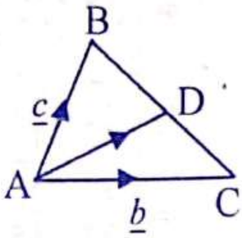
প্রশ্নমালা – II A

1. (a) ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু। $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ [ব.'১১]

প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$



$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

[∵ D, BC এর মধ্যবিন্দু ।]

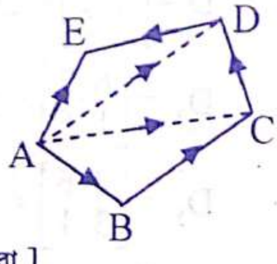
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \underline{c} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c}) = \frac{1}{2}(2\underline{c} + \underline{b} - \underline{c})$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ (Showed)

1. (b) ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$ [কু.'০১]

প্রমাণ ঃ ABC, ACD ও ADE ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \underline{a} + \underline{b} \cdots (1)$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ [∵ (1) দ্বারা]

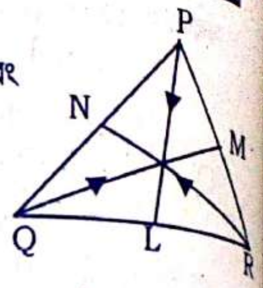
এবং $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$

1. (c) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N । প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = \underline{0}$ [সি.'০৭,'০৯,'১২; য.'০১; দি.'০৯,'১৩; রা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

প্রমাণ ঃ QR এর মধ্যবিন্দু L বলে,

$\overrightarrow{PL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$

অনুরূপভাবে,



$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR})$ এবং

$\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$

L.H.S.= $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$

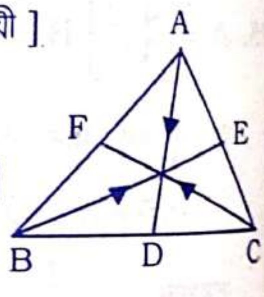
$= \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR})\}$

$= \frac{1}{2}(\underline{0} + \underline{0} + \underline{0}) = \underline{0}$ = R.H.S. (Proved)

2. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]



$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[∵ E, AC এর মধ্যবিন্দু ।]

$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

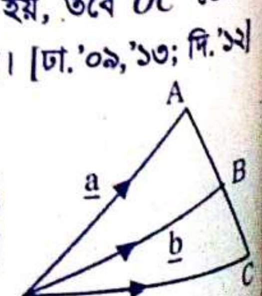
$\Rightarrow \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[∵ E, AC এর মধ্যবিন্দু ।]

$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2. (b) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B ; যদি $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা.'০৯,'১৩; দি.'১২]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$



$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$

[∵ B , AC এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

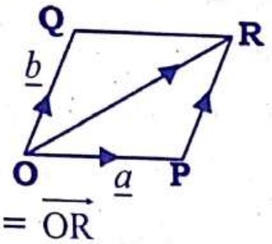
$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$

$[\because \overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}]$

$\therefore \overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a}$ (Ans.)

2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,



$\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং

$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$

এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক ।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং

$(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

$\therefore x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1, y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭; চ.'০৪]

সমাধান ঃ $2\overline{A} + \overline{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (Ans.)

$6\overline{A} - 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (Ans.)

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭;বুয়েট.১১-১২]

সমাধান ঃ $3\overline{A} + 2\overline{B} = 3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

$= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore |3\overline{A} + 2\overline{B}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2}$

$= \sqrt{121 + 25 + 4} = \sqrt{150}$

1(c) (2, 3,1) এবং (3,1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

সমাধান ঃ (2, 3 , 1) ও (3 , 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

$\therefore$ এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল

$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= 6 + 3 - 2 = 7$ (Ans.)

1. (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯, '১৩]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (Ans.)

2. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর ঃ

(a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$

[য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2}$

$= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$

$= 2.2 + 2.10 + 1.(-11)$

$= 4 + 20 - 11 = 13$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

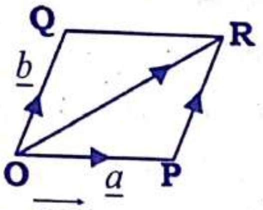
$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$

$[\because \overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}]$

$\therefore \overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a}$ (Ans.)

2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,



$\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং

$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$

এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক ।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং

$(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

$\therefore x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1, y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭; চ.'০৪]

সমাধান ঃ $2\overline{A} + \overline{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (Ans.)

$6\overline{A} - 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (Ans.)

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭;বুয়েট.১১-১২]

সমাধান ঃ $3\overline{A} + 2\overline{B} = 3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

$= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore |3\overline{A} + 2\overline{B}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2}$

$= \sqrt{121 + 25 + 4} = \sqrt{150}$

1(c) (2, 3,1) এবং (3,1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

সমাধান ঃ (2, 3 , 1) ও (3 , 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

$\therefore$ এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল

$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= 6 + 3 - 2 = 7$ (Ans.)

1. (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯, '১৩]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (Ans.)

2. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর ঃ

(a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$

[য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2}$

$= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$

$= 2.2 + 2.10 + 1.(-11)$

$= 4 + 20 - 11 = 13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{13}{3\times 15} = \frac{13}{45}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{13}{45}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{13}{45}$

(b) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

[ঢা. '০৩; রা. '০৪,'১১; য. '০৭,'১৩; সি. '০৮,'১৪; ব.'১১]

সমাধান : $|\overline{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$ এবং

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 2 - 12 - 3 = -13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-13}{\sqrt{14}\times\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-13}{2\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$

2(c) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

[য.'০১; চ.'০৪,'০৮; ব.'০৫]

সমাধান : $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$ এবং

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 - 6 - 5 = -9$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-9}{3\times\sqrt{35}} = \frac{-3}{\sqrt{35}}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$

3. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; ব.'০৪; ব.'০৬]

সমাধান :

$2\underline{a} + \underline{b} = 2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\underline{a} + 2\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 6\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} = 7\hat{i} + \hat{k}$

$\therefore\ |2\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}$

$|\underline{a} + 2\underline{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ এবং

$(2\underline{a} + \underline{b})\cdot(\underline{a} + 2\underline{b})$

$= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})\cdot(7\hat{i} + \hat{k}) = 35 - 4 = 31$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{(2\underline{a} + \underline{b}).(\underline{a} + 2\underline{b})}{|2\underline{a} + \underline{b}||\underline{a} + 2\underline{b}|} = \frac{31}{\sqrt{50}\times\sqrt{50}}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{31}{50}$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{31}{50}$

4. নিচের ভেক্টরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করে :

(a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

[ঢা., চ.'১১; দি.,রা.,কু.,য'১০; রা.,দি.,সি.,চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, x , y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \ \alpha = \cos^{-1}(2/3)$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{-1}{3}$$

$\therefore \ \beta = \cos^{-1}(-1/3)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \ \gamma = \cos^{-1}(2/3)$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(2/3)$, $\cos^{-1}(-1/3)$ ও $\cos^{-1}(2/3)$ কোণ উৎপন্ন করে।

4. (b) $\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ [রা.'০৮]

সমাধান : ধরি, x, y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $\hat{j}+2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \ \cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \ \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore \ \beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\therefore \ \gamma = \cos^{-1}(2/\sqrt{5})$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ ও $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ কোণ উৎপন্ন করে।

4. (c) $3\hat{\mathbf{i}}-6\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ [য.'০৮]

সমাধান : ধরি, x, y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \ \cos\alpha = \frac{\hat{i}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$

$\therefore \ \alpha = \cos^{-1}(3/7)$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{-6}{\sqrt{49}} = -\frac{6}{7}$$

$\therefore \ \beta = \cos^{-1}(-6/7)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$$

$\therefore \ \gamma = \cos^{-1}(2/7)$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(3/7)$, $\cos^{-1}(-6/7)$ ও $\cos^{-1}(2/7)$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (a) $\vec{\mathbf{B}} = 6\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ ভেক্টরের উপর $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[কু.'০৮,'১১; রা.'০৪,'১৩; চ.'০৫; য.'১২; সি.'১২ ; কুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান : $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{6\times2+(-3\times2)+2\times1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{12-6+2}{\sqrt{36+9+4}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7} \text{ (Ans.)}$$

5. (b) $\underline{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$, $\underline{\mathbf{b}} = \sqrt{3}\,\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$; $\underline{\mathbf{b}}$ ভেক্টরের উপর $\underline{\mathbf{a}}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[চ.'১২; কু.'১২; ব.'০৭; দি.'১১]

সমাধান : $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})}{|\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}|}$$

$$= \frac{1\times\sqrt{3}+(1\times3)+1\times-2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{3+9+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \text{ (Ans.)}$$

5. (e) A(2 , 3, −1) ও B (− 2, −4, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ A(2 , 3, −1) ও B (− 2, −4, 3) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ও $-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$.

$\overrightarrow{AB} = (-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}) - (2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

$= -4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore$ $-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$

এর অভিক্ষেপ = $\dfrac{(-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})}{|-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}|}$

$= \dfrac{-16+21+4}{\sqrt{16+49+16}} = \dfrac{9}{9} = 1$ (Ans.)

6. (a) $\vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}-11\hat{\mathbf{k}}$ **ভেক্টর বরাবর** $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ **ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।**

[ব.'০১,'০৯; রা.'০৫; সি.'০৭,'১১; কু.,দি.'১০]

সমাধান ঃ $|\vec{B}| = |2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}|$

$= \sqrt{2^2+10^2+11^2} = \sqrt{4+100+121}$

$= \sqrt{225} = 15$

$\therefore$ $\vec{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর

$= \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15} = \hat{n}$ (ধরি)

$\therefore$ $\vec{B}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ

$= (\hat{n}.\vec{A})\hat{n}$

$= \{\dfrac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\}\hat{n}$

$= \dfrac{4+20-11}{15}\cdot\dfrac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15}$

$= \dfrac{13}{225}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (Ans.)

6. (b) $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$ **এবং** $\vec{\mathbf{B}} = 6\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ **ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** $\vec{\mathbf{A}}$ **ভেক্টর বরাবর** $\vec{\mathbf{B}}$ **ভেক্টরের উপাংশ এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান।** **[য.'০৭;ঢা.'০৯; চ.'১০]**

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}|$

$= \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{B}| = |6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

$= 6-6-4 = -4$

প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{-4}{3\times 7}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}(-\dfrac{4}{21})$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর = $\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$= \dfrac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}) = \hat{a}$ (ধরি)

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}\hat{a}$

$= \dfrac{-4}{3}\{\dfrac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\}$

$= \dfrac{-4}{9}\hat{i}+\dfrac{8}{9}\hat{j}+\dfrac{8}{9}\hat{k}$ (Ans.)

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের মান

$= |\dfrac{-4}{9}\hat{i}+\dfrac{8}{9}\hat{j}+\dfrac{8}{9}\hat{k}| = \sqrt{\dfrac{16}{91}+\dfrac{64}{91}+\dfrac{64}{91}}$

$= \sqrt{\dfrac{16+64+64}{91}} = \sqrt{\dfrac{144}{91}} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \dfrac{-4}{3}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং উপাংশের সাংখ্যিক মান সমান।

7. (a) $2\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}-11\hat{\mathbf{k}}$ **ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।** **[সি.'০৫,'০৯]**

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}| = \sqrt{2^2+10^2+11^2}$

$= \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর $= \pm\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$= \pm\dfrac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (Ans.)

7. (b) $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9 + 36 + 64} = \sqrt{109}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|}$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{109}} (3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$

7. (c) $\vec{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ হলে, **(i)** ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$= 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} + (-\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k})$

$= 3\hat{i} - 4\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

(i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর

$= \pm \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \pm \dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর

$= \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর

$= -\dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = -\dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

8(a) (i) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ব.'০১; চ.'০৫,'১০; ঢা.,কু.'১১;বুয়েট'১১-১২]

সমাধানঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (1+2)\hat{i} - (2-1)\hat{j} + (-4-1)\hat{k}$

$= 3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$

(i) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$= \pm \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$

(ii) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট ভেক্টর $= \pm 5 \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$= \pm \dfrac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$ (Ans.)

8(b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর, যা $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\underline{a}$ এর লম্ব হবে।

সমাধানঃ ধরি, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোন ভেক্টর $\lambda(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ অর্থাৎ $(\lambda + \mu)\hat{i} + (\lambda - \mu)\hat{j} + (-\lambda + \mu)\hat{k}$.

এ ভেক্টর $\underline{a}$-এর উপর লম্ব হলে,

$(\lambda + \mu)(1) + (\lambda - \mu)(1) + (-\lambda + \mu)(-1) = 0$

$\Rightarrow \lambda + \mu + \lambda - \mu + \lambda - \mu = 0$

$\Rightarrow 3\lambda = \mu$

$\therefore$ $\underline{a}$-এর উপর লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে,

$4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}$

$\therefore \underline{c} = \pm \dfrac{4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}}{\sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2}}$

$= \pm \dfrac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{24\lambda^2}} = \pm \dfrac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{2\lambda\sqrt{6}}$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ (Ans.)

8.(c) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা.'০৮; কু. '০৮; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(1-2)\hat{i}-(-1-1)\hat{j}+(2+1)\hat{k}$$

$$=-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$$

$\therefore$ $|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$$

9.(a) P(1 , 1, 1) এবং Q(3, 2, − 1) শূন্যে অবস্থিত দুইটি বিন্দু । $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর এবং এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[য.'০৯; বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ P(1 , 1, 1) ও Q(3, 2, − 1) বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, ও $3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}=(3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$$=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k} \text{ (Ans.)}$$

$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর

$$=\pm\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\pm\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর $\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ বা, $-\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

9. (b) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P(2 , −1, 7) এবং Q(−4, 5, 0) হলে । $\overrightarrow{PQ}$ । নির্ণয় কর । [সি.'০৯]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{OP}=2\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k}$, $\overrightarrow{OQ}=-4\hat{i}+5\hat{j}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$$=-4\hat{i}+5\hat{j}-(2\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k})$$

$$=-6\hat{i}+6\hat{j}-7\hat{k}$$

$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{36+36+49}=\sqrt{121}=11$

10. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[ব.'০৮; বুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ $\underline{a}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ ও $\underline{b}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণফল শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a}\cdot\vec{b}=(9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k})$

$$=36-6-30=36-36=0$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10 (b) দেখাও যে, $\vec{A}=8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[রা.'০৭; '০৭; য.'১২; বুয়েট' ০৫-০৬; ১০-১১]

প্রমাণ ঃ $\underline{a}=8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$ ও $\underline{b}=4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a}\cdot\vec{b}=(8\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})$

$$=36-6-30=36-36=0$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10(c) $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৮; য.'০৭; চ.'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ $\vec{A}+\vec{B}=(1+3)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(-3+2)\hat{k}$

$$=4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$$

$\vec{A}-\vec{B}=(1-3)\hat{i}+(2+1)\hat{j}+(-3-2)\hat{k}$

$$=-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$$

এখন, $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})$

$$=(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$$

$$=-8+3+5=0$$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

10 (d) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব । এ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$= 12 - 6 - 6 = 12 - 12 = 0$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (2-18)\hat{i} - (3+24)\hat{j} + (-9-8)\hat{k}$

$= -16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{256 + 729 + 289} = \sqrt{1274}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{1274}}(-16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k})$$

10 (e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$ ও $(4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ হলে $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[বুয়েট'০৬-০৭]

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}|$

$= \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ এবং

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$$= \frac{2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}}{2\sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{19}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$$

11. (a) $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৯, '১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; ঢা.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

সমাধানঃ $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$\therefore\ (a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})\cdot(2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$

$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0\ \therefore\ a = 1, -2$

11(b) $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; ব.'০৪]

সমাধানঃ $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$\therefore\ (2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k})\cdot(4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 8 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 6\ \therefore\ a = 3$

12.দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\underline{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। [ঢা.'০৬]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে যদি এদের যেকোন দুইটির ক্রস গুণনের সাথে অপরটির ডট গুণন শূন্য হয়।

$$\text{এখন, } (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$= 3(12-5) + 2(-4-10) + 1(1+6)$

$= 21 - 28 + 7 = 28 - 28 = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় ।

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\underline{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

[ব.'০৩,'১২; ঢা.'০৪,'১৪; রা.'০৭,'১৪; বুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ : $|\underline{a}| = |3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$|\underline{b}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$|\underline{c}| = |2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{35}$ ও $\sqrt{21}$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\underline{a}|^2 + |\underline{c}|^2 = 14 + 21 = 35 = |\underline{b}|^2$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (b) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$, $-\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+8\hat{\mathbf{k}}$ এবং $-4\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+6\hat{\mathbf{k}}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

[ঢা.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৪]

প্রমাণ ঃ ধরি , A, B ও C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$.

