প্রথম অধ্যায়

বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা
Real Numbers and Inequalities

সৃষ্টির শুরু থেকেই মানুষের চারপাশে যা কিছু বর্তমান তার হিসাব রাখা এবং গণনার জন্যই মূলত সংখ্যার সৃষ্টি। মানব সমাজের ক্রমবর্ধমান উন্নতির সঙ্গে সঙ্গে সংখ্যার ব্যবহারেরও ক্রমবিকাশ ঘটেছে। আধুনিক বিশ্বের সর্বাধুনিক আবিষ্কার কম্পিউটার-এর কর্মপদ্ধতিও তৈরি করা হয় সংখ্যাকে কাজে লাগিয়ে।

সংখ্যার ধারণা অতি প্রাচীন। সংখ্যার উৎপত্তি কখন হয়েছিল তা সঠিকভাবে জানা সম্ভব হয়নি। খ্রিস্টপূর্ব 1000-এর মধ্যে মিশরের গণিতবিদগণ সামান্য ভগ্নাংশ (Vulgar fraction) ব্যবহার করেন। খ্রিস্টপূর্ব (750—690)-এর মধ্যে ভারতীয় এবং খ্রিস্টপূর্ব 500-এর মধ্যে গ্রিসের গণিতবিদগণ অমূলদ সংখ্যার ধারণা দেন। 1871 সালে গেয়র্গ কান্টর (Georg Cantor) সর্বপ্রথম বাস্তব সংখ্যার সঠিক সংজ্ঞা প্রদান করেন।

ইংরেজ গণিতবিদ জন ওয়ালিস (John Wallies) (1616-1703) এবং ফ্রেন্স গণিতবিদ পিয়ারে বগার (Pierre Bouguer) যথাক্রমে 1670 এবং 1734 খ্রিস্টাব্দে সর্বপ্রথম অসমতার চিহ্ন ($\leq$ এবং $\geq$) ব্যবহার করেন। এছাড়া "The Analytical Arts Applied to Solving Algebraic Equations" বইটিতে বৃটিশ গণিতবিদ ও দার্শনিক টমাস হ্যারিয়ট (Thomas Harriot, 1560–1621) বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম চিহ্ন ($<$ এবং $>$) ব্যবহার করেন যা 1631 খ্রিষ্টাব্দে প্রকাশিত হয়।

কসি-সোয়ার্জ অসমতা (Cauchy-Schwarz inequality) লিনিয়ার অ্যালজ্যাবরা ও পরিসংখ্যানে খুবই গুরত্বপূর্ণ অসমতা হিসেবে বিবেচিত হয়।

দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন ক্ষেত্রে অসমতা ব্যবহার করা হয়। ব্যবসার ক্ষেত্রে উৎপাদন পরিকল্পনা, মূল্যের মডেল, পণ্য সামগ্রী শিপিং/গুদামজাত করতে; গাড়ীর বৈধ গতিসীমা প্রকাশে, কোনো কিছুর তুলনা করতে, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং ইত্যাদি ক্ষেত্রে অসমতা ব্যবহৃত হয়।

নাম	: গেয়র্গ কান্টর (Georg Cantor)
জন্ম	: ৩ মার্চ, ১৮৪৫
জন্মস্থান	: সেন্ট পিটার্সবার্গ, রাশিয়া
নাগরিকত্ব	: জার্মান
উল্লেখযোগ্য প্রমাণ	: বাস্তব সংখ্যা স্বাভাবিক সংখ্যা হতে অনেক বেশি; মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা দিয়ে বাস্তব সংখ্যা গঠিত; অঙ্কবাচক (cardinal) এবং ক্রমবাচক (ordinal) যেমন ১ম, ২য়, ৩য়, ... প্রভৃতি সংখ্যা এবং তাদের পাটিগণিতের হিসাবের সম্পর্ক বর্ণনা; বীজগণিতীয় সংখ্যাগুলি গণনীয় এবং অতীন্দ্রিয় (transcendental)।
বিশেষ অবদান	: সেট তত্ত্বে
আবিষ্কার	: অসীম (∞) প্রতীক
অর্জন	: ১৮৭১ সালে বাস্তব সংখ্যা নির্ণয়ে কৃতিত্ব অর্জন এবং ১৯০৪ সালে সিলভেস্টার পদক লাভ করেন।
মৃত্যু	: ৬ জানুয়ারি, ১৯১৮

এ অধ্যায়ের পাঠগুলি পড়ে যা যা শিখবে

- বাস্তব সংখ্যার বিভিন্ন উপসেট বর্ণনা করতে পারবে।
- বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ভিত্তিক বর্ণনা করতে পারবে।
- বাস্তব সংখ্যায় অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্যগুলো বর্ণনা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- পরম মানের ধর্মাবলি বর্ণনা, প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- এক চলক সম্বলিত অসমতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- এক চলক সম্বলিত অসমতা সমাধান করতে পারবে।
- পরমমান সম্বলিত অসমতা সমাধান করতে পারবে।
- এক চলকের অসমতাকে সংখ্যারেখার সাহায্যে সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলকের যোগাশ্রয়ী অসমতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট যোগাশ্রয়ী অসমতাকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করতে পারবে।

পাঠ পরিকল্পনা

- পাঠ-১ : বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যার উপসেট
- পাঠ-২ ও ৩ : বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ভিত্তিক বর্ণনা
- পাঠ-৪ : অসমতা ও অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য
- পাঠ-৫ : পরমমান এবং এক চলক সম্বলিত অসমতা
- পাঠ-৬ : এক চলক সম্বলিত অসমতার সমাধান, পরমমান সম্বলিত অসমতা, উদাহরণমালা
- পাঠ-৭ ও ৮ : অনুশীলনী-1(A)
- পাঠ-৯ : এক চলকের অসমতাকে সংখ্যারেখার সাহায্যে সমাধান, দুই চলকের যোগাশ্রয়ী অসমতা এবং দুই চলকবিশিষ্ট যোগাশ্রয়ী অসমতার লেখচিত্র
- পাঠ-১০ : উদাহরণমালা
- পাঠ-১১ ও ১২ : অনুশীলনী-1(B)

পাঠ-১

1.1 বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যার উপসেট
(Real Numbers and Subsets of Real Numbers)

বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণার জন্য পর্যায়ক্রমে পূর্ণসংখ্যা, স্বাভাবিক সংখ্যা, মৌলিক সংখ্যা, অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা থাকা প্রয়োজন।

পূর্ণসংখ্যা (Integer): সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও শূন্য নিয়ে **পূর্ণসংখ্যার** সেট গঠিত। পূর্ণসংখ্যার সেটকে $\mathbb{Z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$।

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number): সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** বলা হয়। সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে $\mathbb{N}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$।

গণনার প্রয়োজনেই স্বাভাবিক সংখ্যা আবিষ্কৃত হয়, এ কারণে স্বাভাবিক সংখ্যাকে **গণনাকারী সংখ্যাও** বলা হয়। সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেটকে $\mathbb{Z}_{>0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore \mathbb{Z}_{>0} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$।

অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (Non negative integer): শূন্য (0) সহ সকল স্বাভাবিক সংখ্যাকে **অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা** বলা হয়। সকল অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেটকে $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \{0\} \cup \mathbb{Z}_{>0}$।

মৌলিক সংখ্যা (Prime number): 1 ব্যতীত যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা কেবলমাত্র ঐ সংখ্যা ও 1 দ্বারা বিভাজ্য, ঐ সকল সংখ্যাকে **মৌলিক সংখ্যা** বলা হয়। সকল মৌলিক সংখ্যার সেটকে P দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
সুতরাং, $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$. মৌলিক সংখ্যার সেট বাস্তব সংখ্যার সেটের উপসেট।

ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative number): শূন্য (0) অপেক্ষা ছোট সংখ্যাগুলিই হলো **ঋণাত্মক সংখ্যা**।

যেমন: $-1, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}, -0.211, -0.62, -4.12034506 \dots \dots$ ইত্যাদি।

ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (Negative integer): শূন্য (0) অপেক্ষা ছোট পূর্ণসংখ্যাকে **ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা** বলা হয়। সুতরাং ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}_{<0}$ হলে, $\mathbb{Z}_{<0} = \{... ... -3, -2, -1\}$।

মূলদ সংখ্যা (Rational number): যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, (যেখানে $p, q \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0$) ঐ সকল সংখ্যাকে **মূলদ সংখ্যা** বলা হয়। সকল মূলদ সংখ্যার সেটকে $\mathbb{Q}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ এবং } q \neq 0\right\}$।

দ্রষ্টব্য:

(i) দুইটি পূর্ণসংখ্যার যোগ, বিয়োগ এবং গুণন-এর ফলে অপর একটি পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যায় কিন্তু দুইটি পূর্ণসংখ্যা ভাগ করলে, ভাগফল পূর্ণসংখ্যা হবেই এমন নয়। যেমন: $8 \div 4 = 2$ কিন্তু $4 \div 8 = \frac{1}{2}$ (যা পূর্ণসংখ্যা নয়)। সুতরাং এ ধারণা থেকেই সংখ্যার একটি নতুন শ্রেণির আবির্ভাব ঘটে, যা ভগ্নাংশ (fractions) হিসেবে পরিচিত।

(ii) যদি $q = 1$ হয় তবে, $\frac{p}{q}$ আকারের সকল মূলদ সংখ্যাগুলি পূর্ণসংখ্যা হয়।

(iii) সুতরাং মূলদ সংখ্যা হয় ভগ্নাংশ অথবা পূর্ণসংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational number): যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না (যেখানে, $p, q \in \mathbb{Z}$ ও সহমৌলিক এবং $q \neq 0$), ঐ সকল সংখ্যাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলা হয়। সকল অমূলদ সংখ্যার সেটকে $\mathbb{Q}'$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $\mathbb{Q}' = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x \notin \mathbb{Q}\}$, সুতরাং বাস্তব সংখ্যার সেটে মূলদ সংখ্যা বাদে অবশিষ্ট সংখ্যাগুলি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$, তুরীয় সংখ্যা (e, π) প্রভৃতি অমূলদ সংখ্যা।

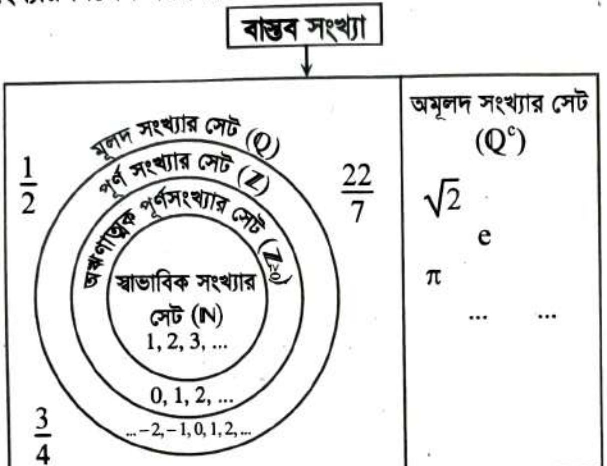
উল্লেখ্য যে, মূলদ সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে তা সসীম দশমিক বা আবৃত্ত দশমিক (পৌনঃপুনিক) হবে।

যেমন: $\frac{7}{50} = 0.14$ (সসীম দশমিক) এবং $\frac{6}{11} = 0.54\ 54\ 54 \cdots \cdots \cdots = 0.\dot{5}\dot{4}$ (আবৃত্ত দশমিক)।

অপরদিকে অমূলদ সংখ্যাকে দশমিক আকারে প্রকাশ করলে, সসীম দশমিক বা আবৃত্ত দশমিক কোনো আকারেই প্রকাশ করা যায় না। যেমন: $\sqrt{2} = 1.414213562 \cdots \cdots$, $\pi = 3.141592654 \cdots \cdots$ প্রভৃতি।

বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of real numbers): সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বাস্তব সংখ্যার সেট বলা হয়। অর্থাৎ প্রত্যেক মূলদ বা অমূলদ সংখ্যাই এক একটি **বাস্তব সংখ্যা**। বাস্তব সংখ্যার সেটকে $\mathbb{R}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

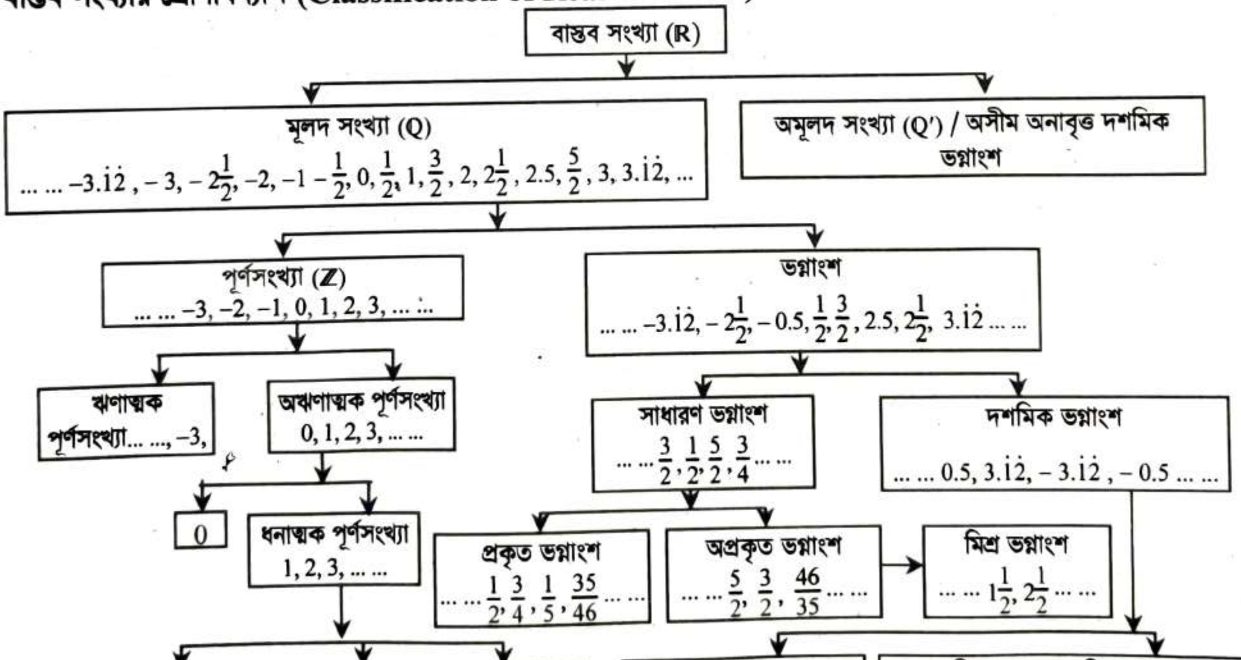
ভেনচিত্রের সাহায্যে বাস্তব সংখ্যার বিশেষ কয়েকটি উপসেটের উপস্থাপন:



সুতরাং উপসেট প্রতীকের দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর কতিপয় বিশেষ উপসেটের সম্পর্ক নিম্নরূপ:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ এবং $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$ i. e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ এবং $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

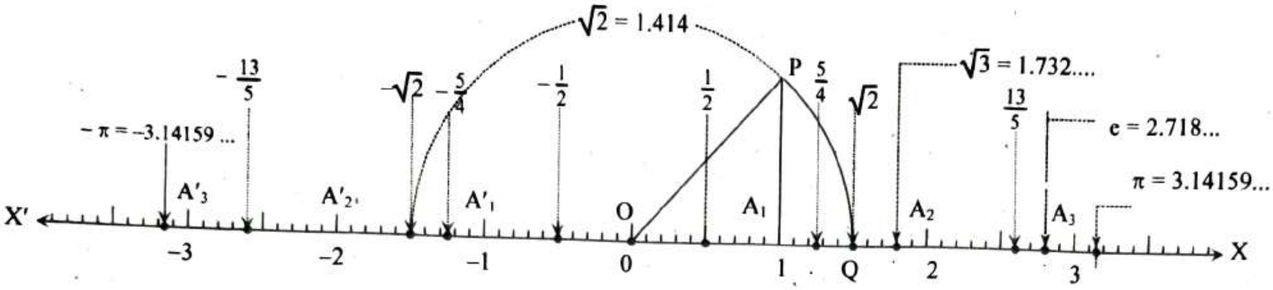
বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস (Classification of Real Numbers):



কাজ: $\sqrt{6}, \frac{2}{7}, 7.\dot{6}\dot{8}, -13, 0, 3\frac{2}{5}, 21.23689.........., 3.14, 11$ সংখ্যাগুলিকে চিহ্নিত কর এবং $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ আকারে সাজাও।

1.1.1 বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical Interpretation of Real Numbers)

সকল বাস্তব সংখ্যাই অসীম দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত। এ নির্দিষ্ট রেখাটিকে **সংখ্যারেখা** বা **বাস্তব রেখা** (real line) বলা হয়।



ধরি, উভয় দিকে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত একটি সরলরেখা X'OX, যেখানে O মূলবিন্দু। মূলবিন্দু O কে 0 (শূন্য) সংখ্যার অবস্থান বিবেচনা করে, O এর ডানে সমান সমান দূরত্বে $A_1, A_2, A_3, \ldots$ বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে 1, 2, 3, ... সংখ্যার অবস্থান এবং অনুরূপভাবে, O এর বামে $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে −1, −2, −3, ... সংখ্যার অবস্থান বিবেচনা করি। তাহলে, $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{13}{5}$ সংখ্যাগুলি X'OX রেখার যথাক্রমে O ও A_1, A_1 ও A_2, A_2 এবং A_3 বিন্দুগুলির মাঝে অবস্থিত। অনুরূপে, $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{13}{5}$ সংখ্যাগুলি যথাক্রমে O এবং A'_1, A'_1 ও A'_2, A'_2 এবং A'_3 বিন্দুগুলির মাঝে অবস্থিত।

সুতরাং যেকোনো মূলদ সংখ্যা, X'OX রেখার উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু প্রকাশ করে। O এর ডান দিকের সংখ্যাগুলি ধনাত্মক এবং বাম দিকের সংখ্যাগুলি ঋণাত্মক সংখ্যা বিবেচনা করা হয়।

মনে করি, $PA_1 \perp OX$ এবং $OA_1 = A_1P = 1$; তাহলে, OA_1P একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। এখন O কে কেন্দ্র করে অতিভুজ $OP = \sqrt{OA_1^2 + A_1P^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি, যা OX কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $OQ = \sqrt{2}$, যা একটি অমূলদ সংখ্যা। সুতরাং, Q বিন্দুটি একটি অমূলদ সংখ্যা প্রকাশ করে (চিত্রে আরও কয়েকটি অমূলদ সংখ্যা, যেমন: $\sqrt{3}, e, \pi, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\pi$ এর অবস্থান দেখানো হলো)।

