

বৃত্ত (Circle)

4. বৃত্তের সংজ্ঞা :

মনে করি, R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $R \times R$ বা, $R^2 = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$ ক্রমজোড়ের (Ordered pair) সেটটি কার্ভেসীয় সমতলের সকল বিন্দু নির্দেশ করে। ঐ সমতলে $P(x, y)$ একটি চলমান বিন্দু এবং $C(a, b)$ একটি স্থির বিন্দু হলে, যে কোন ধ্রুবক r এর জন্য যদি $CP = r$ হয়, তবে চলমান বিন্দুর সেট,

$\{(x, y) \in R \times R : CP = r\}$ দ্বারা সূচ্য সঞ্চারণপথকে বৃত্ত বলে। বৃত্তের সমীকরণ $CP = r$, যেখানে r কে বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং C কে কেন্দ্র বলে।

মন্তব্য : $R \times R$ কে সংক্ষেপে R^2 লেখা হয়।

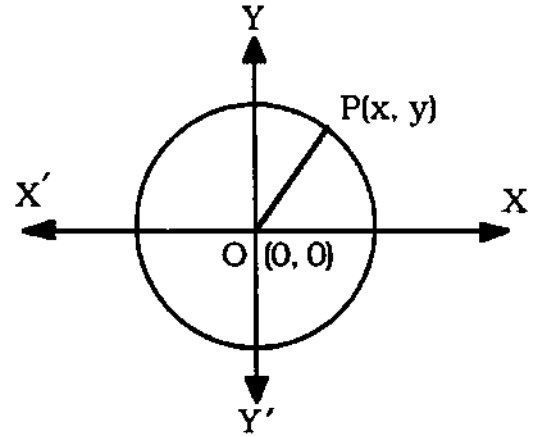
4.1. মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু $O(0, 0)$ ও পরিধির উপর $P(x, y)$ যেকোনো একটি বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ $OP = r$

তাহলে, $OP^2 = r^2$

বা, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$

বা, $x^2 + y^2 = r^2$ যা মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।



4.2. কেন্দ্র মূলবিন্দুবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ অঙ্কন ও অক্ষদ্বয়ের সাথে ছেদ বিন্দু নির্ধারণ

মূলবিন্দুকে কেন্দ্র এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। [অনু : 4.1 এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

এখন $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের সমীকরণে পর্যায়ক্রমে $x = 0, y = 0$ বসিয়ে পাই,

$y^2 = r^2$ বা, $y = \pm r$

আবার যখন $y = 0$ তখন $x^2 = r^2$ বা, $x = \pm r$

সুতরাং বৃত্তটি x -অক্ষকে $(r, 0), (-r, 0)$, এবং y -অক্ষকে $(0, r), (0, -r)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

4.3. নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের

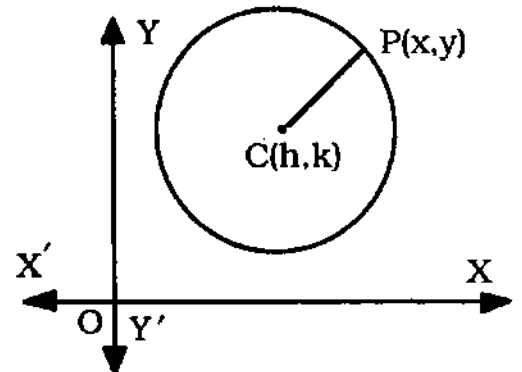
সমীকরণ নির্ণয়

মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) , ব্যাসার্ধ $= r$ এবং পরিধির উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু।

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই $CP = r$ বা, $CP^2 = r^2$

বা, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \dots (i)$

এ সম্পর্কটি সঞ্চারণপথের উপর P এর সকল অবস্থানের জন্য সত্য। সুতরাং সমীকরণ (i) বৃত্তের সমীকরণ।



4.3.1. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করা

অনুচ্ছেদ 4.3 থেকে আমরা জানি কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ বা, } x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

এখন $h = -g$, $k = -f$ এবং $h^2 + k^2 - r^2 = c$ ধরে আমরা পাই,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \text{ যা বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ।}$$

অনুসিদ্ধান্ত : $h = -g$, $k = -f$. অতএব বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) বা, $(-g, -f)$ এবং

$$h^2 + k^2 - r^2 = c$$

$$\text{বা, } g^2 + f^2 - c = r^2$$

অতএব ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

বৃত্তের সমীকরণের বৈশিষ্ট্য : বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

লক্ষ করি : (i) সমীকরণটি চলক x ও y সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণ,

(ii) xy সম্বলিত কোন পদ নেই এবং (iii) x^2 ও y^2 এর সহগ পরস্পর সমান।

অতএব, x ও y সম্বলিত কোন দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 ও y^2 এর সহগ পরস্পর সমান হলে এবং xy সম্বলিত পদ না থাকলে তা বৃত্তের সমীকরণ সূচিত করবে যদি $(g^2 + f^2 - c) \geq 0$

4.3.2. প্রমাণ করতে হবে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে এবং এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে

প্রদত্ত সমীকরণটিকে এভাবে লেখা যায় :

$$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c$$

$$\Rightarrow (x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

$\Rightarrow \{x - (-g)\}^2 + \{y - (-f)\}^2 = (\sqrt{g^2 + f^2 - c})^2$, যা কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ এর সমতুল্য, যেখানে } h = -g, k = -f \text{ এবং } r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}.$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি বৃত্ত সূচিত করে যার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

দ্রষ্টব্য : (i) বৃত্তের ব্যাসার্ধ সর্বদা ধনাত্মক হবে। সুতরাং $g^2 + f^2 - c > 0$ হলে, সমীকরণটি একটি বাস্তব বৃত্ত সূচিত করবে।

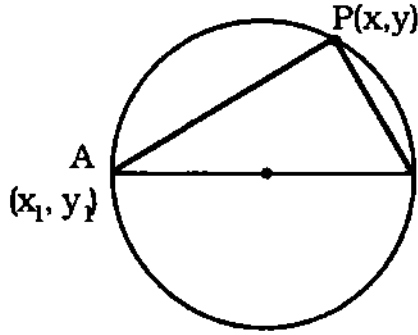
(ii) যদি $g^2 + f^2 - c = 0$ হয়, তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য হবে এবং এক্ষেত্রে বৃত্তটি $(-g, -f)$ বিন্দুতে পরিণত হয়। এরূপ বৃত্তকে বিন্দু বৃত্ত (Point Circle) বলে।

(iii) যখন $g^2 + f^2 - c < 0$, তখন ব্যাসার্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হবে এবং এরূপ ক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণটি বাস্তবে কোন বৃত্ত সূচিত করে না।

সুতরাং, বাস্তব বৃত্তের জন্য শর্ত হল $(g^2 + f^2 - c) \geq 0$.

4.3.3. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

মনে করি, বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত দুইটি $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ এবং পরিধির উপর $P(x, y)$ যে কোন একটি চলমান



বিন্দু। AP এবং BP এর ঢাল যথাক্রমে $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ ও $\frac{y-y_2}{x-x_2}$

যেহেতু অর্ধবৃত্তস্থ $\angle APB = 90^\circ$, সুতরাং $AP \perp BP$.

