দ্বিপদী উপপাদ্য

দ্বিপদী উপপাদ্য

PHASE-1 ঃ সাধারণ আলোচনা ও সূত্রাবলী ঃ

দ্বিপদ রাশি ঃ $n \in N$ এর জন্য, $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \text{--------} + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \text{---} + x^n$

সাধারণ পদ নির্ণয়ঃ $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \text{--------} + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \text{---} + x^n$

এখানে সাধারণ পদ (r+1) তম পদ, $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} x^r$ [$(a+x)^n$ এর সম্প্রসারণে]

মধ্য পদ নির্ণয়ঃ (i) n- জোড় হলে, মধ্যপদ = $\frac{n}{2}+1$ তম পদ , (ii) n- বিজোড় হলে, মধ্যপদ = $\frac{n+1}{2}$ তম ও $\frac{n+3}{2}$ তম

সমদূরবর্তী পদসমূহঃ শেষ থেকে r+1 তম পদটি প্রথম হতে $\{(n+1)-r\} = (n-r+1)$ তম পদ

প্যাসকেলের ত্রিভূজ সূত্রঃ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ এবং ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

TYPE – 01 : পদের সহগ ও পদ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 : $(x^2-2+\frac{1}{x^2})^6$ এর সম্প্রসারণে x^7 এর সহগ ও x বর্জিত পদটির মান বের কর।

SOLVE : $\left\{x^2 - 2.x.\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right\}^6 = \left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

সাধারন পদটি, $T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r} (\frac{-1}{x})^r = (-1)^r\, {}^{12}C_r x^{12-2r}$;

x^7 এর সহগ, $x^{12-2r} = x^7 \Rightarrow 12-2r = 7 \Rightarrow 5 = 2r \Rightarrow r = (\frac{5}{2})$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। সুতরাং উক্ত বিস্তৃতীতে x^7যুক্ত পদ নেই।

x বর্জিত পদ অর্থাৎ x^0 যুক্ত পদ: $x^0 = x^{12-2r} \Rightarrow 12-2r = 0 \Rightarrow r = 6$ $\therefore$ x বর্জিত পদটির মান = $(-1)^6\, {}^{12}C_6 = 924$

Ans.

EXAMPLE – 02 : দেখাও যে, n একটি ধনাত্বকপূর্ণ সংখ্যা হলে, $\left(x^p + \frac{1}{x^{2p}}\right)^{3n}$ এর বিস্তৃতীতে সর্বদাই x বর্জিত একটি পদ থাকবে। n = 4 হলে এ পদটির মান বের কর।

SOLVE : $\left(x^p + \frac{1}{x^{2p}}\right)^{3n}$ এ বিস্তৃতীতে সাধারণ পদ = $^{3n}C_r(x^p)^{3n-r}\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)^r$ = $^{3n}C_r\, x^{3np-pr}.\, x^{-2pr}$= $^{3n}C_r\, x^{3np-3pr}$

শর্তানুযায়ী, $x^0 = x^{3np-3pr} \Rightarrow 3np-3pr = 0 \Rightarrow n = r \therefore n = r$ এর জন্য সর্বদাই একটি x বর্জিত পদ থাকবে।

n = 4 এর জন্য উক্ত পদটির মান = $^{12}C_4 = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 496$

EXAMPLE – 03 : $(1+x+x^3)^9$ এর বিস্তৃতীতে সর্বদাই x^6 এর সহগ নির্ণয় কর।

$(1+x+x^3)^9 = {}^9C_1(1+x)^8x^3 + {}^9C_2(1+x)^7x^6$ – এর পরে পদ x^9 চাইতে বড়।

$= {}^9C_1x^3[{}^8C_0 1 + {}^8C_0 x + {}^8C_2x^2 + {}^8C_3x^3 \,...........] + {}^9C_2x^6\,[7\,C_0 + 7\,C_1x + \text{-----}]$

$\therefore x^6$ এর সহগ $= {}^9C_1 \times {}^8C_3 + {}^9C_2 \times 7\,C_0$

$= \frac{9!}{8!1!} \times \frac{8!}{3!5!} + \frac{9!}{7!2!} \times 1$

$= 9 \times \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} + \frac{9\times8}{2\times1}$

$= 9\times 56 + 36$

$=504+36 = 540$ Ans.

EXAMPLE – 04 : $(2x+3y)^5$ কে বিস্তৃত কর। দেখাও যে, যদি $x = \frac{3}{2}$ এবং $y = \frac{2}{3}$ হয়, তবে বিস্তৃতিটির বিজোড় পদ গুলোর যোগফল জোড় পদগুলির যোগফল অপেক্ষা বেশি।

সমাধাণঃ $(2x+3y)^5 = (2x)^5 + 5\times(2x)^4.3y + 10\times(2x)^3(3y)^2 + 10\times(2x)^2(3y)^3 + 5\times(2x)(3y)^4 + (3y)^5$

$(2x + 3y)^5 = s_1 + s_2$ জোড় পদগুলির যোগফল s_1

$(2x - 3y)^5 = s_1 - s_2$ বিজোড় পদগুলির যোগফল s_2

$s_1 + s_2 = (2\times\frac{3}{2} + 3\times\frac{2}{3})^5 = 125$

$s_1 - s_2 = (2\times\frac{3}{2} - 3\times\frac{2}{3})^5 = 1;\ s_1 = 1 + s_2$ দেখানো হলো।

