তৃতীয় অধ্যায়

সরলরেখা
(Straight line)

সূচনাঃ স্থানাঙ্ক = স্থান + অঙ্ক। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে অবস্থান বা স্থানকে অঙ্কের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। অতএব, স্থানাঙ্ক জ্যামিতি গণিতের এমন একটি বিশেষ শাখা যেখানে বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতি অধ্যায়ন করা হয়। বিখ্যাত ফরাসী দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্তে (Rene Descartes) (1596 – 1650) সর্বপ্রথম জ্যামিতিতে গাণিতিক সূত্রের ব্যবহার করেন। এ অধ্যায়ে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি পদ্ধতিতে সরলরেখা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। গণিতবিদ Euclid সরলরেখাকে প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য হিসাবে সংজ্ঞায়িত করেন। মূলত একটি বিন্দু-সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ দিক পরিবর্তন না করলে সে সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলা হয়।

অধ্যায় শেষে পারীক্ষার্থীরা –

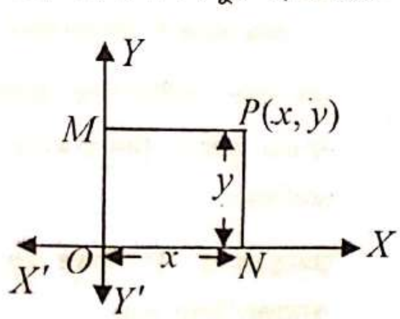
১. সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে; ২. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৩. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র পতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৪. কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে; ৫. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র পতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবে; ৬. সঞ্চারপথ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং দূরত সূত্র প্রয়োগ করে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ৭. সরলরেখার ঢাল ব্যাখ্যা করতে পারবে; ৮. দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল নির্ণয় করতে পারবে; ৯. অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ১০. বিভিন্ন আকারের সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ১১. দুই চলকের একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখা প্রকাশ করে, প্রমাণ করতে পারে ; ১২. লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন করতে পারবে; ১৩. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে পারবে; ১৪. y-অক্ষের সমান্তরাল নয় এমন দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করতে পারবে; ১৫. দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে পারবে; ১৬. বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ১৭. কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে; ১৮.দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।

(ব্যবহারিক)

১. রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবে; ২. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে; ৩. সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে; ৪. লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে; ৫. অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবে; ৬. নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবে।

১. সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক

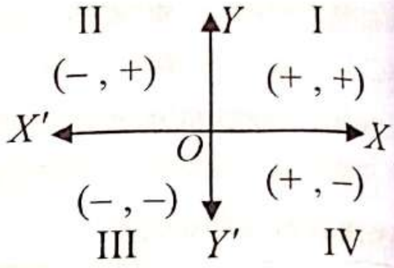
কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক : পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া সরলরেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়।



মনে করি, কোনো সমতলে $X'OX$ ও YOY' সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। সমতলস্থ যেকোনো বিন্দু P হতে $X'X$ ও YY' এর উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব অঙ্কন করি। ধরি, $ON = PM = x$ এবং $PN = OM = y$. তাহলে ON ও NP কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয় এবং x ও y দ্বারা P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশিত হয়। সুতরাং x ও y এর মান জানা থাকলে P এর অবস্থান নির্ণয় করা যায়। x এবং y কে P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয় এবং P বিন্দুকে ক্রমজোড় (x , y) আকারে প্রকাশ করা হয়।

x কে ভুজ (abscissa) বা x-স্থানাঙ্ক এবং y কে কোটি (ordinate) বা y -স্থানাঙ্ক বলা হয়। $X'OX$ এবং YOY' কে স্থানাঙ্কের অক্ষ বা সংক্ষেপে অক্ষ বলা হয়। স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O কে মূলবিন্দু বলা হয়।

$X'OX$ ও YOY' অক্ষ দুইটি সমগ্র সমতলটিকে যে XOY, $X'OY$, $X'OY'$ এবং $Y'OX$ চারটি সমান ভাগে বিভক্ত করেছে, এদেরকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ বলে। বিভিন্ন চতুর্ভাগে কোন একটি বিন্দু এর চিহ্ন নিম্নে দেখানো হলোঃ



(i) প্রথম চতুর্ভগে x এবং y উভয়ে ধনাত্মক,

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভগে x ঋণাত্মক এবং y ধনাত্মক,

(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে x এবং y উভয়ে ঋণাত্মক ,

(iv) চতুর্থ চতুর্ভগে x ধনাত্মক এবং y ঋণাত্মক।

বি.দ্র.: (i) মূলবিন্দুর স্থানাংক $O(0, 0)$.

(ii) x-অক্ষের উপর যেকোনো বিন্দুর কোটি বা y-স্থানাঙ্ক শূন্য। যেমন, $(2, 0)$, $(-3, 0)$, $(-4, 0)$ ইত্যাদি বিন্দুগুলি x- অক্ষের উপর অবস্থিত।

(iii) y-অক্ষের উপর যেকোনো বিন্দুর ভূজ বা x - স্থানাঙ্ক শূন্য। যেমন, $(0, -3)$, $(0, 2)$, $(0, 5)$ ইত্যাদি বিন্দুগুলি y - অক্ষের উপর অবস্থিত।

সারসারিবন্দীঃ একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলতে আমরা বুঝি, অঙ্কের সাহায্যে একটি বিন্দুর স্থান বা অবস্থানের বর্ণনা। দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ককে (x, y) ক্রমজোড়ের আকারে প্রকাশ করা হয়। ক্রোমজোড়ের প্রথম উপাদানকে বিন্দুর x- স্থানাঙ্ক বা ভুজ বলে এবং দ্বিতীয় উপাদানকে বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি বলা হয়। ভুজের পরমমান $|x|$, y-অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্দেশ করে এবং কোটির পরমমান $|y|$, x -অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্দেশ করে। x ও y এর চিহ্ন থেকে বিন্দুটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত তার নির্দেশনা আমরা পেয়ে থাকি।

x -অক্ষ থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব 3 একক হলে বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর?

ধরি, বিন্দুটির কোটি y । $\therefore$ x -অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব , $|y| = 3 \Rightarrow y = \pm 3$

y -অক্ষ থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব 4 একক হলে বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর?

ধরি, বিন্দুটির কোটি x । $\therefore$ y -অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব , $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$

কোনো একটি বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক $(2, -3)$ বলতে আমরা কি বুঝি?

ক্রমজোড়ের প্রথম পদ 2 হচ্ছে P বিন্দুর x- স্থানাঙ্ক বা ভুজ। এর মান $|2| = 2$ নির্দেশ করে y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব। ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় পদ -3 হচ্ছে P বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক বা কোটি। এর মান $|-3| = 3$ নির্দেশ করে x -অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব।

ভুজ এবং কোটির চিহ্ন যথাক্রমে x এবং y-অক্ষের দিক নির্দেশ করে। সুতরাং P এর স্থানাঙ্ক $(2, -3)$ বলতে আমরা বুঝি P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে $|2| = 2$ এবং x -অক্ষ হতে $|-3| = 3$, এবং বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

উদাহরণ–1: P বিন্দুর ভূজ 4 । x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

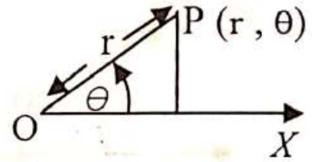
সমাধানঃ মরে করি, বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, k)$.

$\therefore$ x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব = $|k|$ এবং y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |4| = 4$

প্রশ্নমতে, $|k| = 2 \times 4 \Rightarrow k = \pm 8$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 8)$ অথবা, $(4, -8)$

পোলার স্থানাংক (Polar coordinate system) : সমতলে কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করার জন্য কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ছাড়াও আরেকটি পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি আছে। পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি দুই মাত্রার স্থানাঙ্ক পদ্ধতি যা দ্বারা সমতলে কোনো বিন্দুর দুইটি পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা হয়। একটি বর্গমূলযুক্ত স্থানাঙ্ক এবং আরেকটি কোণযুক্ত স্থানাঙ্ক। বর্গমূলযুক্ত স্থানাঙ্ক হচ্ছে একটি কেন্দ্রীয় মান হতে কোনো বিন্দুর দূরত্ব । এ কেন্দ্রীয় মানকে মেরু বা পোল (*pole*) বলে যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু। বর্গমূলযুক্ত স্থানাঙ্ককে সাধারণত r *দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর* (radius vector) *বলা হয়।*



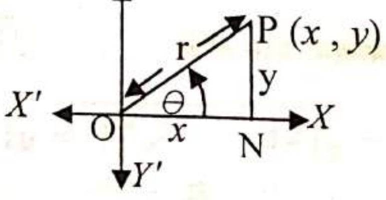
কোণযুক্ত স্থানাঙ্ক হচ্ছে $0°$ রশ্মি হতে সে বিন্দুতে পৌঁছতে যে কোণ উৎপন্ন হয়। $0°$ রশ্মিকে পোলার অক্ষ বা মেরু অক্ষ বা আদি রেখা বলা হয় যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের x-অক্ষের ধনাত্মক দিক। কোণযুক্ত স্থানাঙ্ককে সাধারণত θ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহাকে ভেক্টর কোণ (vectorial angle) বলা হয়।

পোলার স্থানাঙ্কে একটি বিশেষ বৈশিষ্ট আছে যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে নেই। তাহলো একটি বিন্দুর অসংখ্য ভিন্ন ভিন্ন পোলার স্থানাঙ্ক থাকতে পারে। কেননা কোনো একটি বিন্দুর প্রকৃত অবস্থার কোনোরূপ পরিবর্তন না করে পোলের চারিদিকে পোলার অক্ষের যেকোনো সংখ্যকবার ঘূর্ণায়ন সম্ভব। যেমন যেকোনো অখন্ড সংখ্যা n *এর জন্য* (r, θ) বিন্দুটিকে $(r, \theta \pm 2n\pi)$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

একটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক একভাবে প্রকাশের জন্য সাধারণত $r \geq 0$ এবং $0° \leq \theta < 360°$ বা, $-180° < \theta \leq 180°$ ধরা হয়।

২. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক : **[ব.'১৫]**

মনে করি, কোনো সমতলে $X'OX$ ও YOY' সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। মনে করি, P বিন্দুর কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) যখন O মেরু (মূলবিন্দু) এবং OX মেরু অক্ষ (x- অক্ষে ধনাত্মক দিক)। O, P যোগ করি এবং OX এর উপর লম্ব PN টানি। তাহলে, $ON = x$, $PN = y$, $OP = r$ এবং $\angle PON = \theta$.



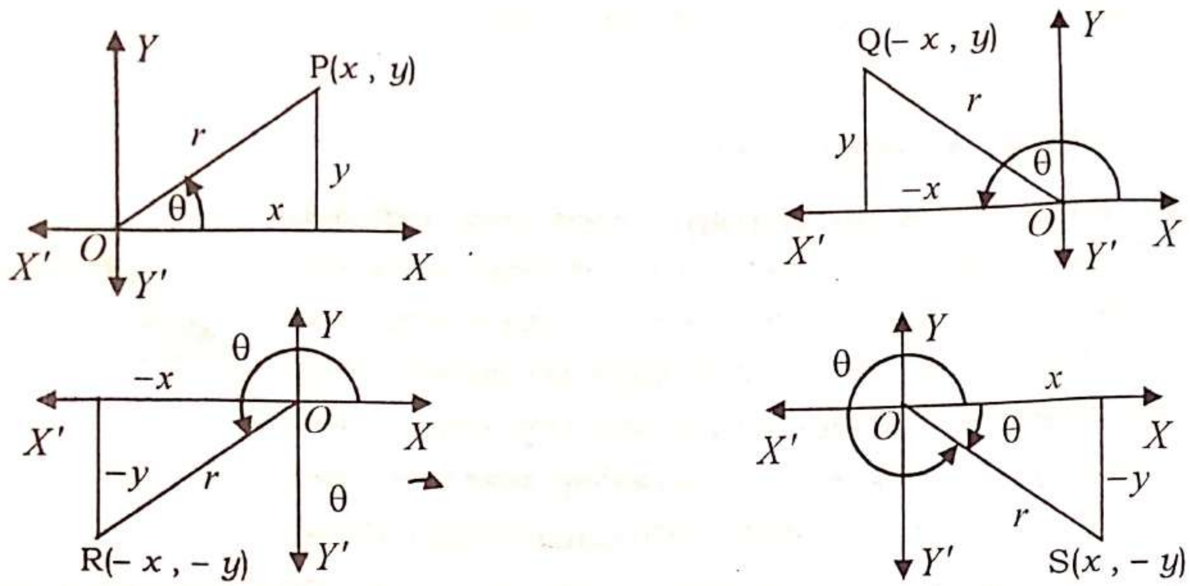
$$\therefore \sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{y}{r} \quad \therefore y = r\sin\theta \cdots\cdots (1)$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{x}{r} \quad \therefore x = r\cos\theta \cdots\cdots (2)$$

এখন, (1) ও (2) হতে $y^2 + x^2 = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2.1 = r^2 \quad \therefore r = \sqrt{x^2+y^2} \cdots (3)$

এবং $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1}(\dfrac{y}{x}) \cdots\cdots (4)$

$x > 0$ এবং $y > 0$ হলে $P(x, y)$, $Q(-x, y)$, $R(-x, -y)$ এবং $S(x, -y)$ বিন্দু চারটি যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।



$\therefore$ প্রথম চতুর্ভাগের বিন্দু $P(x, y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $0 \le \theta < 2\pi$ অথবা, $-\pi < \theta \le \pi$

দ্বিতীয় চতুর্ভাগের বিন্দু $Q(-x, y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{-x} = \pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $0 \le \theta < 2\pi$ অথবা, $-\pi < \theta \le \pi$

তৃতীয় চতুর্ভাগের বিন্দু $R(-x, -y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-y}{-x} = \pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; যখন $0 \le \theta < 2\pi$

$$= -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}\text{ ; যখন } -\pi < \theta \le \pi$$

চতুর্থ চতুর্ভাগের বিন্দু $S(x, -y)$ এর জন্য, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-y}{x} = 2\pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; যখন $0 \le \theta < 2\pi$

$$= -\tan^{-1}\frac{y}{x}\text{ ; যখন } -\pi < \theta \le \pi$$

উদাহরণ 2. $(-1, -\sqrt{3})$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে, এবং $(4, \frac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, $(-1, -\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) ; যেখানে,

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ এবং

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{4\pi}{3})$

এখন, মনে করি, $(4, \frac{\pi}{4})$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y).

$\therefore\ x = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\,.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ এবং $y = 4\sin\frac{\pi}{4} = 4.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{2}\,,\,2\sqrt{2}\,)$

উদাহরণ 3. **$r(1+\cos\theta)=2$** পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। [কু.'০৮]

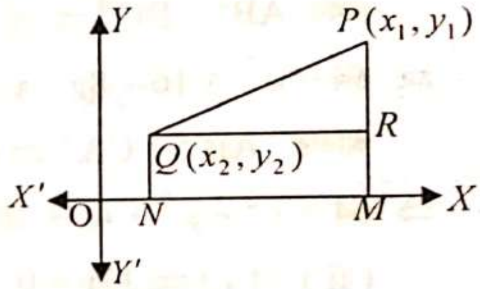
সমাধানঃ $r\,(1+\cos\theta) = 2 \Rightarrow r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = 2$ $[\because r = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ r\cos\theta = x]$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 - x \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4x + x^2$ [বর্গ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ, $y^2 = 4 - 4x$

৩. **দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points) :**

(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্কঃ মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু। P এবং Q হতে OX এর উপর যথাক্রমে PM এবং QN লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, $OM = x_1, PM = y_1, ON = x_2, QN = y_2$



$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2$

$PR = PM - RM = PM - QN = y_1 - y_2$

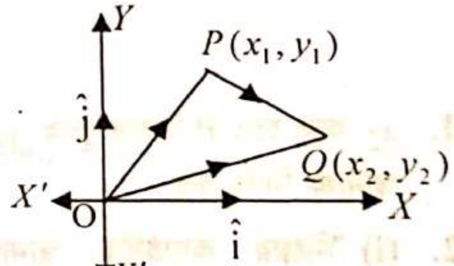
PQR সমকোণী ত্রিভুজ হতে আমরা পাই,

$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore\ PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ [$\because$ দূরত্ব সর্বদা ধনাত্মক।]

$\therefore$ $\boxed{\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভূজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}}$

ভেক্টর পদ্ধতি: মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$ ।



ΔOPQ হতে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} - x_1\hat{i} - y_1\hat{j}$

$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$

$\therefore$ P ও Q বিন্দুর দূরত্ব $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

যেমন, $(1\,,\,2)$ ও $(-2\,,\,6)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

অনুসিদ্ধান্ত : (x_1, y_1) এবং মূলবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$P(x_1, \beta)$ ও $Q(x_2, \beta)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\beta - \beta)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$

$P(\alpha, y_1)$ ও $Q(\alpha, y_2)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= |y_1 - y_2|$

যেমন, $(12\,,\,3)$ ও $(-2\,,\,3)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= |12 - (-2)| = |12 + 2| = 14$

$(0\,,\,8)$ ও $(0\,,\,1)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= |8 - 1| = 7$

(ii) পোলার স্থানাঙ্কঃ $A(r_1,\theta_1)$ ও $B(r_2,\theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$ ও $B(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$।

$$\therefore\ AB=\sqrt{(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2}$$

$$=\sqrt{r_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+r_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)-2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}$$

$$=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

উদাহরণ –4. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-4)$ এবং $(0,4)$ হলে তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা.'০৫; সি.'০৯,'১০]

সমাধানঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(0,-4)$, $B(0,4)$ এবং $C(x,y)$.

$\therefore\ AB=BC=CA \Rightarrow AB^2=BC^2=CA^2$

এখন, $AB^2=BC^2 \Rightarrow (0-0)^2+(-4-4)^2=(0-x)^2+(4-y)^2$

$\Rightarrow 64=x^2+16-8y+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-8y=48 \cdots\cdots\cdots (i)$

আবার, $AB^2=CA^2 \Rightarrow 64=(x-0)^2+(y+4)^2=x^2+y^2+4y+16$

$\Rightarrow 64=x^2+y^2+4y+16 \Rightarrow x^2+y^2+4y=48 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(ii)-(i) \Rightarrow 12y=0\ \therefore\ y=0$

y এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2=48=(4\sqrt{3})^2\ \therefore x=\pm4\sqrt{3}$

$\therefore$ তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(4\sqrt{3},0)$ বা, $(-4\sqrt{3},0)$.

প্রশ্নমালা III A

1. x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। x- অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তরঃ $(2,4)$ বা, $(2,-4)$ বা, $(-2,4)$ বা, $(-2,-4)$

2. **(i) নিম্নের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r\geq 0$ এবং $\theta\in[0,2\pi[$ অথবা, $\theta\in]-\pi,\pi]$:**

   (a) $(-1,-\sqrt{3})$ **(b)** $(1,-\sqrt{3})$

   উ ঃ (a) $(2,\frac{4\pi}{3})$ or, $(2,-\frac{2\pi}{3})$ (b) $(2,\frac{5\pi}{3})$ or, $(2,-\frac{\pi}{3})$.

   (ii) নিম্নের পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর :

   (a) $(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$ **(b)** $(-2,120°)$ **(c)** $(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$

   উ ঃ (a) $(-1,-1)$ (b) $(1,-\sqrt{3})$ (c) $(1,-1)$

3. **পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ করঃ**

(a) $y = x\cot\alpha$ (b) $r^2 = a^2\cos2\theta$. উঃ (a) $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (b) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

4. (a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}\ , 90°)$, $(2\ , 120°)$ এবং $(2\ , 60°)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(b) $P(4\ , 0)$ এবং $Q(0\ , 4)$ বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(2+2\sqrt{3}\ , 2+2\sqrt{3})$, $(2-2\sqrt{3}\ , 2-2\sqrt{3})$

(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3\ , 4)$ ও $(3\ , 6)$ । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $(3+\sqrt{3}\ , 5)$

5. (a) দেখাও যে, $(1, 1)$, $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু। [দি.'১১]

(b) দেখাও যে, $A(a\ , b)$, $B(a+\alpha\ , b+\beta)$, $C(a+\alpha+p\ , b+\beta+q)$ এবং $D(a+p\ , b+q)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কী শর্তে ABCD (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্বস তা নির্ণয় কর।

উত্তর : (i) $\alpha p + \beta q = 0$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2 = p^2 + q^2$.

6. (a) কোনো বিন্দুর কোটি 6 এবং (5,6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। [কু.'১১]

(b) দেখাও যে, a এর যেকোনো মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1,\ 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

(c) y-অক্ষ এবং $(7\ , 2)$ বিন্দু থেকে $(a\ , 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

[সি. '০৩; রা. '০৪,'১০; য. '০৬,'১০; কু. '০৭; চ.'১০; ঢা.'১৩]

(d) x–অক্ষ এবং $(-5, -7)$ বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর। [মা.বো.'১৩]

উ: (a) 9 বা,1 (b) $2\sqrt{3} \pm 3$, (c) 29/7 (d) – 65/7

7. (a) $(5, 7)$, $(-1, -1)$ ও $(-2\ , 6)$ বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত । এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ: $(2\ ,3)$

Similar

(b) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 , কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উ: $4\sqrt{5}$ একক। [কু. '১০; চ.'১৩]

(c) $(11, 2)$ কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা $(2, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উ: $2\sqrt{10}$ একক। [ব.'১১]

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

8. P বিন্দুর কোটি – 6 । x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উ: $(12, -6)$ বা, $(-12, -6)$ (8)

9. $(1,\ 1)$ ও $(-\sqrt{3},\ 1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

উ: $(\sqrt{2}\ , \frac{\pi}{4})$, $(2, \frac{5\pi}{6})$ (৩), (8)

10. $(4, \frac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}\ , -\frac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

উ: $(2\ , 2\sqrt{3})$, $(-1, -1)$ (২), (৩)

11. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। (৪)
উ: $r^2 \cos 2\theta = a^2$, $xy = a^2$

12. দেখাও যে, $(3, 8)$, $(8, 3)$ এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (২)

13. দেখাও যে, $(4, 4)$, $(5, 2)$ এবং $(1, 0)$ বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (৪)

14. দেখাও যে, $A(-3, 2)$, $B(-7, -5)$, $C(5, 4)$ এবং $D(9, 11)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। (২)

15. দেখাও যে, $(0, 7)$, $(4, 9)$, $(6, 5)$ এবং $(2, 3)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু। (২)

16. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে $(0, 2)$ এবং $(6, 4)$ এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। (২)
উ: $(4, 0)$

17. দেখাও যে, $(2, -2)$, $(8, 4)$, $(5, 7)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু। (২)

18. $(a + b, b - a)$ এবং $(a - b, a + b)$ বিন্দু থেকে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$. (২)

19. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(5, 2)$ ও $(-3, -4)$ হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। (২)
উ: 5 একক

20. দেখাও যে, (a, a), $(-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

21. $A(4, 3)$, $B(-1, -\sqrt{3})$ ও $C(4, \frac{\pi}{4})$ তিনটি বিন্দু।

ক. $(-4, \frac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

খ. A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ।

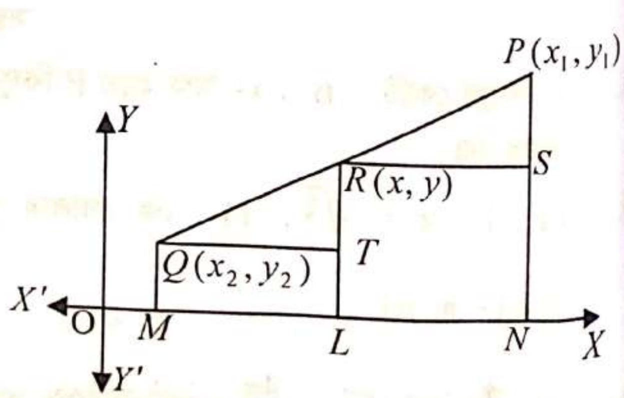
[রা.'০২;'০৭; মা.বো. '০৫,'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

গ. B এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ করে BC নির্ণয় কর।

উ: (a) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ (b) $(1, 2)$ বা, $(3, 6)$ (c) $\sqrt{20+8\sqrt{2}}$ একক

৪. বিভক্তিকরণ সূত্র (Section formulae):

(i) কার্তেসীয় জ্যামিতিক পদ্ধতি



অন্তর্বিভক্তকরণ সূত্রঃ মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ $R(x,y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। $R(x, y)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এখানে $PR:RQ = m_1 : m_2$

11. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। (৪)

উ: $r^2 \cos 2\theta = a^2$, $xy = a^2$

12. দেখাও যে, (3, 8), (8, 3) এবং (− 2, 3) বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (২)

13. দেখাও যে, (4, 4), (5, 2) এবং (1, 0) বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (৪)

14. দেখাও যে, A (− 3, 2), B (− 7, − 5), C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। (২)

15. দেখাও যে, (0, 7), (4, 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু। (২)

16. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0, 2) এবং (6, 4) এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। (২)

উ: (4, 0)

17. দেখাও যে, (2, − 2), (8, 4), (5, 7) এবং (−1, 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু। (২)

18. $(a + b, b - a)$ এবং $(a - b, a + b)$ বিন্দু থেকে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$. (২)

19. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (5, 2) ও (−3, − 4) হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। (২)

উ: 5 একক

20. দেখাও যে, (a, a), $(-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

21. A(4, 3), B$(-1, -\sqrt{3})$ ও C$(4, \frac{\pi}{4})$ তিনটি বিন্দু।

ক. $(-4, \frac{\pi}{4})$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

খ. A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ।

[রা.'০২;'০৭; মা.বো. '০৫,'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

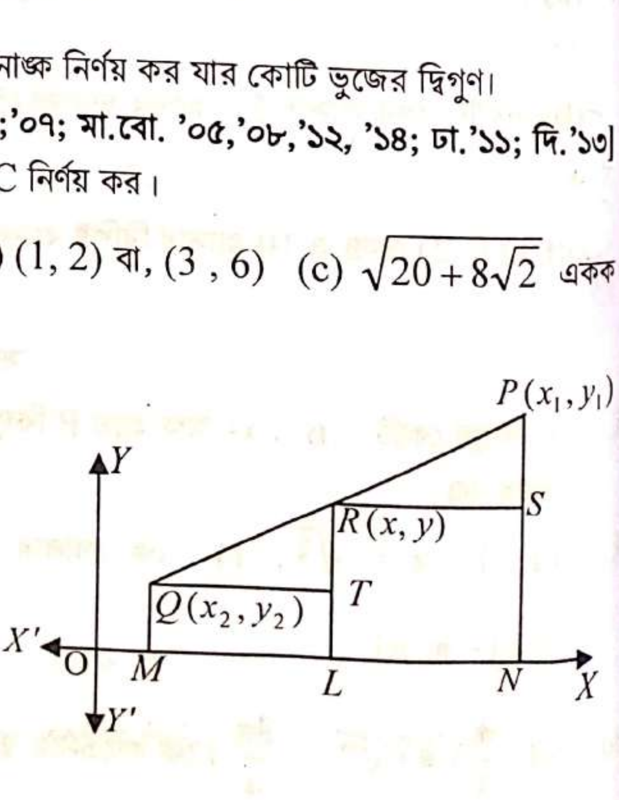
গ. B এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ করে BC নির্ণয় কর।

উ: (a) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ (b) (1, 2) বা, (3, 6) (c) $\sqrt{20 + 8\sqrt{2}}$ একক

৪. বিভক্তিকরণ সূত্র (Section formulae):

(i) কার্তেসীয় জ্যামিতিক পদ্ধতি

অন্তর্বিভক্তকরণ সূত্রঃ মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ $R(x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। $R(x, y)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এখানে $PR:RQ = m_1 : m_2$



P, Q এবং R বিন্দু হতে OX এর উপর যথাক্রমে PN , QM এবং RL লম্ব টানি। আবার PN এবং RL এর উপর যথাক্রমে RS এবং QT লম্ব টানি।

তাহলে, $RS = LN = ON - OL = x_1 - x$, $QT = ML = OL - OM = x - x_2$

$PS = PN - SN = PN - RL = y_1 - y$, $RT = RL - TL = RL - QM = y - y_2$

এখানে PRS এবং RQT ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{RS}{QT} = \frac{PS}{RT} = \frac{PR}{RQ} \Rightarrow \frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\therefore \frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_1x - m_1x_2 = m_2x_1 - m_2x$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)x = m_2x_1 + m_1x_2 \Rightarrow x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$ এবং $$\frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$\therefore$ **R বিন্দুর স্থানাঙ্ক** $\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত-1: যদি PQ এর সমদ্বিখন্ডক বিন্দু R হয় i.e., PQ এর মধ্যবিন্দু R হয় তাহলে, $m_1 = m_2$.

$$\therefore x = \frac{m_2x_2 + m_2x_1}{m_2 + m_2} = \frac{m_2(x_1 + x_2)}{2m_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$ এবং $$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

সুতরাং, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত-2: যদি R বিন্দুটি PQ কে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ PR : RQ = k : 1 হয় তাহলে,

$$x = \frac{kx_2 + 1.x_1}{k+1} = \frac{kx_2 + x_1}{k+1}$$ এবং $$y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$$

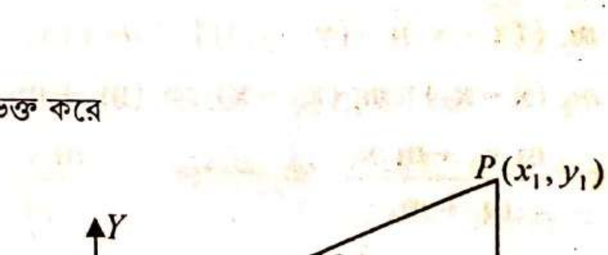
অনুসিদ্ধান্ত- 3: যদি R, PQ কে m : 1 – m অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে,

$$x = \frac{mx_2 + (1-m).x_1}{m + 1 - m} = m(x_2 - x_1) + x_1$$ এবং $$y = m(y_2 - y_1) + y_1$$

বহির্বিভক্ত সূত্র :

মনে করি, R বিন্দুটি PQ কে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে

অর্থাৎ $PR : QR = m_1 : m_2 \Rightarrow \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{m_1}{m_2}$



$RS = NL = OL - ON = x_1 - x$,

$RT = NM = OM - ON = x_2 - x$

$PS = PL - SL = PL - RN = y_1 - y$,

$QT = QM - TM = QM - RN = y_2 - y$

এখানে ΔPRS এবং ΔQRT সদৃশ।

$$\therefore \quad \frac{RS}{PS}=\frac{RT}{QT}=\frac{PR}{QR}=\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{x_1-x}{x_2-x}=\frac{y_1-y}{y_2-y}=\frac{m_1}{m_2}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1-x}{x_2-x}=\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 x_1 - m_2 x = m_1 x_2 - m_1 x \Rightarrow (m_1-m_2)x = m_1 x_2 - m_2 x_1$$

$$\Rightarrow x=\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}=\frac{m_2x_1-m_1x_2}{m_2-m_1}$$. অনুরূপভাবে, $$y=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}=\frac{m_2y_1-m_1y_2}{m_2-m_1}$$

$\therefore$ $\boxed{\textbf{R এর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)=\left(\frac{m_2x_1-m_1x_2}{m_2-m_1}, \frac{m_2y_1-m_1y_2}{m_2-m_1}\right)}$

যেমন, $(-2, 3)$ এবং $(1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি $1:2$ অনুপাতে বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক, অন্তর্বিভাজন : $\left(\frac{1.1+2.(-2)}{1+2}, \frac{1.4+2.3}{1+2}\right)=\left(-1, \frac{10}{3}\right)$ এবং বহির্বিভাজন : $\left(\frac{1.1-2.(-2)}{1-2}, \frac{1.4-2.3}{1-2}\right)$ $=(-5, 2)$ ।$(-2, 3)$ এবং $(1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

অনুসিদ্ধান্ত: যদি R , PQ কে $k:1$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তাহলে, $x=\frac{kx_2-x_1}{k-1}$ এবং $y=\frac{ky_2-y_1}{k-1}$

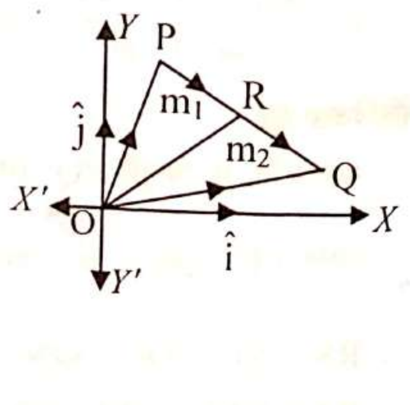
অনুসিদ্ধান্ত : যদি R , PQ কে $1+m:m$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তাহলে,

$$x=\frac{(1+m).x_2-mx_1}{1+m-m}=m(x_2-x_1)+x_2 \text{ এবং } y=m(y_2-y_1)+y_2$$

(ii) ভেক্টর পদ্ধতি: মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ $R(x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। তাহলে, $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=x\hat{i}+y\hat{j}-(x_1\hat{i}+y_2\hat{j})$

$\therefore \quad PR : RQ = m_1 : m_2 \Rightarrow m_2 PR = m_1 RQ$

$\Rightarrow m_2 \overrightarrow{PR} = m_1 \overrightarrow{RQ}$



$\Rightarrow m_2\{(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}\}=m_1\{(x_2-x)\hat{i}+(y_2-y)\hat{j}\}$

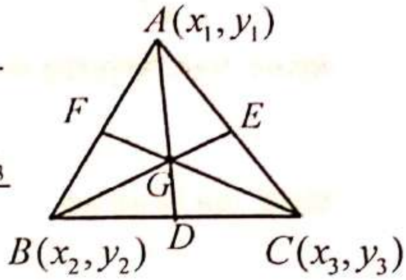
$\therefore \quad m_2(x-x_1)=m_1(x_2-x) \Rightarrow (m_1+m_2)x=m_1x_2+m_2x_1$

$\Rightarrow x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$. অনুরূপভাবে, $y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

$\therefore$ R এর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র : মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ এবং AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং G বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এবং তা

প্রত্যেক মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ঢা.'০৪]



এখন, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$ [$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু]

ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = \dfrac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1} = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

এবং $y = \dfrac{2.\frac{y_2+y_3}{2}+1.y_1}{2+1} = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

অতএব, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $\boxed{(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})}$

এখন, D $(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$, E $(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2})$, F $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

$\therefore$ Δ DEF এর ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{1}{3}(\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_1+x_3}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}), \frac{1}{3}(\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_1+y_3}{2}+\frac{y_1+y_2}{2})\right)$

$= (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}) = \Delta$ ABC এর ভরকেন্দ্র

BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(a_1, b_1)$, $E(a_2, b_2)$ এবং $F(a_3, b_3)$ হলে Δ ABC এর ভরকেন্দ্র $(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3})$, AD কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ $\frac{2a_1+x_1}{2+1} = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \Rightarrow x_1 = a_2+a_3-a_1$, $\frac{2b_1+y_1}{2+1} = \frac{b_1+b_2+b_3}{3} \Rightarrow y_2 = b_2+b_3-b_1$

$\therefore$ ΔABC এর শীর্ষত্রয় $A(a_2+a_3-a_1, b_2+b_3-b_1)$, $B(a_1+a_3-a_2, b_1+b_3-b_2)$, $C(a_1+a_2-a_3, b_1+b_2-b_3)$.

[বি.দ্র.: ABCD সামান্তরিকের $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$ তিনটি শীর্ষ হলে চতুর্থ শীর্ষ $D(a_2+a_3-a_1, b_2+b_3-b_1)$]

উদাহরণমালা

উদাহরণ -1: (7 , 7) এবং (– 5 , – 10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x- অক্ষ যে অনুপাতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ছেদ বিন্দুর ভুজ নির্ণয় কর। [রা.'১১,'১২; সি. '০৬,'১১; য. '০৮; ঢা.'১২; ব.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে k : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{-5k+7}{k+1}, \frac{-10k+7}{k+1})$

এ বিন্দুটি x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\frac{-10k+7}{k+1}=0 \Rightarrow -10\text{k}+7=0 \Rightarrow \text{k}=\frac{-7}{-10}$ $\therefore$ k : 1 = 7 : 10

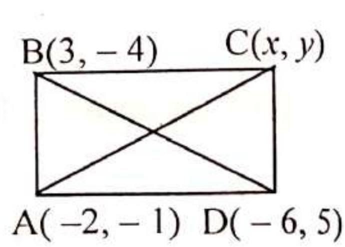
অতএব, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x- অক্ষ 7 : 10 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

আবার, ছেদ বিন্দুর ভুজ $=\dfrac{-5.\frac{7}{10}+7}{\frac{7}{10}+1}=\dfrac{\frac{-35+70}{10}}{\frac{7+10}{10}}=\frac{35}{17}$

উদাহরণ -2: **কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3 , – 4) এবং (– 6 , 5); এর তৃতীয় শীর্ষ (– 2 , – 1) হলে , চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

[মা.বো.'০৪,'০৬;য.'১১;রা.'১৪; চ.'১৪; সি.'১৪]

সমাধান : মনে করি, ABCD সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু চারটি A(– 2, –1), B(3, –4), C(x, y) এবং D(–6, 5).



$\therefore$ BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $=(\frac{3-6}{2},\frac{-4+5}{2})=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $=(\frac{x-2}{2},\frac{y-1}{2})$

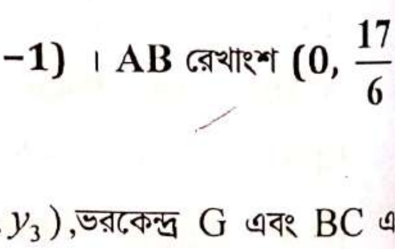
সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে বলে, $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ এবং $(\frac{x-2}{2},\frac{y-1}{2})$ বিন্দু দুইটি অভিন্ন হবে।

$\therefore$ $\frac{x-2}{2}=-\frac{3}{2} \Rightarrow x-2=-3 \Rightarrow x=-1$ এবং $\frac{y-1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow y-1=1 \Rightarrow y=2$

$\therefore$ চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (–1, 2).

উদাহরণ -3: **Δ ABC এর ভরকেন্দ্র (2, 2) এবং BC এর মধ্যবিন্দু $(\frac{3}{2}, -1)$ । AB রেখাংশ $(0, \frac{17}{6})$ বিন্দুতে 3:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান : মনে করি, ত্রিভুজটির শীর্ষত্রয় A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3),ভরকেন্দ্র G এবং BC এর মধ্যবিন্দু D।



$\therefore$ $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=6 \cdots\cdots(i)$

$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=2 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=6 \cdots\cdots(ii)$

ΔABC এর ভরকেন্দ্র G, AD মধ্যমাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিঋক্ত করে।

$\therefore$ $\dfrac{2\times\frac{3}{2}+1\times x_1}{2+1}=2 \Rightarrow 3+x_1=6 \Rightarrow x_1=3$, $\dfrac{2\times(-1)+1\times y_1}{2+1}=2 \Rightarrow -2+y_1=6 \Rightarrow y_1=8$

$\therefore$ A শীর্ষের স্থানাঙ্ক (3, 8)

AB রেখাংশ $(0, \frac{17}{6})$ বিন্দুতে $3:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{3\times x_2+1\times 3}{3+1}=0 \Rightarrow 3x_2+3=0 \Rightarrow x_2=-1, \frac{3y_2+1\times 8}{3+1}=\frac{17}{4} \Rightarrow 3y_2= 17-8 \Rightarrow y_2=3$

$\therefore$ B শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(-1, 3)$

এখন, (i) হতে, $3-1+x_3=6 \Rightarrow x_3=4$, (ii) হতে, $8+3+y_3=6 \Rightarrow y_3=-5$

$\therefore$ C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(4, -5)$

প্রশ্নমালা – III B

1. (a) দেখাও যে, $(2\ -2)$ এবং $(-1, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়। [সি.'০৫,'১৩; ব. '০৭; মা.বো. '০৫]

(b) $(7, 5)$ ও $(-2, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তরঃ $(4, 3)$ এবং $(1, 1)$ [ব.'০৫; রা.'০৯,'১১]

(c) $(-2, 3)$ ও $(4, -7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।
উত্তরঃ $3:7, 1:2$ [চ.'০৭; মা.বো.'০৭]

(d) $(2, -5)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।
উত্তরঃ $5:3$; $(2, 0)$

(e) AB সরলরেখাটি $P(3, 3)$ এবং $Q(8, 5)$ বিন্দু দুইটি দ্বারা সমত্রিখন্ডিত করা হয়। A, B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তর: $A(-2, 1)$, $B(13, 7)$ [ব.'১১]

2. (a) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ ও $(4, -5)$। AB রেখাংশকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$ হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ.'১১; দি'১২,'১৫; রা.'১৩; ঢা.'১৪] উত্তর: $(6, -8)$

(b) $A(8, 10)$ ও $B(18, 20)$ বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q ও R বিন্দুদ্বয় $2:3$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু। Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ\times PR = PB^2$
উত্তর: $(12, 14)$, $(-12, -10)$ [কু.'১৪]

3. (a) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু $(2, 7)$ ও $(6, 1)$ এবং এর ভরকেন্দ্র $(6, 4)$; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর।
উত্তর: $(10, 4)$ [কু.'০১; ঢা.'০৩; সি.'০৪,'১২; ব.'১০,'১২; চ.'১২]

(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$। যদি এর ভরকেন্দ্র x–অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1+t_2+t_3=0$ [সি.'০৫; কু.'০৬; য., মা. বো.'০৯; ব.'১৪]

(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(10, 20)$, $B(20, 30)$ এবং $C(30, 10)$. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হলে GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
উত্তর: 5 একক। [প্র.ভ.প.'০৪]

(d) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $(2, 4)$, $(5, 0)$ এবং $(4, -2)$ হলে A, B এবং C শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তর: $A(7, -6)$, $B(1, 2)$, $C(3, 6)$

(e) $A(2, 5)$, $B(5, 9)$ এবং $C(9, 12)$ বিন্দুত্রয় একটি ABCD সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর: 7 বর্গ একক।

4. **(a)** ABCD রম্বসের A(1,2), C(5, 6) এবং B শীর্ষ x- অক্ষের উপর অবস্থিত। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, রম্বসটি বর্গ নয়। উ: B(7, 0), D(−1, 8).

(b) একটি আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর প্রান্তবিন্দু (2, −1), (6, 5) এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 8 একক। অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় নির্ণয় কর। উ: (10, 1), (6, −3) অথবা (2, 9), (−2, 5)

(c) বর্গের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু (5, 0), (9, 4) হলে এর অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় নির্ণয় কর। উ: (5, 4) ও (9, 0).

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. (2,−4) ও (−3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উ: 2 : 3, 2 : 3 **[ঢা.'০৯; রা. '০৪, '০৮; য. '০২]** (৪)

6. A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (− 5 , 4) ও (3 , − 2). AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন 3AB = 2BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: (15,−11) (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. ΔABC এর দুইটি শীর্ষ A(−3, −2) ও B(6, 4)।

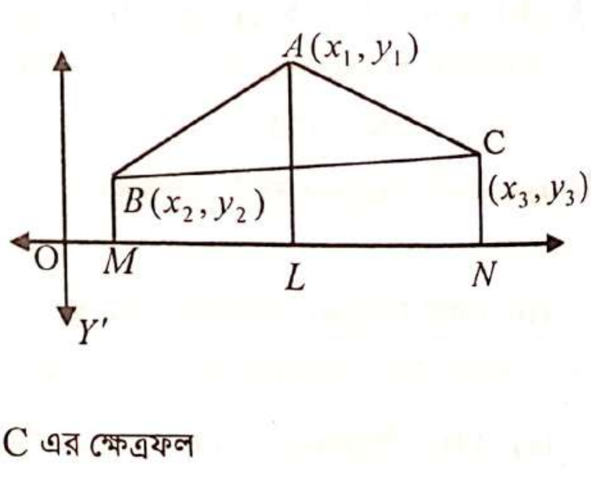
ক. $(-1, \sqrt{3})$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

খ. AB বাহুর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর সাথে C শীর্ষ যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র (3, 1) হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি.'০৮; ঢা.'০৬; চ.'০৮; য.'০৯,'১৩]

গ. AB এর মধ্যবিন্দু হতে $\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার ভুজ কোটির দ্বিগুণ।

উত্তর: (a) $(2, \frac{2\pi}{3})$ (b) (6, 1), (3, 2) (c) (2, 1), $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$

৫. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলঃ



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$। A, B ও C বিন্দু হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব আঁকি। তাহলে, $OL = x_1$, $OM = x_2$, $ON = x_3$, $AL = y_1$, $BM = y_2$, $CN = y_3$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔABC হলে,

ΔABC = ট্রাপিজিয়াম ABML এর ক্ষেত্রফল

+ ট্রাপিজিয়াম ALNC এর ক্ষেত্রফল − ট্রাপিজিয়াম BMNC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AL + BM) \times ML + \frac{1}{2}(AL + CN) \times LN - \frac{1}{2}(BM + CN) \times MN$$

$$= \frac{1}{2}(AL + BM)(OL - OM) + \frac{1}{2}(AL + CN)(ON - OL) - \frac{1}{2}(BM + CN)(ON - OM)$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

4. **(a)** ABCD রম্বসের $A(1,2)$, $C(5, 6)$ এবং B শীর্ষ x- অক্ষের উপর অবস্থিত। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, রম্বসটি বর্গ নয়। উ: $B(7, 0)$, $D(-1, 8)$.

(b) একটি আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর প্রান্তবিন্দু $(2, -1)$, $(6, 5)$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 8 একক। অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় নির্ণয় কর। উ: $(10, 1)$, $(6, -3)$ অথবা $(2, 9)$, $(-2, 5)$

(c) বর্গের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু $(5, 0)$, $(9, 4)$ হলে এর অপর কর্ণের প্রান্তদ্বয় নির্ণয় কর। উ: $(5, 4)$ ও $(9, 0)$.

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. $(2,-4)$ ও $(-3,6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।
{1(a)}
উ: $2 : 3$, $2 : 3$ **[ঢা.'০৯; রা. '০৪, '০৮; য. '০২]** (৪)

6. A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-5, 4)$ ও $(3, -2)$. AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $3AB = 2BC$ হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(15,-11)$ (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. ΔABC এর দুইটি শীর্ষ $A(-3, -2)$ ও $B(6, 4)$।

ক. $(-1, \sqrt{3})$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

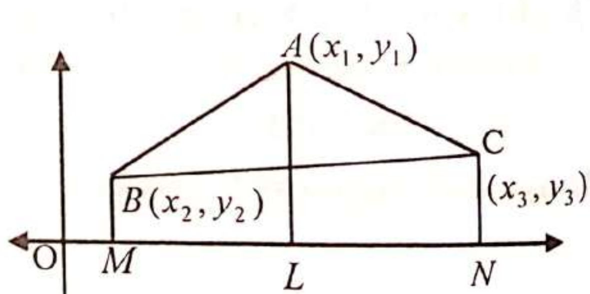
খ. AB বাহুর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর সাথে C শীর্ষ যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র $(3, 1)$ হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[সি.'০৮; ঢা.'০৬; চ.'০৮; য.'০৯,'১৩]**

গ. AB এর মধ্যবিন্দু হতে $\frac{1}{2}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার ভুজ কোটির দ্বিগুণ।

উত্তর: (a) $(2, \frac{2\pi}{3})$ (b) $(6, 1)$, $(3, 2)$ (c) $(2, 1)$, $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$

৫. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলঃ

মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$। A, B ও C বিন্দু হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AL, BM ও CN লম্ব আঁকি। তাহলে, $OL = x_1$, $OM = x_2$, $ON = x_3$, $AL = y_1$, $BM = y_2$, $CN = y_3$



ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔABC হলে,

ΔABC = ট্রাপিজিয়াম ABML এর ক্ষেত্রফল

+ ট্রাপিজিয়াম ALNC এর ক্ষেত্রফল – ট্রাপিজিয়াম BMNC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AL + BM) \times ML + \frac{1}{2}(AL + CN) \times LN - \frac{1}{2}(BM + CN) \times MN$$

$$= \frac{1}{2}(AL + BM)(OL - OM) + \frac{1}{2}(AL + CN)(ON - OL) - \frac{1}{2}(BM + CN)(ON - OM)$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[\ x_1(y_1 + y_2 - y_1 - y_3) +\ x_2(-y_1 - y_2 + y_2 + y_3) +\ x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) +\ x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}; \text{ যেখানে } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1$$

নির্ণায়কের সাহায্যে লিখা যায়, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

আবার, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)\}$

বি.দ্র. (i) নির্ণায়কের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সময় শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে নিলে ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ধনাত্মক হয় এবং শীর্ষবিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের দিকে নিলে ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ঋণাত্মক হয়, কিন্তু তাদের সংখ্যাসূচক মান সমান হয়। যদি শীর্ষবিন্দুগুলির ঘূর্ণন বুঝতে না পারা যায় তাহলে, পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়।

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1$$

$= (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$ এবং $\Delta ABC = \frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$ বর্গ একক বিবেচনা করে যেকোনো ধরনের বিভ্রান্তি এড়ানো সম্ভব।

$\therefore\ \Delta ABC = \frac{1}{2}|\delta_{ABC}| = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$ এর পরমমান

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1| = \frac{1}{2}|(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)|$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3)\cdots\ \cdots$, (x_n, y_n) শীর্ষ দ্বারা গঠিত বহুভূজের ক্ষেত্রফল,

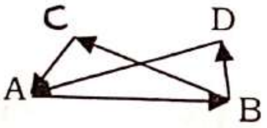
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots y_n & y_1 \end{vmatrix}$ এর পরমমান $= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots\cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right\}$ এর পরমমান

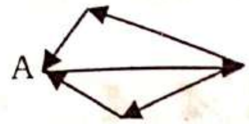
$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots\cdots + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots\cdots - y_nx_1|$$

সূত্রটি Shoelace formula নামে পরিচিত। যার মূলভিত্তি হলো Gauss's area formula বা Surveyor's formula.

