তৃতীয় অধ্যায়

জটিল সংখ্যা

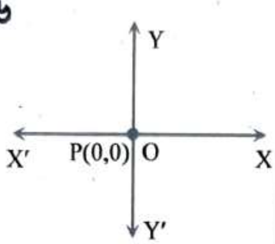
Complex Numbers

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-3.1.5 | পৃষ্ঠা-৭৬

0 সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

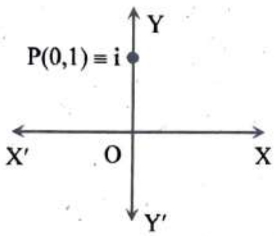
0 জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (0, 0) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।



0 সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 0 এবং কাল্পনিক অংশ 0.

i সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

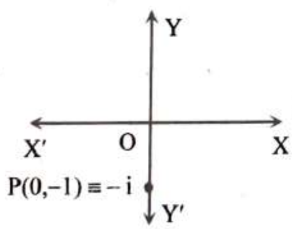
i জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (0, 1) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।



i সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 0 এবং কাল্পনিক অংশ 1.

–i সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

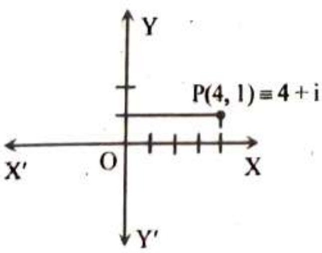
–i জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (0, –1) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।



–i সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 0 এবং কাল্পনিক অংশ –1.

4 + i সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

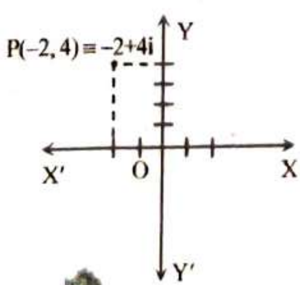
4 + i জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (4, 1) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।



4 + i সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 4 এবং কাল্পনিক অংশ 1.

–2 + 4i সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

–2 + 4i জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (–2, 4) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।

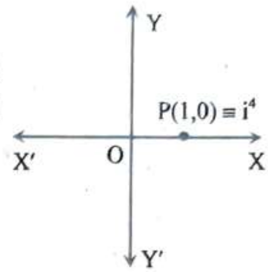


– 2 + 4i সংখ্যাটির বাস্তব অংশ –2 এবং কাল্পনিক অংশ 4.

i^4 সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$\therefore$ i^4 জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (1, 0) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।

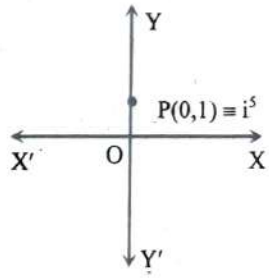


i^4 সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 1 এবং কাল্পনিক অংশ 0.

i^5 সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

$i^5 = i^4.i = i$

$\therefore$ i^5 জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (0, 1) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।

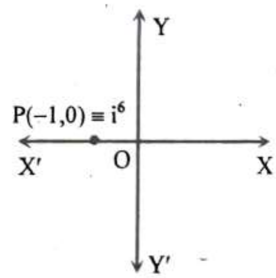


i^5 সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 0 এবং কাল্পনিক অংশ 1.

i^6 সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

$i^6 = i^4.i^2 = 1.(-1) = -1$

$\therefore$ i^6 জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (–1, 0) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।

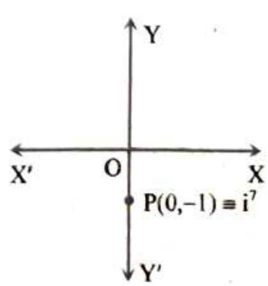


i^6 সংখ্যাটির বাস্তব অংশ –1 এবং কাল্পনিক অংশ 0.

i^7 সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র:

$i^7 = i^4.i^3 = 1(-i) = -i$

$\therefore$ i^7 জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় (0, –1) বিন্দুটিকে XY-তলে স্থাপন করে পাশের চিত্রে দেখানো হলো।



i^7 সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 0 এবং কাল্পনিক অংশ –1.

▶ অনুচ্ছেদ-3.2 | পৃষ্ঠা-৭৭

(i) ধরি, $z = x + iy = -5i = 0 + (-5)i$

$x = 0, y = -5$

$\therefore$ $-5i$ এর মডুলাস $= |-5i| = \sqrt{(0)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

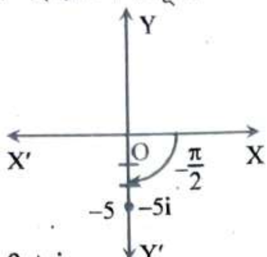
এবং আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\left(\frac{-5}{0}\right) = \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{2}$$

যেহেতু, বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে (y-অক্ষ) অবস্থিত।

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$

আরগাঁ চিত্রে উপরের জটিল সংখ্যাটি নিম্নরূপ:



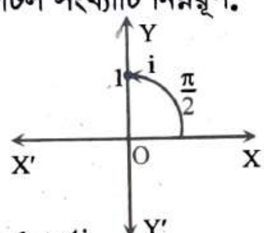
(ii) ধরি, $z = x + iy = i = 0 + i$

$x = 0, y = 1$

$\therefore$ i এর মডুলাস $= \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1$

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \tan^{-1}\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

আরগাঁ চিত্রে উপরের জটিল সংখ্যাটি নিম্নরূপ:



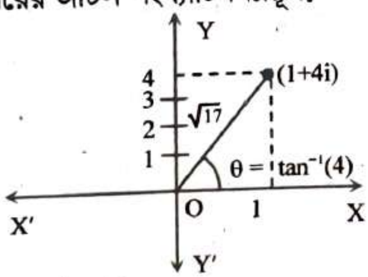
(iii) ধরি, $z = x + iy = 1 + 4i$

$x = 1, y = 4$

$\therefore 1 + 4i$ এর মডুলাস $= \sqrt{(1)^2 + (4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{1}\right) = \tan^{-1}(4)$

আরগাঁ চিত্রে উপরের জটিল সংখ্যাটি নিম্নরূপ:



(iv) ধরি, $z = x + iy = \sqrt{3} - i$

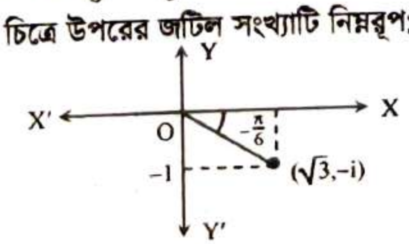
$x = \sqrt{3}, y = -1$

$\therefore \sqrt{3} - i$ এর মডুলাস $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{3 + 1} = 2$ এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

$= -\tan^{-1}\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

আরগাঁ চিত্রে উপরের জটিল সংখ্যাটি নিম্নরূপ:



অনুচ্ছেদ-3.3 | পৃষ্ঠা-৭৮

দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5i$ এবং $z_3 = -4 + i$

$\therefore \bar{z_1} = 2 - 3i, \bar{z_2} = -5i, \bar{z_3} = -4 - i$ **(Ans.)**

$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$|\bar{z_1}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$|z_2| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

$|\bar{z_2}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

$\therefore |z_1| = |\bar{z_1}|$ এবং

$|z_2| = |\bar{z_2}|$ **(Ans.)**

অনুচ্ছেদ-3.3.1 | পৃষ্ঠা-৭৯

(i) $(a + ib)(c + id)$

$= ac + aid + ibc + i^2bd$

$= ac + i(ad + bc) - bd \quad [\because i^2 = -1]$

$= (ac - bd) + i(ad + bc)$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{(1 + i)^3}{4 + 3i}$

$= \frac{(1 + i)^3 (4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)}$

$= \frac{(1 + 3.1^2.i + 3.1.i^2 + i^3)(4 - 3i)}{(4)^2 - (3i)^2}$

$= \frac{(1 + 3i - 3 - i)(4 - 3i)}{16 - 9i^2} \quad [\because i^2 = -1]$

$= \frac{(2i - 2)(4 - 3i)}{16 + 9}$

$= \frac{8i - 6i^2 - 8 + 6i}{25}$

$= \frac{14i + 6 - 8}{25} = \frac{14i - 2}{25}$

$= -\frac{2}{25} + i\frac{14}{25}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{2 + 8i}{3 - 5i}$

$= \frac{(2 + 8i)(3 + 5i)}{(3 - 5i)(3 + 5i)}$

$= \frac{6 + 10i + 24i + 40i^2}{3^2 - (5i)^2}$

$= \frac{6 + 34i - 40}{9 - (-25)} \quad [\because i^2 = -1]$

$= \frac{-34 + 34i}{34}$

$= \frac{-34}{34} + \frac{34i}{34}$

$= -1 + i$ **(Ans.)**

অনুচ্ছেদ-3.4 | পৃষ্ঠা-৮২

1. **(i)** আমরা জানি, $|z_2 - z_3| \geq ||z_2| - |z_3||$

z_3 কে $-z_3$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে, $|z_2 + z_3| \geq ||z_2| - |-z_3||$

$\Rightarrow |z_2 + z_3| \geq ||z_2| - |z_3||$ $[\because |z| = |-z|]$ ... ...(i)

$\Rightarrow \frac{1}{|z_2 + z_3|} \leq \frac{1}{||z_2| - |z_3||}$

$\Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2 + z_3|} \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$

$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) আমরা জানি, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ... ...(ii)

(i) নং এর সাহায্যে পাই, $|z_3 + z_4| \geq ||z_3| - |z_4||$

$\Rightarrow \frac{1}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{1}{||z_3| - |z_4||}$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}$

$\therefore \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}$ **(প্রমাণিত)**

উদাহরণের সাহায্যে (i) ও (ii) এর সত্যতা যাচাই:

(i) ধরি, $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 8 - 6i$, $z_3 = 5 + 12i$

$\therefore |z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|z_2| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

$|z_3| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

$|z_2 + z_3| = |8 - 6i + 5 + 12i| = |13 + 6i|$

$= \sqrt{13^2 + 6^2} = \sqrt{169 + 36} = \sqrt{205}$

এখন, $\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2 + z_3|} = \frac{5}{\sqrt{205}}$

এবং $\frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||} = \frac{5}{|10 - 13|} = \frac{5}{|-3|} = \frac{5}{3}$

এখানে, $\frac{5}{\sqrt{205}} < \frac{5}{3}$

অর্থাৎ, $\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| < \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$ ... ... (iv)

আবার ধরি,

$z_3 = 0$ এবং $z_1 = -3 + 4i$ এবং $z_2 = 8 - 6i$

$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2 + 0|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

এবং $\left|\frac{z_1}{|z_2| - |z_3|}\right| = \frac{|z_1|}{||z_1| - |0||} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| = \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$ ... ... (v)

(iv) ও (v) নং থেকে পাই,

$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$

সুতরাং (i) এর সত্যতা যাচাই হলো।

(ii) ধরি, $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 8 - 6i$, $z_3 = 5 + 12i$, $z_4 = 2 - 4i$

$z_1 + z_2 = -3 + 4i + 8 - 6i = 5 - 2i$

$\therefore |z_1 + z_2| = |5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$z_3 + z_4 = 5 + 12i + 2 - 4i = 7 + 8i$

$\therefore |z_3 + z_4| = |7 + 8i| = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$

$\therefore \left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{113}} = 0.51$

$z_3 = 5 + 12i$

$\therefore |z_3| = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$|z_4| = |2 - 4i| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$\frac{|z_1 + z_2|}{||z_3| - |z_4||} = \frac{\sqrt{29}}{|13 - \sqrt{20}|} = \frac{\sqrt{29}}{8.528} = 0.63$

$\therefore \left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| < \frac{|z_1 + z_2|}{||z_3| - |z_4||}$

$\therefore \left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}$ $[\because |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|]$

আবার, $z_4 = 0$ হলে, $\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + 0|} = \frac{\sqrt{29}}{13}$

এবং $\frac{z_1 + z_2}{||z_3| - |z_4||} = \frac{\sqrt{29}}{|13|} = \frac{\sqrt{29}}{13}$

$\therefore \left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}$

সুতরাং (ii) এর সত্যতা যাচাই হলো।

2. দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখন, $|z - 1| = 5$

বা, $|x + iy - 1| = 5$

বা, $|x - 1 + iy| = 5$

বা, $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 5$

বা, $(x-1)^2 + y^2 = 25$ [বর্গ করে]

$\therefore (x-1)^2 + (y-0)^2 = (5)^2$

যা (1, 0) কেন্দ্র এবং 5 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

3. দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখন, $|z + 2i| > 3$

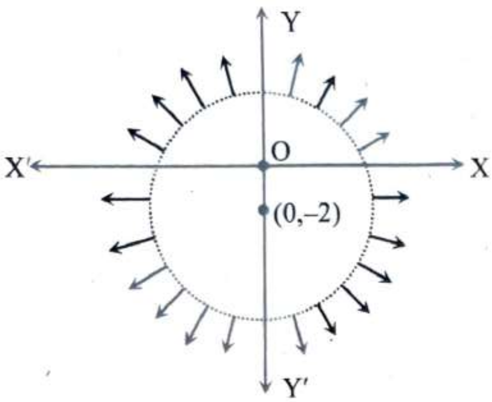
বা, $|x + iy + 2i| > 3$

বা, $|x + (y + 2)i| > 3$

বা, $x^2 + (y + 2)^2 > 9$

বা, $(x - 0)^2 + (y + 2)^2 > 3^2$

যা (0, −2) কেন্দ্র এবং 3 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের বাইরের সকল বিন্দুকে নির্দেশ করে।



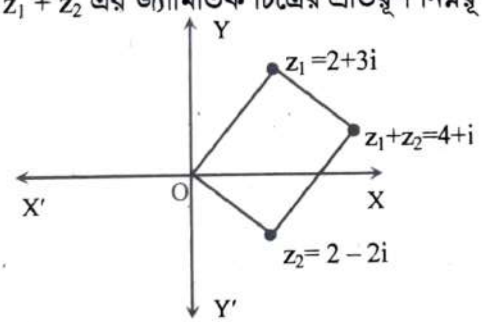
▶ অনুচ্ছেদ-3.5.3 | পৃষ্ঠা-৮৪

$\therefore z_1 + z_2 = 2 + 3i + 2 - 2i = 4 + i$

মনে করি, $x + iy = 4 + i$

$\therefore x = 4$ এবং $y = 1$

$\therefore z_1 + z_2$ এর জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিরূপ নিম্নরূপ:



আবার, $z_2 - z_1 = 2 - 2i - (2 + 3i)$

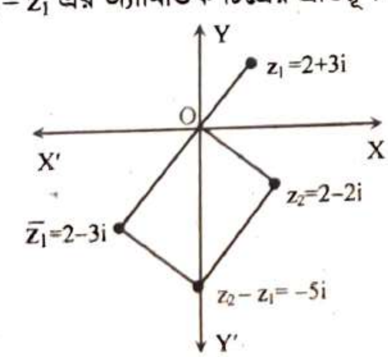
$= 2 - 2i - 2 - 3i$

$= - 5i$

মনে করি, $x + iy = - 5i$

$\therefore x = 0$ এবং $y = -5$

$\therefore z_2 - z_1$ এর জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিরূপ নিম্নরূপ:



$z_1z_2 = (2 + 3i)(2 - 2i)$

$= 4 - 4i + 6i - 6i^2$

$= 4 + 2i + 6 \quad [\because i^2 = -1]$

$= 10 + 2i$

$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{3}{2} = 56°18'$

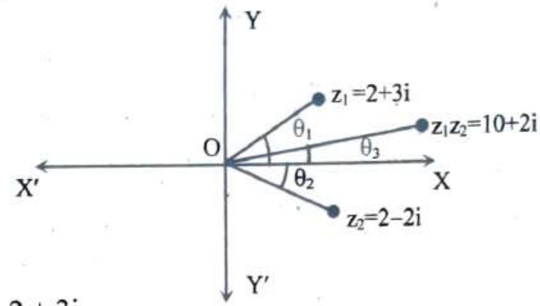
$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{-2}{2} = -45°$

$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{10}\right) = 11°18'$

মনে করি, $x + iy = 10 + 2i$

$\therefore x = 10$ এবং $y = 2$

$\therefore z_1z_2$ এর জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিরূপ নিম্নরূপ:



$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{2 - 2i}$

$= \frac{(2 + 3i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)}$

$= \frac{4 + 4i + 6i + 6i^2}{(2)^2 - (2i)^2}$

$= \frac{4 + 10i - 6}{4 - (-4)} \quad [\because i^2 = -1]$

$= \frac{-2 + 10i}{8} = \frac{-1 + 5i}{4}$

$= -\frac{1}{4} + i\frac{5}{4}$

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56°18'$

$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right) = -45°$

$\theta_3 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$= \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$= \theta_1 - \theta_2$

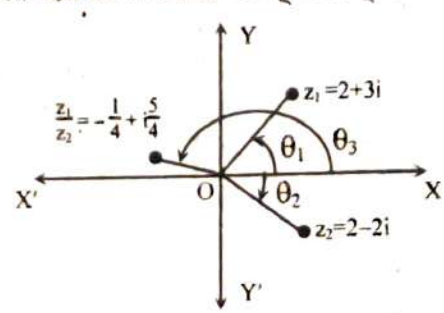
$= 56°18' + 45°$

$= 101°18'$

মনে করি, $x + iy = -\frac{1}{4} + i\frac{5}{4}$

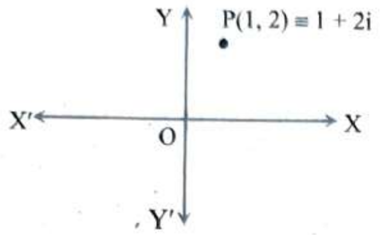
$\therefore x = -\frac{1}{4}$ এবং $y = \frac{5}{4}$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}$ এর জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিরূপ নিম্নরূপ:



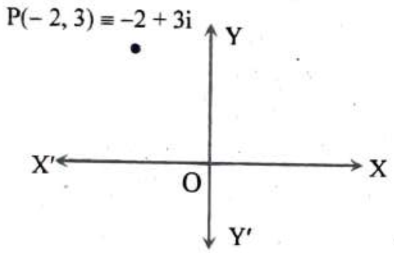
অনুশীলনী-3(A) এর সমাধান

1.(i) z বা XY সমতলে জটিল সংখ্যাটির অবস্থান দেখানো হলো:



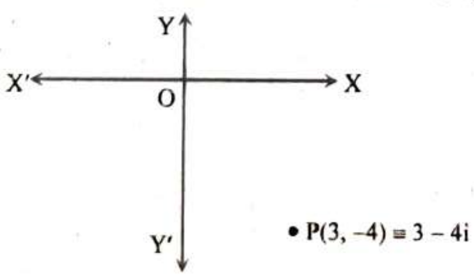
XOX' বাস্তব সংখ্যার ও YOY' কাল্পনিক সংখ্যার অক্ষ। জটিল সংখ্যা $1 + 2i$ এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য OX এর ধনাত্মক দিকে 1 ঘর এবং OY এর ধনাত্মক দিকে 2 ঘর নিলে যে বিন্দু পাওয়া যাবে সেটিই $1 + 2i$ এর অবস্থান।

(ii) z সমতলে জটিল সংখ্যাটির অবস্থান দেখানো হলো:



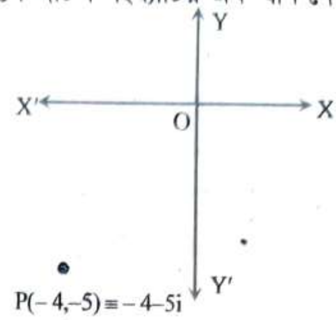
XOX' বাস্তব সংখ্যার ও YOY' কাল্পনিক সংখ্যার অক্ষ। জটিল সংখ্যা $-2 + 3i$ এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য OX এর ঋণাত্মক দিকে 2 ঘর এবং OY এর ধনাত্মক দিকে 3 ঘর নিলে যে বিন্দু পাওয়া যাবে সেটিই $-2 + 3i$ এর অবস্থান।

(iii) z সমতলে জটিল সংখ্যাটির অবস্থান দেখানো হলো:



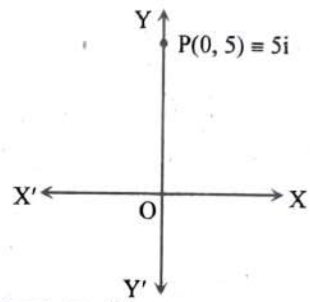
XOX' বাস্তব সংখ্যার ও YOY' কাল্পনিক সংখ্যার অক্ষ। জটিল সংখ্যা $3 - 4i$ এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য OX এর ধনাত্মক দিকে 3 ঘর এবং OY এর ঋণাত্মক দিকে 4 ঘর নিলে যে বিন্দু পাওয়া যাবে সেটিই $3 - 4i$ এর অবস্থান।

(iv) z সমতলে জটিল সংখ্যাটির অবস্থান দেখানো হলো:



XOX' বাস্তব সংখ্যার ও YOY' কাল্পনিক সংখ্যার অক্ষ। জটিল সংখ্যা $-4, -5i$ এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য OX এর ঋণাত্মক দিকে 4 ঘর এবং OY এর ঋণাত্মক দিকে 5 ঘর নিলে যে বিন্দু পাওয়া যাবে সেটিই $-4 - 5i$ এর অবস্থান।

(v) z সমতলে জটিল সংখ্যাটির অবস্থান দেখানো হলো:



XOX' বাস্তব সংখ্যার ও YOY' কাল্পনিক সংখ্যার অক্ষ। জটিল সংখ্যা $0 + 5i$ এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য মূলবিন্দু হতে OY এর ধনাত্মক দিকে 5 ঘর নিলে যে বিন্দু পাওয়া যাবে সেটিই $0 + 5i$ এর অবস্থান।

2. (i) মনে করি, $z = 2 + 3i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ **(Ans.)**

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $z = 4 + 3i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9}$

$= \sqrt{25} = 5$ **(Ans.)**

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ **(Ans.)**

(iii) মনে করি, $z = 1 + \sqrt{3}i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ **(Ans.)**

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

(iv) মনে করি, $z = 3 - 5i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-5}{3}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$

[যেহেতু (3, –5) বিন্দুটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত]

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= -\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$

(v) মনে করি, $z = -2 + 2i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2}{-2}\right| = \tan^{-1}(1)$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= \pi - \tan^{-1} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

[$\because$ (–2, 2) বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

(vi) মনে করি, $z = -8 - 6i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}$
$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-6}{-8}\right| = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

যেহেতু বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{3}{4} - \pi$ **(Ans.)**

(vii) মনে করি, $z = -i = 0 - i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = 1$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-1}{0}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)$
$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$
$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

যেহেতু বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= -\theta = -\frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

(viii) মনে করি, $z = a - ai$

$\therefore$ মডুলাস $= |z| = \sqrt{(a)^2 + (-a)^2}$
$= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-a}{a}\right| = \tan^{-1}(1)$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= -\tan^{-1}(1)$ [যেহেতু বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত]
$= -\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

3. **(i)** দেওয়া আছে, $Z = -2 - 2\sqrt{3}i$
$= 1^2 - 2.1.\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2$
$= (1 - \sqrt{3}i)^2$

$\therefore \sqrt{Z} = \pm(1 - \sqrt{3}i)$

ধরি, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$\therefore \text{Arg } z_1 = -\theta$
$= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$
$= -\frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore \text{Arg } z_2 = \pi - \theta'$
$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$
$= \pi - \frac{\pi}{3}$
$= \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

(ii) (a) দেওয়া আছে, $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$
$z_2 = \sqrt{3} - i$

$\therefore \arg z_1 = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

এবং $\arg z_2 = \arg(\sqrt{3} - i) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$z_1z_2 = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$
$= \sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2i$

$\therefore \quad \arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

এখন, $\arg z_1 + \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ **(দেখানো হলো)**

(b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$
$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + i + 3i}{3 + 1} = \frac{4i}{4} = i$
$= 0 + i$

$\therefore \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ **(দেখানো হলো)**

4. **(i)** ধরি, $1 + \sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; যেখানে r ও θ যথাক্রমে মডুলাস ও আর্গুমেন্ট।

$\therefore r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

এবং $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad 1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ **(Ans.)**

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

এবং সাধারণ আর্গুমেন্ট $= 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ যেখানে, $n \in \mathbb{N}$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; যেখানে r ও θ যথাক্রমে মডুলাস ও আর্গুমেন্ট।

$\therefore r = \sqrt{0+1} = 1$ এবং $\theta = \tan^{-1}(-\frac{1}{0}) = -\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \theta = -\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

$\therefore -i = 1\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ **(Ans.)**

এবং সাধারণ আর্গুমেন্ট $= 2n\pi - \frac{\pi}{2}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$ **(Ans.)**

(iii) মনে করি, $a - ai = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; যেখানে r ও θ যথাক্রমে মডুলাস ও আর্গুমেন্ট।

$\therefore \quad r = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-a}{a}\right| = \tan^{-1}(1)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

$\therefore \quad a - ai = a\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ **(Ans.)**

এবং সাধারণ আর্গুমেন্ট $= 2n\pi - \frac{\pi}{4}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$ **(Ans.)**

5. (i) $(1 + 2i)(2 + 3i)(3 + 4i)$

$= (1 + 2i)(6 + 17i + 12i^2)$

$= (1 + 2i)(6 + 17i - 12)$

$= (1 + 2i)(-6 + 17i)$

$= -6 - 12i + 17i + 34i^2$

$= -6 + 5i - 34 = -40 + 5i$ **(Ans.)**

(ii) $\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$= \frac{3 + 10i + 8i^2}{(3)^2 - (4i)^2} = \frac{3 + 10i - 8}{9 + 16}$

$= \frac{-5 + 10i}{25} = \frac{-5}{25} + \frac{10i}{25} = -\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$ **(Ans.)**

(iii) $\frac{(1+i)^2}{2-3i} = \frac{(1 + 2i + i^2)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$

$= \frac{2i(2+3i)}{(2)^2 - (3i)^2} = \frac{4i + 6i^2}{4+9} = \frac{-6+4i}{13}$

$= -\frac{6}{13} + i\frac{4}{13}$ **(Ans.)**

(iv) $\frac{1+2i}{2+3i} + \frac{1-4i}{3-i}$

$= \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} + \frac{(1-4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$= \frac{2 + i - 6i^2}{4+9} + \frac{3 - 4i^2 - 11i}{9+1}$

$= \frac{8+i}{13} + \frac{7-11i}{10}$

$= \frac{80 + 10i + 91 - 143i}{130}$

$= \frac{171 - 133i}{130}$

$= \frac{171}{130} - i\frac{133}{130}$ **(Ans.)**

(v) $\frac{i}{3+i} = \frac{i(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$= \frac{3i - i^2}{9 - i^2} = \frac{3i+1}{9+1}$

$= \frac{1+3i}{10} = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10}$ **(Ans.)**