নিজে চেষ্টা কর: $(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর এবং যে শর্ত সাপেক্ষে এরূপ একটি পদ থাকবে তা ব্যাখ্যা কর। $r!/\{\frac{1}{5}(4n-2r)\}!\{\frac{1}{5}(4n+2r)\}!$,4n-2r যদি 5 এর গুনিতিক হয়।

TYPE – 02 : মধ্য পদ নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদদুটির মান নির্ণয় কর।

SOLVE : মধ্যপদ দুটি যথাক্রমে $\frac{n+1}{2}$ তম ও $\frac{n+3}{2}$ তম পদ।

$\frac{n+1}{2}$ তম পদ = ${}^{11}C_5\,(x^4)^{11-5}\,.\,(-\frac{1}{x^3})^5 = {}^{11}C_5\,x^{44-20}\;\;x^{-15}\,(-1)^5 = -{}^{11}C_5\,x^{44-35} = -{}^{11}C_5\,x^9 = -462x^9$

$\frac{n+3}{2}$ +1 তম পদ = ${}^{11}C_6\,(x^4)^{11-6}\,(-\frac{1}{x^3})^6 = {}^{11}C_6\,x^2 = 462\,x^2$

EXAMPLE – 02 : দেখাও যে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $\frac{1.3.5.....................(2n-1)}{n!}(-2)^n$, যেখানে $n\in N$

SOLVE : $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ - এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা $(2n+1)$ টি যা বিজোড় সংখ্যা ।

সুতরাং, বিস্তৃতিতে মধ্যপদ = $\left(\frac{2n}{2}+1\right)=(n+1)$ তম ।

$\therefore (n+1)$-তম পদ = ${}^{2n}C_n\,x^{2n-n}\left(-\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n\,x^n(-1)^n\,x^{-n} = (-1)^n\;{}^{2n}C_n = (-1)^n\,\frac{(2n)!}{n!n!}$

$$=(-1)^n.\frac{2n.(2n-1)(2n-2)(2n-3)....................4.3.2.1}{n!n!}$$

$$=(-1)^n.\frac{1.2.3.4.............................(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{n!n!}$$

$$=(-1)^n.\frac{\{1.3.5......(2n-3)(2n-1)\}\{2.4.6.......(2n-2)2n\}}{n!n!}$$

$$=(-1)^n.\frac{\{1.3.5......(2n-3)(2n-1)\}\,2^n\{1.2.4.........(n-1).n\}}{n!n!}=\frac{\{1.3.5......(2n-1)\}\{1.2.3..........n\}}{n!n!}(-1)^n2^n$$

$$=\frac{\{1.3.5......(2n-1)\}n!}{n!n!}(-2)^n=\frac{1.3.5......(2n-1)}{n!}(-2)^n$$ যা নির্ণেয় মধ্যপদ । **(Showed)**

TYPE – 03 : ক্রমিক পদ ও শর্তযুক্ত পদের সহগ সংক্রান্ত সমাধান

$(1+x)^{n+1}$ এর বিস্তৃতীতে r+1 তম পদের সহগ = ${}^{n+1}C_r$, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতীতে r তম পদের সহগ = ${}^{n}C_{r-1}$

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতীতে r+1 তম পদের সহগ = ${}^{n}C_r$, r-তম পদ ,T_{r-1+1} = ${}^{n}C_{r-1}$,r+1তম পদ, $T_{r+1} = {}^{n}C_r$

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^{n}C_r}{{}^{n}C_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$; [অথবা (1) এ r **এর স্থলে** $r+1$**বসিয়ে]** , $\frac{T_{r+2}}{T_{r+1}} = \frac{{}^{n}C_{r+1}}{{}^{n}C_{rc}} = \frac{n-r}{r+1}$

EXAMPLE – 01 : $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতীতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, $\frac{21}{2}$ bx ও $\frac{189}{4}$ bx^2 হয় তবে a,b এবং n এর মান কত?

SOLVE : $(a+3x)^n = {}^{n}C_0a^n + {}^{n}C_1a^{n-1}.3x + {}^{n}C_2a^{n-2}(3x)^2$

$a^n = b$, $na^{n-1}\,3x = \frac{21}{2}$ bx $\Rightarrow \frac{na^n}{a} = \frac{7}{2}b = \frac{7}{2}a^n \therefore \frac{n}{a} = \frac{7}{2}$.=) $\frac{n}{a} = \frac{7}{2}$

$\frac{n(n-1)}{2!}.a^{n-2}.9x^2 = \frac{189}{4}bx^2 \frac{n(n-1)a^n}{2a^2} = \frac{21}{4}$ b => $n(n-1) = \frac{21}{2}a^2$ => $\frac{n}{a}(n-1) = \frac{21}{2}a$ => $\frac{7}{2}(n-1) = \frac{21}{2}.\frac{2n}{7}$

=> 7n-7 = 6n => n=7 ; a =2, $b=2^7$, n=7 Ans.

