কনিক-২

কনিক

সাধারন আলোচনাঃ

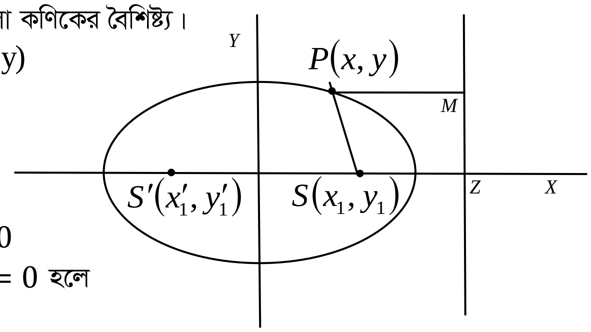
X ও Y সম্বলিত দ্বিঘাত রাশির সাধারণ সমীকরণ : $Ax^2 + By^2 + Hxy + Gx + Fy + C = 0$

সংজ্ঞা ঃ একটি চলমান বিন্দুর একটি তলে (xy) এমনভাবে চলে যেন কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হতে চলমান বিন্দুর দুরত্ব ও চলমান বিন্দু হতে একটি নিদির্ষ্ট রেখার দুরত্বের অনুপাত সবসময় ধ্রুব থাকে। এটা হলো কণিকের বৈশিষ্ট্য।

যেখানে, চলমান বিন্দু: P (x,y) ; নির্দিষ্ট বিন্দুঃ উপকেন্দ্র বা ফোকাস, S (x,y)

নির্দিষ্ট সরলরেখারঃ দিকাক্ষ বা নিয়ামক ঃ $ax + by + c = 0$

ধ্রুব সংখ্যাঃ উৎকেন্দ্রিকতা বা বিকেন্দ্রিকতা , e



কণিকের বৈশিষ্ট্য :

e = 0 হলে, সমীকরণটা বৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়, $A = B, H = 0$

e = 1 হলে, সমীকরণটা পরাবৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়, $H^2 - 4AB = 0$ হলে xy- সম্বলিত পদ পূর্ণ বর্গ সৃষ্টি করে ।

$0 < e < 1 =$ হলে, সমীকরণটা উপবৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়, $H^2 - 4AB < 0$

e > 1 হলে, সমীরকণটা অধিবৃত্তের সমীকরণের সমীকরণে পরিণত হয়, $H^2 - 4AB > 0$

$e = a\sqrt{2}$ হলে, সমীকরণটা আয়তকার অধিবৃত্তের (যেখানে $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$) সমীকরণে পরিণত হয়।

চলমান বিন্দু p (x,y) এর সঞ্চারপথ (locus)ঃ সংঙ্গানুযায়ী,

p (x,y) বিন্দু হতে ফোকাসের দূরত্ব= e × p (x,y) বিন্দু হতে দিকাক্ষ, ax + by + c = 0 এর দূরত্ব

$\therefore SP = ePM \Rightarrow \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = e \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ বর্গ করে পাই,

$(a^2 + b^2)\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\} = e^2 (ax + by + c)^2$

$\Rightarrow \{a^2 (l - e^2) + b^2\} x^2 + \{a^2 + b^2 (1 - e)^2\} y^2 - 2e^2abxy - 2x [(a^2 + b^2)x_1 + ace^2] - 2y [(a^2 + b^2)y_1 + bce^2] + (x_1^2 + y_1^2) (a^2 + b^2) - e^2c^2 = 0$

$Ax^2 + By^2 + Hxy + Gx + Fy + c = 0 \rightarrow$ যে কোন কণিকের সাধারণ সমীকরণ।

Note :

(i) তুমি অক্ষদ্বয় এবং মূলবিন্দুকে তোমার ইচ্ছামত পরিবর্তন করে সরল সমীকরণ প্রতিপাদন করতে পার।

(ii) অক্ষ পরিবর্তন করে বিপরীত তত্ত্ব দ্বারা উক্ত সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায় যা আমাদের পাঠ্যসুচির অন্তভূক্ত নয়। কিভাবে অক্ষকে পরিবর্তন করা যায় বা ঘুরানো যায় শিখবে। [উচ্চতর দক্ষতার জন্য]

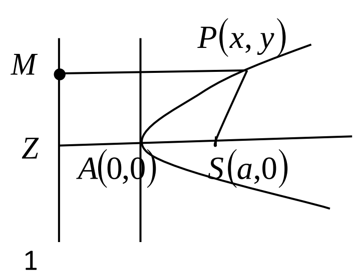
উদাহরণ : একটি কণিকের সমীকরণ প্রতিপাদন কর, যার ফোকাস বা উপকেন্দ্র (2,1) এবং যার নিয়ামকের সমীকরণ $3x - 4y + 1 = 0$ দেওয়া আছে, $e = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

সমাধান : $\sqrt{(x - 2)2 + (y + 1)2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3x - 4y + 1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}(\frac{3x-4y+1}{5})^2$

$\Rightarrow 41x^2 + 34y^2 + 24xy - 206x + 108y + 249 = 0 \rightarrow$ সমীকরণটি উপবৃত্তের সমীকরণ । কারণ $24^2 - 4 \times 41 \times 36 < 0$.

নিজে চেষ্টা কর : এর উপরে এমন একটি বিন্দু বের কর যার জন্য $e = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ হয়।

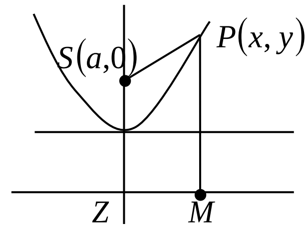
পরাবৃত্তঃ



প্রমিত সমীকরন ঃSP=PM =ZN=a+x

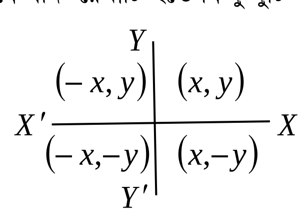
$\Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = a + x$

$\Rightarrow \; y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$
$\Rightarrow y^2 = 4ax$
অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম
অক্ষরেখা x- অক্ষের সমান্তরাল]
সুতরাং x- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

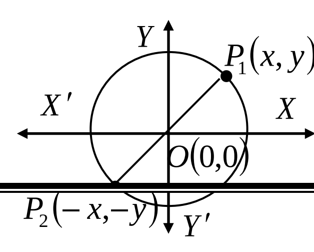


অক্ষরেখাকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করে ,
$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$
* $x^2 = 4ay \rightarrow$ y- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

অক্ষরেখাকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তর করে ,
$(x-\alpha)^2 = 4a(x-\beta)$
বিভিন্ন আকারের পরাবৃত্ত ঃ
আকার-০১ঃ $y^2 = -4ax$ যেখানে, $a > 0$, x'- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
আকার-০২ঃ $x^2 = -4ay$ যেখানে, $a > 0$, y'- অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
আকার-০৩ঃ $y = ax^2 + bx + c \rightarrow$অক্ষরেখা y- অক্ষের সমান্তরাল
$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} + \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{1}{a}\left[y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right]$
$\Rightarrow X^2 = 4a'Y$
আকার-০৪ ঃ $x = ay^2 + by + c \rightarrow$অক্ষরেখা x- অক্ষের সমান্তরাল
উদাহরণ-০১ ঃ $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0,5)$ বিন্দুগামী হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর।
$y = ax^2 + bx + c \rightarrow$ y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম [অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল]
$\therefore$ $x^2 = 4ay$, শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত তাহলে $(x+2)^2 = 4a(y-3)$ যা $(0,5)$ বিন্দুগামী
$\Rightarrow 4 = 4a\ (5-3) \therefore\ a = \frac{1}{2}$
$\therefore (x+2)^2 = 4 \times \frac{1}{2}(y-3) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 2y - 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ [প্রদত্ত সমীকরণের সাথে সহগ সমীকৃত করে]
$\therefore\ a = \frac{1}{2}, b = 2, c = 5$ Ans:
পরাবৃত্তের সমীকরণ সমীকরণ :
$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left(\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2$
বর্গ করে, $m^2x^2 - 2lmxy + ly^2 - 2x\{(l^2+m^2)x_1 - ln\}$
$-2y\{(1^2+m^2)\ y_1 + mn\} + (l^2+m^2)(x_1{}^2 + y_1{}^2) - n^2 = 0$
xy সম্বলিত পদসমূহ একটি পূর্ণ বর্গ $(mx - ly)^2$ সৃষ্টি করে । এটিই পরাবৃত্তের বৈশিষ্ট্য ।
$(Ax + By)^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0 \rightarrow$ পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ
প্রতিসমতা (Symmetricity) : (i) দুটো বিন্দু একটি সরল রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হবে যদি রেখাটি হতে বিন্দু দুটি সর্বদা একই দুরত্বে থাকে অর্থাৎ রেখাটি বিন্দু দ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বসমদ্বিখন্ডক হয়।

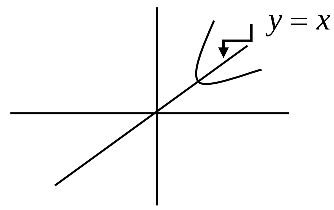


(x,y) ও $(x,-y)$ বিন্দু দুটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
$(-x,y)$ ও $(-x,-y)$ বিন্দু দুটি x– অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
(x,y) ও $(-x,y)$ বিন্দু দুটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
$(x,-y)$ ও $(-x,-y)$ বিন্দু দুটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম
ii) বিন্দুর সাপেক্ষেঃ দুটি বিন্দুর মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু দুটি প্রতিসম হয়।



যদি কোন বক্ররেখা মূল বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম
তবে বক্ররেখার উপরস্থ $P_1 (x,y)$ বিন্দু জন্য
অপর একটি বিন্দু $P_2 (-x, -y)$ পাওয়া যাবে।
যারা মূল বিন্দু হতে সমদুরবর্তী।

উদাহরন ঃ
প্যারাবোলা বা পরাবৃত্ত তার নিজ অক্ষের সাপেক্ষে অথবা সমান্তরাল অন্য অক্ষের সাপেক্ষে যেখানে মূলবিন্দু (α, β) প্রতিসম হতে পারে । চিত্রে পরাবৃত্তটি $y=x$ রেখার এর সাপেক্ষে প্রতিসম ।



* (x_1 ,y_1) বিন্দুর অবস্থান ঃ
$y_1^2 - 4ax < 0$ হলে পরাবৃত্তের ভিতরে
$= 0$ হলে পরাবৃত্তের উপরে
> 0 হলে পরাবৃত্তের বাইরে অবস্থিত হবে।
* পরাবৃত্তঃ ফোকাস (S) এবং দিকাক্ষ (L) হতে সমদুরবর্তী বিন্দুর সঞ্চার পথ।
* পরাবৃত্তের অক্ষ ঃ যা দিকক্ষের উপর লম্ব এবং ফোকাস বা উপকেন্দ্রগামী
* পরাবৃত্তের শীর্ষ ঃ উপকেন্দ্র (S) ও দিকাক্ষের মধ্যবিন্দু।

Note :
(i) দিকাক্ষ ও অক্ষের ছেদবিন্দু শীর্ষ বিন্দু এবং উপকেন্দ্রি একই সরলরেখায় অবস্থিত
(ii) দ্বিকোটি ফোকাস বা উপকেন্দ্রগামী = উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$.
(iii) যদি $x < 0$ হয় তবে $y^2 = 4ax$ এ y এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যায় না যা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত। কিন্তু x এর 0 ব্যতিত যে কোন মানের জন্য y এর দুটি মান পাওয়া যাবে । y অক্ষের ডানদিকে কার্ভটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে।
(iv) যখন $x = 0$, $y = 0$ কার্ভটি মুলবিন্দুগামী হয়। অর্থাৎ শীর্ষ বিন্দুগামী যেখানে কেবল একটি বিন্দু (0.0) পাওয়া যায় যা $x = 0$ রেখার সাথে বা শীর্ষে স্পর্শক y অক্ষের সাথে সমাপতিত হয়।
(v) ধরি, $k (a, l)$ প্রথম চতুর্ভাগে $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর উপকেন্দ্রিক লম্বের একটি প্রান্তবিন্দু।
তাহলে, $l^2 = 4a^2, l = \pm 2a.$,$\overleftrightarrow{SK} = 2a.$,$\overleftrightarrow{SK'} = -2a$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $4a = \frac{(\square\square\square\square\ \square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\square)^2}{\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\ \square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\square\square\square} = 4a.$
(vi) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণঃ $yy_1 = 4a(\frac{x+x_1}{2})$ অর্থাৎ $yy_1 = 2a (x + x_1)$
অভিলম্বের সমীকরণ: $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$
ঢাল এর সাহায্যেঃ $-\frac{y_1}{2a} = m$ হতে, $y_1 = -2am$, এবং $y_1^2 = 4ax$, হতে $x_1 = am^2$
$\therefore$ অভিলম্বের পাদবিন্দু , $(am^2 \ -2am)$
$\therefore$ অভিলম্বের আকার ঃ $y + 2am = m (x - am^2) \Rightarrow y = mx - 2am - am^2$

*(x,y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় ঃ
ধরি, $P (x_1, y_1)$ ও $Q (x_2 , y_2)$ $y = 4ax$ পরাবৃত্তের উপর দুটি বিন্দু ।
তাহলে, $y_1^2 = 4ax_1$ এবং $y_2^2 = 4ax_2$
$y_1^2 - y_2^2 = 4a (x_1 - x_2)$
$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = = \frac{4a}{y_1 + y_2} \rightarrow PQ$ রেখার ঢাল।
স্পর্শকের ক্ষেত্র ঃ $y_2 \rightarrow y_1$ ও $x_2 \rightarrow x_1$ হবে।

$\therefore$ স্পর্শেকের ঢাল = $\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_1 \to y_2}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_1 \to y_2}} = \frac{4a}{y_1 + y_2} = \frac{4a}{2y_1} = \frac{2a}{y_1}$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ : $y_1 - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 = 2a(x + x_1)$

স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাই অভিলম্বের $\therefore$ অভিলম্বের ঢাল = $\frac{y_1}{2a}(x - x_1) \Rightarrow 2ay - 2ay_1 = -xy_1 + x_1y_1$

$\Rightarrow 2ay + xy_1 = 2ay_1 + x_1y_1$

অথবা, স্পশর্কের ঢাল = $\frac{dy}{dx}$ [ক্যালকুলাস এর সাহায্যে]

$2y\frac{dy}{dx} = 4a \therefore \frac{dy}{dx} = {2a}/{y} \therefore (\frac{dy}{dx})_{(x_1, y_1)} = \frac{2a}{y_1}$

উদাহরণঃ $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত $(1, 2)$ বিন্দুগামী হলে $(5, 6)$ বিন্দুতে পরাবৃত্তে একটি স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $2^2 = 4a \times 1 \Rightarrow a = 1 \therefore$ পরাবৃত্তটি ঃ $y^2 = 4x$

স্পর্শকের ঢাল : $(\frac{dy}{dx})_{(5,6)} = ?$

$2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{(5,6)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ স্পশর্কের সমীকরণ ঃ $y - 6 = \frac{1}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y - 18 = x - 5 \Rightarrow x - 3y + 13 = 0$

অভিলম্বের সমীকরণ : $y - 6 = -3(x - 5) \Rightarrow 3x + y - 21 = 0$

* $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক বৃত্তয়ার শর্ত ঃ

$(mx + c)^2 = 4ax \Rightarrow m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0$

যা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ যার দুটি মূল x_1ও x_2 একই হলে স্পর্শবিন্দু পাওয়া যাবে । সেক্ষেত্রে নিশ্চয়কের মান শূন্য হবে।

$\therefore 4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{a}{m}$

স্পর্শ বিন্দুর ভুজ, $x = -\frac{mc - 2a}{m^2} = -\frac{m \times \frac{a}{m} - 2a}{m^2} = -\frac{a - 2a}{m^2} = \frac{a}{m^2}$

$y = m \times \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$. $\therefore$ স্পর্শ বিন্দু ঃ $(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m})$

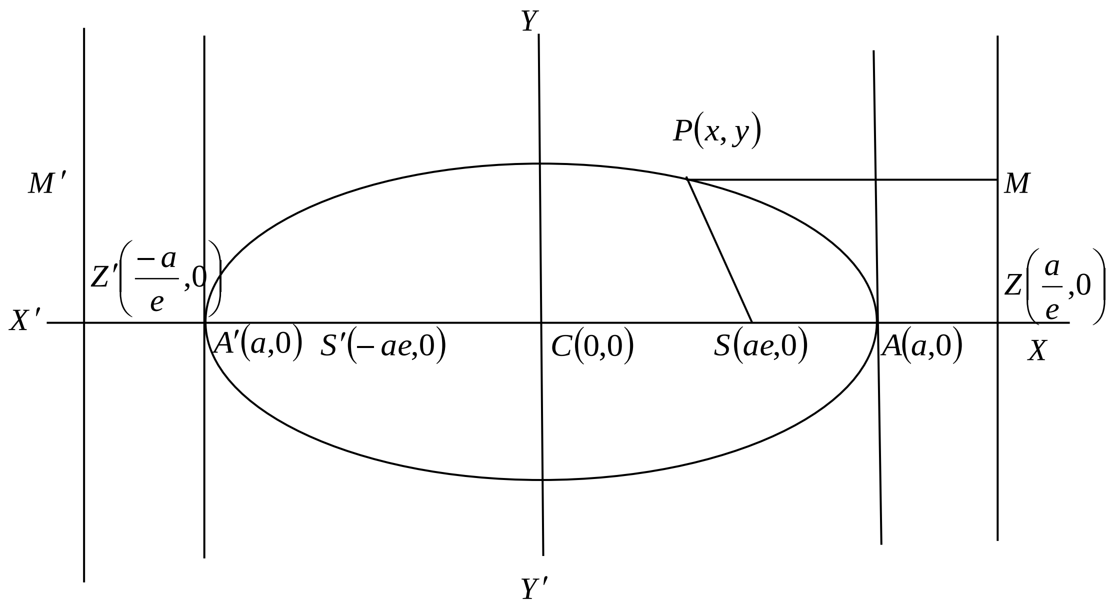
$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বাহুদ্বয় সমান হলে স্পর্শ কিছু পাওয়া যাবে যার ভূজ, $x = \frac{-b}{2a}$ কারণ $x_1 = x_2 = x$ এবং $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

আকার A (x,y)	শীর্ষ A (x,y)	ফোকাস বা উপকেন্দ্র S (x, y)	অক্ষের সমীকরণ ax + bx + c = 0	দিকাক্ষের সমীকরণ $a^1x + b^1y + c^1 = 0$	শীর্ষে স্পর্শক $a^1x + b^1y + c^1 = 0$	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য (L)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $a_1^1 x + b_1^1 y + c_1^1 = 0$	প্রতিসমতা
$y^2 = 4ax$	x = 0 , y = 0 A (0,0)	x = a, y = 0 S (a,0)	y = 0 (x-অক্ষ)	x = −a y -অক্ষের সমান্তরাল	x = 0 (y−অক্ষ)	$\|4a\|$	x = a [y অক্ষের সমান্তরাল]	x অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা x অক্ষ
$x^2 = 4ay$	x = 0 , y = 0 A (0,0)	y = a, x = 0 s(0,a)	x = 0 (y অক্ষ)	y = −a x -অক্ষের সমান্তরাল	y = o (x-অক্ষ)	$\|4a\|$	y = a [x অক্ষের সমান্তরাল]	y অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা y অক্ষ
$y^2 = -4ax$	x = 0 , y = 0 A (0,0)	x = −a, y = 0 s (−a,0)	y = 0 (x-অক্ষ)	x = −a y অক্ষের সমান্তরাল	x = 0 (y−অক্ষ)	$\|4a\|$	x =− a [y অক্ষের সমান্তরাল]	x− অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা

								x— অক্ষ
$x^2 = -4ax$	x = 0 , y = 0 A (0,0)	y = −a, x = 0 s(0,−a)	x = 0 (y-অক্ষ)	y = a [x -অক্ষের সমান্তরাল]	y = 0 (x—অক্ষ)	$\|4a\|$	y =− a [x অক্ষের সমান্তরাল]	y— অক্ষের প্রতিসম অক্ষরেখা y— অক্ষ

উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ ঃ [0 <e <1]

`



অক্ষরেখা উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ঃ বৃহৎ অক্ষ ঃ x — অক্ষ , ক্ষুদ্র অক্ষ ঃ y— অক্ষ

P(x, y) বিন্দু হতে S এর দুরত্ব $= e \times p$ (x,y) বিন্দু হতে অনুরূপ দিকাক্ষের দুরুত্ব।

$SP = e.PM \Rightarrow SP^2 = e^2 \times PM^2 \therefore (x - ae)^2 + y^2 = e^2 \times (x - a/e)^2$

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2\left[x^2 - \frac{2ax}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right] = x^2(1-e^2) + y^2 = a^2 - a^2e^2$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, এখানে, $b^2 = a^2 - a^2e^2 \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$

Note : (i) $y = 0$ হলে, $x = \pm a$

অর্থাৎ A (a, 0) ও A′ (−a, 0) উপবৃত্তের দুটি শীর্ষ ।

(ii) $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ উপবৃত্তে $x^2 > a^2$ হলে কোন বাস্তব মান পাওয়া যাবে না যা উপরোক্ত সমীকরনটিকে সিদ্ধ করে। [অর্থাৎ $x > a$ বা $x < -a$] $x = a$ এর ডান পাশে বা $x = -a$ এর বাম পাশে কোন বিন্দু পাওয়া যাবে না যা উপবৃত্তটিকে সিদ্ধ করে। [যখন বৃহৎ অক্ষ a কারণ $a < b$ হতে পারে না]

(iii) $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ উপবৃত্তে $y^2 > b^2$এর জন্য অর্থাৎ $y > b$ ও $y < -b$ এর জন্য x এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যাবে না যা $y = b$ এর উপরে বা $y = -b$ এর নীচে অবস্থিত এবং উপবৃত্তটিকে সিদ্ধ করে ।

(iv) যখন $x = +a$ বা $x = -a$, $y^2 = 0$ তখন $x = a$ ও $x = -a$ যথাক্রমে উক্ত উপবৃত্তে বৃহৎ অক্ষের প্রান্তবিন্দুতে দুটি স্পর্শক হবে।

(v) যখন $y = +b$ বা $y = -b$, $x^2 = 0$ তখন $y = b$ ও $y = -b$ যথাক্রমে উক্ত উপবৃত্তে ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্তবিন্দতে দুটি স্পর্শক হবে।

(vi) একটি বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব ঃ $\overleftrightarrow{SP} = e\overleftrightarrow{PM} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ae$

$\overleftrightarrow{S'P} = e\overleftrightarrow{PM'} = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ae$, $\overleftrightarrow{SP} + \overleftrightarrow{S'P} = 2a \rightarrow$ যা একটি ধ্রুব সংখ্যা ।

সিদ্ধান্ত :

(a) উপবৃত্তটি $x = \pm a$ ও $y = \pm b$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

(b) উপবৃত্তটির দ্বিতীয় আর একটি ফোকাস বা উপকেন্দ্র $S_1(-ae, o)$ এবং অনুরূপদিকাক্ষ L′ (x =-a/e) আছে।

$\left|E'C\right| = |CE| = \frac{a}{e}$,The equation of L′ is $x = -{}^{a}/_{e}$

উপবৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) এর পরির্বতে (α, β) হলে ,

$\frac{(x-\alpha)^2}{A^2} + \frac{(y-\beta)^2}{B^2} = 1$ (যেখানে, $A^2 > B^2$ হলে বৃহৎ অক্ষ x− অক্ষের সমান্তরাল।

$\frac{(x-\alpha)^2}{B^2} + \frac{(y-\beta)^2}{A^2} = 1$(যেখানে, $B^2 > A^2$ হলে বৃহৎ অক্ষ y − অক্ষের সমান্তরাল।

উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরন ঃ $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta^2)} = e\frac{(ax+by+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

যেখানে, উপকেন্দ্র S (α,β) ও অনুরূপ দিকাক্ষ ঃ $ax + by + c = 0$, উৎকেন্দ্রিকত = e $[0 < e < 1]$

পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। $e > 1$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ সাধারণ সমীকরণে পরিণত হবে।

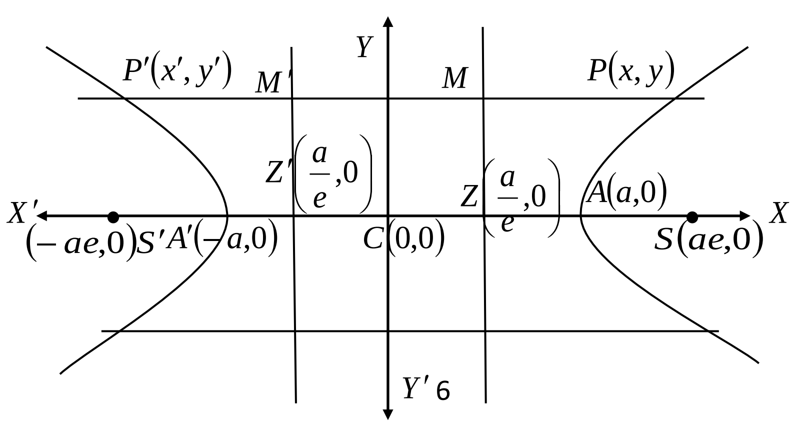
* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$. ঢাল, $m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

* $y = mx + c$ রেখা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্তঃ $c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$

স্পর্শ বিন্দু ঃ $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$ এবং $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$.

অধিবৃত্ত (Hyperbola) ঃ



সংজ্ঞানুযায়ী ঃ

$SP = e\,PM \therefore SP^2 = e^2 . PM^2$

$\therefore (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2 (x - {}^{a}/_{e})^2 = x^2 - 2xae + a^2e^2 + y^2 = x^2e^2 - 2xae + a^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

যেখানে, $b^2 = a^2 (e^2 - 1) \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$.

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য ,$2a = AA'$, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য ,$2b = BB'$

Note :

(i) $e^2 > 1$ এর জন্য $a^2 (e^2 - 1)$ রাশিটি ধনাত্মক $a^2 (e^2 - 1) = b^2$ [যা একটি ধনাত্মক সংখ্যা]

$e^2 >, =$ or < 2 এর জন্য , $b^2 >, =, < a^2$ হতে পারে।

(ii) $A : (a, 0)$ ও $A' : (-a, 0)$ দুটি শীর্ষ বিন্দুতে উক্ত পরাবৃত্ত ছেদ করেছে।

(iii) $x = 0$ বসিয়ে পাই, $y^2 = -b^2 \Rightarrow y = \sqrt{-b^2}$ যা কাল্পনিক সংখ্যা $b \in R$ হলে, y এর এমন কোন পাওয়া যাবে না যা অধিবৃত্তর উপস্থ কোন বিন্দু।

(iv) $-a < x < a$ এর মধ্যে y এর কোন মান পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ কার্ভের কোন অংশ A ও A′ এর মধ্যে থাকতে পারে না । অর্থাৎ $x > a$ or $x > -a$ এর মধ্যে y এর অসংখ্য মান পাওয়া যাবে যার জন্য কার্ভটি উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে।

$|\overline{E'C}| = |\overline{CE}| = {}^{a}/_{c}$; L_1 এর সমীকরণ : $x = -{}^{a}/_{e}$.

(v) P এর দ্বি-কোটি= উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $\frac{2b^2}{a}$

(viii) একটি বিন্দুর বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দুরত্ব ঃ $\overline{SP}, \overline{S'P}$

$\overline{SP} = e.\,\overline{PM} = e\,(x - {}^{a}/_{c}) = ax - a$

$\overline{S'P} = e.\,\overline{PM'} = e\,({}^{a}/_{c} + x) = a + ax.$

$\overline{SP}$ ও $\overline{SP}$ কে প্রায়ই উপকেন্দ্রিক ব্যাসার্ধ বলে [p এর]

$\overline{S'P} - \overline{SP} = 2a$ হতে প্রমাণ করা যায়, $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$ $c > a$, $c^2 - a^2 = b^2$ যা ধনাত্বক

$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, $e = {}^{c}/_{a}$.

(iii) অন্য আকার

(a) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ এখানে, আড় অক্ষঃ y অক্ষ

(b) সাধারণ সমীকরণ : $Ax^2 - By^2 = \pm 1$ (A, B > O) (+)ve sign হলে ফোকাস বা উপকেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত এবং এর অক্ষদ্বয় x ও y অক্ষ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু]

(c) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ যেখানে আড় অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ যেখানে আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল

Note : সবক্ষেত্রে আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a units.

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b units.

(d) $x^2 - y^2 = \pm a^2$ আকারে অধিবৃত্তকে সমবাহু বা আয়াতকার অধিবৃত্ত বলে।

যায় উৎকেন্দ্রিকতা সকল ক্ষেত্রে $\sqrt{2}$, অর্থাৎ, $e = a\sqrt{2}$।

* $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ঢাল, $m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

এবং উক্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

* mx + c রেখা $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত ঃ

c= $\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ স্পর্শ বিন্দু ঃ ($\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$, $\frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$) এবং ($\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2m^2+b}}$).

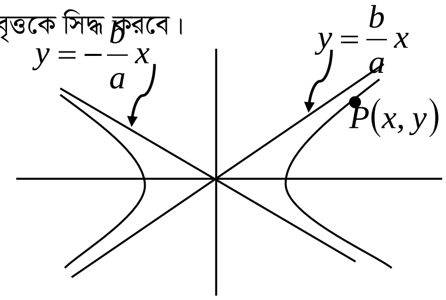
*অসীমতট (Asymptotes): অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ হতে আমরা লিখতে পারি,

$\Rightarrow$ (bx + ay) (bx − ay) = a^2b^2

bx − ay = 0 রেখা ও বক্ররেখাকে একই অক্ষে আকাঁলে দেখা যাবে কেন্দ্র থেকে দুরত্ব বৃদ্ধির সাথে সাথে অর্থাৎ x এর বৃদ্ধির সাথে সাথে অধিবৃত্তটি রেখাটির খুবই নিকটবর্তী হচ্ছে কিন্তু রেখাটিকে স্পর্শ করতে পারছে না।

ধরি, P(x_1, y_1) প্রথম অথবা তৃতীয় চতুর্থভাগে A অধিবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু রেখাটি হতে বিন্দুর দুরুত্ব,

d = $\left|\frac{bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ যেহেতু P অধিবৃত্তের উপরস্থ বিন্দু সুতরাং বিন্দুটি অবশ্যই অধিবৃত্তকে সিদ্ধ করবে।



$\therefore$ $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2 \Rightarrow bx_1 - ay_1 = \frac{a^2b^2}{bx_1+ay_1}$

$\therefore$ d = $\left|\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{1}{bx_1+ay_1}\right|$ স্পষ্টত d কখনও শূন্য হতে পারে না ;

যদি P বিন্দু কেন্দ্র হতে দুরে সরতে থাকে যাতে

x ও y উভয়ই অসীমভাবে বৃদ্ধি পায় তবে d শূন্যের খুবই নিকটবর্তী হবে।

অর্থাৎ এক্ষেত্রে , d $\rightarrow$ 0.

bx + ay = 0 রেখার জন্যও একই ফল পাওয়া যায় যখন p (x_1, y_1) বিন্দুটি দ্বিতীয় ও চুতর্থ চতুর্ভাগে অর্ধিবৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দু] সুতরাং y = $\pm\frac{b}{a}$x রেখা দুটি $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$অধিবৃত্তের দুটি অসীমতট।

অসীমতট হলো আয়তক্ষেত্রে কর্ণ বরাবর দুটি সরলরেখা

শর্ত ঃ আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র ও অধিবৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু এবং আয়তক্ষেত্র বাহুগুলো অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল এবং সমান।

Note: আয়তকার অধিবৃত্তের জন্য অসীমতট দুটি পরস্পর লম্ব।

*অসীমতট এর সমীকরণ দেয়া আছে। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

সূত্র ঃ (bx+ ay) (bx − ay) + k = 0 অধিবৃত্তটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, k নির্ণয় কর।

POINTS	ELLIPSE (উপবৃত্ত): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; a > b e <	HYPERBOLA(অধিবৃত্ত): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; (a > b)
1.কেন্দ্র : C	1. (0,0)	1. (0,0)
2. উপকেন্দ্র : S or S′	2. $(\pm ae, o)$ S: (ae,0), S′ $(-ae, 0)$	2. $(\pm ae, 0)$ S: (ae,0) S′ $(-ae, 0)$
3. দিকাক্ষের সমীকরণ, MZ	3. $x = \pm\, {}^{a}/_{e}$	3. $x = \pm\, {}^{a}/_{e}$
4. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ	4. $\frac{2b^2}{a}$; $x = \pm$ ae	4. $\frac{2b^2}{a}$; $x = \pm$ ae
5. বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ.	5. y = 0	5. y = 0 (আড় অক্ষ)
6. ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ;	6. x = 0	6. x = 0 (অনুবন্ধী অক্ষ)
7. উৎকেন্দ্রিকতা	7. $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	7. $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$
8. যে অঞ্চলে কার্ভ পাওয়া যায় না।	8. $x > a$ or $x < -a$	8. $-a < x < a$
9. প্রধান সম্পর্ক:	9. $\overline{CS} = e.\overline{CA}$; $\overline{CA}$ = e. $\overline{CE}$ $\overline{CS}.\overline{CE} = \overline{CA}^2$	9. $\overline{CS} = e.\overline{CA}$; $\overline{CA}$ = e. $\overline{CE}$ $\overline{CS}.\overline{CE} = \overline{CA}^2$
10. অন্য আকার	10. (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a^2 > b^2$. y অক্ষ→ বৃহৎ অক্ষ (b) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a^2 > b^2$ কেন্দ্রঃ (h,k) work : $x - h = X \therefore x = X + h$. $y - k = Y \therefore y = Y + k$.	10. (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a^2 > b^2$. y– অক্ষ আড় অক্ষ. (b) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, কেন্দ্রঃ(h, k) work : $x - h = X \Rightarrow x = X + h$. $y - k = Y \Rightarrow y = Y + k$.

(পরাবৃত্ত)

Type – 01 : পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরন সমাধান সম্পর্কিত সমস্যাবলী

উদাহরণ- ০১ ঃ $4x^2 - 12x - 8y + 5 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্ব (ল্যাটাস রেকটাম) এর দৈর্ঘ্য , অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীরকন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $4x^2 - 12x - 8y + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right)$

$X^2 = 4aY$ পরস্পরের সাথে তুলনা করে পাই,

শীর্ষবিন্দু ঃ $X = 0; Y = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2} = 0;\ y + \frac{1}{2} = 0 \therefore x = {}^{2}/_{3}, y = -\frac{1}{2}$

শীর্ষবিন্দু ঃ$\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, উপকেন্দ্র ঃ $(0, a) \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4 \times \frac{1}{2} = 2$

অক্ষরেখা ঃ$X = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0,$

দিকক্ষ ঃ $Y = -a = -\frac{1}{2} \Rightarrow y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y + 1 = 0$

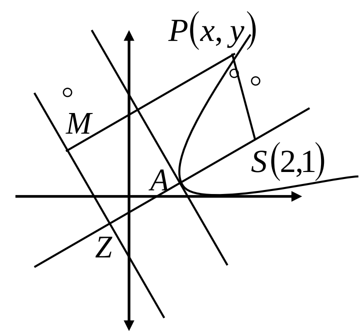
নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) $4y^2 - 12y + 8x + 13 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরন , অক্ষরেখা ও দিকাক্ষোর সমীকরন নির্ণয় কর।

Ans: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \mathbf{2}, \mathbf{x + 1 = 0}, \mathbf{2y - 3 = 0}, \mathbf{x = 0}$

Type – 02 : পরাবৃত্ত সনাক্তকরন বা পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় সংক্রান্ত গনিতিক সমস্যা ঃ

উদাহরণ- ০১ ঃ $2x + y - 2 = 0$ রেখাটি কোন পরাবৃত্তের শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরন । পবরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র $(2, 1)$হলে পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ $2x + y - 2 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীরকন অর্থাৎ

দিকক্ষোর সমীকরন : $2x + y + k = 0$

দিকাক্ষ MZ স্পর্শকের সমান্তরাল রেখা যা উপকেন্দ্র হতে $2|AS|$ দুরত্বে অবস্থিত

$\therefore \frac{2\times2+1+K}{\sqrt{2^2+1^1}} = 2\left|\frac{2\times2+1-2}{\sqrt{2^2+1^1}}\right|$

$5 + K = \pm 6 \ \therefore K = 1 \text{ or}, -11$ গ্রহণযোগ্য নয় ।

দিকাক্ষোর সমীকরন ঃ$2x + y + 1 = 0$ ধরি, পরাবৃত্তটির উপর কোন চলমান বিন্দু $P(x, y)$

তাহলে সংজ্ঞানুযায়ী , $SP = e.PM\ [e = 1]$

$$\Rightarrow SP^2 = PM^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{2x + y + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{1}{5}(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy + 2y + 4x)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 20x + 5y^2 - 10y + 25y = 4x^2 + y^2 + 4xy + 2y + 4x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy - 24x - 12y + 24 = 0$$

$\Rightarrow (x - 2y)^2 - 24x - 12y + 24 = 0$ যা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরন ।

উদাহরণ-০২ঃ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ এটা কি ধরনের কণিক সনাক্ত কর।
(i) করিণকের দিকাক্ষ ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(ii) অক্ষরেখার সমীরকন ও শীর্ষে স্পর্শকের সমীরকন র্নিণয় কর।

সমাধান ঃ $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = c \Rightarrow x + y - c = -2\sqrt{xy}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + c^2 + 2xy - 2xc - 2yc = 4xy$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2xc - 2yc + c^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 - 2xc - 2yc + c^2 = 0$$

পরাবৃত্তের ধর্ম xy সম্বলিত পদ পূর্ণ বর্গ সৃষ্টি করে অথবা $2^2 - 4.1.1 = 0$ সূতরাং কণিকটি পরাবৃত্ত

(i) নং সমীকরনটির অন্য আকার ঃ $x^2 - xc + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + y^2 - yc + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)/2$

$$\Rightarrow \left(x - {}^{c}/_{2}\right)^2 + \left(y - {}^{c}/_{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

পরাবৃত্ত ঃ কোন চলমান বিন্দু $P(x, y)$ হতে উপকেন্দ্রের দুরত্ব = ঐ বিন্দু হতে দিকাক্ষের দুরত্ব । এখানে উপকেন্দ্র নির্দিষ্ট বিন্দু এবং দিকাক্ষ নির্দিষ্ট সরলরেখা $P(x, y)$ চলমান বিন্দু। যার সঞ্চারপথই হলো পরাবৃত্ত । সুতরাং

(i) পরাবৃত্তটির ফোকাস বা উপকেন্দ্র $S: \left({}^{c}/_{2}, {}^{c}/_{2}\right)$ এবং দিকাক্ষ , $L = x+y = 0$

দিকাক্ষ ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দু $z = (0, 0) \therefore$ শীর্ষবিন্দু ঃ $\left(\frac{c/2}{2}, \frac{c/2}{2}\right) \equiv \left(\frac{c}{4}, \frac{c}{4}\right)$

(ii) অক্ষরেখা : দিকাক্ষের উপর লম্ব রেখা যা উপকেন্দ্রগামী ।

x-y+k= 0 যেহেতু উপকেন্দ্র S: $\left({}^{c}/_{2}, {}^{c}/_{2}\right)$ গামী , $\therefore {}^{c}/_{2} - {}^{c}/_{2} + k = 0 \therefore k = 0,$

অক্ষরেখা x-y = 0.

শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরন: শীর্ষ A : $\left({}^{c}/_{4}, {}^{c}/_{4}\right) \therefore$ শীর্ষে স্পর্শক যা দিকাক্ষের সমান্তরাল এবং A : $\left({}^{c}/_{4}, {}^{c}/_{4}\right)$ বিন্দুগামী ।

x + y + k = 0 যা A : $\left({}^{c}/_{4}, {}^{c}/_{4}\right)$ বিন্দুগামী $\therefore {}^{c}/_{2} + {}^{c}/_{4} + k = 0$, k = - ${}^{c}/_{2}$

শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরন : x + y- $\frac{c}{2} = 0$

(iv) **উপকেন্দ্রিক লম্ব দিকাক্ষের সমান্তরাল এবং** $\left({}^{c}/_{2}, {}^{c}/_{2}\right)$ বিন্দুগামী।

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরন: x-y+k= 0 এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য

$$L = 2\sqrt{\left({}^{c}/_{2}\right)^2 + \left({}^{c}/_{2}\right)^2} = 2.\frac{c}{2}\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}.\,c \text{ অথবা } L = \sqrt{c^2 + c^2} = c\sqrt{2}. \text{ একক}$$

যেহেতু উপকেন্দ্রিক লম্ব x ও y অক্ষকে (c, o) ও (o,c) বিন্দুতে ছেদ করে।

<u>Type – 03</u> : শর্তানুযায়ী পরাবৃত্তের সমীরকন নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলী ঃ

উদাহরণ-০১ ঃ $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত, কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দুরত্ব 8 একক; ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ চিত্র হতে, SP= PM = x+2=8 $\therefore x = 6, y^2 = 48 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{3},$

$\therefore$ বিন্দুর স্থানাংক $(6, \pm 4\sqrt{3})$

উদাহরণ-০২ঃ (-1, 1) উপকেন্দ্র এবং (2, -3) শীর্ষ বিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর। অক্ষরেখার সমীরকন নির্ণয় কর।

সূত্র হতে, A, SZ এর মধ্যবিন্দু $\therefore 2 = \frac{x+(-1)}{2} \Rightarrow x = 5, -3 = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y = -7$

সমীরকন ছাড়া বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় চলে,

$$\left.\begin{array}{ll} -1, & 1 \\ +3' & -4 \\ 2, & -3 \\ +3, & -4 \\ \hline 5, & -7 \end{array}\right\} \text{একই হারে বাড়ছে বা কমছে সে ক্ষেত্রে প্রযোজ্য}$$

যা তৃতীয় বিন্দু (Z)

MZ রেখার সমীকরন ঃ$y + 7 = \frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow 3x - 4y = 43$,অক্ষরেখার সমীরকরন ঃ 4x + 3y +1= 0

পরাবৃত্তের সমীকরন ঃ $(x+1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{3x-4y-43}{5}\right)$

$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=\frac{9x^2+16y^2+43\times43-24xy+8\times43y-6\times43x}{25}$

$\Rightarrow 25x^2+25y^2+50x-50y+50=9x^2+16y^2-24xy-258x+344y+1849$

$\Rightarrow 16x^2+9y^2+24xy+308x-294y-1799=0$

$\Rightarrow (4x+3y)^2+308x-294y-1799=0 \rightarrow$ যা একটি পূর্ণ বর্গ ,∴ পরাবৃত্তটির সাধারণ সমীরকন।

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) এরূপ একটি পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর ।যার উপকেন্দ্র (-1, 3) এবং শীর্ষ (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত ।
Ans: $(\mathbf{y-3})^2=-\mathbf{20}(\mathbf{x-4})$

Hints: উপকেন্দ্র ও শীর্ষের y স্থানাংক একই সুতরাং অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তারাল।

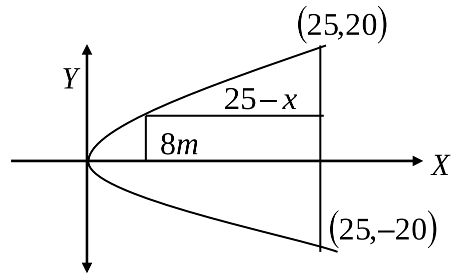
(ii) একটি পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x –অক্ষের সমান্তারাল এবং শীর্ষবিন্দু y অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা (2, 0) ও $\left(\frac{1}{2},0\right)$ বিন্দুগামী । Ans: $y^2-4y-8x+4=0$

(iii) একটি পরাবৃত্ত y অক্ষের ধনাত্বক দিকে দুপাশে বিস্তৃত । যার অক্ষ y অক্ষ এবং যার উপকেন্দ্র ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে (0, 3) ও 12 একক। পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর। Ans: $x^2=12y$

(iv) একটি পরাবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু 2y-3x= 0 রেখার উপর অবস্থিত। অক্ষ x – অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (3, 5) ও (6, -1) বিন্দুগামী। Ans: $y^2-6y-4x+17=0$

<u>Type – 04</u> : পরাবৃত্তের ব্যবহার সংক্রান্ত সমস্যা ঃ

উদাহরণ-০১ ঃ একটি পরাবৃত্তাকার খিলানের উচ্চতা 25m , বিস্তার (অক্ষের উভয়দিকে) 40m ,এর কেন্দ্র হতে উভয়দিকে 8m দুরত্বে পরাবৃত্তকার খিলানের উচ্চতা বের কর।



সমাধান ঃ পরাবৃত্তের সমীকরন ,$y^2=4ax \Rightarrow 20^2=40\times25 \Rightarrow 4a=16$

আবার , $y^2=16x \Rightarrow 8^2=16x \Rightarrow x=4m$

খিলানের উচ্চতা $=25-4=21$ m

উদাহরণ -০২ ঃ প্রমাণ কর যে, $y^2=4ax$ পরাবৃত্তের শীর্ষ হতে অঙ্কিত সকল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত যার সমীকরন $y^2=2ax$

সমাধান ঃ শীর্ষ (0, 0) এবং পরাবৃত্তের উপরস্থ বিন্দুগুলো $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ ইত্যাদি।

$\frac{0+x_1}{2} = x_1'$, $\frac{0+y_1}{2} = y_1'$ এখানে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(2x_1', 2y_1'), (2x_2', 2y_2')$, $(2x_3', 2y_3')$ ইত্যাদি।

$\Rightarrow (2y_1')^2 = 4a.2x_1' \Rightarrow 4y_1' = 8a.x_1' \Rightarrow y_1'^2 = 2ax_1'$

(x_1', y_1') কে (x, y) দ্বারা স্থানান্তর করে পাই, $y^2 = 2ax$ যা নির্ণেয় জ্যা এর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথ।

নিজে চেষ্টা কর ঃ (i) একটি পরাবৃত্তকার খিলানের x অক্ষ বরাবর অক্ষরেখা 25m দুরত্বে উভয় দিকে এর বিস্তার 150m এর কেন্দ্র হতে 25m দুরত্বে উভয় দিকে পরাবৃত্তাকার খিলানের উচ্চতা কত ? **Ans : $22\frac{2}{9}$ m.**

(ii) ধরি, $x = u\cos\alpha t$ এবং , $y = u\sin\beta t - \frac{1}{2}gt^2$ [g= ধ্রুবক] t কে অপসারন করে দেখাও যে, $P(x, y)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত এবং যা মূল বিন্দুগামী এবং পরাবৃত্তটির শীর্ষ উপকেন্দ্রীয় লম্বের দৈর্ঘ্য ও ফোকাস বা উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। দেখাও যে, দিকাক্ষ মূল বিন্দু হতে $\frac{u^2}{2g}$ দুরত্বে অবস্থিত।

Ans: $\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}, \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right), \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}; \left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}, \frac{-u^2\cos 2\alpha}{2g}\right)$

(iii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের দ্বি-কোটির দৈর্ঘ্য 8a; প্রমাণ কর যে, শীর্ষ হতে দ্বি-কোটির প্রান্ত বিন্দুতে অংকিত সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

(iv) যদি $a + b \neq 0$ হয় তবে $y^2 = 2mx$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র বের কর। যেখানে পরাবৃত্তটির $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এবং $\frac{x}{b} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। Ans: $\left(\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right)$

উপবৃত্ত

Type – 05: স্পর্শক ,অভিলম্ব ও জ্যা সম্পর্কিত সমস্যাবলীঃ

উদাহরণ ঃ $4x^2 + 3y^2 = 5$ উপবৃত্তে $y = 3x + 7$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = 3x + 7$ রেখার সমান্তরালে রেখা , $y = 3x + k$

$4x^2 + 3(3x + k)^2 = 5 \Rightarrow 4x^2 + 3(9x^2 + 6xk + k^2) = 5$

$\Rightarrow 31x^2 + 18xk + 3k^2 - 5 = 0$, স্পর্শ বিন্দুতে সমীকরনটির নিশ্চয়ক শূন্য হবে।

$$\therefore (18k)^2 - 4 \times 31 \times (3k^2 - 5) = 0 \Rightarrow -48k^2 = -20 \times 31 = k = \sqrt{\frac{20 \times 31}{48}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{155}{3}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, $y = 3x \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{155}{3}}$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুঃ $\left(\frac{5/_4 \times 9}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{155}{3}}}, \frac{-5/_3}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{155}{3}}}\right) = \left(\frac{45\sqrt{3}}{2\sqrt{155}}, \frac{-10}{\sqrt{465}}\right)$ এবং $\left(\frac{-45\sqrt{3}}{2\sqrt{155}}, \frac{10}{\sqrt{465}}\right)$

অভিলম্ব , $3x - y + 7 = 0$ এর লম্বরেখা, $x + 3y + k = 0$ যা স্পর্শ বিন্দুগামীঃ $\frac{45\sqrt{3}}{2\sqrt{155}} - 3 \times \frac{10}{\sqrt{3} \times \sqrt{155}} + k = 0$

$\Rightarrow \frac{(45-20)\sqrt{3}}{2\sqrt{155}} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{155}}$ এবং অপর বিন্দু বসিয়ে পাই, $k = -\frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{155}}$

অভিলম্বের সমীকরন ঃ $3y + x \pm \frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{155}} = 0$ (Ans:)

<u>নিজে চেষ্টা কর</u> ঃ

(i) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের উপরi θ ও φ যথাক্রমে P ও Q এর দুটি বিন্দু । $\overrightarrow{TP}$ ও $\overrightarrow{TQ}$ দুটি স্পর্শক । যদি P ও Q এমনভাবে চলে যাতে $\theta - \varphi = \pi/_2$ হয় তবে T এর স্থানাংক নির্ণয় কর এবং T এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। Ans: (a, b) , $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 2$

(ii) $x^2 + 2y^2 = 6$ উপবৃত্ত এবং $2x^2 + 2y^2 = 9$ বৃত্তের দুটি সাধারণ স্পর্শকের সমীরকন নির্ণয় কর ।

Hints: $y = mx \pm \sqrt{6m^2 + 3} \rightarrow$ উপবৃত্তে, এবং $y = mx \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + m^2} \rightarrow$ বৃত্তে, তারা একই রেখা

$\therefore \pm\sqrt{6m^2 + 3} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + m^2} \Longrightarrow 6m^2 + 3 = \frac{9}{2}(1 + m^2) \Rightarrow 12m^2 + 6 = 9 + 9m^2$

$\Rightarrow 3m^2 = 3$, $m = \pm 1$; সাধারণ স্পর্শকের সমীরকন: $y = \pm x \pm 3$,

<u>Type – 06</u> :

উদাহরণ -০১ ঃ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ক্ষুদ্র অক্ষ দুটি ফোকাসের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান এবং যার উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 10 একক ।

সমাধান ঃ $2b = 2ae$ এবং $\frac{2b^2}{a} = 10$, $\frac{b}{a} = e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow 2\frac{b^2}{a^2} = 1$

$\Rightarrow b = a/2 = \frac{2 \times a/2}{a} = 10 \therefore a = 10, b = 5\sqrt{2}$, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{50} = 1$

<u>নিজে চেষ্টা কর</u> ঃ

(i) বৃহৎ অক্ষের প্রান্ত বিন্দু দুটি (-1, 1) ও (3,1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর ।**Ans**: $\frac{(\mathbf{x-1})^2}{\mathbf{4}}+\frac{(\mathbf{x-1})^2}{\mathbf{2}}$

(ii) একটি উপবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $^2/_3$.

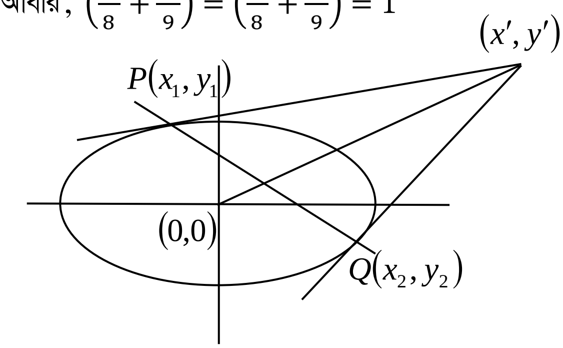
Ans: $20x^2+36y^2=405$

(iii) একটি উপবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর যার দুটি অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 এবং 6। বৃহৎ অক্ষেল সমীকরন y = 2 এবং ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরন x = 3. **Ans**: $\frac{(\mathbf{x-3})^2}{\mathbf{9}}+\frac{(\mathbf{x-2})^2}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}$

উদাহরণ -০১ঃ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের একটি জ্যা (2,1)বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় ।জ্যাটির সমীকরন নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ জ্যা এর উপবৃত্তের উপরস্থ দুটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$

দুটি বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক দুটির ছেদবিন্দু (x', y') ও বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী বলে অর্থাৎ মূলবিন্দু গামী রেখা $x' = 2y'$ আবার, $\left(\frac{x_1}{8}+\frac{y_1}{9}\right)=\left(\frac{x_2}{8}+\frac{y_2}{9}\right)=1$



$\Rightarrow \frac{x_1}{8}+\frac{y_1}{9}=\frac{x_2}{8}+\frac{y_2}{9}=\frac{x_1-x_2}{8}=\frac{y_2-y_1}{9}\Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=-\frac{9}{8}$

অথবা, $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}=1, \frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{9}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{6}(x_1^2-x_2^2)+\frac{1}{9}(y_1^2-y_2^2)=0$

$\Rightarrow \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{16}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{9}$

$\Rightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9}{16}\times\frac{(x_1+x_2)}{(y_1+y_2)}=-\frac{9}{16}\times\frac{4}{2}=-\frac{9}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরন ঃ $y-1=-\frac{9}{8}(x-2)\Rightarrow 8y-8=-9x+8\Rightarrow 9x+8y=26$

➲ **<u>নিজে চেষ্টা কর</u> ঃ** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তের (-2, -1) বিন্দুতে একটি জ্যা সমদ্বিখন্ডিত হয়। জ্যা এর সমীরকন নির্ণয় কর ।Ans : 32x+25y+89 = 0

(i) দেখাও যে, x +y = 3 রেখা $3x^2+6y^2=18$ উপবৃত্তের একটি স্পর্শক এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক (2,1) ও স্পর্শবিন্দু গামী অভিলম্বের সমীকরন x –y-1 = 0

(ii) P(x, y) . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর চলমান একটি বিন্দু উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় S ও S´ । প্রমাণ কর যে, P বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক এর সাথে $\overrightarrow{SP}$ ও $\overrightarrow{S'P}$ সমান কোণ উৎপন্ন করে। ।

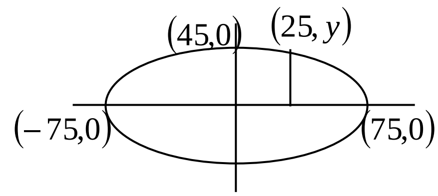
(iii) P ও Q একটি উপবৃত্তের উপর দুটো বিন্দু । $\overrightarrow{TP}$ ও। $\overrightarrow{TQ}$ দুটি স্পর্শক । দেখাও যে, $\overrightarrow{PQ}$ এর মধ্যবিন্দুর T এর সংযোজন রেখা উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী ।

(iv) P ও Q একটি উপকেন্দ্রগামী জ্যা এর প্রান্তবিন্দু ।। $\overrightarrow{TP}$ ও $\overrightarrow{TQ}$ দুটি স্পর্শক। দেখাও যে,(ছেদ বিন্দু) T দিকাক্ষের উপর অবস্থান করে।

(v) P(x, y) . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপরস্থ বিন্দুতে অংকিত অভিলম্ব X –অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে দেখাও যে, G বিন্দুর ভূজ $x_1 . e^2$ যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা।

Type – 07 : উপবৃত্তের ব্যবহার সংকান্ত ঃ

উদাহরণঃ একটি উপবৃত্তকার খিলানের সর্বোচ্চ উচ্চতা 45m এবং 150 m বিস্তৃত ।কেন্দ্র হতে 25m দুরত্বে দু'পাশে দুটি উলম্ব অবলম্বন আছে। অবলম্বন দুটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ $\frac{x^2}{75^2}+\frac{y^2}{45^2}=1 \Rightarrow \frac{25^2}{75^2}+\frac{y^2}{45^2}=1 \Rightarrow y = \pm 30\sqrt{2}m$,

➲ **নিজে চেষ্টা কর ঃ** একটি উপবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (1,2) একটি উপকেন্দ্র (6,2) এবং যা (4,6) বিন্দু গামী। বি.দ্র. উপবৃত্তটি X-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

অধিবৃত্ত

Type – 08 : অধিবৃত্তের সমীকরন হতে বিভিন্ন রাশি ও সমীকরন নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলীঃ

উদাহরণ ঃ $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, ফোকস বা উপকেন্দ্র, দিকাক্ষের সমীকরন, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরন ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ আকারের অধিবৃত্ত । যেখানে, X = x+ 1 ও Y= y – 2 ,a=2,b=$\sqrt{5}$

কেন্দ্র : X = 0 ⇒ x+ 1= 0 ⇒ x = -1 , Y = 0 ⇒ y – 2 = 0 ⇒ y = 2 ∴ কেন্দ্র ঃ (-1 , 2)

শীর্ষ ঃ $(\pm a, 0) = (\pm 2,0) \therefore x + 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, -3 , y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

শীর্ষ ঃ $(3,2)$ ও $(-5,2)$, উৎকেন্দ্রিকতা ঃ $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \frac{3}{2}$

ফোকাস বা উপকেন্দ্র ঃ $(\pm ae, 0) = \left(\pm 2 \times \frac{3}{2}, 0\right) = (\pm 3,0)$

$\therefore x + 1 = \pm 3 \Rightarrow x = 2, -4$ এবং $y - 2 = 0 \therefore y = 2, \therefore$ ফোকাসদ্বয় (2,2) ও (-4, 2)

দিকাক্ষের সমীকরন ঃ $X = \pm a/e \Rightarrow x + 1 = \pm\frac{4}{3} \Rightarrow 3x + 3 = \pm 4 \Rightarrow 3x = 1$ এবং $3x = -7$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীরকন ঃ $X = \pm ae,\ x + 1 = 3,$ এবং x = 2

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $\frac{2b^2}{\boldsymbol{a}} = \frac{2\times5}{2} = 5$ একক।

➲ **নিজে চেষ্টা কর ঃ (i)** $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$ অধিবৃত্তের ফোকাস ও দিকাক্ষের সমীকরন নির্ণয় কর।

Ans: (3, 2) ,(-5, 2),দিকাক্ষ ঃ 4x = 5, এবং 4x +13 = 0

(ii) $x^2 - 2y^2 - 2x + 8y - 1 = 0$ অধিবৃত্তের ফোকাস ও দিকাক্ষের সমীকরন নির্ণয় কর।

Ans: ফোকাস : $(1, 2\pm3\sqrt{3})$, দিকাক্ষের সমীরকন ঃ $y = 2\pm\sqrt{3}$

Type – 09: অসীমতটের সমীকরন নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলীঃ

উদাহরণ ঃ $x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ অধিবৃত্তের অসীমতক দুটির সমীকরন নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 - 4y + 4) - 9 + 64 - 199 = 0$

$\Rightarrow 9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144 \Rightarrow \{3(x-1) + 4(y-2)\}\{3(x-1) - 4(y-2)\} = 144$

∴ অসীমতটের সমীকরন ঃ $3(x-1) + 4(y-2) = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 5 = 0$

এবং $3(x-1) - 4(y-2) = 0 = 3x - 4y - 11 = 0$

উদাহরণ- ০১ ঃ একটি অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয় (6,2) ও (-4, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $^5/_4$ হলে তার অসীমতটের সমীকরন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আড় ও অণুবন্ধী অক্ষরেখা x ও y অক্ষের সমান্তরাল এবং অধিবৃত্তটি x- অক্ষের সমান্তরাল রেখা y = 2 এর সাপেক্ষে প্রতিসম। ∴ কেন্দ্র ঃ (1, 2) , ফোকাস ঃ S (6, 2) ও S´ (-4, 2), 2ae = 10, a = $^5/_{^5/_4}$ = 4,

b = $a\sqrt{e^2 - 1} = 4\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = 3$, কেন্দ্র ঃ $\left(\frac{6-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1,2)$

নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরন ঃ $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$,

অসমিতটের সমীকরন ঃ $y - 2 = \pm\frac{3}{4}(x-1)$ (+) ve নিয়ে, 3x – 4y + 5 = 0,

(-) ve নিয়ে, 3x+ 4y – 11 = 0

নিজে চেষ্টা কর ঃ

$4x^2 - 9y^2 = 36$ অধিবৃত্তের অণুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরন হতে অসীমতটের সমীকরন উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর । Ans: $3y - 2x = 0$,$3y + 2x = 0$; $(0, \sqrt{3})$ এবং $(0, -\sqrt{3})$

Hints: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ পরস্পর পরস্পরের অনুবন্ধী।

উদাহরণ- ০২ ঃ একটি অধিবৃত্তের অসীমতট দুটি $y = \pm\frac{3}{4}(x)$ হলে অধিবৃত্তটির সমীকরন নির্ণয় কর। ধর অধিবৃত্তটি (2,3) বিন্দুগামী ।

সমাধান ঃ $(4x - 3x)(4y + 3x) + k = 0 \Rightarrow (4y)^2 - (3x)^2 + k = 0 \Rightarrow 16y^2 - 9x^2 + k = 0$

অধিবৃত্তটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী হলে, $16 \times 9 - 9 \times 4 + k = 0 \Rightarrow k = -108 \therefore 16y^2 - 9x^2 = 108$

Type – 10 : একটি অধিবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর। যার একটি ফোকাস (2,3) ও অনুরূপ দিকাক্ষের সমীকরন

$x + 2y = 1$ এবং যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ ।

সমাধান ঃ P (x, y) অধিবৃত্তের উপরস্থ চলমান বিন্দু। S: (2, 3), MZ : $x + 2y - 1 = 0$.

সংজ্ঞানুসারে , $\overline{PS} = e.\overline{PM}. \Rightarrow PS^2 = e^2.(PM)^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{3})^2 \times \left(\frac{x+2y-1}{\sqrt{1+2^2}}\right)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 3.\frac{x^2 + 4y^2 + 4xy - 4y - 2x + 1}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 20x - 30y + 65 = 3x^2 + 12y^2 + 12xy - 12y - 6x + 3$$

$\Rightarrow 2x^2 - 7y^2 - 12xy - 14x - 18y + 62 = 0$ যা অধিবৃত্তের সমীকরন ।

কারণ : $12^2 - 4.2(-7) = (+)$

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) একটি চলমান বিন্দু P (x, y), $4x - 3y + 11 = 0$ ও $4x + 3y + 5 = 0$ হতে P বিন্দুর দূরত্বের গুণফল ${}^{144}/_{25}$ । P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। **Ans**: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$,

(ii) P (x, y) কোন চলমান বিন্দু হতে (0,4) বিন্দুর দুরত্ব ঐ বিন্দু হতে $4y - 9 = 0$ রেখার দুরত্বের ${}^{4}/_{3}$ গুণ। P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। **Ans**: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$,

(iii) একটি অধিবৃত্তের সমীকরন নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $^5/_4$। ফোকাস (a, 0) এবং অনুরূপ দিকাক্ষ $4x – 3y = a$ | এর কেন্দ্র ও অপর দিকাক্ষের সমীরকন নির্ণয় কর।

Ans: $\mathbf{7y^2 + 24xy - 24ax - 6ay + 15a^2 = 0}$; **কেন্দ্র ঃ** $\left(-\frac{a}{3}, a\right)$; **অন্য দিকাক্ষ ঃ 12x – 9y + 29a = 0**

<u>Type – 11</u> : স্পর্শক ,অভিলম্ব ও জ্যা সম্পর্কিত সমস্যাবলীঃ

উদাহরন - ০১ঃ $3x^2 - y^2 = 1$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর যা $2x - y = 1$রেখার সমান্তরাল । স্পর্শবিন্দু ও স্পর্শবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরন নির্ণয় কর।

$2x - y = 1$রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরন $y = 2x + k$ অধিবৃত্ত বসিয়ে পাই, $3x^2 - (2x + k)^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 - 4x^2 - 4xk - k^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4xk + k^2 + 3 = 0$ যা x এর দ্বিঘাত সমীকরন যার দুটি মূল স্পর্শ বিন্দুতে একই । এক্ষত্রে সমীকরনটির নিশ্চয়ক শূন্য হবে।$(4k)^2 - 4(k^2 + 3) = 0 \Longrightarrow 16k^2 - 4k^2 = 12 \Longrightarrow 12k^2 = 12 \therefore k = \pm 1$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক দুটি ঃ $2x – y \pm 1 = 0$

স্পর্শ বিন্দু ঃ স্পর্শ বিন্দুর ভূজ , $x = 2k = \pm 2, y = \pm 4 \pm 1 = \pm 5, \pm 3$

স্পর্শ বিন্দু ঃ$(\pm 2, \pm 3), (\pm 2, \pm 5)$

স্পর্শবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরন ঃ $x + 2y + k' = 0$

$(\pm 2, \pm 3)$ বিন্দুর জন্য , $k' = \pm 8, x + 2y \pm 8 = 0$

$(\pm 2, \pm 5)$ বিন্দুর জন্য , $k' = \pm 12, x + 2y \pm 12 = 0$

➲ **<u>নিজে চেষ্টা কর</u> ঃ**

(i) দেখাও যে, $y = x + \sqrt{5}, \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শস বিন্দু $\left(^{-9}/_{\sqrt{5}}, ^{-4}/_{\sqrt{5}}\right)$.

(ii) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ অধিবৃত্ত ও $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর।

$\boldsymbol{Ans}$: $\boldsymbol{\sqrt{3}y = \pm 2x \pm \sqrt{7}}$

(iii) P (x, y) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের উপর চলমান কোন বিন্দু অধিবৃত্তের ফোকাস s, $\overrightarrow{PT}$. P বিন্দুতে স্পর্শক এবং $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{PT}$ এর উপর লম্ব । দেখাও যে, T এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যার সমীকরন $x^2 + y^2 = a^2$

(iv) $2x^2 - 3y^2 = 6$ অধিবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর যা $x + y = 2$ রেখার সমান্তরাল।

(v) P (x, y) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের উপর চলমানবিন্দু। P বিন্দুতে অংকিত অভিলম্ব $\overrightarrow{CX}$ ও $\overrightarrow{CY}$ অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি CAQB আয়তক্ষেত্র হয় তবে দেখাও যে, Q বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত যার সমীকরন $a^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)^2$.

(vi) যদি e ও e´ যথাক্রমে অধিবৃত্ত ও অনুবন্ধী অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হলে প্রমান কর যে, $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.