(vi) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^3$

$= \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^3$

$= \left(\frac{1 + 2i + i^2}{1-(-1)}\right)^3 \quad [\because i^2 = -1]$

$= \left(\frac{1 + 2i - 1}{2}\right)^3$

$= \left(\frac{2i}{2}\right)^3 = i^3 = -i$

$= 0 + i(-1)$ **(Ans.)**

6. (i) $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)}$

$= \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{4+1}$

$= \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

(ii) মনে করি, $z = \frac{3-i}{1-2i}$

$\therefore \quad z = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$= \frac{3 + 5i - 2i^2}{1+4} = \frac{5+5i}{5}$

$= 1 + i$

$\therefore$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস $= |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

এবং আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ (দেখানো হলো)

(iii) $re^{i\theta} = \frac{3+3i}{2+3i} + \frac{1+5i}{1-2i}$

$= \frac{(3+3i)(1-2i)+(1+5i)(2+3i)}{(2+3i)(1-2i)}$

বা, $re^{i\theta} = \frac{-4+10i}{8-i} = \frac{(-4+10i)(8+i)}{(8-i)(8+i)}$

বা, $re^{i\theta} = \frac{-42+76i}{65}$

[এখানে r = মডুলাস এবং θ = মূখ্য আর্গুমেন্ট]

$\therefore r = \left|\frac{-42+76i}{65}\right| = \frac{\sqrt{42^2+76^2}}{65} = \sqrt{\frac{116}{65}}$ **(Ans.)**

এবং $\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{76}{42}\right) = \pi - \tan^{-1}\frac{38}{21}$ **(Ans.)**

(iv) জটিল সংখ্যাটি: $-4-4i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-4}{-4}\right| = \tan^{-1}1$

যেহেতু বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

7. **(i)** দেওয়া আছে, $(a+ib)(c+id) = x+iy$

বা, $ac + ibc + iad + i^2bd = x+iy$

বা, $(ac-bd) + i(bc+ad) = x+iy$

$[\because i^2 = -1]$

উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$ac - bd = x$ ... ... (i)

$bc + ad = y$ ... ... (ii)

বামপক্ষ $= (a-ib)(c-id)$

$= ac - ibc - iad + i^2bd$

$= (ac-bd) - i(bc+ad)$

$= x - iy$ [(i) ও (ii) নং হতে]

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$

বা, $\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{a-ib}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1+ix-1+ix}{1+ix+1-ix} = \frac{1-a+ib}{1+a-ib}$

[বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2} = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a-ib)(1+a+ib)}$

বা, $ix = \frac{(1+ib-a)(1+ib+a)}{(1+a)^2-(ib)^2}$

$= \frac{(1+ib)^2-a^2}{1+2a+a^2-i^2b^2}$

$= \frac{1+2ib+i^2b^2-a^2}{1+2a+a^2+b^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-1}{1+2a+1}$ $[\because a^2+b^2 = 1]$

$= \frac{2ib}{2(1+a)}$

$= \frac{ib}{1+a}$

বা, $x = \frac{b}{1+a}$ যা x এর একটি বাস্তব মান

(দেখানো হলো)

(iii) দেওয়া আছে, $\frac{x}{y} = \frac{a+ib}{c+id}$

বা, $x(c+id) = y(a+ib)$

বা, $cx + idx = ay + iby$

বা, $idx - iby = ay - cx$

বা, $i(dx-by) = (ay-cx)$

বা, $i^2(dx-by)^2 = (ay-cx)^2$ [বর্গ করে]

বা, $-(d^2x^2 - 2bdxy + b^2y^2) = a^2y^2 - 2acxy + c^2x^2$

বা, $-d^2x^2 + 2bdxy - b^2y^2 = a^2y^2 - 2acxy + c^2x^2$

বা, $(a^2+b^2)y^2 + (c^2+d^2)x^2 = 2(ac+bd)xy$

$\therefore (c^2+d^2)x^2 - 2(ac+bd)xy + (a^2+b^2)y^2 = 0$

(দেখানো হলো)

(iv) $x+iy$ এর জটিল অনুবন্ধী $x-iy$

$\therefore x - iy = \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}}$

$\therefore (x+iy)(x-iy) = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}} \cdot \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}}$

বা, $x^2 - i^2y^2 = \sqrt{\frac{(p+iq)(p-iq)}{(r+is)(r-is)}}$

বা, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2-i^2q^2}{r^2-i^2s^2}}$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}}$

$\therefore (x^2+y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ **(দেখানো হলো)**

(v) দেওয়া আছে,

$-2-2i = a^2+2+ib$ ... ... (i)

(i) এর উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক রাশি সমীকৃত করে পাই,

$a^2 + 2 = -2$ এবং $b = -2$

বা, $a^2 = -4$

$\therefore a = \pm 2i$

$\therefore$ a এর মান জটিল ও b এর মান বাস্তব। **(Ans.)**

(vi) দেওয়া আছে, $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$

বা, $\left|\frac{1-ix}{1+ix}\right| = |a - ib|$

বা, $\frac{|1-ix|}{|1+ix|} = \sqrt{a^2+(-b)^2}$

বা, $\frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$

বা, $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$

বা, $1 = \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore a^2 + b^2 = 1$ **(দেখানো হলো)**

(vii) $x = \frac{a+ib}{a-ib}$

বা, $ax - ibx = a + ib$

বা, $ax - a = i(b + bx)$

বা, $(ax - a)^2 = -(b + bx)^2$ [বর্গ]

বা, $a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + b^2 + 2b^2x + b^2x^2 = 0$

বা, $(a^2 + b^2)x^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 - b^2)x$ **(প্রমাণিত)**

8. (i) দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এবং $|z - 8| + |z + 8| = 20$

এখন, $|x + iy - 8| + |x + iy + 8| = 20$

বা, $|x - 8 + iy| + |x + 8 + iy| = 20$

বা, $\sqrt{(x-8)^2+y^2} + \sqrt{(x+8)^2+y^2} = 20$

বা, $\sqrt{(x+8)^2+y^2} = 20 - \sqrt{(x-8)^2+y^2}$

বা, $(x+8)^2 + y^2 = \left\{20 - \sqrt{(x-8)^2+y^2}\right\}^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + 16x + 64 + y^2 = 400 + (x-8)^2 + y^2 - 40\sqrt{(x-8)^2+y^2}$

বা, $x^2 + y^2 + 16x + 64 = 400 + x^2 + 64 - 16x + y^2 - 40\sqrt{(x-8)^2+y^2}$

বা, $32x - 400 = -40\sqrt{(x-8)^2+y^2}$

বা, $8(4x - 50) = -40\sqrt{(x-8)^2+y^2}$

বা, $4x - 50 = -5\sqrt{(x-8)^2+y^2}$

বা, $(4x-50)^2 = 25\{(x-8)^2+y^2\}$ উভয়পক্ষকে বর্গ করে

বা, $16x^2 - 400x + 2500 = 25(x^2 - 16x + 64 + y^2)$

বা, $25x^2 - 400x + 1600 + 25y^2 - 16x^2 + 400x - 2500 = 0$

বা, $9x^2 + 25y^2 = 900$

বা, $\frac{9x^2}{900} + \frac{25y^2}{900} = 1$

বা, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$

যা উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, $z = x + iy$ এবং $|z - 2| = |z - 3i|$

এখন, $|x + iy - 2| = |x + iy - 3i|$

বা, $|x - 2 + iy| = |x + i(y - 3)|$

বা, $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$

বা, $(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-3)^2$

বা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9$

বা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0$

বা, $-4x + 6y - 5 = 0$

$\therefore 4x - 6y + 5 = 0$

যা সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $|2z + 3| = |z + 6|$

বা, $|2(x + iy) + 3| = |x + iy + 6|$

বা, $|2x + 3 + 2iy| = |x + 6 + iy|$

বা, $\sqrt{(2x+3)^2+(2y)^2} = \sqrt{(x+6)^2+y^2}$

বা, $4x^2 + 12x + 9 + 4y^2 = x^2 + 12x + 36 + y^2$

বা, $3x^2 + 3y^2 = 27$

$\therefore x^2 + y^2 = 9$

যা বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $z = x + iy$

$\therefore |z + i| = |\overline{z} + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |\overline{x + iy} + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |x - iy + 2|$

বা, $|x + i(y + 1)| = |(x + 2) - iy|$

বা, $\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

বা, $x^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + y^2$

বা, $x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

বা, $2y + 1 = 4x + 4$

বা, $4x - 2y + 3 = 0$

যা নির্ণেয় সরলরেখার সঞ্চার পথ। **(Ans.)**

(v) দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখন, $|z + 5| + |z - 5| = 15$

বা, $|x + iy + 5| + |x + iy - 5| = 15$

বা, $|x + 5 + iy| + |x - 5 + iy| = 15$

বা, $\sqrt{(x+5)^2+y^2} + \sqrt{(x-5)^2+y^2} = 15$

বা, $\sqrt{(x+5)^2+y^2} = 15 - \sqrt{(x-5)^2+y^2}$

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 = 225 + (x^2 - 10x + 25 + y^2) - 30\sqrt{(x-5)^2+y^2}$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 225 - x^2 + 10x - 25 - y^2 = -30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $20x - 225 = -30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $4x - 45 = -6\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36(x^2 - 10x + 25 + y^2)$

বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36x^2 - 360x + 900 + 36y^2$

বা, $20x^2 + 36y^2 = 1125$

যা উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(vi) দেওয়া আছে, $|z - 5| = 3$ এবং $z = x + iy$

$\therefore\ |x + iy - 5| = 3$

বা, $|(x - 5) + iy| = 3$

বা, $\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = 3$

বা, $(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র (5, 0) ও ব্যাসার্ধ 3 একক।

(vii) দেওয়া আছে, $|2z + 3| = |3z + 1|$

বা, $|2(x + iy) + 3| = |3(x + iy) + 1|$ $[\because z = x + iy]$

বা, $|(2x + 3) + i.2y| = |(3x + 1) + i.3y|$

বা, $\sqrt{(2x + 3)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(3x + 1)^2 + (3y)^2}$

বা, $4x^2 + 12x + 9 + 4y^2 = 9x^2 + 6x + 1 + 9y^2$

বা, $9x^2 - 4x^2 + 9y^2 - 4y^2 + 6x - 12x + 1 - 9 = 0$

বা, $5x^2 + 5y^2 - 6x - 8 = 0$

বা, $x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{25} + \frac{8}{5}$

বা, $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ

যার কেন্দ্র $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{5}$ **(Ans.)**

(viii) $z\bar{z} = 4$

$\Rightarrow (x + iy)(x - iy) = 4$ $[\because z = x + iy]$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$; যা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) ও ব্যাসার্ধ 2 একক।

(ix) $\mathbf{Re\left(\frac{1}{z}\right) = 1}$

দেওয়া আছে, $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

বা, $\text{Re}\left(\frac{1}{x + iy}\right) = 1$

বা, $\text{Re}\left\{\frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)}\right\} = 1$

বা, $\text{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = 1$

বা, $\text{Re}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}\right) = 1$

বা, $\frac{x}{x^2 + y^2} = 1$

বা, $x^2 + y^2 = x$

বা, $x^2 - x + y^2 = 0$

বা, $x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$

বা, $x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$

(x) $\text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{Im}\left(\frac{1}{x - iy}\right) = \frac{1}{2}$ $[\because z = x + iy]$

$\Rightarrow \text{Im}\left(\frac{x + iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{Im}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$ যা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্রের স্থানাংক (0, 1) ও ব্যাসার্ধ = 1

(xi) $|z + 4| = x$

বা, $|x + iy + 4| = x$

বা, $|(x + 4) + iy| = x$

বা, $\sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = x$

বা, $(x + 4)^2 + y^2 = x^2$

বা, $x^2 + 8x + 16 + y^2 = x^2$

বা, $y^2 = -8x - 16$

$\therefore\ y^2 = -4.2.(x + 2)$ যা একটি $y^2 = -4a(x - \alpha)$ আকারের পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু (– 2, 0)

(xii) $\big||z + 2i| - |z - 2i|\big| = 2$

বা, $\big||x + iy + 2i| - |x + iy - 2i|\big| = 2$

বা, $\big||x + i(y + 2)| - |x + i(y - 2)|\big| = 2$

বা, $\left|\sqrt{(x)^2 + (y + 2)^2} - \sqrt{(x)^2 + (y - 2)^2}\right| = 2$

বা, $\left|\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} - \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}\right| = 2$

বা, $x^2 + y^2 + 4y + 4 + x^2 + y^2 - 4y + 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}.\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 4$

বা, $2x^2 + 2y^2 + 8 - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 4)^2 - (4y)^2} = 4$

বা, $2x^2 + 2y^2 + 4 = 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 4)^2 - (4y)^2}$

বা, $(x^2 + y^2 + 2)^2 = (x^2 + y^2 + 4)^2 - 16y^2$

বা, $(x^2+y^2+4)^2-(x^2+y^2+2)^2=16y^2$

বা, $(x^2+y^2+4+x^2+y^2+2)(x^2+y^2+4-x^2-y^2-2)=16y^2$

বা, $(2x^2+2y^2+6)=16y^2$

বা, $4x^2+4y^2+12=16y^2$

বা, $4x^2-12y^2+12=0$

$\therefore x^2-3y^2+3=0$, যা একটি অধিবৃত্তের সঞ্চারপথ নির্দেশ করে।

9. (i) বামপক্ষ $=\left|\dfrac{x-iy}{x+iy}\right|=\dfrac{|x-iy|}{|x+iy|}$ $\left[\because \left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\right]$

$=\dfrac{\sqrt{(x)^2+(-y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ii) দেওয়া আছে, $z=x+iy$

এবং $3|z-1|=2|z-2|$

বা, $3|x+iy-1|=2|x+iy-2|$

বা, $3|(x-1)+iy|=2|(x-2)+iy|$

বা, $3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

বা, $9\{(x-1)^2+y^2\}=4\{(x-2)^2+y^2\}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9(x^2+y^2-2x+1)=4(x^2+y^2-4x+4)$

বা, $9(x^2+y^2)-18x+9=4(x^2+y^2)-16x+16$

$\therefore 5(x^2+y^2)=2x+7$ **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে, $|2z-1|=|z-2|$

বা, $|2(x+iy)-1|=|x+iy-2|$

বা, $|(2x-1)+2iy|=|(x-2)+iy|$

বা, $\sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

বা, $(2x-1)^2+4y^2=(x-2)^2+y^2$

বা, $4x^2-4x+1+4y^2=x^2-4x+4+y^2$

বা, $3x^2+3y^2=3$

$\therefore x^2+y^2=1$ **(প্রমাণিত)**

(iv) দেওয়া আছে, $x+iy=2e^{-i\theta}$

বা, $x+iy=2(\cos\theta-i\sin\theta)$

বা, $x+iy=2\cos\theta-2i\sin\theta$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x=2\cos\theta$ এবং $y=-2\sin\theta$

এখন, $x^2+y^2=(2\cos\theta)^2+(-2\sin\theta)^2$

$=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta$

$=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4$

$\therefore x^2+y^2=4$ **(প্রমাণিত)**

(v) দেওয়া আছে, $z=x+iy$

এখন, $|z+1|+|z-1|=4$

বা, $|x+iy+1|+|x+iy-1|=4$

বা, $|(x+1)+iy|+|(x-1)+iy|=4$

বা, $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$ $[\because |x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}]$

বা, $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

বা, $(x+1)^2+y^2=16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}+(x-1)^2+y^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x+1)^2-(x-1)^2=16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

বা, $4x=16-8\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

বা, $x=4-2\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

বা, $x-4=-2\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

বা, $(x-4)^2=4(x^2+y^2-2x+1)$

বা, $x^2-8x+16=4x^2+4y^2-8x+4$

$\therefore 3x^2+4y^2=12$ **(প্রমাণিত)**

(vi) দেওয়া আছে, $\arg\left(\dfrac{z-2}{z+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\arg\left\{\dfrac{(x-2)+iy}{(x+1)+iy}\right\}=\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\arg\{(x-2)+iy\}-\arg\{(x+1)+iy\}=\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{y}{x-2}-\tan^{-1}\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{\dfrac{y}{x-2}-\dfrac{y}{x+1}}{1+\dfrac{y}{x-2}\cdot\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\dfrac{\dfrac{y}{x-2}-\dfrac{y}{x+1}}{1+\dfrac{y^2}{(x-2)(x+1)}}=\tan\dfrac{\pi}{2}$

বা, $\dfrac{\dfrac{y}{x-2}-\dfrac{y}{x+1}}{1+\dfrac{y^2}{(x-2)(x+1)}}=\dfrac{1}{0}$

বা, $1+\dfrac{y^2}{(x-2)(x-1)}=0$

বা, $(x-2)(x+1)+y^2=0$

বা, $x^2+x-2x-2+y^2=0$

$\therefore x^2+y^2-x-2=0$ **(দেখানো হলো)**

(vii) $z=\dfrac{2}{3+\cos\theta+i\sin\theta}$

এখানে, $x+iy=\dfrac{2}{3+\cos\theta+i\sin\theta}$

$=\dfrac{2(3+\cos\theta-i\sin\theta)}{(3+\cos\theta+i\sin\theta)(3+\cos\theta-i\sin\theta)}$

$=\dfrac{6+2\cos\theta-i2\sin\theta}{(3+\cos\theta)^2-i^2\sin^2\theta}$

$=\dfrac{6+2\cos\theta-i2\sin\theta}{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \frac{2(3+\cos\theta) - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + 1}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \frac{2(3+\cos\theta)}{10 + 6\cos\theta} - \frac{i2\sin\theta}{2(5+3\cos\theta)}$

$= \frac{2(3+\cos\theta)}{2(5 + 3\cos\theta)} - \frac{i2\sin\theta}{2(5+3\cos\theta)}$

$= \frac{3+\cos\theta}{5 + 3\cos\theta} + i\frac{(-\sin\theta)}{5+3\cos\theta}$

$\therefore \quad x = \frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta}$ .... (i) এবং $y = \frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}$ .... (ii)

বামপক্ষ $= 2(x^2 + y^2)$

$= 2\left\{\left(\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}\right)^2\right\}$

[(i) ও (ii) নং হতে]

$= 2\left\{\frac{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}\right\}$

$= 2 \times \left\{\frac{9 + 6\cos\theta + 1}{(5+3\cos\theta)^2}\right\} = 2 \times \frac{(10 + 6\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2}$

$= 2 \times \frac{2(5+3\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2} = \frac{4}{5+3\cos\theta}$

ডানপক্ষ $= 3x - 1 = 3 \times \frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta} - 1$

$= \frac{9 + 3\cos\theta - 5 - 3\cos\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{4}{5+3\cos\theta}$

$\therefore \quad 2(x^2 + y^2) = 3x - 1$ **(প্রমাণিত)**

10.

(i) $x - 4i$ এর অনুবন্ধী রাশি হলো $x + 4i$

প্রশ্নমতে, $x + 4i = -3 + iy$

সমীকরটির উভয়পক্ষ থেকে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = -3$ এবং $y = 4$

Ans. $x = -3, y = 4$

(ii) $3 + ix^2y$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $= 3 - ix^2y$

শর্তমতে, $3 - ix^2y = x^2 + y + 4i$

$\therefore x^2 + y = 3$

$\Rightarrow x^2 = 3 - y$ ... ... (i)

এবং $-x^2y = 4$

$\Rightarrow x^2y = -4$

$\Rightarrow (3-y)y + 4 = 0$

$\Rightarrow 3y - y^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 4y + y - 4 = 0$

$\Rightarrow y(y-4) + 1(y-4) = 0$

$\Rightarrow (y-4)(y+1) = 0$

$\therefore y - 4 = 0$ অথবা, $y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = 4$ $\Rightarrow y = -1$

$y = 4$ হলে (i) হতে $x^2 = 3 - 4 = -1$

$\therefore x = \pm\sqrt{-1}$, গ্রহণযোগ্য নয়।

$y = -1$ হলে, (i) হতে $x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

Ans. $\left.\begin{matrix} x = \pm 2 \\ y = -1 \end{matrix}\right\}$

(iii) ধরি, জটিল সংখ্যা দুইটি z_1 ও z_2

প্রশ্নমতে, $z_1 + z_2 = 4$ .... (i) এবং $z_1z_2 = 8$ .... (ii)

এখন, $(z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2$

$= 16 - 32 = -16 = 16i^2$

$\therefore z_1 - z_2 = \pm 4i$

বা, $z_1 - z_2 = 4i$ .... (iii)

বা, $z_1 - z_2 = -4i$ .... (iv)

(i) ও (iii) সমাধান করে পাই, $z_1 = 2 + 2i, z_2 = 2 - 2i$

আবার, (i) ও (iv) সমাধান করে পাই, $z_1 = 2 - 2i, z_2 = 2 + 2i$

$\therefore$ জটিল সংখ্যা দুইটি $2 - 2i, 2 + 2i$ **(Ans.)**

(iv) দেওয়া আছে, $z_1 = -2 + 3i$ এবং $z_2 = 5 - i$

$\therefore z_1 + z_2 = 3 + 2i$

$\therefore \overline{z_1 + z_2} = 3 - 2i$ ... ... (i)

আবার, $\overline{z_1} = -2 - 3i$ ও $\overline{z_2} = 5 + i$

$\therefore \overline{z_1} + \overline{z_2} = 3 - 2i$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $(\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(দেখানো হলো)

এখন, $z_1 z_2 = (-2 + 3i)(5 - i)$

$= (-10 - 3i^2 + 17i)$

$= -7 + 17i$

$\therefore \quad \overline{z_1z_2} = -7 - 17i$ ... ... (iii)

এবং $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (-2 - 3i)(5 + i) = (-10 - 3i^2 - 17i)$

$= -7 - 17i$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ হতে পাই, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(দেখানো হলো)

(v) মনে করি, $z = x + iy \quad \therefore \overline{z} = x - iy$

$\therefore \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

এবং $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore \quad |\overline{z}| = |z|$ **(প্রমাণিত)**

$\overline{z} = x - iy$

$\therefore \quad \overline{\overline{z}} = x + iy = z$

$\therefore \quad \overline{\overline{z}} = z$ **(প্রমাণিত)**

আবার, $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$

কিন্তু $|\overline{z}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\overline{z}|^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\therefore \quad z\overline{z} = |\overline{z}|^2 = |z|^2$ **(প্রমাণিত)**

$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$ **(প্রমাণিত)**

$z - \overline{z} = x + iy - x + iy = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ **(প্রমাণিত)**

(vi) দেওয়া আছে, $z = 3 + 2i$ এবং $\overline{z} = 3 - 2i$

বামপক্ষ $= z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2$

$= (3 + 2i)^2 + (3 + 2i)(3 - 2i) + (3 - 2i)^2$

$= 9 + 12i + 4i^2 + 9 - 4i^2 + 9 - 12i + 4i^2$

$= 9 - 4 + 9 + 4 + 9 - 4 \quad [\because i^2 = -1]$

$= 23 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(vii) এখন, $z_1 = 2 - 3i$ এবং $z_2 = -3 + i$

$\therefore$ এখন, $z_1 + z_2 = 2 - 3i + i - 3 = -1 - 2i$

$\therefore$ $|z_1 + z_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ……… (i)

$\therefore$ আবার, $z_1 - z_2 = 2 - 3i + 3 - i = 5 - 4i$

$\therefore$ $|z_1 - z_2| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6.40$ ……… (ii)

আবার, $|z_1| = |2 - 3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|z_2| = |-3 + i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\therefore$ $|z_1| + |z_2| = \sqrt{13} + \sqrt{10} = 6.76$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে পাই,

$|z_1 + z_2| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$ **(দেখানো হলো)**

(viii) $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2})$

$= (z_1z_2)(\bar{z}_1\bar{z}_2)$

$= (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)$

$= |z_1|^2 |z|^2$

$= (|z_1|\,|z_2|)^2$

$\therefore |z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (প্রমাণিত)

অথবা,

$z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$

$\therefore z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

এখন, $|z_1|\,|z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$

$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2}$

আবার,

$|z_1z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$ ……… (i)

$= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2}$

$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2}$ …. (ii)

(i) & (ii) $\Rightarrow |z_1|\,|z_2| = |z_1z_2|$ প্রমাণিত।

(ix) দেওয়া আছে, $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$

$\Rightarrow |z_1| = |x_1 + iy_1| \quad \Rightarrow |z_2| = |x_2 + iy_2|$

$\Rightarrow |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \Rightarrow |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$\Rightarrow |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad \Rightarrow |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$

আবার, $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$\therefore$ $|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$

$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$ ……… (i)

এবং $z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$\therefore$ $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$

$= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2)$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

$\therefore$ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ **(প্রমাণিত)**

অথবা,

$\text{L.H.S} = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$

$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$

$\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$

$= 2(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)$

$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = \text{R.H.S}$

11. (i) প্রদত্ত জটিল সংখ্যাগুলো আর্গন্ড চিত্রে যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দুগুলো দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

তাহলে, A, B, C, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(9, 1), B(4, 13), C(-8, 8), D(-3, -4)$

$\therefore$ $AB = \sqrt{(9-4)^2 + (1-13)^2} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(4+8)^2 + (13-8)^2} = \sqrt{169} = 13$

$CD = \sqrt{(-8+3)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{169} = 13$

$DA = \sqrt{(-3-9)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{169} = 13$

আবার, কর্ণ $AC = \sqrt{(9+8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{338}$

কর্ণ $BD = \sqrt{(4+3)^2 + (13+4)^2} = \sqrt{338}$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$ এবং $AC = BD$

অর্থাৎ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান এবং কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান।

$\therefore$ ABCD একটি বর্গ। **(প্রমাণিত)**

(ii) প্রদত্ত জটিল সংখ্যাগুলো আর্গন্ড চিত্রে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুগুলো দ্বারা সূচিত করা হলো।

তাহলে, P, Q, R, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(2, -2), Q(8, 4), R(5, 7), S(-1, 1)$.

