(viii) $y = 3\cos x + 5$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

∴ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$

আবার, $\cos x$ এর সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান 1।

∴ $y = 3\cos x + 5$ ফাংশনের রেঞ্জ $= [-3+5, 3+5] = [2, 8]$

(ix) $y = |x + 3|$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

∴ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$

সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y \geq 0$

∴ ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

অনুচ্ছেদ-8.3.6 | পৃষ্ঠা-২৯১

(i) $y = x$ ফাংশনটি একই সাথে এক-এক ফাংশন, সার্বিক ফাংশন এবং অভেদক রেঞ্জ সেটে (y) ফাংশন। নিম্নে কারণসহ আলোচনা করা হলো :

এক-এক ফাংশন : ডোমেন সেটে (x) এর প্রত্যেক ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের সম্পর্কিত উপাদান রেঞ্জ সেটে (y) ভিন্ন ভিন্ন হয়।

সার্বিক ফাংশন: কোডোমেন (y) এর প্রতিটি উপাদানের কমপক্ষে একটি প্রতিচ্ছবি ডোমেন (x) সেটে পাওয়া যায়।

অভেদ ফাংশন : ডোমেন (x) এর প্রতিটি উপাদানেই তার নিজের প্রতিচ্ছবি।

(ii) $y = x^4$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন নয় কারণ দুইটি বাস্তব সংখ্যা 3 এবং -3 এর ছবি একই সংখ্যা 81.

আবার, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ এবং $f(x) = x^4$ হলে ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।

(iii) $3y = 4$ বা, $y = \frac{4}{3}$ ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন। কারণ প্রতিটি উপাদানের ছবি একটি মাত্র উপাদান।

(iv) $y = 3x + 2$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কারণ, ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ছবি সর্বদা ভিন্ন এবং কোডোমেনের প্রতিটি উপাদান ডোমেনের কমপক্ষে একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত।

(v) $y = 4x^2$ ফাংশনটি এক-এক নয় কারণ দুইটি উপাদানের ছবি একই। যেমন: $f(-1) = 4$ এবং $f(1) = 4$

কিন্তু $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ এ বর্ণিত ফাংশন $f(x) = 4x^2$ এক-এক এবং সার্বিক।

অনুচ্ছেদ-8.3.7 | পৃষ্ঠা-২৯২

দেওয়া আছে, $f : x \to 1 + \frac{3}{x}, x \neq 0$

এবং $g : x \to 2x$

(a) ধরি, $y = f(x) = 1 + \frac{3}{x}$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = 1 + \frac{3}{x}$

$\Rightarrow xy = x + 3$

$\Rightarrow x(y-1) = 3$

$\Rightarrow x = \frac{3}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{3}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3}{x-1}$

(b) $h = g(x) = 2x$

$\Rightarrow x = g^{-1}(h)$

আবার, $h = 2x$

$\Rightarrow x = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow g^{-1}(h) = \frac{h}{2}$

$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

(c) $gof = g\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 2\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 2 + \frac{6}{x}$

(d) ধরি, $y = (gof)(x) = 2 + \frac{6}{x}$

$\therefore x = (gof)^{-1}(y)$

আবার, $y = 2 + \frac{6}{x}$

$\Rightarrow xy = 2x + 6$

$\Rightarrow x(y-2) = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{y-2}$

$\therefore (gof)^{-1}(y) = \frac{6}{y-2}$

$\therefore (gof)^{-1}(x) = \frac{6}{x-2}$

(e) 'a' হতে : $f^{-1}(x) = \frac{3}{x-1}$

'b' হতে $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$\therefore f^{-1} o g^{-1} = f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

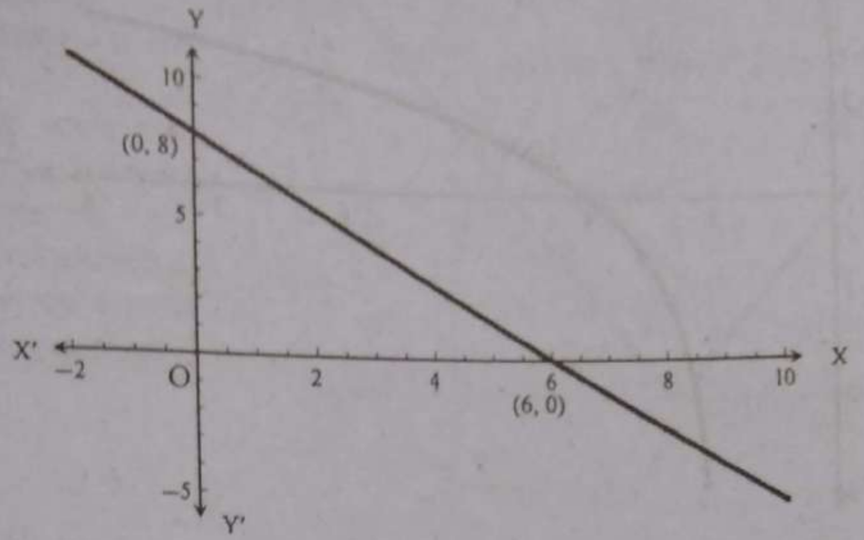
$= \frac{3}{\frac{x}{2} - 1} = \frac{6}{x-2}$

দ্রষ্টব্য: গাণিতিকভাবে দেখানো যায় $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

অনুচ্ছেদ-8.4.5 | পৃষ্ঠা-২৯৬

(i) প্রদত্ত ফাংশন: $4x + 3y = 24$

$\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$



বৈশিষ্ট্য :

(a) x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $\mathbb{R}$।

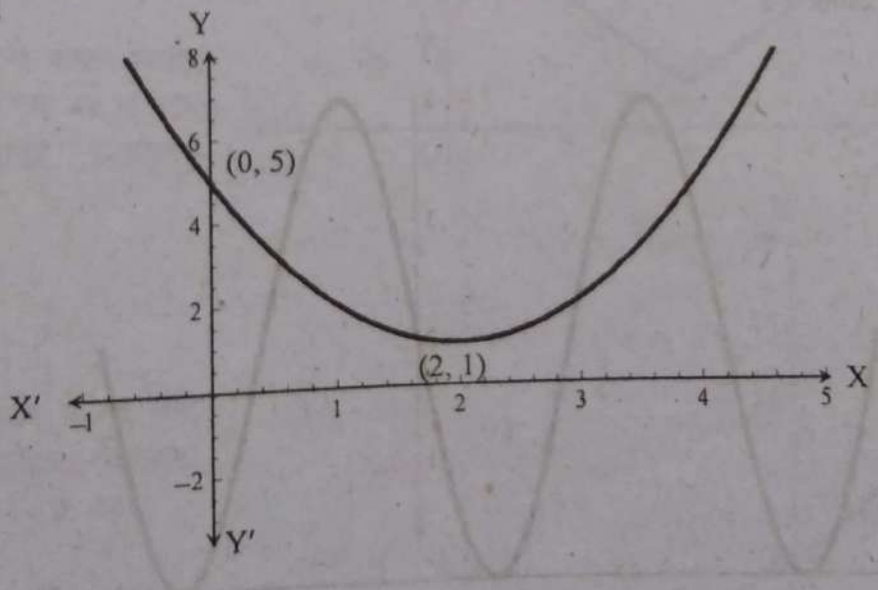
(b) প্রদত্ত ফাংশনের লেখ একটি সরলরেখা।

(c) ফাংশন x-অক্ষকে (6, 0) এবং y অক্ষকে (0, 8) বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) প্রদত্ত ফাংশন: $y = x^2 - 4x + 5$

$\Rightarrow y = x^2 - 2.2x + 4 + 1$

$= (x-2)^2 + 1$



বৈশিষ্ট্য :

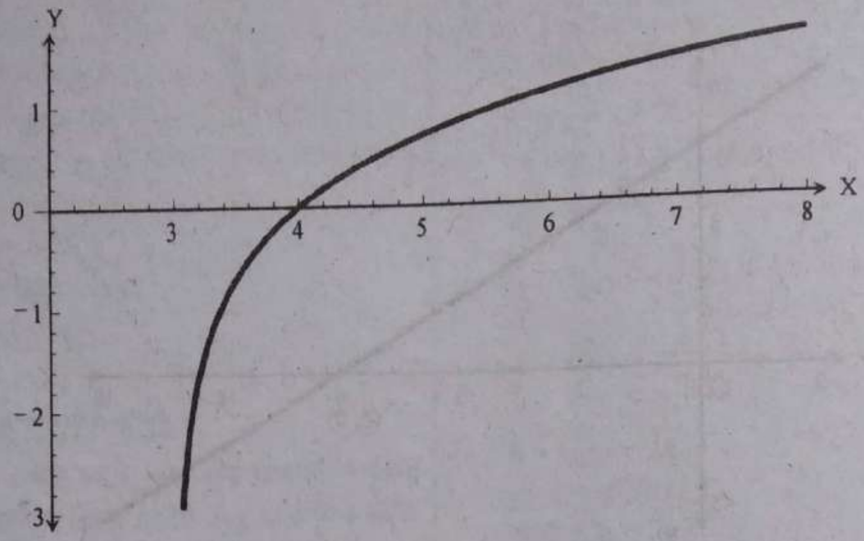
(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। $\therefore$ ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$

সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y \geq 1$ $\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $[1, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 5$ এবং $y = 0$ হলে x এর কোনো বাস্তব মান পাওয়া যায় না। সুতরাং লেখটি y-অক্ষকে (0, 5) বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষকে কোনো বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে না।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$. সুতরাং ফাংশনের বিস্তৃতি অসীম এবং ফাংশনটি সম্পূর্ণভাবে x অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(iii) প্রদত্ত ফাংশন : $y = \log(x - 3)$



বৈশিষ্ট্য :

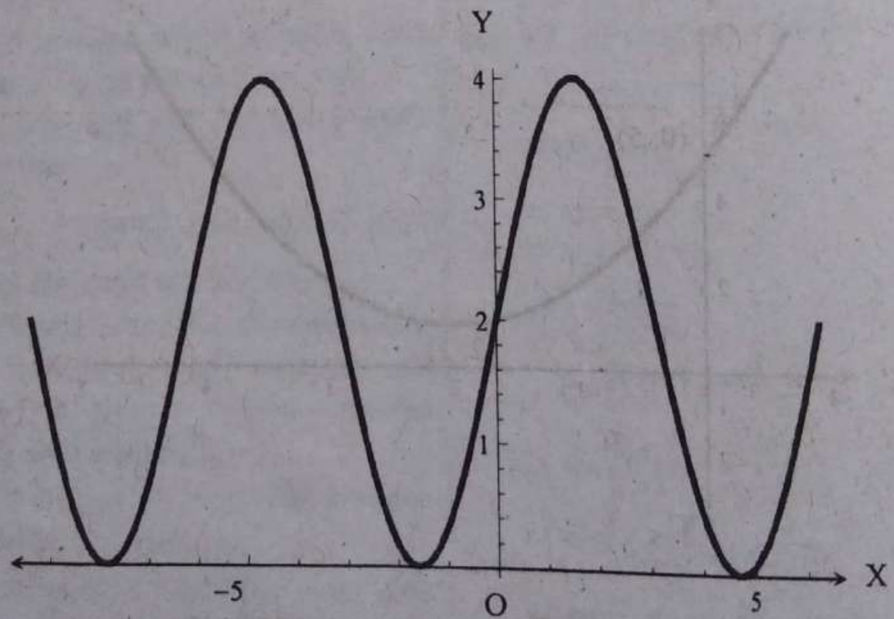
(a) ফাংশনটি $x - 3 > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $= (3, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (-\infty, \infty)$

(b) $x = 4$ হলে $y = \log 1 = 0$। সুতরাং ফাংশনের লেখ x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) x-অক্ষ বরাবর $(4, 0)$ বিন্দু থেকে ডানদিকে গেলে ফাংশনের ধনাত্মক মান অসীমের দিকে ধাবিত হয় আবার বামদিকে 3 বিন্দুতে ফাংশনের ঋণাত্মক মান অসীমে ধাবিত হয়।

(iv) প্রদত্ত ফাংশন: $y = 2\sin x + 2$



বৈশিষ্ট্য :

(a) লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ এর মত।

(b) ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= [0, 4]$

(c) $x = 0$ হলে $y = 2$ এবং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y \geq 0$। সুতরাং ফাংশনটি y-অক্ষকে $(0, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

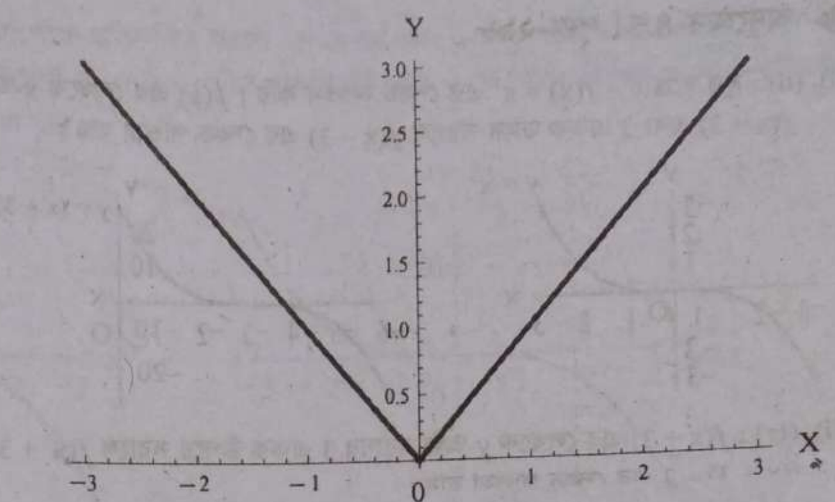
(v) প্রদত্ত ফাংশন: $y = |x|$

বৈশিষ্ট্য:

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।
∴ ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $[0, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 0$, আবার, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y \geq 0$। সুতরাং ফাংশনটি মূলবিন্দুতে এবং x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(c) $\because f(x) = f(-x)$ সুতরাং ফাংশনের লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।



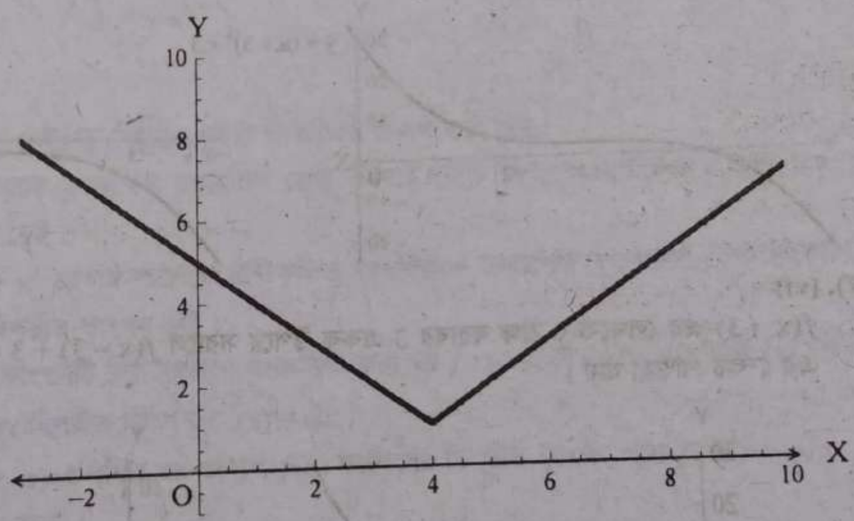
(vi) $y = |x - 4| + 1$

বৈশিষ্ট্য:

(a) ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $[1, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 5$ এবং $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y \geq 1$ সুতরাং ফাংশনটি y অক্ষকে (0, 5) বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(c) x এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য y এর মান শূন্য হয় না বলে ফাংশনটি কখনোই x-অক্ষকে স্পর্শ করে না।

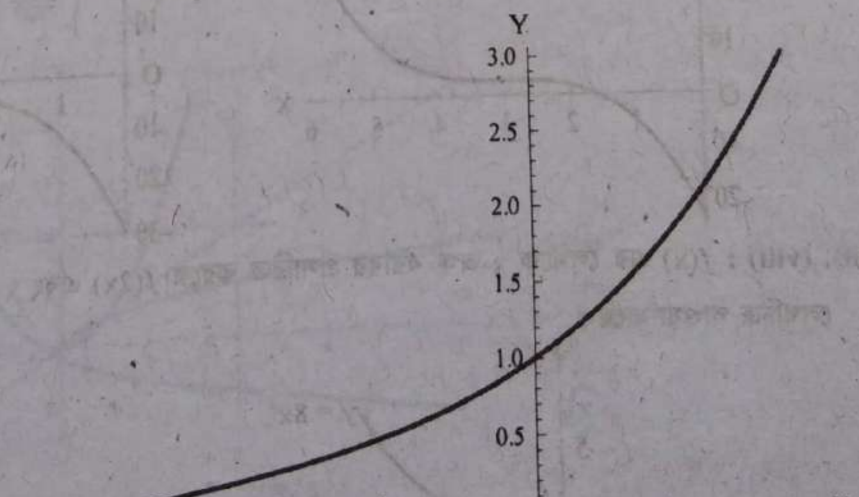


(vii) $y = 3^x$

বৈশিষ্ট্য :

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $(0, \infty)$

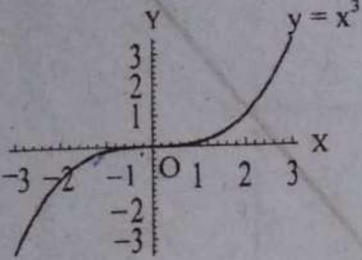
(b) $x = 0$ হলে $y = 1$ এবং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y > 0$। সুতরাং ফাংশনটি y-অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

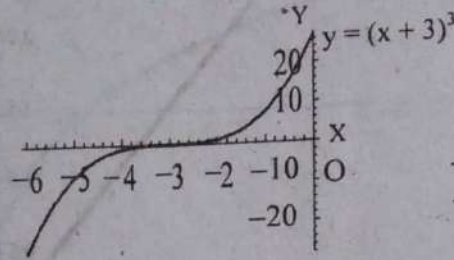


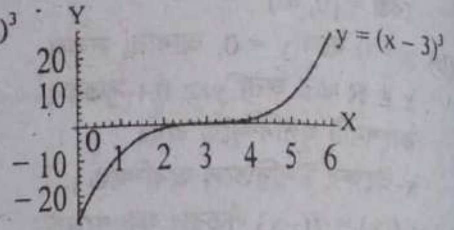
(c) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$, $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$। সুতরাং ফাংশনের বিস্তৃতি অসীম এবং x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অসীমে ফাংশনের লেখ x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

অনুচ্ছেদ-8.5 | পৃষ্ঠা-২৯৮

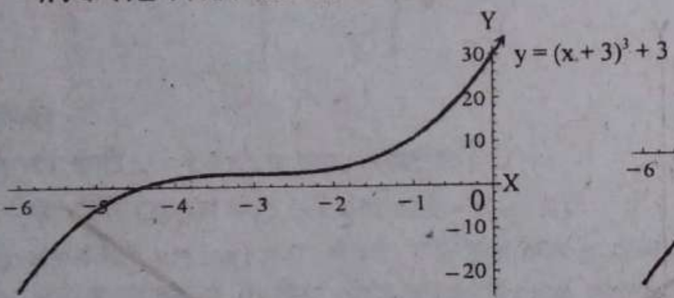
(i), (ii) : মুক্ত হস্তে $y = f(x) = x^3$ এর স্কেচ অঙ্কন করি। $f(x)$ এর লেখকে x-অক্ষ বরাবর 3 একক বামে সরালে $f(x+3)$ এবং 3 একক ডানে সরালে $f(x-3)$ এর স্কেচ পাওয়া যায়।

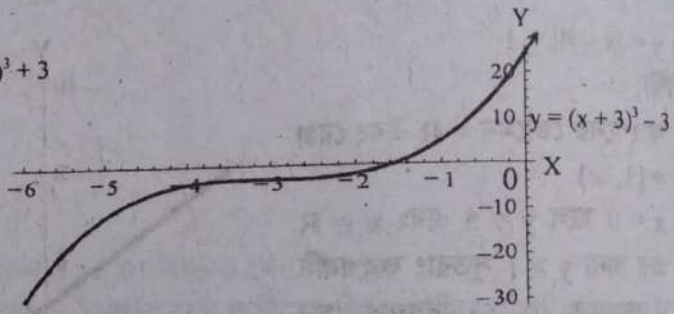






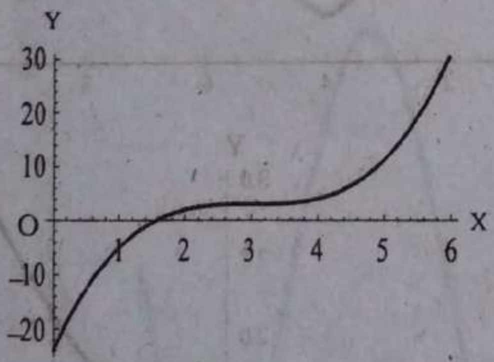
(iii), (iv) : $f(x+3)$ এর লেখকে y-অক্ষ বরাবর 3 একক উপরে সরালে $f(x+3)+3$ এবং 3 একক নিচে সরালে $f(x+3)-3$ এর স্কেচ পাওয়া যায়।

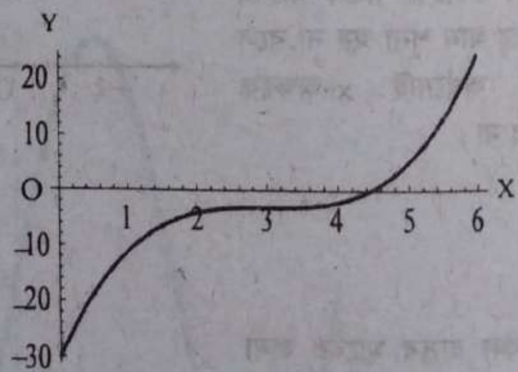




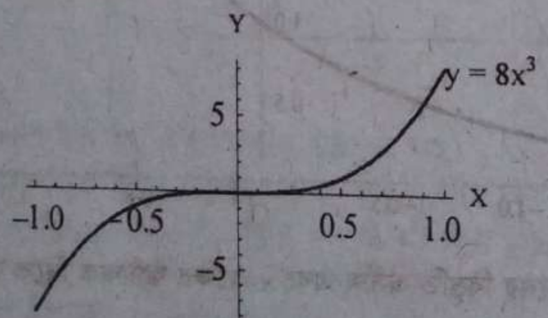
(v), (vi)

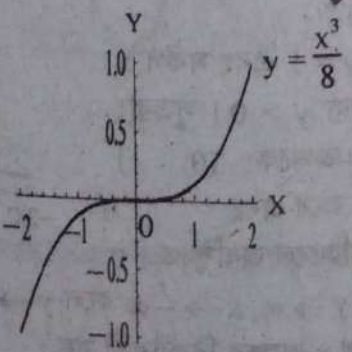
$f(x-3)$ এর লেখকে y-অক্ষ বরাবর 3 একক উপরে সরালে $f(x-3)+3$ এবং 3 একক নিচে সরালে $f(x-3)-3$ এর স্কেচ পাওয়া যায়।



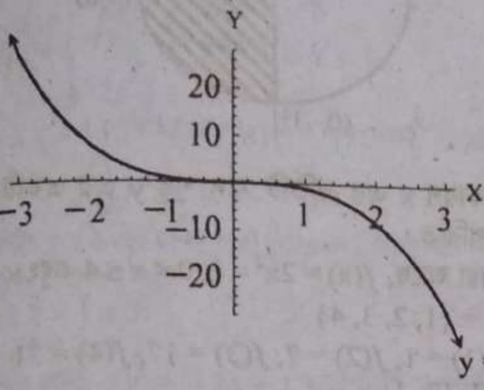


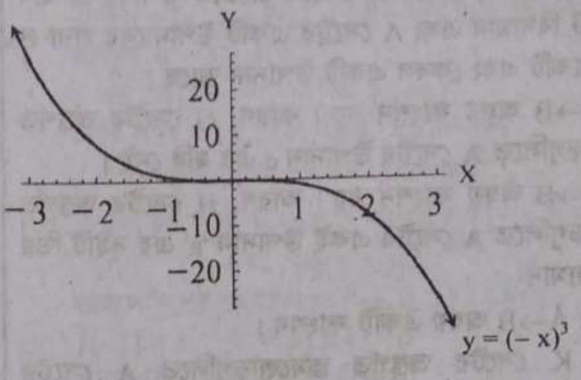
(vii), (viii) : $f(x)$ এর লেখকে x-অক্ষ বরাবর প্রসারিত করলে $f(2x)$ এবং x অক্ষ বরাবর সংকুচিত করলে $f\left(\frac{x}{2}\right)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।





(ix), (x) : $f(x)$ এর লেখকে x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত করলে $-f(x)$ এর এবং y-অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিফলিত করলে $f(-x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়। উল্লেখ্য যে $f(x) = x^3$ এর লেখচিত্রকে x ও y যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত করলে একই ধরনের লেখচিত্র পাওয়া যায়।





▶ অনুচ্ছেদ-8.6 | পৃষ্ঠা-৩০০

1. $y = x^2$ ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নেই, তা নিম্নোক্ত দুইটি পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

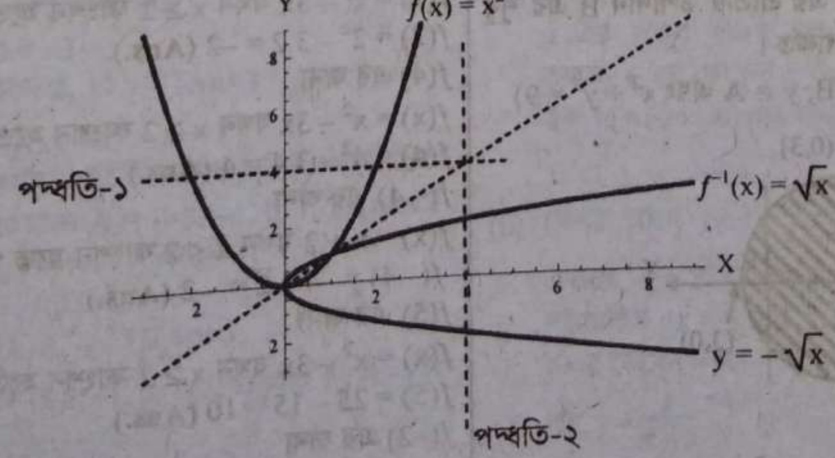
পদ্ধতি-১. $y = x^2$ ফাংশনের লেখকে x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা সর্বদাই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $y = x^2$ ফাংশনের কোনো বিপরীত ফাংশন নেই।

পদ্ধতি-২. $y = x^2$ ফাংশনের $y = x^2$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিফলিত লেখচিত্রকে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা দুইবার ছেদ করে। সুতরাং $y = x^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নেই।

দ্বিতীয় অংশ: যদি $y = f(x) = x^2$ ফাংশনটি নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ এবং $f(x) = x^2$ তাহলে $f(x)$ ফাংশন এক-এক এবং বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

এবং ফাংশনটি $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ এ বর্ণিত হয় তাহলে $f(x)$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হবে $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

নিম্নে ফাংশনগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



2. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{4x + 3}$ হলে $f^{-1}(x) = \dfrac{-3x + 5}{4x - 2}$;

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$ এবং রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

অনুশীলনী-৪ এর সমাধান

1.(i). $F : A \to B$ অন্বয় একটি ফাংশন। কারণ, F সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলিতে A সেটের প্রত্যেক উপাদানের ছবি B সেটে বিদ্যমান এবং A সেটের একটি উপাদানের জন্য B সেটে একটি এবং কেবল একটি উপাদান আছে।

$G : A \to B$ অন্বয় ফাংশন নয়। কারণ, G সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলিতে A সেটের উপাদান c এর ছবি নেই।

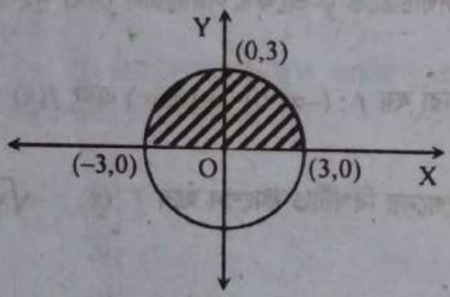
$H : A \to B$ অন্বয় ফাংশন নয়। কারণ, H সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলিতে A সেটের একই উপাদান 'a' এর দুইটি ভিন্ন ছবি বিদ্যমান

এবং $K: A \to B$ অন্বয় একটি ফাংশন।

কারণ, K সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলিতে A সেটের প্রত্যেক উপাদানের ছবি B সেটে বিদ্যমান এবং A সেটের একটি উপাদানের জন্য B সেটে একটি এবং কেবল একটি উপাদান আছে।

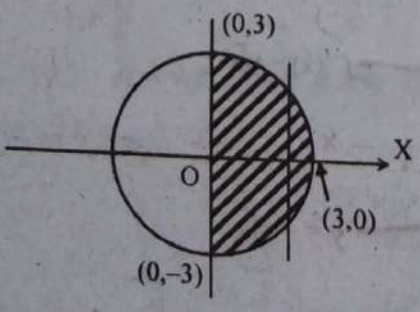
(ii). দেওয়া আছে, $A = [-3, 3]$ ও $B = [0, 3]$

এবং $f_1 = \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ এবং } x^2 + y^2 = 9\}$



f_1 একটি ফাংশন কারণ A এর প্রতিটি উপাদান B এর শুধু একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত।