অতএব, $\frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$

বা, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

$\therefore (y-y_1)(y-y_2) + (x-x_1)(x-x_2) = 0$, যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

4.3.4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয়

বৃত্তটি x -অক্ষকে ছেদ করলে ছেদ বিন্দুর কোটি $y = 0$ হবে।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে আমরা পাই

$x^2 + 2gx + c = 0$, যা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ধরি মূলদ্বয় x_1, x_2 ($x_1 > x_2$)

অতএব $x_1 + x_2 = -2g$ এবং $x_1 x_2 = c$

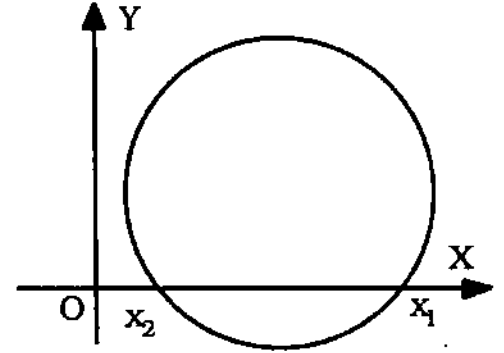
সুতরাং বৃত্তটি দ্বারা x -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ

$$\begin{aligned} &= x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{4g^2 - 4c} = 2\sqrt{g^2 - c} \end{aligned}$$

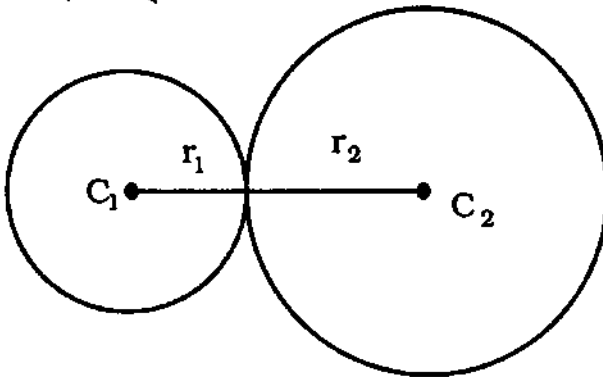
তদুপ y -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c}$.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহলে x -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $2\sqrt{g^2 - c} = 0$,

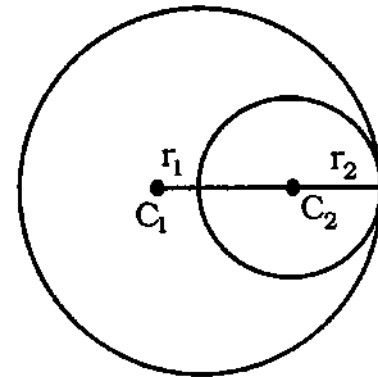
অতএব, $g^2 = c$. তদুপ y -অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2 = c$.



4.3.5. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করার শর্ত



বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে



অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে

মনে করি, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র C_1 ও C_2 এবং ব্যাসার্ধ দুইটি যথাক্রমে r_1 ও r_2 .

অতএব কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= C_1 C_2$.

(a) দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে $C_1 C_2 = r_1 + r_2$, অর্থাৎ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = এদের ব্যাসার্ধের সমষ্টি।

(b) দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে, $C_1 C_2 = r_1 - r_2$, ($r_1 > r_2$)

অর্থাৎ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = এদের ব্যাসার্ধের বিয়োগফল।

(c) দুইটি বৃত্ত স্পর্শ করলে (বহিঃস্থ বা অন্তঃস্থভাবে এর কোনটাই উল্লেখ করা না হলে)

$$C_1 C_2 = r_1 \pm r_2; (r_1 > r_2)$$

4.4. পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে, আমরা জানি, $x = r \cos \theta$ এবং $y = r \sin \theta$

বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ c হলে, বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2 + y^2 = c^2$ । এ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2 + y^2 = c^2$ (i)

(i) নং এ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ বসিয়ে পাই,

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = c^2$$

বা, $r^2 = c^2 \therefore r = c$, যা বৃত্তটির পোলার সমীকরণ।

উদাহরণ 1. $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণে $x = r \cos \theta$ এবং $y = r \sin \theta$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 10 (r \cos \theta) = 0$$

বা, $r^2 - 10 r \cos \theta = 0$ বা, $r = 10 \cos \theta$, যা বৃত্তটির পোলার সমীকরণ।

বৃত্ত সংক্রান্ত সূত্র :

- কেন্দ্র $(0,0)$ এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = r^2$.
- কেন্দ্র (h,k) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
- (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অর্ধকৃত বৃত্তের সমীকরণ, $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$
- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

(a) এ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2} - c$

(b) এ বৃত্তটি দ্বারা x -অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$ এবং y -অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

(c) এ বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2 = c$ এবং y -অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2 = c$ হবে।

সমস্যা ও সমাধান :

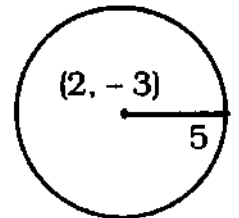
উদাহরণ 1. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(2, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ 5.

সমাধান : আমরা জানি, কেন্দ্র (h, k) এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

অতএব নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = (5)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$



উদাহরণ 2. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : (১ম পদ্ধতি) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{15}{2} = 0$$

এ সমীকরণটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$2g = -1, 2f = 3 \text{ এবং } c = -\frac{15}{2} \therefore g = -\frac{1}{2}, f = \frac{3}{2}.$$

$$\text{অতএব বৃত্তের কেন্দ্র } (-g, -f), \text{ অর্থাৎ } \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = R\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{2}\right) = \sqrt{10}.$$

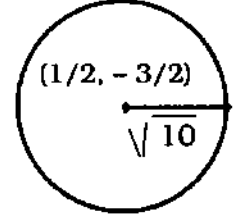
২য় পদ্ধতি : প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{15}{2} = 0 \text{ [2 দ্বারা ভাগ]}$$

$$\text{বা, } \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 2y \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{10})^2$$

সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{10}$.



উদাহরণ 3. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, -8)$ বিন্দুতে এবং যা y -অক্ষকে স্পর্শ করে। [চ. '০২]

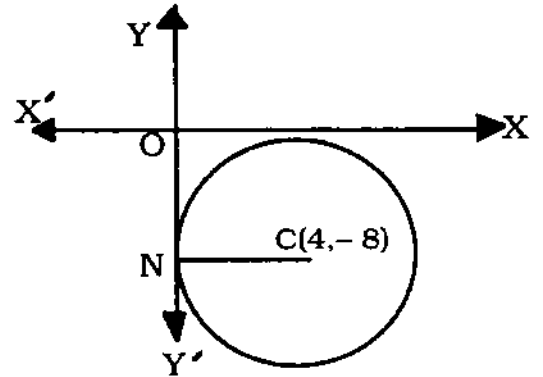
সমাধান : মনে করি, বৃত্তটি y -অক্ষকে N বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্র $C(4, -8)$.