অর্থাৎ X'OX রেখার প্রত্যেক বিন্দু হয় একটি মূলদ সংখ্যা অথবা একটি অমূলদ সংখ্যার অবস্থান প্রকাশ করে। আবার একটি মূলদ বা অমূলদ সংখ্যার জন্য X'OX রেখায় কেবলমাত্র একটি বিন্দু বিদ্যমান।

অতএব X'OX নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত সকল বিন্দুগুলির সেট, দুইটি সেটের সংযোগ, যার একটি সকল মূলদ সংখ্যার সেট এবং অপরটি সকল অমূলদ সংখ্যার সেট। তাহলে, X'OX রেখার উপর অবস্থিত সকল সংখ্যার সেটই **বাস্তব সংখ্যার** সেট। নির্দিষ্ট রেখা X'OX কে **বাস্তব রেখা** বলা হয়।

পাঠ-২ ও ৩

1.2 বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ভিত্তিক বর্ণনা (Axioms of Real Numbers) [য: বো: ০৫]

বাস্তব সংখ্যার কয়েক প্রকার স্বীকার্য রয়েছে, এর মধ্যে বীজগণিতীয় গুণাবলি ভিত্তিক স্বীকার্য বা ফিল্ড স্বীকার্য এবং ক্রমভিত্তিক স্বীকার্য অন্যতম।

বীজগণিতীয় গুণাবলি ভিত্তিক স্বীকার্য বা ফিল্ড স্বীকার্য: বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর বীজগণিতীয় গুণাবলি ভিত্তিক স্বীকার্য মূলত যোগ (+) এবং গুণন (.) এর উপর নির্ভরশীল।

[রা: বো: ১৫]

বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যসমূহ:

আবদ্ধতা বিধি Closure Law	(i) $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a + b \in \mathbb{R}$ যেমন: $2, 3 \in \mathbb{R} \therefore 2 + 3 = 5 \in \mathbb{R}$	যোগের আবদ্ধতা বিধি
	(ii) $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a.b \in \mathbb{R}$ যেমন: $2, 3 \in \mathbb{R} \therefore 2.3 = 6 \in \mathbb{R}$	গুণের আবদ্ধতা বিধি
বিনিময় বিধি Commutative Law	(i) $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a + b = b + a$ যেমন: $2, 3 \in \mathbb{R} \therefore 2 + 3 = 3 + 2$	যোগের বিনিময় বিধি
	(ii) $a, b, \in \mathbb{R}$ হলে $ab = ba$ যেমন: $2, 3 \in \mathbb{R}$ হলে $2.3 = 3.2$	গুণের বিনিময় বিধি
সংযোগ বিধি Associative Law	(i) $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে $(a + b) + c = a + (b + c)$ যেমন: $2, 3, 4 \in \mathbb{R} \therefore (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$	যোগের সংযোজন বিধি
	(ii) $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে $(ab)c = a(bc)$ যেমন: $2, 3, 4 \in \mathbb{R} \therefore (2.3)4 = 2(3.4)$	গুণের সংযোজন বিধি
অভেদকের অস্তিত্ব Existence of identity	(i) $a \in \mathbb{R}$ হলে $a + 0 = 0 + a = a$ যেমন: $3 \in \mathbb{R} \therefore 3 + 0 = 0 + 3 = 3$	যোগের অভেদকের অস্তিত্ব
	(ii) $a \in \mathbb{R}$ হলে $a.1 = 1.a = a$ যেমন: $3 \in \mathbb{R} \therefore 3.1 = 1.3 = 3$	গুণের অভেদকের অস্তিত্ব
বিপরীতকের অস্তিত্ব Existence of inverse	(i) $a \in \mathbb{R}$ হলে $-a \in \mathbb{R}$ যেখানে $a+(-a) = (-a) + a = 0$ যেমন: $2 \in \mathbb{R}$ হলে, $\cdot -2 \in \mathbb{R}$ $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$	যোগের বিপরীতকের অস্তিত্ব
	(ii) $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ হলে $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ যেমন: $3^{-1} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} \therefore 3.3^{-1} = 3^{-1}.3 = 1$	গুণের বিপরীতকের অস্তিত্ব
বন্টন বিধি Distributive Law	(i) $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে $a(b + c) = ab + ac$ যেমন: $2, 3, 4 \in \mathbb{R}$ $\therefore 2(3 + 4) = 2.3 + 2.4 = 6 + 8 = 14$	বাম বন্টন বিধি
	(ii) $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে $(b + c) a = ba + ca$ যেমন: $2, 3, 4 \in \mathbb{R}$ $\therefore (3 + 4)2 = 3.2 + 4.2 = 6 + 8 = 14$	ডান বন্টন বিধি
অনন্যতা বিধি Uniqueness Law	$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ এবং $a = b$ ও $c = d$ হলে, $a + c = b + d$	যোগের অনন্যতা বিধি
	$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ এবং $a = b$ ও $c = d$ হলে, $ac = bd$	গুণের অনন্যতা বিধি

ক্রমভিত্তিক স্বীকার্য (Order axioms):

O_1 : সকল $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য $a > b$ বা $a = b$ বা $a < b$ হবে।

O_2 : যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a > b$ ও $b > c$ হয় তবে $a > c$; আবার $a < b$ এবং $b < c$ হলে, $a < c$ হবে।

O_3 : যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a > b$ হয় তবে, $a + c > b + c$ হবে।

O_4 : যদি $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ এবং $a > b$ এবং $c > d$ হয় তবে, $a + c > b + d$ হবে।

O_5 : যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a > b$ ও $c > 0$ হয় তবে $ac > bc$; আবার $a > b$ এবং $c < 0$ হলে, $ac < bc$ হবে।

O_6 : যদি $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $a > 0$, $b > 0$ হয় তবে, $ab > 0$ হবে।

O_7 : সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য $a^2 \geq 0$ হবে।

1.2.1 বাস্তব সংখ্যার উপসেটের ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যভিত্তিক আলোচনা

বাস্তব সংখ্যার সকল উপসেটই বাস্তব সংখ্যার সকল স্বীকার্য মেনে চলে এমন নয়। নিম্নে বাস্তব সংখ্যার উপসেট $\mathbb{Z}$ এর ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক গুণাবলি ভিত্তিক স্বীকার্য অর্থাৎ যোগ ও গুণন স্বীকার্য আলোচনা করা হলো।

(i) আবদ্ধতা বিধি: যোজন ও গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ আবদ্ধ। অর্থাৎ সকল $a, b \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $a + b \in \mathbb{Z}$ এবং $ab \in \mathbb{Z}$

(ii) সংযোজন বিধি: যোজন ও গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ সেটের উপাদানগুলি সংযোজনযোগ্যতা অর্থাৎ সকল $a, b, c \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $a + (b + c) = (a + b) + c$ এবং $a(bc) = (ab)c$

(iii) অভেদকের অস্তিত্বশীলতা: $\mathbb{Z}$ এর ক্ষেত্রে যোগাত্মক ও গুণাত্মক অভেদক বিদ্যমান কারণ, সকল $a \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $a + 0 = 0 + a = a$ এবং $a.1 = 1.a = a$

(iv) বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতা: পূর্ণসংখ্যা $\mathbb{Z}$ এর ক্ষেত্রে যোগাত্মক বিপরীত বিদ্যমান অর্থাৎ সকল $a \in \mathbb{Z}$ এর জন্য একটিমাত্র $-a$ (শূন্য ব্যতীত) বিদ্যমান যাতে $a + (-a) = (-a) + a = 0$. কিন্তু $\mathbb{Z}$ এর -1 ও 1 ব্যতীত অন্য কোনো সদস্যের গুণাত্মক বিপরীত $\mathbb{Z}$ এ বিদ্যমান নেই। যেমন: $2 \in \mathbb{Z}$ এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{1}{2}$ এর জন্য $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ কিন্তু $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

(v) বিনিময় বিধি: যোজন ও গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ এর উপাদানগুলি বিনিময়যোগ্য। অর্থাৎ সকল $a, b \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $a + b = b + a$ এবং $ab = ba$

(vi) বণ্টন বিধি: যোজন প্রক্রিয়ার উপর গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ এর উপাদানগুলি বণ্টনযোগ্য অর্থাৎ সকল $a, b, c \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $a(b + c) = ab + ac$ এবং $(b + c)a = ba + ca$

(vii) অনন্যতা বিধি: যদি $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ এবং $a = b, c = d$ হয়, তবে $a + c = b + d$ এবং $ac = bd$.

উদাহরণ: দেখাও যে, পূর্ণ বর্গ নয় এরূপ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান: মনে করি, m পূর্ণ বর্গ নয় এরূপ একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\sqrt{m}$ অমূলদ সংখ্যা। স্পষ্টতঃই এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n আছে, যাতে $n^2 < m < (n + 1)^2$ $\Rightarrow n < \sqrt{m} < n + 1$, দেখা যায় যে, $\sqrt{m}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $\sqrt{m}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$ । যেখানে $q > 1$ এবং p ও q পরস্পর সহমৌলিক পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, $\sqrt{m} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{m}\, q$

$$\Rightarrow p^2 = mq^2 \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{q} = mq$$

যেহেতু p ও q পরস্পর সহমৌলিক, তাই p^2 ও q পরস্পর সহমৌলিক। তদোপরি, $q > 1$ । সুতরাং $\frac{p^2}{q}$ দ্বারা পূর্ণ সংখ্যা নয় এরূপ ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা প্রকাশিত হয়।

অপরপক্ষে, mq দ্বারা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা সূচিত হয়।

তাহলে mq এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $mq \neq \frac{p^2}{q}$

তাহলে $\sqrt{m}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{m} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore \sqrt{m}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

1.2.2 বাস্তব সংখ্যার গুণাবলির স্বীকার্য ভিত্তিক কয়েকটির প্রমাণ

(Some proofs of axioms of real numbers properties)

(a) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ যোগের অভেদক অনন্য।

প্রমাণ: মনে করি, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ 0 এবং $0'$ দুইটি যোগের অভেদক আছে,
যেন সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $x + 0 = x$ এবং $x + 0' = x$.
যেহেতু সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $x + 0 = x$; সুতরাং বিশেষ ক্ষেত্রে, $0' + 0 = 0'$ ... ... (i)
আবার, যেহেতু সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $x + 0' = x$, সুতরাং বিশেষ ক্ষেত্রে, $0 + 0' = 0$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং হতে পাই, $0' = 0$, [$\because A_5$ দ্বারা, $0' + 0 = 0 + 0'$]
অতএব, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ যোগের অভেদক অনন্য।

(b) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ গুণনের অভেদক অনন্য।

প্রমাণ: মনে করি, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ e এবং e' দুইটি গুণনের অভেদক আছে,
যেন সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $xe = x$ এবং $xe' = x$.
যেহেতু সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $xe = x$; সুতরাং বিশেষ ক্ষেত্রে $e'e = e'$ ... ... (i)
আবার, যেহেতু সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $xe' = x$, সুতরাং বিশেষ ক্ষেত্রে $ee' = e$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং হতে পাই $e' = e$, [$\because M_5$ দ্বারা, $e'e = ee'$]
অতএব, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ গুণনের অভেদক অনন্য।

(c) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ যোগের বিপরীতক উপাদান অনন্য।

প্রমাণ: মনে করি, প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $\mathbb{R}$ এ দুইটি বাস্তব সংখ্যা y ও z বিদ্যমান,
যেন $x + y = y + x = 0$ ... ... (i)
এবং $x + z = z + x = 0$ ... ... (ii)

এক্ষেত্রে, $z = z + 0$	[যোগের অভেদকের অস্তিত্বশীলতা বিধি]
$= z + (x + y)$	[(i) দ্বারা]
$= (z + x) + y$	[যোগের সংযোজন বিধি]
$= 0 + y$	[(ii) দ্বারা]
$= y$	[যোগের অভেদকের অস্তিত্বশীলতা বিধি]

$\therefore z = y$
অতএব, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ যোগের বিপরীতক উপাদান অনন্য।

(d) বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ গুণনের বিপরীতক উপাদান অনন্য।

প্রমাণ: মনে করি, প্রত্যেক অশূন্য বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $\mathbb{R}$ এ দুইটি বাস্তব সংখ্যা y ও z বিদ্যমান যেন
$xy = yx = 1$ ... ... (i)
এবং $xz = zx = 1$ ... ... (ii)

এক্ষেত্রে $z = z.1$	[গুণের অভেদকের অস্তিত্বশীলতা বিধি]
$= z(xy)$	[(i) দ্বারা]
$= (zx)y$	[গুণের সংযোজন বিধি]
$= 1.y$	[(ii) দ্বারা]
$= y$	[গুণের অভেদকের অস্তিত্বশীলতা বিধি]

$\therefore z = y$
অতএব, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ গুণনের বিপরীতক উপাদান অনন্য।

1.2.3 ব্যবধি (Interval)

যদি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হয় তবে a ও b এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বাস্তব সংখ্যা a ও b এর **ব্যবধি** বলা হয়। ব্যবধি চার ধরনের হতে পারে। a ও b এর জন্য ব্যবধিগুলি নিম্নরূপ:

(i) $[a, b]$, (ii) (a, b), (iii) $[a, b)$ ও (iv) $(a, b]$

এখানে, a ও b এর জন্য; $[a, b]$ কে বন্ধ ব্যবধি, (a, b) কে খোলা ব্যবধি, $[a, b)$ কে বন্ধ-খোলা ব্যবধি ও $(a, b]$ কে খোলা-বন্ধ ব্যবধি বলা হয়।

কোনো বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য-

(i) $x \in [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$; সংখ্যারেখায়:

(ii) $x \in (a, b) = \{x : a < x < b\}$; সংখ্যারেখায়:

(iii) $x \in [a, b) = \{x : a \leq x < b\}$; সংখ্যারেখায়:

(iv) $x \in (a, b] = \{x : a < x \leq b\}$; সংখ্যারেখায়:

উদাহরণ: x একটি পূর্ণসংখ্যা হলে,

(i) $x \in [-3, 5] = \{x : -3 \leq x \leq 5\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $x \in (-3, 5) = \{x : -3 < x < 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

(iii) $x \in [-3, 5) = \{x : -3 \leq x < 5\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

(iv) $x \in (-3, 5] = \{x : -3 < x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

কাজ: $x \in (-1, 2]$ ব্যবধিকে সেট আকারে প্রকাশ কর ও সংখ্যারেখায় দেখাও।

1.2.4 ঊর্ধ্বসীমা এবং নিম্নসীমা (Upper bound and Lower bound)

ঊর্ধ্বসীমা (Upper bound): যদি S, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর একটি অশূন্যক (non empty) উপসেট এবং সকল $x \in S$ এর জন্য একটি বাস্তব সংখ্যা **m** বিদ্যমান থাকে যেন $x \leq m$ হয়, তবে **m** কে S সেটের একটি **ঊর্ধ্বসীমা** বলা হয় এবং S হলো একটি ঊর্ধ্বসীমিত **(Upper bounded)** সেট।

উদাহরণ: $S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$

এখানে সকল $x \in S$ এর জন্য $x \leq 1$ সুতরাং S এর একটি ঊর্ধ্বসীমা 1

দ্রষ্টব্য: যেকোনো ঊর্ধ্বসীমার চেয়ে বড় সকল বাস্তব সংখ্যাই ঐ সেটের এক-একটি ঊর্ধ্বসীমা।

উদাহরণ: 1 থেকে বড় যেকোনো বাস্তব সংখ্যাই S সেটটির এক-একটি ঊর্ধ্বসীমা।

সুপ্রিমাম (লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা) Supremum (Least upper bound): কোনো সেটের ঊর্ধ্বসীমাগুলির মধ্যে সবচেয়ে ছোট অর্থাৎ, ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে ঐ সেটের **সুপ্রিমাম (লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা)** বলা হয়।

উদাহরণ: $S = (-1, 1)$ এর সুপ্রিমাম (লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা) হলো 1।

নিম্নসীমা (Lower bound): যদি S, বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর একটি অশূন্যক (non empty) উপসেট এবং সকল $x \in S$ এর জন্য একটি বাস্তব সংখ্যা m বিদ্যমান থাকে যেন $m \leq x$ হয়, তবে m কে S সেটের একটি **নিম্নসীমা** বলা হয় এবং S হলো একটি নিম্নসীমিত **(Lower bounded)** সেট।

উদাহরণ: $S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$

এখানে সকল $x \in S$ এর জন্য $-1 \leq x$ সুতরাং S এর একটি নিম্নসীমা -1।

দ্রষ্টব্য: যেকোনো নিম্নসীমার চেয়ে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাই ঐ সেটের এক-একটি নিম্নসীমা।

উদাহরণ: -1 থেকে ছোট যেকোনো বাস্তব সংখ্যাই S সেটটির এক-একটি নিম্নসীমা।

ইনফিমাম (গরিষ্ঠ নিম্নসীমা) Infimum (Greatest lower bound): কোনো সেটের নিম্নসীমাগুলির মধ্যে সবচেয়ে বড় অর্থাৎ, বৃহত্তম সংখ্যাকে ঐ সেটের ইনফিমাম (গরিষ্ঠ নিম্নসীমা) বলা হয়।

উদাহরণ: $S = (-1, 1)$ এর ইনফিমাম (গরিষ্ঠ নিম্নসীমা) হলো -1।

নিম্নে বাস্তব সংখ্যার ঊর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা সম্পর্কিত কিছু সেটের উদাহরণ ছক আকারে প্রকাশ করা হলো:

ক্রমিক নং (Sl. No.)	বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of Real Numbers)	ঊর্ধ্বসীমার সেট (Set of upper bounds)	লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্ব সীমা (lub) বা সুপ্রিমাম (Sup)	নিম্নসীমার সেট (Set of lower bounds)	গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (glb) বা ইনফিমাম (Inf)	সেটের ধরন (Type of sets)
1	$A = \{x : x \in \mathbb{R}, 2 < x \le 5\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 5\}$	5	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 2\}$	2	সীমিত
2	$B = [2, 3)$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 3\}$	3	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 2\}$	2	সীমিত
3	$C = [1, 2]$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 2\}$	2	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 1\}$	1	সীমিত
4	$S = \{x : 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 1\}$	1	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 0\}$	0	সীমিত
5	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	নাই	নাই	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 1\}$	1	নিম্ন-সীমিত
6	$S = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge -1\}$	-1	নাই	নাই	ঊর্ধ্ব-সীমিত
7	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	নাই	নাই	নাই	নাই	সীমিত নয়
8	$S = \left\{-2, \frac{-3}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{-5}{4}, \ldots\right\} = \left\{-\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge -1\}$	-1	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le -2\}$	-2	সীমিত
9	$Q, \mathbb{R}, Q'$	কোনোটিরই নাই	নাই	কোনোটিরই নাই	নাই	সীমিত নয়
10	$S = \{x : x \in \mathbb{R}, x < 1$ অথবা $x > 2\}$	নাই	নাই	নাই	নাই	সীমিত নয়
11	$B = \{x : x \in \mathbb{Z}$ এবং $8 \le x^3 \le 27\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 3\}$	3	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 2\}$	2	সীমিত
12	$A = \{x : x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 1\}$	1	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 0\}$	0	সীমিত
13	$B = \left\{\frac{3n+2}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}, \frac{14}{9}, \ldots, \frac{3}{2}\right\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge \frac{5}{3}\}$	$\frac{5}{3}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le \frac{3}{2}\}$	$\frac{3}{2}$	সীমিত
14	$D = \{x : x \in \mathbb{R}, 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 3\}$	3	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \le \frac{1}{3}\}$	$\frac{1}{3}$	সীমিত
15	$S = \{x \in \mathbb{N} : 4 \le x^2 \le 81\}$	$\{x : x \in \mathbb{N}, x \ge 9\}$	9	$\{x : x \in \mathbb{N}, x \le 2\}$	2	সীমিত