$\therefore$ $PQ = \sqrt{(2-8)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{72}$

$QR = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$

$RS = \sqrt{(5+1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{72}$

$SP = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{18}$

আবার, কর্ণ $PR = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{90}$

কর্ণ $QS = \sqrt{(8+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{90}$

$\therefore$ $PQ = RS$, $QR = SP$ এবং $PR = QS$

অর্থাৎ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান এবং কর্ণদ্বয়ও পরস্পর সমান।

$\therefore$ PQRS একটি আয়ত। **(প্রমাণিত)**

(iii) এখন,

$z = 2 + 3i$, জটিল সংখ্যাটির ক্রমজোড় $(2, 3)$

$iz = 2i - 3$, জটিল সংখ্যাটির ক্রমজোড় $(-3, 2)$

$z + iz = -1 + 5i$, জটিল সংখ্যাটির ক্রমজোড় $(-1, 5)$

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left|2(2-5) - 3(-3+1) + 1(-15+2)\right|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\left|-6 + 6 - 13\right|$

$= \frac{13}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-3.6.1 | পৃষ্ঠা-৮৮

(i) ধরি, $\sqrt{21 - 20i} = x + iy$

বা, $21 - 20i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$

বা, $21 - 20i = x^2 + 2ixy - y^2$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $21 - 20i = x^2 - y^2 + 2ixy$

উভয় পক্ষ থেকে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore$ $x^2 - y^2 = 21 \ldots\ldots\ldots (i)$

$2xy = -20 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore$ $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$

$= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$

$= (21)^2 + (-20)^2$

$= 441 + 400 = 841$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = 29 \ldots\ldots\ldots (iii)$

(iii) ও (i) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2x^2 = 50$ বা, $x^2 = 25$ $\therefore x = \pm 5$

(iii) নং থেকে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$2y^2 = 8$ বা, $y^2 = 4$ $\therefore y = \pm 2$

যেহেতু xy বিয়োগবোধক সেহেতু x ও y বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= 5 - 2i, -5 + 2i$

$= 5 - 2i, -(5 - 2i) = \pm(5 - 2i)$ **(Ans.)**

বিকল্প: $21 - 20i = 25 - 20i - 4 = (5)^2 - 2.5.2i + (2i)^2$

$\therefore = (5 - 2i)^2$

$\therefore$ $\sqrt{21 - 20i} = \pm(5 - 2i)$ **(Ans.)**

▶ অনুচ্ছেদ-3.6.4 | পৃষ্ঠা-৯০

(i) আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয় একটি অপরটির বর্গ।

$\therefore$ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$ হলে $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ হবে।

$\therefore$ $\omega^3 = \omega.\omega^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\therefore$ $\omega^3 = 1$ **(প্রমাণিত)**

(ii) $1 + \omega + \omega^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{2 - 1 + \sqrt{-3} - 1 - \sqrt{-3}}{2}$

$= \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ $1 + \omega + \omega^2 = 0$ **(প্রমাণিত)**

2. **(i)** প্রদত্ত রাশি $= \omega^{15} + \omega^{20} + \omega^{25}$

$= (\omega^3)^5 + \omega^{18+2} + \omega^{24+1}$

$= (\omega^3)^5 + (\omega^3)^6 . \omega^2 + (\omega^3)^8 . \omega$

$= 1 + \omega^2 + \omega$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= 0$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$ **(Ans.)**

(ii) প্রদত্ত রাশি $\frac{(1+\omega^7)^8}{1+\omega^2}$

$= \frac{\{1 + (\omega^3)^2 . \omega\}^8}{1+\omega^2}$

$= \frac{(1+\omega)^8}{(1+\omega^2)}$

$= \frac{(-\omega^2)^8}{(-\omega)}$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= -\frac{\omega^{16}}{\omega} = -\omega^{15} = -(\omega^3)^5 = -1$ $[\because \omega^3 = 1]$ **(Ans.)**

(iii) $(3 + 3\omega + 7\omega^2)^5$

$= \{3(1+\omega) + 7\omega^2\}^5$

$= \{3(-\omega^2) + 7\omega^2\}^5$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= (-3\omega^2 + 7\omega^2)^5$

$= (4\omega^2)^5$

$= 4^5 . \omega^{10} = 4^5 . \omega^9 . \omega = 1024\,\omega$ **(Ans.)**

3. মনে করি, $\sqrt[3]{-27} = x$

বা, $x^3 = -27$ [ঘন করে]

বা, $x^3 + 27 = 0$

বা, $(x)^3 + (3)^3 = 0$

বা, $(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

হয়, $x + 3 = 0$ অথবা, $x^2 - 3x + 9 = 0$

$\therefore\ x = -3 \quad \therefore x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.9}}{2.1}$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-27}}{2}$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{i^2.27}}{2} = \dfrac{3 \pm i.3\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{3(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$

(+) নিয়ে পাই, $x = \dfrac{3}{2}(i + i\sqrt{3})$

(–)নিয়ে পাই, $x = \dfrac{3}{2}(1 - i\sqrt{3})$

$\therefore\ \sqrt[3]{-27}$ এর মানগুলি হলো:

$-3, \dfrac{3}{2}(1 + i\sqrt{3}), \dfrac{3}{2}(1 - i\sqrt{3})$ **(Ans.)**

সুতরাং, কাল্পনিক মূল দুইটি। **(Ans.)**

এবং $\dfrac{3}{2}(1 + i\sqrt{3})$ এবং $\dfrac{3}{2}(1 - i\sqrt{3})$

কাল্পনিক মূলদুইটি একে অপরের অনুবন্ধী। **(Ans.)**

? অনুশীলনী-3(B) এর সমাধান

1. (i) 2i এর বর্গমূল $= \sqrt{2i}$

$= \sqrt{1 + 2i - 1}$

$= \sqrt{1 + 2.1.i + i^2} = \sqrt{(1+i)^2}$

$= \pm(1+i)$ **(Ans.)**

(ii) $3 + 4i = (2)^2 + 2.2.i + (i)^2 = (2+i)^2$

$\therefore \sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$ **(Ans.)**

(iii) $-7 + 24i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{-7+24i}$

ধরি, $\sqrt{-7+24i} = a + ib$ [এখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা]

বা, $-7 + 24i = a^2 + i^2b^2 + 2iab$ [বর্গ করে]

বা, $-7 + 24i = a^2 - b^2 + 2iab$ [$\because i^2 = -1$]

উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a^2 - b^2 = -7$ ... ... (i)

এবং $2ab = 24$ ... ... (ii)

এখন, $a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$

$= \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2}$

$= \sqrt{(-7)^2 + (24)^2}$

$= \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 25$ ... ... (iii)

[$\because$ a, b বাস্তব তাই $a^2 + b^2$ এর মান ± নয় শুধু ধনাত্মক (+)]

এখন, (i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে,

$a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = -7 + 25$

বা, $2a^2 = 18$ বা, $a^2 = 9 \therefore a = \pm 3$

আবার, (iii) হতে (i) বিয়োগ করে,

$a^2 + b^2 - a^2 + b^2 = 25 - (-7)$

বা, $2b^2 = 25 + 7$ বা, $2b^2 = 32$

বা, $b^2 = 16 \ \therefore b = \pm 4$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল, $\sqrt{-7+24i} = a + ib$

$= \pm 3 + i(\pm 4) = \pm(3 + 4i)$ **(Ans.)**

বিকল্প: $-7 + 24i = 9 + 24i - 16$

$= (3)^2 + 2.3.4i + (4i)^2$ [$\because i^2 = -1$]

$= (3 + 4i)^2$

$\therefore -7 + 24i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{-7+24i}$

$= \pm\sqrt{(3+4i)^2} = \pm(3+4i)$ **(Ans.)**

(iv) $-8 - 6\sqrt{-1} = -8 - 6i$

$= 1 - 6i - 9$

$= 1 - 2.3i + (3i)^2$

$= (1 - 3i)^2$

$\therefore -8 - 6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(1-3i)^2}$

$= \pm(1 - 3i)$ **(Ans.)**

(v) $7 - 30\sqrt{-2}$

$= 7 - 2.15\sqrt{2}.i = 25 - 2.15\sqrt{2}i - 18$

$= 5^2 - 2.5.3\sqrt{2}.i + (3\sqrt{2}i)^2 = (5 - 3\sqrt{2}i)^2$

$\therefore\ \sqrt{7 - 30\sqrt{-2}} = \pm(5 - 3\sqrt{2}i) = \pm(5 - 3\sqrt{-2})$ **(Ans.)**

(vi) $1 \pm i = \dfrac{1}{2}(2 \pm 2i)$

$= \dfrac{1}{2}(2 \pm 2i\sqrt{1})$

$= \dfrac{1}{2}\left\{2 \pm 2i\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{2 \pm 2\sqrt{\sqrt{2}+1}\,.\,i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^2 \pm 2\sqrt{\sqrt{2}+1}.i\sqrt{\sqrt{2}-1} + \left(i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} \pm i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$

$\therefore\ \sqrt{1 \pm i} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} \pm i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

বিকল্প সমাধান: $1 \pm i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{1 \pm i}$

ধনাত্মক চিহ্ন বিবেচনা করে আমরা ধরি,

$\sqrt{1+i} = x + iy$ [এখানে x ও y বাস্তব সংখ্যা]

বা, $1 + i = x^2 + i^2y^2 + i2xy$ [বর্গ করে]

বা, $1 + i = x^2 - y^2 + i2xy$

এখন, উভয়পক্ষ থেকে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 1$ ... ... (i)

এবং $2xy = 1$ ... ... (ii)

এখন, $x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{1 + 1}$

[∵ দুইটি বাস্তব সংখ্যার বর্গের যোগফল সবসময় ধনাত্মক]

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ... ... (iii)

এখন, (i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে,

$x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{2}$

বা, $2x^2 = \sqrt{2} + 1$ বা, $x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

$\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2} + 1)}$

আবার, (iii) হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে,

$x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = \sqrt{2} - 1$

বা, $2y^2 = \sqrt{2} - 1$

বা, $y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ বা, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$

$\therefore \sqrt{1 + i} = x + iy$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}\right) + i\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)\right\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}} + i(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}\right\}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$\sqrt{1 - i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}\right\}$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল,

$\sqrt{1 \pm i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \pm i(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}\right\}$ **(Ans.)**

(vii) $2x + i(x^2 - 1)$

$= \frac{1}{2}[4x + 2i(x^2 - 1)]$

$= \frac{1}{2}[(x + 1)^2 - (x - 1)^2 + 2i(x + 1)(x - 1)]$

$= \frac{1}{2}[(x + 1)^2 + \{i(x - 1)\}^2 + 2i\{(x + 1)(x - 1)\}]$

$= \frac{1}{2}[(x + 1) + i(x - 1)]^2$

$\therefore 2x + i(x^2 - 1)$ এর বর্গমূল

$= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\{(x + 1) + i(x - 1)\}^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x + 1) + i(x - 1)\}$ **(Ans.)**

(viii) $2 + i\sqrt{x^2 - 4}; x > 2$

$= \frac{1}{2}\left(4 + 2i\sqrt{x^2 - 4}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[(x + 2) - (x - 2) + 2i\sqrt{(x + 2)(x - 2)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{x + 2} + i\sqrt{x - 2}\right]^2$

নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x + 2} + i\sqrt{x - 2}\right)$ **(Ans.)**

(ix) ধরি, $x = \sqrt{8i}$

বা, $x^2 = 8i$ বা, $x^2 = 4 + 8i - 4$

বা, $x^2 = 2^2 + 2.2.2i + (2i)^2$

বা, $x^2 = (2 + 2i)^2$ বা, $x = \pm(2 + 2i)$

বা, $x = \pm 2(1 + i)$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $\pm 2(1 + i)$ **(Ans.)**

(x) প্রদত্ত জটিল সংখ্যা $= \frac{-8i}{1 - i^2} = \frac{-8i}{1 - (-1)} = -4i$

∴ জটিল সংখ্যাটির বর্গমূল $= \sqrt{-4i}$

$= \sqrt{2 - 4i - 2}$

$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{2}i + (\sqrt{2}i)^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2} = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$ **(Ans.)**

(xi) $-3 - 4i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{-3 - 4i} = \sqrt{1 - 4i - 4}$

$= \sqrt{1 - 2.1.2i + (2i)^2}$

$= \sqrt{(1 - 2i)^2} = \pm(1 - 2i)$ **(Ans.)**

2. দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 1 + 2i$

$\therefore z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i$

$\therefore \overline{z_1 - z_2} = \overline{1 + i} = 1 - i$

মনে করি, $\sqrt{1 - i} = x - iy$

$\Rightarrow 1 - i = x^2 - i.2xy + i^2y^2$

$\Rightarrow 1 - i = x^2 - y^2 - i.2xy$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 1$ ... ... (i)

এবং $-2xy = -1$

$\Rightarrow 2xy = 1$ ... ... (ii)

এখন, $x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{1^2 + (2xy)^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ... ... (iii)

এখন, (i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2x^2 = 1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$ $\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} + 1}$

আবার, (iii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

$\therefore y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

$\therefore \sqrt{1 - i} = x - iy$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1})$ **(Ans.)**

3. (i) i এর বর্গমূল $= \sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{i^2 + 2i + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + i)^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ **(দেখানো হলো)**

(ii) $-i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{-2i}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{1 + i^2 - 2i}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - i)^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ **(দেখানো হলো)**

(iii) প্রশ্ন-3(i) ও 3(ii) হতে পাই,

$\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i + 1 - i)$

$= \pm\frac{2}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$ **(দেখানো হলো)**

(iv) $(3 + 4i)^{-\frac{1}{2}} + (3 - 4i)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3 + 4i}} + \frac{1}{\sqrt{3 - 4i}} = \frac{\sqrt{3 - 4i} + \sqrt{3 + 4i}}{\sqrt{(3 + 4i)(3 - 4i)}}$

$= \frac{\sqrt{4 - 2.2.i + i^2} + \sqrt{4 + 2.2.i + i^2}}{\sqrt{9 + 16}}$

$= \frac{\sqrt{(2 - i)^2} + \sqrt{(2 + i)^2}}{\sqrt{25}} = \frac{\pm(2 - i) \pm (2 + i)}{5}$

$= \pm\frac{4}{5}$ **(দেখানো হলো)**

(v) মনে করি, $\sqrt{x + i\sqrt{1 - x^2}} = a + ib$

বা, $x + i\sqrt{1 - x^2} = a^2 - b^2 + i\,2ab$ [বর্গ করে]

$\therefore a^2 - b^2 = x$ এবং $2ab = \sqrt{1 - x^2}$

এখন, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 1$ [দুইটি বর্গের যোগফল সবসময় ধনাত্মক]

$\therefore 2a^2 = x + 1$

বা, $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x + 1}$

এবং $2b^2 = 1 - x$

বা, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - x}$

যেহেতু ab এর চিহ্ন ধনাত্মক, সুতরাং a এবং b উভয়ই ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক।

$\therefore \sqrt{x + i\sqrt{1 - x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 + x} + i\sqrt{1 - x})$

(দেখানো হলো)

(vi) মনে করি,

$\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots \infty}}} = x$

বা, $-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots \infty}} = x^2$ [বর্গ করে]

বা, $-2 + 2x = x^2$

বা, $x^2 - 2x + 2 = 0$

বা, $x^2 - 2.x.1 + 1^2 + 1 = 0$

বা, $(x - 1)^2 = -1$ বা, $x - 1 = \pm\sqrt{-1}$

বা, $x - 1 = \pm i$ বা, $x = 1 \pm i$

$\therefore \sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots \infty}}} = 1 \pm i$

(দেখানো হলো)

4. (i) মনে করি, $x = \sqrt[3]{i}$

বা, $x^3 = i$ [ঘন করে]

বা, $x^3 - i = 0$

বা, $x^3 + i^3 = 0$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $(x + i)(x^2 - ix + i^2) = 0$

হয় $x + i = 0$

$\therefore x = -i$

অথবা, $x^2 - ix + i^2 = 0$

বা, $x^2 - ix - 1 = 0$

বা, $x = \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-1 + 4}}{2}$

$\therefore x = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sqrt[3]{i} = -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $x = \sqrt[3]{-1}$

বা, $x^3 = -1$ [ঘন করে]

বা, $x^3 + 1 = 0$

বা, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

হয়, $x+1=0$ বা, $x=-1$

অথবা, $x^2-x+1=0$

$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore \sqrt[3]{-1} = -1, \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ **(Ans.)**

(iii) $\sqrt[4]{-144} = (-1.\ 144)^{\frac{1}{4}} = \{(\pm 12i)^2\}^{\frac{1}{4}}$

$= \{6(\pm 2i\}^{\frac{1}{2}} = \{6(1\pm 2i-1)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{6(1\pm 2i+i^2)\}^{\frac{1}{2}} = \{6(1\pm i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

$= \pm\sqrt{6}(1\pm i)$

$\therefore$ $\sqrt[4]{-144}$ এর মানগুলো হলো: $\pm\sqrt{6}(1\pm i)$ **(Ans.)**

(iv) $\sqrt[4]{-64} = \{(\pm 8i)^2\}^{\frac{1}{4}} = (\pm 8i)^{\frac{1}{2}}$

$= \{4(\pm 2i)\}^{\frac{1}{2}} = \{4(1\pm 2i-1)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{4(1\pm 2i+i^2)\}^{\frac{1}{2}} = \{4(1\pm i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

$= \pm 2(1\pm i)$ **(Ans.)**

(v) ধরি, $\sqrt[4]{1} = x$

বা, $x^4 = 1$

বা, $x^4 - 1 = 0$

বা, $(x^2+1)(x^2-1) = 0$

বা, $(x^2-i^2)(x^2-1) = 0$

$\therefore x^2 - i^2 = 0$ অথবা, $x^2 - 1 = 0$

বা, $x^2 = i^2$ বা, $x^2 = 1$

$\therefore x = \pm i$ $\therefore x = \pm 1$

$\therefore$ $\sqrt[4]{1}$ এর মানগুলো হলো: $\pm 1, \pm i$ **(Ans.)**

(vi) মনে করি, $\sqrt[6]{-64} = x$

বা, $x^6 = -64$ [উভয়পক্ষের ঘাতকে 6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^6 + 64 = 0$

বা, $(x^2)^3 + 4^3 = 0$

বা, $(x^2+4)(x^4-4x^2+16) = 0$

হয় $x^2+4=0$ বা, $x^2 = -4 = 4i^2$

$\therefore x = \pm 2i$

অথবা, $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$

$\therefore x^2 = \frac{4\pm\sqrt{16-64}}{2}$

বা, $x^2 = \frac{4\pm\sqrt{-48}}{2} = \frac{4\pm i\sqrt{48}}{2} = \frac{4\pm i.4\sqrt{3}}{2}$

$= 2\pm i.2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 1 \pm i.2\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3})^2 \pm 2.\sqrt{3}.i + i^2$

$\therefore x^2 = (\sqrt{3}\pm i)^2$

$\therefore x = \pm(\sqrt{3}\pm i)$

$\therefore$ $\sqrt[6]{-64}$ এর মানগুলো হলো: $\pm 2i, \pm(\sqrt{3}\pm i)$ **(Ans.)**

(vii) $\sqrt[4]{-81} = (-81)^{\frac{1}{4}} = (-1.81)^{\frac{1}{4}} = (i^2.9^2)^{\frac{1}{4}}$

$= \{(\pm 9i)^2\}^{\frac{1}{4}} = (\pm 9i)^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{9}{2}(\pm 2i)\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{\frac{9}{2}(1\pm 2i+i^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$ $[\because i^2=-1]$

$= \left\{\frac{9}{2}(1\pm i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i).$

$\therefore$ $\sqrt[4]{-81}$ এর মানগুলো হলো: $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ **(Ans.)**

5. (i) দেওয়া আছে, $P = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\therefore P^2 = \frac{1-1+2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$ $[\because i = \sqrt{-1}]$

বামপক্ষ $= P^6 + P^4 + P^2 + 1$

$= (P^2)^3 + (P^2)^2 + P^2 + 1$

$= (i)^3 + (i)^2 + i + 1$

$= i^3 + i^2 + i + 1$

$= -i - 1 + i + 1$ $[\because i^2 = -1, i^3 = -i]$

$= 0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ii) ধরি, $S = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{39}$

ধারাটিতে প্রথম পদ = 1 এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{i}{1} = i$

পদ সংখ্যা, n = 40

$\therefore S = 1.\frac{i^{40}-1}{i-1} = \frac{(i^4)^{10}-1}{i-1} = \frac{1^{10}-1}{i-1} = \frac{0}{i-1} = 0$

$\therefore 1 + i + i^2 + i^3 + ,....+ i^{39} = 0$ **(Ans.)**

(iii) দেওয়া আছে, $x = 3 - i\sqrt{5}$

বা, $x - 3 = -i\sqrt{5}$

বা, $(x-3)^2 = \left(-\sqrt{-5}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 6x + 9 = -5$

$\therefore x^2 - 6x + 14 = 0$

এখন, বামপক্ষ $= 2x^3 - 9x^2 + 10x + 45$

$= 2x^3 - 12x^2 + 28x + 3x^2 - 18x + 45$

$= 2x(x^2 - 6x + 14) + 3x^2 - 18x + 45$

$= 2x.0 + 3(x^2 - 6x + 14) + 3$

$= 0 + 3.0 + 3 = 3$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $x = 2 + i$

বা, $x - 2 = i$

বা, $x^2 - 4x + 4 = i^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 4x + 4 = -1$ [$\because i^2 = -1$]

$\therefore x^2 - 4x + 5 = 0$

এখন, বামপক্ষ $= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$

$= x^2(x^2 - 4x + 5) + x^2 - 4x + 5$

$= x^2.0 + (x^2 - 4x + 5)$

$= 0 + 0 = 0 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(v) দেওয়া আছে, $x = 2 + \sqrt{-3}$

বা, $x - 2 = \sqrt{-3}$

বা, $x^2 - 4x + 4 = -3$ [বর্গ করে]

$\therefore x^2 - 4x + 7 = 0$

প্রদত্ত রাশি $= 3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$

$= 3x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 5$

$= 3x^2(x^2 - 4x + 7) - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 5$

$= 3x^2.0 - 5x(x^2 - 4x + 7) + 5$

$= 0 - 5x.0 + 5 = 5$ **(Ans.)**

6. (i) দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

অর্থাৎ, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

বা, $a + ib = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$

[$\because i^2 = -1$]

$\therefore a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - i3x^2y + iy^3$

$= x^3 - i3x^2y - 3xy^2 - i^3y^3$ [$\because i^2 = -1$]

$= (x)^3 - 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 - (iy)^3$

বা, $a - ib = (x - iy)^3$

$\therefore \sqrt[3]{a - ib} = x - iy$ **(প্রমাণিত)**

(ii) দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

অর্থাৎ, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন, বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, ডানপক্ষ $= \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

$= \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x} + \frac{y(3x^2 - y^2)}{y}$

$= x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2 = 4(x^2 - y^2)$

$=$ বামপক্ষ

$\therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

বা, $a + ib = (x + iy)^3$

বা, $a + ib = x^3 + 3.x^2.iy + 3.x.(iy)^2 + (iy)^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ [$\because i^3 = -i$]

এখন, বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

বা, $a = x(x^2 - 3y^2)$ এবং $b = y(3x^2 - y^2)$

বা, $\frac{a}{x} = x^2 - 3y^2$ বা, $\frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$

এখন, $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 - 3x^2 + y^2$

$= -2x^2 - 2y^2 = -2(x^2 + y^2)$ **(প্রমাণিত)**

7. (i) বামপক্ষ $= (1 + \omega - \omega^2)^3 - (1 - \omega + \omega^2)^3$

$= (-\omega^2 - \omega^2)^3 - (-\omega - \omega)^3$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= (-2\omega^2)^3 - (-2\omega)^3$

$= -8(\omega^3)^2 - (-8).1$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= -8 + 8$

$= 0 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ii) বামপক্ষ $= (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8)$

$= (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^3.\omega)(1 + \omega^3.\omega^3.\omega^2)$

$= (1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega)(1 + \omega^2)$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= (1 + \omega)^2(1 + \omega^2)^2$

$= (0 - \omega^2)^2(0 - \omega)^2$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= \omega^4.\omega^2$

$= \omega^6$

$= \omega^3.\omega^3$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= 1.1 = 1$

$=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(iii) বামপক্ষ $= (1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2)$

$= (-\omega - \omega)(-\omega^2 - \omega^2)$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= (-2\omega)(-2\omega^2) = 4\omega^3$

$= 4$ [$\because \omega^3 = 1$]

$=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(iv) বামপক্ষ $= (1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})$
$= (1-\omega^2)(1-\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^2)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^3.\omega)$
$= (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= (1-\omega^2)^2(1-\omega)^2$
$= (1-2\omega^2+\omega^4)(1-2\omega+\omega^2)$
$= (1-2\omega^2+\omega)(1-2\omega+\omega^2)$
$= (1+\omega+\omega^2-3\omega^2)(1+\omega+\omega^2-3\omega)$
$= (-3\omega)(-3\omega^2) = 9\omega^3$
$= 9$ [$\because \omega^3 = 1$]
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(v) বামপক্ষ $= (1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$
$= (-\omega-\omega)^2 + (-\omega^2-\omega^2)^2$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2$
$= 4\omega^2 + 4\omega^4$
$= 4\omega^2 + 4\omega^3.\omega$
$= 4(\omega^2+\omega)$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= 4(-1)$ [$\because \omega+\omega^2+1 = 0$]
$= -4$
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(vi) বামপক্ষ $= (1-\omega^2+\omega^4)^2 + (1+\omega^2-\omega^4)^2$
$= (1-\omega^2+\omega^3.\omega)^2 + (1+\omega^2-\omega.\omega^3)^2$
$= (1-\omega^2+\omega)^2 + (1+\omega^2-\omega)^2$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= (-\omega^2-\omega^2)^2 + (-\omega-\omega)^2$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
$= (-2\omega^2)^2 + (-2\omega)^2$
$= 4\omega^4 + 4\omega^2$
$= 4(\omega^4+\omega^2)$
$= 4(\omega.\omega^3+\omega^2)$
$= 4(\omega+\omega^2)$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= 4(-1)$ [$\because \omega+\omega^2 = -1$]
$= -4$
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(vii) বামপক্ষ $= (x+y)^2 + (x\omega+y\omega^2)^2 + (x\omega^2+y\omega)^2$
$= (x^2+y^2+2xy) + (x^2\omega^2+y^2\omega^4+2xy\omega^3) + (x^2\omega^4+y^2\omega^2+2xy\omega^3)$
$= (x^2+x^2\omega^2+x^2\omega^4) + (y^2+y^2\omega^4+y^2\omega^2) + 2xy + 2xy\omega^3 + 2xy\omega^3$
$= x^2(1+\omega^2+\omega^4) + y^2(1+\omega^4+\omega^2) + 2xy(1+\omega^3+\omega^3)$
$= x^2(1+\omega^2+\omega) + y^2(1+\omega^2+\omega) + 2xy(1+1+1)$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= x^2.0 + y^2.0 + 2xy.3$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
$= 6xy$ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(viii) ডানপক্ষ $= a^3+b^3+c^3-3abc$
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= (a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2) + bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)\}$
$= (a+b+c)\{a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab\omega + ab\omega^2+bc\omega^4+bc\omega^2+ca\omega+ca\omega^2\}$
$= (a+b+c)\{a(a+b\omega+c\omega^2) + b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)\}$
$= (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$
= বামপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ix) বামপক্ষ $= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$
$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega+\omega^3.\omega^3.\omega^2)\{1-\omega^3.\omega^3.\omega^2+(\omega^3)^5.\omega\}$
$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= (1-\omega+\omega^2)^2(1-\omega^2+\omega)^2$
$= (1+\omega+\omega^2-2\omega)^2(1+\omega+\omega^2-2\omega^2)^2$
$= (0-2\omega)^2(0-2\omega^2)^2$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
$= 4\omega^2.4.\omega^4 = 16\omega^6$
$= 16$ [$\because \omega^6 = \omega^3.\omega^3 = 1$]
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(x) বামপক্ষ $= (1-\omega+\omega^2)^3 + (1+\omega-\omega^2)^3$
$= (-\omega-\omega)^3 + (-\omega^2-\omega^2)^3$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
$= (-2\omega)^3 + (-2\omega^2)^3 = -8\omega^3 - 8\omega^6$
$= -8-8$ [$\because \omega^3 = 1, \omega^6 = 1$]
$= -16$
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(xi) বামপক্ষ $= (1+\omega-\omega^2)^4 + (1-\omega+\omega^2)^4$
$= (-\omega^2-\omega^2)^4 + (-\omega-\omega)^4$
[$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$, i.e $1+\omega = -\omega^2$]
$= (-2\omega^2)^4 + (-2\omega)^4 = 16\omega^8 + 16\omega^4$
$= 16(\omega^8+\omega^4) = 16(\omega^2+\omega)$
$= -16$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
(দেখানো হলো)

(xii) বামপক্ষ $= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$
$= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$
$= (1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$
$= (1-2\omega+\omega^2)(1-2\omega^2+\omega^4)$
$= (1+\omega^2-2\omega)(1+\omega-2\omega^2)$ [$\because \omega^4 = \omega$]
$= (-\omega-2\omega)(-\omega^2-2\omega^2)$
$= (-3\omega)(-3\omega^2)$
$= 9\omega^3 = 9.1 = 9$
= ডানপক্ষ [$\because \omega^3 = 1$] **(দেখানো হলো)**

(xiii) বামপক্ষ $= (1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$
$= (-\omega^2-\omega^2)(-1-1)(-\omega-\omega)$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$]
$= (-2\omega^2).(-2).(-2\omega) = -8\omega^3$
$= -8$ [$\because \omega^3 = 1$]
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(xiv) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots 2n$ উৎপাদক পর্যন্ত $= 2^{2n}$.

