তৃতীয় অধ্যায়

জটিল সংখ্যা
Complex Numbers

মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সেট মিলে বাস্তব সংখ্যার সেট গঠিত হয়। বাস্তব সংখ্যার সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম হলো এর বর্গ সব সময় অঋণাত্মক। কিন্তু $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-6}$, ... প্রভৃতি এর বর্গ যথাক্রমে $-1, -4, -6, \ldots$ প্রভৃতি যা ঋণাত্মক। এ ধরনের সংখ্যার উদ্ভব হয়েছে $x^2 + 1 = 0, x^2 + 4 = 0, x^2 + 6 = 0, \ldots$ প্রভৃতি সমীকরণ থেকে। এ জাতীয় সমীকরণ সমাধানের চেষ্টার ক্ষেত্রে যে সকল সংখ্যা ব্যবহৃত হয়েছে তা বাস্তব সংখ্যা থেকে ভিন্ন এবং সংখ্যাগুলোকে কাল্পনিক (বা জটিল) সংখ্যা নামকরণ করা হয়েছে। জটিল সংখ্যা হচ্ছে বাস্তব সংখ্যার বর্ধিত রূপ, যা $i\left(i=\sqrt{-1}\right)$ দ্বারা সূচিত একটি কাল্পনিক এককের সংযুক্তির মাধ্যমে গঠিত। খ্রিস্টপূর্ব 50 অব্দে গ্রিক গণিতবিদ ও প্রকৌশলী আলেকজান্দ্রিয়ার হেরন জটিল সংখ্যার ধারণা দেন। জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ সর্বপ্রথম প্রবর্তন করেন ইতালির গণিতবিদ Rafael Bombelli (1526-1572)। তিনি জটিল সংখ্যার আদর্শরূপ $a + ib$ ব্যবহার করেন। 1545 সালে ইতালীয় গণিতবিদ জিরোলামো কার্দানো (Gerolamo Cardano) ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে গিয়ে জটিল সংখ্যা আবিষ্কার করেন। ইউরোপে তিনিই সর্বপ্রথম ঋণাত্মক সংখ্যার পদ্ধতিগত ব্যবহার শুরু করেন। কার্দানো-টার্টাগিলা ফরমুলার জন্য তিনি বেশ পরিচিত। রেনে দেকার্তে এবং 1777 সালে অয়লার $\sqrt{-1}$ এর জন্য i প্রতীক আবিষ্কার করেন। 1806 সালে রবার্ট আরগাঁ জটিল সংখ্যাকে সমতলে চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করেন যা Argand Diagram নামে পরিচিত। প্রকৌশলী ও বিজ্ঞানীরা বীমের বৈশিষ্ট্য ও অনুনাদ বিশ্লেষণে i (জটিল সংখ্যা) ব্যবহার করেন। প্রবাহী পদার্থ, পাইপের ভিতরে পানির প্রবাহ, ইলেকট্রিক সার্কিট, রেডিও তরঙ্গ প্রেরণ ইত্যাদি ক্ষেত্রে জটিল সংখ্যা বিভিন্ন অভিনব সমস্যার সমাধান করে। সবচেয়ে মজার ব্যাপার হলো জটিল সংখ্যা আবিষ্কার না হলে আমরা মোবাইল ফোনে কথা বলা কিংবা রেডিও শুনতে পারতাম না।

নাম	: জিরোলামো কার্দানো (Gerolamo Cardano)
জন্ম	: ২৪ সেপ্টেম্বর, ১৫০১
জন্মস্থান	: প্যাভিয়া, ইতালি
নাগরিকত্ব	: ইতালি
অবদান	: গণিত, বিজ্ঞান, সাহিত্য, দর্শন
উদ্ভাবন	: 1545 সালে জটিল সংখ্যা আবিষ্কার করেন। তিনি একে **'কাল্পনিক'** (fictitious) বলেছিলেন। তিনি প্রথম $i \times i = -1$ এবং $-i \times i = 1$ ব্যবহার করেন। তাঁর লেখা আর্স মাগ্না (Ars Magna) বইটিতে সাধারণ ত্রিঘাত সমীকরণ ও সাধারণ চতুর্ঘাত সমীকরণের সমাধান প্রথম প্রকাশিত হয়।
মৃত্যু	: ২১ সেপ্টেম্বর, ১৫৭৬

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- জটিল সংখ্যা ও এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- জটিল সংখ্যার পরমমান ও নতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- জটিল সংখ্যার ধর্মাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, ভাগ ও গুণের জ্যামিতিক প্রতিরূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- জটিল সংখ্যার বর্গমূল, এককের ঘনমূল ও এদের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।

ব্যবহারিক

- আরগাঁ চিত্রে দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল ও ভাগফল চিহ্নিত করে এদের পরমমান (মডুলাস) ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয় করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১: জটিল সংখ্যা ও এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ, জটিল সংখ্যার পরমমান (মডুলাস) এবং নতি (আর্গুমেন্ট)
- পাঠ-২: অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা
- পাঠ-৩: জটিল সংখ্যার ধর্ম
- পাঠ-৪: জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, ভাগ ও গুণের জ্যামিতিক প্রতিরূপ
- পাঠ-৫, ৬ ও ৭: উদাহরণমালা, অনুশীলনী-3(A)
- পাঠ-৮: জটিল সংখ্যার বর্গমূল এবং এককের ঘনমূল
- পাঠ-৯ ও ১০: উদাহরণমালা, অনুশীলনী-3(B)
- পাঠ-১১ ও ১২: ব্যবহারিক

পাঠ-১

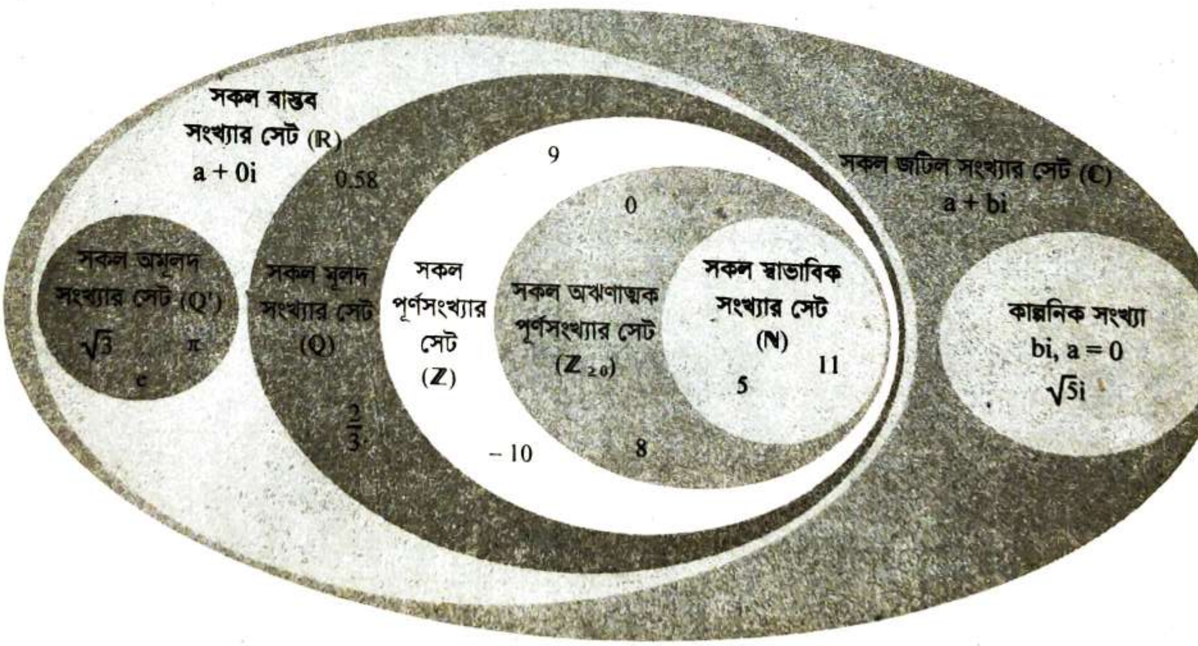
3.1 জটিল সংখ্যা ও এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ (Complex Numbers and Geometrical Representation of Complex Numbers)

3.1.1 জটিল সংখ্যা (Complex Numbers)

যদি a ও b বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $a + ib$ আকারের সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বা জটিল রাশি বলে যেখানে $i = \sqrt{-1}$ । a কে সংখ্যাটির **বাস্তব অংশ** এবং b কে **কাল্পনিক অংশ** বলা হয়। যদি $z = a + ib$ হয়, তবে z এর বাস্তব অংশকে সংক্ষেপে Re(z) এবং কাল্পনিক অংশকে Im(z) অর্থাৎ, $Re(z) = a$ ও $Im(z) = b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সংখ্যাটির বাস্তব অংশ $a = 0$ হলে, তাকে বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা বলে। আবার, কাল্পনিক অংশ $b = 0$ হলে, তাকে বাস্তব সংখ্যা বলে। জটিল সংখ্যা $a + ib$ কে (a, b) **ক্রমজোড়** (ordered pair) আকারেও প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $1 + 2i = (1, 2)$; $0 + i = (0, 1)$; $2 - 3i = (2, -3)$ ইত্যাদি।

জটিল সংখ্যার সেট যে সকল সংখ্যা সেটের সুপার সেট তা চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন:



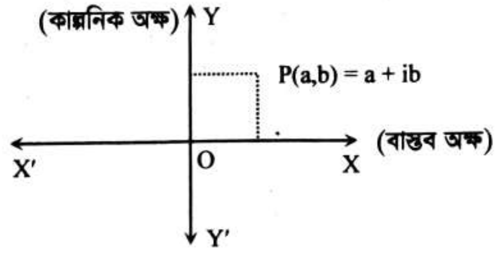
3.1.2 বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড় হিসেবে জটিল সংখ্যা

জটিল সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যার একটি ক্রোমজোড় (x, y) হিসেবে উপস্থাপন করা যেতে পারে, যেখানে সংখ্যাটি হচ্ছে জটিল সমতলে একটি বিন্দু, ঠিক যেমন বাস্তব সংখ্যাগুলিকে সংখ্যা রেখার ওপর একটি বিন্দু হিসেবে প্রকাশ করা হয়। জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয় জটিল সমতল বা জেড প্লেন। এক্ষেত্রে x-অক্ষ বরাবর বাস্তব অংশ এবং y-অক্ষ বরাবর সংখ্যাটির অবাস্তব বা কাল্পনিক অংশ ধরা হয়। এখান থেকে সহজেই দেখা যায় (x, 0) আকারের প্রতিটি জটিল সংখ্যাই আসলে জটিল সমতলে x-অক্ষ বরাবর একেকটা বিন্দু, এবং এরা একই সাথে একেকটা বাস্তব সংখ্যা। এভাবে জটিল সমতলের x-অক্ষ বরাবর ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিকে যেতে থাকলে আমরা $\mathbb{R}$ এর প্রতিটি সংখ্যা অর্থাৎ প্রত্যেকটা বাস্তব সংখ্যাকেই খুঁজে পাব। তার মানে আমরা এই x-অক্ষকে আমাদের পরিচিত সংখ্যারেখা হিসেবে ভাবতে পারি।

অতএব, দেখা যাচ্ছে সংখ্যারেখার প্রতিটি বিন্দুই আসলে জটিল সমতলের অন্তর্ভুক্ত। এখান থেকে সহজেই দেখা যায় যে $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$। যদি (x, y) ক্রোমজোড়টিকে আমরা z নাম দেই তাহলে $z = (x, y)$ যেখানে $Re(z) = x$ এবং $Im(z) = y$ লেখা হয়।

দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1 = (x_1, y_1)$ এবং $z_2 = (x_2, y_2)$ সমান হবে যদি তারা জটিল সমতলে একই বিন্দু নির্দেশ করে, অর্থাৎ $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ হয়, জটিল সংখ্যা পদ্ধতি আসলে বাস্তব সংখ্যা পদ্ধতির একটা **Natural Extension** বা 'প্রাকৃতিক প্রবৃদ্ধি'।

3.1.3 জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ বা আরগাঁ চিত্র

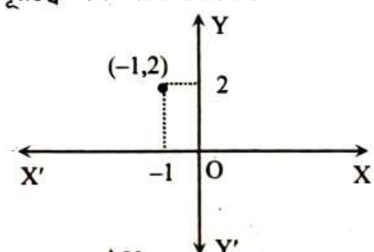


যেকোনো জটিল সংখ্যা $a + ib$ এর ক্রমজোড় (a, b) কে বিন্দু হিসেবে বিবেচনা করে সমতলে নির্দেশ করা যায়। চিত্রের মাধ্যমে এ পদ্ধতি 1806 খ্রিস্টাব্দে প্রথম প্রকাশ করেন গণিতবিদ **রবার্ট আরগাঁ**। তাঁর নাম অনুসারে জটিল সংখ্যা সমতলে স্থাপনের চিত্রকে **আরগাঁ চিত্র** (Argand diagram) বলা হয়।

মনে করি, XOX' ও YOY' সরলরেখাদ্বয় কোনো সমতলে পরস্পরকে লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ বলা হয়। এখন x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ ধরা হলে, $P(a, b)$ বিন্দুটি জটিল সংখ্যা $a + ib$ কে নির্দেশ করবে, যেখানে জটিল সংখ্যাটির বাস্তব অংশ 'a' কে P বিন্দুটির ভুজ (বাস্তব অক্ষ বরাবর) এবং কাল্পনিক অংশ 'b' কে P বিন্দুটির কোটি (কাল্পনিক অক্ষ বরাবর) হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

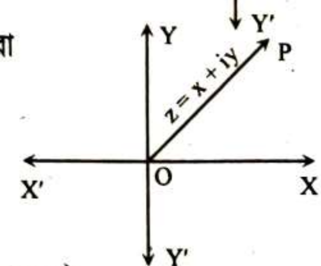
যদি $b = 0$ হয়, তবে P বিন্দুটি x (বাস্তব) অক্ষের ওপর মূলবিন্দু O হতে a একক দূরত্বে অবস্থান করবে।
আবার, $a = 0$ হলে P বিন্দুটি y (কাল্পনিক) অক্ষের ওপর মূলবিন্দু O হতে b একক দূরত্বে অবস্থান করবে।

উদাহরণ: $-1 + 2i$ সংখ্যাটির আরগাঁ চিত্র পাশে দেখানো হলো:
$-1 + 2i$ জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় $(-1, 2)$



3.1.4 জটিল সংখ্যার ভেক্টর স্থাপন
(Vector representation of complex numbers)

কোনো জটিল সংখ্যা $z = x + iy = (x, y)$ কে ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ হিসেবে চিহ্নিত করা যায় যার O **আদি বিন্দু** এবং P **প্রান্ত বিন্দু**।



দৈর্ঘ্য OP হলো $\overrightarrow{OP}$ বা $(z = x + iy)$ এর পরমমান এবং

$z = x + iy = \overrightarrow{OP}$ কে P এর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

3.1.5 কাল্পনিক একক এবং এর প্রকৃতি (Imaginary unit and its nature)

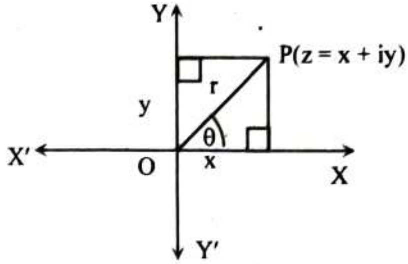
$\sqrt{-1}$ কে কাল্পনিক একক বলা হয় এবং একে i দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $i = \sqrt{-1}$
$\therefore i^2 = -1, i^3 = i^2 . i = -i,$
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i^4 . i = i$ ইত্যাদি।
সুতরাং সাধারণভাবে,
$i^{4n+1} = i^{4n} . i = 1.i = i \ [\because i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1]$
$i^{4n+2} = i^{4n} . i^2 = 1(-1) = -1$
$i^{4n+3} = i^{4n} . i^3 = 1(-i) = -i;$ [n যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা]
আবার, $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i, i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1,$
$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = (-)(-i) = i$ ইত্যাদি।

জেনে রাখো
i^n এর মান নির্ণয়ের সহজ পদ্ধতি:

কাজ: নিচে প্রদত্ত কাল্পনিক সংখ্যাগুলিকে আরগাঁ চিত্রে স্থাপন কর এবং প্রতিটি সংখ্যার বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ চিহ্নিত কর: $0, i, -i, 4 + i, -2 + 4i, i^4, i^5, i^6, i^7$

3.2 জটিল সংখ্যার পরমমান (মডুলাস) এবং নতি (আর্গুমেন্ট)
(Absolute value (modulus) and slope (argument) of complex numbers)



$z = x + iy$ জটিল সংখ্যাটি আরগাঁ চিত্রে P বিন্দু এবং P এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে, চিত্রানুযায়ী $OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$

$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ কে z এর **মডুলাস** বলা হয় এবং একে $| z |$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $z = x + iy$ হলে, $| z | = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$।

চিত্রানুযায়ী, $x = r \cos\theta$ এবং $y = r \sin\theta$, তাহলে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ কে z এর **আর্গুমেন্ট** বলা হয়।

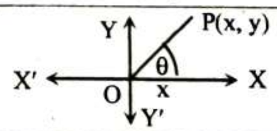
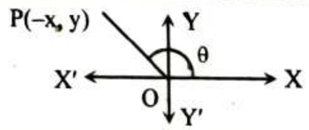
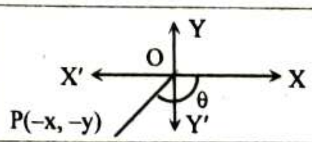
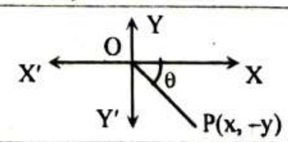
যদি $-\pi < \theta \leq \pi$ হয়, তবে θ কে **মুখ্য** (principal) **আর্গুমেন্ট** বলা হয়। z এর মুখ্য আর্গুমেন্টকে Arg (z) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

x ও y এর মান নির্দিষ্ট থাকলেও ত্রিকোণমিতিক নিয়ম অনুযায়ী θ এর অসংখ্য মান হতে পারে।

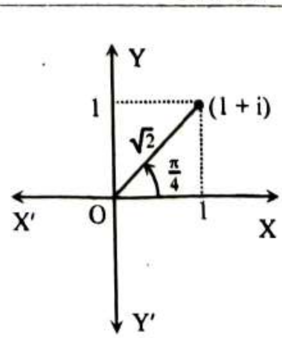
$2n\pi + \theta$ কে **সাধারণ আর্গুমেন্ট** বলা হয়, যেখানে n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা এবং θ মুখ্য আর্গুমেন্ট। ইহাকে arg (z) দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ $\arg(z) = 2n\pi + \theta$