কাজ: 1. $\{x \in \mathbb{R} : (x + 1)(x - 3) < 0\}$ সেটটির ঊর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমার সেট নির্ণয় করে সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর।

2. $S_1 = \left\{\frac{2n-1}{n};\ \text{যেখানে } n \text{ স্বাভাবিক সংখ্যা}\right\}$

এবং $S_2 = \left\{\frac{1}{(-1)^n} - n : n \in \mathbb{N}\right\}$

উপরের সেটগুলির মধ্যে কোনটি ঊর্ধ্বসীমিত বা নিম্নসীমিত নির্ণয় কর এবং সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর (যদি বিদ্যমান থাকে)।

3. দেখাও যে, (i) $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ সেটের সুপ্রিমাম $= a$

(ii) $\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$ সেটের ইনফিমাম $= b$

4. (i) এমন একটি সেটের উদাহরণ দাও, যার সুপ্রিমাম এর অন্তর্ভুক্ত হলেও ইনফিমাম অন্তর্ভুক্ত নয়।

(ii) এমন একটি সেটের উদাহরণ দাও, যার ইনফিমাম এর অন্তর্ভুক্ত হলেও সুপ্রিমাম অন্তর্ভুক্ত নয়।

1.2.5 বাস্তব সংখ্যার সেটে সম্পূর্ণতা ধর্ম (Completeness property of real numbers)

প্রত্যেকটি ফাঁকা সেট নয় এরূপ ঊর্ধ্বসীমিত বাস্তব সংখ্যার উপসেটের একটি অনন্য সুপ্রিমাম $x \in \mathbb{R}$ বিদ্যমান এবং ফাঁকা সেট নয় এরূপ নিম্নসীমিত বাস্তব সংখ্যার উপসেটের একটি অনন্য ইনফিমাম $x \in \mathbb{R}$ বিদ্যমান। এই বৈশিষ্ট্যকে বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা ধর্ম বলা হয়। মূলদ সংখ্যার সেটে সম্পূর্ণতা ধর্ম খাটে না।

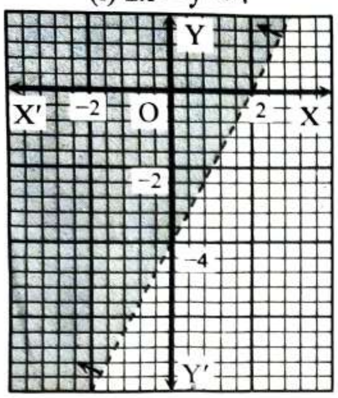
যেমন: ধরি $S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 15\}$ সেটটি নিম্নসীমিত কিন্তু $\mathbb{Q}$ সেটে এর কোন বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) নেই। S সেটে ক্ষুদ্রতম নিম্নসীমা অর্থাৎ $\text{Inf } S = \sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$, কিন্তু ইহা বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এর একটি উপাদান।

পাঠ-৪

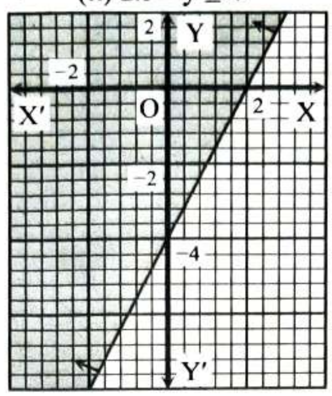
অসমতা (Inequalities)

অসমতা এমন এক প্রকার গাণিতিক বাক্যের প্রকাশ (Mathematical expression) যা সংখ্যা, পরিমাণ বা গাণিতিক বাক্যের ক্রমের সম্পর্ক (Order Relation) নির্দেশ করে। গাণিতিকভাবে অসমতাকে '$<$' (less than), '$>$' (greater than), '$\leq$' (less than or equal), '$\geq$' (greater than or equal) ইত্যাদি সম্পর্ক প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $2 > 1$ অথবা $1 < 2$ এর অর্থ হচ্ছে 2, 1 থেকে বড় অথবা 1, 2 থেকে ছোট। আবার, $x > 0$ অসমতাটি x এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য সত্য হলেও $x^2 > 0$ অসমতাটি $x = 0$ ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য। অসমতা ও সমীকরণের মধ্যে অনেক বৈশিষ্ট্যের মিল বিদ্যমান থাকলেও অসমতার সমাধান নির্দিষ্ট কোনো সংখ্যা বা মানের জন্য স্থির না থেকে সমাধানের ব্যাপ্তি নির্দেশ করে। অর্থাৎ নির্দিষ্ট সেটে বা অঞ্চলে বিদ্যমান সকল মানের জন্য অসমতা সিদ্ধ হয়। অসমতা গণিতে বিশেষ স্থান দখল করে আছে। যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন, কোণের সম্পর্ক নির্ণয়, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য তথা গণিতের অনেক মৌলিক তথ্যাবলি অসমতার সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়।

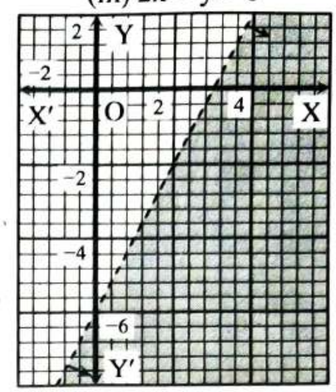
(i) $2x - y < 4$



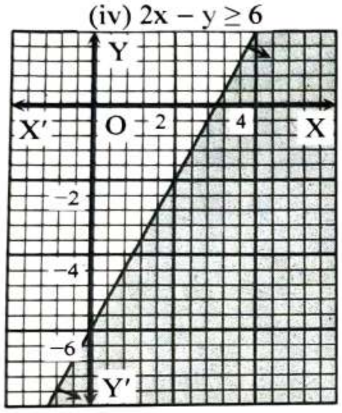
(ii) $2x - y \leq 4$



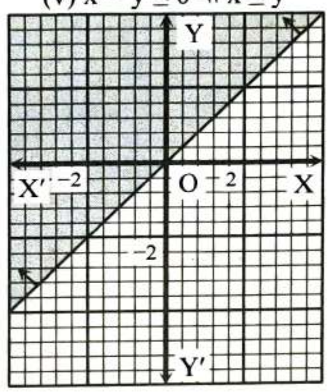
(iii) $2x - y > 6$



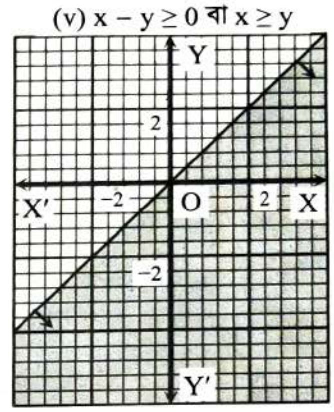
(iv) $2x - y \geq 6$



(v) $x - y \leq 0$ বা $x \leq y$



(v) $x - y \geq 0$ বা $x \geq y$



1.3 অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য (Axiom of Inequalities)

ক. যোগের ধর্ম (Properties of Addition): $a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য-

(i) যদি $a < b$ হয়, তবে $a + c < b + c$ (ii) যদি $a > b$ হয়, তবে $a + c > b + c$

উদাহরণ: যেহেতু $2 < 3$, তাহলে, $2 + 1 < 3 + 1$ এবং যেহেতু $5 > 4$, তাহলে $5 + 1 > 4 + 1$

খ. বিয়োগের ধর্ম (Properties of Subtruction): $a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য-

(i) যদি $a < b$ হয়, তবে $a - c < b - c$

(ii) যদি $a > b$ হয় তবে $a - c > b - c$

উদাহরণ: যেহেতু $2 < 3$, তাহলে, $2 - 1 < 3 - 1$ এবং যেহেতু $4 > 3$, তাহলে $4 - 2 > 3 - 2$

গ. গুণের ধর্ম (Properties of Multiplication): $a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য-

(i) যদি $a < b$ এবং $c > 0$ হয়, তবে $ac < bc$ (ii) যদি $a < b$ এবং $c < 0$ হয়, তবে $ac > bc$

উদাহরণ: (i) যেহেতু $2 < 3$ তাহলে $(2)(4) < (3)(4)$

(ii) যেহেতু $2 < 3$ তাহলে $(2)(-4) > (3)(-4)$

ঘ. ভাগের ধর্ম (Properties of Division) : $a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য-

(i) যদি $a < b$ এবং $c > 0$ হয়, তবে $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (ii) যদি $a < b$ এবং $c < 0$ হয়, তবে $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

উদাহরণ: (i) যেহেতু $2 < 3$ তাহলে, $\frac{2}{3} < \frac{3}{3}$ (ii) যেহেতু, $2 < 3$ তাহলে $\frac{2}{-3} > \frac{3}{-3}$

1.3.1 অসমতা সম্পর্কিত কতিপয় মৌলিক স্বীকার্যের প্রমাণ

1. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ হয়, $a < b$ এবং $b < c \Rightarrow a < c$ [য: বো: ১২]

প্রমাণ: $a, b \in \mathbb{R}$ এবং পরস্পর অসমান হলে $a < b$ বা, $b > a \Rightarrow b - a > 0$ ... ... (i)

আবার, $b, c \in \mathbb{R}$ এবং $b < c$ বা, $c > b \Rightarrow c - b > 0$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে পাই, $(b - a) + (c - b) > 0 + 0$

$\Rightarrow c - a > 0$

$\Rightarrow c - a + a > 0 + a$ [উভয়পক্ষে a যোগ করে]

$\Rightarrow c > a$

$\therefore a < c$

2. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ হয়, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

প্রমাণ: $a, b \in \mathbb{R}$ এবং পরস্পর অসমান হলে, $a < b$ বা, $b > a \Rightarrow b - a > 0$

$\Rightarrow b - a + c > 0 + c$ [উভয়পক্ষে c যোগ করে]

$\Rightarrow b + c > a + c$

$\therefore a + c < b + c$

অনুরূপভাবে, $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে প্রমাণ করা যায় $a - c < b - c$, যখন $a < b$

3. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ হয়, $a < b \Rightarrow ac < bc$ যখন $c > 0$

প্রমাণ: $a, b \in \mathbb{R}$ এবং পরস্পর অসমান হলে, $a < b$ বা, $b > a \Rightarrow b - a > 0$

$\Rightarrow (b - a).c > c.0$, যখন $c > 0 \Rightarrow bc - ac > 0$

$\Rightarrow bc - ac + ac > 0 + ac$ [উভয়পক্ষে ac যোগ করে]

$\Rightarrow bc > ac$

$\therefore ac < bc$

অনুরূপভাবে, $a, b, c \in \mathbb{R}$ এর জন্য প্রমাণ করা যায় $ac > bc$, যখন $c < 0$

4. যদি $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ হয়, $a + c < b + d$, যেখানে $a < b$ এবং $c < d$

প্রমাণ: মনে করি, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ এবং $a < b$ ও $c < d$

তাহলে আমরা পাই, $a - b < b - b \Rightarrow a - b < 0$ ... ... (i)

এবং $c - d < d - d \Rightarrow c - d < 0$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করে পাই, $(a - b) + (c - d) < 0 + 0 \Rightarrow (a + c) - (b + d) < 0$

$\Rightarrow (a + c) - (b + d) + (b + d) < 0 + (b + d)$ [উভয়পক্ষে (b + d) যোগ করে]

$\therefore a + c < b + d$

5. যদি $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ এবং $a > 0, b > 0$ হয় তবে $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

প্রমাণ: $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$ এবং $a < b$ হলে,

$\Rightarrow \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{ab}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

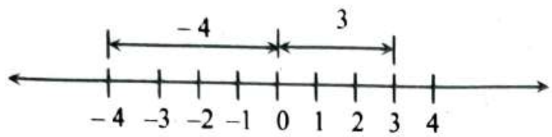
দ্রষ্টব্য: $a, b \in \mathbb{R}$ হলে, $a \le b$ এবং $a \ge b$ কে দুর্বল অসমতা বলে। দুর্বল অসমতাও মৌলিক স্বীকার্যসমূহ মেনে চলে।

পাঠ-৫

1.4 পরমমান (Absolute value)

সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু (0 নির্দেশক বিন্দু) এবং সংখ্যা নির্দেশক বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে সংখ্যাটির পরমমান (absolute value) বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ: সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু থেকে -4 এর দূরত্ব 4 একক এবং 3 এর দূরত্ব 3 একক। অর্থাৎ, -4 এর পরমমান 4 এবং 3 এর পরমমান 3।



সুতরাং সকল ধনাত্মক সংখ্যার পরমমান সংখ্যাগুলির সমান, সকল ঋণাত্মক সংখ্যার পরমমান সংখ্যাগুলির বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট এবং 0 এর পরমমান 0।

যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x-এর পরমমান $|x|$ দ্বারা সূচিত হয় এবং

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{যখন } x > 0 \\ 0, & \text{যখন } x = 0 \\ -x, & \text{যখন } x < 0 \end{cases} \qquad \text{বা, } |x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

অর্থাৎ, শূন্য (0) ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার পরমমান ধনাত্মক এবং শূন্য (0) এর পরমমান শূন্য (0) হবে।

সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $|x| = \sqrt{x^2}$

প্রমাণ: $|x|^2 = x^2$ যা x এর সকল ধনাত্মক, ঋণাত্মক ও শূন্যের জন্য সত্য।

$\therefore |x| = \pm\sqrt{x^2}$

যেহেতু $|x| \geq 0$ কাজেই ঋণাত্মক মান বর্জন করে পাই, $|x| = \sqrt{x^2}$

উদাহরণ: $|5| = 5, |-5| = -(-5) = 5, |0| = 0$

বি.দ্র. যেকোনো বাস্তব সংখ্যার পরমমান শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর বা শূন্যের সমান।

1.4.1 পরমমানের বৈশিষ্ট্যসমূহ এবং এদের প্রমাণ (Properties of absolute value and its proof)

(a) সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $-|a| \leq a \leq |a|$ [কু: বো: ১১]

প্রমাণ: প্রথম ক্ষেত্র (যখন $a \geq 0$): $a \geq 0$ হলে, $-a \leq 0$ এবং $|a| = a \Rightarrow -|a| = -a$

$\therefore -|a| \leq 0$ ... ... (i)

আবার, $0 \leq a$ এবং $a = |a|$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $-|a| \leq a = |a|$ ... ... (iii)

দ্বিতীয় ক্ষেত্র (যখন $a < 0$): $a < 0$ হলে, $-a > 0$ এবং $|a| = -a \Rightarrow -|a| = a$

$\therefore -|a| = a < 0 < -a = |a|$

অর্থাৎ, $-|a| = a < |a|$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) নং হতে পাই, $-|a| \leq a \leq |a|$

(b) সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $|a| \geq a$

প্রমাণ: প্রথম ক্ষেত্র (যখন $a \geq 0$): $a \geq 0$ হলে, $|a| = a$ ... ... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্র (যখন $a < 0$): $a < 0$ হলে, $|a| = -a$ অর্থাৎ, $|a| > a$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $|a| \geq a$

(c) সকল $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $|a|^2 = a^2 = |-a|^2$ এবং $|ab| = |a||b|$ [সি: বো: ১০; রা: বো: ০৯]

প্রমাণ : $a \geq 0$ হলে, $|a| = a \Rightarrow |a|^2 = a^2$ ... ... (i)

আবার $a < 0$ হলে, $|a| = -a \Rightarrow |a|^2 = a^2$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $|a|^2 = a^2$

অনুরূপভাবে, $|-a|^2 = (-a)^2 = a^2$ সুতরাং, $|a|^2 = a^2 = |-a|^2$ ... ... (iii)

আবার, $|ab|^2 = (ab)^2$ [(iii) নং দ্বারা]

$= a^2b^2 = |a|^2|b|^2 = (|a||b|)^2$

অর্থাৎ, $|ab|^2 = (|a||b|)^2$

যেহেতু $|ab|$ এবং $|a||b|$ উভয়েই ধনাত্মক, সুতরাং উভয় পক্ষ হতে বর্গমূলের ধনাত্মক মান সমীকৃত করে পাই, $|ab| = |a||b|$

(d) সকল $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য, (i) $|a + b| \leq |a| + |b|$ [ঢা: বো: ১৩, ০৮, ০৬; কু: বো: ১৪, ১২, ১০, ০৮, ০৫; সি: বো: ১২, ০৮; রা: বো: ১৩, ১১, ০৭, ০৫; দি: বো: ১৪, ১২, ১০; য: বো: ১৬, ১৩, ০৭; ব: বো: ১৬, ১২, ১০, ০৬]

(ii) $|a - b| \leq |a| + |b|$ [ঢা: বো: ১৬, বুয়েট ১২-১৩; চ: বো: ০৯; য: বো: ১০]

প্রমাণ: (i) $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2$ $[\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$ $[\because |ab| \geq ab]$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$

$\Rightarrow |a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\therefore |a + b| \leq |a| + |b|$

(ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ সম্পর্কে b এর পরিবর্তে $-b$ বসালে পাই, $|a + (-b)| \leq |a| + |(-b)|$

$\therefore |a - b| \leq |a| + |b|$ $[\because |(-b)| = |b|]$

(e) সকল $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য, $|a - b| \geq ||a| - |b||$

[চুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ১১; ব: বো: ১৫, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১২, ০৯]

প্রমাণ: $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

$\Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$ ... ... (i)

আবার, $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$, $[\because |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|]$

$\Rightarrow |a - b| \geq |b| - |a| \Rightarrow |a - b| \geq -(|a| - |b|) \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$

$\Rightarrow |a - b| \geq ||a| - |b||$

1.5 এক চলক সম্বলিত অসমতা (Inequalities of one variable)

বাংলাদেশে শীতকালে একদিনের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা 7°C ও সর্বোচ্চ তাপমাত্রা 30°C। যদি তাপমাত্রাকে x দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে, আমরা বলতে পারি $x \geq 7°C$ অথবা, $x \leq 30°C$