বামপক্ষ $= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)$
$(1-\omega^4+\omega^8)\cdots 2n$ উৎপাদক
$= \{(1-\omega+\omega^2)(1-\omega+\omega^2)\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক$\} \times \{(1-\omega^2+\omega)(1-\omega^2+\omega)\cdots$ n সংখ্যক উৎপাদক$\}$
$= (1-\omega+\omega^2)^n(1-\omega^2+\omega)^n$
$= (0-2\omega)^n(0-2\omega^2)^n$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$
$= [(-2\omega)(-2\omega^2)]^n$
$= (4\omega^3)^n = 4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

৪. (i) $(a+b\omega+c\omega^2)^2+(a\omega+b+c\omega^2)^2+(a\omega+b\omega^2+c)^2=0$

বা, $(a+b\omega+c\omega^2)^2+(a\omega+b+c\omega^2)^2+(a\omega+b\omega^2+c\omega^3)^2=0$ $[\because \omega^3=1]$

বা, $(a+b\omega+c\omega^2)^2+(a\omega+b+c\omega^2)^2+\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)^2=0$

বা, $(a+b\omega+c\omega^2)^2(1+\omega^2)=-(a\omega+b+c\omega^2)^2$

বা, $(a+b\omega+c\omega^2)^2(-\omega)=-(a\omega+b+c\omega^2)^2$ $[\because 1+\omega^2=-\omega]$

বা, $(a+b\omega+c\omega^2)^2.\omega^4=(a\omega+b+c\omega^2)^2$ $[\because \omega=\omega^4]$

বা, $(a+b\omega+c\omega^2)\omega^2=\pm(a\omega+b+c\omega^2)$

বা, $a\omega^2+b\omega^3+c\omega^4=\pm(a\omega+b+c\omega^2)$

বা, $a\omega^2+b+c\omega=\pm(a\omega+b+c\omega^2)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে,
$a\omega^2+b+c\omega=a\omega+b+c\omega^2$

বা, $a(\omega^2-\omega)-c(\omega^2-\omega)=0$

বা, $(a-c)(\omega^2-\omega)=0$

কিন্তু $\omega^2-\omega\neq 0$

$\therefore$ $a-c=0$ বা, $a=c$

ঋণাত্মক চিহ্ন নিয়ে,
$a\omega^2+b+c\omega=-a\omega-b-c\omega^2$

বা, $a(\omega^2+\omega)+2b+c(\omega^2+\omega)=0$

বা, $a(-1)+2b+c(-1)=0$ $[\because \omega^2+\omega=-1]$

বা, $2b=a+c$ বা, $b=\frac{1}{2}(a+c)$

$\therefore$ $a=c$ বা, $b=\frac{1}{2}(a+c)$ **(প্রমাণিত)**.

(ii) মনে করি, $a\omega^2+b+c\omega=x$
এবং $a\omega+b+c\omega^2=y$

$\therefore x^3+y^3=0$

বা, $(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$

বা, $(x+y)\{x^2+xy(-1)+y^2.1\}=0$

বা, $(x+y)\{x^2+xy(\omega+\omega^2)+y^2\omega^3\}=0$

বা, $(x+y)\{x^2+xy\omega+xy\omega^2+y^2\omega^3\}=0$
$[\because 1+\omega+\omega^2=0$ ও $\omega^3=1]$

বা, $(x+y)\{x(x+y\omega)+y\omega^2(x+y\omega)\}=0$

বা, $(x+y)(x+y\omega)(x+y\omega^2)=0$

হয়, $x+y=0$

বা, $a\omega^2+b+c\omega+a\omega+b+c\omega^2=0$ [মান বসিয়ে]

বা, $a(\omega^2+\omega)+2b+c(\omega+\omega^2)=0$

বা, $a(-1)+2b+c(-1)=0$

বা, $2b-a-c=0$ বা, $2b=c+a$

$\therefore b=\frac{c+a}{2}$

অথবা, $x+y\omega=0$

বা, $a\omega^2+b+c\omega+(a\omega+b+c\omega^2)\omega=0$ [মান বসিয়ে]

বা, $a(\omega^2+\omega^2)+b(1+\omega)+c(\omega+\omega^3)=0$

বা, $2a\omega^2+b(-\omega^2)+c(\omega+1)=0$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

বা, $2a\omega^2-b\omega^2+c(-\omega^2)=0$

বা, $2a-b-c=0$ [উভয়পক্ষকে ω^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $2a=b+c$ $\therefore$ $a=\frac{b+c}{2}$

অথবা, $x+y\omega^2=0$

বা, $a\omega^2+b+c\omega+(a\omega+b+c\omega^2)\omega^2=0$ [মান বসিয়ে]

বা, $a\omega^2+b+c\omega+a\omega^3+b\omega^2+c\omega^4=0$

বা, $a(\omega^2+\omega^3)+b(1+\omega^2)+c(\omega+\omega^4)=0$

বা, $a(\omega^2+1)+b(-\omega)+c(\omega+\omega^3.\omega)=0$
$[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

বা, $a(-\omega)+b(-\omega)+c(\omega+\omega)=0$

বা, $-a-b+2c=0$ [উভয়পক্ষকে ω দ্বারা ভাগ করে]

বা, $2c=a+b$ $\therefore$ $c=\frac{a+b}{2}$

$\therefore$ $a=\frac{1}{2}(b+c)$ বা $b=\frac{1}{2}(c+a)$ বা $c=\frac{1}{2}(a+b)$

(প্রমাণিত)

(iii) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$

ধরি, $a+b\omega+c\omega^2=x$ এবং $a+b\omega^2+c\omega=y$

$\therefore$ $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$=(x+y)\{x^2+(\omega+\omega^2)xy+\omega^3y^2\}$
$[\therefore 1+\omega+\omega^2=0]$
$=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

এখন, $x+y=2a+b(\omega+\omega^2)+c(\omega+\omega^2)$
$=2a-b-c$

$x+\omega y=a+b\omega+c\omega^2+a\omega+b\omega^3+c\omega^2$
$=a(1+\omega)+b(1+\omega)+2c\omega^2$
$=-a\omega^2-b\omega^2+2c\omega^2$
$=(-a-b+2c)\omega^2$

$x + \omega^2 y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^3$
$= a(1 + \omega^2) + b(\omega + \omega) + c(1 + \omega^2)$
$= -a\omega + 2b\omega - c\omega = (-a + 2b - c)\omega$

$\therefore (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$
$= (2b - a - c)(2a - b - c)(2c - a - b)\omega^3$
$= (2b - a - c)(2a - b - c)(2c - a - b)$
$= \{3b - (a + b + c)\}\{3a - (a + b + c)\}\{3c - (a + b + c)\}$
$= (3b - 0)(3a - 0)(3c - 0)$ [$\because a + b + c = 0$]
$= 3b.3a.3c = 27\ abc$

$\therefore (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 27abc$

(দেখানো হলো)

(iv) $z^2 + z + 1 = 0$ সমীকরণের যেকোনো জটিল মূল ω হলে, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

১ম রাশি $= (1 + 3\omega + \omega^2)^2$
$= (-\omega + 3\omega)^2 = 4\omega^2$

২য় রাশি $= (1 + \omega + 3\omega^2)^2$
$= (-\omega^2 + 3\omega^2)^2 = 4\omega^4 = 4\omega$

এখন, ১ম রাশি × ২য় রাশি
$= 4\omega^2 \times 4\omega = 16\omega^3 = 16$ **(দেখানো হলো)**

এবং ১ম রাশি + ২য় রাশি
$= 4\omega^2 + 4\omega = 4(\omega^2 + \omega) = -4$ **(দেখানো হলো)**

(v) আমরা জানি, এককের কাল্পনিক মূলদ্বয়

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

এবং $\omega^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

অর্থাৎ $2\omega = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2\omega^2 = -1 - \sqrt{-3}$

$\therefore (-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7 = (2\omega)^7 + (2\omega^2)^7$
$= 2^7\omega^7 + 2^7\omega^{14} = 128(\omega^7 + \omega^{14})$
$= 128(\omega + \omega^2) = 128 \times (-1)$
$= -128$ **(Ans.)**

(vi) দেওয়া আছে, $x = p + q$
$y = p + \omega q$
এবং $z = p + \omega^2 q$

এখন, বামপক্ষ $= x^3 + y^3 + z^3$
$= (p + q)^3 + (p + \omega q)^3 + (p + \omega^2 q)^3$
$= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 + 3p^2q\omega + 3pq^2\omega^2 + q^3\omega^3 + p^3 + 3p^2q\omega^2 + 3pq^2\omega^4 + q^3\omega^6$
$= (p^3 + p^3 + p^3) + (3p^2q + 3p^2q\omega + 3p^2q\omega^2) + (3pq^2 + 3pq^2\omega^2 + 3pq^2\omega^4) + (q^3 + q^3\omega^3 + q^3\omega^6)$
$= 3p^3 + 3p^2q(1 + \omega + \omega^2) + 3pq^2(1 + \omega^2 + \omega^4) + q^3(1 + \omega^3 + \omega^6)$
$= 3p^3 + 3p^2q.0 + 3pq^2.0 + q^3(1 + 1 + \omega^3.\omega^3)$
[$\because \omega^3 = 1$ ও $\omega^2 + \omega + 1 = 0$]
$= 3p^3 + q^3(1 + 1 + 1)$
$= 3p^3 + 3q^3 = 3(p^3 + q^3)$
= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(vii) দেওয়া আছে, $x = p + q$

বা, $x^2 = p^2 + 2pq + q^2$ ……… (i)

$y = p\omega + q\omega^2$

বা, $y^2 = (p\omega + q\omega^2)^2$

বা, $y^2 = p^2\omega^2 + 2pq\omega^3 + q^2\omega^4$

$\therefore y^2 = p^2\omega^2 + 2pq + q^2\omega$ [$\because \omega^3 = 1$] ……… (ii)

এবং $z = p\omega^2 + q\omega$

বা, $z^2 = (p\omega^2 + q\omega)^2$

বা, $z^2 = p^2\omega^4 + 2pq\omega^3 + q^2\omega^2$

$\therefore z^2 = p^2\omega + 2pq + q^2\omega^2$ [$\because \omega^3 = 1$] ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,
$x^2 + y^2 + z^2$
$= p^2(1 + \omega^2 + \omega) + 6pq + q^2(1 + \omega + \omega^2)$
$= p^2.0 + 6pq + q^2.0$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]
$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 6pq$ **(দেখানো হলো)**

(viii) দেওয়া আছে,

$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

এককের কাল্পনিক দুইটি ঘনমূল এবং কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয় একটি অপরটির বর্গ।

অতএব, একটি ω হলে অন্যটি ω^2 হবে।

ধরি, $x = \omega$ এবং $y = \omega^2$

(a) বামপক্ষ $= x^2 + xy + y^2$
$= \omega^2 + \omega.\omega^2 + (\omega^2)^2$
$= \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$
$= \omega^2 + 1 + \omega.\omega^3$ [$\because \omega^3 = 1$]
$= 1 + \omega + \omega^2$ [$\because 1 + \omega + \omega^3 = 0$]
$= 0 =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(b) বামপক্ষ $= x^3 + y^{-3}$
$= \omega^3 + (\omega^2)^{-3}$
$= 1 + (\omega^3)^{-2}$
$= 1 + 1^{-2}$
$= 1 + 1$
$= 2$

ডানপক্ষ $= x^3 + x^{-3}$
$= x^3 + \frac{1}{x^3}$
$= \omega^3 + \frac{1}{\omega^3}$
$= 1 + 1 = 2$

$\therefore x^3 + y^{-3} = 2 = x^3 + x^{-3}$ **(প্রমাণিত)**

(c) বামপক্ষ $= x^4 + y^4$
$= \omega^4 + (\omega^2)^4$
$= \omega^3.\omega + \omega^8$
$= \omega + \omega^3.\omega^3.\omega^2 = \omega + \omega^2$
$= -1 =$ ডানপক্ষ [$\because \omega + \omega^2 + 1 = 0$]

(প্রমাণিত)

(ix) যেহেতু, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ উভয় রাশি একেকের কাল্পনিক ঘনমূল এবং একটি অপরটির বর্গ,

অতএব, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$ ধরলে $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ হবে।

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\right]^n + \left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\right]^n$

$= \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^n + \omega^{2n}$

এখানে $n = 3, m \in \mathbb{Z}$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1 + 1 = 2$

$n = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= (\omega^3)^m . \omega + (\omega^3)^{2m} . \omega^2$

$= \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2, m \in \mathbb{Z}$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= (\omega^3)^m . \omega^2 + (\omega^3)^{2m} . \omega^4$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

অর্থাৎ, n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং n এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে রাশিটি = –1

(প্রমাণিত)

(x) দেওয়া আছে,

$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \cdots \cdots (i)$

(i) নং এ $x = i$ বসালে পাই,

$(1 + i)^n = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4 + a_5i^5 + \cdots$

বা, $(1 + i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)$
$+ i\,(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots) \cdots \cdots \cdots (ii)$

(ii) নং এ 'i' এর স্থলে '–i' লিখে পাই,

$(1 - i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots) - i$
$(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots) \cdots \cdots \cdots (iii)$

(ii) ও (iii) নং গুণ করে পাই,

$(1 - i^2)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2$
$- i^2(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2$

বা, $2^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots \cdots)^2 +$
$(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 \cdots \cdots (iv)$

আবার, (i) এ $x = 1$ বসালে পাই,

$2^n = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdots \cdots (v)$

(iv) ও (v) নং সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2$
$= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ **(প্রমাণিত)**

(xi) দেওয়া আছে,

$(1 + x + x^2)^n = P_0 + P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_{2n}x^{2n}$

অর্থাৎ, $(1 + x + x^2)^n = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3$
$+ P_4x^4 + P_5x^5 + P_6x^6 + \cdots + P_{2n}x^{2n} \cdots (i)$

এখন, (i) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 1 + 1)^n = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + \cdots + P_{2n}$

বা, $3^n = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + \cdots \cdots (ii)$

(i) নং এ $x = \omega$ বসিয়ে পাই,

$(1 + \omega + \omega^2)^n = P_0 + P_1\omega + P_2\omega^2 + P_3\omega^3 + P_4\omega^4 + P_5\omega^5 + P_6\omega^6 + \ldots + P_{2n}\omega^{2n} \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

বা, $0 = P_0 + P_1\omega + P_2\omega^2 + P_3 + P_4\omega + P_5\omega^2 + P_6 + \cdots \cdots (iii)$

আবার, (i) নং এ $x = \omega^2$ বসিয়ে পাই,

$(1 + \omega^2 + \omega^4)^n = P_0 + P_1\omega^2 + P_2\omega^4 + P_3\omega^6 + P_4\omega^8$
$+ P_5\omega^{10} + P_6\omega^{12} + \cdots + P_{2n}\omega^{4n}$

বা, $0 = P_0 + P_1\omega^2 + P_2\omega + P_3 + P_4\omega^2 + P_5\omega$
$+ P_6 + \cdots \cdots (iv)$

এখন, (ii), (iii) ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে,

$3^n = 3P_0 + P_1(1 + \omega + \omega^2) + P_2(1 + \omega^2 + \omega) + 3P_3$
$+ P_4(1 + \omega + \omega^2) + P_5(1 + \omega^2 + \omega) + 3P_6 + \cdots \cdots$

বা, $3^n = 3P_0 + P_1.0 + P_2.0 + 3P_3 + P_4.0 + P_5.0$
$+ 3P_6 + \cdots \cdots [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

বা, $3^n = 3(P_0 + P_3 + P_6 + \cdots \cdots)$

বা, $\frac{3^n}{3} = P_0 + P_3 + P_6 + \cdots \cdots \cdots$

$\therefore P_0 + P_3 + P_6 + \cdots \cdots \cdots = 3^{n-1}$ **(প্রমাণিত)**

(xii) দেওয়া আছে, $2x = -1 + \sqrt{-3} \quad \therefore x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

এবং $2y = -1 - \sqrt{-3} \quad \therefore y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

আমরা জানি, এককের জটিল ঘনমূলত্রয় 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ যেহেতু, এককের জটিল ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির বর্গ। সুতরাং $x = \omega$ হলে $y = \omega^2$

বামপক্ষ $= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

$= \omega^4 + \omega^3.\omega^2 + \omega^2.(\omega^2)^2 + \omega.(\omega^2)^3 + (\omega^2)^4$

$= \omega + \omega^2 + (\omega^3)^2 + \omega.(\omega^3)^2 + (\omega^3)^2.\omega^2 \; [\because \omega^3 = 1]$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$

$= (1 + \omega + \omega^2) + (\omega + \omega^2)$

$= 0 + (-1) \; [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= -1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$ **(প্রমাণিত)**

(xiii) দেওয়া আছে, $x^3 - 8 = 0$ বা, $x^3 - 2^3 = 0$

বা, $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$

হয়, $x - 2 = 0$ অথবা, $x^2 + 2x + 4 = 0$

বা, $x = 2$ $\quad \therefore x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4.1.4}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 \times (-3)}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$

$= -1 \pm \sqrt{3}i$

$\therefore z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

এবং $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$

এবং, $z_1z_2 = (-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)$

$= 1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 3i^2$

$= 1 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$

$\therefore \arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\dfrac{0}{4} = 0$

$\arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

$\arg(z_2) = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$

$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3} + \left(\dfrac{-2\pi}{3}\right) = 0$

$\therefore \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ **(প্রমাণিত)**

(xiv) দেওয়া আছে, $y^2 + y + 1 = 0$

সমীকরণটি মূলদ্বয় p ও q হলে

$p = \dfrac{-1 + \sqrt{(1)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

এবং $q = \dfrac{-1 - \sqrt{(1)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

এখানে, উভয় রাশি এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং একটি অপরটির বর্গ।

অতএব, $p = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \omega$ ধরলে

$q = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ হবে।

সুতরাং প্রদত্ত রাশি

$= \left[\dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})\right]^m + \left[\dfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})\right]^m$

$= \omega^m + (\omega^2)^m = \omega^m + \omega^{2m}$

এখানে $m = 3n, n \in \mathbb{Z}$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3n} + (\omega^2)^{3n}$

$= (\omega^3)^n + (\omega^3)^{2n} = 1 + 1 = 2$

$m = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3n+1} + (\omega^2)^{3n+1}$

$= (\omega^3)^n . \omega + (\omega^3)^{2n} . \omega^2$

$= \omega + \omega^2 = -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$m = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3n+2} + (\omega^2)^{3n+2}$

$= (\omega^3)^n . \omega^2 + (\omega^3)^{2n} . \omega^4$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

অর্থাৎ, m এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং m এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে রাশিটি = –1 **(দেখানো হলো)**

(xv) আমরা জানি, এককের ঘনমূলদ্বয় $1, \omega, \omega^2$

এখন, $x = 1, \omega, \omega^2$ বসিয়ে পাই,

$\ln 1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \ldots$ (i)

$\ln(1 - \omega + \omega^2) = a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \ldots \ldots$ (ii)

$\ln(1 - \omega^2 + \omega^4) = a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + \ldots$ (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে,

$0 + \ln(-2\omega) + \ln(-2\omega^2) = a_1(1 + \omega + \omega^2)$

$+ a_2(1 + \omega + \omega^2) + a_3(1 + 1 + 1) + a_4(1 + \omega + \omega^2)$

$+ a_5(1 + \omega + \omega^2) + a_6(1 + 1 + 1) + \ldots \ldots$

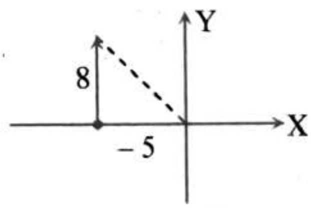
$+ a_9(1 + 1 + 1) + \ldots \ldots$

বা, $3(a_3 + a_6 + a_9 + \ldots \ldots) = 2\ln 2$

$\therefore \quad a_3 + a_6 + a_9 + \ldots \ldots = \dfrac{2}{3}\ln 2$ **(দেখানো হলো)**

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর

1. **গ; ব্যাখ্যা:**



2. **গ; ব্যাখ্যা:** $(x + iy)$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$(x, y) = \left(5, \dfrac{-3}{4}\right)$

3. **খ;**

4. **গ; ব্যাখ্যা:** মডুলাস $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{3 + (4 \times 3)}$

$= \sqrt{3 + 12}$

$= \sqrt{15}$

5. **গ; ব্যাখ্যা:** জটিল সংখ্যাটির অবস্থান ৪র্থ ভাগে।

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

6. **খ;** 7. **গ;**

8. ঘ; ব্যাখ্যা: $-i = \frac{1}{2}(1-1-2i)$
$= \frac{1}{2}(1^2 + i^2 - 2.1.i)$
$= \frac{1}{2}(1-i)^2$
$\therefore \sqrt{-i} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(1-i)$

9. গ; ব্যাখ্যা: $x^3 = (i-2)^3$
$= i^3 - 8 - 3.i.2(i-2)$
$= i^2.i - 8 - 6i(i-2)$
$= -i - 8 - 6i^2 + 12i$
$= -i - 8 + 6 + 12i = 11i - 2$

10. খ; ব্যাখ্যা: $(1+\omega)(1+\omega^4)(1+\omega^8)(1+\omega^{12})$
$= (1+\omega)(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)$
$= (1+\omega)^2(1+\omega^2).2$
$= (-\omega^2)^2.(-\omega).2$
$= \omega^4.(-\omega).2 = -2\omega^5 = -2\omega^2$

11. গ; ব্যাখ্যা: $r\cos\theta = \sqrt{3}$; $r\sin\theta = -1$
$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$;
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$
$\therefore$ পোলার আকার:
$$2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

12. গ; 13. গ; 14. খ; 15. ক; 16. ক;

17. খ; ব্যাখ্যা: জটিল সংখ্যাটির অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে।
$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
$= -180° + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)$
$= -180° + 45° = -135°$

18. ক; 19. ঘ;

20. ক; ব্যাখ্যা: $Z = x + iy$
$\bar{Z} = x - iy$
$|\bar{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$
$\therefore\ x^2 + y^2 = 3^2$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ 3 একক

21. খ; ব্যাখ্যা: $x = 1 + i$
বা, $(x-1) = i$
বা, $(x-1)^2 = i^2$
বা, $x^2 - 2x + 1 = -1$
$\therefore x^2 - 2x + 2 = 0$
এখন, $x^4 - 2x^3 + 2x^2$
$= x^2(x^2 - 2x + 2)$
$= x^2.0 = 0$

22. ক; 23. গ;

24. খ; ব্যাখ্যা: $Z = 1 - 2i$
$\bar{Z} = 1 + 2i$
$-\bar{Z} = -1 - 2i$
$|-\bar{Z}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

25. গ;

26. ক; ব্যাখ্যা: $3a - \sqrt{2}ai$ এর মডুলাস
$= \sqrt{(3a)^2 + (-\sqrt{2}a)^2}$
$= \sqrt{9a^2 + 2a^2}$
$= \sqrt{11a^2} = \sqrt{11}a$

27. গ; ব্যাখ্যা: ধরি, $y = \sqrt{-2 + \sqrt{-2 + \sqrt{-2 + \ldots\ldots\infty}}}$
বা, $y = \sqrt{-2 + y}$
বা, $y^2 = -2 + y$
$\therefore y^2 - y + 2 = 0$
$\therefore y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.2.1}}{2.1}$
$= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$; $= \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

28. খ;

29. ঘ; ব্যাখ্যা: a^3 যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে এর তিনটি ঘনমূল a, $a\omega$ ও $a\omega^2$।

30. ঘ; 31. খ; 32. গ; 33. ক; 34. খ; 35. ঘ; 36. গ; 37. ক;

38. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^5} + \frac{1}{\omega^7} = \frac{\omega^4 + \omega^2 + 1}{\omega^7}$
$= \frac{\omega^3.\omega + \omega^2 + 1}{\omega^7} = \frac{1 + \omega + \omega^2}{\omega^7} = \frac{0}{\omega^7} = 0$

39. ক; 40. ক; 41. খ; 42. খ;

43. গ; ব্যাখ্যা: $x^2 - px + q = 0$
এবং $\sqrt{3}x + i - x^2 = 0$
বা, $x^2 - \sqrt{3}x - i = 0$ একই সমীকরণ হলে,
$p = \sqrt{3}$; $q = -i$
$\therefore q - p = -i - \sqrt{3}$, যা $(-\sqrt{3}, -1)$ বিন্দুকে নির্দেশ করে।

44. গ;

45. খ; ব্যাখ্যা: যদি $p = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) = \omega$ হয় তবে
$q = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \omega^2$ হবে
$\therefore\ (1+\omega)(1+\omega^2)$
$= (-\omega^2)(-\omega) = \omega^3 = 1$

46. গ; 47. গ; 48. ক; 49. খ; 50. ক; 51. ক; 52. খ;

53. ঘ;

54. ক; ব্যাখ্যা: $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{-1}{1}$
$= \tan^{-1}\left\{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = -\frac{\pi}{4}$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore \frac{z_2}{z_1}$ এর নতি

$$= \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{6} - \left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

55. ঘ; ব্যাখ্যা: $x^4 = -625$

বা, $x^2 = \pm 25i$

বা, $x^2 = \frac{25}{2}(\pm 2i) = \frac{25}{2}(1 \pm i)^2$

$\therefore x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

56. ক; ব্যাখ্যা: একটি মূল $\frac{1}{3 - i\sqrt{2}}$ হলে অপর মূলটি

$$= \frac{1}{3 + i\sqrt{2}} = \frac{3 - i\sqrt{2}}{(3 + i\sqrt{2})(3 - i\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3 - i\sqrt{2}}{9 + 2} = \frac{3}{11} - i\frac{\sqrt{2}}{11}$$

57. ঘ; ব্যাখ্যা: $i^{4n-2} = i^{4n}\, i^{-2} = \frac{(i^4)^n}{i^2} = \frac{1^n}{-1} = -1$