$\overrightarrow{AB} = -\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$= -2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{BC} = -4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}-(-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})$

$= -3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{CA} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}-(-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k})$

$= 5\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ ও $|\overrightarrow{CA}|$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{38}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (c) ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, **A (1,–1, –1)**, **B (3 , 3 , 1)** এবং **C(– 1, 4 , 4)** বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র **P(0,1,2)**

প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{PA} = (1-0)\hat{i}+(-1-1)\hat{j}+(-1-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PB} = (3-0)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$= 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PC} = (-1-0)\hat{i}+(4-1)\hat{j}+(4-2)\hat{k}$

$= -\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{14}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু তিনটি P(0,1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি গোলকের উপর অবস্থিত ।

13.(d) A(0, 1 , 2) , B (–1,3 , 0) , C(1, –1, 1) বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং । $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ । এবং । $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ । নির্ণয় কর [ঢা.'০৩]

সমাধানঃA(0,1,2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{j}+2\hat{k}$

B (–1,3 , 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= -\hat{i}+3\hat{j}$,

C(1, –1, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = (-1-0)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(0-2)\hat{k}$

$= -\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

এবং $\overrightarrow{AC} = (1-0)\hat{i}+(-1-1)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

14. (a) $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$ হলে, $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [কু.'০৪]

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\vec{B}| = |\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (4-3)\hat{i}-(4-1)\hat{j}+(6-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\sin\theta = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}}\ \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$$

14(b) $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ হলে, $|\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}|$ নির্ণয় কর। [বুয়েট'০০-০১]

সমাধানঃ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2+6)\hat{i} - (-1-9)\hat{j} + (-2-6)\hat{k}$

$= 4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}$

$= 6\sqrt{5}$

14(c) $(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট'০১-০২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow (3b-2)\hat{i} - (3a-2)\hat{j} + (2a-2b)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j}$

$\therefore\ 3b - 2 = 1 \Rightarrow 3b = 3\ \therefore\ b = 1$

$3a - 2 = 1 \Rightarrow 3a = 3\ \therefore\ a = 1$

14(d) $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (2-3)\hat{i} - (-4-1)\hat{j} + (6+1)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= (7+10)\hat{i} - (21-2)\hat{j} + (15+1)\hat{k}$

$= 17\hat{i} - 19\hat{j} + 16\hat{k}$ (Ans.)

14(e) $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\underline{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$ হলে $5\underline{a} \times \underline{b}$ এবং $\dfrac{\underline{b}}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান ঃ $5\underline{a} \times \underline{b} = 5\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

$= 5\{(21-10)\hat{i} - (-14+5)\hat{j} + (4-3)\hat{k}\}$

$= 5\{11\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k}\} = 55\hat{i} + 45\hat{j} + 5\hat{k}$

$\dfrac{\underline{b}}{|\underline{a}|} = \dfrac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{|2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}|} = \dfrac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{4+9+25}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k})$

14(f) যেকোন দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. [চ.'০২]

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$

$= (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \cdot (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

$= \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\therefore\ \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$\therefore\ \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

14(g) প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$,

যেখানে $\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$,

$\vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ **[ঢা.'০১; ব.'০২]**

প্রমাণঃ L.H.S. = $\vec{A}\times\vec{B}$

$=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$

$=a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})$

$+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})$

$+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$

$=a_1b_1(\underline{0})+a_1b_2(\hat{k})+a_1b_3(-\hat{j})$

$+a_2b_1(-\hat{k})+a_2b_2(\underline{0})+a_2b_3(\hat{i})$

$+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})+a_3b_3(\underline{0})$

$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}$

$+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$

$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ = R.H.S. (Proved)

14(h) দুইটি ভেক্টর $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $\hat{i}.\hat{j}=0$, $\hat{i}.\hat{i}=1$; যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে x ও y অক্ষ পরাবর একক ভেক্টর। [চ.'১১]

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা ঃ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ $(0\le\theta\le\pi)$ হলে, ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণনকে $\underline{a}.\underline{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে $\underline{a}.\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন একটি স্কেলার রাশি।

এখন, $\hat{i}.\hat{j}=|\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0=1\times1\times0=0$

$\hat{i}.\hat{i}=|\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^0=1\times1\times1=1$

15. (a) ভেক্টরের সাহায্যে A(1,3,2), B(2,–1, 1) ও C(– 1, 2 , 3) শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB}=(2-1)\hat{i}+(-1-3)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$=\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{AC}=(-1-1)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-2)\hat{k}$

$=-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=(-4-1)\hat{i}-(1-2)\hat{j}+(-1-8)\hat{k}$

$=-5\hat{i}+\hat{j}-9\hat{k}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$=\frac{1}{2}|-5\hat{i}+\hat{j}-9\hat{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+1^2+9^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{25+1+81}=\frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গ একক।

15 (b) $\vec{P}=4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ **এবং** $\vec{Q}=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ **একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]**

সমাধান ঃ $\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & -4 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}$

$=(4+2)\hat{i}-(-4-2)\hat{j}+(-8+8)\hat{k}$

$=6\hat{i}-6\hat{j}$

$\therefore$ সামান্তরিকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=|\vec{P}\times\vec{Q}|$

$=\sqrt{36+36}$ বর্গ একক $=\sqrt{72}$ বর্গ একক।

15(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ **ও** $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$; **ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}-(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= \hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$= (-49 + 20)\hat{i} - (-14 + 4)\hat{j} + (10 - 7)\hat{k}$

$= -29\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}|-29\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}|$

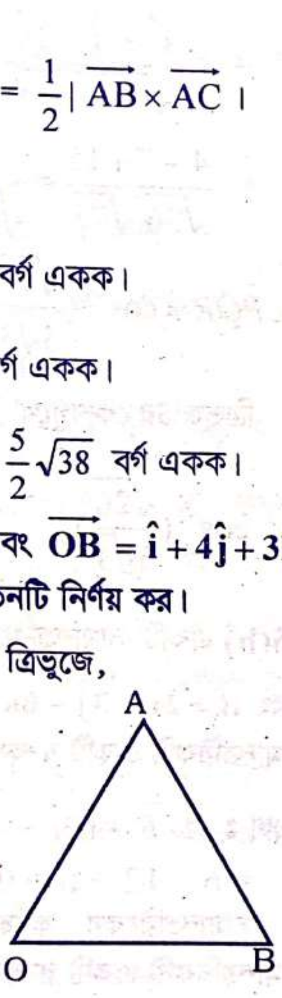
$= \frac{1}{2}\sqrt{29^2 + 10^2 + 3^2}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{841 + 100 + 9}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{950}$ বর্গ একক $= \frac{5}{2}\sqrt{38}$ বর্গ একক।

15(d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,



$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \quad \overrightarrow{BO} = -\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} + \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$= -\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k} \quad \therefore \overrightarrow{BA} = \hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore \quad \cos AOB = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$

$= \dfrac{(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}$

$= \dfrac{2 - 12 - 3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \dfrac{-13}{\sqrt{364}}$

$\therefore \angle AOB = \cos^{-1}(\dfrac{-13}{\sqrt{364}})$

$\cos OAB = \dfrac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}$

$= \dfrac{(-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+49+16}}$

$= \dfrac{2 + 21 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{66}} = \dfrac{27}{\sqrt{924}}$

$\angle OAB = \cos^{-1}(\dfrac{27}{\sqrt{924}})$

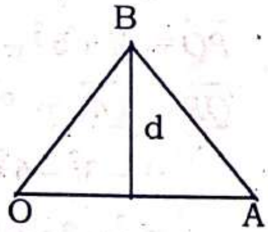
$\cos OBA = \dfrac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}$

$= \dfrac{(-\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{1+49+16}}$

$= \dfrac{-1 + 28 + 12}{\sqrt{26}\sqrt{66}} = \dfrac{39}{\sqrt{1716}}$

$\angle OBA = \cos^{-1}(\dfrac{39}{\sqrt{1716}})$

15. (e) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, OAB ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$,

$\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং

B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব d.

$$\text{এখন, } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (-4 - 3)\hat{i} - (-4 + 6)\hat{j} + (-6 - 12)\hat{k}$

$= -7\hat{i} - 2\hat{j} - 18\hat{k}$

$\therefore \quad \Delta OAB = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \times d$

$$\Rightarrow \sqrt{7^2+2^2+18^2} = \sqrt{2^2+2^2+1^2}\ d$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{377}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{377}}{3}$$ একক। (Ans.)

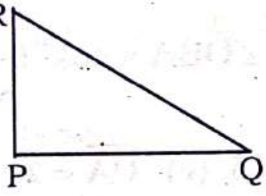
15(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারগুলো $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন

$$= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) + 3(2+3) + 2(-1-6)$$
$$= 6 + 15 - 14 = 7$$ ঘন একক

15(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলো নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, PQR ত্রিভুজে PQ ও PR বাহু দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ দ্বারা নির্দেশিত।

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{PR} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore\ \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} + 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$
$$= \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore\ \cos QPR = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}$$

$$= \frac{(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})\cdot(4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\sqrt{16+1+9}}$$

$$= \frac{12-6-6}{\sqrt{49}\sqrt{26}} = \frac{0}{7\sqrt{26}} = 0 = \cos 90^0$$

$\therefore\ \angle QPR = 90^0$

$$\cos PQR = \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|}$$

$$= \frac{(-3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\sqrt{1+49+25}}$$

$$= \frac{-3+42+10}{\sqrt{49}\sqrt{75}} = \frac{49}{7\times5\sqrt{3}} = \frac{7}{5\sqrt{3}}$$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\frac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং

$$\cos PRQ = \frac{\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|}$$

$$= \frac{(-4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})\cdot(-\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{16+1+9}\sqrt{1+49+25}}$$

$$= \frac{4+7+15}{\sqrt{26}\sqrt{75}} = \frac{26}{\sqrt{26}\ 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}$$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

$\therefore$ ত্রিভুজটির কোণগুলো 90^0 , $\cos^{-1}(\frac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

15(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পমাণ ঃ $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k})\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$

$= 6 - 12 + 6 = 0.$

$\therefore$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব । অতএব, সামান্তরিকটি একটি রম্বস ।

এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+1^2}\ \sqrt{2^2+3^2+6^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9+16+1}\ \sqrt{4+9+36}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1274} = 17.85$$ বর্গ একক (পায়)

16.(a) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং
$\underline{b} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$

$\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} + t(5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$

(b) $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = \hat{i}$ ও $\underline{b} = \hat{j}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = \hat{i} + t(\hat{j} - \hat{i}) \Rightarrow \underline{r} = (1-t)\hat{i} + t\hat{j}$

(c) দেখাও যে, (2, −3, 4) এবং (5, 7, −8) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = (2 + 3t)\hat{i} + (-3 + 10t)\hat{j} + (4 - 12t)\hat{k}$ যেখানে t একটি প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ : মনে করি, (2, −3, 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং (5, 7, −8) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} + t\{(5\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} + t(3\hat{i} + 10\hat{j} - 12\hat{k})$

$\therefore \underline{r} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

দ্বিতীয় অংশ: কার্তেসীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে,

$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore$ আমরা পাই,

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2 + 3t)\hat{i} + (-3 + 10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$x = 2 + 3t,\ y = -3 + 10t;\ z = 4 - 12t$

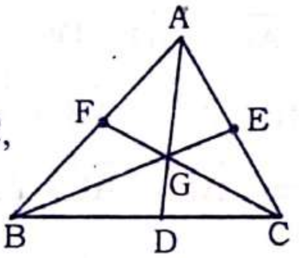
$\Rightarrow \dfrac{x-2}{3} = t,\ \dfrac{y+3}{10} = t,\ \dfrac{z-4}{-12} = t$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-4}{-12}$$

প্রশ্নমালা II C

1. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য.'১০; কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪] **প্রমাণ :** মনে করি, ABC ত্রিভুজের B বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



$\therefore$ D, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\dfrac{\underline{c}}{2}, \dfrac{\underline{c}+\underline{a}}{2}, \dfrac{\underline{a}}{2}$.

ধরি, BE ও CF মধ্যমা দুইটি যথাক্রমে m : 1 ও n : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ G এর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{m\dfrac{\underline{c}+\underline{a}}{2}}{m+1} = \dfrac{m\underline{c} + m\underline{a}}{2(m+1)}$

এবং $\dfrac{n\dfrac{\underline{a}}{2} + \underline{c}}{n+1} = \dfrac{n\underline{a} + 2\underline{c}}{2(n+1)}$ অভিন্ন হবে।

$\therefore \dfrac{m}{2(m+1)} = \dfrac{n}{2(n+1)} \Rightarrow mn + m = mn + n$

$\Rightarrow m = n$ এবং $\dfrac{m}{2(m+1)} = \dfrac{2}{2(n+1)}$

$\Rightarrow \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{2}{m+1}$ $\therefore m = 2 = n$

$\therefore$ BE ও CF মধ্যমা দুইটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, BE ও AD মধ্যমা দুইটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে ছেদ করে। BE মধ্যমা একটি

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং
$\underline{b} = 5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$

$\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

∴ নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,
$\underline{r} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k} + t(5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

(b) $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ **বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = \hat{i}$ ও $\underline{b} = \hat{j}$.
$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ
$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

∴ নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,
$\underline{r} = \hat{i} + t(\hat{j} - \hat{i}) \Rightarrow \underline{r} = (1-t)\hat{i} + t\hat{j}$

(c) দেখাও যে, (2, −3, 4) এবং (5, 7, −8) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$ **যেখানে t একটি প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।**

প্রমাণ : মনে করি, (2, −3, 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং (5, 7, −8) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 5\hat{i}+7\hat{j}-8\hat{k}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ
$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$
$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k} + t\{(5\hat{i}+7\hat{j}-8\hat{k}) - (2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\}$
$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k} + t(3\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k})$
$\therefore \underline{r} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

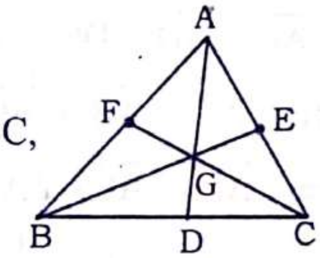
দ্বিতীয় অংশ: কার্তেসীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে,
$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
∴ আমরা পাই,
$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,
$x = 2+3t,\ y = -3+10t;\ z = 4-12t$
$\Rightarrow \frac{x-2}{3} = t,\ \frac{y+3}{10} = t,\ \frac{z-4}{-12} = t$

∴ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-4}{-12}$$

প্রশ্নমালা II C

1. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য.'১০; কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪] **প্রমাণ :** মনে করি, ABC ত্রিভুজের B বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু ।



∴ D, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{\underline{c}}{2}, \frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}, \frac{\underline{a}}{2}$.