এখানে x একঘাত চলক সম্বলিত অসমতা যার মাত্রা এক।

একঘাত সমীকরণের একটিমাত্র সমাধান বা বীজ থাকে। কিন্তু একঘাত চলক সম্বলিত অসমতার অনেক সমাধান থাকে। যেমন: $x < 5$ হলে x এর মান 5 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা। অসমতার সমীকরণ থেকে সমাধান পাওয়া যায়। যেমন: $2x + 5 < 9$ বা, $2x < 4$ বা, $x < 2$

এক চলক সম্বলিত অসমতাকে কোনো ঋণাত্মক চিহ্ন বা মান দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়ে যায়। যেমন: $x < -2$ কে (-1) দ্বারা গুণ করলে অসমতার সমীকরণ হবে, $-x > 2$

সংজ্ঞা: এক চলক সম্বলিত অসমতা একটি বাক্য যার একটি রাশি অপর একটি রাশির চেয়ে ছোট অথবা বড়, ছোট বা সমান (less than or equal), বড় বা সমান (greater than or equal) অথবা কোনোটিই নয়।

যেমন: $x < 7, x > 7, x \leq 7, x \geq 7, x \nless 7, x \nleq 7, x \ngeq 7$ ইত্যাদি।

এক চলক সম্বলিত অসমতা $ax > b$, যখন $a > 0$ তখন $ax > b \Rightarrow x > \frac{b}{a}$ যার ব্যবধি $\left(\frac{b}{a}, \infty\right)$ এবং যখন $a < 0$ তখন এর মান $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$ ব্যবধির মধ্যে থাকবে। কিন্তু $a = 0$ হয় তবে এর কোনো সমাধান থাকবে না। এটিই $b \geq 0$ এবং $b < 0$ এর জন্যও সত্য।

কাজ: $x \leq 3$ অসমতার কতগুলি মান আছে? একে ব্যবধির সাহায্যে প্রকাশ কর।

যৌগিক অসমতা (Compound inequalities): $a < x < b$ একটি যৌগিক অসমতা কারণ অসমতাটিতে দুইটি বাক্যের বর্ণনা আছে। একটি $a < x$ এবং অপরটি $x < b$

কাজ: $-1 < x < 5$ একটি যৌগিক অসমতা কেন? ব্যাখ্যা কর।

পাঠ-৬

1.6 এক চলক সম্বলিত অসমতার সমাধান (Solution of inequalities with one variable)

এক চলক সম্বলিত অসমতাকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়।

i. শর্তাধীন অসমতা (Conditional inequalities): যে সমস্ত অসমতা সম্পর্কযুক্ত চলকের নির্দিষ্ট কিছু মানের জন্য সত্য তাকে **শর্তাধীন অসমতা** বলা হয়।

উদাহরণ: $x + 3 > 3$ একটি শর্তাধীন অসমতা। কেননা এটি কেবল $x > 0$ এর জন্য অসমতাটি সত্য।

ii. শর্তহীন অসমতা (Unconditional inequalities): যে সমস্ত অসমতা সম্পর্কযুক্ত চলকের প্রত্যেক মানের জন্য সত্য তাকে **শর্তহীন অসমতা** বলা হয়।

উদাহরণ: $x + 1 > x$ একটি শর্তহীন অসমতা কেননা এটি x এর প্রত্যেক মানের জন্য সত্য।

সমীকরণ সংক্রান্ত স্বত:সিদ্ধ এক চলক সম্বলিত অসমতার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। শুধু পার্থক্য হলো অসমান রাশিকে সমান সমান ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক পাল্টে যায়। আবার উভয় পক্ষকে উল্টালে ও অসমতার দিক পাল্টে যায়।

উদাহরণ: **(a)** $a > b \Rightarrow -a < -b$, সকল $a, b \in \mathbb{R}$ **(b)** $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, সকল $a, b \in \mathbb{R}$

উদাহরণ-1. সমাধান কর: $3x - 2 > 2x - 1$

সমাধান: $3x - 2 > 2x - 1$

$\Rightarrow 3x - 2 - 2x > 2x - 1 - 2x$ [উভয়পক্ষে $(-2x)$ যোগ করে]

$\Rightarrow x - 2 > -1$

$\Rightarrow x - 2 + 2 > -1 + 2$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

$\therefore x > 1$

নির্ণেয় সমাধান: $x > 1$

কাজ: সমাধান কর: $4x - 3 > 2(x - 1)$

উদাহরণ-2. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $x \le \frac{1}{2}x + 1$

সমাধান: $x \le \frac{1}{2}x + 1$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x$ [উভয়পক্ষে $(-\frac{1}{2}x)$ যোগ করে]

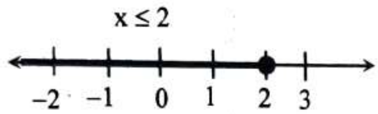
$\Rightarrow \frac{1}{2}x \le 1$

$\Rightarrow 2.\frac{1}{2}x \le 2.1$ [উভয়পক্ষে 2 গুণ করে]

$\therefore x \le 2$

নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : x \le 2\}$

সংখ্যারেখায়:



কাজ: সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $2x + 5 \le \frac{x}{4} - 2$

উদাহরণ-3. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $\frac{x(x+1)}{x-2} > 0$

সমাধান: $\frac{x(x+1)}{x-2} > 0$ ... ... (i)

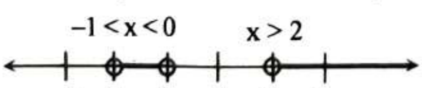
(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি x, (x + 1) এবং (x − 2) এই তিনটির মধ্যে তিনটির চিহ্নই ধনাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ঋণাত্মক এবং একটির চিহ্ন ধনাত্মক হয়।

শর্ত	x এর চিহ্ন	(x + 1) এর চিহ্ন	(x − 2) এর চিহ্ন	x(x + 1) / (x − 2) এর চিহ্ন
$x < -1$	−	−	−	−
$-1 < x < 0$	−	+	−	+
$0 < x < 2$	+	+	−	−
$x > 2$	+	+	+	+

(i) নং সত্য হবে যদি $-1 < x < 0$ অথবা $x > 2$ হয়

নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

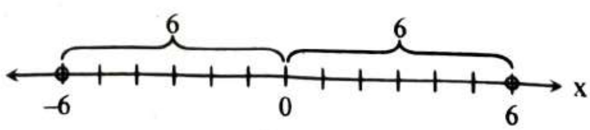
সংখ্যারেখায়:



কাজ: সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $\frac{x^2 - 2x}{x - 3} < 0$

1.7 পরমমান সম্বলিত অসমতা (Absolute value inequalities)

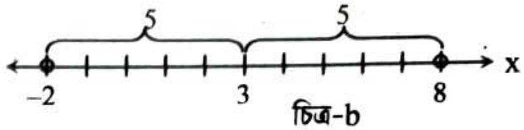
জ্যামিতিকভাবে x এর পরমমান '|x|' বলতে বোঝায়, বাস্তব সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু (O) (Origin) থেকে x বিন্দুর দূরত্ব। অতএব, $|x| < 6$ বলতে বোঝায় মূলবিন্দু (O) থেকে x বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই 6 এর কম (চিত্র-a)। সুতরাং $|x| < 6$ এবং $-6 < x < 6$ প্রতীক দুইটি একই অর্থ বহন করে।



চিত্র-a

অনুরূপভাবে (i) $|x-3|=5$ বলতে বোঝায় বাস্তব সংখ্যারেখায় x ও 3 বিন্দু দুইটির দূরত্ব 5 একক যার সমাধান সেট $\{-2, 8\}$।

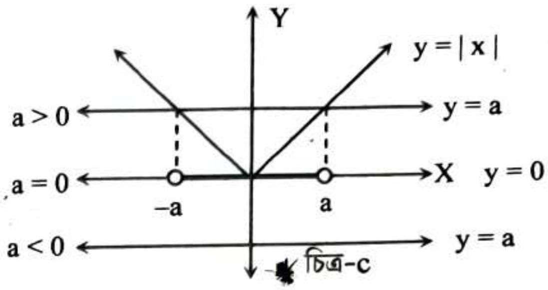
(ii) $|x-3|<5$ বলতে x এর মান এমন সংখ্যার সেট; 3 বিন্দু হতে যার দূরত্ব 5 এর কম (চিত্র-b)।
অতএব সমাধান এক্ষেত্রে সমাধান সেট $-2<x<8$



চিত্র-b

(iii) $0<|x-3|<5$ হলো x এর এমন সংখ্যার সেট, যার দূরত্ব 3 বিন্দু হতে সর্বদাই 5 এর ছোট, কিন্তু $x \neq 3$। অতএব সমাধান সেট $(-2, 3) \cup (3, 8)$ এবং $|x-3|>5$ এর সমাধান সেট হবে $(-\infty, -2) \cup (8, \infty)$।

পরমমান সম্বলিত অসমতার সমাধানের ক্ষেত্রে তিনটি ক্ষেত্রের উদ্ভব হয় যা $|x|<a$ এ ক্ষেত্রে দেখানো হলো।
চিত্র-c এ দেখা যায়, $a=0$ এবং $a<0$ এর ক্ষেত্রে $|x|<a$ এর কোনো সমাধান নেই কিন্তু $a>0$ এর ক্ষেত্রে সমাধান $-a<x<a$।



চিত্র-c

উদাহরণমালা

উদাহরণ-4. পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর: (i) $|x-2|<5$ [ঢা: বো: ০৯; দি: বো; ১১] **(ii) $\frac{1}{|2x-1|} \geq 7, \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$**

সমাধান: (i) $|x-2|<5 \Rightarrow -5<x-2<5 \Rightarrow -5+2<x-2+2<5+2 \Rightarrow -3<x<7$

(ii) $\frac{1}{|2x-1|} \geq 7, \left(x \neq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow |2x-1| \leq \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7} \leq 2x-1 \leq \frac{1}{7}$

$\Rightarrow -\frac{1}{7}+1 \leq 2x \leq \frac{1}{7}+1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{6}{7} \leq 2x \leq \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{3}{7} \leq x \leq \frac{4}{7}, x \neq \frac{1}{2}$

কাজ: $|3-2x| \geq 7$ কে পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর।

উদাহরণ-5. পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর: $-2<x<6$

সমাধান: প্রদত্ত অসমতাটি $-2<x<6$ এখানে, $\frac{-2+6}{2}=2$

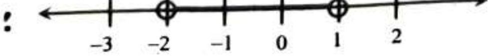
$\Rightarrow -2-2<x-2<6-2$
$\Rightarrow -4<x-2<4$
$\therefore |x-2|<4$

কাজ: $-2<x<8$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

উদাহরণ-6. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও : $|2x+1|<3$ [সি: বো: ০৭; য: বো: ১২, ০৯]

সমাধান: $|2x+1|<3 \Rightarrow -3<2x+1<3 \Rightarrow -4<2x<2 \Rightarrow -2<x<1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-2<x<1$
সমাধান সেট; $S=\{x \in \mathbb{R} : -2<x<1\}$
সংখ্যারেখায় :



কাজ: $\left|\frac{x}{2}-1\right| \leq \frac{1}{2}$ কে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

উদাহরণ-7. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও : $\frac{1}{|3x-5|} > 2, \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$

[বুয়েট ১০-১১; ঢা: বো: ১০; কু: বো: ১৩; সি: বো: ১৪, ১০; য: বো: ১৪, ০৫; চ: বো: ০৭]

সমাধান: $\frac{1}{|3x-5|} > 2 \left(\because x \neq \frac{5}{3}\right)$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

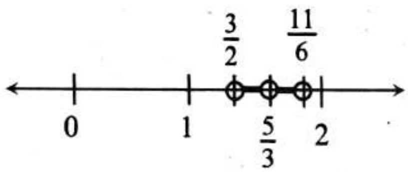
বা, $-\frac{1}{2} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

বা, $\frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2} \;\therefore\; \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$

নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6} \text{ এবং } x \neq \frac{5}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ-8. মান নির্ণয় কর: $||2-6|-10+|7-3||$

সমাধান: $||2-6|-10+|7-3|| = ||-4|-10+|4|| = |4-10+4| = |-2| = 2$

কাজ: মান নির্ণয় কর: $|-11+7| - |2-|-3|| + |-1-3|$

উদাহরণ-9. ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলি মূলদ সংখ্যা:

(a) 2.090909 ... (b) 3.274 274 274 ...

সমাধান:

(a) মনে করি, $x = 2.090909 \ldots$ ... ... (i)

$\therefore 100x = 209.090909 \ldots$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$99x = 207$

$\therefore x = \frac{207}{99} = \frac{23}{11}$, এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

(b) মনে করি, $x = 3.274\,274\,274 \ldots$ ... ... (i)

$\therefore 1000x = 3274.274\,274 \ldots$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই, $999x = 3271$

$\therefore x = \frac{3271}{999}$, এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ-10. দেখাও যে, $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। [কু: বো: ০৭; সি: ১৩, ০৫; রা: বো: ০৫; ব: বো: ১৪]

প্রমাণ: মনে করি, $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, যেখানে p ও q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে 1 ব্যতীত কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই।

উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই, $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ ... ... (i)

এখানে $2q^2$, 2 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং p^2, 2 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ, p, 2 দ্বারা বিভাজ্য।

ধরি, $p = 2m$, এখানে m যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা তাহলে (i) নং হতে পাই,

$(2m)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4m^2 = 2q^2$

$\Rightarrow q^2 = 2m^2$ ... ... (ii)

এখানে, $2m^2$, 2 দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং q^2, 2 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ, q, 2 দ্বারা বিভাজ্য।

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে দেখা যায় যে, p ও q উভয়ই 2 দ্বারা বিভাজ্য, যা প্রস্তাবনা বিরোধী। কেননা মধ্যে p ও q এর মধ্যে 1 ব্যতীত কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই।

$\therefore \sqrt{2}$, মূলদ সংখ্যা হতে পারে না। সুতরাং $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

বি. দ্র.: একইভাবে প্রমাণ করা যায় $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ ইত্যাদিও অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ-11. যদি $a \in \mathbb{R}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $a.0 = 0$ [ঢা: বো: ১৪, ০৯; রা: বো: ১৪; দি: বো: ১৬; কু: বো: ০৬]

প্রমাণ: যেহেতু $1 \in \mathbb{R}$, $\therefore 1 + 0 = 1$ [যোজনের অভেদক]

বা, $a.(1 + 0) = a.1$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]

বা, $a.1 + a.0 = a.1$ [বণ্টনবিধি]

বা, $a + a.0 = a$ [গুণের অভেদক]

বা, $-a + a + a.0 = -a + a$ [যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $(-a + a) + a.0 = -a + a$ [যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $0 + a.0 = 0$ [যোগের বিপরীতক]

$\therefore$ $a.0 = 0$ [যোগের অভেদক]

উদাহরণ-12. যদি $a, b \in \mathbb{R}$ হয় তবে, দেখাও যে $-(a + b) = -a - b$ [ব: বো: ১১]

প্রমাণ: $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $-a, -b \in \mathbb{R}$

$\therefore (a + b) + (-a - b) = (-a - b) + (a + b)$ [যোগের বিনিময় বিধি]

$\Rightarrow (a + b) + (-a - b) = [(-a) + (-b)] + (a + b)$ [বিয়োগের সংজ্ঞানুসারে]

$= (-a) + [(-b) + (a + b)]$ [যোগের সংযোজন বিধি]

$= (-a) + [(-b) + (b + a)]$ [যোগের বিনিময় বিধি]

$= (-a) + [\{(-b) + b\} + a]$ [যোগের সংযোজন বিধি]

$= (-a) + [0 + a]$ [যোগের বিপরীতক]

$= (-a) + a$ [যোগের অভেদক]

$= 0$ [যোগের বিপরীতক]

$\therefore (a + b) + (-a - b) = 0$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $(-a - b) + (a + b) = 0$

এখানে, $(a + b)$ হলো $(-a - b)$ এর যোগের বিপরীতক

$\therefore -a - b = -(a + b) \Rightarrow -(a + b) = -a - b$

পাঠ-৭ ও ৮

অনুশীলনী-1(A)

Type-I

1. মান নির্ণয় কর:

(i) $|1+3|+|1-3|$ (ii) $|-3-5|$

(iii) $||3-5|+|7-12||$ [কু: বো: ০৬] (iv) $||2-6|-|1-9||$ [ব: বো: ০৫]

(v) $|-1-8|+|3-1|$ [ব: বো: ০৫] (vi) $||-2|-|-6||$

(vii) $|a-3a|-|5a-7a|$ (viii) $||-9a|-|11a-2a|-7|$

(ix) $||-16+3|+|-1-4|-3-|-1-7||$ [চ: বো: ০৫]

(x) $13+|-1-4|-3-|-8|$ [কু: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১১]

Type-II

2. পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর:

(i) $|x|<3$ (ii) $|x+1|\leq 2$ (iii) $|x-3|\leq 7$ [কু: বো: ০৫]

(iv) $\left|x-\frac{4}{3}\right|\leq 5$ (v) $\frac{1}{|1-4x|}\geq 3$, যখন $x\neq\frac{1}{4}$ (vi) $1<|x|<5$

(vii) $|2x+3|<7$ [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-১(ক); রা: বো: ১৬; মাদ্রাসা বো: ১৩]

(viii) $\frac{1}{|3x+1|}\geq 5, \left(x\neq-\frac{1}{3}\right)$ [বুয়েট ১০-১১; য: বো: ০৮; চ: বো: ১৩; সি: বো: ০৬]

Type-III

3. পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর:

(i) $-1<x<3$ (ii) $-8\leq x\leq 2$ (iii) $-6\leq 5x\leq 0$

(iv) $-2<3-x<8$ (v) $1\leq 3x+7\leq 5$ (vi) $2\leq 2x+3\leq 4$

(vii) $-5<x<7$ [রা: বো: ১৩; ব: বো: ০৬] (viii) $2\leq x\leq 8$ [য: বো: ০৭]

(ix) $-7<x<-1$ [ঢা. বি. ১৫-১৬; চ: বো: ০৯] (x) $2x^2+5x<0$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(xi) $-1<2x-3<5$ [বুয়েট ১০-১১; দি: বো: ১৪; চ: বো: ০৬; সি: বো: ১৪; য: বো: ১০; ব: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ০৯]

(xii) $-4<2x-1<12$ [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক)]

(xiii) $-2<2x+1<4$ [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(ক)]

(xiv) $-1\leq x-2\leq 11$ [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(ক)]

4. $f(x)=x-1$ হলে $-2<2-f(x)<8$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। যেখানে $x\in\mathbb{R}$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক)]

Type-IV

5. সমাধান কর:

(i) $|x-1|\leq 3$ (ii) $|x+2|<2$ এবং $x\in\mathbb{Z}$ (iii) $|x-1|\leq 2$ এবং $x\in\mathbb{N}$

(iv) $|3x-4|<2$ [ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ০৮] (v) $|x-5|>4$

(vi) $|2x+3|>9$ (vii) $|2x-7|>5$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক)]

(viii) $|x-1|=|3x-4|$ (ix) $|x-1|+|2x-3|=5$ (x) $|x+1|+|x-1|\leq 5$

(xi) $|x+1|<2$ এবং $|x-2|<3$ (xii) $|x-1|<2$ এবং $|x-2|<1$

Type-V

6. **সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও:**

(i) $|x| \leq 4$ (ii) $|3-x| \leq 2$ (iii) $|2x-5| < 1$

(iv) $|2x+3| < 7$ [চ: বো: ১২] (v) $|2x+5| < 1$ [য: বো: ০৫]

(vi) $|3x-4| < 2$ [বুয়েট ১১-১২; রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৩]

(vii) $|2x-5| < 3$ [ঢা: বো: ১৫, ১৩, ০৭; কু: বো: ০৮; রা: বো: ০৬; য: বো: ০৬; চ: বো: ১৪, ০৫; মাদ্রাসা ১২, ১০]

(viii) $|3x+2| < 7$ [সি: বো: ১২, ০৭; রা: বো: ১২; চ: বো: ১০; ব: বো: ১০]

(ix) $|2x-1| < \frac{1}{3}$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক)] (x) $\frac{1}{|5x-1|} > \frac{1}{9}$ এবং $x \neq \frac{1}{5}$ [চ: বো: ১৫]

(xi) $|x-5| > 2$ (xii) $|x-5| < 3$ এবং $x < 5$

(xiii) $|x-2| \leq 1$ এবং $|x-3| \leq 1$ [য: বো: ১৫]

(xiv) $\frac{1}{|5x-3|} \geq 2$ এবং $x \neq \frac{3}{5}$। [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(খ)]

7. (i) $f(x) = 3x + 1$ হলে $2|f(x-2)| \leq 1$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।
[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(ii) $f(x) = x - 1$ হলে $|3f(x) - 1| < 2$ অসমতাকে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। যেখানে $x \in \mathbb{R}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(iii) $p = x - 5$ হলে $\frac{1}{|p|} \geq 3$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় করে সংখ্যারেখায় দেখাও।
যেখানে $x \in \mathbb{R}$ এবং $x \neq 5$ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ)]

Type-VI

8. (i) দেখাও যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। [ঢা: বো: ১১, ০৮; চ: বো: ১৪, ১১; কু: বো: ১৩, ১১; সি: বো: ১৫, ১১; রা: বো: ১২, ১০; ব: বো: ১২; য: বো: ১৬, ১৩, ১১; মাদ্রাসা বো: ১৫, ১৪, ১০]

(ii) দেখাও যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ০৬; ব: বো: ০৭]

(iii) দেখাও যে, $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা নয়।

(iv) x, y মূলদ এবং $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$ হলে, দেখাও যে, $x = y = 0$।

(v) দেখাও যে, দুইটি ভিন্ন মূলদ সংখ্যার মধ্যে অন্য মূলদ সংখ্যা আছে।

(vi) $a < b$ এবং k ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $a < \frac{a+bk}{1+k} < b$.

9. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, সংখ্যাগুলি মূলদ সংখ্যা।
(i) 0.66666 ... ... (ii) 0.56666 ... ... (iii) 9.72 72 72 ... ...

Type-VII

10. **নিচের সেটগুলির সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম বিদ্যমান থাকলে নির্ণয় কর:**

(i) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\left\{1 - \frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(iii) $\left\{\frac{1}{5n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ (iv) $\{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 3\}$

(v) $\{x \in \mathbb{R} : x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ (vi) $\{x : (x-1)(x-2) \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$

(vii) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leq 4\}$ (viii) $\{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0, x \in \mathbb{R}\}$
[কুয়েট ০৪-০৫; বুটেক্স ১২-১৩]

(ix) $\{a : a \in$ পূর্ণসংখ্যা এবং $|g(a)| < 4\}$, যেখানে $g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(x) $\{x : x \in \mathbb{R}, -9 < 5x + 1 < 16\}$ [যশোর বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(ক)]

Type-VIII

11. (i) বাস্তব সংখ্যায় বিপরীত এর অস্তিত্ব ব্যাখ্যা কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(ক)]

(ii) সকল বাস্তব সংখ্যা 'a' এর জন্য প্রমাণ কর: $\sqrt{a^2} = |a|$

(iii) যদি $a, b \in \mathbb{R}$ হয় তবে দেখাও যে, $(-a)(-b) = ab$ [কু: বো: ০৭; সি: বো: ১৬, ১১]
এবং $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $(a \neq 0, b \neq 0)$ [কু: বো: ১২]

(iv) যদি $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $ab = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a = 0$ অথবা $b = 0$ [সি: বো: ১৩]

(v) যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a + b = a + c$ হয়, তবে দেখাও যে, $b = c$
[ঢা: বো: ১২, ০৭; য: বো: ১১; সি: বো: ০৯; রা: বো: ১১; ব: বো: ০৭]

(vi) যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac = bc$ এবং $c \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a = b$
[কু: বো: ১৬, ১৪; ০৯; চ: বো: ১০, ০৬; দি: বো: ১৩, ১০; ব: বো: ১৩]

(vii) যদি $a, b \in \mathbb{R}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(-a)b = -(ab)$ [ব: বো: ১১]

(viii) যদি $a > b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c > b + c$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা। [রা: বো: ০৮; চ: বো: ১২]

(ix) যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a \leq b$ হয়, তবে দেখাও যে, $ac \leq bc$ যখন $c > 0$ এবং $ac \geq bc$ যখন $c < 0$

Type-IX

12. (i) $|x - 1| < \frac{1}{10}$ হলে, দেখাও যে, $|x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ); বুয়েট ১২-১৩;
ঢা: বো: ১৪, ১২, ১০, ০৬; চ: বো: ১৫; সি: বো: ১৫; রা: বো: ১০; দি: বো: ১৫, ১২; য: বো: ০৮; সি: বো: ০৯;
চ: বো: ১৬, ১১, ০৮; ব: বো: ১৩, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১]

(ii) $f(x) = ax + by + c$ এবং $|f(x) - 1| < \frac{1}{11}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $|\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$.
যেখানে $a = 1, b = c = 0$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(iii) $f(x) = |x - 3|$ এবং $f(x) < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$. [সিলেট বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(iv) $f(x) = |x - 3|$ এবং $f(x) < \frac{1}{7}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 9| < \frac{43}{49}$. [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(v) $|x - 3| < \frac{1}{5}$ হয় তবে দেখাও যে, $|x^2 - 8| < \frac{56}{25}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(খ)]

উত্তরমালা

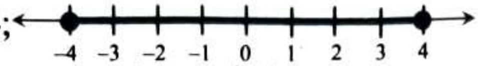
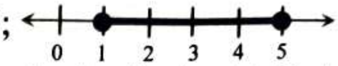
1. **(i)** 6 **(ii)** 8 **(iii)** 7 **(iv)** 4 **(v)** 11 **(vi)** 4 **(vii)** 0 **(viii)** 7 **(ix)** 7 **(x)** 7

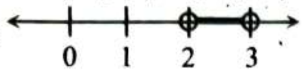
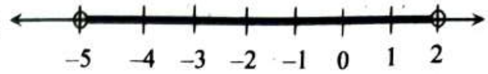
2. **(i)** $-3 < x < 3$ **(ii)** $-3 \leq x \leq 1$ **(iii)** $-4 \leq x \leq 10$ **(iv)** $-\frac{11}{3} \leq x \leq \frac{19}{3}$
(v) $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3}$; যখন $x \neq \frac{1}{4}$ **(vi)** $1 < x < 5$ অথবা $-5 < x < -1$ **(vii)** $-5 < x < 2$
(viii) $-\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}$; যখন $x \neq -\frac{1}{3}$

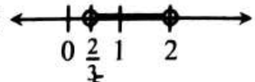
3. **(i)** $|x - 1| < 2$ **(ii)** $|x + 3| \leq 5$ **(iii)** $|5x + 3| \leq 3$ **(iv)** $|x| < 5$
(v) $|3x + 4| \leq 2$ **(vi)** $|2x| \leq 1$ **(vii)** $|x - 1| < 6$ **(viii)** $|x - 5| \leq 3$
(ix) $|x + 4| < 3$ **(x)** $\left|x + \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4}$ **(xi)** $|2x - 5| < 3$ **(xii)** $|2x - 5| < 8$
(xiii) $|2x| < 3$ **(xiv)** $|x - 7| \leq 6$

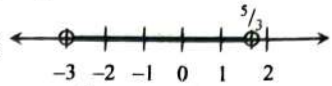
4. $|x| < 5$

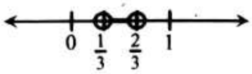
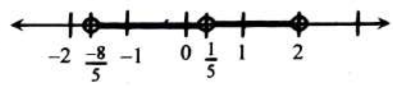
5. **(i)** $-2 \leq x \leq 4$ **(ii)** $x = -3, -2, -1$ **(iii)** $x = 1, 2, 3$ **(iv)** $\frac{2}{3} < x < 2$
(v) $x < 1$ বা $x > 9$ **(vi)** $x < -6$ বা $x > 3$ **(vii)** $x > 6$ অথবা $x < 1$ **(viii)** $x = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$
(ix) $x = 3, -\frac{1}{3}$ **(x)** $\frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ **(xi)** $-1 < x < 1$ **(xii)** $1 < x < 3$

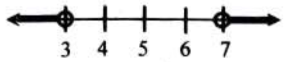
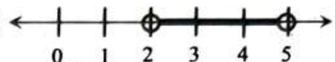
6. **(i)** $-4 \le x \le 4$;  **(ii)** $1 \le x \le 5$; 

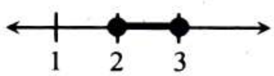
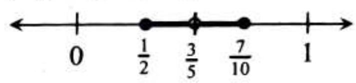
(iii) $2 < x < 3$;  **(iv)** $-5 < x < 2$; 

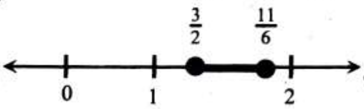
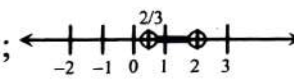
(v) $-3 < x < -2$;  **(vi)** $\frac{2}{3} < x < 2$; 

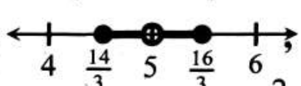
(vii) $1 < x < 4$;  **(viii)** $-3 < x < \frac{5}{3}$; 

(ix) $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$;  **(x)** $-\frac{8}{5} < x < 2$ এবং $x \ne \frac{1}{5}$; 

(xi) $x < 3$ বা $x > 7$;  **(xii)** $2 < x < 5$; 

(xiii) $2 \le x \le 3$;  **(xiv)** $\frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{10}$ এবং $x \ne \frac{3}{5}$; 

7. **(i)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} \le x \le \frac{11}{6}\right\}$; ; **(ii)** $\frac{2}{3} < x < 2$; ;

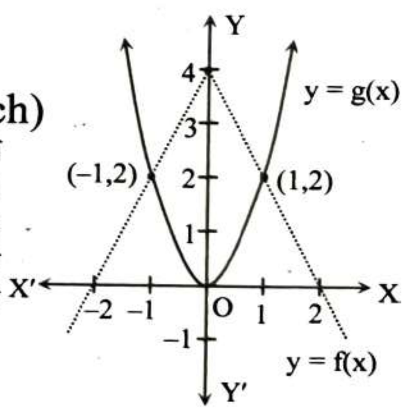
(iii) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{14}{3} \le x \le \frac{16}{3} \text{ এবং } x \ne 5\right\}$; 

10. **(i)** সুপ্রিমাম = 5; ইনফিমাম = 1 **(ii)** সুপ্রিমাম = 1; ইনফিমাম = $\frac{2}{3}$ **(iii)** সুপ্রিমাম = $\frac{1}{5}$; ইনফিমাম = $-\frac{1}{5}$
(iv) সুপ্রিমাম = 3; ইনফিমাম = –5 **(v)** সুপ্রিমাম নেই এবং ইনফিমাম = 2 **(vi)** ইনফিমাম = 1, সুপ্রিমাম = 2
(vii) সুপ্রিমাম = 7; ইনফিমাম = –1 **(viii)** ইনফিমাম = $\frac{1}{5}$; সুপ্রিমাম = 3; **(ix)** সুপ্রিমাম = 2, ইনফিমাম = – 1
(x) সুপ্রিমাম = 3, ইনফিমাম = – 2

পাঠ-৯

1.8 এক চলকের অসমতাকে রেখাচিত্রের সাহায্যে সমাধান
(Solution of inequalities in one variable by sketch)

অনেকক্ষেত্রে অসমতার বীজগাণিতিক সমাধান নির্ণয় দুরূহ হয়ে পড়ে। এক্ষেত্রে রেখাচিত্রের সাহায্যে অসমতার সমাধান সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা পাওয়া যায়। রেখাচিত্রের সাহায্যে এক চলকের অসমতাকে খুব সহজে সমাধান করা যায়। এ প্রক্রিয়ায় গাণিতিক বাক্য বা বাক্যগুলিকে একই লেখচিত্রের মধ্যে অঙ্কন করে অসমতার চিহ্নের সম্পর্ক বিবেচনায় আনতে হয়। অতঃপর লেখের প্রকৃতি দেখে সমাধান x-অক্ষের উপর চিহ্নিত করা হয়।



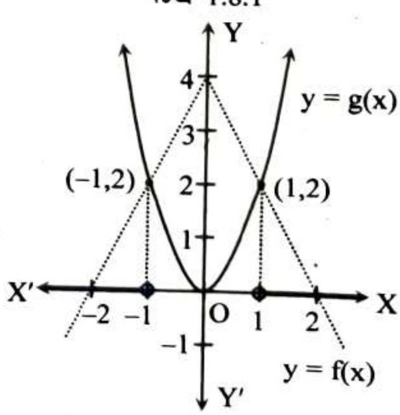
চিত্র-1.8.1

f(x) ও g(x) এর চিত্র (চিত্র-1.8.1) দেওয়া হয়েছে।
লেখচিত্র থেকে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দিতে হবে।
সমাধান নির্ণয় করতে হবে যখন—
(a) $f(x) = g(x)$ **(b)** $f(x) < g(x)$ **(c)** $f(x) \ge g(x)$

সমাধান:

(a) $f(x) = g(x)$ এর সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা দেখব f(x) ও g(x) এর লেখচিত্রদ্বয় কোন কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে f(x) ও g(x) এর লেখদ্বয় পরস্পরকে (–1, 2) ও (1, 2) বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং $f(x) = g(x)$ এর সমাধান $x = -1$ এবং $x = 1$

(b) $f(x) < g(x)$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা দেখব কোথায় f(x) এর লেখ g(x) এর লেখের নিচে অবস্থান করছে। লেঁখচিত্র (চিত্র-1.8.2) হতে এটা স্পষ্ট যে, যখন $x < -1$ অথবা $x > 1$ তখন f(x) এর লেখ g(x) এর লেখের নিচে অবস্থান করছে।
সুতরাং $f(x) < g(x)$ অসমতাটির সমাধান $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

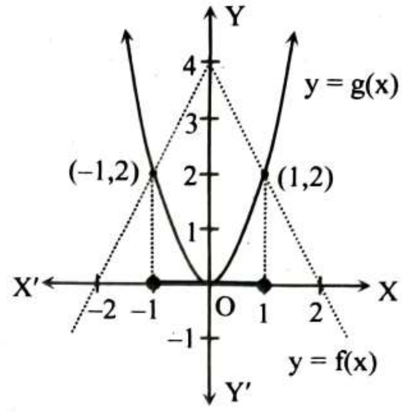


চিত্র-1.8.2

(c) $f(x) \geq g(x)$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা $f(x) = g(x)$ ও $f(x) > g(x)$ এর সমাধান নির্ণয় করব।

$f(x) = g(x)$ এর সমাধান $x = \pm 1$

$f(x) > g(x)$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা দেখব কোথায় $f(x)$ এর লেখ $g(x)$ এর লেখের ওপরে অবস্থান করছে। লেখচিত্র (চিত্র-1.8.3) হতে এটা স্পষ্ট যে, যখন $-1 < x < 1$ তখন $f(x)$ এর লেখ $g(x)$ এর লেখের ওপরে অবস্থান করছে। অতএব $f(x) > g(x)$ অসমতার সমাধান $(-1, 1)$, সুতরাং $f(x) \geq g(x)$ অসমতাটির সমাধান $\{-1, 1\} \cup (-1, 1) = [-1,1]$



চিত্র-1.8.3

সমীকরণ ও অসমতার সমাধানের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা:

মনে করি, $f(x)$ এবং $g(x)$ দুইটি ফাংশন।

- $f(x) = g(x)$ এর সমাধান হলো $y = f(x)$ ও $y = g(x)$ এর লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্ক।
- $f(x) < g(x)$ এর সমাধান সেট হলো x এর সেই মানগুলি যাদের জন্য $f(x)$ এর লেখ $g(x)$ এর লেখের নিচে (below) অবস্থান করে।
- $f(x) > g(x)$ এর সমাধান সেট হলো x এর সেই মানগুলি যাদের জন্য $f(x)$ এর লেখ $g(x)$ এর লেখের ওপরে (above) অবস্থান করে।

উদাহরণ-1. রেখাচিত্রের সাহায্যে $\frac{x}{2} + 1 \leq 0$ অসমতার সমাধান কর।

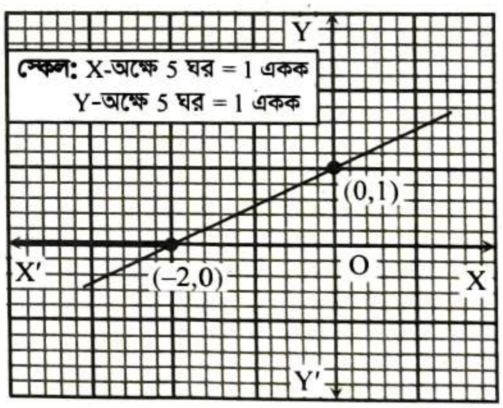
সমাধান: ধরি, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

তাহলে আমরা পাই, $f(x) \leq 0$

$f(x)$ এর লেখচিত্র থেকে দেখা যায়,

$f(x) \leq 0$ যখন $x \in (-\infty, -2]$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \leq -2$