58. ক; ব্যাখ্যা: $2i = 1 + 2i + i^2 = (1 + i)^2$

$\therefore$ বর্গমূল $= \pm(1 + i)$

59. ঘ; ব্যাখ্যা: $x = \frac{1}{2}(3 + 5i)$

বা, $2x = 3 + 5i$ বা, $2x - 3 = 5i$

বা, $(2x - 3)^2 = 25i^2$ বা, $4x^2 - 12x + 9 = -25$

বা, $4x^2 - 12x + 34 = 0$ বা, $2x^2 - 6x + 17 = 0$

এখন, $2x^3 + 2x^2 - 7x + 70$

$= 2x^3 - 6x^2 + 17x + 8x^2 - 24x + 68 + 2$

$= x(2x^2 - 6x + 17) + 4(2x^2 - 6x + 17) + 2$

$= 0 + 0 + 2 = 2$

60. ঘ; ব্যাখ্যা: $z_1 = 1 + i, \overline{z}_2 = 2 - i$

$\therefore z_1.\overline{z}_2 = (1 + i)(2 - i)$

$= 2 + i + 1 = 3 + i$

$\therefore z_1\overline{z}_2$ এর মডুলাস $= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

61. খ; ব্যাখ্যা: $|2z - 1| = |z - 2|$

বা, $|2(x + iy) - 1| = |x + iy - 2|$

বা, $|(2x - 1) + 2iy| = |(x - 2) + iy|$

বা, $4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

বা, $3x^2 + 3y^2 = 3$ $\therefore x^2 + y^2 = 1$

62. খ; ব্যাখ্যা: $x^2 + x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় ω, ω^2 যা এককের জটিল ঘনমূলদ্বয়

$\therefore x^3 = \omega^3 = 1$

63. গ; ব্যাখ্যা: $z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - z_1z_2$

$= (3 + 2i + 3 - 2i)^2 - (3 + 2i)(3 - 2i)$

$= 6^2 - (3^2 + 2^2) = 36 - 13 = 23$

64. খ; ব্যাখ্যা: $|z - 5| = 3$

বা, $|x + iy - 5| = 3$

বা, $(x - 5)^2 + y^2 = 3^2$ এর কেন্দ্র $(5, 0)$

65. খ; ব্যাখ্যা: $(1 + ai)^2 = 1 + 2ai + a^2i^2$

$= 1 + 2ai - a^2 = 1 - a^2 + 2ai$

প্রশ্নমতে, $\tan^{-1}\left(\frac{2a}{1 - a^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

বা, $\frac{2a}{1 - a^2} = \tan\frac{\pi}{4}$ বা, $\frac{2a}{1 - a^2} = 1$

বা, $2a = 1 - a^2$ বা, $a^2 + 2a - 1 = 0$

$\therefore a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

66. ঘ; ব্যাখ্যা: যদি কোন সমীকরণ $|z + k_1| + |z + k_2| = K_3$ আকারের হয় তবে তা উপবৃত্ত প্রকাশ করবে।

67. গ; ব্যাখ্যা: $\frac{1}{a + i} = \frac{i}{a - i} \Rightarrow a - i = ai + i^2$

$\Rightarrow a - i = ai - 1$

এখন $ai - 1 = a - i$ এর বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $a = -1$

68. গ; ব্যাখ্যা: $(1 + i)^4 = \{(1 + i)^2\}^2 = (1 + 2i - 1)^2$

$= 4i^2 = -4$

69. ঘ; ব্যাখ্যা: $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)$

$= (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)$

$= \{(1 - \omega)(1 - \omega^2)\}^2 = \{1 - \omega - \omega^2 + \omega^3\}^2$

$= \{3 - (1 + \omega + \omega^2)\}^2 = 9$

70. ক; ব্যাখ্যা: $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557}$

$= 1 + (\omega^3)^{6666}\omega + (\omega^3)^{5185}.\omega^2 = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

71. ক; 72. ক;

73. ঘ; ব্যাখ্যা: $(1 + \omega - \omega^5)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^5 + 1 - \omega)$

$= (-\omega^2 - \omega^2)(-1 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega)$

$= (-2\omega^2)(-2)(-2\omega) = -8$

74. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{i^{-1} - i}{2i^{-1} + i} = \frac{\frac{1 - i^2}{i}}{\frac{2 + i^2}{i}} = \frac{1 + 1}{2 - 1} = 2$

75. খ; ব্যাখ্যা: $z_1\overline{z}_2 = (2 + i)(3 - i) = 6 + 3i - 2i - i^2$

$= 7 + i$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$

76. খ; ব্যাখ্যা: $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + i}} = 1 - \frac{1}{\frac{1 + i - 1}{1 + i}}$

$= 1 - \frac{1 + i}{i} = \frac{i - 1 - i}{i} = \frac{i^2}{i} = i$

$\therefore$ মডুলাস $= 1$ এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

77. গ; ব্যাখ্যা: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

$i^4 = 1 \therefore$ n এর সর্বনিম্ন মান 4

78. ক; ব্যাখ্যা: $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{1}{\frac{i-1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{i}{i-1}} = \frac{i}{\frac{i-1-i}{i-1}}$

$= \frac{i}{\frac{-1}{i-1}} = -i(i-1) = -i^2 + i = 1 + i$

79. গ; ব্যাখ্যা: $x = -1 + i$

বা, $x + 1 = i$ বা, $x^2 + 2x + 1 = i^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 2x + 1 = -1 \therefore x^2 + 2x + 2 = 0$

এখন, $x^3 + 3x^2 + 4x + 7$

$= x^3 + 2x^2 + 2x + x^2 + 2x + 2 + 5$

$= x(x^2 + 2x + 2) + 1(x^2 + 2x + 2) + 5$

$= x.0 + 1.0 + 5 = 5$

80. ক; ব্যাখ্যা: মনে করি, $\sqrt[4]{-81} = x$

বা, $x^4 = -81 = (9i)^2$ বা, $x^2 = \pm 9i = \frac{9}{2}(\pm 2i)$

বা, $x^2 = \frac{9}{2}(1 \pm i)^2 \therefore x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

81. ঘ; ব্যাখ্যা: $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{2}a = 1 + i$ বা, $2a^2 = (1+i)^2$

বা, $2a^2 = 1 + i^2 + 2i$

বা, $2a^2 = 1 - 1 + 2i = 2i \therefore a^2 = i$

$\therefore a^6 = (i)^3 = i^2.i = -i$

82. ঘ; ব্যাখ্যা: $x = \omega, y = \omega^2$

$\therefore 1 - x - y + xy = 1 - \omega - \omega^2 + \omega^3$

$= 1 + 1 - \omega - \omega^2$

$= 2 - (\omega + \omega^2)$

$= 2 - (-1) = 3$

83. গ; ব্যাখ্যা: $(\sqrt{i} + \sqrt{-i})^2 = (\sqrt{i})^2 + (\sqrt{-i})^2 + 2\sqrt{-i^2}$

$= i - i + 2\sqrt{1}$

বা, $(\sqrt{i} + \sqrt{-i})^2 = 2$

$\therefore \sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$

84. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{i-\frac{1}{i}}{i+\frac{2}{i}} = \frac{i^2-1}{i^2+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$

$\therefore$ নতি $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0}{-2}\right| = \tan^{-1}(0) = \pi$

[$\because$ বিন্দুটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের উপর অবস্থিত]

$\therefore \theta = \pi$

85. খ; ব্যাখ্যা: $\left|\frac{(2-i)^3}{2+3i}\right| = \frac{|2-i|^3}{|2+3i|} = \frac{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^3}{\sqrt{2^2+3^2}}$

$= \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

86. ঘ; ব্যাখ্যা: $\frac{(2+i)^3}{2+3i}$

$= \frac{|2+i|^3}{|2+3i|} = \frac{\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^3}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

87. খ;

88. গ; ব্যাখ্যা: $\frac{(5+12i)\times(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{15-48+56i}{9+16}$

$= \frac{-33+56i}{25}$

$\therefore \sqrt{\frac{-33+56i}{25}} = \pm\frac{1}{5}\sqrt{16+56i-49}$

$= \pm\frac{1}{5}\sqrt{4^2+2.4.7i+(7i)^2}$

$= \pm\frac{1}{5}(4+7i)$

89. ঘ; ব্যাখ্যা: $|x - 1 + iy| + |x + 1 + iy| = 4$

বা, $(x-1)^2 + y^2 = \left\{4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right\}^2$

বা, $(x-1)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2+y^2} + (x+1)^2 + y^2$

বা, $-4x = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

বা, $x = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} - 4$

বা, $x^2 + 8x + 16 = 4(x+1)^2 + 4y^2$

বা, $3x^2 + 4y^2 = 12$

$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

90. গ; ব্যাখ্যা: $\sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{10+4\sqrt{5}i-2}$

$= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 2.\sqrt{10}.\sqrt{2}i + (\sqrt{2}i)^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)^2}$

$= \pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$

91. ক;

92. খ; ব্যাখ্যা: $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = 1.i^3 = -i\ [\because i^{4n} = 1]$

93. খ; 94. ক;

▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

1. ক $\frac{z_1}{z_3} = \frac{5-2i}{4+3i} = \frac{(5-2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$= \frac{20-15i-8i+6i^2}{4^2-(3i)^2}$

$= \frac{20-23i-6}{16+9}\ [\because i^2 = -1]$

$$=\frac{14-23i}{25}=\frac{14}{25}-\frac{23i}{25}$$
$$=\frac{14}{25}+i\left(-\frac{23}{25}\right)$$
$$=A+iB\left[\text{যেখানে } A=\frac{14}{25}, B=-\frac{23}{25}\right]$$

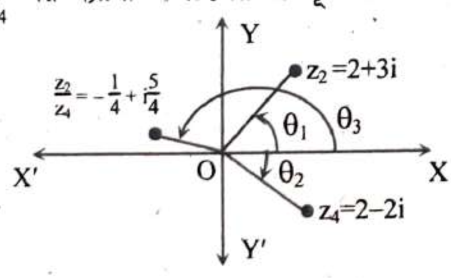
খ $\frac{z_2}{z_4}=\frac{2+3i}{2-2i}$
$$=\frac{(2+3i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{4+4i+6i+6i^2}{(2)^2-(2i)^2}$$
$$=\frac{4+10i-6}{4-(-4)}\quad [\because i^2=-1]$$
$$=\frac{-2+10i}{8}$$
$$=\frac{-1+5i}{4}=-\frac{1}{4}+i\frac{5}{4}$$

$$\theta_1=\arg z_2=\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=56°18'$$
$$\theta_2=\arg z_4=-\tan^{-1}\left|\frac{2}{-2}\right|=-45°$$
$$\theta_3=\arg\left(\frac{z_2}{z_4}\right)=\arg(z_2)-\arg(z_4)$$
$$=\theta_1-\theta_2=56°18'+45°=101°18'$$

মনে করি, $x+iy=-\frac{1}{4}+i\frac{5}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$ এবং $y=\frac{5}{4}$

$\therefore \frac{z_2}{z_4}$ এর জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিরূপ হলো



গ $z_1+z_2=5-2i+2+3i=7+i$

$\therefore |z_1+z_2|=|7+i|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$

$z_3+z_4=4+3i+2-2i=6+i$

$\therefore |z_3+z_4|=|6+i|=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$

$\therefore \left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right|=\frac{|z_1+z_2|}{|z_3+z_4|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{37}}=1.16$ ……… (i)

আবার, $|z_3|=|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$|z_4|=|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\therefore \frac{|z_1+z_2|}{||z_3|-|z_4||}=\frac{\sqrt{50}}{|5-2\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{50}}{2.172}=3.26$ … (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$$\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right|<\frac{|z_1+z_2|}{||z_3|-|z_4||}$$
$$\therefore \left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right|\le\frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}\ [\because |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|]$$

(প্রমাণিত)

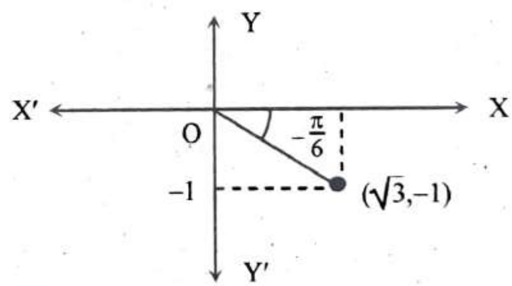
2. **ক** $\{g(\omega)\}^6=(2\omega^3+5\omega^4+2\omega^2)^6$
$$[\because g(x)=2x^3+5x^4+2x^2]$$
$$=(2+5\omega+2\omega^2)^6\ [\because \omega^3=1]$$
$$=(2+2\omega+2\omega^2+3\omega)^6$$
$$=\{2(1+\omega+\omega^2)+3\omega\}^6$$
$$=(2\times 0+3\omega)^6=729\omega^6=729(\omega^3)^2$$
$$=729.(1)^2\ [\because \omega^3=1]$$
$$=729\ \textbf{(Ans.)}$$

খ ধরি, $z=f(\sqrt{3},-1)=\sqrt{3}-i\ [\because f(x,y)=x+iy]$

$\therefore |z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta=-\tan^{-1}\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right|=-\frac{\pi}{6}$

আরগাঁ চিত্রে উপরের জটিল সংখ্যাটি নিম্নরূপ:



গ প্রশ্নমতে, $|2f(x,y)+1|=|f(x,y)-3|$

বা, $|2(x+iy)+1|=|x+iy-3|$

বা, $|(2x+1)+i.2y|=|(x-3)+iy|$

বা, $\sqrt{(2x+1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

বা, $(2x+1)^2+4y^2=(x-3)^2+y^2$

বা, $4x^2+4x+1+4y^2=x^2-6x+9+y^2$

বা, $4x^2-x^2+4y^2-y^2+4x+6x+1-9=0$

বা, $3x^2+3y^2+10x-8=0$

বা, $x^2+y^2+\frac{10}{3}x-\frac{8}{3}=0$

$\therefore x^2+y^2+2.\frac{5}{3}.x-\frac{8}{3}=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

যার কেন্দ্র $\left(-\frac{5}{3},0\right)$

এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\frac{25}{9}-\left(-\frac{8}{3}\right)}=\sqrt{\frac{25+24}{9}}=\frac{7}{3}$

(প্রমাণিত)

3. ক দেওয়া আছে, $z_1 = a + ib$, $a = -1$ ও $b = -\sqrt{3}$

$\therefore \quad z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

$\therefore$ মডুলাস $= |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ **(Ans.)**

যেহেতু z_1 এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right|$

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= -\pi + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{-2\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = a + ib$, $z_2 = x + iy$

প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{z_1} = z_2$

বা, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

বা, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

বা, $a + ib = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore \quad a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - i3x^2y + iy^3$

$= x^3 - i3x^2y - 3xy^2 - i^3y^3$ $[\because i^2 = -1]$

$= (x)^3 - 3.x^2.iy + 3.x(iy)^2 - (iy)^3$

বা, $a - ib = (x - iy)^3$

বা, $\sqrt[3]{a - ib} = x - iy$

বা, $\sqrt[3]{\overline{a+ib}} = \overline{x+iy}$ বা, $\sqrt[3]{\overline{z_1}} = \overline{z_2}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $|z_2 - 3i| + |z_2 + 3i| = 10$

বা, $|z_2 - 3i| = 10 - |z_2 + 3i|$

বা, $|x + iy - 3i| = 10 - |x + iy + 3i|$

বা, $|x + (y-3)i| = 10 - |x + (3+y)i|$

বা, $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (3+y)^2}$

বা, $x^2 + (y-3)^2 = 100 + x^2 + (3+y)^2 - 2.10\sqrt{x^2 + (3+y)^2}$

বা, $20\sqrt{x^2 + (3+y)^2} = (3+y)^2 - (y-3)^2 + 100$

বা, $20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 12y + 100$

বা, $400\{x^2 + (3+y)^2\} = (12y + 100)^2$ [বর্গ করে]

বা, $400(x^2 + 9 + 6y + y^2) = 144y^2 + 10000 + 2400y$

বা, $400x^2 + 400y^2 + 2400y + 3600 = 144y^2 + 10000 + 2400y$

বা, $400x^2 + 256y^2 = 6400$

বা, $25x^2 + 16y^2 = 400$

বা, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\therefore$ ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

4. ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}x)$

$\therefore f(\sqrt{3}x + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}\{-1 + \sqrt{3}(\sqrt{3}x + \sqrt{3})\}$

$= \frac{1}{2}\{-1 + 3x + 3\}$

$= \frac{1}{2}(3x + 2)$

এখন, $|f(\sqrt{3}x + \sqrt{3})| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{2}(3x+2)\right| < 1$

বা, $\frac{1}{2}|3x + 2| < 1$

বা, $|3x + 2| < 2$

বা, $-2 < 3x + 2 < 2$

বা, $-2 - 2 < 3x < 2 - 2$

বা, $-4 < 3x < 0$

বা, $-\frac{4}{3} < x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{4}{3} < x < 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}x)$

$\therefore f(i) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

$f(-i) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

যেহেতু $f(i)$ এবং $f(-i)$ উভয় রাশি এককের কাল্পনিক ঘনমূল, সেহেতু $f(i) = \omega$ ধরলে $f(-i) = \omega^2$ হবে।

সুতরাং বামপক্ষ $= \{f(i)\}^n + \{f(-i)\}^n$

$= \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^n + \omega^{2n}$

এখানে, $n = 3m$ হলে

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1 + 1 = 2$

$n = 3m + 1$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= (\omega^3)^m.\ \omega + (\omega^3)^{2m}.\ \omega^2$

$= \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= (\omega^3)^m . \omega^2 + (\omega^3)^{2m} . \omega^4$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

অর্থাৎ, n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং n এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে রাশিটি = −1

(দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $g(x) = a + bx + cx^2$

$\therefore \ g(1) = a + b + c$

প্রশ্নমতে, $g(1) = 0$

$\therefore \ a + b + c = 0$

এখন, বামপক্ষ $= \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega)\}^3$

$= (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega^4)^3$

$= (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$

ধরি, $a + b\omega + c\omega^2 = x$ এবং $a + b\omega^2 + c\omega = y$

$\therefore \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{x^2 + (\omega + \omega^2)xy + \omega^3 y^2\}$

$[\therefore 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$

এখন, $x + y = 2a + b(\omega + \omega^2) + c(\omega + \omega^2)$

$= 2a - b - c$

$x + \omega y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega + b\omega^3 + c\omega^2$

$= a(1 + \omega) + b(1 + \omega) + 2c\omega^2$

$= -a\omega^2 - b\omega^2 + 2c\omega^2$

$= (-a - b + 2c)\omega^2$

$x + \omega^2 y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^3$

$= a(1 + \omega^2) + b(\omega + \omega) + c(1 + \omega^2)$

$= -a\omega + 2b\omega - c\omega$

$= (-a + 2b - c)\omega$

$\therefore \quad (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$

$= (2b - a - c)(2a - b - c)(2c - a - b)\omega^3$

$= (2b - a - c)(2a - b - c)(2c - a - b)$

$= \{3b - (a + b + c)\}$
$\{3a - (a + b + c)\}\{3c - (a + b + c)\}$

$= (3b - 0)(3a - 0)(3c - 0) \ [\because a + b + c = 0]$

$= 3b.3a.3c = 27abc$

$\therefore \ \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = 27abc$ **(দেখানো হলো)**

5. ক দেওয়া আছে, $z = 3 + ix$ এবং $x = 4$

$\therefore z = 3 + 4i = 4 + 4i - 1 = 2^2 + 2.2.i + i^2$

$= (2 + i)^2$

$\therefore \sqrt{z} = \pm(2 + i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$(1 + x)^n = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n \ \cdots \ \cdots \ (i)$

(i) নং এ $x = i$ বসালে পাই,

$(1 + i)^n = B_0 + B_1i + B_2i^2 + B_3i^3 + B_4i^4 + B_5i^5 + \cdots$

বা, $(1 + i)^n = (B_0 - B_2 + B_4 - \cdots)$
$+ i(B_1 - B_3 + B_5 - \cdots) \cdots \ \cdots \ \cdots (ii)$

(ii) নং এ 'i' এর স্থলে '−i' লিখে পাই,

$(1 - i)^n = (B_0 - B_2 + B_4 - \ldots) - i$
$(B_1 - B_3 + B_5 - \cdots) \cdots \ \cdots \ \cdots (iii)$

(ii) ও (iii) নং গুণ করে পাই,

$(1 - i^2)^n = (B_0 - B_2 + B_4 - \cdots)^2$
$- i^2(B_1 - B_3 + B_5 - \cdots)^2$

বা, $2^n = (B_0 - B_2 + B_4 - \cdots \cdots)^2 +$
$(B_1 - B_3 + B_5 - \cdots)^2 \ \cdots \ \cdots (iv)$

আবার, (i) এ $x = 1$ বসালে পাই,

$2^n = (B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_n) \cdots \ \cdots (v)$

(iv) ও (v) নং সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$(B_0 - B_2 + B_4 - \cdots)^2 + (B_1 - B_3 + B_5 - \cdots)^2$

$= B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $z = 3 + ix$

এবং $\frac{\bar{z}}{z} = p - iq$

বা, $\frac{3 - ix}{3 + ix} = p - iq$

বা, $\frac{3 + ix}{3 - ix} = \frac{1}{p - iq}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{3 + ix - 3 + ix}{3 + ix + 3 - ix} = \frac{1 - p + iq}{1 + p - iq}$

[বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{6} = \frac{(1 - p + iq)(1 + p + iq)}{(1 + p - iq)(1 + p + iq)}$

বা, $\frac{ix}{3} = \frac{(1 + iq - p)(1 + iq + p)}{(1 + p)^2 - (iq)^2}$

$= \frac{(1 + iq)^2 - p^2}{1 + 2p + p^2 - i^2q^2}$

$= \frac{1 + 2iq + i^2q^2 - p^2}{1 + 2p + p^2 + q^2}$

$= \frac{1 + 2iq - (p^2 + q^2)}{1 + 2p + (p^2 + q^2)}$

$= \frac{1 + 2iq - 1}{1 + 2p + 1} \ [\because p^2 + q^2 = 1]$

$= \frac{2iq}{2(1 + p)}$

$\therefore \frac{ix}{3} = \frac{iq}{1 + p}$

$\therefore x = \frac{3q}{1 + p}$

$\therefore$ নির্ণেয় বাস্তব মান $x = \frac{3q}{1 + p}$ **(Ans.)**

6. ক দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$r = f(2, 1) = 2 + i$

$\therefore\ r - 2 = i$

বা, $r^2 - 4r + 4 = i^2$ [বর্গ করে]

বা, $r^2 - 4r + 4 = -1$

বা, $r^2 - 4r + 5 = 0$

এখন, $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 5$

$= r^4 - 4r^3 + 5r^2 + r^2 - 4r + 5$

$= r^2(r^2 - 4r + 5) + (r^2 - 4r + 5)$

$= r^2.0 + 0$

$= 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$\therefore f(a, b) = a + ib$

প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{f(x, y)} = f(a, b)$

বা, $\sqrt[3]{x + iy} = a + ib$

বা, $x + iy = (a + ib)^3$

বা, $x + iy = a^3 + 3a^2.ib + 3a.(ib)^2 + (ib)^3$

বা, $x + iy = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - ib^3$

বা, $x + iy = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = a^3 - 3ab^2$

$y = 3a^2b - b^3$

ডানপক্ষ $= bx + ay = b(a^3 - 3ab^2) + a(3a^2b - b^3)$

$= a^3b - 3ab^3 + 3a^3b - ab^3$

$= 4a^3b - 4ab^3 = 4ab(a^2 - b^2) =$ বামপক্ষ

$\therefore\ 4ab(a^2 - b^2) = bx + ay$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$f(4, -2i) = 4 + i.(-2i) = 4 + 2 = 6$

$f(1, 65i) = 1 + i.65i = 1 - 65 = -64$

$\therefore\ \sqrt[f(4,-2i)]{f(1,65i)} = \sqrt[6]{-64}$

মনে করি, $\sqrt[6]{-64} = x$

বা, $x^6 = -64$ [উভয়পক্ষের ঘাতকে 6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^6 + 64 = 0$

বা, $(x^2)^3 + 4^3 = 0$

বা, $(x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16) = 0$

হয় $x^2 + 4 = 0$ বা, $x^2 = -4 = 4i^2$

$\therefore\ x = \pm 2i$

অথবা, $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$

$\therefore\ x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2}$

বা, $x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{48}}{2} = \frac{4 \pm i.4\sqrt{3}}{2}$

$= 2 \pm i.2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 1 \pm i.2\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3})^2 \pm 2.\sqrt{3}.i + i^2$

$\therefore\ x^2 = (\sqrt{3} \pm i)^2$

$\therefore\ x = \pm(\sqrt{3} \pm i)$

$\therefore$ $\sqrt[6]{-64}$ এর মানগুলো হলো: $\pm 2i, \pm(\sqrt{3} \pm i)$ **(Ans.)**

7. ক দেওয়া আছে, $h(x) = 1 - x^2$

$\therefore\ h(i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

$\therefore$ বামপক্ষ

$= \sqrt{-h(i) + h(i)\sqrt{-h(i) + h(i)\sqrt{-h(i) + \ldots\ldots \infty}}}$

$= \sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \ldots \infty}}}$

ধরি, $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \ldots \infty}}} = a$

বা, $\sqrt{-2 + 2a} = a$

বা, $-2 + 2a = a^2$

বা, $a^2 - 2a + 2 = 0$

বা, $a^2 - 2a + 1 + 1 = 0$ বা, $(a - 1)^2 = -1$

বা, $(a - 1)^2 = (\pm i)^2$ বা, $a - 1 = \pm i$

$\therefore\ a = 1 \pm i$

$\therefore \sqrt{-h(i) + h(i)\sqrt{-h(i) + h(i)\sqrt{-h(i) + \ldots\ldots \infty}}}$

$= 1 \pm i$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $h(x) = 1 - x^2$

$h(\omega)h(\omega^2)h(\omega^4)h(\omega^5)$

$= (1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})$

$= (1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= (1 - \omega)^2(1 - \omega^2)^2$

$= (1 - 2\omega + \omega^2)(1 - 2\omega^2 + \omega^4)$

$= (1 + \omega^2 - 2\omega)(1 + \omega - 2\omega^2)$

$= (-\omega - 2\omega)(-\omega^2 - 2\omega^2)$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= (-3\omega)(-3\omega^2) = 9\omega^3$

$= 9$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $F = -1 + \sqrt{3}i, |R| = 2$

$\arg F + \arg R = \frac{\pi}{2}$

যেহেতু F সংখ্যাটির প্রতিরূপী বিন্দু দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore\ \arg F = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$

$= \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

আবার, $\arg F + \arg R = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \frac{2\pi}{3} + \arg R = \frac{\pi}{2}$

বা, $\arg R = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}$

বা, $\arg R = \frac{3\pi - 4\pi}{6}$

$\therefore \arg R = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore R = |R|\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$= 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$ **(Ans.)**

8. ক $\sqrt[4]{\omega + \omega^2} = \sqrt[4]{-1}$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= \sqrt[4]{(\pm i)^2} = \sqrt{\pm i} = \sqrt{\frac{1}{2}(\pm 2i)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm 2i - 1)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm i)^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = 2b + i(1 - b^2)$

$b = 0$ হলে, $z = i$

$\therefore \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{i}$

মনে করি, $x = \sqrt[3]{i}$

বা, $x^3 = i$ [ঘন করে].