ধরি, BE ও CF মধ্যমা দুইটি যথাক্রমে m : 1 ও n : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ G এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{m\frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}}{m+1} = \frac{m\underline{c}+m\underline{a}}{2(m+1)}$

এবং $\frac{n\frac{\underline{a}}{2}+\underline{c}}{n+1} = \frac{n\underline{a}+2\underline{c}}{2(n+1)}$ অভিন্ন হবে।

$\therefore \frac{m}{2(m+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \Rightarrow mn + m = mn + n$

$\Rightarrow m = n$ এবং $\frac{m}{2(m+1)} = \frac{2}{2(n+1)}$

$\Rightarrow \frac{m}{m+1} = \frac{2}{m+1}\ \therefore m = 2 = n$

∴ BE ও CF মধ্যমা দুইটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, BE ও AD মধ্যমা দুইটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে ছেদ করে। BE মধ্যমা একটি

ও কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হতে পারে। অতএব, AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

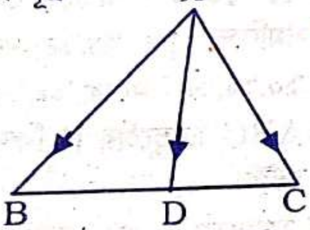
অতএব, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

2. ABC ত্রিভুজে, D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে,

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$ [ব.'১১; সি.'১৩]

(b) $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$. [য.'০৯,'১৩; কু. '১০; ঢা. '১২; সি.'১০; চ.,দি.'১০; রা.'১১,'১৪; ব.'১৩]

প্রমাণ : **(a)** ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\cdots$ (i)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\cdots$ (ii)

$(i)+(ii)\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})$

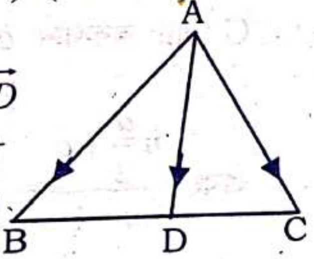
[$\because$ D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}+\underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

(b) ABD ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$



$\Rightarrow AB^2=AD^2+DB^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow AB^2=AD^2+BD^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}\cdots(1)$

তদ্রূপ ACD ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$\therefore AC^2=AD^2+DC^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow AC^2=AD^2+BD^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\cdots(2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

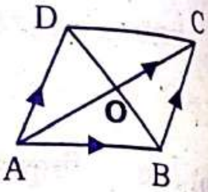
$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)+2\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$

$\therefore AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$

[$\because \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\underline{0}$]

3. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত হবে। [সি.'০৭; ব.'০৭; ঢা.'১০; দি.'১১; য.'১১; রা.,কু.,সি.'১৩]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$ হলে,



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\underline{a}+\underline{b}$

এবং $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

$=-\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}-\underline{a}$

ধরি, $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AC}=m(\underline{a}+\underline{b})$ এবং

$\overrightarrow{BO}=n\overrightarrow{BD}=n(\underline{b}-\underline{a})$

এখন, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow m(\underline{a}+\underline{b})=\underline{a}+n(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow m\underline{a}+m\underline{b}=\underline{a}+n\underline{b}-n\underline{a}$

$\Rightarrow (m-n)\underline{b}+(m+n-1)\underline{a}=\underline{0}$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর বলে,

$m-n=0\Rightarrow m=n$ এবং

$m+n-1=0\Rightarrow m+m=1 \therefore m=\frac{1}{2}=n$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ এবং $|\overrightarrow{BO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$

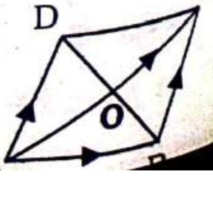
আবার, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$

$=|\underline{b}|^2-|\underline{a}|^2=0$, কারণ রম্বসের চারটি বাহু পরস্পর সমান।

অতএব, AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদিখন্ডিত করে।

4. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করে।



$\therefore \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

এখন, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdots(1)$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}$

$[\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}]$

$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \cdots (2)$

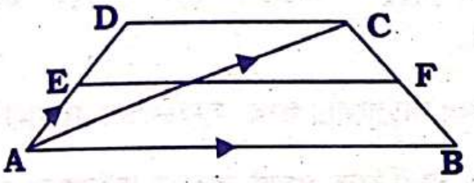
(1) ও (2) হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ AB = DC এবং AB ∥ DC [$\because$ AB ও DC একই রেখা হতে পারেনা।]

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

5. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

প্রমাণ ঃ



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F এবং A বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে মনে করি, B ও D এর অবস্থার ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$. $\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$. AB ∥ DC বলে যেকোন স্কেলার রাশি m এর জন্য $\overrightarrow{DC} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{a}$.

Δ ABC এ, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{b} + m\underline{a}$

$\therefore$ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \underline{b} + m\underline{a}$

$\therefore$ AD এর মধ্যবিন্দু E এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\underline{b}}{2}$

BC এর মধ্যবিন্দু F এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b} + m\underline{a})$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b} + m\underline{a}) - \dfrac{\underline{b}}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(1+m)\underline{a} = \dfrac{1}{2}(1+m)\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ *EF* বাহু AB এর সমান্তরাল । অতএব, *EF* , DC এরও সমান্তরাল।

আবার, $|\overrightarrow{EF}| = \dfrac{1}{2}(1+m)|\overrightarrow{AB}|$

$= \dfrac{1}{2}\{|\overrightarrow{AB}| + |m\overrightarrow{AB}|\}$

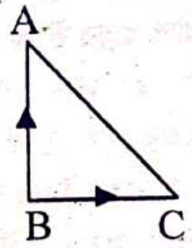
$= \dfrac{1}{2}\{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|\}$

$\therefore$ EF $= \dfrac{1}{2}$(AB + CD)

$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

6. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, AC অতিভুজ এবং B বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$.



$\therefore \angle ABC = 90^0$

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ বা, $\underline{a} \cdot \underline{c} = 0$

এখন, $\overrightarrow{CA} = \underline{a} - \underline{c}$

$\therefore \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = (\underline{a} - \underline{c}) \cdot (\underline{a} - \underline{c})$

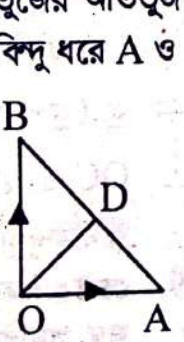
$\Rightarrow CA^2 = a^2 + c^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} = a^2 + c^2$

$\therefore CA^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

7. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ ঃ মনে করি, OAB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু D এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.



$\therefore \angle ABC = 90^0$

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ বা, $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

AB এর মধ্যবিন্দু D এর অবস্থান ভেক্টর$= \dfrac{a+b}{2} \therefore \overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$\therefore \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$

$\Rightarrow OD^2 = \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\underline{a} \cdot \underline{b}) = \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$

$\therefore \ OD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

$\overrightarrow{DA} = \underline{a} - \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$

$\overrightarrow{DB} = \underline{b} - \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

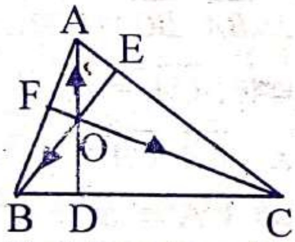
$\therefore \ DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2\underline{a}\cdot\underline{b})$

$\Rightarrow DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$

$\therefore \ DA = DB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

∴ একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

8. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।



প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A ও B হতে BC ও CA বাহুর উপর যথাক্রমে AD ও BE লম্ব দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A , B , C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. C, O এর সংযোগ রেখাংশের বর্ধিতাংশ AB কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

$\because \ AD \perp BC \ \therefore \ AO \perp BC$

$\therefore \ \underline{a}\cdot(\underline{c}-\underline{b}) = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b} \cdots (1)$

$\because \ BE \perp AC \ \therefore \ BO \perp AC$

$\therefore \ \underline{b}\cdot(\underline{c}-\underline{a}) = 0 \Rightarrow \underline{b}\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b} \cdots (2)$

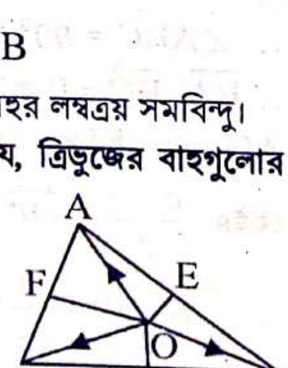
(1) ও (2) হতে পাই, $\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{c}$

$\Rightarrow \underline{c}\cdot(\underline{a}-\underline{b}) = 0$

∴ $OC \perp AB$ অর্থাৎ $CF \perp AB$

∴ শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

9. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।



প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ D , E , F যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু এবং O বিন্দু BC ও CA এর লম্ব-সমদ্বিখন্ডকের ছেদবিন্দু। O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A , B , C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

∴ D , E ও F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$, $\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})$ ও $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$.

$OD \perp BC$ এবং $OE \perp AC$ বলে,

$\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})\cdot(\underline{c}-\underline{b}) = 0 \Rightarrow |\underline{c}|^2 - |\underline{b}|^2 = 0 \cdots (1)$

$\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})\cdot(\underline{a}-\underline{c}) = 0 \Rightarrow |\underline{a}|^2 - |\underline{c}|^2 = 0 \cdots (2)$

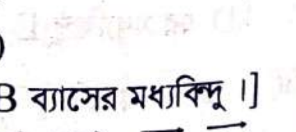
$(1) + (2) \Rightarrow |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b}) = 0$

∴ $OF \perp AB$. অতএব, OF , AB বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক।

∴ ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

10. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [ঢা.,চ.'১৩; সি.'০৯,'১২; রা.'১০;ব.,কু'১১]



প্রমাণ ঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস এবং পরিধির উপর C একটি বিন্দু ।

∴ OA = OB = OC = ব্যাসার্ধ

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$

$= (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BO})$

$= (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA})$

[∵ কেন্দ্র O , AB ব্যাসের মধ্যবিন্দু ।]

$= \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$

$= |\overrightarrow{CO}|^2 + \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA} - |\overrightarrow{OA}|^2$

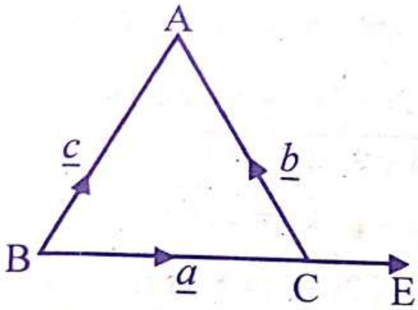
$= CO^2 - OA^2 = 0$

∴ $AC \perp BC$ অর্থাৎ $\angle ACB$ = এক সমকোণ

∴ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

11. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে (a) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ [ঢা.'১০,'১৪; রা. '১০; য.'১০; সি.'০৮; ব.'১০; কু.'১, চ.'১৩]

প্রমাণ ঃ ধরি ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$ এবং BC কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে।



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\therefore \underline{c} \cdot \underline{c} = (\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \underline{a} \cdot \underline{a} + \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{b} \cdot \underline{b}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2\, \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$[\because \underline{a} \cdot \underline{a} = a^2 \text{ এবং } \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}]$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2\,|\underline{a}||\underline{b}| \cos ACE$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - C)$$

$$[\because \angle ACE = \pi - \angle C]$$

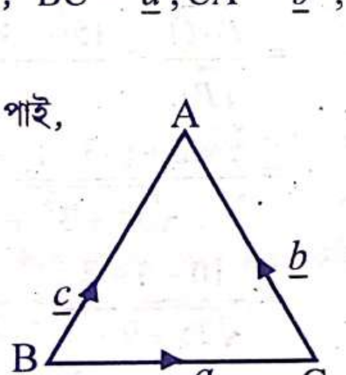
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(b) $\boldsymbol{c = a \cos B + b \cos A}$ **[কু.'০৮,'১১; চ.'১১]**

প্রমাণ ঃ ধরি ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$.

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\therefore \underline{c} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow c^2 = \underline{c} \cdot \underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{b}$$

$$\Rightarrow c^2 = ca \cos B + cb \cos A$$

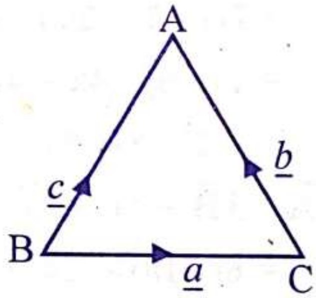
$$\therefore c = a \cos B + b \cos A$$

(c) $\boldsymbol{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}}$ **[সি.'০৫; চ. '০৭]**

প্রমাণ ঃ ধরি ABC ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}$,

$\overrightarrow{BA} = \underline{c}$



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\therefore \underline{c} \times \underline{c} = \underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow \underline{c} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{0} = -\underline{a} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{b}$$

$$\therefore \underline{a} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{b} \cdots \cdots (1)$$

আবার, $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times (\underline{a} + \underline{b})$

$$\Rightarrow \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} \cdots (2)\ [\because \underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}]$$

(1) ও (2) হতে পাই, $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{b}$

$$\Rightarrow ac \sin B\ \hat{n} = cb \sin A\ \hat{n}$$

$= ab \sin(\pi - C)\ \hat{n}$, যখন $\hat{n}$ হল ΔABC সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর।

$$\Rightarrow \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

সম্ভাব্য ধাপ (Step) সহ কিছু সমস্যা:

12. $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j}, \vec{B} = -\hat{i} + 5\hat{j}$, $\bar{C} = 8\hat{i} - 3\hat{j}$ হলে $\bar{A} - 3\bar{B}$ এবং $3\bar{A} - 7\bar{C}$ নির্ণয় কর। **[চ.'০১]**

সমাধান ঃ $\bar{A} - 3\bar{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3(-\hat{i} + 5\hat{j})$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{i} - 15\hat{j}$ **(১)**

$= 6\hat{i} - 13\hat{j}$ (Ans.) **(১)**

$3\bar{A} - 7\bar{C} = 3(3\hat{i} + 2\hat{j}) - 7(8\hat{i} - 3\hat{j})$

$= 9\hat{i} + 6\hat{j} - 56\hat{i} + 21\hat{j}$ **(১)**

$= -47\hat{i} + 27\hat{j}$ (Ans.) **(১)**

13. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ **হলে** $(2\vec{A} - \vec{B}).(6\vec{A} + 3\vec{B})$ **এর মান নির্ণয় কর।** **[য.'০৩]**

সমাধান ঃ $2\bar{A} - \bar{B}$

$= 2(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}) - (4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$= 2\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k}-4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ (১)

$= -2\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$ (১)

$6\overline{A}+3\overline{B} = 6(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})+3(4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$= 6\hat{i}+18\hat{j}-12\hat{k}+12\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}$

$= 18\hat{i}+12\hat{j}$

$\therefore\ (2\overline{A}-\overline{B}).(6\overline{A}+3\overline{B})$

$= (-2\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}).(18\hat{i}+12\hat{j})$

$= -36+96 = 60$ (১)

13. (b) $\underline{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{c} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে $(\underline{a}\cdot\underline{b})+(\underline{b}\cdot\underline{c})+(\underline{c}\cdot\underline{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৩; য.'০৯]

সমাধান ঃ $(\underline{a}\cdot\underline{b})+(\underline{b}\cdot\underline{c})+(\underline{c}\cdot\underline{a})$

$= (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) +$

$(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) +$

$(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

$= 1-1+1+1-1-1+1+1-1$ (১)

$= 1$

14. (a) $\vec{A} = \hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [কু.'০৫,'১৩]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}|$

$= \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ (১)

$|\overline{B}| = |2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ এবং

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

$= 2-2+3 = 3 = 4+20-11 = 13$ (১)

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \dfrac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \dfrac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$ (১)

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right)$ (১)

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right)$

14. (b) $2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [কু.'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, $\overline{A} = 2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$, $\overline{B} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore\ |\overline{A}| = |2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2}$

$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ (১)

$|\overline{B}| = |\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\overline{A}\cdot\overline{B} = (2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

$= 2+3+1 = 6 = 4+20-11 = 13$ (১)

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \dfrac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \dfrac{6}{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}$

$= \dfrac{6}{\sqrt{7}\times\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{6}{7}}$ (১)

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ (১)

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

15. (a) $\vec{P} = 5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q} = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [কু.'০৪; ঢা.'০৭]

সমাধান ঃ $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$= \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \dfrac{(5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})}{|5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$

$= \dfrac{5\times2+(-3\times1)+2\times-2}{\sqrt{5^2+3^2+2^2}}$ (১) + (১)

$= \dfrac{10-3-4}{\sqrt{25+9+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{38}}$ (Ans.)

15. (b) $\underline{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান ঃ $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$= \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \dfrac{(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}|}$

$$= \frac{2\times1+3\times2+2\times1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$ (১) + (১)

$$= \frac{2+6+2}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$ (Ans.)

16. $\underline{a} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ **এবং** $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ **ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে y এর মান নির্ণয় কর।** [চ.'০২; রা.'০৫; কু.'০৫]

সমাধানঃ $\underline{a} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য। (১)

$\therefore (2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 8 - 2y - 1 = 0$ (১)

$\Rightarrow 2y = 7 \therefore y = \frac{7}{2}$

17. $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে λ এর মান নির্ণয় কর।** [য.'০৮]

সমাধান ঃ $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$

ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বলে, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ (১)

$\Rightarrow 1(2\lambda - 1) + 1(2\lambda + \lambda) + 1(-2 - 2\lambda) = 0$ (১)

$\Rightarrow 2\lambda - 1 + 3\lambda - 2 - 2\lambda = 0$

$\Rightarrow 3\lambda = 3 \therefore \lambda = 1$ (Ans.)