(ii) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ **বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে যদি ও কেবল যদি এ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়। অর্থাৎ,** $\delta_{ABC} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$

(iii)





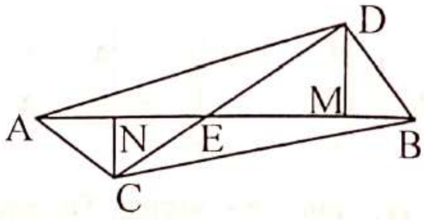
(a) C এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার একই পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$

(b) C এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$

(iv) AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ **অনুপাতে বিভক্ত করলে** $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.

প্রমাণঃ AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, ΔCNE ও ΔDME সদৃশ।

$$\therefore \frac{CN}{DM} = \frac{CE}{DE} = \frac{m_1}{m_2} \quad \therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \frac{\frac{1}{2}\delta_{ABC}}{\frac{1}{2}\delta_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times CN}{\frac{1}{2} AB \times DM} = \frac{m_1}{m_2}$$



$\Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$ **. অনুপাত যথাক্রমে (−) ও (+) এর জন্য AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করবে।**

উদাহরণমালা

উদাহরণ–1: 'a' এর মান কত হলে, $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ এবং $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে। [চ.'০৯,'১৪; য.'০৮; সি.'১০; ঢা.'১১,'১৩; কু.'১২,'১৪; মা.'১৩,'১৫; ব.'১৫]

সমাধানঃ $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ এবং $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$$\therefore \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 2-2a & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-a & -4-a \\ 2a & 6-2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4-a & a \\ 6-2a & 2-2a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 6 - 8a + 2a^2 - 8 + 10a + 2a^2 - (2 - 4a + 2a^2 - 4a - 2a^2 + 6a - 2a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 2a - 2 - 2 + 2a^2 + 2a = 0 \Rightarrow 8a^2 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2a - a - 1 = 0 \Rightarrow 2a(a+1) - 1(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(2a-1) = 0 \quad \therefore a = -1, \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ–2: একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(1, 2)$ এবং $C(2, 1)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x + y = 15$ অথবা, $x + y + 9 = 0$.

[য.'১১;ঢা.'০৪; রা.'০৬,'১১,'১৩; ব.'০৪,'০৯; কু.'১৩; সি.'১৪]

প্রমাণ: $\Delta ABC = \frac{1}{2}|(x-1)(2-1)-(y-2)(1-2)| = \frac{1}{2}|x-1+y-2| = \frac{1}{2}|x+y-3|$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $\Delta ABC = \frac{1}{2}|x+y-3| = 6 \Rightarrow x+y-3 = \pm 12$

$\therefore$ $x+y=15$ অথবা, $x+y+9=0$ (Showed)

উদাহরণ–3: দেখাও যে, $C(-5, -13)$ এবং $D(11, 12)$ বিন্দু দুইটি $A(2, -3)$ এবং $B(1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত ?

সমাধান: $\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 13 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 6 & -11 & 0 \\ -5 & 13 & 1 \end{vmatrix} = -11+30 = 19$

$\delta_{ABD} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 11 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -10 & -10 & 0 \\ 11 & 12 & 1 \end{vmatrix} = -10-50 = -60$

$\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} = 19 \times -60 < 0$ বলে, C এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

0 মূলবিন্দু হলে, $\delta_{ABO} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(4+3) = 7$

যেহেতু δ_{ABC} এবং δ_{ABO} একই চিহ্নযুক্ত, সুতরাং মূলবিন্দু ও C বিন্দু রেখার AB একই পার্শ্বে অবস্থিত।

উদাহরণ–4: A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, -1)$, $(5, 7)$, $(-2, 3)$ এবং $(4, 1)$। প্রমাণ কর যে, AB রেখাংশকে CD রেখাটি $11 : 19$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। CD রেখাংশকে AB রেখাটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

$$\frac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \frac{(-2-4)(1+1)-(3-1)(4+1)}{(-2-4)(1-7)-(3-1)(4-5)} = \frac{-12-10}{36+2} = \frac{-22}{38} = -\frac{11}{19} < 0$$

$\therefore$ AB রেখাংশকে CD রেখাটি $11 : 19$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$\frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7+5+15+14+2+3}{-7+5+5-28-4+1} = \frac{32}{-28} = -\frac{8}{7} < 0$$

$\therefore$ CD রেখাংশকে AB রেখাটি $8 : 7$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

প্রশ্নমালা III C

1. **(a)** ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(-3, -2)$, $B(-3, 9)$ এবং $C(5, -8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[কু.'০৪; য.'০৪,'১৩; চ.'০৮]**

(b) দেখাও যে, $(3, 5)$, $(3, 8)$ এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[কু.'০২]**

(c) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু $(1,2)$, $(4, 4)$ এবং $(2,8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০১-০২]**

(d) ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু $(1, 2)$, $(4, 4)$ এবং $(2, 8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর: **(a)** 44 বর্গ একক, $8\frac{4}{5}$ একক। **(b)** $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক। **(c)** 32 বর্গ একক। **(d)** 128 বর্গ একক।

2. **(a)** কোনো ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$ । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -1/2$ হলে, বিন্দুগুলি সমরেখ হবে। উঃ $\frac{1}{2}|2t^2 - 3t - 2|$ বর্গ একক।
[সি. '০৭; কু.'১০ ; ঢা. '০৬; রা. '০৮,'১০; ব.'১০; চ.'১৫]

(b) (a, b), (b, a) এবং $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ ভিন্ন বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, দেখাও যে, $a + b = 0$. [চ.'০২]

(c) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$, $(a+2, a)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে ? উ: $\frac{1}{2}|2a-1|$ বর্গ একক, $a = \frac{1}{2}$. [রা.'১২; য.'১২;দি.'১৪]

3. **(a)** যদি $A(3, 4)$, $B(2t, 5)$ এবং $C(6, t)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। উত্তরঃ -2, $15/2$ [য.'০৩,'১৪; ঢা.'০৪; সি.'০৪; ব.'১৩; মা.'১৪]

(b) দেখাও যে, $(p, p-2)$, $(p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [কু.'০৮; মা.বো.'০৪]

(c) OPQ ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(A\cos\beta, -A\sin\beta)$ এবং $(A\sin\alpha, A\cos\alpha)$; দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। উত্তরঃ $\frac{1}{2}A^2$ [য.'০৩; ব.'০৪; চ.'১২]

(d) দিইটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ বর্গ একক। [ঢা.'০৯; দি.'১২]

4. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, 4)$ এবং $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$. [রা.'১৩]

5. **(a)** ΔABC এর A , B , C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5)$, $(-3, 3)$, $(-1, -1)$ এবং BC , CA , AB এর মধ্যবিন্দু D , E , F হলে, ত্রিভুজ ABC এবং DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $\Delta ABC = 4.\Delta DEF$. উত্তরঃ 14 বর্গ একক, $7/2$ বর্গ একক। [ব.'০৫]

(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3)$, $(13, 0)$, $(-2, 9)$ এবং D , E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এদের আনুপাত 3: 1. উত্তর: 63, 21 [রা.'০২]

(c) ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 2)$, $(2, 3)$ ও $(3, -4)$; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে, $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x - 3y + 7|}{22}$. [কু.'০৭]

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

1(ক)
6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(5, 6)$, $B(-9, 1)$ এবং $C(-3, -1)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর

সাহায্যে A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮; চ.'১০; য.'০৭; দি.০৯,'১০] (২) + (২)

উ: 29 বর্গ একক, $\frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক

7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x\ ,\ y)$, B(2 , 4) এবং C(−3 , 3) এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$. [রা.'১৩] (২)

8. ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(3 , 2), B(2 , − 1), C(8, − 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: (9, 0), 20 বর্গ একক [ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৬] (২) + (২)

9. ABCD চতুর্ভুজের A , B , C , D শীর্ষ চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1 , 2) , (− 5 , 6) , (7 , − 4) এবং (k , − 2); এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে k এর মান নির্ণয় কর। উ: k = 3 [য.'০২; সি.'০৮] (২)

10. যদি A(− 4, 6) , B(−1, −2) এবং $C(a\ ,-2)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ একক হয়, তবে 'a' এর মান এবং A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর । উ: 3 বা, − 5, 8 একক [প্র.ভ.প.'৯৫] (৪)

11. (a) দেখাও যে, (3 , 90°) ও (3 , 30°) বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 31 বর্গ একক. (৪)

(b) দেখাও যে, C(− 2 , −1) এবং D(5 , − 4) বিন্দু দুইটি A(− 3 , 1) এবং B(1 , − 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত ? (৩)

12. (−2, 3) , (−3 , − 4) , (5 , −1) ও (2, 2) বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 31 বর্গ একক। (২)

13. (a) t এর মান কত হলে (2t + 1, t + 2), (2 − t , 2 − 5t) এবং (5t , 7t) বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ? উ: $t>\frac{1}{3}$ (২)

(b) দেখাও যে, (t , 3t − 2), (1− 2t , 2 − 3t) এবং (− t , − t) বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি $t>1$ হয়। (২)

14. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি A(x, y), B(1, 3) ও C(3,1) হলে এবং x + y = 1 হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 3 বর্গ একক। **[KUET 07-08]** (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

15. ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2 , 5) , B(5 , 9) এবং D(6 , 8).

(a) t এর মান কত হলে (2t + 1, t + 2), (2 − t , 2 − 5t) এবং (5t , 7t) বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ?

(b) OB সরলরেখা AD রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর; যেখানে O মূলবিন্দু।

(c) রম্বসটির কর্ণের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর: 7 বর্গ একক।

16. A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, − 1) , (15 , 2) , (− 1 , 2) এবং (4 , − 5)।

(a) দেখাও যে, (t , 3t − 2), (1− 2t , 2 − 3t) এবং (− t , − t) বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি $t>1$ হয়।

(b) মূলবিন্দু O এবং ΔACD এর ভারকেন্দ্র G হলে $OG^2 : \Delta ABD$ নির্ণয় কর।

(c) প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩;রা.'১৫]

17. A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1) , (1,0) , (5, 1) এবং (– 10, –4) .

(a) PQRS আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু P(3, 2) , Q(2, – 1), R(8, – 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ S এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর: (9 , 0)

(b) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উত্তর: 2 : 1 [চ.'০২]

(c) AD রেখাংশকে x-অক্ষ L বিন্দুতে এবং ΔACD এর ভরকেন্দ্র M হলে BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬. সঞ্চারপথ (Locus)

সমতলস্থ যেসব বিন্দু এক বা একাধিক প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে, তাদের সেটকে সঞ্চারপথ বলে। প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহের সত্যতা অনুসারে সঞ্চার পথটি সরলরেখা বা বক্ররেখা হতে পারে। যেমন, সমতলস্থ একটি বিন্দু হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চার পথ সৃষ্টি করে তাকে বৃত্ত বলে ।

সঞ্চার পথের সমীকরণঃ প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহ হতে সঞ্চারপথ নির্দেশক সেটের যেকোনো বিন্দুর ভুজ এবং কোটির মধ্যে যে বীজগণিতীয় সম্পর্ক পাওয়া যায় তাকে সঞ্চার পথের সমীকরণ বলে। সঞ্চারপথের যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে ; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি কোনো সঞ্চার পথের সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দুটি অবশ্যই সেই সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি বৃত্তের সঞ্চার পথের যেকোনো বিন্দু (4, 3) তার সমীকরণ $x^2+y^2=25$ কে সিদ্ধ করবে; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দু (0 , 5) বৃত্তের সঞ্চার পথের সমীকরণ $x^2+y^2=25$ কে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দু অবশ্যই বৃত্তের সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণ -1: $(a , 0)$ এবং $(0 , a)$ বিন্দু দুইটি হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের বর্গের অন্তর $2a$ এর সমান হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৮; ঢা.'০৭; য.'০৭,'১২; মা.বো.'০৮]

সমাধান : মনে করি, $P(x , y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোনো একটি বিন্দু ।

$$\therefore\ PA=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}\Rightarrow PA^2=x^2-2ax+a^2+y^2$$

$$PB=\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}\Rightarrow PB^2=x^2+y^2-2ay+a^2$$

প্রশ্নমতে, $PA^2-PB^2=|2a|=\pm 2a$

$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-(x^2+y^2-2ay+a^2)=\pm 2a$$

$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-x^2-y^2+2ay-a^2=\pm 2a\Rightarrow 2a(y-x)=\pm 2a$$

$\therefore\ y=x\pm 1$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা – III D

1. (a) A(2 , 3) এবং B(–1 , 4) দুইটি স্থির বিন্দু । A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $5x^2+5y^2-44x-22y+49=0$

[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১,'১৫; ব.'১২; ঢা.',কু.,য.'১৪; মা.'১৫]

(b) মূলবিন্দু O এবং ΔACD এর ভারকেন্দ্র G হলে $OG^2 : \Delta ABD$ নির্ণয় কর।

(c) প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩;রা.'১৫]

17. A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1), (1,0), (5, 1) এবং (− 10, −4).

(a) PQRS আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু P(3, 2), Q(2, − 1), R(8, − 3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ S এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর: (9, 0)

(b) CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উত্তর: 2 : 1 [চ.'০২]

(c) AD রেখাংশকে x-অক্ষ L বিন্দুতে এবং ΔACD এর ভরকেন্দ্র M হলে BLM ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬. সঞ্চারপথ (Locus)

সমতলস্থ যেসব বিন্দু এক বা একাধিক প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে, তাদের সেটকে সঞ্চারপথ বলে। প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহের সত্যতা অনুসারে সঞ্চার পথটি সরলরেখা বা বক্ররেখা হতে পারে। যেমন, সমতলস্থ একটি বিন্দু হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চার পথ সৃষ্টি করে তাকে বৃত্ত বলে।

সঞ্চার পথের সমীকরণঃ প্রদত্ত শর্ত বা শর্তসমূহ হতে সঞ্চারপথ নির্দেশক সেটের যেকোনো বিন্দুর ভুজ এবং কোটির মধ্যে যে বীজগণিতীয় সম্পর্ক পাওয়া যায় তাকে সঞ্চার পথের সমীকরণ বলে। সঞ্চারপথের যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক তার সমীকরণকে সিদ্ধ করে ; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি কোনো সঞ্চার পথের সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দুটি অবশ্যই সেই সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি বৃত্তের সঞ্চার পথের যেকোনো বিন্দু (4, 3) তার সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ কে সিদ্ধ করবে; বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দু (0 , 5) বৃত্তের সঞ্চার পথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ কে সিদ্ধ করে তবে উক্ত বিন্দু অবশ্যই বৃত্তের সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত হবে।

উদাহরণ -1: (a , 0) এবং (0 , a) বিন্দু দুইটি হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের বর্গের অন্তর $2a$ এর সমান হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৮; ঢা.'০৭; য.'০৭,'১২; মা.বো.'০৮]

সমাধান : মনে করি, $P(x , y)$ বিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোনো একটি বিন্দু ।

$$\therefore\ PA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow PA^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$PB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow PB^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$$

প্রশ্নমতে, $PA^2 - PB^2 = |2a| = \pm 2a$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - (x^2 + y^2 - 2ay + a^2) = \pm 2a$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - x^2 - y^2 + 2ay - a^2 = \pm 2a \Rightarrow 2a(y - x) = \pm 2a$$

$\therefore\ y = x \pm 1$, ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা – III D

1. **(a)** A(2 , 3) এবং B(–1 , 4) দুইটি স্থির বিন্দু । A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$
[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১,'১৫; ব.'১২; ঢা.',কু.,য.'১৪; মা.'১৫]

(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(6, 3)$। A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোনো বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ **[সি.'০১; চ.'০২]**

(c) $A(0, 4)$ ও $B(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে একটি বিন্দু-সেটের যেকোনো উপাদানের সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$ **[চ.'০৩ ; ঢা.'১০;রা.'১৪]**

(d) একটি বিন্দু-সেটের যেকোনো উপাদান $(2, -1)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16.$ **[রা.'০৫; কু.'১২]**

2. **(a)** y-অক্ষ হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোনো উপাদানের দূরত্ব মূলবিন্দু হতে তার দূরত্বের অর্ধেক। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $y^2 = 3x^2$ **[বুয়েট'০৪-০৫]**

(b) $B(2, 6)$ ও $C(x, y)$ বিন্দু দুইটি $O(0, 0)$ ও $A(3, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। $C(x, y)$ বিন্দুটি এমন একটি বিন্দু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য $\Delta OAC = 2.\Delta OAB$. ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর: $5x - 3y + 16 = 0$

3. k এর যেকোনো মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2ak, ak^2)$; P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর: $x^2 = 4ay$

4. (a, b) বিন্দুগামী একটি পরিবর্তনশীল সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $bx + ay - 3xy$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

5. $(2, 0)$ বিন্দু হতে একটি বিন্দু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব $x = 0$ রেখা হতে তার দূরত্বের তিনগুণ। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$ **[রা '০৯]**

6. t পরিবর্তনশীল হলে দেখাও যে, $P(t+2, 3t)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $3x - y = 6.$ (২)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

7. ABP ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(a, b)$, $B(0, b)$, $P(x, y)$ এবং $O(0,0)$ মূলবিন্দু।

(a) θ পরিবর্তনশীল হলে, $P(1 + 2\cos\theta, -2 + 2\sin\theta)$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

(b) ABO ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G, AB এর মধ্যবিন্দু D এবং $\angle GPD = 90^0$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[য.'১০; রা.'১৩]**

উ: $6(x^2 + y^2) - 5ax - 10by + a^2 + 4b^2 = 0$

(c) B ও P বিন্দু OA এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\Delta OAP = 3.\Delta OAB$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $ay - bx + 3ab = 0$

৭. সরলরেখার ঢাল (Slope) বা ক্রমাবনতি (Gradient)

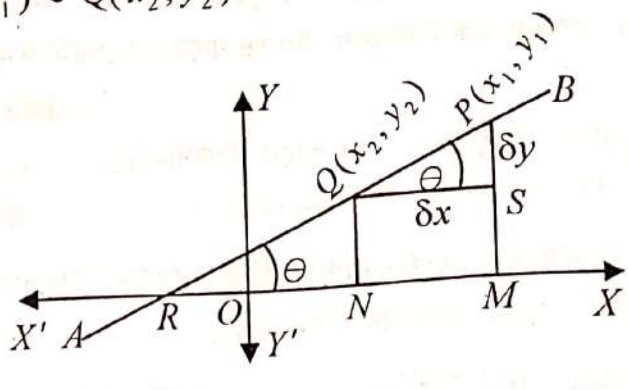
সরলরেখা : একটি বিন্দু-সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথ দিক পরিবর্তন না করলে সে সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলা হয়। সঞ্চারপথের সমীকরণকে সরলরেখার সমীকরণ বলা হয়।

সরলরেখার ঢাল : কোনো সরলরেখা (যা x-অক্ষের উপর লম্ব নয়) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টকে রেখাটির ঢাল বলে। ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়। AB সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ $(0° \le \theta < 180°;\ \theta \ne 90°)$ কোণ উৎপন্ন করলে, তার ঢাল $m = \tan\theta$.

যেমন, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার ঢাল $= \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

৮. দুইটি বিন্দুর সংযোগ সরলরেখার ঢাল :

মনে করি, AB সরলরেখাটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি। Q বিন্দু হতে PM এর উপর QS লম্ব টানি।



$RM \parallel QS$ বলে, $\angle PRM = \angle PQS = \theta$

আবার, $QS = NM = OM - ON = x_1 - x_2$,

$PS = PM - SM = PM - QN = y_1 - y_2$

$\therefore$ m = AB এর ঢাল $= \tan\theta = \tan PQS$

$$= \frac{PS}{QS} = \frac{rise}{run} = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \boxed{\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}}$$

যেমন, (2 , 3) ও (6 , 7) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{3-7}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$। রেখাটি x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = 1 \therefore \theta = 45°$

অনুসিদ্ধান্ত-1. মূলবিন্দু (0 , 0) এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{0 - y_1}{0 - x_1} = \frac{y_1}{x_1}$। আনুভূমিক রেখার ঢাল শূন্য এবং উলম্ব রেখার ঢাল অর্থহীন।

অনুসিদ্ধান্ত-2. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ও $R(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি ও কেবল যদি, **PQ, QR** এবং **PR** এর ঢাল সমান হয় অর্থাৎ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ হয়।

উদাহরণ-1: (1 , 2) এবং (3 , 4) বিন্দুগামী রেখার উপর (x , y) যেকোনো একটি বিন্দু হলে দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [রা.'০৬; মা.বো.'০৬,'০৯]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(1,2) ও B(3,4) এবং AB রেখার উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।

$\therefore$ A , B , P বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = PA রেখার ঢাল

$$\Rightarrow \frac{2-4}{1-3} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \text{ (Showed)}$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক ,

$\delta_{ABP} = (1-3)(4-y) - (2-4)(3-x)$ $[\because \delta = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)]$

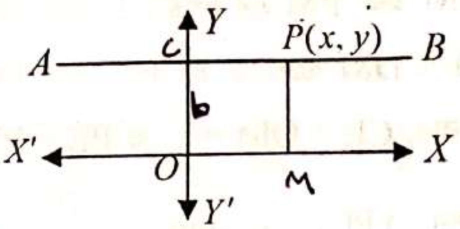
$= -8 + 2y + 6 - 2x = 2(y - x - 1)$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে, $2(y - x - 1) = 0 \therefore x - y + 1 = 0$ (Showed)

৯. সরলরেখার সমীকরণ

I. x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($y = b$) :

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = b$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore\ PM = CO$

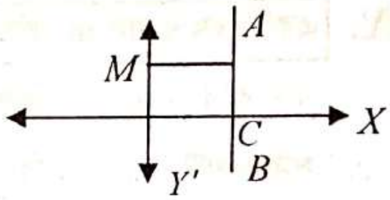
$\Rightarrow y = b$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'b' একক দূরত্বে অবস্থিত x -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$ যা y-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

নোটঃ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ x মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'b' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'b' একক উপরে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'b' একক নীচে অবস্থান করে। $b = 0$ হলে AB রেখাটি x-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$.

II. y -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($x = a$) :

মনে করি, AB রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি x-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = a$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। y-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore\ PM = OC \Rightarrow x = a$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'a' একক দূরত্বে অবস্থিত y -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = a$ যা x-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

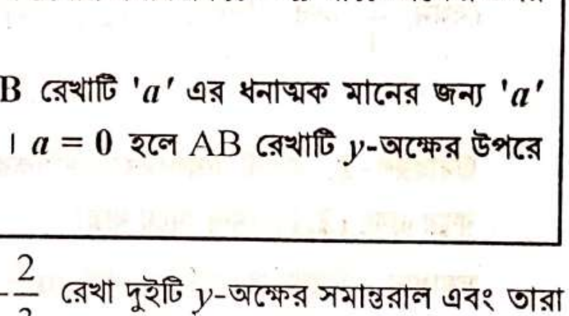
নোটঃ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ y মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'a' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'a' একক ডানে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'a' একক বামে অবস্থান করে। $a = 0$ হলে AB রেখাটি y-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$.