উল্লেখ্য যে, $-\pi < \theta \leq \pi$ ব্যবধিতে θ এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় এবং এ মানটিই মুখ্য আর্গুমেন্ট। যদি জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে বলা হয়, সেক্ষেত্রে মুখ্য আর্গুমেন্টকেই বোঝায়।

চিত্রসহ P(x, y) বিন্দুর বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থানের জন্য জটিলসংখ্যা $z = x + iy$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয়:

চতুর্ভাগ	আর্গুমেন্ট	চিত্র
১ম $z = x + iy; x > 0, y > 0$	$\theta = \tan^{-1}\left\|\frac{y}{x}\right\|$	
২য় $z = -x + iy; x < 0, y > 0$	$\pi - \theta = \pi - \tan^{-1}\left\|\frac{y}{x}\right\|$	
৩য় $z = -x - iy; x < 0, y < 0$	$-\pi + \theta = -\pi + \tan^{-1}\left\|\frac{y}{x}\right\|$	
৪র্থ $z = x - iy; x > 0, y < 0$	$-\theta = -\tan^{-1}\left\|\frac{y}{x}\right\|$	

উদাহরণ: $1 + i$ এর মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।



সমাধান: ধরি, $z = 1 + i$

$z = x + iy$ এর সাথে তুলনা করে, $x = 1, y = 1$

$\therefore$ z এর মডুলাস, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

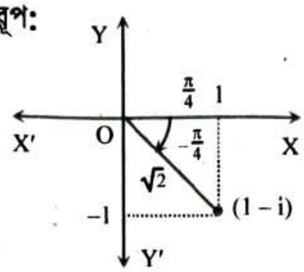
এবং z এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{2}$ এবং মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{4}$

অনুরূপভাবে, $1-i, -1+i$ ও $-1-i$

প্রত্যেকটি জটিল সংখ্যার মডুলাস $=\sqrt{2}$ এবং মুখ্য আর্গুমেন্ট যথাক্রমে $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ ও $-\frac{3\pi}{4}$

জটিল সংখ্যা $1-i$ এর আরগাঁ চিত্র নিম্নরূপ:



কাজ: নিচের কাল্পনিক সংখ্যাগুলির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর এবং আরগাঁ চিত্রের সাহায্যে দেখাও:
(i) $-5i$ **(ii)** i **(iii)** $1+4i$ **(iv)** $\sqrt{3}-i$

3.2.1 জটিল সংখ্যার পোলার আকার (Polar form of Complex numbers)

$z = x + iy$ হলে z কে কার্তেসীয় আকারের জটিল সংখ্যা বলা হয়। একটি বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) ও পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ (অনুচ্ছেদ-3.2 অনুসারে)।

$z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ কে z এর **পোলার আকার** বলা হয়।

এখানে $r = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$; r ও θ যথাক্রমে z এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট।

দ্রষ্টব্য: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ এবং $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ এই সূত্র **অয়লারের সূত্র (Euler's formula)** নামে পরিচিত।

উদাহরণ: $z = 2+3i$ জটিল সংখ্যাটির পোলার আকার $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

যেখানে $r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

3.2.2 জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ

(Addition, subtraction, multiplication and division of complex numbers)

(a) **যোগ:** দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ এর যোগ $z_1 + z_2$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
উদাহরণ: $-1+2i$ ও $3+4i$ এর যোগফল $(-1+3) + i(2+4) = 2+6i$

(b) **বিয়োগ:** জটিল সংখ্যা $z_1 = x_1 + iy_1$ থেকে $z_2 = x_2 + iy_2$ এর বিয়োগ $z_1 - z_2$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
উদাহরণ: $-1+2i$ থেকে $3+4i$ এর বিয়োগফল $(-1-3) + i(2-4) = -4-2i$

(c) **গুণ:** দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ এর গুণ z_1z_2 কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়: $z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
উদাহরণ: $-1+2i$ ও $3+4i$ এর গুণফল $(-3-8) + i(-4+6) = -11+2i$
বি. দ্র. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$
কারণ $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i$ এবং $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{b}\,i$
$\therefore \sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}\,i \times \sqrt{b}\,i = \sqrt{ab}\,i^2 = -\sqrt{ab}$ $[\because i^2 = -1]$

(d) **ভাগ:** দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ এর $\frac{z_1}{z_2}$ ভাগ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$, যেখানে $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$

উদাহরণ: $3+4i$ দ্বারা $-1+2i$ এর ভাগফল $\dfrac{-1+2i}{3+4i}=\dfrac{(-3+8)-i(-4-6)}{3^2+4^2}=\dfrac{5+10i}{25}=\dfrac{1}{5}+i\dfrac{2}{5}$

পোলার আকারের ক্ষেত্রে

পোলার আকারের দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ এবং $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ এর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ যথাক্রমে নিম্নরূপ:

$z_1+z_2=r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}$, $z_1-z_2=r_1e^{i\theta_1}-r_2e^{i\theta_2}$, $z_1z_2=r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

উদাহরণ: $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$ এবং $z_2=\sqrt{5}\,e^{i\tan^{-1}2}$ হলে, $z_1+z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}+\sqrt{5}\,e^{i\tan^{-1}2}$,

$$z_1-z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}-\sqrt{5}e^{i\tan^{-1}2},\ z_1z_2=\sqrt{5}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}2\right)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}2\right)}$$

3.2.3 দুইটি জটিল সংখ্যার সমতা (Equality of two complex numbers)

$z_1=x_1+iy_1$ এবং $z_2=x_2+iy_2$ জটিল সংখ্যা দুইটি সমান হবে অর্থাৎ, $z_1=z_2$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x_1=x_2$ এবং $y_1=y_2$ হয়। অর্থাৎ, একটি জটিল সংখ্যার বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ যথাক্রমে অপর একটি জটিল সংখ্যার বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমান হলে জটিল সংখ্যা দুইটি সমান হবে।

উদাহরণ: (i) $z_1=2+3i$ এবং $z_2=2+3i$ হলে, $z_1=z_2$

(ii) $z_1=2+3i$ এবং $z_2=3+2i$ হলে, $z_1\neq z_2$; কারণ, $\text{Re}(z_1)\neq\text{Re}(z_2)$ এবং $\text{Im}(z_1)\neq\text{Im}(z_2)$

পাঠ-২

3.3 অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা (Conjugate Complex Numbers)

জটিল সংখ্যার গুণের ক্ষেত্রে একটি বিশেষ অবস্থা লক্ষ্য করি, $a+ib$ এর সাথে $a-ib$ গুণ করলে পাই, $a^2-i^2b^2=a^2+b^2\in\mathbb{R}$, যা একটি বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং কোনো জটিল সংখ্যাকে যে জটিল সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে ফলাফল বাস্তব সংখ্যা হয় তাদের পরস্পর **অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা** বলা হয়।

$a+ib$ এবং $a-ib$ জটিল সংখ্যা দুইটির একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা** বলা হয়। কোনো জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা নির্ণয় করতে শুধুমাত্র কাল্পনিক একক i এর চিহ্নের পরিবর্তন করতে হয়।

কোনো জটিল সংখ্যাকে z দ্বারা প্রকাশ করলে, তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যাকে $\overline{z}$ অথবা z^* দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $z=a-ib$ হলে, $\overline{z}$ বা $z^*=a+ib$

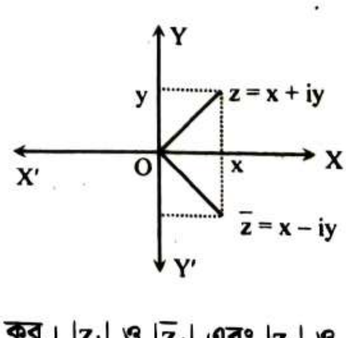
ফরাসি গণিতবিদ অগাস্টিন কসি (1789 – 1857), 1821 খ্রিষ্টাব্দে **অনুবন্ধী** শব্দটির প্রবর্তন করেন।

উদাহরণ: $2+3i$, $2-3i$ ও $3i$ জটিল সংখ্যাগুলির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা যথাক্রমে $2-3i$, $2+3i$ ও $-3i$.

উল্লেখ্য জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী সংখ্যাটিতে বাস্তব অংশের কোনো পরিবর্তন হয় না, কিন্তু কাল্পনিক অংশের চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যদি x কোনো বাস্তব সংখ্যা হয় তবে একে $x+i.0$ লেখা যায় এবং সংখ্যাটির অনুবন্ধী সংখ্যাটি $x-i.0=x$ হয়। অর্থাৎ কোনো জটিল সংখ্যার কাল্পনিক অংশ শূন্য (0) হলে তার অনুবন্ধী সংখ্যা ও ঐ সংখ্যাটি একই।

জটিল সমতলে কোনো জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ এবং তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\overline{z}=x-iy$ পাশের চিত্রে দেখানো হলো।



কাজ: $z_1=2+3i$, $z_2=5i$, $z_3=-4+i$ হলে $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$, $\overline{z}_3$ নির্ণয় কর। $|z_1|$ ও $|\overline{z}_1|$ এবং $|z_2|$ ও $|\overline{z}_2|$ এর মধ্যে কী সম্পর্ক লক্ষ্য করা যায়?

3.3.1 ভাগ আকৃতির জটিল রাশিকে A + iB আকারে প্রকাশ
(Reduction of division type complex numbers to the form A + iB)

কোনো জটিল সংখ্যা $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ দ্বারা $z_1 = x_1 + iy_1$ কে ভাগ করলে তা, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ হয়।

এ রাশিটিকে A + iB আকারে পরিণত করার পদ্ধতি নিম্নরূপ :

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

যা A + iB আকারের।

অর্থাৎ, ভাগ আকৃতির জটিল রাশিকে, রাশিটির হরের অনুবন্ধী সংখ্যা দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে সরল করলে অপর একটি জটিল রাশি আকারে পরিণত করা যায়।

উদাহরণ: $\frac{-1 + 2i}{3 + 4i}$ এর A + iB আকারে প্রকাশ:

$$\frac{-1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(-1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{(-3 + 8) + i(6 + 4)}{9 + 16} = \frac{5 + i10}{25} = \frac{5}{25} + i\frac{10}{25} = \left(\frac{1}{5}\right) + i\frac{2}{5}$$

কাজ: A + iB আকারে প্রকাশ কর: **(i)** $(a + ib)(c + id)$ **(ii)** $\frac{(1 + i)^3}{4 + 3i}$ **(iii)** $\frac{2 + 8i}{3 - 5i}$

পাঠ-৩

3.4 জটিল সংখ্যার ধর্ম (Characteristics of Complex Numbers)

(i) কোনো জটিল সংখ্যা $x + iy = 0$ হবে, যদি $x = 0$ এবং $y = 0$ হয়।

প্রমাণ: $x + iy = 0$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$

$\therefore x = -iy$ বা, $x^2 = -y^2$ বা, $x^2 + y^2 = 0$

x^2 এবং y^2 সংখ্যা দুইটি কোনটিই ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং তারা পৃথক পৃথকভাবে 0 না হলে $x^2 + y^2 = 0$ হতে পারে না।

অতএব, $x = 0$ এবং $y = 0$.

(ii) দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ সমান হবে যদি প্রথমটির বাস্তব অংশ (x_1) = দ্বিতীয়টির বাস্তব অংশ (x_2) এবং প্রথমটির কাল্পনিক অংশ (y_1) = দ্বিতীয়টির কাল্পনিক অংশ (y_2) হয়।

প্রমাণ: অনুচ্ছেদ 3.2.3 দ্রষ্টব্য।

(iii) কোনো জটিল সংখ্যার অনুবন্ধীর অনুবন্ধী ঐ জটিল সংখ্যাই অর্থাৎ $\bar{\bar{z}} = z$

প্রমাণ: $z = x + iy$ তাহলে $\bar{z} = x - iy$ বা, $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy$ $\therefore \bar{\bar{z}} = z$

(iv) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা z এবং $\bar{z}$ এর সমষ্টি $(z + \bar{z})$ এবং গুণফল $(z\bar{z})$ উভয়ে বাস্তব সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করি, $z = x + iy$ তাহলে $\bar{z} = x - iy$

$\therefore z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$ (বাস্তব) এবং $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ (বাস্তব)

(v) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা z ও $\bar{z}$ এর বিয়োগফল $(z - \bar{z})$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা এবং ভাগফল $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করি, $z = x + iy$ তাহলে $\bar{z} = x - iy$

$\therefore z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$ (কাল্পনিক)

এবং $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ (জটিল)

(vi) অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যা z_1 ও z_2 এর যোগফল $(z_1 + z_2)$, বিয়োগফল $(z_1 - z_2)$, গুণফল $(z_1.z_2)$ এবং ভাগফল $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ প্রতিটিই এক একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করি, $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ তাহলে,

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, যা একটি জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে।

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$, যা একটি জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে।

$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, যা একটি জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে।

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}\right)$, যা একটি জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে।

(vii) কোনো জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এর মূলও একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করি, $\sqrt[n]{a + ib} = x$ তাহলে, $a + ib = x^n$

যদি x বাস্তব সংখ্যা হয় তবে x^n ও একটি বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং একটি জটিল সংখ্যা $(a + ib)$ একটি বাস্তব সংখ্যা (x^n) এর সমান হয়ে যায়, যা অসম্ভব। অতএব, x একটি জটিল সংখ্যা হবে। অর্থাৎ একটি জটিল সংখ্যার n-তম (যেকোনো সসীমতম) মূল ও জটিল সংখ্যা হবে। সুতরাং একটি জটিল সংখ্যার মূল একটি জটিল সংখ্যা।

(viii) কোনো জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এর শক্তির সূচক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে শক্তিবিশিষ্ট জটিল সংখ্যাটিও একটি জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণ: $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$ একটি জটিল সংখ্যা।

$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3$

$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ একটি জটিল সংখ্যা।

অনুরূপভাবে অগ্রসর হলে z^n একটি জটিল সংখ্যা দেখানো যাবে। এখানে n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

জটিল সংখ্যার পরম মান (মডুলাস) এবং নতি (আর্গুমেন্ট) সংক্রান্ত ধর্ম

(i) $z = x + iy$ হলে, (a) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

(b) $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = |-z|^2 = |-\bar{z}|^2 = z\bar{z}$

প্রমাণ:

(a) $z = x + iy$ তাহলে, $\bar{z} = x - iy$, $-z = -x - iy$ এবং $-\bar{z} = -x + iy$

$\therefore |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং $|-\bar{z}| = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

সুতরাং $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

(b) $|z|^2 = x^2 + y^2, |\bar{z}|^2 = x^2 + y^2, |-z|^2 = x^2 + y^2, |-\bar{z}|^2 = x^2 + y^2$

এবং $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

সুতরাং $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = |-z|^2 = |-\bar{z}|^2 = z\bar{z}$

(ii) z_1 ও z_2 দুইটি জটিল সংখ্যা হলে, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

প্রমাণ: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$ $\qquad [\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$ $\qquad [\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2]$

$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$ $\qquad [\because z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)]$

$\therefore |z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|$ $[\because \text{Re}(z) \le |z|]$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2|$ $[\because |z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|]$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$ $[\because |\bar{z}_2| = |z_2|]$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

$\therefore |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

অনুরূপে, নিম্নলিখিত অসমতাগুলিও প্রমাণ করা যায়:

(a) $|z_1+z_2+z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$

(b) $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

(iii) $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$

প্রমাণ: $|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$ $[\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= (z_1-z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ $[\because \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2]$

$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_2|^2$ $[\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + |z_2|^2$ $[\because \bar{\bar{z}} = z]$

$= |z_1|^2 - 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

$\Rightarrow |z_1-z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$ $[\because -x \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \text{Re}(z) \le |z|]$

$\Rightarrow |z_1-z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2$

$\Rightarrow |z_1-z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(iv) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

প্রমাণ: নিজে কর।

(v) $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$

প্রমাণ: ধরি, $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$

তাহলে, $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

এখন, $|z_1z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (|z_1|)^2.(|z_2|)^2$

$\therefore |z_1z_2| = |z_1|.|z_2|$

অর্থাৎ, দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের মডুলাস তাদের মডুলাসের গুণফলের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত: যদি $z \neq 0$ হয় তাহলে $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

প্রমাণ: $z.\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z.\frac{1}{z}| = 1 \Rightarrow |z|.\left|\frac{1}{z}\right| = 1$ $\therefore \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

(vi) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$

প্রমাণ: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1.\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|.\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

অর্থাৎ, দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের মডুলাস তাদের মডুলাসের ভাগফলের সমান।

(vii) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

প্রমাণ: ধরি, $z_1 = x_1 + iy_1$ ও $z_2 = x_2 + iy_2$

$\therefore z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$$\therefore \arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_1x_2 - y_1y_2} = \tan^{-1}\frac{\frac{y_2}{x_2} + \frac{y_1}{x_1}}{1 - \frac{y_1}{x_1}.\frac{y_2}{x_2}} = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} + \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2} = \arg z_1 + \arg z_2.$$

(viii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

প্রমাণ: (vii) নং হতে,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\therefore \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \tan^{-1}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1x_2 + y_1y_2} = \tan^{-1}\frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}} = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} - \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: পাঠ ৩ এর আলোকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সমাধানের কিছু বিশেষ কৌশল নিম্নে দেওয়া হলো :

1. $|z - k_1| = k_2$ সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(k_1, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= k_2$ একক।
2. $|z| = k$ সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= k$ একক।
3. $|az + k_1| = |az + k_2|$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।
4. $|az + k_1| = |bz + k_2|$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।
5. $z\bar{z} = a^2$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= a$ একক।
6. $|z + k| = x$ বা $|z + k| = y$ সমীকরণটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।
7. $|z + k| + |z - k| = r$ হলে উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

কাজ: 1. z_1, z_2, z_3 ও z_4 জটিল সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \le \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$, যখন $|z_2| \ne |z_3|$ **(ii)** $\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \le \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}$, যখন $|z_3| \ne |z_4|$

উদাহরণের সাহায্যে (i) ও (ii) এর সত্যতা যাচাই কর।

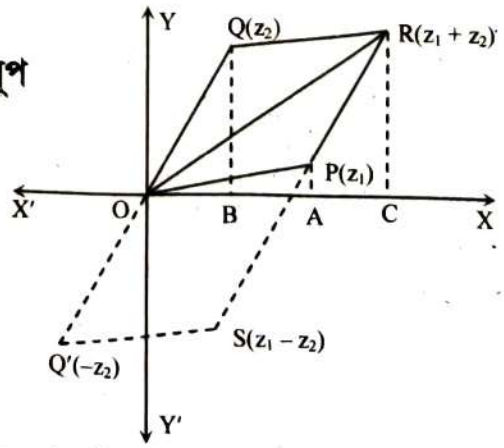
2. $z = x + iy$ হলে $|z - 1| = 5$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। এটি কীসের সমীকরণ নির্দেশ করে?

