Polynomial & It's Equation
(বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ)

১। $a x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

নিশ্চায়ক	মূল
$D = 0$	বাস্তব, সমান, মূলদ
$D > 0$ (পূর্ণবগ নয়)	বাস্তব, অসমান, অমূলদ
$D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ	বাস্তব, অসমান, মূলদ
$D < 0$	জটিল, অসমান

Remember : n ঘাত বা মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদীর n সংখ্যক মূল থাকবে। n একটি পূর্ণ সংখ্যা ≥ 0.
এবং $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. a_n \in R$; $a_0 \neq 0$; $a_0 \Rightarrow$ বহুপদীটির মুখ্য সহগ।
বহুপদীটির আকার: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots . + a_rx^{n-r} + \ldots\ldots . a_nx^0$

$$= a_0\left(x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \frac{a_3}{a_0}x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots . + \frac{a_n}{a_0}\right)$$

মূল সহগ সম্পর্কঃ মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots n$ সংখ্যক এর জন্য $\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots\ldots\ldots = (-1)^1 \frac{a_1}{a_0}$

$\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \ldots = (-1)^2 \frac{a_2}{a_0} = \frac{a_2}{a_0}$; $\sum \alpha\beta\gamma = (-1)^3 \frac{a_3}{a_0}$; $\sum_{n=1}^{n} \alpha\beta\gamma .. = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

২। $a x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে

$$\sum \alpha = \alpha + \beta = (-1)^1 \frac{b}{a} = \frac{-b}{a}; \sum \alpha\beta = \alpha\beta = (-1)^2 \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$$

৩। $a x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β, γ হলে $\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = (-1)^1 \frac{-b}{a} = \frac{-b}{a}$

$\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (-1)^2 \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$; $\sum \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma = (-1)^3 \frac{d}{a} = \frac{-d}{a}$

Remember : এখানে x^2, x এর সহগ Missing থাকতে পারে।

যেমন ঃ $2x^3 + 3x + 1 = 0$ এখানে, $a = 2, b = 0, c = 3, d = 1$ (কারণ x^2 এর সহগ b)

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = 0$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-1}{2}$$

৪। (i) $\sum \alpha^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$$[\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)]$$

(ii) $\sum \alpha^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

৫। $\sum \alpha^2\beta = \alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\beta+\alpha^2\gamma+\gamma^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha+\beta)-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma$

৬। **সমীকরণ গঠন ঃ**

একটি দ্বিঘাত সমীকরণে মূলদ্বয় α, β হলে সমীকরণটি, $x^2 -$(মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$\therefore\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

৭। **সাধারণ মূলের শর্ত ঃ** $a_1x^2+b_1x+c_1=0\ \ldots(i)$ $\qquad a_2x^2+b_2x+c_2=0\ \ldots(ii)$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরনের একটি সাধারণ মূল ($\boldsymbol{\alpha}$) থাকলে, $a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0$

$$a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2=0$$

বজ্রগুণন হতে, $\frac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

এর পর ১ম ও ২য় অনুপাত এবং ২য় ও ৩য় অনুপাত হতে (α) এর মান বের করে সমাধান করতে হবে।

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণের দুটি মূলই সাধারণ হলে শর্তঃ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

Binomial Theorem
(দ্বিপদী উপপাদ্য)

সসীম দ্বিপদী ঃ n এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা

১। $(a+x)^n = a^n + n_{C_1}a^{n-1}x + n_{C_2}a^{n-2}x^2 + \ldots\ldots + x^n$

২। $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ, $T_{r+1} = n_{C_r}a^{n-r}x^r\ (***)$

যেমনঃ$(2x-\frac{1}{4x^2})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে এখানে $(a+x)^n$এর সাথে তুলনা করলে $\therefore a=2x,\ x=\frac{-1}{4x^2}$

$(r+1)$ তমপদ, $T_{r+1} = 12_{C_r}(2x)^{12-r}(\frac{-1}{4x^2})^r$

Remember : (i) r এর মান কখনই ভগ্নাংশ বা ঋনাত্মক হবে না

(ii) x বর্জিত পদের সহগ / x বর্জিত পদের মান বের করতে বলতে x এর power শূন্য (x^0)

(iii) 5 তম পদ মানে হলে $r+1=5$ $\quad\therefore r=4$ অর্থাৎ যততম পদ বলবে r এর মান তার থেকে এক কম