যেমন, (i) $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ এবং $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\dfrac{3}{2}$ একক ডানে এবং $\dfrac{2}{3}$ একক বামে অবস্থিত।

(ii) $3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}$ এবং $5y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{3}{5}$ রেখা দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা x-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\dfrac{5}{3}$ একক উপরে এবং $\dfrac{3}{5}$ একক নীচে অবস্থিত।

III. ঢাল-ছেদ আকৃতি বা m-আকৃতি রেখা : y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

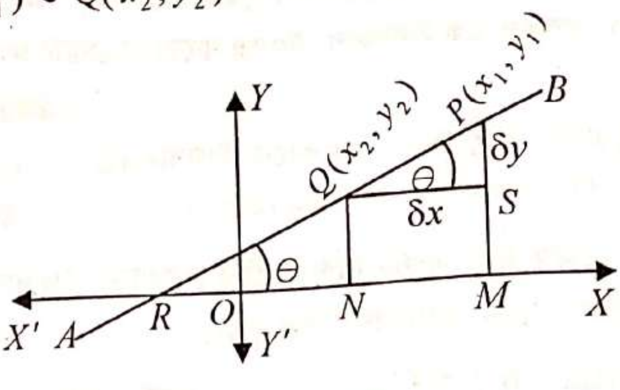
মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষকে D বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = c$ এবং রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর



যেমন, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার ঢাল $= \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

৮. দুইটি বিন্দুর সংযোগ সরলরেখার ঢাল :

মনে করি, AB সরলরেখাটি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এবং তা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানি। Q বিন্দু হতে PM এর উপর QS লম্ব টানি।



RM ∥ QS বলে, $\angle PRM = \angle PQS = \theta$

আবার, $QS = NM = OM - ON = x_1 - x_2$,

$PS = PM - SM = PM - QN = y_1 - y_2$

$\therefore$ m = AB এর ঢাল $= \tan\theta = \tan PQS$

$$= \frac{PS}{QS} = \frac{rise}{run} = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \boxed{\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}}$$

যেমন, $(2, 3)$ ও $(6, 7)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{3-7}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$। রেখাটি x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = 1 \therefore \theta = 45°$

অনুসিদ্ধান্ত-1. মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{0 - y_1}{0 - x_1} = \frac{y_1}{x_1}$। আনুভূমিক রেখার ঢাল শূন্য এবং উলম্ব রেখার ঢাল অর্থহীন।

অনুসিদ্ধান্ত-2. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ও $R(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি ও কেবল যদি, **PQ**, **QR** এবং **PR** এর ঢাল সমান হয় অর্থাৎ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ হয়।

উদাহরণ-1: $(1, 2)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দুগামী রেখার উপর (x, y) যেকোনো একটি বিন্দু হলে দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [রা.'০৬; মা.বো.'০৬,'০৯]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(1,2) ও B(3,4) এবং AB রেখার উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।

$\therefore$ A, B, P বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = PA রেখার ঢাল

$$\Rightarrow \frac{2-4}{1-3} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \text{ (Showed)}$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক,

$\delta_{ABP} = (1-3)(4-y) - (2-4)(3-x) \quad [\because \delta = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)]$

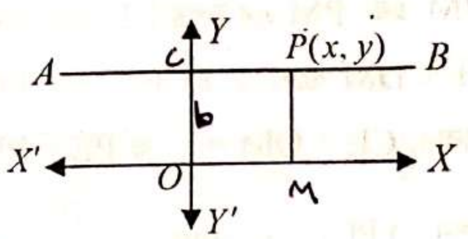
$= -8 + 2y + 6 - 2x = 2(y - x - 1)$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে, $2(y - x - 1) = 0 \therefore x - y + 1 = 0$ (Showed)

৯. সরলরেখার সমীকরণ

I. x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($y = b$) :

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = b$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore$ $PM = CO$

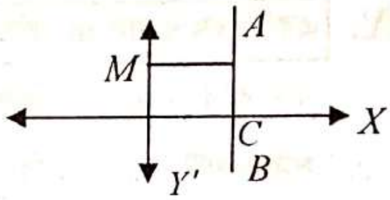
$\Rightarrow y = b$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'b' একক দূরত্বে অবস্থিত x -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$ যা y-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

নোটঃ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ x মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'b' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'b' একক উপরে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'b' একক নীচে অবস্থান করে। $b = 0$ হলে AB রেখাটি x-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$.

II. y -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ ($x = a$) :

মনে করি, AB রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং রেখাটি x-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = a$ হয়। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু। y-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি।



$\therefore$ $PM = OC \Rightarrow x = a$ এবং AB রেখার উপরস্থ যেকোনো বিন্দুর জন্য এ সমীকরণটি সত্য।

অতএব, x-অক্ষ থেকে 'a' একক দূরত্বে অবস্থিত y -অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = a$ যা x-অক্ষের উপর লম্ব রেখারও সমীকরণ।

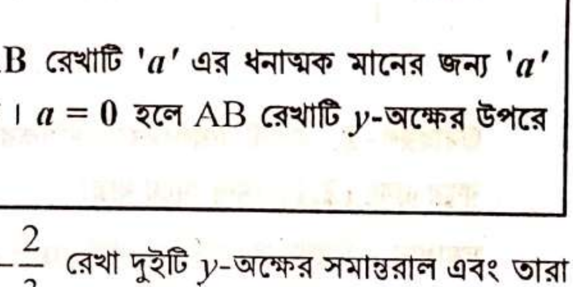
নোটঃ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ y মুক্ত থাকে। AB রেখাটি 'a' এর ধনাত্মক মানের জন্য 'a' একক ডানে এবং ঋণাত্মক মনের জন্য 'a' একক বামে অবস্থান করে। $a = 0$ হলে AB রেখাটি y-অক্ষের উপরে সমপাতিত হয়। সুতরাং y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$.

যেমন, (i) $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ এবং $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\frac{3}{2}$ একক ডানে এবং $\frac{2}{3}$ একক বামে অবস্থিত।

(ii) $3y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$ এবং $5y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$ রেখা দুইটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তারা x-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $\frac{5}{3}$ একক উপরে এবং $\frac{3}{5}$ একক নীচে অবস্থিত।

III. ঢাল-ছেদ আকৃতি বা m-আকৃতি রেখা : y-অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

মনে করি, AB রেখাটি x-অক্ষকে D বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OC = c$ এবং রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু। x-অক্ষের উপর



PM এবং PM এর উপর CE লম্ব টানি।

CE ∥ DM বলে, $\angle PCE = \angle CDM = \theta$.

আবার, $CE = OM = x$ ও $PE = PM - EM = PM - CO = y - c$.

এখন, ΔPCE -এ , $\tan\theta = \dfrac{PE}{CE} = \dfrac{y-c}{x}$

$\Rightarrow y = x\tan\theta + c \;\therefore\; y = mx + c$, যখন $m = \tan\theta$

অতএব, একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

নোটঃ $c = 0$ হলে, $y = mx$, যা মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সাধারণ সমীকরণ নির্দেশ করে।

যেমন, y-অক্ষের ছেদ অংশ 3 এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন কারী সরলরেখার সমীকরণ, $y = x\tan45° + 3 \Rightarrow y = x\,.\,1 + 3 \Rightarrow y = x + 3$.

IV. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $y - y_1 = m(x - x_1)$

মনে করি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী যেকোনো একটি রেখার সমীকরণ $y = mx + c \cdots\cdots (1)$.

$\therefore$ সমীকরণটি (x_1, y_1) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ $y_1 = m x_1 + c \cdots\cdots (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$, যা নির্ণেয় রেখার সমীকরণ।

যেমন, $\dfrac{3}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y + 3 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

$$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 6 \Rightarrow 3x - 4y = 18.$$

উদাহরণ–2: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং (2,1) বিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান : নির্ণেয় সরলরেখার ঢাল, $m = -\tan135° = -\tan(180° - 45°) = \tan 45° = 1$

$\therefore$ m ঢাল বিশিষ্ট এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y - 1 = m(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2)$

$$\Rightarrow y - 1 = x - 2 \;\therefore\; x - y = 1 \quad (\text{Ans.})$$

V. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

$\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ঢাল বিশিষ্ট এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

বি.দ্র.: (i) সমীকরণটিকে লেখা যায়, $(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$.

(ii) মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x-0}{0-x_1} = \frac{y-0}{0-y_1} \Rightarrow \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$

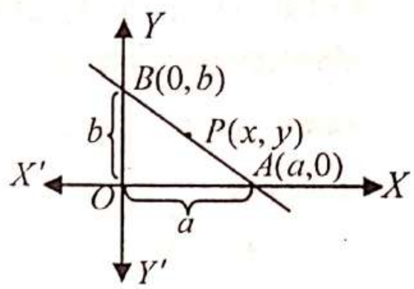
$$\boxed{\therefore\ y = \frac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0}$$

যেমন, $(-1, 2)$ এবং $(3, -4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x-(-1)}{-1-3} = \frac{y-2}{2-(-4)} \Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{6}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x+3 = -2y+4 \Rightarrow 3x+2y = 1$$

VI ছেদক আকার : x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

ধরি, সরলরেখাটি দ্বারা x-অক্ষ এবং y- অক্ষের ছেদ অংশ যথাক্রমে $OA = a$ এবং $OB = b$ । সুতরাং, A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ । ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু।



$\therefore$ AP এর ঢাল = BP এর ঢাল [$\because$ A, P, B বিন্দু তিনটি সমরেখ।]

$$\therefore\ \frac{0-y}{a-x} = \frac{b-y}{0-x} \Rightarrow xy = ab - ay - bx + xy \Rightarrow bx + ay = ab$$

$$\Rightarrow \frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ \cdots\cdots (1)$$

বি.দ্র. : (a) (1) সমীকরণটিকে $lx + my = 1$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $l = \frac{1}{a}$ এবং $m = \frac{1}{b}$

(b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটি x - অক্ষকে $A(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং $\Delta OAB = \frac{1}{2}|OA \times OB|$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}|ab|$ বর্গ একক।

(c) অক্ষদ্বয় দ্বারা $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটির ছেদ অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

যেমন, x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে 4 এবং 5 অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ অর্থাৎ $(4, 0)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$.

উদাহরণ -3: $3x + by + 1 = 0$ এবং $ax + 6y + 1 = 0$ সরলরেখাদ্বয় $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে। a ও b এর মান নির্ণয় কর। যদি প্রথম রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০২;রা.'১৪]

সমাধান: $3x+by+1=0 \cdots\cdots(1)$ এবং $ax+6y+1=0 \cdots(2)$ রেখাদ্বয় $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore\ 3\times 5+b\times 4+1=0 \Rightarrow 15+4b+1=0 \Rightarrow 4b=-16\ \therefore\ b=-4$ এবং

$a\times 5+6\times 4+1=0 \Rightarrow 5a+24+1=0 \Rightarrow 5a=-25\ \therefore\ a=-5$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $3x-4y+1=0$

$\Rightarrow 3x-4y=-1 \Rightarrow \frac{x}{-1/3}+\frac{y}{1/4}=1$; যা x-অক্ষকে $A(-\frac{1}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(2) হতে পাই, $-5x+6y+1=0$

$\Rightarrow -5x+6y=-1 \Rightarrow \frac{1}{1/5}+\frac{1}{-1/6}=1$ যা y-অক্ষকে $B(0, -\frac{1}{6})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-0}=\frac{y-0}{0+\frac{1}{6}} \Rightarrow -3x-1=6y\ \therefore\ 3x+6y+1=0$ (Ans.)

উদাহরণ –4: $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশে দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [সি.'১০; রা.'০৭; ব.'০৯]

সমাধান : $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-(-1)}{-1-4}=\frac{y-3}{3-(-2)} \Rightarrow \frac{x+1}{-5}=\frac{y-3}{5} \Rightarrow \frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{1}$$

$\Rightarrow x+1=-(y-3)\ \therefore\ x+y-2=0 \cdots\cdots$ (i) (Ans.)

(i) হতে পাই, $x+y=2 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

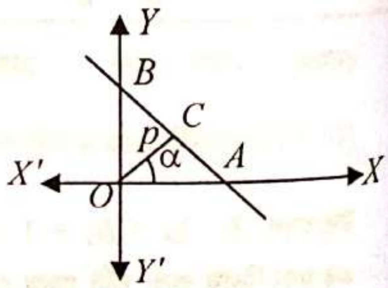
$\therefore$ অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশে দৈর্ঘ্য $=\sqrt{2^2+2^2}$ একক $=2\sqrt{2}$ একক।

VII. লম্ব আকার সমীকরণ : মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

মনে করি, রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দু O হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $OC=p$ এবং $\angle AOC=\alpha$

এখন OAC সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos\alpha=\frac{OC}{OA}=\frac{p}{OA} \Rightarrow OA=\frac{p}{\cos\alpha}$ এবং

OBC সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos BOC=\frac{OC}{OB}$



$\Rightarrow \cos(90^\circ-\alpha)=\frac{p}{OB} \Rightarrow OB=\frac{p}{\sin\alpha}$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}=1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}}=1$

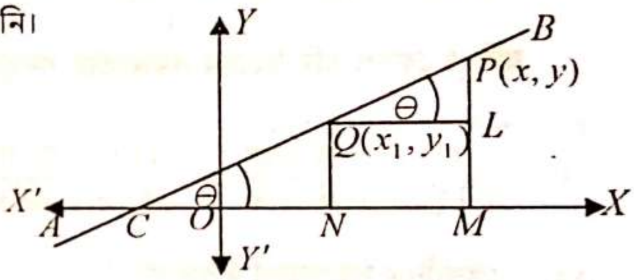
$\Rightarrow \dfrac{x\cos\alpha}{p}+\dfrac{y\sin\alpha}{p}=1 \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = \text{p}$; এখানে p সর্বদাই ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়।

যেমন, মূলবিন্দু হতে একটি রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ, $x\cos 45° + y\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x.\frac{1}{\sqrt{2}} + y.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \therefore\ x + y = 4$$

VIII দূরত্ব আকার সমীকরণ : একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=\text{r}$, যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r

মনে করি, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\angle BCX = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। ধরি, AB এর উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু এবং $QP = \text{r}$. P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN এবং Q বিন্দু হতে PM এর উপর QL লম্ব টানি।



$\therefore\ \angle PQL = \theta$

এখন, $QL = NM = OM - ON = x - x_1$,

$PL = PM - LM = PM - QN = y - y_1$

আবার, $\sin\theta = \dfrac{PL}{PQ} \Rightarrow \dfrac{PL}{\sin\theta} = PQ \Rightarrow \dfrac{y-y_1}{\sin\theta} = \text{r}$

এবং $\cos\theta = \dfrac{QL}{PQ} \Rightarrow \dfrac{QL}{\cos\theta} = PQ \Rightarrow \dfrac{x-x_1}{\cos\theta} = \text{r}$

$\therefore\ \dfrac{x-x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y-y_1}{\sin\theta} = \text{r}.$

বি.দ্র. : আমরা পাই, $x = x_1 + \text{r}\cos\theta$, $y = y_1 + \text{r}\sin\theta$ । সুতরাং, রেখাটির উপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1 + \text{r}\cos\theta,\ y_1 + \text{r}\sin\theta)$

যেমন, $(-2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $120°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x+2}{\cos 120^0} = \dfrac{y-3}{\sin 120^0} \Rightarrow \dfrac{x+2}{-1/2} = \dfrac{y-3}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow \sqrt{3}(x+2) = -(y-3) \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 3 - 2\sqrt{3}$

১০. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

a, b, c ধ্রুবকগুলির a ও b উভয়ই শূন্য না হলে, x ও y সমন্বিত এক ঘাত সমীকরণ $ax + by + c = 0$ সর্বদাই একটি সরলরেখা সূচিত করে এবং ইহাকে সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ বলা হয়।

মনে করি, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি $ax + by + c = 0$ ... ... (1) রেখার সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত।

$\therefore\ ax_1 + by_1 + c = 0 \cdots (2)$, $ax_2 + by_2 + c = 0 \cdots\cdots (3)$, $ax_3 + by_3 + c = 0 \cdots (4)$

বজ্রগুণন সূত্রের সাহায্যে (3) ও (4) সমীকরণ হতে পাই, $\dfrac{a}{y_2-y_3}=\dfrac{b}{x_3-x_2}=\dfrac{c}{x_2y_3-x_3y_2}=\text{k}$ (ধরি)

$\therefore\ a=\text{k}(y_2-y_3),\ b=\text{k}(x_3-x_2),\ c=\text{k}(x_2y_3-x_3y_2)$

a, b, c এর মান সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$\text{k}x_1(y_2-y_3)+\text{k}y_1(x_3-x_2)+\text{k}(x_2y_3-x_3y_2)=0$

$\Rightarrow\ x_1(y_2-y_3)+x_3y_1-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2=0$

$\Rightarrow\ x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$; ইহা $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত নির্দেশ করে। কিন্তু বিন্দু তিনটি সমীকরণ (1) এর সঞ্চারপথে অবস্থিত।

অতএব, $ax+by+c=0$ সমীকরণটি সর্বদাই একটি সরলরেখা নির্দেশ করে এবং ইহা একটি সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি সরলরেখা $a_1x+b_1y+c_1=0\cdots(1)$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0\cdots(2)$ অভিন্ন হবে যদি ও কেবল যদি তাদের সমজাতীয় পদগুলির অনুপাত সমান হয়। অর্থাৎ যদি $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ হয়।

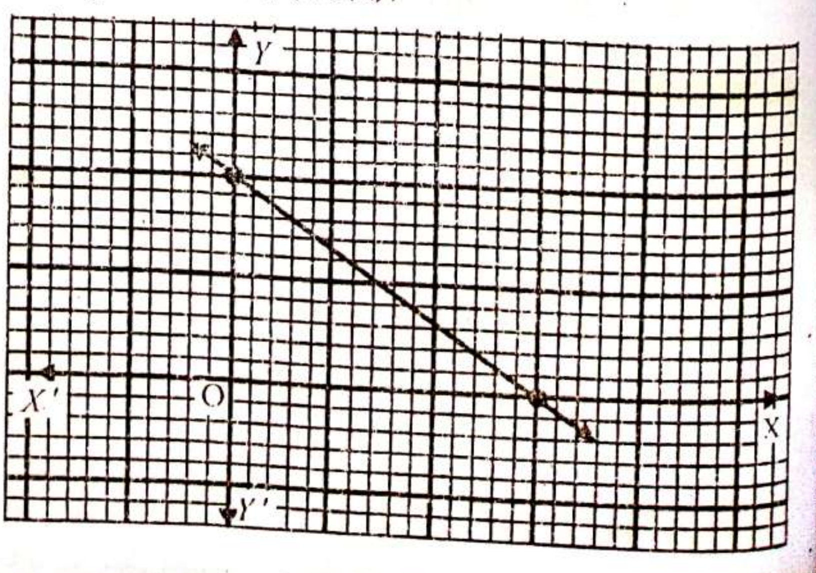
$$\left[\frac{(1)\text{ এ } x \text{ এর সহগ}}{(2)\text{ এ } x \text{ এর সহগ}}=\frac{(1)\text{ এ } y \text{ এর সহগ}}{(2)\text{ এ } y \text{ এর সহগ}}=\frac{(1)\text{ এ চলকবিহীন পদ}}{(2)\text{ এ চলকবিহীন পদ}}\right]$$

১১. লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন

$ax+by+c=0$ সরলরেখা লেখচিত্রে উপস্থাপন : (i) প্রদত্ত রেখাকে $y=\dfrac{1}{b}(-ax-c)$ বা $x=\dfrac{1}{a}(-by-c)$ আকারে প্রকাশ করে রেখাস্থ কয়েকটি (কমপক্ষে তিনটি) বিন্দু নির্ণয় করি অথবা (ii) প্রদত্ত রেখাকে ছেদক আকারে অর্থাৎ $\dfrac{x}{-c/a}+\dfrac{y}{-c/b}=1$ আকারে প্রকাশ করি যা x অক্ষকে $(-\dfrac{c}{a},0)$ ও y অক্ষকে $(0,-\dfrac{c}{b})$ বিন্দুতে ছেদ করে। অতপর একটি নির্ধারিত স্কেলে প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করি। এরূপে লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন করা যায়।

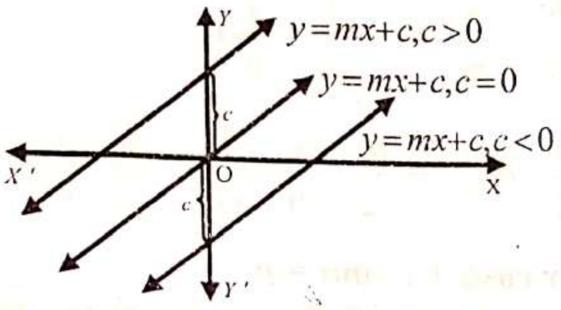
স্কেল নির্ধারণ : x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্কের জন্য একই অথবা ভিন্ন স্কেল নির্ধারণ করা যায়। রেখাস্থ প্রাপ্ত বিন্দুগুলি পূর্ণ সংখ্যা হলে যেকোনো স্কেল নির্ধারণ করে বিন্দুগুলিকে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করা যায়। ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে প্রতি একক = ভগ্নাংশ স্থানাঙ্কের ল.সা.গু. এর সমপরিমাণ সংখ্যক ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য।

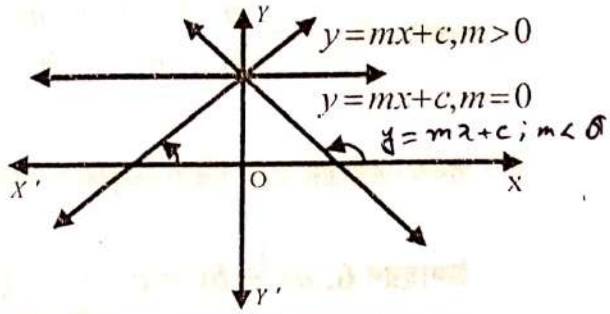
$2x+3y=5$ সরলরেখা লেখচিত্রে উপস্থাপন : প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হতে পাই, $\dfrac{x}{5/2}+\dfrac{y}{5/3}=1$; যা x অক্ষকে $(\dfrac{5}{2},0)$ ও y অক্ষকে $(0,\dfrac{5}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে। একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি। x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 6 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে



প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে $2x + 3y = 7$ সরলরেখা লেখচিত্রে উপস্থাপন করি।

বি.দ্র. $y = mx + c$ সাধারণ সমীকরণে , (i) $c = 0$ হলে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হবে; (ii) $c>0$ হলে y অক্ষকে ধনাত্মক দিকে c একক দূরে ছেদ করবে; (iii) $c < 0$ হলে y অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে c একক দূরে ছেদ করবে; (iv) $m = 0$ হলে রেখাটি x অক্ষ অথবা x অক্ষের সমান্তরাল হবে; $m > 0$ হলে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করবে; $m<0$ হলে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করবে।





১২. দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয়

দুইটি সরলরেখার একটি অনন্য (একটি ও কেবলমাত্র একটি) সাধারণবিন্দু থাকলে তারা পরস্পরকে ছেদ করে। রেখা দুইটির অসংখ্য সাধারণবিন্দু থাকলে তারা অভিন্ন হয় এবং কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হয়।

মনে করি, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু (α , β) । সুতরাং, (α , β) বিন্দুটি উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore \quad a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং $a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) কে বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে আমরা পাই, $\dfrac{\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{\beta}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

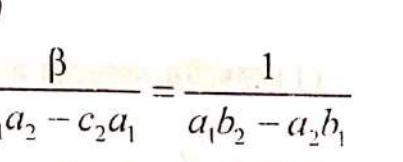
$\therefore \quad \alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \beta = \dfrac{c_1a_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ (এখানে, $a_1b_2 \neq a_2b_1$)

$\therefore$ **রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক** $(\alpha , \beta) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

লক্ষণীয়, $a_1b_2 = a_2b_1$ হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে এবং তাদের ছেদবিন্দু (point of intersection) থাকবেনা।

উদাহরণমালা

উদাহরণ–5: দেখাও যে, $y = mx$, $y = m_1x$ এবং $y = b$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\dfrac{b^2}{2}\left(\dfrac{1}{m} \sim \dfrac{1}{m_1}\right)$ বর্গ একক। **[ঢা.'০৯; মা.'০৭; কু.'১০,'১৫; দি.'১২; মা.'১৩]**



সমাধান : মনে করি, OAB ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$OA \equiv y - mx = 0 \cdots\cdots(1)$, $OB \equiv y - m_1x = 0 \cdots\cdots(2)$

এবং $AB \equiv y - b = 0 \cdots\cdots(3)$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু O(0 , 0)

(1) ও (2) এ (3) হতে $y = b$ বসিয়ে পাই, $x = \frac{y}{m} = \frac{b}{m}$ এবং $x = \frac{y}{m_1} = \frac{b}{m_1}$

$\therefore$ (1) ও (3) এর ছেদবিন্দু A$(\frac{b}{m}$, b) এবং (2) ও (3) এর ছেদবিন্দু B $(\frac{b}{m_1}, b)$

এখানে $\delta_{OAB} = \begin{vmatrix} 0 & b/m & b/m_1 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{b^2}{m} - \frac{b^2}{m_1} = b^2(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_1})$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \mid \delta_{OAB} \mid = \frac{b^2}{2} \mid \frac{1}{m} - \frac{1}{m_1} \mid = \frac{b^2}{2}(\frac{1}{m} \sim \frac{1}{m_1})$ বর্গ একক।

উদাহরণ 6. $ax + by = c$ ⋯ ⋯ (i) এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ ⋯ ⋯ (ii)

(a) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (2,3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু.'১৫]

(b) (i) ও (ii) একই সরলরেখা নির্দেশ করলে a, b ও p এর মাধ্যমে অক্ষদ্বয় দ্বারা রেখাটির খন্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

[সি.'১০; ঢা.'০৪; রা.'০৭; ব.'০৯; দি.'১৩]

(c) a = 3, b = 4, c = 25 *হলে* (i) রেখার উপর (– 5, 10) বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(a) সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ⋯ ⋯ (1)

(1) রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$ এবং $\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12$

[MCQ এর জন্য, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{2 \times 2} + \frac{y}{2 \times 3} = 1$]

(b) সমাধানঃ $ax + by = c$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করবে যদি $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{p}$ হয়।

$\therefore$ $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{c}{p} \Rightarrow c \cos\alpha = pa$ ⋯⋯⋯ (i) এবং $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{p} \Rightarrow c \sin\alpha = bp$ ⋯⋯ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow c^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = p^2(a^2 + b^2) \Rightarrow c^2 = p^2(a^2 + b^2)$ ⋯⋯ (iii)

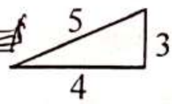
এখন, $ax + by = c \Rightarrow \frac{x}{c/a} + \frac{y}{c/b} = 1$