3. $z = x + iy$ হলে $|z + 2i| > 3$ দ্বারা নির্দেশিত জ্যামিতিক অঞ্চল চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

পাঠ-৪

3.5 জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, ভাগ ও গুণের জ্যামিতিক প্রতিরূপ

(Geometrical Representation of the Addition, Subtraction, Division and Multiplication of Complex Numbers)



3.5.1 জটিল সংখ্যার যোগ এবং বিয়োগের জ্যামিতিক প্রতিরূপ

মনে করি, জটিল সমতলে $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ জটিল সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে P ও Q বিন্দু দ্বারা সূচিত। OPRQ একটি সামান্তরিক অঙ্কন করি, যেখানে OP এবং OQ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে।

P, Q ও R বিন্দু হতে x-অক্ষের ওপর যথাক্রমে PA, QB ও RC লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে A ও B এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, 0)$ ও $(x_2, 0)$

এখানে, OC = OX এর ওপর, OR এর লম্ব অভিক্ষেপ।

= OX এর ওপর, (OP এর লম্ব অভিক্ষেপ) + (PR এর লম্ব অভিক্ষেপ)

= OX এর ওপর, (OP এর লম্ব অভিক্ষেপ) + (OQ এর লম্ব অভিক্ষেপ); [যেহেতু OQ || PR এবং OQ = PR]

$= OA + OB = x_1 + x_2$

আবার, OY এর ওপর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন করে এভাবে দেখানো যায়, $RC = y_1 + y_2$
সুতরাং, R বিন্দুর ভুজ $x_1 + x_2$ এবং কোটি $y_1 + y_2$
অর্থাৎ, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
বিন্দুটির জটিল আকার $= (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) = (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = z_1 + z_2$
সুতরাং, জটিল সমতলে R বিন্দুটি, P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত জটিল সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল প্রকাশ করে।
অনুরূপে, OQ′SP সামান্তরিক অঙ্কন করি যার সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে OQ′ এবং OP.
এখানে $-z_2 = -x_2 - iy_2$ জটিল সংখ্যাটি Q′ বিন্দু সূচিত করে। পূর্বের ন্যায় অগ্রসর হয়ে দেখানো যায় যে, জটিল সমতলে S বিন্দুটিই P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফল প্রকাশ করে এবং S এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$।
বিন্দুটির জটিল আকার $= (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2) = (x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = z_1 - z_2$
সুতরাং জটিল সমতলে S বিন্দুটি, P ও Q বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত জটিল সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফল প্রকাশ করে।
চিত্র হতে পাই, $OR \leq OP + PR$ বা, $OR \leq OP + OQ$

$$\therefore |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

3.5.2 জটিল সংখ্যার গুণ এবং এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ

মনে করি, দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
তাহলে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল,

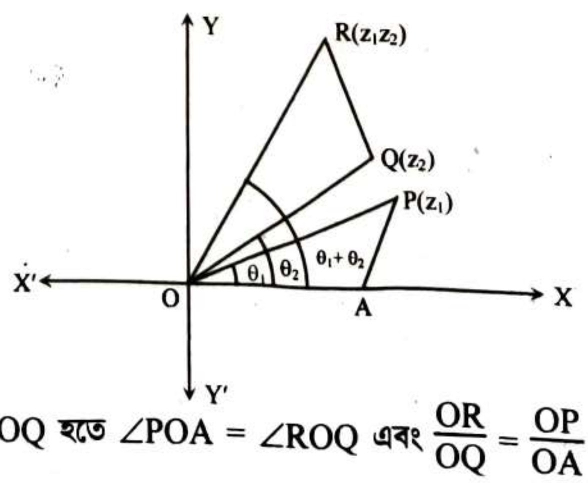
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\,\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\,\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\,\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

এটি অপর একটি জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে।
উপরিউক্ত গুণফল হতে দুইটি বিষয় পরিলক্ষিত হয়:

(i) $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2|$
অর্থাৎ, দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের মডুলাস তাদের পৃথক পৃথক ভাবে মডুলাসের গুণফলের সমান।

(ii) $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
অর্থাৎ, দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের আর্গুমেন্ট তাদের পৃথক পৃথক ভাবে আর্গুমেন্টের যোগফলের সমান।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: মনে করি, আরগাঁ চিত্রে P ও Q বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে এবং z_1 ও z_2 এর গুণফল $z_1 z_2 = z$ দ্বারা প্রকাশিত বিন্দু R.



তাহলে $OP = r_1 = |z_1|$, $OQ = r_2 = |z_2|$,
$OR = r_1 . r_2 = |z_1|\,|z_2| = OP.OQ$
$\angle POX = \theta_1$, $\angle QOX = \theta_2$ এবং $\angle ROX = \theta_1 + \theta_2$.
OX বরাবর, $OA = 1$ বিবেচনা করি এবং OQ এর যে পাশে OP আছে, তার বিপরীত পাশে $\angle POA$ এর সমান $\angle QOR$ অঙ্কন করি যেন $OR = \dfrac{OP.OQ}{OA}$ হয়। তাহলে R বিন্দুই z_1 ও z_2 জটিল সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল প্রকাশ করে।

P, A এবং R,Q যোগ করি। উৎপন্ন ত্রিভুজদ্বয় POA এবং ROQ হতে $\angle POA = \angle ROQ$ এবং $\dfrac{OR}{OQ} = \dfrac{OP}{OA}$ পাওয়া যায়। সুতরাং POA এবং ROQ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

অতএব আরগাঁ চিত্রে $P(z_1)$ ও $Q(z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের গুণফল নির্ণয়ের জন্য OX হতে নির্বাচিত স্কেলে $OA = 1$ অংশ কেটে নিয়ে অঙ্কিত POA ত্রিভুজের সদৃশ ROQ ত্রিভুজ আঁকতে হবে, যেখানে OQ এর যে পাশে OP অবস্থিত তার বিপরীত পাশে OR অবস্থিত। তাহলে $P(z_1)$ ও $Q(z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের গুণফল R দ্বারা প্রকাশিত হবে।

3.5.3 জটিল সংখ্যার ভাগ এবং এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ

মনে করি, দুইটি জটিল সংখ্যা $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$
তাহলে সংখ্যাদ্বয়ের ভাগফল,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)}{r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \frac{(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i \sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i \sin\theta_2)}$$

$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \frac{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i (\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \quad [\because \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1]$$

এটি অপর একটি জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে।

উপরিউক্ত ভাগফল হতে দুইটি বিষয় পরিলক্ষিত হয়: (i) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

অর্থাৎ, দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের মডুলাস উহাদের পৃথক পৃথক ভাবে মডুলাসের ভাগফলের সমান।

(ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

অর্থাৎ, দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের আর্গুমেন্ট তাদের পৃথক পৃথক ভাবে আর্গুমেন্টের বিয়োগফলের সমান।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: মনে করি, আরগাঁ চিত্রে P ও Q বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ জটিল সংখ্যা প্রকাশ করে এবং z_1 ও z_2 এর ভাগফল $\frac{z_1}{z_2} = z$ দ্বারা প্রকাশিত বিন্দু R.

তাহলে $OP = r_1 = |z_1|$, $OQ = r_2 = |z_2|$, $OR = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{OP}{OQ}$

$\angle POX = \theta_1$, $\angle QOX = \theta_2$ এবং $\angle ROX = \theta_2 - \theta_1$

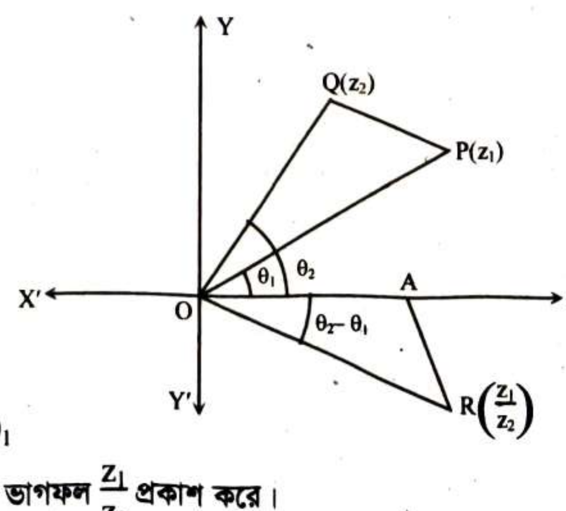
OX বরাবর $OA = 1$ বিবেচনা করি এবং OP এর যে পাশে OQ আছে, তার বিপরীত পাশে $\angle QOX$ এর সমান $\angle POR$ অঙ্কন করি যেন $\angle OQP$ এর সমান $\angle OAR$ হয়।

চিত্রানুযায়ী, $\angle QOX = \theta_2 = \angle POR$
বা, $\angle QOP + \angle POX = \angle POX + \angle XOR$
বা, $\angle QOP = \angle XOR = \angle AOR$
আবার, $\angle OQP = \angle OAR$
সুতরাং OPQ এবং OAR ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

তাহলে, $\frac{OR}{OP} = \frac{AR}{PQ} = \frac{OA}{OQ}$

বা, $OR = \frac{OP}{OQ} \cdot OA = \frac{OP}{OQ} \quad [\because OA = 1]$

আবার, $\angle XOR = \angle POR - \angle POX = \theta_2 - \theta_1$



অতএব, R বিন্দুই দুইটি জটিল সংখ্যা z_1 ও z_2 এর ভাগফল $\frac{z_1}{z_2}$ প্রকাশ করে।

কাজ: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 2i$ হলে $z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 z_2$ ও $\frac{z_1}{z_2}$ এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ দেখাও।

পাঠ-৫, ৬ ও ৭

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $-1+\sqrt{3}i$ **জটিল সংখ্যাটিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর। সংখ্যাটির মডুলাস, মুখ্য আর্গুমেন্ট এবং সাধারণ আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।** [বুয়েট ০৯-১০; য: বো: ১৫]

সমাধান: এখানে, $-1 = r\cos\theta$ এবং $\sqrt{3} = r\sin\theta$

$\therefore r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

যেহেতু বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত, কাজেই মূখ্য আর্গুমেন্ট $= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

তাহলে, $-1+\sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ এটিই সংখ্যাটির পোলার আকার।

সংখ্যাটির মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \frac{2\pi}{3}$ এবং **সাধারণ আর্গুমেন্ট** $= 2n\pi + \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{N}$

উদাহরণ-2. $z = x+iy$ **হলে,** $|z-5| = 3$ **দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [কু: বো: ০৬]

সমাধান: $|z-5| = 3$ বা, $|x+iy-5| = 3$ বা, $|(x-5)+iy| = 3$ বা, $\sqrt{(x-5)^2+y^2} = 3$

বা, $(x-5)^2+y^2 = 3^2$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $(5, 0)$ ও ব্যাসার্ধ 3 একক।

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(5, 0)$ ও ব্যাসার্ধ 3 একক।

? অনুশীলনী-3(A)

Type-I

1. নিচের জটিল সংখ্যাগুলিকে আরগাঁ চিত্রে স্থাপন কর:
   (i) $1+2i$ **(ii)** $-2+3i$ **(iii)** $3-4i$ **(iv)** $-4-5i$ **(v)** $5i$

Type-II

2. নিচের জটিল সংখ্যাগুলির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর:
   (i) $2+3i$ [বুয়েট ০৪-০৫, ১২-১৩] **(ii)** $4+3i$ **(iii)** $1+\sqrt{3}i$ [বুয়েট ০৬-০৭; ১০-১১]
   (iv) $3-5i$ **(v)** $-2+2i$ **(vi)** $-8-6i$ **(vii)** $-i$ **(viii)** $a-ai; a>0$
3. **(i)** $z = -2-2\sqrt{3}i$ একটি জটিল রাশি হলে $\text{Arg}(\sqrt{z})$ নির্ণয় কর। [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ)]
   (ii) $z_1 = 1+i\sqrt{3}, z_2 = \sqrt{3}-i$ হলে দেখাও যে,
   (a) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ (b) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

Type-III

4. নিচের জটিল সংখ্যাগুলিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর এবং মুখ্য আর্গুমেন্ট ও সাধারণ আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর:
   (i) $1+\sqrt{3}i$ **(ii)** $-i$ [বুয়েট ০৬-০৭; ১০-১১] **(iii)** $a-ai; a>0$

Type-IV

5. A + iB আকারে প্রকাশ কর:

(i) $(1 + 2i)(2 + 3i)(3 + 4i)$ (ii) $\frac{1+2i}{3-4i}$ (iii) $\frac{(1+i)^2}{2-3i}$ (iv) $\frac{1+2i}{2+3i} + \frac{1-4i}{3-i}$ (v) $\frac{i}{3+i}$

(vi) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-২(ক)]

6. (i) $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(ক)]

(ii) দেখাও যে, $\frac{3-i}{1-2i}$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস $\sqrt{2}$ এবং আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{4}$।

(iii) $re^{i\theta} = \frac{3+3i}{2+3i} + \frac{1+5i}{1-2i}$ হলে r ও θ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ১৭-১৮]

(iv) $-4-4i$ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(ক)]

Type-V

7. (i) $(a + ib)(c + id) = x + iy$ হলে, দেখাও যে, $(a - ib)(c - id) = x - iy$। [ব: বো: ১৫; চ: বো: ০৬]

(ii) যদি a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2 + b^2 = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। [ঢা: বো: ১৬, ১৫, ১৪, ০৭; ব: বো: ০৭; রা: বো: ১৬, ১২, ০৬; দি: বো:, চ: বো: ১২; কু: বো: ১৪, ১০, ০৮; সি: বো: ১২, ০৮; য: বো: ০৮, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(iii) $\frac{x}{y} = \frac{a+ib}{c+id}$ হলে, দেখাও যে, $(c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = 0$।
[বুয়েট ০৪-০৫; কু: বো: ১৪; সি: বো: ০৯, ০৫; দি: বো: ১৪, ১২; ব: বো: ১৪, ০৯; য: বো: ১০, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১১]

(iv) $x + iy = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}}$ হলে দেখাও $(x^2 + y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(ক)]

(v) $-2 - 2i = (a^2 + 2) + ib$ সমীকরণটির মূল a এবং b এর প্রকৃতি নিরূপণ কর।
[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(গ)]

(vi) যদি $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ হয় তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 = 1$

(vii) $x = \frac{a+ib}{a-ib}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(a^2 + b^2)x^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 - b^2)x$

Type-VI

8. যদি $z = x + iy$ হয়, তবে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের নাম উল্লেখসহ সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) $|z - 8| + |z + 8| = 20$ [য: বো: ০৫; রা: বো: ১০; ব: বো: ১৪]

(ii) $|z - 2| = |z - 3i|$ (iii) $|2z + 3| = |z + 6|$

(iv) $|z + i| = |\overline{z} + 2|$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(ক)]

(v) $|z + 5| + |z - 5| = 15$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(vi) $|z - 5| = 3$ [ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(vii) $|2z + 3| = |3z + 1|$ [যশোর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(viii) $z\overline{z} = 4$ (ix) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ (x) $\text{Im}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(xi) $|z + 4| = x$ (xii) $\big||z + 2i| - |z - 2i|\big| = 2$

9. (i) দেখাও যে, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = 1$ [কু: বো: ০৭]

(ii) $z = x + iy$ এবং $3|z-1| = 2|z-2|$ হলে, প্রমাণ কর যে, $5(x^2+y^2) = 2x+7$. [য: বো: ০৮; চ: বো: ১৩, ১১]

(iii) $z = x + iy$ এবং $|2z-1| = |z-2|$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2 = 1$ [ঢা: বো: ১১; রা: বো: ০৫; দি: বো: ০৯; ব: বো: ১০]

(iv) $x + iy = 2e^{-i\theta}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2 = 4$. [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ)]

(v) $|z+1| + |z-1| = 4$ হলে প্রমাণ কর যে, $3x^2 + 4y^2 = 12$. যেখানে $z = x + iy$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-২(খ)]

(vi) $\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-x-2 = 0$

(vii) $z = \frac{2}{3+\cos\theta+\sin\theta}$ হলে প্রমাণ কর যে, $2(x^2+y^2) = 3x-1$.

10. (i) $x - 4i$ ও $-3 + iy$ পরস্পর অনুবন্ধী হলে, x ও y নির্ণয় কর।

(ii) $3 + ix^2y$ এবং $x^2 + y + 4i$ পরস্পর অনুবন্ধী হলে x এবং y এর বাস্তব মান নির্ণয় কর।

(iii) দুইটি জটিল সংখ্যা নির্ণয় কর যাদের যোগফল 4 ও গুণফল 8।

(iv) যদি $z_1 = -2 + 3i$ এবং $z_2 = 5 - i$ হয়, তবে দেখাও যে, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ এবং $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$

(v) যদি z কোনো জটিল সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $|\bar{z}| = |z|$, $\bar{\bar{z}} = z$, $z\bar{z} = |\bar{z}|^2 = |z|^2$,

$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ এবং $z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

(vi) $z = 3 + 2i$ এবং $\bar{z} = 3 - 2i$ হলে, দেখাও যে, $z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 = 23$ [য: বো: ০৫]

(vii) যদি $z_1 = 2 - 3i$ এবং $z_2 = -3 + i$ হয়, তবে দেখাও যে, $|z_1+z_2| < |z_1-z_2| < |z_1| + |z_2|$

(viii) যদি $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ হয়, তবে দেখাও যে, $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$

(ix) যদি z_1 এবং z_2 দুইটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Type-VII

11. (i) $9 + i$, $4 + 13i$, $-8 + 8i$ এবং $-3 - 4i$ জটিল সংখ্যাগুলি আর্গন্ড চিত্রে যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দু সূচিত করলে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি বর্গ।

(ii) $2 - 2i$, $8 + 4i$, $5 + 7i$ এবং $-1 + i$ জটিল সংখ্যাগুলো আর্গন্ড চিত্রে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দু সূচিত করলে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি আয়ত।

(iii) আঁরগা চিত্রে z, iz ও z + iz দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যখন, $z = 2 + 3i$.