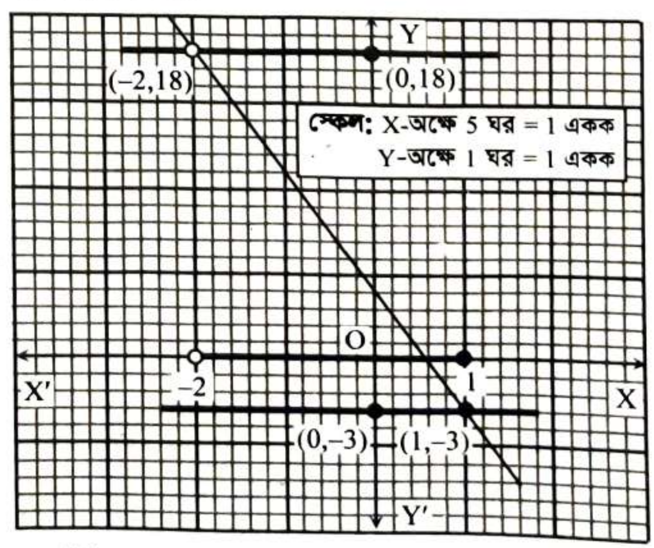


উদাহরণ-2. রেখাচিত্রের সাহায্যে $-3 \leq 4 - 7x < 18$ অসমতার সমাধান কর।

সমাধান: ধরি, $y_1 = -3$, $y_2 = 4 - 7x$ এবং $y_3 = 18$

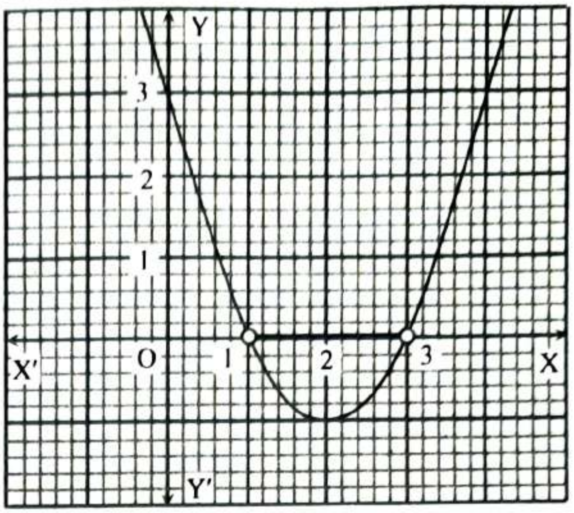
y_1, y_2 ও y_3 এর লেখচিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, $x \in (-2, 1]$ এর জন্য y_2 এর মান y_1 ও y_3 এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-2 < x \leq 1$



কাজ: রেখাচিত্রের সাহায্যে $-1 < 5 - 2x \leq 9$ অসমতার সমাধান কর।

উদাহরণ-3. রেখাচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 4x + 3 < 0$ অসমতাটির সমাধান কর।



সমাধান: $x^2 - 4x + 3 < 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 1) < 0$

চিত্র হতে পাই,

$x^2 - 4x + 3 > 0$ যখন $x \in (-\infty, 1)$ অথবা $(3, \infty)$

$x^2 - 4x + 3 < 0$ যখন $x \in (1, 3)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $1 < x < 3$

দ্রষ্টব্য: সমাধানের শুদ্ধতার জন্য পাঠ্যবইয়ে ছক কাগজ ব্যবহার করা হয়েছে, তবে শিক্ষার্থীরা ছক কাগজ ব্যবহার না করেও মুক্ত হস্তে সংখ্যারেখা অঙ্কন করে সমাধান করতে পারবে।

কাজ: সংখ্যারেখা/রেখাচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় কর।

(i) $x^2 - 5x > 6$ **(ii)** $\dfrac{x}{x-2} \leq 2$

1.9 দুই চলকের যোগাশ্রয়ী অসমতা (Linear inequalities of two variables)

আমরা জানি, সরলরেখার প্রমিত (standard) সমীকরণ $ax + by + c = 0$ যেখানে x এবং y হলো চলক এবং a, b, c ধ্রুবক। $ax + by + c = 0$ অঙ্কন করলে একটি সরলরেখার লেখচিত্র পাওয়া যাবে। x এর মানকে ভুজ এবং y এর মানকে কোটি বলা হয়। $ax + by + c = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে ক্রমজোড়ের (x, y) এর প্রত্যেকটি মানের জন্য $ax + by + c$ এর মান শূন্য হবে। অর্থাৎ ক্রমজোড়ের প্রত্যেকটি বিন্দুই $ax + by + c = 0$ দ্বারা লেখ কাগজের উপর অঙ্কিত রেখার উপর অবস্থান করে।

ধরি, $f(x, y) = ax + by + c$, $f(x, y) = 0$ হলে ক্রমজোড়ের (x, y) এর প্রত্যেকটি মান $ax + by + c = 0$ দ্বারা অঙ্কিত লেখের উপর ও লেখচিত্রের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু দ্বারা $ax + by + c$ এর মান শূন্য অপেক্ষা ছোট অথবা বড় হয়। $f(x, y) = 0$ দ্বারা লেখচিত্র ছক কাগজকে দুইটি অর্ধতলে বিভক্ত করে। লেখচিত্রের বাইরে অর্ধতলের যে কোনো বিন্দুকে বহিঃস্থ বিন্দু বলে। যদি $f(x, y) \geq 0$ অথবা $f(x, y) \leq 0$ হয় তবে ক্রমজোড়ের (x, y) মানগুলি লেখচিত্রের উপরস্থ এবং বহিঃস্থ বিন্দু নির্দেশ করে।

1.10 দুই চলকবিশিষ্ট যোগাশ্রয়ী অসমতার লেখচিত্র
(Graph of linear inequalities of two variables)

উদাহরণ-4. $2x - y - 6 > 0$ অথবা $2x - y - 6 < 0$ অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

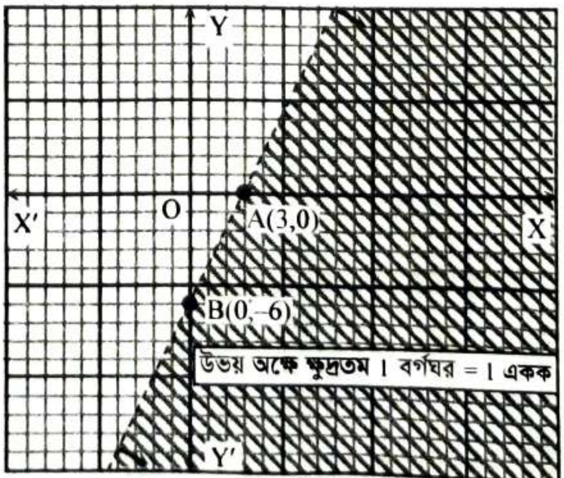
সমাধান: উপরোক্ত অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করতে $2x - y - 6 = 0$ একটি সরলরেখা কল্পনা করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

এখানে $2x - y - 6 = 0$

$\Rightarrow 2x - y = 6$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{6} - \dfrac{y}{6} = 1$

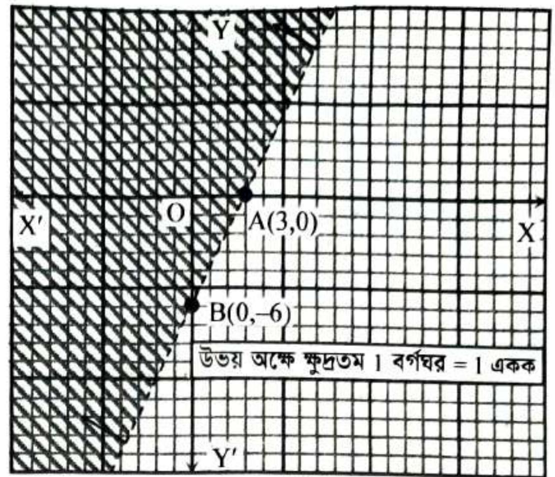
$\Rightarrow \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-6} = 1$ $\left[\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \text{ আকারে সমীকরণটির রূপান্তর}\right]$



লেখচিত্র-1

উক্ত রেখা দ্বারা x-অক্ষকে A(3, 0) এবং y-অক্ষকে B(0, –6) বিন্দুতে ছেদ করে। ছক কাগজের আনুভূমিক এবং উলম্ব রেখা বরাবর প্রতি ছোট এক বর্গাকার ঘর সমান 1 একক ধরে A(3, 0) এবং B(0, –6) বিন্দু বসিয়ে যোগ করলে $2x - y - 6 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। $2x - y - 6 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র নির্ণয় করতে মূলবিন্দু (0, 0) উক্ত অসমতায় বসালে পাই $-6 > 0$, যা সত্য নয়। সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র নির্দেশিত $2x - y - 6 = 0$ সমীকরণ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের আবদ্ধ অঞ্চল। যা লেখচিত্র-1 এ দেখানো হয়েছে।

আবার $2x - y - 6 < 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র নির্ণয় করতে মূলবিন্দু (0, 0) উক্ত অসমতায় বসালে পাই $-6 < 0$, যা সত্য। অতএব $2x - y - 6 < 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত ক্ষেত্র হবে রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু আছে সে পাশের এলাকা বা আবদ্ধ অঞ্চল। যা লেখচিত্র-2 এ দেখানো হয়েছে।



লেখচিত্র-2

কাজ: $3x - 2y - 6 > 0$ ও $3x - 2y - 6 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পাঠ-১০

উদাহরণমালা

উদাহরণ-5. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $\dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{x-3}{x-4}$

সমাধান: প্রদত্ত অসমতা $\dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{x-3}{x-4} \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x-3}{x-4} > 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-4) - (x-3)(x+1)}{(x+1)(x-4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 + 2x - 4x - 8) - (x^2 - 3x + x - 3)}{(x+1)(x-4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8 - x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{-5}{(x+1)(x-4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{(x+1)(x-4)} < 0 \qquad \text{.... ... (i)}$$

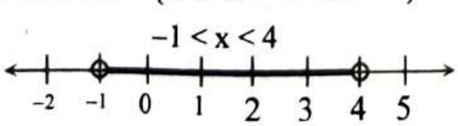
$x = -1$ ও 4 সংখ্যাদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x < -1$, $-1 < x < 4$ ও $x > 4$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

শর্ত	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-4)$ এর চিহ্ন	$(x+1)(x-4)$ এর চিহ্ন
$x < -1$	–	–	+
$-1 < x < 4$	+	–	–
$x > 4$	+	+	+

(i) নং শর্ত সত্য হবে যদি $-1 < x < 4$ হয়।

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 4\}$

সংখ্যারেখায়:



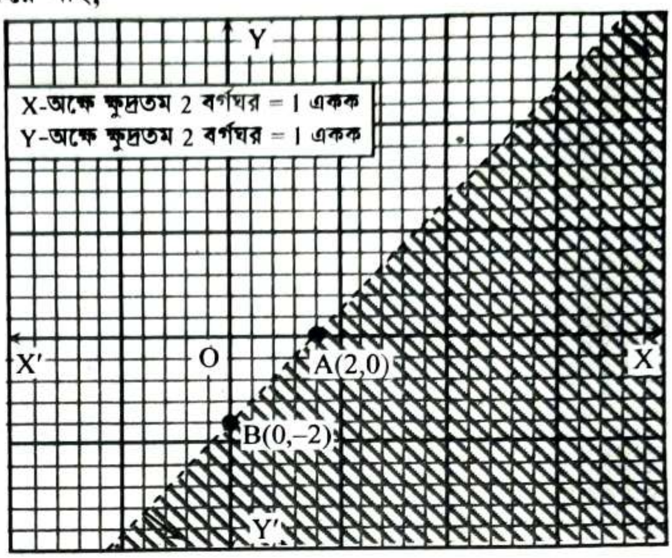
কাজ: $2(x - 5) > 8$ অসমতার সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

উদাহরণ-6. $x > y + 2$ অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: প্রদত্ত অসমতা $x > y + 2 \quad \Rightarrow x - y > 2 \qquad \ldots\ldots (i)$

(i) নং কে $x - y = 2$ একটি সরলরেখার সমীকরণ কল্পনা করে পাই,

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$$



উক্ত রেখাটি x-অক্ষকে A(2, 0) এবং y-অক্ষকে B(0, –2) বিন্দুতে ছেদ করে। ছক কাগজের XOX′ কে আনুভূমিক রেখা এবং YOY′ কে উলম্ব রেখা ধরে x এবং y অক্ষ বরাবর প্রতি ছোট 2 বর্গাকার ঘর সমান 1 একক ধরে A(2, 0) এবং B(0, –2) বিন্দু স্থাপন করে যোগ করলে $x - y = 2$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। (0, 0) বিন্দুর জন্য $x > y + 2$ সত্য নয়।

অতএব $x > y + 2$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল হবে $x - y + 2 = 0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল। চিত্রে চিহ্নিত অংশটুকুই হলো $x > y + 2$ অসমতা দ্বারা সমাধান সেটের লেখচিত্র।

উদাহরণ-7. $f(x) = x + 2y - 4$ এবং $g(x) = 2x - y - 3$

ক. $12 \geq 3 - 3x$ অসমতার সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও।

খ. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ এবং $x = y$ হলে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $f(x) > 0$ এবং $g(x) > 0$ অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: ক. প্রদত্ত অসমতা $12 \geq 3 - 3x$

$\Rightarrow 3 - 3x \leq 12$

$\Rightarrow 3 - 3x - 3 \leq 12 - 3$ [উভয়পক্ষে (–3) যোগ করে]

$\Rightarrow -3x \leq 9$

$\Rightarrow 3x \geq -9$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{-9}{3}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x \geq -3$

সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\}$

সংখ্যারেখায়:

খ. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Rightarrow \frac{x + 2y - 4}{2x - y - 3} > 0$

$\Rightarrow \frac{x + 2x - 4}{2x - x - 3} > 0$ [∵ যেহেতু $x = y$]

$\therefore \frac{3x - 4}{x - 3} > 0 \ldots\ldots (i)$

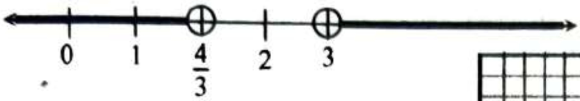
(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি $(3x - 4)$ এবং $(x - 3)$ এই দুইটির মধ্যে দুইটিই ধনাত্মক বা দুইটিই ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(3x - 4)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)$ এর চিহ্ন	$\frac{(3x-4)}{(x-3)}$ এর চিহ্ন
$x < \frac{4}{3}$	–	–	+
$\frac{4}{3} < x < 3$	+	–	–
$x > 3$	+	+	+

(i) নং সত্য হবে যদি $x < \frac{4}{3}$ অথবা $x > 3$ হয়

নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{4}{3}$ অথবা $x > 3\}$

সংখ্যারেখায়:



গ. প্রদত্ত অসমতাদ্বয় $x + 2y - 4 > 0$ ... ... (i)

এবং $2x - y - 3 > 0$ ... ... (ii)

(i) নং হতে পাই, $x + 2y - 4 = 0$

$$\Rightarrow x + 2y = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{2y}{4} = 1$$

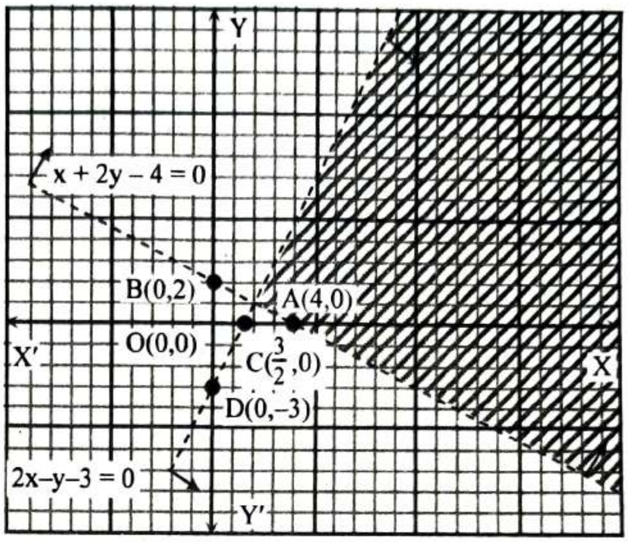
$$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ আকারে}\right]$$

(ii) নং হতে পাই, $2x - y - 3 = 0$

$$\Rightarrow 2x - y = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-3} = 1 \quad \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ আকারে}\right]$$



$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ এবং $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-3} = 1$ রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক রেখা বরাবর XOX' কে x-অক্ষ এবং উলম্ব রেখা বরাবর YOY' কে y-অক্ষ ধরে ছক কাগজের প্রতি ছোট বর্গাকার ঘর সমান 1 একক ধরে $A(4, 0)$ এবং $B(0, 2)$ বিন্দু স্থাপন করে যোগ করলে $x + 2y - 4 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। আবার $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ এবং $D(0, -3)$ বিন্দু স্থাপন করে যোগ করলে $2x - y - 3 = 0$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। $(0, 0)$ বিন্দু $x + 2y - 4 > 0$ অসমতায় বসিয়ে পাই, $-4 > 0$ যা সত্য নয়।

$\therefore$ $x + 2y - 4 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল হবে $x + 2y - 4 = 0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।

আবার, $(0, 0)$ বিন্দু $2x - y - 3 > 0$ অসমতায় বসিয়ে পাই, $-3 > 0$ যা সত্য নয়।

$\therefore$ $2x - y - 3 > 0$ অসমতা দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $2x - y - 3 = 0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের অঞ্চল। অতএব, এই অসমতা দুইটির সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই হবে অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

উদাহরণ-8. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ এবং $g(x) = x - 1$

ক. পরম মান চিহ্ন ছাড়া প্রকাশ কর: $2 \leq \frac{1}{|x - 1|}$ যখন $x \neq 1$

খ. $f(x) > 0$ অসমতাটি সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. যদি $|g(x)| < \frac{1}{11}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $|x^2 - 1| < \frac{23}{121}$.