EXAMPLE – 02 : $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতি x^r এর সহগ x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুন হলে rএর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : $T_{r+1} = {}^{20}C_rx^r$; $T_r = {}^{20}C_{r-1}x^{r-1}$; $\frac{{}^{20}C_r}{{}^{20}C_{r-1}} = 2$

$\Longrightarrow {}^{20}C_r = 2 \times {}^{20}C_{r-1}$ =) $\frac{20!}{r!(20-r)!} = 2\frac{20!}{(r-1)!(20-r+1)!}$ =) $\frac{1}{r(20-r)!} = \frac{20!}{(21-r)(20-r)!}$

$\Longrightarrow$ 2r = 21-r=) 3r = 21 ; r=7 **Ans.**

EXAMPLE – 03 : $(1+x)^{44}$ –এর বিস্তৃতিতে 21- তম এবং 22- তম পদদ্বয় সমান হলে x- এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : $(1+x)^{44}$ – এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$–তম পদ = ${}^{44}C_r x^r$

$\therefore$ 21- তম অর্থাৎ $(21+1)$–তম পদ = ${}^{44}C_{20}x^{20}$ **এবং 22- তম** অর্থাৎ $(21+1)$–তম পদ = ${}^{44}C_{21}x^{21}$

প্রশ্নানুসারে, ${}^{44}C_{21}x^{21}$ = ${}^{44}C_{20}x^{20}$

$$\Rightarrow x.\frac{44!}{21!\,23!} = \frac{44!}{20!\,24!} \Rightarrow \frac{x.44!}{21.\,20!\,23!} = \frac{44!}{20!\,24\,23!} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{1}{24} \Rightarrow x = \frac{21}{24} \therefore x = \frac{7}{8}\left(Ans : \frac{7}{8}\right)$$

EXAMPLE – 04 : $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 1:7:42 হলে n এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : মনেকরি , $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদ যথাক্রমে $(r+1)$তম , $(r+2)$তম ও $(r+3)$ তম পদ।

$(r+1)$তম পদ , $T_{r+1} = n_{Cr}\ \ x^r$, এবং সহগ = n_{C_r} $(r+2)$তম পদ, $T_{r+1+1} = n_{Cr+1}\ \ x^{r+1}$, এবং সহগ = n_{Cr+1}

$(r+3)$ তম পদ,$T_{r+2r+1} = n_{Cr+2}\ \ x^{r+1}$,এবং সহগ = n_{Cr+2}

প্রশ্নেমতে, n_{C_r} : n_{Cr+1} = 1: 7 $\Rightarrow \frac{n_{Cr}}{n_{Cr+1}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}} \Rightarrow \frac{(r+1)!(n-r-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{1}{7}$

$$\Rightarrow \frac{(r+1)r!(n-r-1)!}{r!(r+1)(n-r-1)!} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{r+1}{n-r} = \frac{1}{7} \Rightarrow 7r+7 = n-r \Rightarrow 8r = n-7..............(i)$$

এবং n_{Cr+1} : n_{Cr+2} = 7 : 42

$$\frac{n_{Cr+1}}{n_{Cr+2}} = \frac{7}{42} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\frac{n!}{(r+1)!(n-r-2)!}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(r+2)!(n-r-2)!}{(r+1)!(n-r-2)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(r+2)(r+1)!(n-r-2)!}{(r+1)!(n-r-1)(n-r-2)!} \Rightarrow \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{r+2}{n-r-1} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6r+12 = n-r-1 \Rightarrow 7r = n-13.................(ii)$$

(i) নং সমীকরনকে 7 দ্বারা গুণ করে পাই, $56r = 7r-49.................(iii)$

(ii) নং সমীকরনকে 8 দ্বারা গুণ করে পাই, $56r = 8r - 49$..................(iv)

(iv) নং সমীকরণ হতে (ii) নং সমীরকণ বিয়োগ কর পাই, $n - 55 = 0 \Rightarrow n = 55\,(Ans:)$

EXAMPLE – 05 : $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতীতে x, x^2, x^3 এর সহগগুলি সমান্তর ধারায় থাকলে n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

x এর সহগ, = $^nC_1$

x^2 এর সহগ, = $^nC_2$

x^3 এর সহগ, = $^nC_3$

$^nC_1 + {}^nC_3 = 2 \times {}^nC_2$ [শর্তানুযায়ী, a + c = 2b যেখানে a ও c প্রান্তীয় রাশি ও b মধ্যরাশি এবং a – c = b – c]

$=)\ \frac{n\mathbf{C}1}{n\mathrm{C}_2} + \frac{n\mathbf{C}_3}{n\mathrm{C}_2} = 2$

$=)\ \frac{(n-2)!2!}{(n-1)!\,1!} + \frac{(n-2)!2!}{(n-3)!\,3!} = 2$

$=)\ \frac{(n-2)!}{(n-1)(n-2)!} + \frac{(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = 1$

$=)\ \frac{1}{n-1} + \frac{1}{6}(n-2) = 1$

$=)\ 1 + \frac{1}{6}(n^2-3n+2) = n-1$

$=)\ 6+n^2-3n+2 = 6n-6$

$=)\ n^2-9n+14 = 0$

$=)\ (n-7)(n-2) = 0$

$n = 7; 2$

n =2 গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ

$r \ngtr n$

$\therefore n = 7$ Ans.