বা, $x^3 - i = 0$

বা, $x^3 + i^3 = 0$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $(x + i)(x^2 - ix + i^2) = 0$

হয় $x + i = 0$

$\therefore x = -i$

অথবা, $x^2 - ix + i^2 = 0$

বা, $x^2 - ix - 1 = 0$

বা, $x = \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-1 + 4}}{2}$

$\therefore x = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sqrt[3]{i} = -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $z = 2b + i(1 - b^2)$ এবং $C = p + iq$

$b = 3$ হলে, $z = 2.3 + i(1 - 3^2)$

$= 6 + i(1 - 9) = 6 - 8i$

$\therefore \bar{z} = 6 + 8i$

প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{\bar{z}} = C$

বা, $\sqrt[3]{6 + 8i} = p + iq$

বা, $6 + 8i = (p + iq)^3$ [ঘন করে]

বা, $6 + 8i = p^3 + 3p^2qi - 3pq^2 - q^3i$

বা, $6 + 8i = p^3 - 3pq^2 + i(3p^2q - q^3)$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$p^3 - 3pq^2 = 6$

$3p^2q - q^3 = 8$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{6}{p} - \frac{8}{q} = \frac{p^3 - 3pq^2}{p} - \frac{3p^2q - q^3}{q}$

$= p^2 - 3q^2 - 3p^2 + q^2$

$= -2p^2 - 2q^2 = -2(p^2 + q^2)$

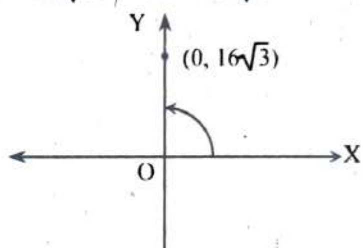
= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{6}{p} - \frac{8}{q} = -2(p^2 + q^2)$ **(প্রমাণিত)**

9. ক $(2\sqrt{3} - 2i)(-2\sqrt{3} + 6i)$

$= -4.3 + 12\sqrt{3}i + 4\sqrt{3}i - 12i^2$

$= -12 + 16\sqrt{3}i + 12 = 16\sqrt{3}i$



ধরি, $z = 16\sqrt{3}i$

$\therefore |z| = \sqrt{(16\sqrt{3})^2} = 16\sqrt{3}$

$\text{Arg}z = \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার আকার $= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 16\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2.1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

প্রাপ্ত মূলদ্বয় এককের জটিল ঘনমূল।

আমরা জানি, এককের জটিল ঘনমূলের একটি ω হলে অপরটি ω^2

আবার প্রশ্নমতে, জটিল মূলদ্বয় x_1 ও x_2

$\therefore x_1 = \omega$ হলে $x_2 = \omega^2$

এখন, বামপক্ষ $= x_1^4 + x_2^4 = \omega^4 + (\omega^2)^4$

$= \omega^4 + \omega^8 = \omega + \omega^2$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= -1$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

= ডানপক্ষ

$\therefore x_1^4 + x_2^4 = -1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $2 + b\omega + c\omega^2 = P$

$2\omega + b + c\omega^2 = Q$

$2\omega + b\omega^2 + c = R$

প্রশ্নমতে, $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$

$(2 + b\omega + c\omega^2)^2 + (2\omega + b + c\omega^2)^2 + (2\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$

বা, $(2+b\omega+c\omega^2)^2+(2\omega+b+c\omega^2)^2+(2\omega+b\omega^2+c\omega^3)^2=0$ $[\because \omega^3 = 1]$

বা, $(2 + b\omega + c\omega^2)^2 + (2\omega + b + c\omega^2)^2 + \omega^2(2 + b\omega + c\omega^2)^2 = 0$

বা, $(2 + b\omega + c\omega^2)^2 (1 + \omega^2) = -(2\omega + b + c\omega^2)^2$

বা, $(2 + b\omega + c\omega^2)^2 (-\omega) = -(2\omega + b + c\omega^2)^2$ $[\because 1 + \omega^2 = -\omega]$

বা, $(2+b\omega+c\omega^2)^2.\omega^4=(2\omega+b+c\omega^2)^2$ $[\because \omega = \omega^4]$

বা, $(2 + b\omega + c\omega^2)\omega^2 = \pm (2\omega + b + c\omega^2)$

বা, $2\omega^2 + b\omega^3 + c\omega^4 = \pm (2\omega + b + c\omega^2)$

বা, $2\omega^2 + b + c\omega = \pm (2\omega + b + c\omega^2)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে,

$2\omega^2 + b + c\omega = 2\omega + b + c\omega^2$

বা, $2(\omega^2 - \omega) - c(\omega^2 - \omega) = 0$

বা, $(2 - c)(\omega^2 - \omega) = 0$

কিন্তু $\omega^2 - \omega \neq 0$

$\therefore$ $2 - c = 0$ বা, $2 = c$

ঋনাত্মক চিহ্ন নিয়ে,

$2\omega^2 + b + c\omega = -2\omega - b - c\omega^2$

বা, $2(\omega^2 + \omega) + 2b + c(\omega^2 + \omega) = 0$

বা, $2(-1) + 2b + c(-1) = 0$ $[\because \omega^2 + \omega = -1]$

বা, $2b = 2 + c$

বা, $c = 2b - 2$

$\therefore$ $c = 2(b - 1)$

$\therefore$ $c = 2$ অথবা $c = 2(b - 1)$ **(দেখানো হলো)**

10. ক দেওয়া আছে, $1 + \sqrt{3}i$

$\therefore r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

এবং $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{\overline{z_1}} = z$

বা, $\sqrt[3]{\overline{a - ib}} = x + iy$

বা, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

বা, $a + ib = (x + iy)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

বা, $a + ib = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore$ $a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

এখন উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3xy^2 - i3x^2y + iy^3$

$= x^3 - i3x^2y - 3xy^2 - i^3y^3$ $[\because i^2 = -1]$

$= (x)^3 - 3.x^2.iy + 3.x(iy)^2 - (iy)^3$

বা, $a - ib = (x - iy)^3$

বা, $\sqrt[3]{a - ib} = x - iy$

বা, $\sqrt[3]{a - ib} = \overline{x + iy}$

$\therefore$ $\sqrt[3]{z_1} = \overline{z}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{\overline{z_2}}{z_2} = z_1$

বা, $\frac{\overline{1 + ix}}{1 + ix} = a - ib$

বা, $\frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$

বা, $\frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{1}{a - ib}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1 + ix - 1 + ix}{1 + ix + 1 - ix} = \frac{1 - a + ib}{1 + a - ib}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2} = \frac{(1 - a + ib)(1 + a + ib)}{(1 + a - ib)(1 + a + ib)}$

বা, $ix = \frac{(1 + ib - a)(1 + ib + a)}{(1 + a)^2 - (ib)^2}$

$= \frac{(1 + ib)^2 - a^2}{1 + 2a + a^2 - i^2b^2}$

$= \frac{1 + 2ib + i^2b^2 - a^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1 + 2ib - (a^2 + b^2)}{1 + 2a + a^2 + b^2}$

$= \frac{1 + 2ib - 1}{1 + 2a + 1}$ $[\because a^2 + b^2 = 1]$

$= \frac{2ib}{2(1 + a)} = \frac{ib}{1 + a}$

বা, $x = \frac{b}{1 + a}$ যা x এর একটি বাস্তব মান

(দেখানো হলো)

11. ক দেওয়া আছে, $z_1 = 10 + 6i$

এখানে, $10 = r\cos\theta$ এবং $6 = r\sin\theta$.

$\therefore\ r = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$

$= \sqrt{4 \times 34} = 2\sqrt{34}$

এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{10}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

তাহলে $z_1 = 10 + 6i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\sqrt{34}\left\{\cos\left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)\right\}$

এটিই z_1 এর পোলার রূপ।

খ ধরি, $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{10 + 6i}{4 + 6i}$

$= \frac{(10 + 6i)(4 - 6i)}{(4 + 6i)(4 - 6i)}$

$= \frac{40 + 24i - 60i - i^2 36}{4^2 - i^2 6^2}$

$= \frac{40 + 36 + i(24 - 60)}{16 + 36}$

$= \frac{76 - 36i}{52} = \frac{76}{52} - i\frac{36}{52} = \frac{19}{13} - \frac{9i}{13}$

$|z_3| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{19}{13} - \frac{9i}{13}\right| = \sqrt{\left(\frac{19}{13}\right)^2 + \left(-\frac{9}{13}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{361 + 81}{169}} = \frac{\sqrt{442}}{13}$ **(Ans.)**

এখানে, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{9}{13}}{\frac{19}{13}}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{9}{19}\right)$

যেহেতু বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত, কাজেই আর্গুমেন্ট $= -\tan^{-1}\left(\frac{9}{19}\right)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$

বা, $\arg\left\{\frac{(x + iy) - (10 + 6i)}{(x + iy) - (4 + 6i)}\right\} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\arg\frac{(x - 10) + (y - 6)i}{(x - 4) + (y - 6)i} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\arg\{(x - 10) + (y - 6)i\} - \arg\{(x - 4) + (y - 6)i\} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\frac{y - 6}{x - 10} - \tan^{-1}\frac{y - 6}{x - 4} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\frac{\frac{y - 6}{x - 10} - \frac{y - 6}{x - 4}}{1 + \frac{(y - 6)^2}{(x - 10)(x - 4)}} = \frac{\pi}{4}$

বা, $\frac{(y - 6)(x - 4) - (x - 10)(y - 6)}{(x - 10)(x - 4) + (y - 6)^2} = 1$

বা, $\frac{xy - 6x - 4y + 24 - xy + 6x + 10y - 60}{x^2 - 14x + 40 + y^2 - 12y + 36} = 1$

বা, $6y - 36 = x^2 + y^2 - 14x - 12y + 76$

বা, $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 76 - 6y + 36 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 14x - 18y + 112 = 0$ **(প্রমাণিত)**

12. ক এখানে, z একটি জটিল সংখ্যা।

$\therefore\ z = x + iy$, যা কার্তেসীয় পদ্ধতি।

z এর মডুলাস $= \sqrt{x^2 + y^2}$

z এর আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\therefore$ পোলার আকৃতি হবে,

$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left\{\cos\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) + i\sin\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\right\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $3|z - 1| = 2|z - 2|$

বা, $3|(x + iy - 1)| = 2|x + iy - 2|$ $[\because z = x + iy]$

বা, $3|(x - 1) + iy| = 2|(x - 2) + iy|$

বা, $3\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

বা, $3^2(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 2^2(x^2 - 4x + 4 + y^2)$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9x^2 + 9y^2 - 18x + 9 - 4x^2 + 16x - 16 - 4y^2 = 0$

বা, $5x^2 + 5y^2 - 2x - 7 = 0$

বা, $5(x^2 + y^2) = 2x + 7$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\arg\left(\frac{z - 2}{z + 1}\right) = \frac{\pi}{2}$

বা, $\arg\left\{\frac{(x - 2) + iy}{(x + 1) + iy}\right\} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\arg\{(x - 2) + iy\} - \arg\{(x + 1) + iy\} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}\frac{y}{x - 2} - \tan^{-1}\frac{y}{x + 1} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}\frac{\frac{y}{x - 2} - \frac{y}{x + 1}}{1 + \frac{y}{x - 2}\cdot\frac{y}{x + 1}} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{\frac{y}{x - 2} - \frac{y}{x + 1}}{1 + \frac{y^2}{(x - 2)(x + 1)}} = \tan\frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{\frac{y}{x - 2} - \frac{y}{x + 1}}{1 + \frac{y^2}{(x - 2)(x + 1)}} = \frac{1}{0}$

বা, $1 + \frac{y^2}{(x-2)(x-1)} = 0$

বা, $(x-2)(x+1) + y^2 = 0$

বা, $x^2 + x - 2x - 2 + y^2 = 0$

$\therefore$ $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ **(দেখানো হলো)**

13. ক ধরি, $r\cos\theta = -1$ ... ... (i)

এবং $r\sin\theta = \sqrt{3}$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) বর্গ করে যোগ করে পাই,

$r^2 = 1 + 3$

$\therefore$ $r = 2$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $-1 + i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$z_1 = 3 - 5i$ এবং $z_2 = 4 + 3i$

$|z_1 + z_2| = |3 - 5i + 4 + 3i|$

$= |7 - 2i| = \sqrt{49 + 4}$

$= \sqrt{53} = 7.28$ ... ... (i)

$|z_1 - z_2| = |3 - 5i - 4 - 3i|$

$= |-1 - 8i| = \sqrt{1 + 64}$

$= \sqrt{65} = 8.06$ ... ... (ii)

$|z_1| + |z_2| = |3 - 5i| + |4 + 3i|$

$= \sqrt{9 + 25} + \sqrt{16 + 9}$

$= \sqrt{34} + 5 = 5.83 + 5$

$= 10.83$ ... ... (iii)

(i), (ii) এবং (iii) নং হতে পাই,

$|z_1 + z_2| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$ **(প্রমাণিত)**

গ বামপক্ষ $= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$

$= |3 - 5i + 4 + 3i|^2 + |3 - 5i - 4 - 3i|^2$

$= |7 - 2i|^2 + |-1 - 8i|^2$

$= (\sqrt{49 + 4})^2 + (\sqrt{1 + 64})^2$

$= 53 + 65 = 118$

ডানপক্ষ $= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

$= 2(|3 - 5i|^2 + |4 + 3i|^2)$

$= 2((\sqrt{9 + 25})^2 + (\sqrt{16 + 9})^2)$

$= 2(34 + 25) = 2.59 = 118$

$\therefore |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ **(দেখানো হলো)**

14. ক দেওয়া আছে, $2x - iy + 3ix + y = 4 + i$

$\Rightarrow 2x + y + i(3x - y) = 4 + i$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই

$2x + y = 4$ .... (i)

$3x - y = 1$ .... (ii)

$(i) + (ii) \Rightarrow 5x = 5 \therefore x = 1$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$2 + y = 4 \therefore y = 2$

$\therefore$ $x = 1, y = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $|x - 1| < \frac{1}{3}$ .... (iii)

এখন, $|x + 1| = |(x - 1) + 2|$

বা, $|x + 1| \le |x - 1| + |2|$ $[\because |a + b| \le |a| + |b|]$

বা, $|x + 1| < \frac{1}{3} + 2$ $[\because |x - 1| < \frac{1}{3}]$

বা, $|x + 1| < \frac{7}{3}$.......... (iv)

(iii) ও (iv) নং গুণ করে পাই

$|x - 1|\,|x + 1| < \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}$

বা, $|(x - 1)(x + 1)| < \frac{7}{9}$

$\therefore$ $|x^2 - 1| < \frac{7}{9}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$

বা, $\text{Re}\left(\frac{1}{x + iy}\right) = 1$

বা, $\text{Re}\left\{\frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)}\right\} = 1$

বা, $\text{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = 1$

বা, $\text{Re}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}\right) = 1$

বা, $\frac{x}{x^2 + y^2} = 1$ বা, $x^2 + y^2 = x$

বা, $x^2 - x + y^2 = 0$

বা, $x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$

বা, $x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ **(দেখানো হলো)**

15. **ক** দেওয়া আছে, $-2 < 3 - x < 8$

বা, $-2 - 3 < 3 - x - 3 < 8 - 3$

[প্রত্যেক পক্ষ হতে $\frac{8-2}{2} = 3$ বিয়োগ করে]

বা, $-5 < -x < 5$

বা, $|-x| < 5 \ \therefore |x| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{|x-1|} \geq 2, x \neq 1$

বা, $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$

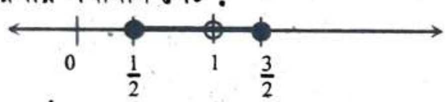
বা, $-\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 1 \leq x - 1 + 1 \leq \frac{1}{2} + 1$

$\therefore \ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, x \neq 1$

$\therefore$ সমাধান সেট $= \left\{ x : x \in \mathbb{R} \ ⁝ \ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, x \neq 1 \right\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট :



গ ধরি, $x = \sqrt[4]{-81}$

বা, $x^4 = -81 = 81i^2$

$\therefore \ x^2 = \pm 9i$ [বর্গমূল করে]

বা, $x^2 = \frac{9}{2}(\pm 2i)$

বা, $x^2 = \frac{9}{2}(1 \pm 2i - 1)$

বা, $x^2 = \frac{9}{2}\{(1)^2 \pm 2.1.i + i^2\}$

বা, $x^2 = \frac{9}{2}(1 \pm i)^2 \ \therefore x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

$\therefore$ প্রাপ্ত মূল চারটি $x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i), x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)$

$x_3 = -\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i), x_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)$

$\therefore$ মূল চারটির যোগফল $= x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$= \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i) + \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i) - \frac{3}{\sqrt{2}}(1+i) - \frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)$

$= 0$ **(প্রমাণিত)**

16. **ক** $x \leq \frac{1}{2}x + 1$

বা, $x - \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x$

[উভয়পক্ষে $(-\frac{1}{2}x)$ যোগ করে]

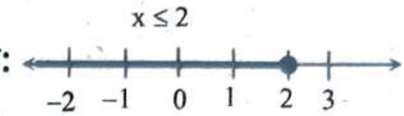
বা, $\frac{1}{2}x \leq 1$

বা, $2.\frac{1}{2}x \leq 2.1$ [উভয়পক্ষে 2 গুণ করে]

$\therefore \ x \leq 2$

নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$

সংখ্যারেখায়:



খ দেওয়া আছে, $P = \omega^4 + \omega^5$

$= \omega.\omega^3 + \omega^3.\omega^2$

$= \omega.1 + 1.\omega^2; [\because \omega^3 = 1]$

$= \omega + \omega^2$

$= -1 \ [\because \omega + \omega^2 = -1]$

এখন, $\sqrt[3]{P} = \sqrt[3]{-1}$

ধরি, $x = \sqrt[3]{-1}$

বা, $x^3 = -1$ [উভয়পক্ষে ঘন করে]

বা, $x^3 + 1^3 = 0$

বা, $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\therefore \ x + 1 = 0$ অথবা $x^2 - x + 1 = 0$

বা, $x = -1$ বা, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$

বা, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \ \sqrt[3]{P}$ এর মান যথাক্রমে -1 অথবা $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ **(Ans.)**

গ উদ্দীপক হতে, $z = x + iy$

$\therefore \ |2z - 1| = |z - 2|$

বা, $|2x + 2iy - 1| = |x + iy - 2|$

বা, $|2x - 1 + i.2y| = |x - 2 + iy|$

বা, $\sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

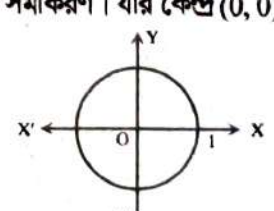
বা, $4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$; [বর্গ করে]

বা, $3x^2 + 3y^2 = 3$

বা, $x^2 + y^2 = 1 \ \therefore (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ। যার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 1

লেখচিত্র:



17. ক দেওয়া আছে, $f(x) = |1-4x|$

$\therefore \ f(x) < 3$

বা, $|1-4x| < 3$

বা, $-3 < 1-4x < 3$

বা, $-3-1 < 1-4x-1 < 3-1$

বা, $-4 < -4x < 2$

বা, $\frac{-4}{-4} > \frac{-4x}{-4} > \frac{-2}{4}$ $\quad [-\frac{1}{4}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $1 > x > -\frac{1}{2} \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < 1$ **(Ans.)**

খ $a = \sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা প্রমাণ করতে হবে।

আমরা জানি, $4 < 7 < 9$

$\therefore \ \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$

বা, $2 < \sqrt{7} < 3$

$2^2 = 4, (\sqrt{7})^2 = 7, 3^2 = 9$

সুতরাং, $\sqrt{7}$ এর মান 2 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{7}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা।

যদি $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা হয়।

ধরি, $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ [p ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$]

বা, $7 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $7q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টতঃ 7q পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

$\therefore$ 7q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না।

অর্থাৎ $7q \neq \frac{p^2}{q} \therefore \sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $b = -729$

মনে করি, $x = \sqrt[6]{b}$

$x = \sqrt[6]{-729}$

বা, $x = \sqrt[6]{729i^2}$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $x^6 = 729i^2$

বা, $(x^3)^2 = (27i)^2 \ \therefore x^3 = \pm 27i$

এখন, $x^3 + 27i = 0$ হলে

বা, $x^3 - 27i^3 = 0$

বা, $x^3 - (3i)^3 = 0$

বা, $(x-3i)(x^2+3ix-9) = 0$

$\therefore \ x = 3i$ অথবা, $x^2 + 3ix - 9 = 0$ ....(i)

(i) নং হতে পাই,

$$x = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4.1(-9)}}{2.1} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9+36}}{2}$$

$$= \frac{-3i \pm \sqrt{27}}{2} = \frac{-3i \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

পুনরায় $x^3 - 27i = 0$ হলে,

বা, $x^3 + 27i^3 = 0$ বা, $x^3 + (3i)^3 = 0$

বা, $(x+3i)(x^2-3ix-9) = 0$

হয় $x + 3i = 0$ বা, $x = -3i$

অথবা, $x^2 - 3ix - 9 = 0$ ....(ii)

(ii) নং থেকে,

$$x = \frac{-(-3i) \pm \sqrt{(-3i)^2 - 4.1(-9)}}{2.1}$$

$$= \frac{3i \pm \sqrt{-9+36}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{27}}{2} = \frac{3i \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \pm 3i, \frac{\pm 3i \pm 3\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

18. ক $f(x) = \sqrt{3}$ হয় যখন $|2x-5| \not< 3$

বা, $|2x-5| \geq 3$

হয়, $2x - 5 \geq 3$	অথবা, $-(2x-5) \geq 3$
বা, $2x \geq 8$	বা, $2x - 5 \leq -3$
বা, $x \geq 4$	বা, $2x \leq 5 - 3$
	বা, $2x \leq 2$
	বা, $x \leq 1$

$\therefore x \geq 4$ অথবা $x \leq 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $1 < x < 4$

বা, $2 < 2x < 8$

বা, $2-5 < 2x-5 < 8-5$

বা, $-3 < 2x-5 < 3$

$\therefore \ |2x-5| < 3$

$\therefore \ f(x) = (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$

$= (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$

$= (1-\omega+\omega^2)^2(1-\omega^2+\omega)^2$

$= (1+\omega^2-\omega)^2(1+\omega-\omega^2)^2$

$= (-\omega-\omega)^2(-\omega^2-\omega^2)$ $[\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$

$= (-2\omega)^2(-2\omega^2)^2 = 4\omega^2.4\omega^4 = 16\omega^2.\omega$

$= 16\omega^3$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= 16$ **(Ans.)**

গ $|2x-5| \not< 3$ হলে $f(x) = \sqrt{3}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $f(x) \neq \frac{p}{q}$

মনে করি, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা, তাহলে $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$

[যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা, $q \neq 0$ এবং এদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক (1 ব্যতীত) নেই]

বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $p^2 = 3q^2$ ... ... (i)

এখন, 3 দ্বারা $3q^2$ বিভাজ্য বিধায় 3 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হবে।
সুতরাং p নিজেই 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

ধরি, $p = 3c$ [যেখানে c একটি পূর্ণসংখ্যা]

বা, $p^2 = 9c^2$

বা, $3q^2 = 9c^2$ [(i) থেকে]

বা, $q^2 = 3c^2$

$\therefore$ 3 দ্বারা q^2 বিভাজ্য, অর্থাৎ 3 দ্বারা q বিভাজ্য।
সুতরাং, p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক হলো 3, যা প্রস্তাবনা বিরোধী।

$\therefore \sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সুতরাং, $\sqrt{3} \neq \frac{p}{q}$

বা, $f(x) \neq \frac{p}{q}$, যখন $p, q \in \mathbb{N}$ এবং $q \neq 0$. **(দেখানো হলো)**

19. ক মনে করি, আয়না x টি এবং চিরুনি y টি ক্রয় করবেন।
অভীষ্ট ফাংশন $z_{max} = x + y$ **(Ans.)**

খ ধরি, $z = x + y = -8 - 6\sqrt{-1}$

এখন, $-8 - 6\sqrt{-1} = -8 - 6i$ [$\because \sqrt{-1} = i$]
$= 1 - 6i - 9$
$= 1 - 2.3i + (3i)^2 = (1 - 3i)^2$

$\therefore -8 - 6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{(1-3i)^2}$
$= \pm (1 - 3i)$ **(Ans.)**

গ সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $12x + 8y \leq 100; x \geq 1; y \leq 8;$
$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

$\therefore$ আমরা পাই,

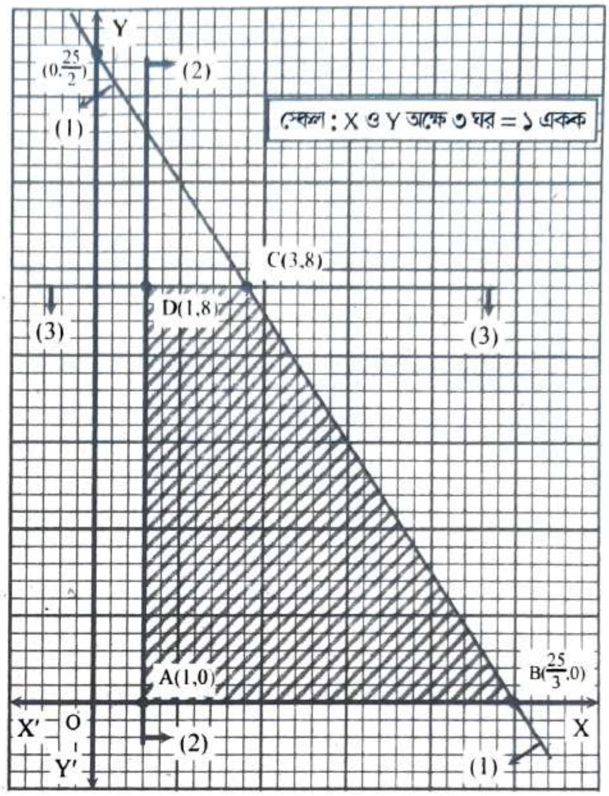
$12x + 8y = 100 \Rightarrow \frac{x}{\frac{25}{3}} + \frac{y}{\frac{25}{2}} = 1$ ... ... (1)

$x = 1$ ... ... (2)

$y = 8$ ... ... (3)

$x = 0$ ... ... (4)

$y = 0$ ... ... (5)



লেখচিত্রে দেখা যায় (1) এবং (3) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $12x + 8y \leq 100$ এবং $y \leq 8$ সত্য।

আবার (2) এর সকল বিন্দু এবং (2) এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 1$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD.

$A(1, 0), B\left(\frac{25}{3}, 0\right)$

C হচ্ছে (1) এবং (3) এর ছেদ বিন্দু। $\therefore C(3, 8)$

D " (2) " (3) " " " $\therefore D(1, 8)$

এখন $A(1, 0)$ বিন্দুতে $z = 1 + 0 = 1$

$B\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ " $z = \frac{25}{3} + 0 = \frac{25}{3}$

$C(3, 8)$ " $z = 3 + 8 = 11$

এবং $D(1, 8)$ " $z = 1 + 8 = 9$

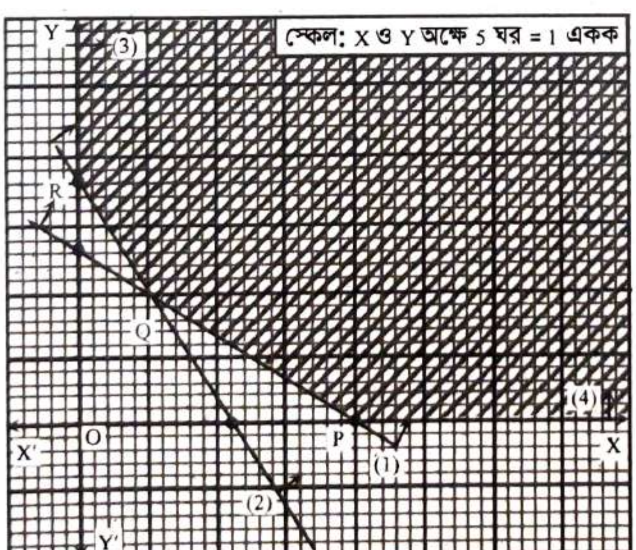
স্পষ্টতঃ C (3, 8) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।
সুতরাং 3 টি আয়না এবং 8টি চিরুনি কিনতে পারবেন **(Ans.)**

20. ক দেওয়া আছে, $z = 40x + 50y$

(3, 4) বিন্দুতে $z = 40 \times 3 + 50 \times 4$
$= 120 + 200 = 320$ **(Ans.)**

খ মনে করি, A প্রকারের x কেজি ও B প্রকারের y কেজি খাদ্য প্রতিদিন খাওয়া হবে। তাহলে $x \geq 0$ ও $y \geq 0$।
প্রশ্নানুযায়ী, $8x + 12y \geq 32$ [যেহেতু ন্যূনতম প্রয়োজন ছিল 32 গ্রাম] অর্থাৎ $2x + 3y \geq 8$

অনুরূপভাবে, স্টার্চ বিবেচনা করলে পাই,
$10x + 6y \geq 22$ অর্থাৎ $5x + 3y \geq 11$
মোট খরচ $z = 40x + 50y$
শর্তসমূহঃ $2x + 3y \geq 8$
$5x + 3y \geq 11$
$x, y \geq 0$
এটিই নির্ণেয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।
প্রথমে অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,
$2x + 3y \geq 8$ এর অনুরূপ সমীকরণ
$2x + 3y = 8$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{8/3} = 1$ .... (1)
$5x + 3y \geq 11$ এর অনুরূপ সমীকরণ
$5x + 3y = 11$ বা, $\frac{x}{11/5} + \frac{y}{11/3} = 1$ ...... (2)
$x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0$ ... (3)
এবং $y = 0$ .... (4)
এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 5 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (1), (2), (3) ও (4) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।
এবার $2x + 3y \geq 8$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 8$ যা সত্য নয়। এক্ষেত্রে ছক কাগজে (1) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে (সরল রেখার দুই প্রান্তে) '$\rightarrow$' চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $2x + 3y \geq 8$ অসমতার সমাধান।



পুনরায় $5x + 3y \geq 11$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 11$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (2) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে রেখাটিতে $\rightarrow$ চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $5x + 3y \geq 11$ অসমতার সমাধান।

$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায় এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।
কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (1) ও (4) নং এর ছেদ বিন্দু (4, 0); (1) ও (2) নং এর ছেদ বিন্দু (1, 2); (2) ও (3) এর ছেদ বিন্দু $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

মনে করি, P(4, 0), Q(1, 2) এবং R $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

কৌণিক বিন্দু	$z = 40x + 50y$
P(4, 0)	$z = 40 \times 4 + 50 \times 0 = 160$
Q(1, 2)	$z = 40 \times 1 + 50 \times 2 = 140$
$R\left(0, \frac{11}{3}\right)$	$z = 40 \times 0 + 50 \times \frac{11}{3} = 183.3$

z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 140
$\therefore$ 1 কেজি A এবং 2 কেজি B খাদ্য দিয়ে কম খরচে দৈনিক প্রয়োজন মেটানো যাবে। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $z = 40x + 50y$

$$= 40 \times \frac{1}{10} + 50 \times \frac{\sqrt{-1}}{10} = 4 + 5i \quad [\because \sqrt{-1} = i]$$

$$\overline{z} = 4 - 5i$$

$$z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2 = \left(z + \overline{z}\right)^2 - z\overline{z}$$
$$= (4 + 5i + 4 - 5i)^2 - (4 + 5i)(4 - 5i)$$
$$= 8^2 - (16 - 25i^2)$$
$$= 64 - 16 + 25i^2$$
$$= 64 - 16 - 25 \quad [\because i^2 = -1]$$
$$= 64 - 41 = 23$$

$\therefore z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2 = 23$ **(দেখানো হলো)**

21. ক $-5 + 12\sqrt{-1} = -5 + 12i \quad [\because i = \sqrt{-1}]$
$$= 4 + 12i - 9$$
$$= 4 + 12i + 9i^2 \quad [\because i^2 = -1]$$
$$= 2^2 + 2.2.3i + (3i)^2 = (2 + 3i)^2$$

$\therefore \sqrt{-5 + 12\sqrt{-1}} = \pm (2 + 3i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |bx - c|$
$b = 1$ এবং $c = 2$ হলে, $f(x) = |x - 2|$
$\therefore f(x^2 - 2) = |x^2 - 2 - 2| = |x^2 - 4|$
প্রশ্নমতে, $f(x) < \frac{1}{4} \Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{4}$

এখন, $|x + 2| = |x - 2 + 4|$
$\therefore \quad |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + |4| \quad [\because |a + b| \leq |a| + |b|]$
বা, $|x + 2| < \frac{1}{4} + 4 \quad [\because |x - 2| < \frac{1}{4}]$
বা, $|x + 2| < \frac{17}{4} \quad \therefore |x + 2| . |x - 2| < \frac{17}{4} \times \frac{1}{4}$

বা, $|x^2-4| < \frac{17}{16}$ $\therefore f(x^2-2) < \frac{17}{16}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $2x = -1+\sqrt{-3}$ $\therefore x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

এবং $2y = -1-\sqrt{-3}$ $\therefore y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

আমরা জানি, এককের জটিল ঘনমূলত্রয় $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ যেহেতু, এককের জটিল ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির বর্গ। সুতরাং

$x = \omega$ হলে $y = \omega^2$

বামপক্ষ $= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

$= \omega^4 + \omega^3.\omega^2 + \omega^2.(\omega^2)^2 + \omega.(\omega^2)^3 + (\omega^2)^4$

$= \omega + \omega^2 + (\omega^3)^2 + \omega.(\omega^3)^2 + (\omega^3)^2.\omega^2$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= -1$ $[\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$ **(প্রমাণিত)**

22. **ক** দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.

প্রদত্ত অসমতাটি, $-3 < g(x) < 7$

$\Rightarrow -3 < 2x - 1 < 7$

$\Rightarrow -3 - 2 < 2x - 1 - 2 < 7 - 2$

[$-\frac{-3+7}{2} = -2$ যোগ করে]

$\Rightarrow -5 < 2x - 3 < 5$ $\therefore |2x-3| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \{t : t \in$ স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $2 < t < 4\}$

$\therefore B = \{3\}$

আবার, $g(x) = 2x - 1$

এখন, $|g(x) + 2iy| = t$

বা, $|2x - 1 + 2yi| = 3$

বা, $\sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} = 3$

বা, $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2 = 9$

বা, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{9}{4}$ ['4' দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\therefore$ নির্দেশিত সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

এবং $A = \{a : a \in$ পূর্ণসংখ্যা এবং $|g(a)| < 4\}$

এখন, $|g(a)| < 4$

$\Rightarrow |2a - 1| < 4$

$\Rightarrow -4 < 2a - 1 < 4$

$\Rightarrow -4 + 1 < 2a - 1 + 1 < 4 + 1$ ['1' যোগ করে]

$\Rightarrow -3 < 2a < 5$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow -1 \leq a \leq 2$ [$\because$ a পূর্ণসংখ্যা]

A এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{a \in \mathbb{Z} : a \geq 2\}$

$\therefore$ A এর সুপ্রিমাম $= 2$ **(Ans.)**

A এর নিম্নসীমার সেট $= \{a \in \mathbb{Z} : a \leq -1\}$

$\therefore$ A এর ইনফিমাম $= -1$ **(Ans.)**

23. **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = x - 2$

প্রদত্ত অসমতাটি, $-1 \leq f(x) \leq 11$

বা, $-1 \leq x - 2 \leq 11$

বা, $-1 - 5 \leq x - 2 - 5 \leq 11 - 5$

[উভয়পক্ষে $-\frac{-1+11}{2} = -5$ যোগ করে]

বা, $-6 \leq x - 7 \leq 6$

$\therefore |x - 7| \leq 6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{f(x)}{f(x+2)} > \frac{f(x+3)}{f(x+4)}$

বা, $\frac{x-2}{x+2-2} > \frac{x+3-2}{x+4-2}$

বা, $\frac{x-2}{x} > \frac{x+1}{x+2}$ বা, $\frac{x-2}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0$

বা, $\frac{(x-2)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)} > 0$

বা, $\frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x(x+2)} > 0$ বা, $\frac{-x-4}{x(x+2)} > 0$

প্রদত্ত অসমতাটি $x = 0$ এবং $x = -2$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত।

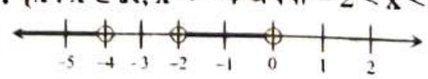
$x = -4, -2, 0$ সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -4, -4 < x < -2, -2 < x < 0$ এবং $x > 0$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$-x-4$ এর চিহ্ন	x এর চিহ্ন	$x+2$ এর চিহ্ন	$\frac{-x-4}{x(x+2)}$ এর চিহ্ন
$x < -4$	+	−	−	+
$-4 < x < -2$	−	−	−	−
$-2 < x < 0$	−	−	+	+
$x > 0$	−	+	+	−

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x < -4$ অথবা $-2 < x < 0, x \in \mathbb{R}$.

সমাধান সেট : $\{x : x \in \mathbb{R}, x < -4$ অথবা $-2 < x < 0\}$

সংখ্যারেখায়:



গ দেওয়া আছে, $f(x) = x - 2$ এবং $z = p + iq$

$\therefore\ f(z+6) = z + 6 - 2 = z + 4$

$f(z-2) = z - 2 - 2 = z - 4$

এখন, $|f(z+6)| + |f(z-2)| = 10$

বা, $|z+4| + |z-4| = 10$

বা, $|p + iq + 4| + |p + iq - 4| = 10$

বা, $|(p+4) + iq| + |(p-4) + iq| = 10$

বা, $\sqrt{(p+4)^2 + q^2} + \sqrt{(p-4)^2 + q^2} = 10$

বা, $\sqrt{(p+4)^2 + q^2} = 10 - \sqrt{(p-4)^2 + q^2}$

বা, $(p+4)^2 + q^2 = \{10 - \sqrt{(p-4)^2 + q^2}\}^2$

বা, $p^2 + 8p + 16 + q^2 = 100 - 20\sqrt{(p-4)^2 + q^2} +$
$p^2 - 8p + 16 + q^2$

বা, $16p - 100 = -20\sqrt{(p-4)^2 + q^2}$

বা, $4p - 25 = -5\sqrt{(p-4)^2 + q^2}$

বা, $(4p-25)^2 = \{-5\sqrt{(p-4)^2 + q^2}\}^2$

বা, $(4p)^2 - 2.4p.25 + (25)^2 = 25\{(p-4)^2 + q^2\}$

বা, $16p^2 - 200p + 625 = 25(p^2 - 8p + 16 + q^2)$

বা, $16p^2 - 200p + 625 = 25p^2 - 200p + 400 + 25q^2$

বা, $9p^2 + 25q^2 = 225$

বা, $\frac{p^2}{25} + \frac{q^2}{9} = 1$

$\therefore \frac{p^2}{5^2} + \frac{q^2}{3^2} = 1$ যা উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। **(Ans.)**

24. ক $5i = \frac{5}{2}(2i) = \frac{5}{2}(1 + 2i - 1)$

$= \frac{5}{2}(1 + 2.1.i + i^2) = \frac{5}{2}(1+i)^2$

$\therefore$ 5i এর বর্গমূল, $\sqrt{5i} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}(1+i)^2}$

$= \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1+i)$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 4y$

এবং শর্তসমূহ $x + y \le 450,\ 2x + y \le 600,\ y \le 400,$
$x \ge 0,\ y \ge 0$

প্রথমে অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।

$x + y \le 450$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{450} + \frac{y}{450} = 1$ ... ... (i)

$2x + y \le 600$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{300} + \frac{y}{600} = 1$ ...(ii)

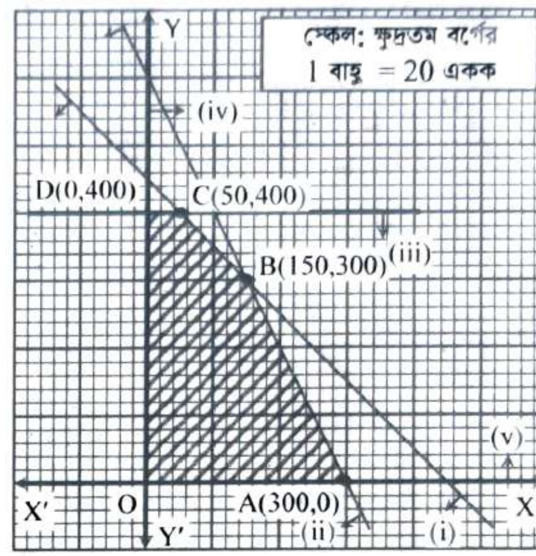
$y \le 400$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 400$ ... ... (iii)

$x \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ .... (iv)

$y \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ .... (v)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।



চিত্রানুসারে, A, B, C ও D যথাক্রমে (ii) ও (v); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এবং (iii) ও (iv) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে– O(0, 0), A(300, 0), B(150, 300) C(50, 400) এবং D(0, 400)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(300, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 300 + 4 \times 0 = 900$

B(150, 300) বিন্দুতে $z = 3 \times 150 + 4 \times 300 = 1650$

C(50, 400) বিন্দুতে $z = 3 \times 50 + 4 \times 400 = 1750$

D(0, 400) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 400 = 1600$

স্পষ্টত C(50, 400) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়। সুতরাং সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি C(50, 400) এবং সর্বোচ্চমান $z_{max} = 1750$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $y^2 + y + 1 = 0$

সমীকরণটি মূলদ্বয় p ও q হলে

$$p = \frac{-1 + \sqrt{(1)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

এবং $q = \frac{-1 - \sqrt{(1)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

এখানে, উভয় রাশি এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং একটি অপরটির বর্গ।

এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়কে ω, ω^2 দ্বারা সূচিত করলে,

$p = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$ ধরলে

$q = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2$ হবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\right]^m + \left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\right]^m$

$= \omega^m + (\omega^2)^m = \omega^m + \omega^{2m}$

এখন $m = 3n$ হলে, যেখানে $n \in z$

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3n} + (\omega^2)^{3n} = (\omega^3)^n + (\omega^3)^{2n} = 1 + 1 = 2$

$m = 3n + 1$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3n+1} + (\omega^2)^{3n+1}$

$= (\omega^3)^n.\,\omega + (\omega^3)^{2n}.\,\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

$m = 3n + 2$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3n+2} + (\omega^2)^{3n+2}$

$= (\omega^3)^n.\,\omega^2 + (\omega^3)^{2n}.\,\omega^4 = \omega^2 + \omega$

$= -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

অর্থাৎ, m এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে প্রদত্ত রাশিটি = 2 এবং m এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে রাশিটি = –1 **(দেখানো হলো)**

25. ক দেওয়া আছে, $f(x) = 5x + 1$

প্রদত্ত অসমতাটি, $-9 < f(x) < 16$

$\Rightarrow -9 < 5x + 1 < 16$

$\Rightarrow -9 - 1 < 5x + 1 - 1 < 16 - 1$

$\Rightarrow -10 < 5x < 15 \quad \therefore -2 < x < 3$

$\therefore S = \{x : x \in \mathbb{R}, -9 < f(x) < 16\}$

$= \{x : x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}$

ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

$\therefore$ সুপ্রিমাম, Sup S = 3 **(Ans.)**

খ প্রদত্ত অসমতাটি, $\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{9}, x \neq -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{|5x+1|} > \frac{1}{9}, x \neq -\frac{1}{5}$

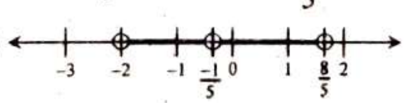
$\Rightarrow |5x + 1| < 9 \quad \Rightarrow -9 < 5x + 1 < 9$

$\Rightarrow -9 - 1 < 5x + 1 - 1 < 9 - 1$

$\Rightarrow -10 < 5x < 8 \quad \therefore -2 < x < \frac{8}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < \frac{8}{5}$ এবং $x \neq -\frac{1}{5}\}$

সংখ্যারেখা:



গ দেওয়া আছে, $|2z + 3| = |3z + 1|$

$\Rightarrow |2(x + iy) + 3| = |3(x + iy) + 1| \quad [\because z = x + iy]$

$\Rightarrow |(2x + 3) + i.2y| = |(3x + 1) + i.3y|$

$\Rightarrow \sqrt{(2x+3)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(3x+1)^2 + (3y)^2}$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 + 4y^2 = 9x^2 + 6x + 1 + 9y^2$

$\Rightarrow 9x^2 - 4x^2 + 9y^2 - 4y^2 + 6x - 12x + 1 - 9 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 6x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{25} + \frac{8}{5}$

$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ

যার কেন্দ্র $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{5}$।

26. ক $-3 - 4i$ এর বর্গমূল $= \sqrt{-3-4i} = \sqrt{1 - 4i - 4}$

$= \sqrt{1 - 2.1.2i + (2i)^2}$

$= \sqrt{(1-2i)^2} = \pm(1 - 2i)$ **(Ans.)**

খ যেহেতু ω এককের ঘনমূল, কাজেই

$\omega^3 = 1$ এবং $1 + \omega + \omega^2 = 0$

দেওয়া আছে, $p(x) = a + bx + cx^2$

প্রশ্নমতে, $\{p(\omega)\}^3 + \left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3 = 0$

বা, $\{p(\omega)\}^3 + \{p(\omega^2)\}^3 = 0 \left[\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}.\,1 = \frac{1}{\omega}.\,\omega^3 = \omega^2\right]$

বা, $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega^4)^3 = 0$

বা, $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 0 \; [\because \omega^3 = 1]$

বা, $x^3 + y^3 = 0$ যেখানে $x = a + b\omega + c\omega^2$

এবং $y = a + b\omega^2 + c\omega$

বা, $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$

বা, $(x + y)\{x^2 + xy(\omega + \omega^2) + y^2\omega^3\} = 0 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

বা, $(x + y)\;\{x^2 + \omega xy + \omega^2 xy + \omega^3 y^2\} = 0$

বা, $(x + y)\;\{x(x + \omega y) + \omega^2 y(x + \omega y)\} = 0$

$\therefore (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) = 0 \; \ldots\ldots \; \text{(i)}$

এখন, $x + y = a + b\omega + c\omega^2 + a + b\omega^2 + c\omega$

$= 2a + b(\omega + \omega^2) + c(\omega + \omega^2) = 2a - b - c$

$x + \omega y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega + b\omega^3 + c\omega^2$

$= a + b\omega + c\omega^2 + a\omega + b + c\omega^2 \quad [\because \omega^3 = 1]$

$= 2c\omega^2 + b(1 + \omega) + a(1 + \omega)$

$= 2c\omega^2 - b\omega^2 - a\omega^2 = \omega^2(2c - b - a)$

এবং $x + \omega^2 y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^3$

$= a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega + c$

$= 2b\omega + c(1 + \omega^2) + a(1 + \omega^2)$

$= 2b\omega - c\omega - a\omega = \omega(2b - c - a)$

$\therefore \text{(i)} \Rightarrow (2a - b - c)(2c - a - b)(2b - a - c)\,\omega^3 = 0$

$\therefore (2a - b - c)(2c - a - b)(2b - a - c) = 0$

হয়, $2a - b - c = 0$ অথবা, $2c - a - b = 0$

অথবা, $2b - a - c = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}(b + c)$

অথবা, $c = \frac{1}{2}(a + b)$ **(দেখানো হলো)**

গ আমরা জানি,

এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয় একটি অপরটির বর্গ।

∴ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega$ হলে $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega^2$ হবে।

$1+\omega+\omega^2=1+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$=\frac{2-1+\sqrt{-3}-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{2-2}{2}=\frac{0}{2}=0$

∴ $1+\omega+\omega^2=0$ **(প্রমাণিত)**

27. ক $\mathbb{R}$ দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সেটকে বোঝায়। $\mathbb{C}$ দ্বারা কাল্পনিক বা জটিল সংখ্যার সেটকে বোঝায়।

$\mathbb{R}$ ও $\mathbb{C}$ এর মধ্যে সম্পর্ক হলো $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

খ দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে, $f(x)=3x+1$

$\therefore f(x-2)=3(x-2)+1=3x-6+1=3x-5$

প্রশ্নমতে, $2|f(x-2)|\le 1$

বা, $2|3x-5|\le 1$

বা, $|3x-5|\le\frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2}\le 3x-5\le\frac{1}{2}$ [$\because |a|\le\alpha$ হলে $-\alpha\le a\le\alpha$]

বা, $-\frac{1}{2}+5\le 3x-5+5\le\frac{1}{2}+5$

[প্রত্যেক পক্ষে 5 যোগ করে]

বা, $\frac{-1+10}{2}\le 3x\le\frac{1+10}{2}$

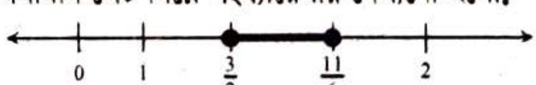
বা, $\frac{9}{2}\le 3x\le\frac{11}{2}$

বা, $\frac{3}{2}\le x\le\frac{11}{6}$ [প্রত্যেক পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{3}{2}\le x\le\frac{11}{6}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{3}{2}\le x\le\frac{11}{6}\right\}$

সমাধান সেট নিম্নে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



গ দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে, $|z-5|=3$

বা, $|x+iy-5|=3$ [$\because z=x+iy$]

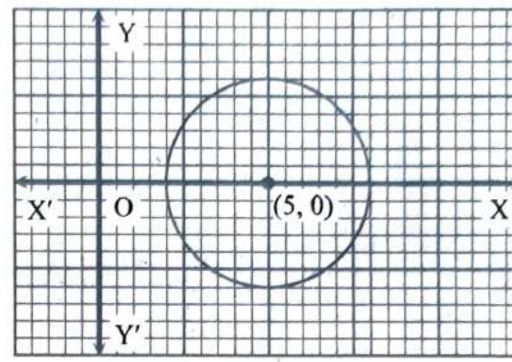
বা, $|(x-5)+iy|=3$

বা, $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=3$

$\therefore (x-5)^2+(y-0)^2=3^2$

সুতরাং, দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদত্ত সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (5, 0) ও ব্যাসার্ধ 3 একক।

উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 2 বর্গ = 1 একক ধরে নিম্নে চিত্রটি অঙ্কন করা হলো:



28. ক $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^3$

$=\left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^3=\left(\frac{1+2i+i^2}{1-(-1)}\right)^3$ [$\because i^2=-1$]

$=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^3=\left(\frac{2i}{2}\right)^3=i^3=-i$

$=0+i(-1)$

$=A+iB$ যেখানে $A=0$ ও $B=-1$ **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে, $|z+1|+|z-1|=4$

বা, $|x+iy+1|+|x+iy-1|=4$ [$\because z=x+iy$]

বা, $|(x+1)+iy|+|(x-1)+iy|=4$

বা, $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$

বা, $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

বা, $(x+1)^2+y^2=16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}$
$+(x-1)^2+y^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x+1)^2-(x-1)^2=16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

বা, $4x=16-8\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

বা, $x=4-2\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

বা, $x-4=-2\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$

বা, $(x-4)^2=4(x^2+y^2-2x+1)$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $x^2-8x+16=4x^2+4y^2-8x+4$

∴ $3x^2+4y^2=12$ **(প্রমাণিত)**

গ দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে, $a=p+q$, $b=p+\omega q$,
$c=p+\omega^2q$

বামপক্ষ $=a^3+b^3+c^3$

$=(p+q)^3+(p+\omega q)^3+(p+\omega^2q)^3$

$=p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+p^3+(\omega q)^3+3p^2\omega q$
$+3p(\omega q)^2+p^3+(\omega^2q)^3+3p^2.\omega^2q+3p.(\omega^2q)^2$

$=3p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+\omega^3q^3+3p^2q.\omega$
$+3p.\omega^2q^2+\omega^6q^3+3p^2q.\omega^2+3p.q^2.\omega^4$

$=3p^3+q^3+3p^2q+3pq^2+1.q^3+3p^2q.\omega$
$+3pq^2.\omega^2+1.q^3+3p^2.q.\omega^2+3pq^2.\omega$

$[\because \omega^3 = 1; \omega^6 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1; \omega^4 = \omega^3.\omega = 1.\omega = \omega]$

$= 3p^3 + q^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3p^2q\omega + 3pq^2\omega^2 + q^3 + 3p^2q\omega^2 + 3pq^2\omega$

$= 3p^3 + 3q^3 + 3p^2q(1 + \omega + \omega^2) + 3pq^2(1 + \omega^2 + \omega)$

$= 3p^3 + 3q^3 + 3p^2q.0 + 3pq^2.0$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= 3p^3 + 3q^3 = 3(p^3 + q^3) =$ ডানপক্ষ

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3(p^3 + q^3)$ **(দেখানো হলো)**

29. ক $\dfrac{1}{2-i} = \dfrac{2+i}{(2-i)(2+i)}$

$= \dfrac{2+i}{4-i^2} = \dfrac{2+i}{4+1} = \dfrac{2+i}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 1 + 2i$

$\therefore z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i$

$\therefore \overline{z_1 - z_2} = \overline{1 + i} = 1 - i$

মনে করি, $\sqrt{1-i} = x - iy$

$\Rightarrow 1 - i = x^2 - i \,.\, 2xy + i^2y^2$

$\Rightarrow 1 - i = x^2 - y^2 - i \,.\, 2xy$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^2 - y^2 = 1$ ... ... (i)

এবং $-2xy = -1 \Rightarrow 2xy = 1$ ... ... (ii)

এখন, $x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{1^2 + (2xy)^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ... ... (iii)

এখন, (i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2x^2 = 1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

$\therefore x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} + 1}$

আবার, (iii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

$\therefore y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

$\therefore \sqrt{1-i} = x - iy$

$= \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

$= \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = p\omega^2 + q + r\omega$

$b = p\omega + q + r\omega^2$

প্রদত্ত সমীকরণ, $a^3 + b^3 = 0$

$\Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$

$\Rightarrow (a + b)(\{a^2 + (\omega + \omega^2)ab + \omega^3b^2\} = 0$

$\Rightarrow (a + b)\{a^2 + \omega ab + \omega^2 ab + \omega^3b^2\} = 0$

$\Rightarrow (a + b)\{a(a + \omega b) + \omega^2b(a + \omega b)\} = 0$

$\Rightarrow (a + b)(a + \omega b)(a + \omega^2 b) = 0$

হয়, $a + b = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega + q + r\omega^2 = 0$

$\Rightarrow p(\omega + \omega^2) + 2q + r(\omega + \omega^2) = 0$

$\Rightarrow 2q - p - r = 0$

$\therefore 2q = r + p$

অথবা, $a + \omega b = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega^2 + q\omega + r\omega^3 = 0$

$\Rightarrow 2p\omega^2 + q(1 + \omega) + r(\omega + 1) = 0$

$\Rightarrow 2p\omega^2 - q\omega^2 - r\omega^2 = 0$

$\Rightarrow 2p - q - r = 0$

$\therefore 2p = q + r$

অথবা, $a + b\omega^2 = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega^3 + q\omega^2 + r\omega^4 = 0$

$\Rightarrow p\omega^2 + p + q + q\omega^2 + r\omega + r\omega = 0$

$\Rightarrow p(1 + \omega^2) + q(1 + \omega^2) + 2r\omega = 0$

$\Rightarrow -p\omega - q\omega + 2r\omega = 0$

$\Rightarrow 2r - p - q = 0 \quad \therefore 2r = p + q$

সুতরাং, $2p = q + r$, $2q = r + p$ এবং $2r = p + q$

(প্রমাণিত)

30. ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$ তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore$ $x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

এবং $\dfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$

এখন, $|z + 5| + |z - 5| = 15$

বা, $|x + iy + 5| + |x + iy - 5| = 15$

বা, $|x + 5 + iy| + |x - 5 + iy| = 15$

বা, $\sqrt{(x + 5)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = 15$

বা, $\sqrt{(x + 5)^2 + y^2} = 15 - \sqrt{(x - 5)^2 + y^2}$

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 = 225 + (x^2 - 10x + 25 + y^2) - 30\sqrt{(x - 5)^2 + y^2}$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 225 - x^2 + 10x - 25 - y^2 = - 30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $20x - 225 = - 30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $4x - 45 = - 6\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$

বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36(x^2 - 10x + 25 + y^2)$

বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36x^2 - 360x + 900 + 36y^2$

বা, $20x^2 + 36y^2 = 1125$

বা, $\dfrac{x^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$

যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অসমতা $\dfrac{2x + 3}{x - 3} < \dfrac{x + 3}{x - 1}$

বা, $\dfrac{2x + 3}{x - 3} - \dfrac{x + 3}{x - 1} < 0$

বা, $\dfrac{(2x^2 + 3x - 2x - 3) - (x^2 - 9)}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\dfrac{2x^2 + x - 3 - x^2 + 9}{(x - 3)(x - 1)} < 0$ বা, $\dfrac{x^2 + x + 6}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\dfrac{x^2 + 2.\frac{1}{2}.x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 - \frac{1}{4}}{(x - 3)(x - 1)} < 0$

বা, $\dfrac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}}{(x - 3)(x - 1)} < 0$ ……… (i)

এখানে, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0$

$\therefore$ $(x - 3)$ ও $(x - 1)$ এর মধ্যে একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হলে (i) অসমতাটির শর্ত সিদ্ধ করে।

শর্ত	$(x - 1)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)(x - 1)$ এর চিহ্ন
$x < 1$	−	−	+
$1 < x < 3$	+	−	−
$x > 3$	+	+	+

$\therefore$ (i) অসমতাটি সত্য হবে যদি $1 < x < 3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $1 < x < 3$

সংখ্যারেখা : 

31. **ক** দেওয়া আছে, $z = x + iy$ $\therefore |z + i| = |\bar{z} + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |x + iy + 2|$

বা, $|x + iy + i| = |x - iy + 2|$

বা, $|x + i(y + 1)| = |(x + 2) - iy)|$

বা, $\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$

বা, $x^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2$

বা, $x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

বা, $2y + 1 = 4x + 4$ বা, $4x - 2y + 3 = 0$

যা একটি সরলরেখার সঞ্চার পথ। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $x + iy = 2e^{-i\theta}$

বা, $x + iy = 2(\cos\theta - i\sin\theta)$

বা, $x + iy = 2\cos\theta - 2i\sin\theta$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = 2\cos\theta$ এবং $y = - 2\sin\theta$

এখন, $x^2 + y^2 = (2\cos\theta)^2 + (- 2\sin\theta)^2$

$= 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$

$\therefore x^2 + y^2 = 4$ **(প্রমাণিত)**

গ দৃশ্যকল্প ২ হতে পাই, $F = y - 2x$

শর্তগুলি : $x + 2y \le 6$, $x + y \ge 4$, $x, y \ge 0$

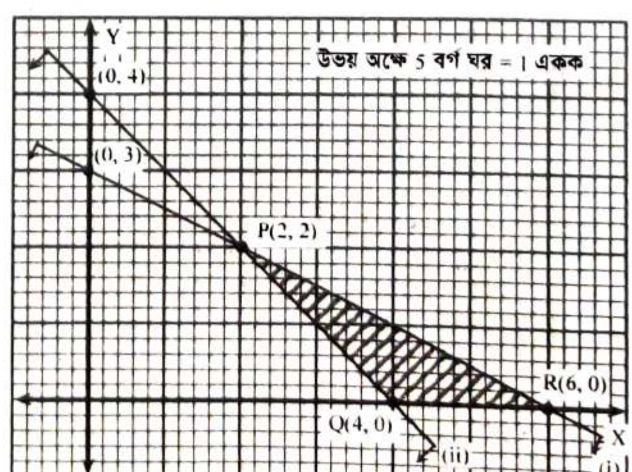
F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা চিহ্নিত করি।

আমরা পাই, $x + 2y = 6$ বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ ……… (i)

$x + y = 4$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii), $y = 0$ ……… (iv)



লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য। (ii) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

আবার (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $P(2, 2)$

(iv) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $Q(4, 0)$

(iv) ও (i) এর ছেদবিন্দু $R(6, 0)$

$\therefore$ নির্ণেয় কৌণিক বিন্দু $P(2, 2)$, $Q(4, 0)$ ও $R(6, 0)$

এখন $P(2, 2)$ বিন্দুতে $F = 2 - 2.2 = 2 - 4 = -2$

$Q(4, 0)$ বিন্দুতে $F = 0 - 2.4 = 0 - 8 = -8$

$R(6, 0)$ বিন্দুতে $F = 0 - 2.6 = 0 - 12 = -12$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান -2 **(Ans.)**

32. **ক** ধরি, $p = 15 + 8i$

$\therefore \sqrt{p} = \pm\sqrt{15 + 8i} = \pm\sqrt{16 + 8i - 1}$

$= \pm\sqrt{4^2 + 2.4.i + i^2} = \pm\sqrt{(4 + i)^2} = \pm(4 + i)$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(4 + i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |x - 3|$ এবং $f(x) < \frac{1}{7}$

$\therefore |x - 3| < \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7} < x - 3 < \frac{1}{7}$

$\Rightarrow -\frac{1}{7} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{7} + 3$ [3 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{-1 + 21}{7} < x < \frac{1 + 21}{7} \Rightarrow \frac{20}{7} < x < \frac{22}{7}$

$\Rightarrow \frac{400}{49} < x^2 < \frac{484}{49}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{400}{49} - 9 < x^2 - 9 < \frac{484}{49} - 9$ ['– 9' যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{400 - 441}{49} < x^2 - 9 < \frac{484 - 441}{49}$

$\Rightarrow \frac{-41}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49} \Rightarrow \frac{-43}{49} < \frac{-41}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49} < x^2 - 9 < \frac{43}{49}$ $\therefore |x^2 - 9| < \frac{43}{49}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = p + qx + rx^2$

$\therefore g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$

এবং $g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega$

এখন, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3$

$= (p + q\omega + r\omega^2)^3 + (p + q\omega^2 + r\omega)^3$

ধরি, $p + q\omega + r\omega^2 = x$ এবং $p + q\omega^2 + r\omega = y$

বামপক্ষ $= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{x^2 + (-1)xy + y^2\}$

$= (x + y)\{x^2 + (\omega^2 + \omega)xy + y^2\}$ $[\because \omega^2 + \omega + 1 = 0]$

$= (x + y)(x^2 + \omega^2xy + \omega xy + y^2)$

$= (x + y)(x^2 + \omega xy + \omega^2xy + y^2)$

$= (x + y)\left\{x(x + \omega y) + \omega^2y\left(x + \frac{y}{\omega^2}\right)\right\}$

$= (x + y)\{x(x + \omega y) + \omega^2y(x + \omega y)\}$

$\left[\because \omega^3 = 1 \therefore \omega = \frac{1}{\omega^2}\right]$

$= (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2y)$

$\therefore x + y = p + q\omega + r\omega^2 + p + q\omega^2 + r\omega$

$= 2p + q(\omega + \omega^2) + r(\omega^2 + \omega) = 2p - q - r$

$\therefore x + \omega y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega + q\omega^3 + r\omega^2$

$= p(1 + \omega) + q(\omega + 1) + 2r\omega^2$

$= p(-\omega^2) + q(-\omega^2) + 2r\omega^2 = \omega^2(2r - p - q)$

$\therefore x + \omega^2y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega^4 + r\omega^3$

$= p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega + r$

$= p(1 + \omega^2) + 2q\omega + r(1 + \omega^2)$

$= p(-\omega) + 2q\omega + r(-\omega) = \omega(2q - p - r)$

$\therefore (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2y)$

$= (2p - q - r)\omega^2(2r - p - q)\omega(2q - p - r)$

$= \omega^3(2p - q - r)(2r - p - q)(2q - p - r)$

$= \{2p - (q + r)\}\{2r - (p + q)\}\{2q - (p + r)\}$

$= \{2p - (-p)\}\{2r - (-r)\}\{2q - (-q)\}$ $[\because p + q + r = 0]$

$= 3p.3r.3q = 27pqr = 3^3 pqr$

$= a^xpqr$ $[\because a = x = 3]$ = ডানপক্ষ

$\therefore \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^xpqr$ **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-3.7.4 | পৃষ্ঠা-১১৪

পরীক্ষণ নং 3.7.4.1	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার যোগফল এবং যোগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	তারিখ: … …

সমস্যা: $z_1 = 12 + 8i$ এবং $z_2 = -6 + 7i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে অঙ্কন দ্বারা $z_1 + z_2$ নির্ণয় এবং $z_1 + z_2$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: O মূলবিন্দু, x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে অবাস্তব অক্ষ ধরে z_1 ও z_2 জটিল সংখ্যাদ্বয়কে আরগাঁ সমতলে স্থাপন করলে, মূলবিন্দুর সাথে স্থাপিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি হবে $z_1 + z_2$ এর মডুলাস এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে কর্ণটির উৎপন্ন কোণ হবে আর্গুমেন্ট। আবার $z = x + iy$ হলে $\text{Mod } z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং $\arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

উপকরণ: (i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

অঙ্কন: i. ছক কাগজ XOX' এবং YOY' কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।

ii. **স্কেল:** ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র দুই বর্গের বাহুকে এক একক নিয়ে z_1 ও z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি $A(12, 8)$ এবং $B(-6, 7)$ স্থাপন করি।

iii. O, A এবং O, B যোগ করে $AC \parallel OB$ এবং $BC \parallel OA$ অঙ্কন করি। এরা পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হলো তাহলে OACB একটি সামান্তরিক অঙ্কিত হলো এবং C বিন্দুটি হবে $z_1 + z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

$\therefore z = 12 + 8i - 6 + 7i = 6 + 15i$ জটিল সংখ্যাটিকে $C(6, 15)$ দ্বারা চিহ্নিত করি।

iv. C হতে x-অক্ষের উপর CD লম্ব টানি।

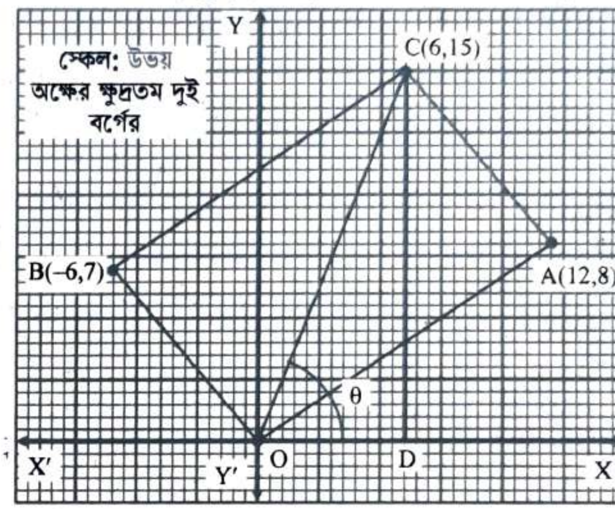
হিসাব (Calculation):

i. চিত্র হতে C এর ভুজ $OD = 6$ এবং কোটি $CD = 15$ নির্ণয় করি। [$\because$ $OD = 12$ ঘর এবং $CD = 30$ ঘর]

ii. স্কেল দ্বারা দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে $OC = |z_1 + z_2| = 16.16$ নির্ণয় করি। পেন্সিল কম্পাস দিয়ে OC এর দৈর্ঘ্য মেপে OX বরাবর বসিয়ে।

iii. চাঁদার সাহায্যে পরিমাপ করে পাই,

$\angle XOC = \arg(z_1 + z_2) = 68.18°$ ... ... (i)



ফল সংকলন:

z_1 এর প্রতিরূপী বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক	z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক	$z_1 + z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক	পরমান(মডুলাস) নির্ণয়		নতি(আর্গুমেন্ট) নির্ণয়	
			লেখচিত্র হতে $\lvert z_1 + z_2\rvert = OC$	সূত্র হতে $\lvert z_1 + z_2\rvert$	লেখচিত্র হতে	সূত্র হতে
(12, 8)	(–6, 7)	(6, 15)	16.16	$(12 + 8i) + (-6 + 7i) = 6 + 15i = \sqrt{6^2 + 15^2} = 16{\cdot}16$	$\arg(z_1 + z_2) = 68{\cdot}18°$	$\tan^{-1}\frac{15}{6} = 68{\cdot}20°$

ফলাফল : পরমমান 16·16 নতি 68·18°

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা : স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

পরীক্ষণ নং 3.7.4.2	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার বিয়োগফল এবং বিয়োগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: $z_1 = 15 + 14i$ এবং $z_2 = -5 + 4i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্র অঙ্কন দ্বারা $z_1 - z_2$ নির্ণয় এবং $z_1 - z_2$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: O মূলবিন্দু, x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে অবাস্তব অক্ষ ধরে z_1 ও $-z_2$ জটিল সংখ্যাদ্বয়কে আরগাঁ সমতলে স্থাপন করলে মূলবিন্দুর সাথে স্থাপিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি হবে $z_1 - z_2$ এর মডুলাস এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে কর্ণটির উৎপন্ন কোণ হবে আর্গুমেন্ট। আবার $z = x + iy$ হলে

$\text{Mod } z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

এবং $\arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

উপকরণ: (i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

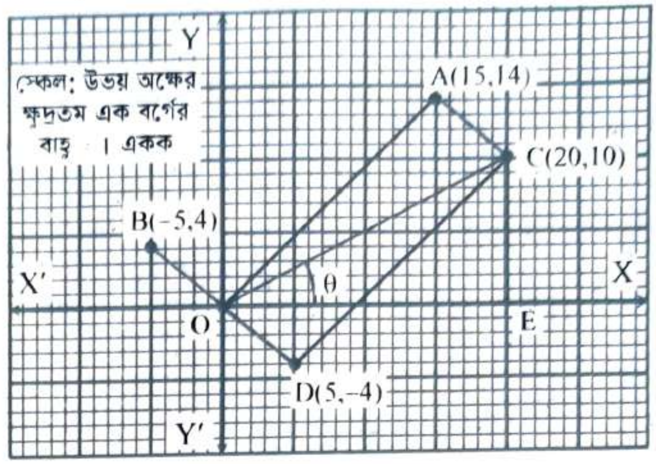
i. ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম এক বর্গের বাহুকে এক একক নিয়ে z_1, z_2 এবং $-z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু A(15, 14), B(–5, 4) এবং D(5, –4) স্থাপন করি।

ii. O, A এবং O, D যোগ করে OD ‖ AC এবং OA ‖ DC অঙ্কন করি। AC ও DC পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হলো, তাহলে ODCA একটি সামান্তরিক অঙ্কিত হলো এবং C বিন্দুটি হবে $z_1 - z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

$\therefore$ $z_1 - z_2 = (15 + 14i) - (-5 + 4i) = 20 + 10i$ জটিল সংখ্যাটিকে C(20, 10) দ্বারা চিহ্নিত করি।

iii. C হতে x-অক্ষের উপর CE লম্ব টানি।

iv. চিত্র হতে C এর ভুজ OE = 20 এবং কোটি CE = 10 নির্ণয় করি।



ফল সংকলন :

z_1 এর প্রতিরূপী বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক	z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক	$-z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু D এর স্থানাঙ্ক	$z_1 - z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক	পরমমান(মডুলাস) নির্ণয়			নতি(আর্গুমেন্ট) নির্ণয়
				লেখচিত্র হতে	সূত্র হতে $\lvert z_1 - z_2 \rvert$	লেখচিত্র হতে	সূত্র হতে arg $(z_1 - z_2)$
(15, 14)	(–5, 4)	(5, –4)	(20, 10)	22·25	$z_1 - z_2 = (15 + 14i) - (-5 + 4i) = 20 + 10i$ $\therefore$ Mod $(z_1 - z_2)$ $= \lvert z_1 - z_2 \rvert = \sqrt{20^2 + 10^2}$ $= \sqrt{500} = 22{\cdot}36$	26·55°	$\tan^{-1}\left(\frac{10}{20}\right) =$ 26·57°

ফলাফল : পরমমান 22·25 নতি 26·55°

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা : স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

পরীক্ষণ নং 3.7.4.3	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার গুণফল এবং গুণফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	**তারিখ: … …**

সমস্যা: $z_1 = 12 + 9i$ এবং $z_2 = -6 + 7i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে চিহ্নিত, z_1z_2 এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মডুলাস $(z_1z_2) = |z_1z_2| = |z_1|.\,|z_2|$

এবং $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

উপকরণ: (i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি: অঙ্কন:

i. ছক কাগজে XOX' এবং YOY' কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।

ii. স্কেল: ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র বর্গের দুই বাহুকে এক একক নিয়ে z_1 ও z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি P(12, 9) ও Q(–6, 7) স্থাপন করি।

iii. O, P এবং O, Q যোগ করি।

iv. x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে ক্ষুদ্র দশ ঘরের দৈর্ঘ্য = OA = একক (Unit of length) ধরে A, P যোগ করি।

v. OQ এর যে দিকে ΔOPA অবস্থিত তার বিপরীত দিকে ΔOQB আঁকি যা ΔOPA এর সদৃশকোণী হয়।

vi. B থেকে x-অক্ষের ওপর BC লম্ব টানি। তাহলে B বিন্দুটি হবে z_1z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু।

হিসাব (Calculation):

i. ΔOPA এবং ΔOQB সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{OB}{OQ} = \frac{OP}{OA}$ $\therefore OB = OP.OQ$ [$\because OA = 1$]

ii. মডুলাস $(z_1z_2) = |z_1z_2| = OB = OP.OQ = |z_1|.|z_2|$

[যেখানে $OP = |z_1|$ এবং $OQ = |z_2|$]

iii. $\arg z_1 = \theta_1 = \angle XOP$; $\arg z_2 = \theta_2 = \angle XOQ$
এবং $\arg(z_1z_2) = \angle XOB = \theta$ (ধরি)
অতএব, $\arg(z_1z_2) = \angle XOB$
$= \angle XOQ + \angle QOB = \angle XOQ + \angle XOP$
$[\because \angle QOB = \angle XOP]$
$= \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

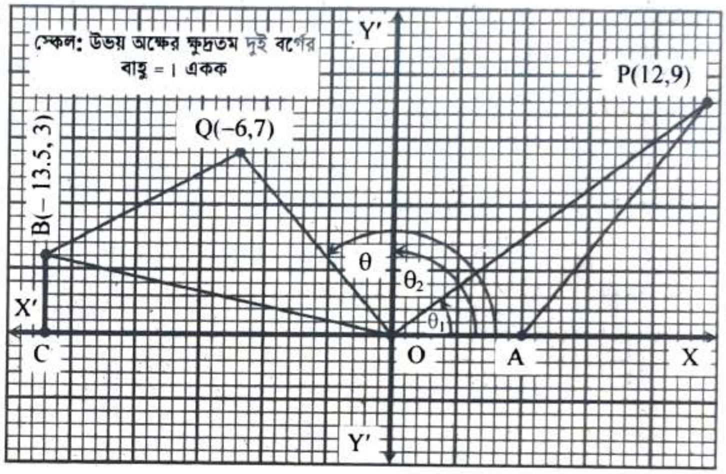
iv. OQ এর যে দিকে ΔOPA অবস্থিত তার বিপরীত দিকে ΔOPA এর সদৃশ করে ΔOQB আঁকি যেন $\angle POA = \angle QOB$ এবং $\angle OAP = \angle OQB$ হয় তা হলে B বিন্দু হবে $z_1.z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

$z_1.z_2 = (12 + 9i)(-6 + 7i) = -135 + 30i$
জটিল সংখ্যাটিকে $B\left(\frac{-135}{10}, \frac{30}{10}\right)$ বা, $B(-13.5, 3)$ দ্বারা চিহ্নিত করি। তাহলে OB রেখাংশই জটিল সংখ্যাদ্বয়ের গুণফলের মডুলাস সূচিত করে।

v. এখন স্কেল দ্বারা দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে
$OB = |z_1z_2| = 138.33$

vi. চাঁদার সাহায্যে পরিমাপ করে পাই,
$\theta = \angle AOB = \arg z_1z_2 = 167.5°$

বীজগাণিতিক সূত্র হতে:
$z_1z_2 = (12 + 9i)(-6 + 7i)$
$= -135 + 30i$
Mod $|z_1z_2| = \sqrt{(-135)^2 + (30)^2} = 138.29$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{-135}\right) = -12.5°$
যেহেতু স্থানাঙ্ক $(-135, 30)$
যা ২য় চর্তুভাগে অবস্থিত
$\therefore \theta = 180° - 12.5° = 167.5°$



ফল সংকলন ঃ

z_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	z_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	z_1z_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	মডুলাস নির্ণয়		আর্গুমেন্ট নির্ণয়	
P(12, 9)	Q(−6, 7)	B(−135,30)	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র হতে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান
			$\|z_1z_2\| = 138.29$	138.33	$\theta = 167.5°$	167.5°

ফলাফল : পরমমান 138·33 নতি 167·5°

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা : স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

পরীক্ষণ নং 3.7.4.4	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার ভাগফল এবং ভাগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: $z_1 = 12 + 8i$ এবং $z_2 = 8 + 16i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে চিহ্নিত এবং $\frac{z_1}{z_2}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ দুইটি জটিল সংখ্যা।
$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
এবং $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\}$

অতএব, ভাগফলের মডুলাস $\frac{r_2}{r_1}$ এবং আর্গুমেন্ট $(\theta_2 - \theta_1)$

অথবা, Mod $\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$

এবং $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

উপকরণ: (i) সরু শিষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

অঙ্কন:

i. XOX′ এবং YOY′ কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।

ii. স্কেল: ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র এক বর্গের বাহুকে এক একক নিয়ে z_1 ও z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু $P_1(12, 8)$ ও $P_2(8, 16)$ স্থাপন করি।

iii. OX হতে দশ ঘর সমান OA কেটে ΔOPA গঠন করি।

iv. ΔOPA ও ΔOP_1P_2 ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। তাহলে P বিন্দুটি জটিল সংখ্যা $\frac{z_1}{z_2}$ নির্দেশ করে।

হিসাব (Calculation):

v. ΔOPA ও ΔOP_1P_2 হতে, $\frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_2}{OA} = OP_2 [\because OA=1]$

$\therefore \frac{OP_1}{OP_2} = OP \quad [\because \frac{r_1}{r_2} = r]$

লেখ থেকে দেখা যাচ্ছে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(0.7 \times 10, -0.4 \times 10) = (7, -4)$

vi. স্কেল দ্বারা পরিমাপ করে পাই, $OP = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 8.06$

vii. চাঁদার সাহায্যে পরিমাপ করে পাই,

$\theta = \angle AOP = \arg\frac{z_1}{z_2} = -29°45'$

ফল সংকলন:

P_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P বিন্দুর স্থানাঙ্ক	z_1 এর মডুলাস	z_2 এর মডুলাস	$z = \frac{z_1}{z_2}$ এর মডুলাস	z_1 এর আর্গুমেন্ট $\angle P_1OA$	z_2 এর আর্গুমেন্ট $\angle P_2OA$	$\frac{z_1}{z_2}$ এর আর্গুমেন্ট $\angle POA$ (প্রকৃত মাপে)
(12, 8)	(8, 16)	(7, –4)	14.42	17.9	$\frac{14.42}{17.9} = 8.06$	33°41′	63°27′	29°45′

বীজগাণিতিক সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

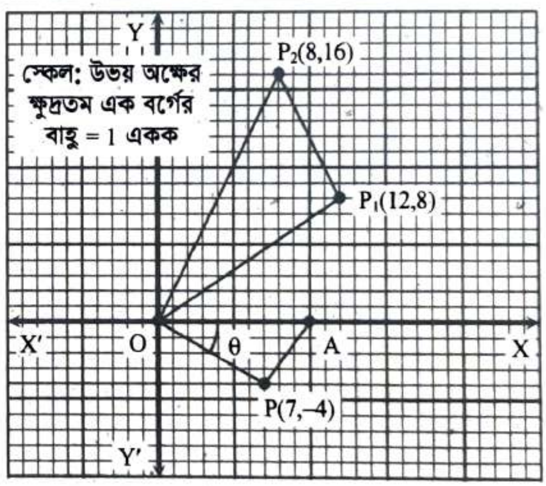
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = 8.06$

এবং $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{7}\right) = -29°44'$

ফলাফল : পরমমান 8·06 নতি –29°45′

মন্তব্য : লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা : স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।



▶ মৌখিক প্রশ্নের উত্তর

1. a এবং b যদি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে a + ib এই আকারের সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বা জটিল রাশি বলে। যেমন: $z = 3 + 6i$, যেখানে $i = \sqrt{-1}$
2. $|x + iy|$ এর মডুলাস $= \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
3. জটিল সংখ্যাটি সম্পূর্ণরূপে বাস্তব সংখ্যায় পরিণত হয়।
4. x + iy কোনো জটিল সংখ্যা হলে x – iy কে প্রদত্ত জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী সংখ্যা বলে।
5. হ্যাঁ, কেবলমাত্র, দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বাদে।
6. $i^{4n+1} = i$ **7.** $1, \omega, \omega^2$ অর্থাৎ $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
8. এককের ঘনমূল তিনটির যোগফল শূন্য (0) এবং গুণফল 1।