উত্তরমালা

2. (i) $\sqrt{13}, \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ (ii) $5, \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (iii) $2, \frac{\pi}{3}$ (iv) $\sqrt{34}, -\tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ (v) $2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$

(vi) $10, \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \pi$; (vii) $1, -\frac{\pi}{2}$ (viii) $a\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}$

3. (i) $\frac{-\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

4. (i) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

(ii) $1\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}, -\frac{\pi}{2}, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

(iii) $a\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}, -\frac{\pi}{4}, 2n\pi - \frac{\pi}{4}$; যেখানে $n \in \mathbb{N}$

5. **(i)** $-40+5i$ **(ii)** $-\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}$ **(iii)** $-\frac{6}{13}+i\frac{4}{13}$ **(iv)** $\frac{171}{130}-i\frac{133}{130}$ **(v)** $\frac{1}{10}+i\frac{3}{10}$ **(vi)** $0+i(-1)$

6. **(i)** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(iii)** $r=\sqrt{\frac{116}{65}};\ \theta=\pi-\tan^{-1}\frac{38}{21}$ **(iv)** $-\frac{3\pi}{4}$

7. **(v)** a এর মান জটিল ও b এর মান বাস্তব;

8. **(i)** উপবৃত্ত, $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ **(ii)** সরলরেখা, $4x-6y+5=0$ **(iii)** বৃত্ত, $x^2+y^2=9$

(iv) সরলরেখা, $4x-2y+3=0$ **(v)** উপবৃত্ত, $20x^2+36y^2=1125$ **(vi)** বৃত্ত; $(x-5)^2+(y-0)^2=3^2$

(vii) বৃত্ত; $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2$; **(viii)** বৃত্ত; $x^2+y^2=4$; **(ix)** বৃত্ত; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

(x) বৃত্ত; $(x-0)^2+(y-1)^2=1^2$; **(xi)** পরাবৃত্ত, $y^2=-8x-16$; **(xii)** অধিবৃত্ত; $x^2-3y^2+3=0$

10. **(i)** $x=-3, y=4$ **(ii)** $\left.\begin{matrix}x=\pm 2\\ y=-1\end{matrix}\right\}$ **(iii)** $2-2i, 2+2i$.

11. **(iii)** $\frac{13}{2}$ বর্গএকক।

পাঠ-৮

3.6 জটিল সংখ্যার বর্গমূল এবং এককের ঘনমূল
(Square Roots of Complex Numbers and Cubic Roots of Unity)

3.6.1 জটিল সংখ্যার বর্গমূল

মনে করি, $a+ib$ একটি জটিল সংখ্যা এবং তার বর্গমূল $x+iy$, যেখানে x ও y বাস্তব সংখ্যা।

অর্থাৎ, $\sqrt{a+ib}=x+iy$ বা, $a+ib=(x+iy)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a+ib=(x^2-y^2)+2ixy$

$\therefore x^2-y^2=a \qquad \text{... ... (i)}$

এবং $2xy=b \qquad \text{... ... (ii)}$

এখন, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2$

$=a^2+b^2$ [(i) ও (ii) নং এর সাহায্যে]

$\therefore x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{... ... (iii)}$

যেহেতু, x ও y দুইটি বাস্তব সংখ্যা, সুতরাং x^2+y^2 ধনাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ, $\sqrt{a^2+b^2}$ ধনাত্মক।

(i) ও (iii) নং থেকে পাই, $x^2=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)$ এবং $y^2=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)$

$\therefore x=\pm\left\{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$ এবং $y=\pm\left\{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

(ii) নং থেকে আমরা নিশ্চিত যে, b ধনাত্মক হলে, x এবং y একই চিহ্নযুক্ত হবে।

এক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}+i\left\{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$

আবার, b ঋণাত্মক হলে, x এবং y বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে,

এক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}-i\left\{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$

কাজ: উপরে বর্ণিত পদ্ধতি ও বিকল্প পদ্ধতিতে বর্গমূল নির্ণয় কর: $21-20i$

3.6.2 এককের ঘনমূল (Cubic roots of unity)

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক); চ: বো: ১১; সি: বো: ০৯; মাদ্রাসা বো: ১২]

মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$ তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$ বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ এবং $\dfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

3.6.3 এককের ঘনমূলের বৈশিষ্ট্যাবলি (Properties of cubic roots of unity)

(i) ঘনমূল তিনটির একটি বাস্তব এবং অপর দুইটি জটিল সংখ্যা। জটিল সংখ্যা দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী।

এখানে 1 বাস্তব সংখ্যা এবং $\dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ও $\dfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ জটিল সংখ্যা।

আবার, $\dfrac{1}{2}\overline{(-1 + i\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ এবং $\dfrac{1}{2}\overline{(-1 - i\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

(ii) জটিল ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির বর্গ।

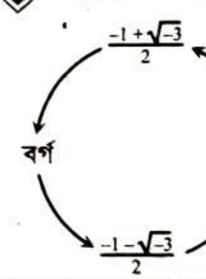
মনে করি, $\omega = \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ তাহলে, $\omega^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2i\sqrt{3} - 3)$

$$= \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

আবার, $\omega = \dfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ হলে, $\omega^2 = \dfrac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} - 3)$

$$= \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

জেনে রাখো



সুতরাং জটিল মূলদ্বয়ের যেকোনো একটি ω হলে, অপরটি ω^2. এক্ষেত্রে এককের ঘনমূলগুলি $1, \omega, \omega^2$ উল্লেখ্য, এককের ঘনমূলগুলিকে সাধারণত $1, \omega, \omega^2$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(iii) এককের জটিল ঘনমূল দুইটির গুণফল একক।

জটিল ঘনমূল দুইটির যেকোনো একটি ω হলে, ω দ্বারা $\sqrt[3]{1} = x$ বা, $x^3 = 1$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। তাহলে, $\omega^3 = \omega.\ \omega^2 = 1.$

অন্যভাবে, $\dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \cdot \dfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \dfrac{1}{4}\{(-1)^2 - (i\sqrt{3})^2\} = \dfrac{1}{4}(1 + 3) = \dfrac{1}{4} \cdot 4 = 1$

(iv) এককের জটিল ঘনমূল দুইটি একটি অপরটির উল্টা (reciprocal)।

জটিল ঘনমূল দুইটি ω ও ω^2 হলে, $\omega.\ \omega^2 = 1$ তাহলে, $\omega = \dfrac{1}{\omega^2}$ বা, $\omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$

(v) এককের ঘনমূল তিনটির যোগফল শূন্য।

আমরা জানি, $1 + x + x^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ω এবং ω^2. তাহলে, ω এবং ω^2 উভয়ের জন্যই সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

$\therefore 1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং $1 + \omega^2 + \omega^4 = 0$ বা, $\mathbf{1 + \omega + \omega^2 = 0}$ $[\because \omega^4 = \omega^3.\omega = \omega]$

সুতরাং এককের ঘনমূল এর $1, \omega$ ও ω^2 এর যোগফল শূন্য।

উল্লেখ্য, যেকোনো বাস্তব সংখ্যা a হলে, a কে a.1 আকারে লেখা যায়। সুতরাং a এর ঘনমূল তিনটি হবে $a, a\omega$ এবং $a\omega^2$। অর্থাৎ একটি মূল বাস্তব এবং অপর দুইটি মূল জটিল।

3.6.4 ω এর ঘাতসমূহ (Powers of ω)

যেহেতু $\omega^3 = 1 \therefore \omega^4 = \omega^3.\omega = \omega, \omega^5 = \omega^3.\omega^2 = \omega^2, \omega^6 = (\omega^3)^2 = 1$

তাহলে, কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1, \omega^{3n+1} = \omega^{3n}.\omega = \omega$ এবং $\omega^{3n+2} = \omega^{3n}.\omega^2 = \omega^2$

আবার, $\omega^{-3n} = \frac{1}{\omega^{3n}} = \frac{1}{1} = 1, \omega^{-(3n+1)} = \frac{1}{\omega^{3n+1}} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$ এবং $\omega^{-(3n+2)} = \frac{1}{\omega^{3n+2}} = \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$

সুতরাং ω এর যেকোনো ঘাতের মান 1, ω এবং ω^2 এর মধ্যে যেকোনো একটি হবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: পাঠ ৮ এর আলোকে বহুনির্বাচনি প্রশ্ন সমাধানের কিছু বিশেষ কৌশল নিম্নে দেওয়া হলো :

1. $x + iy$ এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য $\frac{y}{2}$ কে এমন দুইটি উৎপাদক a ও b এ ভাঙ্গাতে হবে যেন $a^2 - b^2 = x$ হয়। তাহলে $\sqrt{x + iy} = \pm (a + ib)$ যেখানে b এর চিহ্ন y এর চিহ্নের অনুরূপ।
2. $\sqrt[3]{-n^3} = -n, -n\omega, -n\omega^2 \left[\text{যেখানে, } \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right]$
3. $\sqrt[4]{-n^2} = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1 \pm i)$
4. $\sqrt[6]{-n^3} = \pm\sqrt{n}\, i, \pm\sqrt{n}\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)i = \sqrt{-n}, \sqrt{-n\omega}, \sqrt{-n\omega^2}$
5. $\sqrt{-n + n\sqrt{-n + n\sqrt{-n + ...\infty}}}) = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$

কাজ: 1. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে প্রমাণ কর যে, **(i)** $\omega^3 = 1$ **(ii)** $1 + \omega + \omega^2 = 0$

2. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে মান নির্ণয় কর:

(i) $\omega^{15} + \omega^{20} + \omega^{25}$ **(ii)** $\frac{(1+\omega^7)^8}{(1+\omega^2)}$ **(iii)** $(3 + 3\omega + 7\omega^2)^5$

3. $\sqrt[3]{-27}$ এর মান নির্ণয় কর। এক্ষেত্রে কাল্পনিক মূল কয়টি? কাল্পনিক মূলগুলির মধ্যে কোনো সম্পর্ক দেখতে পাওয়া যায় কী? সম্পর্কটি কী ধরনের?

দৃষ্টব্য: প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যারই তিনটি ঘনমূলের মধ্যে একটি বাস্তব সংখ্যা এবং অপর দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

পাঠ-৯ ও ১০

উদাহরণমালা

উদাহরণ-1. $-2i$ জটিল সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় কর। [ব: বো: ০৫]

সমাধান: $-2i = 1 - 2i - 1 = 1 - 2i + i^2 = (1 - i)^2$ অর্থাৎ, $\sqrt{-2i} = \pm(1 - i)$

উদাহরণ-2. $\sqrt[3]{-i}$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ১১-১২; ঢা: বো: ১৪; সি: বো: ০৮; য: বো: ১৩; চ: বো: ০৬; ব: বো: ১৩]

সমাধান: মনে করি, $\sqrt[3]{-i} = x$ বা, $-i = x^3$ বা, $x^3 + i = 0$ বা; $x^3 - i^3 = 0$ বা, $(x - i)(x^2 + ix + i^2) = 0$

বা, $(x - i)(x^2 + ix - 1) = 0$ হয়, $x - i = 0$ অথবা, $x^2 + ix - 1 = 0$

এখন, $x - i = 0$ হলে, $x = i$ আবার, $x^2 + ix - 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-i \pm \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$

$\therefore$ নির্ণেয় মানগুলি $i, \frac{1}{2}(-i + \sqrt{3}), \frac{1}{2}(-i - \sqrt{3})$

উদাহরণ-3. দেখাও যে, $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4=-16$

[ঢা: বো: ০৯; কু: বো: ১৬, ১৩, ১০, ০৮; সি: বো: ১৪; রা: বো: ১২; ব: বো: ০৬; য: বো: ১৩; চ: বো: ১০; দি: বো: ১৫, ১৪]

সমাধান: আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয় $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

অর্থাৎ $2\omega=-1+\sqrt{-3}$ এবং $2\omega^2=-1-\sqrt{-3}$

বামপক্ষ : $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4=(2\omega)^4+(2\omega^2)^4=2^4(\omega^4+\omega^8)=16\,(\omega^3.\omega+\omega^6.\omega^2)$

$=16\,(\omega+\omega^2)$ $[\because \omega^3=1, \omega^6=1]$

$=16\,(-1)$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$

$=-16$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

উদাহরণ-4. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, i^2=-1$ এবং $\frac{1-ix}{1+ix}=\alpha-i\beta.$

ক. $z=x+iy$ হলে $|z-1|=2$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ বের কর।

খ. উদ্দীপক হতে দেখাও যে, $\alpha+i\beta=\frac{(1+ix)^2}{1+x^2}.$

গ. যদি $\alpha^2+\beta^2=1$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $x=\frac{\beta}{1+\alpha}.$

সমাধান: ক. $z=x+iy$

$\therefore |z-1|=2$ বা, $|x+iy-1|=2$ বা, $|(x-1)+iy|=2$ বা, $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2 \therefore (x-1)^2+y^2=(2)^2$

প্রদত্ত সঞ্চারপথ একটি বৃত্তকে নির্দেশ করে যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 2 একক।

খ. দেওয়া আছে, $\alpha-i\beta=\frac{1-ix}{1+ix}=\frac{(1-ix)(1-ix)}{(1+ix)(1-ix)}=\frac{(1-ix)^2}{1+x^2}$

বা, $\alpha-i\beta=\frac{1-2ix+i^2x^2}{1+x^2}=\frac{(1-x^2)-i2x}{1+x^2}$ $\therefore \alpha-i\beta=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i.\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)$

উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই, $\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ এবং $\beta=\frac{2x}{1+x^2}$

এখন, $\alpha+i\beta=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\,\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1-x^2+i2x}{1+x^2}=\frac{1+i^2x^2+i2x}{1+x^2}=\frac{(1+ix)^2}{1+x^2}$

$\therefore \alpha+i\beta=\frac{(1+ix)^2}{1+x^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\frac{1-ix}{1+ix}=\alpha-i\beta$

বা, $\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{1}{\alpha-i\beta}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1+ix-1+ix}{1+ix+1-ix}=\frac{1-\alpha+i\beta}{1+\alpha-i\beta}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2}=\frac{(1-\alpha+i\beta)(1+\alpha+i\beta)}{(1+\alpha-i\beta)(1+\alpha+i\beta)}$

বা, $ix=\frac{(1+i\beta-\alpha)\,(1+i\beta+\alpha)}{(1+\alpha)^2-(i\beta)^2}=\frac{(1+i\beta)^2-\alpha^2}{1+2\alpha+\alpha^2-i^2\beta^2}=\frac{1+2i\beta+i^2\beta^2-\alpha^2}{1+2\alpha+\alpha^2+\beta^2}$ $[\because i^2=-1]$

$=\frac{1+2i\beta-(\alpha^2+\beta^2)}{1+2\alpha+\alpha^2+\beta^2}=\frac{1+2i\beta-1}{1+2\alpha+1}$ $[\because \alpha^2+\beta^2=1]$

$$= \frac{2i\beta}{2(1+\alpha)} = \frac{i\beta}{1+\alpha}$$

বা, $x = \frac{\beta}{1+\alpha}$ যা x এর একটি বাস্তব মান

উদাহরণ-৫. দৃশ্যকল্প-১: $z = -15 - 8i$ একটি জটিল সংখ্যা এবং $z^2 + (2i-3)z + (5-i) = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = 3x + 4$ একটি ফাংশন।

ক. $\sqrt{z}$ নির্ণয় কর।

খ. সমাধান কর: $|f(x)|^2 - 3|f(x)| = 10$

গ. দৃশ্যকল্প-১ এর দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় z_1 ও z_2 যেখানে $|z_1| > |z_2|$ হলে $\omega = \frac{z_1}{z_2}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট আরগাঁ চিত্রে দেখাও।

সমাধান: ক. দেওয়া আছে, $z = -15 - 8i$

বা, $z = 1 - 8i - 16 = (1)^2 - 2.\ 1.\ 4i + (4i)^2 = (1-4i)^2$

$\therefore \sqrt{z} = \pm(1-4i)$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = 3x + 4$

এখন, $|f(x)|^2 - 3|f(x)| = 10$

বা, $|3x+4|^2 - 3|3x+4| = 10$

ধরি, $a = |3x+4|$

$\therefore a^2 - 3a - 10 = 0$

বা, $a^2 - 5a + 2a - 10 = 0$

বা, $a(a-5) + 2(a-5) = 0$

বা, $(a-5)(a+2) = 0$

বা, $a - 5 = 0$ অথবা, $a + 2 = 0$

বা, $a = 5$ অথবা, $a = -2$

বা, $|3x+4| = 5$ অথবা $|3x+4| = -2$ যা গ্রহণযোগ্য নয়

$3x + 4 \geq 0$ হলে,

$3x + 4 = 5$ বা, $3x = 1 \therefore x = \frac{1}{3}$

আবার, $3x + 4 < 0$ হলে, $-(3x+4) = 5$

বা, $3x + 4 = -5$

বা, $3x = -9$

$\therefore x = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{1}{3}$ অথবা -3

গ. প্রদত্ত সমীকরণ: $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$ কে $az^2 + bz + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$, $b = 2i - 3$ এবং $c = 5 - i$

$$\therefore z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4.\ 1(5-i)}}{2.1}$$

$$= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-4 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$

$$= \frac{3 - 2i \pm (1-4i)}{2}$$ [(ক) ব্যবহার করে]

$= \frac{3-2i+1-4i}{2}$ অথবা, $\frac{3-2i-1+4i}{2} = \frac{4-6i}{2}$ অথবা, $\frac{2+2i}{2}$

$= 2-3i$ অথবা $1+i$

এখন $|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

এবং $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{13} > \sqrt{2} \quad \Rightarrow |z_1| > |z_2|$

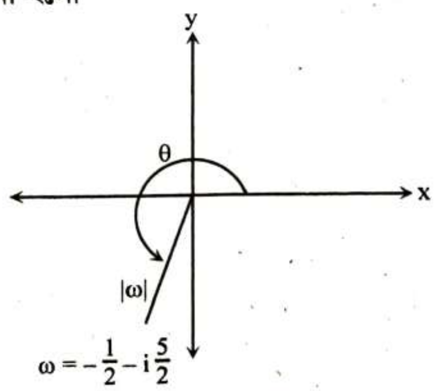
$\therefore\ z_1 = 2-3i$ এবং $z_2 = 1+i$

$\therefore\ \omega = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-3i-2i+3i^2}{1-i^2} = \frac{2-5i-3}{1+1} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{5}{2}$

$\therefore\ |\omega| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

যেহেতু বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, কাজেই $\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \pi + \tan^{-1}(5)$

আরগাঁ চিত্রে মডুলাস ও আর্গুমেন্ট দেখানো হলো



উদাহরণ-৬. $f(x) = ax^2 + bx + c$ একটি দ্বিঘাত ফাংশন এবং $z = \frac{1+2i}{1-3i}$ একটি জটিল সংখ্যা।

ক. $-1+\sqrt{3}i$ কে $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ কর।

খ. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে, $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = \frac{3\pi}{4}$.