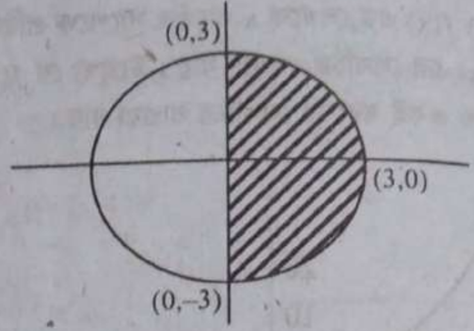
আবার, $f_2 = \{(x, y) : x \in B, y \in A \text{ এবং } x^2 + y^2 = 9\}$



এখানে $x \in [0, 3]$ এবং $y \in [-3, 3]$

অর্থাৎ x এর একটি উপাদান y এর দুইটি উপাদানের সাথে সম্পর্কযুক্ত সুতরাং f_2 ফাংশন নয়।

এবং $f_3 = \{(x, y) : x \in B, y \in B \text{ এবং } x^2 + y^2 = 9\}$



ফাংশন, কারণ x এর প্রতিটি মান শুধু y এর একটি মানের সাথে সম্পর্কিত।

2(i). দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^2 - 1, 0 < x \le 4$ এবং $x \in \mathbb{N}$

সুতরাং $x = \{1, 2, 3, 4\}$

তাহলে $f(1) = 1, f(2) = 7, f(3) = 17, f(4) = 31$

Ans. 1, 7, 17, 31

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = 3x + 2, x \in \mathbb{R}$

$\therefore f(0) = 2, f(-1) = -1, f(2) = 8, f(x^2) = 3x^2 + 2,$
$f(2x) = 6x + 2$

এবং $f(x - 1) = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1$

Ans. $2, -1, 8, 3x^2 + 2, 6x + 2, 3x - 1$

(iii) এখানে, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{যখন } x \ge 2 \\ x + 2 & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$

$f(0)$ এর জন্য

$f(x) = x + 2$ যখন $x < 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(0) = 0 + 2 = 2$ **(Ans.)**

$f(-1)$ এর জন্য $f(x) = x + 2$ যখন $x < 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(-1) = -1 + 2 = 1$ **(Ans.)**

$f(2)$ এর জন্য

$f(x) = x^2 - 3x$ যখন $x \ge 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(2) = 2^2 - 3.2 = -2$ **(Ans.)**

$f(4)$ এর জন্য

$f(x) = x^2 - 3x$ যখন $x \ge 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(4) = 4^2 - 3.4 = 4$ **(Ans.)**

$f(-4)$ এর জন্য

$f(x) = x + 2$ যখন $x < 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(-4) = -4 + 2 = -2$ **(Ans.)**

$f(5)$ এর জন্য

$f(x) = x^2 - 3x$ যখন $x \ge 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(5) = 25 - 15 = 10$ **(Ans.)**

$f(-2)$ এর জন্য

$f(x) = x + 2$ যখন $x < 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(-2) = -2 + 2 = 0$ **(Ans.)**

$f(-3)$ এর জন্য

$f(x) = x + 2$ যখন $x < 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(-3) = -3 + 2 = -1$ **(Ans.)**

$f(3)$ এর জন্য
$f(x) = x^2 - 3x$ যখন $x \geq 2$ ফাংশন হতে পাই,
$f(3) = 3^2 - 3.3 = 0$ **(Ans.)**

(iv) প্রদত্ত ফাংশন, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

এবং $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{যখন } 1 \leq x \end{cases}$

এখন $0 \leq x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) = 1$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত
$\therefore f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$1 \leq x$ অর্থাৎ $x \geq 1$ এর জন্য $f(x) = 2x + 1$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত
$\therefore f(1) = 2.1 + 1 = 3$
$f(2) = 2.2 + 1 = 5$
$f(3) = 2.3 + 1 = 7$

$x < 0$ এর জন্য $f(x) = -2x + 1$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত
$\therefore f(-1) = (-2)(-1) + 1 = 3$
$f(-2) = (-2)(-2) + 1 = 5$
$f(-3) = (-2)(-3) + 1 = 7$
Ans. 1, 3, 3, 1, 5, 7, 5, 7

(v) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > 3 \\ x^2 - 2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3, & x < -2 \end{cases}$

এখন, $2 \leq x \leq 3$ ব্যবধিতে,
$f(x) = x^2 - 2$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $\therefore f(2) = 2^2 - 2 = 2$
$x > 3$ ব্যবধিতে,
$f(x) = 3x - 1$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।
$\therefore f(4) = 3.4 - 1 = 11$
$f(-1)$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশন সংজ্ঞায়িত নয়।
$f(-3)$ এর জন্য, $x < -2$ ব্যবধিতে,
$f(x) = 2x + 3$ ফাংশনটি হতে পাই,
$f(-3) = 2.(-3) + 3 = -3$
$\therefore$ নির্ণেয় মান যথাক্রমে 2, 11, −3 **(Ans.)**

3. (i) দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + x + 1$
এখানে, A সেটের প্রতিটি মানের জন্য f সংজ্ঞায়িত।
তাহলে f এর ডোমেন $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ **(Ans.)**
এবং $f(-3) = 7, f(-1) = 1, f(0) = 1,$
$f(1) = 3, f(3) = 13$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{1, 3, 7, 13\}$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 5\}$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 + 1$
$\therefore f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
$f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$
$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$
$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
$f(5) = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{1, 2, 5, 26\}$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $f(x) = x$
$\therefore$ $f(2) = 2, f(4) = 4, f(6) = 6$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{2, 4, 6\}$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $f(x) = 4x^2 - 1$
এবং $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 6$ এবং $x, 2$ দ্বারা বিভাজ্য$\}$
তাহলে $A = \{2, 4, 6\}$
$\therefore$ f এর ডোমেন $= \{2, 4, 6\}$ **(Ans.)**
এবং $f(2) = 15, f(4) = 63, f(6) = 143$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{15, 63, 143\}$ **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $A = \{-1, 0, 1\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
এবং $f(x) = x + 2$
তাহলে f এর ডোমেন $= \{-1, 0, 1\}$ **(Ans.)**
$\therefore$ $f(-1) = 1, f(0) = 2, f(1) = 3$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{1, 2, 3\}$ **(Ans.)**

(vi) যেহেতু $A = [0, 2]$ এর সকল বাস্তব মানের জন্য f সংজ্ঞায়িত।
তাহলে f এর ডোমেন $= [0, 2]$ **(Ans.)**
আবার, $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x) \in [1, 3]$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= [1, 3]$ **(Ans.)**

(vii) দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
এবং $f(x) = x + 1$
তাহলে, f এর ডোমেন $= \{1, 2, 3, 4\} = A$ **(Ans.)**
এবং $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5.$
$\therefore$ f এর রেঞ্জ $= \{2, 3, 4, 5\}$ **(Ans.)**
f একটি সার্বিক ফাংশন নয়। কারণ B সেটের উপাদান $\{1\}$ এর জন্য A সেটে কোনো প্রতিচ্ছবি নেই।

4.(i) দেওয়া আছে, $f(x) = x + 3$
x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।
তাহলে f এর ডোমেন $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **(Ans.)**
এবং $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ এর জন্য f এর রেঞ্জ $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
(Ans.)

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{x - 5}$
এখানে, $x = 5$ ব্যতীত x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত। $x = 5$ হলে $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত।
f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{5\}$ **(Ans.)**
ধরি, $y = \frac{1}{x - 5}$
বা, $x = \frac{1 + 5y}{y}$ বা, $f(y) = \frac{1 + 5y}{y}$
$\therefore$ $f^{-1}(x) = \frac{1 + 5x}{x}$; যা $x = 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত নয়।
$\therefore$ রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{0\}$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

এখানে, $x = 0$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত। $x = 0$ হলে $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত। তাহলে f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{0\}$ **(Ans.)**

x এর কোনো মানের জন্য $f(x)$ এর মান ঋণাত্মক বা 0 পাওয়া যায় না।

$\therefore$ রেঞ্জ $= (0, \infty)$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 1$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ f এর ডোমেন $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **(Ans.)**

যখন $x > 0$ তখন $f(x) > 1$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) > 1$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 1$

$\therefore$ রেঞ্জ $= [1, \infty)$ **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $f(x) = -x^2 + 1$

এখানে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

তাহলে f-এর ডোমেন $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **(Ans.)**

যখন $x > 0$ তখন $f(x) < 1$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) < 1$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 1$

$\therefore$ রেঞ্জ $= (-\infty, 1]$ **(Ans.)**

(vi) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

এখানে, $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত। অতএব, f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{2\}$ **(Ans.)**

আবার, $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = x + 2$

এখানে দেখা যাচ্ছে, $x = 2$ হলে $f(x) = 4$ হয়;

যেহেতু $x \neq 2$, সুতরাং $f(x) \neq 4$.

অতএব, রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{4\}$ **(Ans.)**

(vii) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$

$x = \sqrt{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$x = \sqrt{2}$ হলে $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$ **(Ans.)**

আবার, $f(x) = x + \sqrt{2}$

এখানে দেখা যাচ্ছে, $x = \sqrt{2}$ হলে $f(x) = 2\sqrt{2}$ হয়

যেহেতু $x \neq \sqrt{2}$

সুতরাং $f(x) \neq 2\sqrt{2}$ ।

অতএব, রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{2\sqrt{2}\}$ **(Ans.)**

(viii) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x - 3}{3x + 1}$

$x = -\frac{1}{3}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$x = -\frac{1}{3}$ হলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **(Ans.)**

ধরি, $y = \frac{x-3}{3x+1}$ বা, $x = \frac{-3-y}{3y-1}$

ইহা সংজ্ঞায়িত হবে যখন $y \neq \frac{1}{3}$ হবে।

$\therefore$ রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ **(Ans.)**

(ix) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

$x = 2$ ব্যতিত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত। $x = 2$ হলে $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{2\}$ **(Ans.)**

আবার, ধরি, $y = \frac{x}{x-2}$

বা, $xy - 2y - x = 0$ বা, $x(y-1) = 2y$

$\therefore$ $x = \frac{2y}{y-1}$

ইহা সংজ্ঞায়িত হবে যখন $y - 1 \neq 0$, অতএব, $y \neq 1$

$\therefore$ রেঞ্জ, $f = \mathbb{R} - \{1\}$ **(Ans.)**

(x) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

ইহা সংজ্ঞায়িত হবে যখন, $x - 1 \neq 0$, অতএব, $x \neq 1$

$\therefore$ ডোম, $f = \mathbb{R} - \{1\}$ **(Ans.)**

আবার, ধরি, $y = \frac{x}{x-1}$ বা, $yx - y = x$

বা, $yx - x = y$ বা, $x(y-1) = y$

$\therefore$ $x = \frac{y}{y-1}$

ইহা সংজ্ঞায়িত হবে যখন $y - 1 \neq 0$, অতএব, $y \neq 1$

$\therefore$ রেঞ্জ, $f = \mathbb{R} - \{1\}$ **(Ans.)**

(xi) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x + 4}{x + 4}$

এখানে $x = -4$ ব্যতিত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত। $x = -4$ হলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ f এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{-4\}$ **(Ans.)**

আবার, উপরিউক্ত ডোমেনের সকল মানের জন্য $f(x) = 1$ হবে।

$\therefore$ রেঞ্জ, $f = \{1\}$ **(Ans.)**

(xii) দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-1}$
প্রদত্ত ফাংশনে x এর মান 1 অথবা 1 এর বেশি হলে ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। নতুবা ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত। তাহলে ডোমেন, $f = [1, \infty)$ **(Ans.)**
আবার, উপরিউক্ত ডোমেনের জন্য $f(x)$ এর মান 0 অথবা 0 এর বেশি হবে। তাহলে রেঞ্জ, $f = [0, \infty)$

(xiii) দেওয়া আছে, $f(x) = -\sqrt{x+3}$
প্রদত্ত ফাংশনটিতে x এর মান -3 অথবা -3 এর বেশি হলে ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে। নতুবা ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হবে।
অতএব, ডোমেন, $f = [-3, \infty)$ **(Ans.)**
উপরিউক্ত ডোমেনের জন্য $f(x)$ এর মান 0 অথবা 0 থেকে ছোট যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হবে।
তাহলে রেঞ্জ, $f = (-\infty, 0]$ **(Ans.)**

(xiv) দেওয়া আছে,
$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{(x-1)(x-2)}$
এখানে $1 < x < 2$ হলে $(x-1)(x-2)$ ঋণাত্মক। সুতরাং $f(x)$ অবাস্তব হয়। তাই ডোমেন সেট = 1 ও 2 এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।
অর্থাৎ ডোমেন, $f = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ **(Ans.)**
আবার, উপরিউক্ত ডোমেনের জন্য রেঞ্জ সেট হবে সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট।
অর্থাৎ রেঞ্জ, $f = [0, \infty)$ **(Ans.)**

(xv) দেওয়া আছে, $f(x) = x^3$
x-এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।
$\therefore$ f-এর ডোমেন $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **(Ans.)**
ইহা স্পষ্ট যে, x-এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় অর্থাৎ $f(x) \in \mathbb{R}$.
$\therefore$ রেঞ্জ $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **(Ans.)**

(xvi) দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$
ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত
$\therefore$ ডোমেন $= \mathbb{R}$ **(Ans.)**
sinx পর্যায়বৃত্ত ফাংশন হওয়ায় মানগুলি পর্যায়ক্রমে $[-1, 1]$ ব্যবধিতে আবর্তিত হয়।
$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $= [-1, 1]$ **(Ans.)**

(xvii) প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
ইহা সংজ্ঞায়িত হবে যখন $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4$ হবে।
$\therefore$ ডোম $f = -2 \leq x \leq 2 = [-2, 2]$ **(Ans.)**
এবং রেঞ্জ $f = 0 \leq f(x) \leq 2 = [0, 2]$ **(Ans.)**

(xviii) প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
ডোমেন, $f = \mathbb{R} - \{0\}$ এবং রেঞ্জ, $f = \{-1, 1\}$

5.(a) (i) দেওয়া আছে, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
এখন, $f(a) = a$ এবং $f(b) = b$
যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে $a = b$
সুতরাং f একটি এক-এক ফাংশন।
এখানে, $R_f = \mathbb{R}$ অর্থাৎ কোডোমেনের প্রতিটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি ডোমেন সেটে বিদ্যমান।
অতএব, f একটি সার্বিক ফাংশন।
$\therefore$ f একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
এখন, $f(c) = ac + b$ এবং $f(d) = ad + b$
যদি $f(c) = f(d)$ হয়, তবে
$ac + b = ad + b$
$\Rightarrow ac = ad$
$\therefore c = d \quad [\because a \neq 0]$
$\therefore$ f একটি এক-এক ফাংশন।
এখানে, $R_f = \mathbb{R}$ অর্থাৎ কোডোমেনের প্রতিটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি ডোমেন সেটে বিদ্যমান।
সুতরাং f একটি সার্বিক ফাংশন।
$\therefore$ f একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

(iii) $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
মনে করি, $a, b \in [0, \infty)$ তাহলে
$f(a) = a^2 + 1$, $f(b) = b^2 + 1$
এখন যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে
$\Rightarrow a^2 + 1 = b^2 + 1$
$\Rightarrow a^2 - b^2 = 0$
$\Rightarrow (a+b)(a-b) = 0$
$\Rightarrow a - b = 0 \quad \because a + b \neq 0$
$\therefore a = b$
অতএব, f একটি এক-এক ফাংশন।
আবার, প্রদত্ত ডোমেনের জন্য f এর রেঞ্জ $[1, \infty)$
$\therefore$ f একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $f : [0, 2] \to [0, 2]$
ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
ধরি, $a, b \in [0, 2]$, তাহলে
$f(a) = \sqrt{4 - a^2}$, $f(b) = \sqrt{4 - b^2}$
এখন যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে
$\sqrt{4 - a^2} = \sqrt{4 - b^2}$
$\Rightarrow a^2 - b^2 = 0$
$\Rightarrow (a+b)(a-b) = 0$
$\Rightarrow a - b = 0 \quad \because a + b \neq 0$
$\therefore a = b$

$\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক।
আবার, প্রদত্ত ডোমেনের জন্য f এর রেঞ্জ $[0, 2]$
অতএব, f ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক। **(দেখানো হলো)**

(v) দেওয়া আছে,
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
ধরি, $a, b \in \mathbb{R}$ তাহলে $f(a) = a^3, f(b) = b^3$
এখন যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তাহলে

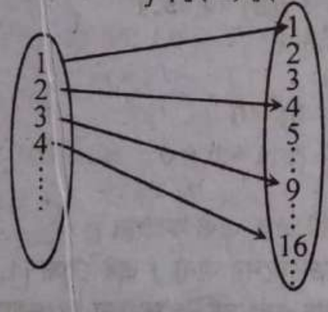
$$a^3 = b^3$$
$$\Rightarrow a^3 - b^3 = 0$$
$$\Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$$
$$\Rightarrow a - b = 0 \quad \because a^2 + ab + b^2 \neq 0$$
$$\therefore a = b$$

$\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক।

ধরি, $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$
$f(x) = x^3$
$f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$
$\therefore f(x) = y$
$\therefore$ f একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

(b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
এখন $f(a) = a^2, f(b) = b^2$
যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে
$a^2 = b^2$
$\therefore$ $a = b$
$\therefore$ f একটি এক-এক ফাংশন।

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$



f এর রেঞ্জ সেটে সর্বদাই পূর্ণবর্গ সংখ্যা বিদ্যমান। পূর্ণ বর্গ বাদে অন্য স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির কোনো প্রতিচ্ছবি ডোমেন সেটে বিদ্যমান নেই। সুতরাং f সার্বিক ফাংশন নয়।
অতএব, f ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয়।
(দেখানো হলো)

(c) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি
$f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত অর্থাৎ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

মনে করি, $a, -a \in \mathbb{R}$, যেখানে $a > 0$
তাহলে $f(a) = a$ এবং $f(-a) = a$
$\therefore f(a) = f(-a)$
কিন্তু $a \neq -a$, তাহলে f এক-এক ফাংশন নয়।
আবার, $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$
অর্থাৎ, কোডোমেনের প্রতিটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি ডোমেন সেটে বিদ্যমান।
অতএব $f(x) = |x|$ ফাংশনটি এক-এক নয় কিন্তু সার্বিক।
(দেখানো হলো)

(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি
$f(x) = x^3 + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
এখন, $f(a) = a^3 + 5$ এবং $f(b) = b^3 + 5$
যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে $a^3 + 5 = b^3 + 5$
বা, $a^3 - b^3 = 0$
বা, $(a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$
বা, $a - b = 0 \therefore a = b$

এখন, $a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$
$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$; যাহা সর্বদা ≥ 0

অর্থাৎ, $a^3 + 5 = b^3 + 5 \Leftrightarrow a = b$
অতএব, f এক-এক ফাংশন।
আবার $b \in \mathbb{R}$ যেকোনো প্রদত্ত সংখ্যা হলে,
ধরি, $y = f(x) = x^3 + 5$
$\therefore x = \sqrt[3]{y-5}$
$f(\sqrt[3]{y-5}) = (\sqrt[3]{y-5})^3 + 5 = y$
সুতরাং f সার্বিক।
অতএব, f এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। **(Ans.)**

(e) দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$
$\therefore f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3$
তাহলে দেখা যাচ্ছে x এর প্রতিটি মানের জন্য $f(x)$ এর কেবল একটি মান পাওয়া যাচ্ছে। আবার, $\{0, 1, 2, 3\}$ সেটের প্রতিটি উপাদান প্রথম সেটের কোনো না কোনো উপাদানের ছবি।
অতএব f একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন। **(Ans.)**

6.(a) (i) মনে করি, $x = f^{-1}(9)$
বা, $f(x) = 9$ বা, $x^2 = 9$
$\therefore x = \pm 3$
$\therefore f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$ **(Ans.)**

(ii) সংজ্ঞানুযায়ী,
$f^{-1}(16) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 16\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 16\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 4\} = \{-4, 4\}$ **(Ans.)**

(iii) সংজ্ঞানুযায়ী,

$f^{-1}(-16) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -16\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -16\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 4i\} = \{\ \}$ **(Ans.)**

(iv) সংজ্ঞানুযায়ী,

$f^{-1}(36) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 36\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 36\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 6\} = \{-6, 6\}$ **(Ans.)**

(v) মনে করি, $x = f^{-1}(25)$

$\Rightarrow f(x) = 25$
$\Rightarrow x^2 = 25$
$\therefore x = \pm 5$
$\therefore f^{-1}(25) = \{-5, 5\}$ **(Ans.)**

(vi) এখানে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$

সংজ্ঞানুযায়ী,

$f^{-1}([4, 25]) = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq f(x) \leq 25\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x^2 \leq 25\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq |x|^2 \leq 25\}$ $[\because x^2 = |x|^2]$
$= \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq |x| \leq 5\}$
$= 2 \leq x \leq 5$ অথবা $2 \leq -x \leq 5$
$= 2 \leq x \leq 5$ অথবা $-2 \geq x \geq -5$
$= 2 \leq x \leq 5$ অথবা $-5 \leq x \leq -2$ **(Ans.)**

(vii) ধরি, $x = f^{-1}(-4)$

$\Rightarrow f(x) = -4$
$\Rightarrow x^2 = -4$
$\therefore x = \pm 2i$

যেহেতু x একটি অবাস্তব সংখ্যা।

সুতরাং $f^{-1}(-4) = \{\ \}$ **(Ans.)**

(viii) সংজ্ঞানুযায়ী,

$f^{-1}([-1, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x) \leq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^2 \leq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : |x^2| \leq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : |x|^2 \leq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$
$= -1 \leq x \leq 1$ **(Ans.)**

(b) ধরি, $f(x) = x^2 - 7 = y$ তাহলে

$x^2 = y + 7$ বা $x = \sqrt{y + 7}$

$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x + 7}$

তাহলে $f^{-1}(2) = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = \pm 3$

$\therefore f^{-1}(2) = \{-3, 3\}$ **(Ans.)**

(c) (i) এখানে, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2 + 1$

সংজ্ঞানুযায়ী, $f^{-1}(-5) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -5\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = -5\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -6\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm i\sqrt{6}\}$
$= \{\ \}$ **(Ans.)**

(ii) সংজ্ঞানুযায়ী, $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm i\}$
$= \{\ \}$ **(Ans.)**

(iii) সংজ্ঞানুযায়ী, $f^{-1}(2) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 2\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 2\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 1\}$
$= \{-1, 1\}$ **(Ans.)**

(iv) সংজ্ঞানুযায়ী, $f^{-1}(5) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 5\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 5\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 2\}$
$= \{-2, 2\}$ **(Ans.)**

(v) সংজ্ঞানুযায়ী, $f^{-1}(10) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 10\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 10\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x = \pm 3\}$
$= \{-3, 3\}$ **(Ans.)**

(vi) $f(x) = x^2 + 1 = y$ (ধরি)

তাহলে $x = \pm\sqrt{y - 1}$

$\therefore$ $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x - 1}$

অতএব, $f^{-1}(10) = \pm 3$

$f^{-1}(26) = \pm 5$

$\therefore$ $f^{-1}([10, 26]) = \{x : -5 \leq x \leq -3$

অথবা $3 \leq x \leq 5\}$ **(Ans.)**

(d) $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$, $f: A \to B$

এবং $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

ধরি, $a, b \in \mathbb{R}$

$f(a) = \dfrac{a - 2}{a - 3}$; $f(b) = \dfrac{b - 2}{b - 3}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে

$\dfrac{a - 2}{a - 3} = \dfrac{b - 2}{b - 3}$

বা, $(a - 2)(b - 3) = (a - 3)(b - 2)$

বা, $ab - 2b - 3a + 6 = ab - 3b - 2a + 6$

বা, $-3a + 2a = -3b + 2b$

বা, $-a = -b \therefore a = b$

সুতরাং ফাংশনটি এক এক।

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

$\therefore$ $y = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

বা, $xy - 3y = x - 2$

বা, $xy - x = 3y - 2$

বা, $x(y - 1) = 3y - 2$

বা, $x = \dfrac{3y - 2}{y - 1}$ ... ... (i)

$y = 1$ হলে x অসংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore y = 1$ বা, $f(x) = 1 \notin R_f$

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\} = B = \text{cod}(f)$

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক।

(i) হতে পাই, $x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

আবার, $f(x) = y$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \dfrac{3y-2}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$ **(Ans.)**

(e) দেওয়া আছে, $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

এবং $f: A \to B$, $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

ধরি, $a, b \in \mathbb{R}$

$f(a) = \dfrac{a-3}{2a+1}$; $f(b) = \dfrac{b-3}{2b+1}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে, $\dfrac{a-3}{2a+1} = \dfrac{b-3}{2b+1}$

বা, $(a-3)(2b+1) = (2a+1)(b-3)$

বা, $2ab - 6b + a - 3 = 2ab + b - 6a - 3$

বা, $a = b$

$\therefore f$ ফাংশনটি এক-এক।

আবার ধরি, $y = f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

$\therefore y = \dfrac{x-3}{2x+1}$

বা, $2xy + y = x - 3$

বা, $2xy - x = -y - 3$

বা, $x - 2xy = y + 3$

বা, $x(1-2y) = y + 3$

বা, $x = \dfrac{y+3}{1-2y}$ ...... (i)

$y = \dfrac{1}{2}$ হলে x অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{1}{2} \notin R_f$

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} = B = \text{cod}(f)$

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক।

এখন (i) নং হতে পাই, $x = \dfrac{y+3}{1-2y}$

আবার, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{1-2y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$ **(Ans.)**

(f) দেওয়া আছে, $f : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$

ধরি, $a, b \in \mathbb{R}$

$f(a) = \dfrac{2a+3}{4a-5}$

$f(b) = \dfrac{2b+3}{4b-5}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে $\dfrac{2a+3}{4a-5} = \dfrac{2b+3}{4b-5}$

বা, $(2a+3)(4b-5) = (4a-5)(2b+3)$

বা, $8ab + 12b - 10a - 15 = 8ab - 10b + 12a - 15$

বা, $22b = 22a \quad \therefore a = b$

$\therefore f$ ফাংশনটি এক এক।

আবার, ধরি, $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$

$\therefore y = \dfrac{2x+3}{4x-5}$

বা, $4xy - 5y = 2x + 3$

বা, $4xy - 2x = 5y + 3$

বা, $x(4y-2) = 5y + 3$

বা, $x = \dfrac{5y+3}{4y-2} = \dfrac{5y+3}{2(y-1)}$ ...... (i)

$y = 1$ হলে x অসংজ্ঞায়িত হয়।

$1 \notin R_f$

$R_f = \mathbb{R} - \{1\} = B = \text{cod}(f)$

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক।

এখন, (i) হতে পাই, $x = \dfrac{5y+3}{4y-2}$

আবার, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \dfrac{5y+3}{4y-2}$

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{4x-2}$ **(Ans.)**

(g) মনে করি, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore \; 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$ বা, $2x_1 = 2x_2$

$\therefore \; x_1 = x_2$

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক।

এখন যদি $y = 2x - 3$ হয়, তাহলে $x = \frac{y+3}{2}$,
যা y এর সব বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।
রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$ = কোডোমেন f
∴ ফাংশনটি সার্বিক।
অতএব, f এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন।
ধরি, $y = 2x - 3$
বা, $2x = y + 3$

∴ $x = \frac{y+3}{2}$ $\left[\begin{array}{l} \therefore y = f(x) \\ \therefore x = f^{-1}(y) \end{array}\right]$

অর্থাৎ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ **(Ans.)**

7.(a) দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 5$ এবং $g(x) = x^2 + 6$
$g(f(2))$ এ $f(2) = 2.2 - 5 = 4 - 5 = -1$
$\therefore g(f(2)) = g(-1) = (-1)^2 + 6 = 1 + 6 = 7$ **(Ans.)**
$f(g(2))$ এ $g(2) = 4 + 6 = 10$
$\therefore f(g(2)) = f(10) = 20 - 5 = 15$ **(Ans.)**
এবং $f(g(5))$ এ $g(5) = 5^2 + 6 = 25 + 6 = 31$
$\therefore f(g(5)) = f(31) = 2.31 - 5 = 62 - 5 = 57$ **(Ans.)**

(b) দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = x^2$
$\therefore f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$ **(Ans.)**
আবার, $g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$ **(Ans.)**

(c) $g(f(x)) = g(x^2 + 2x - 3)$
$= 3(x^2 + 2x - 3) - 4$
$= 3x^2 + 6x - 9 - 4$
$= 3x^2 + 6x - 13$ **(Ans.)**
$f(g(x)) = f(3x - 4)$
$= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3$
$= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$
$= 9x^2 - 18x + 5$ **(Ans.)**
$g(f(2))$ এ $f(2) = 2^2 + 2.2 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$
$\therefore g(f(2)) = g(5) = 3.5 - 4 = 11$ **(Ans.)**
এবং $f(g(2))$এ $g(2) = 3.2 - 4 = 2$
$\therefore f(g(2)) = f(2) = 9(2)^2 - 18.2 + 5$
$= 36 - 36 + 5 = 5$ **(Ans.)**
$f(g(5)) = f(11) = 121 + 22 - 3 = 140$ **(Ans.)**
$g(f(5)) = g(32) = 96 - 4 = 92$ **(Ans.)**
$f(g(3)) = f(5) = 25 + 10 - 3 = 32$ **(Ans.)**
এবং $g(f(3)) = g(12) = 36 - 4 = 32$ **(Ans.)**

(d) (i) $fog(-2)$ এ, $fog = f(x^2 + 1)$
$= (x^2 + 1)^2 - 2|x^2 + 1|$
$\therefore fog(-2) = (4+1)^2 - 2|4 + 1|$
$= 25 - 10 = 15$ **(Ans.)**