18. $\bar{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} - 2\hat{k} + t(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ ও $\bar{r} = 7\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} + s(2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ **সরলরেখাদ্বয় ছেদ করে কিনা পরীক্ষা কর এবং যদি ছেদ করে তবে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\bar{r} = (3+2t)\hat{i} + (8-t)\hat{j} + (-2+3t)\hat{k}$ (১)

এবং $\bar{r} = (7+2s)\hat{i} + (4+s)\hat{j} + (3+4s)\hat{k}$

রেখাদ্বয় ছেদ করলে, $3 + 2t = 7 + 2s \cdots$ (i),

$8 - t = 4 + s \cdots \cdots$ (ii) এবং

$-2 + 3t = 3 + 4s \cdots \cdots$ (iii) সত্য হবে। (১)

(i) + (ii) $\times 2 \Rightarrow 3 + 16 = 7 + 8 + 4s$

$\Rightarrow 4s = 4 \Rightarrow s = 1$

(ii) হতে পাই, $8 - t = 4 + 1 \Rightarrow t = 3$

$s = 1, t = 3$ এর জন্য (iii) এর

বামপক্ষ $= -2 + 3\times3 = 7$ এবং

ডানপক্ষ $= 3 + 4\times1 = 7$ সমান।

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে। (১)

ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= 9\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$ (১)

(CQ উপযোগী কিছু সমস্যা)

19. **(a)** একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা **A(2, −3, −1)** বিন্দুগামী এবং $\underline{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

সমাধান: A(2, −3, −1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} + t(2\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k})$ (Ans.)

(b) **A** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$। একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর যা A বিন্দুগামী এবং $\underline{b} = \hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।

সমাধান: $A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} + t(\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$

$\Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} + t(\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$

$\Rightarrow (x-2)\hat{i} + (y+3)\hat{j} + (z-1)\hat{k} = t(\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{-2}$$

(c) একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা A(2, −1, 3) এবং B(1, 0, −2) বিন্দুগামী।

সমাধান: মনে করি, $A(2, -1, 3)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\underline{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $B(1, 0, -2)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\underline{b} = \hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k}$

$A(\underline{a})$ ও $B(\underline{b})$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + t\{\hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k} - (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + t\{\hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} + t(-2\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k})$

(d) **A** ও **B** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a} = 7\hat{i} + \hat{k}$ ও $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$ । একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর যা **A** ও **B** বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান: $A(\underline{a})$ ও $B(\underline{b})$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r} = 7\hat{i} + \hat{k} + t\{\hat{i} - 3\hat{j} - (7\hat{i} + \hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 7\hat{i} + \hat{k} + t\{\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{i} - \hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 7\hat{i} + \hat{k} + t(-6\hat{i} - 4\hat{j})$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ, $\dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{x-1}{-4}$

(e) $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ ও $3\hat{i} - \lambda\hat{j} - 7\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ হলে λ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ বলে,

$(\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \lambda\hat{j} - 7\hat{k}) > 0$

$\Rightarrow 3 + 4\lambda - 7\lambda > 0 \Rightarrow -3\lambda > -3$

$\therefore \lambda > 1$

(f) $\hat{i} + 3\hat{j} - \lambda\hat{k}$ ভেক্টর ও এ ভেক্টরের উপর $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে λ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\hat{i} + 3\hat{j} - \lambda\hat{k}$ ভেক্টর ও এ ভেক্টরের উপর $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= (\hat{i} + 3\hat{j} - \lambda\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$= 2 + 9 + \lambda = 11 + \lambda$

প্রশ্নমতে, $11 + \lambda = 9 \Rightarrow \lambda = -2$ (Ans.)

(g) **$A(2, -3, -6)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।**

সমাধান: $A(2, -3, -6)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$.

ধরি, এ ভেক্টর x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \cos\theta = \dfrac{(2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot \hat{i}}{|2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}||\hat{i}|} = \dfrac{2}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{1}}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{29}}$

20. $\mathbf{A \equiv (2, 2, 0)}$, $\mathbf{B \equiv (2, 0, 2)}$, $\mathbf{C \equiv (0, 0, 4)}$, $\mathbf{D \equiv (0, 2, 2)}$

(a) $\overrightarrow{AB}$ **ভেক্টরের উপর** $\overrightarrow{AD}$ **ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = (0-2)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের উপর $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$= \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$= \dfrac{(0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k})}{|0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}|}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{0+4+4}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (Ans.)

(b) $\overrightarrow{BC}$ **ভেক্টর বরাবর** $\overrightarrow{BD}$ **ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\overrightarrow{BC} = (0-2)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{BD} = (0-2)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (2-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর বরাবর $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরের অংশক

$$= \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}|^2} \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{(-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k})}{|-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}|^2} \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{4}{(\sqrt{4+0+4})^2} \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{4}{8}(-2\hat{i} + 2\hat{k}) = -\hat{i} + \hat{k} \text{ (Ans.)}$$

(c) $\angle DAB$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AD} = (0-2)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\angle DAB = \cos^{-1} \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \cos^{-1} \frac{(-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})}{|-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}||0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}|}$$

$$= \cos^{-1} \frac{0+0+4}{\sqrt{4+0+4}\sqrt{0+4+4}}$$

$$= \cos^{-1} \frac{4}{8} = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ (Ans.)}$$

(d) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, **ABCD** একটি রম্বস কিন্তু বর্গ নয়।

সমাধান: $\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (0-2)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{CD} = (0-0)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (2-4)\hat{k}$

$= 0\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\overrightarrow{DA} = (2-0)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (0-2)\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = (0-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{BD} = (0-2)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (2-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$\therefore$ $AB = |\overrightarrow{AB}| = |0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}|$

$= \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$

তদ্রূপ, $BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$

$CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$

$DA = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$

$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$

$BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ ABCD একটি রম্বস।

যেহেতু ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয় AC ও BD অসমান, সুতরাং ABCD বর্গ নয়।

(e) ভেক্টর গুণনের সাহায্যে ΔABD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = (0-2)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-4-0)\hat{i} - (0+4)\hat{j} + (0-4)\hat{k}$

$= -4\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ ΔABD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

$= \frac{1}{2}|-4\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{16+16+16} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$ বর্গ একক।

(f) ভেক্টর গুণনের সাহায্যে $\angle ABC$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{BA} = (2-2)\hat{i}+(2-0)\hat{j}+(0-2)\hat{k}$

$= 0\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (0-2)\hat{i}+(0-0)\hat{j}+(4-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (0\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}) \times (-2\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (4-0)\hat{i}-(0-4)\hat{j}+(0+4)\hat{k}$

$= 4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$

$\therefore \angle ABC = \sin^{-1}\frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$

$= \sin^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\pi}{3}$ (Ans.)

(g) ভেক্টর গুণনের সাহায্যে **A** হতে **BD** এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{BA} = (2-2)\hat{i}+(2-0)\hat{j}+(0-2)\hat{k}$

$= 0\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\overrightarrow{BD} = (0-2)\hat{i}+(2-0)\hat{j}+(2-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i}+2\hat{j}+0\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD} = (0\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}) \times (-2\hat{i}+2\hat{j}+0\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (0+4)\hat{i}-(0-4)\hat{j}+(0+4)\hat{k}$

$= 4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ A হতে BD এর দূরত্ব $= \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BD}|}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ একক।

(h) $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AC} = (0-2)\hat{i}+(0-2)\hat{j}+(4-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$

$\overrightarrow{CD} = (0-0)\hat{i}+(2-0)\hat{j}+(2-4)\hat{k}$

$= 0\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর,

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (4-8)\hat{i}-(4-0)\hat{j}+(-4+0)\hat{k}$

$= -4\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}|}$

$= \pm \frac{-4\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}}{4\sqrt{3}}$

$$= \pm \frac{-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

(i) A ও B বিন্দুদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overline{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overline{B} = 2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর, $\overline{A}\times\overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (4-0)\hat{i} - (4-0)\hat{j} + (0-4)\hat{k}$$
$$= 4\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$\therefore$ $|\overline{A}\times\overline{B}| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\overline{A}\times\overline{B}}{|\overline{A}\times\overline{B}|}$

$$= \pm \frac{4\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}}{4\sqrt{3}}$$
$$= \pm \frac{\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

(j) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\overrightarrow{AC} = (0-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$

$$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$$= -2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-8+4)\hat{i} - (0+4)\hat{j} + (0-4)\hat{k}$$
$$= -4\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$\therefore$ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$$= (-2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k})\cdot(-4\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$$
$$= 8 + 16 - 24 = 0$$

(k) কোন শর্তে A, B, C ও P(x, y, z) বিন্দু চারটি একই সমতলে অবস্থিত?

সমাধান: A, B, C ও P(x, y, z) বিন্দু চারটি একই সমতলে অবস্থিত।

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = (x-2)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-0)\hat{k}$,

$\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং

$\overrightarrow{AC} = (0-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হবে।

$$\therefore \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (x-2)(-8+4) - 2(2y-4+2z) = 0$

$\Rightarrow -4x + 8 - 4y + 8 - 4z = 0$

$\Rightarrow 4x + 4y + 4z - 16 = 0$

$\therefore$ $x + y + z - 4 = 0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(l) এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর যা $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ এর সাথে সমতলীয় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর উপর লম্ব।

সমাধান: $\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\overrightarrow{AD} = (0-2)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\overrightarrow{BC} = (0-2)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$$

ধরি, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোন ভেক্টর $\lambda(0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k})$ অর্থাৎ $-2\mu\,\hat{i} - 2\lambda\,\hat{j} + (2\lambda + 2\mu)\hat{k}$.

এ ভেক্টর $\overrightarrow{BC}$ -এর উপর লম্ব হলে,

$-2(-2\mu) + (0)(-2\lambda) + 2(2\lambda + 2\mu) = 0$

$\Rightarrow 4\mu + 4\lambda + 4\mu = 0 \Rightarrow 4\lambda = -8\mu$

$\Rightarrow \lambda = -2\mu$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC}$ -এর উপর লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে,

$-2\mu\,\hat{i} + 4\mu\,\hat{j} + (-4\mu + 2\mu)\hat{k}$

$= -2\mu\,\hat{i} + 4\mu\,\hat{j} - 2\mu\,\hat{k}$

$$\therefore \underline{c} = \pm\frac{-2\mu\hat{i} + 4\mu\hat{j} - 2\mu\hat{k}}{\sqrt{4\mu^2 + 16\mu^2 + 4\mu^2}}$$

$$= \pm\frac{2\mu(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{24\mu^2}}$$

$$= \pm\frac{2\mu(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{2\mu\sqrt{6}}$$

$$= \pm\frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{6}} \text{ (Ans.)}$$

(m) $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\overrightarrow{AC} = (0-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$

$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{BD} = (0-2)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (2-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর লব্ধি ভেক্টর $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} - 2\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$= -4\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

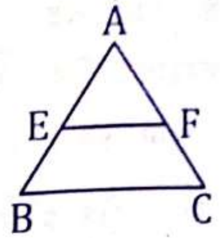
$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক

ভেক্টর $= \pm\dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|} = \dfrac{-4\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}}{4\sqrt{2}}$

$= \dfrac{-\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$ (Ans.)

(n) ΔABC এ **AB** ও **AC** এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে **E** ও **F** হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, **EF || BC.**

সমাধানঃ



AB এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{2+2}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}) = (2, 1, 1)$

AC এর মধ্যবিন্দু F এর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{2+0}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}) = (1, 1, 2)$

$\overrightarrow{BC} = (0-2)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{EF} = (1-2)\hat{i} + (1-1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}$

ΔABC এ **AB** ও **AC** এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে **E** ও **F.**

$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 0\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(-2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= -\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{EF} = (-2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}) \times (-\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (0-0)\hat{i} - (-2+2)\hat{j} + (0-0)\hat{k} = \bar{0}$

$\therefore$ EF || BC

(o) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ ধারবিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB} = (2-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = (0-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$
$= -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = (0-2)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$
$= -2\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-4-0)\hat{i} - (0+4)\hat{j} + (0-4)\hat{k}$
$= -4\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ ধারবিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন

$= (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -4 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$

$= 2(16+8) = 16$ ঘন একক।

* একটি বস্তুর উপর $\overline{F}$ বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\overline{r}$ হলে, কাজ $= \overline{F} . \overline{r}$

* O এর সাপেক্ষে $\overline{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপরস্থ কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{r}$ হলে, O এর চতুর্দিকে $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট $= |\overline{r} \times \overline{F}|$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান – [DU 02-03, 06-07; NU 08-09, 05-06; RU 12-13,09-10]

   Sol^n. $4\lambda - 6 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

2. $\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ও $m\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে m এর মান – [BUET 07-08]

   Sol^n. $m + 6 - 24 = 0 \Rightarrow m = 18$

3. $\overrightarrow{F_1} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ ও $\overrightarrow{F_2}$ বল দুইটির লব্ধি $\overrightarrow{F_3} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$ হলে $\overrightarrow{F_2} = ?$ [DU 06-07]

   Sol^n. $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} \Rightarrow \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} - \overrightarrow{F_1}$

   $\Rightarrow \overrightarrow{F_2} = (5\hat{i} + 4\hat{j}) - (2\hat{i} - 3\hat{j}) = 3\hat{i} + 7\hat{j}$

4. $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে $\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$ [DU 01-02]

   Sol^n. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 - 2 - 3 = -3$

5. $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশের মান- [CU 07-08]

   Sol^n. মান $= \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{4+20-11}{\sqrt{4+100+121}} = \dfrac{13}{15}$

6. $\vec{Y} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{X} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ–[CU 07-08]

   Sol^n. অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{Y}|} = \dfrac{-2-3-20}{\sqrt{4+9+25}} = \dfrac{-25}{\sqrt{38}}$

7. $\vec{X} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{Y} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ- [CU 07-08]

   Sol^n. $\cos\theta = \dfrac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{X}||\vec{Y}|}$

   $= \dfrac{12-2-10}{\sqrt{16+4+25}\sqrt{9+1+4}} = 0 \therefore \theta = 90°$

8. $2\hat{i} - 3\hat{k}$ এবং $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ– [BUET 07-08]

   Sol^n. $\cos\theta = \dfrac{2+0-3}{\sqrt{4+9}\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}}$

   $\therefore \theta = \cos^{-1}(\dfrac{-1}{\sqrt{39}})$

9. a এর মান কত হলে, $\vec{A}=5\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=15\hat{i}+a\hat{j}+9\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে। [IU 07-08]

Sol^n. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল বলে, $\frac{5}{15}=\frac{2}{a}=\frac{3}{9}$

$\therefore\ a=6$

10. দুইটি ভেক্টর $\vec{A}=2\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর – [SU 06-07]

Sol^n. $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}$

$=(6+9)\hat{i}-(-2+12)\hat{j}+(6+24)\hat{k}$

$\therefore\ \hat{\eta}=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\pm\frac{15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}}{\sqrt{225+100+900}}$

$=\pm\frac{1}{7}(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$

11. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2+|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ এর মান–

Sol^n. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2+|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$
$=(AB\sin\theta)^2+(AB\cos\theta)^2$
$=A^2B^2$

12. $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ একক ভেক্টর হলে $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})=?$

Sol^n. $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})=\hat{i}\cdot\hat{i}=1$

13. m ভরের একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত $\vec{F}=5\vec{x}+4\vec{y}$ বলের কারণে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল বস্তুটি উপর যে বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির গতিপথের সাথে 45° কোণ তৈরী করবে সে বলের মান কত? [RU 07-08]

Sol^n. $(5\vec{x}+4\vec{y})\cos 45°$

14. যদি বল $\vec{F}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ এর সরণ $\vec{S}=\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ হয় হবে কাজ W = ? [RU 06-07]

Sol^n. $W=\vec{F}\cdot\vec{S}=2+6+5=13$

15. যদি প্রযুক্ত বল $\vec{F}=5\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এর ঘূর্ণায়মান কণার অক্ষের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ হয় তবে বলের মোমেন্ট T এর মান কত? [RU 06-07]

Sol^n.: $\vec{T}=\vec{F}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$

$=(6-1)\hat{i}-(9+2)\hat{j}+(-3-4)\hat{k}$
$=5\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}$

$\therefore\ T=|\vec{T}|=\sqrt{25+121+49}=\sqrt{195}$

16. XOZ তলের সমানন্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর হবে– $15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}$ [BUET 10-11]

Sol^n.: XOZ তলের সমানতরাল বলে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে। XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব ভেক্টর $4\hat{i}-3\hat{k}$.