$\therefore$ অক্ষদ্বয় দ্বারা রেখাটির খন্ডিতাংশ $= \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} = \sqrt{c^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$

$= \sqrt{p^2(a^2+b^2)(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2})}$, [(iii) দ্বারা]

$= \frac{p(a^2+b^2)}{ab}$ বর্গ একক।

(c) সমাধান : মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।



$\therefore \tan\alpha = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

অথবা, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $\frac{x+5}{\cos\alpha} = \frac{y-10}{\sin\alpha} = 10$

$\therefore x + 5 = 10\cos\alpha \Rightarrow x = 10\cos\alpha - 5$ এবং $y - 10 = 10\sin\alpha \Rightarrow y = 10\sin\alpha + 10$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ এর জন্য, $x = 10 \times -\frac{4}{5} - 5 = -8 - 5 = -13$ এবং

$$y = 10 \times \frac{3}{5} + 10 = 6 + 10 = 16$$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ এর জন্য, $x = 8 - 5 = 3$ এবং $y = -6 + 10 = 4$

$\therefore$ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-13, 16)$ এবং $(3, 4)$

প্রশ্নমালা III E

1. (a) x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $(3, -4)$ ও $(4, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। উত্তর : -1

(c) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।

(d) একটি সরলরেখার সমীকরকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে অবস্থিত।

উত্তর : **(c)** $y = -4$ **(d)** $x = 5$

(e) x –অক্ষের সমান্তরাল ও $(3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $y = -4$

(f) (a, b) এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $bx - ay = 0$

(g) (a, b) এবং $(a+b, a-b)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $(2b-a)x + by + a^2 - 2ab - b^2 = 0$

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদাংশ 5 একক। উত্তর : $12y = 5x + 60$

3. (a) A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, – 2) বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $6x + 2y - 17 = 0$ [কু.'১৪; ঢা.'১১; মা.বো.'০৭; য.'০৯]

(b) (2, 4), (– 4, – 6) এবং (6, – 8) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির মধ্যমাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $11x - y - 18 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$ [চ.'০৭]

(c) A(h, k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর এবং B(k , h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + y - 6 = 0$ [ঢা.,চ.'১২,'১৪; ব.'১০; রা.,য.'১১; সি.,য.'১৪]

(d) যদি (a, b), (a', b'), $(a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab' = a'b$. [কু.'০৯]

4. (a) $x - 4 = 0$, $y - 5 = 0$, $x + 3 = 0$ এবং $y + 2 = 0$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন চর্তুভুজের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$ [ঢা.'১২; চ.'০৫; কু.'০৯; ব.'১৪]

(b) $x = 4$, $x = 8$, $y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x - y + 2 = 0$, $x + y - 14 = 0$ [চ.'০২]

5. (a) $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। [চুয়েট'০৪-০৫]

(b) $3x - 4y = 12$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এবং α এর মান নির্ণয় কর। উত্তর : (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{12}{5}$, $2\pi - \tan^{-1}(\frac{4}{3})$

6. (a) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x + y = \alpha + \beta$ বা, $x - y = \alpha - \beta$ [কু.'০৪; দি.'১১]

(b) একটি সরলরেখা (2 , 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি 15 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x + y = 10$ বা, $3x + 2y = 18$ [মা.বো.'০৪,'০৮]

(c) একটি সরলরেখা (1, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $4x + y = 8$ [ব.'০৬; চ.'১০; কু.'১২]

(d) একটি সরলরেখা (3, 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y + 4 = 0$ [চ.'০১]

7. (a) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরি উক্ত খন্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তরঃ $(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{4})$, $61\frac{1}{4}$ বর্গ একক

[ঢা.'০৭; চ.'০৮; রা.'১০;ব. '০৫,'১২; য.'১৩; দি.'১০; সি.'১৪; মা.'১২]

(b) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (6 , 2) বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x + 2y = 10$ [ব.'০৪,'০৭; রা. '০৮,'১৫;দি.'১১]

(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

উত্তরঃ $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ [সি.'০৫; য.'১০]

8. (a) P ও Q বিন্দুদ্বয় x-অক্ষের উপর এবং R ও S বিন্দুদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত। PR ও QS এর সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ ও $x + 2y - 1 = 0$ হলে, দেখাও যে, PQ = RS. [ঢা. '০৪; য.'১৫]

(b) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA + 2.OB = 0 হয়, যখন O মূলবিন্দু। উত্তর : $x - 2y - 8 = 0$

[ঢা.'০৬,'১৩; য.'০৬,'১২; চ.'০৬; সি.'০৭; ব.'০৮,'১০,'১৫; দি.'১৪,'১৫]

(c) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA – OB = 2 হয়, যখন O মূলবিন্দু। উত্তর : $2x + 3y = 12$ এবং $x - y = 1$

[য.'১০,'১২; ব.'০৫; রা. '০৯, '১২; চ., দি.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৪]

(d) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$. [রা.'১০]

9. $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের ত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x = 6y, 2x = 3y$ [ঢা.'০৫; সি.'০৯; রা.'১০; কু.'০৭; য.'১৪]

10. (a) $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর : $3/2$ বর্গ একক। [য.'০৩]

(b) দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক।

[য. '০৫; রা.'০৮; কু.'১২; ব.'১৩]

11. (a) দেখাও যে, $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোনো রেখাংশকে $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি সমদ্বিখন্ডিত করে।

[ঢা.'০৯; চ.'১১; দি.'১২]

(b) মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x - \sqrt{3}y + 10 = 0$ [মা.বো.'০৮]

12. (a) $(2, -1)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$. এ রেখার উপর $(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(14, -10), (-10, 8)$

(b) $A(3, -\frac{7}{2})$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$। রেখাটির উপরস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যেন $AP = \frac{13}{2}$ হয়।

উত্তরঃ $(9, -1), (-3, -6)$.

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

13. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ ছেদ করে ।

উ: $y = \pm\sqrt{3}x + 5$ (২)

14. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের গুণফল 1 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + 4y = 2$ or $x + 9y + 3 = 0$ (৪)

15. একটি সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি ও অন্তরফল যথাক্রমে 9 ও 5 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x + 2y = 6$ or $7x + 2y = 14$ (২)

16. $2x + y = 3$ ও $3x - 5y = -4$ রেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (৪) উ: $\frac{289}{156}$ বর্গ একক

17. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমীকরণ $x + 2y = 4$, $2x - y = 3$ ও $x - y + 2 = 0$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক। (৪)

18. দেখাও যে, $2x + 7y = 14$ ও $2x - 7y = 14$ রেখাদ্বয় y-অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। (৪)

19. $x + ay = a$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA = 3.OB$ হয়, যখন 0 মূলবিন্দু। P এর স্থানাঙ্ক $(0, -9)$ হলে, AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x - y = 9$ ৪)

20. t এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t + 5, 2t - 4)$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। উ: $2x - y = 14, 7, -14$ (৪)

21. $(-1,1)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. এ রেখার উপর $(-1, 1)$ বিন্দু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ: $(23,11)$ ও $(-25,-9)$ (৪)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

22. একটি সরলরেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

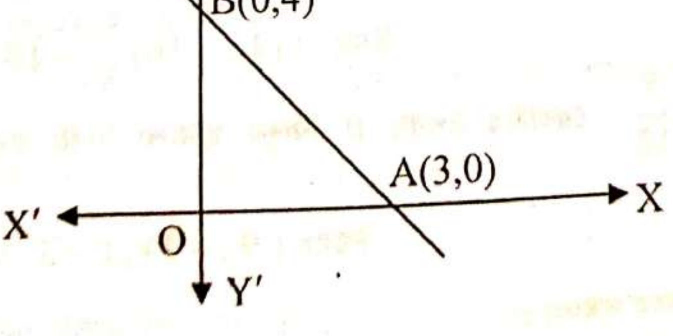
(a) মূলবিন্দুগামী একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(b) AB সরলরেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $9x - 20y + 96 = 0$ [কু.'০৬; সি.'১১; ব.'১৩]

(c) AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

উত্তরঃ $x + y + 4 = 0$ বা, $x + y - 4 = 0$ [চ.'০৬,'১৩; দি.'১৩; রা.'কু.'১৪]

23.



(a) ΔAOB এর ভারকেন্দ্র G হলে AG নির্ণয় কর। উ: $\frac{2\sqrt{13}}{3}$ একক।

(b) P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করলে ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(c) AB রেখাস্থ A বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উ: $(-3, 12)$ ও $(9, -12)$

১৩. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার সমীকরণঃ

মনে করি, $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1)$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots (2)$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (x_1, y_1).

$\therefore \quad a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$ এবং $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$

যেকোনো ধ্রুবক k $(k \neq 0)$ এর জন্য, $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ সমীকরণটি (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু (x_1, y_1) দ্বারা সিদ্ধ হয়, এবং ইহা x ও y এর এক ঘাত বিশিষ্ট বলে একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

সুতরাং, k এর যেকোনো অশূন্য মানের জন্য $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ ও $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1 + k(a_2x+b_2y+c_2) = 0 \cdots (3)$

বি.দ্র.: (i) k এর ভিন্ন ভিন্ন মনের জন্য সমীকরণ (3) ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখা নির্দেশ করে এবং প্রত্যেক রেখাই (1) ও (2) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগমী। (ii) অসংখ্য রেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \cdots\cdots (1)$ সরলরেখাটি (α, β) বিন্দুগামী হলে,

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 + k(a_2\alpha + b_2\beta + c_2) = 0 \Rightarrow k = -\frac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\alpha + b_1\beta + c_2}$$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $a_1x + b_1y + c_1 - \dfrac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

$$\Rightarrow a_1x + b_1y + c_1 = \frac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}(a_2x + b_2y + c_2) \Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}$$

$\therefore (\alpha, \beta)$ এবং $f(x, y) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{f(x,y)}{f(\alpha,\beta)} = \dfrac{g(x,y)}{g(\alpha,\beta)}$, যখন $f(\alpha,\beta) \neq 0$ এবং $g(\alpha,\beta) \neq 0$

যেমন, যে সরলরেখা (3 , 4) বিন্দু এবং $2x + 4y - 7 = 0$ ও $3x - 5y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ $\dfrac{2x + 4y - 7}{2\times3 + 4\times4 - 7} = \dfrac{3x - 5y + 6}{3\times3 - 5\times4 + 6} \Rightarrow \dfrac{2x + 4y - 7}{15} = \dfrac{3x - 5y + 6}{-5}$

$$\Rightarrow 9x - 15y + 18 = -2x - 4y + 7 \Rightarrow 11x - 11y + 11 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

উদাহরণ –1: y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছিদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[সি.'১১; ঢা.'০৯; রা.'০৮; চ.'০৮;য.'১০,'১২]**

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ $2x - 7y + 11 + k(x + 3y - 8) = 0$

$$\Rightarrow (2 + k)x + (-7 + 3k)y + 11 - 8k = 0$$

রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল বলে, y এর সহগ $(-7 + 3k) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{7}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x - 7y + 11 + \dfrac{7}{3}(x + 3y - 8) = 0$

$$\Rightarrow 6x - 21y + 33 + 7x + 21y - 56 = 0 \Rightarrow 13x - 23 = 0 \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প পদ্ধতি : $2x - 7y + 11 = 0$ ও

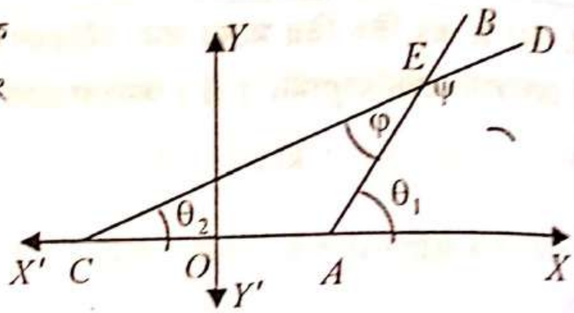
$x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\frac{56-33}{6+7}, \frac{11+16}{6+7}) = (\frac{23}{13}, \frac{27}{13})$

$\therefore$ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $(\frac{23}{13}, \frac{27}{13})$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $x = \frac{23}{13} \Rightarrow 13x - 23 = 0$ (Ans.)

১৪. দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখার উভয়ই y-অক্ষের অসমান্তরাল হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ :

(i) মনে করি, AB এবং CD সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = m_1 x + c_1$ এবং $y = m_2 x + c_2$ তারা পরস্পরকে E বিন্দুতে এবং x-অক্ষকে যথাক্রমে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, AB ও CD রেখাদ্বয় x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণ উৎপন্ন করে এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ φ অর্থাৎ $\angle AEC = \varphi$.



তাহলে, $\tan\theta_1 = m_1$, $\tan\theta_2 = m_2$ এবং

$\theta_1 = \theta_2 + \varphi \Rightarrow \varphi = \theta_1 - \theta_2$

$$\therefore \tan\varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

কিন্তু, $\angle AED = \psi$ কোণের জন্য, $\tan\psi = \tan(\pi - \varphi) = -\tan\varphi = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \psi = \tan^{-1}(-\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2})$

$\therefore$ $\boldsymbol{y = m_1 x + c_1}$ ও $\boldsymbol{y = m_2 x + c_2}$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \pm\tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

(ii) সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ও $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ হলে,

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \text{ এবং } m_2 = -\frac{a_2}{b_2} \quad \therefore \tan\theta = \pm\frac{-\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + (-a_1/b_1)(-a_2/b_2)} = \pm\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$$

উদাহরণ-2: দুইটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'১০; কু.'০৬,'১৩; দি.'১১; প্র.ভ.প.'০৭]

সমাধান : মনে করি, (3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - 4 = m(x - 3) \cdots (1)$; এখানে m রেখাটির ঢাল।

আবার, $x - y + 4 = 0$ রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-1} = 1$, $\quad$ [ঢাল $= -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$]

(1) রেখাটি প্রদত্ত রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan 60° = \pm\frac{m-1}{1+m} \Rightarrow \sqrt{3} = \pm\frac{m-1}{1+m}$$

" + " নিয়ে, $m - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}m \Rightarrow (1 - \sqrt{3})m = \sqrt{3} + 1$

$\Rightarrow \quad m=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{-2}=-(2+\sqrt{3})$

$\therefore$ (1) এ $m=-(2+\sqrt{3})$ বসিয়ে পাই, $y-4=-(2+\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow \quad y-4=-(2+\sqrt{3})x+6+3\sqrt{3} \Rightarrow (2+\sqrt{3})x+y=10+3\sqrt{3}$

আবার, " – " নিয়ে, $m-1=-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,m \Rightarrow (\sqrt{3}+1)m=-(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow \quad m=-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=-\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=-(2-\sqrt{3})$

(1) এ $m=-(2-\sqrt{3})$ বসিয়ে পাই, $y-4=-(2-\sqrt{3})(x-3)$

$\Rightarrow \quad y-4=-(2-\sqrt{3})x+6-3\sqrt{3} \Rightarrow (2-\sqrt{3})x+y=10-3\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা দুইটির সমীকরণ $(2+\sqrt{3})x+y=10+3\sqrt{3}$ এবং $(2-\sqrt{3})x+y=10-3\sqrt{3}$

১৫. দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্তঃ

(i) দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্তঃ

যদি দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হয় তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta=0^\circ$ এবং তখন $\tan\theta=0$.

$\therefore \quad y=m_1x+c$ ও $y=m_2x+c$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=0 \Rightarrow m_1-m_2=0 \therefore m_1=m_2$

অনুরূপভাবে, $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ ও $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে,

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore$ $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ **রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি** $m_1=m_2$ **হয় এবং** $a_1x+b_1y+c_1=0$ **ও** $a_2x+b_2y+c_2=0$ **রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি** $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ **হয়।**

(ii) দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্তঃ [ব.'১৫]

যদি দুইটি সরলরেখা লম্ব হয় তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\varphi=90^\circ$ এবং তখন $\tan\varphi=\tan 90^\circ$, যা অসংজ্ঞায়িত।

কিন্তু $\cot\varphi=\cot 90^\circ=0$

অতএব, $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে, $\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}=0 \Rightarrow m_1m_2=-1$

অনুরূপভাবে, $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে,

$$(-\frac{a_1}{b_1})\times(-\frac{a_2}{b_2})=-1 \Rightarrow a_1a_2=-b_1b_2 \quad \therefore a_1a_2+b_1b_2=0$$

$\therefore$ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয় লম্ব হবে যদি $m_1m_2 = -1$ হয় এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় লম্ব হবে যদি $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হয়।

১৬. **বিভিন্ন শর্তাধীনে সরল রেখার সমীকরণ:**

(i) প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ:

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল সমান বলে তাদেরকে (a) $y = mx + c_1$ এবং $y = mx + c_2$ (i) $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ আকারে লেখা যায়।

স্পষ্ট যে, দুইটি রেখার সমীকরণে কেবল ধ্রুবক পদের পার্থক্য হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হয়।

সুতরাং, $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণকে $ax + by + \mathrm{k} = 0$ বা $ax + by = \mathrm{k}$ আকারে লেখা যায়; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathrm{ax + by + c = 0}$ এর সমান্তরাল এবং (α, β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $ax + by = a\alpha + b\beta$

প্রমাণ: মনে করি, $ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $ax + by = \mathrm{k}$ ……(1)

(1) রেখাটি (α, β) বিন্দুগামী হলে আমরা পাই, $a\alpha + b\beta = \mathrm{k}$

$\therefore$ (1) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $ax + by = a\alpha + b\beta$

(ii) প্রদত্ত সরলরেখার লম্ব সরলরেখার সমীকরণ:

দুইটি লম্বরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হওয়ায় $y = \mathrm{m}x + \mathrm{c}$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ $y = -\dfrac{1}{m}x + \mathrm{k}$; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

আবার, $ax + by = \mathrm{c} \Rightarrow y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ এর লম্বরেখার সমীকরণ $y = \dfrac{b}{a}x + k_1 \Rightarrow bx - ay + ak_1 = 0$

$\Rightarrow bx - ay + \mathrm{k} = 0$……(1) ; যেখানে, k_1 এবং $\mathrm{k} = ak_1$ ধ্রুবক।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণে x ও y এর সহগ দুইটি পরস্পর বিনিময় করে এদের যেকোনো একটির চিহ্ন এবং ধ্রুব পদের পরিবর্তন করলে ঐ রেখার উপর লম্ব যেকোনো রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়।

(1) রেখাটি (α, β) বিন্দুগামী হলে, $b\alpha - a\beta + \mathrm{k} \Rightarrow \mathrm{k} = -(b\alpha - a\beta)$

$\therefore$ (1) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $bx - ay - (b\alpha - a\beta) = 0 \Rightarrow bx - ay = b\alpha - a\beta$

$\therefore$ $ax + by + \mathrm{c} = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং (α, β) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $bx - ay = b\alpha - a\beta$.

বি.দ্র. : (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ, $y - y_1 = -\dfrac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$

উদাহরণ-3: AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ ও $y = 4x - 1$ । AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০৬; সি.'০৮; কু.'১২; ব.'১২,'১৫; য.'১৩]

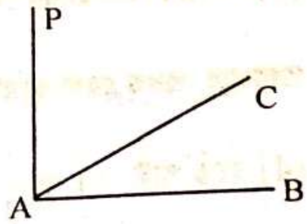
সমাধান : মনে করি, $\mathrm{AB} \equiv 2x - y + 1 = 0$ ও $\mathrm{AC} \equiv 4x - y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী AP রেখাটির সমীকরণ, $2x - y + 1 + \mathrm{k}(4x - y - 1) = 0$

$\Rightarrow (2+4k)x + (-1-k)y + 1 - k = 0$

AP, AB এর উপর লম্ব।

$\therefore\ 2(2+4k) + (-1)(-1-k) = 0 \quad [a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow 4 + 8k + 1 + k = 0 \Rightarrow 9k = -5 \Rightarrow k = -\frac{5}{9}$



$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $2x - y + 1 + (-\frac{5}{9})(4x - y - 1) = 0 \Rightarrow 18x - 9y + 9 - 20x + 5y + 5 = 0$

$\Rightarrow -2x - 4y + 14 = 0 \Rightarrow x + 2y = 7$

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, $AB \equiv y = 2x + 1 \cdots\cdots(1)$ এবং $AC \equiv y = 4x - 1 \cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) হতে, $2x + 1 = 4x - 1 \Rightarrow x = 1$ এবং $y = 2 + 1 = 3$

$\therefore$ AB ও AC রেখা দুইটি A(1 , 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

A(1, 3) বিন্দুগামী এবং $AB \equiv 2x - y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব AP রেখাটির সমীকরণ,

$x + 2y = 1 + 2 \times 3 \Rightarrow x + 2y = 7$ (Ans.)

(iii) তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্তঃ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ সরলরেখা তিনটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে (x_1, y_1) বিন্দুটি প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore\ a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \cdots\cdots(1),\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0 \cdots\cdots(2),\ a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = 0 \cdots\cdots(3)$

(1) , (2) এবং (3) হতে x_1, y_1 অপনায়ন করে আমরা পাই, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, **যা নির্ণেয় শর্ত।**

উদাহরণ -4 : $x - 3y + 2 = 0,\ x - 6y + 3 = 0,\ ax + by + 1 = 0$ ও $x + ay = 0$ সরলরেখাগুলি সমবিন্দু হলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। **[ব.'০৩]**

সমাধান: $x - 3y + 2 = 0 \cdots(1)\quad x - 6y + 3 = 0 \cdots(2)\quad ax + by + 1 = 0 \cdots(3)$ ও $x + ay = 0 \cdots(4)$ রেখাগুলি সমবিন্দু।

$\therefore$ (1), (2) ও (4) হতে পাই, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -6-a & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9 - 6 - a = 0 \quad \therefore a = 3.$

আবার,(2), (3) ও (4) হতে পাই, $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ a & b & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 3 & b & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(-6 - 3b) - 3(1 - 9) = 0 \Rightarrow -6 - 3b + 24 = 0 \therefore b = 6$

বিকল্প পদ্ধতি: প্রদত্ত রেখাগুলি, $x - 3y + 2 = 0 \cdots(1)\quad x - 6y + 3 = 0 \cdots(2)\quad ax + by + 1 = 0 \cdots(3)$ ও $x + ay = 0 \cdots(4)$

$(1) - (2) \Rightarrow 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$\therefore$ (1) হতে পাই, $x - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\therefore$ (1) ও (2) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(-1, \frac{1}{3})$

প্রশ্নমতে, প্রদত্ত রেখা চারটি সমবিন্দু বলে (3) ও (4) রেখাদ্বয় $(-1, \frac{1}{3})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore$ (4) হতে পাই, $-1 + \frac{1}{3}a = 0 \Rightarrow a = 3$ এবং

(3) হতে পাই, $3(-1) + b.\frac{1}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}b = 2 \Rightarrow b = 6$

উদাহরণ-5: A(2 , 1) ও B(5 , 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য.'০৮; চ.'০৮; রা.'১১; ব.'০৭; ঢা.'১০]

সমাধান : AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ এবং AB রেখার ঢাল $= \frac{1-2}{2-5} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ AB এর উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -3$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y - \frac{3}{2} = -3\ (x - \frac{7}{2}) \Rightarrow 2y - 3 = -6x + 21$

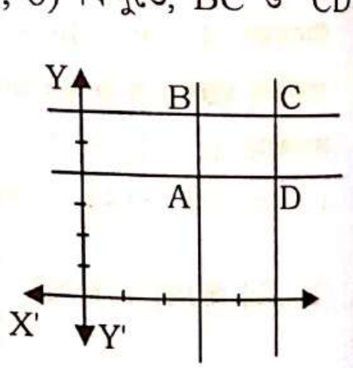
$$\Rightarrow 6x + 2y = 24 \Rightarrow 3x + y = 12 \text{ (Ans.)}$$

এখন, $3x + y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$

$\therefore$ রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক (0 , 12)

উদাহরণ- 6: $x = 3, x = 5, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন বর্গের কর্ণ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৫,'১১; সি.'০৫; রা.'০৭; ব.'০৭]

সমাধান : ধরি, $AB \equiv x = 3$, $DC \equiv x = 5$, $BC \equiv y = 6$ এবং $AD \equiv y = 4$ রেখা চারটি ABCD বর্গের বাহু। AB ও AD বাহুদ্বয় A(3, 4) বিন্দুতে , AB ও BC বাহুদ্বয় B(3, 6) বিন্দুতে, BC ও CD বাহুদ্বয় C(5, 6) বিন্দুতে, CD ও AD বাহুদ্বয় D(5 , 4) বিন্দুতে ছেদ করে।



$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ $(x - 3)(4 - 6) - (y - 4)(3 - 5) = 0$

$[(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow (x - 3).(-2) - (y - 4)(-2) = 0 \Rightarrow x - 3 - y + 4 = 0$

$\Rightarrow x - y + 1 = 0$

BD কর্ণের সমীকরণ $(x - 3)(6 - 4) - (y - 6)(3 - 5) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(2) - (y - 6)(-2) = 0\ \ x - 3 + y - 6 \Rightarrow x + y - 9 = 0$

প্রশ্নমালা III F

1. (a) মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫,'০৭]

(b) দেখাও যে, k এর সব মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা $(3 + 2k)x + 5ky - 3 = 0$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নিণয় কর। উত্তর : (a) $x - y = 0$ (b) $(1, -2/5)$ [রা.'০৩]

2. (a) $x - 2y - 1 = 0$ ও $2x + 3y + 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $\tan 45°$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $7x - 7y - 3 = 0$ **[কু.'০৮,'০৯]**

(b) $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[ঢা.'১২ ; বুয়েট'০৭-০৮]**

উত্তর : $7x - 7y + 12 = 0, 2x + 2y - 1 = 0$

(c) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $4x + 5y = 0.$ **[কু.'১১]**

3. **(a)** দুইটি সরলরেখা $(6, 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x + 4y = 11$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $x - 7y + 43 = 0, 7x + y - 49 = 0$ **[রা.'১১,'১৩; চ.'১১; ব.'১৩]**

(b) দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে। **[রা.'১০; ব.'১১; সি.'০৭,'১২,'১৪; মা.'০৯,'১৫; য.'১১,'১৪; য.,দি.'১৩; কু.'১৫]**

উত্তর : $2x + y = 0, x - 2y + 5 = 0$।

4. **(a)** $(4 , -3)$ বিন্দুগামী এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[সি.'০৬]**

(b) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[চ.'০৪; ব.'০৪; মা.বো.'০৭; ব.'১০; দি.'১৪]**

(c) x- অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৭; সি.'১০]**

উত্তর : (a) $2x + 11y + 25 = 0$, (b) $5x - 1 = 0$, (c) $y - 1 = 0$

5. **(a)** দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। **[চ.'০৬; সি.'০৬; ব.'১৪]**

উত্তর : $x + y - 9 = 0$ এবং $x - y - 1 = 0.$

(b) যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ ও $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হয় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল হয় , তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। উত্তর : $a = \frac{17}{4}, b = \frac{17}{3}$

[ঢা'১২; সি.'১৩]

(c) $3x - 4y + 1 = 0$ ও $5x + y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $23x + 23y = 11$ **[রা.'০২]**

(d) A(1 , 1) , B(3 , 4) ও C(5 , −2) বিন্দুগুলি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, সরলরেখাটি BC এর সমান্তরাল। **[চ.,দি.'১০; ঢা.'১১]**

উত্তর : $6x + 2y = 17$

6. **(a)** $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y = 2$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $11x - 2y - 50 = 0$ **[ব.'১২; কু.'১৪; মা.'১২,'১৪,'১৫]**

(b) $(2 , 5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 12y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $12x - 3y - 9 = 0$ [কু.'০৫; চ.'১৪]

7. (a) মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখা এবং $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা পরস্পর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = b\,x_1$. [চ.'০৩; রা.'০৪,'১৩; ব.'০৬; ঢা.'১৩]

(b) $(2, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপর (x, y) যেকোনো একটি বিন্দু এবং রেখাটি $(-1, 2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $2x - y - 1 = 0$.