অতএব কেন্দ্রের ভূজ CN হল বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

$$\therefore \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ } CN = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ } (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 4^2$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0.$$



উদাহরণ 4. $(3, 0)$ এবং $(-4, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ একটি বৃত্তের কেন্দ্র y -অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০৫]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র y -অক্ষের উপর অবস্থান করে বলে $g = 0$

$$\therefore \text{আমরা পাই } x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$$

$$\text{বৃত্তটি } (3, 0) \text{ এবং } (-4, 1) \text{ বিন্দু দিয়ে যায় } \therefore 9 + c = 0 \dots\dots (i)$$

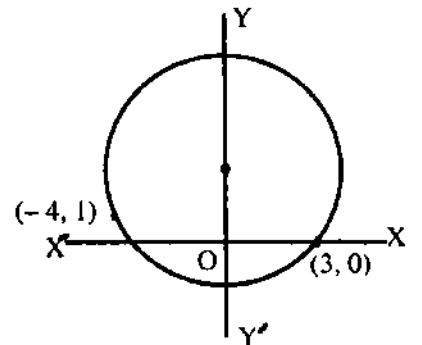
$$\text{এবং } 16 + 1 + 2f + c = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ থেকে } c = -9$$

$$(ii) \text{ এ } c \text{ এর মান বসিয়ে } 17 + 2f - 9 = 0 \text{ বা, } 2f = -8$$

$$\text{বা, } f = -4.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমীকরণ, } x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0.$$



উদাহরণ 5. একটি বৃত্ত $(-6, 5)$, $(-3, -4)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (i)$

(i) বৃত্তটি $(-6, 5)$, $(-3, -4)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে, সুতরাং আমরা পাই

$$61 - 12g + 10f + c = 0 \dots (ii)$$

$$25 - 6g - 8f + c = 0 \dots (iii)$$

$$\text{এবং } 5 + 4g + 2f + c = 0 \dots (iv)$$

$$(ii) - (iii) \Rightarrow 36 - 6g + 18f = 0 \Rightarrow 6 - g + 3f = 0 \dots (v)$$

$$(iii) - (iv) \Rightarrow 20 - 10g - 10f = 0 \Rightarrow 2 - g - f = 0 \dots (vi)$$

$$(v) - (vi) \Rightarrow 4 + 4f = 0 \therefore f = -1$$

$$(vi) \text{ থেকে } g = 2 - f = 2 + 1 = 3 \quad [f \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{এবং } (iv) \text{ থেকে } 5 + 4.3 + 2(-1) + c = 0 \quad [g \text{ ও } f \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\Rightarrow 15 + c = 0, \therefore c = -15 \quad (i) \text{ এ } g = 3, f = -1 \text{ এবং } c = -15 \text{ বসিয়ে পাই}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0, \text{ যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।}$$

২য় অংশ : বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ অর্থাৎ $(-3, 1)$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9 + 1 + 15} = \sqrt{25} = 5.$$

উদাহরণ 6. $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। বৃত্তটির সমীকরণ এবং x -অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। [য. '১২]

সমাধান : $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অর্ধকৃত বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - 0)(x - 2) + (y + 1)(y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

২য় অংশ : বৃত্তটি x -অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর

$$\text{কোটি } y = 0 \text{ বসিয়ে পাই, } x^2 - 2x - 3 = 0$$

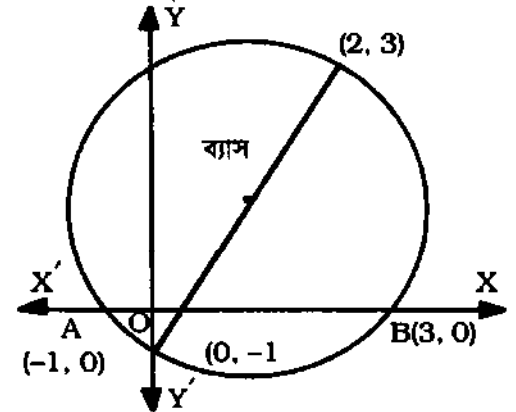
$$\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0, \therefore x = -1 \text{ অথবা } 3$$

অর্থাৎ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(-1, 0)$ ও $(3, 0)$.

মনে করি, ছেদবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A ও B.

অতএব x -অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ

$$= AB = \sqrt{(3 + 1)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4.$$



উদাহরণ 7. $2x - y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. রা. '১০; ব. '১২; রা. '১৩]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (i)$

এ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, যা প্রদত্ত রেখা $2x - y = 3$ এর উপর অবস্থিত

$$\text{অতএব } -2g + f = 3 \dots (ii)$$

আবার বৃত্তটি $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়, সুতরাং আমরা পাই

$$13 + 6g - 4f + c = 0 \dots (iii) \quad \text{এবং } 4 - 4g + c = 0 \dots$$

$$(iv)$$

$$(iii) - (iv) \Rightarrow 9 + 10g - 4f = 0 \quad \text{বা, } 10g - 4f = -9 \dots\dots (v)$$

$$(ii) \text{ কে } 4 \text{ দ্বারা গুণ করে } (v) \text{ এর সাথে যোগ করে পাই, } 2g = 3 \quad \therefore g = \frac{3}{2}$$

$$(ii) \text{ থেকে } f = 3 + 3 = 6 \text{ [} g \text{ এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{এবং } (iv) \text{ থেকে } c = 4 \cdot \frac{3}{2} - 4 = 2$$

$$\text{অতএব নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ, } x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0.$$

উদাহরণ ৪. এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যার দ্বারা y -অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ ৬ একক। দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে।

[কু. '১০; য. '১১; রা. কু. সি. '১২; দি. '১৩;]

$$\text{সমাধান : মনে করি বৃত্তের সমীকরণ } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots (i)$$

বৃত্তটি x -অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$$\text{সুতরাং আমরা পাই, } g^2 = c \dots\dots (ii)$$

$$\text{এবং } 16 + 8g + c = 0 \text{ [} x = 4 \text{ এবং } y = 0 \text{ বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow 16 + 8g + g^2 = 0 \text{ [(ii) থেকে]}$$

$$\Rightarrow (g + 4)^2 = 0, \quad \therefore g = -4$$

$$\text{এবং } c = g^2 = (-4)^2 = 16$$

যেহেতু y -অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ = ৬ (একক)

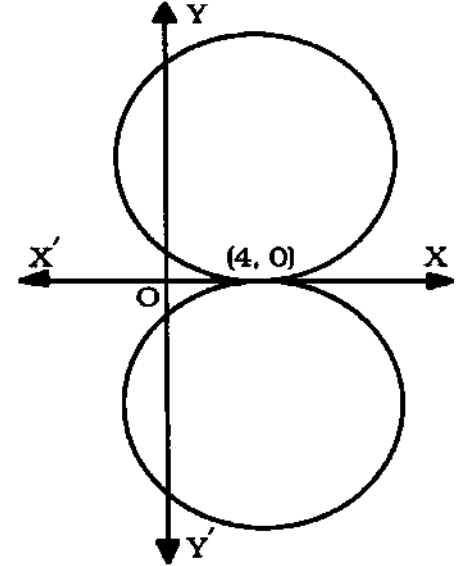
$$\therefore 2\sqrt{f^2 - c} = 6 \quad \Rightarrow \sqrt{f^2 - c} = 3$$

$$\text{বা, } f^2 - c = 9 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow f^2 - 16 = 9 \quad \text{বা, } f^2 = 25 \quad \therefore f = \pm 5$$

f এর দুইটি মান x -অক্ষের দুই পার্শ্বে দুইটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

$$\text{অতএব বৃত্ত দুইটির সমীকরণ, } x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0.$$



প্রশ্নমালা 4.1

1. নিম্নলিখিত বৃত্তের সমীকরণগুলি পোলার স্থানাঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

$$(i) x^2 + y^2 = 25$$

$$\text{উ : } r = 5$$

$$(ii) x^2 + y^2 - ax = 0$$

$$\text{উ : } r = a \cos \theta$$

$$(iii) x^2 + y^2 - by = 0$$

$$\text{উ : } r = b \sin \theta$$

2. (a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(3, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ 6. উ : $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$