(ii) $gof(-4)$ এ, $gof = g(x^2 - 2|x|) = (x^2 - 2|x|)^2 + 1$
$\therefore gof(-4) = (16 - 2|-4|)^2 + 1$
$= (16 - 8)^2 + 1 \ [\because |-4| = 4]$
$= 64 + 1 = 65$ **(Ans.)**

(iii) $fog(5)$ এ, $fog = f(x^2 + 1)$
$= (x^2 + 1)^2 - 2|x^2 + 1|$
$\therefore fog(5) = (25 + 1)^2 - 2|25 + 1|$
$= 676 - 52 = 624$ **(Ans.)**

(iv) $gof(3)$ এ, $gof = g(x^2 - 2|x|)$
$= (x^2 - 2|x|)^2 + 1$
$= x^4 - 4x^2|x| + 4x^2 + 1$
$\therefore gof(3) = 3^4 - 4.3^2.3 + 4.3^2 + 1$
$= 118 - 108 = 10$ **(Ans.)**

(e) $\therefore (fog)(x) = f(x^3 + 1) = (x^3 + 1)^2$
$= (x^3)^2 + 2.x^3.1 + 1^2$
$= x^6 + 2x^3 + 1$
এবং $(gof)(x) = g(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1$
$\therefore (fog)(4) = 4096 + 128 + 1 = 4225$ **(Ans.)**
$\therefore (fog)(-3) = 729 + 54 + 1 = 784$
এবং $(gof)(-3) = 729 + 1 = 730$
$\therefore (fog)(-3) \neq (gof)(-3)$ **(দেখানো হলো)**

(f) **প্রথম অংশ :** $fog = f(g(x))$
$= f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$ **(Ans.)**
প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x^2 - 1 \geq 0$ হয়
বা, $(x + 1)(x - 1) \geq 0$
∴ $x \geq 1$ অথবা $x \leq -1$
সুতরাং fog এর ডোমেন $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ **(Ans.)**
এবং fog এর রেঞ্জ $= [0, \infty)$ **(Ans.)**
দ্বিতীয় অংশ: $gof = g(f(x))$
$= g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1$
$= x - 1$ **(Ans.)**
আবার, gof, x এর সকল মানের জন্য বাস্তব।
∴ ডোমেন, $gof = \mathbb{R}$ **(Ans.)**
এবং রেঞ্জ, $gof = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

(g) **প্রথম অংশ :** $gof = g(f(x))$
সুতরাং $gof = g(x + 1)$
$= (x + 1)^2 + 2$
$= x^2 + 2x + 1 + 2 = x^2 + 2x + 3$ **(Ans.)**
দ্বিতীয় অংশ: $fog = f(g(x))$
$= f(x^2 + 2) = x^2 + 2 + 1$
$= x^2 + 3$ **(Ans.)**

৪. (i) এখানে $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x, \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

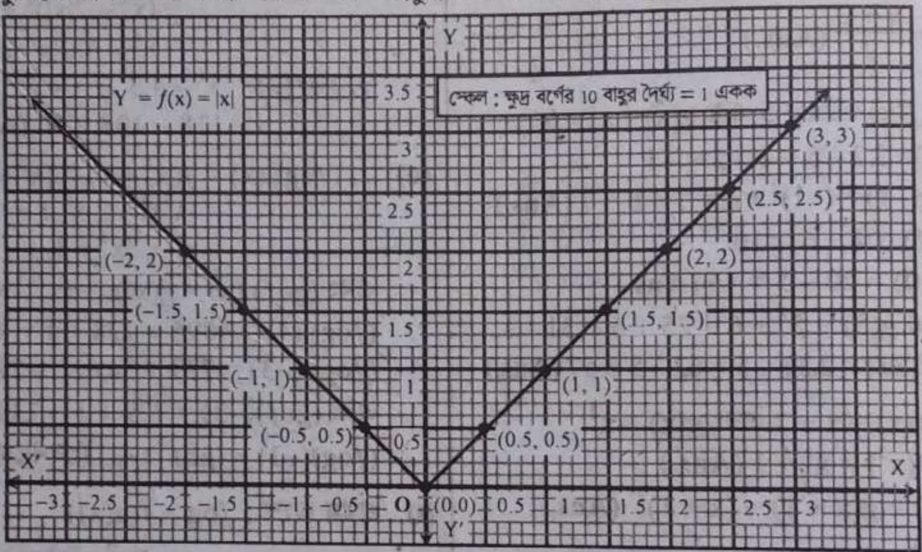
ফাংশনটি $-\infty < x < \infty$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। এ ব্যবধির মধ্যে x এর কতকগুলি মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবন্ধ করি :

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	2	1.5	1	0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

ওপরের তালিকা হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি যথাক্রমে

(−2, 2), (−1.5, 1.5), (−1, 1), (−0.5, 0.5), (0, 0), (0.5, 0.5), (1, 1), (2, 2), (2.5, 2.5) এবং (3, 3)।

এখন গ্রাফ কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূলবিন্দুকে চিহ্নিত করে উৎপন্ন কার্তেসীয় সমতলে উপরিউক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলিকে একটি অবিচ্ছিন্ন রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে নিম্নের লেখচিত্রটি পাই।



(ii) এখানে, $y = f(x) = x^2, -3 \leq x \leq 3$

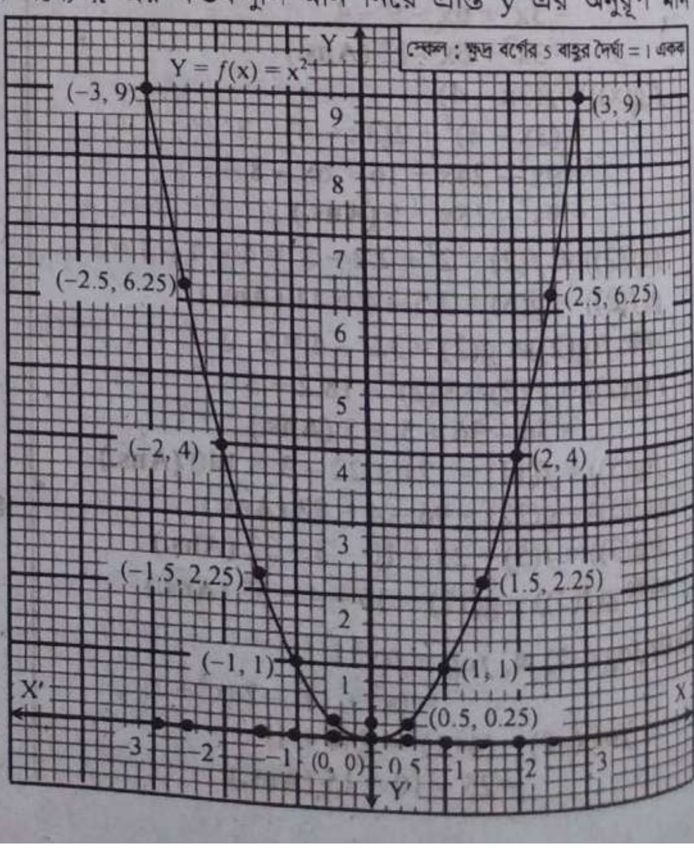
ফাংশনটি $-3 \leq x \leq 3$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। এ ব্যবধির মধ্যে x এর কতকগুলি মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবন্ধ করি :

x	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9

ওপরের তালিকা হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি যথাক্রমে

(−3, 9), (−2.5, 6.25), (−2, 4), (−1.5, 2.25), (−1, 1), (−0.5, 0.25), (0, 0), (0.5, 0.25), (1, 1), (1.5, 2.25), (2, 4), (2.5, 6.25), (3, 9)।

এখন গ্রাফ কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূল বিন্দুকে চিহ্নিত করে উৎপন্ন কার্তেসীয় সমতলে উপরিউক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলিকে একটি অবিচ্ছিন্ন রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে নিম্নের লেখচিত্রটি পাই।



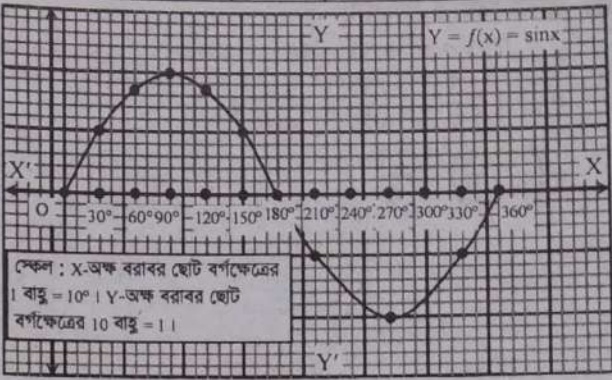
(iii) এখানে $y = f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

ফাংশনটি $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। এ ব্যবধির মধ্যে x এর কতকগুলি মান নিয়ে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মান তালিকাবদ্ধ করি।

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y=sinx	0	0.50	0.87	1	0.87	0.50	0	−0.50	−0.87	−1	−0.87	−0.50	0

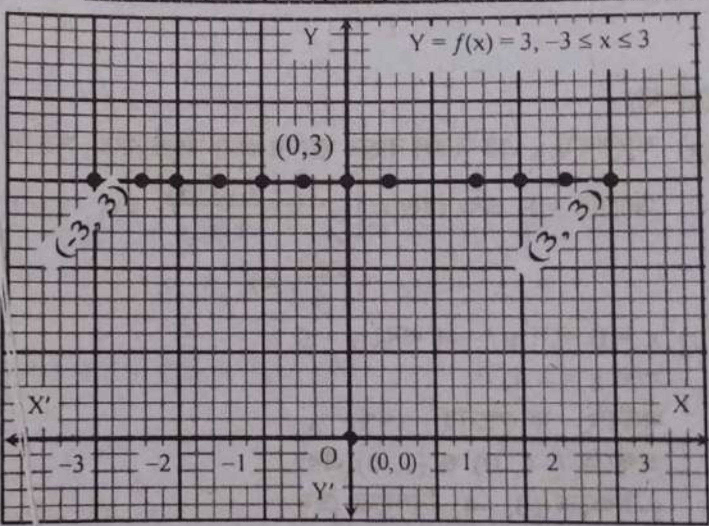
উপরের তালিকা হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি যথাক্রমে
(0°, 0), (30°, 0.5), (60°, 0.87), (90°, 1), (120°, 0.87), (150°, 0.5), (180°, 0), (210°, −0.5), (240°, −0.87), (270°, −1), (300°, −0.87), (330°, −0.5), (360°, 0)।

এখন গ্রাফ কাগজে x-অক্ষ, y-অক্ষ এবং মূল বিন্দুকে চিহ্নিত করে উৎপন্ন কার্তেসীয় সমতলে উপরিউক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলিকে একটি অবিচ্ছিন্ন রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে নিম্নের লেখচিত্রটি পাই।



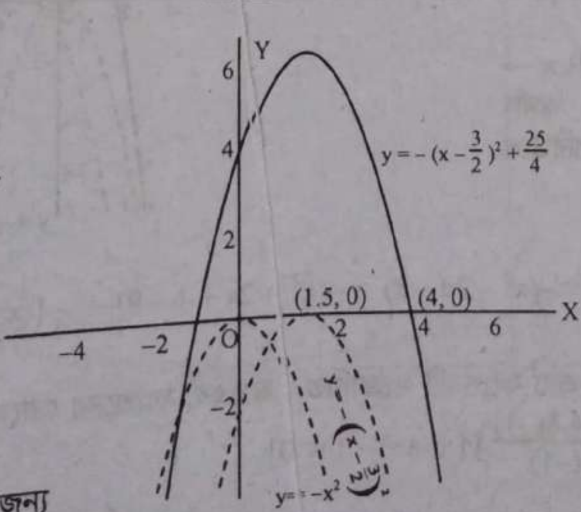
(iv) এখানে, $y = f(x) = 3,\ -3 \le x \le 3$

ফাংশনটি $-3 \le x \le 3$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। এটি x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ এবং x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y এর মান সর্বদা 3। সুতরাং লেখচিত্র x-অক্ষের সমান্তরালে 3 একক দূরত্বে অবস্থিত।



9.(i) প্রদত্ত দ্বিঘাত ফাংশন :

$$y = f(x) = 4 + 3x - x^2$$
$$= -(x^2 - 3x - 4)$$
$$= -\left\{x^2 - 2.\frac{3}{2}.x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4\right\}$$
$$= -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\}$$
$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$



বৈশিষ্ট্য :

(a) ফাংশনে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left(-\infty, -\frac{3^2 - 4.(-1).4}{4.(-1)}\right]$ $[\because a = -1 < 0]$

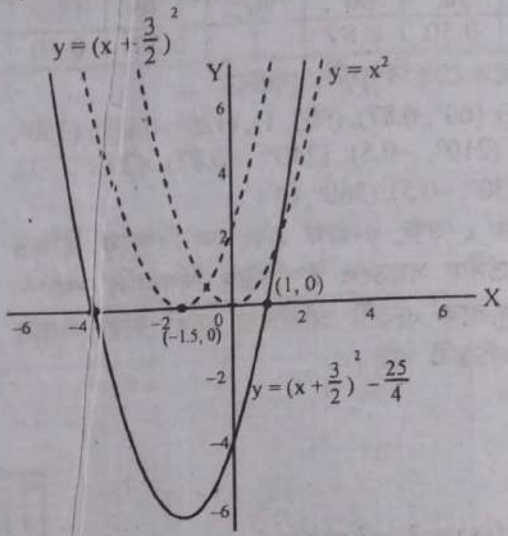
$= \left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$

(b) $x = 0$ হলে $y = 4$ এবং $y = 0$ হলে $x = -1, 4$ সুতরাং লেখটি x-অক্ষকে $(-1, 0)$ ও $(4, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) $x \to +\infty$ হলে $y \to -\infty$, $x \to -\infty$ হলে $y \to -\infty$ এবং $a < 0$ হওয়ায় ফাংশনের লেখ x-অক্ষের নিচে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(ii) প্রদত্ত দ্বিঘাত ফাংশন:

$$y = f(x) = x^2 + 3x - 4$$
$$= x^2 + 2.\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$



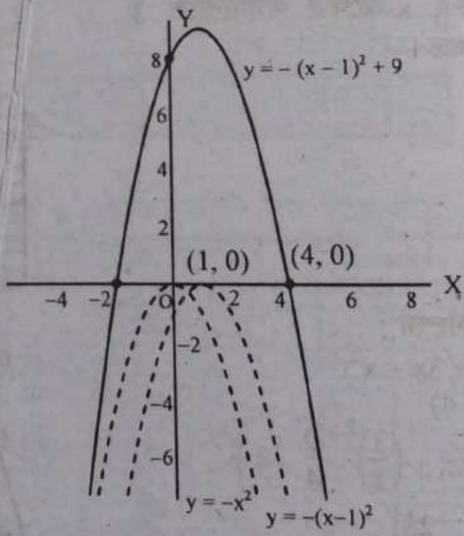
বৈশিষ্ট্য :

(a) ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left[-\frac{3^2 - 4.1.(-4)}{4}, \infty\right)$ [$\because a = 1 > 0$]

$$= [\frac{-25}{4}, \infty)$$

(b) $x = 0$ হলে $y = -4$ এবং $y = 0$ হলে $x = -4, 1$ সুতরাং ফাংশনের লেখ x-অক্ষকে $(-4, 0)$ ও $(1, 0)$ এবং y-অক্ষকে $(0, -4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$ অর্থাৎ ফাংশনটি x-অক্ষের উপরিতলে ($\because a > 0$) অসীমে বিস্তৃত।



(iii) প্রদত্ত ফাংশন:

$$y = f(x) = 8 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 8) = -(x^2 - 2x + 1 - 9) = -\{(x-1)^2 - 9\} = -(x-1)^2 + 9$$

বৈশিষ্ট্য :

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left(-\infty, -\frac{2^2 - 4.8(-1)}{4.(-1)}\right]$ [$\because a = -1 < 0$]

$$= (-\infty, 9]$$

(b) $x = 0$ হলে $y = 8$ এবং $y = 0$ হলে $x = -2, 4$

অর্থাৎ ফাংশনের লেখ x-অক্ষকে $(-2, 0)$ ও $(4, 0)$ এবং y-অক্ষকে $(0, 8)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to -\infty$, $x \to -\infty$ হলে $y \to -\infty$ এবং $a < 0$ হওয়ায় লেখটি সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের নীচের অর্ধতলে অসীমে বিস্তৃত।

(iv) $y = -x^2 + 3x + 2$

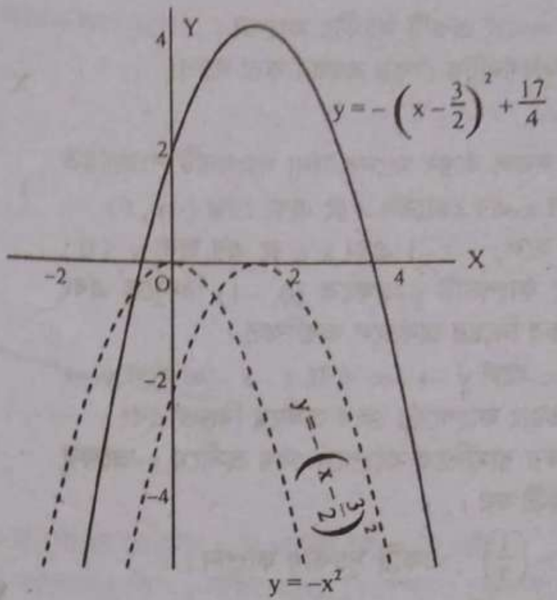
$= -(x^2 - 3x - 2)$

$= -\left\{x^2 - 2.\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\right\}$

$= -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2\right\}$

$= -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right\}$

$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$



বৈশিষ্ট্য :

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

সুতরাং ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= (-\infty, -\frac{3^2 - 4.2(-1)}{4.(-1)}]$ $[\because a < 0]$

$= (-\infty, \frac{17}{4}]$

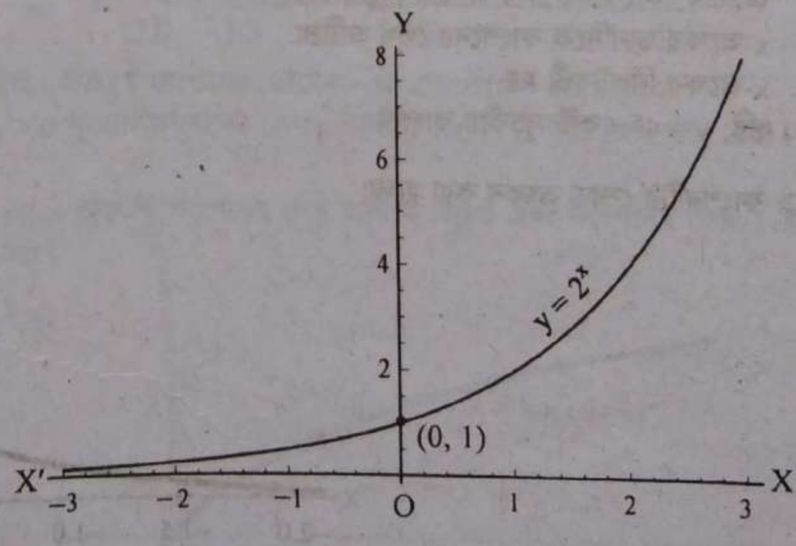
(b) $x = 0$ হলে $y = 2$, $y = 0$ হলে x এর দুইটি বাস্তব মান পাওয়া যায়। তাই ফাংশনের লেখ x-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to -\infty$, $x \to -\infty$ হলে $y \to -\infty$

এবং $a < 0$ হওয়ায় ফাংশনের লেখ সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের নিচের অঞ্চলে অসীমে বিস্তৃত।

10.(i) ধরি, $y = 2^x$ একটি সূচক ফাংশন।

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



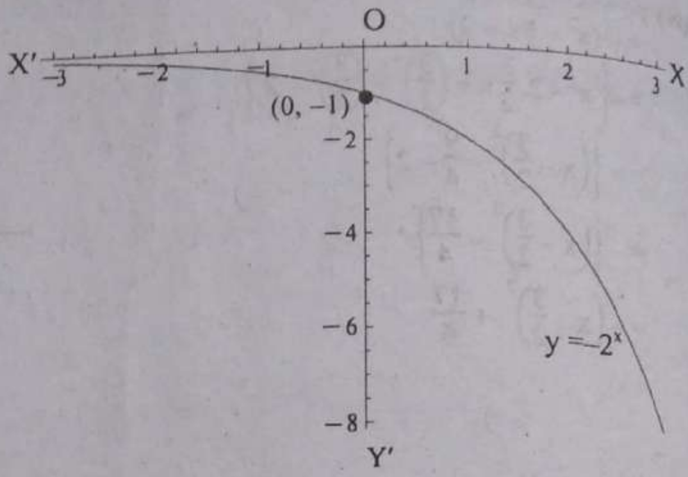
বৈশিষ্ট্য :

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $(0, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 1$ ফাংশনটি y-অক্ষকে $(0, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ এবং $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ সুতরাং ফাংশনের লেখ x-অক্ষের উপরিতলে অসীমে বিস্তৃত এবং x-অক্ষের বামদিকে অসীমে x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

(ii) ধরি, $y = -2^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন।
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



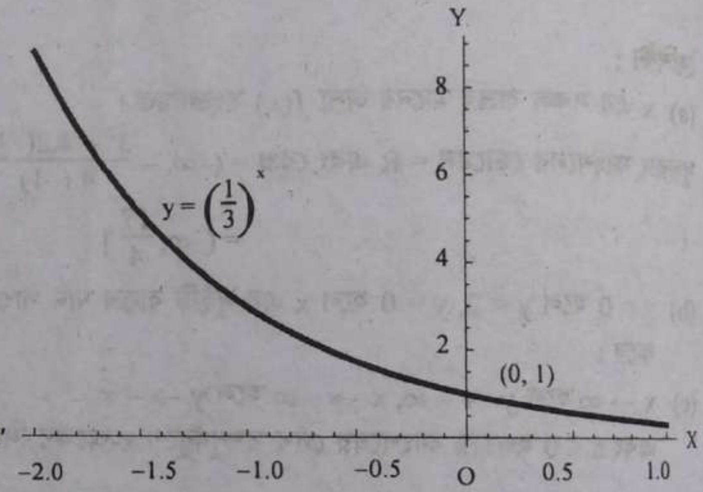
বৈশিষ্ট্য :

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত অতএব x-এর ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $(-\infty, 0)$

(b) $x = 0$ হলে, $y = -1$ এবং $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y < 0$। সুতরাং ফাংশনটি y-অক্ষকে $(0, -1)$ বিন্দুতে এবং x-অক্ষের নিচের অর্ধতলে অবস্থিত।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to -\infty$ এবং $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$। সুতরাং ফাংশনের লেখ অসীমে বিস্তৃত এবং x-অক্ষের বামদিকে ফাংশনে লেখ অসীমে x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

(iii) ধরি $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, একটি সূচকীয় ফাংশন।
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



বৈশিষ্ট্য :

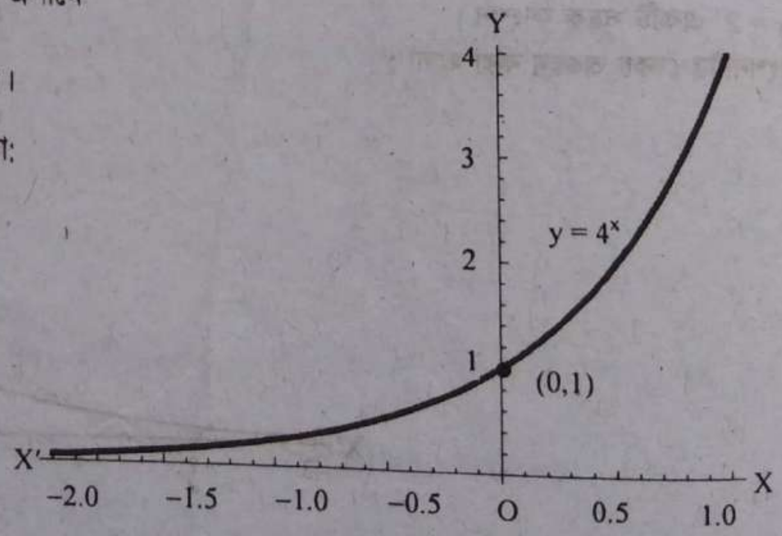
(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত অতএব, ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $(0, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 1$ এবং $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y > 0$ সুতরাং ফাংশনের লেখ y-অক্ষকে $(0, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to 0$, $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$ অতএব, ফাংশনের লেখ অসীমে বিস্তৃত এবং x-অক্ষের ডানদিকে ফাংশনের লেখ অসীমে x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

(iv) ধরি, $y = 4^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন।

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



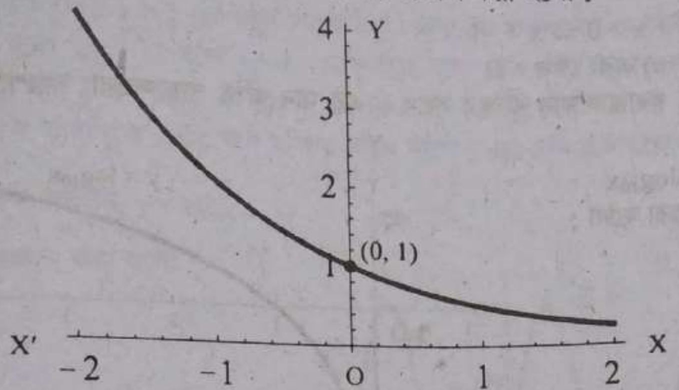
বৈশিষ্ট্য:

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত অতএব, ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $(0, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 1$, $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y > 0$ সুতরাং ফাংশনটি y-অক্ষকে $(0, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে এর লেখ x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$, $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ সুতরাং ফাংশনের লেখ অসীমে বিস্তৃত এবং x-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে অসীমে ফাংশনের লেখ x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

(v) $y = 2^{-x}$ একটি সূচকীয় ফাংশন। নিম্নে ফাংশনটি স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



বৈশিষ্ট্য :

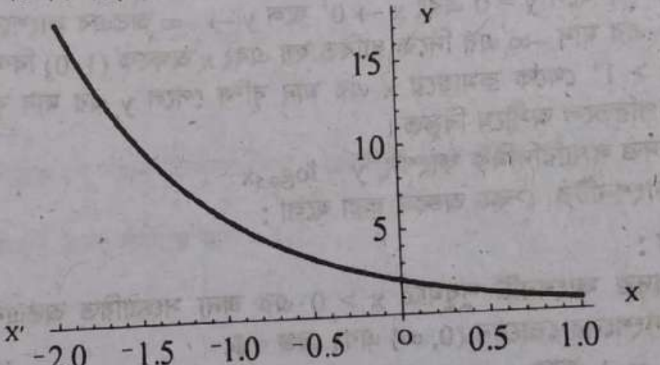
(a) x এর সকল মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $(0, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 1$ এবং $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y > 0$ সুতরাং ফাংশনের লেখ y-অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to 0$, $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$ অতএব ফাংশনের লেখ অসীমে বিস্তৃত এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অসীমে x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

(vi) ধরি, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন।

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



বৈশিষ্ট্য:

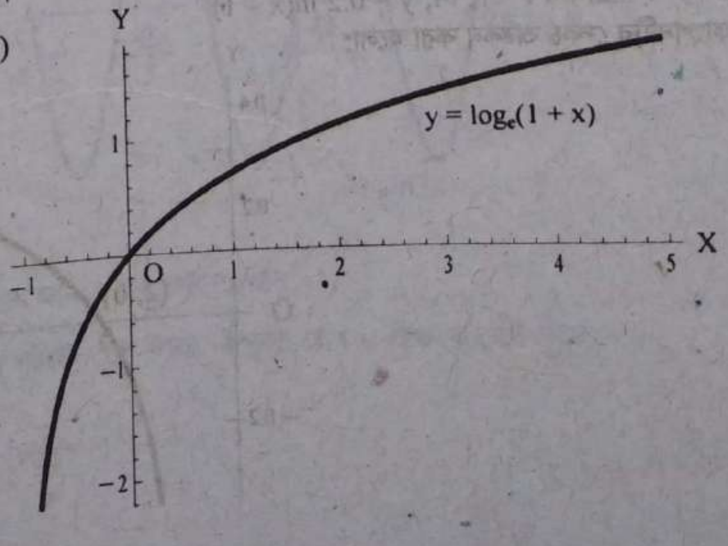
(a) x এর সকল মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $(0, \infty)$

(b) $x = 0$ হলে $y = 1$ এবং $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $y > 0$ সুতরাং ফাংশনের লেখ y-অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের উপরিতলে অবস্থিত।

(c) $x \to \infty$ হলে $y \to 0$, $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$ অতএব ফাংশনের লেখ অসীমে বিস্তৃত এবং ফাংশনের লেখ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অসীমে x-অক্ষের নিকটবর্তী হয়।

11.(i) প্রদত্ত লগারিদমিক ফাংশন, $y = \log_e(1 + x)$

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :

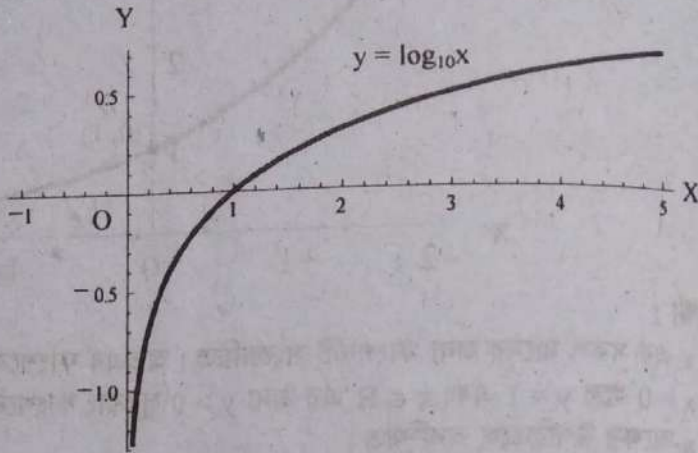


বৈশিষ্ট্য:

(a) ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$
অতএব ফাংশনের ডোমেন $(-1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

(b) $x = 0$ হলে, $y = 0$ এবং x এর ধনাত্মক মান বৃদ্ধির সাথে y এর মান বৃদ্ধি পায় সুতরাং ফাংশনের লেখ মূলবিন্দুগামী এবং এর বিস্তৃতি অসীম।

(ii) প্রদত্ত লগারিদমিক ফাংশন, $y = \log_{10}x$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



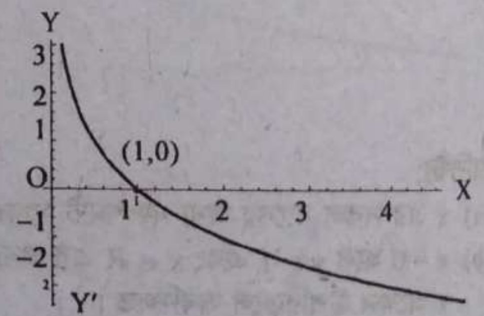
বৈশিষ্ট্য:

(a) ফাংশনটি শুধুমাত্র $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব ফাংশনের ডোমেন $= (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $\mathbb{R}$

(b) $x = 1$ হলে $y = 0$ এবং $x \to 0^+$ হলে $y \to -\infty$ অতএব ফাংশনের লেখ ডানদিক থেকে x এর মান 0 এর দিকে আসলে y-এর মান $-\infty$ এর দিকে ধাবিত হয় এবং x অক্ষকে $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) $x > 1^+$ থেকে ক্রমান্বয়ে x এর মান বৃদ্ধি পেলে y এর মান বৃদ্ধি পায়। সুতরাং ফাংশনের লেখ x-অক্ষের ডানদিকে উপরিতলে অসীমে বিস্তৃত।

(iii) প্রদত্ত লগারিদিমিক ফাংশন, $y = \log_{0.5}x$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



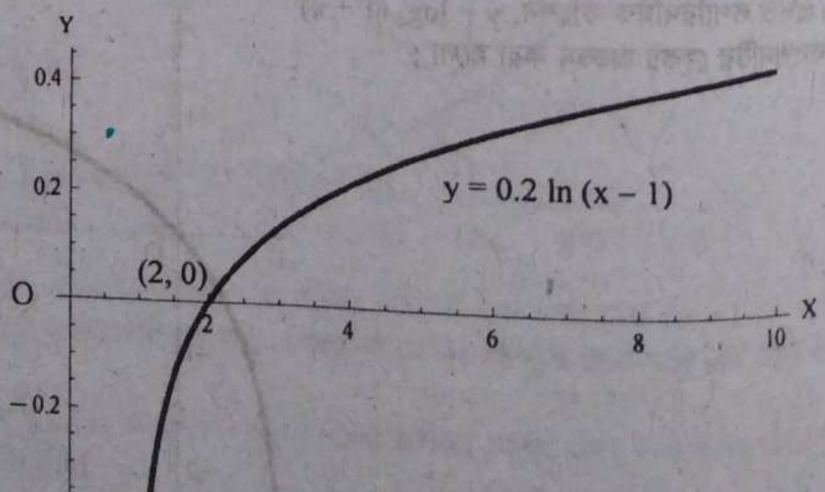
বৈশিষ্ট্য :

(a) প্রদত্ত ফাংশনটি শুধুমাত্র $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত অতএব ফাংশনের ডোমেন $(0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

(b) $x = 1$ হলে $y = 0$ এবং $x \to 0^+$ হলে $y \to \infty$ অতএব ফাংশনের লেখ x-অক্ষকে $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং ডান দিকে x এর মান 0 এর দিকে আসলে ফাংশনের মান $+\infty$ এর দিকে ধাবিত হয়।

(c) $x \to 1^+$ অর্থাৎ 1 থেকে x-অক্ষের ডানদিকে x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর ঋণাত্মক মান বৃদ্ধি পায়।

(iv) প্রদত্ত লগারিদিমিক ফাংশন, $y = 0.2 \ln(x - 1)$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



বৈশিষ্ট্য:

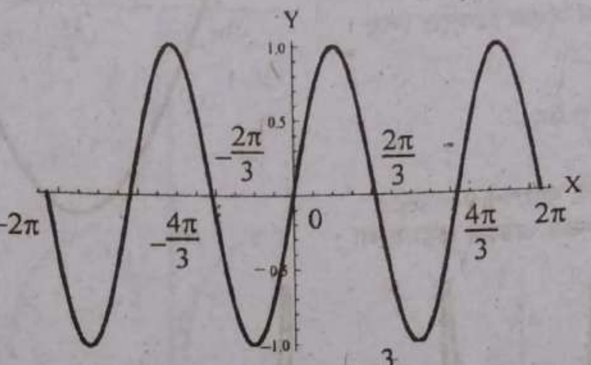
(a) প্রদত্ত ফাংশনটি $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= (1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

(b) $x = 2$ হলে $y = 0$ এবং $x \to 1^+$ হলে $y \to -\infty$ সুতরাং ফাংশনের লেখ x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে ছেদ করে এবং ডানদিক থেকে x-এর মান 1 এর দিকে আসলে y এর মান $-\infty$ এর দিকে ধাবিত হয়।

(c) $x \to 2^+$ অর্থাৎ 2 থেকে ডানদিকে x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়।

12.(i) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = \sin\frac{3}{2}x$

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



$y = \sin\frac{3}{2}x$

বৈশিষ্ট্য:

(a) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ এর মত।

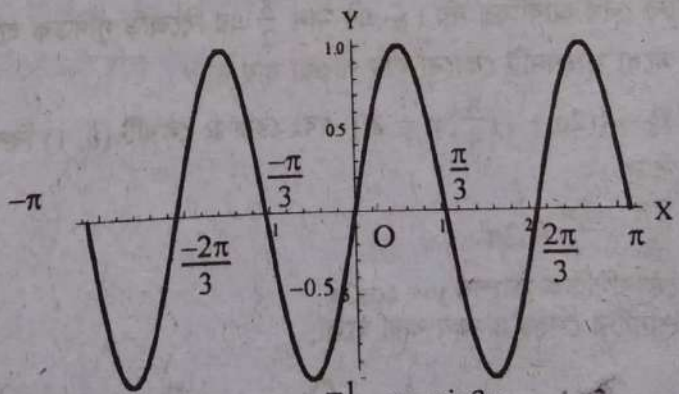
(b) মূলবিন্দু এবং যে সমস্ত বিন্দুতে x এর মান $\frac{2\pi}{3}$ এর গুণিতক সে সমস্ত বিন্দুতে লেখ x-অক্ষকে ছেদ করে।

(c) x- এর সকল বাস্তব মানের জন্য $\sin\frac{3}{2}x$ এর সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1.

(d) পর্যায় $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$

(ii) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে, $y = \sin 3x$

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



$y = \sin 3x$

বৈশিষ্ট্য:

(a) স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ এর মত।

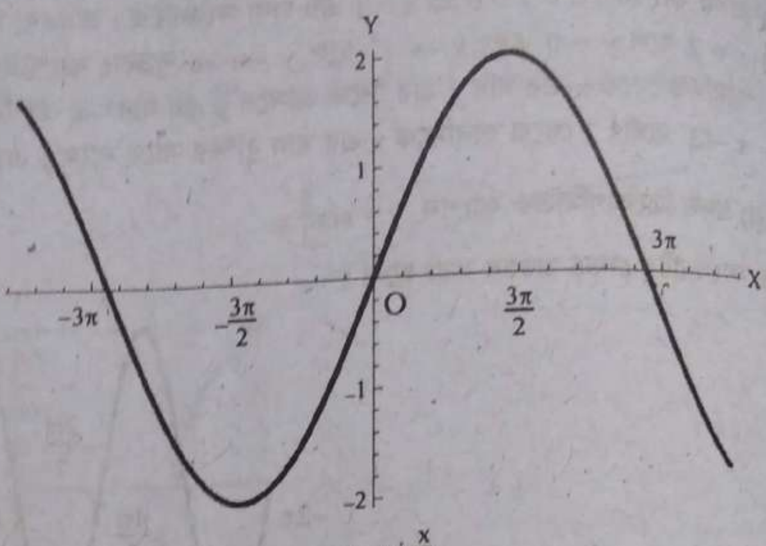
(b) x- এর সকল বাস্তব মানের জন্য $\sin 3x$ এর সর্বোচ্চ মান 1 এর সর্বনিম্ন মান -1.

(c) মূলবিন্দু এবং যে সমস্ত বিন্দুতে x এর মান $\frac{\pi}{3}$ এর গুণিতক সে সমস্ত বিন্দুতে লেখ x-অক্ষকে ছেদ করে।

(d) পর্যায় $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{3}$

(iii) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = 2\sin\frac{x}{3}$

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



$y = \sin\frac{x}{3}$

বৈশিষ্ট্য:

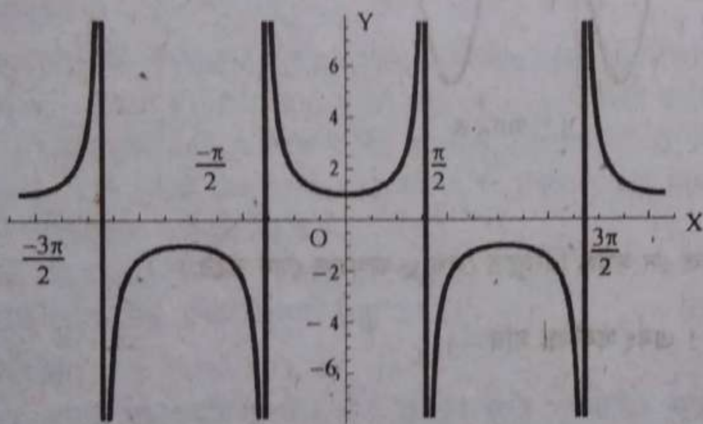
(a) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ এর মত।

(b) x- এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান 2 এবং সর্বনিম্ন মান –2.

(c) মূলবিন্দু এবং যে সকল বিন্দুতে x এর মান 3π এর গুণিতক সে সকল বিন্দুতে লেখ x-অক্ষকে ছেদ করে।

(d) পর্যায় $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

(iv) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন $y = \sec x$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



$y = \sec x$

বৈশিষ্ট্য:

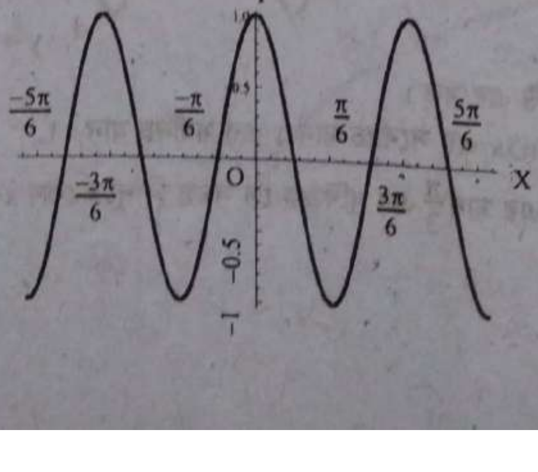
(a) ফাংশনটির লেখ অবিচ্ছিন্ন নয়। x-এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক হলে লেখটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

(b) ±1 এর মধ্যে ফাংশনটি কোনো মান পাওয়া যায় না।

(c) ডোমেন $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\}$ এবং রেঞ্জ $\mathbb{R}$ লেখটি (0, 1) বিন্দুতে y-অক্ষকে ছেদ করে এবং কখনই x-অক্ষকে স্পর্শ করে না।

(d) পর্যায় $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

(v) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন $y = \cos 3x$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



বৈশিষ্ট্য: (a) লেখটি অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ এর মত।

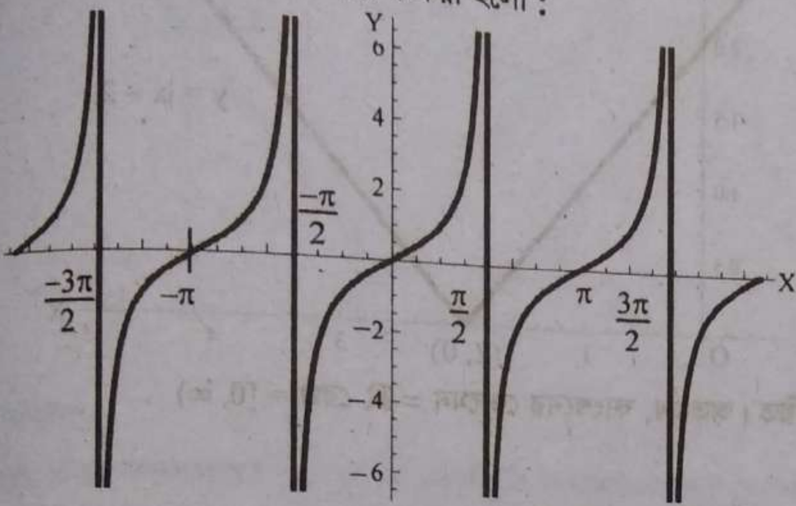
(b) ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান −1.

(c) যে সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক সে সমস্ত বিন্দুতে লেখ x-অক্ষকে ছেদ করে।

(d) পর্যায় $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{3}$

(vi) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = \tan 2x$

নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অংকন করা হলো :



বৈশিষ্ট্য: (a) লেখটি কয়েকটি বিচ্ছিন্ন শাখার সমষ্টি।

(b) x-এর মান যখন $\frac{\pi}{4}$ এর বিজোড় গুণিতক হয় তখন এটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

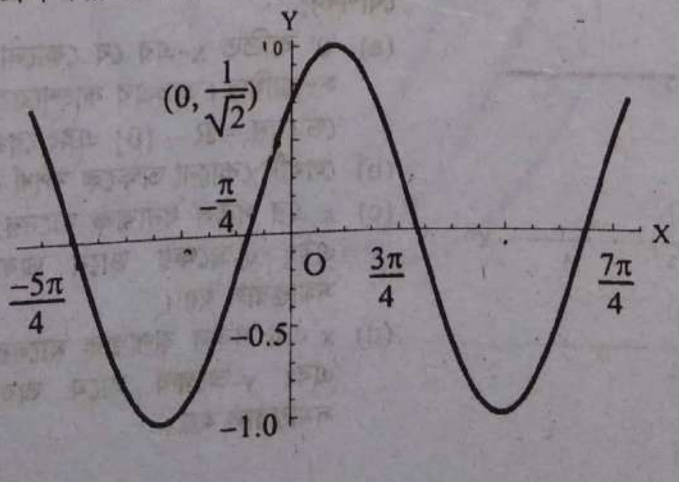
(c) যেহেতু $\tan(n\pi + 2x) = \tan 2x$, লেখচিত্রটির প্রতিটি শাখা $-\frac{\pi}{4}$ এবং $\frac{\pi}{4}$ সীমার মধ্যে অঙ্কিত শাখাটির অনুরূপ।

(d) x এর মান $\frac{\pi}{4}$ এর বিজোড় গুণিতকের জন্য প্রাপ্ত y-অক্ষের সমান্তরাল ও এর বিপরীত পাশের রেখা দুইটিকে লেখটি কখনই ছেদ করে না কিন্তু ক্রমশই তাদের নিকটবর্তী হতে থাকে।

(e) পর্যায় $= \frac{\pi}{B} = \frac{\pi}{2}$

(vii) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে, $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

নিম্নে ফাংশনটি স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



বৈশিষ্ট্য:

(a) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং আকৃতি ঢেউ এর মত।

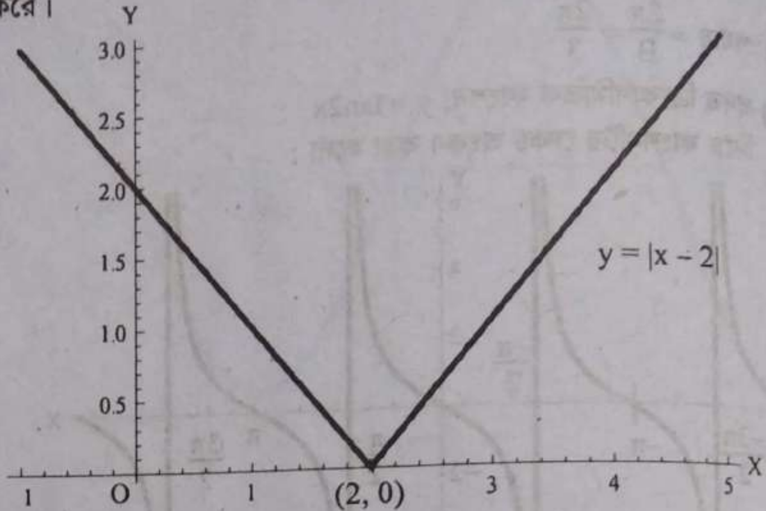
(b) ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1.

(c) ফাংশনটি $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ বিন্দুতে y-অক্ষকে ছেদ করে।

(d) ডোমেন $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $-1 \leq y \leq 1$

(e) পর্যায় $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

13. (i) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = |x - 2|$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



বৈশিষ্ট্য:

(a) x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ রেঞ্জ $= [0, \infty)$

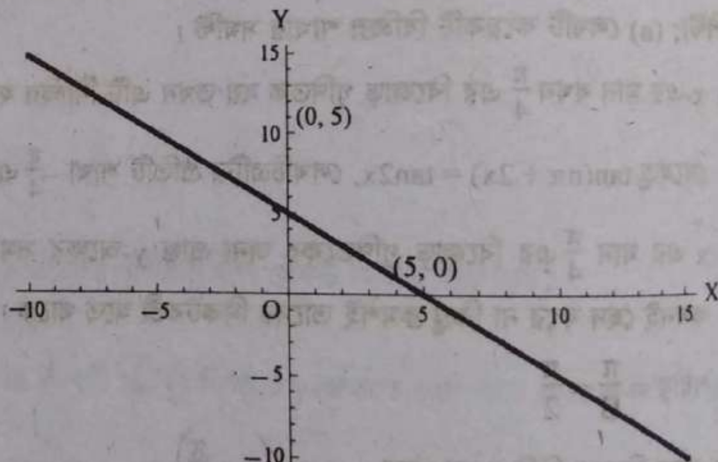
(b) লেখটি y-অক্ষকে $(0, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) লেখটি x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

(d) যেহেতু y সর্বদা ধনাত্মক সুতরাং লেখটি কখনই x-অক্ষের নিচে নামবে না।

(e) লেখটি $x = 2$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

(ii) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = 5 - x$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো :



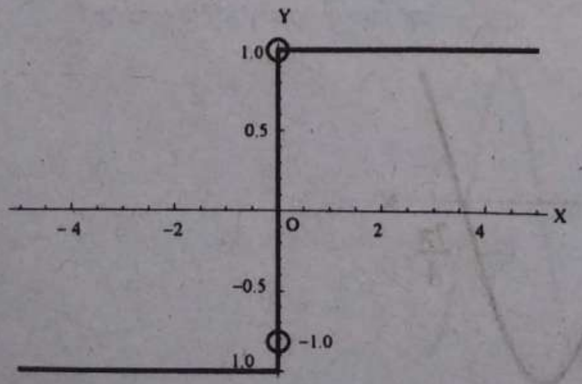
বৈশিষ্ট্য:

(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

(b) ফাংশনটি y-অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে এবং x অক্ষকে $(5, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(c) ফাংশনটির লেখ একটি সরলরেখা।

(iii) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = \frac{|x|}{x}$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



বৈশিষ্ট্য:

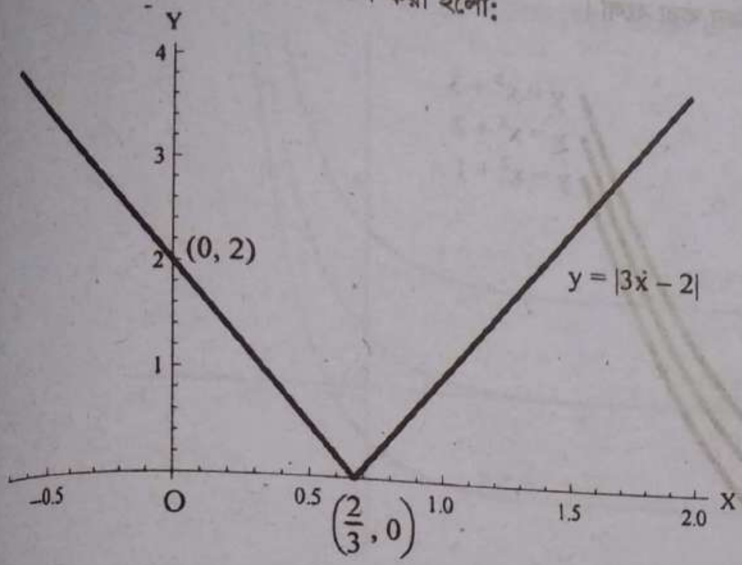
(a) '0' ব্যতিত x-এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1, -1\}$

(b) লেখটি কোনো অক্ষকে স্পর্শ করে না।

(c) x এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য লেখটি x-অক্ষের উপরে এবং y-অক্ষের ডানে অবস্থান করে এবং x-অক্ষের সমান্তরাল হয়।

(d) x এর সকল ঋণাত্মক মানের জন্য লেখটি x-অক্ষের নিচে এবং y-অক্ষের বামে অবস্থান করে এবং x-অক্ষের সমান্তরাল হয়।

(iv) প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $y = |3x - 2|$
নিম্নে ফাংশনটির স্কেচ অঙ্কন করা হলো:



বৈশিষ্ট্য:

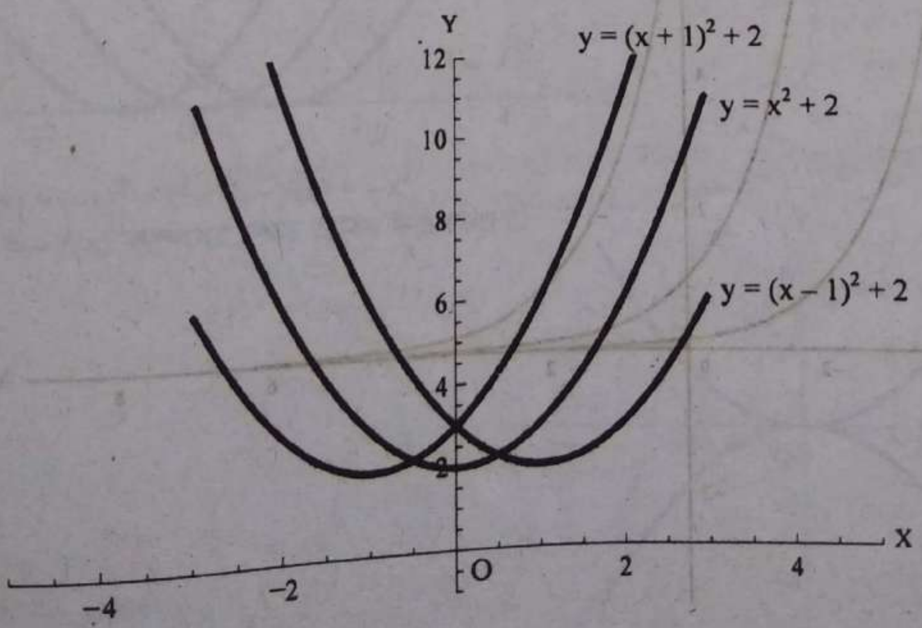
(a) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত। অতএব ফাংশনের ডোমেন = $\mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ = $[0, \infty)$

(b) লেখটি y-অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষকে $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

(c) যেহেতু y-এর মান সর্বদা ধনাত্মক। সুতরাং লেখটি কখনই x-অক্ষের নিচে নামবে না।

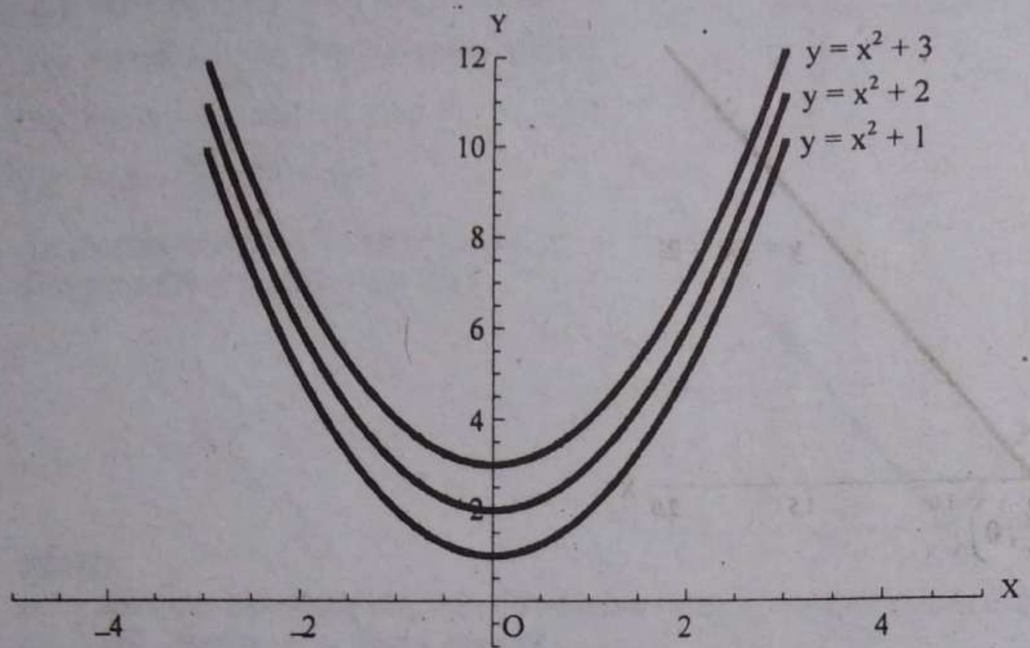
(d) লেখটি $x = \frac{2}{3}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

14. (i) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2 + 2$.
নিম্নে $f(x)$, $f(x+1)$ ও $f(x-1)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



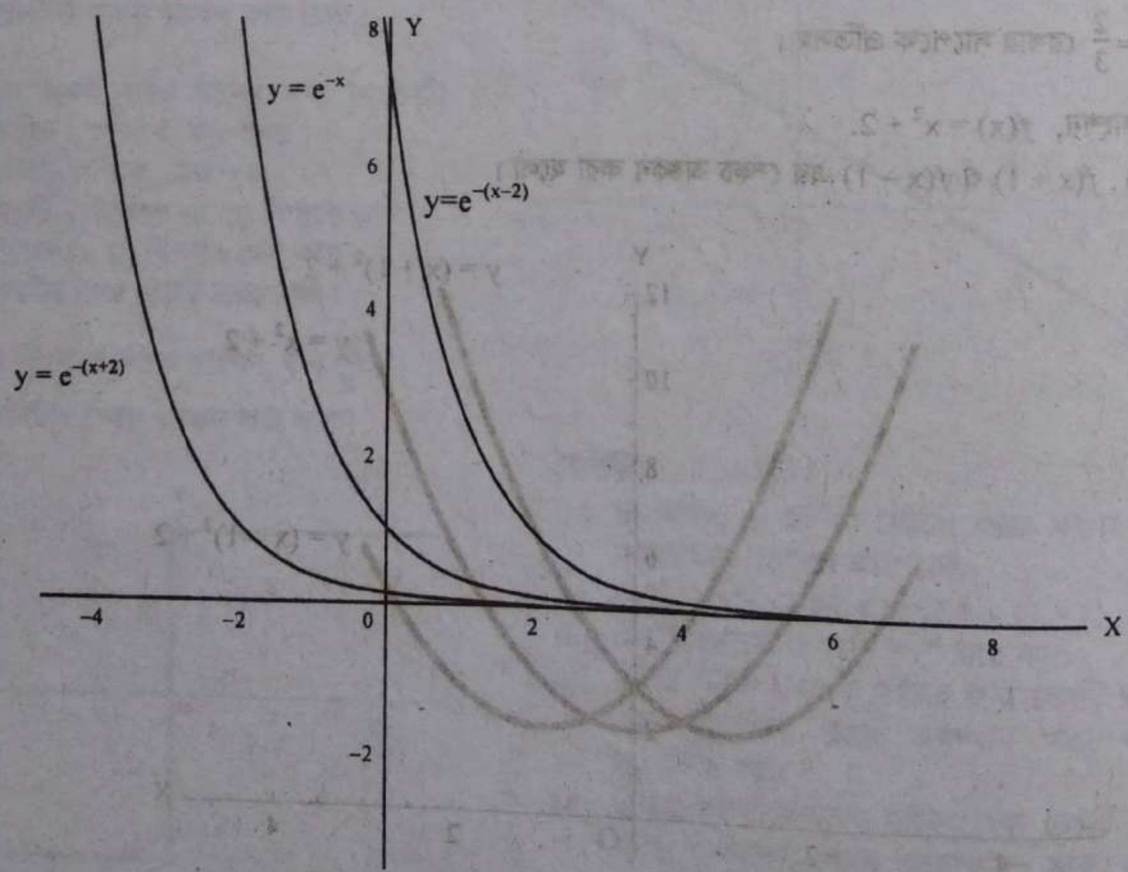
আবার, $f(x) + 1 = x^2 + 2 + 1 = x^2 + 3$ এবং $f(x) - 1 = x^2 + 2 - 1 = x^2 + 1$