নির্ণেয় একক ভেক্টর $=\frac{4\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{16+9}}=\frac{4\hat{i}-3\hat{k}}{5}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন :

1. ভেক্টরের বিয়োগ অনুযায়ী $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$
   $\therefore$ Ans. (b)

2. *Sol^n*. সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

3. $2\overline{A}-\overline{B}=4\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}-(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$
   $=-2\hat{i}+7\hat{j}$
   $\therefore\ |2\overline{A}-\overline{B}|=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$
   $\therefore$ Ans. (c)

4. নির্ণেয় কোণ $=\cos^{-1}\frac{(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}).\hat{j}}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1}}=\cos^{-1}\frac{2}{3}$
   $\therefore$ Ans. (b)

5. নির্ণেয় ভেক্টর $=\frac{6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}}{7}$

$\therefore$ Ans. (a)

6. ***Sol**ⁿ*. z অক্ষের উপর $\overline{A}$ ভেক্টরটির অংশক $\hat{k}$, x অক্ষ বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরটির অভিক্ষেপ 6, ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর $\pm\frac{1}{7}(8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$ $\therefore$ Ans. (d)

7. $|\overline{A}|=\sqrt{9+4+36}=7$ $\therefore$ Ans. (c)

8. $(2\hat{i}+a\hat{j}-\hat{k}).(-4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})=0$
$\Rightarrow -8-2a-2=0 \Rightarrow -2a=10$
$\Rightarrow a=-5$ $\therefore$ Ans. (c)

9. ***Sol**ⁿ*. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})$
$\Rightarrow A^2+B^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}=A^2+B^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}$
$\Rightarrow 4\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=0$ $\therefore$ কোণ $=90°$
$\therefore$ Ans. (b)

10. ***Sol**ⁿ*. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{4}$ এর ভেক্টর সমীকরণ
$\underline{r}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}+t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$
$\therefore$ Ans. (a)

11. ***Sol**ⁿ*. $(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}).(3\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$
$=6+3-2=7$ $\therefore$ Ans. (b)

12. ***Sol**ⁿ*. $\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ও $2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ এর লব্ধির মান $=\sqrt{(1+2)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(-2-1)\hat{k}}$
$=\sqrt{3\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}}=\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19}$
$\therefore$ Ans. (d)

13. ***Sol**ⁿ*. $|\overline{A}|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$
$\overline{A}\cdot\overline{B}=(2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$
$=4-2-2=0$ $\therefore \overline{A}\,\|\,\overline{B}$
$\overline{B}-\overline{A}=0\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$ $\therefore$ Ans. (c)

14. ***Sol**ⁿ*. $\hat{i}.\hat{i}=1$ $\therefore$ Ans. (a)

15. ***Sol**ⁿ*. $\overline{A}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$,
$\overline{B}=-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে,

$$\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$
$=(1-2)\hat{i}-(1-4)\hat{j}+(-1+2)\hat{k}$
$=-\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ $\therefore$ Ans. (b)

16. ***Sol**ⁿ*. $\overrightarrow{BA}=(1+3)\hat{i}+(2+2)\hat{j}+(3+1)\hat{k}$
$=4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ $\therefore$ Ans. (a)

17. ***Sol**ⁿ*. $4\lambda-6-6=0\Rightarrow 4\lambda=12\Rightarrow\lambda=3$
$\Rightarrow$
$\therefore$ Ans. (c)

18. Solⁿ.: $a^2-5a+6=0\Rightarrow(a-3)(a-2)=0$
$\Rightarrow a=3, 2$ $\therefore$ Ans. (c)

19. ***Sol**ⁿ*. $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}\Rightarrow\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}-\overrightarrow{F_1}$
$\Rightarrow\overrightarrow{F_2}=(5\hat{i}+4\hat{j})-(2\hat{i}-3\hat{j})=3\hat{i}+7\hat{j}$
$\therefore$ Ans.(d)

20. Solⁿ.: মধ্যবর্তী কোণ $\theta=\cos^{-1}\frac{\overline{P}\cdot\overline{Q}}{|\overline{P}|\cdot|\overline{Q}|}$
$\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{2.3+(-1)(-6)+2.(-2)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+36+4}}$
$=\cos^{-1}\frac{6+6-4}{3.7}=\cos^{-1}\frac{8}{21}$
$\therefore$ Ans. (b)

21. Solⁿ.: $\frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{B}|}=\frac{2.2+10.2+(-11).1}{\sqrt{4+100+121}}$
$=\frac{4+20-11}{15}=\frac{13}{15}$ $\therefore$ Ans. (a)

22. Solⁿ.: $\vec{A}$ এর দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের এর উপাংশের দৈর্ঘ্য $=|\vec{B}|\cos\theta$ $\therefore$ Ans. (a)

23. Solⁿ.: $\theta=\cos^{-1}\frac{\overline{X}\cdot\overline{Y}}{|\overline{X}||\overline{Y}|}$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{4.3+(-2)1+5(-2)}{\sqrt{16+4+25}\sqrt{9+1+4}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{12-2-10}{\sqrt{45}\sqrt{14}} = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{45}\sqrt{14}}$$

$$= 90^0 \quad \therefore \text{Ans. (d)}$$

24. Sol^n.: $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$

$= (2-1+1)+(1-1-1)+(2+1-1)$

$= 2-1+2=3 \quad \therefore$ Ans. (d)

25. Sol^n.: $\theta = \cos^{-1}\dfrac{1(-1)+(-1)1+1(2)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+1+4}}$

$$= \cos^{-1}\frac{-1-1+2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 90^0$$

$\therefore$ Ans. (d)

26. Sol^n.: $\vec{A}+\vec{B} = 4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{A}-\vec{B} = -2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\frac{4(-2)+1(3)+(-1)(-5)}{\sqrt{16+1+1}\sqrt{4+9+25}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{-8+3+5}{\sqrt{18}\sqrt{38}} = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{18}\sqrt{38}} = 90^0$$

$\therefore$ Ans. (b)

27. Sol^n.: $(5\vec{x}+4\vec{y})\cos 45°$

28. Sol^n.: XOZ তলের সমানতরাল বলে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে। XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব ভেক্টর $4\hat{i}-3\hat{k}$.

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{5}$

$\therefore$ Ans. (b)

29. Sol^n.: $\theta = \cos^{-1}\dfrac{(2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})\cdot\hat{j}}{|2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}||\hat{j}|}$

$$= \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{4+9+36}} = \cos^{-1}\frac{3}{7}$$

$\therefore$ Ans. (c)

30. Sol^n.: $\bar{P}\cdot\bar{Q}=0$

$\Rightarrow (4\hat{i}+m\hat{j})\cdot(6\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})=0$

$\Rightarrow 24-4m=0 \Rightarrow m=6 \quad \therefore$ Ans. (b)

31. Sol^n.: $\bar{A}\times\bar{B} = -(\bar{B}\times\bar{A}) \quad \therefore$ Ans. (a)

32. Sol^n.: অংশক $= \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}\hat{a}$

$$= \frac{2.1+4.1+(-1)3}{\sqrt{4+16+1}}\hat{a}$$

$$= \frac{2+4-3}{\sqrt{21}}\hat{a} = \frac{3}{\sqrt{21}}\hat{a} \quad \therefore \text{Ans. (d)}$$

33. Sol^n.: $\theta = \cos^{-1}\dfrac{(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})\cdot\hat{k}}{|2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}|}$

$$= \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \cos^{-1}\frac{2}{3} \quad \therefore \text{Ans. (c)}$$

34. Sol^n.: $\overline{BA} = \overline{OA}-\overline{OB} = \underline{a}-\underline{b} \therefore$ Ans. (a)

35. Sol^n.: $(\hat{j}\times\hat{i})\hat{k} = (-\hat{k}).\hat{k} = -1 \therefore$ Ans. (a)

36. Sol^n.: সামন্তরিকের প্রধান কর্ণের দৈর্ঘ্য $= |\vec{P}+\vec{Q}|$

$\therefore$ Ans. (a)

37. Sol^n.: $2.3+(-3).(-4)+a.3=0$

$\Rightarrow 6+12+3a=0 \Rightarrow a=-6 \therefore$ Ans. (a)

38. Sol^n.: $\overline{OP}$ বরাবর $\overline{OQ}$ এর অভিক্ষেপ

$$= \frac{1.2+3(-3)+4.5}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}} \quad \therefore \text{Ans. (a)}$$

39. Sol^n.: $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ বরাবর একক ভেক্টর

$$= \frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}} \quad \therefore \text{Ans. (d)}$$

40. Sol^n.: $\dfrac{1}{2}\hat{i}+\dfrac{1}{3}\hat{j}+\hat{k}$ এর মান

$$= \left|\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\hat{k}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+1}$$

$$= \sqrt{\frac{9+4+36}{36}} = \frac{7}{6} \quad \therefore \text{Ans. (a)}$$

41. Solⁿ.: $\vec{a}.\vec{b}$ এর মান $= 1(-2) = -2$
$\therefore$ Ans. (a)

42. Solⁿ.: $\vec{r} = -4\hat{i} + +3\hat{j}$ $\therefore$ Ans. (c)

43. Solⁿ.: $\underline{b}$ এর উপর $\underline{a}$ এর অভিক্ষেপ

$$= \frac{1.2 + (-2)3 + (-2)(-6)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{2 - 6 + 12}{7} = \frac{8}{7} \therefore \text{ Ans. (b)}$$

44. Solⁿ.: $\theta = \cos^{-1}\frac{1(-3) + (-1)2 + 1.1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{9+4+1}}$

$$= \cos^{-1}\frac{-3-2+1}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{42}}$$

$\therefore$ Ans. (d)

45. Solⁿ.: A ও B উভয়ের উপর লম্ব ভেক্টর $\frac{\overline{A} \times \overline{B}}{|\overline{A} \times \overline{B}|}$

$\therefore$ Ans. (d)

46. Solⁿ.: $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(1-0) - \hat{j}(1-0) + \hat{k}(1-0) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ $\therefore$ Ans.(c)

47. Solⁿ.: $|\hat{a}| = 1$ $\therefore$ Ans.(b)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. $\overline{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overline{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

(a) $\overline{A} \times \overline{B}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : $\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (4-3)\hat{i} - (2+9)\hat{j} + (-1-6)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

খ. $\overline{A} + \overline{B}$ এবং $\overline{A}$ ভেক্টর দুইটির **মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

$$\overline{A} + \overline{B} = (1+3)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (-3+2)\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

ধরি, $\overline{A} + \overline{B}$ ও $\overline{A}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ.

$$\therefore \cos\theta = \frac{(\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{A}}{|\overline{A} + \overline{B}||\overline{A}|}$$

$$= \frac{(4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})}{|4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}||\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}|}$$

$$= \frac{4+2+3}{\sqrt{16+1+1}\sqrt{1+4+9}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{14}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{9}}{2\sqrt{7}} \quad \text{(Ans.)}$$

(c) দেখাও যে, $\overline{A}$, $\overline{A} - \overline{B}$ **এবং** $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।**

প্রমাণ: $|\overline{A}| = |\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$$|\overline{A} - \overline{B}| = |-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$$

$$|4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{38}$ ও $\sqrt{24}$ এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $(\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2 = 14 + 24 = 38 = (\sqrt{38})^2$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

2. ABC ত্রিভুজের BC, CA , AB বাহগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E , F ।

(a) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে** λ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বলে,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2\lambda - 1 + 2\lambda + \lambda - 2 - 2\lambda = 0$

$\Rightarrow 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (Ans.)

(b) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা IIA এর উদাহরণ 1(c)

(c) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

প্রমাণ: প্রশ্নমালা IIC এর 2 নং প্রশ্ন।

3. $\overline{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overline{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

(a) P(3, −1, 4), Q(4, − 3, −2) হলে y-অক্ষের উপর $\overrightarrow{PQ}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$\overrightarrow{PQ} = (4-3)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-2-4)\hat{k}$

$= \hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore$ y-অক্ষের উপর $\overrightarrow{PQ}$ এর অভিক্ষেপ -2

(b) $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর লব্ধি বল এবং $\overline{A}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর লব্ধি বল $= \overline{A} + \overline{B}$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k} + 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$= 5\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

ধরি, $\overline{A} + \overline{B}$ ও $\overline{A}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ.

$$\therefore \cos\theta = \frac{(\overline{A}+\overline{B})\cdot\overline{A}}{|\overline{A}+\overline{B}||\overline{A}|}$$

$$= \frac{(5\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k})\cdot(2\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k})}{|5\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}||(2\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k})|}$$

$$= \frac{5\times3+(-4)\times(-6)+(-1)\times3}{\sqrt{5^2+4^2+1^2}\sqrt{2^2+6^2+3^2}}$$

$$= \frac{15+24-3}{\sqrt{25+16+1}\times\sqrt{4+36+9}}$$

$$= \frac{36}{\sqrt{42}\times\sqrt{49}} = \frac{36}{\sqrt{42}\times7} = \frac{36}{7\sqrt{42}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{36}{7\sqrt{42}}\right)$$

$\therefore$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\left(\frac{36}{7\sqrt{42}}\right)$

(c) $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর,

$$\overline{A}\times\overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$= (24-6)\hat{i} - (-8-9)\hat{j} + (4+18)\hat{k}$

$= 18\hat{i} + 17\hat{j} + 22\hat{k}$

$\therefore |\overline{A}.\times\overline{B}| = \sqrt{18^2+17^2+22^2}$

$= \sqrt{324+289+484}$

$= \sqrt{1097}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm\dfrac{\overline{A}\times\overline{B}}{|\overline{A}\times\overline{B}|}$

4. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\underline{b} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ।

(a) $\underline{a}\times\underline{b}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\underline{a}\times\underline{b} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})\times(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$= (-9+4)\hat{i} - (6+1)\hat{j} + (8+3)\hat{k}$

$= -5\hat{i} - 7\hat{j} + 11\hat{k}$ **(Ans.)**

(b) AB এর মধ্যবিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

AB এর মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} + \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

$= \frac{3}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \hat{k} = \underline{c}$ (ধরি)

$$\overrightarrow{AB} = (\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}) - (2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$$
$$= -\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k}$$

$A(\underline{c})$ বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{d}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$$\underline{r} = \underline{c} + t\underline{d}$$
$$\Rightarrow \underline{r} = \frac{3}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\hat{k}+t(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})$$
$$\therefore\ x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = \frac{3}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\hat{k} + t(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})$$
$$(x-\frac{3}{2})\hat{i}+(y-\frac{1}{2})\hat{j}+(z-1)\hat{k} = t(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})$$

∴ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

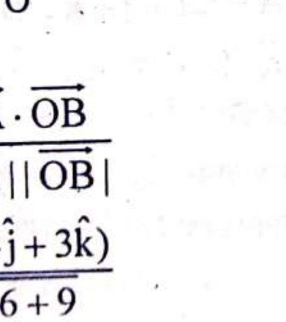
$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{7} = \frac{z-1}{4}$$

(c) OAB ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$$
$$\therefore\ OA = |\overrightarrow{OA}|$$
$$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$
$$\overrightarrow{OB} = \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$
$$\therefore\ OB = |\overrightarrow{OB}|$$
$$= \sqrt{1+16+9} = \sqrt{21}$$

এবং $\overrightarrow{AB} = \sqrt{66}$



∴ $\angle AOB$ বৃহত্তম কোণ।

এখন, $\cos AOB = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\,\sqrt{1+16+9}}$$
$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{14}\,\sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\therefore\ \angle AOB = \cos^{-1}(\frac{-13}{\sqrt{364}})\ \text{(Ans.)}$$

5. $\overline{P} = \overrightarrow{OA} = 3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$,
$\overline{Q} = \overrightarrow{OB} = 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$, O মূলবিন্দু।

(a) $|\overline{P}+\overline{Q}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\overline{P}+\overline{Q} = 3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}+3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$$
$$= 6\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}$$
$$\therefore\ |\overline{P}+\overline{Q}| = \sqrt{6^2+5^2+8^2} = \sqrt{36+25+64}$$
$$= \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

(b) (2, 4, 6) বিন্দুগামী $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$= 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}-(3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})$$
$$= 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}-3\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k} = \hat{j}$$

(2, 4, 6) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$$\underline{a} = 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$$

∴ (2, 4, 6) বিন্দুগামী $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$$\underline{r} = \underline{a} + t\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}+t\hat{j}$$
$$\Rightarrow (x-2)\hat{i}+(y-4)\hat{j}+(z-6)\hat{k} = t(0\hat{i}+1\hat{j}+0\hat{k})$$

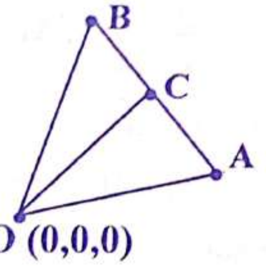
উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $x-2 = 0t,\ y-4 = t,\ z-6 = 0t$

∴ নির্ণেয় সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ,

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-6}{0} (= t)$$

(c) **AB** এর মধ্যবিন্দু হতে **OA** এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :



AB এর মধ্যবিন্দু হলে C, $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}+3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$=3\hat{i}-\frac{5}{2}\hat{j}+4\hat{k}$

C হতে OA এর লম্ব দূরত্ব $=\frac{|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|}$

এখন, $\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -5/2 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{vmatrix}$

$=(-10+12)\hat{i}-(12-12)\hat{j}+(-9+\frac{15}{2})\hat{k}$

$=2\hat{i}-\frac{3}{2}\hat{k}$

নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব $=\frac{|2\hat{i}-\frac{3}{2}\hat{k}|}{|3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}|}$

$=\frac{\sqrt{4+\frac{9}{4}}}{\sqrt{9+9+16}}=\frac{5/2}{\sqrt{34}}=\frac{5}{2\sqrt{34}}$ একক

6. $\overline{A}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overline{B}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

(a) $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ স্কেলার গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে -ব্যাখ্যা কর।

সমাধান : $\overline{A}\cdot\overline{B}=(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})$

$=3\times1+2\times(-3)+1\times5=3-6+5=2$

$\overline{B}\cdot\overline{A}=(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

$=1\times3+(-3)\times2+5\times1=3-6+5=2$

$\therefore\ \overline{A}\cdot\overline{B}=3=\overline{B}\cdot\overline{A}$

$\therefore$ $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ স্কেলার গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

(b) $(\overline{A}+\overline{B})$ এর উপর $(\overline{A}-\overline{B})$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}+\overline{B}=(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})+(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

$=4\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$

$\overline{A}-\overline{B}=(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})-(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})$

$=2\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}$

$\therefore$ $(\overline{A}+\overline{B})$ এর উপর $(\overline{A}-\overline{B})$ এর অভিক্ষেপ

$=\frac{(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{A}-\overline{B})}{|\overline{A}+\overline{B}|}$

$=\frac{(4\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})\cdot(2\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k})}{|4\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}|}$

$=\frac{8-5-24}{\sqrt{4^2+(-1)^2+6^2}}=\frac{-21}{\sqrt{16+1+36}}$

$=$ (Ans.)