গ. ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $\{f(\omega)\}^3 + \{f(\omega^2)\}^3 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $a = \frac{1}{2}(b+c)$

বা $b = \frac{1}{2}(c+a)$ বা $c = \frac{1}{2}(a+b)$.

সমাধান: ক. ধরি, $-1+\sqrt{3}i = x+iy$

$\therefore\ x = -1$ এবং $y = \sqrt{3}$

$\therefore\ r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore$ বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত

$\therefore\ \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi - \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ -1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

খ. $z = \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i+2i-6}{1+9} = \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

$\therefore \arg\left(\frac{1+2i}{1-3i}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

বা, $\arg(1+2i) - \arg(1-3i) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}}\right)$

বা, $\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(-3) = \tan^{-1}(-1)$

বা, $\tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$\therefore \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \frac{3\pi}{4}$

গ. যেহেতু ω এককের ঘনমূল, কাজেই

$\omega^3 = 1$ এবং $1 + \omega + \omega^2 = 0$

এখন, $\{f(\omega)\}^3 + \{f(\omega^2)\}^3 = 0$

বা, $(a\omega^2 + b\omega + c)^3 + (a\omega^4 + b\omega^2 + c)^3 = 0$ $[\because f(x) = ax^2 + bx + c]$

বা, $(a\omega^2 + b\omega + c)^3 + (a\omega + b\omega^2 + c)^3 = 0$ $[\because \omega^3 = 1]$

বা, $x^3 + y^3 = 0$ যেখানে $x = a\omega^2 + b\omega + c$ এবং $y = a\omega + b\omega^2 + c$

বা, $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$

বা, $(x+y)\{x^2 + xy(\omega + \omega^2) + y^2\omega^3\} = 0$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

বা, $(x+y)\ \{x^2 + \omega xy + \omega^2 xy + \omega^3 y^2\} = 0$

বা, $(x+y)\ \{x(x + \omega y) + \omega^2 y(x + \omega y)\} = 0$

$\therefore (x+y)(x+\omega y)(x + \omega^2 y) = 0$ ... ... (i)

এখন, $x + y = a\omega^2 + b\omega + c + a\omega + b\omega^2 + c = 2c + b(\omega + \omega^2) + a(\omega + \omega^2) = 2c - b - a$

$x + \omega y = a\omega^2 + b\omega + c + \omega(a\omega + b\omega^2 + c)$

$= a\omega^2 + b\omega + c + a\omega^2 + b\omega^3 + c\omega$

$= 2a\omega^2 + b(1+\omega) + c(1+\omega)$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= 2a\omega^2 - b\omega^2 - c\omega^2 = \omega^2(2a - b - c)$

এবং $x + \omega^2 y = a\omega^2 + b\omega + c + \omega^2(a\omega + b\omega^2 + c)$

$= a\omega^2 + b\omega + c + a\omega^3 + b\omega^4 + c\omega^2$

$= a\omega^2 + b\omega + c + a + b\omega + c\omega^2$

$= 2b\omega + c(1 + \omega^2) + a(1 + \omega^2) = 2b\omega - c\omega - a\omega = \omega(2b - c - a)$

$\therefore$ (i) $\Rightarrow (2c - b - a)(2a - b - c)(2b - c - a)\ \omega^3 = 0$

$\therefore (2c - b - a)(2a - b - c)(2b - c - a) = 0$

হয়, $2c - b - a = 0$ অথবা, $2a - b - c = 0$ অথবা, $2b - c - a = 0$

$\therefore c = \frac{1}{2}(a+b)$ অথবা, $a = \frac{1}{2}(b+c)$ অথবা, $b = \frac{1}{2}(c+a)$

বা, $a = \frac{1}{2}(b+c)$ অথবা, $b = \frac{1}{2}(c+a)$ অথবা, $c = \frac{1}{2}(a+b)$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী-3(B)

Type-I

1. **বর্গমূল নির্ণয় কর:**

(i) $2i$ [ঢা: বো: ০৯; সি: বো: ১৪, ০৫; রা: বো: ০৮, ০৬]

(ii) $3 + 4i$ [মাদ্রাসা: বো: ১৫] (iii) $-7 + 24i$ [ঢা: বো: ১২]

(iv) $-8 - 6\sqrt{-1}$ [কু: বো: ০৯; রা: বো: ১৩; চ: বো: ১৪; য: বো: ১৪, ১০; দি: বো: ১৫, ১০; সি: বো; ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩, ০৯]

(v) $7 - 30\sqrt{-2}$ [ব: বো: ১২; ব: বো: ১৫] (vi) $1 \pm i$ [চ: বো: ০৫] (vii) $2x + i(x^2 - 1)$

(viii) $2 + i\sqrt{x^2 - 4};\ x > 2$ [বুয়েট ১১-১২]

(ix) $8i$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(ক)]

(x) $\frac{-8i}{1 - i^2}$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-৩(ক)]

(xi) $-3 - 4i$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(ক)]

2. $z_1 = 2 + 3i$ এবং $z_2 = 1 + 2i$ হলে $\overline{z_1 - z_2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(খ)]

3. দেখাও যে,

(i) i এর বর্গমূল $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

(ii) $-i$ এর বর্গমূল $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ [দি: বো: ০৯; ব: বো: ০৬]

(iii) $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$ [বুয়েট ০৫-০৬, কুয়েট ০৬-০৭, ০৮-০৯; বুয়েট ১২-১৩; য: বো: ১২]

(iv) $(3 + 4i)^{-\frac{1}{2}} + (3 - 4i)^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{4}{5}$

(v) $\sqrt{x + i\sqrt{1 - x^2}} = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 + x} + i\sqrt{1 - x}\right)$

(vi) $\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{-2 + \cdots \infty}}} = 1 \pm i$ [কুয়েট ০৭-০৮]

Type-II

4. **মান নির্ণয় কর:**

(i) $\sqrt[3]{i}$ [ঢা: বো: ০৮; ব: বো: ১০; সি: বো: ১৫, ০৬; চ: বো: ১৩, ০৯; য: বো: ১৬; রা: বো: ০৫; কু: বো: ১২, ০৫; মাদ্রাসা বো: ১৪]

(ii) $\sqrt[3]{-1}$ [রা: বো: ১৪] (iii) $\sqrt[4]{-144}$ (iv) $\sqrt[4]{-64}$ (v) $\sqrt[4]{1}$

(vi) $\sqrt[6]{-64}$ [কুয়েট ০৩-০৪, বুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ১৪; ব: বো: ১৬; কু: বো: ১৫; দি: বো: ১৬, ১১; য: বো: ০৩]

(vii) $\sqrt[4]{-81}$ [ঢা: বো: ১০; কু: বো: ১৬; ব: বো: ০৮; সি: বো: ১৬; য: বো: ১১; দি: বো: ১৬]

Type-III

5. (i) যদি $P = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $P^6 + P^4 + P^2 + 1 = 0$ [ঢা: বো: ০৫; চ: বো: ১৫, ১০, ০৮; ব: বো: ১১]

(ii) দেখাও যে, $1 + i + i^2 + i^3 + \dots\dots + i^{39} = 0$

(iii) যদি $x = 3 - i\sqrt{5}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2x^3 - 9x^2 + 10x + 45 = 3$

(iv) যদি $x = 2 + i$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ [মাদ্রাসা বো: ১৩]

(v) $x = 2 + \sqrt{-3}$ হলে $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট ০১-০২; মাদ্রাসা বো: ১০]

Type-IV

6. $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $\sqrt[3]{a - ib} = x - iy$ [বুয়েট ০৩-০৪, বুয়েটেক্স ০১-০২; বুয়েট ০৩-০৪, ০৭-০৮; ঢা: বো: ১৩; কু: বো: ১১; রা: বো: ১১, ০৯; সি: বো: ১০; দি: বো: ১০; য: বো: ০৬]

(ii) $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ [বুয়েট ০৫-০৬; বুয়েট ০৫-০৬, ০৮-০৯, ১১-১২, কুয়েট ০৬-০৭, বুয়েটেক্স ০৫-০৬; বিআইটি ০১-০২; ঢা: বো: ১১; কু: বো: ১৩, ০৯; দি: বো: ১৩; য: বো: ১৪, ১২; সি: বো: ১৬, ১৩; ব: বো: ১৬, ১২; রা: বো: ১৬, ১৩; চ: বো: ১৪]

(iii) $-2(x^2 + y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}$ [য: বো: ১৬; চ: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১০]

Type- V

7. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে দেখাও যে,

(i) $(1 + \omega - \omega^2)^3 - (1 - \omega + \omega^2)^3 = 0$

(ii) $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) = 1$

(iii) $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) = 4$

(iv) $(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10}) = 9$ [ঢা. বি. ১৫-১৬; দি: বো; ১১; মাদ্রাসা বো: ১৫, ০৯]

(v) $(1 - \omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2 = -4$

(vi) $(1 - \omega^2 + \omega^4)^2 + (1 + \omega^2 - \omega^4)^2 = -4$

(vii) $(x + y)^2 + (x\omega + y\omega^2)^2 + (x\omega^2 + y\omega)^2 = 6xy$ [চ: বো: ১৫, ১২, ০৭; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১১]

(viii) $(a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(ix) $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)(1 - \omega^8 + \omega^{16}) = 16$ [রা: বো: ০৮; ব: বো: ০৫; য: বো: ১১]

(x) $(1 - \omega + \omega^2)^3 + (1 + \omega - \omega^2)^3 = -16$

(xi) $(1 + \omega - \omega^2)^4 + (1 - \omega + \omega^2)^4 = -16$

(xii) $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^8) = 9$

(xiii) $(1 + \omega - \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega) = -8$ [চুয়েট ০৯-১০; ঢা: বো: ১৫, ১২; ব: বো: ০৯]

(xiv) $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8) \cdots 2n$ উৎপাদক পর্যন্ত $= 2^{2n}$ [দি: বো: ১৩; ব: বো: ১১]

8. **(i)** $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $a = c$ বা $b = \frac{1}{2}(a + c)$ [কু: বো: ১১]

(ii) $(a\omega^2 + b + c\omega)^3 + (a\omega + b + c\omega^2)^3 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে,
$a = \frac{1}{2}(b + c)$ বা $b = \frac{1}{2}(a + c)$ বা $c = \frac{1}{2}(a + b)$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(গ) অনুরূপ]

(iii) যদি $a + b + c = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 27abc$
[বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ) অনুরূপ; ঢা: বো: ১৬, ০৭, ০৫; য: বো: ১৫; সি: বো: ১০, ০৬; চ: বো: ১৬; রা: বো: ১০, ০৭; ব: বো: ১৩]

(iv) $z^2 + z + 1 = 0$ সমীকরণের যে কোনো জটিল মূল ω হলে, দেখাও যে, $(1 + 3\omega + \omega^2)^2$ এবং $(1 + \omega + 3\omega^2)^2$ রাশিদ্বয়ের গুণফল 16 এবং যোগফল -4.

(v) এককের জটিল ঘনমূল ω, ω^2 হলে $(-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর।
[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-২(ক)]

(vi) $x = p + q$, $y = p + \omega q$ এবং $z = p + \omega^2 q$ হলে, দেখাও যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p^3 + q^3)$
[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-২(গ); রা: বো: ১৪]

(vii) $x = p + q$, $y = p\omega + q\omega^2$, $z = p\omega^2 + q\omega$ হলে, দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = 6pq$
[ঢা: বো: ১৩, ১০; রা: বো: ১১; চ: বো: ০৯; সি: বো: ১৩, ০৭; মাদ্রাসা বো: ১২]

(viii) $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(a) $x^2 + xy + y^2 = 0$ **(b)** $x^3 + y^{-3} = 2 = x^3 + x^{-3}$ **(c)** $x^4 + y^4 = -1$

(ix) প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n = 2$ যখন n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং -1, যখন n অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা। [ঢা: বো: ০৮; ব: বো: ১৫; রা: বো: ০৯; য: বো: ০৯; কু: বো: ০৬]

(x) $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. [কু: বো: ১২]

(xi) $(1+x+x^2)^n = P_0 + P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_{2n}x^{2n}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $P_0 + P_3 + P_6 + \cdots = 3^{n-1}$. [চ: বো: ০৮]

(xii) $2x = -1+\sqrt{-3}$ এবং $2y = -1-\sqrt{-3}$ হলে প্রমাণ কর, $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$. [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(xiii) $x^3 - 8 = 0$ সমীকরণের জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(গ)]

(xiv) $y^2 + y + 1 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় p, q হলে,
দেখাও যে, $p^m + q^m = \begin{cases} 2, \text{ যখন } m \text{ এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1, \text{ যখন } m \text{ অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা} \end{cases}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-২(গ)]

(xv) $\ln(1-x+x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ হলে, দেখাও যে, $a_3 + a_6 + a_9 + \ldots = \frac{2}{3}\ln 2$;
[x এককের যেকোন ঘনমূলের প্রতিনিধিত্ব করে]

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $-5+8i$ জটিল সংখ্যাটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে?
ক. চতুর্থ খ. তৃতীয় গ. দ্বিতীয় ঘ. প্রথম

2. $-\frac{3}{4}i + 5$ জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় কোনটি?
ক. $\left(\frac{-3}{4}, 5\right)$ খ. $\left(5, \frac{3}{4}\right)$ গ. $\left(5, \frac{-3}{4}\right)$ ঘ. $\left(\frac{3}{4}, -5\right)$

3. $x - iy = -1 - i$ হলে y এর মান কত?
ক. -1 খ. 1 গ. i ঘ. $-i$

4. $-\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}$ জটিল সংখ্যার মডুলাস কত?
ক. $\sqrt{7}$ খ. 3 গ. $\sqrt{15}$ ঘ. $\sqrt{21}$

5. $1-\sqrt{3}i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?
ক. $\frac{2\pi}{3}$ খ. $\frac{\pi}{3}$ গ. $\frac{-\pi}{3}$ ঘ. $\frac{-2\pi}{3}$

6. $Z = -3i + 2$ হলে $\bar{Z} =$ কত?
ক. $-3i-2$ খ. $3i+2$ গ. $3i-2$ ঘ. $-3i+2$

7. কোন জটিল সংখ্যা ও তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি কিরূপ সংখ্যা?
ক. কাল্পনিক খ. জটিল গ. বাস্তব ঘ. অবাস্তব

8. $\sqrt{-i} =$ কত?
ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$ খ. $\frac{1}{2}(-1-i)$ গ. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ঘ. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

9. $x = i - 2$ হলে x^3 এর মান কত?
ক. $-11i+2$ খ. $11i+2$ গ. $11i-2$ ঘ. $-11i-2$

10. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1+\omega)(1+\omega^4)(1+\omega^8)(1+\omega^{12})$ এর মান কত?
ক. 1 খ. $-2\omega^2$ গ. $2\omega^2$ ঘ. ω^2

11. $(\sqrt{3}-i)$ সংখ্যাটির পোলার আকার নিচের কোনটি?

ক. $-2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ খ. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

গ. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ঘ. $-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

12. $Z=(3-i)$ হলে Z^9 কিরূপ হবে?

ক. বাস্তব খ. কাল্পনিক গ. জটিল সংখ্যা ঘ. শূন্য

13. $|Z+5|=x$ সমীকরণটির সঞ্চারপথ কোনটি?

ক. বৃত্ত খ. উপবৃত্ত গ. পরাবৃত্ত ঘ. অধিবৃত্ত

14. $-\sqrt{3}i-1$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত?

ক. $\frac{2\pi}{3}$ খ. $2n\pi-\frac{2\pi}{3}$ গ. $\frac{-2\pi}{3}$ ঘ. $2n\pi+\frac{2\pi}{3}$

15. $|Z+5|=4$ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের কেন্দ্র কত?

ক. $(-5, 0)$ খ. $(5, 0)$ গ. $(0, 5)$ ঘ. $(0, -5)$

16. $Z=\sqrt{3}i+1$ হলে $Z\bar{Z}$ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

ক. 2 খ. 4 গ. 1 ঘ. 3

17. $-1-i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?

ক. $-225°$ খ. $-135°$ গ. $135°$ ঘ. $180°$

18. $1\pm i$ এর বর্গমূল কিরূপ সংখ্যা?

ক. জটিল খ. বাস্তব গ. কাল্পনিক ঘ. অমূলদ

19. $x+iy=i^2$ হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

ক. -1 খ. 0 গ. i ঘ. অসংজ্ঞায়িত

20. $Z=x+iy$ হলে এবং $|\bar{Z}|=3$ এর সঞ্চারপথ বৃত্ত হলে তার ব্যাসার্ধ কত?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. 0

21. $x=1+i$ হলে $x^4-2x^3+2x^2$ এর মান কোনটি?

ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. i

22. y এর কোন মানের জন্য $x+iy$ বাস্তব সংখ্যা হবে?

ক. শূন্য খ. ধনাত্মক গ. ঋণাত্মক ঘ. পূর্ণ সংখ্যা

23. $3+\sqrt{2}i$ জটিল সংখ্যাটির অবস্থান কাল্পনিক অক্ষ থেকে কত দূরে?

ক. -3 খ. $\sqrt{2}$ গ. 3 ঘ. $3+\sqrt{2}$

24. $Z=1-2i$ হলে $|-\bar{Z}|$ এর মান কত?

ক. $-\sqrt{5}$ খ. $\sqrt{5}$ গ. $\sqrt{5}i$ ঘ. 5

25. $x=\sqrt[3]{1}$ সমীকরণের মূল তিনটির গুণফল কত?

ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. $1+i$

26. $3a-\sqrt{2}ai$ এর মডুলাস কত?