(c) $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ ও $C(5, -2)$ বিন্দুগুলি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - 3y + 2 = 0$ [প্র.ভ.প.'০৪]

8. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x-অক্ষের ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উত্তর : $ax + by = a^2$ [চ.'০২; ব.'০৫; কু.'০৮,'১০;ঢা.'১৫]

(b) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 2y = 9$ ও $2x + 3y = 11$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথম রেখার উপর লম্ব হয়। উত্তর : $2x - 3y + 7 = 0$ [ব.'০২]

9. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(1, 2)$ ও $(4, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $3 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঐ রেখার উপর লম্ব হয়। উত্তর : $2x + 2y = 15$

(b) $P(h, k)$ বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PA ও PB লম্ব । P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $hx - ky = h^2 - k^2$.

(c) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x + 7y = 11$ রেখার উপর লম্ব এবং y-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তন করে। উত্তর : $7x - 4y \pm 8 = 0$

10. (a) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x + y + 4 = 0$ রেখা হতে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : 3 একক। [রা.'০২; য.'০৮]

(b) যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x + 5y - 11 = 0$ রেখা হতে $(-1, 1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $5/3$ একক।

(c) যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x - 4y = 15$ রেখা হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $\sqrt{10}$ বা, $3\sqrt{10}$ একক।

11. (a) $(8, 5)$ ও $(-4, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $3x + 2y - 8 = 0$ [রা.'১২; ঢা.'০৬; কু.'০৬; সি.'০৯,'১৩; চ.'১২]

(b) $(2, 1)$ ও $(6, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৬] উত্তর : $y + 2x = 10$

12. (a) $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর। [য.'০৯; রা., ব.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৩; সি.,'০৯,'১৫]

(b) $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য.'১২; সি.'০৭,'১২; ঢা.'০৮,'১৪; কু.'০৪; চ.'০৭,'১০; মা.বো.'০৮,'০৯; রা.'১২; দি.'১২]

(c) $(3, 1)$ বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(d) P(h , k) বিন্দু হতে মূলবিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উত্তর : (a) $(\frac{2}{5},\frac{9}{5})$; 2 (b) $(\frac{1}{5},\frac{7}{5})$ (c) $(\frac{7}{5},\frac{1}{5})$ (d) $x^2+y^2=hx+ky$

13. (a) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু।

উত্তর : $y + 2 = 0$ **[কু.'০৫; ঢা.'০৭; ব.'০৮]**

(b) $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : 6a – 4b = 1 **[য.'০৯,'১৩; দি.'১১; চ.'১২]**

14. (a) দেখাও যে, $x = t$, $y = 2t + 1$ এবং $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখা দুইটি পরস্পরকে (– 2 , – 3) বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

[ব.'১১]

(b) OABC একটি সামান্তরিক। x-অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4 , 2). A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : (3 , 0), (1 , 2) ; $x + y - 3 = 0$ **[রা.'১৩; য.'০৭; ঢা.'০৮; সি.'০৮; চ.'১১; দি.'১৪; ব.'১৪]**

(c) A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, – 2), (– 3 , 0) ও (5 , 6). প্রমাণ কর যে, AB ও AC রেখদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তরঃ (1 , 8) **[য.'০৪]**

(d) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(6 , 1) ও B(1, 6) এবং এর লম্ববিন্দু P(3 , 2) ; অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : (– 2 , – 3) **[ঢা.'০৪]**

15. (a) $4x + 7y - 12=0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ (3,2) বিন্দুতে অবস্থিত। এ বিন্দুটি দিয়ে অতিক্রমকারী বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উঃ $3x - 11y + 13 = 0$; $11x + 3y + 39 = 0$

(b) দেখাও যে, $2x + y + 5 = 0$ ও $x - 2y - 3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব। রেখা দুইটিকে কোনো আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে এবং অপর বাহু দুইটি (3 , 4) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $2x + y = 10$, $2y = x + 5$.

(c) ABCD সামান্তরিকের AB , BC বাহু দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $x - y + 1= 0$, $x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2 , – 4) হলে AD ও DC এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y - 6 = 0$; $2x + y = 0$.

(d) A(3, – 1), B(– 2 , 3) বিন্দু দুইটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং তার লম্ব বিন্দুটি মূলবিন্দুতে । অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(-\frac{36}{7},-\frac{45}{7})$

(e) ABCD রম্বসের দুইটি বাহু x – y = 5 ও 7x – y = 3 এর সমান্তরাল, কর্ণদ্বয় (2, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু x- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে A এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : (4, 0) বা, (3/2, 0)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

16. $4x - 3y - 1 = 0$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উ: $x + y = 2$, $x - y = 0$ (৩)

17. $2x + 3y - 1= 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০৪]** (২)

উ: $\tan^{-1}\frac{7}{4}$

18. k-এর মান কত হলে $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে? উ: $\frac{8}{5}$ (১)

19. $5x - 3y - 7 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $13x - y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $13x - y - 25 = 0$ (৩)

20. k এর মান কত হলে $2x - y + 7 = 0$ ও $3x + ky - 5 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে ? উ: 6 (১)

21. $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং $(5, 7)$ ও $(-6, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সীকরণ নির্ণয় কর। উ: $11x + 4y = 10$ (৩)

22. এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y + 4 = 0$ ও $3x + 4y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়। উ: $7x + 6y - 85 = 0$ (৩)

23. $(2, 5)$ ও $(5, 6)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তা $(-4, 5)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব। (৪)

24. $(-3, -2)$ বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুগামী এবং এই দুইটি রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখারও সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x - 2y + 5 = 0$, $19x + 9y = 0$ (৪)

25. $(1, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 8)$ বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু । বাহুগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর। (৩)
উ: $2x - 3y + 20 = 0$

26. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। উ: $x + y = 0$, $x - y + 2 = 0$ (৪)

27. দুইটি সরলরেখা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $x - 2y = 3$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে । রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $3x - y = 7$, $x + 3y = 9$ [য.'০৮] (৪)

28. দুইটি সরলরেখা $(6, -7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y + \sqrt{3}\,x = 1$ রেখার সঙ্গে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে । রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $y + 7 = 0$, $y + 7 = \sqrt{3}(x - 6)$ [ঢা.'০৫; দি.'০৯; কু.'১১] (৪)

29. দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3y = 2x$ রেখার সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $7x = 4y$, $x = 8y$ [ব.'১১] (৪)

30. $(1, 2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪] (২)
উ: $3x - 4y + 5 = 0$

31. $(2, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। (২)
উ: $3x + 2y = 0$ [কু.'০১; য.'০৭; মা.'০৩]

32. $P(4, 11)$ ও $Q(-2, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। (৩)
উ: $4x + 6y - 43 = 0$ [প্র.ভ.প. '০৪]

33. দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ
$$(a - c)x + (b - d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$$
[ব.'০১] (৪)

34. $2x + by + 4 = 0$, $4x - y - 26 = 0$, $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর।
[প্র.ভ.প.'০১] (২)

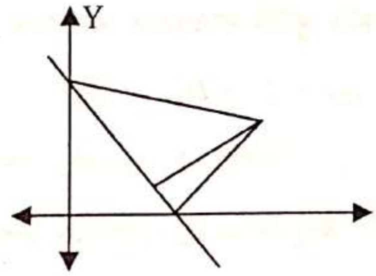
35. $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$, $cx + ay + b = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, দেখাও যে, $a + b + c = 0$.
[সি.'০১, ঢা.'১৪] (৪)

36. দেখাও যে, $2x = 1 - 4t$, $y = 1 + t$ এবং $x = -2t$, $y = t - 1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল। (8)

১৭. লম্ব দূরত্ব

I. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রেখা হতে পাই, $\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1 \ldots\ldots (1)$



$\therefore$ $A(-\frac{c}{a}, 0)$ ও $B(0, -\frac{c}{b})$ বিন্দু দুইটি সরলরেখা (1) উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $\delta_{ABP} = \frac{c}{ab}(ax_1 + by_1 + c)$ এবং $\Delta ABP = \frac{1}{2}|\delta_{ABP}|$ বর্গ একক।

এখন, $AB = \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2 + \left(-\frac{c}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2b^2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{|\frac{c}{ab}|^2 (a^2 + b^2)} = |\frac{c}{ab}|\sqrt{a^2 + b^2}$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব d হলে, $\Delta ABC = \frac{1}{2} AB \times d$ বর্গ একক।

$\therefore$ $\frac{1}{2}AB \times d = \frac{1}{2}|\delta_{ABP}| \Rightarrow |\frac{c}{ab}|\sqrt{a^2+b^2} \times d = |\frac{c}{ab}(ax_1 + by_1 + c)| = |\frac{c}{ab}||(ax_1 + by_1 + c|$

$\therefore$ $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\therefore$ **$P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$** সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

নোটঃ মূলবিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

উদাহরণ-1. দেখাও যে, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $2x \cos\alpha - 3y \sin\alpha = 6$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল α মুক্ত হবে। **[কু.'০৫; রা.'০৭]**

সমাধান : মনে করি, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $2x \cos\alpha - 3y \sin\alpha - 6 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি যথাক্রমে d_1 ও d_2.

$\therefore$ $d_1 = |\frac{2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$ এবং $d_2 = |\frac{-2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$

এখন, $d_1 \times d_2 = |\frac{2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}| \times |\frac{-2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$

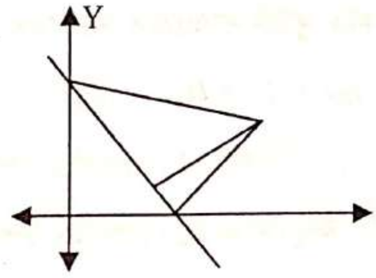
$= |\frac{-(2\sqrt{5}\cos\alpha + 6)(2\sqrt{5}\cos\alpha - 6)}{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}| = |\frac{-(20\cos^2\alpha - 36)}{4\cos^2\alpha + 9(1 - \cos^2\alpha)}|$

36. দেখাও যে, $2x = 1 - 4t$, $y = 1 + t$ এবং $x = -2t$, $y = t - 1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল। (8)

১৭. লম্ব দূরত্ব

I. $\mathbf{P(x_1, y_1)}$ **বিন্দু থেকে** $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ **সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।**

প্রদত্ত রেখা হতে পাই, $\dfrac{x}{-c/a} + \dfrac{y}{-c/b} = 1 \ldots\ldots (1)$



$\therefore$ $A(-\dfrac{c}{a}, 0)$ ও $B(0, -\dfrac{c}{b})$ বিন্দু দুইটি সরলরেখা (1) উপর অবস্থিত।

$\therefore$ $\delta_{ABP} = \dfrac{c}{ab}(ax_1 + by_1 + c)$ এবং $\Delta ABP = \dfrac{1}{2}|\delta_{ABP}|$ বর্গ একক।

এখন, $AB = \sqrt{\left(-\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(-\dfrac{c}{b}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{c^2}{a^2b^2}(a^2+b^2)} = \sqrt{|\dfrac{c}{ab}|^2 (a^2+b^2)} = |\dfrac{c}{ab}|\sqrt{a^2+b^2}$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব d হলে, $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} AB \times d$ বর্গ একক।

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}AB \times d = \dfrac{1}{2}|\delta_{ABP}| \Rightarrow |\dfrac{c}{ab}|\sqrt{a^2+b^2} \times d = |\dfrac{c}{ab}(ax_1 + by_1 + c)| = |\dfrac{c}{ab}||(ax_1 + by_1 + c|$

$\therefore$ $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

> $\therefore$ $\mathbf{P(x_1, y_1)}$ বিন্দু থেকে $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
>
> **নোটঃ মূলবিন্দু থেকে** $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

উদাহরণ-1. দেখাও যে, $\mathbf{(\sqrt{5}, 0)}$ **ও** $\mathbf{(-\sqrt{5}, 0)}$ **বিন্দু দুইটি হতে** $\mathbf{2x \cos\alpha - 3y \sin\alpha = 6}$ **এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল** α **মুক্ত হবে।** **[কু.'০৫; রা.'০৭]**

সমাধান : মনে করি,$(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $2x\cos\alpha - 3y\sin\alpha - 6 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি যথাক্রমে d_1 ও d_2.

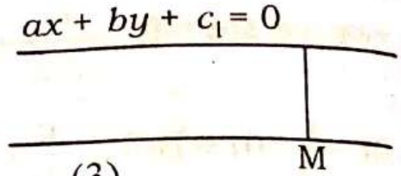
$\therefore$ $d_1 = |\dfrac{2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$ এবং $d_2 = |\dfrac{-2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$

এখন, $d_1 \times d_2 = |\dfrac{2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}| \times |\dfrac{-2\sqrt{5}\cos\alpha - 6}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}}|$

$= |\dfrac{-(2\sqrt{5}\cos\alpha + 6)(2\sqrt{5}\cos\alpha - 6)}{4\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha}| = |\dfrac{-(20\cos^2\alpha - 36)}{4\cos^2\alpha + 9(1 - \cos^2\alpha)}|$

$= \left| \dfrac{4(9-5\cos^2\alpha)}{9-5\cos^2\alpha} \right| = 4$; যা α মুক্ত। (Proved)

II. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে ।



মনে করি, দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা $ax + by + c_1 = 0 \cdots\cdots(1)$ এবং

$ax + by + c_2 = 0 \cdots\cdots(2)$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি (1) রেখাটির উপর অবস্থিত হলে, $a x_1 + b y_1 + c_1 = 0 \cdots \cdots (3)$

P বিন্দু থেকে (2) রেখাটির উপর PM লম্ব টানি।

$$\therefore \quad PM = \frac{|a x_1 + b y_1 + c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|(a x_1 + b y_1 + c_1) + c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|0 + c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad [\because\ a x_1 + b y_1 + c_1 = 0\ ]$$

$\therefore$ $\boldsymbol{ax + by + c_1 = 0}$ **ও** $\boldsymbol{ax + by + c_2 = 0}$ **সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব** $= \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

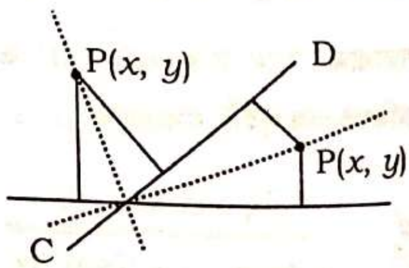
উদাহরণ -2: $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা.'০৫]

সমাধান : প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $4x - 3y + 2 = 0 \cdots (1)$

এবং $8x - 6y - 9 = 0 \Rightarrow 4x - 3y - \dfrac{9}{2} = 0 \cdots (2)$

$\therefore$ (1) ও (2) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \dfrac{\left|2 + \frac{9}{2}\right|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{\left|\frac{13}{2}\right|}{5} = \dfrac{13}{10}$ একক।

III দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।



ধরি, AB ও CD অসমান্তরাল সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ । AB ও CD রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের উপর P (x , y) যেকোনো একটি বিন্দু ।

P(x,y) বিন্দু থেকে AB রেখাটির লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}}}$ এবং

CD রেখাটির লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}}$ । অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটির সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু AB ও CD থেকে সমদূরবর্তী ।

$$\therefore \frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \Rightarrow \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$\therefore a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

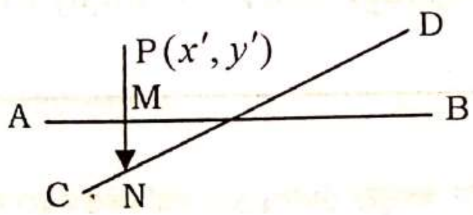
অনুসিদ্ধান্ত (i) $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ রেখা দুইটির সাপেক্ষে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখা দুইটি পরস্পর প্রতিচ্ছবি।

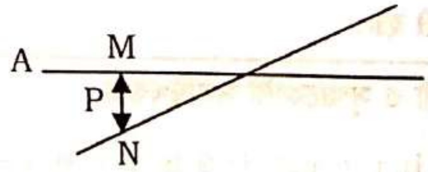
(ii) $f(x, y) \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $g(x, y) \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের $P(\alpha, \beta)$ বিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, যখন $f(\alpha, \beta)\times g(\alpha, \beta)>0$; $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, যখন $f(\alpha, \beta)\times g(\alpha, \beta)<0$

(iii) মূলবিন্দু ধারণকারী কোণটির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, যখন c_1 ও c_2 সমচিহ্নযুক্ত ; $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, যখন c_1 ও c_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

IV একটি বিন্দু দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অথবা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত তা নির্ণয় করতে হবে:

মনে করি, $P(x', y')$ বিন্দুটি $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণে অবস্থিত।





ধরি, $AB \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $CD \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$

AB এর ঢাল $=-\frac{a_1}{b_1}$. AB এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করি। P প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অবস্থিত হলে PM এর বর্ধিতাংশ CD কে N বিন্দুতে ছেদ করে এবং তা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হলে MP এর বর্ধিতাংশ CD কে N বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ PM এর ঢাল $=\frac{b_1}{a_1}=\tan\theta$ (ধরি). [$\because PM \perp AB$]

$\therefore \sin\theta = \dfrac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = b_1 p$ এবং $\cos\theta = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = a_1 p$, যেখানে $p = \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$

$\therefore p^2 (a_1^2 + b_1^2) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

PM এর সমীকরণ $\dfrac{x - x'}{\cos\theta} = \dfrac{y - y'}{\sin\theta} = r \Rightarrow \dfrac{x - x'}{a_1 p} = \dfrac{y - y'}{b_1 p} = r \quad \therefore x = \mathrm{p}r a_1 + x',\ y = \mathrm{p}r b_1 + y'$

$PM = r_1$ এবং $PN = r_2$ হলে, $M \equiv (\mathrm{p}r_1 a_1 + x', \mathrm{p}r_1 b_1 + y')$ এবং $N \equiv (\mathrm{p}r_2 a_1 + x', \mathrm{p}r_2 b_1 + y')$

যেহেতু $M \in AB$, $a_1(\mathrm{p}\, r_1 a_1 + x') + b_1(\mathrm{p}r_1 b_1 + y') + c_1 = 0$

$$\Rightarrow a_1^2 \mathrm{p} r_1 + a_1 x' + b_1^2 \mathrm{p}\, r_1 + b_1 y' + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = -\frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{p(a_1^2 + b_1^2)} = -\frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{p.\dfrac{1}{p^2}} = -\mathrm{p}\,(a_1 x' + b_1 y' + c_1)$$

আবার, যেহেতু $N \in CD$, $a_2(\mathrm{p}r_2 a_1 + x') + b_2(\mathrm{p}r_2 b_1 + y') + c_2 = 0$

$$\Rightarrow (a_1 a_2 + b_1 b_2)\mathrm{p}r_2 + a_2 x' + b_2 y' + c_2 = 0 \Rightarrow r_2 = -\frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{p(a_1 a_2 + b_1 b_2)}$$

$$\therefore r_1 r_2 = \frac{(a_1 x' + b_1 y' + c_1)(a_2 x' + b_2 y' + c_2)}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)} = \frac{(a_1 x' + b_1 y' + c_1)(a_2 x' + b_2 y' + c_2)(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}$$

P স্থূলকোণে অবস্থিত হলে, r_1 ও r_2 সমচিহ্নযুক্ত হবে।

$\therefore r_1 r_2 > 0 \Rightarrow (a_1 x' + b_1 y' + c_1)(a_2 x' + b_2 y' + c_2)(a_1 a_2 + b_1 b_2) > 0$

P সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হলে, r_1 ও r_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

$\therefore r_1 r_2 < 0 \Rightarrow (a_1 x' + b_1 y' + c_1)(a_2 x' + b_2 y' + c_2)(a_1 a_2 + b_1 b_2) < 0$

$\therefore P(x', y')$ বিন্দুটি $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ও $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অথবা সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত হবে যখন যথাক্রমে $(a_1 x' + b_1 y' + c_1)(a_2 x' + b_2 y' + c_2)(a_1 a_2 + b_1 b_2) > 0$ অথবা, < 0 হয়।

V. স্থূলকোণী ও সূক্ষ্মকোণী সমদ্বিখন্ডক:

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ও $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \;\cdots\cdots(1) \text{ and } \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdots (2)$$

If the point $P(x', y')$ is on (1), $\dfrac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}(a_1 x' + b_1 y' + c_1)^2 (a_1 a_2 + b_1 b_2) = (a_1 x' + b_1 y' + c_1)(a_2 x' + b_2 y' + c_2)(a_1 a_2 + b_1 b_2)$$

$P(x', y')$ স্থূলকোণে অবস্থিত হলে, $(a_1x'+b_1y'+c_1)(a_2x'+b_2y'+c_2)(a_1a_2+b_1b_2)>0$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}(a_1x'+b_1y'+c_1)^2\,(a_1a_2+b_1b_2)>0 \Rightarrow a_1a_2+b_1b_2>0$$

$\therefore$ $a_1a_2+b_1b_2>0$ হলে, স্থূলকোণের ও সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}} \text{ ও } \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$

$a_1a_2+b_1b_2<0$ হলে, স্থূলকোণের ও সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}} \text{ ও } \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$

বি.দ্র.: ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হবে যদি যথাক্রমে $(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)>0$, অথবা <0 হয়।

[$\because$ $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ হলে $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}>0$ এবং $\angle A$ স্থূলকোণ হলে $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}<0$]

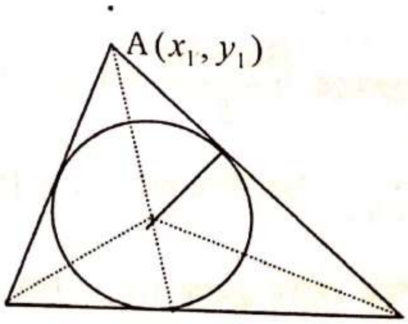
VI ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও অন্তঃব্যাসার্ধ:

ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে,

অন্তঃব্যাসার্ধ $r=\dfrac{1}{a+b+c}|\delta_{ABC}|$ এবং অন্তঃকেন্দ্র $=\left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$;

যেখানে $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ এবং

$$\delta_{ABC}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)$$



$$\Delta BIC+\Delta AIC+\Delta AIB=\Delta ABC$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}BC\times r+\frac{1}{2}AC\times r+\frac{1}{2}AB\times r=\frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\,r=|\delta_{ABC}|$$

$$\therefore \quad r=\frac{|(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)|}{a+b+c}$$

এখন, $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD.

$$\therefore \quad \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow BD:CD=c:b \quad \therefore \quad D\equiv\left(\frac{cx_3+bx_2}{c+b}, \frac{cy_3+by_2}{c+b}\right)$$

আবার, $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে BI ও CI.