(b) নিচের বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

$$(i) x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$$

$$\text{উ : } (4, -3); 4$$

$$(ii) 4(x^2 + y^2) + 24x - 4y - 27 = 0$$

$$\text{উ : } \left(-3, \frac{1}{2}\right); 4$$

(c) k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

$$\text{উ : } 2$$

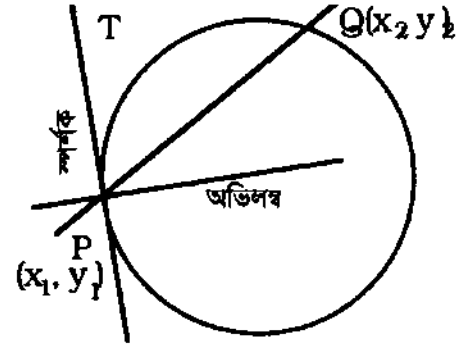
3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত সূচিত করার শর্তগুলি লেখ এবং এ থেকে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$ সমীকরণটি কোন বাস্তব বৃত্ত সূচিত করে না।
4. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 8) বিন্দু দিয়ে যায়।
[ক. '১২; সি. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$; $x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$.
5. (i) একটি বৃত্ত (2, 1), (-6, 5) ও (-3, -4) বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, (-3, 1), 5.
(ii) একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4, -5) এবং তা মূলবিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং বৃত্তটি অক্ষদ্বয় হতে কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় কর। [সি. '০৬] উ : $x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0$; 8, 10
6. (i) মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, (1, 5) ও (7, -3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অর্ধকৃত বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)(x-7) + (y-5)(y+3) = 0$ । বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উ : (4, 1), 5.
(ii) প্রমাণ কর যে, (-2, 3) ও (3, -4) বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অর্ধকৃত বৃত্তের সমীকরণ $(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$
[ব. '০৩]
7. (4, 5) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়, ঐ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১১; চা. রা. চ. '১২; কু. '১০, '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$
8. (i) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (2, -1) বিন্দুগামী। [দি. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0$.
(ii) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, -1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক।
উ : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$.
9. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (7, 2) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।
উ : $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$;
10. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (6, 0) এবং তা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '১২; য. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0$
11. মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১১] উ : $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$
12. (i) মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y -অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক অংশ ছেদ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. সি. '১২; চা. রা. '১১; য. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$
(ii) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y -অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে a ও b অংশ কর্তন করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১১] উ : $x^2 + y^2 - ax - by = 0$
(iii) b বাহুবিশিষ্ট $OABC$ একটি বর্গ। OA এবং OC কে অক্ষ ধরে প্রমাণ কর যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x + y)$ [রা. '১০; ব. '১৩]
13. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে -4 একক দূরত্বে y -অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x -অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডন করে। [চ. '১৩] উ : $x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$

14. (i) একটি বৃত্ত x -অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[দি. '১২; ঢা. '১৩] উ : $2(x^2 + y^2) - 8x - 5y + 8 = 0$
- (ii) একটি বৃত্ত x - অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(1, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $3(x^2 + y^2) = 10y$.
15. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x -অক্ষকে স্পর্শ করে; এর সমীকরণসহ y -অক্ষ হতে তা কি পরিমাণ অংশ - ছেদ করে তাও নির্ণয় কর।
[দি. '১১] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$; $2\sqrt{3}$
16. যে বৃত্তের কেন্দ্র $(-5, 7)$ এবং x -অক্ষকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$
17. (i) y - অক্ষকে মূলবিন্দুতে এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
- (ii) y - অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(3, 0)$ ও $(7, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায় এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[রা. '০৬] উ : $x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$,
18. y - অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. '০৫; দি. '১১] উ : $3(x^2 + y^2) - 25x = 0$,
19. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y -অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$, $(-2, \sqrt{3})$; 2
20. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. '১১; সি. '১৩] উত্তর : $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$
21. (i) $(4, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।
[সি. '১০; রা. '১১] উ : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
- (ii) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(3, 4)$ এবং যা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।
[চ. '১০] উ : $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$
22. $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x -অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[য. '১০] উ : $x^2 + y^2 \pm 8x = 0$
23. $x = 0$, $y = 0$ এবং $x = a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু. '১১] উ : $x^2 + y^2 - ax \pm ay + a^2/4 = 0$
24. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা $y = 4$, $y = 10$ এবং $x = 0$ রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করে।
উ : $x^2 + y^2 \pm 6x - 14y + 49 = 0$
25. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং তা $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[চ. '০৭] উ : $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0$
26. (i) $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণও নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$; $4\sqrt{13}$
- (ii) $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা x -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণও নির্ণয় কর।
[য. '১২] উ : 4 .

27. একটি বৃত্ত x -অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৮] উ : $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$
28. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x - 2y + 7 = 0$
29. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র y -অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা মূলবিন্দু ও (p, q) বিন্দু দিয়ে যায়। [ঢা. '১২; চ. রা. '১৩] উ : $q(x^2 + y^2) - (p^2 + q^2)y = 0$
30. একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায় এবং এর কেন্দ্র (i) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (ii) x -অক্ষের উপর অবস্থিত। (iii) y -অক্ষের উপর অবস্থিত। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০২; দি. '১০]
- উত্তর : (i) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$; (ii) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$; (iii) $x^2 + y^2 + 18y - 124 = 0$
31. প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। উ : $(-17/5, 11/5)$
32. $(1, 1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে গমনকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 1. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৩] উ : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0, x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.
33. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত। [কু. '০৮] উ : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
34. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '০৫] উ : $5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$
35. $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : $x + 2y + 5 = 0; 4$
36. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(0, 0)$ এবং $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং বৃত্তের কেন্দ্র x - অক্ষের উপর অবস্থিত। উ : $3(x^2 + y^2) = 25x$.
37. (i) এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু হতে 2 একক দূরত্বে x - অক্ষকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য. '০৫; ব. '১১] উ : $x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0$
- (ii) দেখাও যে, $A(1, 1)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. '১০; দি. '১২; ব. '১৩] উ : $(-5, -7)$
38. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x ও y - অক্ষরেখা হতে যথাক্রমে 5 এবং 2 একক দৈর্ঘ্যের সমান অংশ কর্তন করে এবং যার কেন্দ্র $2x - y = 6$ রেখার উপর অবস্থিত। উত্তর : $x^2 + y^2 - 5x + 2y = 0, x^2 + y^2 - 11x - 10y + 24 = 0$.
39. সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যখন বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$. উ : $x - 2y + 7 = 0$
40. একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১০; কু. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0$.
41. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০১] উ : $4x + y - 13 = 0$
42. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 3)$ এবং তা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০২] উ : $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$

4.5. বৃত্তের স্পর্শক (Tangent) এবং অভিলম্বের (Normal) সমীকরণ

মনে করি, একটি সরলরেখা কোন বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। এখন Q বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির উপর দিয়ে ঘুরে P এর সন্নিহিতবর্তী হলে অর্থাৎ P এর উপর Q সমাপতিত হলে, ছেদক রেখাটিকে P বিন্দুতে প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক বলা হয়। এখানে PT হল স্পর্শক এবং P কে স্পর্শবিন্দু বলা হয়।



কোন বৃত্তের স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বরেখাকে ঐ বিন্দুতে বৃত্তের অভিলম্ব (Normal) বলে।

4.5.1. কোন শর্তে $y = mx + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবে?