যেমন ঃ 21 তম পদ বললে $r = 20$ আবার $r = 23$ মানে হল 24 তম পদ ।

৩। $(1+x)^n = 1 + n_{C_1}\, x + n_{C_2}\, x^2 + n_{C_3}\, x^3 \ldots \ldots \ldots + x^n$

৪। $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ, $T_{r+1} = n_{C_r}\, x^r$

৫। $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ (i) n জোড় হলে মধ্যপদ একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ

(ii) n বিজোড় হলে মধ্যপদ দুইটি এবং ১ম মধ্যপদ $= \left(\frac{n-1}{2}+1\right)$ তম= $\frac{n+1}{2}$ তম পদ

২য় মধ্যপদ $= \left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম= $\frac{n+3}{2}$ তম পদ

৬। ক্রমিক পদ ঃ $(r+1)$ তম পদ, $T_{r+1} = n_{c_r} a^{n-r} x^r$

r তম পদ $T_r = n_{C_{r-1}} a^{n-(r-1)} x^{r-1}$

$$\therefore \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{x}{a}$$

৭। শেষ হতে $(r+1)$ তম পদ = প্রথম হতে $(n+1-r)$ তম পদ

৮। $n_{C_0} + n_{C_1} + n_{C_2} + n_{C_3} + n_{C_4} + \cdots + n_{C_n} = 2^n$

৯। $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= (n+1)$

অসীম দ্বিপদী (n এর মান ঋনাত্মক বা ভগ্নাংশ) ঃ

১। $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \infty$ যেখানে $|x| < 1$

২। $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তমপদ $= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!} x^r$

যেমন ঃ $(1-2x)^{\frac{-1}{2}}$কে $(1+x)^n$ এর সাথে তুলনা করলে x এর স্থলে $(-2x)$ হবে এবং $n = \frac{-1}{2}$

$(r+1)$ তমপদ $= \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)\ldots\ldots(-1/2-r+1)}{r!}(-2x)^r$

৩। $|x| < 1$ বা $-1 < x < 1$ হলে

(i) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \infty$ এখানে, $(r+1)$ তমপদ $= x^r$

(ii) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots \infty$ এখানে, $(r+1)$ তমপদ= $(r+1)x^r$

(iii) $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots \infty$ এখানে, $(r+1)$ তম পদ $= \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$

একইভাবে x এর জায়গায় $(-x)$ বসিয়ে $(-x)^r = (-1)^r x^r$

(iv) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \infty$ এখানে, $(r+1)$ তম পদ $= (-1)^r x^r$

(v) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - \ldots \infty$ এখানে, $(r+1)$ তমপদ $= (-1)^r (r+1) x^r$

(vi) $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots \infty$ এখানে, $(r+1)$ তমপদ $= (-1)^r \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$

৪। **আংশিক ভগ্নাংশের Thumb rule** : (x^n নির্ণয়ের জন্য H.S.C. এ খুবই উপকারী)

$$\frac{x^2}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma}$$

আংশিক ভগ্নাংশের Thumb rule : $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-5x}$

(i) প্রথমে উৎপাদক গুলি হরে লিখ। $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{}{1-4x} + \frac{}{1-5x}$

(ii) প্রথম উৎপাদককে 0 ধরে x এর যে মান পাওয়া যায় তা এই উৎপাদক ছাড়া অন্য সব x এর স্থলে বসাও।

$1 - 4x = 0 \;\therefore x = \frac{1}{4}$ এখন, $\frac{x}{1-5x} = \frac{1/4}{1-5/4} = \frac{1/4}{-1/4} = -1 \quad \therefore A = -1$

(iii) একই ভাবে, $1 - 5x = 0 \;\therefore x = 1/5$ এখন, $x = 1/5$ হলে $\frac{x}{1-4x} = \frac{1/5}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1/5}{1/5} = 1 \quad \therefore B = 1$

$\therefore \frac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{-1}{1-4x} + \frac{1}{1-5x}$

যেমন ঃ$(1 - 5x + 6x^2)^{-1} = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} + \frac{-2}{1-2x}$

$x = 1/3$ এর জন্য $'0'$ হয় $\therefore \frac{1}{1-2/3} = 3$

$x = \frac{1}{2}$ এর জন্য $'0'$ হয় $\therefore \frac{1}{1-3/2} = -2$

৫। **বৃহত্তম পদ নির্ণয় ঃ** $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদের জন্য, $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left|\frac{n-r+1}{r}\right| \frac{x}{a}$