ক. $\sqrt{11}a$ খ. $\sqrt{11}a^2$ গ. $\sqrt{7}a$ ঘ. $\sqrt{7}a^2$

27. $\sqrt{-2+\sqrt{-2+\sqrt{-2+......\infty}}}=?$

ক. $1\pm i\sqrt{7}$ খ. $1\pm i\sqrt{-7}$ গ. $\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ ঘ. $\frac{1\pm i\sqrt{-7}}{2}$

28. $\omega^n = \omega$ হলে, n কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

29. 64 এর ঘনমূল হবে—
i. $4\omega^3$ ii. 4ω iii. $4\omega^2$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. z_1 ও z_2 জটিল সংখ্যা হলে—
i. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$ ii. $|z_1|\,|z_2| = |z_1 z_2|$ iii. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে—
i. $1 = -\omega - \omega^2$
ii. $\omega^{3n+2} = \omega^2; n \in \mathbb{N}$
iii. $\omega^n = \omega$ যদি n কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 2 হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i খ. i ও ii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

32. দুটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফল—
i. জটিল সংখ্যা ii. বাস্তব সংখ্যা iii. ধনাত্মক সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

33. $Z = -2i$ হলে—
i. Z^2 ঋণাত্মক সংখ্যা ii. Z^3 এর মডুলাস 8 iii. Z^4 ঋণাত্মক সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

34. $z = a + ib$ হলে—
i. $z + \bar{z}$ বাস্তব ii. $|z| + |\bar{z}|$ জটিল iii. $(\overline{z - \bar{z}})$ কাল্পনিক
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (35 ও 36) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x = 2 + i$ এবং $y = -3 - 2i$ দুটি জটিল সংখ্যা।

35. $x + iy$ কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?
ক. প্রথম খ. দ্বিতীয় গ. তৃতীয় ঘ. চতুর্থ

36. xy এর আর্গুমেন্ট কত?
ক. $\tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ খ. $\pi - \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ গ. $\pi + \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ ঘ. $-\tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে (37 ও 38) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$1, \omega, \omega^2$ এককের তিনটি ঘনমূল।

37. মূলত্রয়ের যোগফল কত?
ক. 0 খ. 1 গ. ω ঘ. ω^2

38. $\frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^5} + \frac{1}{\omega^7}$ এর মান কত?
ক. $-\omega^2$ খ. $-\omega$ গ. ω ঘ. 0

নিচের তথ্যের আলোকে (39 ও 40) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$Z_1 = -3i$ এবং $Z_2 = 1 + i$

39. $Z_1 . Z_2$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?

ক. $-45°$ খ. $45°$ গ. $135°$ ঘ. $225°$

40. $\frac{Z_2}{Z_1}$ এর পরমমান কত?

ক. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ খ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ গ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ. $\frac{2}{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে (41 ও 42) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$Z = 2 - 3i$ একটি জটিল সংখ্যা এবং $\overline{Z}$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

41. $|Z + \overline{Z}|$ এর মান কোনটি?

ক. -4 খ. 4 গ. i ঘ. $6i$

42. $(Z - \overline{Z})$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কোনটি?

ক. π খ. $-\frac{\pi}{2}$ গ. $\frac{\pi}{2}$ ঘ. π

নিচের তথ্যের আলোকে (43 ও 44) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - px + q = 0$ এবং $\sqrt{3}x + i - x^2 = 0$ একই সমীকরণ নির্দেশ করে।

43. $(q - p)$ এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?

ক. প্রথম খ. দ্বিতীয় গ. তৃতীয় ঘ. চতুর্থ

44. $(p^3 - q^3)$ এর মডুলাস কত?

ক. 1 খ. $3\sqrt{3}$ গ. $2\sqrt{7}$ ঘ. $7\sqrt{2}$

নিচের তথ্যের আলোকে (45 ও 46) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$p = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ ও $q = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

45. $(1 + p)(1 + q)$ এর মান কত?

ক. -1 খ. 1 গ. ω ঘ. ω^2

46. p^3q^5 এর মান কত হবে?

ক. $-\omega$ খ. ω^2 গ. ω ঘ. 1

নিচের তথ্যের আলোকে (47 ও 48) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$Z = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i$ একটি জটিল রাশি।

47. $\left|\overline{Z - \overline{Z}}\right|$ এর মান কত?

ক. $-4\sqrt{3}i$ খ. $4\sqrt{3}i$ গ. $4\sqrt{3}$ ঘ. $-4\sqrt{3}$

48. $(Z + \overline{Z})$ এর মান কেমন সংখ্যা হবে?

ক. বাস্তব খ. জটিল গ. কাল্পনিক ঘ. শূন্য

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

49. $\frac{1 + i}{1 - i}$ এর পরম মান কত? [ঢা. বি. ১৯-২০]

ক. 0 খ. 1 গ. $\sqrt{2}$ ঘ. i

50. $(-1 + \sqrt{3}i)$ এর মডুলাস কত? [নো. বি. প্র. বি. ১৯-২০]

ক. 2 খ. 4 গ. 5 ঘ. -1

51. $-2i$ জটিল সংখ্যাটির বর্গমূল কত? [খু. বি. ১৯-২০]

ক. $\pm(1 - i)$ খ. $\pm(2 - i)$ গ. $\pm(1 + i)$ ঘ. $\pm(2 + i)$

52. $\frac{3+2i}{3-i} = a + ib$ হলে $b =$ কত? [কু. বি. ১৯-২০]

ক. $\frac{8}{5}$ খ. $\frac{9}{10}$ গ. $-\frac{8}{5}$ ঘ. $\frac{-9}{10}$

53. $i^2 = -1$ হলে $\frac{i - i^{-1}}{i - 2i^{-1}}$ এর মান কত? [কু. বি. ১৯-২০]

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $2i$ গ. $-2i$ ঘ. $\frac{2}{3}$

54. যদি $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ হয়, তবে $\frac{z_2}{z_1}$ এর নতি – [ঢা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{5\pi}{12}$ খ. $\frac{\pi}{6}$ গ. $-\frac{\pi}{4}$ ঘ. $-\frac{5\pi}{12}$

55. -625 এর চতুর্থ মূল কোনটি? [কুয়েট ১৬-১৭]

ক. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ খ. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(21 \pm i)$ গ. $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(5 \pm i)$ ঘ. $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

56. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{3 - i\sqrt{2}}$ হলে, অপর মূলটি কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\frac{3}{11} - i\frac{\sqrt{2}}{11}$ খ. $\frac{3}{11} + i\frac{\sqrt{2}}{11}$ গ. $\frac{3i}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}$ ঘ. $\frac{3i}{11} + \frac{\sqrt{2}}{11}$

57. $i^{4n-2} =$ কোনটি? (n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) [জা. বি. ১৭-১৮]

ক. i খ. 1 গ. $-i$ ঘ. -1

58. $2i$ এর বর্গমূল – [জ. বি. ১৭-১৮]

ক. $\pm(1 + i)$ খ. $1 - i$ গ. -1 ঘ. $-1 + i$

59. $x = \frac{1}{2}(3 + 5i)$ হলে, $2x^3 + 2x^2 - 7x + 70$ এর মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. -1 খ. 0 গ. 1 ঘ. 2

60. $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 2 + i$ হলে, $z_1\overline{z}_2$ এর মডুলাস– [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. $\tan^{-1}2$ খ. $2\sqrt{5}$ গ. $5\sqrt{2}$ ঘ. $\sqrt{10}$

61. $z = x + iy$ এবং $|2z - 1| = |z - 2|$ হলে, $x^2 + y^2 =$ কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. -1 খ. 1 গ. 0 ঘ. 2

62. $x^2 + x + 1 = 0$ হলে x^3 এর মান কত? [রা. বি. ১৭-১৮]

ক. 0 খ. 1 গ. -1 ঘ. $-1, 1$

63. $z_1 = 3 + 2i$ এবং $z_2 = 3 - 2i$ হলে, $z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2$ এর মান কত? [ই. বি. ১৭-১৮]

ক. 21 খ. 22 গ. 23 ঘ. 24

64. $z = x + iy$ হইলে $|z - 5| = 3$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ একটি বৃত্ত হলে, ইহার কেন্দ্র কত? [ই. বি. ১৭-১৮]

ক. $(0, 5)$ খ. $(5, 0)$ গ. $(0, -5)$ ঘ. $(-5, 0)$

65. $(1 + ai)^2$ জটিল রাশিটির আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{4}$ হলে, a এর মান কত? [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]

ক. $1 \pm \sqrt{2}$ খ. $-1 \pm \sqrt{2}$ গ. $2 \pm \sqrt{2}$ ঘ. $-2 \pm \sqrt{2}$

66. $z = x + iy$ হলে $|z - 5| + |z + 5| = 16$ নির্দেশ করে– [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. Circle খ. Parabola গ. Hyperbola ঘ. Ellipse

67. $\frac{1}{a + i} = \frac{i}{a - i}$ হলে a এর মান– [ঢা. বি. ১৬-১৭]

ক. 1 খ. $\frac{i}{2}$ গ. -1 ঘ. $-\frac{i}{2}$

68. $(1+i)^4$ এর মান কত? [ঢা. বি. ১৬-১৭]
ক. $-2i$ খ. $2i$ গ. -4 ঘ. 4

69. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ এর মান কত? [ঢা. বি. ১৫-১৬]
ক. 18 খ. 6 গ. -9 ঘ. 9

70. $1+\omega^{19999}+\omega^{15557}=?$ [বুয়েট ১৬-১৭]
ক. 0 খ. 1 গ. -1 ঘ. 2

71. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$ এর মান কত? [ঢা. বি. ১০-১১]
ক. -8 খ. 8 গ. 0 ঘ. 1

72. যদি এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হয়, তবে $(1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2=$ কত? [ঢা. বি. ০৫-০৬; জা. বি. ১৬-১৭]
ক. -4 খ. 4 গ. -3 ঘ. 3

73. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $(1+\omega-\omega^5)(\omega+\omega^2-1)(\omega^5+1-\omega)$ এর মান — [ঢা. বি. ০৪-০৫]
ক. 4 খ. 8 গ. -4 ঘ. -8

74. $i^2=-1$ হলে, $\dfrac{i^{-1}-i}{2i^{-1}+i}$ এর মান — [ঢা. বি. ০৯-১০]
ক. $-2i$ খ. $2i$ গ. -2 ঘ. 2

75. $z_1=2+i$ এবং $z_2=3+i$ হলে, $z_1\overline{z}_2$ এর মডুলাস — [ঢা. বি. ১৩-১৪; জা. বি. ১৬-১৭]
ক. 6 খ. $5\sqrt{2}$ গ. 7 ঘ. $5\sqrt{3}$

76. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+i}}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট — [ঢা. বি. ১৫-১৬]
ক. $1, 0$ খ. $1, \dfrac{\pi}{2}$ গ. $1, \pi$ ঘ. $1, \dfrac{3\pi}{2}$

77. n এর ধনাত্মক সর্বনিম্ন অখণ্ড মান কত যার জন্যে $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=1$? [বুয়েট ১০-১১]
ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 6

78. $\dfrac{i}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{i}}}$ এর মান কত? [ঢা. বি. ০৭-০৮]
ক. $1+i$ খ. $1-i$ গ. -2 ঘ. 2

79. $x=-1+i$ হলে x^3+3x^2+4x+7 এর মান কত? [ঢা. বি. ০৫-০৬]
ক. $6+i$ খ. 8 গ. 5 ঘ. $9+2i$

80. $\sqrt[4]{-81}$ এর মান কত? [বুয়েট ০৮-০৯; খু. বি. ১৬-১৭]
ক. $\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ খ. $\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$ গ. $\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}(2+i)$ ঘ. $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$

81. $a=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ হলে, a^6 এর মান কত? [বুয়েট ১১-১২]
ক. 1 খ. -1 গ. i ঘ. $-i$

82. $x=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y=\dfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে $1-x-y+xy$ এর মান কত? [বুয়েট ১২-১৩; জা. বি. ১৫-১৬]
ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

83. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান কত? [বুয়েট ০৫-০৬]

ক. ± 2 খ. ± 3 গ. $\pm\sqrt{2}$ ঘ. $\pm\sqrt{3}$

84. $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}}$ এর মান ও নতি যথাক্রমে— [ঢা. বি. ১৪-১৫]

ক. $0, 0$ খ. $-2i, -\frac{\pi}{2}$ গ. $2i, \frac{\pi}{2}$ ঘ. $-2, \pi$

85. $\left|\frac{(2-i)^3}{2+3i}\right|$ এর মান কোনটি? [কুয়েট ১৩-১৪]

ক. $\frac{\sqrt{34}}{5}$ খ. $\frac{5\sqrt{65}}{13}$ গ. $\frac{\sqrt{11}}{9}$ ঘ. $\frac{\sqrt{29}}{7}$

86. $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right|$ এর মান কোনটি? [কুয়েট ১১-১২]

ক. $\frac{2\sqrt{61}}{13}$ খ. $\frac{2\sqrt{7}}{13}$ গ. $\frac{2\sqrt{11}}{7}$ ঘ. $\frac{5\sqrt{65}}{13}$

87. $4-4\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল কোনটি? [কুয়েট ১০-১১]

ক. $\pm(2-\sqrt{-2})$ খ. $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}}-i(\sqrt{8}-2)^{\frac{1}{2}}\right]$

গ. $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}}-i(2-\sqrt{8})^{\frac{1}{2}}\right]$ ঘ. $\pm(4-\sqrt{-2})$

88. $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল কোনটি? [কুয়েট ০৯-১০, ১৭-১৮]

ক. $-1+3i$ খ. $\frac{\sqrt{5}}{7}+2i$ গ. $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$ ঘ. $\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)$

89. $|x-1+iy|+|x+1+iy|=4$ দ্বারা নির্দেশিত বক্ররেখা কোনটি? [বুয়েট ১৩-১৪]

ক. $x^2+y^2=7$ খ. $y^2=4x$ গ. $y^2=x^2+1$ ঘ. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

90. $8+4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল কোনটি? [বুয়েট ১৩-১৪]

ক. $\pm(3-2i)$ খ. $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$ গ. $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ ঘ. $\pm(3+2i)$

91. $i^2=-1$ হলে $i+i^2+i^3+\ldots+i^{23}=?$ [বুয়েট ০৯-১০]

ক. -1 খ. $-i$ গ. 1 ঘ. i

92. i^{4n+3} এর মান কোনটি? [চুয়েট ১০-১১]

ক. -1 খ. $-i$ গ. 1 ঘ. i

93. $\sqrt{-16}\times\sqrt{-1}=$ কোনটি? [বুটেক্স ১০-১১; জা. বি. ১৬-১৭]

ক. 4 খ. -4 গ. ± 4 ঘ. $4i$

94. $\sqrt{-4}\times\sqrt{-1}=$ কোনটি? [বুটেক্স ০৯-১০; রা. বি. ১৬-১৭]

ক. -2 খ. $\sqrt{2}$ গ. $\pm\sqrt{2}$ ঘ. $\sqrt{2}i$

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $z_1=5-2i$, $z_2=2+3i$, $z_3=4+3i$, $z_4=2-2i$ চারটি জটিল সংখ্যা।

ক. $\frac{z_1}{z_3}$ কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর।

খ. $\frac{z_2}{z_4}$ এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ দেখাও।

গ. প্রমাণ কর যে, $\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right|\leq\frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}$

2. $f(x, y) = x + iy$ এবং $g(x) = 2x^3 + 5x^4 + 2x^2$
   ক. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $\{g(\omega)\}^6$ নির্ণয় কর।
   খ. $f(\sqrt{3}, -1)$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করে আরগাঁ চিত্রের সাহায্যে দেখাও।
   গ. প্রমাণ কর যে, $|2f(x, y) + 1| = |f(x, y) - 3|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণটি একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{7}{3}$।

3. দৃশ্যকল্প-I: $\sqrt[3]{z_1} = z_2$; দৃশ্যকল্প-II: $|z_2 - 3i| + |z_2 + 3i| = 10$ যেখানে $z_2 = x + iy$ এবং $z_1 = a + ib$ দুইটি জটিল সংখ্যা।
   ক. $a = -1$ ও $b = -\sqrt{3}$ হলে z_1 এর মডুলাস ও মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।
   খ. দৃশ্যকল্প-I হতে দেখাও যে, $\sqrt[3]{\overline{z_1}} = \overline{z_2}$
   গ. দৃশ্যকল্প-II দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের নাম উল্লেখসহ সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $g(x) = a + bx + cx^2$ এবং $f(x) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}x)$
   ক. সমাধান কর: $|f(\sqrt{3}x + \sqrt{3})| < 1$
   খ. দেখাও যে, $\{f(i)\}^n + \{f(-i)\}^n = \begin{cases} 2; \text{ যখন } n \text{ এর মান } 3 \text{ দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1; \text{ যখন } n \text{ অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা} \end{cases}$
   গ. $g(1) = 0$ হলে দেখাও যে, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = 27abc$

5. দৃশ্যকল্প-I: $\frac{\overline{z}}{z} = p - iq$ যেখানে $z = 3 + ix$ এবং $p, q \in \mathbb{R}$
   দৃশ্যকল্প-II: $(1 + x)^n = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + ... + B_nx^n$
   ক. $x = 4$ হলে $\sqrt{z}$ নির্ণয় কর।
   খ. দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $(B_0 - B_2 + B_4 - ......)^2 + (B_1 - B_3 + B_5 - ......)^2 = B_0 + B_1 + B_2 + ... + B_n$
   গ. $p^2 + q^2 = 1$ হলে x এর একটি বাস্তব মান নির্ণয় কর যা দৃশ্যকল্প-I এ বর্ণিত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

6. $f(x, y) = x + iy$
   ক. $r = f(2, 1)$ হলে $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 5$ এর মান নির্ণয় কর।
   খ. $\sqrt[3]{f(x,y)} = f(a, b)$ হলে প্রমাণ কর যে, $4ab(a^2 - b^2) = bx + ay$
   গ. $\sqrt[f(4,\,-2i)]{f(1, 65i)}$ এর মান নির্ণয় কর।

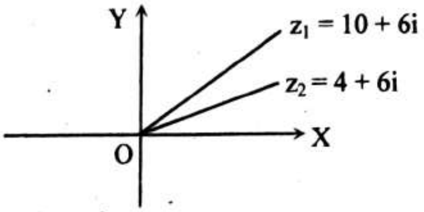
7. দৃশ্যকল্প-I: $h(x) = 1 - x^2$
   দৃশ্যকল্প-II: $F = -1 + \sqrt{3}i$ এবং R একটি জটিল সংখ্যা, যেখানে $|R| = 2$, $\arg F + \arg R = \frac{\pi}{2}$
   ক. দেখাও যে, $\sqrt{-h(i) + h(i)\sqrt{-h(i) + h(i)\sqrt{-h(i) + ... \infty}}} = 1 \pm i$
   খ. $h(\omega)h(\omega^2)h(\omega^4)h(\omega^5)$ এর মান নির্ণয় কর যেখানে এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω.
   গ. দৃশ্যকল্প-II হতে R নির্ণয় কর।

8. $z = 2b + i(1 - b^2)$ এবং $C = p + iq$ দুইটি জটিল সংখ্যা।
   ক. $\sqrt[4]{\omega + \omega^2}$ নির্ণয় কর। যেখানে ω এককের ঘনমূলের কাল্পনিক মূল।
   খ. $b = 0$ হলে $\sqrt[3]{z}$ নির্ণয় কর।
   গ. $b = 3$ এবং $\sqrt[3]{\overline{z}} = C$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{6}{p} - \frac{8}{q} = -2(p^2 + q^2)$

9. দৃশ্যকল্প-I: $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের জটিল মূলদ্বয় x_1 ও x_2
দৃশ্যকল্প-II: $(2 + b\omega + c\omega^2) = P, (2\omega + b + c\omega^2) = Q$ এবং $2\omega + b\omega^2 + c = R$
ক. $(2\sqrt{3} - 2i)(-2\sqrt{3} + 6i)$ এর পোলার আকার নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-I হতে প্রমাণ কর যে, $x_1^4 + x_2^4 = -1$
গ. $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$ হলে দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $c = 2$ অথবা $c = 2(b-1)$

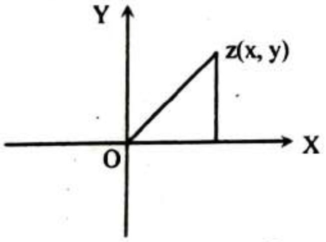
10. $z = x + iy, z_1 = a - ib, z_2 = 1 + ix.$
ক. $1 + \sqrt{3}i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর।
খ. $\sqrt[3]{\overline{z}_1} = z$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $\sqrt[3]{z_1} = \overline{z}.$
গ. $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $a^2 + b^2 = 1$ হলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\overline{z}_2}{z_2} = z_1$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

11.