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ এবং } y = mx + c$$

$$\begin{aligned} \text{সমীকরণ দুইটি সমাধান করে } x^2 + (mx + c)^2 &= r^2 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0 \\ &\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0 \dots\dots\dots (i) \end{aligned}$$

মনে করি, সরলরেখাটি বৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। যদি রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহলে P ও Q বিন্দু দুইটি সমাপতিত হবে এবং $x_1 = x_2$ হবে অর্থাৎ (1) সমীকরণের মূল দুইটি সমান হবে। আবার মূল দুইটি সমান হবার শর্ত $b^2 - 4ac = 0$ অর্থাৎ $4m^2c^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - r^2) = 0$

$$\Rightarrow m^2c^2 - c^2 - m^2c^2 + m^2r^2 + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = r^2(1 + m^2) \therefore c = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$\text{যা নির্ণেয় শর্ত এবং স্পর্শকের সমীকরণ } y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

যথা : $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের স্পর্শক দুইটি x -অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করলে তার সমীকরণ

$$y = \sqrt{3}x \pm 5\sqrt{1 + 3}, \text{ যেহেতু } m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } y = \sqrt{3}x \pm 10.$$

উদাহরণ : $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক দুইটি লম্বভাবে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}, \text{ যখন } m = \text{স্পর্শকের ঢাল}$$

$$\Rightarrow (y - mx)^2 = r^2(1 + m^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 - r^2)m^2 - 2xym + (y^2 - r^2) = 0$$

যা m এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ধরি, মূল দুইটি m_1, m_2 . সুতরাং স্পর্শক দুইটি লম্বভাবে ছেদ করলে

$$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{y^2 - r^2}{x^2 - r^2} = -1, \text{ যেহেতু } \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\Rightarrow y^2 - r^2 = -x^2 + r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2r^2, \text{ যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।}$$

4.5.2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় মনে করি, বৃত্তের পরিধির উপর দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$.

অতএব $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \dots \dots (i)$

$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \dots \dots (ii)$

$(i) - (ii) \Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) + (-y_2^2) + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0$

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2g) = -(y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + 2f)$

$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f} = m$ (ধরি), যা PQ ছেদকের ঢাল।

অতএব PQ ছেদকের সমীকরণটি এভাবে লেখা যায় :

$y - y_1 = m(x - x_1)$, বা $y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1)$

বা, $(x - x_1)(x_1 + x_2 + 2g) + (y - y_1)(y_1 + y_2 + 2f) = 0 \dots (iii)$

এখন যদি Q বিন্দুটি বৃত্তের পরিধির উপর দিয়ে ক্রমশঃ অগ্রসর হয়ে P বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়, তবে PQ ছেদক $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে PT স্পর্শক হবে এবং সীমান্ত অবস্থায় $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$.

এখন (iii) এ $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ বসিয়ে আমরা পাই

$(x - x_1)(2x_1 + 2g) + (y - y_1)(2y_1 + 2f) = 0$

বা, $xx_1 + gx - x_1^2 - gx_1 + yy_1 - y_1^2 - fy_1 + fy = 0$

বা, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1$

বা, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) = -c$ [(i) থেকে]

$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$.

অনু : $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $xx_1 + yy_1 = r^2$

উদাহরণ : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$ বৃত্তের উপরস্থ $(2, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রথম পদ্ধতি (ঢালের সাহায্যে) : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C(3, -2)$

ধরি, স্পর্শ বিন্দু $N(2, 1)$ এবং স্পর্শকটি AB

$\therefore CN$ এর ঢাল $= \frac{-2 - 1}{3 - 2} = -3$

$CN \perp AB$ সুতরাং AB স্পর্শকের ঢাল $= \frac{1}{3}$ [$\because m_1 \times m_2 = -1$]

\therefore নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$

দ্বিতীয় পদ্ধতি (সূত্রের সাহায্যে) : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

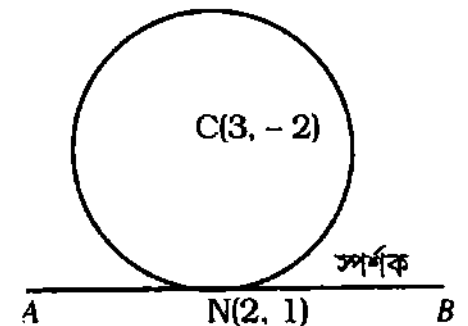
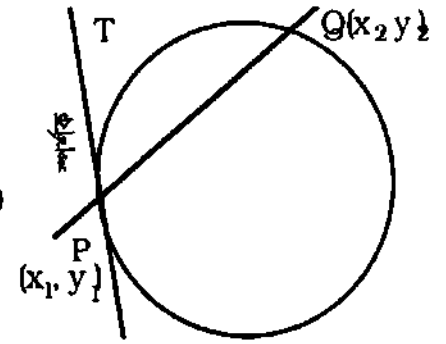
এখানে, $g = -3, f = 2, c = 3$

$(x_1, y_1) = (2, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ [সূত্রের সাহায্যে]

$x.2 + y.1 - 3(x + 2) + 2(y + 1) + 3 = 0 \Rightarrow 2x + y - 3x - 6 + 2y + 2 + 3 = 0$

$\Rightarrow x - 3y + 1 = 0$



4.6. বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

মনে করি, $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1)

(x_1, y_1) বিন্দু থেকে অঙ্কিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

বা, $mx - y + y_1 - mx_1 = 0$ (i)

এ রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে রেখার দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে।

$$\text{অর্থাৎ } \frac{|y_1 - mx_1|}{\sqrt{1 + m^2}} = r$$

বা, $(y_1 - mx_1)^2 = r^2(1 + m^2)$ (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে m অপসারণ করে আমরা পাই,

$$\{x_1(y - y_1) - y_1(x - x_1)\}^2 = r^2\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}$$

$$\Rightarrow (x_1y - y_1x)^2 = r^2\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) = (xx_1 + yy_1 - r^2)^2, \text{ যা } (x_1, y_1) \text{ বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ।}$$

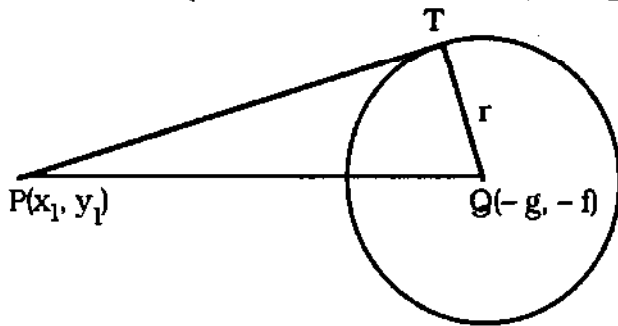
অনুরূপভাবে দেখান যায় যে, বহিঃস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1) থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = \{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2$$

সংক্ষেপের মাধ্যমে প্রকাশ করলে স্পর্শক দুইটির সমীকরণ : $SS_1 = T^2$

4.7. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে



মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

এবং বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে এ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক PT .