(c) $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}$

$=(10+3)\hat{i}-(15-1)\hat{j}+(-9-2)\hat{k}$

$=13\hat{i}-14\hat{j}-11\hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=|\overline{A}\times\overline{B}|$

$=\sqrt{13^2+(-14)^2+(-11)^2}$

$=\sqrt{169+196+121}=\sqrt{486}$ বর্গ একক।

7. $\overline{A}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

(a) $\overline{A}$ বিন্দুগামী এবং $\overline{B}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ বিন্দুগামী এবং $\overline{B}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r}=\overline{A}+t\overline{B}$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow \underline{r}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+t(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ (Ans)

(b) $\overline{A}$ বরাবর $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের উপাংশের একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

$\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর লব্ধি ভেক্টর $=\overline{A}+\overline{B}$

$=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$=\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k}$

$\overline{A}$ বরাবর $\overline{A}+\overline{B}$ এর উপাংশ

$=\frac{\overline{A}\cdot(\overline{A}+\overline{B})}{|\overline{A}|^2}\overline{A}$

$=\frac{(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k})}{|2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}|}(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$=\frac{2+0+2}{\sqrt{4+1+1}}(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$=\frac{4}{\sqrt{6}}(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ (Ans.)

(c) একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ এর সাথে সমতলীয় এবং $\overline{A}$ এর উপর লম্ব।

সমাধান : ধরি, $\overline{A}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ও $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোনো ভেক্টর $\lambda(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+\mu(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

অর্থাৎ $(2\lambda+3\mu)\hat{i}+(\lambda-\mu)\hat{j}+(\lambda+\mu)\hat{k}$

এ ভেক্টর $\overline{A}$-এর উপর লম্ব হলে,

$(2\lambda+3\mu)(2)+(\lambda-\mu)(1)+(\lambda+\mu)(1)=0$

$\Rightarrow 4\lambda+6\mu+\lambda-\mu+\lambda+\mu=0$

$\Rightarrow 6\lambda=-6\mu\Rightarrow\lambda=-\mu$

$\therefore$ $\overline{A}$-এর উপর লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে,

$(-2\mu+3\mu)\hat{i}+(-\mu-\mu)\hat{j}+(-\mu+\mu)\hat{k}$

$=\mu\hat{i}-2\mu\hat{j}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $=\pm\frac{\mu\hat{i}-2\mu\hat{j}}{\sqrt{\mu^2+4\mu^2}}$

$=\pm\frac{\mu(\hat{i}-2\hat{j})}{\sqrt{5}\mu}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i}-2\hat{j})$ (Ans.)

8. $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $\overrightarrow{OB}=2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ **এবং O মূলবিন্দু।**

(a) $3\hat{j}+5\hat{k}$ কোন তলে অবস্থান করে - ব্যাখ্যা কর।

সমাধান: $3\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ ধনাত্মক y-অক্ষের উপর 3 এবং ধনাত্মক z –অক্ষের উপর 5. সুতরাং প্রদত্ত ভেক্টরটি YOZ অর্থাৎ yz তলে অবস্থিত।

(b) (1, 3, −5) বিন্দুগামী $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}-(2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})$

$=2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

$=0\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$

এখন, (1, 3, −5) বিন্দুগামী $0\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ

$\frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{5}=\frac{y+5}{-8}(=t)$

(c) AB এর মধ্যবিন্দু D হলে, ΔOAD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB এর মধ্যবিন্দু D.

$\therefore$ $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}(2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}+2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$

$=\frac{1}{2}(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=2\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+\hat{k}$

ΔOAD এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OD}|$

এখন, $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OD}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 2 & -1/2 & 1\end{vmatrix}$

$=(-3+\frac{5}{2})\hat{i}-(2-10)\hat{j}+(-1+6)\hat{k}$

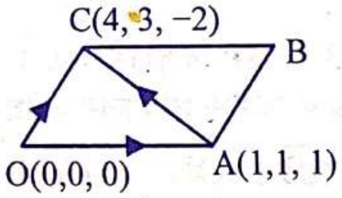
$=-\frac{1}{2}\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$

$= -\frac{1}{2}\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore$ ΔOAD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k} \mid$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 64 + 25} = \frac{\sqrt{357}}{4}$ বর্গ একক।

9. চিত্রে, **OABC** একটি সামান্তরিক।



(a) $|\overrightarrow{AC}|$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

$\overrightarrow{AC} = (4-1)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$
$= 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$ (Ans.)

(b) AB এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, (1, 1 , 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OC} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} = \underline{b}$

$\therefore$ A(1, 1, 1) বিন্দুগামী এবং OC বাহুর সমান্তরাল AB বাহুর ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow \underline{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + t(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

(c) **A ও B বিন্দুদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

সমাধান: A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$.

A ও B বিন্দুদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \frac{\overline{A} \times \overline{B}}{|\overline{A} \times \overline{B}|}$

এখন, $\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-2-3)\hat{i} - (-2-4)\hat{j} + (3-4)\hat{k}$
$= -5\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $|\overline{A} \times \overline{B}| = \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \frac{-5\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{62}}$

10. $\overline{A} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} - 5\hat{k}$, $\overline{B} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overline{C} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

(a) **$\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ হলে λ এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: **$\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ সূক্ষ্মকোণ।**

$\therefore$ $\overline{A} \cdot \overline{B} > 0$

$\Rightarrow (3\hat{i} + \lambda\hat{j} - 5\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k})$

$\Rightarrow 6 - 6\lambda - 15 > 0 \Rightarrow -6\lambda > 9 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{2}$

(b) $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ কোনো ত্রিভুজের বাহু হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{B} \times \overline{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

$= (-36+9)\hat{i} - (12-15)\hat{j} + (-6+30)\hat{k}$
$= -27\hat{i} + 3\hat{j} + 24\hat{k}$

$\therefore$ ত্রিভুজটির নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overline{B} \times \overline{C}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(-27)^2 + (3)^2 + (24)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{729+9+576} = \frac{1}{2}\sqrt{1314}$ বর্গ একক

(c) $\overline{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{A}$ নির্ণয় কর যা $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ এর সাথে সমতলীয়।

সমাধান: ধরি, $\overline{B} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ ও

$\overline{C} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোনো ভেক্টর $\alpha(2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) + \mu(5\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

অর্থাৎ, $(2\alpha + 5\mu)\hat{i} + (-6\alpha - 3\mu)\hat{j} + (3\alpha + 6\mu)\hat{k}$

এ ভেক্টরের দিক ও $\overline{A} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} - 5\hat{k}$ -এর দিক একই হলে,

$$\frac{2\alpha + 5\mu}{3} = \frac{-6\alpha - 3\mu}{\lambda} = \frac{3\alpha + 6\mu}{-5}$$

১ম ও শেষ অনুপাত হতে পাই, $\frac{2\alpha + 5\mu}{3} = \frac{3\alpha + 6\mu}{-5}$

$$\Rightarrow 9\alpha + 18\mu = -10\alpha - 25\mu$$

$$\Rightarrow 19\alpha = -43\mu \ \square\ \alpha = -\frac{43}{19}\mu$$

$\therefore$ $\overline{A}$ -এর দিকে ভেক্টরটি হচ্ছে,

$$(-\frac{86}{19}\mu + 5\mu)\hat{i} + (\frac{256}{19}\mu - 3\mu)\hat{j} + (-\frac{129}{19}\mu + 6\mu)\hat{k}$$

$$= \frac{-86+95}{19}\mu\,\hat{i} + \frac{256-57}{19}\mu\,\hat{j} + \frac{-129+114}{19}\mu\,\hat{k}$$

$$= \frac{9}{19}\mu\,\hat{i} + \frac{199}{19}\mu\,\hat{j} - \frac{15}{19}\mu\,\hat{k}$$

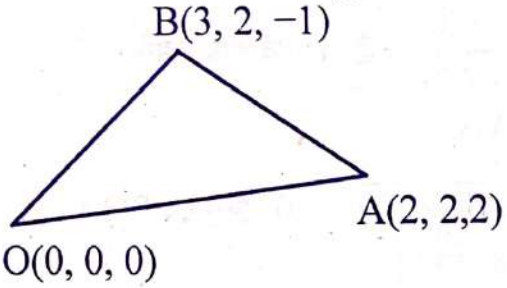
$\therefore$ $\overline{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর

$$\hat{A} = \frac{\frac{9}{19}\mu\hat{i} + \frac{199}{19}\mu\hat{j} - \frac{15}{19}\mu\hat{k}}{\sqrt{(\frac{9}{19}\mu)^2 + (\frac{199}{19}\mu)^2 + (-\frac{15}{19}\mu)^2}}$$

$$= \frac{9\hat{i} + 199\hat{j} - 15\hat{k}}{\sqrt{81 + 39601 + 225}}$$

$$= \frac{9\hat{i} + 199\hat{j} - 15\hat{k}}{\sqrt{39907}}$$

11. OA ও OB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.



(a) AB এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, (2, 2, 2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং (3, 2, −1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

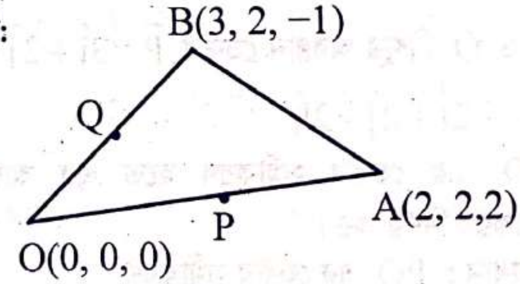
$$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$$

$$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + t\{(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})\}$$

$$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} - 3\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQ || AB

প্রমাণ:



$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$= \frac{3}{2}\hat{i} + \hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \frac{3}{2}\hat{i} + \hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k} - \hat{i} - \hat{j} - \hat{k} = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{3}{2}\hat{k}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে, $\hat{i}$ এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{1/2} = 2:1$ এবং $\hat{k}$ এর সহগদ্বয়ের

অনুপাত $\frac{-3}{-3/2} = 2:1$ পরস্পর সমান।

$\therefore$ $PQ \,||\, AB$.

[বি.দ্র.: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{PQ} = \bar{0}$ দেখিয়ে $PQ\,||\,AB$ প্রমাণ করা যায়।]

(c) $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ কে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2-4)\hat{i} - (-2-6)\hat{j} + (4-6)\hat{k}$
$= -6\hat{i} + 8\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$
$= \sqrt{(-6)^2 + (8)^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ বর্গ একক ।

12. P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\overline{Q} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

(a) PQ এর ভেক্টর সমীকরণ হতে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর ।

সমাধান : PQ এর ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \overline{P} + t(\overline{Q} - \overline{P})$

$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} + t\{(2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} + t(-\hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k})$

এর ভেক্টর সমীকরণ,

$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{-3}$ (Ans.)

(b) অভিক্ষেপ ব্যবহার করে $\overline{P}$ বরাবর $\overline{Q}$ এর অংশক নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}$ ভেক্টরের উপর $\overline{Q}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$= \frac{\overline{P} \cdot \overline{Q}}{|\overline{Q}|} = \frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})}{|2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}|}$

$= \frac{6+4-2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{12}} = \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\overline{P}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\overline{P}}{|\overline{P}|}$

$= \frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{|3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|} = \frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{9+4+1}}$

$= \frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{14}}$

$\therefore$ $\overline{P}$ বরাবর $\overline{Q}$ এর অংশক $= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{14}}$

$= \frac{4}{\sqrt{42}}(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

(c) $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ কে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ কে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= |\overline{P} \times \overline{Q}|$

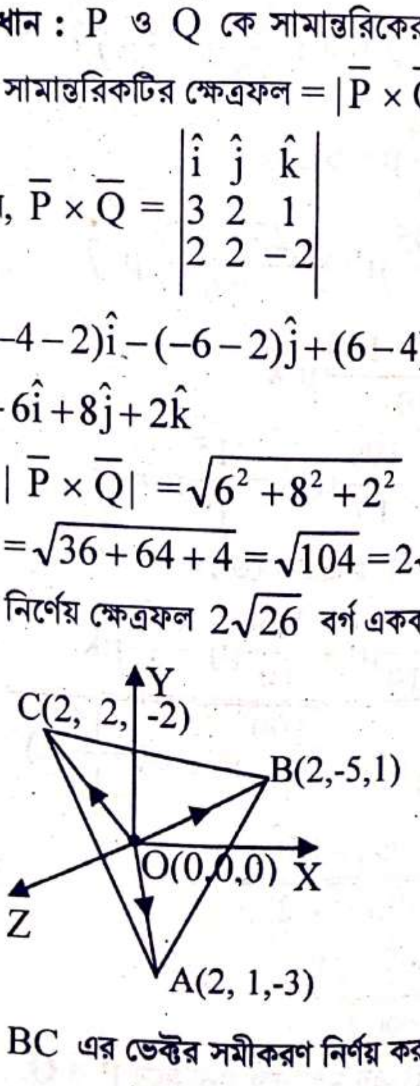
এখন, $\overline{P} \times \overline{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-4-2)\hat{i} - (-6-2)\hat{j} + (6-4)\hat{k}$
$= -6\hat{i} + 8\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ $|\overline{P} \times \overline{Q}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2^2}$
$= \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $2\sqrt{26}$ বর্গ একক।

13.



(a) BC এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, (2, −5, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}$ এবং (2, 2, −2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b}=2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী BC সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r}=\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+t\{(2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})-(2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+t(7\hat{j}-3\hat{k})$ (Ans.)

(b) $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ **ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\overrightarrow{OC}=2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ বিন্দুদ্বয় যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\overline{OB}\times\overline{OC}}{|\overline{OB}\times\overline{OC}|}$

এখন, $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=(2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k})\times(2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -5 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}$$

$=(10-2)\hat{i}-(-4-2)\hat{j}+(4+10)\hat{k}$

$=8\hat{i}+6\hat{j}+14\hat{k}$

$\therefore\ |\overline{OB}\times\overline{OC}|=\sqrt{64+36+196}=\sqrt{296}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{8\hat{i}+6\hat{j}+14\hat{k}}{\sqrt{296}}$

(c) ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে প্রমাণ কর যে, DE || BC.