EXERCISE :

01. $(1+x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে দুটি ক্রমিক পদ নির্ণয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4:1 হবে। Ans: 6^{th} ও 5^{th} পদঅথবা, 20^{th} ও 21^{th} পদ

02. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r+1তম পদের সহগ r+3তম পদের সহগ সমান হলে দেখাও যে, 2r =n-2

03. দেখাও যে, $(a+x)^n$ বা $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ হতে (r+1) তম পদের সহগ সমান।

04. $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r+4 তম পদের সহগ r তম পদের সহগের সমান হলে r এর মান নির্নয় কর। Ans: 9

TYPE – 04 : $(1+x)^n$ এর সম্প্রসারণে সহগগুলো $C_0, C_1, C_2, C_3 .... , C_n$ নিয়ে গঠিত ধারার সমষ্টি নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $(1+x)^n = C_0 + C_1X + C_2x^2 + ...c_nx^n$ হলে দেখাও যে, $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + ...nC_n = n2^{n-1}$

SOLVE : $(1+x)^n$ ধারাটিকে অন্তরীকরণ করলে পাই, $n(1+x)^{n-1} = 0 + C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + ...+ n\,C_nx^{n-1}$

এখন, x =1 বসিয়ে পাই, $n2^{n-1} = C_1 + 2C_2 + 3C_2 + ...+ nC_n$. (showed)

EXAMPLE – 02 : $(1+2x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1} এর সহগ C_r হলে এবং $C_{r+2}C_r$. হলে r এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : r- তম পদ, $T_r = {}^nC_{r-1}.1(2x)^{r-1}$

$\Rightarrow {}^nC_{r-1}.2^{r-1} = {}^{20}C_r \Rightarrow {}^{20}C_{r-1}2^{r-1} = {}^{20}C_r \Rightarrow {}^{20}C(r+2)-12^{r+2-1} = 4.{}^{20}C_r = 4.{}^{20}C_{r-1}.2^{r-1}$ $[r = r+2$ বসিয়ে$]$

$\Rightarrow {}^{20}C_{r+1}.2^{r+1} = 2^{r+1}\,{}^{20}C_{r-1} \Rightarrow r+1+r-1 = 20$ $[{}^nC_x = {}^nC_y$ হলে, $x+y=n]$

$2r = 20 \therefore r = 10$ **Ans**:

EXAMPLE – 03 : দেখাও যে, $C_oC_r + C_1C_{r+1} + C_2C_{r+2} + \ldots.. + C_{n-r}C_n$

$= \frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$

সমাধানঃ $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_{2x}^2 + \ldots\ldots + C_{rx}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x+1)^n = C_rx^{n-r} + C_{r+1}x^{n-r} + C_{r+2}x^{n-r-2} + \ldots\ldots..$

$(1+x)^n(x+1)^n = C_oC_rx^{n-r} + C_1C_{r+1}x^{n-r} + C_2C_{r+2}x^{n-r} + \ldots x^{n-r} + \ldots..$

[x^{n-r} যুক্ত পদ গুলি সমীকৃত করে অথবা দুটো ধারা গুন করে]

$(1+x)^{2n} = C_oC_rx^{n-r} + C_1C_{r+1}x^{n-r} + C_2C_{r+2}x^{n-r}$

${}^{2n}C_{n-r} = C_oC_r + C_1C_{r+2} + \ldots\ldots$[2n হতে n-r সংখ্যা বস্তু নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা]

$\therefore C_oC_r + C_1C_{r+1} + C_2C_{r+2} = \frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$ (প্রমানিত)

নিজে চেষ্টা কর-১ঃ $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_{2x}^2 + C_3x^3 + \ldots\ldots + C_{1x}^n +$ এর জন্য দেখাও যে,

(1) $C_o + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{8}C_3 + \ldots. + (n+1)$ তম পদ পর্যন্ত $= (\frac{3}{2})^n$
(2) $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \ldots.. + (n-1)C_n = (n-2)2^{n-1} + 1$
(3) $\frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \cdots + \frac{Cn}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ (integrate)
(4) $\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} = \frac{2^{n-1}}{n!}$
(5) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \ldots.. + (n+1)C_n = 2^n + n2^{n-1}$

$1 - 2C_1 + 4C_2 - 8C_3 + \ldots\ldots + (n+1)$ তম পদ পর্যন্ত $= (-1)^n$.

নিজে চেষ্টা কর-২ঃ

(1) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 1:7:42 হলে n এর মান নির্ণয় কর। Ans: 55.
(2) $(1+x^2)(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x এর সহগের ছয়গুন। n এর মান নির্নয় কর এবং এই মানের জন্য x^4 এর সহগ নির্নয় কর। Ans: n=7,56
(3) $(1+x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে দুটি ক্রমিক পদ নির্নয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4:1 হবে। Ans: 6^{th} ও 5^{th} পদ অথবা 20^{th} ও 21^{th} পদ ।
(4) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r+1তম পদের সহগ r+3তম পদের সহগ সমান হলে দেখাও যে, 2r =n-2
(5) দেখাও যে, $(a+x)^n$ বা $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ হতে (r+1) তম পদের সহগ সমান।
(6) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1}, x^r, x^{r+1} এর সহগগুলো সমান্তর ধারায় হলে দেখাও যে, $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

(7) উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+x+x^2)$ এর বিস্তৃতিতে সহগগুলো যথাক্রমে $a_0,a_1,a_2.....a_n$ দেখাও যে,

(a) $a_0+a_2+a_4+.....=\frac{1}{2}(3^n+1)$

(b) $a_1+a_3+a_5+.....=\frac{1}{2}(3^n-1)$

(8) $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r+4 তম পদের সহগ r তম পদের সহগের সমান হলে r এর মান নির্নয় কর। Ans:r=9

(9) $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে x এর কোন মানের জন্য 21তম 22 তম পদ দুটির পরস্পর সমান হবে। Ans:7/8

(10) সরল কর: $(a+\sqrt{1-a^2})^6+(a-\sqrt{1-a^2})^6$ Ans. $2+24a^2-24a^4$

PHASE-2: সাধারণ আলোচনা ও সূত্রাবলী

দ্বিপদ রাশি ঃ $n=(\frac{p}{q})$ $(p,q)\in R$, $q\neq 0$ $|x|<1$ এর জন্য,

$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^{r+.......p}$

নিম্নোক্ত বিষয়গুলো স্বরণ রাখতে হবেঃ

- যখন n ঋনাত্বক পূর্ণ সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ (ধনাত্বক বা ঋনাত্বক) $^nc_0, {}^nc_1, {}^nc_2....{}^nc_r$ প্রতীকগুলো অর্থহীন কারণ প্রতিকগুলো n একটি ধনাত্বক পূর্ণ সংখ্যা জ্ঞাপন করে।
- বিস্তৃতিটি বৈধ হবে যদি $-1<n<1$অর্থাৎ $|x|<1$ হয়। অর্থাৎ ধারাটি অভিসারি হবে।
- বিস্তৃতিটি পদের সংখ্যা অসীম। কারণ যদি বিস্তৃতিটিতে n একটি ভগ্নাংশ বা ঋনাত্বক হয় হবে, যেহেতু r একটি ধনাত্বক পূর্ণ সংখ্যা, r এর এমন কোন মান থাকতে পারে না যার দ্বারা সাধারণ পদের সহগ $\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}$এর লবের যেকোন উৎপাদক শূন্য হতে পারে। এরুপ ক্ষেত্রে x এর সহগ কখনও লোপ পেতে পারেনা। এবং দ্বিপদী ধারাটি অনন্ত হয়।

উক্ত ধারাটিতে r সংখ্যক পদের সমষ্টি $=\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{1-x}$ $r\to\infty$ এবং$|x|<1$ হলে $\frac{x^r}{1-x}=0$ হবে ।

অর্থাৎ$(1+x)^n$

ধারাটি $(1-x)^{-1}$ এ পরিনত হবে এবং ধারাটি অভিসারি হবে। $x>1$ হলে $\frac{x^r}{1-x}$ কখনও শূন্য হবে না। সেক্ষেত্রে ধারাটি অপসারি হবে।

- ধারার বিস্তৃতিঃ $|x|<1$ এর জন্য, $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+......x^r+.......\infty$

$(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+......+(-1)^r x^r+.......\infty$ $\frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = \frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+......x^r+x^{r+1})$

$-1(1-x)^{-2}(-1) = 0+1+x+2x+3x^2+4x^3+....rx^{r-1}+(r+1)x^r+\infty$

$\Rightarrow (1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+.......+(r+1)x^r+.......\infty$

অনুরূপভাবেঃ $(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+......+(-1)^2 (r+1)x^r+......\infty$

$(1-x)^{-3} = 1-3x+6x^2-10x^3+......+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r+.......\infty$

EXAMPLE – 01 : যখন $|x| > 1$ তখন $(1-x)^{-1}$ ধারাটি বৈধ বিস্তৃতি কেমন হবে?

SOLVE : $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ এর জন্য ধারাটির বিস্তৃতি বৈধ হবে $\frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{-x(1-\frac{1}{x})} = -\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})^{-1}$

$= -\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots ....+\cdots .\frac{1}{x^r}+.....\infty$ $= -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\cdots \frac{1}{x^{r-1}}+.....\infty$

EXAMPLE – 02 : $\frac{1}{\sqrt[3]{8-3x}}$ বিস্তৃতিটির বৈধ বিস্তৃতি ৪র্থ পদ পর্যন্ত দেখাও

$|x| < 8 \Rightarrow -8 < 3x < 8 \Rightarrow -\frac{8}{3} < x < 8 < \frac{8}{3} \therefore |x| < \frac{8}{3}$ এর জন্য বিস্তৃতিটি বৈধ হবে।

SOLVE : $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)^{-1/3} = \frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{3x}{8}\right)+\frac{\frac{-1}{3}\left(\frac{-1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{3x}{8}\right)^2+\frac{\frac{-1}{3}\left(\frac{-1}{3}-1\right)\left(\frac{-1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{3x}{8}\right)^3+\right.$
$\left.\frac{\frac{-1}{3}\left(\frac{-1}{3}-1\right)\left(\frac{-1}{3}-2\right)\left(\frac{-1}{3}-3\right)}{4!}\left(\frac{3x}{8}\right)^4\right\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}x^2+\frac{7}{1536}x^3$

TYPE – 05 : সাধারণ পদ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 : দেখাও যে, $(1-4x)^{-1/2}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}x^r$.

SOLVE : r+1 তম পদ, $T_{r+1} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)........\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-4x)^r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)........-.\frac{2r-1}{2}}{r!2^r}(-4)^r x^r$

$= (-1)^r \frac{1.3.5......2r-1}{2^r r!}(-1)^r.2^{2r}.x^r = \frac{1.3.5......(2r-1)}{2^r r!}2^{2r}x^r = \frac{1.2.3.4......(2r-1)2r.}{2^r(2.4.6....2r)r!}2^{2r}.x^r$

$= \frac{1.2.3.4......(2r-1)(2r)}{2^r.2^r(1.2.3.....r)r!}2^{2r}.x^r = \frac{(2r)!}{r!r!}.x^r = \frac{(2r)!}{(r!)^2}x^r$ দেখানো হলো।

EXAMPLE – 02 : $(1-x)^{-1}-2(1-2x)^{-2}$এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি নির্নয় কর।

SOLVE : r+1 তম পদ, $T_{r+1} = x^r - 2\frac{-2(-2-1)(-2-2)....(-2-r+1)}{r!}(-2x)^r = x^r-2(-1)^r\frac{2.3.4....(r+1)}{r!}(-1)^r.2^r.x^r$

$= x^r-2^{r+1}\frac{1.2.3.4....r(r+1)}{r!}x^r = x^r-2^{r+1}\frac{(r+1)!}{r!}x^r = x^r-2^{r+1}\frac{(r+1).r!}{r!}x^r = \{1-2^{r+1}.(r+1)\}x^r$

EXERCISE :

01. $|x| < 1$ এর জন্য $(1-x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি বের কর। Ans. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}$

TYPE – 06 : x^n এর সহগ নির্নয় (মিশ্র ধারা সংক্রান্ত)

EXAMPLE – 01 : $(1-5x+6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত ?

SOLVE : $[(1-3x)(1-2x)]^{-1} = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$ [Thumb's rule)

$= 3(1-3x)^{-1}- 2(1-2x)^{-1} =3.(1+3x+(3x)^2+......+(3x)^n+......\infty) -2.(1+2x+(2x)^2+......+(2x)^n+......\infty)$

x^n এর সহগ $= 3.3^n – 2.2^n =3^{n+1} – 2^{n+1}$

EXAMPLE – 02 : $\left(\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}\right)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত ?

SOLVE : দেওয়া আছে, $\left(\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}\right)$ $\left(\frac{1}{1-ax} - \frac{1}{1-bx}\right)\left(\frac{1}{a-b}\right) = \left(\frac{1}{a-b}\right)[(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}] = \frac{1}{a-b}$ $[1+ax+(ax)^2 +.....+(ax)^n$

$-(1+bx+(bx)^2 +.....+(bx)^n]$; x^n এর সহগ $\frac{1}{a-b}(a^n - b^n) = \frac{a^n-b^n}{a-b}$ Ans.

EXAMPLE – 03 : দেখাও যে, $(1-x)^{-1}-2(1-2x)^{-2}$এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি নির্নয় কর।

r+1 তম পদ

$T_{r+1} = x^r - 2\frac{-2(-2-1)(-2-2)....(-2-r+1)}{r!}(-2x)^r$

$= x^r-2(-1)^r\frac{2.3.4....(r+1)}{r!}(-1)^r.2^r.x^r$

$= x^r-2^{r+1}\frac{1.2.3.4....r(r+1)}{r!}x^r$

$= x^r-2^{r+1}\frac{(r+1)!}{r!}x^r= x^r-2^{r+1}\frac{(r+1).r!}{r!}x^r= \{1-2^{r+1}.(r+1)\}x^r$

নিজে চেষ্টা করঃ

(1) $|x| < 1$ এর জন্য $(1-x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি বের কর। Ans. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}$

(2) $(1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots\infty)^3$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয়কর। Ans. $(-1)^r \frac{1}{2}(r+1)(r+2)$

(3) $\frac{(2x+1)}{(1+x^2)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্নয় কর। Ans. $(-1)^r/_2$ r জোড় হলে এবং ২$(-1)^{(r-1)}/_r$ বিজোড় হলে।

(04) $(1-x^n)/(1-x)$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত? Ans. 2^n

(05) $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত? Ans. $5^n - 4^n$

TYPE – 07 : অসীম ধারার রূপান্তর সম্পর্কীত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 : $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ হয় তবে দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3$........

SOLVE : $1+y = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots = (1-x)^{-2} \Rightarrow (1-x) = (1+y)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 1-x = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots\ldots$

$\therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \ldots\ldots$ Showed.

EXERCISE :

01. প্রমান কর যে, $(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+2x+3x^2+\ldots) = \frac{1}{2}(1.2+2.3x+3.4x^2+4.5x^3+\ldots)$

02. $y = 3x+6x^2+10x^3+\ldots$ হয় তাহলে, x কে y এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুযায়ী সাজাও।

Ans: $x = \frac{y}{3} - \frac{1}{3^2}\frac{4}{2!}y^2 + \frac{1}{3^2}\frac{4}{2!}y^2 + \frac{1}{3^3}\frac{4.7}{3!}y^3$ ....

TYPE – 08 : সহগ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলি

EXAMPLE – 01 : $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্নয় কর

SOLVE : $(1+x)(1-x)^{-3} = (1+x)(1+3x+6x^2+10x^3+\ldots.. \frac{1}{2}(r)(r+1)x^{r-1}+(r+1(r+2)x^r$

x^r এর সহগ= $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)+\frac{1}{2}r(r+1)$; x^{10} এর সহগ= $\frac{1}{2}(10+1)(10+2)+\frac{1}{2}10(10+1) = 11\times6+5\times11 = 11\times11 = 121$ Ans.

EXERCISE :

01. $\frac{1+x}{(1-x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^{100} এর সহগ কত? Ans.2

02. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^rএর সহগ নির্নয় কর Ans.$2r^2+2r+1$

TYPE – 09 : কিছু ধারার বিস্তৃতি ও বিস্তৃত ধারার সমষ্টি নির্নয় কর

EXAMPLE – 01 : $\left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ কে x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর

এবং দেখাও যে, $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{3}{24}\ldots.. = \frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLVE : $1-\frac{1}{2}(-\frac{x}{8}) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-\frac{x}{8})^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-\frac{x}{8})^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}(-\frac{x}{8})^4 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)(\frac{1}{2}-4)}{5!}(-\frac{x}{8})^5$

$= 1-\frac{1}{2}(-\frac{x}{8}) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}\frac{x^2}{8^2} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} - \frac{x^3}{8^3} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!} - \frac{x^4}{8^4} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{5!} - \frac{x^5}{8^5}$

$= 1-\frac{1}{8}.\frac{x}{2} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24}\ .\frac{x^3}{8^3} - \frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{3}{24}.\frac{5}{32}.\frac{x^4}{2^4}$ আবার $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{3}{24}$

উক্ত ধারায় x=2 হলে প্রাপ্ত ধারাটি প্রদত্ত ধারাকে সিদ্ধ করে।

$\therefore (1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}}$ এ x=2 বসিয়ে পাই, $(1-\frac{2}{8})^{\frac{1}{2}} = (\frac{6}{8})^{\frac{1}{2}} = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ showed.

নিজে চেষ্টা করঃ x এর উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1-\frac{x}{6})^{\frac{1}{2}}$ কে x এর শক্তির পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং দেখাও যে,

$1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\frac{1}{12}\frac{3}{18} - \ldots\ldots.. = \sqrt{\frac{2}{3}}$; Ans. $1-\frac{1}{6}.\frac{x}{2}-\frac{1}{6}.\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}.\frac{x^3}{2^3}. - \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{3}{18}.\frac{5}{24}.\frac{x^4}{2^4}$

TYPE – 10 : অনন্ত ধারার সমষ্টি নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots\ldots\ldots = ?$

SOLVE : $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$ এর সাথে প্রদত্ত ধারাটি মেলাও।

$nx = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2n^2 = \frac{9}{16}$; $\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{3.5}{4.8} \Rightarrow \frac{(nx)^2(n-1)}{n} = \frac{3.5}{4.4}$

$\Rightarrow \frac{9}{16}.\frac{n-1}{n} = \frac{3.5}{16}$; $\Rightarrow 3(n-1)=5n \Rightarrow 3n-3=5n \Rightarrow n = -{}^3/_2$; $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$;প্রদত্ত ধারার সমষ্টি = $(1+\frac{1}{2})^{-3/2}$

$= (\frac{3}{2})^{-3/2}$ Ans.

EXAMPLE – 02 : $1+2\frac{1}{3^2}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}+\frac{2.5.8}{1.2.3}.\frac{1}{3^6}$

সমাধানঃ

$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$

$mx = 2.\frac{1}{3^2} \Rightarrow (nx)^2 \Rightarrow \frac{4}{3^4}$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)x^2}{2!} = \frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}$

$\Rightarrow \frac{(nx)^2(n-1)}{n.2!} = \frac{5}{3^4}$

$\Rightarrow \frac{4}{3^4}.\frac{n-1}{2n} = \frac{5}{3^4}$

$\Rightarrow 2n-2 = 5n$

$\Rightarrow -2 = 5$

$\Rightarrow n = {}^{-2}/_3$

$\therefore x = \frac{2}{3^2}\times\frac{2}{-3}$

প্রদত্ত ধারা সমষ্টি $= (1-\frac{1}{3})^{\frac{-2}{3}}$

$= (\frac{2}{3})^{\frac{-2}{3}} = (\frac{9}{4})^{\frac{1}{3}}$ Ans.

নিজে চেষ্টা কর

(১) প্রমাণ কর যে, $(1+x)^2 = 1+\frac{2x}{1+x}+\frac{3x^2}{(1+x)^2}+\frac{4x^3}{(1+x)^3}$

(২) $1-\frac{1}{5}\frac{4}{10}-\frac{1}{5}.\frac{4}{10}.\frac{7}{15}+\cdots$. Ans. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$

(৩) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{(2!2^4)}+\frac{1.3.5}{(3!2^6)}+$.......Ans. $\sqrt{2}$

(4) $1+2\frac{1}{3^2}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}+\frac{2.5.8}{1.2.3}.\frac{1}{3^6} = ?\ Ans: \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$.

Type-11: সংখ্যামান বৃহত্তম পদ নির্নয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 : $x={}^2/_3$ হলে $(1+x)^{(21/2)}$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যামান বৃহত্তম পদটি নির্নয় কর।

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left|\frac{n-r+1}{r}\right| \frac{x}{a}$ এখানে

সংখ্যা মূলক বৃহত্তম পদের ক্ষেত্রে $T_{r+1} >=< T_r$ হবে।

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left|\frac{\frac{21}{2}-r+1}{r}\right| \times \frac{2}{3} = \left|\frac{21-2r+1}{3r}\right| = \frac{23-2r}{3r}$

$T_{r+1} > T_r$ হলে 23-2r> 3r ⇒ 23 > 5r ⇒ r < $\frac{23}{5}$

$T_{r+1} > T_r$ হলে r = $\frac{23}{5}$

$T_{r+1} = T_r$ হলে r > $\frac{23}{5}$

∴ $\frac{23}{5}$ = 4.6

∴ 5^{th} পদটি বৃহত্তম হবে।

EXAMPLE – 02 : x= $\frac{3}{4}$ হলে $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যা মূলক বৃহত্তম পদটি

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left|\frac{n-r+1}{r}\right|$ x = $\left|\frac{-3-r+1}{r}\right| \times \frac{3}{4} = \left|\frac{-6-3r}{4r}\right| = \frac{6+r}{4}$

$T_{r+1} > T_r$ হলে 6.3r> 4r ⇒ r < 6

$T_{r+1} < T_r$ হলে r> 6

$T_{r+1} = T_r$ হলে r = 6

$\therefore$ r ও $r+1$ তম পদ বৃহত্তম 6th ও 7th term বৃহত্তম

[Note : r পূর্ণ সংখ্যায় পাওয়া গেলে $r \& r+1$তম পদ বৃহত্তম হবে]

নিজে চেষ্টা কর।

x= $\frac{4}{15}$ হলে $(1+x)^{-7}$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যামান বৃহত্তম পদটি নির্নয় কর। Ans 3rd term.

Type-12: দ্বিপদী উপপাদ্যঃ Exponential ও Logarithmic ধারা

(i) $a^x = 1 + \frac{x}{1!}\log_e a + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \ldots\ldots + \frac{x^r}{r!}(\log_e a)^r \ldots\ldots\infty$ এর x→0 তে সীমান্ত মান 1

(ii) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots \infty$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \infty$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \infty$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots$$

$$\frac{e+e^{-1}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \ldots$$

$$\frac{e-e^{-1}}{2} = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \ldots$$

$$e^{ix} = 1 - \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} \ldots$$

i^2 =-1, i^3= -i, i^4 = 1, i^5= i, i^6 =-1, i^7= -i. i^8 =1

$$e^{-ix} = 1 + \frac{(-ix)}{1!} + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \cdots . \mathfrak{D}$$

$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=?$

$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=?$

এখান থেকে $\sin x$ ও $\cos x$ এর ধারা নির্ণয় কর

$\log e$ ধারা $|x| < 1$ এর জন্য

$\log e$ (1+x) = x- $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}...+\ \frac{(-1)^{r-1}}{r}x^r\ +\cdots$.

log (1-x) = - x - $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}....\frac{x^r}{r}x^r$

$\frac{1}{2}$ log $\frac{1+x}{1-x}$ = x+ $\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$

উদাহরণ: $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots..=\frac{1}{n}-\ \frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}$

L.H.S = - $\log_e(1-\frac{1}{1+n})=-\ \log_e(\frac{n}{n+1})$ = $\log_e(\frac{n+1}{n})$

= $\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\cdots\ \frac{(-1)^{r-1}}{rn^r}$

EXAMPLE – 01 : x^2-px+q =0 এর দুটি মূল α ও β হলে দেখাও যে log (1+px+qx^2) = ($\alpha+\beta$)x - $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x+\frac{a^3+b^3}{3}x^3$......

সমাধানঃ উক্ত সমীকরণে $x=\frac{-1}{x}$ বসিয়ে পাই, 1+px+qx^2 =0

$\therefore$ সমীকরণটির মূল দুটি $\frac{-1}{\alpha}3\ \ \frac{-1}{\beta}$ এবং সমীকরণটি (1+ax)(1+bx)

তাহলে log (1+α x) + log (1+β x)

$$= \alpha x - \frac{(\alpha x)^2}{2} + \frac{(\alpha x)^3}{3} ....\infty$$

$$+ \beta x - \frac{(\beta x)^2}{2} + \frac{(\beta x)^3}{3} - ....\infty =$$

$$(\alpha + \beta)x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3}x^3 + ...\infty \quad Showed$$

নিজে চেষ্টা করঃ দেখাও যে,

i. log (1+3x+2x^2) = 3x – $\frac{5x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} - \frac{17x^4}{4}$ +....(-1)$^{n-1}$ $\frac{2^n+1}{n}x^n$

ii. দেখাও যে, $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{5.6} + \cdots \log_e 2$

e- ধারা

EXAMPLE – 02 : দেখাও যে, 1+ $\frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} - \frac{4^3}{4!}$ +....=5e

সাধারণ পদ $= \frac{n^3}{n!}$

$= \frac{n.n^2}{n(n-1)!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n(n-1+n}{(n-1)!}$

$= \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{(n-1)!}$

$= \frac{n-2+2}{(n-2)!} + \frac{n-1+1}{(n-1)!}$

$= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$ n=1, 2, 3, 4...........∞

= e+2e+e+e

= 5e= R.H.S showed.

EXAMPLE – 03: দেখাও যে, 1+ $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3.6} - \frac{2^3}{3.6.9}$ +....=$\sqrt[3]{e^2}$

LHS = 1+ $\frac{2/3}{1!} + \frac{(2/3)^2}{2!} + \frac{(2/3)^3}{3!}$......... ∞

= $c^{2/3}$ = $\sqrt[3]{e^2}$ R.H.S showed.

নিজে চেষ্টা কর (1) প্রমাণ কর যে, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.6}-\frac{1}{3.6.9}+\ldots.=\sqrt[3]{e^2}$

(2) প্রমাণ কর যে, $\sum_{n=2}^{\infty} n_{C_2}\frac{3^{n-1}}{n!}=\frac{1}{2}e^3$

(3) মাননির্ণয় কর $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$ **?**