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $Q(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ

$$QT = \sqrt{g^2 + f^2 - c}.$$

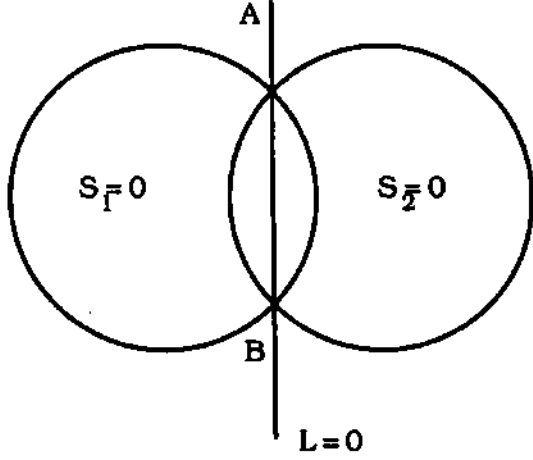
$$\text{যেহেতু } QT \perp PT, \text{ অতএব } PT^2 = PQ^2 - QT^2$$

$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$\therefore \text{ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য } PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}.$$

4.8. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয়



মনে করি, প্রদত্ত দুইটি বৃত্তের সমীকরণ যথাক্রমে

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \dots \dots (i)$$

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \dots \dots (ii)$$

$$\therefore S_1 - S_2 \equiv 2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0 \dots \dots (iii)$$

যদি বৃত্ত দুইটি পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (i) ও (ii) এর উভয়কে সিদ্ধ করে, সুতরাং $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$, $\therefore S_1 - S_2 = 0$

অর্থাৎ, এদের স্থানাঙ্ক (iii) কেও সিদ্ধ করে। আবার (iii) x ও y এর একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ যা সর্বদা সরলরেখা নির্দেশ করে।

$\therefore S_1 - S_2 = 0$, অর্থাৎ (iii) সমীকরণটি বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা AB কে নির্দেশ করে।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি সাধারণ জ্যা $L \equiv S_1 - S_2 = 0$ হয়, তবে $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ $S_1 + kL = 0$, যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক ($k \neq 0$)।

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক, $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমান্তরাল সরলরেখাটির সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$, যখন k অনির্ধারিত ধ্রুবক।

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (1, 2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ ।

এখন $3x - 4y + k = 0$ রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে, কেন্দ্র থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব-দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\therefore \left| \frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + k}{\sqrt{9 + 16}} \right| = 3,$$

$$\Rightarrow \frac{k - 5}{5} = \pm 3 \therefore k = 20, -10.$$

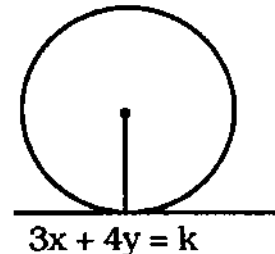
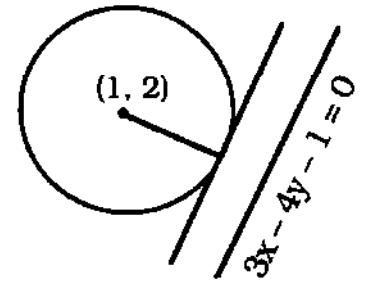
সুতরাং নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 20 = 0$ ।

উদাহরণ 2. k এর মান কত হলে, $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে? [সি. '১২]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 10$ বা, $(x^2 - 10x + 25) + y^2 = 25$

বা, $(x - 5)^2 + y^2 = (5)^2$ এর কেন্দ্র (5, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 5।

$3x + 4y = k$ বা $3x + 4y - k = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে



বৃত্তের কেন্দ্র (5, 0) থেকে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\text{অর্থাৎ } \left| \frac{3.5 + 4.0 - k}{\sqrt{9 + 16}} \right| = 5$$

$$\text{বা, } \frac{15 - k}{5} = \pm 5 \quad \text{বা, } 15 - k = \pm 25$$

(+) নিয়ে, $15 - k = 25$ বা, $k = -10$. (-) নিয়ে, $15 - k = -25$ বা, $k = 40$

\therefore নির্ণেয় k এর মান 40 অথবা -10 .

উদাহরণ 3. (4, -2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ বৃত্তটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = r . সুতরাং

বৃত্তটির সমীকরণ $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2 \dots (i)$

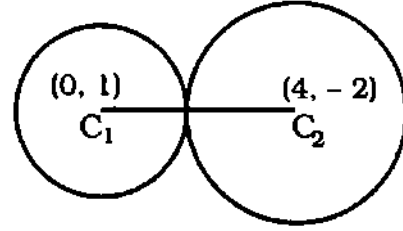
প্রদত্ত বৃত্তটির সমীকরণকে এরূপ লেখা যায় :

$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 1$$

$$\text{বা, } x^2 + (y - 1)^2 = 16 = 4^2.$$

অতএব বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 1) এবং ব্যাসার্ধ = 4

শর্তানুসারে বৃত্ত দুইটি বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে,



$$\text{সুতরাং কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব} = \text{ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল} \Rightarrow \sqrt{(4 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = r + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 + 9} = r + 4, \Rightarrow r + 4 = 5, \therefore r = 1$$

$$\text{সুতরাং, নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ } (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 1^2,$$

$$\text{অর্থাৎ } x^2 + y^2 - 8x + 4y + 19 = 0.$$

উদাহরণ 4. $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের যে জ্যা (4, -6) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. সি. '১১]

সমাধান : $x^2 + y^2 = 144 = (12)^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O(0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 12.

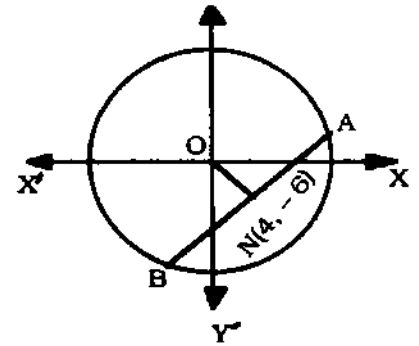
মনে করি, AB জ্যা, N(4, -6) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।

$$\therefore \text{ON রেখার সমীকরণ, } y = \frac{-6}{4}x \text{ বা, } 3x + 2y = 0.$$

আমরা জানি বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর

সংযোগ রেখা জ্যা-এর উপর লম্ব। অর্থাৎ $ON \perp AB$.

$$\text{ধরি AB জ্যা-এর সমীকরণ } 2x - 3y + k = 0,$$



যেখানে k একটি অনির্ধারিত ধ্রুবক।

যেহেতু (4, -6) বিন্দুটি AB জ্যা-এর উপর অবস্থিত,

$$\therefore 2 \cdot 4 - 3(-6) + k = 0 \quad \text{বা, } k = -26$$

$$\text{অতএব, নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ } 2x - 3y - 26 = 0.$$

উদাহরণ 5. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষদ্বয় থেকে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু. '১১; ব. '১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ এর কেন্দ্র $(-2, 4)$

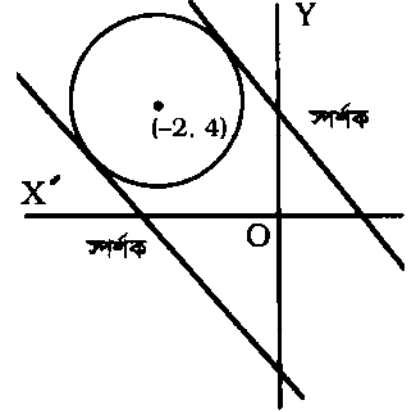
এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

মনে করি, অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

শর্তানুসারে $b = a$, সুতরাং রেখার সমীকরণটি হবে $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

বা, $x + y - a = 0 \dots (i)$

এখন (i) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি কেন্দ্র $(-2, 4)$ হতে রেখাটির উপর লম্ব-দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হয়।



$$\text{অর্থাৎ যদি } \left| \frac{-2 + 4 - a}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2 - a}{\sqrt{2}} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 - a = \pm 6 \Rightarrow a = 8 \text{ এবং } a = -4.$$

অতএব নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x + y - 8 = 0$ এবং $x + y + 4 = 0$.

প্রশ্নমালা 4.2

1. প্রমাণ কর যে, $3x + 4y - 38 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর।
উ : (6, 5)
2. $x - 5y + 2 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - ax + 2y + 1 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাস হলে a এর মান নির্ণয় কর।
উ : -14
3. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 5 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (i) $6x + 8y = 11$ রেখার উপর লম্ব। (ii) $6x + 8y = 11$ রেখার সমান্তরাল।
উ : (i) $4x - 3y - 13 = 0$ (ii) $3x + 4y + 9 = 0$;
4. প্রমাণ কর যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণও নির্ণয় কর।
[চ. '০৭] উ : $3x + y = 5$
5. মূলবিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অভিক্রান্ত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. '১১; ব. '১২; রা. চ. '১৩] উ : $x - 2y = 0, x + 2y = 0$
6. $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x - y - 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[য. '১২] উ : $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$
7. (i) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 3)$ এবং যা $5x - 12y + 3 = 0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে।
উ : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$
(ii) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি $(3, 4)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y -অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর।
উ : 4.
8. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 3)$ এবং একটি স্পর্শক $5x - 12y + 3 = 0$.
উ : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 3x + 10y = 15$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে অভিক্রান্ত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[সি. '১০] উ : $5x - 12y = 152$.

10. (p, q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক $px + qy = 0$ । [য. '০৭; সি. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0$
11. $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [ঢা. '০৬; ব. '০৮; য. '১২]
12. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x - 2y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব হবে। উ : $2x + y \pm 2\sqrt{5} = 0$
13. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত যে স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '১২; সি. '১৩] উ : $4x + 3y - 25 = 0, 4x + 3y + 5 = 0$
14. দেখাও যে $3x + 4y - 9 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এমন দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা উক্ত স্পর্শকটির উপর লম্ব। উ : $4x - 3y + 3 = 0, 4x - 3y - 17 = 0$ [দি. '১২]
15. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। উ : $3x - 4y - 10 = 0$
 $3x - 4y + 20 = 0$
16. $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $5x - 12y = 9$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '১১; চ. '১২] উ : $5x - 12y - 51 = 0, 5x - 12y + 131 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $y = x$ রেখার সমান্তরাল হবে। উ : $x - y \pm 10 = 0$
18. (i) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ বৃত্তের যে স্পর্শক y -অক্ষের সমান্তরাল; ঐ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x + 5 = 0, x + 1 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলো x -অক্ষের সমান্তরাল, তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $y + 2 = 0, y + 6 = 0$
19. একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের একটি $(2, -4)$ এবং অপরটি মূলবিন্দু; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। এ বৃত্তে যে স্পর্শকদ্বয় প্রদত্ত ব্যাসের সমান্তরাল তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0; 2x + y \pm 5 = 0$
20. $(-4, 3)$ এবং $(8, -2)$ বিন্দু দুইটি কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হলে ঐ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত। উ : $4x + y = 0$
21. $(2, -5)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী। ঐ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ $2x - 5y = 0$ । উ : $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 0$
22. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট যে বৃত্তটি $2x + y = 9$ রেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত রেখাটি $4(x^2 + y^2) - 4x - 24y + 17 = 0$ বৃত্তেরও একটি স্পর্শক। উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
23. (i) $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ । ঐ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১১; চ. '১২; য. দি. '১৩] উ : $2x - 3y + 13 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমবিশিষ্ট হয়। ঐ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $2x - 3y + 13 = 0$
24. $y = 2x$ যদি $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের কোন জ্যা-এর সমীকরণ হয়, তবে উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৮; য. '১০] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
25. $3x - 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর। উ : $32, -8$

26. (i) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. '১১; রা. '১২] উ : $c = 4; (2, 0)$
(ii) $3x + cy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। c এর মান নির্ণয় কর। [ব. '১২] উ : $2, -\frac{1}{6}$
27. দেখাও যে $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2 m^2 + 2al = 1$ হয়। [চ. '১০; কু. রা. '১৩]
28. (i) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '১০; দি. '১১]
উ : $x + 2y = 10; x - 2y = 10$
(ii) $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের যে বিন্দুতে কোটি 2, উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '০৮] উ : $2y \pm 3x = 13$
29. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের পরিধিস্থ $(6, -6)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x - 3y - 42 = 0; 3x + 4y + 6 = 0$
30. মূলবিন্দু হতে $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2. বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চা. '০৬, '১০; চ. ব. '১৩] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$
31. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : $y + 2 = 0, 4x + 3y + 2 = 0$, দৈর্ঘ্য = 1
32. দেখাও যে $12x + 5y - 4 = 0$ রেখাটি, $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক; এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $5x - 12y + 33 = 0$
33. (i) মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি ব্যাস $2y = 3x$ এবং একটি স্পর্শক $2x + 3y + 13 = 0$. উ : $x^2 + y^2 + 2x + 3y = 0$.
(ii) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি $(3, 4)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y অক্ষ থেকে যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [ব. '০৮; কু. '০৭] উ : 4.
34. $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী বৃত্তটি x -অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণও নির্ণয় কর। [চা. কু. '১২; সি. '১১]
উ : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0; 4x + 3y = 0$
35. (i) $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকন করা হয়েছে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $x + y = 4$ রেখাটি ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। [দি. '১২] উ : $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0; (3, 1)$
(ii) $(b, 0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [চা. '০৮] উ : $(y^2 + x^2 - bx)^2 = a^2\{y^2 + (b - x)^2\}$
36. (i) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের একটি স্পর্শক x - অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $y = \sqrt{3}x \pm 10$.
(ii) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '১০; ব. '১১; কু. '১২] উ : $\sqrt{3}y = x \pm 8$
37. (i) $x^2 + y^2 = (3x - 4y)$ বৃত্তের একটি ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে যায়। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $4x + 3y = 0; 3x - 4y = 0$.
(ii) $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের ব্যাস মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এই ব্যাসের সমীকরণ এবং মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চা. '০৮] উ : $12x + 5y = 0; 5x - 12y = 0$

38. দেখাও যে, $x - 2y + 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $2x + y - 3 = 0$.
39. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক নির্ণয় কর।
[ব. '১১] উ : $3x - 4y + 19 = 0$
40. দেখাও যে, x -অক্ষ, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দুগামী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $15x + 8y = 0$
41. $(-5, 4)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. '১৩] উ : $y - 4 = 0, 3x + 4y - 1 = 0$.
42. দেখাও যে, $y = 3x + 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুটি নির্ণয় কর। উ : $(-3, 1)$.
43. $(-2, 3)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 = 3$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
উ : $\sqrt{\frac{23}{2}}$
44. (i) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর।
[ঢ. '১১; রা. '১২; ঢা. '১৩] উ : 2 বা $-\frac{1}{6}$
- (ii) $ax + 2y - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। a এর মান নির্ণয় কর।
[রা. '০৪] উ : $3, -17/3$.
45. দেখাও যে, $x + 2y = 17$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ বৃত্তের একটি স্পর্শক এবং এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[রা. '০২] উ : $2x - y + 1 = 0$.
46. $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উ : $\frac{1}{\sqrt{2}}$
[ঢ. '১১; কু. '১৩]
47. $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x -অক্ষের উপর অবস্থিত।
[সি. '১১] উ : $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0, x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0$.
48. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ ছায়া যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু. '১১; ব. সি. '১৩] উ : $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

প্রশ্নমালা 4.3

সৃজনশীল প্রশ্ন

- কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(1, 5)$ ও $(7, -3)$.
(a) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ এটা প্রয়োগ করে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$
(b) অপর একটি ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উল্লিখিত ব্যাসের উপর লম্ব।
উ : $3x - 4y - 8 = 0$
(c) মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক ছেদ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উ : $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$
- একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.
(a) দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ এবং $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।
(b) $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি কী শর্তে একটি বাস্তব বৃত্ত সূচিত করে?
(c) এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4, 5)$ এবং প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রগামী।
উ : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

3. একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 4$ এবং একটি সরলরেখার সমীকরণ $3x + 4y = 9$.
 (a) দেখাও যে, বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।
 (b) $2x - 3y - 9 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 4y + c = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে, c এর মান কত? উ : 8.
 (c) উদ্দিপকে উল্লিখিত বৃত্তের দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রদত্ত রেখাটির উপর লম্ব।
4. একটি বৃত্তের সমীকরণ : $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$.
 (a) দেখাও যে, $A(1, 1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তটির উপর অবস্থিত।
 (b) A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উ : $(-5, -7)$
 (c) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।
5. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ
 (a) বৃত্তটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ঋণাত্মক পারিমাণ নির্ণয়ের সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর।
 (b) বৃত্তটি x ও y অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করার শর্ত নির্ণয় কর।
 (c) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x - অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উ : $\sqrt{3}y = x \pm 8$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ :
 (a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $4x + 3y - 16 = 0$
 (c) $4x + 3y - 25 = 0$ (d) $4x + 3y + 20 = 0$
2. একটি বৃত্ত x -অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ।
 (a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$
 (c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাের সমীকরণ :
 (a) $x + y - 2 = 0$ (b) $x - y - 3 = 0$
 (c) $2x + y - 3 = 0$ (d) $x + 2y + 1 = 0$
4. y -অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ।
 (a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$
 (c) $x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$
5. $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ।
 (a) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 51 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 51 = 0$
 (c) $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 51 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$
6. একটি বৃত্ত x -অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্র $2x - y - 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ।
 (a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$
 (c) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

7. $(4, -8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত y -অক্ষকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ।
 (a) $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 64 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$
 (c) $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 16 = 0$ (d) কোনটি নয়।
8. $(4, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ
 (a) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$
 (c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$
9. নিচের তথ্যগুলি লক্ষ কর :
 (i) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ বৃত্তটি y -অক্ষকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3)$ ।
 (ii) $x^2 + y^2 = 0$ সমীকরণটি বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।
 (iii) $(1, 2)$ ও $(3, 4)$ বিন্দু দুইটি যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু তার সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ ।
 নিচের কোনটি সঠিক ?
 (a) (i) ও (ii) (b) (ii) ও (iii)
 (c) (i) ও (iii) (d) (i), (ii) ও (iii)
10. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ একটি বৃত্ত সূচিত করে?
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) -2
11. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + c = 0$ বৃত্তটি y -অক্ষকে স্পর্শ করলে c -এর মান কত?
 (a) 4 (b) 5
 (c) 6 (d) 9
12. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x -অক্ষকে স্পর্শ করে। y -অক্ষ থেকে বৃত্তটি দ্বারা খণ্ডিত অংশের পরিমাণ -
 (a) $\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{2}$
 (c) $2\sqrt{3}$ (d) 3
13. $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। k -এর একটি মান -
 (a) 20 (b) 30
 (c) 40 (d) 45
14. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের একটি জ্যাের মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ হলে ঐ জ্যাের সমীকরণ -
 (a) $2x + 3y + 12 = 0$ (b) $2x - 3y + 13 = 0$
 (c) $2x - y + 5 = 0$ (d) $x + 2y - 11 = 0$
15. একটি বৃত্ত y -অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(2, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ -
 (a) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
 (c) $2(x^2 + y^2) - 5x = 0$ (d) $2(x^2 + y^2) - 3x = 0$

ব্যবহারিক

4.9. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফ পেপারে)

সমস্যা নং 4.9.1

তারিখ :

সমস্যা 1 : $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 9 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর এবং এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান :

তত্ত্ব : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (a, b) এবং ব্যাসার্ধ $= c$

কার্যগততা : (i) ছক কাগজে x ও y -অক্ষ এবং মূলবিন্দু O চিহ্নিত করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্র দুই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$ (একক) ধরি।

প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 9 = 0$

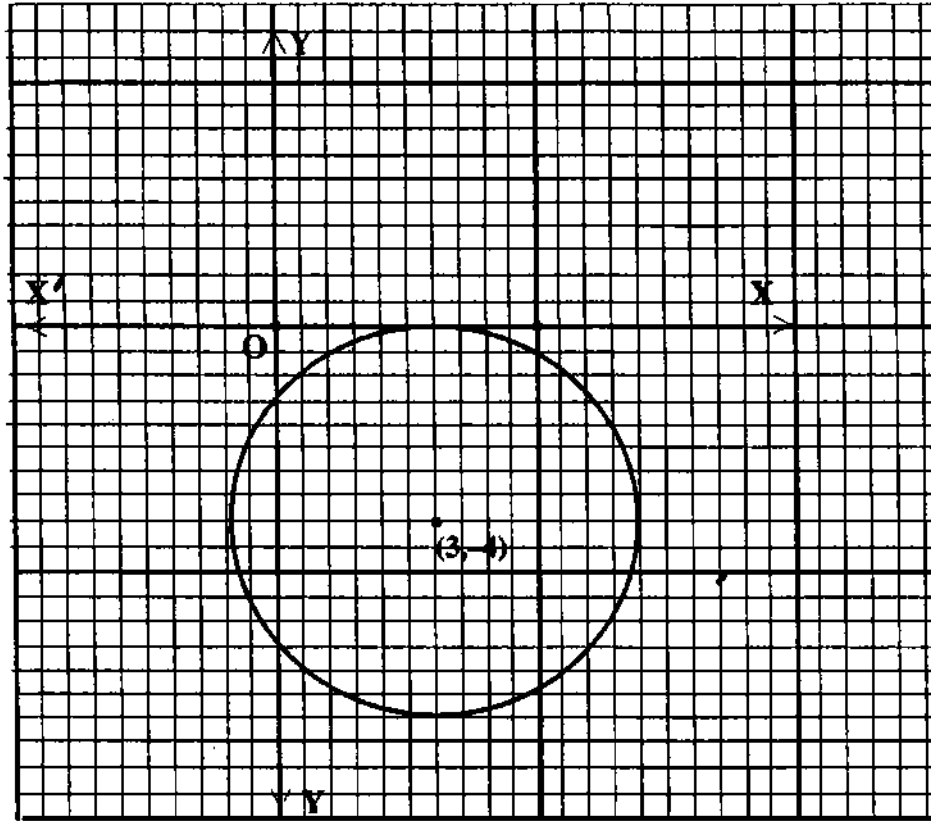
বা, $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 25 - 9$

বা, $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

বা, $(x - 3)^2 + \{y - (-4)\}^2 = (4)^2$

এ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 4$

$(3, -4)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 (ক্ষুদ্র আট ঘর) নিয়ে বৃত্তের লেখ অঙ্কন করি।



শ্রেণির কাজ

1. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তটির লেখ অঙ্কন কর।
2. $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$ বৃত্তটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।
3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর এবং লেখ অঙ্কন কর।
4. মুক্ত হস্তে $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তটির লেখ অঙ্কন কর।