নিম্নে $f(x)$, $f(x) + 1$ ও $f(x) - 1$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

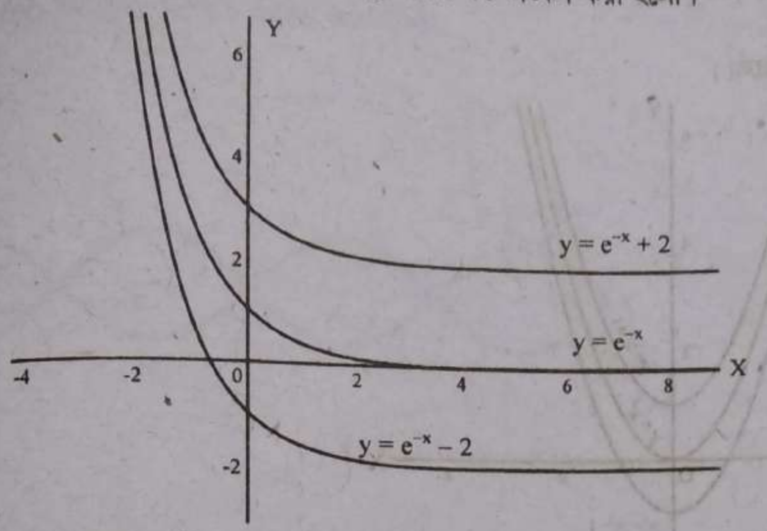


(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = e^{-x}$

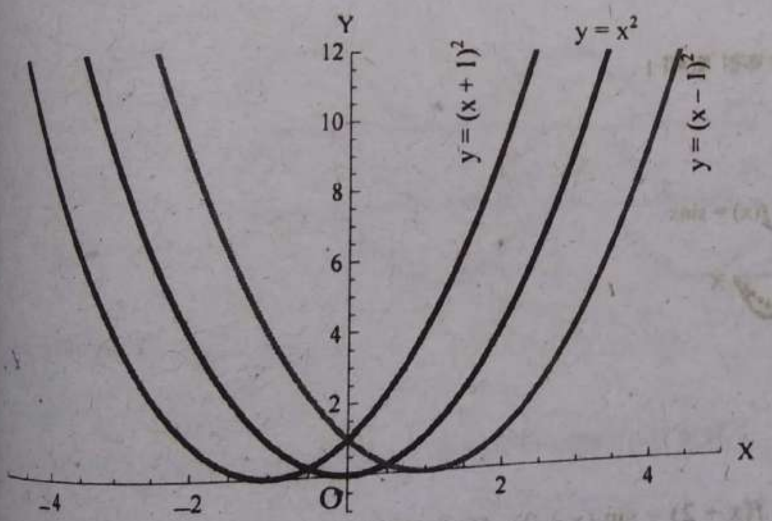
নিম্নে $f(x)$, $f(x + 2)$ ও $f(x - 2)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



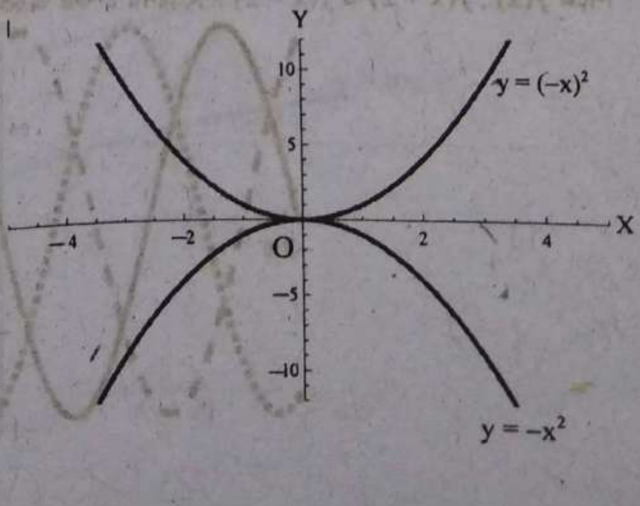
আবার, $f(x)+2=e^{-x}+2$ এবং $f(x)-2=e^{-x}-2$
নিম্নে $f(x)$, $f(x)+2$ ও $f(x)-2$ ফাংশগুলোর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



(iii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x)=x^2$
নিম্নে $f(x)$, $f(x+1)$ ও $f(x-1)$ ফাংশনগুলোর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



আবার, $f(-x)=(-x)^2=x^2$ এবং $-f(x)=-x^2$
নিম্নে $f(-x)$ ও $-f(x)$ ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

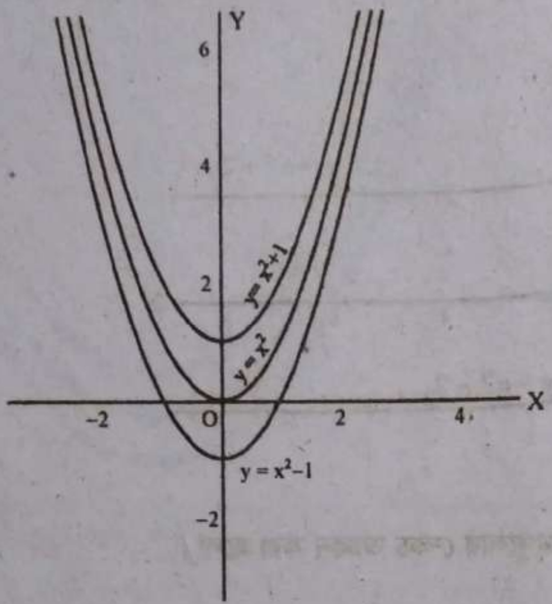


আবার, $f(x) = x^2$

$\therefore f(x) + 1 = x^2 + 1$ এবং $f(x) - 1 = x^2 - 1$

নিম্নে $f(x)$, $f(x) + 1$ ও $f(x) - 1$

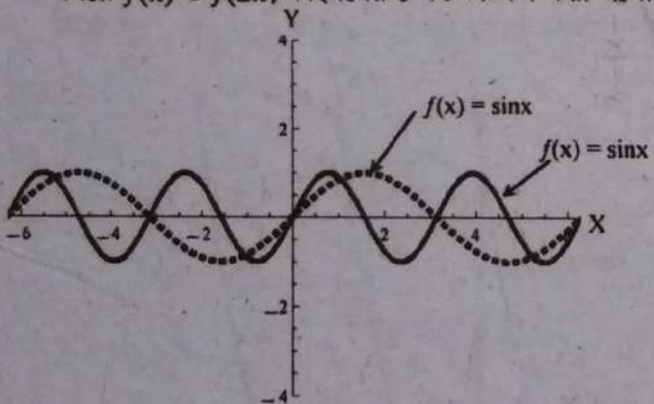
ফাংশনগুলোর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



(iv) $f(x) = \sin x$

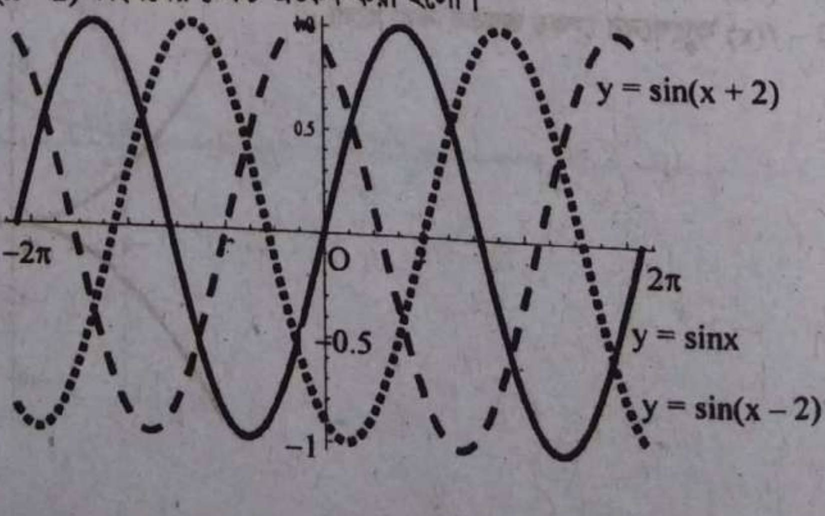
$f(2x) = \sin 2x$

নিম্নে $f(x)$ ও $f(2x)$ ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



আবার, প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \sin x$ অতএব $f(x+2) = \sin(x+2)$, $f(x-2) \sin(x-2)$

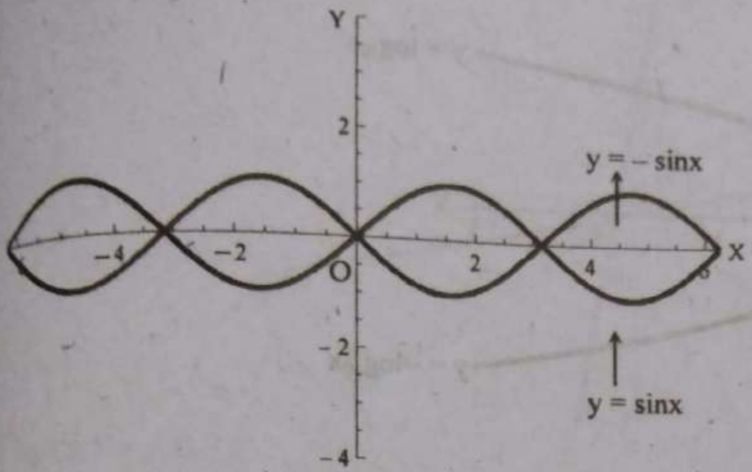
নিম্নে $f(x)$, $f(x+2)$ ও $f(x-2)$ ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



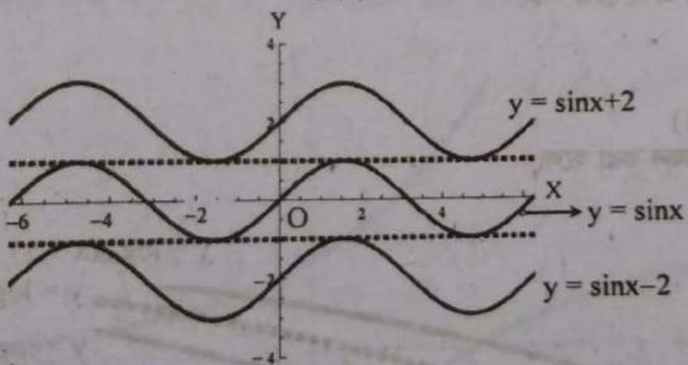
আবার, $f(x) = \sin x$

এবং $-f(x) = -\sin x$

নিম্নে $f(x)$ ও $-f(x)$ স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



$f(x) = \sin x$ হলে $f(x) + 2 = \sin x + 2$ এবং $f(x) - 2 = \sin x - 2$. নিম্নে ফাংশনগুলোর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

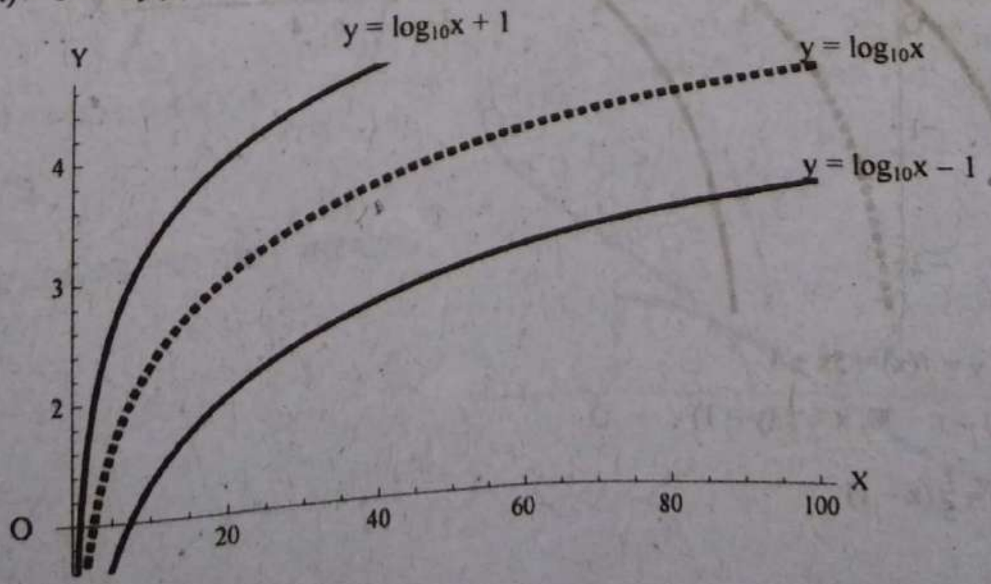


(৮) প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \log_{10}x$

$f(x) + 1 = \log_{10}(x) + 1$

$f(x) - 1 = \log_{10}(x) - 1$

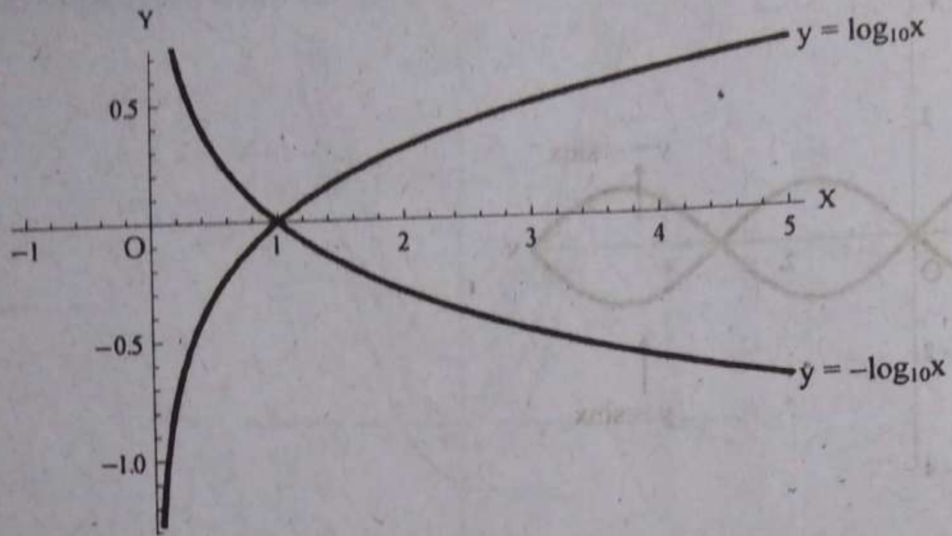
নিম্নে $f(x)$, $f(x) + 1$ এবং $f(x) - 1$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \log_{10}x$

$\therefore \quad -f(x) = -\log_{10}x$

নিম্নে $f(x)$ ও $-f(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



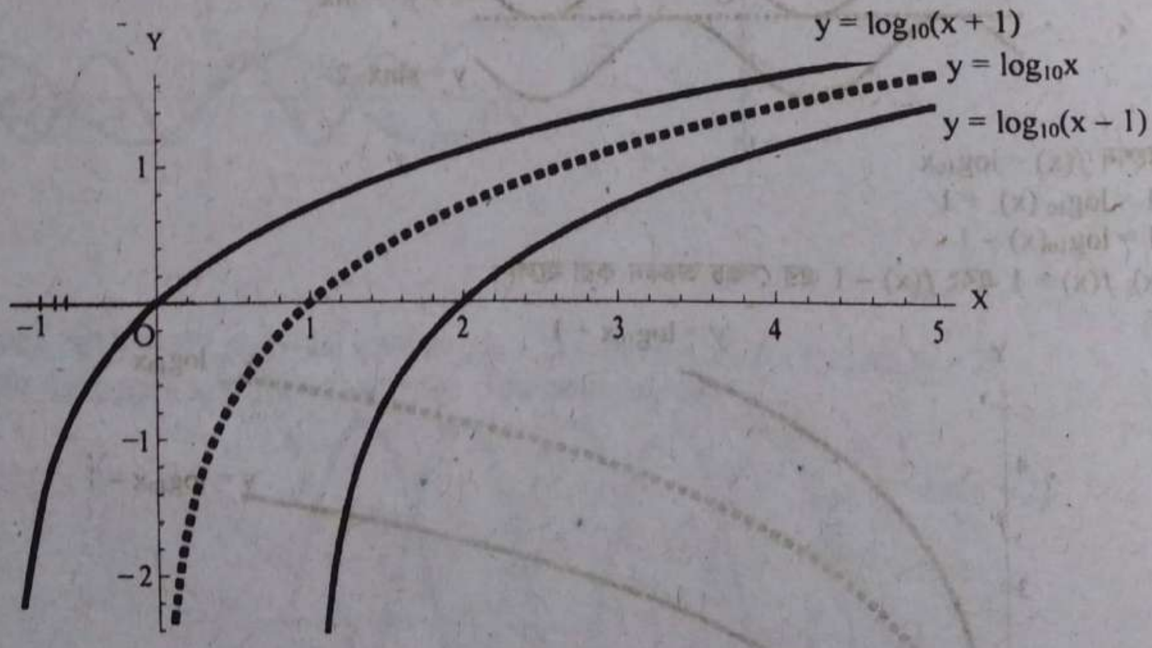
$-f(x)$ এর ডোমেন $= (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

আবার, $f(x) = \log_{10}x$,

$f(x+1) = \log_{10}(x+1)$

এবং $f(x-1) = \log_{10}(x-1)$

∴ নিম্নে ফাংশনগুলোর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

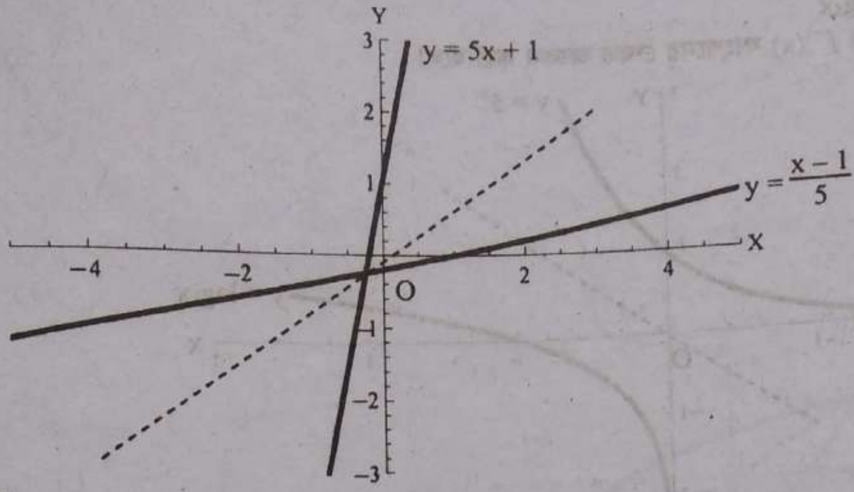


15.(i) ধরি, $y = f(x) = 5x + 1$

$\therefore \quad 5x = y - 1 \quad$ বা, $x = \frac{1}{5}(y-1)$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x-1)$

নিম্নে $y = f(x) = 5x + 1$ এবং $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x - 1)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

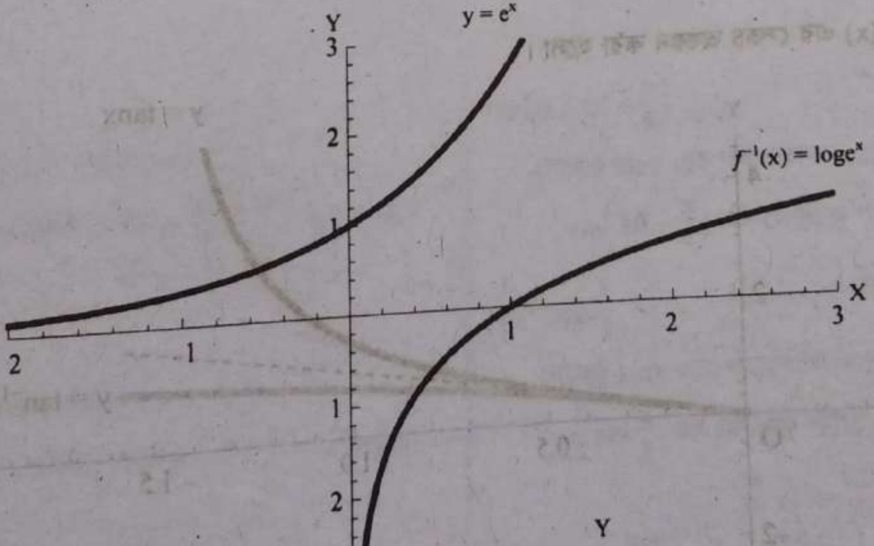


(ii) ধরি, $y = f(x) = e^x$

$\therefore\ \log_e y = x$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \log_e x$

নিম্নে একই লেখচিত্রে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

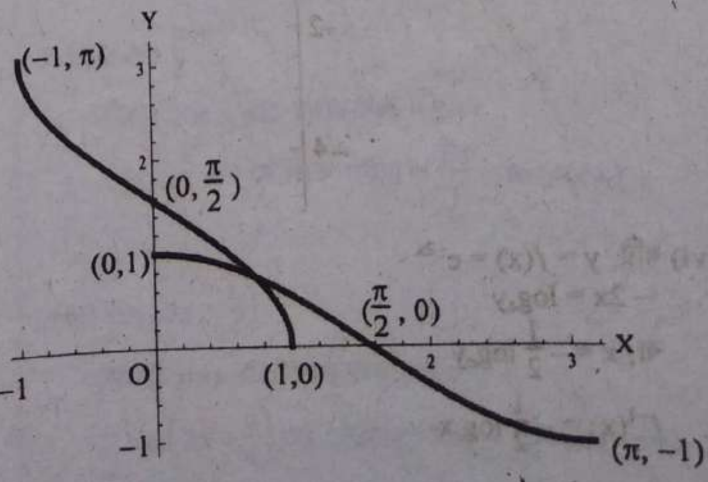


(iii) ধরি, $y = f(x) = \cos x;\ 0 \le x \le \pi$

$\therefore\ x = \cos^{-1}y$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$

নিম্নে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

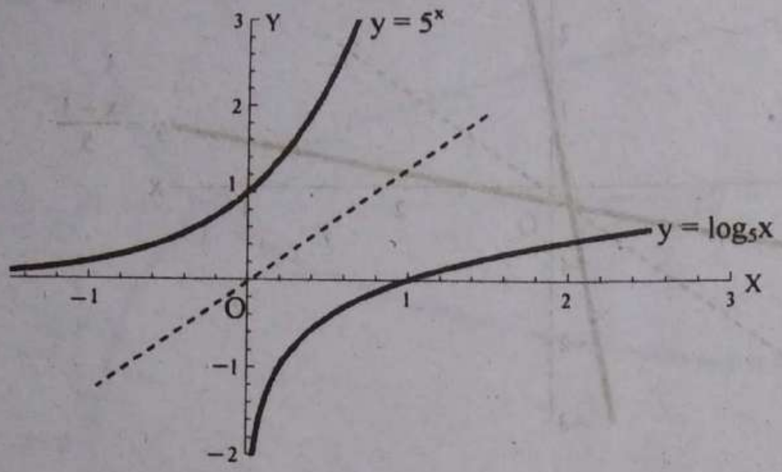


(iv) ধরি, $y = f(x) = 5^x$

$\therefore \quad x = \log_5 y$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \log_5 x$

নিম্নে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা হলো।

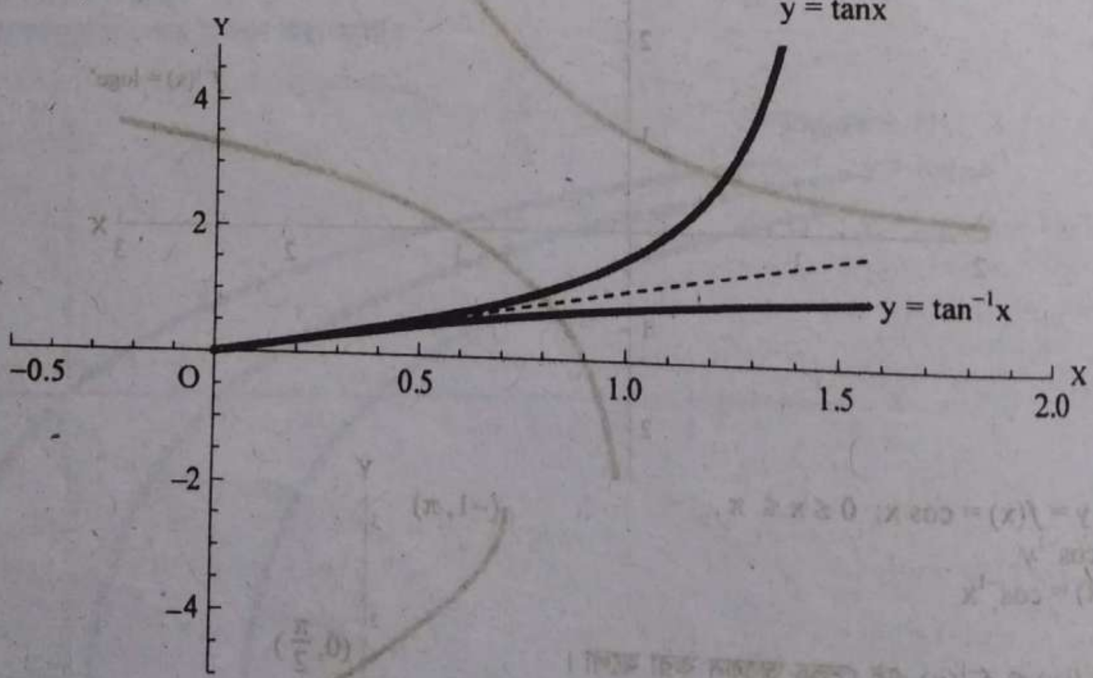


(v) ধরি, $y = f(x) = \tan x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad x = \tan^{-1} y$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$

নিম্নে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



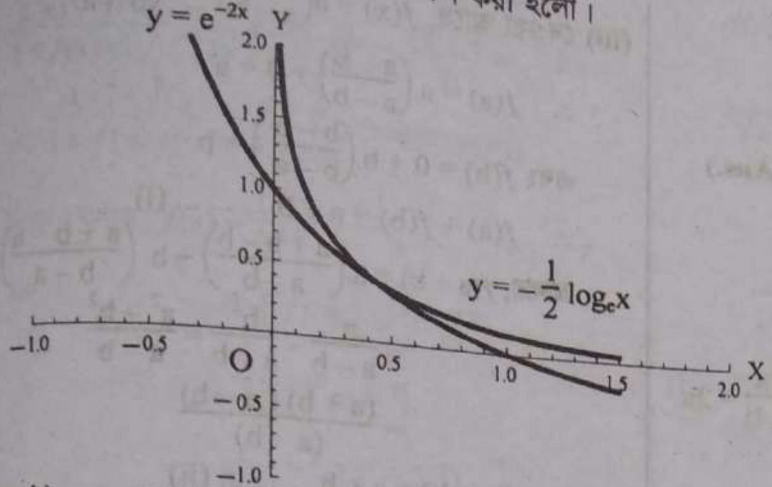
(vi) ধরি, $y = f(x) = e^{-2x}$

$\therefore \quad -2x = \log_e y$

বা, $x = -\frac{1}{2} \log_e y$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \log_e x$

নিম্নে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



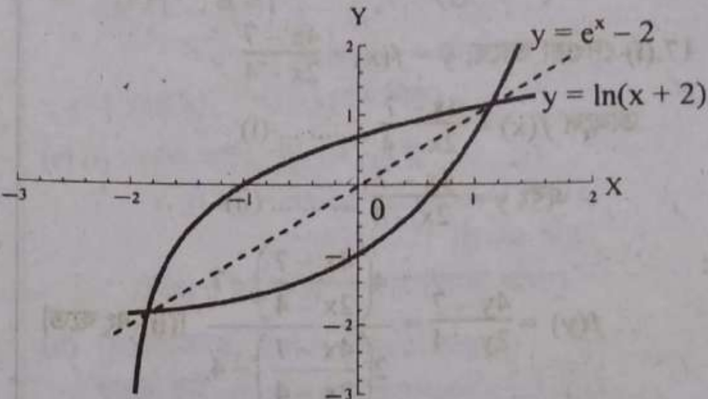
(vii) ধরি, $y = f(x) = \ln(x+2)$

$\therefore e^y = x + 2$

বা, $x = e^y - 2$

$\therefore f^{-1}(x) = e^x - 2$

নিম্নে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



16.(i) $2\cos\frac{x}{4}$

যেহেতু $\cos x$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore 2\cos\frac{x}{4}$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{1}{2}\cot\frac{3x}{4}$

যেহেতু $\cot x$ এর পর্যায়কাল $= \pi$

$\therefore \frac{1}{2}\cot\frac{3x}{4}$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{\pi}{B} = \frac{\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

(iii) $2\sec\frac{\theta}{4}$

যেহেতু $\sec\theta$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore 2\sec\frac{\theta}{4}$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ **(Ans.)**

(iv) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

যেহেতু $\cos x$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ **(Ans.)**

(v) $\sin\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

যেহেতু $\sin\theta$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore \sin\left(3\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

(vi) $\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$

যেহেতু $\sin x$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ **(Ans.)**

(vii) $2\cos\frac{x}{3}$

যেহেতু $\cos x$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore 2\cos\frac{x}{3}$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ **(Ans.)**

(viii) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

যেহেতু $\sin x$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ এর মৌলিক পর্যায় $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ **(Ans.)**

(ix) $5\sec\frac{\theta}{8}$

যেহেতু $\sec\theta$ এর পর্যায়কাল $= 2\pi$

$\therefore 5\sec\frac{\theta}{8}$ এর মৌলিক পর্যায় $= \dfrac{2\pi}{\frac{1}{8}} = 16\pi$ **(Ans.)**

(x) $\sin^3\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$

যেহেতু $\sin x$ এর পর্যায়কাল 2π

$\therefore \sin^3\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$ এর পর্যায় $= \dfrac{2\pi}{|-B|} = \dfrac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

17.(i) দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$

তাহলে $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ ... ... (i)

এবং $y = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ ... ... (ii)

$$\therefore f(y) = \frac{4y-7}{2y-4} = \frac{4\left(\frac{4x-7}{2x-4}\right)-7}{2\left(\frac{4x-7}{2x-4}\right)-4} \quad [\text{(ii) নং হতে}]$$

$$= \frac{\frac{16x-28}{2x-4}-7}{\frac{8x-14}{2x-4}-4} = \frac{16x-28-14x+28}{8x-14-8x+16}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

$\therefore f(y) = x$ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$

$\therefore y = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ ....(i)

এবং $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ .... (ii)

$$\text{তাহলে, } f(y) = \frac{ay+b}{cy-a} = \frac{a.\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b}{c.\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-a} \quad [\text{(i) নং হতে}]$$

$$= \frac{\frac{a^2x+ab+bcx-ab}{cx-a}}{\frac{acx+bc-acx+a^2}{cx-a}} = \frac{a^2x+ab+bcx-ab}{acx+bc-acx+a^2}$$

$$= \frac{a^2x+bcx}{a^2+bc} = \frac{x(a^2+bc)}{(a^2+bc)} = x$$

$\therefore f(y) = x$ বা, $y = f^{-1}(x)$

$\therefore f^{-1}(x) = f(x)$. **(দেখানো হলো)**

(iii) দেওয়া আছে, $f(x) = a\left(\dfrac{x-b}{a-b}\right) + b\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$

$\therefore f(a) = a.\left(\dfrac{a-b}{a-b}\right) + 0 = a$

এবং $f(b) = 0 + b.\left(\dfrac{b-a}{b-a}\right) = b$

$\therefore f(a) + f(b) = a + b$ ... ... (i)

$$\text{আবার, } f(a+b) = a.\left(\frac{a+b-b}{a-b}\right) + b.\left(\frac{a+b-a}{b-a}\right)$$

$$= \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}$$

$\therefore f(a+b) = a + b$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$f(a) + f(b) = f(a+b)$ **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$$\therefore \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{2x+1}{2x-1}+1}{\frac{2x+1}{2x-1}-1}$$

$$= \frac{\frac{2x+1+2x-1}{2x-1}}{\frac{2x+1-2x+1}{2x-1}} = \frac{\frac{4x}{2x-1}}{\frac{2}{2x-1}}$$

$$= \frac{4x}{2x-1} \times \frac{2x-1}{2} = \frac{4x}{2}$$

$\therefore \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$ **(প্রমাণিত)**

(v) দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $\therefore f(y) = \dfrac{y-1}{y+1}$

এখন, $f(x) - f(y) = \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{y-1}{y+1}$

$$= \frac{xy+x-y-1-xy-y+1+x}{(x+1)(y+1)}$$

$\therefore f(x) - f(y) = \dfrac{2(x-y)}{(x+1)(y+1)}$ ... ... (i)

এবং $1+f(x)\, f(y) = 1 + \dfrac{x-1}{x+1}.\dfrac{y-1}{y+1}$

$$= \frac{xy+x+y+1+xy-x-y+1}{(x+1)(y+1)}$$

$\therefore 1 + f(x)\, f(y) = \dfrac{2(1+xy)}{(x+1)(y+1)}$ ... ... (ii)

এখন, (i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{2(x-y)}{(x+1)(y+1)} \cdot \frac{(x+1)(y+1)}{2(1+xy)}$$

$$\therefore \frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{x-y}{1+xy}$$ (দেখানো হলো)

18. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ ……… (i)

$$\therefore f(y) = \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y})$$

এবং $g(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$

$$\therefore g(y) = \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$$

বামপক্ষ $= f(x+y)$

$= \frac{1}{2}\{3^{(x+y)} + 3^{-(x+y)}\}$ [(i) নং এর সাহায্যে]

ডানপক্ষ $= f(x).\ f(y) + g(x)\ g(y)$

$= \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x}).\frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}) + \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x}).\frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$

$= \frac{1}{4}(3^x.\ 3^y + 3^x.\ 3^{-y} + 3^{-x}.\ 3^y + 3^{-x}.\ 3^{-y}) + \frac{1}{4}$
$(3^x.\ 3^y - 3^x.\ 3^{-y} - 3^{-x}.\ 3^y + 3^{-x}.\ 3^{-y})$

$= \frac{1}{4}\{3^{(x+y)} + 3^{(x-y)} + 3^{-(x-y)} + 3^{-(x+y)} +$
$3^{(x+y)} - 3^{(x-y)} - 3^{-(x-y)} + 3^{-(x+y)}\}$

$= \frac{1}{4}\{2.3^{(x+y)} + 2.3^{-(x+y)}\} = \frac{1}{2}\{3^{(x+y)} + 3^{-(x+y)}\}$

= বামপক্ষ

$\therefore f(x+y) = f(x)\ f(y) + g(x)\ g(y)$ (প্রমাণিত)

19.(a) (i) দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(\sin x)$

$\therefore f(a) = \ln(\sin a)$

এবং $\varphi(x) = \ln(\cos x)$

$\therefore \varphi(a) = \ln(\cos a)$

$\therefore \varphi(2a) = \ln(\cos 2a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos a)} - e^{2\ln(\sin a)}$

$= e^{\ln(\cos a)^2} - e^{\ln(\sin a)^2}$

$= e^{\ln \cos^2 a} - e^{\ln \sin^2 a}$

$= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$

$\therefore e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = \cos 2a$ ……… (i)

আবার, $e^{\varphi(2a)} = e^{ln(\cos 2a)}$

$e^{\varphi(2a)} = \cos 2a$ ……… (ii)

এখন (i) ও (ii) নং হতে পাই,

$e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\varphi(2a)}$ (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(\sin x)$

এবং $\varphi(x) = \ln(\cos x)$

বামপক্ষ $= e^{2f(x)} + e^{2\varphi(x)}$

$= e^{2\ln(\sin x)} + e^{2\ln(\cos x)}$

$= e^{\ln(\sin x)^2} + e^{\ln(\cos x)^2}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore e^{2f(x)} + e^{2\varphi(x)} = 1$ (দেখানো হলো)

(b) দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(x)$ এবং $g(x) = x^n$.

বামপক্ষ $= f\{g(x)\} = f\{x^n\} = \ln(x^n)$

$= n\ln(x) = n\ f(x) =$ ডানপক্ষ

$\therefore f\{g(x)\} = nf(x)$ (প্রমাণিত)

(c) (i) দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$ ……… (i)

$\therefore f(2x) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$= 2\{f(x)\}^2 - 1$ [(i) নং হতে]

$\therefore f(2x) = 2\{f(x)\}^2 - 1$ (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$ ……… (ii)

আমরা পাই, $f(3x) = \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$= 4\{f(x)\}^{3'} - 3f(x)$ [(ii) নং হতে]

$\therefore f(3x) = 4\{f(x)\}^3 - 3f(x)$ (দেখানো হলো)

20.(i) দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$ ……… (i)

$\therefore f(y) = \tan y$ ……… (ii)

এবং $f(x+y) = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y}$

$= \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)\ f(y)}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$\therefore f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)\ f(y)}$ (দেখানো হলো)

(ii) দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$\therefore f(\cos\theta) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan^2\frac{\theta}{2}$$

$\therefore f(\cos\theta) = \tan^2\frac{\theta}{2}$ (দেখানো হলো)

(iii) দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$\therefore \varphi(y) = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$

$\therefore \varphi(z) = \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$

এখন, $\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}}\right)$

$= \ln\left(\frac{\frac{1+yz-y-z}{1+yz}}{\frac{1+yz+y+z}{1+yz}}\right) = \ln\left(\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)$

$= \ln\left\{\frac{(1-y)-z(1-y)}{(1+y)+z(1+y)}\right\} = \ln\left\{\frac{(1-y)\ (1-z)}{(1+y)\ (1+z)}\right\}$

$= \ln\left\{\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right\}$

$= \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) + \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$

$= \varphi(y) + \varphi(z)$

$\therefore \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$ **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\therefore f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right)$

$= \ln\left(\frac{\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}\right)$

$= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\therefore f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ **(দেখানো হলো)**

21. (i) দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cot^{-1}(1+x+x^2)$

$\therefore\ \varphi(0) = \cot^{-1}(1+0+0) = \cot^{-1}1$

$\varphi(1) = \cot^{-1}(1+1+1) = \cot^{-1}3$

$\varphi(2) = \cot^{-1}(1+2+4) = \cot^{-1}7$

বামপক্ষ $= \varphi(0) + 2\,\varphi(1) + \varphi(2)$

$= \cot^{-1}1 + 2\cot^{-1}3 + \cot^{-1}7$

$= \cot^{-1}\cot\frac{\pi}{4} + 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}]$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{9-1}{9}} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}$

$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}1$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \varphi(0) + 2\,\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে,

$f(x) = x^2 + ax + b$

$\therefore f(1) = 1^2 + a.1 + b = a + b + 1$

এবং $f(2) = 2^2 + a.2 + b = 2a + b + 4$

প্রশ্নমতে, $a + b + 1 = 1$

$\therefore\ a + b = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $2a + b + 4 = 2$

বা, $a + a + b = 2 - 4$

বা, $a + 0 = -2$ [(i) নং ব্যবহার করে]

$\therefore\ a = -2$

a এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$-2 + b = 0\ \therefore b = 2$

$\therefore f(3) = 3^2 + (-2).3 + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 5 **(Ans.)**

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর ও ব্যাখ্যা

1. গ; ব্যাখ্যা: দুইটি সেট A ও B এর উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে p ও q হলে $n(A \times B) = p \times q$ হবে।
2. খ; ব্যাখ্যা: $x < 0$ হলে $f(x) = x + 2$
$\therefore f(-2) = -2 + 2 = 0$
3. ঘ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{3x+2}{5}$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। কারণ x এর প্রতিটি মানের জন্য $f(x)$ এর একটি মান এবং $f(x)$ এর প্রতিটি মানের একটি করে ভিন্ন ভিন্ন প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায়।
4. ক; 5. গ; 6. গ;
7. খ; ব্যাখ্যা: ঢাল = – 1
$\therefore y = -x$ এর লেখটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করবে।
8. গ; ব্যাখ্যা: লেখটি মূলবিন্দুগামী এবং x অক্ষের নিচে অবস্থান করছে। অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y ঋনাত্মক।
9. খ; ব্যাখ্যা: যেহেতু ডোমেন ধনাত্মক।
$\therefore$ লেখটি y-অক্ষের বামদিকে যাবে না।
10. ক; ব্যাখ্যা: $y = |x-3|$ লেখটি (3, 0) বিন্দুগামী।
11. খ; ব্যাখ্যা: $f(x) = x + 1$ এবং $x \neq 1$
$\therefore$ লেখচিত্রটি (1, 2) বিন্দুতে ছেদ করবে না।
12. খ; ব্যাখ্যা: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ এর ডোমেন, $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
13. গ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ এর রেঞ্জ, $\mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
14. খ; ব্যাখ্যা: $f(x) = 3x - 6$
বা, $f(f^{-1}(x)) = 3f^{-1}(x) - 6$
বা, $x = 3f^{-1}(x) - 6 \therefore f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$
15. গ; ব্যাখ্যা: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore f^{-1}(0) = \sqrt{-1}$ যা অবাস্তব $\therefore f^{-1}(0) = \{\ \}$
16. ঘ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \sqrt{x-1}$
বা, $f\{f^{-1}(x)\} = \sqrt{f^{-1}(x) - 1}$
বা, $x = \sqrt{f^{-1}(x) - 1}$
বা, $x^2 = f^{-1}(x) - 1$
$\therefore f^{-1}(x) = x^2 + 1 \therefore f^{-1}(2) = 5$
17. গ; ব্যাখ্যা: $x = 0$ হলে, $\frac{1}{x}$ অসংজ্ঞায়িত।
18. খ;
19. খ; ব্যাখ্যা : $f(x) = \log x$ হলে $f^{-1}(x) = 10^x$
এবং $f(x)$ সংজ্ঞায়িত শুধুমাত্র $x > 0$ এর জন্য
$\therefore D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = \mathbb{R}$
20. ক; ব্যাখ্যা: $gof(x) = g(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$
$fog(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$
$\therefore fog(x) \neq gof(x)$.
সুতরাং (iii) সঠিক নয়।
21. ক; 22. গ; 23. ঘ; 24. ঘ;
25. গ; ব্যাখ্যা: (i) সঠিক নয়। কারণ $y = e^{x+2}$, (0, 1) বিন্দুগামী নয়।
(ii) সঠিক। কারণ $y = e^x - 2$
বা $x = \ell n(y + 2)$ এর রেঞ্জ $(-2, \infty)$
26. ক; ব্যাখ্যা: ঘনমূলের মান ঋণাত্মক হতে পারে তাই ডোমেন $\mathbb{R}$
27. ঘ; ব্যাখ্যা: $fog(3) = f\{g(3)\} = f\left(\sqrt[3]{\frac{3-2}{3}}\right)$
$= f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$
$= 3.\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 = 4$
28. ক; ব্যাখ্যা: sin x এর লেখ মূলবিন্দুগামী এবং ঢেউ আকৃতির $\sin 0° = 0$ ও $\sin 90° = 1$.
29. ক;
30. ক; ব্যাখ্যা: $x = 2$ হলো প্রদত্ত সমীকরণটির অসীমতট রেখা। যা y অক্ষের সমান্তরাল।
31. ক; ব্যাখ্যা: $y = \frac{1}{x}$ এর লেখ x ও y অক্ষকে স্পর্শ করবে না এবং x এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মনের জন্য y এর মান যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হবে।
32. গ; ব্যাখ্যা: $x = 0$ হলে, $y = \cos 0 = 1$
33. খ; ব্যাখ্যা: cosx ও sin x এর পর্যায়কাল 2π.
34. ঘ; ব্যাখ্যা: $x^3 - 3 = y$ হলে $x = \sqrt[3]{y+3}$
$\therefore f(x) = \sqrt[3]{y+3} - 2 \therefore f(x) = \sqrt[3]{x+3} - 2$
35. ক; ব্যাখ্যা: $f(5) = \sqrt[3]{5+3} - 2 = \sqrt[3]{2^3} - 2 = 2 - 2 = 0$
36. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = e^{x-3}$
ধরি, $y = e^{x-3} = f(x) \therefore f^{-1}(y) = x$
বা, $\ln y = x - 3$ বা, $x = \ln y + 3$
$\therefore f^{-1}(y) = \ln y + 3$
$\therefore f^{-1}(e) = \ln e + 3 = 1 + 3 = 4$
37. খ; ব্যাখ্যা:

ডোমেন: $4 - x > 0$	
$\therefore x < 4$	রেঞ্জ: $y > 0$
$\therefore$ ডোমেন $-\infty < x < 4$	$\therefore$ রেঞ্জ: $0 < y < \infty$

38. খ; ব্যাখ্যা: ডোমেন:

$4 - x^2 > 0$

বা, $x^2 < 4$

$\therefore x < \pm 2$

$\therefore$ ডোমেন: $-2 < x < 2$

রেঞ্জ: ধরি,

$y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

বা, $4 - x^2 = \dfrac{1}{y^2}$

বা, $x^2 = 4 - \dfrac{1}{y^2}$

$\therefore x = \sqrt{4 - \dfrac{1}{y^2}}$

শর্তমতে,

$4 - \dfrac{1}{y^2} \geq 0$ হবে।

বা, $\dfrac{1}{y^2} \leq 4$ বা, $y^2 \geq \dfrac{1}{4} \therefore y \geq \pm\dfrac{1}{2}$

39. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{(x-3)(x-2)}$

$(x-3)(x-2) \geq 0$ হলে ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

শর্ত	$(x-3)$	$(x-2)$	$f(x)$
$x < 2$	$-$	$-$	সংজ্ঞায়িত
$x = 2$	$-$	0	সংজ্ঞায়িত
$2 < x < 3$	$-$	$+$	অসংজ্ঞায়িত
$x = 3$	0	$+$	সংজ্ঞায়িত
$x > 3$	$+$	$+$	সংজ্ঞায়িত

$\therefore$ ডোমেন: $x \leq 2$ অথবা $3 \leq x$

রেঞ্জ: $y \geq 0$ [যেকোনো অঋণাত্মক সংখ্যা]

40. খ; ব্যাখ্যা: $f(x) = (x-2)(1-x)$

$\therefore f(3) = 1.(-2) = -2$

$\therefore f\{f(3)\} = f(-2) = -4.3 = -12$

41. ক;

42. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = \sin x,\ g(x) = x^2$

$\therefore g\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore f\left(g\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

43. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = x + 1$

$g(x) = 2x$

ধরি, $y = g(x) = 2x \therefore x = g^{-1}(y)$

$\therefore x = \dfrac{y}{2}$

$\therefore g^{-1}(y) = \dfrac{y}{2} \therefore g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$

$(fog^{-1})(x) = f\{g^{-1}(x)\} = f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2} + 1$

$\therefore (fog^{-1})(2) = \dfrac{2}{2} + 1 = 2$

44. গ; ব্যাখ্যা:

$(fog)(2) = f(g(2)) = f(5) = 5^2 - 2|5| = 25 - 10 = 15$

45. ক; ব্যাখ্যা: $x = 0$ বসালে y অক্ষের খণ্ডিত অংশ পাওয়া যায়।

$x = 0$ আছে $-2 \leq x \leq 3$ ব্যবধিতে এবং এই ব্যবধিতে $f(x) = x^2 - 2 \therefore f(0) = (0)^2 - 2 = -2$

46. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = \sqrt{x - 2}$

$g(x) = x^2 + 1$

$\therefore (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)$

$= \sqrt{x^2 + 1 - 2}$

$= \sqrt{x^2 - 1}$

শর্তমতে, $x^2 - 1 \geq 0$

বা, $x^2 \geq 1 \therefore x \geq \pm 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ডোমেন, $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

47. ঘ; ব্যাখ্যা: $x = 0$ হলে $y = -1$ এবং

$x = 1$ হলে $y = 0$। আবার সর্বদাই $y \leq 0$

অপশন 'ঘ' এর চিত্রটি উপরের সবগুলো শর্ত পূরণ করে।

48. খ; ব্যাখ্যা: $f(x) = 3x^3 + 2$

$g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{3}}$

$\therefore fog(x) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{3}}\right)$

$= 3.\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{3}}\right)^3 + 2$

$= 3.\dfrac{x-2}{3} + 2 = x$

$\therefore fog(5) = 5$

49. ক; ব্যাখ্যা: $\phi(z) = y \sin z + v$

$\Psi(w) = \sin^{-1}(yw^2 + y^2)^{-1}$

$\therefore \Psi(u^2) = \sin^{-1}(yu^4 + y^2)^{-1}$

$\therefore \phi(\Psi(u^2)) = y \sin\{\sin^{-1}(yu^4 + y^2)^{-1}\} + v$

$= y.\dfrac{1}{y(u^4 + y)} + v = (u^4 + y)^{-1} + v$

50. খ; ব্যাখ্যা: $\phi(x) = \log_e(\cos x)$

$\therefore e^{2\phi(x)} = e^{2\log_e(\cos x)} = e^{\log_e(\cos x)^2}$

$= \dfrac{1}{2}.2\cos^2 x$

$= \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

51. ক; ব্যাখ্যা: $f(2) = \ln e^{-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$

$= -\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

52. গ; ব্যাখ্যা: ধরি, $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

$\therefore yx - 3y = x - 2$

বা, $x(y-1) = 3y - 2 \therefore x = \frac{3y-2}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}-2}{\frac{3}{2}-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3.\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}-1} = \frac{0}{\frac{2}{3}-1} = 0$$

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) + f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

53. ক; ব্যাখ্যা: $f(2) = 2^2 - 3.2 = -2\ [\because x \geq 2]$

$f(-2) = -2 + 2 = 0$

$\therefore f(2) + f(-2) = -2$

54. গ; ব্যাখ্যা: $f(x+3) = 2^{x+3} = 2^x.2^3$

$f(x-1) = 2^{x-1} = 2^x.2^{-1}$

$\therefore \frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \frac{2^x.2^3}{2^x.2^{-1}}$

$= 2^{3+1} = 2^4 = f(4)$

55. খ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1, x > 0$ হলে $|x| = x$

আবার, $f(x) = \frac{-x}{|-x|} = \frac{-x}{x}$

$= -1, x < 0$ হলে $|-x| = x$

$\therefore f(x)$ এর বিস্তার $\{-1, 1\}$

56. গ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে, যখন $4 - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4$

$\Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

57. খ; ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

$\therefore f(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2-4}$

$\Rightarrow (x+1)^2 \neq 4$

$\Rightarrow x + 1 \neq \pm 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

58. ক; ব্যাখ্যা: $f(x) = \log_{x+1}(2x+1)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যখন, $2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

এবং $x + 1 > 0;\ x + 1 \neq 1$

$\therefore x > -1\ \therefore x \neq 0$

$\therefore$ ডোমেন, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$

59. ক; ব্যাখ্যা: $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ ... (i)

$\Rightarrow 2f(-x) + 3f(x) = (-x)^2 + x + 1$

$\Rightarrow 3f(x) + 2f(-x) = x^2 + x + 1$ ... ... (ii)

$2 \times (i) - 3 \times (ii)$

$\Rightarrow -5f(x) = -x^2 - 5x - 1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}x^2 + x + \frac{1}{5}$

সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. **ক** দেওয়া আছে, $p(x) = 2x - 7$ এবং $q(x) = x^2 + 5$

$\therefore\ q(p(3)) = q(2.3 - 7)$

$= q(-1) = (-1)^2 + 5$

$= 6$ **(Ans.)**

খ দৈর্ঘ্য পরিবর্তন $= 4x - 7$

তাপমাত্রার পরিবর্তন $= 2x - 4$

শর্তমতে, $f(x) = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পরিবর্তন}}{\text{তাপমাত্রা পরিবর্তন}}$

$\therefore\ f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

এখানে, $2x - 4 = 0$ হলে $f(x)$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

সুতরাং $2x - 4 \neq 0$

$\therefore x \neq 2$

যেহেতু সময় ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore\ f(x)$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}^+ - \{2\}$ **(Ans.)**

যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদিও কেবল যদি $\frac{4x_1-7}{2x_1-4} = \frac{4x_2-7}{2x_2-4}$

বা, $8x_1x_2 - 16x_1 - 14x_2 + 28 = 8x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 + 28$

বা, $-14x_2 + 16x_2 = 16x_1 - 14x_1$

বা, $2x_2 = 2x_1\quad \therefore x_1 = x_2$

$\therefore\ f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

গ প্রশ্নমতে, $fog(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

বা, $\frac{4g(x)-7}{2g(x)-4} = \frac{x-3}{2x+1}$

বা, $2xg(x) - 6g(x) - 4x + 12 = 8xg(x) + 4g(x) - 14x - 7$

বা, $10x + 19 = 6xg(x) + 10g(x)$

বা, $(6x + 10)g(x) = 10x + 19$

$\therefore\ g(x) = \dfrac{10x + 19}{6x + 10}$

ধরি, $y = g(x) = \dfrac{10x + 19}{6x + 10}$

বা, $6xy + 10y = 10x + 19$

বা, $6xy - 10x = 19 - 10y$

$\therefore\ x = \dfrac{19 - 10y}{6y - 10} \in \mathbb{R}$ হবে যদিও কেবল

যদি $6y - 10 \neq 0$ বা $y \neq \dfrac{5}{3}$ হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

2. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x^2 - 17}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $x^2 - 17 \geq 0$ হয়।

বা, $x^2 \geq 17$

$\therefore x \geq \sqrt{17}$ অথবা, $x \leq -\sqrt{17}$

$\therefore f(x)$ এর ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{17}$ অথবা, $x \geq \sqrt{17}\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 17,\ g(x) = \sqrt{x + 8}$

এখন, $fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x + 8})$

$= (\sqrt{x + 8})^2 - 17$

$= x + 8 - 17 = x - 9$

এবং $gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 17)$

$= \sqrt{x^2 - 17 + 8} = \sqrt{x^2 - 9}$

এখন ধরি, $- fog(x) = gof(x)$

বা, $9 - x = \sqrt{x^2 - 9}$

বা, $(9 - x)^2 = x^2 - 9$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 18x + 81 = x^2 - 9$

বা, $18x = 81 + 9$

বা, $18x = 90 \therefore x = 5$

আবার, $fog(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R}$

এবং $gof(x)$ সংজ্ঞায়িত হয় যদি $x^2 - 9 \geq 0$

বা, $x^2 \geq 9$

$\therefore x \leq -3$ অথবা $x \geq 3$ হয়

অর্থাৎ $gof(x)$ এর ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3$ অথবা $x \geq 3\}$

$\therefore$ x এর যে মানগুলোর জন্য $fog(x) \neq gof(x)$ হবে তাদের সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3$ অথবা $x \geq 3, x \neq 5\}$

(Ans.)

গ দেওয়া আছে, $p(x) = \dfrac{f^{-1}(x)}{g(x)}$

ধরি, $y = f(x) = x^2 - 17$

বা, $x^2 = y + 17$ বা, $x = \pm\sqrt{y + 17}$

বা, $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y + 17}$ $[\because y = f(x)]$

$\therefore f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x + 17}$

$\therefore p(x) = \dfrac{\pm\sqrt{x + 17}}{\sqrt{x + 8}} = \pm\sqrt{\dfrac{x + 17}{x + 8}} = m$ (ধরি)

বা, $m^2 = \dfrac{x + 17}{x + 8}$ [যেখানে, $x \neq -8$]

বা, $m^2x + 8m^2 = x + 17$

বা, $(m^2 - 1)x = 17 - 8m^2$

$\therefore x = \dfrac{17 - 8m^2}{m^2 - 1}$

এখানে, $m^2 = 1$

বা, $m = \pm 1$ হতে হলে x অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore p(x)$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ **(Ans.)**

3. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} \lambda x + 6; & x \leq -2 \\ \lambda x - 6; & x > 2 \end{cases}$ এবং $f(3) = 0$

যখন $x = 3$ তখন $f(x) = \lambda x - 6; x > 2$

$\therefore f(3) = \lambda.3 - 6 = 3\lambda - 6$

আবার, $f(3) = 0$

বা, $3\lambda - 6 = 0$

বা, $3\lambda = 6$

$\therefore \lambda = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x - 16},\ g(x) = x^2 + 7$

$\therefore fog(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 7) = \sqrt{x^2 + 7 - 16}$

$= \sqrt{x^2 - 9}$

যদি $x^2 - 9 \geq 0$ হয় তবে $fog(x)$ সংজ্ঞায়িত।

বা, $x^2 \geq 9 \ \therefore x \geq 3$ অথবা $x \leq -3$

$\therefore D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3$ অথবা $x \leq -3\}$ **(Ans.)**

$gof(x) = g\{f(x)\} = g(\sqrt{x - 16}) = (\sqrt{x - 16})^2 + 7$

$= x - 16 + 7 = x - 9$

$\therefore gof(9) = 9 - 9 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $fop(x) = \sqrt{\dfrac{61 - 31x}{2x - 4}}$

এবং $f(x) = \sqrt{x - 16}$

এখন, $fop(x) = \sqrt{\dfrac{61 - 31x}{2x - 4}}$

বা, $f(p(x)) = \sqrt{\dfrac{61 - 31x}{2x - 4}}$

বা, $\sqrt{p(x) - 16} = \sqrt{\dfrac{61 - 31x}{2x - 4}}$

বা, $p(x) - 16 = \frac{61 - 31x}{2x - 4}$ [বর্গ করে]

বা, $p(x) = \frac{61 - 31x}{2x - 4} + 16 = \frac{61 - 31x + 32x - 64}{2x - 4}$

$\therefore p(x) = \frac{x - 3}{2x - 4}$

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম p

p(x) এক-এক ফাংশন হবে যদি $p(x_1) = p(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

তাহলে, $p(x_1) = p(x_2)$ হলে

বা, $\frac{x_1 - 3}{2x_1 - 4} = \frac{x_2 - 3}{2x_2 - 4}$

বা, $2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 + 12 = 2x_1x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 12$

বা, $-4x_1 - 6x_2 = -6x_1 - 4x_2$

বা, $-4x_1 + 6x_1 = -4x_2 + 6x_2$

বা, $2x_1 = 2x_2 \therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ p(x) ফাংশনটি এক-এক ফাংশন। (দেখানো হলো)

4. ক দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{1}{x + 5}$

$\therefore g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x+5}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+5} + 5}$

$= \frac{1}{\frac{1 + 5x + 25}{x + 5}}$

$= \frac{x + 5}{5x + 26}$ **(Ans.)**

খ $f\{g(x)\} = 2\,g(x) - 3 = 2.\frac{1}{x + 5} - 3$

$= \frac{2 - 3x - 15}{x + 5} = \frac{-3x - 13}{x + 5}$

$fog(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x \neq -5$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $D_{fog} = \mathbb{R} - \{-5\}$. **(Ans.)**

ধরি, $y = fog(x) = \frac{-3x - 13}{x + 5}$

বা, $xy + 5y = -3x - 13$

বা, $xy + 3x = -5y - 13$

বা, $x(y + 3) = -5y - 13$

$\therefore x = \frac{-5y - 13}{y + 3}$

x এর বাস্তব মানের জন্য $y + 3 \neq 0$ হবে বা, $y \neq -3$ হবে।

$\therefore fog(x)$ এর মান কখনো -3 পাওয়া যাবে না।

... $\{-3\}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \frac{1}{x + 5}$

ধরি, $y = 2x - 3$

বা, $2x = y + 3$ বা, $x = \frac{y + 3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$

আবার, ধরি, $g^{-1}(2) = a$

বা, $g(a) = 2$ বা, $\frac{1}{a + 5} = 2$

বা, $a + 5 = \frac{1}{2}$ $\therefore a = -\frac{9}{2}$

$\therefore g^{-1}(2) = -\frac{9}{2}$

প্রশ্নমতে, $f^{-1}(x) = g^{-1}(2)$

বা, $\frac{x + 3}{2} = -\frac{9}{2}$ বা, $x + 3 = -9$

$\therefore x = -12$ **(Ans.)**

5. ক দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(x)$

যেহেতু সকল $x > 0$ এর জন্য $f(x)$ বিদ্যমান।

সুতরাং $f(x)$ এর ডোমেন, $D_f = (0, \infty)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$ $\therefore g(y) = \frac{1 + y}{1 - y}$

এখন, $g(x) - g(y) = \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 + y}{1 - y}$

$= \frac{1 + x - y - xy - 1 - y + x + xy}{(1 - x)(1 - y)}$

$\therefore g(x) - g(y) = \frac{2(x - y)}{(1 - x)(1 - y)}$ .... (i)

এবং $1 + g(x)g(y) = 1 + \frac{1 + x}{1 - x}.\frac{1 + y}{1 - y}$

$= \frac{1 - x - y + xy + 1 + x + y + xy}{(1 - x)(1 - y)}$

$\therefore 1 + g(x)g(y) = \frac{2(1 + xy)}{(1 - x)(1 - y)}$ .... (ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{g(x) - g(y)}{1 + g(x)g(y)} = \frac{2(x - y)}{(1 - x)(1 - y)}.\frac{(1 - x)(1 - y)}{2(1 + xy)}$

$\therefore \frac{g(x) - g(y)}{1 + g(x)g(y)} = \frac{x - y}{1 + xy}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$ ও $f(x) = \ln(x)$

$\therefore fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

$$\therefore fog\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$$

$$= 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2fog(x) \text{ (প্রমাণিত)}$$

6. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{ax+b}{cx-d}$

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম f.