সমাধান:

ক. $2 \leq \frac{1}{|x - 1|}, x \neq 1$

বা, $|x - 1| \leq \frac{1}{2}, x \neq 1$

বা, $-\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}, x \neq 1$

বা, $-\frac{1}{2} + 1 < x < \frac{1}{2} + 1$ [1 যোগ করে], $x \neq 1$

$\therefore \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, x \neq 1$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 4x + 3$

এবং $f(x) > 0$

বা, $x^2 - 4x + 3 > 0$

বা, $x^2 - 3x - x + 3 > 0$

বা, $x(x - 3) - 1(x - 3) > 0$

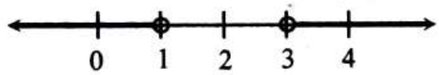
$\therefore (x - 1)(x - 3) > 0$ ... ... (i)

(i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x - 1)$ এবং $(x - 3)$ এর দুইটিই ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়।

শর্ত	$(x - 1)$ এর চিহ্ন	$(x - 3)$ এর চিহ্ন	$(x - 1)(x - 3)$ এর চিহ্ন
$x < 1$	$-$	$-$	$+$
$1 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < 1$ অথবা $x > 3$

সমাধান সেট $\{x \in \mathbb{R} : x < 1$ অথবা $x > 3\}$

সংখ্যারেখা: 

গ. $|g(x)| < \frac{1}{11}$

বা, $|x - 1| < \frac{1}{11}$

বা, $-\frac{1}{11} < x - 1 < \frac{1}{11}$

বা, $-\frac{1}{11} + 1 < x < \frac{1}{11} + 1$ [1 যোগ করে]

বা, $\frac{10}{11} < x < \frac{12}{11}$

বা, $\frac{100}{121} < x^2 < \frac{144}{121}$

বা, $\frac{100}{121} - 1 < x^2 - 1 < \frac{144}{121} - 1$ [(– 1) যোগ করে]

বা, $-\frac{21}{121} < x^2 - 1 < \frac{23}{121}$

বা, $-\frac{23}{121} < x^2 - 1 < \frac{23}{121}$ $\left[\because -\frac{23}{121} < -\frac{21}{121}\right]$

$\therefore |x^2 - 1| < \frac{23}{121}$

কাজ: $2x + y - 8 > 0$ ও $3x - 2y + 12 > 0$ অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পাঠ-১১ ও ১২

অনুশীলনী-1(B)

Type-I

1. **নিচের অসমতাগুলি সমাধান কর এবং সংখ্যারেখার সাহায্যে দেখাও:**

(i) $(x-2)<2$ **(ii)** $7+6x-x^2<0$ **(iii)** $x^2-9x+8>0$ **(iv)** $2x^2-3x+1\geq 0$

(v) $(2x+1)(x-1)(x-3)\leq 0$ [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল-১(খ)]

(vi) $\dfrac{2x+3}{x-3}<\dfrac{x+3}{x-1}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ)]

(vii) $\dfrac{x-2}{x}>\dfrac{x+1}{x+2}$ [সিলেট বোর্ড-২০১৯ এর সৃজনশীল-১(খ)]

Type-II

2. **সমাধান কর:**

(i) $(x+2)\left(x+\frac{3}{4}\right)\geq 0$ **(ii)** $\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{x-6}{x-3}>0$ **(iii)** $\dfrac{(2x-3)(x-1)^2}{x+1}<0$ **(iv)** $\dfrac{2x+1}{3x-1}<\dfrac{3x+1}{2x-1}$

Type-III

3. **সংখ্যারেখা/রেখাচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:**

(i) $x^2\leq 4x$ **(ii)** $x^2-2x>1$ **(iii)** $x^2+4\leq 4x$ **(iv)** $x^2+1<0$

(v) $2x^2\leq 4-x$ **(vi)** $x^2\geq |x|$ **(vii)** $5x^2-6x-3\leq |8x|$ **(viii)** $2x-x^2\geq |x-1|-1$

4. যদি $f(x)=x^2-x$ হয়, তবে সংখ্যারেখার সাহায্যে $f(x)\leq 0$ এর সমাধান কর। [যশোর বোর্ড-২০১৭ এর সৃজনশীল-১(গ)]

Type-IV

5. **নিচের অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:**

(i) $3x-2y-12\leq 0$ **(ii)** $y-2x\leq 0$ **(iii)** $x-3y<0$

Type-V

6. **প্রত্যেক অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:**

(i) $5x+2y-11>0$ এবং $7x-2y-3>0$ **(ii)** $5x-3y>9$ এবং $3x-2y-5\geq 0$

(iii) $x-3y<6$ এবং $3x+y<-2$ **(iv)** $2x-3y\geq 1$ এবং $2x+3y\leq 7$

► বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $0.\dot{1}\dot{2}$ সংখ্যাটি কোন সেটের অন্তর্ভুক্ত?

ক. $\mathbb{Q}$ খ. $\mathbb{Z}$ গ. $\mathbb{N}$ ঘ. $\mathbb{Q}'$

2. $\dfrac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যায় $q=1$ হলে মূলদ সংখ্যাগুলোর প্রকৃতি কীরূপ?

ক. ভগ্নাংশ খ. পূর্ণ সংখ্যা গ. অসম্পূর্ণ সংখ্যা ঘ. দশমিক সংখ্যা

3. $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ও $\mathbb{Q}$ সেট গুলোর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $\mathbb{R}\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ খ. $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

গ. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ ঘ. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$

4. নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

ক. $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}_{>0}\neq\{\ \}$ খ. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}'$ গ. $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}_{>0}$ ঘ. $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

5. $A=\{x : x\in\mathbb{N}$ এবং $x=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ$\}$ হলে এবং বৃত্তের পরিধির সেট $\mathbb{Z}$ হলে, $\mathbb{Z}$ কোন সেটের উপসেট হবে?

ক. $\mathbb{N}$ খ. $\mathbb{R}^-$ গ. $\mathbb{Q}$ ঘ. $\mathbb{Q}'$

6. 2 ও 3 এর মাঝে কতটি অমূলদ সংখ্যা বিদ্যমান?

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. অসংখ্য

7. -3 ও 3 এর মাঝে স্বাভাবিক সংখ্যা কয়টি?

ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 6.

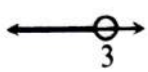
8. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$ সেটটির ইনফিমাম কোনটি?

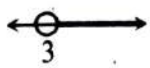
ক. 0 খ. 1 গ. 3 ঘ. 4

9. $|3x - 7| \leq 5$ এর সমাধান সেট কোনটি?

ক. $\frac{2}{3} < x < 4$ খ. $2 \leq x \leq 4$ গ. $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$ ঘ. $x \leq \frac{2}{3}$ অথবা $x \geq 4$

10. $\frac{x}{3} - 1 \leq 0$ অসমতার সমাধান সংখ্যারেখায় কোনটি?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

11. $\big||6 - 11| - 5 + |7 - 4|\big|$ এর মান কত?

ক. 2 খ. 3 গ. 5 ঘ. 6

12. $5x - 3 \leq 3x + 5$ এর সমাধান সেট কোনটি?

ক. $(4, \infty)$ খ. $[4, \infty]$ গ. $(-\infty, 4)$ ঘ. $(-\infty, 4]$

13. $e^{\ln 5}.e^{\ln 4}$ কী ধরনের সংখ্যা?

ক. মূলদ খ. অমূলদ গ. ভগ্নাংশ ঘ. ঋণাত্মক

14. নিচের কোনটি মূলদ সংখ্যা?

ক. e খ. π গ. $\ln e$ ঘ. $\sqrt{3}$

15. 4.275227522752 .... সংখ্যাটির ভগ্নাংশরূপ কোনটি?

ক. $\frac{42748}{99}$ খ. $\frac{42748}{999}$ গ. $\frac{42748}{9999}$ ঘ. $\frac{42748}{99999}$

16. $A = [0, 6)$ এর উর্ধ্বসীমার সেট কোনটি?

ক. $[6, \infty]$ খ. $[6, \infty)$ গ. $(-\infty, 0)$ ঘ. $(-\infty, 0]$

17. $3 < x < 7$ অসমতায় x এর মূলদ মান কোনটি?

ক. π খ. 4.693725 ... গ. $\sqrt{11}$ ঘ. 5.101010 ... ...

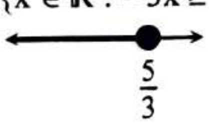
18. নিচের কোনটি অমূলদ সংখ্যা?

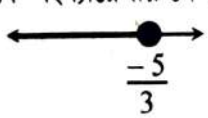
ক. 1.212121... খ. 2.313131.... গ. 3.454545..... ঘ. 5.100100010000...

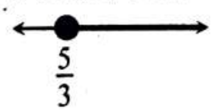
19. $|x - 3| < 7$ এর সমাধান সেট কোনটি?

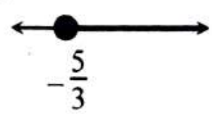
ক. $[-4, 10]$ খ. $(-4, 10]$ গ. $(-4, 10)$ ঘ. $[-4, 10)$

20. $S = \{x \in \mathbb{R} : -3x \geq 5\}$ কে সংখ্যারেখায় দেখানো হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. 

খ. 

গ. 

ঘ. 

21. $\big||-7 + 5| - |-6 + 3| + |11 - 7|\big|$ এর মান কত?

ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 5

22. $y > 0$ এবং $-4x + 3y < 0$ অসমতাগুলোর সমাধান সেট কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

ক. ১ম খ. ২য় গ. ৩য় ঘ. ৪র্থ

23. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ হলে বণ্টনবিধি প্রকাশ করে—

i. $a(b + c) = ab + ac$
ii. $a + (b + c) = (a + b) + c$
iii. $(b + c)a = ba + ca$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

24. $(x-2)(x-5) > 0$ অসমতাটি সত্য হবে যখন—
i. $x < 2$ ii. $2 < x < 5$ iii. $x > 5$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

25. সংযোজন যোগ্যতা প্রকাশ করে—
i. $(a + b) + c = a + (b + c)$
ii. $a(bc) = (ab)c$
iii. $ab = ba$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

26. বয়সের পরিমাপ—
i. স্বাভাবিক সংখ্যা ii. মূলদ সংখ্যা iii. অবাস্তব সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

27. সংখ্যার স্বীকার্য অনুযায়ী—
i. $\mathbb{R}$ ও $\mathbb{Q}$ যোজন ও গুণন স্বীকার্য মেনে চলে।
ii. $\mathbb{Q}_+$ ও $\mathbb{R}_+$ এর গুণাত্মক বিপরীত বিদ্যমান।
iii. $\mathbb{N}$ ও $\mathbb{Z}$ এর গুণাত্মক বিপরীত বিদ্যমান নেই।
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

28. $A = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x \geq -5\}$ সেটটির জন্যে—
i. সুপ্রিমাম— 5 ii. ইনফিমাম 0 iii. সেটটি উর্ধ্বসীমিত
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

29. $P = \{2, 4, 6, 8\}$ সেটটির ক্ষেত্রে—
i. একটি উর্ধ্বসীমা 10
ii. একটি নিম্নসীমা 8
iii. P এর ইনফিমাম 2
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

30. $a < b$ এবং $c > 0$ হলে—
i. $ac < bc$ ii. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ iii. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

31. $A = \{x : x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ ও $B = \{x : x = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ হলে—
i. A ও B এর সুপ্রিমাম নেই
ii. A ও B এর ইনফিমাম আছে
iii. A এর সুপ্রিমাম নেই, B এর সুপ্রিমাম আছে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

32. সংখ্যারেখায় চিহ্নিত করা যায়—
i. অঋণাত্মক সংখ্যা ii. মূলদ সংখ্যা iii. জটিল সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

33. গণনাকারী সংখ্যার সেট—

i. $\mathbb{Z}$ এর উপসেট ii. $\mathbb{N}$ এর উপসেট iii. $\mathbb{Z}_{>0}$ এর উপসেট

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

34. $S = \{x : x \in \mathbb{Z}$ এবং $8 \leq x^3 \leq 125\}$ সেটটির ক্ষেত্রে—

i. সুপ্রিমাম 5 ii. ইনফিমাম 3 iii. নিম্নসীমার সেট $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

35. $B = \left\{\frac{5n+2}{3n+1}; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{17}{10}, \ldots\ldots, \frac{8}{5}\right\}$ সেটটির ক্ষেত্রে—

i. সুপ্রিমাম $\frac{7}{4}$ ii. ইনফিমাম $\frac{8}{5}$ iii. সেটটি সীমিত

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

36. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে—

i. $|a|^2 > a^2$

ii. $|ab| = |a|\,|b|$

iii. $|a| \geq a$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

37. $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 21 < 0\}$ হলে—

i. $\text{Inf}\, S = 3$ ii. $\text{Sup}\, S = 7$ iii. $S = [3, 7]$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

38. $A = \{x : x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ হলে—

i. $\text{Sup}A = 1$ ii. A সেটটি সীমিত iii. A স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (39 ও 40) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\{S = x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 16x + 5 < 0\}$ একটি সেট।

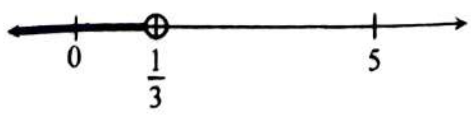
39. সেটটির সুপ্রিমাম কত?

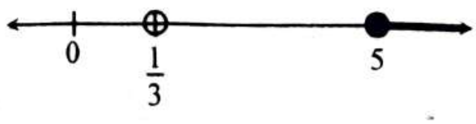
ক. $\frac{1}{3}$ খ. 3 গ. 4 ঘ. 5

40. সেটটির সমাধান সংখ্যারেখায় কোনটি?

ক.


খ.


গ.


ঘ.


নিচের তথ্যের আলোকে (41 ও 42) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$|2x + 5| > 6$

41. অসমতা থেকে প্রাপ্ত সেটের উর্ধ্বসীমা কোনটি?

ক. 1 খ. 2 গ. 6 ঘ. উর্ধ্বসীমা নেই

42. অসমতাটির ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

ক. $(2x + 5) > 6$ খ. $(2x + 5) < 6$ গ. $(2x + 5) \le 6$ ঘ. $(2x + 5) \ge 6$

নিচের তথ্যের আলোকে (43 ও 44) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$f(x) = |2x - 6|$ একটি পরমমান ফাংশন।

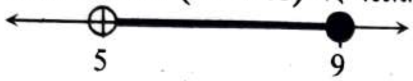
43. নিম্নোক্ত কোন শর্তে $f(x) > 2x$ হবে?

ক. $x < 3$ খ. $x > 1.5$ গ. $x < 1.5$ ঘ. $x > 3$

44. x এর কোন মানের জন্য $f(x) < x + 3$ হবে?

ক. $1 < x < 9$ খ. $1 \le x \le 9$ গ. $x > 1$ ঘ. $x < 9$

নিচের তথ্যের আলোকে (45 ও 46) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



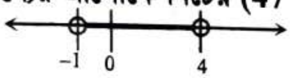
45. উপরের সংখ্যারেখার ব্যবধিতে প্রকাশ কোনটি?

ক. [5, 9] খ. (5, 9) গ. (5, 9] ঘ. [5, 9)

46. সংখ্যারেখাটি দ্বারা গঠিত সেটের উর্ধ্বসীমা কোনটি?

ক. 5 খ. 6 গ. 7 ঘ. 10

নিচের তথ্যের আলোকে নিচের (47 ও 48) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



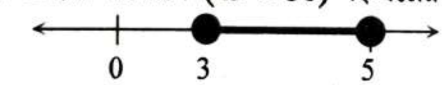
47. সংখ্যারেখার সমাধানটি পরমমানে প্রকাশ কোনটি?

ক. $|x - \frac{3}{2}| < \frac{5}{2}$ খ. $|x - 1| < 4$ গ. $|x + 4| < -1$ ঘ. $|x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2}$

48. সংখ্যারেখাটিতে অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমাধান কয়টি?

ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 5

নিচের তথ্যের আলোকে (49 ও 50) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



49. সংখ্যারেখাটি দ্বারা গঠিত সেটের সুপ্রিমাম কোনটি?

ক. 2 খ. 3 গ. 4 ঘ. 5

50. সমাধানটির মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যা কয়টি?

ক. 0 খ. 1 গ. 2 ঘ. 3

▶ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

51. $\frac{1}{|3x - 1|} > 1$ এর সমাধান নিচের কোনটি? [ঢা. বি. ১৯-২০]

ক. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$ খ. $x > \frac{1}{3}$

গ. $0 < x < \frac{2}{3}$ ঘ. $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

52. যেকোনো বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য কোনটি স্বতঃসিদ্ধ? [শা. বি. প্র. বি. ১৯-২০]

ক. $|a| \ge a$ খ. $|a| \le 0$ গ. $|a| > 1$ ঘ. $|a| \le a$

53. $|5 - 2x| \le 4$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? [নো. বি. প্র. বি. ১৯-২০]

ক. $-1 \le x \le 9$ খ. $\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$ গ. $x \le \frac{1}{2}$ অথবা $x \ge \frac{9}{2}$ ঘ. $\frac{1}{2} \le x \le \frac{9}{2}$

54. অসমতা $|5-2x| \geq 4$ এর সমাধান সেট— [ঢা. বি. ১৭-১৮]
ক. $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$ খ. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$ গ. $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ ঘ. $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right] \cup \left[\frac{27}{2}, \infty\right)$

55. $\frac{x+4}{x+3} > \frac{x-6}{x-7}$ অসমতাটির সমাধান হলো— [কুয়েট ১৭-১৮]
ক. $-4 < x < 6$ খ. $-4 \leq x < 6$ গ. $x < -4$ এবং $x > 7$ ঘ. $-3 < x < 7$

56. $|3x-1| < 2$ এর সমাধান কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]
ক. $\left(-\infty ; \frac{1}{3}\right)$ খ. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ গ. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ ঘ. $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

57. $\left|2x-\frac{1}{3}\right| < 2$ হলে, এর সমাধান কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]
ক. $\left(-\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)$ খ. $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, \infty\right)$
গ. $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$ ঘ. $\left(\frac{5}{6}, \infty\right)$

58. $|2x-5| < 3$ অসমতাটির (inequality) সমাধান কোনটি? [জ. বি. ১৭-১৮]
ক. $3 < x < 5$ খ. $1 < x < 4$ গ. $1 < x < 2$ ঘ. $2 > x > 1$

59. $-3 < x < 9$ হলে, নিচের কোনটি সত্য? [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. $|x-9| < 12$ খ. $|x+3| < 6$ গ. $|x-3| < 6$ ঘ. $|x+9| < 12$

60. x এর কোন মানের জন্য $(x^2-1)(x-2) > 0$? [রা. বি. ১৭-১৮]
ক. $s = \{x : x < -1, 1 < x < 2\}$ খ. $s = (x : -1 < x < 1, x > 2\}$
গ. $s = \{x : -1 < x < 2\}$ ঘ. $s = \{x : x < 1, x > 2\}$

61. x একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে এবং $A = \{x : 0 < x \leq 10\}$, $B = \{x : 3x + 1 \leq 20\}$ এবং $C = \{x : x^2 > 31\}$ হলে, $A \cap B \cap C$ হচ্ছে— [চ. বি. ১৭-১৮]
ক. $\{7\}$ খ. ϕ গ. $\{6\}$ ঘ. 0

62. $\log_5 (2-x) = 2$ হলে, x এর মান কত? [শা. বি. প্র. বি. ১৭-১৮]
ক. –23 খ. 23 গ. 25 ঘ. 27

63. 30 এবং 80 এর মধ্যবর্তী বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মৌলিক সংখ্যার ব্যবধান কত? [পা. প্র. বি. ১৭-১৮]
ক. 42 খ. 48 গ. 40 ঘ. 36

64. $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ হলে, S এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা কোনটি? [জা. বি. ১৭-১৮]
ক. 1 খ. 0 গ. –1 ঘ. $\frac{1}{2}$

65. $|x^2+1| < 10$ এর সমাধান— [ঢা. বি. ১৬-১৭]
ক. $-3 < x < 3$ খ. $-3 \leq x < 3$ গ. $-3 < x \leq 3$ ঘ. $-3 \leq x \leq 3$

66. $\left|5-\frac{2}{3x}\right| < 1$ অসমতাটির সমাধান সেট— [ঢা. বি. ১৫-১৬]
ক. $3 < x < 4$ খ. $\frac{1}{9} > x > \frac{1}{10}$ গ. $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{6}$ ঘ. $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

67. অসমতা $(x-1)(x-3) \geq 0$ এর সমাধান সেট হয়: [ঢা. বি. ১৬-১৭]
ক. $(-\infty, 1)$ খ. $(3, +\infty)$ গ. $(-\infty, 1] \cup (3, \infty)$ ঘ. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

68. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$ এর সরল মান $\frac{43}{60}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে অসমতার রূপ কি? [খু. বি. ১৬-১৭]
ক. $\frac{6x}{5} > \frac{43}{60}$ খ. $\frac{5x}{6} > \frac{43}{60}$ গ. $\frac{x}{6} > \frac{43}{60}$ ঘ. $5x > \frac{43}{60}$

69. বাস্তব সংখ্যায় $|3-2x| \leq 1$ অসমতাটির সমাধান– [ঢা. বি. ১০-১১]
ক. $1 < x < 2$ খ. $1 \leq x \leq 2$ গ. $x \leq 1$ অথবা $x \geq 2$ ঘ. $1 < x \leq 2$

70. $|7-3x| \le 5$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? [ঢা. বি. ০৬-০৭]

ক. $-\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$ খ. $\frac{2}{3} \le x \le 4$ গ. $x \le -\frac{5}{3}$ ঘ. $x \le -\frac{7}{3}$ অথবা $x \le -\frac{5}{3}$

71. $\frac{1}{|2x-3|} > 5$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? [ঢা. বি. ০৮-০৯]

ক. $\left(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}\right)$ খ. $\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right)$ গ. $\left(\frac{7}{5}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right)$ ঘ. $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$

72. $5x - x^2 - 6 > 0$ হলে কোনটি সঠিক? [ঢা. বি. ০৮-০৯]

ক. $x < 2$ খ. $2 > x > 3$ গ. $2 < x < 3$ ঘ. $x > 3$ অথবা $x < 2$

73. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|3x+1|} \ge 5$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? [ঢা. বি. ১৩-১৪]

ক. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}\right)$ খ. $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

গ. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{15}\right)$ ঘ. $\left[-\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{15}\right]$

74. $|5-2x| \le 4$ অসমতাটির সমাধান কোনটি? [ঢা. বি. ১০-১১]

ক. $-1 \le x \le 9$ খ. $\frac{1}{2} \le x \le \frac{9}{2}$ গ. $x \le \frac{1}{2}$ অথবা $x \ge \frac{9}{2}$ ঘ. $\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$

75. $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a > b$ হলে c এর কোন মানের জন্য $ac > bc$ হবে? [বুটেক্স ১২-১৩]

ক. $c = b$ খ. $c > 0$ গ. $c < 0$ ঘ. $c = a$

76. $\sqrt{\frac{9}{4}}$ সংখ্যাটি— [বুটেক্স ১২-১৩]

ক. স্বাভাবিক সংখ্যা খ. মূলদ সংখ্যা গ. অমূলদ সংখ্যা ঘ. জটিল সংখ্যা

▶ সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $P = |x-2|$, $f(x) = x$ এবং $g(x) = 3x + 2$

ক. $g\left(\frac{-8}{3}\right) \le \frac{g(2x) - f(x)}{2} \le f(0)$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $P < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 4| < \frac{21}{25}$

গ. সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও: $f(x)\, g(x) \le 1$

2. (i) $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{x+1}$ (ii) $f(x) = x - 1$

ক. $4 < f(x+1) < 10$ অসমতাকে পরমমান চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কর।

খ. (i) নং সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $|f(x)| < \frac{1}{f(11)}$ হলে দেখাও যে, $|f(x+2).f(x)| < \frac{21}{100}$

3. $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x + 3$ দুইটি ফাংশন।

ক. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে প্রমাণ কর, $||f(a-3)| - |f(b-3)|| \le |f(a-b-3)|$.

খ. $|f(a) - 8| < \frac{1}{2}$ হলে দেখাও যে, $|8a^3 + 29| < 1360$.

গ. $|g(x)| < |f(x-4)|$ অসমতাটিকে সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

4. $f(x) = \frac{1}{1-4x}$ এবং $g(x) = x - 1$

ক. $g(-5) \le g(x+1) \le g(0)$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $\frac{1}{|f(x)|} \ge 3$, $x \ne \frac{1}{4}$ এর সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$ এর সমাধান কর।

5. $T = \{x \in \mathbb{R} : 7 + 6x - x^2 < 0\}$ এবং $S = \{x \in \mathbb{R} : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$

ক. $|x| > x$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর।

খ. T এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর।

গ. S এর সমাধান সেটের অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

6. $A = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ও $B = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ দুইটি সেট এবং $f(x) = x - 1$ একটি ফাংশন।

ক. $a, b \in \mathbb{R}$ হলে প্রমাণ কর $|a + b| \le |a| + |b|$.

খ. $A \cup B$ এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর।

গ. $|f(x)| < \frac{1}{2}$ এবং $|x^3 - 1| < p$ হলে p এর মান কত হবে?

7. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ এবং $g(x) = x - \frac{1}{3}$

ক. $||2 - 6| - 10 + |7 - 3||$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $x\, f(x) > 0$ এর সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $\frac{1}{|g(x)|} \ge 3,\ x \ne \frac{1}{3}$ অসমতাকে পরমমান চিহ্ন ব্যতিরেকে প্রকাশ কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও।

8. $f(x) = x$ একটি ফাংশন, যেখানে $x \in \mathbb{R}$

ক. যদি $a < b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c < b + c$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

খ. উদ্দীপকের আলোকে $a, b \in \mathbb{R}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|f(a) + f(b)| \le |a| + |b|$

গ. $|f(2x) - 1| < \frac{1}{9}$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $|4f(x^2) - 1| < \frac{19}{81}$

9. $f(x) = 3x - 4,\ g(x) = 5x + 6$

ক. $|-5 - 7| - |-2 + 9| + |-3|$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\frac{1}{|f(x)|} \ge 5$ অসমতাটির সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. $\frac{(x-1)f(x)}{g(x)} < 0$ অসমতাটির সমাধান নির্ণয় কর।

10. $f(x) = |x + 1|$ এবং $g(x) = |x - 1|$

ক. দেখাও যে, $f(x) + g(x) \ge |2x|$

খ. $f(x) + g(x) \le 3$ হলে সমাধান সেট নির্ণয় কর।

গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $f(x) \le g(x)$ এর সমাধান কর।

11. $f(x) = x\left(\frac{x-4}{x-5}\right)$ একটি ফাংশন এবং $B = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ একটি সেট।

ক. প্রমাণ কর যে, $|a - c| \le |a - b| + |b - c|$; যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$.

খ. $f(x) < 0$ সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. B সেটটির সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর।

12. $f(x) = 3x - 2,\ |x + y| < \frac{7}{3}$

ক. যদি $p, q, r \in \mathbb{R}$, $pq = rq$ এবং $q \ne 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $p = r$

খ. $\frac{1}{|f(x-2) + 3|} > 3$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. দেখাও যে, $|f(2x) + f(2y)| < 10$

13. $P = x + y - 3,\ Q = 2x - y - 5$

ক. পরমমান চিহ্ন ব্যতিত প্রকাশ কর: $|x - 2| < 5$.

খ. $y = -x$ হলে $\frac{1}{|Q|} > 2$ এর সমাধান নির্ণয় করে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন কর। যখন $x \ne \frac{5}{3}$.

গ. $P > 0$ এবং $Q > 0$ অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

14. $f(x) = 2x + 3$ এবং $g(x) = \sqrt{x}$

ক. x এর মান কত হলে $f = g^2$ হবে?

খ. $|f(x)| < 7$ সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. প্রমাণ কর যে, $g(3)$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

15. $P(x) = x - 4$ ও $Q(y) = y - 3$ দুইটি ফাংশন।

ক. $a \in \mathbb{R}$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{a^2} = |a|$.

খ. $\dfrac{P(x)}{x+2} + \dfrac{x+6}{Q(x)} > 0$ অসমতাটির সমাধান কর।

গ. $\dfrac{Q(x) - P(x)}{|3P(x) - Q(x)|} \leq \dfrac{P(7)}{Q(5)}$ অসমতাটির সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

16. $x = a + 5, a \in \mathbb{R}$

ক. $p, q \in \mathbb{R}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $|pq| = |p|\,|q|$

খ. $|a| < \dfrac{1}{13}$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 25| < \dfrac{131}{169}$

গ. $\dfrac{a+5}{a^2 + 10a + 26} < \dfrac{1}{a+6}$ হলে উদ্দীপকের আলোকে x এর মান নির্ণয় করে সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

17. উদ্দীপক-১: $\dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{x-3}{x-4}$; উদ্দীপক-২: $x, y \in \mathbb{Q}$ এবং $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$

ক. $|x + 2| < 2$ এবং $x \in \mathbb{Z}$ এর সমাধান কর।

খ. উদ্দীপক-১ এর অসমতাটি সমাধান কর ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ. উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, $x = y = 0$

18.

ক. $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a + b = a + c$ হলে প্রমাণ কর যে, $b = c$

খ. অর্ন্তবৃত্ত অপেক্ষা বড় এবং বর্হিবৃত্ত অপেক্ষা ছোট বৃত্তগুলোর ব্যাসার্ধকে পরমমান সংবলিত অসমতার সাহায্যে প্রকাশ কর।

গ. মধ্যবর্তী বৃত্তগুলোর ক্ষেত্রফল A হলে প্রমাণ কর যে, $|A^2 - 36\pi^2| < 28\pi^2$

19. $f(x) = x(x + 1)$ এবং $g(x) = x - 2$ দুইটি ফাংশন।

ক. $|g(x)| < 5$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর।

খ. $f(x) > g(x)$ হলে অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $f(x) < g(x) + 2$ এর কোন বাস্তব সমাধান নাই।

▶ বিভিন্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসা সৃজনশীল প্রশ্ন

20. $f(x) = x - 1$ যেখানে $x \in \mathbb{R}$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৭]

ক. $-2 < 2 - f(x) < 8$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. $|f(x)| < \dfrac{1}{10}$ হলে, দেখাও যে, $|f(x).f(x+2)| < \dfrac{21}{100}$.

গ. $|3\,f(x) - 1| < 2$ অসমতাকে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

21. দৃশ্যকল্প-১: $L = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 5x < 0\}$; দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^2 - x$ [যশোর বোর্ড-২০১৭]

ক. সমাধান কর : $|2x - 7| > 5$

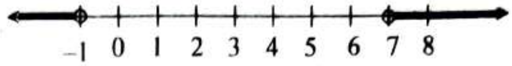
খ. L এর সমাধান সেটের অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

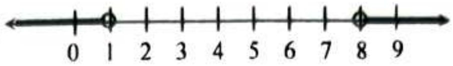
গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $f(x) \leq 0$ এর সমাধান কর।

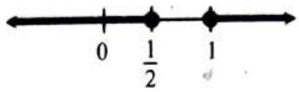
এ অধ্যায়ের আরও সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নের জন্যে পরিশিষ্ট অংশ দেখো

উত্তরমালা

1. (i) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$; 

(ii) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 7\}$; 

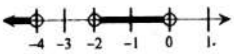
(iii) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1$ অথবা $x > 8\}$; 

(iv) $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}$ অথবা $x \geq 1\}$; 

(v) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{2}\right.$ অথবা, $\left. 1 \leq x \leq 3\right\}$; 

(vi) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$; 

(vii) $\{x : x \in \mathbb{R}, x < -4$ অথবা $-2 < x < 0\}$;

সংখ্যারেখা: 

2. (i) $x \leq -2$ অথবা $x \geq -\frac{3}{4}$; সকল $x \in \mathbb{R}$ (ii) $0 < x < 2$ অথবা $x > 3$; সকল $x \in \mathbb{R}$

(iii) $-1 < x < \frac{3}{2}, x \neq 1$; সকল $x \in \mathbb{R}$ (iv) $x < 0$ অথবা $0 < x < \frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{2}$; সকল $x \in \mathbb{R}$

3. (i) $0 \leq x \leq 4$ (ii) $x < 1 - \sqrt{2}$ অথবা $x > 1 + \sqrt{2}$ (iii) $x = 2$ (iv) $\{\ \}$ (v) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

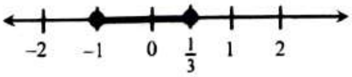
(vi) $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$ (vii) $-1 \leq x \leq 3$ (viii) $0 \leq x \leq 2$

4. $0 \leq x \leq 1$;

বহুনির্বাচনি

1. ক	2. খ	3. গ	4. ঘ	5. ঘ	6. ঘ	7. ক	8. গ	9. গ	10. গ	11. খ	12. ঘ	13. ক	14. গ
15. গ	16. খ	17. ঘ	18. ঘ	19. গ	20. খ	21. খ	22. ক	23. গ	24. খ	25. ক	26. ক	27. ঘ	28. গ
29. গ	30. গ	31. গ	32. ক	33. ঘ	34. গ	35. ঘ	36. খ	37. ক	38. ক	39. ঘ	40. খ	41. ঘ	42. ক
43. গ	44. ক	45. গ	46. ঘ	47. ক	48. গ	49. ঘ	50. ঘ	51. ঘ	52. ক	53. ঘ	54. খ	55. ঘ	56 গ
57. ক	58. খ	59. গ	60. খ	61. গ	62. ক	63. খ	64. ক	65. ক	66. গ	67. ঘ	68. খ	69. খ	70. খ
71. গ	72. গ	73. ঘ	74. খ	75. খ	76. খ								

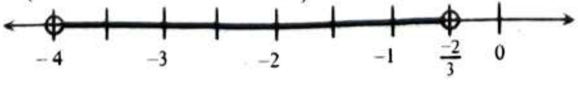
সৃজনশীল

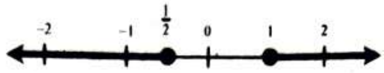
1. ক. $|5x + 8| \leq 6$ গ. $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$, 

2. ক. $|x - 7| < 3$

খ. $-1 < x < 1$; সংখ্যারেখা : 

3. গ. সমাধান সেট $= \left\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\frac{2}{3}\right\}$

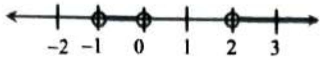
সংখ্যারেখায়: 

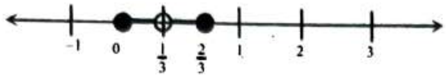
4. ক. $|2x+7| \le 5$ খ. $x \ge 1$ অথবা $x \le -\frac{1}{2}$, 

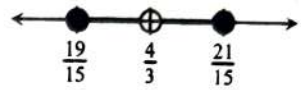
গ. $\frac{1}{4} < x < 1$

5. ক. $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ খ. সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নাই গ. $|5x-8| < 7$

6. খ. সুপ্রিমাম 1 এবং ইনফিমাম 0 গ. $p = \frac{19}{8}$

7. ক. 2 খ. $-1 < x < 0$ অথবা $x > 2$, 

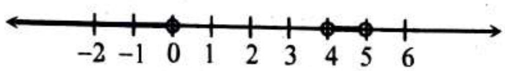
গ. $0 \le x \le \frac{2}{3}, x \ne \frac{1}{3}$, 

9. ক. 8 খ. সমাধান সেট, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{19}{15} \le x \le \frac{21}{15}; x \ne \frac{4}{3} \right\}$; সংখ্যারেখায়: 

গ. $x < \frac{-6}{5}$ অথবা $1 < x < \frac{4}{3}$

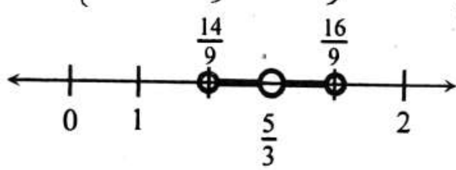
10. খ. $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}\}$ গ. $x \le 0$

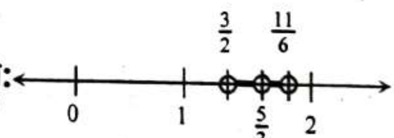
11. খ. $x < 0$ অথবা $4 < x < 5$

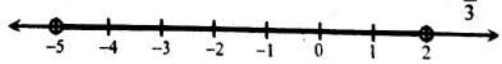
সংখ্যারেখায়: 

গ. সুপ্রিমাম $\frac{3}{2}$ এবং ইনফিমাম 0

12. খ. সমাধান সেট, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{14}{9} < x < \frac{16}{9} \text{ এবং } x \ne \frac{5}{3} \right\}$

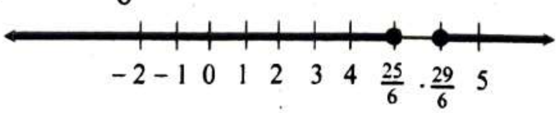
সংখ্যারেখায়: 

13. ক. $-3 < x < 7$ খ. সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \ne \frac{5}{3}$; সংখ্যারেখা: 

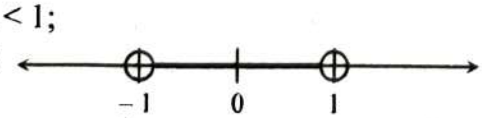
14. ক. -3 খ. সমাধান: $-5 < x < 2$, সংখ্যারেখা: 

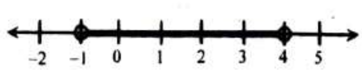
15. খ. $x < -2$ অথবা $x > 3$

গ. $x \le \frac{25}{6}$ অথবা $x \ge \frac{29}{6}$

সংখ্যারেখা : 

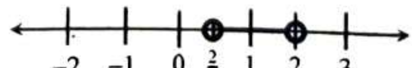
16. গ. $-1 < x < 1$;

সংখ্যারেখায়: 

17. ক. $-3, -2, -1$ খ. $-1 < x < 4$, 

18. খ. $|r - 1 - \sqrt{2}| < \sqrt{2} - 1$

19. ক. $\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 7\}$ খ. $\mathbb{R}$

20. ক. $|x| < 5$; গ. সমাধান: $\frac{2}{3} < x < 2$; সংখ্যারেখা: 

21. ক. $x > 6$ অথবা $x < 1$; খ. $\left| x + \frac{5}{4} \right| < \frac{5}{4}$; গ. $[0, 1]$