প্রমাণ: AB এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{2+2}{2},\frac{1-5}{2},\frac{-3+1}{2})=(2,-2,-1)$

AC এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক

$=(\frac{2+2}{2},\frac{1+2}{2},\frac{-3-2}{2})=(2,\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$

$\therefore\ \overrightarrow{DE}=(2-2)\hat{i}+(\frac{3}{2}+2)\hat{j}+(-\frac{5}{2}+1)\hat{k}$

$=0\hat{i}+\frac{7}{2}\hat{j}-\frac{3}{2}\hat{k}$

$\overrightarrow{BC}=(2-2)\hat{i}+(2+5)\hat{j}+(-2-1)\hat{k}$

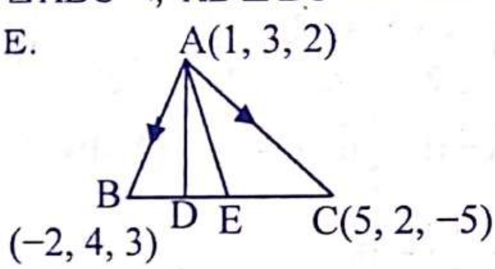
$=0\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k}$

$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে, $\hat{i}$ এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{7}{7/2}=2:1$ এবং $\hat{k}$ এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-3}{-3/2}=2:1$ পরস্পর সমান।

সমাধান : $\overrightarrow{OB}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}$,

$\therefore$ DE || BC

14. ΔABC এ, $AD\perp BC$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু E.



(a) $0.7\hat{i}+m\hat{j}$ একটি একক ভেক্টর হলে m এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $0.7\hat{i}+m\hat{j}$ একটি একক ভেক্টর বলে,

$|0.7\hat{i}+m\hat{j}|=1\Rightarrow|\frac{7}{10}\hat{i}+m\hat{j}|=1$

$\Rightarrow\sqrt{(\frac{7}{10})^2+m^2+}=1\Rightarrow m^2+\frac{49}{100}=1$

$\Rightarrow m^2=1-\frac{49}{100}=\frac{51}{100}\ \therefore m=\pm\frac{\sqrt{51}}{10}$

(b) BD নির্ণয় কর।

সমাধান: $AD\perp BC$ বলে, BC বরাবর $\overrightarrow{BA}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ BD ।

$\therefore\ BD=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$

এখানে, $\overrightarrow{BA}=(1+2)\hat{i}+(3-4)\hat{j}+(2-3)\hat{k}$

$=3\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$

$$\overrightarrow{BC} = (5+2)\hat{i} + (2-4)\hat{j} + (-5-3)\hat{k}$$
$$= 7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}$$
$$\therefore\ |\overrightarrow{BC}| = |7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}|$$
$$= \sqrt{49+4+64} = 3\sqrt{13}$$
$$\therefore\ BD = \frac{(3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})\cdot(7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k})}{3\sqrt{13}}$$
$$= \frac{3.7 + (-1)(-2) + (-1)(-8)}{3\sqrt{13}}$$
$$= \frac{21+2+8}{3\sqrt{13}} = \frac{31}{3\sqrt{13}}$$

(c) $\angle AEC$ নির্ণয় কর।

BC এর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{-2+5}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{3-5}{2}) = (\frac{3}{2}, 3, -1)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{EA} = (1-\frac{3}{2})\hat{i} + (3-3)\hat{j} + (2+1)\hat{k}$$
$$= -\frac{1}{2}\hat{i} + 3\hat{k}$$
$$\overrightarrow{EC} = (5-\frac{3}{2})\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (-5+1)\hat{k}$$
$$= \frac{7}{2}\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\therefore\ \angle AEC = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EA}||\overrightarrow{EC}|}$$
$$= \cos^{-1}\frac{(-\frac{1}{2}\hat{i} + 3\hat{k})\cdot(\frac{7}{2}\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k})}{|-\frac{1}{2}\hat{i} + 3\hat{k}||\frac{7}{2}\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}|}$$
$$= \cos^{-1}\frac{(-\frac{1}{2})(\frac{7}{2}) + 3(-4)}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}\sqrt{\frac{49}{4}+1+16}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{-\frac{7}{4} - 12}{\sqrt{\frac{37}{4}}\sqrt{\frac{117}{4}}}$$
$$= \cos^{-1}(-\frac{55}{4} \times \frac{4}{\sqrt{37} \times 3\sqrt{13}})$$
$$= \cos^{-1}(-\frac{55}{3\sqrt{481}})$$

15. O(0, 0, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ও $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

(a) P(5, −3, 1) , Q(3, −1, −2) এর সংযোগ রেখাকে R বিন্দু 3:4 অনুপাতে বিভক্ত করলে $\overline{OR}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\overrightarrow{OP} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$,

$\overrightarrow{OQ} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

P, Q এর সংযোগ রেখাকে R বিন্দু 3:4 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$$\therefore\ \overline{OR} = \frac{3\overline{OQ} + 4\overline{OP}}{3+4}$$
$$= \frac{3(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + 4(3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})}{7}$$
$$= \frac{3\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k} + 12\hat{i} + 8\hat{j} + 16\hat{k}}{7}$$
$$= \frac{15\hat{i} + 5\hat{j} + 22\hat{k}}{7}\ \text{(Ans.)}$$

(b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে, $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} + \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$
$$= 4\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$$
$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} - (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$
$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

নির্ণেয় কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{(4\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k})\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})}{|4\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k}||2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$=\frac{8+3+12}{\sqrt{16+1+36}\sqrt{4+9+4}}=\frac{23}{\sqrt{53}\sqrt{17}}$$

$$\therefore\ \theta=\cos^{-1}(\frac{23}{\sqrt{901}})\ \text{(Ans.)}$$

(c) O হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&2&4\\1&-1&2\end{vmatrix}$

$$=(4+4)\hat{i}-(6-4)\hat{j}+(-3-2)\hat{k}$$
$$=8\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{64+4+25}=\sqrt{93}$$

$\therefore$ OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$

$=\frac{\sqrt{93}}{2}$ বর্গ একক।

O হতে AB এর লম্ব দূরত্ব d হলে,

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(AB\times d)$

$$=\frac{1}{2}d\,|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}d\,|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$$

$$=\frac{1}{2}d\,|\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}-(3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})|$$

$$=\frac{1}{2}d\,|-2\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}|$$

$=\frac{1}{2}d\sqrt{4+9+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}d$ বর্গ একক।

$\therefore\ \frac{\sqrt{17}}{2}d=\frac{\sqrt{93}}{2}\Rightarrow d=\sqrt{\frac{93}{17}}$ একক।

$\therefore$ O হতে AB এর লম্ব দূরত্ব $=\sqrt{\frac{93}{17}}$ একক।

16. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overline{A}=2\hat{i}+\lambda\hat{j}-\hat{k}$, $\overline{B}=6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$, $\overline{C}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$

(a) $\overline{A}$ ভেক্টর ও $\overline{A}$ ভেক্টরের উপর $\overline{B}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে λ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{A}$ ভেক্টর ও $\overline{A}$ ভেক্টরের উপর $\overline{B}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$$=(2\hat{i}+\lambda\hat{j}-\hat{k})\cdot(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$$
$$=12+6\lambda+3=6\lambda+15$$

প্রশ্নমতে, $6\lambda+15=9$

$$\Rightarrow 6\lambda=-6\Rightarrow\lambda=-1$$

(b) $\overline{A}$, $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ সমতলীয় হলে A বিন্দুগামী $\overline{C}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{A}$, $\overline{B}$ ও $\overline{C}$ সমতলীয় বলে,

$$(\overline{A}\times\overline{B}).\overline{C}=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\6&6&-3\\2&-3&6\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 2(36-9)-\lambda(36+6)-1(-18-12)=0$$
$$\Rightarrow 54-42\lambda+30=0\Rightarrow-42\lambda=-84$$
$$\Rightarrow\lambda=2$$

$\therefore$ A বিন্দুগামী $\overline{C}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\overline{A}+t\,\overline{C}$

$$\Rightarrow\underline{r}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}+t(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$$

(c) $\overline{B}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{C}$ ভেক্টরের উপাংশ y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $|\overline{B}|=|6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}|$

$$=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}$$

$\therefore$ $\overline{B}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{B}=\frac{\overline{B}}{|\overline{B}|}$

$$=\frac{6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}}{\sqrt{81}}$$

$\overline{B}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{C}$ ভেক্টরের উপাংশ $=\frac{\overline{B}\cdot\overline{C}}{|\overline{B}|}\hat{B}$

$$= \frac{(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{81}} \frac{6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}}{\sqrt{81}}$$

$$= \frac{12-18-18}{81}(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$$

$$= \frac{-24}{81}(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$$

$$= \frac{-8}{27}(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$$

$$= -\frac{16}{9}\hat{i}-\frac{16}{9}\hat{j}+\frac{8}{9}\hat{k}$$

ধরি, এ ভেক্টর y অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \cos\theta = \frac{(-\frac{16}{9}\hat{i}-\frac{16}{9}\hat{j}+\frac{8}{9}\hat{k})\cdot\hat{j}}{\sqrt{\frac{256}{81}+\frac{256}{81}+\frac{64}{81}}}$$

$$= \frac{-\frac{16}{9}}{\sqrt{\frac{576}{81}}} = -\frac{16}{9}\times\frac{9}{24} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}(-\frac{2}{3})$$

17. **O(0, 0, 0)** বিন্দুর সাপেক্ষে **P , Q** ও **R** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{P} = 2\hat{i}+n\hat{j}-\hat{k}$, $\overline{Q} = 6\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}, \overline{R} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$

(a) একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর যা **Q** ও **R** বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান : Q ও R বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$$\underline{r} = \overline{Q} + t(\overline{R}-\overline{Q})$$

$$\Rightarrow \underline{r} = 6\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}+t\{(2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}) - (6\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k})\}$$

$$\Rightarrow \underline{r} = 6\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}+t(-4\hat{i}-5\hat{j}+0\hat{k})$$

এর কার্তেসীয় সমীকরণ,

$$\frac{x-6}{-4} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z-3}{0} \text{ (Ans.)}$$

(b) $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ কোনো ত্রিভুজের বাহু হলে এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}\times\overline{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & n & -1 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{P}\times\overline{Q} = (3n+6)\hat{i}-(6+6)\hat{j}+(12-6n)\hat{k}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overline{P}\times\overline{Q}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(3n+6)^2+(12)^2+(12-6n)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9n^2+36n+36+144+144-144n+36n^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{45n^2-108n+324}$$

$= \frac{3}{2}\sqrt{5n^2-12n+36}$ বর্গ একক।

প্রশ্নমতে, $\frac{3}{2}\sqrt{5n^2-12n+36} = 9$

$$\Rightarrow \sqrt{5n^2-12n+36} = 6$$

$$\Rightarrow 5n^2-12n+36 = 36 \Rightarrow 5n^2-12n = 0$$

$$\Rightarrow n(5n-12) = 0 \Rightarrow n = 0, \frac{12}{5}$$

(c) $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি বরাবর $\overline{Q}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

$(\overline{P}+\overline{Q})$ বরাবর $\overline{Q}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি $= \overline{P}+\overline{Q}$

$$= 2\hat{i}+n\hat{j}-\hat{k}+6\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$$

$$= 8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}$$

$(\overline{P}+\overline{Q})$ বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\overline{P}+\overline{Q}}{|\overline{P}+\overline{Q}|}$

$$= \frac{8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}}{|8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{64+n^2+12n+36+4}}$$

$= \dfrac{8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{n^2+12n+104}} = \hat{a}$ (ধরি)

$\therefore$ $(\overline{P}+\overline{Q})$ বরাবর $\overline{Q}$ এর উপাংশ

$= \dfrac{(\overline{P}+\overline{Q})\cdot\overline{Q}}{|\overline{P}+\overline{Q}|}\hat{a}$

$= \dfrac{\{8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}\}\cdot(6\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k})}{|8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}|}\hat{a}$

$= \dfrac{48+6n+36+6}{\sqrt{n^2+12n+104}} \dfrac{8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{n^2+12n+104}}$

$= \dfrac{6n+90}{n^2+12n+104}\{8\hat{i}+(n+6)\hat{j}+2\hat{k}\}$

18. $\overrightarrow{OA} = 3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$

(a) $P(2, -1, 3)$ ও $Q(3, 2, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $P(2, -1, 3)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $Q(3, 2, -4)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$.

P ও Q বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}+t\{(3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})-(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})\}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}+t(\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k})$ (Ans.)

(b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = 3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}+2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$

$= 5\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}-(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})$

$= -\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \dfrac{(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{B}-\overline{A})}{|\overline{A}+\overline{B}||\overline{B}-\overline{A}|}$

$= \dfrac{(5\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})\cdot(-\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k})}{|5\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}||-\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k}|}$

$= \dfrac{-5-27+12}{\sqrt{25+9+4}\sqrt{1+81+36}}$

$= \dfrac{-20}{\sqrt{38}\sqrt{118}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(-\dfrac{20}{2\sqrt{19\times59}})$

$= \cos^{-1}(-\dfrac{10}{\sqrt{1121}})$

(c) $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= (24-6)\hat{i}-(-12-4)\hat{j}+(9+12)\hat{k}$

$= 18\hat{i}+16\hat{j}+21\hat{k}$

$\therefore |\overline{A}\times\overline{B}| = \sqrt{324+256+441} = \sqrt{1021}$

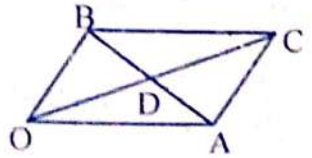
$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$= \pm\dfrac{\overline{A}\times\overline{B}}{|\overline{A}\times\overline{B}|} = \pm\dfrac{18\hat{i}+16\hat{j}+21\hat{k}}{\sqrt{1021}}$

19. $\overrightarrow{OA} = 5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু।

(a) সামান্তরিকটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA}=5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ । OC ও AB কর্ণের ছেদবিন্দু

$\therefore\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$=5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}+2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}=7\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$

OC ও AB কর্ণের ছেদবিন্দু D হলে,

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(7\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})$

$=\frac{7}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{9}{2}\hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{7}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{9}{2}\hat{k}$ (Ans.)

(b) সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ কে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে ইহার ক্ষেত্রফল $=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$

এখন, $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 5 & 4 & 3\\ 2 & -3 & 6\end{vmatrix}$

$=(24+9)\hat{i}-(30-6)\hat{j}+(-15-8)\hat{k}$

$=33\hat{i}-24\hat{j}-23\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{33^2+24^2+23^2}$

$=\sqrt{1089+576+529}=\sqrt{2194}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\sqrt{2194}$ বর্গ একক।

(c) $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর বরাবর $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের উপাংশ y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর

$=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}}{|5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}|}=\frac{5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{25+16+9}}$

$=\frac{5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{50}}=\hat{a}$ (ধরি)

$\therefore$ $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর বরাবর $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের উপাংশ

$=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|}\hat{a}$

$=\frac{(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})}{|5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}|}\hat{a}$

$=\frac{10-12+18}{\sqrt{50}}\ \frac{5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{50}}$

$=\frac{16}{50}(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})=\frac{8}{25}(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})$

ধরি, এ উপাংশ y অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\frac{8}{25}(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}).\hat{j}}{|\frac{8}{25}(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})||\hat{j}|}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{25+16+9}\sqrt{1}}=\frac{4}{\sqrt{50}}=\frac{4}{5\sqrt{2}}$$

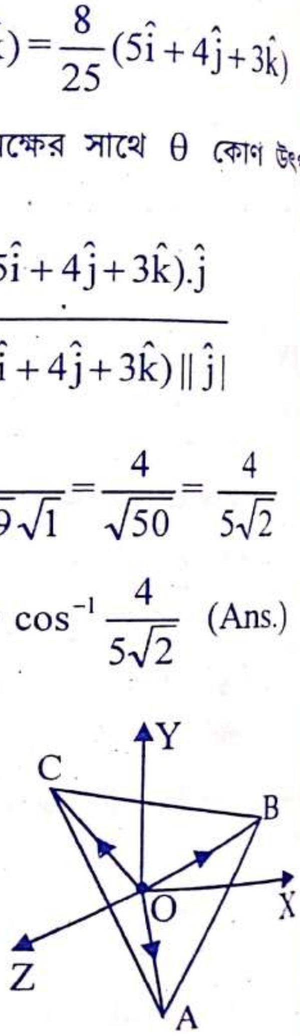
$\therefore$ নির্ণেয় কোণ, $\theta=\cos^{-1}\frac{4}{5\sqrt{2}}$ (Ans.)

20. চিত্রে,

$\overrightarrow{OA}=4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{OB}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{OC}=3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$



(a) AB এর মধ্যবিন্দু D হলে এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : AB এর মধ্যবিন্দু D হলে এর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}+2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})$

$=\frac{1}{2}(6\hat{i}+9\hat{j})=3\hat{i}+\frac{9}{2}\hat{j}$

(b) $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর,

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-5-4)\hat{i} - (-4-2)\hat{j} + (16-10)\hat{k}$$

$$= -9\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\therefore \ |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{9^2+6^2+6^2}$$
$$= \sqrt{81+36+36} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}$

$$= \pm \frac{-9\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}}{3\sqrt{17}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{17}}(-3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}) \ \text{(Ans.)}$$

(c) দেখাও যে, ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$= 2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k} - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k})$$
$$= -2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$= 3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k} \ \square \ (2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})$$
$= \hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ এবং

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$
$$= 4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k} - (3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$$
$$= \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \ AB = |\overrightarrow{AB}| = |-2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}|$$
$$= \sqrt{4+1+4} = 3$$

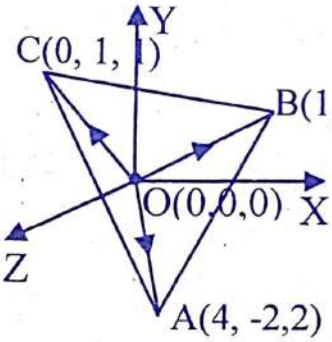
$$BC = |\overrightarrow{BC}| = |\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}|$$
$$= \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = |\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}|$$
$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

এখানে, AB, BC ও CA যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং, A, B ও C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

তাছাড়া, $AB = BC = 3$ এবং
$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18 = CA^2$.
$\therefore$ ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

21.



(a) $\underline{a} = \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\underline{b} = 4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ হলে $|\underline{a} - 3\,\underline{b}|$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\underline{a} - 3\,\underline{b}$

$$= \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k} - 3(4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$$
$$= \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k} - (12\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k})$$
$$= \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k} - 12\hat{i}+6\hat{j}-12\hat{k}$$
$$= -11\hat{i}+9\hat{j}-14\hat{k}$$

$$\therefore \ |\underline{a} - 3\,\underline{b}| = |-11\hat{i}+9\hat{j}-14\hat{k}|$$
$$= \sqrt{(-11)^2+9^2+(-14)^2}$$
$$= \sqrt{121+81+196} = \sqrt{398} \ \text{(Ans.)}$$

(b) OA, OB, OC একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধার হলে ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OC} = 0\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

OA, OB, OC একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধার হলে ঘনবস্তুটির আয়তন $= (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0(2-2) - 1(-4-2) + 1(4+2)$$
$= 6 + 6 = 12$ ঘন একক

(c) ABC ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি AD, BE ও CF হলে A, B, C এর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\underline{0}$

সমাধান:

$$\overrightarrow{AB} = (1-4)\hat{i}+(1+2)\hat{j}+(-1-2)\hat{k}$$
$$= -3\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = (0-1)\hat{i}+(1-1)\hat{j}+(1+1)\hat{k}$$
$$= -\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{CA} = (4-0)\hat{i}+(-2-1)\hat{j}+(2-1)\hat{k}$$
$$= 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$$
$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})$$
$$=\frac{1}{2}(-3\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}-4\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$$
$$=\frac{1}{2}(-7\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k})$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{1}{2}(3\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}-\hat{i}+0\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=\frac{1}{2}(2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})$$
$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$
$$=\frac{1}{2}(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}+\hat{i}-0\hat{j}-2\hat{k})$$
$$=\frac{1}{2}(5\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$$
$$\text{L.H.S.}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$$
$$=\frac{1}{2}(-7\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k}+2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}+5\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$$
$$=\frac{1}{2}(-7\hat{i}+7\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{j}-5\hat{k}+5\hat{k})$$
$$=\frac{1}{2}(\underline{0})=\underline{0}=\text{R.H.S. (Proved)}$$

22. তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$.

(a) প্রথম ভেক্টর ও এ ভেক্টরের উপর দ্বিতীয় ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল **নির্ণয়** কর।

সমাধান : প্রথম ভেক্টর $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ও এ ভেক্টরের উপর দ্বিতীয় ভেক্টর $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপকে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল $= (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\cdot(-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})$

$= -1-2+24 = 21$ বর্গ একক।

(b) দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

সমাধান : ধরি, $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -1, 8)$ ও $C(-4, 4, 6)$ বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ ও $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB}=-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$
$$=-2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$$
$$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+5^2}$$
$$\Rightarrow AB=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$$
$$\overrightarrow{BC}=-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}-(-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k})$$
$$=-3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$$
$$\therefore BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{9+25+4}=\sqrt{38}$$

এবং $\overrightarrow{CA}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}-(-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k})$
$$=5\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$$
$$\therefore CA=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{25+4+9}=\sqrt{38}$$
$$\therefore AB=BC=CA=\sqrt{38}$$

∴ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

(c) x , y ও z অক্ষের উপর ভেক্টরগুলির অভিক্ষেপ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: x , y ও z অক্ষের উপর ভেক্টরগুলির অভিক্ষেপ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 8\\ -4 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$$\therefore \ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \\ -4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-6 - 32) - 2(-6 + 32) + 3(-4 - 4)$$
$$= -38 - 52 - 24 = -144$$

$$\therefore \ \text{Adj}A = \begin{bmatrix} -6-32 & -(-6+32) & -4-4 \\ -(12-12) & 6+12 & -(4+8) \\ 16+3 & -(8+3) & -1+2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -38 & -26 & -8 \\ 0 & 18 & -12 \\ 19 & -11 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -38 & 0 & 19 \\ -26 & 18 & -11 \\ -8 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (A)^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-114}\begin{bmatrix} -38 & 0 & 19 \\ -26 & 18 & -11 \\ -8 & -12 & 1 \end{bmatrix} \ (\text{Ans.})$$

23. $\overline{P} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}, \overline{Q} =$,
$\overline{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

(a) x-অক্ষের উপর $\overline{P} - \overline{Q}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P} - \overline{Q} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} - (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} - \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ x-অক্ষের উপর $\overline{P} - \overline{Q}$ এর অভিক্ষেপ = 1

(b) $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব ভেক্টর $= \overline{P} \times \overline{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1-2)\hat{i} - (2+1)\hat{j} + (-4+1)\hat{k}$

$= -3\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore \ |\overline{P} \times \overline{Q}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$

$= \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \dfrac{\overline{P} \times \overline{Q}}{|\overline{P} \times \overline{Q}|}$

$= \pm \dfrac{-3\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}}{3\sqrt{3}}$ (Ans.)

(c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরের $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর সহগগুলিকে কলাম বিবেচনা করে গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরের $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর সহগগুলিকে কলাম বিবেচনা করে গঠিত ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

এখনে, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(-4 + 1) + 1(2 - 1) - 1(-1 + 2)$
$= -6 + 1 - 1 = -6 \neq 0$

$$\therefore \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4+1 & -(2-1) & -1+2 \\ -(-2-1) & 4+1 & -(-2+1) \\ -1-2 & -(2+1) & -4+1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

24. $\overline{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $\overline{Q} = \hat{i} + 3\hat{k}$,
$\overline{R} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

(a) $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টর **x**-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি বল

$= \overline{P} + \overline{Q} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} + (\hat{i} + 3\hat{k})$

$=4\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$

ধরি, $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টর **x**-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{16+16+4}} = \cos^{-1}\dfrac{4}{6}$

$=\cos^{-1}\dfrac{2}{3}$

(b) $\overline{P}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P} = 3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ ও

$\overline{R}=2\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর,

$$\overline{P}\times\overline{R} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 5 & -4\end{vmatrix}$$

$=(-16+5)\hat{i}-(-12+2)\hat{j}+(15-8)\hat{k}$

$=-11\hat{i}+10\hat{j}+7\hat{k}$

$\therefore \quad |\overline{P}\times\overline{R}| = \sqrt{121+100+49} = 3\sqrt{30}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$=\pm\frac{\overline{P}\times\overline{Q}}{|\overline{P}\times\overline{Q}|} = \pm\frac{1}{3\sqrt{30}}(-11\hat{i}+10\hat{j}+7\hat{k})$$

(c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরগুলির $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরগুলির $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -4\end{vmatrix}$$

$=3(0-15)-4(-4-6)-1(5-0)$

$=-15+40-5=20$

$$\therefore \quad \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}0-15 & -(-4-6) & 5-0\\ -(-16+5) & -12+2 & -(15-8)\\ 12-0 & -(9+1) & 0-4\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-15 & 10 & 5\\ 11 & -10 & -7\\ 12 & -10 & -4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-15 & 11 & 12\\ 10 & -10 & -10\\ 5 & -7 & -4\end{bmatrix}$$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-15 & 11 & 12\\ 10 & -10 & -10\\ 5 & -7 & -4\end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

25. $\overline{P}=x\hat{i}+y\hat{j}+2z\hat{k}$, $\overline{Q}=y\hat{i}+3z\hat{j}-2x\hat{k}$

এবং $R=\begin{bmatrix}x-2y & z-y & y\\ y & -z & z-y-1\\ y-1 & z-2 & x-3\end{bmatrix}$

(a) ভেক্টর পদ্ধতিতে A(0 , 1 , 2) ও B(− 1, 3 , 0) বিন্দু দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AB}=(-1-0)\hat{i}+(3-1)\hat{j}+(0-2)\hat{k}$

$=-\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু দুইটির দূরত্ব $=|\overrightarrow{AB}|$

$=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=3$

(b) $\begin{bmatrix}x-1 & 3\\ z & y+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2-z & 5-y\end{bmatrix}$ হলে

দেখাও যে, $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

খ. $\begin{bmatrix}x-1 & 3\\ z & y+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2-z & 5-y\end{bmatrix}$ হলে, $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টরের উপর $\overline{P}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

প্রমাণ: $\begin{bmatrix}x-1 & 3\\ z & y+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2-z & 5-y\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad x-1=2 \Rightarrow x=3,$

$y+1=5-y \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2,$

$z=2-z \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow z=1$

$\therefore \quad \overline{P}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k},\ \overline{Q}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$

$\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টর $= \overline{P}+\overline{Q}$

$= 5\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}$

এখন, $\overline{P}+\overline{Q}$ ভেক্টরের উপর $\overline{P}$ ভেক্টরের

অভিক্ষেপ $= \dfrac{(\overline{P}+\overline{Q})\cdot\overline{P}}{|\overline{P}+\overline{Q}|}$

$= \dfrac{(5\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})}{|5\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}|}$

$= \dfrac{15+10-8}{\sqrt{25+25+16}} = \dfrac{17}{\sqrt{66}}$ (Ans.)

(c) $x=4, y=2, z=3$ হলে R^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: $R = \begin{bmatrix} x-2y & z-y & y \\ y & -z & z-y-1 \\ y-1 & z-2 & x-3 \end{bmatrix}$

$x=4, y=2, z=3$ হলে,

$$R = \begin{bmatrix} 4-4 & 3-2 & 2 \\ 2 & -3 & 3-2-1 \\ 2-1 & 3-2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ |R| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0(-3-0) - 1(2-0) + 2(2+3)$

$= 0 - 2 + 10 = 8$

$$\therefore\ Adj(R) = \begin{bmatrix} -3-0 & -(2-0) & 2+3 \\ -(1-2) & 0-2 & -(0-1) \\ 0+6 & -(0-4) & 0-2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ R এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$R^{-1} = \dfrac{1}{|R|} Adj\,(R)$

$= \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

26. $\overline{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k},\ \ \overline{B} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k},$
$\overline{C} = \hat{i}+b\hat{j}+3\hat{k}$. [দি.২০১৭]

ক. অবস্থান ভেক্টর বলতে কি বুঝ? $3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ + $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$

সমাধান: পাঠ্য বই দ্রষ্টব্য।

খ. $\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $\overline{C}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে b–এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $|\vec{A}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1}$

$= \sqrt{14}$

$\therefore$ $\overline{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\overline{A}}{|\overline{A}|}$

$= \dfrac{2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{14}} = \hat{A}$

$\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $= (\hat{A}\cdot\overline{B})\hat{A}$

$= \dfrac{(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{14}}\hat{A}$

$= \dfrac{2.1+3.2+(-1).(-1)}{\sqrt{14}}\hat{A}$

$= \dfrac{2+6+1}{\sqrt{14}}\,\dfrac{2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{14}} = \dfrac{9}{14}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

এ উপাংশ ভেক্টর $\vec{C}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে,

$\dfrac{9}{14}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+b\hat{j}+3\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2.1 + 3.b + (-1).3 = 0$

$\Rightarrow 2 + 3b - 3 = 0 \Rightarrow 3b = 1 \therefore b = \dfrac{1}{3}$

গ. $\overline{A}+\overline{B}$ এবং $\overline{A}\times\overline{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\vec{A}+\vec{B} = (2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}) + (\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

$= 3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$

$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-3+2)\hat{i} - (-2+1)\hat{j} + (4-3)\hat{k} = -\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}\times\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}+\vec{B}||\vec{A}\times\vec{B}|}$

$$= \cos^{-1}\frac{(3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k})\cdot(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{|3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}||-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}|}$$

$$= \cos^{-1}\frac{3.(-1)+5.1+(-2).1}{\sqrt{9+25+4}\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{-3+5-2}{\sqrt{9+25+4}\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{9+25+4}\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \cos^{-1}0 = 90^0 \quad \text{(Ans.)}$$

27. $\overline{A} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$; $\overline{B} = -\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ এবং তিনটি বিন্দুর স্থানাংক $P(-3,-2,-1)$; $Q(4,0,-3)$ এবং $S(5,-7,8)$। **[সি.বো.'১৭]**

ক. উদাহরণসহ একক ভেক্টর এর সংজ্ঞা দাও। ২

সমাধান: পাঠ্য বই দ্রষ্টব্য।

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\overline{A}$ বরাবর $\overline{B}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $|\vec{A}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1}$
$= \sqrt{14}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$= \frac{2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{14}} = \hat{A}$$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $= (\hat{A}\cdot\vec{B})\hat{A}$

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(-\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k})}{\sqrt{14}}\hat{A}$$

$$= \frac{2.(-1)+(-3)(-4)+(-1).7}{\sqrt{14}}\hat{A}$$

$$= \frac{-2+12-7}{\sqrt{14}}\,\frac{2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{14}(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$$

গ. উদ্দীপকের আলোকে ΔPQS এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: $\overrightarrow{PQ} = (4+3)\hat{i}+(0+2)\hat{j}+(-3+1)\hat{k}$
$= 7\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$$\overrightarrow{PS} = (5+3)\hat{i}+(-7+2)\hat{j}+(8+1)\hat{k}$$
$$= 8\hat{i}-5\hat{j}+9\hat{k}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 7 & 2 & -2\\ 8 & -5 & 9\end{vmatrix}$$

$$= (18-10)\hat{i}-(63+16)\hat{j}+(-35-16)\hat{k}$$
$$= 8\hat{i}-79\hat{j}-51\hat{k}$$

ΔPQS এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|$

$$= \frac{1}{2}|8\hat{i}-79\hat{j}-51\hat{k}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2+(-79)^2+(-51)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{64+6241+2601}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8906} = \frac{1}{2}(94\cdot37)$$

$= 47\cdot186$ বর্গ একক (প্রায়)

28. $\overline{P} = 3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \overline{Q} = 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\overline{R} = \hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ **[রা.বো.'১৭]**

ক. $\overline{P}$ বিন্দুগামী এবং $\overline{Q}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হতে কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overline{P}$ বিন্দুগামী এবং $\overline{Q}$ এর সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = \overline{P} + t\overline{Q}$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow$ $\underline{r} = 3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}+t(3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-4}{4}$$

খ. দেখাও যে, $\overline{P}-\overline{Q}$ ভেক্টরটি $\overline{P}$ এবং $\overline{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব।

সমাধান: $\vec{P}-\vec{Q} = (3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})-(3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$
$= 3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}-3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k} = -\hat{j}$

$\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব ভেক্টর $= \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$$= (-12+8)\hat{i} - (12-12)\hat{j} + (-6+9)\hat{k}$$
$$= -4\hat{i} + 3\hat{k}$$

এখন, $(\vec{P}-\vec{Q})\cdot(\vec{P}\times\vec{Q}) = (-\hat{j})\cdot(-4\hat{i}+3\hat{k})$
$$= 0$$

$\therefore$ $\vec{P}-\vec{Q}$ ভেক্টরটি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব।

(c) উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: উদ্দীপকে উল্লিখিত $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ও $\overline{R}$ ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-4+4) + 3(6-4) + 4(-3+2)$$
$$= 0 + 6 - 4 = 2$$

$$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -4+4 & -(6-4) & -3+2 \\ -(-6+4) & 6-4 & -(-3+3) \\ -12+8 & -(12-12) & -6+9 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$