ক. z_1 কে পোলার আকারে প্রকাশ কর।
খ. $\frac{z_1}{z_2}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।
গ. $z = x + iy$ এবং $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 - 14x - 18y + 112 = 0$

12. $3|z - 1| = 2\,|z - 2|$ ... ... (1) এবং $\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ ... ... (2)



ক. z কে পোলার আকারে লিখ।
খ. (1) নং হতে প্রমাণ কর যে, $5(x^2 + y^2) = 2x + 7$
গ. (2) নং হতে দেখাও যে, $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$

13. $z_1 = 3 - 5i$ এবং $z_2 = 4 + 3i$ দুইটি জটিল সংখ্যা।
ক. $-1 + i\sqrt{3}$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর।
খ. প্রমাণ কর যে, $|z_1 + z_2| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$
গ. দেখাও যে, $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

▶ সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্ন

14. দৃশ্যকল্প-১: $|x - 1| < \frac{1}{3}$, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা। *[অধ্যায়-১ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{1}{z}$ এর বাস্তব অংশ $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ যেখানে $z = x + iy.$
ক. $2x - iy + 3ix + y = 4 + i$ হতে x ও y এর বাস্তব মান নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $|x^2 - 1| < \frac{7}{9}.$
গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, ইহা একটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}.$

15. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{1}{|x-1|} \geq 2$ বাস্তব সংখ্যা এবং $x \neq 1$ *[অধ্যায়-১ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প-২ : $\sqrt[4]{-81}$.

ক. $-2 < 3 - x < 8$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর অসমতাটির সমাধানকে সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. প্রমাণ কর যে, দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রাপ্ত মূল চারটির যোগফল শূন্য।

16. $z = x + iy$ এবং $P = \omega^4 + \omega^5$ *[অধ্যায়-১ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*

ক. $x \leq \frac{1}{2}x + 1$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

খ. $\sqrt[3]{P}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $|2z - 1| = |z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ লেখচিত্রে উপস্থাপন কর।

17. $a = \sqrt{7}$ ও $b = -729$ দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $f(x) = |1 - 4x|$ একটি পরমমান ফাংশন। *[অধ্যায়-১ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*

ক. পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর : $f(x) < 3$

খ. দেখাও যে, a একটি অমূলদ সংখ্যা।

গ. মান নির্ণয় কর: $\sqrt[6]{b}$

18. $f(x) = \begin{cases} (1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}) \text{ যখন } |2x-5| < 3 \\ \sqrt{3} \text{ যখন } |2x-5| \not< 3 \end{cases}$ *[অধ্যায়-১ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*

ক. x-এর কোন ব্যবধিতে উদ্দীপকে উল্লিখিত f(x) ফাংশনের মান $\sqrt{3}$ হবে।

খ. $1 < x < 4$ হলে f(x) নির্ণয় কর।

গ. উদ্দীপকের আলোকে $|2x - 5| \not< 3$ হলে দেখাও যে, $f(x) \neq \frac{p}{q}$ যেখানে, $p, q \in \mathbb{N}$ এবং $q \neq 0$.

19. দৃশ্যকল্প-১: $x = -8$ এবং $y = -6\sqrt{-1}$ *[অধ্যায়-২ ও ৩ এর সমন্বয়ে]*

দৃশ্যকল্প-২: একজন ভদ্রলোক সর্বোচ্চ 100 টাকা ব্যয় করে কিছু সংখ্যক আয়না ও চিরুনি কিনতে চান। প্রতিটি আয়না ও চিরুনি এর ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 12 টাকা ও 8 টাকা। তিনি অন্ততঃ 1টি আয়না কিনবেন কিন্তু 8টির অধিক চিরুনি কিনবেন না। ঐ ভদ্রলোক একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে চান।

ক. যোগাশ্রয়ী অভীষ্ট ফাংশন নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প ১ হতে x + y এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প ২ হতে আয়না ও চিরুনির সংখ্যা নির্ণয় কর।

20. দুই প্রকার খাদ্য A ও B তে প্রোটিন ও স্টার্চ উপাদান বিদ্যমান। প্রত্যেক প্রকারের খাদ্যে প্রতি কেজিতে পুষ্টি উপাদানের পরিমাণ, খাদ্যের মূল্য ও চাহিদা এর পরিমাণ নিম্নরূপঃ

খাদ্যের প্রকার	প্রোটিন	স্টার্চ	প্রতি কেজির মূল্য
A B	8 গ্রাম 12 গ্রাম	10 গ্রাম 6 গ্রাম	40 টাকা 50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32 গ্রাম	22 গ্রাম	

এখানে দৈনিক x ও y কেজি A ও B প্রকারের খাদ্যের প্রয়োজন হলে মোট খরচ $z = 40x + 50y$.

[অধ্যায়-২ ও ৩ এর সমন্বয়ে]

ক. উদ্দীপকে উল্লিখিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি (3, 4) বিন্দুতে সিদ্ধ হলে z নির্ণয় কর।

খ. কম খরচে কিভাবে দৈনিক প্রয়োজন মেটানো যাবে?

গ. $x = \frac{1}{10}$ এবং $y = \frac{\sqrt{-1}}{10}$ হলে দেখাও যে, $z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 = 23$.

আরও সমন্বিত অধ্যায়ের সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

21. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = |bx - c|$. [রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]

দৃশ্যকল্প-২: $2x = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2y = -1 - \sqrt{-3}$

ক. $-5 + 12\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ, $b = 1$, $c = 2$ এবং $f(x) < \frac{1}{4}$ হলে দেখাও যে, $f(x^2 - 2) < \frac{17}{16}$.

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর, $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$.

22. উদ্দীপক: মনে কর $g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$ একটি রাশি এবং

$A = \{a : a \in$ পূর্ণসংখ্যা এবং $|g(a)| < 4\}$ ও $B = \{t : t \in$ স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $2 < t < 4\}$ দুটি সেট। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

ক. $-3 < g(x) < 7$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $|g(x) + 2iy| = t$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

গ. A সেটটির সুপ্রিমাম এবং ইনফিমাম বের কর।

23. $f(x) = x - 2$. [সিলেট বোর্ড-২০১৯]

ক. $-1 \le f(x) \le 11$ অসমতাটি পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $\frac{f(x)}{f(x+2)} > \frac{f(x+3)}{f(x+4)}$ অসমতার সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $z = p + iq$ হলে, $|f(z+6)| + |f(z-2)| = 10$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

24. দৃশ্যকল্প-১: $z = 3x + 4y$ দৃশ্যকল্প-২: $y^2 + y + 1 = 0$ [সিলেট বোর্ড-২০১৯]

শর্তসমূহ :
$$x + y \le 450$$
$$2x + y \le 600$$
$$y \le 400$$
$$x, y \ge 0$$

ক. $5i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে লেখচিত্রের সাহায্যে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির মূলদ্বয় p, q হলে, দেখাও যে,

$$p^m + q^m = \begin{cases} 2, \text{ যখন } m \text{ এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1, \text{ যখন } m \text{ অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা} \end{cases}$$

25. z একটি জটিল সংখ্যা এবং $f(x) = 5x + 1$. [যশোর বোর্ড-২০১৯]

ক. $S = \{x : x \in \mathbb{R}, -9 < f(x) < 16\}$ এর সুপ্রিমাম নির্ণয় কর।

খ. $\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{9}, x \ne -\frac{1}{5}$ সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় উপস্থাপন কর।

গ. $|2z + 3| = |3z + 1|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

26. দৃশ্যকল্প-১: $p(x) = a + bx + cx^2$ দৃশ্যকল্প-২: এককের একটি কাল্পনিক ঘন মূল ω। [বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

ক. $-3 - 4i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে যদি $\{p(\omega)\}^3 + \left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3 = 0$ হয়,

তবে দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}(b + c)$ অথবা $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

27. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 3x + 1$, দৃশ্যকল্প-২: $|z - 5| = 3$ [ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড-২০১৮]

ক. $\mathbb{R}$ ও $\mathbb{C}$ দ্বারা কী বোঝায়? এদের মধ্যে সম্পর্ক কী?

খ. $2|f(x - 2)| \le 1$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $z = x + iy$ হলে দৃশ্যকল্প-২ এর সঞ্চারপথ জ্যামিতিকভাবে কী নির্দেশ করে? চিত্র আঁক।

28. দৃশ্যকল্প-১: $|z+1|+|z-1|=4$; যেখানে $z=x+iy$.
দৃশ্যকল্প-২: $a=p+q$, $b=p+\omega q$ এবং $c=p+\omega^2 q$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮]
ক. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $3x^2+4y^2=12$.
গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3=3(p^3+q^3)$.

29. $z_1=2+3i$, $z_2=1+2i$, $a=p\omega^2+q+r\omega$ এবং $b=p\omega+q+r\omega^2$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলির একটি জটিল ঘনমূল। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭]
ক. $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।
খ. উদ্দীপকের আলোকে $\overline{z_1-z_2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।
গ. উদ্দীপকের সাহায্যে $a^3+b^3=0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2p=q+r$, $2q=r+p$ এবং $2r=p+q$.

30. নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ্য কর : $z=x+iy$; $|z+5|+|z-5|=15$ .... (i) [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]
$$\frac{2x+3}{x-3}<\frac{x+3}{x-1} \text{ .... (ii)}$$
ক. এককের ঘনমূলসমূহ নির্ণয় কর।
খ. উদ্দীপক-১ হতে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
গ. উদ্দীপক-২ এ বর্ণিত অসমতাটির সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও।

31. দৃশ্যকল্প-১ : $x+iy=2e^{-i\theta}$ দৃশ্যকল্প-২ : $F=y-2x$ [যশোর বোর্ড-২০১৭]
শর্তগুলি : $x+2y\le 6$, $x+y\ge 4$, $x, y\ge 0$
ক. $z=x+iy$ হলে, $|z+i|=|\overline{z}+2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=4$.
গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হতে লৈখিক পদ্ধতিতে F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

32. $f(x)=|x-3|$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৭]
$g(x)=p+qx+rx^2$
ক. $15+8i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।
খ. $f(x)<\frac{1}{7}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2-9|<\frac{43}{49}$.
গ. $p+q+r=0$ হলে প্রমাণ কর যে,
$\{g(\omega)\}^3+\{g(\omega^2)\}^3=a^x pqr$ যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $a=x=3$.

এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

1. **(i)** $\pm(1+i)$ **(ii)** $\pm(2+i)$ **(iii)** $\pm(3+4i)$ **(iv)** $\pm(1-3i)$ **(v)** $\pm\left(5-3\sqrt{-2}\right)$
(vi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}\pm i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$ **(vii)** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+1)+i(x-1)\}$ **(viii)** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\left(\sqrt{x+2}+i\sqrt{x-2}\right)$ **(ix)** $\pm 2(1+i)$ **(x)** $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$ **(xi)** $\pm(1-2i)$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}}-i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$

4. **(i)** $-i, \frac{1}{2}(i\pm\sqrt{3})$ **(ii)** $-1, \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-3}\right), \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-3}\right)$ **(iii)** $\pm\sqrt{6}(1\pm i)$ **(iv)** $\pm 2(1\pm i)$
(v) $\pm 1, \pm i$. **(vi)** $\pm 2i, \pm(\sqrt{3}\pm i)$ **(vii)** $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

5. **(v)** 5 **8.** **(v)** -128;

বহুনির্বাচনি

1. গ	2. গ	3. খ	4. গ	5. গ	6. খ	7. গ	8. ঘ	9. গ	10. খ	11. গ	12. গ	13. গ	14. খ
15. ক	16. ক	17. খ	18. ক	19. ঘ	20. ক	21. খ	22. ক	23. গ	24. খ	25. গ	26. ক	27. গ	28. খ
29. ঘ	30. ঘ	31. খ	32. গ	33. ক	34. খ	35. ঘ	36. গ	37. ক	38. ঘ	39. ক	40. ক	41. খ	42. খ
43. গ	44. গ	45. খ	46. গ	47. গ	48. ক	49. খ	50. ক	51. ক	52. খ	53. ঘ	54. ক	55. ঘ	56. ক
57. ঘ	58. ক	59. ঘ	60. ঘ	61. খ	62. খ	63. গ	64. খ	65. খ	66. ঘ	67. গ	68. গ	69. ঘ	70. ক
71. ক	72. ক	73. ঘ	74. ঘ	75. খ	76. খ	77. গ	78. ক	79. গ	80. ক	81. ঘ	82. ঘ	83. গ	84. ঘ
85. খ	86. ঘ	87. খ	88. গ	89. ঘ	90. গ	91. ক	92. খ	93. খ	94. ক				

সৃজনশীল

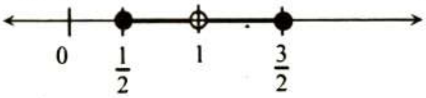
1. ক. $\frac{14}{25}+i\left(-\frac{23}{25}\right)$; 2. ক. 729 খ. 2 এবং $-\frac{\pi}{6}$; 3. ক. 2, $\frac{-2\pi}{3}$ গ. উপবৃত্ত, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 4. ক. $-\frac{4}{3}<x<0$

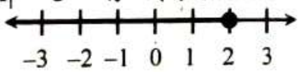
5. ক. $\pm(2+i)$ গ. $\frac{3q}{1+p}$; 6. ক. 0; গ. $\pm 2i, \pm(\sqrt{3}\pm i)$; 7. খ. 9 গ. $\sqrt{3}-i$

8. ক. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ খ. $-i, \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$; 9. ক. $16\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 10. ক. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

11. ক. $2\sqrt{34}\left\{\cos\left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)\right\}$ খ. $\frac{\sqrt{442}}{13}, -\tan^{-1}\left(\frac{9}{19}\right)$

12. ক. $\sqrt{x^2+y^2}\left\{\cos\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)+i\sin\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\right\}$; 13. ক. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 14. ক. $x=1, y=2$

15. ক. $|x|<5$ খ. সংখ্যারেখায় সমাধান সেট: 

16. ক. 