$\therefore \dfrac{AI}{DI} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB+AC}{BD+CD} = \dfrac{c+b}{BC} \Rightarrow AI : DI = c+b : a$

$\therefore I \equiv \left(\dfrac{(c+b)\dfrac{cx_3+bx_2}{c+b}+ax_1}{c+b+a}, \dfrac{(c+b)\dfrac{cy_3+by_2}{c+b}+ay_1}{c+b+a}\right) = \left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অন্তঃব্যাসার্ধ $\left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

উদাহরণ -3: $3y = 4x - 10 \cdots$(i), $y = 1 \cdots$(ii), $3x - 4y = 5 \cdots$(iii) ও $5x + 12y + 13 = 0 \cdots$(iv)

(a) $2x + y + 3 = 0$ ও $3x - 4y + 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪; সি.'১০]

(b) y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলি হতে (i) রেখার লম্বদূরত্ব 4 একক হয় তাদের দূরত্ব নির্ণয় কর। [চ.'১০]

(c) (ii), (iii) ও (iv) রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(a) সমাধান : এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \times 3 + 1 \times -4 = 6 - 4 = 2 > 0$

$\therefore$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x+y+3}{\sqrt{4+1}} = -\frac{3x-4y+7}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow \frac{2x+y+3}{\sqrt{5}} = -\frac{3x-4y+7}{5}$$

$$\Rightarrow 2x+y+3 = -\frac{3x-4y+7}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + 3\sqrt{5} = -3x + 4y - 7$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{5}+3)x + (\sqrt{5}-4)y + 3\sqrt{5} + 7 = 0 \quad \text{(Ans.)}$$

(b) সমাধান : প্রদত্ত সরলরেখা, $3y = 4x - 10 \Rightarrow 4x - 3y - 10 = 0 \cdots\cdots (1)$

মনে করি, y-অক্ষের উপর নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, \alpha)$.

$\therefore$ (1) রেখাটি হতে $(0, \alpha)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|-3\alpha - 10|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|3\alpha+10|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{|3\alpha+10|}{5} = 4 \Rightarrow |3\alpha + 10| = 20 \Rightarrow 3\alpha + 10 = \pm 20$

" + " চিহ্ন নিয়ে পাই, $3\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = \dfrac{10}{3}$ এবং " − " চিহ্ন নিয়ে পাই, $3\alpha = -30 \Rightarrow \alpha = -10$

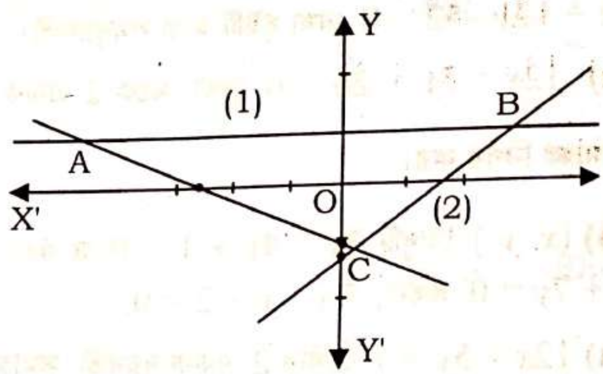
$\therefore$ বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(0, -10)$ এবং $\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় দুরত্ব $= \left|-10 - \dfrac{10}{3}\right| = \dfrac{40}{3}$ (Ans.)

(c) সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি $AB \equiv y - 1 = 0 \cdots (1)$,

$BC \equiv 3x - 4y - 5 = 0 \cdots(2)$ i.e., $\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/4} = 1$ এবং $CA \equiv 5x + 12y + 13 = 0 \cdots(3)$

i.e., $\frac{x}{-13/5} + \frac{y}{-13/12} = 1$.



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির প্রতিটি কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে।

এখন, (1) ও (2) রেখার ধ্রুবক পদের চিহ্ন একই বলে $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{y-1}{\sqrt{1}} = \frac{3x-4y-5}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 5y - 5 = 3x - 4y - 5 \Rightarrow 3x - 9y = 0 \Rightarrow x - 3y = 0 \cdots\cdots(4)$$

আবার, (1) ও (3) রেখার ধ্রুবক পদের চিহ্ন বিপরীত বলে $\angle BAC$ কোণের সমদ্বিখন্ড কের সমীকরণ,

$$\frac{y-1}{\sqrt{1}} = -\frac{5x+12y+13}{\sqrt{25+144}} \Rightarrow 13y - 13 = -5x - 12y - 13 \Rightarrow 5x + 25y = 0$$

$$\Rightarrow x + 5y = 0 \cdots\cdots(5)$$

(4) এবং (5) রেখা সমাধান করে পাই, $x = 0$ ও $y = 0$.

$\therefore$ প্রদত্ত রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র $(0, 0)$.

প্রশ্নমালা III G

1. **(a)** $(1, 2)$ বিন্দু হতে $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত হল। মূলবিন্দু থেকে এ লম্বের লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ **[প্র.ভ.প.'০৫]**

(b) $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। উত্তর : $c = 10$ **[রা.'০৮,'১২ ;চ.'০৬; য.'১০,'১৪; ঢা.'০৯; মা.'১৫]**

(c) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$ **[রা.'১০; মা.'০৮; চ.'১৩; য.'১৫]**

(d) মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ ও $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$ **[চ.'১১; রা.'০৪; য.'০৯]**

(e) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে। **[ঢা.'০৬; ব.'০৮; কু.'১৩]**

(f) $(2, 3)$ বিন্দু এবং $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে উক্ত বিন্দুর প্রতিবিম্বের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : 4 একক। **[প্র.ভ.প.'০৫; কু.'১১]**

2. **(a)** $3x - 2y = 1$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। **[মা.'০৪,'০৬]**

উত্তর : $11/2\sqrt{13}$

(b) দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

3. (a) $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর : $(1, \frac{12}{5}), (-3, \frac{16}{5})$

(b) (x, y) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ ও $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $x + 7y = 0$ অথবা, $7x - y + 2 = 0$. [চ. '০২; সি.'০৮]

4. (a) $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $12x - 5y + 19 = 0, 12x - 5y - 33 = 0$ [ব.'১০ ; কু.'০৮; য.'১০,'১২; রা.'১৩; চ.'১৪]

(b) $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উঃ $4x - 3y + 2 = 0, 4x - 3y - 18 = 0$ [সি.'১৩; ঢা'১০,'১৩; মা.'০৫; চ.'০৯; ব.'১৩; দি.'১৪]

(c) $(7, 17)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $(1, 9)$ বিন্দু থেকে 6 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $7x - 24y + 359 = 0$ [প্র.ভ.প.'০৬]

5. (a) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।
উত্তর : $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ [কু.'০৬,'১২; সি.'০৯]

(b) মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $4x + 3y \pm 35 = 0$ [চ.'০৫; সি.'০৬,'১১; রা.' ০৯; দি.'০৯, '১১,'১২; ব.'১১; মা.'১৪]

(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত। উত্তর : $\sqrt{3}x - y = \pm 8$ [রা.'০২; চ.'১৩]

(d) একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে । মূল বিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর। উত্তর : $x + y = 4\sqrt{2}$ [ব.'১১; কু.'১১; সি.'১৩]

6. (a) $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির সমদ্বিখন্ডক y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তরঃ $4/3$ [রা.'১১,'১৪; সি.'০৫; ব.'১২;কু.'১৪; চুয়েট'০৮-০৯]

(b) দেখাও যে, $(0, 1)$ বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির একটি সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত। [রা.'০৬; সি.'০৮,'১৪; কু. '১১,'১৩; চ. '০৮; য.'১১; দি.'১৩]

(c) $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমীকরণ নির্ণয় কর। উঃ $y + x + 2 = 0$ [দি.০৯; চুয়েট'০৯-১০]

(d) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $11x + 3y - 17 = 0$ [ব.'০৯; সি.'১৫; চুয়েট'০৭-০৮]

7. (a) $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। এদের কোনটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমদ্বিখন্ডক।
উত্তর : $16x - 48y + 23 = 0, 24x + 8y + 7 = 0$; দ্বিতীয় সমদ্বিখন্ডকটি। [য.'০৭,'১২]

(b) $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $12x + 5y + 13 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দু ধারণ কারে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $8x - 14y + 39 = 0$ [মা.বো.'০৭]

(c) $x + y + 1 = 0$ রেখাটি $3x - 4y + 3 = 0$ ও AB রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটির সমদ্বিখন্ডক। AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $4x - 3y + 4 = 0$.

(d) $x + 3y - 2 = 0$ রেখাটি $x - 7y + 5 = 0$ ও AB রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটির সমদ্বিখন্ডক। AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. (a) $(0, 0)$, $(0, 3)$ ও $(4, 0)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তঃদ্বিখন্ডক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [ঢা.'০৪; কু.'১০; সি.'১১]

(b) যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $4x + 3y - 12 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$ এবং $4x - 3y - 12 = 0$ তার অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

(c) যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x = 3$, $y = 4$ এবং $4x + 3y = 12$ তার কোণগুলির সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(d) $5x + 12y = 15$ এবং অক্ষ দুইটি সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটির বহির্দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(e) ΔABC এর শীর্ষ দুইটি A(5, 0), B(−4, −3) এবং অন্তঃকেন্দ্র (1, 2) হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তরঃ (a) $y = x$, $x + 3y - 4 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ (b) (3, 25/7) (c) $y = x + 1$, $x + 2y = 8$, $3x + y = 9$ (d) $5x - y - 15 = 0$, $8x - 12y + 15 = 0$ এবং $x + y = 0$ (e) C(1, 12)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

9. দেখাও যে, $(-\frac{1}{2}, -2)$ বিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ ও $6x + 4y - 7 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী। (২)

[য.'০৬]

10. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। উ: $x - y = 0$ বা, $x + y = 0$ (২)

11. (a) $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এই লম্ব x-অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। উ: 5, 150^0 [কু.'০৭] (৫)

(b) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দু দুটি হতে $bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$ [কু.'০৯] (২)

12. (1, − 2) বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $6x + 8y + 85 = 0$, $6x + 8y = 65$ [দি.'১০; চ.'১২; য.'১৩; ঢা.'১৪; সি.'১৩; ব.'১৪] (৪)

13. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ, $c = 5$ একক। উ: $12y = 5x + 60$ (৩)

14. (a) (3,2) ও (7,3) বিন্দু দুইটি $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূল বিন্দু, ঠিক সে পার্শ্বে অবস্থিত? (৩)

(b) দেখাও যে, মূলবিন্দু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত। (৪)

(c) দেখাও যে, মূলবিন্দু এবং (2 , – 1) বিন্দুটি যথাক্রমে $2x - y - 4 = 0$ এবং $4x + 2y - 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে এবং সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত। (৩)

15. $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $4x - 6y - 7 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি (1 , 2) বিন্দু ধারণ করে তার সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ: $8x + 3 = 0$ (২)

16. (a) $4x + 3y = 12$, $3x - 4y + 16 = 0$ ও $4x - 3y + 4 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ: (0, 4) (৪)

(b) A(– 3 , 0) , B(3 , 0) ও C(6 , 6)বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর। উ: $(6,-\frac{9}{2})$, $(0,\frac{21}{4})$ (৪)

(c) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষ তিনটি A(4 , 0), B(0 , 2) ও C(3 , 5) হলে, ΔABC এর পাদত্রিভুজের অন্ত:কেন্দ্র নির্ণয় কর। উ: $(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$ (৪)

17. (a) ΔABC এর AB , BC , CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y - 12 = 0$, $x - 4y + 4 = 0$, $6x + 5y - 15 = 0$. দেখাও যে, $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ। (৩)

(b) প্রমাণ কর যে, A(–2, 4) , B(–3, –2) ও C(5, –1) বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ । (৪)

(c) প্রমাণ কর যে, (–2, –1), (1, 3) ও (4, 1) বিন্দু তিনটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ । (৪)

18. (a) A(0, 7) এবং B(4,9) বিন্দুদ্বয় ABCD বর্গের শীর্ষবিন্দু হলে C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর । (৪)

উ: C(2,13) ও D (–2 ,11) অথবা, C(6 , 5) ও D(2 , 3)

(b) (0, 7) ও (6 , 5) বিন্দুদ্বয় একটি বর্গের কর্ণের শীর্ষবিন্দু হলে অপর শীর্ষবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর । (৪)

উ: (2, 3) ও (4, 9)

(**CQ** উপযোগী কিছু সমস্যা)

19. (a) $(\sqrt{3}, -1)$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

(b) $(4, \frac{3\pi}{4})$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

(c) (6 , 0) এবং (0 , 6) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(d) কোনো বিন্দুর কোটি 5 এবং (4, 5) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 3 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

(e) x–অক্ষ এবং (2, 3) বিন্দু থেকে (5, k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

(f) (2 , – 3) ও (4 , 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (–2, 9) ও (3 , –1) এবং এর ভরকেন্দ্র (2 , 2) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর।

(h) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ (2, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা এবং (–1, 2) বিন্দুগামী এর সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

20. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(– 4 , – 1) , B(– 1 , 3) এবং C(8 , – 6).

(a) $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) অক্ষদ্বয় দ্বারা BC রেখার মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(c) অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(d) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(e) A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(f) অক্ষদ্বয় ও BC রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(g) একটি বর্গের একটি কর্ণের সমীকরণ BC হলে A বিন্দুগামী বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(h) BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

21. (a) একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু (α,β), $(-4, 13)$, $(8, 8)$ এবং $(13, -4)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(b) ABCD রম্বসের $A(-1, 2)$, $B(\alpha, 0)$ এবং $C(3, 5)$। B ও D শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(d) $3x + 4y - 2 = 0$ রেখার উপর $(2, -1)$ বিন্দু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : $(14, -10), (-10, 8)$

(e) $(1, 2)$, $(-4, -10)$ বিন্দুগামী রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(f) $(-1, 1)$, $(3, 4)$ বিন্দুগামী রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $4x + 3y \pm 35 = 0$

(g) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর।

22. $AB \equiv 4x + 3y - 8 = 0$, $AC \equiv x + y - 1 = 0$

(a) মূলবিন্দু ও A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) রম্বসের একটি বাহু AC এবং একটি কর্ণ AB হলে A বিন্দুগামী অপর বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

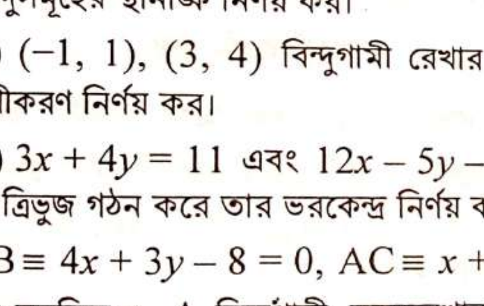
(c) বর্গের একটি কর্ণ AC হলে A বিন্দুগামী বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(d) A বিন্দুগামী AC এর লম্বরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(e) ABDC সামান্তরিকের AB ও AC দুইটি বাহু। D(1, 1) বিন্দুগামী অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

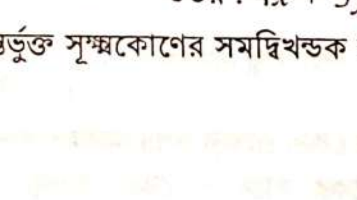
MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র/কৌশলঃ

1.



$$A \equiv (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$$
$$B \equiv (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$$
$$C \equiv (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$$

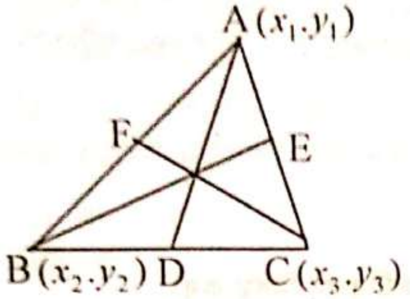
2.



ABCD সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$(x, y) = (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$$

3.



AD মধ্যমার সমীকরণ,

$(2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y =$

$(2y_1 - y_2 - y_3)x_1 - (2x_1 - x_2 - x_3)y_1$

4. $ax + by + c = 0$ দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ $= -\frac{c}{a}$, y -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/b$; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $= \sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}$; অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{c^2}{2|ab|}$.

5. একটি রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (α, β) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে তার সমীকরণ, $\frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{2\beta} = 1$

6. মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, যেখানে $\tan\theta = \frac{a}{b}$

7. $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots(1)$,
$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots(2)$ ও
$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \cdots(3)$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =

$$\frac{\{c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)\}^2}{2|(a_2b_3 - a_3b_2)(a_1b_3 - a_3b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)|}$$

8. (1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দুগামী এবং (3) এর সমান্তরাল ও লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1a_3 + b_1b_3}{a_2a_3 + b_2b_3}$$

9. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$\frac{|c_1\sqrt{a_2^2 + b_2^2} - c_2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

10. $f(x) \equiv ax + by + c = 0$ রেখা $g(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও AB রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভু কোণগুলোর একটি সমদ্বিখণ্ডক হলে AB এর সমীকরণ $(a^2 + b^2)g(x) - 2(aa_1 + bb_1)f(x) = 0$

11. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযো রেখাংশকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখাটি $|ax_1 + by_1 + c| : |ax_2 + by_2 + c|$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

12. যে কোনো ত্রিভুজের লম্ববেন্দ্র, ভরকেন্দ্র এ পরিকেন্দ্র যথাক্রমে A, B, C হলে A, B, C সমরে এবং AB : BC = 2 : 1.

বহুনির্বচনি প্রশ্ন:

1. x -অক্ষ ও y -অক্ষ থেকে একটি বিন্দুর দূর যথাক্রমে 3 ও 2 একক হলে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক -
i. (2, 3) ii. (2, −3) iii. (−2, −3)
কোনটি সত্য?
(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

2. $A(4, \frac{\pi}{4})$, B(11, 6) ও C(−1, 1) হলে
i. A বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
ii. C বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$
iii. BC = 13
কোনটি সত্য?
(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

3. A(−3, 2), B(−7, −5), C(5, 4) এবং বিন্দু ABCD সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হলে,
i. D এর স্থানাঙ্ক (9, 11)
ii. ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র $(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$

iii. BC বাহুর ঢাল $= \frac{3}{4}$

কোনটি সত্য?

(a) i , ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i,ii,iii

4. (7 , 7) এবং (– 5 , – 10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে y- অক্ষ কোন অনুপাতে ছেদ করে ?

(a)7 : 10 (b) 10 : 7 (c)7: 5 (d) 5 : 7

5. (3, 5), (3 , −8) এবং মূলবিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(a) 4·5 (b) 9 (c)19·5 (d) 39

6. মূলবিন্দু ও $(-4, \ 4\sqrt{3})$ বিন্দুগামী রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণ তৈরি করে?

(a) 150 (b) 120 (c) 60 (d) 30

7. (3 , – 6) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x = -6$ (b) $y = -6$

(c) $x = 3$ (d) $y = 3$

8. $y = mx + c$ সমীকরণে c নিচের কোনটি?

(a) রেখার ঢাল

(b) রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে.বিন্দু দুইটিতে ছদ করে তাদের দূরত্ব

(c) x-অক্ষের ছেদক অংশ

(d) y-অক্ষের ছেদক অংশ

9. (0, 4) , (10, −4) বিন্দুগামী,

i. রেখার ঢাল $-\frac{4}{5}$

ii. রেখার সমীকরণ $4x + 5y = 20$

iii. প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু (5, 0)

কোনটি সত্য?

(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii,iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 10-12 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x + 4y = 12$ রেখাটি x ও y- অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

10. প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল এবং (5 , −3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $3x + 4y = 3$ (b) $3x + 4y = 27$

(c) $4x - 3y = 29$ (d) $4x - 3y = 11$

11. মূলবিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার লম্বদূরত্ব কত একক?

(a) 5/12 (b) 12/5 (c) 7/5 (d) 12/25

12. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে -

(i) প্রদত্ত রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে 6 বর্গ একক ক্ষেত্রফলের ত্রিভুজ গঠন করে

(ii) AB এর দৈর্ঘ্য 5 একক

(iii) মূলবিন্দু ও AB এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ $3x - 4y = 0$

কোনটি সত্য?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

13. $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কত?

(a) $(\sqrt{6}, \frac{3\pi}{4})$ (b) $(\sqrt{6}, \frac{\pi}{4})$

(c) $(\sqrt{6}, \frac{5\pi}{4})$ (d) $(\sqrt{6}, -\frac{\pi}{4})$

14. $3x + 7y - 2 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং (2, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ-

(a) $3x + 7y - 13 = 0$ (b) $7x - 3y - 11 = 0$

(c) $7x + 3y - 17 = 0$ (d) $7x - 3y - 2 = 0$

15. $y = 6$ রেখাটি $x = 5$ রেখাকে এবং $y^2 = 6(x - 7)$ বক্ররেখাকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। AB এর দৈর্ঘ্য কত?

(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) 18

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 16 ও 17 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

ABCD রম্বসের A, B, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−2, −1), (1, 3), (5, 6).

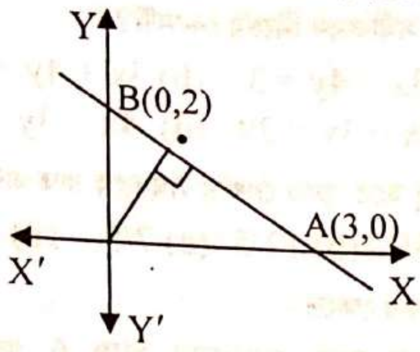
16. BD কর্ণের ঢাল কত?

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{3}{5}$ (c) 1 (d) −1

17. D বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

(a) (2,2) (b) (−2,−2) (c) (−2,2) (d) (2,−2)

চিত্রের আলোকে **18 ও 19** নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



18. AB রেখার সমীকরণ কত?
(a) $2x+3y-6=0$ (b) $3x+2y-6=0$
(c) $2x+3y+6=0$ (d) $3x+2y+6=0$

19. উদ্দীপক অনুযায়ী,

(i) OC রেখার ঢাল $-\frac{3}{2}$

(ii) OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 3 ব.একক

(iii) B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, 90^0)$

কোনটি সত্য?

(a) i , ii (b) ii (c) ii , iii (d) i, ii , iii

বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার MCQ.

20. (1, 4) ও (9, 12) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা যে বিন্দুতে 3:5 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তার স্থানাঙ্ক- [DU 14-15]
(a) (7,4) (b) (4,7) (c) (5, 8) (d) (8, 5)

21. P(6, 8), Q(4, 0) ও R(0, 0) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক ? [DU14-15]
(a) 32 (b) 16 (c) 12 (d) 24

22. (3, −1) ও (5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা যে বিন্দুতে 3:4 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত হয়, তার স্থানাঙ্ক- [DU 13-14]

(a) $(\frac{17}{3}, 3)$ (b) $(\frac{27}{7}, \frac{2}{7})$

(c) $(\frac{27}{4}, \frac{4}{3})$ (d) $(-3, -10)$

23. $(2,-1)$, $(a+1, a-3)$ ও $(a+2, a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে a এর মান- [DU 11-12]

(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

24. OP রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{\pi}{6}$ কোণে ঘুরানোতে নতুর অবস্থান হলো OQ । P এর স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, -3)$ হলে Q এর পোলার স্থানাঙ্ক হবে- [KUET 14-15]

(a) $(-2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6})$ (b) $(-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$

(c) $(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6})$ (d) $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$

25. x অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু হতে (0, 2) এবং (6, 4) বিন্দু দুইটি সমদূরবর্তী হলে P এর স্থানাঙ্ক কত? [BUTex 13-14]

(a) (2, 0) (b) (3, 0) (c) (5, 0) (d) (4, 0)

26. $r = a\sin\theta$ পোলার সমীকরণের কার্তেসীয় সমীকরণ কত? [BUTex 12-13]
(a) $ax^2+y^2-y=0$ (b) $x^2+y^2+ay=0$
(c) $x^2+y^2-ay=0$ (d) $x^2+ay^2-y=0$

27. $y=-5x+9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি- [DU 14-15]

(a) 5 (b) −5 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $-\frac{1}{5}$

28. $3x+5y=2$, $2x+3y=0$, $ax+by+1=0$ সমবিন্দুগামী হলে a ও b এর সম্পর্ক- [DU 14-15]
(a) $4a-6b=1$ (b) $4a-6b=2$
(c) $6a-4b=1$ (d) $6a-4b=2$

29. (1, 2) বিন্দু হতে $x=\sqrt{3}y+4$ রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত হল। মূলবিন্দু হতে ঐ লম্বের দূরত্ব কত? [CUET 14-15]

(a) $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$

30. $3x+4y=7$ রেখার সমান্তরাল এবং $(1,-2)$ বিন্দু হতে 7.5 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [KUET 14-15]

(a) $3x+4y=7$ (b) $4x+3y=9$
(c) $4x+3y=20.5$ (d) $3x+4y=32.5$

31. $4x+3y=c$ $12x-5y=2(c+3)$ রেখাদ্বয় মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c এর মান কত?