ফাংশনটি এক-এক হবে যদিও কেবল যদি

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ হয়।

শর্তমতে, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\frac{ax_1+b}{cx_1-d} = \frac{ax_2+b}{cx_2-d}$

বা, $acx_1x_2 - adx_1 + bcx_2 - bd$
$= acx_1x_2 + bcx_1 - adx_2 - bd$

বা, $bcx_2 + adx_2 = bcx_1 + adx_1$

বা, $(bc + ad)x_2 = (bc + ad)\, x_1$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $a = 1, b = -3, c = 3$ ও $d = -1$

$\therefore f(x) = \frac{ax+b}{cx-d} = \frac{1.x+(-3)}{3x-(-1)} = \frac{x-3}{3x+1}$

ধরি, $y = f(x) = \frac{x-3}{3x+1}$

$f(x) \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $3x + 1 \neq 0$ হয়।

$\therefore x \neq \frac{-1}{3}$

$\therefore$ ডোম, $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$ **(Ans.)**

আবার, $y = \frac{x-3}{3x+1}$

বা, $3xy + y = x - 3$

বা, $y + 3 = x - 3xy$

বা, $y + 3 = x\,(1 - 3y)$

$\therefore x = \frac{y+3}{1-3y}$

$x = \frac{y+3}{1-3y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$1 - 3y \neq 0$ হয়।

বা, $1 \neq 3y \quad \therefore y \neq \frac{1}{3}$

$\therefore$ রেঞ্জ, $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = d$

$\therefore f(x) = \frac{ax+b}{cx-d} = \frac{ax+b}{cx-a}$ [মান বসিয়ে]

ধরি, $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$

$\therefore y = \frac{ax+b}{cx-a}$ বা, $cxy - ay = ax + b$

বা, $cxy - ax = ay + b$

বা, $x\,(cy - a) = ay + b$

বা, $x = \frac{ay+b}{cy-a}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{ay+b}{cy-a}$ [$\because f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)$]

বা, $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$

$\therefore f^{-1}(x) = f(x)$ **(দেখানো হলো)**

7. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = -x^2 + 3x + 2$

$\therefore f(f(x)) = f(-x^2 + 3x + 2)$
$= -(-x^2+3x+2)^2 + 3(-x^2+3x+2)+2$
$= -(x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 + 12x - 4x^2)$
$- 3x^2 + 9x + 6 + 2$
$= -x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 3x + 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = -x^2 + 3x + 2$

ইহা x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore f$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **(Ans.)**

ধরি, $y = f(x) = -x^2 + 3x + 2$

বা, $y = -(x^2 - 3x - 2)$

বা, $y = -\left\{x^2 - 2.\frac{3}{2}.x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\right\}$

$= -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2\right\}$

$= -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right\}$

$\therefore y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$

এখানে $-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0 \therefore y \leq \frac{17}{4}$

$\therefore f$ এর রেঞ্জ $= (-\infty, \frac{17}{4}]$ **(Ans.)**

গ $y = f(x) = -x^2 + 3x + 2$

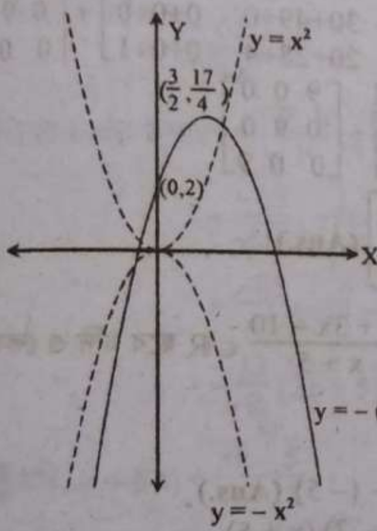
$y = f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$

$\therefore y - \frac{17}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ হলে পাই, $y = \frac{17}{4}$

$g(x) = x^2$ ফাংশনটির স্কেচ x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলিত করলে $y = -x^2$ এর লেখ পাওয়া যাবে এবং $-x^2$ এর লেখকে $\frac{3}{2}$ একক ডানে এবং $\frac{17}{4}$ একক উপরে উঠালে $f(x)$ এর স্কেচ পাওয়া যায়।

নিম্নে $g(x) = x^2$ এর স্কেচ থেকে ফাংশনটির স্কেচ অংকন করা হলো:



8. ক দেওয়া আছে, $f(x) = e^x$

ইহা x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{x}$ ও $h(x) = 25 - x^2$

$\therefore goh = (goh)(x) = g\{h(x)\} = g(25 - x^2)$

$= \sqrt{25 - x^2}$

ধরি, $a, b \in [0, 5]$ তাহলে,

$(goh)(a) = \sqrt{25 - a^2}$ এবং $(goh)(b) = \sqrt{25 - b^2}$

এখন যদি $(goh)(a) = (goh)(b)$ হয় তবে,

$\sqrt{25 - a^2} = \sqrt{25 - b^2}$

বা, $25 - a^2 = 25 - b^2$ বা, $a^2 = b^2$

$\therefore a = b$ $[\because a, b \in [0, 5]]$

$\therefore$ goh ফাংশনটি এক-এক।

আবার, $x = 0$ হলে $goh = 5$

এবং $x = 5$ হলে $goh = 0$

$\therefore$ goh এর রেঞ্জ $[0, 5]$ = কোডোমেন

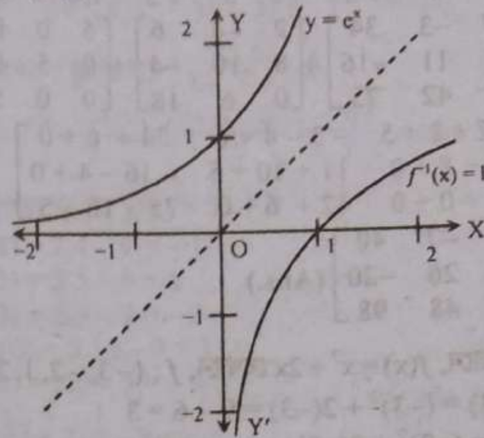
$\therefore$ goh সার্বিক।

$\therefore$ [0 5] ব্যবধিতে goh ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।

গ ধরি, $y = f(x) = e^x$ বা, $\log_e y = x$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_e x$

নিম্নে একই লেখচিত্রে $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো।



প্রকৃতি:

১. $f(x)$ এবং এর বিপরীত ফাংশনের স্কেচ $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

২. $f(x)$ ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষের সাথে কখনো মিলিত হয় না বা পরস্পর ছেদ করে না।

৩. $f(x)$ ও তার বিপরীত ফাংশনের স্কেচ যথাক্রমে y-অক্ষ ও x-অক্ষকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. উভয়ই বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন।

9. ক এখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$= 1(45 + 6) + (-2)(0 - 36) + 3(12 - 0)$

$= 51 + 72 + 36 = 159$ **(Ans.)**

খ এখানে, $f(x) = x^2 + 2x$ এবং $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore f(A) = A^2 + 2A$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 - 8 + 0 & -2 - 10 + 9 & 3 + 4 + 27 \\ 4 + 20 + 0 & -8 + 25 - 6 & 12 - 10 - 18 \\ 0 + 12 + 0 & 0 + 15 + 27 & 0 - 6 + 81 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -7 & -3 & 34 \\ 24 & 11 & -16 \\ 12 & 42 & 75 \end{bmatrix}$

এখন, $A^2+2A+5I_3$

$$=\begin{bmatrix}-7&-3&34\\24&11&-16\\12&42&75\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&-2&3\\4&5&-2\\0&3&9\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7&-3&34\\24&11&-16\\12&42&75\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-4&6\\8&10&-4\\0&6&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7+2+5&-3-4+0&34+6+0\\24+8+0&11+10+5&-16-4+0\\12+0+0&42+6+0&75+18+5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-7&40\\32&26&-20\\12&48&98\end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

গ এখানে, $f(x)=x^2+2x$ যেখানে, $f:\{-3,-2,1,2\}\to\mathbb{N}$

$\therefore f(-3)=(-3)^2+2(-3)=9-6=3$

$f(-2)=(-2)^2+2(-2)=4-4=0$

$f(1)=1^2+2.1=3$

$f(2)=2^2+2.2=8$

আমরা জানি, $\mathbb{N}=\{1,2,3,......\}$

সুতরাং রেঞ্জ $f=\{3,8\}$

রেঞ্জ এর উপাদান 3, 8 ব্যবহার করে চার অংক বিশিষ্ট অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠনের জন্য শেষ অংকটি সর্বদা 8 হবে। তাহলে, অবশিষ্ট 3টি অংকের স্থানে 3, 8 উপাদানসমূহ বসালে, উপাদানসমূহের পুণরাবৃত্তিসহ বিন্যাস সংখ্যা $=2^3=8$ **(Ans.)**

10. ক ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে,

$$\begin{vmatrix}x+3&3\\2&x+2\end{vmatrix}=0$$

বা, $x^2+3x+2x+6-6=0$

বা, $x^2+5x=0$

বা, $x(x+5)=0$

$\therefore x=0,-5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x)=x^2+9$

$\therefore P(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2+9}$

ধরি, $P^{-1}[3,\sqrt{10}]=y$

বা, $[3,\sqrt{10}]=P(y)=\sqrt{y^2+9}$

$\therefore 3\le\sqrt{y^2+9}\le\sqrt{10}$

বা, $9\le y^2+9\le 10$

বা, $0\le y^2\le 1$

$\therefore -1\le y\le 1$

$\therefore P^{-1}[3,\sqrt{10}]=[-1,1]$ **(Ans.)**

গ ধরি, $M=AB+I$

$$\therefore M=\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}[1\ 2\ 0]+I$$

$$=\begin{bmatrix}5&10&0\\3&6&0\\2&4&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&10&0\\3&7&0\\2&4&1\end{bmatrix}$$

$\therefore f(AB+I)=f(M)$

$=M^2+9\quad[\because f(x)=x^2+9]$

$=M.M+9I$

$$=\begin{bmatrix}6&10&0\\3&7&0\\2&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&10&0\\3&7&0\\2&4&1\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}36+30+0&60+70+0&0+0+0\\18+21+0&30+49+0&0+0+0\\12+12+2&20+28+4&0+0+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}66&130&0\\39&79&0\\26&52&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}75&130&0\\39&88&0\\26&52&10\end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

11. ক $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}\in\mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$x+5\neq 0$

$\therefore x\neq -5$

ডোমেন, $D_f=\mathbb{R}-\{-5\}$ **(Ans.)**

এখানে, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x+5)}=x-2$

যেহেতু $x\neq -5$

$\therefore f(-5)=-5-2=-7$

$\therefore$ রেঞ্জ, $R_f=\mathbb{R}-\{-7\}$ **(Ans.)**

খ যেহেতু, **a** ও **b** পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore 3\hat{i}+m\hat{j}+6\hat{k}=\lambda(5\hat{i}+3\hat{j}+10\hat{k})$

বা, $3\hat{i}+m\hat{j}+6\hat{k}=5\lambda\hat{i}+3\lambda\hat{j}+10\lambda\hat{k}$

বা, $\hat{i}(3-5\lambda)+\hat{j}(m-3\lambda)+\hat{k}(6-10\lambda)=0$

$$\left.\begin{aligned}&\therefore 3-5\lambda=0\ ......\ (i)\\&m-3\lambda=0\ ......\ (ii)\\&6-10\lambda=0\ ......\ (iii)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&(i)\Rightarrow 5\lambda=3\ \therefore \lambda=\frac{3}{5}\\&(ii)\Rightarrow m=3\lambda=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}\end{aligned}\right\}$$

$\therefore m=\dfrac{9}{5}$ হলে **a** ও **b** পরস্পর সমান্তরাল হবে।

গ $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(3\hat{i}+m\hat{j}+6\hat{k})-(5\hat{i}+3\hat{j}+10\hat{k})$

$=(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})-(5\hat{i}+3\hat{j}+10\hat{k})$ $[\because m=-2]$

$=-2\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}$

ধরি, $\mathbf{P}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=-2\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}$

এবং দেওয়া আছে, $\mathbf{b}=5\hat{i}+3\hat{j}+10\hat{k}$

$\therefore$ **P** বরাবর **b** এর অভিক্ষেপ $=\dfrac{\mathbf{P}.\mathbf{b}}{P}$

$=\dfrac{(-2)(5)+(-5)(3)+(-4)10}{\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+(-4)^2}}$

$=\dfrac{-10-15-40}{\sqrt{45}}$

$=\dfrac{-65}{\sqrt{45}}$

$\therefore$ **P** বরাবর **b** এর উপাংশ $=\left(\dfrac{\mathbf{P}.\mathbf{b}}{P}\right)\left(\dfrac{\mathbf{P}}{P}\right)$

$=\dfrac{-65}{\sqrt{45}}.\dfrac{1}{\sqrt{45}}(-2\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

$=\dfrac{-65}{45}(-2\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

$=\dfrac{13}{9}(2\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})$ **(Ans.)**

12. ক ধরি, $y=f(x)=\dfrac{3x-5}{4x+7}$

বা, $4xy+7y=3x-5$

বা, $x(4y-3)=-5-7y$

$\therefore x=\dfrac{5+7y}{3-4y}$

$y=\dfrac{3}{4}$ ব্যতীত সকল মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore f(x)$ এর রেঞ্জ, $R_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=\dfrac{3x-5}{4x+7}$

ও $g(x)=2x-9$

$\therefore fop(x)=f(p(x))=\dfrac{3\,p(x)-5}{4\,p(x)+7}$

$fop(x)=g(x)$ হলে পাই,

$\dfrac{3\,p(x)-5}{4\,p(x)+7}=2x-9$

বা, $3\,p(x)-5=8x\,.\,p(x)+14x-36\,p(x)-63$

বা, $3\,p(x)-8x\,.\,p(x)+36\,p(x)=14x-63+5$

বা, $39\,p(x)-8x\,.\,p(x)=14x-58$

$\therefore p(x)=\dfrac{14x-58}{39-8x}$

$\therefore p(4)=\dfrac{14.4-58}{39-8.4}=\dfrac{56-58}{39-32}=\dfrac{-2}{7}$

$\therefore gop(4)=g(p(4))=2.\left(\dfrac{-2}{7}\right)-9$

$=\dfrac{-4}{7}-9=\dfrac{-4-63}{7}=\dfrac{-67}{7}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x)=2x-9$

$\therefore g(4)=2.4-9=-1$

$g(5)=2.5-9=1$

$g(3)=2.3-9=-3$

$g(10)=2.10-9=11$

$g(0)=2.0-9=-9$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2.\dfrac{1}{2}-9=-8$

$\therefore \mathbf{R}=g(4)\hat{i}-g(5)\hat{j}-g(3)\hat{k}$

$=-\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{R}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$

এবং $\mathbf{M}=-g(10)\hat{i}+g(0)\hat{j}+g\left(\dfrac{1}{2}\right)\hat{k}$

$=-11\hat{i}-9\hat{j}-8\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{M}|=\sqrt{(-11)^2+(-9)^2+(-8)^2}=\sqrt{266}$

মনে করি, **R** ও **M** এর মধ্যবর্তী কোণ θ

তাহলে, $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{R}\,.\,\mathbf{M}}{|\mathbf{R}|\,|\mathbf{M}|}$

$=\dfrac{(-\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})\,.\,(-11\hat{i}-9\hat{j}-8\hat{k})}{\sqrt{11}\,.\,\sqrt{266}}$

$=\dfrac{11+9-24}{\sqrt{2926}}=\dfrac{-4}{\sqrt{2926}}$

$\therefore \theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{2926}}\right)$ **(Ans.)**

13. ক $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি,

$7-x>0$

বা, $7>x$ বা, $x<7$

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন, $D_f=(-\infty, 7)$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,

$g(x)=b\dfrac{x-a}{b-a}+a\dfrac{x-b}{a-b}$

$\therefore g(a)=b\dfrac{a-a}{b-a}+a\dfrac{a-b}{a-b}=b.0+a.1=a$

এবং $g(b) = b.\frac{b-a}{b-a} + a.\frac{b-b}{a-b} = b.1 + a.0 = b$

$\therefore g(a) + g(b) = a + b$

এখন, $g(a+b) = b\left(\frac{a+b-a}{b-a}\right) + a\left(\frac{a+b-b}{a-b}\right)$

$= \frac{b^2}{b-a} + \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$

$= \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a + b$

$\therefore g(a) + g(b) = g(a+b)$ (প্রমাণিত)

গ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই

$3x - 4y + 5 = 0$................. (i)

(i) নং রেখার উপর লম্ব হবে এরূপ যেকোনো রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + k = 0$ [k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক]

যদি রেখাটি $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

তবে $4 \times 2 + 3 \times (-1) + k = 0 \Rightarrow k = -5$

সুতরাং প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব এবং $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $4x + 3y - 5 = 0$ .... (ii)

তাহলে (i) ও (ii) নং রেখায় ছেদবিন্দুই নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দু।

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন করে পাই,

$\frac{x}{20-15} = \frac{y}{20+15} = \frac{1}{9+16}$

বা, $\frac{x}{5} = \frac{y}{35} = \frac{1}{25}$ বা, $x = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, y = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় পাদবিন্দু $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

14. ক অন্বয়: দুইটি অশূন্য সেট A ও B এর গুণজ সেট $A \times B$ এর যেকোনো উপসেটকে A সেট হতে B সেটে একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়। এই অন্বয়কে R দ্বারা প্রকাশ করা হলে, $R \subseteq A \times B$.

ফাংশন হচ্ছে দুইটি সেটের মধ্যে এমন একটি অন্বয় যেখানে প্রথম সেটের প্রত্যেকটি উপাদান দ্বিতীয় সেটের একটি অনন্য উপাদানের সাথে সম্পর্কযুক্ত।

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x+5}{4}$

মনে করি, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\frac{3x_1+5}{4} = \frac{3x_2+5}{4}$

বা, $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$

বা, $3x_1 = 3x_2$

বা, $x_1 = x_2$

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক।

আবার, ধরি, $y = \frac{3x+5}{4}$ তাহলে $x = \frac{4y-5}{3}$, যা y এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত যেন

$f\left(\frac{4y-5}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{4y-5}{3}\right)+5}{4} = \frac{4y-5+5}{4} = y$

যেহেতু $f(x) = y$

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক।

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $g(x, y) = 0$

বা, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ .... (i)

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+4+4} = 3$

$y = f(x) = \frac{3x+5}{4}$ বা, $3x + 5 = 4y$

বা, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার সাথে লম্ব, এরূপ যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ,

$4x + 3y + k = 0$ .... (ii) [k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক]

(ii) নং সরলরেখাটি (i) নং বৃত্তের স্পর্শক হলে, কেন্দ্র $(1, 2)$ হতে (i) নং রেখার লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

অর্থাৎ $\left|\frac{4.1 + 3.2 + k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 3$

বা, $\left|\frac{10+k}{5}\right| = 3$

বা, $10 + k = \pm 15 \quad \therefore k = 5, -25$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $4x + 3y + 5 = 0$,
$4x + 3y - 25 = 0$

15. ক প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$

$\therefore f = -4$ ও $c = 8$

$\therefore$ y অক্ষ হতে খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

$= 2\sqrt{(-4)^2 - 8} = 2\sqrt{16-8}$

$= 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$ ...... (i)

এবং ছেদক রেখার সমীকরণ, $y = \frac{1}{4}(2x + 7)$

$\therefore 4y - 2x - 7 = 0$ ...... (ii)

(i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 + k(4y - 2x - 7) = 0$ ...... (iii)

(iii) নং বৃত্ত মূলবিন্দুগামী হলে,

$0^2 + 0^2 - 6.0 - 8.0 + 8 + k(4.0 - 2.0 - 7) = 0$

বা, $-7k = -8 \quad \therefore k = \frac{8}{7}$

k এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 + \frac{8}{7}(4y - 2x - 7) = 0$

বা, $7x^2 + 7y^2 - 42x - 56y + 56 + 32y - 16x - 56 = 0$

$\therefore 7x^2 + 7y^2 - 58x - 24y = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{1}{4}(2x + 7)$ ... ... (i)

ধরি, $f(a) = f(b)$ যেখানে $a, b \in$ ডোম f.

তাহলে, $\frac{1}{4}(2a + 7) = \frac{1}{4}(2b + 7)$

বা, $2a + 7 = 2b + 7$

বা, $2a = 2b$

$\therefore a = b$

$\therefore f$ একটি এক-এক ফাংশন।

আবার, (i) হতে পাই, $4y = 2x + 7$

বা, $2x = 4y - 7$

$\therefore x = \frac{1}{2}(4y - 7)$ ... ... (ii)

y এর সকল মানের জন্য (ii) নং সত্য।

$\therefore$ রেঞ্জ, $f = \mathbb{R}$ = কোডোমেন f।

$\therefore f$ ফাংশনটি সার্বিক।

$\therefore f^{-1}(x)$ বিদ্যমান।

(ii) নং হতে পাই, $x = \frac{1}{2}(4y - 7)$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(4y - 7)$ [$\because f(x) = y$ বা, $x = f^{-1}(y)$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(4x - 7)$ **(Ans.)**

16. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x + 3}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি, $x + 3 \geq 0$

বা $x \geq -3$ হয়।

$\therefore f(x)$ এর ডোমেন, $D_f = [-3, \infty)$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপকের ইংরেজী শব্দ 'COTANGENT' এর 9টি বর্ণের মধ্যে 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ ও 6 টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। যার মধ্যে 2টি t ও 2টি n।

শব্দটির সবগুলো বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{9!}{2!\,2!} = 90720$

স্বরবর্ণ 3টিকে একত্রে 1টি বর্ণ বিবেচনা করলে মোট বর্ণ হয় 7 টি। তখন বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{2!\,2!} = 1260$

আবার, স্বরবর্ণ 3টিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় 3! বা 6 উপায়ে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= 1260 \times 6$
$= 7560$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে না রেখে গঠিত শব্দের সংখ্যা
$= 90720 - 7560$
$= 83160$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$

$\therefore g(0) = \cot^{-1}(1 + 0 + 0) = \cot^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$g(1) = \cot^{-1}(1 + 1 + 1^2) = \cot^{-1}(3) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$g(2) = \cot^{-1}(1 + 2 + 2^2) = \cot^{-1}(7) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$2g(1) + g(2) = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= \tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}\right) = \tan^{-1}(1)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore g(0) + 2g(1) + g(2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ **(দেখানো হলো)**

17. **ক** 'COMPUTER' শব্দটিতে মোট বর্ণ আছে ৪টি। 'COM' অংশটিকে একত্রে একটি বর্ণ হিসেবে বিবেচনা করলে মোট বর্ণ হয় 6টি।

6টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানোর সংখ্যা $= 6! = 720$
(Ans.)

খ দেওয়া আছে, $p(x) = \frac{36x^2 - 169}{f(x)}$

$\therefore p(x) = \frac{36x^2 - 169}{6x + 13}$ [$\because f(x) = 6x + 13$]

$= \frac{(6x)^2 - 13^2}{6x + 13} = \frac{(6x - 13)(6x + 13)}{6x + 13} = 6x - 13$

ধরি, $y = p(x) = 6x - 13$

বা, $6x = y + 13$

$\therefore x = \frac{1}{6}(y + 13)$

y এর সকল মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore p(x)$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R}$.

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 6x + 13$ ও $g(x) = 9 - 14x$

$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\therefore r(x) = \frac{6x+13}{9-14x}$

ধরি, $r(a) = r(b)$. যেখানে $a, b \in$ ডোম r

তাহলে, $\frac{6a+13}{9-14a} = \frac{6b+13}{9-14b}$

বা, $54a + 117 - 84ab - 182b = 54b - 84ab + 117 - 182a$

বা, $54a + 182a = 54b + 182b$

বা, $236a = 236b$

$\therefore a = b$

$\therefore r(x)$ একটি এক-এক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

18. ক দেওয়া আছে, $h(x) = \frac{4x+3}{7x+2}$

$\therefore h(-1) = \frac{4.(-1)+3}{7.(-1)+2} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

$\therefore \cos\{h(-1)\theta\} = \cos\left(\frac{\theta}{5}\right)$

$\therefore$ ফাংশনটির পর্যায় $= \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $h : \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{7}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{7}\right\}$

এবং $h(x) = \frac{4x+3}{7x+2}$

ধরি, $h(a) = h(b)$. যেখানে $a, b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-2}{7}\right\}$

তাহলে, $\frac{4a+3}{7a+2} = \frac{4b+3}{7b+2}$

বা, $28ab + 21b + 8a + 6 = 28ab + 21a + 8b + 6$

বা, $21a - 8a = 21b - 8b$

বা, $13a = 13b \quad \therefore a = b$

$\therefore h(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

ধরি, $y = h(x) = \frac{4x+3}{7x+2}$

বা, $7xy + 2y = 4x + 3$

বা, $x(7y - 4) = 3 - 2y \therefore x = \frac{3-2y}{7y-4}$

কেবলমাত্র $y = \frac{4}{7}$ এর জন্য x বিদ্যমান নয়।

$\therefore h(x)$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{7}\right\} = h(x)$ এর কোডোমেন।

$\therefore h(x)$ ফাংশনটি সার্বিক। **(দেখানো হলো)**

গ উদ্দীপকের ইংরেজী শব্দ HYPERBOLA এর 9 টি বর্ণের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ ও বাকি 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। স্বরবর্ণ 3টির অবস্থান পরিবর্তন না করে বাকি 6টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানোর উপায় $= 6! = 720$

শব্দটির সবগুলো অক্ষর নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= 9! = 362880$

শব্দটির স্বরবর্ণ তিনটিকে 1টি বর্ণ বিবেচনা করলে মোট বর্ণ হয় 7টি। তখন বিন্যাস সংখ্যা $= 7! = 5040$। আবার স্বরবর্ণ 3টিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় 3! বা 6 উপায়ে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= 5040 \times 6$
$= 30240$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলি একত্রে না রেখে বিন্যাস সংখ্যা
$= 362880 - 30240$
$= 332640$
$= 462 \times 720$
$= 462 \times$ অবস্থান

পরিবর্তন না করে বিন্যাস সংখ্যা। **(প্রমাণিত)**

19. ক 5টি বস্তুর মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $^5P_2$ এবং অবশিষ্ট $(10 - 2)$ বা 8টি বস্তুর মধ্যে 3টি বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $^8P_3$।

$\therefore$ 10 টি বস্তু হতে 5 টি নিয়ে যাতে সর্বদা 2 টি বিশেষ বস্তু অন্তর্ভুক্ত থাকে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {^5P_2} \times {^8P_3} = 6720$

খ দেওয়া আছে $g(x) = 2x + 1$ এবং $h(x) = e^{-x+3}$

এখন, $h(g(x)) = h(2x + 1)$
$= e^{-(2x+1)+3}$
$= e^{-2x-1+3}$
$= e^{-2x+2}$
$= e^{-2(x-1)}$

ধরি, $y = h(g(x)) = e^{-2(x-1)}$

বা, $\ln y = -2(x - 1)$ [উভয়পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই]

বা, $\ln y = -2x + 2$ বা, $2x = 2 - \ln y$

$\therefore x = 1 - \frac{1}{2}\ln y \in \mathbb{R}$ হবে যদিও কেবল যদি $y \geq 0$ হয়।

সুতরাং $h(g(x))$ রেঞ্জ $= [0, \infty)$

গ দেয়া আছে, $h(x) = e^{-x+3}$

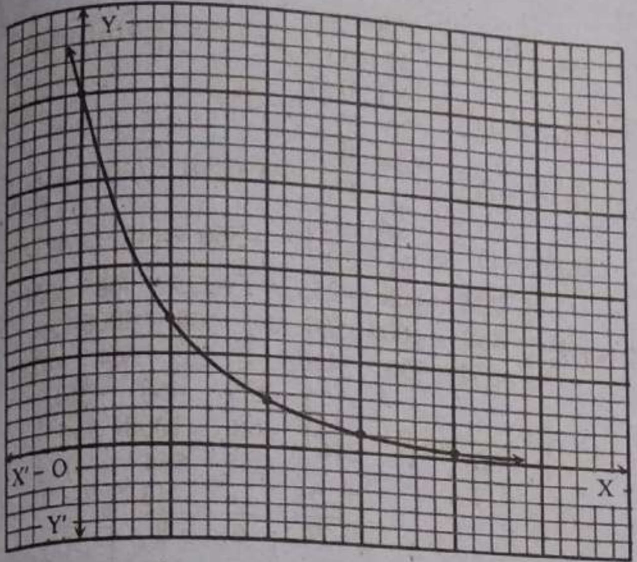
x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য h(x) এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করি।

x	−1	0	1	2	3	4	5
h(x)	54.6	20.1	7.38	2.7	1	0.37	0.135

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করে নির্ণেয় লেখচিত্র অংকন করি।

x-অক্ষ বরাবর প্রতি ক্ষুদ্র 5 ঘর = 1 একক

y-অক্ষ বরাবর প্রতি ক্ষুদ্র 1 ঘর = 1 একক নিই



লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য পর্যালোচনা করে দেখতে পাই x এর যেকোনো মানের জন্য h(x) সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ h(x) এর ডোমেন = $\mathbb{R}$ (দেখানো হলো)

20. ক এখানে, $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

$\therefore g(-3) = \frac{-3+2}{-3-1}$

$= \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন মানের উপাদানের জন্য g(x) এর মান ভিন্ন ভিন্ন হয়। সুতরাং ফাংশনটি এক-এক।

আবার, ধরি $y = \frac{x+2}{x-1}$

বা, $xy - y = x + 2$

বা, $x(y-1) = y + 2$

বা, $x = \frac{y+2}{y-1}$

যা $y = 1$ ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ g(x) এর রেঞ্জ = $\mathbb{R} - \{1\}$ = g(x) এর কোডোমেন

সুতরাং ফাংশনটি সার্বিক।

$\therefore$ g(x) বিপরীতযোগ্য।

এখন, ধরি, $y = \frac{x+2}{x-1}$ বা, $x = \frac{y+2}{y-1}$

বা, $g^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-1}$ $\therefore g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$

সুতরাং $g^{-1}(3) = \frac{3+2}{3-1} = \frac{5}{2}$

$\therefore fog^{-1}(3) = f(g^{-1}(3)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) + 3$

$= \frac{25}{4} - 5 + 3 = \frac{25}{4} - 2$

$= \frac{17}{4}$ **(Ans.)**

গ 'FUNCTION' শব্দটির 8টি বর্ণের মধ্যে 2টি N এবং বাকি 6টি ভিন্ন ভিন্ন বর্ণ আছে।

2টি N এবং ভিন্ন 6টি বর্ণ হতে 1টি বর্ণ নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^2C_2 \times {}^6C_1 \times \frac{3!}{2!} = 1 \times 6 \times 3 = 18$

7টি ভিন্ন বর্ণ (F, U, N, C, T, I, O) থেকে 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^7C_3 \times 3! = 35 \times 6 = 210$

$\therefore$ বিন্যাস সংখ্যা = 18 + 210 = 228 **(Ans.)**

21. ক ধরি, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{36 - x^2}{x - 6}$ ....(i)

$\therefore$ ডোমেন = $\mathbb{R} - \{6\}$

(i) হতে পাই, $h(x) = \frac{(6-x)(6+x)}{-(6-x)} = -(6+x)$

$\therefore h(6) = -(6+6) = -12$

$\because 6 \notin D_h$ সুতরাং $-12 \notin R_h$

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ, $R_h = \mathbb{R} - \{-12\}$

খ দেওয়া আছে, $g(x) = x - 6$

$\therefore g(0) = 0 - 6 = -6, g(3) = 3 - 6 = -3,$
$g(8) = 8 - 6 = 2$

ধরি, $\mathbf{a} = g(0)\hat{i} + g(3)\hat{j} + g(8)\hat{k}$

$\therefore \mathbf{a} = -6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore |\mathbf{a}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$

আমরা জানি,

x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$.

ধরি, **a** ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_x, θ_y ও θ_z কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\cos\theta_x = \frac{\mathbf{a}.\hat{i}}{|\mathbf{a}|.|\hat{i}|} = \frac{(-6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).\hat{i}}{7.1} = \frac{-6}{7}$

$\therefore \cos\theta_x = \frac{-6}{7}$ ... ... (i)

আবার, $\cos\theta_y = \frac{\mathbf{a}.\hat{j}}{|\mathbf{a}|.|\hat{j}|} = \frac{(-6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).\hat{j}}{7.1} = \frac{-3}{7}$

$\therefore \cos\theta_y = \frac{-3}{7}$ ... ... (ii)

এবং $\cos\theta_z = \frac{\mathbf{a}.\hat{k}}{|\mathbf{a}|.|\hat{k}|} = \frac{(-6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).\hat{k}}{7.1} = \frac{2}{7}$

$\therefore \cos\theta_z = \frac{2}{7}$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) বর্গ করে যোগ করে পাই,

$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = \frac{36}{49} + \frac{9}{49} + \frac{4}{49}$

বা, $1 - \sin^2\theta_x + 1 - \sin^2\theta_y + 1 - \sin^2\theta_z = \frac{36+9+4}{49}$

বা, $-(\sin^2\theta_x + \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_z) + 3 = 1$

বা, $\sin^2\theta_x + \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_z - 3 = -1$

$\therefore \sin^2\theta_x + \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_z = 2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = 36 - x^2$

এবং $A = (-1, 9) \subset \mathbb{Z}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore f(A) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8)\}$

এখন, $f(0) = 36 - 0 = 36$

$f(1) = 36 - 1^2 = 35$

$f(2) = 36 - 2^2 = 32$

$f(3) = 36 - 3^2 = 27$

$f(4) = 36 - 4^2 = 20$

$f(5) = 36 - 5^2 = 11$

$f(6) = 36 - 6^2 = 0$

$f(7) = 36 - 7^2 = -13$

$f(8) = 36 - 8^2 = -28$

$\therefore f(A) = \{36, 35, 32, 27, 20, 11, 0, -13, -28\}$

$\therefore$ $f(A)$ এর উপাদানগুলো উর্ধ্বক্রমে সারি বরাবর নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স,

$$B = \begin{bmatrix} -28 & -13 & 0 \\ 11 & 20 & 27 \\ 32 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |B| = \begin{vmatrix} -28 & -13 & 0 \\ 11 & 20 & 27 \\ 32 & 35 & 36 \end{vmatrix} = -28(720 - 945) + 13(396 - 864) + 0$$

$= 6300 - 6084 = 216 \neq 0$

এখানে, $B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 20 & 27 \\ 35 & 36 \end{vmatrix} = 720 - 945 = -225$

$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 11 & 27 \\ 32 & 36 \end{vmatrix} = -(396 - 864) = 468$

$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 11 & 20 \\ 32 & 35 \end{vmatrix} = 385 - 640 = -255$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -13 & 0 \\ 35 & 36 \end{vmatrix} = -(-468 - 0) = 468$

$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -28 & 0 \\ 32 & 36 \end{vmatrix} = -1008$

$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -28 & -13 \\ 32 & 35 \end{vmatrix} = -(-980 + 416) = 564$

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -13 & 0 \\ 20 & 27 \end{vmatrix} = -351$

$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -28 & 0 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} = -(-756) = 756$

$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -28 & -13 \\ 11 & 20 \end{vmatrix} = -560 + 143 = -417$

$$\therefore \text{adj } B = \begin{bmatrix} -225 & 468 & -255 \\ 468 & -1008 & 564 \\ -351 & 756 & -417 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -225 & 468 & -351 \\ 468 & -1008 & 756 \\ -255 & 564 & -417 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj } B = \frac{1}{216}\begin{bmatrix} -225 & 468 & -351 \\ 468 & -1008 & 756 \\ -255 & 564 & -417 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-25}{24} & \frac{13}{6} & \frac{-13}{8} \\ \frac{13}{6} & \frac{-14}{3} & \frac{7}{2} \\ \frac{-85}{72} & \frac{47}{18} & \frac{-139}{72} \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

22. **ক** প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়, $11x - 4y + 13 = 0$ ... ... (i)

ও $11x - 4y + 18 = 0$ ... ... (ii)

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \frac{|13 - 18|}{\sqrt{11^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{121 + 16}} = \frac{5}{\sqrt{137}}$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = (x - 2)(8 - x)$

$= 8x - 16 - x^2 + 2x$

$= -x^2 + 10x - 16$

$= -(x^2 - 10x + 16)$

$= -(x^2 - 2.5.x + 25 - 9)$

$= -(x - 5)^2 + 9$

$\therefore P(x) = 9 - (x - 5)^2$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য P(x) সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ P(x) এর ডোমেন $= \mathbb{R}$ **(Ans.)**

$(x - 5)^2 > 0$ অর্থাৎ $x > 5$ হলে, $P(x) < 9$

$(x - 5)^2 < 0$ অর্থাৎ $x < 5$ হলে, $P(x) < 9$

$(x - 5)^2 = 0$ অর্থাৎ $x = 5$ হলে, $P(x) = 9$

$\therefore$ P(x) এর রেঞ্জ $= (-\infty, 9]$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P(x) = (x - 2)(8 - x)$

$\therefore P(1) = (1 - 2)(8 - 1) = -7$

$P(2) = (2 - 2)(8 - 2) = 0$

$P(3) = (3 - 2)(8 - 3) = 5$

$P(4) = (4 - 2)(8 - 4) = 8$

$P(5) = (5 - 2)(8 - 5) = 9$

$P(7) = (7 - 2)(8 - 7) = 5$

$P(8) = (8 - 2)(8 - 8) = 0$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} P(1) & P(2) & P(3) \\ P(4) & P(4) & P(5) \\ P(2) & P(7) & P(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 49+0+0 & 0+0+25 & -35+0+0 \\ -56+64+0 & 0+64+45 & 40+72+0 \\ 0+40+0 & 0+40+0 & 0+45+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 49 & 25 & -35 \\ 8 & 109 & 112 \\ 40 & 40 & 45 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A^2 = 2\begin{bmatrix} 49 & 25 & -35 \\ 8 & 109 & 112 \\ 40 & 40 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 & 50 & -70 \\ 16 & 218 & 224 \\ 80 & 80 & 90 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 49 & 25 & -35 \\ 8 & 109 & 112 \\ 40 & 40 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -343+200+0 & 0+200-175 & 245+225+0 \\ -56+872+0 & 0+872+560 & 40+981+0 \\ -280+320+0 & 0+320+225 & 200+360+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -143 & 25 & 470 \\ 816 & 1432 & 1021 \\ 40 & 545 & 560 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 + 2A^2 = \begin{bmatrix} -143 & 25 & 470 \\ 816 & 1432 & 1021 \\ 40 & 545 & 560 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 98 & 50 & -70 \\ 16 & 218 & 224 \\ 80 & 80 & 90 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -45 & 75 & 400 \\ 832 & 1650 & 1245 \\ 120 & 625 & 650 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

23. **ক** দেওয়া আছে, ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$

বা, ${}^{2n}C_{2n-r} = {}^{2n}C_{r+2}$ [সম্পূরক সমাবেশ]

বা, $2n - r = r + 2$ [${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে $x = y$ ব্যবহার করে]

বা, $2r = 2n - 2$

$\therefore r = n - 1$ **(Ans.)**

খ এখানে, $f(x) = \sqrt{x}$,

$g(x) = x^2 - 1$

$$\text{মনে করি, } A = \begin{bmatrix} g(-2) & f(1) & f(4) \\ g(\sqrt{3}) & g(\sqrt{5}) & f(9) \\ g(1) & f(16) & g(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)^2-1 & \sqrt{1} & \sqrt{4} \\ (\sqrt{3})^2-1 & (\sqrt{5})^2-1 & \sqrt{9} \\ 1^2-1 & \sqrt{16} & (-3)^2-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1 & 1 & 2 \\ 3-1 & 5-1 & 3 \\ 0 & 4 & 9-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$= 3(32 - 12) + 1(0 - 16) + 2(8 - 0)$

$= 3 \times 20 - 16 + 16 = 60 \neq 0$.

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় সম্ভব।

$$\text{এখন, adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 20$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 24$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 0 & 24 & -12 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & -5 \\ -16 & 24 & -5 \\ 8 & -12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 20 & 0 & -5 \\ -16 & 24 & -5 \\ 8 & -12 & 10 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ $fog = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$

প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x^2 - 1 \geq 0$ হয়

বা, $(x + 1)(x - 1) \geq 0$

$\therefore x \geq 1$ অথবা $x \leq -1$

সুতরাং fog এর ডোমেন $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

ধরি, $y = x - 1$

$\therefore x = y + 1 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ হয়।

$\therefore gof(x)$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R}$

24. ক প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - y^2 = p^2$ ... ... (i)
কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংকের সম্পর্ক হতে আমরা জানি,
$x = r\cos\theta$ ও $y = r\sin\theta$
$\therefore$ (i) হতে পাই, $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = p^2$
বা, $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = p^2$
$\therefore r^2\cos 2\theta = p^2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x+13}$, $g(x) = x^2 - 17$

$$\therefore gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+13}) = (\sqrt{x+13})^2 - 17 = x + 13 - 17 = x - 4$$

$$\therefore p(x) = \frac{\{f(x)\}^2}{gof(x)} = \frac{(\sqrt{x+13})^2}{x-4} = \frac{x+13}{x-4}$$

ধরি, $p(a) = p(b)$ যেখানে $a, b \in$ ডোম p

তাহলে $\frac{a+13}{a-4} = \frac{b+13}{b-4}$

বা, $ab + 13b - 4a - 52 = ab - 4b + 13a - 52$
বা, $13a + 4a = 13b + 4b$
বা, $17a = 17b$
$\therefore a = b$
$\therefore p(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x+13}$ এবং $g(x) = x^2 - 17$

$\therefore f(23) = \sqrt{23+13} = 6$
$f(3) = \sqrt{3+13} = 4$
$f(12) = \sqrt{12+13} = 5$
$g(4) = 4^2 - 17 = -1$
$g(6) = 6^2 - 17 = 19$

ধরি, $\mathbf{a} = g(4)\hat{i} + f(23)\hat{j} + f(3)\hat{k}$
$\therefore \mathbf{a} = -\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k}$
এবং $\mathbf{b} = f(12)\hat{i} + m\hat{j} - \{g(6)+1\}\hat{k}$
$\therefore \mathbf{b} = 5\hat{i} + m\hat{j} - 20\hat{k}$
a ও b পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$

$$\text{বা, } \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 6 & 4 \\ 5 & m & -20 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $(-120 - 4m)\hat{i} - (20 - 20)\hat{j} + (-m - 30)\hat{k} = 0.\hat{i} + 0.\hat{j} + 0.\hat{k}$

উভয়পক্ষ হতে $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,
$-m - 30 = 0$
$\therefore m = -30$ **(Ans.)**

25. ক উদ্দীপক অনুসারে ইউটার্নটির সমীকরণ,
$y = p(x) = x^2 - 3x + 7$ ... ... (i)
বা, $x^2 - 3x + 7 - y = 0$

$$\therefore x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.(7-y)}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 28 + 4y}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{4y - 19}}{2}$$

সুতরাং $4y - 19 \geq 0$ বা, $4y \geq 19$ $\therefore y \geq \frac{19}{4}$

$\therefore$ ইউটার্নটির রেঞ্জ, $\{y \in \mathbb{R} : y \geq \frac{19}{4}\}$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপকে সড়কের সমীকরণ, $y = 4x + 1$ ... ... (ii)
ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (iii)
কেন্দ্র $(-g, -f)$ যা (ii) নং রেখার উপর অবস্থিত,
$-f = 4(-g) + 1$
$\therefore f = 4g - 1$ ... ... (iv)
$p(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 7 = 11 - 6 = 5$
(iii) নং (0, 0) বিন্দুগামী।
$0^2 + 0^2 + 2g.0 + 2f.0 + c = 0$ $\therefore c = 0$
(iii) নং $(2, p(2))$ অর্থাৎ $(2, 5)$ বিন্দুগামী,
$2^2 + 5^2 + 2g \times 2 + 2f \times 5 + c = 0$
বা, $4g + 10(4g - 1) + 29 = 0$
বা, $44g + 19 = 0$
$\therefore g = \frac{-19}{44}$
g এর মান (iv) নং এ বসিয়ে,

$$f = 4 \times \left(\frac{-19}{44}\right) - 1 = \frac{-30}{11}$$

$\therefore$ g, f ও c এর মান (iii) নং এ বসিয়ে,

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{44}\right)x + 2\left(\frac{-30}{11}\right)y + 0 = 0$$

$\therefore 22x^2 + 22y^2 - 19x - 120y = 0$ **(Ans.)**

গ (i) ও (ii) নং হতে পাই, $x^2 - 3x + 7 = 4x + 1$
বা, $x^2 - 7x + 6 = 0$ বা, $x^2 - 6x - x + 6 = 0$
বা, $x(x - 6) - 1(x - 6) = 0$
বা, $(x - 6)(x - 1) = 0$ $\therefore x = 1, 6$
x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,
$x = 1$ হলে $y = 4 \times 1 + 1 = 5$
$x = 6$ হলে $y = 4 \times 6 + 1 = 25$
$\therefore$ (i) ও (ii) নং এর ছেদবিন্দু (1, 5) এবং (6, 25)

(ii) নং এর উপর অঙ্কিত লম্ব রেখার সমীকরণ,
$x + 4y + k = 0$ ... ... (v)
(v) নং (1, 5) বিন্দুগামী।
$1 + 4 \times 5 + k = 0 \therefore k = -21$
(v) নং (6, 25) বিন্দুগামী।
$6 + 4 \times 25 + k = 0 \therefore k = -106$
k এর মানদ্বয় (v) নং বসিয়ে পাই,
$x + 4y - 21 = 0$ ... ... (vi)
এবং $x + 4y - 106 = 0$ ... ... (vii)
(vi) ও (vii) নং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব
$$= \left|\frac{-21-(-106)}{\sqrt{1^2+4^2}}\right| = \frac{85}{\sqrt{17}} = 5\sqrt{17} \text{ (Ans.)}$$

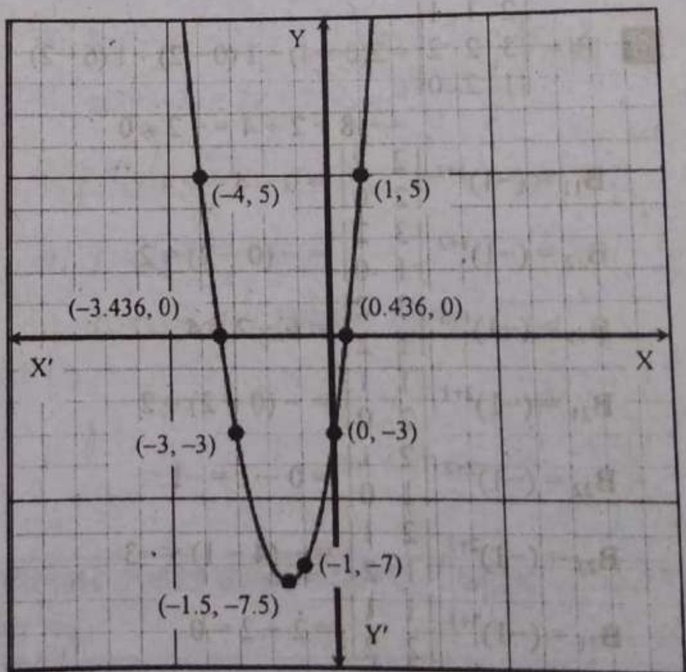
26. **ক** $x + 3y + 2 = 0 \therefore x + 3y = -2$ ... ... (i)
এবং $2x + y + 3 = 0 \therefore 2x + y = -3$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং হতে, $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$
$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$
$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{-5}$ এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-5}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(\frac{-7}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x \therefore f(A) = A^2 + 3A$
$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9+2+4 & 3+3-5 & -3+4-6 \\ 6+6-16 & 2+9+20 & -2+12+24 \\ -12+10-24 & -4+15+30 & 4+20+36 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 15 & 1 & -5 \\ -4 & 31 & 34 \\ -26 & 41 & 60 \end{bmatrix}$$
$\therefore f(A) + I = A^2 + 3A + I$
$$= \begin{bmatrix} 15 & 1 & -5 \\ -4 & 31 & 34 \\ -26 & 41 & 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 9 & 12 \\ -12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 25 & 4 & -8 \\ 2 & 41 & 46 \\ -38 & 56 & 79 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 3$
$$\therefore gof(x) = g\{f(x)\}$$
$$= g(x^2 + 3x)$$
$$= 2(x^2 + 3x) - 3$$
$$= 2x^2 + 6x - 3$$
$$= 2\left(x^2 + 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - 3 - \frac{18}{4}$$
$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}$$
ধরি, $y = 2x^2 + 6x - 3$
x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য y এর প্রতিসঙ্গী মান নির্ণয় করি:

x	0	$\frac{-3}{2}$	−1	1	−4	−3
y	−3	$\frac{-15}{2}$	−7	5	5	−3

উভয় অক্ষ বরাবর 1 বর্গ = 1 একক ধরে প্রদত্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি।



27. **ক** ধরি, $y = g(x) = \frac{1}{2x-3}$
বা, $2xy - 3y = 1$
বা, $2xy = 1 + 3y$
$\therefore x = \frac{1+3y}{2y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \neq 0$ হয়।
$\therefore g(x)$ ফাংশনটির রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{0\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore f(B) = B^2 - 4B$

$\therefore B = A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+3+1 & 2+2+2 & 2+2+0 \\ 6+6+2 & 3+4+4 & 3+4+0 \\ 2+6+0 & 1+4+0 & 1+4+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 14 & 11 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore f(B) = B^2 - 4B$

$= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 14 & 11 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 12 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(0-4) - 1(0-2) + 1(6-2)$

$= -8 + 2 + 4 = -2 \neq 0$

$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$

$B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

$B_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$B_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

$B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$

$B_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$B_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

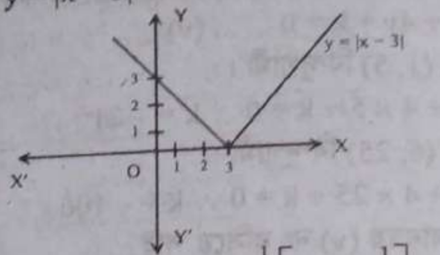
$B_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$B_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}B = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$

$= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

28. **ক** $y = |x - 3|$ এর স্কেচ নিম্নে অঙ্কন করা হলো :



খ $g(x) = (x+5)^n = (x+5)^{\frac{1}{2}} \left[\because n = \frac{1}{2}\right]$

$f(x) = x^2 - 6$

$\therefore gof(x) = g\{f(x)\} = g(x^2 - 6)$

$= (x^2 - 6 + 5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - 1}$

$gof(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $x^2 - 1 \geq 0$ হয়।

বা, $x^2 \geq 1 \therefore x \leq -1$ অথবা $x \geq 1$

$\therefore$ gof এর ডোমেন $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ **(Ans.)**

গ TESTICLE শব্দটিতে মোট বর্ণ সংখ্যা ৪টি। যার মধ্যে 2টি T, 2টি E এবং অবশিষ্ট বর্ণগুলি ভিন্ন।

TESTICLE শব্দটির সবগুলি বর্ণ একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{2!\,2!} = 10080$

প্রথমে ও শেষে E রেখে প্রদত্ত শব্দটির অবশিষ্ট 6টি বর্ণকে সাজনোর উপায় $= \frac{6!}{2!} = 360$

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে E না রেখে প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলির বিন্যাস সংখ্যা $= 10080 - 360 = 9720$ **(Ans.)**

29. **ক** দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x - 5$ এবং $g(x) = x^2 + 6$

$\therefore (gof)(2) = g\{f(2)\} = g(2 \times 2 - 5)$

$= g(-1) = (-1)^2 + 6 = 7$ **(Ans.)**

খ ১ম স্থান অর্থাৎ SYLHET শব্দটিতে মোট 6টি অক্ষর বিদ্যমান। প্রতিটি অক্ষরই ভিন্ন।

প্রথম স্থান অর্থাৎ SYLHET শব্দটির সবগুলি অক্ষর একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= 6! = 720$

আবার ২য় স্থান অর্থাৎ BANDARBAN শব্দটিতে মোট 9 টি অক্ষর বিদ্যমান। যার মধ্যে 3টি A, 2টি B, 2টি N এবং অবশিষ্ট অক্ষরগুলি ভিন্ন।

BANDARBAN শব্দটির সবগুলি অক্ষর একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{9!}{3!\,2!\,2!} = 15120 = 21 \times 720$

$= 21 \times$ ১ম স্থানটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা

[বি. দ্র. প্রশ্নপত্রে ২য় স্থানটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা ১ম স্থানটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ হবে]

গ দুইটি গাড়িতে 10 জন শিক্ষার্থী ভ্রমণ করতে পারবে নিম্নলিখিত উপায়ে:

১ম গাড়ি (সর্বোচ্চ 7 জন)	২য় গাড়ি (সর্বোচ্চ 4 জন)
7	3
6	4

∴ দলটি মোট ভ্রমণ করতে পারার উপায়
$= ({}^{10}C_7 \times {}^3C_3) + ({}^{10}C_6 \times {}^4C_4)$
$= 120 + 210 = 330$ **(Ans.)**

30. **ক** ${}^nC_3 = \frac{4}{5} \times {}^nC_2$

বা, $5 \times {}^nC_3 = 4 \times {}^nC_2$

বা, $5 \times \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = 4 \times \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$

বা, $\frac{5}{6(n-3)!} = \frac{4}{2(n-2)\,(n-3)!}$

বা, $\frac{5}{6} = \frac{2}{n-2}$

বা, $5n - 10 = 12$

বা, $5n = 12 + 10$

বা, $5n = 22 \therefore n = \frac{22}{5}$

[বি. দ্র. আমরা জানি, বিন্যাস বা সমাবেশ উভয় ক্ষেত্রেই n এর মান ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n \geq r$. কিন্তু এখানে $n = \frac{22}{5}$ যা একটি ভগ্নাংশ। তাই n এর এই মান গ্রহণযোগ্য নয়।]

খ MUJIBNAGAR শব্দটির 10টি বর্ণের মধ্যে 4টি স্বরবর্ণ। যার মধ্যে 2টি A।

এখন 4টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট বর্ণ হবে 7টি। সুতরাং 7টি বর্ণকে 7! ভাবে সাজানো যাবে।

আবার, 4টি স্বরবর্ণকে (যাদের মধ্যে 2টি A) নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{2!} = 12$ প্রকারে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলো একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা
$= 12 \times 7! = 60480$

আবার, সবগুলো বর্ণ ব্যবহার করে মোট সাজানো সংখ্যা
$= \frac{10!}{2!} = 1814400$

∴ স্বরবর্ণগুলো একত্রে না রেখে সাজানো সংখ্যা
$= 1814400 - 60480 = 1753920$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+7}{3x-2};\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+7}{3x-2}$

বা, $3xy - 2y = 2x + 7$ বা, $3xy - 2x = 2y + 7$

বা, $x(3y-2) = 2y + 7$ বা, $x = \frac{2y+7}{3y-2}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{2y+7}{3y-2}$ $[\because f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)]$

বা, $f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3x-2}$

∴ $f^{-1}(x) = f(x)$ **(দেখানো হলো)**

পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

অনুচ্ছেদ-8.10 | পৃষ্ঠা-৩২১

সমস্যা নং 8.10.1(i)	$y = f(x)$ ফাংশনের ও এর রূপান্তরিত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন ও বৈশিষ্ট্য নির্ণয় এবং তাদের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।	তারিখ … … …

সমস্যা : $y = x^2$ এর লেখচিত্র থেকে $y = (x \pm 2)^2$ ও $y = x^2 \pm 2$ এর লেখচিত্র অঙ্কন ও বৈশিষ্ট্য নির্ণয় এবং তাদের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : তত্ত্ব : $y = x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। এর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ রেখা y-অক্ষ। $y = x^2$, $y = (x \pm 2)^2$ এবং $y = x^2 \pm 2$ প্রত্যেকের লেখের আকৃতি একই।

$y = x^2$ এর লেখচিত্রকে x-অক্ষ বরাবর বামদিকে 2 একক এবং ডানদিকে 2 একক সরালে যথাক্রমে $y = (x+2)^2$ ও $y = (x-2)^2$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে। আবার $y = x^2$ এর লেখচিত্রকে y অক্ষ বরাবর 2 একক উপরে বা নিচে সরালে যথাক্রমে $y = x^2 + 2$ ও $y = x^2 - 2$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

উপকরণ : (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার ; (iv) ছক কাগজ ও (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর