পাঠ-১

7.1 সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Associated Angles)

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের সময় স্থানাঙ্কের যথাযথ চিহ্ন বিবেচনার বিষয়টি খুবই গুরুত্বপূর্ণ। উল্লেখ্য যে, ব্যাসার্ধ ভেক্টর সর্বদা ধনাত্মক।

আলোচনার এই অংশে প্রথমে ঋণাত্মক কোণ $(-\theta)$ এর অনুপাত নির্ণয় করব। এর ওপর ভিত্তি করে $90° - \theta, 90° + \theta, 180° + \theta, 180° - \theta, 270° + \theta, 270° - \theta, 360° + \theta, 360° - \theta$ এবং $n \times 90° + \theta$ ও $n \times 90° - \theta$ [যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা] এবং $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে আলোচনা করব।

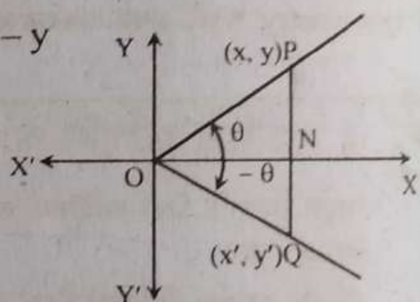
7.1.1 $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, কোনো রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। যদি অপর কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি ঐ একই অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে θ কোণের সম-পরিমাণের $\angle XOQ$ উৎপন্ন করে, তবে $\angle XOQ = -\theta$.

OP এর ওপর যেকোনো বিন্দু P হতে XOX′ এর ওপর PN লম্ব অঙ্কন করি। PN কে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন OQ কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন OPN ও OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle PON = \angle QON$, $\angle ONP = \angle ONQ$ এবং ON সাধারণ বাহু। অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore OP = OQ = r$ (ধরি)

মনে করি, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y') $\therefore x' = x, y' = -y$



এখন, $\sin(-\theta) = \frac{QN}{OQ} = \frac{y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\frac{PN}{ON} = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$.

7.1.2 $(90° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

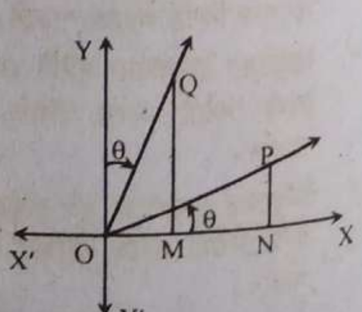
মনে করি, কোনো রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$, $(\theta < 90°)$ উৎপন্ন করে এবং অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOY = 90°$ উৎপন্ন করে এবং পরে বিপরীত দিকে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং $\angle XOQ = 90° - \theta$

এখন রেখাদ্বয়ের শেষ অবস্থান হতে $OP = OQ = r$ অংশ কেটে নিই। P ও Q বিন্দু হতে OX এর ওপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব আঁকি।

চিত্রে, PON ও QOM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ONP = \angle OMQ$ (সমকোণ), $\angle PON = \angle OQM$ (কারণ, $\angle YOQ = \angle OQM$) এবং $OP = OQ$। অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং $QM = ON$ এবং $OM = PN$।

মনে করি, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y')

সুতরাং $x' = OM = PN = y$ এবং $y' = QM = ON = x$



এখন, $\sin(90° - \theta) = \sin\angle MOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \cos\angle MOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta$

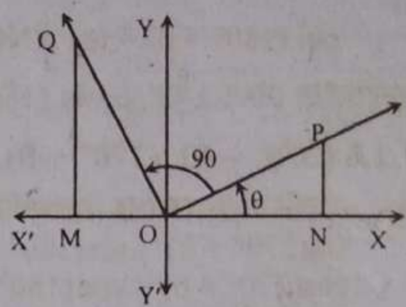
$\tan(90° - \theta) = \tan\angle MOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \frac{ON}{PN} = \cot\theta$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$, $\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ এবং $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

7.1.3 $(90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, কোনো রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$, $(\theta < 90°)$ কোণ এবং একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং $\angle XOQ = 90° + \theta$

এখন রেখাদ্বয়ের শেষ অবস্থান হতে $OP = OQ = r$ অংশ কেটে নিই। P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব আঁকি।



চিত্রে, PON ও QOM সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

সুতরাং $QM = ON$ এবং $OM = PN$

মনে করি, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y')

$\therefore x' = -y$ এবং $y' = x$

এখন, $\sin(90° + \theta) = \sin\angle NOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{y'}{r} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{ON}{OP} = \cos\theta$

$$\cos(90° + \theta) = \cos\angle NOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{x'}{r} = -\frac{y}{r} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta$$

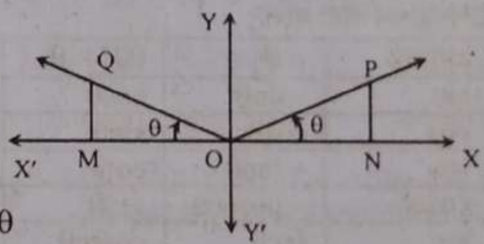
$$\tan(90° + \theta) = \tan\angle NOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y} = -\frac{ON}{PN} = -\cot\theta$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$, $\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$.

7.1.4 $(180° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, কোনো রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$, $(\theta < 90°)$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর কোনো রশ্মি একই আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOX' = 180°$ উৎপন্ন করে এবং পরে বিপরীত দিকে অর্থাৎ, ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle X'OQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং $\angle XOQ = 180° - \theta$.

এখন রেখাদ্বয়ের শেষ অবস্থান হতে $OP = OQ = r$ কেটে নিই। P ও Q বিন্দু হতে XOX′ রেখার ওপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব আঁকি।



চিত্রে, PON ও QOM ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

সুতরাং $OM = ON$ এবং $PN = QM$.

মনে করি, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y').

সুতরাং $x' = -x$ এবং $y' = y$

এখন, $\sin(180° - \theta) = \sin\angle NOQ = \dfrac{QM}{OQ} = \dfrac{y'}{r} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{PN}{OP} = \sin\theta$

$$\cos(180° - \theta) = \cos\angle NOQ = \frac{OM}{OQ} = \frac{x'}{r} = -\frac{x}{r} = -\frac{ON}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = \tan\angle NOQ = \frac{QM}{OM} = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\frac{PN}{ON} = -\tan\theta$$

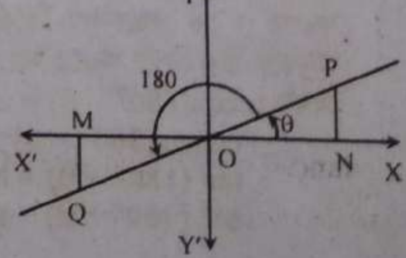
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$, $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

7.1.5 $(180° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, কোনো রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। আবার, রশ্মিটি ঐ একই দিকে আরও অধিক ঘুরে $\angle POQ = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং $\angle XOQ = 180° + \theta$

এখন, রেখাদ্বয়ের শেষ অবস্থান হতে $OP = OQ = r$ কেটে নিই। P ও Q বিন্দু হতে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব আঁকি। চিত্রে, PON ও QOM ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।



সুতরাং $PN = QM$ এবং $ON = OM$.

মনে করি, P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y')।

সুতরাং $x' = -x$ এবং $y' = -y$.

এখন, $\sin(180^\circ+\theta)=\sin\angle N\dot{O}Q=\dfrac{QM}{OQ}=\dfrac{y'}{r}=-\dfrac{y}{r}=-\dfrac{PN}{OP}=-\sin\theta$

$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\angle NOQ=\dfrac{OM}{OQ}=\dfrac{x'}{r}=-\dfrac{x}{r}=-\dfrac{ON}{OP}=-\cos\theta$

$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\angle NOQ=\dfrac{QM}{OM}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-y}{-x}=\dfrac{PN}{ON}=\tan\theta$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\text{cosec}\,(180^\circ+\theta)=-\text{cosec}\theta$, $\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$, $\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta$.

7.1.6 $(270^\circ-\theta)$, $(270^\circ+\theta)$, $(360^\circ-\theta)$ ও $(360^\circ+\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

(i) **$(270^\circ+\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(270^\circ+\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$
$\cos(270^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cos(90^\circ+\theta)=-(-\sin\theta)=\sin\theta$
$\tan(270^\circ+\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$
$\text{cosec}\,(270^\circ+\theta)=\text{cosec}\,\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\text{cosec}\,(90^\circ+\theta)=-\sec\theta$
$\sec(270^\circ+\theta)=\sec\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sec(90^\circ+\theta)=-(-\text{cosec}\,\theta)=\text{cosec}\theta$
$\cot(270^\circ+\theta)=\cot\,\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\cot\,(90^\circ+\theta)=-\tan\theta$

(ii) **$(360^\circ+\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin\,(360^\circ+\theta)=\sin\{270^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cos(90^\circ+\theta)=-(-\sin\theta)=\sin\theta$
$\cos\,(360^\circ+\theta)=\cos\,\{270^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$
$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\{270^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cot(90^\circ+\theta)=-(-\tan\theta)=\tan\theta$
$\text{cosec}\,(360^\circ+\theta)=\text{cosec}\,\{270^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sec\,(90^\circ+\theta)=-(-\text{cosec}\theta)=\text{cosec}\theta$
$\sec(360^\circ+\theta)=\sec\{270^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\text{cosec}(90^\circ+\theta)=\sec\theta$
$\cot(360^\circ+\theta)=\cot\,\{270^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\tan\,(90^\circ+\theta)=-(-\cot\theta)=\cot\theta$

θ কে সূক্ষ্মকোণ ধরে, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মাধ্যমে বিভিন্ন কোণের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ক নিম্নলিখিত ছকে উপস্থাপন করা হলো:

অনুপাত	$-\theta$	$90^\circ-\theta$	$90^\circ+\theta$	$180^\circ-\theta$	$180^\circ+\theta$	$270^\circ-\theta$	$270^\circ+\theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$
cos	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
tan	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$
cosec	$-\text{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\theta$	$-\text{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$
sec	$\sec\theta$	$\text{cosec}\theta$	$-\text{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\text{cosec}\theta$	$\text{cosec}\theta$
cot	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$

দ্রষ্টব্য: উপরে আলোচিত কোণগুলিকে সংযুক্ত কোণ বলে।

কাজ: $(270^\circ-\theta)$ ও $(360^\circ-\theta)$ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

7.1.7 সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের কার্যপদ্ধতি

(i) যদি 90° এর জোড় গুণিতকের সাথে θ কোণকে যোগ বা বিয়োগ করা হয় (যেমন : $180^\circ-\theta$, $180^\circ+\theta$, $360^\circ-\theta$, $360^\circ+\theta$), তবে কোণটিকে কেবলমাত্র θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করতে মূল অনুপাতের কোনো পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ উল্লিখিত সংযুক্ত কোণের সাথে sine, cosine বা tangent থাকলে θ কোণের অনুপাতের সাথেও যথাক্রমে sine, cosine বা tangent অপরিবর্তিত থাকে। তবে অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে θ কে সূক্ষ্মকোণ বিবেচনা করে সংযুক্ত কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে তার নিরীক্ষে চতুর্ভাগ নিয়ম অনুযায়ী চিহ্ন নির্ণয় করতে হয়।

যেমন : $\cos(180^\circ-\theta)=\cos(90^\circ\times 2-\theta)=-\cos\theta$
$\text{cosec}\,(360^\circ-\theta)=\text{cosec}\,(90^\circ\times 4-\theta)=-\text{cosec}\theta$
$\tan\,(180^\circ+\theta)=\tan\,(90^\circ\times 2+\theta)=\tan\theta$
$\sec\,(360^\circ+\theta)=\sec(90^\circ\times 4+\theta)=\sec\theta$

(ii) যদি $90°$ এর বিজোড় গুণিতকের সাথে θ কোণকে যোগ বা বিয়োগ করা হয় (যেমন: $90° - \theta$, $90° + \theta$, $270° - \theta$, $270° + \theta$), তবে কোণটিকে কেবলমাত্র θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করতে মূল অনুপাত তার সহ-অনুপাতে (ছক-1 অনুসারে) পরিবর্তন হয়। অতঃপর অনুপাতের চিহ্ন পূর্বের ন্যায় চতুর্ভাগ হিসাবে নির্ণয় করতে হয়।

যেমন : $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, $\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$

$\sec(270° - \theta) = \sec(90° \times 3 - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270° + \theta) = \cot(90° \times 3 + \theta) = -\tan\theta$

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
sin	cos
cos	sin
sec	cosec
cosec	sec
tan	cot
cot	tan

ছক-1

(iii) যদি সংযুক্ত কোণটি $360°$ অপেক্ষা বৃহত্তর হয় তবে $360°$ বা $360°$ এর গুণিতক বাদ দিয়ে কোণটিকে $360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণে পরিণত করতে হয়। অতঃপর পূর্বের নিয়ম অনুসারে অনুপাতের মান নির্ণয় করতে হয়।

যেমন : $\tan(1650°) = \tan(360° \times 4 + 210°) = \tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

7.1.8 রেডিয়ানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometrical ratio in radian)

যেহেতু $180° = \pi$ রেডিয়ান সুতরাং, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

ফলে $90°, 180°, 270°$ ও $360°$ যথাক্রমে $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ও 2π রেডিয়ানের সমান।

সুতরাং, সংযুক্ত কোণ $90° - \theta, 90° + \theta, 180° - \theta, 180° + \theta, 270° - \theta, 270° + \theta, 360° - \theta, 360° + \theta$ কে যথাক্রমে $\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} + \theta, \pi - \theta, \pi + \theta, \frac{3\pi}{2} - \theta, \frac{3\pi}{2} + \theta, 2\pi - \theta, 2\pi + \theta$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

যেমন : $\cos(180° + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ এবং $\tan(270° - \theta) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ ইত্যাদি।

কাজ: (i) $\cos 1050°$ এর মান নির্ণয় কর। **(ii)** মান নির্ণয় কর: $\sin 420° \cos 390° + \sin(-300°) \cos(-330°)$ **(iii)** $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. মান নির্ণয় কর : $\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{14} + \cos^2\frac{8\pi}{7} + \cos^2\frac{9\pi}{14}$ [কু: বো: ১৬; সি: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ০৯]

সমাধান: $\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{14} + \cos^2\frac{8\pi}{7} + \cos^2\frac{9\pi}{14} = \cos^2\frac{\pi}{7} + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$

$= \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} = 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7}\right\} = 2.$

উদাহরণ-2. যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হয়; তবে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক, কাজেই $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ ঋণাত্মক হবে।

এখন, $\tan^2\theta = \frac{25}{144} \Rightarrow \sec^2\theta - 1 = \frac{25}{144} \Rightarrow \sec^2\theta = \frac{25}{144} + 1 \therefore \sec\theta = \pm\sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{-13}{12}$; [$\because$ $\sec\theta$ ঋণাত্মক]

সুতরাং $\cos\theta = \frac{-12}{13}$ এবং $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$; [$\because$ $\sin\theta$ ঋণাত্মক]

এখন, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{\frac{-5}{13} - \frac{12}{13}}{\frac{-13}{12} + \frac{5}{12}} = \frac{\frac{-17}{13}}{\frac{-8}{12}} = \frac{17}{13} \times \frac{12}{8} = \frac{51}{26}$

পাঠ-২

অনুশীলনী-7(A)

1. মান নির্ণয় কর : (i) $\sec 3630°$ (ii) $\cot(-1575°)$ (iii) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{19\pi}{3}\right)$ (iv) $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা।
(v) $\tan\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$, যেখানে n শূন্য বা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। (vi) $\cos\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)$, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা।

2. মান নির্ণয় কর :
(i) $\sin 780° \cos 390° + \sin(-330°)\cos(-300°)$
(ii) $\tan 18° + \cos 102° + \tan 162° + \cos 438°$ [সি: বো: ০৬]
(iii) $\tan\frac{17\pi}{4}\cos\left(\frac{-11\pi}{4}\right)+\sec\left(\frac{-34\pi}{3}\right)\mathrm{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$
(iv) $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$ [ব: বো: ০৩] (v) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

3. মান নির্ণয় কর:
(i) $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$ [য: বো: ১১; ব: বো: ১০; সি: বো: ০৯]
(ii) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$ [ঢা: বো: ১৩]
(iii) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$ [রা: বো: ১৩]
(iv) $\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\frac{31\pi}{24}+\cos^2\frac{37\pi}{24}$
(v) $\sec^2\frac{14\pi}{17}-\sec^2\frac{39\pi}{17}+\cot^2\frac{41\pi}{34}-\cot^2\frac{23\pi}{34}$ [য: বো: ০৬]

4. দেখাও যে, (i) $\sin^2 15°+\sin^2 20°+\sin^2 25°+\dots\dots+\sin^2 75°=\frac{13}{2}$
(ii) $\cos^2 3°+\cos^2 9°+\cos^2 15°+\dots\dots+\cos^2 177°=15$
(iii) $\cos^2 10°+\cos^2 20°+\cos^2 30°+\dots\dots+\cos^2 80°=4.$

5. (i) যদি $\tan\theta=\frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ধনাত্মক হয়, তবে $\frac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$ -এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ১১-১২]
(ii) যদি $\sin\theta=\frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ হয়, তবে $\frac{\tan\theta+\sec(-\theta)}{\cot\theta+\mathrm{cosec}(-\theta)}$ -এর মান নির্ণয় কর।
[য: বো: ১২; দি: বো: ১৪; চ: বো: ০৯]
(iii) যদি $\alpha=\frac{11\pi}{4}$ হয়, তবে $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-2\tan\alpha-\sec^2\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $\theta=\frac{\pi}{20}$ হলে দেখাও যে, $\cot\theta\cot3\theta\cot5\theta\dots\dots\cot19\theta=-1$ [বুয়েট ১১-১২]

7. যদি $x=r\sin(\theta+45°)$ এর $y=r\sin(\theta-45°)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=r^2$.

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ii) 1 (iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\frac{1}{2}$ (v) 1 (vi) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2. (i) 1 (ii) 0 (iii) $-\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iv) 1 (v) 1
3. (i) 2 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 2 (v) 0 5. (i) $\frac{34}{39}$ (ii) $\frac{3}{10}$ (iii) 0

পাঠ-৩

7.2 যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometric Ratios of Compound Angles)

দুই বা ততোধিক কোণের যোগফল বা বিয়োগফলকে যৌগিক কোণ বলে। $A + B$, $A + B + C$, $A - B$, $A - B + C$ প্রভৃতি যৌগিক কোণের উদাহরণ।

7.2.1 A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A + B < 90°$ হলে,

(i) $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ [ঢা: বো: ১৬, ০৩; সি: বো: ০৪; দি: বো: ১১; চ: বো: ১৩]

(ii) $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

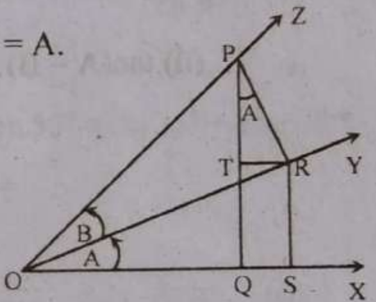
[ঢা: বো: ১০, ০৯, ০৪; সি: বো: ১০; ব: বো: ০৯; কু: বো: ১০, ০৪; রা: বো: ০৯; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১১]

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOY = A$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে $\angle YOZ = B$ উৎপন্ন করে। সুতরাং $\angle XOZ = \angle XOY + \angle YOZ = A + B$.

রশ্মিটির শেষ অবস্থান OZ এর ওপর যেকোনো বিন্দু P লই। P বিন্দু হতে OX ও OY এর ওপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব আঁকি। আবার R বিন্দু হতে OX ও PQ এর ওপর যথাক্রমে RS ও RT লম্ব আঁকি।

ΔPRT এ $\angle PTR = 90°$ $\therefore \angle RPT = 90° - \angle PRT = \angle TRO$

আবার, $RT \parallel OX$, OR ছেদক, কাজেই $\angle TRO = \angle XOR = A$ $\therefore \angle RPT = A$.



এখন POQ সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$(i)\ \sin (A + B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PT + TQ}{OP} = \frac{PT + RS}{OP}$$
$$= \frac{RS + PT}{OP} = \frac{RS}{OP} + \frac{PT}{OP} = \frac{RS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} + \frac{PT}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$
$$= \sin A \cos B + \cos \angle RPT \sin B$$
$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$(ii)\ \cos (A + B) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OS - QS}{OP} = \frac{OS - TR}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{TR}{OP} = \frac{OS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{TR}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$
$$= \cos A \cos B - \sin \angle RPT \sin B = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

7.2.2 A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, $A + B < 90°$ এবং $A > B$ হলে

(i) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ [য: বো: ০৬; কু: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১২, ০৯]

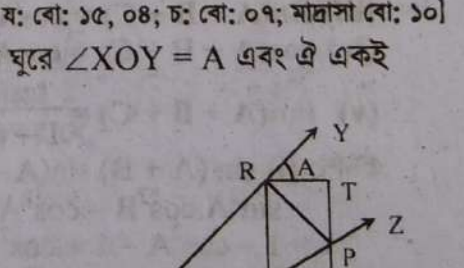
(ii) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

[কু: বো: ০৬; সি: বো: ০৩; রা: বো: ০৭, ০৪; য: বো: ১৫, ০৪; চ: বো: ০৭; মাদ্রাসা বো: ১০]

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ঘূর্নায়নমান রশ্মি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOY = A$ এবং ঐ একই রশ্মি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে $\angle YOZ = B$ উৎপন্ন করে।

সুতরাং $\angle XOZ = \angle XOY - \angle YOZ = A - B$.

এখন রশ্মিটির শেষ অবস্থান OZ এর ওপর যেকোনো বিন্দু P লই। P বিন্দু হতে OX ও QY এর ওপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব আঁকি। আবার, R বিন্দু হতে OX এর ওপর RS ও QP এর বর্ধিতাংশের ওপর RT লম্ব আঁকি।



ΔPRT এ $\angle PTR = 90°$ $\therefore \angle RPT = 90° - \angle PRT = \angle TRY$

আবার, $RT \parallel OX$, OY ছেদক, কাজেই $\angle TRY = \angle XOR = A$.

$\therefore \angle RPT = A$.

এখন, POQ সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$\sin (A - B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{TQ - TP}{OP} = \frac{RS - TP}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{TP}{OP} = \frac{RS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{TP}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$
$$= \sin A \cos B - \cos \angle RPT \sin B = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

আবার, $\cos(A-B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS+SQ}{OP}=\frac{OS+RT}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{RT}{OP}=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{RT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$

$=\cos A\cos B+\sin\angle RPT\sin B=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

দ্রষ্টব্য: $\sin(A+B)$ ও $\cos(A+B)$ যোগসূত্র এবং $\sin(A-B)$ ও $\cos(A-B)$ বিয়োগসূত্র নামে পরিচিত।

7.2.3 দুইটি কোণের যোগফল ও বিয়োগফলের ট্যানজেন্ট সূত্র

(i) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ **(ii)** $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

প্রমাণ: (i) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

$=\dfrac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$ [লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করে]

$=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

$=\dfrac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$ [লব ও হরকে $\cos A\cos B$ দ্বারা ভাগ করে]

$=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

কাজ: প্রমাণ কর: (i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$; (ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(i) ও (ii) দুইটি কোণের যোগফল ও বিয়োগফল কী সূত্র নামে পরিচিত?

নিম্নবর্ণিত সূত্রসমূহ শিক্ষার্থীরা বিনা প্রমাণে ব্যবহার করতে পারবে।

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A$

(iii) $\sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$

(iv) $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B)$

(v) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$

প্রমাণ: (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B=\sin^2A(1-\sin^2B)-\sin^2B(1-\sin^2A)=\sin^2A-\sin^2B$

$=1-\cos^2A-1+\cos^2B=\cos^2B-\cos^2A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B=\cos^2A(1-\sin^2B)-\sin^2B(1-\cos^2A)=\cos^2A-\sin^2B$

$=1-\sin^2A-1+\cos^2B=\cos^2B-\sin^2A$

(iii) $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}-\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\right)$

$=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$

(iv) $\cos(A+B+C) = \cos\{(A+B)+C)\} = \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C$
$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\cos C - (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\sin C$
$= \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C$
$= \cos A\cos B\cos C\left(1 - \frac{\sin A}{\cos A}\frac{\sin B}{\cos B} - \frac{\sin C}{\cos C}\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}\frac{\sin C}{\cos C}\right)$
$= \cos A\cos B\cos C\,(1 - \tan A\tan B - \tan C\tan A - \tan B\tan C)$
$= \cos A\cos B\cos C\,(1 - \tan B\tan C - \tan C\tan A - \tan A\tan B)$

(v) $\tan(A+B+C) = \tan\{(A+B)+C\} = \dfrac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$

$$= \frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C} = \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan C\tan A-\tan B\tan C}$$

$$= \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$$

দ্রষ্টব্য: $A+B, A-B, A+B+C, A+B-C$ ইত্যাদি কোণগুলি যৌগিক কোণ নামে পরিচিত।

কাজ: (i) মান নির্ণয় কর: $\cos 81°26' \cos 21°26' + \cos 8°34' \cos 68°34'$
(ii) $\cos 68°20' \cos 8°20' + \cos 81°40' \cos 21°40'$
(iii) প্রমাণ কর যে, $\tan 23° = \dfrac{\sin 68° - \sin 22°}{\sin 68° + \sin 22°}$; (iv) প্রমাণ কর যে, $\tan 55° = \tan 35° + 2\tan 20°$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. মান নির্ণয় কর: $\sin 28°32' \sin 88°32' + \sin 61°28' \sin 1°28'$

সমাধান: $\sin 28°32' \sin 88°32' + \sin 61°28' \sin 1°28'$
$= \sin 28°32' \sin(90° - 1°28') + \sin(90° - 28°32')\sin 1°28'$
$= \sin 28°32' \cos 1°28' + \cos 28°32' \sin 1°28' = \sin(28°32' + 1°28') = \sin 30° = \frac{1}{2}$

উদাহরণ-2. দেখাও যে, $\tan 36° + \tan 9° + \tan 36° \tan 9° = 1$ [কুয়েট ০৪-০৫; ব: বো: ০৪]

সমাধান: আমরা জানি, $\tan 45° = 1 \Rightarrow \tan(36° + 9°) = 1 \Rightarrow \dfrac{\tan 36° + \tan 9°}{1 - \tan 36° \tan 9°} = 1$
$\Rightarrow \tan 36° + \tan 9° + \tan 36° \tan 9° = 1$

উদাহরণ-3. মান নির্ণয় কর: $\sin 15°$ [কু: বো: ০৫]

সমাধান: $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

উদাহরণ-4. যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
(i) **$\tan A = \tan B + \tan C$** [রা: বো: ১৪; ব: বো: ১৩; কু: বো: ১৩; দি: বো: ১৩]
(ii) **$\tan B \tan C = 2$** [য: বো: ০৯, ০৩; ব: বো: ০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$

(i) ডানপক্ষ $= \tan B + \tan C = \dfrac{\sin B}{\cos B} + \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\sin B\cos C + \cos B\sin C}{\cos B\cos C}$
$= \dfrac{\sin(B+C)}{\cos A} = \dfrac{\sin(\pi - A)}{\cos A} = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A =$ বামপক্ষ

(ii) দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi \Rightarrow A = \pi - (B + C)$
$\therefore \cos A = \cos\{\pi - (B + C)\} = -\cos(B + C)$
$\Rightarrow \cos B\cos C = -(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$ [$\because \cos A = \cos B\cos C$]
$\Rightarrow 2\cos B\cos C = \sin B\sin C \Rightarrow \dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C} = 2 \Rightarrow \tan B\tan C = 2$

পাঠ-৪

অনুশীলনী-7(B)

1. মান নির্ণয় কর: (i) $\cos 15^\circ$ (ii) $\sin 105^\circ$ (iii) $\operatorname{cosec} 375^\circ$ (iv) $\cos 75^\circ$ (v) $\tan 15^\circ$
2. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{5}{13}$ হলে, $\sin(A-B)$ ও $\cos(A+B)$ এর মান নির্ণয় কর।
3. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan A = \frac{2}{11}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ হলে, $\cot(A-B)$ এবং $\tan(A+B)$ এর মান নির্ণয় কর।
4. মান নির্ণয় কর: (i) $\cos 17^\circ 40' \sin 77^\circ 40' + \cos 107^\circ 40' \sin 12^\circ 20'$ (ii) $\frac{\tan 65^\circ 35' - \cot 69^\circ 25'}{1 + \tan 65^\circ 35' \cot 69^\circ 25'}$

প্রমাণ কর (5 – 13) :

5. (i) $\cos(x-60^\circ)\cos(x-30^\circ) - \sin(x-60^\circ)\sin(x+330^\circ) = \sin 2x$
   (ii) $\sin x \sin(x+30^\circ) + \cos x \sin(x+120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [কুয়েট ০৭-০৮]
6. $\cos A + \cos(120^\circ - A) + \cos(120^\circ + A) = 0$
7. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = 0$
8. (i) $\frac{\cos(45^\circ + A) + \cos(45^\circ - A)}{\cos(45^\circ - A) - \cos(45^\circ + A)} = \cot A$
   (ii) $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = \sin 2\theta$
9. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+B\right) = \cos(A+B) + \sin(A-B)$
10. (i) $\tan 70^\circ = \tan 20^\circ + 2\tan 50^\circ$ [বুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ১৫, ১০; ব: বো: ০৬; চ: বো: ০৫]
    (ii) $\tan 54^\circ = \tan 36^\circ + 2\tan 18^\circ$
    (iii) $\tan\frac{\pi}{20} + \tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{\pi}{20}\tan\frac{\pi}{5} = 1$
11. $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sin 2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha}$ [সি: বো: ১৩]
12. $\cot(A+B) + \cot(A-B) = \frac{\sin 2A}{\sin^2 A - \sin^2 B}$
13. (i) $\frac{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ} = \tan 53^\circ$
    (ii) $\frac{\cos 25^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ - \sin 25^\circ} = \cot 20^\circ$ [বুয়েট ১০-১১]
    (iii) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}$ [মাদ্রাসা বো: ১০]
    (iv) $\frac{\cos 27^\circ - \cos 63^\circ}{\cos 27^\circ + \cos 63^\circ} = \tan 18^\circ$

14. যদি $\cot\alpha + \cot\beta = a$, $\tan\alpha + \tan\beta = b$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{ab}{a-b}$
[কুয়েট ১২-১৩, ১০-১১; ঢা: বো: ১১; রা: বো: ১৫; দি: বো: ১৬; চ: বো: ১৬, ১২; য: বো: ০৮]

15. যদি $\tan\alpha - \tan\beta = a$ এবং $\cot\beta - \cot\alpha = b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cot(\alpha - \beta) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

16. যদি $A + B = \frac{\pi}{4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ [বুয়েট ১০-১১]

17. যদি $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $1 + \cot\alpha\tan\beta = 0$ [সি: বো: ১৬; য: বো: ০৭]

18. যদি $a\sin(\theta + \alpha) = b\sin(\theta + \beta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot\theta = \frac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ [য: বো: ০৫]

19. যদি $\sin\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan\beta}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan\beta} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$

20. যদি $\theta + \phi = \alpha$ এবং $\tan\theta = k\tan\phi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sin(\theta - \phi) = \frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ [কুয়েট ০৩-০৪]

21. যদি $\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta$ [কু: বো: ১২]

22. যদি $\tan\beta = \frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cot\gamma + \cot\alpha = 2\cot\beta$

23. যদি $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$

24. যদি $\sqrt{2}\cos A = \cos B + \cos^3 B$ এবং $\sqrt{2}\sin A = \sin B - \sin^3 B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\sin(A - B) = \pm\frac{1}{3}$ [ঢা: বো: ০৪]

25. (i) যদি $a\cos(x + \alpha) = b\cos(x - \alpha)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(a + b)\tan x = (a - b)\cot\alpha$ [ঢা: বো: ০৫]
(ii) যদি $a\sin(x + \theta) = b\sin(x - \theta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(a - b)\tan x + (a + b)\tan\theta = 0$.

26. যদি $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan(\alpha - \beta) = (1 - n)\tan\alpha$

27. θ কোণকে α ও β অংশে এমন ভাবে বিভক্ত করা হলো যেন $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$\sin(\alpha - \beta) = \frac{x - y}{x + y}\sin\theta$.

28. $\cot\theta = \frac{a\cos x - b\cos y}{a\sin x + b\sin y}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{\sin(\theta - x)}{\sin(\theta + y)} = \frac{b}{a}$.

উত্তরমালা

1. (i) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (iii) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$
(iv) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ (v) $2 - \sqrt{3}$

2. $\frac{16}{65}, \frac{33}{65}$ 3. $-\frac{278}{29}, \frac{1}{2}$

4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) 1

পাঠ-৫ ও ৬

7.2.5 দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফলকে অপর দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ–

আমরা জানি, $\sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin(A + B)$ ... ... (i)

এবং $\sin A\cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B)$ ... ... (ii)

(i) + (ii) হতে পাই, $2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ ... ... (1)

(i) – (ii) হতে পাই, $2\cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ ... ... (2)

আবার, $\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A + B)$ ... ... (iii)

এবং $\cos A\cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$ ... ... (iv)

(iii) + (iv) হতে পাই, $2\cos A\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ ... ... (3)

(iv) – (iii) হতে পাই, $2\sin A\sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ ... ... (4)

7.2.6 দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের যোগফল বা বিয়োগফলকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের গুণফল রূপে প্রকাশ–

(1) হতে (4) নং সূত্রে $A + B = C$ ও $A - B = D$, অর্থাৎ $A = \frac{C+D}{2}$ ও $B = \frac{C-D}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \text{... ... (5)}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \text{... ... (6)}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \text{... ... (7)}$$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad \text{... ... (8)}$$

কাজ: $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cot B \cot C = \frac{1}{2}$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. প্রমাণ কর যে, $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$ [বুটেক্স ১১-১২; রা: বো: ১০; কু: বো: ০৯; ব: বো: ০৭; চ: বো: ০৬]

সমাধান: বামপক্ষ $= \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ$

$$= \tan 20^\circ \tan(60^\circ - 20^\circ)\tan(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \tan 20^\circ . \frac{\tan 60^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 60^\circ . \tan 20^\circ} . \frac{\tan 60^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 60^\circ . \tan 20^\circ}$$

$$= \tan 20^\circ . \frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{1 + \sqrt{3}\tan 20^\circ} . \frac{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{1 - \sqrt{3}\tan 20^\circ}$$

$$= \tan 20^\circ . \frac{(\sqrt{3})^2 - \tan^2 20^\circ}{1 - (\sqrt{3}\tan 20^\circ)^2}$$

$$= \tan 20^\circ . \frac{3 - \tan^2 20^\circ}{1 - 3\tan^2 20^\circ}$$

$$= \frac{3\tan 20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1 - 3\tan^2 20^\circ} = \tan(3.20^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ-2. যদি $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ [কু: বো: ০৮; সি: বো: ০৩]

সমাধান: দেওয়া আছে, $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

$$\Rightarrow b(\sin\alpha - \sin\beta) = a(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow 2b\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2a\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = a\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$$\therefore \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

অনুশীলনী-7(C)

প্রমাণ কর (1 –11):

1. (i) $\cos40° + \cos80° + \cos160° = 0$
   (ii) $\sin50° - \sin70° + \sin10° = 0$
2. (i) $\cos(60° - \theta) + \cos(60° + \theta) - \cos\theta = 0$
   (ii) $\sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta) = 0$ [ঢা: বো: ১২]
   (iii) $\sin\theta\sin(60° - \theta)\sin(60° + \theta) = \frac{1}{4}\sin3\theta$
3. (i) $\cos10°\cos30°\cos50°\cos70° = \frac{3}{16}$
   (ii) $\sin20°\sin40°\sin60°\sin80° = \frac{3}{16}$
   (iii) $\cos20°\cos40°\cos60°\cos80° = \frac{1}{16}$

4. (i) $\sin 18° + \cos 18° = \sqrt{2}\cos 27°$ [বুয়েট ১৩-১৪]

(ii) $\sin 27° + \cos 27° = \sqrt{2}\cos 18°$ [কুয়েট ০৬-০৭; ব: বো: ১১]

(iii) $\sin 105° + \cos 105° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iv) $\cos 85° + \sin 85° = \sqrt{2}\cos 40°$ [চুয়েট ০৪-০৫]

5. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 10° - 2\sin 70° = 1.$

6. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

7. $\frac{\sin\theta + \sin 5\theta + \sin 9\theta + \sin 13\theta}{\cos\theta + \cos 5\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta} = \tan 7\theta$

8. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C) = 4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

9. (i) $\tan\frac{45° + \theta}{2}\tan\frac{45° - \theta}{2} = \frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1}$ [ঢা: বো: ১৬, ০৮; রা: বো: ১৬; ব: বো: ০৯; য: বো: ১১; কু: বো: ০৮]

(ii) $\cot\frac{60° + \theta}{2}\cot\frac{60° - \theta}{2} = \frac{2\cos\theta + 1}{2\cos\theta - 1}$

10. (i) $\tan(45° + \theta) + \tan(45° - \theta) = 2\sec 2\theta$

(ii) $\cot(\alpha + 15°) - \tan(\alpha - 15°) = \frac{4\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha + 1}$

11. $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sec 2\theta$

12. যদি $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হয়, তবে দেখাও যে, $A + B = \frac{\pi}{2}$

[কু: বো: ১২; সি: বো: ০৯; দি: বো: ১০; চ: বো: ১০]

13. (i) যদি $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan A\tan B = \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$

(ii) যদি $\sin x = m\sin y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{1}{2}(x - y) = \frac{m-1}{m+1}\tan\frac{1}{2}(x + y)$

(iii) যদি $\sin 2\alpha = k\sin 2\theta$ হলে দেখাও যে, $\tan(\alpha - \theta) = \frac{k-1}{k+1}\tan(\alpha + \theta)$ [চ: বো: ০৩]

(iv) যদি $x + y = \theta$ এবং $\cos x = m\cos y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{1}{2}(x - y) = \frac{1-m}{1+m}\cot\frac{\theta}{2}$

14. যদি $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$

15. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n = \begin{cases} 2\cot^n\frac{A-B}{2}; & \text{যখন } n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ 0 & \text{;যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$

পাঠ-৭

7.2.7 গুণিতক কোণ (Multiple angles)

একটি কোণকে কোনো পূর্ণসংখ্যা দ্বারা গুণ করলে উক্ত কোণের গুণিতক কোণ পাওয়া যায়।
যেমন : A কোণের গুণিতক কোণগুলি 2A , 3A, 4A ইত্যাদি।

2A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে A কোণের অনুপাতে প্রকাশ

আমরা জানি, $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

এখন, $B = A$ বসিয়ে পাই, $\sin 2A = \sin A\cos A + \cos A\sin A = 2\sin A\cos A$ ... ... (i)

আবার, $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

এখন, $B = A$ বসিয়ে পাই, $\cos 2A = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A \qquad \text{... ... (ii)}$$
$$= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$$
$$= 1 - 2\sin^2 A \qquad \text{... ... (iii)}$$

(ii) নং হতে পাই, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$ ... ... (iv)

(iii) নং হতে পাই, $1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$ ... ... (v)

(iv) নং হতে পাই, $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A$ ... ... (vi)

আবার, আমরা জানি, $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$B = A$ বসিয়ে পাই, $\tan 2A = \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A.\tan A} = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ ... ... (vii)

sin 2A এবং cos2A অনুপাতকে tanA অনুপাতে প্রকাশ

(i) নং হতে পাই, $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2.\dfrac{\sin A}{\cos A}.\cos^2 A$

$$= 2\tan A.\frac{1}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A} \qquad \text{... ... (viii)}$$

(ii) নং হতে পাই, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= \cos^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$
$$= \frac{1}{\sec^2 A}(1 - \tan^2 A)$$
$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \qquad \text{... ... (ix)}$$

3A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ

$\sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A.$

$= 2\sin A\cos A.\cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$ [(i) ও (iii) নং এর সাহায্যে]

$= 2\sin A\cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$ ... ... (x)

$\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A.\sin A$ [(i) ও (iv) নং এর সাহায্যে]

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$ ... ... (xi)

এবং $\tan 3A = \tan(2A + A) = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A} \quad \text{[(vii) নং এর সাহায্যে]}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

উদাহরণ: দেখাও যে, $4\cos^3 x \sin 3x + 4\sin^3 x \cos 3x = 3\sin 4x$

সমাধান: বামপক্ষ $= 2\cos^2 x\,(2\sin 3x\,.\cos x) + 2\sin^2 x\,(2\cos 3x.\,\sin x)$

$= 2\cos^2 x\,(\sin 4x + \sin 2x) + 2\sin^2 x\,(\sin 4x - \sin 2x)$

$= 2\sin 4x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin 2x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\sin 4x + 2\sin 2x \cos 2x = 2\sin 4x + \sin 4x$

$= 3\sin 4x =$ ডানপক্ষ

কাজ: (i) $\tan\theta = \sec 2\alpha$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin 2\theta = \dfrac{1 - \tan^4\alpha}{1 + \tan^4\alpha}$

(ii) $\tan x = \dfrac{b}{a}$ হলে দেখাও যে, $a\cos 2x + b\sin 2x = a$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta + 5\cos 2\theta = 3$

(iv) প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \dfrac{1}{\cos 20^\circ} = 4$ [ব: বো: ১৬]

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. প্রমাণ কর যে, (i) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ (ii) $\sin 8\theta = 8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

সমাধান: (i) বামপক্ষ $= \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$

$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 =$ ডানপক্ষ

(ii) বামপক্ষ $= \sin 8\theta = 2\sin 4\theta\cos 4\theta = 4\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$

$= 8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ-2. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$ [ঢা: বো: ১০, ০৭; কু: বো: ০৬; চ: বো: ১৪, ১২, ০৮, ০৪; রা: বো: ১৫, ০৭; দি: বো: ১৫, ১১; সি: বো: ১২; ব: বো: ০৮; য: বো: ১৩, ০৯]

সমাধান: বামপক্ষ $= \dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \dfrac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\frac{1}{4}.\,2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$

$= \dfrac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = \dfrac{4\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \dfrac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4 =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ-3. প্রমাণ কর যে, $\sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60° - A) = \frac{3}{2}$ [রা: বো: ১২; চ: বো: ১১; কু: বো: ০৫]

সমাধান: বামপক্ষ $= \sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60° - A)$

$$= \frac{1}{2}\{2\sin^2(60° + A) + 2\sin^2 A + 2\sin^2(60° - A)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2(60° + A) + 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2(60° - A)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{3 - \cos(120° + 2A) - \cos 2A - \cos(120° - 2A)\}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A - \frac{1}{2}\{\cos(120° + 2A) + \cos(120° - 2A)\}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A - \frac{1}{2}.2\cos 120° \cos 2A$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A - \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2A$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{2}\cos 2A = \frac{3}{2} = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ-4. প্রমাণ কর যে, $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$ [য: বো: ০৩]

সমাধান: বামপক্ষ $= \cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A)\cos 3A + \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)\sin 3A$$

$$= \frac{1}{4}(\cos^2 3A - \sin^2 3A) + \frac{3}{4}(\cos 3A \cos A + \sin 3A \sin A)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 6A + \frac{3}{4}\cos(3A - A)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 6A + 3\cos 2A) = \cos^3 2A = \text{ডানপক্ষ}$$

উদহারণ-5. প্রমাণ কর যে, $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$

[বুয়েট ০০-০১; কুয়েট ০৯-১০; ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ০৪; য: বো: ১৪; ব: বো: ১৫, ১৩; দি: বো: ১৬, ১৪; সি: বো: ১৬, ১৪; মাদ্রাসা বো: ১৪]

সমাধান: বামপক্ষ $= 16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}$

$$= 16\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta \quad \left[\frac{2\pi}{15} = \theta \text{ ধরি}\right]$$

$$= \frac{8}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos\theta)\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta$$

$$= \frac{4}{\sin\theta}(2\sin 2\theta\cos 2\theta)\cos 4\theta\cos 7\theta$$

$$= \frac{2}{\sin\theta}(2\sin 4\theta\cos 4\theta)\cos 7\theta = \frac{1}{\sin\theta}(2\sin 8\theta\cos 7\theta)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}(\sin 15\theta + \sin\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(\sin 2\pi + \sin\theta) \quad [\because 2\pi = 15\theta]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}(0 + \sin\theta) = 1 = \text{ডানপক্ষ।}$$

পাঠ-৮

অনুশীলনী-7(D)

প্রমাণ কর (1 –16):

1. $\sqrt{\dfrac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}} = \tan\theta$
2. $\dfrac{1+\cos2A+\sin2A}{1-\cos2A+\sin2A} = \cot A$
3. $2\cos2A + 1 = (2\cos A + 1)(2\cos A - 1)$
4. $\sec2\theta - \tan2\theta = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$
5. $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\theta)$
6. (i) $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$
   (ii) $\cos5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ [রা: বো: ১১]
7. (i) $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{1+\sin 2\theta}} = 1$ (ii) $\dfrac{\cos x - \cos2x}{1-\cos x} = 2\cos x + 1$
8. $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos4x}}}$ [ঢা: বো: ১৪; দি: বো: ০৯; য: বো: ০৫]
9. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ [রা: বো: ১০; সি: বো: ০৫]
10. $\cos^2(A-120°) + \cos^2A + \cos^2(A+120°) = \frac{3}{2}$ [ঢা: বো: ০৩; দি: বো: ১৩; কু: বো: ০৭; য: বো: ১৫, ০৮]
11. (i) $\cos^3x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x) = \frac{1}{4}(6\cos x - \cos3x)$
    (ii) $\sin^3x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = -\frac{3}{4}\sin 3x$
    [বুয়েট ১১-১২; সি: বো: ১০, ০৪; রা: বো: ০৬; চ: বো: ০৭; ব: বো: ১৪]
    (iii) $\cos^3x + \cos^3(120° + x) + \cos^3(240° + x) = \frac{3}{4}\cos3x$
12. $\tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 8\cot8\theta = \cot\theta$ [সি: বো: ০৮]
13. $(2\cos\theta - 1)(2\cos2\theta - 1)(2\cos2^2\theta - 1)\ldots(2\cos2^{n-1}\theta - 1) = \dfrac{2\cos2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$
14. যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, (i) $\cos2\theta = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$;
    (ii) $\cos3\theta = \frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$
15. যদি $\tan\theta = \frac{1}{3}$ এবং $\tan\varphi = \frac{1}{7}$ হয় তবে দেখাও যে, $\sin4\theta = \cos2\varphi$
16. যদি $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos2\varphi = 1 + 2\cos2\theta$
17. (i) যদি $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos2\beta}$
    (ii) যদি $\tan\alpha = 2\tan\beta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{3\sin2\alpha}{1 + 3\cos2\alpha}$

পাঠ-৯

7.2.8 উপ-গুণিতক কোণ (Sub-multiple angles)

একটি কোণকে কোনো পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে উক্ত কোণের উপ-গুণিতক কোণ পাওয়া যায়।

যেমন : A কোণের উপ-গুণিতক কোণসমূহ $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}$ ইত্যাদি।

উপ-গুণিতক কোণের সূত্রসমূহ:

(i) $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

(ii) $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

(iii) $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

(iv) $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

(v) $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$

(vi) $\cos\theta = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$

(vii) $\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$

দ্রষ্টব্য: গুণিতক কোণের সূত্রসমূহে $A = \frac{\theta}{2}$ বসিয়ে সূত্রগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

$22\frac{1°}{2}$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$$\sin 22\frac{1°}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin 22\frac{1°}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sin^2 22\frac{1°}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos45°}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

আবার, $\cos 22\frac{1°}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\cos 22\frac{1°}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\cos^2 22\frac{1°}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos45°}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

18° ও 36° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\theta = 18°$ $\therefore 5\theta = 90°$ এখন $2\theta = 5\theta - 3\theta = 90° - 3\theta$

$\therefore \sin2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos3\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$

$\Rightarrow 2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$ [$\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে, যেহেতু $\cos 18° \neq 0$]

$\Rightarrow 2\sin\theta = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$

যেহেতু $\theta = 18°$, অর্থাৎ θ সূক্ষ্মকোণ, কাজেই $\sin\theta$ ধনাত্মক। $\therefore \sin18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

এখন, $\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2}$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16-5+2\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

আবার, $\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ = 1-2.\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{16-2(5-2\sqrt{5}+1)}{16} = \frac{4+4\sqrt{5}}{16} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

এবং $\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16-5-2\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

15° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2 = \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ + 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 + \sin 30^\circ$

$\therefore \quad \cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \sqrt{1+\sin 30^\circ}$ [15° সূক্ষ্মকোণ বলে ধনাত্মক চিহ্ন নেয়া হয়েছে।]

$$= \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{... ... (i)}$$

আবার, $(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)^2 = \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ - 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 - \sin 30^\circ$

$\therefore \quad \cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sqrt{1-\sin 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ... ... (ii)

এখন, (i) + (ii) $\Rightarrow 2\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ $\quad \therefore \cos 15^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

এবং (i) – (ii) $\Rightarrow 2\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ $\quad \therefore \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

দ্রষ্টব্য: 15°, 18°, 30°, 36° ও 45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত জানা থাকলে নিম্নলিখিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

$3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$, $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$, $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, $21^\circ = 36^\circ - 15^\circ$ ইত্যাদি।

উদাহরণ: প্রমাণ কর যে, $\sin 7\frac{1^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

সমাধান: $\sin 7\frac{1^\circ}{2} = \sin\frac{15^\circ}{2} = \sqrt{\sin^2\frac{15^\circ}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}.\, 2\sin^2\frac{15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos 2.\frac{15^\circ}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 15^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 15^\circ}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2 15^\circ}} = \sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}(1+\cos 30^\circ)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{16}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

কাজ: **(i)** $\sin 54^\circ$, $\cos 54^\circ$, $\sin 72^\circ$ এবং $\cos 72^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) দেখাও যে, $\sin 67\frac{1^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(iii) প্রমাণ কর যে, $2\sin\frac{\pi}{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

(iv) দেখাও যে, $2\sin\frac{\pi}{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

রণ-1. প্রমাণ কর যে, $2\sin 11° 15' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ [চুয়েট ০৫-০৬; রুয়েট ১৩-১৪; বুটেক্স ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৮; চ:
১৪; য: বো: ১৬, ১৪, ১০; দি: বো: ১২, ১০; ব: বো: ১৪, ১০; রা: বো: ১৪, ১২, ০৫; কু: বো: ০৩; সি: বো: ১৪; মাদ্রাসা বো: ১১]

ধান: বামপক্ষ $= 2\sin 11° 15'$

$$= \sqrt{4\sin^2 11°15'}$$
$$= \sqrt{2.2\sin^2 11°15'}$$
$$= \sqrt{2(1-\cos 22° 30')}$$
$$= \sqrt{2-2\cos 22°30'}$$
$$= \sqrt{2-\sqrt{4\cos^2 22°30'}}$$
$$= \sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos 45°)}}$$
$$= \sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$
$$= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \text{ডানপক্ষ}$$

রণ-2. যদি $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, $\cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$

ট ০১-০২; ঢা: বো: ১৪, ০৬; রা: বো: ১৫, ০৯; দি: বো: ১৬; কু: বো: ১৫; চ: বো: ০৮; সি: বো: ১৫, ১২, ০৮; ব: বো: ১৫; মাদ্রাসা: বো: ১৩]

ধান: দেওয়া আছে, $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2} - (1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2} + (1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{\cos\varphi}{1} = \frac{\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) - e\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) - e\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\therefore \cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$$

অনুশীলনী-7(E)

প্রমাণ কর (1 – 9):

1. $\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\tan\dfrac{x}{2}$ 2. $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$

3. $\sec x+\tan x=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$ 4. $\cot\theta=\dfrac{1}{2}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}-\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$

5. $\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}}{\sin\dfrac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$ 6. $\cos^4\dfrac{\theta}{2}+\sin^4\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{4}(3+\cos 2\theta)$

7. (i) $\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\right)+\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}-60^\circ\right)=\dfrac{3}{2}$

(ii) $\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}+60^\circ\right)+\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}-60^0\right)=\dfrac{3}{2}$ [ব: বো: ১১]

8. (i) $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$ [ঢা: বো: ১৫]

(ii) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$

9. (i) $2\cos\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ [কু: বো: ১৩, ০৭]

(ii) $2\cos 7\dfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ [কু: বো:, চ: বো: ১০; রা: বো: ০৩]

10. যদি $A+B\neq 0$ এবং $\sin A+\sin B=2\sin(A+B)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{3}$.

11. যদি $\sin\theta+\sin\varphi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\varphi=b$ হয় তবে দেখাও যে,

(i) $\cos(\theta+\varphi)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ [বুয়েট ১১-১২, ০৯-১০; রা: বো: ০৮, ০৩; কু: বো: ১৪; সি: বো: ১৬, ১১]

(ii) $\cos\dfrac{1}{2}(\theta-\varphi)=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

(iii) $\tan\dfrac{1}{2}(\theta-\varphi)=\pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$ [কু: বো: ১১]

12. যদি $a\sin\alpha+b\sin\beta=c$ এবং $a\cos\alpha+b\cos\beta=c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a+b)^2-2c^2}{ab}}$

(ii) $\cos\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2c^2-(a-b)^2}{ab}}$

13. প্রমাণ কর যে, $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ [য: বো: ১২]

7.2.9 ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (Trigonometrical identities)

তিনটি কোণের সমষ্টি π (বা $180°$) অথবা $\frac{\pi}{2}$ (বা $90°$) হলে কোণ তিনটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি গঠন করা যায়।

যেমন $A + B + C = \pi$ হলে, $B + C = \pi - A \; \therefore \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$

আবার, $\cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$

অনুরূপভাবে, $\tan(B + C) = -\tan A$, $\sec(B + C) = -\cos A$, $\operatorname{cosec}(B + C) = \operatorname{cosec} A$

আবার, $\frac{1}{2}(A + B + C) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(B + C) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \quad \therefore \sin\frac{1}{2}(B + C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

অনুরূপভাবে, $\cos\frac{1}{2}(B + C) = \sin\frac{A}{2}$, $\tan\frac{1}{2}(B + C) = \cot\frac{A}{2}$ ইত্যাদি

উদাহরণ: যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

সমাধান: দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow A + B = \pi - C$$
$$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C)$$
$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$
$$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$$
$$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

কাজ: (i) $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(ii) $A + B + C = 2\pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C = 1$

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

[ঢা: বো:, ব: বো: ১২; সি: বো: ১৩; কু: বো: ০৬; চ: বো: ০৬; ব: বো: ১৬]

সমাধান: বামপক্ষ $= \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C \qquad \left[\because A + B + C = \pi \;\therefore \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right]$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} + 1$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right\} + 1$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right]\right\} + 1$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right\} + 1$$
$$= 2\sin\frac{C}{2}.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1$$
$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ-2. যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$
[ঢা: বো: ১৩, ১১, ০৭; য: বো: ০৭; রা: বো: ১৬, ১৩; কু: বো: ১৫, ০৪; চ: বো: ০৩; দি: বো: ০৯]

সমাধান: বামপক্ষ $= \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2A + 2\cos^2B) + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2C + 2\cos A\cos B \cos C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C$ $[\because A + B + C = \pi]$

$= 1 - \cos C \cos(A - B) + \cos^2C + 2\cos A \cos B \cos C$

$= 1 - \cos C\{\cos(A - B) - \cos C\} + 2\cos A \cos B \cos C$

$= 1 - \cos C\{\cos(A - B) - \cos[\pi - (A + B)]\} + 2\cos A \cos B \cos C$

$= 1 - \cos C\{\cos(A - B) + \cos(A + B)\} + 2\cos A\cos B \cos C$

$= 1 - 2\cos A \cos B \cos C + 2\cos A \cos B \cos C = 1 =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ-3. যদি $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^2A + \cos^2B - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C = 0$
[ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১১; য: বো: ১৫, ১৩, ১০; চ: বো: ০৯, ০৫; রা: বো: ০৬; সি: বো: ১৫; দি: বো: ১৪]

সমাধান: বামপক্ষ $= \cos^2A + \cos^2B - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C$

$= \frac{1}{2}\{2\cos^2A + 2\cos^2B\} - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B\} - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C$

$= 1 + \cos(\frac{\pi}{2} - C)\cos(A - B) - \cos^2C - 2\cos A \cos B \sin C$

$= 1 + \sin C \cos(A - B) - (1 - \sin^2C) - 2\cos A \cos B \sin C$

$= 1 + \sin C\{\cos(A - B) + \sin C\} - 1 - 2\cos A \cos B \sin C$

$= \sin C\{\cos(A - B) + \sin[\frac{\pi}{2} - (A + B)]\} - 2\cos A \cos B \sin C$

$= \sin C\{\cos(A - B) + \cos(A + B)\} - 2\cos A \cos B \sin C$

$= 2\cos A \cos B \sin C - 2\cos A \cos B \sin C = 0 =$ ডানপক্ষ

অনুশীলনী-7(F)

যদি $A + B + C = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর (1 – 7):

1. (i) $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$ [কুয়েট ১০-১১; বুয়েট ১২-১৩, ০৫-০৬]
   (ii) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$
2. (i) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C$
   (ii) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ [বুয়েট ০৯-১০; রা: বো: ০৮]
   (iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A \cos B \cos C - 1$

3. (i) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [য: বো: ০৮]

(ii) $\cos A - \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1$

(iii) $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1.$

4. (i) $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

(ii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

(iii) $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$ [চ: বো: ১৩; সি: বো: ০৭; রা: বো: ১১, ০৫]

(iv) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ [য: বো: ০৪; কু: বো: ১৬, ০৯]

(v) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A\sin B\cos C$ [চ: বো: ১৫]

(vi) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

5. $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A\sin B\sin C$ [চ: বো: ০৪; ব: বো: ০৬]

6. (i) $\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$ [চ: বো: ১১]

(ii) $\frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} + \frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = 1$

7. (i) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$.

(ii) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi - B}{4}\cos\frac{\pi - C}{4}$

যদি $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর (8 ও 9):

8. (i) $\tan B\tan C + \tan C\tan A + \tan A\tan B = 1.$

(ii) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$

9. (i) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A\sin B\sin C = 1$ [কু: বো: ১৪; দি: বো: ১২; য: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১২]

(ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + 4\sin\frac{\pi - 2A}{4}\sin\frac{\pi - 2B}{4}\sin\frac{\pi - 2C}{4}$

10. (i) যদি $A + B = C$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A\cos B\cos C$

(ii) যদি $A + B + C = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1$$ [কু: বো: ০৩]

(iii) প্রমাণ কর যে, $\cos^2(\beta - \gamma) + \cos^2(\gamma - \alpha) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1 + 2\cos(\beta - \gamma)\cos(\gamma - \alpha)\cos(\alpha - \beta)$

11. (i) যদি $x + y + z = xyz$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{2x}{1 - x^2} + \frac{2y}{1 - y^2} + \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2x}{1 - x^2}\cdot\frac{2y}{1 - y^2}\cdot\frac{2z}{1 - z^2}$$

(ii) যদি $yz + zx + xy = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{xy} + \frac{(y^2 - 1)(z^2 - 1)}{yz} + \frac{(z^2 - 1)(x^2 - 1)}{zx} = 4$$

পাঠ-১২

ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণসহ মোট ছয়টি উপাদান রয়েছে। এ তিনটি বাহু, তিনটি কোণ এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্ক বিদ্যমান। এ ধরনের সম্পর্ক নিয়ে অধ্যায়টিতে আলোচনা করা হবে।

7.3 ত্রিভুজের কোণ, বাহু ও অন্যান্য প্রতীক (Angles, sides and other symbols of a triangle)

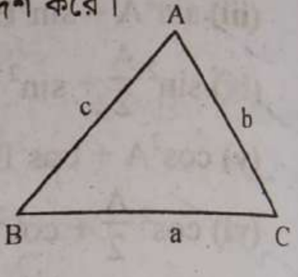
ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle BCA$ কে যথাক্রমে A, B, C দ্বারা এবং A কোণের বিপরীত বাহু BC কে a দ্বারা, B কোণের বিপরীত বাহু CA কে b দ্বারা এবং C কোণের বিপরীত বাহু AB কে c দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(i) ত্রিভুজের পরিসীমা 2s দ্বারা নির্দেশিত হয় যেখানে, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, অর্ধ-পরিসীমা নির্দেশ করে।

(ii) পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধকে R দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

(iii) অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

(iv) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে Δ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

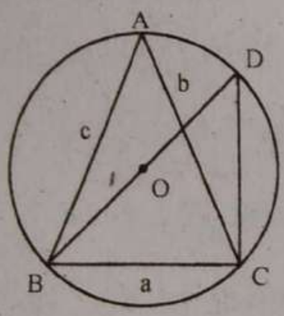


7.3.1 ত্রিভুজ সংক্রান্ত কতিপয় প্রমাণ

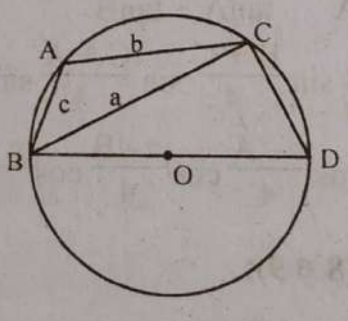
ত্রিভুজের সাইন (sine) **সূত্র** (Sine Rule of Triangle)

(a) যেকোনো ত্রিভুজ ABC এ প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, যেখানে R হচ্ছে ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ। [ঢা: বো: ১৩, ০৯, ০৭, ০৫, ০৩; দি: বো: ১৪, ১৩, ১০; কু: বো: ১৫, ১০, ০৬; চ: বো: ১৪, ১২, ০৯, ০৫; ব: বো: ১৫, ১৪, ১০, ০৮, ০৪; রা: বো: ১২, ০৮, ০৬, ০৪; সি: বো: ১৫, ০৮; য: বো: ১৩, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৩, ১১, ০৯]

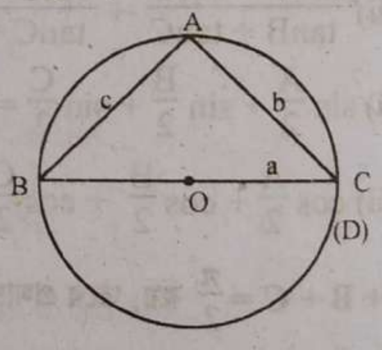
প্রমাণ:



১ম চিত্র



২য় চিত্র



৩য় চিত্র

মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R. ১ম ও ২য় চিত্রে BO যোগ করে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন তা বৃত্তের D বিন্দুতে মিলিত হয়। D, C যোগ করি। ৩য় চিত্রে ΔABC সমকোণী হওয়ায় BD রেখা BC এর সাথে সমাপতিত হবে।

এখন, ১ম ও ২য় চিত্র হতে পাই, $\angle BCD = 90°$, কেননা অর্ধ-বৃত্তস্থকোণ সমকোণ এবং $BD = 2R$.

সুতরাং ΔBCD হতে পাই, $\sin\angle BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$ …… (i)

১ম চিত্রে, $\angle BDC = \angle A$, কেননা একই চাপের ওপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণসমূহ সমান।

$\therefore \sin\angle BDC = \sin A$.

২য় চিত্রে, $\angle BDC = 180° - \angle A$, কেননা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°.

$\therefore \sin\angle BDC = \sin(180° - A) = \sin A$

সুতরাং (i) নং হতে পাই, $\sin A = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$

৩য় চিত্রে, $BD = a$ অর্থাৎ $2R = a \Rightarrow \dfrac{a}{1} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{\sin 90°} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$ $[\because A = 90°]$

সুতরাং প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমরা পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

অনুরূপভাবে, A, O যোগ করে এবং C, O যোগ করে তাদেরকে বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত করে পৃথক পৃথকভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{b}{\sin B} = 2R$ এবং $\frac{c}{\sin C} = 2R$

সুতরাং, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

দ্রষ্টব্য: উপরে আলোচিত সূত্রটি ত্রিভুজের সাইন সূত্র (sine rule) নামে পরিচিত। সূত্রটি ভেক্টর পদ্ধতিতেও প্রমাণ করা যায়।

কাজ: যে কোনো ত্রিভুজ ABC- এ প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{C - A}{2} = \frac{c - a}{c + a}\cot\frac{B}{2}$

7.4 ত্রিভুজের কোসাইন (cosine) সূত্র (Cosine Rule of Triangle)

(b) **যেকোনো ত্রিভুজ ABC এ প্রমাণ কর যে,**

(i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ অথবা, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

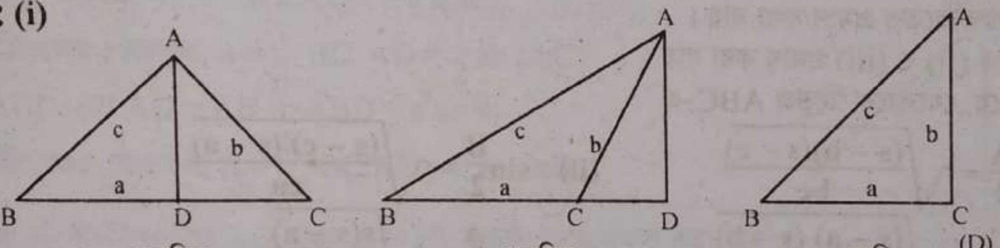
[ব: বো: ০৯; কু: বো: ১১, ০৫, ০৪; রা: বো: ১১, ০৫; চ: বো: ০৬, ০৪; দি: বো: ১৪; সি: বো: ০৩]

(ii) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ অথবা, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

[ঢা: বো: ০৪; রা: বো: ১৩; চ: বো: ১০; য: বো: ১৪, ১১, ০৮; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১১, ০৭; দি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১২, ১০]

(iii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ অথবা, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ [কু: বো: ১৪, ১২; দি: বো: ০৯]

প্রমাণ: (i)



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র

মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A হতে BC বাহুর ওপর AD লম্ব।

১ম চিত্রে, $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হওয়ায় লম্বটি BC কে D বিন্দুতে; ২য় চিত্রে, $\angle C$ স্থূলকোণ হওয়ায় লম্বটি BC এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে এবং ৩য় চিত্রে, $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় লম্বটি AC এর সাথে মিলে যাবে।

১ম চিত্রে, C একটি সূক্ষ্মকোণ, $\therefore AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$ ... ... (i)

এখন, ΔACD এ, $CD = AC\cos C = b\cos C$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

আবার, ২য় চিত্রে, C একটি স্থূলকোণ, $\therefore AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD$ ... ... (ii)

এখন, ΔACD এ, $CD = AC\cos ACD = b\cos(\pi - C) = -b\cos C$

$\therefore$ (ii) নং হতে পাই, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

এবং ৩য় চিত্রে, C একটি সমকোণ। সুতরাং $AB^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90°$ $[\because \cos 90° = 0]$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ $[\because \angle C = 90°]$

সুতরাং $\angle C$ সূক্ষ্ম, স্থূল বা সমকোণ যাই হোক না কেন, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ অর্থাৎ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

উপরিউক্ত সূত্রটির ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ অনুশীলনী-2(c) এর উদাহরণ-3 এ দেখানো হয়েছে। অনুরূপভাবে সম্পর্ক (ii) ও (iii) প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য: উপরে আলোচিত সূত্রগুলি ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র (cosine rule) নামে পরিচিত।

কাজ: যদি $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 30°$ হয়, তবে B এবং C এর মান নির্ণয় কর।

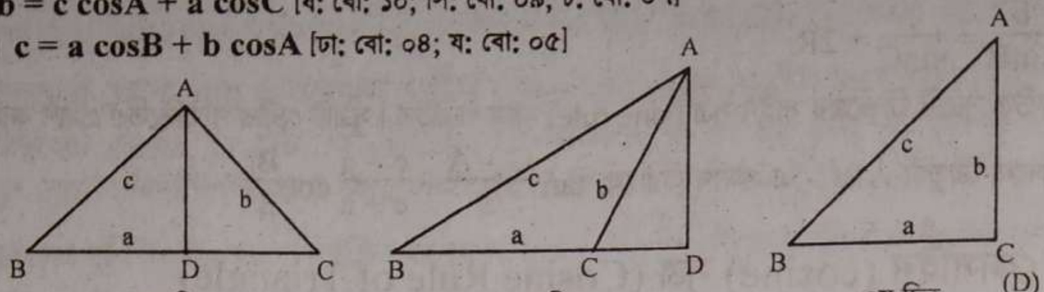
(c) যেকোনো ত্রিভুজ ABC-এ প্রমাণ কর,

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ [সি: বো: ০৫; ব: বো: ১৩]

(ii) $b = c\cos A + a\cos C$ [য: বো: ১০; সি: বো: ০৯; চ: বো: ০৭]

(iii) $c = a\cos B + b\cos A$ [ঢা: বো: ০৪; য: বো: ০৫]

প্রমাণ: (i)



১ম চিত্র ২য় চিত্র ৩য় চিত্র (D)

মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A এবং BC বাহুর ওপর AD লম্ব।

১ম চিত্রে, $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হওয়ায় লম্বটি BC কে D বিন্দুতে, ২য় চিত্রে, $\angle C$ স্থূলকোণ হওয়ায় লম্বটি BC এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে এবং ৩য় চিত্রে, $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় লম্বটি AC এর সাথে মিলিত হয়।

১ম চিত্রে, $BC = BD + CD = AB\cos\angle ABD + AC\cos\angle ACD \Rightarrow a = c\cos B + b\cos C$

২য় চিত্রে, $BC = BD - CD = AB\cos\angle ABD - AC\cos\angle ACD \Rightarrow a = c\cos B - b\cos(\pi - C)$

$$= c\cos B + b\cos C$$

৩য় চিত্রে, $BC = AB\cos\angle ABC \Rightarrow a = c\cos B = c\cos B + b\cos C$ $[\because \cos C = \cos 90^\circ = 0]$

সুতরাং প্রত্যেক ক্ষেত্রেই, $a = b\cos C + c\cos B$.

সম্পর্কটি ভেক্টর পদ্ধতিতেও প্রমাণ করা যায়।

অনুরূপভাবে সম্পর্ক (ii) ও (iii) প্রমাণ করা যায়।

(d) প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজ ABC-এ

(i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ **(ii)** $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

(iii) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ **(iv)** $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(v) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ **(vi)** $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(vii) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ **(viii)** $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

(ix) $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$; যেখানে ΔABC এর অর্ধ-পরিসীমা $= s = \frac{a+b+c}{2}$

প্রমাণ: (i) আমরা জানি,

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{2bc}$$

$$= \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc} \quad [\because 2s = a+b+c]$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

[যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°, কাজেই $A < 180^\circ \therefore \frac{A}{2} < 90^\circ$; সুতরাং $\sin\frac{A}{2}$ ধনাত্মক।]

অনুরূপভাবে (ii) ও (iii) প্রমাণ করা যায়।

(iv) আমরা জানি, $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)}{2bc} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc} \quad [\because 2s = a+b+c]$$

$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ [$\frac{A}{2}$ সূক্ষ্মকোণ বলে $\cos\frac{A}{2}$ ধনাত্মক]

অনুরূপভাবে (v) ও (vi) প্রমাণ করা যায়।

(vii) $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{bc}} \times \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

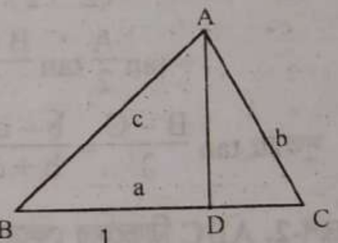
অনুরূপভাবে (viii) ও (ix) প্রমাণ করা যায়।

কাজ: দেখাও যে, $\frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C} = \frac{b^2+c^2}{2b^2-c^2}$

7.4.1 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে BC বাহুর ওপর AD লম্ব। আরও মনে করি, ΔABC এর ক্ষেত্রফল Δ.

এখন, ΔACD এ $AD = AC \sin\angle ACD = b\sin C$



$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}.\ BC.\ AD = \frac{1}{2}ab\sin C.$

আবার, ΔABD হতে $AD = AB\sin ABD = c\sin B.$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}.\ BC.AD = \frac{1}{2}ca\sin B.$

অনুরূপভাবে, B শীর্ষবিন্দু হতে AC বাহুর ওপর লম্ব অঙ্কন করে প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A.$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C.$

অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফল) $\times$ (বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন অনুপাত)

আবার, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc.\ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = bc\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

অথবা, $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$; [$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ বসিয়ে]

$$= \frac{1}{4}(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)^{\frac{1}{2}}$$

অথবা, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc.\ \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$

7.4.2 ত্রিভুজের কোণের সাইনের সাথে ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক

আমরা পাই, $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$\therefore \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{bc}$

অনুরূপভাবে $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ca}$ এবং $\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ab}$

পাঠ-১৩ ও ১৪

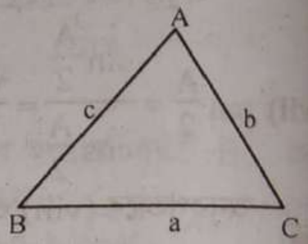
উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. যেকোনো ত্রিভুজ ABC এ প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

[রা: বো: ১০; চ: বো: ০৮, ০৫, ০৩; কু: বো: ১৬, ০৮, ০৩; সি: বো: ০৪; ব: বো: ১

সমাধান: আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজ ABC-এ, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$

$$\Rightarrow\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$ [বিয়োজন-যোজন করে]



$$\Rightarrow\frac{b-c}{b+c}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\frac{B-C}{2}\qquad\left[\because A+B+C=\pi\therefore\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right]$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

সুতরাং $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

উদাহরণ-2. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

[ঢা: বো: ০৬; দি: বো: ০৯; কু: বো: ১৩, ০৭, ০৫, ০৪; চ: বো: ০৭

সমাধান: আমরা পাই, $\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2}\qquad\left[\because\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right]$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\qquad\left[\because A+B+C=\pi\therefore\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\sin\frac{B-C}{2}$$

সুতরাং $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

উদাহরণ-3. যদি ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হয়, তবে দেখাও যে, $C = 45°$ অথবা $135°$.
[ঢা: বো: ১৪, ১১, ০৬; রা: বো: ১৪, ১০, ০৪; কু: বো: ০৮, ০৬; দি: বো: ১২; চ: বো: ১৫, ১৪, ০৩; য: বো: ১১, ০৬; ব: বো: ০৮; মাদ্রাসা বো: ১১]

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$$
$$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}\,ab$$
$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ সুতরাং } \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

এখন, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos C = \cos 45° \quad \therefore C = 45°$

আবার, $\cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos C = -\cos 45° = \cos(180° - 45°) = \cos 135°$ অর্থাৎ $C = 135°$

উদাহরণ-4. ΔABC এ $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।
[কুয়েট ১৩-১৪, ০৫-০৬; বুয়েট ০৮-০৯, ০৪-০৫; ঢা: বো: ১৩, ০৭; ব: বো: ১২, ১০, ০৬; কু: বো: ১৩; চ: বো: ১২, ০৮; য: বো: ১৪, ১২, ০৯; রা: বো: ১২, ০৮, ০৫; সি: বো: ১১, ০৬, ০৫; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৪, ০৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cos A = \sin B - \cos C$

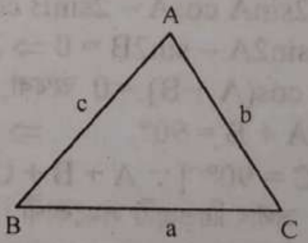
$$\Rightarrow \cos A + \cos C = \sin B$$
$$\Rightarrow \cos A + \cos\{\pi - (A + B)\} = \sin B \quad [\because A + B + C = \pi]$$
$$\Rightarrow \cos A - \cos(A + B) = \sin B$$
$$\Rightarrow 2\sin\frac{2A + B}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$\Rightarrow \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2} \Rightarrow \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)$$
$$\Rightarrow A + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \quad \therefore C = \frac{\pi}{2}$$

অতএব, ΔABC সমকোণী।

উদাহরণ-5. ক. দেখাও যে, $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2\sec 2\theta$ ২

খ. উদ্দীপকের ত্রিভুজে যদি $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমবাহু। ৪

গ. উদ্দীপকের ত্রিভুজের যেকোন দুইটি কোণের কোসাইনের অনুপাত তাদের বিপরীত বাহুর সাথে ব্যস্তভেদে অন্বিত হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী। ৪



সমাধান: ক. বামপক্ষ $= \sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} = \frac{1}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2\theta - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{2\cos^2\theta - 1} = \frac{2}{\cos 2\theta} = 2\sec 2\theta = \text{ডানপক্ষ}$$

খ. উদ্দীপকের চিত্রানুসারে ABC ত্রিভুজের, $A + B + C = \pi$

বা, $B + C = \pi - A$ বা, $\cot (B + C) = \cot (\pi - A)$ বা, $\frac{\cot B \cot C - 1}{\cot C + \cot B} = -\cot A$

$\therefore \cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$ ... ... (i)

আবার, $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

বা, $(\cot A + \cot B + \cot C)^2 = 3 \times 1$

বা, $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2\cot A\cot B + 2\cot B \cot C + 2 \cot C \cot A$
$= 3 (\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A\cot B)$ [(i) এর সাহায্যে]

বা, $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C - \cot B \cot C - \cot C \cot A - \cot A \cot B = 0$

বা, $\frac{1}{2}\{(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2\} = 0$

$\therefore (\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 = 0$

কতগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে রাশিগুলোর মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হয়। অর্থাৎ,

$(\cot A - \cot B)^2 = 0$
বা, $\cot A - \cot B = 0$
বা, $\cot A = \cot B$
$\therefore A = B$ ... ... (ii)

$(\cot B - \cot C)^2 = 0$
বা, $\cot B - \cot C = 0$
বা, $\cot B = \cot C$
$\therefore B = C$ ... ... (iii)

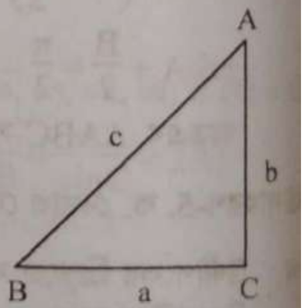
$(\cot C - \cot A)^2 = 0$
বা, $\cot C - \cot A = 0$
বা, $\cot C = \cot A$.
$\therefore C = A$ ... ... (iv)

(ii), (iii) ও (iv) নং হতে পাই, $A = B = C$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমবাহু। (দেখানো হলো)

গ. মনে করি, ΔABC এ $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ এর বিপরীত বাহু যথাক্রমে a, b ও c।

তাহলে $\cos A \propto \frac{1}{a}$ বা, $\cos A = \frac{k}{a}$ এবং $\cos B \propto \frac{1}{b}$ বা, $\cos B = \frac{k}{b}$



$\therefore \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{2R\sin B}{2R\sin A}$ $[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R]$

$\Rightarrow \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A} \Rightarrow \sin A \cos A = \sin B \cos B$

$\Rightarrow 2\sin A \cos A - 2\sin B \cos B = 0$

$\Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0 \Rightarrow 2\cos (A + B) \sin (A - B) = 0$

হয়, $\cos(A + B) = 0$ অথবা, $\sin (A - B) = 0$

$\Rightarrow A + B = 90°$ $\Rightarrow A - B = 0 \therefore A = B$

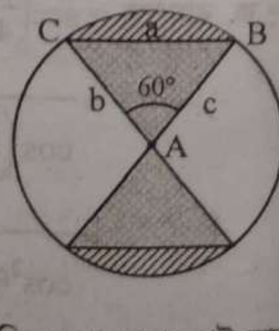
$\therefore C = 90°$ $[\because A + B + C = 180°]$

অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমকোণী। আবার, A = B, অর্থাৎ A ও B কোণদ্বয় সমান।

যেহেতু সমান-সমান কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান। সুতরাং a = b. অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

উদাহরণ-6. একজন চর্কা নির্মাতা তার নির্মিত চর্কায় সাদা, কালো ও লাল এই 3 প্রকারের সিলিকন প্লেট ব্যবহার করেন। সাদা, কালো ও লাল প্রকারের প্লেটের মূল্য যথাক্রমে বর্গ সে.মি. প্রতি 40 টাকা, 30 টাকা ও 25 টাকা।



ক. দেখাও যে, $\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} = 2 \cos x + 1$ 2

খ. ΔABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $b + c = 2a \cos \frac{B - C}{2}$ । 8

গ. b = c = 4 হলে, চর্কার দাগাঙ্কিত অংশ লাল, ছায়াঘেরা অংশ কালো এবং বাকি অংশ সাদা প্লেট দ্বারা তৈরি করতে মোট কত খরচ হবে? 8

সমাধান: ক. বামপক্ষ $= \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{\cos x - (2\cos^2 x - 1)}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{1 + \cos x - 2\cos^2 x}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{1 + 2\cos x - \cos x - 2\cos^2 x}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{1(1 + 2\cos x) - \cos x(1 + 2\cos x)}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{(1 - \cos x)(1 + 2\cos x)}{1 - \cos x}$

$= 1 + 2\cos x =$ ডানপক্ষ

খ. ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore\ a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$

বামপক্ষ $= b + c = 2R\sin B + 2R\sin C$

$= 2R(\sin B + \sin C)$

$= 2R\,.\,2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$= 4R\,.\,\sin 60^\circ \cos\dfrac{B-C}{2}$ [$\because A + B + C = 180^\circ$ এবং $A = 60^\circ$ $\therefore B + C = 120^\circ$]

$= 4R\sin A\cos\dfrac{B-C}{2}$

$= 2.2R\sin A\cos\dfrac{B-C}{2}$

$= 2a\cos\dfrac{B-C}{2} =$ ডানপক্ষ

গ. দেওয়া আছে, $A = 60^\circ = 60 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi^c}{3}$

ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2} \times 4^2 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3} = 8.38$ বর্গ সে.মি.

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 6.93$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ দাগাঙ্কিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $= 8.38 - 6.93 = 1.45$ বর্গ সে.মি.

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times 4^2 = 50.27$ বর্গ স.মি.

$\therefore$ সাদা অংশের ক্ষেত্রফল $= 50.27 - 8.38 \times 2 = 33.51$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ মোট খরচ = 2(দাগাঙ্কিত লাল অঞ্চলের খরচ + ছায়াঘেরা ΔABC অংশের খরচ) + সাদা অংশের খরচ

$= 2(1.45 \times 25 + 6.93 \times 30) + 33.51 \times 40$

$= 72.5 + 415.8 + 1340.4 = 1828.7$ টাকা **(Ans.)**

অনুশীলনী-7(G)

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর (1–17) :

1. (i) $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ [ঢা: বো: ০৩; য: বো: ০৯; ব: বো: ০৬]

(ii) $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$ [সি: বো: ১৩; ঢা: বো: ১২; য: বো: ১০; ব: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১২]

(iii) $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$ [ঢা: বো: ১০; চ: বো: ১১; সি: বো: ১১, ০৯; য: বো: ১৬, ০৩; কু: বো: ০৩]

2. $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$

3. (i) $(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C=0$

(ii) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$ [রা: বো: ১৪; সি: বো: ০৭, ০৩; ব: বো: ০৫]

4. $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$

5. (i) $a(\cos B+\cos C)=2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$ [ঢা: বো: ০৮; চ: বো: ১৩, ০৯, ০৬; সি: বো: ১৪, ০৬; ব: বো: ১৩, ০৪]

(ii) $\cos C-\cos B=\frac{2(b-c)}{a}\cos^2\frac{A}{2}$ [ঢা: বো: ১১; দি: বো: ১০; রা: বো: ০৯; সি: বো: ১২; য: বো: ০৪; ব: বো: ১৫]

6. (i) $a^2(\sin^2B-\sin^2C)+b^2(\sin^2C-\sin^2A)+c^2(\sin^2A-\sin^2B)=0$ [বুয়েট ০৬–০৭; য: বো: ০৪; চ: বো: ০৪]

(ii) $a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0$ [য: বো: ১২; ০৭; রা: বো: ০৭]

(iii) $(b^2-c^2)\sin^2A+(c^2-a^2)\sin^2B+(a^2-b^2)\sin^2C=0$

7. (i) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

(ii) $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$

(iii) $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

8. $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

9. $a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0$ [রা: বো: ০৩]

10. (i) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

(ii) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

(iii) $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=0$

11. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

12. $c^2=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$ [কু: বো: ০৯]

13. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$ [ব: বো: ০৩]

14. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$ [বুয়েট ০০–০১; বুয়েট ০৩–০৪]

15. $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=\Delta$

16. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}$ [ব: বো: ০৫]

17. $4\Delta(\cot A+\cot B+\cot C)=a^2+b^2+c^2$

Scanned with CamScanner

18. যদি ΔABC এ $A = 60°$ হয়, তবে দেখাও যে, $b + c = 2a \cos\frac{B - C}{2}$

[ঢা: বো: ১০; য: বো: ১৩; সি: বো: ১০; কু: বো: ১১; রা: বো: ০৯; ব: বো: ১৪, ০৯]

19. (i) যদি ত্রিভুজের বাহুগুলি $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{z}{x}+\frac{x}{y}, \frac{x}{y}+\frac{y}{z}$ হয়, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৪; সি: বো: ০৭]

(ii) কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলি 13, 14 ও 15 একক হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ০৯; য: বো: ০৭]

20. যদি ABC ত্রিভুজে $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হয়, তবে কোণগুলি নির্ণয় কর।

[বুয়েট ০৩-০৪; কু: বো: ১২, ০৯; দি: বো: ১৩; ব: বো: ১৬]

21. (i) যদি $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ হয়, তবে দেখাও যে, $C = 60°$

[ঢা: বো: ১২, ০৫; সি: বো: ১২, ০৮, ০৪; কু: বো: ১৪, ০৭; ব: বো: ১১; রা: বো: ১৬, ০৬; চ: বো: ১৬, ১৩, ১১; য: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১০]

(ii) ABC ত্রিভুজে $C = 60°$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ [রা: বো: ০৩; মাদ্রাসা বো: ১৩]

22. যদি $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ হয় তবে A কোণের মান নির্ণয় কর।

[ঢা: বো: ১৬, ০৮; সি: বো: ১০; য: বো: ০৮, ০৫; রা: বো: ১৩, ১১, ০৭; দি: বো: ১৪, ১১]

23. দেখাও যে, কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 3, 5, 7 একক হলে, ত্রিভুজটি স্থূলকোণী এবং স্থূলকোণটির মান $120°$।

[কু: বো: ১০; দি: বো: ১২; চ: বো: ১০]

24. যদি ABC ত্রিভুজে $A = 75°, B = 45°$ হয়, তবে দেখাও যে, $b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ [ব: বো: ০৭]

25. ABC ত্রিভুজে $a = \sqrt{3} + 1, b = \sqrt{3} - 1$ এবং $C = 60°$ হলে A, B এবং c এর মান নির্ণয় কর। [ঢা: বো: ১৫]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\tan 15°$ এর মান কত?

ক. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ খ. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ গ. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

2. $\tan\frac{19\pi}{3} =$ কত?

ক. $-\sqrt{3}$ খ. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\sqrt{3}$

3. $\cos 960°$ এর মান কত?

ক. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ. $-\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $n = -1$ হলে $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত?

ক. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ. $-\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\operatorname{cosec}(270° - \theta)$ এর মান কত?

ক. $-\sec\theta$ খ. $-\operatorname{cosec}\theta$ গ. $\sec\theta$ ঘ. $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\tan36° + \tan9° + \tan36°.\tan9° =$ কত?

ক. 0 খ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ. 1 ঘ. $\sqrt{3}$

7. $\tan^2\theta = 2$ হলে $\cot\theta =$ কত?

ক. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\pm\sqrt{2}$ ঘ. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

8. $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান কোনটি?

ক. $\cos 2\theta$ খ. $\sin 2\theta$ গ. $\cos^2\theta$ ঘ. $-\sin^2\theta$

9. যদি $\sin\theta = \frac{4}{5}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}(-\theta)} =$ কত?

ক. $\frac{5}{2}$ খ. $\frac{3}{2}$ গ. -3 ঘ. -6

10. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta < 0$ হলে $\tan\theta =$ কত?

ক. $-\frac{3}{4}$ খ. $-\frac{4}{3}$ গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. $\pm\frac{3}{4}$

11. $\tan B = p$ হলে, $\sin B =$ কত? $(0° < B < 90°)$

ক. $-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ গ. $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ ঘ. $\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$

12. যদি $\cos A = \frac{4}{5}$ হয়, তবে $\frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A}$ এর মান কত?

ক. $-\frac{25}{7}$ খ. $-\frac{7}{5}$ গ. $\frac{7}{5}$ ঘ. $\frac{25}{7}$

13. $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কত?

ক. $\frac{5}{12}$ খ. $\pm\frac{5}{12}$ গ. $\frac{13}{12}$ ঘ. $\pm\frac{13}{12}$

14. $\cos A = \frac{1}{2}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\sin(A + B).\sin(A - B) =$ কত?

ক. $\frac{1}{4}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ. 1

15. $\frac{1 + \tan 25°}{1 - \tan 25°}$ এর মান কত?

ক. $\tan 50°$ খ. $\tan 70°$ গ. $\cot 50°$ ঘ. $\cot 70°$

16. $\cos A + \cos(120° - A) + \cos(120° + A)$ এর মান কত?

ক. $-\frac{1}{2}$ খ. 0 গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 1

17. $\frac{\cos(45° + A) + \cos(45° - A)}{\cos(45° - A) - \cos(45° + A)} =$ কত?

ক. $\sqrt{3}$ খ. 1 গ. $\tan A$ ঘ. $\cot A$

18. $\sin(45° + \theta)\cos(45° - \theta) + \sin(45° - \theta)\cos(45° + \theta) =$ কত?

ক. $\sin 2\theta$ খ. $\cos 2\theta$ গ. 0 ঘ. 1

19. সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব রেখার বিপরীত কোণ θ হলে—

i. $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

ii. $\sec(-\theta) = -\sec\theta$

iii. $\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

20. কোনো ত্রিভুজে $b = 2c$ এবং $B = 3C$ হলে—

i. $\sin 3C = 2\sin C$

ii. $\angle C = 30°$

iii. ত্রিভুজটি সমকোণী।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

21. $\alpha = 30°$ এবং $\beta = 45°$ হলে—

i. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

ii. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

iii. $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

22. একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি যথাক্রমে 11, 12, 13 একক হলে—

i. ত্রিভুজটি স্থূলকোণী

ii. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 61.48 বর্গ একক

iii. ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ 7 একক (প্রায়)

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

23. $A = \dfrac{\pi}{12}$ হলে—

i. $\tan A.\tan 5A = 1$

ii. $\tan 7A.\tan 11A = -1$

iii. $\tan A.\tan 5A.\tan 7A.\tan 11A = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $A + B + C = \dfrac{\pi}{2}$ হলে—

i. $\tan(B+C) = \cot A$

ii. $\tan(A+B-C) = \cot 2C$

iii. $\tan A.\tan B + \tan B\tan C + \tan C.\tan A = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. $\operatorname{cosec} x = 2$ এবং $\cot x = -\sqrt{3}$ হলে—

i. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

ii. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

iii. $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (26 ও 27) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

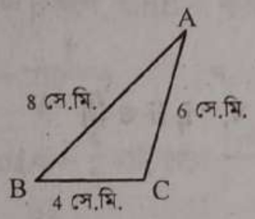
26. $\cos\theta$ এর মান কত?

ক. $\frac{-12}{13}$ খ. $\frac{-13}{12}$ গ. $\frac{12}{13}$ ঘ. $\frac{5}{13}$

27. $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান কত?

ক. $\frac{-51}{26}$ খ. $\frac{-26}{51}$ গ. $\frac{5}{12}$ ঘ. $\frac{51}{26}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে (28 ও 29) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



28. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?

ক. $\sqrt{15}$ খ. $9\sqrt{15}$ গ. $3\sqrt{15}$ ঘ. $2\sqrt{15}$

29. $\angle C$ এর মান কোনটি?

ক. $\cos^{-1}\left(\frac{39}{12}\right)$ খ. $\cos^{-1}\left(\frac{12}{39}\right)$ গ. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ঘ. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে (30 ও 31) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cot\alpha + \cot\beta = a$ এবং $\tan\alpha + \tan\beta = b$

30. $\tan\alpha.\tan\beta$ এর মান কত?

ক. $\frac{a}{b}$ খ. $\frac{b}{a}$ গ. $\frac{a^2}{b^2}$ ঘ. $\frac{b^2}{a^2}$

31. $\tan(\alpha + \beta) =$ কত?

ক. $\frac{ab}{a+b}$ খ. $\frac{ab}{a-b}$ গ. $\frac{ab}{b-a}$ গ. $\frac{a+b}{a-b}$

নিচের তথ্যের আলোকে (32 ও 33) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A + B + C = \pi$; $\cos A = \cos B.\cos C$

32. $\tan B + \tan C =$ কত?

ক. $\sin A$ খ. $\cos A$ গ. $\tan A$ ঘ. $\cot A$

33. $\tan B.\tan C$ এর মান কত?

ক. $\tan A$ খ. $\cot A$ গ. 1 ঘ. 2

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

34. যদি $9\theta = \pi$ হয়, তবে $\cos\theta \cos2\theta \cos4\theta$ এর মান— [DU 16-17]

ক. $\frac{1}{9}$ খ. $\frac{1}{8}$ গ. 8 ঘ. 9

35. যদি $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$ হয়, তবে $\cos\theta$ এর মান কত? [DU 16-17]

ক. $\frac{9}{16}$ খ. $\frac{7}{25}$ গ. $\frac{24}{25}$ ঘ. $\frac{25}{7}$

36. $\sin(A - 30°) + \sin(150° + A)$ এর মান— [DU. 16-17]
ক. $-\frac{1}{2}\cos A$ খ. 0 গ. $\cos A$ ঘ. $\sin A$

37. $\cos(\theta + 150°)$ এর মান— [DU. 16-17; BU. 15-16]
ক. $\sin\theta$ খ. $-\frac{1}{2}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$
গ. $-\cos\theta$ ঘ. $\frac{1}{2}(\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta)$

38. ABC ত্রিভুজে $a : b : c = 3 : 7 : 5$ হলে B কোণের মান কত? [DU. 15-16]
ক. $30°$ খ. $60°$ গ. $90°$ ঘ. $120°$

39. ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ এর মান কোনটি? [DU. 15-16]
ক. $\frac{1}{2}$ খ. 1 গ. 0 ঘ. -1

40. ABC ত্রিভুজের $\cos A + \cos C = \sin B$ হলে $\angle A$ এর মান কোনটি? [DU. 14-15]
ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. $\frac{\pi}{6}$

41. একক ব্যাসার্ধের বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত? [DU.13-14]
ক. $\frac{3}{2}$ একক খ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ একক গ. $\sqrt{3}$ একক ঘ. 1 একক

42. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে, $A + B = ?$ [DU. 13-14; 15-16]
ক. π খ. 2π গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. $\frac{\pi}{4}$

43. $A + B + C = \pi$ হলে $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$ এর মান— [DU. 10-11]
ক. $1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ খ. $1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
গ. $1 - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ঘ. $1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

44. $\cos 198° + \sin 432° + \tan 168° + \tan 12°$ এর মান কত? [DU. 09-10]
ক. 0 খ. 1 গ. -1 ঘ. $\frac{1}{2}$

45. $\cos^2 0° + \cos^2 10° + \cos^2 20° + \dots\dots\dots + \cos^2 90° =$ কত? [DU. 08-09; JU 06-07]
ক. -5 খ. 2 গ. 3 ঘ. 5

46. $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ হলে $\tan\theta$ এর মান কত? [BUET.12-13]
ক. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ. ± 1 গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1$ ঘ. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 1$

47. $\sin 18° + \cos 18°$ এর মান কত? [BUET. 09-10]
ক. $\sin 36°$ খ. $-\sqrt{2\cos 27''}$ গ. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 27''$ ঘ. $\sqrt{2}\cos 27°$

48. $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ এবং $0 < \theta < 300°$ হলে $\theta =$ কত? [BUET. 11-12; RUET. 05-06]
ক. $0°, 150°$ খ. $0°, 90°$ গ. $60°, 120°$ ঘ. $45°, 135°$

49. $\cot\alpha + \cot\beta = a$, $\tan\alpha + \tan\beta = b$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোনটি? [KUET. 10-11, 12-13]
ক. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ খ. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ গ. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ ঘ. $-\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

50. $A+B=\frac{\pi}{2}$ হলে, $\cos^2A-\cos^2B$ এর মান কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. $\sin(A-B)$ খ. $\sin(B-A)$ গ. $\cos(B-A)$ ঘ. $-\cos(B-A)$

51. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ এবং $\sin B.\sin C=-\sin A$ হলে, $\cot A+\cot B+\cot C$ এর মান কোনটি? *[KUET. 11-12]*

ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 2

52. $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ হলে, A কোণের মান কত? *[KUET. 10-11]*

ক. $30°$ খ. $0°$ গ. $60°$ ঘ. $45°$

53. যদি $\cos x+\cos y=a$ এবং $\sin x+\sin y=b$ হয়, তবে, $\cos(x+y)$ এর মান কত হবে? *[KUET. 09-10]*

ক. $\frac{a-b}{a+b}$ খ. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ গ. $\frac{2a^2+b^2}{a^2+b^2}$ ঘ. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

54. $g(\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে, $g\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ এর মান কোনটি? *[KUET. 08-09]*

ক. $\sin\theta$ খ. $\cos\theta$ গ. $\sec\theta$ ঘ. $\tan\theta$

55. $\sec\theta=\frac{13}{12}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোনটি? *[BUTEX. 12-13]*

ক. $\frac{5}{12}$ খ. $\frac{12}{5}$ গ. $\pm\frac{5}{12}$ ঘ. $\pm\frac{12}{5}$

56. $\text{cosec}\,x=2$ এবং $\cot x=-\sqrt{3}$ হলে কোনটি সত্য? *[BUTEX. 12-13]*

ক. $\sin x=-\frac{1}{2}$ খ. $\sec x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ. $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ঘ. $\text{cosec}\,x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

57. $\text{cosec}\theta$ এর পূর্ণরূপ কোনটি? *[BUTEX. 12-13]*

ক. cosecθ খ. seccantθ গ. cosecantθ ঘ. conversed cosecθ

58. $\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)$ এর মান কোনটি? *[RUET. 13-14]*

ক. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ গ. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ঘ. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

59. $A+B+C=\pi$ হলে $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B$ এর মান কোনটি? *[RUET. 12-13]*

ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. π ঘ. 1

60. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 5, 12 এবং 13 cm হলে ত্রিভুজটি হবে— *[RUET. 10-11]*

ক. স্থূলকোণী খ. সূক্ষ্মকোণী গ. সমকোণী ঘ. সবকটি

61. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাণ 3, 5 ও 7 হলে, স্থূলকোণটির মান কত? *[RU. 07-08, 08-09]*

ক. $60°$ খ. $100°$ গ. $120°$ ঘ. $180°$

62. $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ হলে $\cos2\theta=$ কত? *[Ch. U. 14-15]*

ক. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ খ. $\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ গ. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ ঘ. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

63. যদি তিনটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 1 : 2 : 4 হয় তাহলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধের অনুপাত হবে— [SUST. 16-17]

ক. $1:\sqrt{2}:3$ খ. $1:4:16$ গ. $1:3:7$ ঘ. $1:\sqrt{2}:2$

64. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের সাথে যে কোন দুটি কৌণিক বিন্দু সংযুক্ত করে নতুন ত্রিভুজ তৈরি করা হল। নতুন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের কত অংশ হবে? [SUST. 16-17]

ক. $\frac{2}{3}$ খ. $\frac{1}{2}$ গ. $\frac{1}{6}$ ঘ. $\frac{1}{3}$

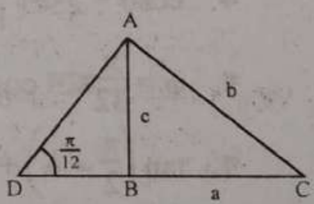
▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. C মিটার দীর্ঘ একটি সীমানা দেয়াল AB এবং C বিন্দুতে অবস্থিত একটি লাইট হাউস থেকে দেয়ালটি পর্যবেক্ষণ করা হয়। দেয়ালের A ও B প্রান্ত থেকে লাইট হাউসটির দূরত্ব যথাক্রমে b ও a। পুরো দেয়ালটি পর্যবেক্ষণের জন্য লাইট হাউসের সার্চ লাইটটিকে $\angle C$ কোণে ঘুরাতে হয়। লাইট হাউস থেকে দেয়াল এবং লাইট হাউসের মধ্যে উৎপন্ন ত্রিভুজ আকৃতির এলাকাটিও পর্যবেক্ষণ করা হয়।
   ক. ত্রিভুজাকৃতির এলাকাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   খ. ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির জন্য প্রমাণ কর যে, $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cdot \cos B \cdot \sin C$
   গ. সার্চ লাইটটিকে $60°$ কোণে ঘুরানো প্রয়োজন হলে দেখাও যে, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

2. কোন বিভেদ তলে আলোক রশ্মি 2α কোণে আপতিত হয়ে 2θ কোণে প্রতিসরিত হলো। এই তলে আপতন কোণ এবং প্রতিসরণ কোণের সাইনের অনুপাত k.
   ক. প্রমাণ কর যে, $\tan 54° = \tan 36° + 2 \tan 18°$.
   খ. আলোক রশ্মির প্রতিসরণ থেকে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha - \theta) = \frac{k-1}{k+1} \tan(\alpha + \theta)$
   গ. $\alpha = \frac{\theta}{3} = 9°$ হলে দেখাও যে, $k = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

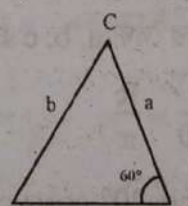
3. $\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{cosec}\beta} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sec\beta} - \frac{1}{\sec\alpha}\right)$ .... (i)
   $P + Q + R = n\pi$ .... (ii)
   ক. $\theta = \cot^{-1}3$ হলে এবং $\cos 2\theta$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. (i) নং উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\alpha - \beta = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{6}}$
   গ. n-এর মান 2 হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 P + \cos^2 Q + \cos^2 R = 2 \cos P \cos Q \cos R + 1$

4.



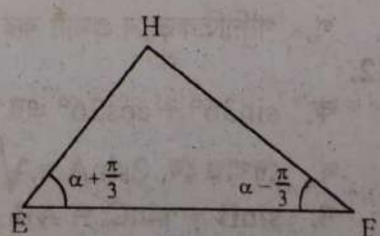
   ক. $\frac{1+\cot D}{1-\cot D}$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. ABC ত্রিভুজে $b = 2c$ এবং $B = 3C$ হলে A, B ও C এর মান নির্ণয় কর।
   গ. দেখাও যে, $\tan\left(\frac{2\pi}{9} + D\right) = \tan\left(\frac{\pi}{9} + D\right) + 2\tan\left(D + \frac{\pi}{36}\right)$.

5.



   ক. ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
   খ. দেখাও যে, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$
   গ. $\angle A = 45°$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)a + c\sqrt{2} = 2b$.

6.



   ক. $\cos 3B$ এর মান $\cos B$ আকারে প্রকাশ কর।
   খ. প্রমাণ কর যে, $\tan E + \tan F = \frac{4\sin(E+F)}{1 - 4\sin^2\left(\frac{E+F}{2}\right)}$.
   গ. $\cos^3\left(\frac{E+F}{2}\right) + \cos^3\left\{(E-F) + \left(\frac{E+F}{2}\right)\right\} + \cos^3\left\{2(E-F) + \left(\frac{E+F}{2}\right)\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

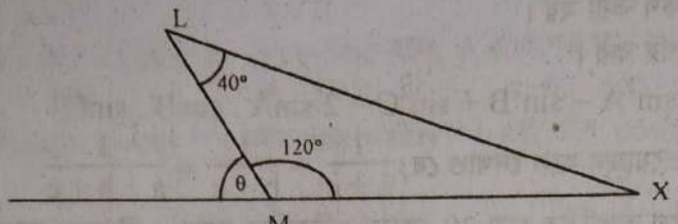
7. দৃশ্যকল্প-১: $n\sin2\alpha = 2(1 - n\sin^2\alpha)\tan\beta$ এবং দৃশ্যকল্প-২: $x = 4\theta$

ক. $\sin420° \cos390° + \sin(-300°) \cos(-330°)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, $(1 - n)\tan\alpha = \tan(\alpha - \beta)$.

গ. দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{x}{4} + 2\tan\frac{x}{2} + 4\tan x + 8\cot2x = \cot\frac{x}{4}$

8.

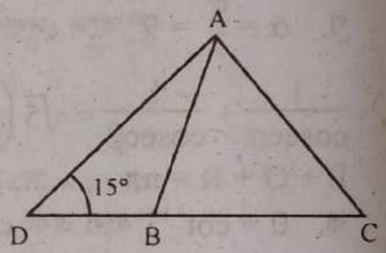


ক. $\tan A = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $A < 90°$ হলে, $\cos2A =$ কত?

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sqrt{3}\ \mathrm{cosec}X - \sec X \doteq 4$

গ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sin^2(\theta + A) + \sin^2A + \sin^2(\theta - A) = \frac{3}{2}$

9.

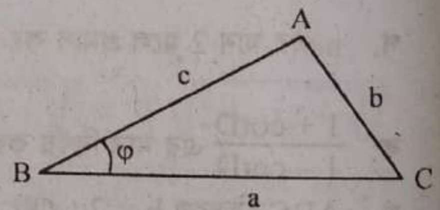


ক. দেখাও যে, $\frac{1 - \tan D}{1 + \tan D} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{D}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

গ. দেখাও যে, $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1.$

10.

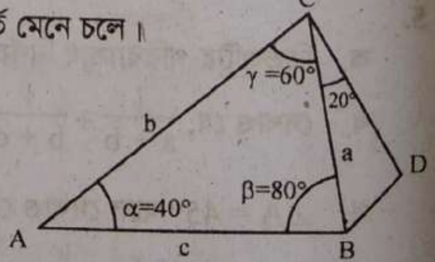


ক. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে $\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\varphi = \frac{\pi}{32}$ হলে $\cos\varphi$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$ হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমবাহু।

11. ΔABC এর বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য a, b, c এবং $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ শর্ত মেনে চলে।

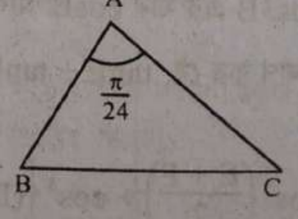


ক. দেখাও যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos20° \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{1}{16}$

গ. গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর যে, ΔABC এর $\angle C = 60°$.

12.

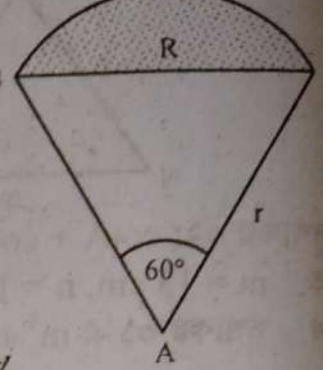


ক. $\sin36° + \cos36°$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $2\sin A = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

গ. $\sin B + \sin C = AB$ এবং $\cos B + \cos C = AC$ হলে দেখাও যে, $\cos(B + C) = \frac{AC^2 - AB^2}{AB^2 + AC^2}$.

17.



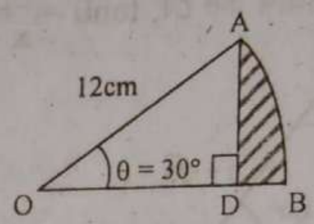
চিত্রে A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ BC. *[অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে]*

ক. $r = 3m$ হলে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $b + c = 2a \cos\frac{B-C}{2}$

গ. $AB = 3$ মিটার এবং প্রতি বর্গমিটার টাইলস করতে 1000 টাকা খরচ হলে R এলাকা টাইলস করতে মোট কত টাকা খরচ হবে?

18. *[অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে]*

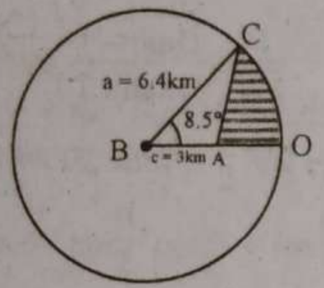


ক. $\frac{\theta}{2}$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

খ. ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{\theta}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

19. *[অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে]*



ক. CD অধিচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. A ও C এর মান নির্ণয় কর।

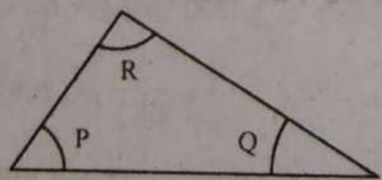
20. $y = \sin 2\theta$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন। *[অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে]*

ক. $\cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70°$ এর মান কত?

খ. $0° \leq \theta \leq 360°$ ব্যবধিতে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

গ. $y = k \sin 2\alpha$ হলে দেখাও যে, $\tan(\theta - \alpha) = \frac{k-1}{k+1}\tan(\theta + \alpha)$.

21. (i)



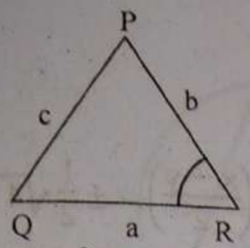
(ii) $\sin p + \sin q = m$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + q\right) + n = 0$ এবং $p + q = r$ *[অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে]*

ক. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 15 সে.মি. এবং এর একটি চাপ 60° কোণ উৎপন্ন করলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় ক

খ. উদ্দীপকের (i) হতে প্রমাণ কর যে, $\cos P + \cos Q + \cos R = 1 + 4\cos\frac{P+Q}{2}\cos\frac{Q+R}{2}\cos\frac{R}{}$

গ. উদ্দীপকের (ii) হতে প্রমাণ কর যে, $\cos r = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$

22. 

PQR ত্রিভুজের পরিসীমা s

/অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে/

ক. 6 কি. মি. দূরত্বে একটি স্তম্ভ পৃথিবী পৃষ্ঠে কোন বিন্দুতে $10'$ কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ. $R = 60°$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-a} = \frac{3}{s}$

গ. প্রমাণ কর যে, $\cos\frac{P}{2} + \cos\frac{Q}{2} + \cos\frac{R}{2} = 4\cos\frac{\pi - P}{4}\cos\frac{\pi - Q}{4}\cos\frac{\pi - R}{4}$

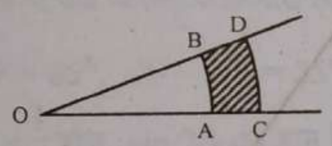
23. /অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে/

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan 25° + \tan 20° + \tan 25° \tan 20° = 1$.

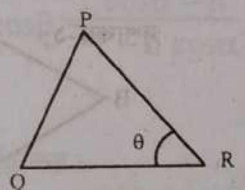
খ. প্রমাণ কর যে, $\sec^2 2\theta + \tan^2 2\theta = -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$.

গ. প্রতি বর্গমিটার 500 টাকা দরে ছায়াঘেরা অংশে ঘাস লাগানোর খরচ নির্ণয় কর। যেখানে $x = 3$ মিটার।

24. /অধ্যায় ৬ ও ৭ এর সমন্বয়ে/



দৃশ্যকল্প-১



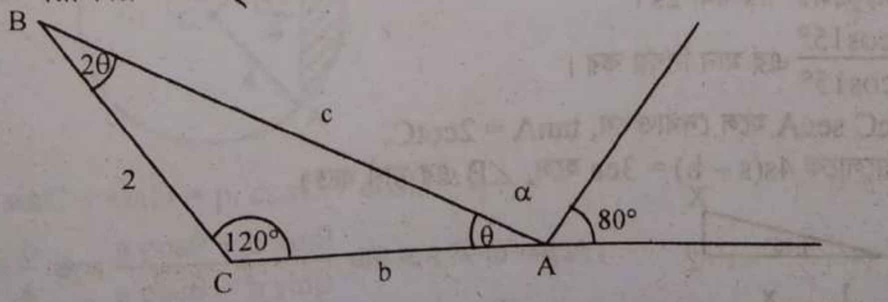
দৃশ্যকল্প-২

ক. দেখাও যে, $\tan 36° + \tan 9° + \tan 36° \tan 9° = 1$

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে ABDC এলাকার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যেখানে OA = 6 সে. মি., AC = 3 সে. মি. এবং AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ সে. মি.।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ $\frac{1}{p+r} + \frac{1}{q+r} = \frac{3}{p+q+r}$ হলে θ নির্ণয় কর।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

25. 

দৃশ্যকল্প-I

দৃশ্যকল্প-II : $p = \tan\theta \tan 2\theta \tan\alpha$. /ঢা. বো. ১৭/

ক. $\sin 25° + \cos 25°$ এর মান কত?

খ. দৃশ্যকল্প-I হতে b এবং c এর মান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $p = \sqrt{3}$.

/দি. বো. ১৭/

26. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = \cos x$.

ক. $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ হলে, $\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $f(x) + f(y) = p$ এবং $g(x) + g(y) = q$ হলে প্রমাণ কর যে, $f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$

গ. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $f(2x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে এর একটি বৈশিষ্ট্য লিখ।

27. $A = \frac{2\pi}{15}$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ এবং $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$. /কু. বো. ১৭/

ক. প্রমাণ কর যে, $\cos 2p = \frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p}$

খ. উদ্দীপকের আলোকে, প্রমাণ কর যে, $16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = 1$

গ. উদ্দীপক থেকে দেখাও যে, $\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$

28. দৃশ্যকল্প-১: $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

দৃশ্যকল্প-২: ΔABC এর $A + B + C = \pi$ /কু. বো. ১৭/

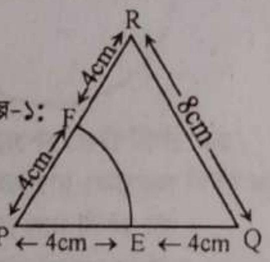
ক. যদি ΔPQR এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p, q, r এবং $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}\,pq$ হয়, তবে R কোণের মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প: ১ এর আলোকে $\cos(x+y)$ এর মান নির্ণয় কর।

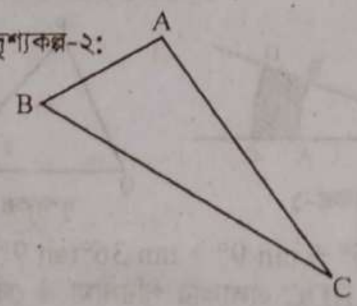
গ. দৃশ্যকল্প: ২ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$

29.

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



/চ. বো. ১৭/

ক. $\sin(A - B + C)$ কে বিস্তৃত কর।

খ. $\frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\operatorname{cosec} C} - \frac{1}{\sec B}$ হলে দৃশ্যকল্প-২ এর কোন কোণটি সমকোণ, নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-১ এ PEF একটি বৃত্তকলা হলে, EQRF এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

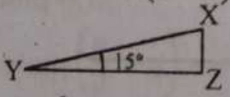
30. দৃশ্যকল্প: ABC ত্রিভুজের পরিসীমা 2s। /চ. বো. ১৭/

ক. $\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\sec B = \sec C\sec A$ হলে দেখাও যে, $\tan A = 2\cot C$.

গ. দৃশ্যকল্পের আলোকে $4s(s-b) = 3ca$ হলে, $\angle B$ এর মান কত?

31. দৃশ্যকল্প-১:



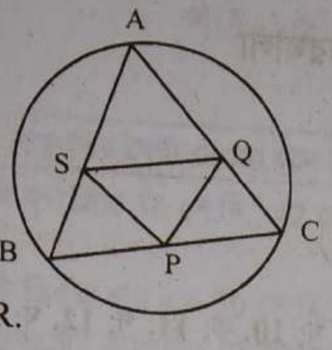
দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. /সি. বো. ১৭/

ক. $\cos 74^\circ 33' \cos 14^\circ 33' + \cos 75^\circ 27' \cos 15^\circ 27'$ এর মান বের কর।

খ. উদ্দীপক ১ এ যদি $\cos X = \sin Y - \cos Z$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর $\angle X + \angle Y = \angle Z$

গ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে $f(2\pi - 4\theta)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

32.



ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R.

/সি. বো. ১৭/

ক. $A + B = 105°$ হলে $\sin C$ নির্ণয় কর।

খ. ΔABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$.

গ. ΔPQS এর ক্ষেত্রে- $\frac{1}{PQ + PS} = \frac{3}{PS + PQ + QS} - \frac{1}{PS + QS}$ হলে $\angle Q$ নির্ণয় কর।

33. দৃশ্যকল্প-১: ΔXYZ এ $\cos X = \sin Y - \cos Z$.

/য. বো. ১৭/

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{1+n} \, . \, \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n} \, . \, \tan\frac{\beta}{2}$

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$.

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে, $\cos\beta = \frac{\cos\alpha - n}{1 - n\cos\alpha}$.

34. $\angle E + \angle F = 65°$, $\angle F - \angle E = 25°$.

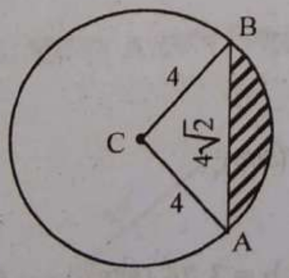
/য. বো. ১৭/

ক. $\tan\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin 2\beta$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $2\sin\left(\pi + \frac{F}{4}\right) = -\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

গ. দেখাও যে, $\tan\angle E . \tan 2\angle E . \tan 3\angle E . \tan 4\angle E = 3$.

35. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $\sin C + \sin D = p$, $\cos C + \cos D = q$

/ব. বো. ১৭/

ক. $\tan\theta = \frac{b}{a}$ হলে $\frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{a\cos\theta - b\sin\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{C-D}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - p^2 - q^2}$.

/বি.দ্র.: এ অধ্যায়ের আরও বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দ্রষ্টব্য।/

উত্তরমালা

19. (i) $\sqrt{\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}}$ (ii) 84 বর্গ একক।
20. $A = 90°, B = 30°, C = 60°$
22. 60°; 25. $A = 105°, B = 15°, c = \sqrt{6}$

বহুনির্বাচনি

1. ক; 2. ঘ; 3. খ; 4. গ; 5. ক; 6. গ; 7. ঘ; 8. ক; 9. খ; 10. ক; 11. গ; 12. ঘ; 13. খ; 14. ক; 15. খ; 1
17. ঘ; 18. ঘ; 19. খ; 20. ঘ; 21. ঘ; 22. গ; 23. খ; 24. ঘ; 25. ঘ; 26. ক; 27. ঘ; 28. গ; 29. ঘ; 3
31. খ; 32. গ; 33. ঘ; 34. খ; 35. খ; 36. খ; 37. খ; 38. ঘ; 39. খ; 40. গ; 41. গ; 42. গ; 43. ক; 4
45. ঘ; 46. ঘ; 47. ঘ; 48. গ; 49. গ; 50. খ; 51. খ; 52. গ; 53. খ; 54. ঘ; 55. ঘ; 56. গ; 57. গ; 5
59. ঘ; 60. গ; 61. গ; 62. খ; 63. ঘ; 64. ঘ;

সৃজনশীল

1. ক. $\frac{1}{2}$ ab sinC; 3. ক. $\frac{4}{5}$;
4. ক. $-\sqrt{3}$; খ. $A = 60°, B = 90°, C = 30°$
5. ক. $\frac{b}{\sqrt{3}}$; 6. ক. $4\cos^3 B - 3\cos B$; গ. $\frac{3}{4}\cos 3\alpha$;
7. ক. $\frac{3}{2}$; 8. ক. $\frac{2}{3}$;
10. ক. $\frac{7}{25}$; খ. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$;
12. ক. $\sqrt{2}\cos 9°$; 13. ক. 30 cm^2;
14. ক. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; খ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক; গ. $\sqrt{2} : \sqrt{3}$;
15. ক. 0.25115π রেডিয়ান; গ. 15.27 cm^2; 16. খ. 18 বর্গ সে.মি. (প্রায়);
17. ক. 3.1416m (প্রায়); গ. 815.3 টাকা;
18. ক. 0.262 রেডিয়ান (প্রায়); খ. $6(2\pi - 3\sqrt{3})\ cm^2$
19. ক. 39262.72 m; খ. 1.61922 km^2; গ. 164.14°; 7.36°;
20. ক. $\frac{3}{16}$; 21. ক. 117.81 ব. সে.মি. (প্রায়);
22. ক. 17.46 মিটার (প্রায়); 23. গ. 1927 টাকা;
24. খ. 16 cm; 15 cm^2; গ. 60°; 25. ক. $\sqrt{2}\cos 20°$; খ. b = 3.76 (প্রায়), c = 5.06 (প্রায়)
28. ক. 45°; খ. $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$; 29. ক. sin2B; খ. A; গ. 19.33 বর্গ সে. মি. (প্রায়)
30. ক. $-\sqrt{3}$; গ. 60°
31. ক. $\frac{1}{2}$; 32. ক. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; গ. 60°;
34. ক. $\frac{3}{5}$; 35. ক. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; খ. 4.57 বর্গ একক (প্রায়)