খ. -1 অথবা $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ গ. $x^2+y^2=1$

17. ক $\frac{-1}{2}<x<1$; গ. $\pm 3i, \frac{\pm 3i\pm 3\sqrt{3}}{2}$; 18. ক. $x\geq 4$ অথবা $x\leq 1$; খ. 16

19. ক. $z_{max}=x+y$ খ. $\pm(1-3i)$ গ. আয়না 3টি এবং চিরুনি 8টি

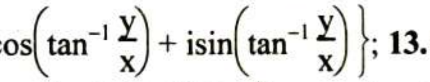
20. ক. 320; খ. 1 কেজি A এবং 2 কেজি B দিয়ে; 21. ক. $\pm(2+3i)$

22. ক. $|2x-3|<5$; খ. নির্দেশিত সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{3}{2}$;

গ. সুপ্রিমাম = 2; ইনফিমাম = -1

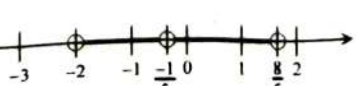
23. ক. $|x-7|\leq 6$;

খ. সমাধান সেট : $\{x : x\in\mathbb{R}, x<-4$ অথবা $-2<x<0\}$

সংখ্যারেখায়:  গ. $\frac{p^2}{5^2}+\frac{q^2}{3^2}=1$

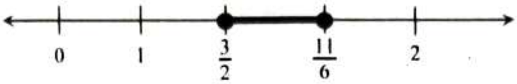
24. ক. $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1+i)$; খ. সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি C(50, 400) এবং সর্বোচ্চমান $z_{max}=1750$

25. ক. সুপ্রিমাম, Sup S = 3; খ. সমাধান সেট = $\{x\in\mathbb{R} : -2<x<\frac{8}{5}$ এবং $x\neq-\frac{1}{5}\}$

সংখ্যারেখা:  গ. $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2$

26. ক. $\pm(1-2i)$

27. ক. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; **খ.** সমাধান সেট, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} \le x \le \frac{11}{6} \right\}$

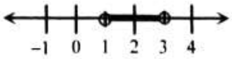
সংখ্যারেখা: 

গ. বৃত্ত

28. ক. $0 + i(-1)$

29. ক. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **খ.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})$

30. ক. $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ **খ.** $\frac{x^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$

গ. $1 < x < 3$; সংখ্যারেখা: 

31. ক. $4x - 2y + 3 = 0$ **গ.** -2; **32. ক.** $\pm(4 + i)$

পাঠ-১১ ও ১২

ব্যবহারিক

3.7 আরগাঁ চিত্রে দুইটি জটিল সংখ্যার পরমমান (মডুলাস) ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয় (Determination of modulus and argument of two complex numbers in Argand diagrams)

পরীক্ষণ নং 3.7.1	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার যোগফল এবং যোগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: $z_1 = 8 + 6i$ এবং $z_2 = -3 + 6i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে অঙ্কন দ্বারা $z_1 + z_2$ নির্ণয় এবং $z_1 + z_2$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: O মূলবিন্দু, x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে অবাস্তব অক্ষ ধরে z_1 ও z_2 জটিল সংখ্যাদ্বয়কে আরগাঁ সমতলে স্থাপন করলে, মূলবিন্দুর সাথে স্থাপিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি হবে $z_1 + z_2$ এর মডুলাস এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে কর্ণটির উৎপন্ন কোণ হবে আর্গুমেন্ট।

আবার $z = x + iy$ হলে $\text{mod } z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং $\arg z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

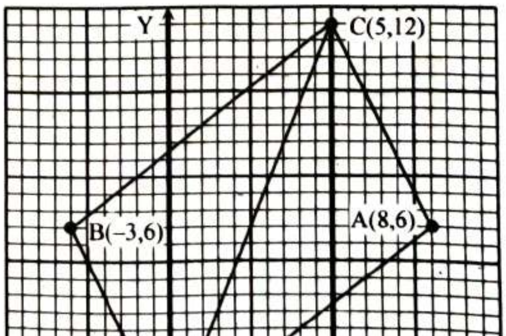
কার্যপদ্ধতি:

i. ছক কাগজ XOX′ এবং YOY′ কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।

ii. **স্কেল:** ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র দুই বর্গের বাহুকে এক একক নিয়ে z_1 ও z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি A(8, 6) এবং B(−3, 6) স্থাপন করি।

iii. O, A এবং O, B যোগ করে AC ∥ OB এবং BC ∥ OA অঙ্কন করি। এরা পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হলো তাহলে OACB একটি সামান্তরিক অঙ্কিত হলো এবং C বিন্দুটি হবে $z_1 + z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

iv. C হতে x-অক্ষের উপর CD লম্ব টানি।



হিসাব (Calculation):

v. চিত্র হতে C এর ভুজ OD = 5 এবং কোটি CD = 12 নির্ণয় করি। [$\therefore$ OD = 10 ঘর এবং CD = 24 ঘর]

vi. স্কেল দ্বারা দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে $OC = |z_1 + z_2| = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ নির্ণয় করি।

vii. চাঁদার সাহায্যে পরিমাপ করে পাই, $\angle XOC = \arg(z_1 + z_2) = 67.064°$ ... ... (i)

আবার, $\arg(z_1 + z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{CD}{OD}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) = 67.072°$ ... ... (ii)

viii. (i) এবং (ii) এর গড় $= \frac{67.064° + 67.072°}{2} = 67.068°$

ফলাফল:

z এর প্রতিরূপী বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক	z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক	$z_1 + z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক	$\|z_1 + z_2\| = OC$	$\arg(z_1 + z_2) = \theta = \angle XOC$
(8, 6)	(–3, 6)	(5, 12)	13	67.068°

বীজগাণিতিক সূত্র হতে পাই,

$z_1 + z_2 = (8 + 6i) + (-3 + 6i) = (8 - 3) + (6 + 6)i = 5 + 12i$

$\therefore \text{mod}(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

এবং $\arg(z_1 + z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) = 67°22'48''.49$

মন্তব্য: লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা: স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

পরীক্ষণ নং 3.7.2	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার বিয়োগফল এবং বিয়োগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: $z_1 = 5 + 4i$ এবং $z_2 = -3 + 6i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্র অঙ্কন দ্বারা $z_1 - z_2$ নির্ণয় এবং $z_1 - z_2$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: O মূলবিন্দু, x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে অবাস্তব অক্ষ ধরে z_1 ও $-z_2$ জটিল সংখ্যাদ্বয়কে আরগাঁ সমতলে স্থাপন করলে মূলবিন্দুর সাথে স্থাপিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি হবে $z_1 - z_2$ এর মডুলাস এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে কর্ণটির উৎপন্ন কোণ হবে আর্গুমেন্ট।

আবার $z = x + iy$ হলে $\text{Mod } z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং $\text{Arg } z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

উপকরণ:

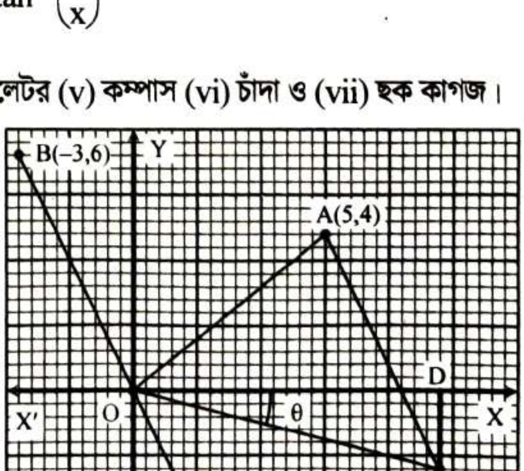
(i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

i. **স্কেল:** ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্রতম তিন বর্গের বাহুকে এক একক নিয়ে z_1, z_2 এবং $-z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু A(5, 4), B(–3, 6) এবং E(3, – 6) স্থাপন করি।

ii. O, A এবং O, E যোগ করে OE ∥ AC এবং OA ∥ EC অঙ্কন করি। AC ও EC পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হলো, তাহলে OECA একটি সামান্তরিক অঙ্কিত হলো এবং C বিন্দুটি হবে $z_1 - z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

iii. C হতে x-অক্ষের উপর CD লম্ব টানি।



হিসাব (Calculation):

iv. চিত্র হতে C এর ভুজ OD = 8 এবং কোটি CD = – 2 নির্ণয় করি।

v. স্কেল দ্বারা দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে $OC = |z_1 - z_2| = 8.25$

vi. চাঁদার সাহায্যে পরিমাপ করে পাই, $\angle XOC = \arg(z_1 - z_2) = -14°$

আবার, $\arg(z_1 - z_2) = \tan^{-1}\frac{CD}{OD} = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{8}\right) = -14.036°$

ফলাফল:

z_1 এর প্রতিরূপী বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক	z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক	$-z_2$ এর প্রতিরূপীবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক	$z_1 - z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক	$\|z_1 - z_2\| = OC$	$\arg(z_1 - z_2) = \theta = \angle XOC$
(5, 4)	(−3, 6)	(3, −6)	(8, −2)	8.25	−14.036°

বীজগাণিতিক সূত্র হতে পাই, $z_1 - z_2 = (5 + 4i) + (-3 + 6i) = 8 - 2i$

$\therefore \text{mod}(z_1 - z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 8.246$ এবং $\arg(z_1 - z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{8}\right) = -14.036°$

মন্তব্য: লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা: স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

পরীক্ষণ নং 3.7.3	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার গুণফল এবং গুণফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: $z_1 = 9 + 5i$ এবং $z_2 = -5 + 7i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে চিহ্নিত, z_1z_2 এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: মডুলাস $(z_1z_2) = |z_1z_2| = |z_1|.\ |z_2|$ এবং $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

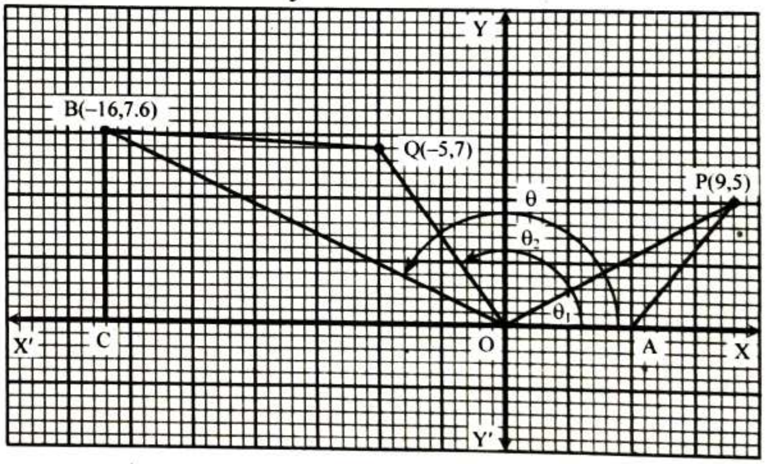
কার্যপদ্ধতি: i. ছক কাগজে XOX′ এবং YOY′ কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।

ii. **স্কেল:** ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র বর্গের দুই বাহুকে এক একক নিয়ে z_1 ও z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি P(9, 5) ও Q(−5, 7) স্থাপন করি।

iii. O, P এবং O, Q যোগ করি।

iv. x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে ক্ষুদ্র দশ ঘরের দৈর্ঘ্য = OA = একক (Unit of length) ধরে A, P যোগ করি।

v. OQ এর যে দিকে ΔOPA অবস্থিত তার বিপরীত দিকে ΔOQB আঁকি যা ΔOPA এর সদৃশকোণী হয়।



vi. B থেকে x-অক্ষের ওপর BC লম্ব টানি। তাহলে B বিন্দুটি হবে z_1z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু।

হিসাব (Calculation):

vii. ΔOPA এবং ΔOQB সদৃশকোণী। সুতরাং $\frac{OB}{OQ} = \frac{OP}{OA}$ $\therefore OB = OP.OQ$ $[\because OA = 1]$

viii. মডুলাস $(z_1z_2) = |z_1z_2| = OB = OP.OQ = |z_1|\ .\ |z_2|$ [যেখানে $OP = |z_1|$ এবং $OQ = |z_2|$]

ix. $\arg z_1 = \theta_1 = \angle XOP$

$\arg z_2 = \theta_2 = \angle XOQ$ এবং $\arg(z_1z_2) = \angle XOB = \theta$ (ধরি)

অতএব, $\arg(z_1z_2) = \angle XOB = \angle XOQ + \angle QOB = \angle XOQ + \angle XOP$ $[\because \angle QOB = \angle XOP]$

$= \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

x. চিত্র হতে পাই, প্রতি দুই ঘর এক একক ধরে, B এর ভুজ = OC = − 16 একক এবং কোটি BC = 7.6 একক।

স্কেল দ্বারা পরিমাপ করে $OB = |z_1z_2| = 35.4$ ঘর = 3.54 একক [∵ 10 ঘর = 1 একক দৈর্ঘ্য]

চাঁদার সাহায্যে পরিমাপ করে পাই, $\angle XOB = \arg(z_1z_2) = 155°$ ... ... (i)

আবার, $\theta = \arg(z_1z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{BC}{OC}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7.6}{-16}\right) = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{7.6}{16}\right)$

$= 154.6°$ [∵ (−16, 7.5) বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত] ... ... (ii)

(i) ও (ii) এর গড় নিয়ে পাই, $\arg(z_1z_2) = \frac{155° + 154.6°}{2} = 154.80°$

ফলাফল: মডুলাস: **ছক-1**

z_1 এর প্রতিরূপী বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক	z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু Q এর স্থানাঙ্ক	z_1z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক	$\|z_1\| = OP = 10.3$	$\|z_2\| = OQ = 8.6$	$\|z_1\|\,\|z_2\|$	$\|z_1z_2\| = OB$
(9, 5)	(–5, 7)	(–16, 7.5)	$10.3 \times \frac{2}{10} = 2.06$	$8.6 \times \frac{2}{10} = 1.72$	3.54	$88.58 \times \frac{4}{100} = 3.54$

আর্গুমেন্ট: **ছক-2**

z_1 এর প্রতিরূপী বিন্দু P	z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু Q	z_1z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু B	$\arg z_1 = \theta_1$	$\arg z_2 = \theta_2$	$\arg z_1z_2 = \theta_1 + \theta_2$	চাঁদার মাপে $\arg z_1z_2 = \angle AOB$
(9, 5)	(–5, 7)	(–16, 7.5)	29.05°	125.54°	154.59°	154°

বীজগাণিতিক সূত্র হতে পাই, $z_1z_2 = (9 + 5i)\ (-5 + 7i) = (-45 - 35) + (63 - 25)i = -80 + 38i$

$\therefore \text{mod}\ (z_1z_2) = \sqrt{(-80)^2 + (38)^2} = 88.57 \times \frac{4}{100} = 3.54$

এবং আর্গুমেন্ট $(z_1z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{38}{-80}\right) = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{38}{80}\right)$ [$\because$ (–80, 38) বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত]

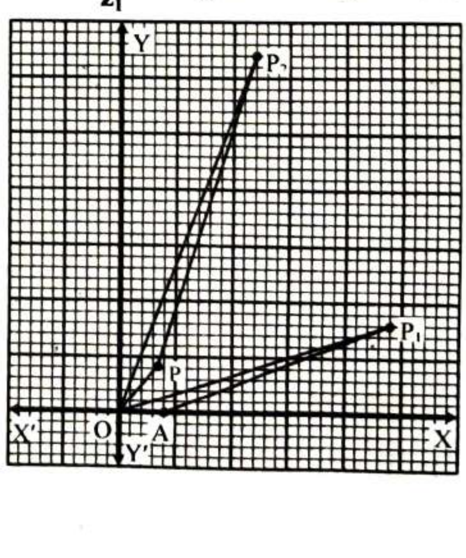
$= 154.66°$

মন্তব্য: লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা: স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

পরীক্ষণ নং 3.7.4	জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যার ভাগফল এবং ভাগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়।	**তারিখ:** ... ...

সমস্যা: $z_2 = 3 + 8i$ এবং $z_1 = 6 + 2i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে চিহ্নিত এবং $\frac{z_2}{z_1}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।



সমাধান: তত্ত্ব: $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ দুইটি জটিল সংখ্যা।

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\ (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$

এবং $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\ (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\ \{\cos\ (\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1)\}$$

অতএব, ভাগফলের মডুলাস $\frac{r_2}{r_1}$ এবং আর্গুমেন্ট $(\theta_2 - \theta_1)$

অথবা, $\text{mod}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$ এবং $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

উপকরণ: (i) সরু শীষযুক্ত পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) ইরেজার (iv) Scientific ক্যালকুলেটর (v) কম্পাস (vi) চাঁদা ও (vii) ছক কাগজ।

কার্যপদ্ধতি:

i. XOX' এবং YOY' কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি।

ii. স্কেল: ছক কাগজের উভয় অক্ষের দিকে ক্ষুদ্র চার বর্গের বাহুকে এক একক নিয়ে z_1 ও z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু $P_1(6, 2)$ ও $P_2(3, 8)$ স্থাপন করি।

iii. OX হতে চার ঘর সমান OA কেটে ΔOP_1A গঠন করি।

iv. ΔOP_1A এর সদৃশ ΔOPP_2 অঙ্কন করি। তাহলে P বিন্দুটি জটিল সংখ্যা $\frac{z_2}{z_1}$ নির্দেশ করে।

হিসাব (Calculation):

v. ΔOPP_2 এবং ΔOP_1A সদৃশ (লেখের চিত্র)

অতএব, $\frac{OP_2}{OP} = \frac{OP_1}{OA} = OP_1 \quad \therefore \frac{OP_2}{OP_1} = OP \qquad [\because OA = 1]$

$\therefore \frac{r_2}{r_1} = r$

লেখ থেকে দেখা যাচ্ছে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3.4}{4}, \frac{4.2}{4}\right) \equiv \left(\frac{17}{20}, \frac{21}{20}\right)$

ফল সংকলন:

P_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P বিন্দুর স্থানাঙ্ক	z_1 এর মডুলাস	z_2 এর মডুলাস	$z = \frac{z_2}{z_1}$ এর মডুলাস	z_1 এর আর্গুমেন্ট $\angle P_1OA$	z_2 এর আর্গুমেন্ট $\angle P_2OA$	$\frac{z_2}{z_1}$ এর আর্গুমেন্ট $\angle POA$ (প্রকৃত মাপে)
(6, 2)	(3, 8)	$\left(\frac{17}{20}, \frac{21}{20}\right)$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{73}$	$\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{40}} = 1.35$ $= \sqrt{\left(\frac{17}{20}\right)^2 + \left(\frac{21}{20}\right)^2}$	18°26′5.82″	69°26′38.24″	51°

$|z_2| = \sqrt{73}$, $|z_1| = \sqrt{40}$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1.35$ (স্কেল দিয়ে মেপে)

$\therefore \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{73}}{\sqrt{40}} = 1.35$

$\arg z = \arg z_2 - \arg z_1 = \angle P_2OA - \angle P_1OA = 69°26'38''.24 - 18°26'5''.82 = 51°0'32''.42$

লেখচিত্র হতে প্রকৃতমাপে 51° (প্রায়)।

মন্তব্য: লেখচিত্র হতে প্রাপ্তমান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণিত মান প্রায় সমান। অতএব, ফলাফল সঠিক।

সতর্কতা: স্কেল ও চাঁদার দৈর্ঘ্য ও কোণ নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

কাজ:

1. $z_1 = 12 + 8i$, $z_2 = -6 + 7i$ জটিল সংখ্যাদ্বয় আরগাঁ (Argand) চিত্রে চিহ্নিত করে এদের যোগফলের মডুলাস ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয় করতে হবে।
2. $z_1 = 15 + 14i$, $z_2 = -5 + 4i$ জটিল সংখ্যা দুইটি আরগাঁ চিত্রে প্রকাশ করে এদের বিয়োগফলের মডুলাস ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয় করতে হবে।
3. $z_1 = 12 + 9i$, $z_2 = -6 + 7i$ জটিল সংখ্যাদ্বয়কে আরগাঁ চিত্রে চিহ্নিত করে তাদের গুণফলের অর্থাৎ $z = z_1z_2$ মডুলাস ও নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয় করতে হবে।
4. $z_1 = 12 + 8i$, $z_2 = 8 + 16i$ জটিল সংখ্যাদ্বয় আরগাঁ চিত্রে চিহ্নিত করে ভাগের মডুলাস এবং নতি (আর্গুমেন্ট) নির্ণয় করতে হবে।

মৌখিক প্রশ্ন

1. জটিল সংখ্যার সংজ্ঞা দাও।
2. $|x + iy|$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত?
3. জটিল সংখ্যার অবাস্তব অংশ শূন্য হলে এটি কীরূপ ধারণ করে?
4. জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী সংখ্যা কাকে বলে?
5. দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল কি সবসময় জটিল সংখ্যা?
6. i^{4n+1} এর মান কত?
7. এককের ঘনমূলগুলি কী কী?
8. এককের ঘনমূলগুলির যোগফল ও গুণফল কত?