতে পারবে।
- ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাংশ সূচকের জন্য অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতির অভিসৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবে ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের মাধ্যমে দ্বিপদী বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১: আরোহ বিধি ও আরোহ পদ্ধতি, দ্বিপদী উপপাদ্য
- পাঠ-২: প্যাসকেলের ত্রিভুজ, দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ, মধ্যপদ ও সমদূরবর্তী পদ
- পাঠ-৩: উদাহরণমালা
- পাঠ-৪, ৫ ও ৬: অনুশীলনী-5(A)
- পাঠ-৭: অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি, অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতির অভিসৃতি
- পাঠ-৮: আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের মাধ্যমে দ্বিপদী বিস্তৃতি
- পাঠ-৯: উদাহরণমালা
- পাঠ-১০, ১১ ও ১২: অনুশীলনী-5(B)

পাঠ-১

5.1 আরোহ বিধি ও আরোহ পদ্ধতি (Principle of induction and method of induction)

আরোহ বিধি: স্বাভাবিক সংখ্যার চলরাশি সম্বলিত গাণিতিক বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করতে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। তাছাড়া বহু গাণিতিক সূত্রাবলি রয়েছে যেগুলি প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা কষ্টসাধ্য, কিন্তু গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে সহজেই প্রমাণ করা যায়।

বর্ণনা: মনে করি, $P(n)$ একটি স্বাভাবিক চলরাশি সম্বলিত গাণিতিক বাক্য এবং $n = 1$ এর জন্য $P(n)$ সত্য।
n এর একটি নির্দিষ্ট মান m অর্থাৎ, $n = m$ এর জন্য $P(n)$ বাক্যটিকে সত্য ধরে নিয়ে যদি দেখানো যায় $n = m + 1$ এর জন্য $P(n)$ সত্য তাহলে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $P(n)$ বাক্যটি সত্য। অর্থাৎ $P(n)$ এর সত্যতা প্রমাণের জন্য দুইটি ধাপ প্রমাণ করাই যথেষ্ট।

প্রথম ধাপ (ভিত্তি): $P(1)$ সত্য

দ্বিতীয় ধাপ (আরোহ ধাপ): $P(m)$ সত্য ধরে $P(m + 1)$ সত্য যেখানে $m \in \mathbb{N}$

ব্যাখ্যা: প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি n^2 বা $1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n - 1) = n^2; n \in \mathbb{N}$ বাক্যটিকে $P(n)$ দ্বারা সূচিত করা যাক। যেখানে $P(n)$ এর জন্য প্রথম ও দ্বিতীয় ধাপ প্রমাণ করা যায়।
যেহেতু $n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য অর্থাৎ $P(1)$ সত্য।
তাহলে দ্বিতীয় ধাপ অনুযায়ী $P(1)$ সত্য হলে $P(1 + 1)$ বা, $P(2)$ সত্য একইভাবে $P(2)$ সত্য হলে $P(2 + 1)$ বা $P(3)$ সত্য। এভাবে যেকোনো $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $P(n)$ বাক্যটি সত্য হবে।
অতএব, স্বাভাবিক চলরাশি সম্বলিত কোনো উক্তি সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য সত্য হবে যদি উক্তিটি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং $n = m$ এর জন্য সত্য ধরলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হয়, যেখানে $m \in \mathbb{N}$.

উদাহরণ: $\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)}$ $\cdots\cdots$ **(i)** যা একটি গাণিতিক উক্তি।

$n = 1$ হলে (i) নং এর বামপক্ষ $= 1$ এবং ডানপক্ষ $= \frac{1.2}{2} = 1$. সুতরাং বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ $= 1$

অতএব, উক্তিটি $n = 1$ এর জন্য সত্য।

এখন, $n = m$ হলে উক্তিটি সত্য। অর্থাৎ $1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + m = \frac{1}{2} m(m + 1)$ $\quad\cdots\cdots$ (ii)

এখন, (i) নং উক্তিটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (m + 1) = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2) \quad \cdots\cdots \text{(iii)}$$

সত্য হয়।

এখন (ii) নং এর উভয় পক্ষে $(m + 1)$ যোগ করে পাই,

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + m + (m + 1) = \frac{1}{2} m(m + 1) + (m + 1) = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$$

$\therefore$ (iii) নং সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) নং বাক্যটি সত্য।

কাজ: আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5.2 দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem)

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি, যখন $n \in \mathbb{N}$ (Expansion of $(a+x)^n$ when $n \in \mathbb{N}$)

বর্ণনা: সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots + x^n$.

প্রমাণ (আরোহ পদ্ধতিতে):

এখানে, $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots + x^n$ $\quad\cdots\cdots$ (i)

$n = 1$ হলে, (i) নং এর বামপক্ষ $= (a+x)^1 = a + x$ এবং ডানপক্ষ $= a^1 + x^1 = a + x$

সুতরাং, $n = 1$ এর জন্য (i) নং উক্তিটি সত্য।

মনে করি, $n = m$ এর জন্য (i) নং উক্তিটি সত্য।

অর্থাৎ, $(a+x)^m = a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + \cdots + {}^mC_r a^{m-r}x^r + \cdots + x^m$ $\quad\cdots\cdots$ (ii)

তাহলে দেখাতে হবে, $n = m + 1$ এর জন্যও (i) নং উক্তিটি সত্য।

অর্থাৎ, $(a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2 + \cdots + {}^{m+1}C_r a^{m+1-r}x^r + \cdots + x^{m+1}$ $\quad\cdots\cdots$ (iii)

(ii) নং এর উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)[a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + \cdots + {}^mC_{r-1}a^{m-r+1}x^{r-1} + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots + x^m]$$
$$= a^{m+1} + (1 + {}^mC_1)a^mx + ({}^mC_1 + {}^mC_2)a^{m-1}x^2 + \cdots + ({}^mC_{r-1} + {}^mC_r)a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}$$

কিন্তু $1 + {}^mC_1 = {}^mC_0 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_1$, ${}^mC_1 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_2$, ${}^mC_{r-1} + {}^mC_r = {}^{m+1}C_r$

$\therefore (a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2 + \cdots + {}^{m+1}C_ra^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}$

সুতরাং (iii) নং উক্তিটি সত্য। অর্থাৎ, $n = m + 1$ এর জন্যও (i) নং উক্তিটি সত্য।

অতএব, গাণিতিক আরোহ বিধি অনুযায়ী, সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) নং উক্তিটি সত্য। অর্থাৎ, সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots + x^n$

অনুসিদ্ধান্ত -1. (i) নং এ x এর পরিবর্তে $(-x)$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$(a-x)^n = a^n - {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 - \cdots + (-1)^r\,{}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots + (-1)^nx^n$$

অনুসিদ্ধান্ত -2. (i) নং এ $a = 1$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n$.

$(1+x)^n$ বিস্তৃতির দ্বিপদী সহগগুলি যথাক্রমে ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots \cdots, {}^nC_n$। এদেরকে যথাক্রমে $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা: $(a+x)^n$ বিস্তৃতিতে দেখা যায় যে, প্রথম পদে x এর ঘাত শূন্য এবং পরবর্তী পদগুলিতে x এর ঘাত ধারাবাহিকভাবে বৃদ্ধি পায় এবং শেষ পদে x এর ঘাত n হয়। তাই x এর ঘাত জ্ঞাপক সংখ্যা r হলে r এর মান $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ পর্যন্ত অর্থাৎ r এর মান সংখ্যা $n + 1$;

সুতরাং $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $(n+1)$.

উদাহরণ-1. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ **এর বিস্তৃতি কর।**

সমাধান: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = x^5 + {}^5C_1x^{5-1}\left(-\frac{1}{x}\right) + {}^5C_2x^{5-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + {}^5C_3x^{5-3}\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5C_4x^{5-4}\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \left(-\frac{1}{x}\right)^5$

$$= x^5 - 5x^4\cdot\frac{1}{x} + 10x^3\cdot\frac{1}{x^2} - 10x^2\cdot\frac{1}{x^3} + 5x\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} = x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$$

কাজ: $(1+x)^{10}$ এর বিস্তৃতির সবগুলি পদ নির্ণয় কর। প্রতিটি পদের সহগগুলির মধ্যে হ্রাস বৃদ্ধির কোনো সম্পর্ক দেখতে পাওয়া যায় কি? পাওয়া গেলে তা কোন ধরনের?

পাঠ-২

5.3 প্যাসকেলের ত্রিভুজ (Pascal's triangle)

$(a+x)$ দ্বিপদী রাশিটিকে একই রাশি দিয়ে বারবার গুণ করতে থাকলে পর্যায়ক্রমে $(a+x)^2, (a+x)^3, (a+x)^4, (a+x)^5$ …… ইত্যাদি পাওয়া যাবে।

এক্ষেত্রে, $(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = a^2 + 2ax + x^2$

$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)^2 = (a+x)(a^2+2ax+x^2) = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ এভাবে, দীর্ঘ গুণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে $(a+x)^4, (a+x)^5$ … … ইত্যাদি রাশিগুলির বিস্তৃতি বের করা যায়। কিন্তু $(a+x)^n$ আকারের, রাশির বিস্তৃতি একটি বিশেষ ছাঁচে (Pattern) নিচের মতো করে সাজানো যায়–

n এর মান	$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি	পদ সংখ্যা
0	1	1
1	$a+x$	2
2	$a^2+2ax+x^2$	3
3	$a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$	4
4	$a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$	5
…	… … … … … … … … … …	…

উপরের বিস্তৃতিগুলি লক্ষ করে বলা যায়, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে

(i) $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকবে।

(ii) প্রথম পদে a এর ঘাত n ও x এর ঘাত শূন্য হবে, পরবর্তী প্রতিটি পদে পর্যায়ক্রমে a এর ঘাত 1 কমবে ও x এর ঘাত 1 বৃদ্ধি পাবে। এভাবে শেষপদে a এর ঘাত শূন্য ও x এর ঘাত n হবে।

আবার উপরের প্রতিটি দ্বিপদী বিস্তৃতির জন্য এদের সহগগুলিকে নিম্নোক্ত ত্রিভুজ আকারে প্রকাশ করা যায়।

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজ

দ্বিপদী সহগগুলির উল্লেখিত ত্রিভুজাকার সজ্জাকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ বলে। এই ত্রিভুজের প্রথম সারির উপাদান 1; দ্বিতীয় সারির উপাদান 1, 1; তৃতীয় সারি থেকে পরবর্তী সকল সারির প্রান্তিক উপাদান 1, 1 এবং কোনো সারির ১ম ও ২য় উপাদানের যোগফল হবে পরবর্তী সারির ২য় উপাদান, ২য় ও ৩য় উপাদানের যোগফল হবে পরবর্তী সারির ৩য় উপাদান। এভাবে যে কোনো সারি হতে পরবর্তী সারির উপাদানগুলি নির্ণয় করা যায়।

যেমন: $n = 4$ হতে $n = 5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলি যেভাবে পাওয়া যায় তা নিম্নরূপ:

$$\begin{array}{lccccccccccc} n = 4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & & & + & & + & & + & & + & & \\ n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (a + x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5.$

কাজ: প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করে $(a + x)^n;\ n \in \mathbb{N};\ 1 \le n \le 10$ এর বিস্তৃতির সবগুলি পদ নির্ণয় কর।

5.4 দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ, মধ্যপদ ও সমদূরবর্তী পদ

(General term, middle term and equidistant term of binomial expansion)

5.4.1 সাধারণ পদ

আমরা জানি, $(a + x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \cdots\cdots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \cdots + x^n \quad \cdots\cdots \text{(i)}$

(i) নং এর ডানপক্ষের পদগুলিকে যথাক্রমে $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_r, T_{r+1}, \cdots$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করে পাই,

$T_1 = a^n = {}^nC_0\, a^{n-0}\, x^0;\ T_2 = {}^nC_1\, a^{n-1}x = {}^nC_1\, a^{n-1}\, x^1;\ \ T_3 = {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2;\ \cdots\cdots$

$T_r = {}^nC_{r-1}\, a^{n-r+1}\, x^{r-1};\ T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r;\ \cdots\cdots$

T_{r+1} বা $(r + 1)$ তম পদকে $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ বলে।

সুতরাং $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ, $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\, a^{n-r}\, x^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\, a^{n-r}x^r$$

টীকা: (i) $(a - x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ, $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, (-x)^r = (-1)^r\, {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$

$$= (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\, a^{n-r}\, x^r = (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!}\, a^{n-r}x^r$$

(ii) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ, $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^r$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\, x^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\, x^r$$

(iii) $(ax^p + bx^q)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ x^m সম্বলিত হলে $r = \dfrac{np - m}{p - q}$ এবং x^m এর সহগ $= {}^nC_r$ $a^{n-r}b^r$ যেখানে $m, n \in \mathbb{N}$.

উদাহরণ-2. $(y + 4x)^{30}$ এর বিস্তৃতিতে 11 তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$-তম পদ, $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$

সুতরাং $(y + 4x)^{30}$ এর বিস্তৃতিতে, 11 বা $(10 + 1)$ তম পদ, $T_{10+1} = {}^{30}C_{10}\, y^{30-10}(4x)^{10} = 4^{10}\, {}^{30}C_{10}\, x^{10}\, y^{20}$.

উদাহরণ-3. $\left(2x + \dfrac{1}{3x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে কত তম পদ x বর্জিত? পদটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $(r + 1)$ তম পদ x বর্জিত।

$$\therefore r = \frac{np - m}{p - q} = \frac{9.1 - 0}{1 - (-2)} = \frac{9}{3} = 3$$

$[n = 9, p = 1, m = 0, q = -2]$

$\therefore (3 + 1)$ তম বা 4 তম পদ x বর্জিত।

$(3 + 1)$ তম পদ $= {}^9C_3\, (2x)^{9-3} \left(\dfrac{1}{3}x^{-2}\right)^3$

$= {}^9C_3\, 2^6x^6 \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 x^{-6}$

$= {}^9C_3\, 2^6 . \dfrac{1}{3^3}$

$= 84 \times 64 \times \dfrac{1}{27} = \dfrac{1792}{9}$

5.4.2 মধ্যপদ (Middle Term)

দুই বা ততোধিক পদবিশিষ্ট বহুপদীর যে পদটির বা পদদ্বয়ের উভয় পাশে সমান সংখ্যক পদ থাকে তাকে বা তাদেরকে মধ্যপদ বলে। বিজোড় সংখ্যক পদ বিশিষ্ট বহুপদে মধ্যপদের সংখ্যা একটি। জোড় সংখ্যক পদ বিশিষ্ট বহুপদে মধ্যপদের সংখ্যা থাকে দুইটি। উদাহরণস্বরূপ: $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = {}^2C_0a^2 + {}^2C_1a^{2-1}x + {}^2C_2x^2$। উক্ত বহুপদে পদের সংখ্যা 3 যা বিজোড়। এখানে মধ্যপদ হবে $\left(\frac{2}{2}+1\right)$ তম বা 2 তম পদ।

$\therefore$ মধ্যপদ $= {}^2C_1a^{2-1}x$

আবার, $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = {}^3C_0a^3 + {}^3C_1a^{3-1}.x + {}^3C_2a^{3-2}x^2 + {}^3C_3x^3$

উক্ত বহুপদে পদের সংখ্যা 4, যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদের সংখ্যা 2টি। এখানে মধ্যপদ হবে $\frac{4}{2} = 2$ তম এবং $\left(\frac{4}{2}+1\right) = 3$ তম পদ।

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটি ${}^3C_1a^{3-1}x$ এবং ${}^3C_2a^{3-2}x^2$

আবার, $n \in \mathbb{N}$ হলে $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা $(n + 1)$টি

ছক: মধ্যপদ নির্ণয়:

বহুপদী	n এর মান	বিস্তৃতির পদ সংখ্যা $(n + 1)$	মধ্যপদ সংখ্যা	কততম পদ মধ্যপদ	মধ্যপদের মান
$(a + x)^n$	জোড়	বিজোড়	1টি	$\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম	${}^nC_{\frac{n}{2}}.\, a^{\frac{n}{2}}.\, x^{\frac{n}{2}}$
$(a + x)^n$	বিজোড়	জোড়	2টি	$\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$ এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম	${}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}.\, a^{\frac{1}{2}(n+1)}.\, x^{\frac{1}{2}(n-1)}$ এবং ${}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}.a^{\frac{1}{2}(n-1)}.\, x^{\frac{1}{2}(n+1)}$

উদাহরণ-4. $\left(\frac{a}{x} - bx\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\left(\frac{a}{x} - bx\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $12 + 1 = 13$, যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, বিস্তৃতিতে একটি মধ্যপদ আছে অর্থাৎ, $\left(\frac{12}{2}+1\right)$ তম বা 7 তম পদ মধ্যপদ।

$\therefore$ মধ্যপদ $= {}^{12}C_6\left(\frac{a}{x}\right)^{12-6}(-bx)^6 = {}^{12}C_6\, a^6\, b^6$

উদাহরণ-5. $\left(3x - \frac{x^3}{6}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\left(3x - \frac{x^3}{6}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $9 + 1 = 10$, যা জোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতিতে দুইটি মধ্যপদ থাকবে অর্থাৎ, $\left(\frac{9-1}{2}+1\right)$ বা 5 তম পদ এবং $\left(\frac{9+1}{2}+1\right)$ বা 6 তম পদ।

$\therefore$ 5 তম পদ, $T_5 = {}^9C_4\,(3x)^{9-4}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^4 = {}^9C_4.\,3^5.\left(\frac{-1}{6}\right)^4 x^5.x^{12} = \frac{189}{8}x^{17}$

6 তম পদ, $T_6 = {}^9C_5\,(3x)^{9-5}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^5 = {}^9C_5.\,3^4.\left(-\frac{1}{6}\right)^5.x^4.x^{15} = -\frac{21}{16}x^{19}$

সুতরাং, মধ্যপদ দুইটি $\frac{189}{8}x^{17}$ এবং $-\frac{21}{16}x^{19}$.

5.4.3 সমদূরবর্তী পদ

সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $(a + x)^n$ বা $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ হতে সমান দূরের পদগুলির সহগ সমান। অর্থাৎ প্রথম পদ হতে ডানদিকে এবং শেষ পদ হতে বাম দিকে সমান দূরের পদগুলির সহগ সমান।

$(a + x)^n$ বা, $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $n + 1$ সংখ্যক পদ আছে। প্রথম থেকে $(r + 1)$-তম পদের সহগ ${}^nC_r$. শেষ থেকে $(r + 1)$-তম পদটি প্রথম থেকে $\{(n + 1) - r\} = (n - r + 1)$-তম পদ।

অতএব এই পদের সহগ ${}^nC_{n-r}$

এখন, ${}^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!} = {}^nC_r$

অতএব, $(a + x)^n$ বা $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ থেকে $(r + 1)$-তম পদের সহগ সমান।

উদাহরণ: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

এখানে $(a + b)^3$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম থেকে দ্বিতীয় ও শেষ থেকে দ্বিতীয় উভয় পদের সহগ 3 অর্থাৎ সমান।

বি. দ্র. $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে শেষ হতে বামদিকে r তম পদ = প্রথম হতে ডানদিকে $(n - r + 2)$ তম পদ

উদাহরণ: $(a + x)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ হতে বামদিকে ৪র্থ পদ (r তম পদ) = প্রথম হতে ডানদিকে $(n - r + 2)$
$= (12 - 4 + 2)$ তম পদ $= 10$ তম পদ

বিশেষ দ্রষ্টব্য: পাঠ ১ ও ২ এর আলোকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সমাধানের জন্য কিছু বিশেষ কৌশল নিম্নে দেয়া হলো:

1. $(ax^p + bx^q)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^m এর সহগ থাকলে,
   $r = \dfrac{np - m}{p-q}$ এবং x^m এর সহগ $= {}^nC_r a^{n-r} b^r$
2. $(1 + ax)^n$ এর বিস্তৃতিতে r এবং $(r + 1)$ তম পদ পরস্পর সমান হলে $x = a\dfrac{r}{(n-r+1)}$
3. $(1 + ax)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুটি পরস্পর সমান হলে $a = \dfrac{r+1}{n-r}$
4. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে p-তম এবং q-তম পদের সহগ পরস্পর সমান হলে $p + q = n + 2$
5. $n_{C_x} = n_{C_y}$ হলে, $x + y = n$

কাজ: 1. $(a + x)^n$, $n = 4, 5, 6$ এর জন্য উপরের উদাহরণের সত্যতা যাচাই কর; বিস্তৃতি নির্ণয়ে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্য নাও।

2. $n = 7, 8$ এর জন্য $\left(\dfrac{a}{x} - bx^2\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

নোট-১: $(a + x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ এর বিস্তৃতিতে বিজোড় স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি A এবং জোড় স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি B হলে (i) $A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n$
(ii) $4AB = (a + x)^{2n} - (a - x)^{2n}$

নোট-২: $(1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ এর বিস্তৃতিতে যুগ্ম ও অযুগ্ম স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকটি সমষ্টি 2^{n-1}.

পাঠ-৩
উদাহরণমালা

উদাহরণ-6. $\left(\frac{3x}{4}-\frac{4}{3x}\right)^5$ **এর বিস্তৃতি কর।**

সমাধান: $\left(\frac{3x}{4}-\frac{4}{3x}\right)^5$

$$=\left(\frac{3x}{4}\right)^5+{}^5C_1\left(\frac{3x}{4}\right)^{5-1}\left(-\frac{4}{3x}\right)+{}^5C_2\left(\frac{3x}{4}\right)^{5-2}\left(-\frac{4}{3x}\right)^2+{}^5C_3\left(\frac{3x}{4}\right)^{5-3}\left(-\frac{4}{3x}\right)^3+{}^5C_4\left(\frac{3x}{4}\right)^{5-4}\left(-\frac{4}{3x}\right)^4+\left(-\frac{4}{3x}\right)^5$$
$$=\frac{243}{1024}x^5-\frac{135}{64}x^3+\frac{15}{2}x-\frac{40}{3x}+\frac{320}{27x^3}-\frac{1024}{243x^5}$$

উদাহরণ-7. $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ **এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।**

[দি: বো: ১১; ব: বো: ১৬, ০৯; কু: বো: ০৮; সি: বো: ০৫; চ: বো: ০৭; রা: বো: ১৩, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১০]

সমাধান: মনে করি, $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদে x^{10} এর সহগ বিদ্যমান।

এখন, $(r+1)$ তম পদ $= {}^{11}C_r\,(2x^2)^{11-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}^{11}C_r.\,2^{11-r}.x^{22-2r}.\,(-1)^r.3^r.x^{-r} = (-1)^r.{}^{11}C_r.2^{11-r}.3^r.x^{22-3r}$

যেহেতু পদটিতে x^{10} আছে। সুতরাং, $22-3r=10$ বা, $3r=12$ $\therefore r=4$

$\therefore$ x^{10} এর সহগ $= (-1)^4\,{}^{11}C_4.2^{11-4}.3^4 = {}^{11}C_4.2^7.3^4$

উদাহরণ-8. $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ **এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটির মান বের কর।**

[রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৫; য: বো: ১৪, ১২, চ: বো: ১৪, ০৫; ব: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

সমাধান: মনে করি, $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত অর্থাৎ উক্ত পদে x^0 বিদ্যমান।

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r\,(2x)^{10-r}.\left(\frac{1}{6x}\right)^r = {}^{10}C_r\,2^{10-r}.\,x^{10-r}.\,6^{-r}.x^{-r}$

$= {}^{10}C_r.\,2^{10-r}.(3.2)^{-r}.\,x^{10-2r} = {}^{10}C_r\,2^{10-2r}.\,3^{-r}.\,x^{10-2r}$

যেহেতু, পদটিতে x^0 আছে। সুতরাং $10-2r=0$ বা, $2r=10$ $\therefore r=5$

$\therefore$ x বর্জিত $(5+1)$ তম পদের মান $= {}^{10}C_5\,2^{10-10}.3^{-5} = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.\frac{1}{3^5} = \frac{28.9}{3^5} = \frac{28.9}{9.27} = \frac{28}{27}$

উদাহরণ-9. $(1+x)^{44}$ **এর বিস্তৃতিতে 21 তম এবং 22 তম পদদ্বয় সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর।**

[ঢা: বো: ১৩, ১০; দি: বো: ১৩, ০৯; য: বো: ১৩; ব: বো: ১৩, ১১, ০৮, ০৫; চ: বো: ১৪, ১২, ০৮, ০৫; রা: বো: ০৫; সি: বো: ১৪, ০৭; কু: বো: ১৬, ০৫]

সমাধান: এখানে, $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$ তম পদ $= {}^{44}C_rx^r$

$\therefore$ 21 অর্থাৎ $(20+1)$ তম পদ $= {}^{44}C_{20}x^{20}$

এবং 22 অর্থাৎ $(21+1)$ তম পদ $= {}^{44}C_{21}x^{21}$

প্রশ্নানুসারে, ${}^{44}C_{21}x^{21} = {}^{44}C_{20}x^{20}$

বা, $x.\frac{44!}{21!\,23!} = \frac{44!}{20!\,24!}$

বা, $\frac{x}{21} = \frac{1}{24}$

বা, $x = \frac{21}{24}$ $\therefore x = \frac{7}{8}$

উদাহরণ-10. দেখাও যে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{n!}(-2)^n$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$

[ঢা: বো: ০৮; কু: বো: ১৫, ১৪; দি: বো: ১৪; য: বো: ১৬, ০৯; রা: বো: ১০, ০৭; চ: বো: ১৩, ১০; সি. বো. ১৫]

সমাধান: $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $(2n+1)$ টি যা বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং, এর মধ্যপদ হবে একটি অর্থাৎ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা $(n+1)$ তম পদ।

$\therefore (n+1)$ তম পদ $= {}^{2n}C_n\, x^{2n-n}\left(-\frac{1}{x}\right)^n$

$$= {}^{2n}C_n.x^n.(-1)^n.x^{-n} = (-1)^n.\,{}^{2n}C_n = (-1)^n.\frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}$$

$$= (-1)^n.\frac{2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 4.3.2.1}{n!\,n!}$$

$$= (-1)^n.\frac{1.2.3.4\ldots(2n-3)(2n-2)(2n-1)\,2n}{n!\,n!}$$

$$= (-1)^n.\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6\ldots(2n-2)\,2n\}}{n!\,n!}$$

$$= (-1)^n\frac{\{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)\}2^n\{1.2.3.4\ldots(n-1).n\}}{n!n!}$$

$$= \frac{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}\,\{1.2.3\ldots n\}}{n!\,n!}(-1)^n\,2^n$$

$$= \frac{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}\,n!}{n!\,n!}(-2)^n$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}(-2)^n$$

উদাহরণ-11. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$ হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots\cdots = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (ii) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 = \frac{2n!}{(n+1)!\,(n-1)!}$

সমাধান: আমরা জানি,

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots + C_nx^n = (1+x)^n \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

এবং $C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots\cdots + C_n = (x+1)^n \quad \cdots\cdots$ (ii)

$$\text{(i)} \times \text{(ii)} \Rightarrow (C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots\cdots)\,x^n + (C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \cdots\cdots)\,x^{n-1} + \cdots\cdots = (1+x)^{2n}$$

$$= 1 + {}^{2n}C_1x + \cdots\cdots + {}^{2n}C_{n-1}\,x^{n-1} + {}^{2n}C_nx^n + \cdots\cdots$$

x^n ও x^{n-1} এর সহগ সমীকৃত করে,

(i) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots\cdots = {}^{2n}C_n = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

এবং (ii) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \cdots\cdots = {}^{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(2n-n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$

পাঠ-৪, ৫ ও ৬

অনুশীলনী-5(A)

Type-I

1. নিচের দ্বিপদী রাশিগুলির বিস্তৃতি কর:

(i) $(1-ax)^6$ (ii) $\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{y}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{a^2}{2}-2b\right)^6$ (iv) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ (v) $(1-x+x^2)^4$

2. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে নিচের দ্বিপদী রাশিগুলির বিস্তৃতি নির্ণয় কর:

(i) $(3-x)^5$ [ঢাকা বোর্ড সৃজনশীল-৩(ক)] (ii) $(2+x^2)^5$ (iii) $\left(3x-\frac{y}{4}\right)^4$

3. দেখাও যে, $(1+\sqrt{x})^5-(1-\sqrt{x})^5 = 10\sqrt{x}+20x\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$.

Type-II

4. (i) $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে 7 তম পদটি নির্ণয় কর।

(ii) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{4}{3x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে 5 তম পদটি নির্ণয় কর।

(iii) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ এর বিস্তৃতিতে n তম পদটি নির্ণয় কর।

(iv) $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে শেষের ৩য় পদটি নির্ণয় কর।

5. (i) $\left(x^2+\frac{2y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ নির্ণয় কর।

(ii) $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১০]

(iii) $\left(x^3-\frac{1}{x^4}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{-18} এর সহগ নির্ণয় কর।

(iv) $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।

(v) $\left(2x-\frac{1}{x^2\sqrt{3}}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^{-2} এর সহগ নির্ণয় কর।

(vi) $\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^{12} সম্বলিত পদের সহগ বের কর।

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(vii) $(1+x+x^3)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর।

Type-III

6. (i) দেখাও যে, $(1+3x)^4(1-x)^3$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ 27.

(ii) দেখাও যে, $(1+x)^4(1+x^2)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ 60.

(iii) দেখাও যে, $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35. [কু: বো: ১১; য: বো: ০৬]

(iv) $(p+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে, p এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫]

(v) $(1+x)(a-bx)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ 0 হলে $\frac{a}{b}$ অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

[কুয়েট ১৩-১৪, ০৫-০৬; বুটেক্স ০১-০২, ৯৬-৯৭; বিআইটি ৯৬-৯৭]

(vi) $(a+x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 16 হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(ক)]

Type-IV

7. নিম্নলিখিত রাশিগুলির বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর:

(i) $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ [কু: বো: ১৩; য: বো: ০৭; ব: বো; ১৫]

(ii) $(1 + x)^p\left(1 + \frac{1}{x}\right)^q$; যেখানে p ও q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। [ঢা: বো: ১২; কু: বো: ০৭; রা: বো: ১১; চ: বো: ১১, ০৬; সি: বো: ১০; য: বো: ১৫]

(iii) $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ [বুয়েটেক্স ০৪-০৫, ঢা. বি. ১৫-১৬; ঢা: বো: ১৫, ১৪, ০৭; দি: বো: ১৬, ১২; সি: বো: ১১; ব: বো: ১২]

(iv) $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ [ব: বো: ০৬; রা: বো: ১৬; সি: বো: ০৬; দি: বো: ১০]

(v) $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ [বুয়েটেক্স ০৯-১০; কু: বো: ০৯]

(vi) $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{18}$ [কু: বো: ০৫; রা: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(vii) $\left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ [চুয়েট ০৮-০৯, বুয়েটেক্স ১২-১৩; ঢা: বো: ০৯; ব:বো: ১৪]

(viii) $(1 + 4x)^p\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^q$; যেখানে p ও q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। (ix) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ [চ: বো: ০৯]

(x) $\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)] (xi) $\left(2a - \frac{2}{a}\right)^{10}$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(খ)]

8. (i) $\left(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদ 405 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে y বর্জিত পদটি বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $n \in \mathbb{N}$ হলে দেখাও যে, $\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে সর্বদা একটি x বর্জিত পদ থাকবে। $n = 5$ হলে ঐ পদের মান নির্ণয় কর।

Type-V

9. (i) $\left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগদ্বয় সমান হলে (n একটি যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা), n এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েটে ০৬- ০৭; ঢা: বো: ১৬, ১১; ব: বো: ০৭; সি: বো: ১২, য: বো: ১০, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২]

(ii) $(1 + x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ ও x^{r+1} এর সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $(1 + x)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে $(2r + 4)$ তম পদের সহগ ও $(r - 2)$ তম পদের সহগ সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

(iv) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $(r + 3)$ তম পদের সহগের সমান হলে দেখাও যে, $2r = n - 2 (n \in \mathbb{N})$. [কু: বো: ০৬; চ: বো: ১৬]

(v) $(1 + x)^{14}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $(3r - 1)$ তম পদের সহগের সমান হলে r এর মান নির্ণয় কর।

(vi) $(4x + 3)^{34}$ এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান হলে, এ পদ দুইটির x এর ঘাত নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ); য: বো: ০৫]

(vii) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1}, x^r ও x^{r+1} এর সহগগুলি যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$

(viii) $n \in \mathbb{N}$ এবং $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 1 : 7 : 42 হলে, n এর মান নির্ণয় কর। [রা: বো: ১৪]

(ix) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ হতে বামদিকে ৪র্থ পদ নির্ণয় কর।

(x) $\beta = 0$ এবং α^5 ও α^{15} এর সহগ পরস্পর সমান হলে $\left(2z^2+\frac{R}{z^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে R এর মান নির্ণয় কর। যেখানে α ও β বাস্তব সংখ্যা এবং $z = \alpha + \beta i$. [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(xi) $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম ও $(r+2)$ তম পদের সহগ সমান হলে r এর মান নির্ণয় কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

(xii) $(1+2y)^{20}$ রাশিটির বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 11:20 । পদ দুইটি নির্ণয় কর। [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(xiii) $(1+x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদ নির্ণয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4 : 1 হবে।

Type-VI

10. (i) $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{21}{2}bx$ ও $\frac{189}{4}bx^2$ হলে a, b ও n এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৬; কু: বো: ১২; সি: বো: ১৩, ০৮; চ: বো: ০৬; রা: বো: ১২, ০৯; ব: বো: ০৫; য: বো: ১১]

(ii) $(a+2x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{10}{3}bx, \frac{40}{9}bx^2$ হলে a, b, n এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে যদি a, b, c, d যথাক্রমে ৬ষ্ঠ, ৭ম, ৮ম, ৯ম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{4a}{3c}$

(iv) $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হলে a এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ১২-১৩]

Type-VII

11. নিম্নলিখিত রাশির বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর:

(i) $\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^8$ (ii) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ [কুয়েট ০৪-০৫; সি: বো: ০৯] (iii) $\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ (iv) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{17}$ (v) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{17}$

(vi) $\left(2-\frac{3}{x}\right)^{12}$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৩(ক)]

(vii) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{12}$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(ক)]

12. (i) যদি k যে কোনো বাস্তব সংখ্যা এবং $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ 1120 হয়, তবে k এর মান নির্ণয় কর।

(ii) দেখাও যে, $(1+2y)^{2n}$ রাশিটির বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান $\frac{1.3.5 \,.....\, (2n-1)}{n!}.\, 2^{2n}.\, y^n$. যেখানে $n \in \mathbb{Z}$. [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

(iii) দেখাও যে, $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{n!} 2^n x^n$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

(iv) দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{n!}$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

(v) দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান $\frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{n!}.\, 2^n$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $\left(2-\frac{3}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির পার্থক্য নির্ণয় কর যখন $x = 1$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(vii) n এর জন্য কোন শর্ত আরোপ করলে $\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)^n$ এর একটি মধ্যপদ থাকবে? $n = 21$ হলে মধ্যপদ বা (পদসমূহের) মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

Type-VIII

13. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots \cdots + C_nx^n$ হলে নিম্নোক্ত সম্পর্কগুলি প্রমাণ কর:

(i) $C_0 + C_2 + C_4 + \cdots \cdots = C_1 + C_3 + C_5 + \cdots \cdots = 2^{n-1}$

(ii) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots \cdots + C_nC_0 = \frac{(2n)!}{n!n!}$

(iii) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots \cdots + (n+1)\,C_n = 2^{n-1}(2+n)$

(iv) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots \cdots + nC_n = n.2^{n-1}$

14. যদি $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে S_1 এবং S_2 যথাক্রমে বিজোড় ও জোড় স্থানের পদগুলির সমষ্টি হয় তবে দেখাও যে, $(1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

উত্তরমালা

1. **(i)** $1 - 6ax + 15a^2x^2 - 20a^3x^3 + 15a^4x^4 - 6a^5x^5 + a^6x^6$ **(ii)** $\frac{x^4}{81} + \frac{8x^3}{27y} + \frac{8x^2}{3y^2} + \frac{32x}{3y^3} + \frac{16}{y^4}$

(iii) $\frac{1}{64}a^{12} - \frac{3}{8}a^{10}b + \frac{15}{4}a^8b^2 - 20a^6b^3 + 60a^4b^4 - 96a^2b^5 + 64b^6$

(iv) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

(v) $1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8$

2. **(i)** $243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$ **(ii)** $32 + 80x^2 + 80x^4 + 40x^6 + 10x^8 + x^{10}$

(iii) $81x^4 - 27x^3y + \frac{27}{8}x^2y^2 - \frac{3}{16}xy^3 + \frac{y^4}{256}$

4. **(i)** $\frac{10500}{x^3}$ **(ii)** $\frac{40095}{256}x^4$ **(iii)** $(-1)^{n-1}\frac{(3n)!\,x^3}{(n-1)!\,(2n+1)!}$ **(iv)** $\frac{4375}{x^4}$

5. **(i)** $3360\,y^4$ **(ii)** $110565a^4$ **(iii)** -5005 **(iv)** ${}^{20}C_{10}\,2^{10}$ **(v)** $\frac{4480}{3}$ **(vi)** 32248320 **(vii)** 378

6. **(iv)** ± 2 **(v)** $\frac{5}{8}$ **(vi)** 4

7. **(i)** 7 তম পদ, 924 **(ii)** $(q+1)$ তম পদ, $\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$ **(iii)** 5 তম এবং 495 **(iv)** 10 তম পদ, -1760 **(v)** 6 তম পদ, $-{}^{15}C_5 2^5.3^{10}$ **(vi)** 13 তম এবং 18564 **(vii)** 5 তম পদ এবং 840 **(viii)** $(q+1)$তম পদ, $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ **(ix)** $(n+1)$ তম পদ, $(-1)^n.\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ **(x)** ১ম পদ; 32768; **(xi)** 6 তম পদ, -258048

8. **(i)** ± 3 **(ii)** 7 তম পদ এবং $\frac{105x^{10}}{32}$ **(iii)** 252

9. **(i)** 55 **(ii)** n **(iii)** 6 **(v)** 4 **(vi)** 19 এবং 20 **(viii)** 55 **(ix)** $-220x^{-6}$ **(x)** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(xi)** 8

(xii) $T_{11} = {}^{20}C_{10}(2y)^{10}$ এবং $T_{12} = {}^{20}C_{11}(2y)^{11}$ **(xiii)** 20-তম এবং 21-তম পদ অথবা 5-তম এবং 6-তম পদ

10. **(i)** 2, 128 ও 7 **(ii)** 3, 3^5 এবং 5 **(iv)** 5

11. **(i)** $\frac{2835}{8}x^4$ **(ii)** ${}^{2n+1}C_n\frac{a}{x}$ ও ${}^{2n+1}C_{n+1}\frac{x}{a}$ **(iii)** $-{}^{10}C_5.\left(\frac{3}{2}\right)^5x^5$ **(iv)** ${}^{17}C_8\left(\frac{x}{y}\right)$ ও ${}^{17}C_9\left(\frac{y}{x}\right)$ **(v)** $\frac{-24310}{x}$, $24310x$

(vi) ${}^{12}C_6\,2^6\,.\,3^6\,.\,x^{-6}$ **(vii)** ${}^{12}C_6\,.\,2^6 3^6 x^6$

12. **(i)** ± 2 **(vi)** 9006940800 **(vii)** জোড়; $\frac{705432}{x}$, $176358x$

পাঠ-৭

5.5 অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি (Binomial expansion in infinite series)

যখন n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হয় তখন দ্বিপদী সহগগুলি $^nC_0$, $^nC_1$, $^nC_2$, ..., ^nC_r, ... ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা যায় না কারণ, প্রতীকগুলিতে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নির্দেশ করে। ফলে এক্ষেত্রে ^nC_r এর পরিবর্তে $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$ লেখা হয়।

আবার, r একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং n একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ বলে সাধারণ পদের সহগ অর্থাৎ, $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$ এর লবের কোনো উৎপাদক শূন্য হয় না। ফলে n দ্বিপদী ধারাটির কোনো পদের সহগই বিলুপ্ত হয় না এবং দ্বিপদী ধারাটি অনন্ত হয়।

অধিকন্তু, $(a+x)^n$ (n ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ) এর বিস্তৃতির সূত্রটি বৈধ হবে যদি প্রথম পদ $a = 1$ এবং দ্বিতীয় পদ x এর পরম মান, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়।

সুতরাং n ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাংশ হলে,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\ldots$$

উল্লেখ্য যে, $(a+x)^n$ এর ক্ষেত্রে দুইটি অবস্থার সৃষ্টি হবে–

(i) $|a| > |x|$ হলে $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1$, তখন $(a+x)^n = a^n\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$

(ii) $|a| < |x|$ হলে $\left|\dfrac{x}{a}\right| > 1$ বা $\left|\dfrac{a}{x}\right| < 1$, তখন $(a+x)^n = x^n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$.

এমতাবস্থায়, উল্লেখিত প্রমিত বা আদর্শ আকারে প্রকাশ করে বিস্তৃত করতে হবে।

5.5.1 সাধারণ পদ

যেহেতু $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি সর্বদা একই রূপ, সুতরাং n এর যেকোনো মানের জন্য $(r+1)$ তম পদই সাধারণ পদ।

$\therefore$ সাধারণ পদ $= (r+1)$ তম পদ, $T_{r+1} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$.

5.6 অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতির অভিসৃতি (Convergency of infinite binomial series)

আমরা জানি, n এর মান ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হলে,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r \qquad \cdots\cdots \text{(i)}$$

দ্বিপদী ধারাটি অনন্ত। ধারাটিকে অভিসারী বলা হবে যদি এটির যোগফল একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা হয়। $n = -1$ হলে গুণোত্তর ধারার যোগফলের সূত্র হতে পাই,

(i) নং ধারার প্রথম r সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \dfrac{1-x^r}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^r}{1-x}$; যখন $|x| < 1$, এখন $r \to \infty$ হলে $\dfrac{x^r}{1-x} \to 0$. এক্ষেত্রে ধারার যোগফল $= \dfrac{1}{1-x}$ বা $(1-x)^{-1}$

কিন্তু, $|x| > 1$ হলে $\dfrac{x^r}{1-x}$ এর মান কখনও শূন্য হবে না এবং সেক্ষেত্রে ধারাটির যোগফল $(1-x)^{-1}$ দ্বারা প্রকাশ করা যাবে না। এক্ষেত্রে ধারাটি অপসারী হবে।

সুতরাং n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হলে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিটি অভিসারী প্রমাণ করা যায় যদি $|x| < 1$ হয় এবং এক্ষেত্রে দ্বিপদী উপপাদ্য সত্য হবে।

যখন $|x| < 1$ বা $-1 < x < 1$, তখন দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলি পাওয়া যায় যা বিভিন্ন গাণিতিক বিশ্লেষণে ব্যবহৃত হয়।

(i) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \cdots + x^r + \cdots \cdots$

(ii) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \cdots + (-1)^r x^r + \cdots \cdots$

(iii) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \cdots + (r+1)\, x^r + \cdots \cdots$

(iv) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \cdots + (-1)^r (r+1)\, x^r + \cdots \cdots$

(v) $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \cdots + \dfrac{(r+1)(r+2)}{2} . x^r + \cdots \cdots$

(vi) $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots \cdots + (-1)^r \dfrac{(r+1)(r+2)}{2} \cdot x^r + \cdots \cdots$

(vii) $(1-x)^{-n}$ হলে সাধারণ পদ $T_{r+1} = \dfrac{n(n+1)(n+2) \ldots . (n+r-1)}{r!} x^r$

(viii) $(1-x)^n$ হলে সাধারণ পদ $T_{r+1} = \dfrac{(-1)^r n(n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1)}{r!} x^r$

(ix) $(1+x)^{-n}$ হলে সাধারণ পদ $T_{r+1} = \dfrac{(-1)^r n(n+1)(n+2) \ldots . (n+r-1)}{r!} x^r$

কিছু গুরুত্বপূর্ণ অসীম ধারার বিস্তৃতি:

a. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\ldots.$

b. $e^{-x} = 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\ldots..$

c. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots\ldots = \sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \dfrac{x^r}{r}$

d. $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots . = -\sum\limits_{r=1}^{\infty} \dfrac{x^r}{r}$

e. $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\ldots.$

f. $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1-x}{1+x} = -\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \ldots\ldots.\right)$

g. $\dfrac{1}{2}\left(e + \dfrac{1}{e}\right) = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{6!} + \ldots..$

h. $\dfrac{1}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right) = 1 + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{7!} + \ldots\ldots..$

কাজ: $x = 2$ এর জন্য (i) নং বিস্তৃতির ক্ষেত্রে কী ঘটে? ব্যাখ্যা কর। যদি এটি সম্ভব না হয়, তবে এর কারণ ব্যাখ্যা কর।

$x = \pm\dfrac{1}{2}$ এর জন্য কী ঘটে?

5.6.1 অসীম ধারায় অভিসৃতি যাচাইয়ের জন্য অনুপাত ও তুলনামূলক পরীক্ষণ

(Ratio and Comparison test for examine the convergence of an infinite series)

কোনো অসীম ধারার অভিসৃতি (Convergence) পরীক্ষা করার জন্য বহুলভাবে ব্যবহৃত দুইটি পরীক্ষণ (test) ও পর্যবেক্ষণ নিচে বর্ণনা দেওয়া হলো—

(i) D' Alembert অনুপাত পরীক্ষণ (D' Alembert Ratio test): যদি $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_r + \cdots \cdots$ একটি অসীম ধারা এবং $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ হয়, তবে প্রদত্ত ধারাটি (a) অভিসৃত (Convergent) হবে, যদি $l < 1$.
(b) অপসৃত হবে যদি $l > 1$ এবং (c) কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে না যদি $l = 1$.

(ii) তুলনামূলক পরীক্ষণ (Comparison test): যদি Σu_n ও Σv_n দুইটি ধনাত্মক পদের ধারা হয় এবং $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ এর মান অশূন্য সসীম সংখ্যা হয় (finite and non-zero) তাহলে Σu_n ও Σv_n উভয়েই অভিসৃত বা উভয়েই অপসৃত হবে। অর্থাৎ একটি অভিসৃত হলে অপরটিও অভিসৃত হবে এবং বিপরীত-ক্রমে (vice-versa)।

(iii) P সিরিজ পর্যবেক্ষণ: কোন ধারার n তম পদ $\frac{1}{n^p}$ হয় তবে ধারাটি অভিসৃত হবে যদি $p > 1$ হয় এবং অপসৃত হবে যদি $p \le 1$.

উদাহরণ-1. যদি $|x| < 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ বিস্তার করে যে দ্বিপদী ধারাটি পাওয়া যায় তা অভিসৃত (Convergent)।

সমাধান: $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ এর অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = \{1+(-x)\}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots \cdots$$

তাহলে, অসীম (infinite) ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতিটি হলো:

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots \cdots$$

মনে করি, $r \to \infty$ এবং u_r ও u_{r+1} দ্বারা যথাক্রমে ধারাটির r-তম ও $(r+1)$ তম পদ সূচিত করা হলো।

$$\therefore u_r = (-1)^{r-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}-r+2\right)}{(r-1)!}x^{r-1} \qquad \cdots\cdots (i)$$

$$\text{এবং } u_{r+1} = (-1)^{r}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}x^{r} \qquad \cdots\cdots (ii)$$

এখন (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{-\left(\frac{1}{2}-r+1\right)(r-1)!}{r!}x = \frac{-\left(\frac{3}{2}-r\right)}{r}x = -\left(\frac{3}{2r}-1\right)x$$

$$\therefore \lim_{r\to\infty} \frac{u_{r+1}}{u_r} = x < 1, \text{ কারণ দেওয়া আছে } |x| < 1$$

সুতরাং প্রদত্ত ধারাটি অভিসৃত (convergent)।

কাজ: যদি $|x| > 1$ হয়, তবে $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ বিস্তার করে যে দ্বিপদী ধারাটি পাওয়া যায় তা অভিসৃত কি না ব্যাখ্যা কর এবং তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

পাঠ-৮

5.7 আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের মাধ্যমে দ্বিপদী বিস্তৃতি

(Binomial expansion by using partial fraction)

যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়। ধরা যাক, একটি ভগ্নাংশ $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$,

একে লেখা যায়, $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$

এখানে প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। অর্থাৎ ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয়েছে। একটি ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের পদ্ধতি সম্পর্কে উচ্চ মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র বইয়ের 10.6.1 নং অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে।

লবকে N(x) ও হরকে D(x) ধরলে উভয়ই x চলকের বহুপদী এবং লব N(x) এর ঘাত বা degree হর D(x) এর ঘাত অপেক্ষা ছোট হয়, তাহলে ভগ্নাংশটি **প্রকৃত ভগ্নাংশ** (Proper fraction) বলা হয়। যদি লব N(x) এর ঘাত বা degree হর D(x) এর ঘাতের বা degree এর সমান অথবা তা অপেক্ষা বড় হলে ভগ্নাংশটিকে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** (Imporper fraction) বলা হয়।

$\frac{N(x)}{D(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে প্রত্যেকটি প্রকৃত ভগ্নাংশকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তার করে একত্র করলে পূর্ণাঙ্গ ভগ্নাংশ $\frac{N(x)}{D(x)}$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতি পাওয়া যায়।

উদাহরণ-2. $\frac{3-2x}{(1-x)(2-x)}$ **এর n-তম পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\frac{3-2x}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} = (1-x)^{-1} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{2^n} + \cdots\cdots\right)$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + \cdots\cdots\right)$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2^2}\right)x + \left(1+\frac{1}{2^3}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2^4}\right)x^3 + \cdots\cdots + \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + \cdots\cdots$

$= \frac{3}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{17}{16}x^3 + \cdots\cdots + \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}x^n + \cdots\cdots$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: পাঠ ৮ এর আলোকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সমাধানের জন্য কিছু বিশেষ কৌশল নিম্নে দেয়া হলো:

1. $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= \frac{a^n - b^n}{a-b}$
2. $\frac{1}{(1-px)(1-qx)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q}$
3. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ এর বিস্তৃতিতে x^m সহগ $= 4m$.
4. $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ $= 2m+1$
5. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^m সহগ $= (m+1)^2$
6. $\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ $= 2$

কাজ: $\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

উদাহরণ-3. নিম্নোক্ত দ্বিপদী রাশিদ্বয়ে x^4 সংযুক্ত পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি ও তারা কোন ব্যবধিতে অভিসৃত তা নির্ণয় কর।

(a) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ (b) $(1-2x)^{-3}$

সমাধান: আমরা জানি, $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots \cdots; |x| < 1$ $\cdots \cdots$ (i)

(a) (i) নং সমীকরণে $n = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{3x^3}{6.2^3} - \frac{(3)(5)}{(2^4)\,4!}x^4 + \cdots \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots \cdots$$ এবং অভিসৃতির ব্যবধি $|x| < 1$

(b) (i) নং সমীকরণে এ n এর পরিবর্তে -3 এবং x এর পরিবর্তে $-2x$ বসিয়ে পাই,

$$(1-2x)^{-3} = 1 + (-3)(-2x) + \frac{(-3)(-4)}{2!}(-2x)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}(-2x)^3 + \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{4!}(-2x)^4 + \cdots$$

$$= 1 + 6x + 24x^2 + \frac{(4)(5)}{2!}2^3x^3 + \frac{(5)(6)}{2!}2^4x^4 + \cdots \cdots$$

$$= 1 + 6x + 24x^2 + 80x^3 + 240x^4 + \cdots \cdots$$

অভিসৃতির ব্যবধি: $|2x| < 1$ বা, $-1 < 2x < 1$ বা, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ অর্থাৎ $|x| < \frac{1}{2}$

উদাহরণ-4. $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $x = 0.02$ বসিয়ে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x)^3}{3!} + \cdots \cdots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots \cdots$$

এ বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি $|x| < 1$ অর্থাৎ $-1 < x < 1$ হয়; কাজেই $x = 0.02$ এর জন্যও বিস্তৃতিটি বৈধ।

$$\therefore (1-0.02)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{0.02}{2} - \frac{(0.02)^2}{8} - \frac{(0.02)^3}{16} - \cdots \cdots$$

বা, $\sqrt{\frac{98}{100}} = 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 - \cdots \cdots$

বা, $\frac{7}{10}\sqrt{2} = 0.9899495 \cdots \cdots$

বা, $\sqrt{2} = \frac{9.899495}{7} = 1.4142136 \cdots \cdots$

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421$ (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

কাজ: $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $x = 0.08$ বসিয়ে 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{3}$ এর মান নির্ণয় কর অতঃপর ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সত্যতা যাচাই কর।

পাঠ-৯
উদাহরণমালা

উদাহরণ-5. প্রমাণ কর যে, $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$, যেখানে $|x| < \frac{1}{2}$

[ঢা: বো: ১৫, ১৪, ০৭; চ: বো: ১১, ০৯; কু: বো: ১৩, ০৮; ব: বো: ১১; সি: বো: ১৬, ১০; মাদ্রাসা বো: ১২]

সমাধান: $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-2x)^r$$

$$= \frac{(-1)^r\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\left(r-1+\frac{1}{2}\right)}{r!}(-1)^r.\,2^r.\,x^r$$

$$= \frac{(-1)^{2r}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\cdots\left(\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}\,.\,2^r\,.\,x^r$$

$$= (-1)^{2r}.\frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{2^r.r!}.2^r.\,x^r$$

$$= \frac{\{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)\}\,\{2.4.6.8\cdots\cdots2r\}}{r!(2.4.6\cdots\cdots2r)}x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4\cdots\cdots2r}{r!\,2^r(1.2.3\cdots\cdots r)}x^r = \frac{(2r)!}{2^r.r!.r!}x^r = \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}x^r$$

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}$

উদাহরণ-6. $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)} \equiv \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx}$ ...... (i)

কভার-আপ (Cover-up rule) নিয়ম প্রয়োগ করে A ও B এর মান নির্ণয় করি–

যখন $x = \frac{1}{a}$ তখন $A = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{1}{a-b}$;

যখন $x = \frac{1}{b}$ তখন $B = \frac{\frac{1}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \frac{1}{b-a}$

(i) নং এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{\frac{1}{a-b}}{1-ax} + \frac{\frac{1}{b-a}}{1-bx}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{1-ax} + \frac{-1}{1-bx}\right) = \frac{1}{a-b}\{(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}\}$$

$$= \frac{1}{a-b}\{(1+ax+a^2x^2+\ldots+a^nx^n+\ldots) - (1+bx+b^2x^2+\ldots+b^nx^n+\ldots)\}$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= \frac{a^n-b^n}{a-b}$

উদাহরণ-7. যদি $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots \infty$ হয়, তবে x কে y এর শক্তির উর্ধ্বক্রম ধারায় প্রকাশ কর।
[ঢা: বো: ০৮, ০৫; রা: বো: ১০; দি: বো: ১৪, ০৯; ব: বো: ০৮; য: বো: ১২, ০৬; সি: বো: ০৭]

সমাধান : দেওয়া আছে, $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots \cdots$

বা, $-y = -x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \cdots$ বা, $1 - y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \cdots$

বা, $1 - y = (1 + x)^{-1}$ বা, $1 - y = \dfrac{1}{1+x}$

বা, $1 + x = \dfrac{1}{1-y} = (1-y)^{-1}$ বা, $1 + x = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \cdots \cdots$

$\therefore\ x = y + y^2 + y^3 + y^4 + \cdots \cdots$

উদাহরণ-8. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-3x}}$ কে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং x এর মান কত হলে ঐ বিস্তৃতি বৈধ হবে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-3x}} = \dfrac{1}{(8-3x)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\left\{8\left(1 - \dfrac{3x}{8}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{8^{\frac{1}{3}}\left(1 - \dfrac{3x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3x}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ $\left[8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2\right]$

তাহলে, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-3x}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3x}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3x}{8}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(-\frac{3x}{8}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}\left(-\frac{3x}{8}\right)^3 + \cdots \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}x^2 + \frac{7}{768}x^3 + \cdots \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}x^2 + \frac{7}{1536}x^3 + \cdots \cdots$$

এখন, এটি x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে বিস্তৃতিটি বৈধ হবে যদি $\left|\dfrac{3x}{8}\right| < 1$

বা, $\dfrac{3}{8}|x| < 1$ বা, $|x| < \dfrac{8}{3}$

অর্থাৎ $-\dfrac{8}{3} < x < \dfrac{8}{3}$

উদাহরণ-9. যদি $|y| < 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1-y)^{\frac{1}{2}}$ বিস্তার করে যে দ্বিপদী ধারাটি পাওয়া যায় তা অভিসৃত (Convergent)। [দি. বো. ১৩; সি. বো. ১২, ০৬; য. বো. ১১, ০৮, ০৫; রা. বো. ১১, ০৮; কু. বো. ১১; ঢা. বো. ১০; ব. বো. ০৯; মা. বো. ০৯]

সমাধান: $(1-y)^{\frac{1}{2}}$ এর অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি

$$(1-y)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}y^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}y^3 + \cdots \cdots$$

$$+ (-1)^r \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \cdots \left(\frac{1}{2} - r + 1\right)}{r!}y^r + \cdots \cdots$$

মনে করি, $r \to \infty$ এবং u_r ও u_{r+1} দ্বারা যথাক্রমে ধারাটির r তম ও (r + 1) তম পদ সূচিত করা হলো।

$$\therefore\ u_r = (-1)^{r-1} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \cdots \left(\frac{1}{2} - r + 2\right)}{(r-1)!}y^{r-1} \cdots \cdots \text{(i)}$$

এবং $u_{r+1} = (-1)^r \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} y^r \ldots\ldots$ (ii)

এখন, (ii) কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{-\left(\frac{1}{2}-r+1\right)(r-1)!}{r!} y = \frac{-\left(\frac{3}{2}-r\right)}{r} y = -\left(\frac{3}{2r}-1\right) y$$

$$\therefore \lim_{r\to\infty} \left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right| = |y| < 1$$

সুতরাং প্রদত্ত ধারাটি অভিসৃত (convergent)।

উদাহরণ-10. $f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $h(x) = ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x$ দুটি বহুপদী রাশি।

ক. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদসমূহ (মান) নির্ণয় কর।

খ. $f(x) = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $h(x) = 0$ এর মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. $a = 1, b = -3, c = 2$ হলে $\frac{5x-7}{f(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা $= 10 + 1 = 11$ যা একটি বিজোড় সংখ্যা।

অতএব মধ্যপদ হবে একটি।

অর্থাৎ মধ্যপদটি $\left(\frac{10}{2}+1\right) = (5+1) = 6$ তম পদ

$\therefore$ 6 তম পদ $= {}^{10}C_5 \left(\frac{x}{y}\right)^{10-5} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^5 = {}^{10}C_5 \cdot \frac{x^5}{y^5} \cdot \frac{y^5}{x^5} = {}^{10}C_5 = 252$

খ. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

বা, $\frac{ac(x^2+1)}{a^2} - \frac{1}{a^2}(b^2 - 2ac)x = 0$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{c}{a}(x^2+1) - \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)x = 0$

বা, $\frac{c}{a}(x^2+1) - \left\{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right\}x = 0$

বা, $\alpha\beta(x^2+1) - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + \alpha\beta - \alpha^2 x - \beta^2 x = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x + \alpha\beta - \beta^2 x = 0$

বা, $\alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

বা, $(\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0$

$\therefore$ $\beta x - \alpha = 0$ অথবা, $\alpha x - \beta = 0$

বা, $x = \frac{\alpha}{\beta}$ বা, $x = \frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a = 1, b = -3, c = 2$ হলে $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$\therefore \frac{5x-7}{f(x)} = \frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-7}{x^2-2x-x+2} = \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$

এখন, $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{5-7}{(x-1)(1-2)} + \frac{10-7}{(x-2)(2-1)}$ [Cover-up Rule এর সাহায্যে]

$= \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2}{-(1-x)} + \frac{3}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = -2(1-x)^{-1} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}$

এখন, $-2(1-x)^{-1} = -2(1 + x + x^2 + \dots\dots + x^n + \dots\dots)$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= -2$

এবং $-\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = -\frac{3}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots\dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\dots\right)$

x^n এর সহগ $= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{-3}{2^{n+1}}$

$\therefore \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $= -2 - \frac{3}{2^{n+1}} = -\left(2 + \frac{3}{2^{n+1}}\right)$

উদাহরণ-11. (i) $\left(3x - \frac{5}{x^2}\right)^{15}$ (ii) $\left(1 - \frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

ক. x-এর কোন মানের জন্য $\frac{3x^2 + 5x + 4}{(2+x)^2 (3+x)}$ এর বিস্তৃতি বৈধ?

খ. (i) এ বর্ণিত দ্বিপদীটির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

গ. (ii) এ বর্ণিত দ্বিপদীটিকে x-এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রমানুসারে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^3} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{5^3} - \dots\dots = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

সমাধান:

ক. $\frac{1}{(2+x)^2} = \frac{1}{4\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ বা, $|x| < 2$ বা, $-2 < x < 2$

আবার, $\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে যদি $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ বা, $|x| < 3$ বা, $-3 < x < 3$

$\therefore$ x এর বৈধ ব্যবধি $= \{-2 < x < 2\} \cap \{-3 < x < 3\} = -2 < x < 2 = |x| < 2$

খ. (i) হতে পাই, প্রদত্ত বিস্তৃতি $\left(3x - \frac{5}{x^2}\right)^{15}$

যেহেতু 15 একটি বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং মোট পদ সংখ্যা হবে 16টি। যা একটি জোড় সংখ্যা।

সুতরাং মধ্যপদ থাকবে দুইটি।

পদ দুইটি হলো $\left(\frac{15+1}{2}\right)$ তম পদ ও $\left(\frac{15+1}{2} + 1\right)$ তম পদ = 8-তম পদ ও 9-তম পদ।

$\therefore$ 8-তম পদ $= {}^{15}C_7 (3x)^{15-7} \left(\frac{-5}{x^2}\right)^7 = {}^{15}C_7\, 3^8 x^8 (-1)^7 . \frac{5^7}{x^{14}} = \frac{-6435 \times 3^8 \times 5^7}{x^6}$ **(Ans.)**

9-তম পদ $= {}^{15}C_8 (3x)^{15-8} \left(\frac{-5}{x^2}\right)^8 = {}^{15}C_8\, 3^7 . x^7 (-1)^8 \frac{5^8}{x^{16}} = \frac{6435 \times 3^7 \times 5^8}{x^9}$ **(Ans.)**

গ. (ii) এ প্রদত্ত রাশি, $\left(1-\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{1+\left(-\frac{x}{5}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{-x}{5}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{-x}{5}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{-x}{5}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\left(\frac{-x}{5}\right)^4+\ldots\ldots$$

$$= 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{5}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}\,\frac{x^2}{5^2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2.3}\,\frac{x^3}{5^3}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2.3.4}\cdot\frac{x^4}{5^4}-\ldots\ldots\ldots$$

এখন, $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{2^2}{5^2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2.3}\cdot\frac{2^3}{5^3}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2.3.4}\cdot\frac{2^4}{5^4}-\ldots\ldots$$

বা, $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{5^3}-\ldots\ldots$

$\therefore\ 1-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{5^3}-\ldots\ldots = \sqrt{\frac{3}{5}}$

উদাহরণ-12. $f(x) = ax^2 + bx + c$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। *[অধ্যায়-৩, ৪ ও ৫ এর সমন্বয়ে]*

ক. $11\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. $a = 1, b = -2p, c = p^2 - r^2$ ও $f(x) = 0$ এর দুটি মূল α, β হলে $\alpha + \beta$ ও $\alpha - \beta(\alpha > \beta)$, মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. $a = 4, b = -\frac{4}{5x}, c = \frac{1}{25x^2}$ হলে $\{f(x)\}^7$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. $11\sqrt{-1} = 11i = \frac{11}{2}.\ 2i = \frac{11}{2}(1-1+2i) = \frac{11}{2}(1+2i+i^2) = \frac{11}{2}(1+i)^2$

$\therefore \sqrt{11\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}\,(1+i)$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c;\ a = 1, b = -2p$ এবং $c = p^2 - r^2$

এবং $f(x) = 0$ হলে সমীকরণ হবে $x^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0$, যা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

মনে করি, $x^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β যেখানে, $\alpha > \beta$

$\therefore \alpha + \beta = -(-2p) = 2p \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $\alpha\beta = p^2 - r^2$

এখন $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (2p)^2 - 4(p^2 - r^2) = 4p^2 - 4p^2 + 4r^2 = 4r^2$

$\therefore \alpha - \beta = 2r \ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii) $[\because \alpha > \beta]$

$\alpha + \beta$ ও $\alpha - \beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হলো, $x^2 - (\alpha+\beta+\alpha-\beta)x + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = 0$

বা, $x^2 - (2p + 2r)x + 2p.2r = 0$ বা, $x^2 - 2(p + r)x + 4pr = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - 2(p + r)x + 4pr = 0$

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a = 4, b = \frac{-4}{5x}$ এবং $c = \frac{1}{25x^2}$

$\therefore f(x) = 4x^2 - \frac{4}{5x}.\ x + \frac{1}{25x^2} = 4x^2 - \frac{4}{5} + \frac{1}{25x^2} = (2x)^2 - 2.2x.\frac{1}{5x} + \left(\frac{1}{5x}\right)^2 = \left(2x - \frac{1}{5x}\right)^2$

$\therefore \{f(x)\}^7 = \left(2x - \frac{1}{5x}\right)^{14}$

মনে করি, $\left(2x - \frac{1}{5x}\right)^{14}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore T_{r+1} = {}^{14}C_r\,(2x)^{14-r}.\left(-\frac{1}{5x}\right)^r = {}^{14}C_r\,2^{14-r}.\,x^{14-r}.(-1)^r.\frac{1}{5^r}.\,x^{-r}$

$= (-1)^r\,{}^{14}C_r\,2^{14-r}.\frac{1}{5^r}.\,x^{14-r-r} = (-1)^r\,{}^{14}C_r\,2^{14-r}.\frac{1}{5^r}.\,x^{14-2r}$

যেহেতু $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত
সেহেতু $x^{14-2r} = x^0$ বা, $14 - 2r = 0$ বা, $2r = 14 \therefore r = 7$
$\therefore r + 1 = 7 + 1 = 8$ তম পদ x বর্জিত।

$\therefore x$ বর্জিত পদ $= (-1)^7\,{}^{14}C_7\,2^{14-7}.\frac{1}{5^7} = -\,{}^{14}C_7\,\frac{2^7}{5^7}$

পাঠ-১০, ১১ ও ১২

? অনুশীলনী-5(B)

Type-I

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি কর:
   (i) $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ **(ii)** $(2+3x)^{-4}$ **(iii)** $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$
2. **(i)** $(1-3x)^{-1}$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(ক)]
   (ii) $(4+3x)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$ কে x^2 সম্বলিত পদ পর্যন্ত x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম ধারায় প্রকাশ কর।
   (iii) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতি x^3 যুক্ত পদ পর্যন্ত বের কর।
   (iv) $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি সরলতম আকারে প্রকাশ কর এবং এর সাহায্যে প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।
   (v) $\left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$; $|x| < 8$ কে x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে 5 তম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,
   $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24} - \dots\dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [ব: বো: ১৪]
   (vi) x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1-\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$ কে 5 তম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,
   $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12} - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18} - \dots\dots = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Type-II

3. **(i)** $(1-x)^{-1} - 2(1-2x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি বের কর। [রা: বো: ১৩]
   (ii) $\frac{1+x}{\sqrt{1-2x}}$ রাশিটির বিস্তৃতি হতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]
   (iii) $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। [কু: বো: ১৪; রা: বো: ১৬, ১৪; ব: বো: ১৩]
   (iv) $\frac{x}{1-4x+3x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]
   (v) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। [কু: বো:, দি: বো: ১০; চ: বো: ১৩, ১০; সি: বো: ০৮; ব: বো: ০৭]
   (vi) $(42x^2 - 13x + 1)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(ক)]
   (vii) দেখাও যে, $(1-5x+6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $3^{r+1} - 2^{r+1}$ [বুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ১৬, ১২, ০৯, ০৬; রা: বো: ০৯, ০৬; দি: বো: ১২, চ: বো: ০৭; কু: বো: ১৬, ০৬; সি: বো: ১৪, ১১, ০৫; ব: বো: ১৬; য: বো: ১৩, ১০; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(viii) প্রমাণ কর যে, $(1-9x+20x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ $5^{10}-4^{10}$ । [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(ix) দেখাও যে, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $4n$. [বুয়েট ১১-১২]

(x) দেখাও যে $(1-8x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!2^r}{(r!)^2}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(xi) দেখাও যে, $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$. [ঢা: বো: ১০; দি: বো: ১৩; কু: বো; ১১; ব: বো: ০৯; য: বো: ১১, ০৮, ০৫; রা: বো: ১১, ০৮; সি: বো: ১২, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৩, ০৯]

(xii) দেখাও যে, $(1-12x)^{-\frac{1}{2}}$ বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!.3^r}{(r!)^2}$.
[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

(xiii) $(4x+3)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করে বিস্তৃতিটির পঞ্চম পদটিও বের কর।
[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

(xiv) দেখাও যে, $(1+x)^n/(1-x)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n; $(n \in \mathbb{N})$ [কু: বো: ১২; য: বো: ১৫]

(xv) $(1-x+x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

(xvi) $\frac{3x^2-2}{x+x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ নির্ণয় কর।

(xvii) $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। [সি: বো: ০১]

(xviii) $(1+x+x^2+\cdots\cdots)^{\frac{2}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

(xix) $g(p)=1-\frac{1}{2}p$ হলে, দেখাও যে, $\{g(4x)\}^{-\frac{1}{2}}$ বিস্তৃতির $(n+1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2n)!}{(n!)^2 . 2^n}$
[ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(গ)]

Type-III

4. (i) যদি $y = x+x^2+x^3+\cdots\cdots$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x = y-y^2+y^3-y^4+\cdots\cdots$
[বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ১৩, ১১; রা: বো:, ব: বো: ১২; দি: বো: ১৫; কু: বো: ০৯; চ: বো: ১৫, ১২, ০৮; য: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১১]

(ii) $y=2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ হলে দেখাও যে, $x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\cdots\cdots$ [বুয়েট ০১-০২, চুয়েট ০১-০২; য: বো: ০৯; সি: বো: ১৩, ০৯; কু: বো: ০৭; রা: বো: ০৭; ব: বো: ১০; দি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১০]

(iii) দেখাও যে, $(1+x+x^2+\cdots\cdots)^2 = 1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

(iv) প্রমাণ কর যে, $(1+x+x^2+\cdots)(1+2x+3x^2+\cdots)=\frac{1}{2}(1.2+2.3x+3.4x^2+4.5x^3+\cdots)$ [য: বো: ০৭]

Type-IV

5. (i) $x=\frac{2}{3}$ হলে $(1+x)^{\frac{21}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি এবং এর মান নির্ণয় কর। [ব: বো: ০৬]

(ii) $x=\frac{3}{4}$ হলে, $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদটি এবং এর মান নির্ণয় কর।

6. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর:

(i) $\sqrt[3]{126}$ **(ii)** $\sqrt[3]{1.03}$ **(iii)** $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ **(iv)** $\sqrt{4.004}$

Type-V

7. নিচের ধারাগুলির যোগফল নির্ণয় কর:

(i) $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ [বুয়েট ০৪-০৫] **(ii)** $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$

(iii) $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^2}-\cdots\cdots$ (iv) $1+\frac{1}{6}+\frac{1.4}{6.12}+\frac{1.4.7}{6.12.18}+\cdots\cdots$

(v) $1+2\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{2.5.8}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots$ [টেক্সটাইল ১১-১২]

(vi) প্রমাণ কর যে, $p+\frac{1}{p}=2\left[1+\frac{(\ln p)^2}{2!}+\frac{(\ln p)^4}{4!}+\ldots\ldots\infty\right]$

Type-VI

8. নিচের অসীম ধারাগুলির অভিসৃতি নির্ণয় কর:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ (v) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

(vi) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots$ (vii) $\frac{6}{1.3.5}+\frac{8}{3.5.7}+\frac{10}{5.7.9}+\cdots\cdots$

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n}{(n-1)!3^n}$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(খ)]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $(1-2x)^9$ এর বিস্তৃতিতে পঞ্চম পদে x এর সূচক কত?
ক. 4 খ. 5 গ. 8 ঘ. 9

2. $(3+x)^{4n+2}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কয়টি; যখন $n \in \mathbb{N}$?
ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

3. $(1-2x)^{2n+10}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কয়টি; যখন $n \in \mathbb{N}$?
ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 4

4. $(1+mx)^{11}$ এর বিস্তৃতির পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগদ্বয় সমান হলে m এর মান কত?
ক. $\frac{5}{7}$ খ. $\frac{3}{4}$ গ. 1 ঘ. $\frac{7}{5}$

5. $(1-3x)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে ষষ্ঠ ও সপ্তম পদদ্বয় পরস্পর সমান হলে x এর মান কত?
ক. $\frac{18}{7}$ খ. $\frac{-18}{7}$ গ. $\frac{6}{7}$ ঘ. $\frac{-6}{7}$

6. $(1-x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ কত?
ক. 21 খ. -21 গ. -35 ঘ. 35

7. $(2-x)^9$ এর বিস্তৃতিতে ষষ্ঠ পদের সহগ কত?
ক. 2016 খ. -2016 গ. 672 ঘ. -672

8. $(1+2x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত?
ক. $(-2)^n$ খ. 2^n গ. $(-1)^n$ ঘ. 1

9. $(1-3x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত?
ক. $(n+1)3^{(n+1)}$ খ. $(n+1).3^n$ গ. 3^n ঘ. $(-3)^n(n+1)$

10. $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ কত?
ক. 35 খ. -35 গ. 7 ঘ. 15

11. প্যাসকেলের ত্রিভুজের প্রত্যেক সারির প্রথম ও শেষ পদের সহগ কত?
ক. 1 ও 0 খ. 0 ও 1 গ. 1 ও 1 ঘ. 2 ও 2

12. $y=2x-3x^2+4x^3-5x^4+\ldots..$ হলে, $(1+x)=$ কত?
ক. $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$ খ. $(1-y)^{-\frac{1}{2}}$ গ. $(1+y)^{-1}$ ঘ. $(1-y)^{-1}$

13. $y = x + x^2 + x^3 + \dots \dots$ হলে $(1 - x)$ এর মান?
ক. $(1-y)^{-1}$ খ. $(1+y)^{-1}$ গ. $(1-y)^{-2}$ ঘ. $(1+y)^{-2}$

14. $(1-x)^{-2n}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা কত?
ক. n খ. $2n + 1$ গ. 2n ঘ. অসীম

15. $\left(1 - \frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত?
ক. $-\frac{1}{10}$ খ. $\frac{1}{10}$ গ. $\frac{1}{5}$ ঘ. $-\frac{1}{5}$

16. $\left(1 - \frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত?
ক. $\frac{-1}{8192}$ খ. $\frac{-1}{16}$ গ. $\frac{-1}{128}$ ঘ. $\frac{-1}{1024}$

17. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^3$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা কত?
ক. 6 খ. 7 গ. 5 ঘ. 8

18. $(1 + x)^{n+m}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত?
ক. $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ খ. $(n+m)!$ গ. $\frac{m!n!}{(m+n)!}$ ঘ. $m!n!$

19. $\left(\frac{3x}{2} - \frac{2}{3x^2}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ কত?
ক. $\frac{120285}{128}$ খ. $\frac{120285}{129}$ গ. $\frac{120285}{125}$ ঘ. $\frac{495}{4}$

20. $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে শেষ দিক থেকে r তম পদের সহগ কোনটি?
ক. ${}^nC_r \,.\, a^n$ খ. ${}^nC_{n-r} \,.\, a^r$ গ. ${}^nC_{r-1} \,.\, a^r$ ঘ. ${}^nC_{n-r+1} \,.\, a^{r-1}$

21. $\left(x - \frac{1}{3x}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ কততম?
ক. 10 খ. 9 গ. 8 ঘ. 11

22. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিটি অভিসারী হওয়ার শর্ত কি?
ক. $|x| < 1$ খ. $|x| > 1$ গ. $|x| < -1$ ঘ. $|x| > -1$

23. $5(1 - 2x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এর সহগ কোনটি?
ক. 5.2^m খ. 2.5^m গ. 5^{m+1} ঘ. 2^{m+1}

24. $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$ হলে $(1 + y)$ এর মান?
ক. $(1+x)^{-3}$ খ. $(1-x)^{-3}$ গ. $(1+x)^{-2}$ ঘ. $(1-x)^{-2}$

25. $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^3} - \dots\dots\dots\dots =$ কত?
ক. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ খ. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ গ. $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$

26. $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে n বিজোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদের সংখ্যা হবে-
ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. 0

27. প্যাসকেলের ত্রিভুজে সপ্তম সারির উপাদান কয়টি?
ক. 4 খ. 5 গ. 6 ঘ. 7

28. $(1 + 5x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে—
i. পদসংখ্যা 14 ii. মধ্যপদ 2টি iii. x^7 এর সহগ ${}^{13}C_6\, 5^6$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে—

i. পদসংখ্যা $= (n+1)$

ii. x^3 এর সহগ $= {}^nC_3\, a^{n-3}$

iii. r তম ও $(r+1)$ তম পদের অনুপাত $= \dfrac{ar}{(n-r+1)x}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. $\left(5x - \dfrac{x^3}{6}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে—

i. পদসংখ্যা 12টি ii. মধ্যপদ দুটি iii. শেষ পদের সহগ $\dfrac{-1}{6^{11}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে—

i. 9ম পদের সহগ ${}^{16}C_8$ ii. মধ্যপদ 1টি iii. পদসংখ্যা জোড় সংখ্যক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

32. $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^6}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে—

i. 6 তম পদের সহগ ${}^{15}C_5$

ii. মধ্যপদ 8ম ও 9ম পদ

iii. 6 তম পদ x বর্জিত

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (33 ও 34) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\left(x - \dfrac{1}{x^3}\right)^{13}$ দ্বিপদী বিস্তৃতিতে—

33. মধ্যপদের সংখ্যা কত?

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

34. 6 তম পদের সহগ?

ক. $-{}^{13}C_5$ খ. ${}^{13}C_5$ গ. ${}^{13}C_6$ ঘ. $-{}^{13}C_6$

নিচের তথ্যের আলোকে (35 ও 36) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$(1-3x)^9$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা দশটি।

35. x^5 এর সহগ?

ক. ${}^9C_5 \,.\, 3^5$ খ. $-{}^9C_5\, 3^5$ গ. ${}^9C_4\, 3^4$ ঘ. $-{}^9C_4\, 3^4$

36. সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদটি কত; যখন $x = 3$?

ক. 6 তম খ. 7 তম গ. 8 তম ঘ. 9 তম

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

37. $\left(2x + \dfrac{1}{8x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত? [ঢা. বি. ১৯-২০]

ক. $\dfrac{70}{81}$ খ. 520 গ. $\dfrac{35}{128}$ ঘ. $\dfrac{7}{512}$

38. $\left(x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^6$ এর সম্প্রসারণে x বর্জিত পদটির মান কত? [নো. বি. প্র. বি. ১৯-২০]

ক. 832 খ. 924 গ. 492 ঘ. 1294

39. $(1-ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে a এর কোন মানের জন্য এর তৃতীয় পদের সহগ 84 হবে? [কু. বি. ১৯-২০]
ক. ± 2 খ. ± 3 গ. ± 4 ঘ. ± 5

40. $1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots\ldots\ldots$ অসীম পর্যন্ত এর মান – [ঢা. বি. ১৭-১৮]
ক. $\frac{2}{3}$ খ. $\frac{3}{2}$ গ. $\frac{1}{3}$ ঘ. $\frac{1}{2}$

41. $1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots\ldots$ এর মান কোনটি? [কুয়েট ১৭-১৮]
ক. $-3\ln 2$ খ. $\ln 7$ গ. $5\ln 3$ ঘ. $2\ln 2$

42. $(1-x)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]
ক. -49 খ. 56 গ. 64 ঘ. -56

43. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]
ক. 1120 খ. 1020 গ. 1230 ঘ. 1150

44. $1-1+1-1+\ldots\ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত যোগফল হবে – [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. $\frac{1}{2}[1-(-1)^n]$ খ. $[1+(-1)^n]$ গ. $[1-(-1)^n]$ ঘ. $2[1-(-1)^n]$

45. যদি $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হয় তবে r এর মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. 7 খ. 5 গ. 1 ঘ. 0

46. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কোনটি? [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. $252\frac{y^5}{x^5}$ খ. 210 গ. $252\frac{x^5}{y^5}$ ঘ. 252

47. $1+2\frac{1}{3^2}+\frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{2.5.8}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^6}+\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির যোগফল কত? [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ খ. $2\sqrt{2}$ গ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ. $\sqrt[3]{2}$

48. $(3+kx)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ দুটি সমান হলে, k এর মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. 3 খ. 2 গ. 7 ঘ. 5

49. $(1+x)^4(1+x^2)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^{12} এর সহগ কত? [ই. বি. ১৭-১৮]
ক. 14 খ. 12 গ. 11 ঘ. 10

50. $(1+x)^{17}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+2)$ তম পদ এবং $(2r-1)$ তম পদদ্বয়ের সহগের মান সমান হলে r এর মান কত হবে? [খু. বি. ১৭-১৮]
ক. 3 খ. 4 গ. 5 ঘ. 6

51. $\left(x-\frac{k}{x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ 120 হলে k এর মান কত? [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]
ক. 12 খ. $-3\sqrt{2}$ গ. $3\sqrt{2}$ ঘ. $\pm\sqrt{12}$

52. $(1-x)^{-4}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ কত? [মেরিন ১৭-১৮]
ক. 3 খ. 4 গ. -20 ঘ. 20

53. $(1-x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে r তম পদের সহগ কত? [পা. প্র. বি. ১৭-১৮]
ক. $(r+1)$ খ. $(r+1)x^r$ গ. r ঘ. rx^r

54. $y=x-x^2+x^3-x^4+\ldots\ldots\ldots$ হলে, $1+x=$ কত? [পা. প্র. বি. ১৭-১৮]
ক. $(1+x)^{-1}$ খ. $(1-y)^{-1}$ গ. $(1-y)^{-2}$ ঘ. $(1+y)$

55. $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান— [ঢা. বি. ১৬-১৭]
ক. 540 খ. 640 গ. 740 ঘ. 840

56. $\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ ধারাটির বিস্তৃতি কি? [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ খ. $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ গ. $1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ ঘ. $-x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \ldots$

57. $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots\ldots$ to infinity = ? [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $\frac{1}{3}$ খ. $-\frac{2}{3}$ গ. $\frac{4}{3}$ ঘ. 2

58. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots$ to infinity = ? [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. $e + \frac{1}{2e}$ খ. $\frac{e^2 + 1}{2e}$ গ. $e - \frac{1}{e}$ ঘ. $2\left(\frac{e^2 + 1}{e}\right)$

59. $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান – [ঢা. বি. ১০-১১]

ক. $\frac{27}{28}$ খ. $\frac{580}{243}$ গ. 0 ঘ. $\frac{28}{27}$

60. $|x| < 1$ শর্তে $\frac{1 + 2x}{1 - x}$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ – [ঢা. বি. ১৪-১৫]

ক. 1 খ. 5 গ. 2 ঘ. 3

61. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে a^8 এর সহগ – [ঢা. বি. ০৬-০৭]

ক. 18564 খ. 8568 গ. 8560 ঘ. 18560

62. $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি – [ঢা. বি. ০৯-১০]

ক. $\frac{224}{3^8}$ খ. $-\frac{224}{3^8}$ গ. $\frac{224}{3^8}$ ঘ. $-\frac{242}{3^8}$

63. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ এর সম্প্রসারণে x মুক্ত পদটি— [ঢা. বি. ০৬-০৭; জা. বি. ১৬-১৭]

ক. 120 খ. 240 গ. 448 ঘ. 64

64. $(1 + ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে $a = ?$ [বুয়েট ১২-১৩]

ক. $\frac{5}{4}$ খ. $\frac{4}{5}$ গ. $\frac{16}{5}$ ঘ. $\frac{5}{16}$

65. $\frac{1}{(1 - x)(3 - x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ কত? [বুয়েট ১১-১২]

ক. $\frac{1}{2}(1 + 3^{-11})$ খ. $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^{11}})$ গ. $\frac{1}{2}(1 - 3^{10})$ ঘ. $\frac{1}{2}(1 + 3^{10})$

66. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটির মান কত? [বুয়েট ১০-১১; ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. 17820 খ. 18702 গ. 13780 ঘ. 12870

67. $\frac{x^5}{x^4 - 81}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ হলো— [বুয়েট ১২-১৩]

ক. $x - \frac{9x}{2x^2 + 18} + \frac{9}{4x - 12} + \frac{9}{4x + 12}$ খ. $x + \frac{9x}{2x^2 + 18} - \frac{9}{4x - 12} - \frac{9}{4x + 12}$

গ. $x - \frac{9x}{2x^2 + 18} - \frac{9}{4x - 12} + \frac{9}{4x + 12}$ ঘ. $x - \frac{9x}{2x^2 + 18} + \frac{9}{4x - 12} - \frac{9}{4x + 12}$

68. x এর ক্রমবর্ধমান শক্তিতে $\log_e(1-3x+2x^2)^{-1}$ এর বিস্তারণে x^n এর সহগ কোনটি? [কুয়েট ১২-১৩]

ক. $\frac{1+2^n}{n}$ খ. $\frac{3^n-11}{2}$ গ. $\frac{4^n-5}{7}$ ঘ. $\frac{n-5}{6}$

69. $\frac{x^4}{x^3+1}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ কোনটি? [কুয়েট ১১-১২]

ক. $x+\frac{1}{x+1}+\frac{5}{x^2-2x+1}$ খ. $x+\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$

গ. $x+\frac{5}{x+1}+\frac{9x}{x^2+3x+5}$ ঘ. $x+\frac{5}{x+1}+\frac{9x}{x^2+3x+5}$

70. $\frac{5x^2-4}{x^2(x-2)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ কোনটি? [কুয়েট ১১-১২]

ক. $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x-2}$ খ. $\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x-2}$ গ. $\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x-2}$ ঘ. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x-2}$

71. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর বিস্তারে সাধারণ পদ কোনটি? [বুয়েট ০৯-১০]

ক. $\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}$ খ. $\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ গ. $\frac{x^{2n}}{2n+1}$ ঘ. $\frac{x^{2n}}{2n-1}$

72. $(1+3x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে 5 তম ও 6 তম পদ সমান হলে x এর মান কোনটি? [চুয়েট ১০-১১]

ক. $\frac{2}{5}$ খ. $\frac{1}{3}$ গ. $\frac{8}{25}$ ঘ. $\frac{5}{18}$

73. $\left(2x^2-\frac{1}{4x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ কোনটি? [ঢা. বি. ১৩-১৪]

ক. $-\frac{231}{8}$ খ. 231 গ. $\frac{231}{4}$ ঘ. $\frac{231}{8}$

74. $\left(3x^2-\frac{1}{3x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কোনটি? [বুয়েট ১৩-১৪]

ক. $-\frac{10}{3}$ খ. $\frac{10}{3}$ গ. $-\frac{3}{10}$ ঘ. $\frac{3}{10}$

75. $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^{n+1} এর সহগ কোনটি? [বুয়েট ০৯-১০]

ক. ${}^{2n}C_{n-1}$ খ. ${}^{2n}C_n$ গ. ${}^{2n}C_{n+1}$ ঘ. ${}^{2n}C_{n+2}$

76. $\frac{1+2x}{(1-2x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ কোনটি? [চুয়েট ১০-১১]

ক. -21054 খ. -21504 গ. 21054 ঘ. 21504

77. $1+1\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2!2^4}+\frac{1.3.5}{3!2^6}$ .... $\infty = ?$ [বুয়েট ১১-১২]

ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\sqrt{8}$ গ. $\sqrt{2}$ ঘ. $\sqrt{3}$

78. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ হলো- [বুয়েট ১১-১২]

ক. 5n খ. 4n গ. 3n ঘ. 2n

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $f(x)=1-2x-15x^2$ এবং $g(x)=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{14}$

ক. $f(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

খ. $g(x)$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\frac{x}{f(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{1}{8}\{5^r+(-3)^r\}$.

2. $\varphi(x) = 3 + x$ এবং $g(x) = px^2 + qx + r$
   ক. $g(x) = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।
   খ. $\left\{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^n$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এবং x^5 এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে n এর মান নির্ণয় কর।
   গ. $p = 9, q = -\frac{2}{3x}$ এবং $r = \frac{1}{81x^2}$ হলে $\{g(x)\}^7$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।
3. $R(x) = 1 + x$
   ক. সমাধান কর: $\left|R\left(\frac{4x}{3}\right)\right| < 5$
   খ. দেখাও যে, $\left\{R(x) - R\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.\ 3.\ 5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!}(-2)^n$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$
   গ. $\{R(x)\}^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 1 ঃ 7 ঃ 42 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।
4. $M = 1 + 3x, N = 3 + \frac{1}{x}$ এবং $P(x) = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \ldots\ldots$
   ক. N^8 এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর।
   খ. $p, q \in \mathbb{N}$ হলে, M^pN^q এর বিস্তৃতি থেকে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর।
   গ. $y = P(x)$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{14}{81}y^3 + \ldots \infty$
5. $F = b - cx$
   ক. $b = 7$ এবং $x = \frac{30\sqrt{-2}}{c}$ হলে $\sqrt{F}$ নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, $F^{\frac{-1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$তম পদের সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2 2^r}$ যখন $b = 1$ এবং $c = 2$
   গ. $c = -3$ হলে F^m এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে p, $\frac{21}{2}px$ এবং $\frac{189}{4}px^2$ হলে b, p ও m এর মান নির্ণয় কর।
6. $g(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots\infty$ এবং $P = 1 - 4x$
   ক. পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর: $\frac{1}{|P|} \geq 3$, যখন $x \neq \frac{1}{4}$
   খ. প্রমাণ কর যে, $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \ldots\ldots \infty$
   গ. দেখাও যে, $\frac{1}{\sqrt{P}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$
7. $h(x) = 1 - x$
   ক. $z = h(i)$ হলে argz নির্ণয় কর।
   খ. $\sqrt{h\left(\frac{x}{6}\right)}$ কে x এর ঊর্ধ্বক্রমিক ধারায় পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করে দেখাও যে,
   $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{1}{54} - \frac{5}{648} - \ldots = \frac{1}{\sqrt{3}}$ যখন $x < 6$
   গ. $h\left(\frac{x^2 - 8x + 9}{x^2 - 3x + 2}\right)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।
8. দৃশ্যকল্প-I: $\left(\frac{a}{x} - bx^2\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ সংখ্যক পদ আছে।
   দৃশ্যকল্প-II: $(a + x)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি যেখানে $n \in \mathbb{N}$.
   ক. $n = 8$ হলে দৃশ্যকল্প-II এ বর্ণিত দ্বিপদীটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর।
   খ. $n = 7$ হলে, দৃশ্যকল্প-I এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।
   গ. $n = 4, 5, 6$ এর জন্য দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-II এ বর্ণিত দ্বিপদীটির সমদূরবর্তী পদগুলির সহগ সমান।

9. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ দৃশ্যকল্প-২ : $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

ক. x এর কোন মানের জন্য দৃশ্যকল্প-I এ বর্ণিত রাশিটির বিস্তৃতি বৈধ?

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত রাশিটির দ্বিপদী বিস্তৃতির x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

গ. যদি $|x| < 1$ হয় তবে দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত দ্বিপদী রাশিটির বিস্তার করে যে ধারাটি পাওয়া যায় তা অভিসৃত কিনা ব্যাখ্যা কর।

10. A ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সংকর ধাতু বৃত্তাকার চাকতির উপর π মানের বল প্রয়োগ করায় চাকতিটির উপর P মানের চাপ অনুভূত হলো। $\theta°C$ তাপমাত্রা হ্রাস করায় চাকতিটির ক্ষেত্রফল ও ব্যাসার্ধ উভয়ই সূক্ষ্মভাবে হ্রাস পায় যা $r = \left(\theta^2 - 2 + \frac{1}{\theta^2}\right)^{-3}$ দ্বারা সম্পর্কিত। উল্লেখ্য $P = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল (A)}}$

ক. $(2+3x)^{-4}$ এর বিস্তৃতির ১ম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

খ. P এর বিস্তৃতির θ বর্জিত পদ নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $r^{-\frac{n}{3}}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!}(-2)^n$ যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

11. 1 মিটার দূরত্বে অবস্থিত 10^{-4} কুলম্ব ধনাত্মক আধান বিশিষ্ট দুটি বিন্দুর মাঝে y নিউটন বল ক্রিয়া করছে। বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব x মিটার পরিবর্তন করলে y বলকে একটি ঋণাত্মক ঘাতের দ্বিপদী হিসেবে প্রকাশ করা যায়। যেখানে y বল আধানদ্বয় (q_1 ও q_2) এর সাথে সমানুপাতিক এবং দূরত্ব (r) এর বর্গের সাথে ব্যাস্তানুপাতে সম্পর্কিত। সামগ্রিক সমানুপাতিক ধ্রুবক $C = 9 \times 10^9$.

ক. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা কত?

খ. বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 0.25 মিটার পরিবর্তন করলে y বলের মান কত হবে?

গ. y বলের দ্বিপদীটির বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ ব্যবহার করে x নির্ণয় কর যখন $y = 180$

12. $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ \ldots$

ক. x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

খ. $S^{\frac{3}{2}}$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর।

গ. $\frac{1}{S^n}$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদের সহগ $(r+3)$ তম পদের সহগের সমান হলে দেখাও যে, $2r = n - 2$.

13. $f(x) = \left(x + \frac{1}{3x}\right)^{2n}, n \in \mathbb{N}$.

ক. f(x) দ্বিপদী রাশিটির সমদূরবর্তী দুইটি পদ নির্ণয় কর।

খ. f(x) বিস্তৃতির x বর্জিত পদ নির্ণয় কর।

গ. f(x) এবং $[f(2x)]^{\frac{3}{n}}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ সমান হলে, দেখাও যে, $n = 3$.

14. $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots..$

ক. f(x) ফাংশনটির ১০ম পদ নির্ণয় কর।

খ. f(0.5) এর সঠিক মান নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \ldots..$

15. $f(x) = (1+x)^p$ এবং $g(x) = (1-x)^{-1}(1-2x)^{-1}$, যেখানে p ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

ক. x এর কোন মানের জন্য g(x) এর বিস্তৃতি বৈধ?

খ. দেখাও যে, g(x) এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $2^{n+1} - 1$.

গ. $f\left(\frac{x}{2}\right)$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 7 হলে, p এর মান নির্ণয় কর।

▶ সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্ন

16. (i) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β (ii) $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ *[অধ্যায়-৪ ও ৫ এর সমন্বয়ে]*

ক. $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটি কততম?

খ. (i) ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$

গ. (ii) ব্যবহার করে দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - ....$

17. $f(x) = \frac{1}{(1-px)(1-qx)}$, $g(x) = (1 - x)^n$ *[অধ্যায়-৪ ও ৫ এর সমন্বয়ে]*

ক. $2x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b ও c হলে $a + b + c + abc$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $n = \frac{1}{2}$ এবং $x = 0.02$ হলে g(x) এর বিস্তৃতি হতে $\sqrt{2}$ এর মান পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

গ. $p = 1$ এবং $q = 2$ হলে f(x) এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

18. $f(x) = (p + x)$ একটি ফাংশন। *[অধ্যায়-১, ৩ ও ৫ এর সমন্বয়ে]*

ক. $-\frac{1}{2} \le x \le 4$ কে পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $p = 2$ এবং $x = -2i$ হলে $\sqrt{f(x)}$ নির্ণয় কর।

গ. $\{f(x)\}^n$ এর বিস্তৃতিতে ৩য়, ৪র্থ ও ৫ম পদ যথাক্রমে $240x^2, 160x^3$ ও $60x^4$ হলে প্রমাণ কর যে, $np = 12$.

আরও সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

19. $f(x) = 3 + \frac{x}{2}$ এবং $g(p) = 1 - \frac{1}{2}p$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৯]

ক. $(3 - y)^5$ বিস্তৃতির প্যাসকেলের ত্রিভুজ তৈরি কর।

খ. $\{f(x)\}^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগদ্বয় সমান হলে, n এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $n \in \mathbb{N}$.

গ. দেখাও যে, $\{g(4x)\}^{-\frac{1}{2}}$ বিস্তৃতির $(n + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2n)!}{(n!)^2 . 2^n}$.

20. $Z = 2x + 3y$. [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]

ক. $(a + x)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 16 হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

খ. $y = -\frac{1}{x^2}$ হলে উদ্দীপক থেকে Z^{12} এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর।

গ. $x + 2y \le 8, x + y \le 6$ এবং $x, y \ge 0$, শর্তাধীনে উদ্দীপকের আলোকে Z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

21. $a = x^3, b = 8$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]

ক. bi এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. $\left(2a - \frac{2}{a}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে যে পদটি ধ্রুব তার মান নির্ণয় কর।

গ. $a - b = 0$ সমীকরণের জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$।

22. উদ্দীপক: $h(x) = \frac{-8x}{1 - x^2}$ একটি ভগ্নাংশ এবং $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n}{(n-1)!3^n}$ হলো একটি ধারার সমষ্টি। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

ক. $x = i$ হলে h(x) এর বর্গমূল বের কর। [i একটি কাল্পনিক সংখ্যা]

খ. উদ্দীপকের ধারাটির অভিসারিতা যাচাই কর।

গ. h(x) এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

23. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \frac{1}{1 - 9x + 20x^2}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]
দৃশ্যকল্প-২: $mx^2 + nx + s = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
ক. $-4 - 4i$ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $g(x)$ এর বিস্তৃতির x^n এর সহগ নির্ণয় কর।
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $m = 9, n = 2, s = -\frac{1}{3}(p + 2)$ হলে প্রাপ্ত সমীকরণের একটি মূল যদি অপরটির বর্গের সমান হয় তবে p এর মান নির্ণয় কর।

24. দৃশ্যকল্প-১: $8x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a ও b. [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]
দৃশ্যকল্প-২: $(1 + 3y)^{2n}$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.
ক. মান নির্ণয় কর : $\sqrt[3]{i}$.
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে এইরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $a + \frac{1}{b}$ এবং $b + \frac{1}{a}$.
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে, প্রদত্ত বিস্তৃতির মধ্যপদটি হবে $\frac{1 . 3 . 5 .... (2n - 1)}{n!} 6^n y^n$.

25. $\varphi(x) = lx^2 + mx + n$. [সিলেট বোর্ড-২০১৯]
ক. $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2i$ হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।
খ. $\varphi(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে, $nl(x^2 + 1) + (2nl - m^2)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
গ. $l = 42, m = -13, n = 1$ হলে, $\{\varphi(x)\}^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^{99} এর সহগ নির্ণয় কর।

26. $f(x) = a + bx$. [যশোর বোর্ড-২০১৯]
ক. $\left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right)^8$ এর পদসংখ্যা কত?
খ. $a = 1, b = -2$ হলে $\{f(x)\}^{2m}$ এর মধ্যপদ নির্ণয় কর যেখানে $m \in \mathbb{N}$.
গ. $b = 2$ এর জন্য $\{f(x)\}^m$ এর প্রথম তিনটি পদ $k, \frac{10}{3}kx$ এবং $\frac{40}{9}kx^2$ হলে a, k এবং m এর মান নির্ণয় কর।

27. দৃশ্যকল্প-১: $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত $u : v$। [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]
দৃশ্যকল্প-২: $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$.
ক. $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{\frac{v}{u}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$.
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $n = 9$ ও $n = 12$ এর জন্য প্রদত্ত বিস্তৃতির মধ্যপদের মান নির্ণয় কর।

28. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{1}{x} + \frac{1}{p - x} = \frac{1}{q}$ দৃশ্যকল্প-২: $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ [ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড-২০১৮]
ক. $p = q = 1$ হলে দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ এ মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p, q এবং r এর মধ্যে একটি সম্পর্ক লিখ।
গ. দৃশ্যকল্প-২ এর বিস্তৃতিতে x^{12} সম্বলিত পদের সহগ বের কর।

29. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + (-1)^n px + q = 0$. দৃশ্যকল্প-২: $(1 + ax)^b$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]
ক. $\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ বের কর।
খ. $a = -12$ এবং $b = -\frac{1}{2}$ হলে দৃশ্যকল্প-২ থেকে দেখাও যে, বিস্তৃতির x^r এর সহগ $= \frac{(2r)!.3^r}{(r!)^2}$.
গ. দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে প্রমাণ কর যে, $(p^2 + 4q^2) = (1 + 2q^2)^2$. যেখানে $n = 2$

30. $f(x)=\left(2-\frac{3}{x}\right)^{15}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭]

ক. $n=4$ এর জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ আঁক।

খ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x-বর্জিত এবং পদটির মান নির্ণয় কর।

গ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির পার্থক্য নির্ণয় কর যখন $x=1$.

31. দৃশ্যকল্প-১: $A=\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)^n$ দৃশ্যকল্প-২: $B=(1-9x+20x^2)^{-1}$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭]

ক. $6x^2-5x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

খ. n এর জন্য কোন শর্ত আরোপ করলে দৃশ্যকল্প A এর একটি মধ্যপদ থাকবে? $n=21$ হলে মধ্যপদ বা (পদসমূহের) মান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প B এর জন্য প্রমাণ কর যে, x^9 এর সহগ $5^{10}-4^{10}$।

32. $P=4x+3$ একটি দ্বিপদী রাশি। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭]

ক. $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর।

খ. P^{34} এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগ সমান হলে, এ পদ দুইটির x এর ঘাত নির্ণয় কর।

গ. $P^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করে বিস্তৃতিটির পঞ্চম পদটিও বের কর।

33. $z=\alpha+\beta i$, যেখানে α ও β বাস্তব সংখ্যা। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]

ক. $\frac{x^3-8}{x-2}$ বহুপদীর ঘাত নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকে $\alpha=2, \beta=\sqrt{3}$ হলে, z মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকে $\beta=0$ এবং α^5 ও α^{15} এর সহগ পরস্পর সমান হলে $\left(2z^2+\frac{R}{z^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে R এর মান নির্ণয় কর।

34. $f(x)=\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{11}$ ... ... (i) এবং $g(x)=(1+px)^m$ ... ... (ii) [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

ক. $(1-3x)^{-1}$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

খ. $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম ও $(r+2)$ তম পদের সহগ সমান হলে r এর মান নির্ণয় কর।

গ. $g(x)$ এ $p=-8$ এবং $m=-\frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!2^r}{(r!)^2}$.

35. $(1+2y)^m$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। [সিলেট বোর্ড-২০১৭]

ক. $(42x^2-13x+1)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

খ. $m=2n, (n\in\mathbb{Z})$ হলে দেখাও যে উদ্দীপকের রাশিটির বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান $\frac{1.3.5 \,.....\, (2n-1)}{n!}.2^{2n}.y^n$.

গ. $m=20$ হলে উদ্দীপকের রাশিটির বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত $11:20$ হয়। পদ দুইটি নির্ণয় কর।

36. দৃশ্যকল্প-১ : $x^2-5x+3=0$ এর মূলদ্বয় α ও β দৃশ্যকল্প-২ : $\frac{1+x}{\sqrt{1-2x}}$ [যশোর বোর্ড-২০১৭]

ক. $(3-2x)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতি x এর কোন মানের জন্য বৈধ?

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত রাশিটির বিস্তৃতি হতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

37. $f(x)=x^4-13x^3+61x^2-107x+58, g(x)=\frac{x}{1-4x+3x^2}$. [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]

ক. উদাহরণসহ পৃথায়কের সংজ্ঞা দাও।

খ. $f(x)=0$ সমীকরণের একটি মূল $5+2i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর।

গ. $g(x)$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

1. **(i)** $1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$ **(ii)** $\frac{1}{16}\left(1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3\right)$ **(iii)** $1+x+\frac{n+1}{2}x^2+\frac{(n+1)(2n+1)}{6}x^3$

2. **(i)** $1+3x+9x^2+27x^3+ \ldots\ldots\ldots$;
   (ii) $1-\frac{x}{4}-\frac{57}{64}x^2$ **(iii)** $1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{16}x^3$ **(iv)** $\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$; $1, 3x, 6x^2$
   (v) $1-\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24}\cdot\frac{x^3}{2^3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{24}\cdot\frac{5}{32}\cdot\frac{x^4}{2^4}$
   (vi) $1-\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{x^3}{2^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{x^4}{2^4}$

3. **(i)** $\{1-(r+1)2^{r+1}\}x^r$ **(ii)** 4 **(iii)** 5^n-4^n **(iv)** $\frac{1}{2}(3^r-1)$ **(v)** $2^{n+1}-1$. **(vi)** $7^{n+1}-6^{n+1}$
   (xiii) $\frac{(-1)^r}{\sqrt{3}}\ \frac{(2r)!}{(r!)^2}\ \frac{1}{3^r}$; $\frac{70}{81\sqrt{3}}x^4$; **(xv)** 18 **(xvi)** -1 **(xvii)** 1 **(xviii)** $\frac{2.\ 5.\ 8 \cdots\cdots (3n-1)}{3^n.\ n!}$

5. **(i)** 5 তম পদ এবং মান $\frac{11305}{216}$ **(ii)** 6 তম ও 7তম পদ এবং মান $\frac{5103}{1024}$

6. **(i)** 5.0133 **(ii)** 1.0099 **(iii)** 0.1984 **(iv)** 2.0010

7. **(i)** $2\sqrt{2}$ **(ii)** $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ **(iii)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(iv)** $\sqrt[3]{2}$ **(v)** $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

8. **(i)** অভিসৃত **(ii)** অভিসৃত **(iii)** অভিসৃত **(iv)** অভিসৃত **(v)** অভিসৃত **(vi)** অভিসৃত **(vii)** অভিসৃত **(viii)** অভিসৃত

বহুনির্বাচনি

1. ক	2. ক	3. ক	4. ক	5. খ	6. খ	7. খ	8. ক	9. খ	10. ক	11. গ	12. খ	13. খ	14. ঘ
15. ক	16. ক	17. খ	18. ক	19. ক	20. ঘ	21. ক	22. ক	23. ক	24. খ	25. খ	26. খ	27. ঘ	28. ক
29. ঘ	30. ঘ	31. ক	32. খ	33. গ	34. ক	35. খ	36. ঘ	37. গ	38. খ	39. ক	40. খ	41. ঘ	42. ঘ
43. ক	44. ক	45. ক	46. ঘ	47. ক	48. খ	49. গ	50. ঘ	51. ঘ	52. ঘ	53. গ	54. খ	55. ঘ	56. খ
57. খ	58. খ	59. ঘ	60. ঘ	61. খ	62. ক	63. খ	64. খ	65. খ	66. ঘ	67. ক	68. ক	69. খ	70. ঘ
71. ক	72. ঘ	73. ক	74. ক	75. গ	76. ঘ	77. গ	78. খ						

সৃজনশীল

1. **ক.** মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ; **খ.** $-\,{}^{14}C_7$
2. **ক.** $\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4pr}}{2p}$; **খ.** 34 **গ.** $-\,{}^{14}C_7\,3^{-7}$
3. **ক.** $-\frac{9}{2}<x<3$; **গ.** 55
4. **ক** $\frac{5670}{x^4}$; **খ.** ${}^{p+q}C_q\,3^q$
5. **ক.** $\pm(5-3\sqrt{2}i)$; **গ.** 2, 128 ও 7
6. **ক.** $\frac{1}{6}\le x\le\frac{1}{3}, x\neq\frac{1}{4}$
7. **ক.** $-\frac{\pi}{4}$; **খ.** $1-\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{x^3}{2^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{x^4}{2^4}$ (5 তম পদ পর্যন্ত)
   গ. $-\frac{3}{2^{n+1}}-2$

8. ক. $a^8 + 8a^7x + 28a^6x^2 + 56a^5x^3 + 70a^4x^4 + 56a^3x^5 + 28a^2x^6 + 8ax^7 + x^8$
খ. $(-1)^r\, {}^7C_r\, a^{7-r} b^r x^{-7+3r}, -35a^4b^3x^2, 35a^3b^4x^5$

9. ক. $|x| < 1$ খ. $-\left(2 + \frac{3}{2^{n+1}}\right)$ গ. অভিসৃত

10. ক. $\frac{1}{16}\left(1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 - ....\right)$; খ. 924

11. ক. 13; খ. 57.6 নিউটন; গ. $x = 1$;

12. ক. $(-1)^r$ খ. $1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + ...$

13. ক. $\frac{1}{3^r}\, {}^{2n}C_r\, x^{2n-2r}, \frac{{}^{2n}C_r}{3^{2n-r}} \cdot x^{2r-2n}$ খ. $\frac{1.3.5......(2n-3)(2n-1)}{n!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

14. ক. $11x^{10}$ খ. 3

15. ক. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ গ. $p = 8$;

16. ক. 6 তম পদটি x বর্জিত

17. ক. 4 খ. 1.41421 গ. $2^{n+1} - 1$;

18. ক. $\left|x - \frac{7}{4}\right| \leq \frac{9}{4}$ খ. $\pm\left[(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

19. ক. $243 - 405y + 270y^2 - 90y^3 + 15y^4 - y^5$; খ. $n = 55$

20. ক. 4; খ. 10264320; গ. সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 14$

21. ক. নির্ণেয় বর্গমূল $\pm 2(1 + i)$; খ. -258048

22. ক. $\pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$; গ. $-4 + 4.(-1)^r$

23. ক. $-\frac{3\pi}{4}$; খ. $5^{n+1} - 4^{n+1}$; গ. 6, -1

24. ক. $-i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$; খ. $8x^2 - 54x + 81 = 0$

25. ক. $\pm 2i, -1$; খ. মূল দুইটি $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{b}{a}$; গ. $7^{100} - 6^{100}$

26. ক. 17; খ. $\frac{1.3.5 \ldots \ldots (2m-1)}{m!}(-4)^m x^m; m \in \mathbb{N}$; গ. $a = 3, k = 3^5$ ও $m = 5$

27. ক. বাস্তব, অসমান ও অমূলদ; গ. $30618\, x^6, -10206\, x^3, 673596\, x^6$

28. ক. মূলদ্বয় জটিল ও অসমান খ. $p = 2q \pm \sqrt{r^2 + 4q^2}$ গ. 32248320

29. ক. ${}^{12}C_6\, 2^6 . 3^6 . x^{-6}$

30. খ. প্রথম পদ; 32768; গ. 9006940800;

31. ক. মূলদ ও অসমান; খ. n জোড় সংখ্যা; $\frac{705432}{x}$; 176358x;

32. ক. ${}^{12}C_6\, 2^6\, 3^6\, x^6$; খ. 19 এবং 20; গ. $\frac{(-1)^r}{\sqrt{3}} \frac{(2r)!}{(r!)^2} \frac{1}{3^r}; \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{70}{81} x^4$

33. ক. 2; খ. $x^2 - 4x + 7 = 0$; গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

34. ক. $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots \ldots$; খ. 8

35. ক. $7^{n+1} - 6^{n+1}$ গ. $T_{11} = {}^{20}C_{10}(2y)^{10}$ এবং $T_{12} = {}^{20}C_{11}(2y)^{11}$

36. ক. $|x| < \frac{3}{2}$; খ. $x^2 - 5x + 3 = 0$; গ. 4

37. খ. $5 - 2i, 2, 1$; গ. $\frac{1}{2}(3^r - 1)$ ।