[BUET 13-14]

(a) 14 (b)12 (c) 10 (d) 8

বিভিন্ন বোর্ডের প্রশ্ন (প্রযোজ্য ক্ষেত্রে সংশোধনসহ):

উদ্দীপকের আলোকে 32 ও 33 নং প্রশ্নের উত্তর দাও: $4x-2y=6$

32. উদ্দীপক সরলরেখাটি x অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে? [দি.বো. ২০১৭]

(a) $(\frac{3}{2},0)$ (b) $(0,-3)$ (c) $(-3,0)$ (d) $(0,\frac{3}{2})$

33. উদ্দীপক সরলরেখাটির ঢাল কত? [দি.বো. '১৭]

(a) 2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) - 2 (d) $\frac{1}{2}$

34. $(-1,\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক কোনটি? [দি.বো. ২০১৭]

(a) $(2,\frac{\pi}{6})$ (b) $(2,\frac{5\pi}{6})$
(c) $(2,-\frac{\pi}{3})$ (d) $(2,\frac{2\pi}{3})$

35. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ হলে বিন্দুটির পোলার স্থানাংক হবে- [ঢা.বো. '১৭]

(a) $(2,-\frac{\pi}{3})$ (b) $(2,\frac{2\pi}{3})$
(c) $(2,-\frac{\pi}{6})$ (d) $(2,6)$

36. $y=-7x+9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি কত? [ঢা.বো. ২০১৭]

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $-\frac{1}{7}$ (c) - 7 (d) 7

নিচের তথ্যের আলোকে 36 এবং 37নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ-

$3x-4y-12=0$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

37. B বিন্দুর স্থানাংক কত? [ঢা.বো. ২০১৭]

(a) (4, 0) (b) (0, 4) (c) (0, -3) (d) (0, 3)

38. প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব এবং (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হলো- [ঢা.বো. ২০১৭]

(a) $4x+3y+10=0$ (b) $4x+3y-10=0$
(c) $3x+4y-11=0$ (d) $4x-3y+6=0$

39. $4x-3y+5=0$ রেখাটির ঢাল কত? [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

(a) $-\frac{4}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{3}{4}$

40. (1, 1) বিন্দুগামী $2x-3y-5=0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

(a) $3x+2y-5=0$ (b) $3x+2y-5=0$
(c) $2x+3y+5=0$ (d) $2x+3y-5=0$

41. $(1,-1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

(a) $(\sqrt{2},45^0)$ (b) $\sqrt{2},135^0)$
(c) $(\sqrt{2},225^0)$ (d) $(\sqrt{2},-45^0)$

42. $3x-2y+6=0$ সরলরেখা দ্বারা x- অক্ষের খন্ডিতাংশ কত একক? [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

(a) -3 (b) -2 (c) 2 (d) 3

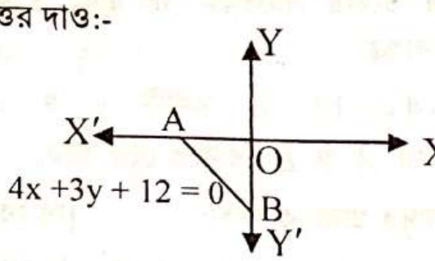
43. x+y=6 এবং y-x=2 সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী এবং x- অক্ষের উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

(a) x =2 (b) x =4 (c) y=2 (d) y=4

44. $3x+4y+1=0$ রেখার ঢাল কোনটি? [য .বো.'১৭]

(a) $\frac{-4}{3}$ (b) $\frac{-3}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 45. ও 46. নং প্রশ্নের উত্তর দাও:-



45. মূল বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব কোনটি? [য .বো.'১৭]

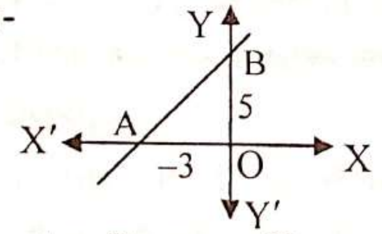
(a) $\frac{25}{12}$ (b) $\frac{12}{25}$ (c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{5}{12}$

46. AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক কোনটি? [য .বো.'১৭]

(a) $(-\frac{3}{2},-2)$ (b) $(-3,-4)$

(c) $(\frac{3}{2},-2)$ (d) $(\frac{2}{3},-2)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 47 ও 48 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:-



47. AB সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [রা.বো.'১৭]

(a) $5x-3y+15=0$ (b) $3x-5y+15=0$

(c) $5x-3y-15=0$ (d) $3x-5y-15=0$

48. OAB ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? [রা.বো.'১৭]

(a) $(\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$ (b) $(\frac{-3}{2},-\frac{5}{2})$

(c) $(-1,\frac{5}{3})$ (d) $(\frac{5}{3},-1)$

49. $3x-5y+1=0$ সরলরেখার ঢাল- [রা.বো.'১৭]

(a) $-\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $-\frac{3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

50. $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [কু.বো.'১৭]

(a) $(2,\frac{\pi}{4})$ (b) $(2,\frac{3\pi}{4})$

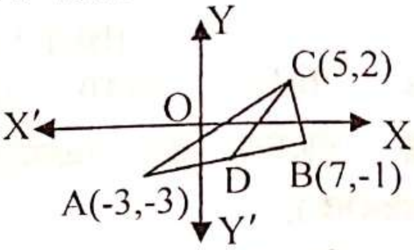
(c) $(2,\frac{5\pi}{4})$ (d) $(2,\frac{7\pi}{4})$

51. $A(1,-2)$ ও $B(-8,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজন রেখাংশ BA কে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? [কু.বো.'১৭]

(a) $(-17,4)$ (b) $(-2,-1)$

(c) $(-10,-5)$ (d) $(-5,0)$

উদ্দীপকের আলোকে 52 ও 53 প্রশ্নের উত্তর দাও.



চিত্রে CD, AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা।

52. CD এর দৈর্ঘ্য কত একক? [কু.বো.'১৭]

(a) 37 (b) 25 (c) $\sqrt{37}$ (d) 5

53. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [কু.বো.'১৭]

(a) 6 (b) 12 (c) 13 (d) 26

54. x অক্ষের উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ- [ব.বো.'১৭]

(a) $y=0$ (b) $x=0$

(c) $y=mx$ (d) $y+k=0$

55. $x-y-2=0$ এবং $2x-2y+4=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব- [ব.বো.'১৭]

(a) $3\sqrt{2}$ (b) 2 (c) $2\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

56. $y=-2x$ এবং $2y=x$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ - [ব.বো.'১৭]

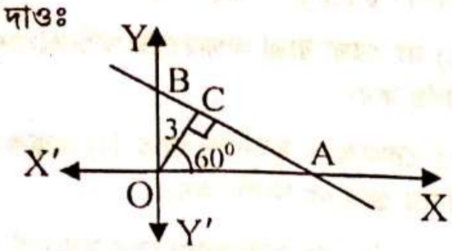
(a) 90^0 (b) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$ (d) 0^0

57. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাংকের কোণটি 90^0 হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংকের ভুজ- [ব.বো.'১৭]

(a) $x=r$ (b) $x=0$ (c) $y=r$ (d) $y=0$

নিচের চিত্রটি লক্ষ্য কর এবং 58 ও 59নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ



58. AB সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [চ.বো.'১৭]

(a) $\sqrt{3}x+y=6$ (b) $x+\sqrt{3}y=6$

(c) $\sqrt{3}x-y=6$ (d) $x-\sqrt{3}y=6$

59. ΔOAC এর ক্ষেত্রফল কোনটি?

(a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক (b) $\frac{9}{2}$ বর্গ একক

(c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক (d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

উ: 1(d) 2(c) 3(d) 4(c) 5(c) 6(b) 7(c) 8(d) 9(d) 10(a) 11(b) 12(d) 13(c) 14(b) 15(c) 16(d) 17(a) 18(a) 19(b) 20(b) 21(b) 22(d) 23(d) 24(c) 25(d) 26(c) 27(c) 28(c) 29(b) 30(d) 31(c) 32(a) 33(a) 34(d) 35(a) 36(b) 37(c) 38(b) 39(b) 40(a) 41(d) 42(b) 43(a) 44(b) 45(c) 46(a) 47(a) 48(c) 49(d) 50(c) 51(d) 52(d) 53(c) 54(b) 55(c) 56(a) 57(b) 58(b) 59(d)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. $y=2x+1$ ও $2y-x=4$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(a) মূলবিন্দু ও প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডক y–অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(c) মূলবিন্দু থেকে $\sqrt{5}$ একক দূরত্বে এবং ২য় রেখার উপর লম্ব রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

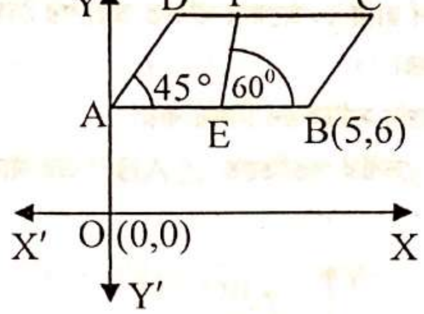
2. $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ এবং $C(5, -2)$ বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(a) A শীর্ষগামী ABC ত্রিভুজের মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) AB রেখার সমান্তরাল বরাবর (4, 4) বিন্দু হতে AC এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(c) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

3.



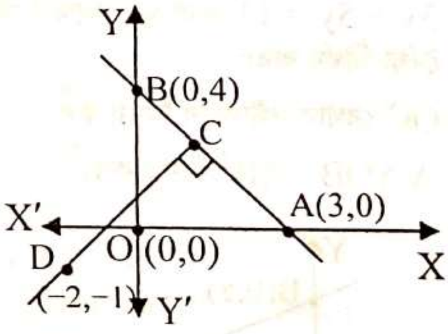
পাশের চিত্রে, ABCD সামান্তরিকে AB বাহু x অক্ষের সমান্তরাল এবং E, AB এর মধ্যবিন্দু।

(a) AD বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) EF রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4.

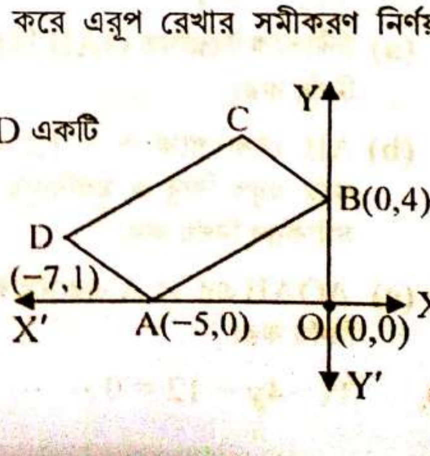


(a) AB বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(b) C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) (1, −1) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. চিত্রে, ABCD একটি সামান্তরিক।



(a) D বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(b) AC বাহু বিবেচনা করে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(c) B বিন্দু হতে DA এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর

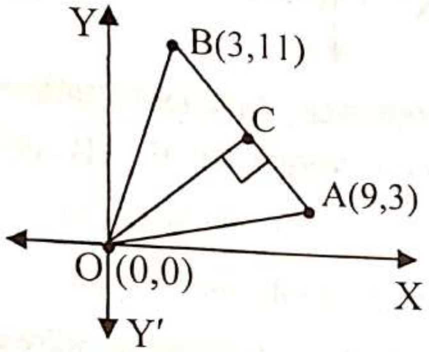
6. $A(1, 1)$, $B(-4, 13)$, $C(8, 8)$ এবং D বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু।

(a) AC কর্ণ দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(b) BD কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে $\angle ABC$ এর মান নির্ণয় কর।

7.

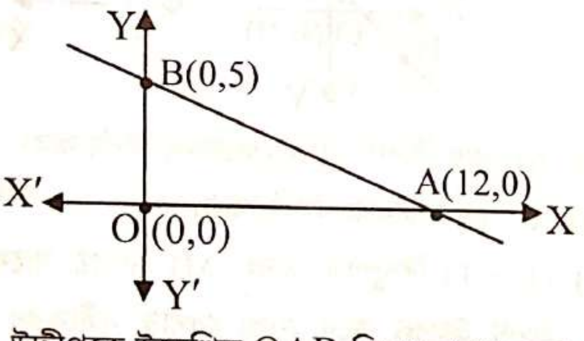


(a) $3x + 5y = 11$ দ্বারা x - অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(b) OC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) $\Delta AOB : AB^2$ নির্ণয় কর।

8.



(a) উদ্দীপকে উল্লেখিত OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(b) AB রেখাংশকে 5 : 12 অনুপাতে অন্ত:র্বিভক্ত করে এরূপ বিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) ΔOAB এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $3x - 4y + 12 = 0 \cdots \cdots$ (i),

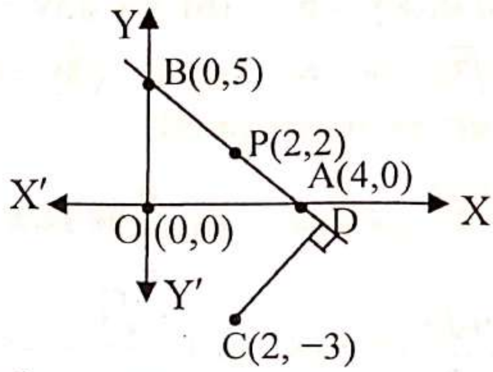
$7x + \sqrt{15}\,y - 14 = 0 \cdots \cdots$ (ii)

(a) (i) নং রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(b) (i) রেখাস্থ ও মূলবিন্দু হতে 10 একক দূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মূল বিন্দুধারী সমদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর।

10.

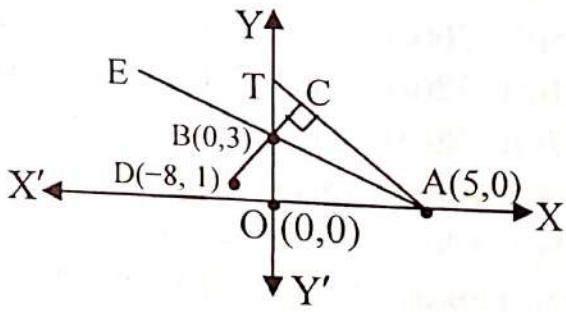


(a) P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এবং $(2, -1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) CD এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

11.

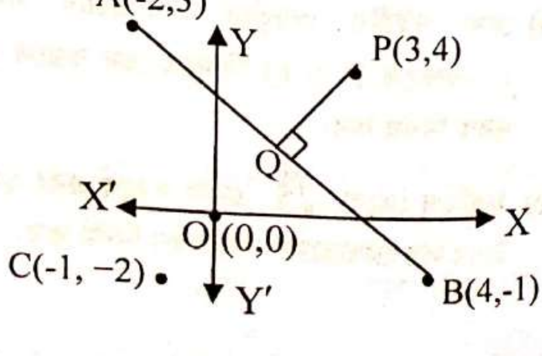


(a) $P(-2, 3)$ ও $Q(4, -1)$ বিন্দুগামী রেখাংশকে y - অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

(b) AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) দেখাও যে, AE ও OT রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

12.



(a) AB রেখাকে y-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

(b) Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) C বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

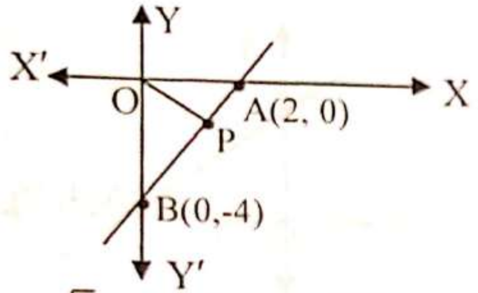
13. ΔABCএর বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(-1, -1), E(3, 1), F(0, 3)

(a) DE রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় কর।

(b) ক্ষেত্রফলের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$

(c) D, E , F এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ΔABCএর পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

14.

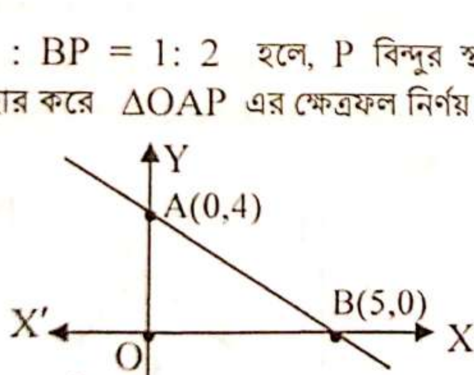


(a) $x-\sqrt{3}y=5$ রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

(b) AB এর উপর লম্ব এবং A বিন্দুগামী রেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) AP : BP = 1: 2 হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ΔOAP এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

15.



(a) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ (-3, 4) ও (5, 2) এবং ভরকেন্দ্র B হলে তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর।

(b) D বিন্দু হতে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) (1, -1) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. $A\equiv(-2, 1)$, $B\equiv(2, 3)$, $C\equiv(4, -1)$

(a) A বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) BC ও CA এর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে $\angle ABC$ নির্ণয় কর।

17. A(-3,5), B(6,5), C(3, -7), D(−2, −1)

(a) D বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) যদি E বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু এবং F, AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তাহলে ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(c) অক্ষদ্বয় দ্বারা C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখার খন্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

18. $2x+5y-6=0 \cdots\cdots$ (i)

(a) (i) নং রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

(b) মূলবিন্দু ও (i) নং রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) (2, −1) বিন্দু হতে (i) নং রেখার উপর যে লম্বরেখার সমীকরণ পাওয়া যায় তা এবং প্রদত্ত রেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় কর ক্রেমারের নিয়মে ।

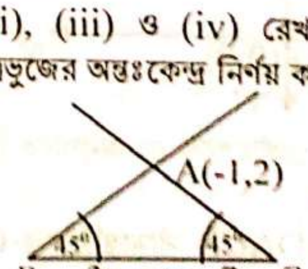
19. $3x-4y+18=0 \cdots\cdots$ (i)
$4x-3y-5=0 \cdots\cdots$ (ii)
$5x+12y+13=0 \cdots\cdots$ (iv)
$y=1 \cdots\cdots\cdots$ (iv)

(a) (i) নং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(b) y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে বিন্দু দুইটি হতে (i) নং রেখা সমদূরবর্তী তাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(c) (ii), (iii) ও (iv) রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

20.

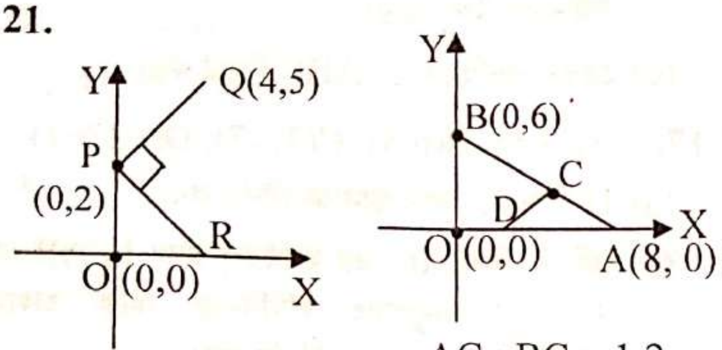


(a) $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) A হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু D এর সাহায্যে AD নির্ণয় কর।

(c) উদ্দীপকের সাহায্যে AB ও AC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

21.



AC : BC = 1:2

(a) P(0,2) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) PR রেখার সমীকরণ থেকে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(c) $\angle OBA$ এর সমদ্বিখন্ডক BD হলে, ΔDAC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

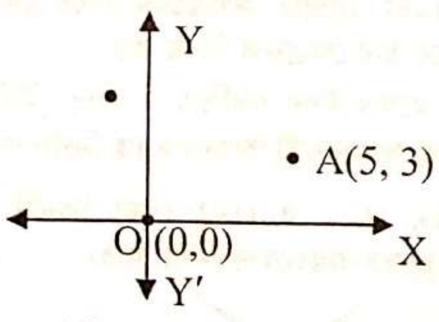
22. A(3,5), B(7, 5), C(−3, 7), D(−4, −10)

(a) D বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(b) যদি E বিন্দু AC এর মধ্যবিন্দু, F, AB কে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এবং G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র হয়, তাহলে ΔEFG এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(c) C বিন্দুগামী AB এর লম্বরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

23.



(a) y-অক্ষ AB রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

(b) B বিন্দুগামী OACB সামান্তরিকের OC কর্ণের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) $x - y = 0$ রেখার সমান্তরাল বরবার O হতে AB এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

24. দৃশ্যকল্প-I: $3x - 4y + 12 = 0$.

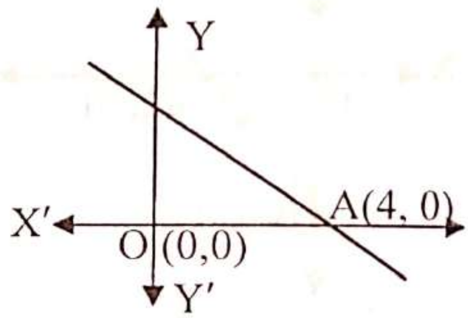
দৃশ্যকল্প-II: $8x + 15y - 12 = 0$.[ঢা.বো. '১৭]

(a) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি লম্ব কিনা যাচাই কর। ২

(b) দৃশ্যকল্প- II নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

(c) দৃশ্যকল্প-I এবং দৃশ্যকল্প- II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখন্ডক x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর। ৪

25. দৃশ্যকল্প : [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

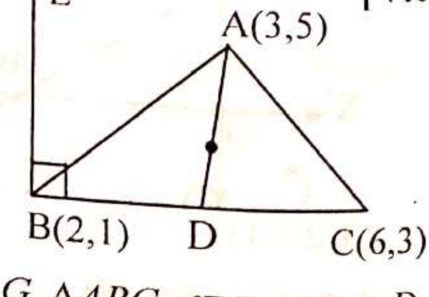


(a) (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় কর। ২

(b) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

(c) দৃশ্যকল্পের P(α, 0) বিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

26. [য.বো.'১৭]



চিত্রে : $G, \Delta ABC$ এর ভরকেন্দ্র ; D, BC এর মধ্যবিন্দু, $EB \perp BC$ ।

(a) কী শর্তে A, B, C(2t, t−1) বিন্দু তিনটি ধনাত্মক ক্রমে থাকবে?

(b) দেখাও যে, G বিন্দুটি AD রেখাকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

(c) $\angle EBC$ কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

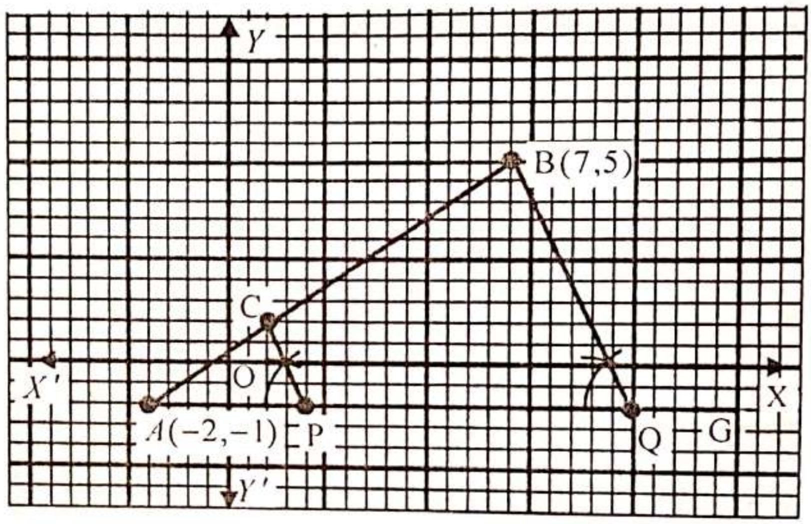
ব্যবহারিক

১৮. রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

পরীক্ষণ নং 1	তারিখঃ

পরীক্ষণের নামঃ A(− 2, −1) এবং B(7, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

মূলতত্ত্বঃ $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$



প্রয়োজনীয় উপকরণঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস।

কার্যপদ্ধতিঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।
2. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(−2, −1) ও B(7, 5) বিন্দুদ্বয়কে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে সংযোগ করে AB রেখাংশ লেখচিত্রে উপস্থাপন করি।
3. A বিন্দু দিয়ে x অক্ষের সমান্তরাল AG রেখার উপর যেকোনো দুইটি বিন্দু P ও Q নেই যেন AP : PQ = 1 : 2 হয়। (এখানে, A থেকে 4 একক দূরে P এবং P থেকে 8 একক দূরে Q বিন্দু অবস্থিত।)
4. Q, B যোগ করি এবং QB এর সমান্তরাল PC রেখা অঙ্কন করি যা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ফল সংকলনঃ

C এর স্থানাঙ্ক	
গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান
(1,1)	$\left(\frac{1\times7+2\times-2}{1+2}, \frac{1\times5+2\times-1}{1+2}\right) = \left(\frac{7-4}{3}, \frac{5-2}{3}\right) = (1,1)$

ফলাফলঃ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1,1)।

১৯. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল