ভেক্টর
Vectors

অধ্যায় ০২

এ অধ্যায়ে অনন্য A+ সংযোজন | এক নজরে সূত্রাবলি | গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান | ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্নের সমাধান | অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান | অ্যাপস-এ MCQ Exam

এক নজরে এ অধ্যায়ের সূত্রাবলি

এ অধ্যায়ের গাণিতিক সমস্যা সংশ্লিষ্ট গুরুত্বপূর্ণ সূত্রসমূহ নিচে ধারাবাহিকভাবে উপস্থাপিত হলো, যা তোমাদের সমস্যা সমাধানে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করবে।

ক্রম	সূত্র	ক্রম	সূত্র
১.	$\lvert\vec{A}\rvert = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	৬.	$B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\lvert\vec{A}\rvert}$; $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\lvert\vec{B}\rvert}$
২.	$\hat{a} = \dfrac{\vec{A}}{\lvert\vec{A}\rvert}, A \neq 0$	৭.	$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{n}\,AB\sin\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
৩.	$\vec{R}_x = R\cos\alpha$; $\vec{R}_y = R\sin\alpha$	৮.	$\hat{\eta} = \pm\dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{\lvert\vec{A}\times\vec{B}\rvert}$
৪.	$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$; $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$	৯.	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$
৫.	$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	১০.	grad $\varphi = \vec{\nabla}\varphi$; div $\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$; Curl $\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহের অনুশীলনীর গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহে এ অধ্যায়ের অনুশীলনীতে স্তরভিত্তিক গাণিতিক সমস্যাবলি দেওয়া আছে। প্রতিটি গাণিতিক সমস্যার পূর্ণাঙ্গ সমাধান পাঠ্যবইয়ের প্রশ্ন নম্বরের ধারাবাহিকতায় নিচে প্রদত্ত হলো; যা তোমাদের সেরা প্রস্তুতি গ্রহণে সহায়ক ভূমিকা পালন করবে।

০১ এটিএম শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া তৌহিদ স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর গাণিতিক সমস্যার সমাধান

সেট-১ : সাধারণ সমস্যাবলি

সমস্যা ১। $\vec{A} = a\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - b\hat{j} + 3\hat{k}$, যদি $3\vec{A} = 2\vec{B}$ হয় তাহলে a ও b এর মান কত?

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = a\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - b\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $3\vec{A} = 2\vec{B}$

এখন, $3\vec{A} = 2\vec{B}$ বা, $\vec{A} = \frac{2}{3}\vec{B}$

বা, $(a\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = \frac{2}{3}(2\hat{i} - b\hat{j} + 3\hat{k})$

বা, $(a\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = \frac{4}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}b\hat{j} + 2\hat{k}$

উভয় পাশে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে,

$a = \frac{4}{3}$ এবং $-1 = -\frac{2}{3}b$

$\therefore\ b = \frac{3}{2}$

নির্ণেয় মান, $a = \frac{4}{3}, b = \frac{3}{2}$

সমস্যা ২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর রাশিদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ লব্ধি, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

মনে করি, লব্ধির দিকে একক ভেক্টর $= \hat{r}$.

$$\therefore \hat{r} = \frac{\vec{R}}{\lvert\vec{R}\rvert} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{49}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7} = \frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$$

নির্ণেয় লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টরটি হলো $\frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$.

সমস্যা ৩। একটি নদীর স্রোতের বেগ $4\ km\ h^{-1}$। স্রোতের সাথে $60°$ কোণে $3\ km\ h^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চালালে নৌকাটি কত বেগে কোনদিকে চলবে?

সমাধান : এখানে, স্রোতের বেগ, $P = 4\ km\ h^{-1}$

নৌকার বেগ, $Q = 3\ km\ h^{-1}$

স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 60°$

লব্ধি বেগ, $R = ?$; লব্ধির দিক, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$= (4\ kmh^{-1})^2 + (3\ kmh^{-1})^2 + 2\times 4\ kmh^{-1}\times 3\ kmh^{-1}\times\cos 60°$$
$$= (16 + 9 + 12)\ kmh^{-1}\ [\because \cos 60° = 0.5]$$
$$= 37\ kmh^{-1}$$
$$\therefore\ R = 6.08\ kmh^{-1}$$

ধরি, নৌকার লব্ধিবেগ স্রোতের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে চলে।

আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{3\sin 60^\circ}{4 + 3\cos 60^\circ} = \dfrac{2.598}{4 + 1.5}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0.4723) = 25.28^\circ$

অতএব, নৌকাটি 6.08 $km\ h^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে 25.28° কোণ করে চলবে।

সমস্যা ৪। একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের মান সমান। দেখাও যে, এদের লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : ধরি, ভেক্টরদ্বয় $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ = θ

এবং লব্ধি ভেক্টর $\vec{A}$ এর সাথে θ′ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\theta' = \tan^{-1}\dfrac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} = \tan^{-1}\dfrac{B\sin\theta}{B + B\cos\theta}$ [∵ A = B]

$$= \tan^{-1}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan^{-1}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$$

$\therefore\ \theta' = \dfrac{\theta}{2}$

অতএব, লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমস্যা ৫। দুটি দিক রাশি লব্ধির সর্বোচ্চ মান 12 একক এবং সর্বনিম্ন মান 2 একক। রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, দিক রাশি দুটি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$

এখানে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর সর্বোচ্চ মান 12 একক

এবং সর্বনিম্ন মান 2 একক। P = ? ও Q = ?

আমরা জানি, দুটি দিক রাশির সর্বোচ্চ মান তাদের মানের যোগফলের সমান এবং সর্বনিম্ন মান এদের বৃহত্তরটি থেকে ক্ষুদ্রতরটির বিয়োগফলের মানের সমান।

সুতরাং P + Q = 12 .... (১)

এবং P − Q = 2 ....(২)

(১)নং ও (২)নং সমীকরণ যোগ করে পাই, 2P = 14

বা, $P = \dfrac{14}{2} = 7$ একক

(১)নং এ P-এর মান বসিয়ে পাই, 7 + Q = 12

বা, Q = 12 − 7 = 5 একক

অতএব, রাশিদ্বয়ের মান 7 একক ও 5 একক।

সমস্যা ৬। একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 15 N ও 7N। যদি উভয় বলের মান 1N বৃদ্ধি করা যায় এবং যদি এই নতুন বল দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তবে এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি,

লব্ধির সর্বোচ্চ মান, $R_{max} = P + Q$ ....(1)

লব্ধির সর্বনিম্ন মান, $R_{min} = P - Q$ .... (2)

ধরি,
প্রথম বলের মান = P
২য় বলের মান = Q

(1) নং সমীকরণ হতে পাই, P + Q = 15 ....(3)

(2) নং সমীকরণ হতে পাই, P − Q = 7 ....(4)

(3) নং সমীকরণ ও (4) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

P + Q = 15
P − Q = 7

(+) করে, 2P = 22

∴ P = 11 N

(3) নং সমীকরণ থেকে (4) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

P + Q = 15
P − Q = 7

(−) করে, 2Q = 8

∴ Q = 4N

শর্তানুযায়ী প্রথম বল, $P_1 = (11 + 1) = 12$ N

২য় বল, $Q_1 = (4 + 1) = 5$N

P_1 ও Q_1 এর মধ্যবর্তী কোণ, α = 90°

এবং বলদ্বয়ের লব্ধি, R = ?

আমরা জানি, $R = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + 2P_1Q_1\cos\alpha}$

$= \sqrt{(12)^2 + (5)^2 + 2\cdot 12\cdot 5\cos 90^\circ}$

$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ N

ধরি, P_1 বল লব্ধির সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে,

$\tan\theta = \dfrac{Q_1\sin\alpha}{P_1 + Q_1\cos\alpha} = \dfrac{5\sin 90^\circ}{12 + 5\cos 90^\circ} = \dfrac{5}{12}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{12}\right)$

সমস্যা ৭। দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তর লব্ধি 28 একক ও ক্ষুদ্রতর লব্ধি 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে সমকোণে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধির মান কত?

সমাধান : ধরি, রাশিদ্বয় P ও Q

∴ P + Q = 28
P − Q = 4

(+) করে, 2P = 32

∴ P = 16 একক

∴ Q = 28 − 16 = 12 একক

ক্রিয়ারত কোণ, α = 90°

∴ লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + 2\times 16\times 12\times\cos 90^\circ}$

$= \sqrt{400} = 20$ একক

অতএব, লব্ধির মান 20 একক।

সমস্যা ৮। ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। ট্রাকটি প্রকৃতপক্ষে কোন দিকে চলছে।

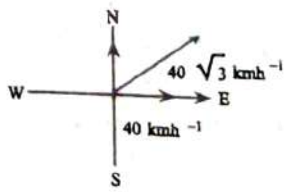
সমাধান : ধরি, উত্তর দিকের বেগ, $v_N = 40\sqrt{3}\ km\ h^{-1}$

পূর্ব দিকের বেগ $v_E = 40\ km\ h^{-1}$

ট্রাকটি যদি উত্তর দিকের সাথে θ কোণ করে তাহলে

$\tan\theta = \dfrac{40\sin 90^\circ}{40\sqrt{3} + 40\cos 90^\circ}$

$= \dfrac{40\times 1}{40\sqrt{3} + 0}\ \left[\because \begin{array}{l}\sin 90^\circ = 1\\ \cos 90^\circ = 0\end{array}\right]$



$= \dfrac{40}{40\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$

$\therefore\ \theta = 30^\circ$

অতএব, ট্রাকটি প্রকৃতপক্ষে উত্তর দিকের সাথে 30° কোণ করে যাবে।

সমস্যা ৯। একটি বস্তুকে 50 N বল দ্বারা পূর্বদিকে এবং 20 N বল দ্বারা পূর্ব দিকের সাথে 60° কোণ করে উত্তরের দিকে টানা হলো। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P = 50 N এবং Q = 20 N

লব্ধি বল (R) পূর্বদিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, পূর্বদিক বরাবর লব্ধি বলের উপাংশ, $R\cos\theta = 50\ N\times\cos 0^\circ + 20\ N\times\cos 60^\circ$

$= 50\ N + 10\ N = 60$ N

উত্তর দিক বরাবর লব্ধি বলের উপাংশ,

$R\sin\theta = 50\ N\times\sin 0^\circ + 20\ N\times\sin 60^\circ$

$= 0 + 17.32\ N = 17.32$ N

∴ লব্ধির বলের মান, $R = \sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}$

$= \sqrt{(60)^2 + (17.32)^2}\ N = 62.45$ N

লব্ধি পূর্বদিকের সাথে θ′ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\theta' = \tan^{-1}\tan\theta = \tan^{-1}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan^{-1}\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{17.32}{60} = \tan^{-1}(0.289) = 16.1^\circ$$

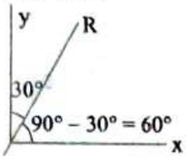
অতএব, লব্ধির মান 62.45 N; যা পূর্বদিকের সাথে 16.1° কোণে উত্তরদিকে।

সমস্যা ১০। 60 N এর একটি বল y অক্ষের সাথে 30° কোণে আনত। x ও y অক্ষের দিকে বলটির অংশক (উপাংশ) নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, বল, F = 60 N

y অক্ষের সাথে আনত কোণ = 30°

তাহলে, x-অক্ষ অর্থাৎ অনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, θ = 90° − 30° = 60°



এখন, x অক্ষের দিকে বলটির অংশক, $F_x = F\cos\theta$

$$= 160 \times \cos 60^\circ$$
$$= 30\ N$$

∴ y অক্ষের দিকে বলটির অংশক, $\overline{F_y} = F\sin\theta$

$$= 60\sin 60^\circ = 51.96\ N$$

∴ অংশক দুটি 30 N এবং 51.96 N।

সমস্যা ১১। 10 N মানের একটি বল অন্য একটি অজানা বলের সাথে 120° কোণে আনত। বল দুইটির লব্ধি অজানা বলের সাথে 90° কোণে অবস্থিত। অজানা বলটির মান কত?

সমাধান : ধরি, অজানা বলটির মান = x

এখন, অজানা বল বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

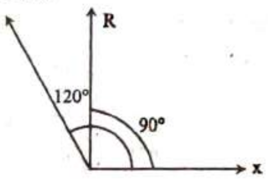
$$R\cos 90^\circ = x\cos 0^\circ + 10\cos 120^\circ$$

বা, $R \times 0 = x + 10 \times -\frac{1}{2}$

বা, $0 = x - 5$

∴ $x = 5$

∴ অজানা বলটির মান 5 N।

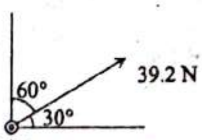


সমস্যা ১২। একটি লন রোলার টানার সময় এর হাতলে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 39.2N বল প্রয়োগ করা হলে, এর ওজন কত হ্রাস পেলে এটি টানা সহজ হবে?

সমাধান : এখানে, বল, F = 39.2 N

লন রোলারটি টানা সহজ হবে যদি এর ওজন হ্রাস করা হয়,

$= 39.2 \times \cos 60^\circ = 19.6\ N$



∴ ওজন 19.6 N হ্রাস পেলে লন রোলারটি টানা সহজ হবে।

সমস্যা ১৩। P ও Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, − 4, 5) ও (2, 3, − 1) এদের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর; PQ ভেক্টর রাশি এবং এর মান বের কর।

সমাধান : এখানে, P এর স্থানাঙ্ক (3, − 4, 5)

এবং Q এর স্থানাঙ্ক (2, 3, − 1)

P এর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{OP} = (3-0)\hat{i} + (-4-0)\hat{j} + (5-0)\hat{k}$

$$= 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{OQ} = (2-0)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (-1-0)\hat{k}$

$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$
$$= (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) = -\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$$

এখন, $\vec{PQ}$ এর মান $|\vec{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-6)^2}$

$$= \sqrt{1 + 49 + 36} = \sqrt{86}$$

সমস্যা ১৪। দেখাও যে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

সমাধান : ভেক্টরদ্বয় সমকোণে তখনই অবস্থিত হবে যখন $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হবে।

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$.

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}).(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$
$$= 2 \times 3(\hat{i}.\hat{i}) + 4 \times (-5)(\hat{j}.\hat{j}) + 7 \times 2(\hat{k}.\hat{k})$$
$$= 6 \times 1 - 20 \times 1 + 14 \times 1 = 6 - 20 + 14 = 0$$

যেহেতু $\vec{A}.\vec{B} = 0$

সুতরাং ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত। (দেখানো হলো)

সমস্যা ১৫। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান : ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, এদের ডট গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\vec{A}.\vec{B} = 0$	এখানে,
বা, $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}).(m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}) = 0$	$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$
বা, $2m(\hat{i}.\hat{i}) + 6(\hat{j}.\hat{j}) - 60(\hat{k}.\hat{k}) = 0$	$\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$
বা, $2m + 6 - 60 = 0$	m = ?
বা, $2m = 54$ বা, $m = 27$	

অতএব, m এর মান 27 হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

সমস্যা ১৬। যদি $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ হয়, তবে $\vec{A}\cdot\vec{B}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

এখন, $\vec{A}.\vec{B} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$$= 12(\hat{i}.\hat{i}) - 6(\hat{j}.\hat{j}) + 2(\hat{k}.\hat{k}) = 12 - 6 + 2 = 8$$

অতএব, $\vec{A}.\vec{B}$ এর মান 8।

সমস্যা ১৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। (i) m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে। (ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মানে কিনা? গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : (i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হবে যদি, $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হয়,

অর্থাৎ, $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}).(m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}) = 0$

বা, $2m(\hat{i}.\hat{i}) + 6(\hat{j}.\hat{j}) - 50(\hat{k}.\hat{k}) = 0$	দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$
বা, $2m + 6 - 50 = 0$	$\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$
বা, $2m = 44$	m = ?
∴ $m = 22$.	

অতএব, ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে যদি m এর মান 22 হয়।

(ii) এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ m & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (30 + 10)\hat{i} + (-5m - 20)\hat{j} + (4 - 3m)\hat{k}$$
$$= 40\hat{i} - (20 + 5m)\hat{j} + (4 - 3m)\hat{k}$$

আবার, $$\vec{B}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m & 2 & 10 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-10 - 30)\hat{i} + (20 + 5m)\hat{j} + (3m - 4)\hat{k}$$
$$= -40\hat{i} + (20 + 5m)\hat{j} - (4 - 3m)\hat{k}$$

এখানে, $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মানে না।

সমস্যা ১৮। a-এর মান কত হলে, $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান : ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হলে, এদের ডট গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B} = 0$	এখানে,
বা, $(2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$	$\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$
বা, $8(\hat{i}.\hat{i}) - 2a(\hat{j}.\hat{j}) - 2(\hat{k}.\hat{k}) = 0$	$\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$
বা, $8 - 2a - 2 = 0$ বা, $-2a = -6$	$a = ?$

বা, $a = 3$

অতএব, a এর মান 3 হলে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

সমস্যা ১৯। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

মনে করি, x-অক্ষ বরাবর একটি একক ভেক্টর, $\hat{r} = \hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\cdot\hat{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = 2 + 0 + 0$

$\therefore \quad \vec{A}\cdot\hat{r} = 2$

আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\hat{r} = |A|\,|r| \cos\theta$

বা, $2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\cdot 1 \cos\theta = \sqrt{9}\cos\theta = 3\cos\theta$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48.19°$

আবার, ধরি, y অক্ষ বরাবর একটি একক ভেক্টর, $\hat{y} = 0\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\cdot\hat{y} = |A|\,|y|\cos\theta$

বা, $(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(0\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) = \sqrt{2^2 + 1^2 (-2)^2}\cdot 1\cos\theta$

বা, $1 = 3\cos\theta$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.53°$

আবার ধরি, z-অক্ষ বরাবর একটি একক ভেক্টর, $\hat{z} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}$

এখন, $\vec{A}\cdot\hat{z} = |A|\,|z|\cos\theta$

বা, $(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})(0\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}) = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\,.\,1\cos\theta$

বা, $-2 = 3\cos\theta$

বা, $\cos\theta = -\frac{2}{3}$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = 131.81°$

নির্ণেয় কোণের মান 48.19°, 70.53° এবং 131.81°।

সমস্যা ২০। যদি $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ এবং $A + B = C$ হয় তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

অর্থাৎ $\vec{C}$ হলো $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি।

আমরা জানি,	দেওয়া আছে,
$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha$	$C = A + B$

বা, $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = 1 = \cos 0°$

$\therefore \quad \alpha = 0°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 0°।

সমস্যা ২১। $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। $\vec{A} + \vec{B}$ ও $\vec{A} - \vec{B}$ পরস্পর লম্ব কি-না গাণিতিকভাবে দেখাও।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$; $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}}$

$= \frac{3 - 2 - 6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-5}{14}$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{14}\right) = 110.925°$

এখন, $\vec{A} + \vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $(\vec{A} + \vec{B})$ এবং $(\vec{A} - \vec{B})$ পরস্পর লম্ব হবে যদি–

$(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) = 0$ হয়

এখন, $(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) = (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\cdot(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= -8 + 3 + 5 = -8 + 8 = 0$

$\therefore$ $(\vec{A} + \vec{B})$ এবং $(\vec{A} - \vec{B})$ পরস্পর লম্ব।

সমস্যা ২২। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ ও $B = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণের সাইনের মান নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(2\hat{i} + \hat{k}).(-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 1^2}\times\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-2 + 0 + 2}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}} = 0$$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমস্যা ২৩। ভেক্টর $\vec{A} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এর উপর ভেক্টর $B = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ বের কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ = θ (ধরি)

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A} = \frac{(6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}}$

$= \frac{12 + 8 - 6}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2$

অতএব, $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ 2।

সমস্যা ২৪। যদি $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হয় তবে, ভেক্টর $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ = θ

$\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = ?$

$\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $B\cos\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \dfrac{(9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k})}{\sqrt{4^2+(-6)^2+5^2}}$

$= \dfrac{36-6-30}{\sqrt{77}} = \dfrac{0}{\sqrt{77}} = 0$

আবার, $B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \dfrac{0}{A} = 0$

অতএব, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ 0 এবং $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ 0.

সমস্যা ২৫। $\vec{A} = \hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ বা অংশক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

এখানে, $\vec{A} = \hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$; $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}$

$= \dfrac{(\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}$

$= \dfrac{6+12+10}{\sqrt{49}} = \dfrac{28}{7} = 4$

অতএব, $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ বা অংশক 4 একক।

সমস্যা ২৬। $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\vec{A}\cdot\vec{B} = (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

$= 2-2+2$

$= 2$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$

এবং $B = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore\ A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \dfrac{2}{3}$

অতএব, $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $\dfrac{2}{3}$।

সমস্যা ২৭। দুটি ভেক্টরের মান যথাক্রমে 10 এবং 15 একক। তারা পরস্পরের সাথে সমকোণে ক্রিয়া করে। এদের ভেক্টর গুণফলের মান বের কর।

সমাধান : এখানে, ভেক্টর, $|\vec{A}| = 10$; $|\vec{B}| = 15$

এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90°$

এখন, ভেক্টর গুণফলের মান, $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

$= 15\times10\times\sin 90° = 15\times10\times1 = 150$

অতএব, ভেক্টর গুণফলের মান 150 একক।

সমস্যা ২৮। $\vec{A} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। দেখাও যে, এরা পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{B} = 5\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}$

ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফলের মান শূন্য হলে এরা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(5-5)+\hat{j}(5-5)+\hat{k}(5-5)$

$= 0+0+0 = 0$

অতএব, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

সমস্যা ২৯। $\vec{A} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$; দেখাও যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান : আমরা জানি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হলে, $\vec{A}\times\vec{B} = 0$ হবে।

এখানে, $\vec{A} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-12+12)-\hat{j}(6-6)+\hat{k}(-4+4)$

বা, $\vec{A}\times\vec{B} = 0$

সুতরাং A ও B পরস্পর সমান্তরাল। **(দেখানো হলো)**

সমস্যা ৩০। $\vec{A} = \hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর $(\vec{B}+\vec{C})\times\vec{A} = \vec{B}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{A}$.

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$; $\vec{B} = 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

এবং $\vec{C} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

বামপক্ষ $= (\vec{B}+\vec{C})\times\vec{A}$

$= (3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}+2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\times(\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

$= (5\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})\times(\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-2-9)-\hat{j}(10-3)+\hat{k}(15+1) = -11\hat{i}-7\hat{j}+16\hat{k}$

ডানপক্ষ $= \vec{B}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{A}$

$= \{(3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\times(\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\}+\{(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\times(\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\}$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \{\hat{i}(4+3)-\hat{j}(6+1)+\hat{k}(9-2)\}+\{\hat{i}(-6-12)$

$-\hat{j}(4-4)+\hat{k}(6+3)\}$

$= 7\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}-18\hat{i}-0\hat{j}+9\hat{k} = -11\hat{i}-7\hat{j}+16\hat{k}$

$\therefore (\vec{B}+\vec{C})\times\vec{A} = \vec{B}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{A}$ **(প্রমাণিত)**

সমস্যা ৩১। $\vec{P} = 2\hat{i}+m\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 10\hat{i}-5\hat{j}-15\hat{k}$। m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান : এখানে, $\vec{P} = 2\hat{i}+m\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 10\hat{i}-5\hat{j}-15\hat{k}$

ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল বলে,

$\vec{P}\times\vec{Q} = 0$

বা, $(2\hat{i}+m\hat{j}-3\hat{k})\times(10\hat{i}-5\hat{j}-15\hat{k}) = 0$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & m & -3 \\ 10 & -5 & -15 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(-15m+15)\hat{i}+(-30+30)\hat{j}+(-10-10m)\hat{k} = 0$

বা, $(-15m+15)\hat{i}+(-10-10m)\hat{k} = 0$

উভয়পক্ষে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-15m+15 = 0$ আবার, $-10-10m = 0$

বা, $m = 1$ বা, $m = -1$

অতএব, m এর মান 1 বা -1।

সমস্যা ৩২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = x\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$। x এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = x\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে x = ?

আমরা জানি, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ x & 6 & -8 \end{vmatrix}$

$= (-24 + 24)\hat{i} - (-16 + 4x)\hat{j} + (12 - 3x)\hat{k}$

$= (16 - 4x)\hat{j} + (12 - 3x)\hat{k}$

দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = 0$

বা, $(16 - 4x)\hat{j} + (12 - 3x)\hat{k} = 0$

উভয়পক্ষে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$16 - 4x = 0$

বা, $x = \frac{16}{4} = 4$

$\therefore x = 4$

আবার, $12 - 3x = 0$

বা, $x = \frac{12}{3}$

$\therefore x = 4$

অতএব, x এর মান 4 এর জন্য ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

সমস্যা ৩৩। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুইটি ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। উক্তিটির যথার্থতা নিরূপণ কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4 - 6) + \hat{j}(3 + 8) + \hat{k}(4 + 1) = -2\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}$

ধরি, একক ভেক্টর $= \hat{\eta}$

$\therefore \hat{\eta} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{-2\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (11)^2 + (5)^2}} = \frac{-2\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{4 + 121 + 25}}$

$= \frac{-2\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{150}} = -\frac{2}{\sqrt{150}}\hat{i} + \frac{11}{\sqrt{150}}\hat{j} + \frac{5}{\sqrt{150}}\hat{k}.$

সমস্যা ৩৪। $\vec{A} = \hat{i} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$ ভেক্টর রাশি দুটি যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (0 + 1)\hat{i} + (-1 - 0)\hat{j} + (1 - 0)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

এখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অভিমুখে একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm\frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}.$

সমস্যা ৩৫। $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : এখন,

এখানে, $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$
এবং $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \times (-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(2 - 3) - \hat{j}(-8 + 6) + \hat{k}(4 - 2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর $= \hat{\eta}$

$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$= \pm\frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + 2^2}} = \pm\frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \pm\frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$

সমস্যা ৩৬। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে,
$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \times (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= (4 - 3)\hat{i} + (-6 - 4)\hat{j} + (-6 - 12)\hat{k} = \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{425}$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{425}}(\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k})$

সমস্যা ৩৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, দেখাও যে ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

সমাধান : $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকবে যদি $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot C = 0$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$
$\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4 - 2) - \hat{j}(8 + 3) + \hat{k}(-4 - 3) = 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

এখন, $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 + 33 - 35 = 0$

অতএব, $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

সমস্যা ৩৮। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}) \times (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= (6 + 9)\hat{i} + (-12 + 2)\hat{j} + (6 + 24)\hat{k}$

$= 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(15)^2+(-10)^2+(30)^2} = \sqrt{225+100+900} = 35$

ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকে একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm\dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

$$= \pm\frac{15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}}{35} = \pm\left(\frac{3}{7}\hat{i}-\frac{2}{7}\hat{j}+\frac{6}{7}\hat{k}\right)$$

সমস্যা ৩৯। দুটি একক ভেক্টর $\hat{a}$ ও $\hat{b}$ এর অন্তর্গত কোণ θ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$

সমাধান : $\hat{a}$ ও $\hat{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ।

আমরা জানি,

$\hat{a}\cdot\hat{b} = |\hat{a}|\,|\hat{b}|\cos\theta$

বা, $1\cdot 1 = 1\cdot 1\cdot\cos\theta$

বা, $\cos\theta = 1 = \cos 0°$

$\therefore \theta = 0°$

এখানে, $\hat{a} = 1$; $\hat{b} = 1$

$|\hat{a}| = 1$

$|\hat{b}| = 1$

বামপক্ষ $= \sin\frac{\theta}{2}$

$= \sin 0° = 0°$

ডানপক্ষ $= \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$

$= \frac{1}{2}|1-1| = 0$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$ **(প্রমাণিত)**

সমস্যা ৪০। একটি ঘন সামান্তরিকের তিনটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{B} = -2\hat{i}+2\hat{j}$ ও $\vec{C} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ দ্বারা সূচিত করা হলে, উহার আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{B} = -2\hat{i}+2\hat{j}$ এবং $\vec{C} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})\times(-2\hat{i}+2\hat{j})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(0-8)-\hat{j}(0+8)+\hat{k}(4+6) = -8\hat{i}-8\hat{j}+10\hat{k}$

$\therefore (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (-8\hat{i}-8\hat{j}+10\hat{k})\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$= -8-8+10 = -6$

অতএব $|(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}| = 6$

ঘন সামান্তরিকের আয়তন 6 ঘন একক।

সমস্যা ৪১। $\vec{A} = 3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\vec{C} = 3\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}$ হলে, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ও $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$

$\vec{B} = 6\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 3\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}$

এখন, $\vec{B}\times\vec{C} = (6\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-16-4)-\hat{j}(-24+6)+\hat{k}(-12-12)$

$= -20\hat{i}+18\hat{j}-24\hat{k}$

$\therefore A\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})\times(-20\hat{i}+18\hat{j}-24\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ -20 & 18 & -24 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(48-36)-\hat{j}(-72+40)+\hat{k}(54-40)$

$= 12\hat{i}+32\hat{j}+14\hat{k}$

এবং $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(-20\hat{i}+18\hat{j}-24\hat{k})$

$= -60-36-48 = -144$

সমস্যা ৪২। একটি বাক্সের তিনটি ধার যথাক্রমে $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j}$ এবং $\vec{C} = 5\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা সূচিত হলো। বাক্সের আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$; $\vec{B} = 4\hat{j}$; $\vec{C} = 5\hat{j}+3\hat{k}$

ভেক্টর তিনটি একটি বাক্সের তিনটি ধার হলে এর আয়তন হবে $(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}$ এর সমান,

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})\times 4\hat{j}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (0-16)\hat{i}+(0-0)\hat{j}+(8-0)\hat{k} = -16\hat{i}+8\hat{k}$

আবার, $(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} = (-16\hat{i}+8\hat{k}).(5\hat{j}+3\hat{k})$

$= 0+0+24 = 24$

∴ বাক্সটির আয়তন 24 বর্গ একক।

সমস্যা ৪৩। তিনটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}-m\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, m এর মান কত হলে ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হবে?

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}-m\hat{k}$; $\vec{C} = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হলে, m = ?

আমরা জানি, তিনটি ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ একই সমতলে অবস্থিত হলে, $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = 0$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -m \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(m+3)-\hat{j}(-2m-1)+\hat{k}(-6+1)$

$= (m+3)\hat{i}+\hat{j}(2m+1)-5\hat{k}$

আবার, $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = 0$

বা, $\{(m+3)\hat{i}+\hat{j}(2m+1)-5\hat{k})\}\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}) = 0$

বা, $3(m+3)-4(2m+1)+20 = 0$

বা, $3m+9-8m-4+20 = 0$

বা, $-5m = -25$

$\therefore m = 5$

অতএব, m এর মান 5 হলে ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হবে।

সমস্যা ৪৪। $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j}$ এবং $\vec{C} = 5\hat{j}+m\hat{k}$, m এর মান কত হলে parallelopiped এর আয়তন 24 একক হবে?

সমাধান : আমরা জানি, তিনটি ভেক্টর দ্বারা আবদ্ধ ঘন বস্তুর আয়তন (V)। যেকোনো দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের সাথে অপরটি ডট গুণফলের সমান।

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রে, $V = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j}$ এবং $\vec{C} = 5\hat{j}+m\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= (0-16)\hat{i} - (0-0)\hat{j} + (8-0)\hat{k} = -16\hat{i} + 8\hat{k}$

তাহলে, $V = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ বা, $(-16\hat{i} + 8\hat{k})\cdot(5\hat{j} + m\hat{k})$

$= -16\times 0 + 0\times 5 + 8\times m = 8m$

প্রশ্নমতে, $8m = 24 \quad \therefore m = 3.$

অতএব, m এর মান 3।

সমস্যা ৪৫। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ দেখাও যে ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

সমাধান : $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকবে যদি $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot C = 0$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4-2) - \hat{j}(8+3) + \hat{k}(-4-3) = 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

এখন, $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k})\cdot(\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 + 33 - 35 = 0$

অতএব, $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

সমস্যা ৪৬। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 + |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2$.

সমাধান : আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ এবং $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

$\therefore \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\theta$

বামপক্ষ $= \left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2 + \left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2$

$= A^2B^2\cos^2\theta + A^2B^2\sin^2\theta$

$= A^2B^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = A^2B^2 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 + |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2$. **(প্রমাণিত)**

সমস্যা ৪৭। $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি

$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$

$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$

$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (10)^2}$

$= \sqrt{4 + 196 + 100} = \sqrt{300} = 17.32$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}| = \frac{1}{2}\times 17.32 = 8.66$ বর্গ একক

সমস্যা ৪৮। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ নির্দেশ করে। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত হবে।

সমাধান: এখন,

এখানে, কর্ণ, $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং কর্ণ, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{A}\times\vec{B} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})\times(\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

$= (6+6)\hat{i} + (2-9)\hat{j} + (-9-2)\hat{k} = 12\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(12)^2 + (-7)^2 + (-11)^2}$

$= \sqrt{144 + 49 + 121} = \sqrt{314}$

$\therefore$ সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{314} = 8.86$ বর্গ একক

সমস্যা ৪৯। $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু,

$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$

$= |(4\hat{i} + 3\hat{j})\times(-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})|$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \left|(3-0)\hat{i} + (0-4)\hat{j} + (-4+6)\hat{k}\right|$

$= |3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}|$

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = 5.38$

অতএব, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল 5.38 বর্গ একক।

সমস্যা ৫০। (i) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ হলে দেখাও যে, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব।

(ii) যদি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি একক ভেক্টর হয় এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হয় তবে দেখাও যে, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4$

সমাধান : (i) ধরি, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র থেকে পাই,

লব্ধি, $R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$

অর্থাৎ $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = (a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

এবং $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

প্রশ্নানুসারে, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

বা, $(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

বা, $(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha) = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)$

[উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই]

বা, $a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha - a^2 - b^2 + 2ab\cos\alpha = 0$

বা, $4ab\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0 = \cos 90°$

$\therefore \alpha = 90°$ অর্থাৎ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব। **(দেখানো হলো)**

(ii) বামপক্ষ $= |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2$

$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} - 2.\vec{a}.\vec{b} - 2.\vec{a}.\vec{b}$

$= 2(\vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b})$

$= 2(1+1)$ [$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি একক ভেক্টর হওয়ায় $\vec{a}.\vec{a} = 1$ এবং $\vec{b}.\vec{b} = 1$]

$= 4$

অতএব, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4$. **(দেখানো হলো)**

সমস্যা ৫১। পরস্পরের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান 80 N। যদি লব্ধি একটি বলের সাথে 60° কোণে আনত থাকে তবে বল দুইটির মান কত হবে?

সমাধান : মনে করি, প্রথম বল $= F_1$ এবং দ্বিতীয় বল $= F_2$

$\therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে,
$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$
বা, $80 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$
বা, $(80)^2 = F_1^2 + F_2^2$
$\therefore \quad F_1^2 + F_2^2 = 6400$ .... (1)

এখানে,
লব্ধি, R = 80 N

ধরি, লব্ধি, R, F_1 এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{F_2 \sin 90^\circ}{F_1 + F_2 \cos 90^\circ}$

বা, $\tan 60^\circ = \dfrac{F_2}{F_1}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{F_2}{F_1}$

$\therefore \quad F_2 = \sqrt{3}\cdot F_1$ ....(2)

F_2 এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই, $F_1^2 + (\sqrt{3}\,F_1)^2 = 6400$
বা, $4F_1^2 = 6400$
বা, $F_1^2 = 1600$
$\therefore \quad F_1 = 40$ N
F_1 এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাই, $F_2 = \sqrt{3}\times 40 = 40\sqrt{3}$ N
অতএব, বলদ্বয় যথাক্রমে 40 N এবং $40\sqrt{3}$ N।

সমস্যা ৫২। অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ কে ব্যবকলন করে কীভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায়?

সমাধান : এখানে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r}$ কে একবার ব্যবকলন করে বেগ এবং প্রাপ্ত বেগের রাশিকে ব্যবকলন করে ত্বরণ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ বেগ, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

এবং ত্বরণ, $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}(\vec{v}) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dy}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}\right)$
$= \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k}.$

সমস্যা ৫৩। দুটি ভেক্টর, $\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}$ ও $\vec{Q} = 5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে, i. $\dfrac{d}{dt}(\vec{P}\cdot\vec{Q})$ নির্ণয় কর। ii. $\dfrac{d}{dt}(\vec{P}\times\vec{Q})$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{i}t + k(2t+1)$ এবং $\vec{Q} = \hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3.$

$\dfrac{d}{dt}(\vec{P}.\vec{Q}) = ?$ এবং $\dfrac{d}{dt}(\vec{P}\times\vec{Q}) = ?$

$\therefore \quad \vec{P}.\vec{Q} = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + k(2t+1)\}.\{\hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3\}$
$= 5t^3 1 - t^2 - 2t^4 - t^3 = 4t^3 - t^2 - 2t^4$

(i) $\dfrac{d}{dt}(\vec{P}.\vec{Q}) = \dfrac{d}{dt}(4t^3 - t^2 - 2t^4)$
$= 12t^2 - 2t - 8t^3. = -8t^3 + 12t^2 - 2t.$

আবার, $\vec{P}\times\vec{Q} = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + k(2t+1)\}\times\{\hat{i}5t + \hat{j}t - kt^3\}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & (2t+1) \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) + \hat{j}(10t^2 + 5t + t^5) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$

(ii) $\dfrac{d}{dt}(\vec{P}\times\vec{Q}) = \dfrac{d}{dt}[\hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) + \hat{j}(10t^2 + 5t + t^5) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)]$
$= \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(20t + 5 + 5t^4) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$
$= \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + j(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t).$

সমস্যা ৫৪। যদি $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ হয় তবে $(1, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$

$\vec{\nabla}\phi = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2)\hat{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2)\hat{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2)\hat{k}$
$= 6xy\hat{i} + (3x^2 - 3y^2z^2)\hat{j} - 2y^3z\hat{k}$

এখন, (1, –2, – 1) বিন্দুতে,

$\vec{\nabla}\phi = 6.1(-2)\hat{i} + (3.1^2 - 3.(-2)^2.(-1)^2\hat{j} - 2.(-2)^3\cdot(-1)\hat{k}$
$= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 16\hat{k}$

সমস্যা ৫৫। যদি $\phi = 2x^2y - 4y^3 + z^2$ হয়, তবে $\nabla\phi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\phi = 2x^2y - 4y^3 + z^2$

$\Delta\phi = \Delta\cdot(2x^2y - 4y^3 + z^2)$
$= \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(2x^2y - 4y^3 + z^2)$
$= \dfrac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\hat{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2y - 4y^3)\hat{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}z^2\hat{k}$
$= 2y\cdot 2x\hat{i} + (2x^2 - 12y^2)\hat{j} + 2z\hat{k} = 4xy\hat{i} + 2(x^2 - 6y^2)\hat{j} + 2z\hat{k}.$

সমস্যা ৫৬। যদি $\phi = 2xy^4 - x^2z$ হয়, তবে (2, –1, –2) বিন্দুতে $\nabla\phi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\varphi = 2xy^4 - x^2z$

$\therefore \quad \vec{\nabla}\varphi = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy^4 - x^2z)\hat{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^4 - x^2z)\hat{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}(2xy^4 - x^2z)\hat{k}$
$= (2y^4 - 2xz)\hat{i} + 8xy^3\hat{j} - x^2\hat{k}$

এখন, (2, – 1, – 2) বিন্দুতে

$\vec{\nabla}\varphi = \{2(-1)^4 - 2\cdot2\cdot(-2)\}\hat{i} + 8\cdot2(-1)^3\hat{j} - 2^2\hat{k} = 10\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k}$

সমস্যা ৫৭। $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$ হলে (1, – 1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{A}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$

$\therefore \vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2z) - \dfrac{\partial}{\partial y}(2y^3z^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(xy^2z) = 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$

এখন, (1, – 1, 1) এ

$\vec{\nabla}.\vec{A} = 2.1.1 - 6.(-1)^2.1^2 + 1.(-1)^2 = 2 - 6 + 1 = -3.$

সমস্যা ৫৮। b এর কোন মানের জন্য $\vec{v} = (x - 3y)\hat{i} + (3y - z)\hat{j} + (bz - 2x)\hat{k}$ সলিনয়ডাল (চোঙাকৃতি) হবে?

সমাধান : একটি ভেক্টর $\vec{A}$ সলিনয়ডাল হওয়ার শর্ত হলো ভেক্টরটির divergence শূন্য হতে হবে। অর্থাৎ, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ হবে।

যেখানে, $\vec{\nabla} = \dfrac{d}{dx}\hat{i} + \dfrac{d}{dy}\hat{j} + \dfrac{d}{dz}\hat{k}$

এখন, দেওয়া আছে, $\vec{V} = (x - 3y)\hat{i} + (3y - z)\hat{j} + (bz - 2x)\hat{k}$

$\vec{V}$ ভেক্টরটি যদি সলিনয়ডাল হয় তাহলে,

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$

বা, $\left(\dfrac{d}{dx}\hat{i} + \dfrac{d}{dy}\hat{j} + \dfrac{d}{dz}\hat{k}\right)\cdot\{(x - 3y)\hat{i} + (3y - z)\hat{j} + (bz - 2x)\hat{k}\} = 0$

বা, $\dfrac{d}{dx}(x - 3y) + \dfrac{d}{dy}(3y - z) + \dfrac{d}{dz}(bz - 2x) = 0$

বা, $\left\{\dfrac{d}{dx}(x) - \dfrac{d}{dx}(3y)\right\} + \left\{\dfrac{d}{dy}(3y) - \dfrac{d}{dy}(z)\right\} + \left\{\dfrac{d}{dz}(bz) - \dfrac{d}{dz}(2x)\right\} = 0$

বা, $(1 - 0) + (3 - 0) + (b - 0) = 0$
বা, $1 + 3 + b = 0$
বা, $b + 4 = 0$
$\therefore \quad b = -4$

$\therefore$ b এর মান – 4 এর জন্য $\vec{V}$ সলিনয়ডাল হবে।

সমস্যা ৫৯। (1, –1, 1) অবস্থানে $\vec{A} = 3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k}$

$$\therefore \vec{\Delta}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$
$$= 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$$

$\therefore$ (1, –1, 1) বিন্দুতে $\vec{\Delta}\cdot\vec{A} = 3\cdot(-1)\cdot(1)^3 + 4\cdot(1)\cdot(-1) - (1)^3\cdot(-1)^2$
$$= -3 - 4 - 1 = -8$$

সমস্যা ৬০। λ এর মান কত হলে $\vec{V} = (2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (\lambda z + x)\hat{k}$ সলিনয়ডাল বা চোঙাকৃতি হবে?

সমাধান : $\vec{V}$ চোঙাকৃতি বা সলিনয়ডাল হবে যদি $\vec{\Delta}\cdot\vec{V} = 0$ হয়।

বা, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\{(2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (\lambda z + x)\hat{k}\} = 0$

বা, $\frac{\partial}{\partial x}(2x + y) + \frac{\partial}{\partial y}(3y + z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda z + x) = 0$

বা, $2 + 3 + \lambda = 0$

$\therefore$ $\lambda = -5$ হলে $\vec{v}$ চোঙাকৃতি বা সলিনয়ডাল হবে।

সমস্যা ৬১। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ অঘূর্ণনশীল হলে দেখাও যে, $\vec{A}\times\vec{B}$ সলিনয়ডাল। **[Hints : $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0, \vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$]**

সমাধান : আমরা জানি, $\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

প্রশ্নমতে, $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{0}, \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{0} = \vec{B}.\vec{0} - \vec{A}.\vec{0} = 0 - 0 = 0$

$\therefore$ $\vec{A}\times\vec{B}$ সলিনয়ডাল।

সমস্যা ৬২। যদি $\vec{A} = x^3z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$ হয় তবে, (1, 2, – 3) বিন্দুতে div$\vec{A}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = x^3z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$

এখন, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(x^3z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k})$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$
$$= 3x^2z - 6y^2z^2 + xy^2$$

$\therefore$ (1, 2, – 3) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3(1)^2(-3) - 6(2)^2(-3)^2 + 1(2)^2$
$$= -9 - 216 + 4 = -221.$$

সমস্যা ৬৩। যদি $\vec{A} = xz^3\hat{i} - 2x^2yz\hat{j} + 2yz^4\hat{k}$ হয় তবে (1, – 1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = xz^3\hat{i} - 2x^2yz\hat{j} + 2yz^4\hat{k}$

এখন, $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial x}xz^3\right] + \hat{k}\left[-\frac{\partial}{\partial x}2x^2yz - \frac{\partial}{\partial y}xz^3\right]$$
$$= \hat{i}(2z^4 + 2x^2y) - \hat{j}(-3xz^2) + \hat{k}(-4xyz)$$

এখন, (1, –1, 1) বিন্দুতে

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{i}(2.1^4 + 2.1^2(-1)) + \hat{j}.3.1.1^2 - \hat{k}.4.1(-1).I$
$$= \hat{i}(2 - 2) + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$\therefore$ $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

সমস্যা ৬৪। দেখাও যে, বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র $\vec{E} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ একটি সংরক্ষিত ক্ষেত্র।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{E} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

ভেক্টর অপারেটর, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

Curel F $= \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ হলে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র সংরক্ষিত ক্ষেত্র।

এখন, $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0) = 0$$

অতএব, বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র $\vec{F}$ সংরক্ষিত ক্ষেত্র।

সমস্যা ৬৫। দেখাও যে, $\vec{A} = (x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k}$ একটি অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

সমাধান : $\vec{A}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে যদি $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$ হয়।

এখন, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\{(x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k}\}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + 4z & 2x - 3y - z & 4x - y + 2z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\{(-1) - (-1)\} - \hat{j}\{4 - 4\} + \hat{k}\{2 - 2\} = 0$$

অতএব, $\vec{A}$ একটি অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

সমস্যা ৬৬। দেখাও যে, $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} - (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ অঘূর্ণনশীল।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৬৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ৬৭। দেখাও যে, $\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0$ যেখানে $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এখন, $\vec{\nabla}\times\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0) = 0$$

$\therefore$ $\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0$. **(দেখানো হলো)**

সমস্যা ৬৮। $\vec{A} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ হলে Curl Curl $\vec{A}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$

এখন, Curl $\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-2xz)\right\} + \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2yz)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right\}$$
$$= \hat{i}(2z + 2x) + \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(-2z - x^2)$$
$$= (2z + 2x)\hat{i} - (2z + x^2)\hat{k}$$

এখন, Curl Curl $\vec{A}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z + 2x & 0 & -(2z + x^2) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-2z - x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(0)\right\} + \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(2z + 2x) - \frac{\partial}{\partial x}(-2z - x^2)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(2z - 2x)\right\}$$

$$= \hat{i}\,(0 - 0) + \hat{j}\,(2 + 2x) + \hat{k}\,(0 - 0)$$

$$= 2\,(1 + x)\,\hat{j}$$

সমস্যা ৬৯। $\vec{V} = 3x^2\hat{i} + (4xy + 5z)\hat{j} + (6y^2 - 7x)\hat{k}$ **হলে div** $\vec{V}$ **ও Curl** $\vec{V}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৯ ও ৫৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [**উত্তর :** $10x, (12y - 5)\hat{i} + 7\hat{j} + 4y\hat{k}$]

সমস্যা ৭০। $\vec{F} = (2x + y - z)\hat{i} + (x - 2y + 3z)\hat{j} + (x - y - z)\hat{k}$ **একটি অঘূর্ণনশীল (সংরক্ষণশীল) ভেক্টর কিনা– যাচাই কর।**

সমাধান : একটি ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল ভেক্টর হওয়ার শর্ত হলো ভেক্টরটির curl শূন্য হবে। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হবে।

যেখানে, $\vec{\nabla} = \frac{d}{dx}\hat{i} + \frac{d}{dy}\hat{j} + \frac{d}{dz}\hat{k}$

এখন, দেওয়া আছে, $\vec{F} = (2x + y - z)\hat{i} + (x - 2y + 3z)\hat{j} + (x - y - z)\hat{k}$

$\vec{F}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হলে, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হবে।

এখন, $$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ (2x + y - z) & (x - 2y + 3z) & (x - y - z) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{d}{dy}(x - y - z) - \frac{d}{dz}(x - 2y + 3z)\right\}$$
$$- \hat{j}\left\{\frac{d}{dx}(x - y - z) - \frac{d}{dz}(2x + y - z)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{d}{dx}(x - 2y + 3z) - \frac{d}{dy}(2x + y - z)\right\}$$

$$= \hat{i}\,\{(0 - 1 - 0) - (0 - 0 + 3)\} - \hat{j}\,\{(1 - 0 - 0) - (0 + 0 - 1)\} + \hat{k}\,\{(1 - 0 + 0) - (0 + 1 - 0)\}$$

$$= -4\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + \hat{k} \cdot 0 = -4\hat{i} - 2\hat{j}$$

যেহেতু, $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$. তাই $\vec{F}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল নয়।

সেট-২ : জটিল সমস্যাবলি

সমস্যা ৭১। দুটি কণা যথাক্রমে $12\ m\ s^{-1}$ ও $20\ m\ s^{-1}$ বেগে $120°$ কোণে ক্রিয়া করে কোনো একটি বিন্দুকে অতিক্রম করে। 4 s পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কত?

সমাধান : এখানে, ১ম কণার বেগ, $v_1 = 12\ m\ s^{-1}$

২য় কণার বেগ, $v_2 = 20\ m\ s^{-1}$

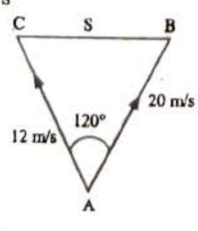
এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$

কণাদ্বয়ের অতিক্রান্ত দূরত্বের সময় = 4 s

কণাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, BC = S = ?

দূরত্ব, $AB = 20\ m\ s^{-1} \times 4\ s = 80\ m$

দূরত্ব, $AC = 12\ m\ s^{-1} \times 4\ s = 48\ m$



আমরা পাই, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB\,.\,AC\cos 120°}$

$$= \sqrt{(80)^2 + (48)^2 - 2 \times 80 \times 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{6400 + 2304 + 3840} = 112\ m$$

অতএব, কণাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 112 m।

সমস্যা ৭২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে P(1, 3, 2), Q(2, – 1, 1), R(– 1, 2, 3)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{PQ} = (2 - 1)\hat{i} + (-1 - 3)\hat{j} + (1 - 2)\hat{k}$
$= \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{PR} = (-1 - 1)\hat{i} + (2 - 3)\hat{j} + (3 - 2)\hat{k}$
$= -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$

$$= \frac{1}{2}|(\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}) \times (-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})|$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|\{\hat{i}(-4 - 1) + \hat{j}(2 - 1) + \hat{k}\,(-1 - 8)\}|$$

$$= \frac{1}{2}|-5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-9)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25 + 1 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{107} = 5.17 \text{ বর্গ একক}$$

অতএব, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 5.17 বর্গ একক।

সমস্যা ৭৩। একজন সাঁতারু স্রোতহীন অবস্থায় নদীতে $3\ kmh^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। স্রোতের নদীতে তিনি এপার থেকে ওপারে যাওয়ার জন্য সাঁতার কাটা শুরু করে $5\ kmh^{-1}$ বেগে কোনাকুনি নদী পার হলেন। নদীতে স্রোতের বেগ কত? কত কোণে সাঁতারু সাঁতার দিয়েছিল?

সমাধান : এখানে, স্রোতহীন নদীতে সাঁতারুর বেগ, $P = 3\ km\ h^{-1}$

স্রোতের নদীতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ, $R = 5\ km\ h^{-1}$

সাঁতারু এবং স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

স্রোতের বেগ, Q = ?

আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $(5)^2 = (3)^2 + Q^2 + 2 \times 3 \times Q \times \cos 90°$

বা, $25 = 9 + Q^2$ [$\because \cos 90° = 0$]

বা, $Q^2 = 16$ $\therefore Q = 4\ km\ h^{-1}$

অতএব, নদীতে স্রোতের বেগ $4\ km\ h^{-1}$।

এরপর : ৯৬(ii) গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [**উত্তর :** 126.87°]

সমস্যা ৭৪। একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 100 মিটার প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পার হতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করতে পারে। স্রোতের গতিবেগ বের কর। সাঁতারুর পক্ষে নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছানো সম্ভব কিনা? গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : এখানে, প্রস্থ, S = 100 মিটার

সময়, $t_1 = 4$ মিনিট এবং $t_2 = 5$ মিনিট

ধরি, স্রোতের বেগ v = ? লোকটির বেগ = v_1

আমরা জানি, $S = v_1 t_1$

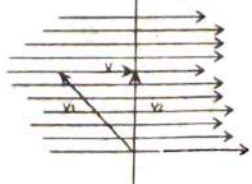
বা, 100 মিটার = $v_1 \times 4$ মিনিট

∴ $v_1 = 25$ মিটার/ মিনিট

ধরি, লব্ধি বেগ = v_2

আমরা জানি, $S = v_2 t_2$

বা, $v_2 = \frac{100}{5} = 20$ মিটার/ মিনিট



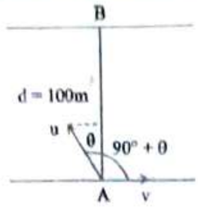
আবার, আমরা জানি, $v_1^2 = v^2 + v_2^2$

অর্থাৎ $(25)^2 = v^2 + (20)^2$

∴ v = 15 মিটার/ মিনিট

নির্ণেয় স্রোতের গতিবেগ 15 মিটার/ মিনিট।

দ্বিতীয় অংশ : ধরি, সাঁতারু স্রোতের দিকের সাথে $(90° + \theta)$ কোণে যাত্রা করলে নদীর প্রস্থ বরাবর ঠিক বিপরীত পার্শ্বে পৌঁছাতে পারবে।



আমরা পাই, $\sin\theta = \frac{15}{20} = 0.75$

বা, $\theta = 48.59°$

$\therefore$ স্রোতের দিকের সাথে $(90° + 48.59°) = 138.59°$ কোণে নৌকা চালাতে হবে।

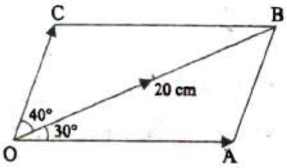
স্রোতের দিকের সাথে $60°$ কোণে যাত্রা করলে অপর পাড়ে পৌঁছাবার দূরত্ব = x

আমরা জানি, $\frac{x}{d} = \frac{u\cos\alpha + v}{u\sin\alpha}$ বা, $\frac{x}{100} = \frac{20\cos 60° + 15}{20\sin 60°}$

বা, $x = 144.33$ m

সমস্যা ৭৫। OABC একটি সামান্তরিক। এর সন্নিহিত বাহুদ্বয় OA এবং OC, কর্ণ $\vec{OB} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে 30° ও 40° কোণ উৎপন্ন করে। কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 cm। (i) OA এবং OC এর দৈর্ঘ্য কত? (ii) কোণ দুইটিকে বিনিময় করা হলে কর্ণের মানের পরিবর্তন হবে কিনা–গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : (i) এখানে, OABC সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় OA ও OC, কর্ণ OB-এর সাথে যথাক্রমে 30° ও 40° কোণ তৈরি করে। কর্ণের দৈর্ঘ্য = OB = 7 cm



দৈর্ঘ্য, OA = ?; OC = ?

আমরা পাই, $OA = \frac{7\text{ cm} \times \sin 40°}{\sin(30° + 40°)} = \frac{7\text{ cm} \times \sin 40°}{\sin 70°} = 4.79$ cm

$\therefore OA = 4.79$ cm

এবং $OC = \frac{7\text{ cm} \times \sin 30°}{\sin(30° + 40°)} = \frac{7\text{ cm} \times \sin 30°}{\sin 70°} = 3.72$ cm

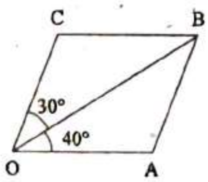
$\therefore OC = 3.72$ cm

অতএব, OA এর দৈর্ঘ্য 4.79 cm এবং OC এর দৈর্ঘ্য 3.72 cm।

(ii) $OA = \frac{OB\sin 30°}{\sin(30° + 40°)}$

$= \frac{7\sin 30°}{\sin 70°} = 3.72$

$OC = \frac{OB\sin 40°}{\sin(30° + 40°)} = \frac{7\sin 40°}{\sin 70°} = 4.79$



কর্ণের মান ঠিক রেখে দেখা গেল OA ও OC ও পরিবর্তন হয়।

$\therefore$ কর্ণের মানের পরিবর্তন হবে না।

সমস্যা ৭৬। প্রমাণ কর : (i) $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ (ii) $\nabla \times \nabla\varphi = 0$

(iii) $\Delta \cdot (\Delta \times F) = 0$ বা $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ সলিনয়ডাল

সমাধান : (i) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$

$$= \hat{i}\left(\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \hat{j}\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}}{r^2}$$

এখন, $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} + \frac{1}{r}\right)$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= 2.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3.2x^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 2\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) = 0$$

(ii) শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৬৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

(iii) শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৬০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ৭৭। একটি নৌকা নদীর প্রস্থ বরাবর 20 m s^{-1} বেগে চলা শুরু করল। নদীতে স্রোতের বেগ 15 m s^{-1} এবং নদীটি 2 km প্রশস্ত হলে অপর পাড়ে পৌঁছাতে কত সময় লাগবে? নৌকার লব্ধি বেগ কত হবে?

সমাধান : এখানে, নৌকার বেগ, $v = 20$ ms^{-1}

স্রোতের বেগ, $u = 15$ ms^{-1}

u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

নদীর প্রশস্ততা, $d = 2$ km $= 2000$ m

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha}$

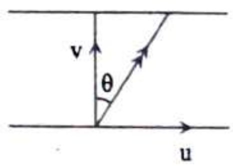
$= \sqrt{(20)^2 + (15)^2 + 2 \times 20 \times 15 \times \cos 90°}$ ms^{-1}

$= 25$ ms^{-1}

এখন, লব্ধি, v এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

বা, $\tan\theta = \frac{u\sin 90°}{v + u\cos 90°}$



বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15}{20}\right) = 36.87°$

$\therefore$ অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{2000\text{ m}}{\cos 36.87°} = 2500$ m

$\therefore$ নদী পাড়ি দিতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{2500\text{ m}}{25\text{ ms}^{-1}} = 100$ s.

সমস্যা ৭৮। দুইটি ভেক্টরের বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটির $\sqrt{2}$ গুণ হলে দেখাও যে, এদের লব্ধি বৃহত্তরটির সাথে যে কোণে আনত তার মান $\frac{\pi}{4}$ অপেক্ষা বেশি হবে না।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

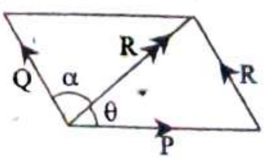
সমাধান : মনে করি, ভেক্টর দুটির মান P ও Q

এদের মধ্যবর্তী কোণ = α এবং লব্ধি = R

লব্ধি R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ = θ এবং R ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ = α

ত্রিভুজের সাইন সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\theta}$



বা, $\frac{\sqrt{2}Q}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\theta}$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$

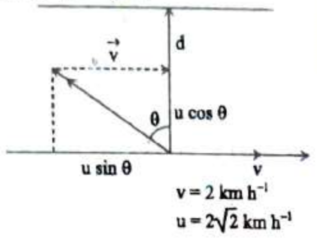
$\therefore \sin\alpha \ngtr 1$

$\therefore \sin\theta \ngtr \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\theta \ngtr \frac{\pi}{4}$ (দেখানো হলো)

সমস্যা ৭৯। একজন সাঁতারু স্থির পানিতে ঘণ্টায় $2\sqrt{2}$ km বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। ঘণ্টায় 2km বেগের স্রোতযুক্ত একটি নদী তিনি সাঁতার কেটে পার হচ্ছেন। (i) সর্বাপেক্ষা কম দূরত্ব অতিক্রম করে অপর তীরে পৌঁছাতে হলে তাকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে? (ii) সর্বাপেক্ষা কম সময়ে নদী পার হতে হলে তাকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে? (iii) নদীর প্রস্থ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ km হলে, সেক্ষেত্রে স্রোত তাকে কত দূর ভাসিয়ে নিয়ে যাবে?

সমাধান : (i) সর্বাপেক্ষা কম দূরত্বে নদী পার হতে হলে স্রোত এবং সাঁতারুর বেগের লব্ধি নদীর প্রস্থ বরাবর হতে হবে।

অতএব, চিত্রানুযায়ী,



$\sin\theta = \frac{v}{u}$

বা, $\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°$

$\therefore\ \theta = 45°$

অতএব, সাঁতারুকে সর্বনিম্ন পথে সাঁতার কাটতে হলে নদীর প্রস্থের সাথে 45° কোণে অথবা স্রোতের সাথে (90° + 45°) বা 135° কোণে সাতার কাটতে হবে।

(ii) এখানে, সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হতে হলে সাঁতারুকে স্রোতের সাথে 90° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

নদীর প্রস্থ d হলে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ}} = \frac{d}{u\cos\theta}$$

এখন, $\cos\theta$ সর্বোচ্চ হলে অর্থাৎ $\cos\theta = 1$ বা $\theta = 0°$ হলে সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হওয়া সম্ভব।

সুতরাং সাতারু নদীর এক তীর হতে অপর তীরের দিকে সোজা সাতার কাটলে সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হতে পারবে। ফলে স্রোতের জন্য সাতারুর প্রকৃত গতি হয় কোণাকুণি এবং সাতারু সরাসরি নদীর অপর পাড়ে না পৌঁছে স্রোতের দিকে সরে যায়।

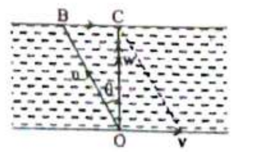
(iii) নদীর প্রস্থ, $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ km

আমরা জানি, $t = \frac{d}{u\cos\theta}$ | সর্বনিম্ন পথে, $\theta = 45°$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\cos 45°} = \frac{1}{8\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0.176\ \text{h} = 10.56\ \text{min}$$

সমস্যা ৮০। একটি স্রোতস্বিনী নদীতে এমনভাবে নৌকা চালনা করা হল যেন সেটি ন্যূনতম পথে অপর তীরে পৌঁছায়। এতে যে সময় লাগে, নদীতে স্রোত না থাকলে তার অর্ধেক সময় লাগে। নৌকার বেগ 2 ms^{-1} হলে স্রোতের বেগ কত?

সমাধান :



ধরি, স্রোতের বেগ = v

নৌকার বেগ, u = 2 m s^{-1}

ΔOBC হতে পাই, | ধরি, নদীর প্রস্থ = d

$\sin\theta = \frac{v}{u}$

অতএব, লব্ধি বেগ $W = \sqrt{u^2 - v^2}$

নদী পার হওয়ার সময়, $t = \frac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$ .... (১)

স্রোতহীন অবস্থায়

$t' = \frac{d}{u}$

বা, $\frac{t}{2} = \frac{d}{2}$

$\therefore\ t = d$

(১) নং হতে পাই,

$d = \frac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$

বা, $1 = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}}$

বা, $\sqrt{u^2 - v^2} = 1$

বা, $u^2 - v^2 = 1$

বা, $v^2 = u^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$

$\therefore\ v = \sqrt{3}$ m s^{-1}

$\therefore$ স্রোতের বেগ $\sqrt{3}$ m s^{-1}।

সমস্যা ৮১। কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল একটি বলের মান অপরটির দ্বিগুণ। তাদের লব্ধি বল এবং বৃহত্তর বলটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে দেখাও যে, θ এর মান $\frac{\pi}{6}$ অপেক্ষা বেশি হতে পারে না।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৭৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ৮২। দুইটি বল একটি বিন্দুতে সমকোণে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি $\sqrt{34}$ N এবং বল দুইটির ক্ষুদ্রতম লব্ধি 2N হলে, বল দুইটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বলদ্বয় যথাক্রমে F_1 ও F_2। যেহেতু বলদ্বয় সমকোণে ক্রিয়া করে সেহেতু এদের মধ্যবর্তী কোণ θ = 90° হবে। বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে।

আমরা জানি, $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$

$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 90°} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

অর্থাৎ $\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{34}$

$\therefore\ F_1^2 + F_2^2 = 34$ ....(1)

ক্ষুদ্রতম লব্ধি R_{min} হলে, $R_{min} = F_1 - F_2$

$\therefore\ F_1 - F_2 = 2$ ....(2)

(1) নং হতে পাই, $F_1^2 + F_2^2 = 34$

বা, $(F_1 - F_2)^2 + 2F_1F_2 = 34$

বা, $2^2 + 2F_1F_2 = 34$

বা, $2F_1F_2 = 34 - 4$

$\therefore\ F_1F_2 = 15$

আমরা জানি, $F_1 + F_2 = \sqrt{(F_1 - F_2)^2 + 4F_1F_2}$

$= \sqrt{2^2 + 4\times 15} = \sqrt{64} = 8$

$\therefore\ F_1 + F_2 = 8$ ....(3)

(2) + (3) হতে, $2F_1 = 10$

$\therefore\ F_1 = 5N$

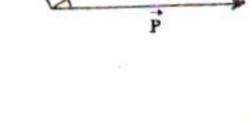
(2) − (3) হতে, $-2F_2 = -6$

$\therefore\ F_2 = 3N$

অতএব, বল দুইটির মান 5N এবং 3N।

সমস্যা ৮৩। কোনো বিন্দুতে একই সাথে ক্রিয়ারত দুইটি সমমানের ভেক্টরের লব্ধির মান এদের যে কোনো একটি মানের সমান হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ভেক্টরদ্বয়ের মান যথাক্রমে P ও Q এবং এদের লব্ধি R.



প্রশ্নমতে, P = Q এবং P = R অথবা Q = R

ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, α = ?

আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $P^2 = P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \times \cos\alpha$

বা, $P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $1 = 2 + 2\cos\alpha$ [উভয় পক্ষকে P^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\cos 120° = 120°.$

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°।

সমস্যা ৮৪। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j}$ এবং $\vec{C} = m\hat{j} + 3\hat{k}$, m এর মান কত হলে একটি ঘন সামান্তরিকের আয়তন 24 একক হবে?

সমাধান : প্রশ্নমতে, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 24$

এখন, $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(12 - 0) + \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0)$

$= 12\hat{i}$

এখন, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (12\hat{i})$

$= 24\hat{i}\cdot\hat{i} + 0 + 0$

$= 24$

সুতরাং m এর যেকোনো মানের জন্য আয়তন 24 হবে।

সমস্যা ৮৫। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ দ্বারা কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু নির্দেশিত হলে উক্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{i} + 3\hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(9 + 10) - \hat{j}(6 - 5) + \hat{k}(-4 - 3) = 19\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(19)^2 + (-1)^2 + (-7)^2}$

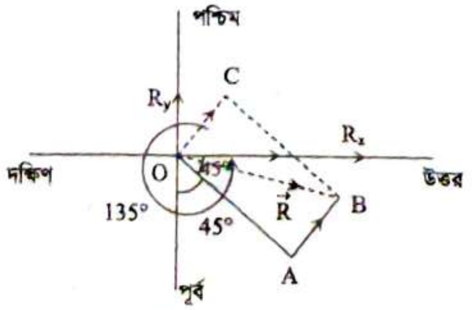
$= \sqrt{361 + 1 + 49} = \sqrt{411}$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\sqrt{411}$ বর্গ একক।

সমস্যা ৮৬। একজন লোক উত্তর-পূর্ব দিকে 20m গেল। তারপর সে উত্তর-পশ্চিম দিকে ঘুরে 10m গেল। লোকটির সরণের লব্ধি কত?

সমাধান : $R_x = 20\cos 45° + 10\cos 135°$

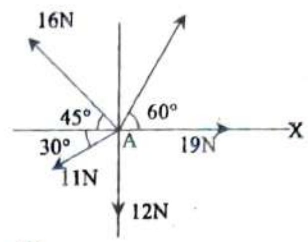
$R_y = 20\sin 45° + 10\sin 135°$



$\therefore$ $R_x^2 = 50\text{m}^2$ এবং $R_y^2 = 450\text{ m}^2$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{50 + 450} = \sqrt{500}\text{ m} = 10\sqrt{5}\text{ m}$

সমস্যা ৮৭। A বিন্দুতে অবস্থিত কোনো একটি বস্তুর উপর 19N, 15N, 11 N ও 12 N এর পাঁচটি বল একই তলে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি নির্ণয় কর।



সমাধান : চিত্র অনুযায়ী,

$\Sigma F_x = 19 + 15\cos 60° - 16\cos 45° - 11\cos 30° = 5.66\text{ N}$

আবার, $\Sigma A_y = 0 + 15\sin 60° + 16\sin 45° - 11\sin 30° - 12$

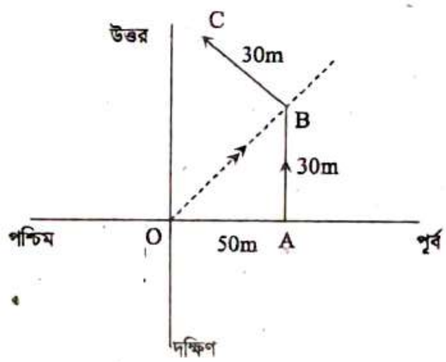
$= 6.80\text{ N}$

$\therefore$ লব্ধি $F = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{(5.66)^2 + (6.80)^2} = 8.8\text{ N}$

অতএব, বলগুলোর লব্ধি 8.8 N।

সমস্যা ৮৮। একটি গাড়ি পূর্ব দিকে 50m, তারপর উত্তর দিকে 30 m এবং এরপর উত্তর-পশ্চিম দিকে 30m গেল। যাত্রাস্থান থেকে গাড়িটির সর্বমোট সরণ নির্ণয় কর।

সমাধান :



লব্ধি, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = OA\cos 0° + AB\cos 90° + BC\cos 135°$

$= 50 + 0 + 30\cos 135°$

বা, $R_x^2 = 828.6796$

$R_y = OA\sin 0° + AB\sin 90° + BC\sin 135°$

$= 0 + 30 + 30\sin 135°$

$\therefore$ $R_y^2 = 2622.7922$

$\therefore$ $R = \sqrt{828.6796 + 2622.7922} = 58.75\text{ m.}$

সেট-৩ : সৃজনশীল সমস্যাবলি

সমস্যা ৮৯। $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। (i) এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। (ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কে কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব কিনা? গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : (i) আমরা জানি, দুটি ভেক্টর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় থাকলে, তাদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয়ের সূত্র,

$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$ .... (১)

এখানে, $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডটগুণন,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ .... (২)

সমীকরণ (১) হতে পাই,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{(4\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}}$$

$$= \frac{8(\hat{i}.\hat{i})+3(\hat{j}.\hat{j})-15(\hat{k}.\hat{k})}{\sqrt{16+9+25}\sqrt{4+1+9}} \quad [\because \hat{i}.\hat{i}=1, \hat{j}.\hat{j}=1, \hat{k}.\hat{k}=1]$$

$$= \frac{8+3-15}{\sqrt{50}\sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{700}} = -0.15118$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}(-0.15118) = 98.7°.$$

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান 98.7° ।

(ii) শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ৯০। দুটি ভেক্টরের যোগফল $\vec{A}+\vec{B} = 12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$ এবং বিয়োগফল $\vec{A}-\vec{B} = -6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k}$ হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ নির্ণয় কর এবং এদের স্কেলার গুণন নির্ণয় কর। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\vec{A}+\vec{B}$ ও $\vec{A}-\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণের সমান হবে কিনা? গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : এখানে,

$\vec{A}+\vec{B} = 12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $\vec{A}-\vec{B} = -6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k}$

এখন, $\vec{A}+\vec{B}+\vec{A}-\vec{B} = (12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k})+(-6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k})$

বা, $2\vec{A} = 6\hat{i}+8\hat{j}+18\hat{k}$

বা, $\vec{A} = 3\hat{i}+4\hat{j}+9\hat{k}$

আবার, $\vec{A}+\vec{B}-\vec{A} = (12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k})-(3\hat{i}+4\hat{j}+9\hat{k})$

বা, $\vec{B} = 9\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$

তাহলে, $\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{i}+4\hat{j}+9\hat{k}).(9\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k})$

$= 27(\hat{i}.\hat{i})-32(\hat{j}.\hat{j})-9(\hat{k}.\hat{k})$

$= 27-32-9 = -14$

অতএব, স্কেলার গুণনের মান -14 ।

সমস্যা ৯১। $\vec{A} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\vec{C} = 2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। $\vec{A} = \vec{B}+\vec{C}$ হলে $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে কি-না গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}; \vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k};$

$\vec{C} = 2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\vec{A} = \vec{B}+\vec{C}$

$\vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\theta = ?$

এখন, $\vec{A} = \vec{B}+\vec{C}$

বা, $\vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{B}+\vec{C})\cdot(\vec{B}+\vec{C})$

বা, $A^2 = B^2+C^2+2BC\cos\theta$

বা, $(\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2})^2 = \sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}\,)^2 + (\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2})^2 + 2\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}\,.\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}\cos\theta$

বা, $14 = 35+21+2\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}\cos\theta$

বা, $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}\cos\theta = 14-35-21$

বা, $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}\cos\theta = -42$

বা, $\cos\theta = \frac{-42}{2\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}}\right) = 140.79°$

সমস্যা ৯২। $\vec{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, (I) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

(ii) $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান হবে কিনা? গাণিতিক যুক্তি দাও।

সমাধান : (i) দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}; \vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

এবং $\vec{C} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

$$\therefore \vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4+3)+\hat{j}(-3-2)+\hat{k}(1-2) = 7\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k}.$$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6-2)+\hat{j}(1+9)+\hat{k}(6-2) = -8\hat{i}+10\hat{j}+4\hat{k}$$

বামপক্ষ $= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$= (3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(7\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k})$ | $\because \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$= 21-10-1 = 10$ | এবং $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

ডানপক্ষ $= (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (-8\hat{i}+10\hat{j}+4\hat{k})\cdot(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$

$= -8+10+8 = 10.$

$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}.$ **(প্রমাণিত)**

(ii) $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= |\vec{B}\times\vec{C}| = |7\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k}|$ বর্গ একক

$= |\sqrt{7^2+(-5)^2+(-1)^2}| = 8.66$ বর্গ একক

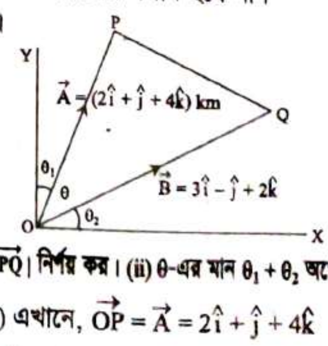
আবার, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= |-8\hat{i}+10\hat{j}+4\hat{k}|$ বর্গ একক

$= |\sqrt{8^2+10^2+4^2}|$ বর্গ একক $= 13.42$ বর্গ একক

অতএব, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান হবে না।

সমস্যা ৯৩।



সমাধান : (i) $|\vec{PQ}|$ নির্ণয় কর। **(ii)** θ-এর মান $\theta_1+\theta_2$ অপেক্ষা বড় না ছোট হবে?

সমাধান : (i) এখানে, $\vec{OP} = \vec{A} = 2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$

এবং $\vec{OQ} = \vec{B} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$\therefore \vec{PQ} = \vec{OQ}-\vec{OP} = (3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})-(2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}) = \hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore |\vec{PQ}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2} = 3$ একক

(ii) $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$

$= \cos^{-1}\frac{(2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k})\cdot(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}$

$= \cos^{-1}\frac{13}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = 40.7°$

$\therefore \theta_1+\theta_2 = 90°-\theta = 90°-40.7° = 49.3°$

$\therefore \theta < \theta_1+\theta_2$

সমস্যা ৯৪। $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{R} = -4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি যথাক্রমে একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। (i) প্রথম দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। (ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব কি-না গাণিতিক বিশ্লেষণ পূর্বক মতামত দাও।**

সমাধান : (i) $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

প্রথম দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = ?$

আমরা জানি,

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|\,.\,|\vec{Q}|}$$

$$= \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j} + k)\,.\,(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{2 - 6 - 3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{-7}{14} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°\text{।}$$

(ii) এখানে,

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$$
$$= (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) = -\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q}$$
$$= (-4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = -5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$

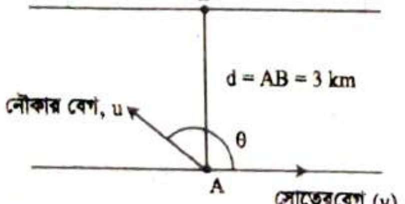
$$\therefore \quad \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|(-\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}) \times (-5\hat{i} + 4\hat{j} + k)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 5 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\hat{i}\{5 - (-16)\} - \hat{j}(-1 - 20) + \hat{k}\{-4 - (-25)\}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left|21\hat{i} + 21\hat{j} + 21\hat{k}\right| = \frac{21}{2}\left|\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right|$$

$$\therefore \quad \text{ক্ষেত্রফল} = \frac{21}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ বর্গ একক}$$

সমস্যা ৯৫।

অনুকূল বেগ = 18 km h^{-1}

প্রতিকূল বেগ = 8 km h^{-1}



সমাধান : (i) নৌকাটি B বিন্দুতে পৌছালে θ-এর মান নির্ণয় কর। (ii) ক্ষুদ্রতম পথে ও ক্ষুদ্রতম সময়ে নদী পারাপারে সময়ের ব্যবধান অভিন্ন হবে কি-না?

সমাধান : (i) $\tan 90° = \dfrac{u\sin\theta}{v + u\cos\theta}$ | $u + v = 18$ এবং $u - v = 8$; $\therefore u = 13\text{ kmh}^{-1}$ এবং $v = 5\text{ kmh}^{-1}$

বা, $v + u\cos\theta = 0$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-v}{u}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{-5}{13}\right) = 112.62°$

(ii) ক্ষুদ্রতম পথে, $t = \dfrac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}} = \dfrac{3\text{ km}}{\sqrt{13^2 - 5^2}\text{ kmh}^{-1}} = 0.25\text{ h} = 15\text{ min}$

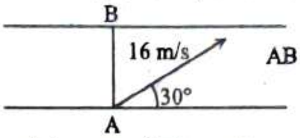
$\theta_1 = \sin^{-1}\dfrac{5}{13} = 22.62°$

ক্ষুদ্রতম সময়ে, $t_1 = \dfrac{d}{\cos\theta_1\sqrt{u^2 + v^2}}$

$$= \frac{3\text{ km}}{\sqrt{13^2 + 5^2}\text{ kmh}^{-1} \times \cos 22.62°}$$
$$= 0.233\text{ h} = 13.98\text{ min}$$

অতএব, সময়ের ব্যবধান অভিন্ন হবে না।

সমস্যা ৯৬। 30 m প্রস্থবিশিষ্ট কোনো একটি নদীতে একজন মাঝি নদীর বিপরীত তীরে পৌছার লক্ষ্যে A বিন্দু হতে 16 m s^{-1} বেগে তীরের সাথে 30° কোণে একটি নৌকা চালনা করল। নদীটিতে স্রোতের বেগ 8 m s^{-1}। (i) নদী পার হতে নৌকাটির কত সময় লাগবে? (ii) নদীর বিপরীত তীরের ঠিক বিপরীত বিন্দু B-তে পৌছতে হলে মাঝিকে কী ব্যবস্থা গ্রহণ করতে হবে তার একটি গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।



সমাধান : (i) নৌকার বেগ, $v = 16\text{ m s}^{-1}$

নদীর প্রস্থ, $d = 30\text{ m}$

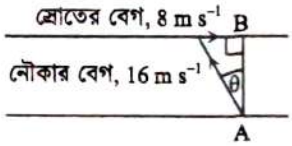
নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগ, $v_x = 16\sin 30° = 8\text{ m s}^{-1}$

এখন, নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময় t হলে,

$$t = \frac{d}{v_x} = \frac{30\text{ m}}{8\text{ m s}^{-1}} = 3.75\text{ s}$$

অতএব, নদী পার হতে নৌকাটির 3.75 s সময় লাগবে।

(ii) নদীর ঠিক বিপরীত বিন্দু B তে পৌছাতে হলে ধরি স্রোতের লম্ব দিকের সাথে θ কোণে রওয়ানা দিতে হবে।

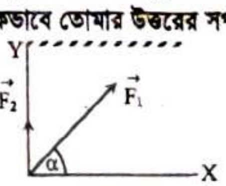


চিত্র অনুযায়ী, $\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{8}{16}$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$$

$\therefore$ স্রোতের সাথে $(30° + 90°) = 120°$ কোণ করে নৌকা চালাতে হবে।

সমস্যা ৯৭। নিম্নে প্রদত্ত চিত্র ও তথ্য লক্ষ কর। এখানে, $F_1 = 10N$, $F_2 = 8N$, $\alpha = 45°$। (i) বল দুটির লব্ধি Y-অক্ষের সাথে যে কোণে ক্রিয়াশীল তা নির্ণয় কর। (ii) বল দুটির লব্ধির অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান কি সমান হবে— গাণিতিকভাবে তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।



সমাধান : (i) ধরি, θ কোণ উৎপন্ন করবে।

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{F_1\sin\alpha'}{F_2 + F_1\cos\alpha'}$$

এখানে, $F_1 = 10\text{ N}$, $F_2 = 8\text{ N}$, $\alpha' = 90° - \alpha = 90° - 45° = 45°$

বা, $\tan\theta = \dfrac{10\sin 45°}{8 + 10\cos 45°}$

বা, $\theta = 25.135°$

(ii) বল দুটির লব্ধির অনুভূমিক উপাংশ,

$R_x = F_1\cos\alpha + F_2\cos 90° = 7.071\text{ N}$

বল দুটির লব্ধির উল্লম্ব উপাংশ,

$R_y = F_1\sin\alpha + F_2\sin 90° = 15.071\text{ N}$

এখানে, $R_x \neq R_y$

অর্থাৎ অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান সমান হবে না।

সমস্যা ৯৮। $Q = 2xy^4 - x^2z$ একটি ব্যবকলন যোগ্য স্কেলার ফাংশন। (i) (1, –1, 1) বিন্দুতে Q এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর। (ii) দেখাও যে, $\vec{\nabla}Q$ অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

সমাধান : (i) এখানে, $Q = 2xy^4 - x^2z$

এখন, $\text{grad } Q = \vec{\nabla}.Q = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right\}.\{2xy^4 - x^2z\}$

$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(2xy^4 - x^2z) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4 - x^2z) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(2xy^4 - x^2z)$

$= \hat{i}(2y^4 - 2xz) + \hat{j}(8xy^3 - 0) + \hat{k}(0 - x^2)$

$= (2y^4 - 2xz)\hat{i} + 8xy^3\hat{j} - x^2\hat{k}$

$\therefore$ (1, – 1, 1) বিন্দুতে Q এর গ্রেডিয়েন্ট

$= (2(-1)^4 - 2.1.1)\hat{i} + 8(1)(-1)^3\hat{j} - (1)^2\hat{k}$

$= 0\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k} = -8\hat{j} - \hat{k}$

(ii) (i) হতে,

$\vec{\nabla}\cdot\vec{Q} = (2y^4 - 2xz)\hat{i} + 8xy^3\hat{j} - x^2\hat{k}$

$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

তাহলে $\text{Curl} = \vec{\nabla}\times\vec{Q} = 0$ হলে ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল হবে,

$$\vec{\nabla}\times\vec{Q} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left\{(2y^4 - 2xz)\hat{i} + 8xy^3\hat{j} - x^2\hat{k}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^4 - 2xz & 8xy^3 & -x^2 \end{vmatrix}$$

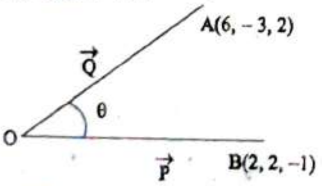
$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-x)^2 - \frac{\partial}{\partial z}(8xy^3)\right\} + \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(2y^4 - 2xz) - \frac{\partial}{\partial x}(-x^2)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(8xy^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2y^4 - 2xz)\right\}$$

$= \hat{i}(0 - 0)\hat{j}(0 - 2x + 2x) + \hat{k}(8y^3 - 8y^3 + 0)$

$= \hat{i}.0 + \hat{j}.0 + \hat{k}.0 = 0$

যেহেতু $\vec{\nabla}\times\vec{Q} = 0$ তাই $\vec{\nabla}Q$ একটি অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

সমস্যা ৯৯। (i) $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। (ii) $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$-এর উপাংশ 3 গুণ হলে মধ্যবর্তী কোণ এর পরিবর্তন গাণিতিক ব্যাখ্যাসহ বিশ্লেষণ কর।



সমাধান : (i) $\vec{P} = \vec{OB} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{Q} = \vec{OA} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore\ \vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}$

এখন, $\vec{P}.\vec{Q} = 2\times6 + 2(-3) + (-1)(2)$

$= 12 - 6 - 2 = 4$

$P = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$Q = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{4}{3\times7}$

বা, $\cos\theta = \frac{4}{21}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) = 79.02°$

অতএব, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ 79.02°।

(ii) ধরি, $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর উপাংশ 3 গুণ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ α হবে

$\therefore\ Q\cos\alpha = 3Q\cos\theta$

বা, $\cos\alpha = \frac{3Q\cos\theta}{Q}$

বা, $\cos\alpha = 3\cos\theta$

বা, $\cos\alpha = 3\cos(79.02°)$ ['i' হতে, $\theta = 79.02°$]

বা, $\cos\alpha = \frac{4}{7}$

বা, $\alpha = 55.15°$

অতএব, $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর উপাংশ 3 গুণ হলে মধ্যবর্তী কোণ কমে 55.15° হবে।

সমস্যা ১০০। $\vec{A} = 6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}$ এবং $\vec{B} = x^2y^2\hat{i} - 4xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ দুটি ভেক্টরক্ষেত্র। (i) P(1, – 1, 2) বিন্দুতে $\vec{B}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর। (ii) উপরের উদ্দীপকের $\vec{A}$ ভেক্টরটি চোঙাকৃতি (সলিনয়ডাল) নয় এবং $\vec{B}$ ভেক্টর ঘূর্ণনশীল (অসংরক্ষণশীল) গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর।

সমাধান : (i) এখানে, $\vec{A} = 6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}$

$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k})$

$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y) + \frac{\partial}{\partial_y}(4xy^2) + \frac{\partial}{\partial_z}(2x)$

$= 12xy + 4x.2y + 0 = 12xy + 8xy = 20xy$

$\therefore\ \text{div }\vec{A} = 20xy$

$\therefore$ P(1, –1, 2) বিন্দুতে $\text{div }\vec{A} = 20\times1\times(-1) = -20$

(ii) 'i' হতে, $\text{div }\vec{A} = -20xy$

অর্থাৎ, $\text{div } A \neq 0$। অর্থাৎ, $\vec{A}$ ভেক্টরটি চোঙাকৃতি নয়।

$\vec{B}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হবে যদি ও কেবল যদি $\text{curl }\vec{B} \neq 0$ হয়

$\text{curl }\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2 & -4xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-4xz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-4xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2)\right\}$$

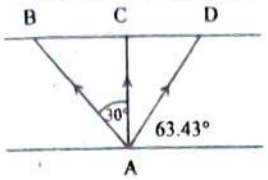
$= \hat{i}(2z + 4x) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(-4z - 2x^2y)$

$= \hat{i}(2z + 4x) - \hat{k}(4z + 2x^2y)$

$\therefore\ \text{curl }\vec{B} = 2(2x + z)\hat{i} - (2x^2y + 4z)\hat{k}$ যা শূন্য নয়

যেহেতু, $\text{curl }\vec{B} \neq 0$ সেহেতু, $\vec{B}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল। **(প্রমাণিত)**

সমস্যা ১০১। চিত্রে দুটি নৌকা আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য A হতে অভিন্ন বেগে যাত্রা শুরু করল যাদের একটি AB বরাবর অপরটি AC বরাবর। ১ম টি আড়াআড়ি পার হয়ে C বিন্দুতে পৌঁছালেও ২য়টি D বিন্দুতে পৌঁছায়। স্রোতের বেগ 9 kmh^{-1} এবং নদী প্রশস্ত 31 km।



(i) উদ্দীপক হতে নৌকায় অভিন্ন বেগ হিসাব কর। (ii) নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পাড়ে পৌঁছায় কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

সমাধান : (i) এখানে, স্রোতের বেগ $v = 9 \text{ km h}^{-1}$

ধরি, নৌকার অভিন্ন বেগ $u \text{ km h}^{-1}$

১ম বোটের ক্ষেত্রে, v ও u এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = (90 + 30)° = 120°$

লব্ধি, v এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে,

$$\therefore \quad \tan 90° = \frac{u \sin \alpha}{v + u \cos \alpha}$$

$$\text{বা,} \quad \cot 90° = \frac{v + u \cos \alpha}{u \sin \alpha}$$

$$\text{বা,} \quad 0 = \frac{v + u \cos \alpha}{u \sin \alpha}$$

$$\text{বা,} \quad v + u \cos \alpha = 0$$

$$\text{বা,} \quad u = \frac{-v}{\cos \alpha} = \frac{-9 \text{ km h}^{-1}}{\cos 120°} = 18 \text{ km h}^{-1}$$

অতএব, নৌকার অভিন্ন বেগ 18 km h^{-1}।

(ii) এখানে, নৌকার অভিন্ন বেগ $u = 18 \text{ km h}^{-1}$ [গ নং থেকে প্রাপ্ত]

স্রোতের বেগ $v = 9 \text{ km h}^{-1}$

নদীর প্রশস্ততা $d = 31 \text{ km}$

১ম নৌকার ক্ষেত্রে, u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = (90° + 30°) = 120°$

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $W = \sqrt{u^2 - v^2} = \sqrt{(18^2 - 9^2)} = 15.59 \text{ km h}^{-1}$

$\therefore$ নদী পার হতে ১ম নৌকার সময় লাগবে,

$$t_1 = \frac{d}{W} = \frac{31 \text{ km}}{15.59 \text{ km h}^{-1}} = 1.99 \text{ h}$$

আবার, $\angle CAD = 90° - 63.43° = 26.57°$

$$\therefore \quad \cos 26.57° = \frac{AC}{AD}$$

$$\text{বা,} \quad AD = \frac{AC}{\cos 26.57°} = \frac{d}{\cos 26.57°} = \frac{31 \text{ km}}{\cos 26.57°} = 34.661 \text{ km}$$

২য় নৌকার ক্ষেত্রে, v ও u এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$

$$\therefore \quad \text{লব্ধি বেগ, } W_1 = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \theta}$$

$$= \sqrt{(18)^2 + 9^2 + 2 \times 18 \times 9 \times \cos 90°} \text{ km h}^{-1}$$

$$= 9\sqrt{5} \text{ km h}^{-1}$$

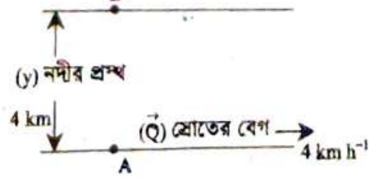
$\therefore$ নদী পাড়ি দিতে ২য় নৌকার সময় লাগবে,

$$t_2 = \frac{AD}{W_1} = \frac{34.661 \text{ km}}{9\sqrt{5} \text{ km h}^{-1}} = 1.72 \text{ h}$$

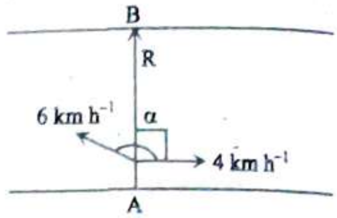
এখানে, $t_1 \neq t_2$

অতএব, দুটি নৌকা একই সময়ে নদীর অপর পাড়ে পৌঁছায় নি।

সমস্যা ১০২। নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও : একজন মাঝি A বিন্দু হতে 6 kmh^{-1} বেগে চলনক্ষম একটি নৌকা নিয়ে অপর পাড়ে যাওয়ার পরিকল্পনা করছিল। (i) কোন পরিকল্পনায় রওয়ানা হলে নৌকাটি B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে? (ii) (i) অনুযায়ী B তে পৌঁছার চেয়ে কম সময়ে নদী পার হওয়ার যৌক্তিক পরিকল্পনা কর।



সমাধান : (i) ধরা যাক, স্রোতের সাথে α কোণে রওয়ানা দিলে নৌকাটি B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে। সেক্ষেত্রে লব্ধি বেগের দিক হবে AB বরাবর।



$$\therefore \quad \tan 90° = \frac{6 \sin \alpha}{4 + 6 \cos \alpha}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{1}{0} = \frac{6 \sin \alpha}{4 + 6 \cos \alpha}$$

$$\text{বা,} \quad 4 + 6 \cos \alpha = 0$$

$$\text{বা,} \quad \cos \alpha = -\frac{4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\therefore \quad \alpha = 131.81°$$

অর্থাৎ, স্রোতের সাথে 131.81° কোণে রওয়ানা দিলে নৌকাটি B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে।

(ii) 'i' এর পরিকল্পনা অনুযায়ী নদী পার হতে প্রয়োজনী সময়,

$$t = \frac{4}{6 \cos (131.81° - 90°)} \text{ h} = 0.894 \text{ h}$$

(i) এর পরিকল্পনা অনুযায়ী 131.81° কোণে নৌকা চালানোর কারণে নৌকার বেগের একটি উপাংশ স্রোতের বেগের বিপরীত দিকে কাজ করে স্রোতের বেগের প্রভাবকে শূন্য করেছে এবং AB বরাবর আর একটি উপাংশ দিয়ে নৌকাটি নদী পার হয়েছে। অর্থাৎ, 'গ' এর পরিকল্পনা অনুযায়ী নৌকার বেগটি দুটি উপাংশে ভাগ হওয়ায় AB বরাবর উপাংশ কম হয়েছে তাই সময় বেশি লেগেছে।

এখন যদি নৌকাটি AB বরাবর চালানো হয় তবে তার বেগের পুরো উপাংশটিই AB বরাবর ক্রিয়াশীল থাকবে। অর্থাৎ, স্রোত বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ শূন্য হবে। নৌকার পুরো বেগটিই নদী পার হতে কাজে লাগবে ফলে সময় কম লাগবে।

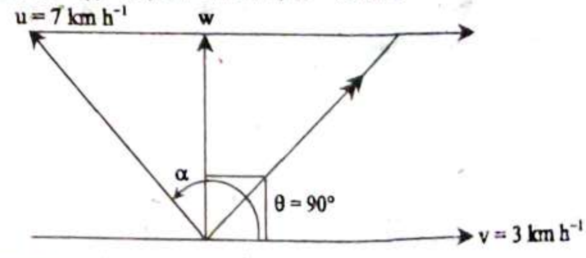
AB বরাবর রওয়ানা হলে প্রয়োজনীয় সময়,

$$T_{AB} = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ}} = \frac{4}{6} \text{ h} = 0.67 \text{ h}$$

$\therefore t_{AB} < t$, অর্থাৎ, AB বরাবর রওয়ানা হলে নদী পার হতে কম সময় লাগবে।

সমস্যা ১০৩। বর্ষাকালে স্রোতের নদীতে মাঝি 7 km h^{-1} বেগে নৌকা চালিয়ে আড়াআড়িভাবে নদী পার হয়। স্রোতের বেগ 3 km h^{-1}. (i) উদ্দীপকের মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হয়েছিল? (ii) মাঝি আড়াআড়ি নৌকা চালনা করলে নৌকার লব্ধির মান উদ্দীপকের নৌকার লব্ধির বেগের বেশি হবে– উক্তিটি গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

সমাধান : (i) ধরি, নৌকার বেগ, $u = 7 \text{ km h}^{-1}$



স্রোতের বেগ, $v = 3 \text{ km h}^{-1}$

$\therefore$ মাঝি আড়াআড়িভাবে নদী পাড় হয়,

সুতরাং মাঝি নৌকা নিয়ে θ = 90° কোণে অপর পাড়ে পৌঁছেছিল।

$$\therefore \tan 90° = \frac{u \sin \alpha}{v + u \cos \alpha}$$

$$\text{বা,} \frac{1}{0} = \frac{7 \sin \alpha}{3 + 7 \cos \alpha}$$

$$\text{বা,} \ 3 + 7 \cos \alpha = 0$$

$$\text{বা,} \cos \alpha = \frac{-3}{7}$$

$$\text{বা,} \ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{7}\right) = 115.37°$$

অতএব, মাঝিকে স্রোতের সাথে 115.37° কোণে নৌকা চালাতে হয়েছিল।

(ii) 'i' হতে প্রাপ্ত,
১ম ক্ষেত্রে নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$$\cos\alpha = -\frac{3}{7}$$

$\therefore$ লব্ধি, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$$= \sqrt{7^2 + 3^2 + 2\cdot 7\cdot 3\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)}$$

$$= 6.32 \text{ km h}^{-1}$$

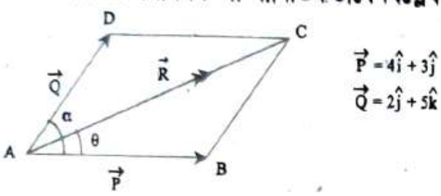
এখন, আড়াআড়িভাবে নৌকা চালালে স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হবে।

$\therefore$ লব্ধি, $w' = \sqrt{7^2 + 3^2 + 2\cdot 7\cdot 3\cdot\cos 90°} = 7.62 \text{ km h}^{-1}$

$\therefore w' > w$

অর্থাৎ উক্তিটি সঠিক।

সমস্যা ১০৪। (i) উদ্দীপকের θ-এর মান নির্ণয় কর। (ii) ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং ABCD এর ক্ষেত্রফল, ΔABC ও ΔACD এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান কি-না গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।



সমাধান : (i) এখানে, $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{j} + 5\hat{k} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

θ, $\vec{P}$ ও $\vec{R}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ

$\therefore \quad \vec{R}\cdot\vec{P} = RP\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{R}\cdot\vec{P}}{RP} = \frac{(4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k})\cdot(4\hat{i} + 3\hat{j})}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 5^2}\cdot\sqrt{4^2 + 3^2}}$

$$= \frac{16 + 15}{\sqrt{16 + 25 + 25}\times\sqrt{16 + 9}}$$

বা, $\cos\theta = \frac{31}{5\sqrt{66}}$

বা, $\theta = 40.256°$

অতএব, θ এর মান 40.256°।

(ii) ABCD ক্ষেত্রফল $= |\vec{P}\times\vec{Q}|$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(15 - 0) - \hat{j}(20 - 0) + \hat{k}(8 - 0)$$

$$= 15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k}$$

$\therefore \quad |\vec{P}\times\vec{Q}| = \sqrt{15^2 + (-20)^2 + 8^2} = 26.249$

$\therefore$ ABCD এর ক্ষেত্রফল 26.249 বর্গ একক।

'i' নং থেকে পাই, $\vec{R} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P}\times\vec{R}|$

$$\vec{P}\times\vec{R} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 5\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(15 - 0) - \hat{j}(20 - 0) + \hat{k}(20 - 12)$$

$$= 15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k}$$

$\therefore \quad |\vec{P}\times\vec{R}| = \sqrt{15^2 + (-20)^2 + 8^2} = 26.249$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P}\times\vec{Q}|$

$$= \frac{1}{2}\times 26.249 = 13.1244 \text{ বর্গ একক।}$$

অনুরূপভাবে,

ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 2 & 5\\ 4 & 5 & 5\end{vmatrix}\right|$

$$= \frac{1}{2}|\hat{i}(10 - 25) - \hat{j}(0 - 20) + \hat{k}(0 - 8)|$$

$$= \frac{1}{2}|-15\hat{i} + 20\hat{j} - 8\hat{k}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-15)^2 + 20^2 + (-8)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{689} = 13.1244 \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$ ABC ও ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি = 13.1244 + 131244
= 26.249 বর্গ একক

অতএব, ABCD এর ক্ষেত্রফল, ABC ও ACD এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

সমস্যা ১০৫। 2 km প্রশস্থ একটি নদীতে স্রোতের বেগ 2 km h^{-1}। একটি নৌকা A ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপর একটি নৌকা B ক্ষুদ্রতম সময়ে নদীটি পারের জন্য একই সময়ে একই স্থান থেকে 8 km h^{-1} বেগে যাত্রা করল। দেখা যায়, B নৌকাটি A নৌকার আগে অপর পাড়ে পৌছায় অথচ B নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব A নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব অপেক্ষা বেশি। (i) A নৌকাটিকে স্রোতের সাথে কত কোণে চালাতে হবে? (ii) উদ্দীপকে নৌকা দুটির অতিক্রান্ত সময় ও দূরত্ব সংক্রান্ত ফল গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর।

সমাধান : (i) এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 2 \text{ km h}^{-1}$
নৌকার বেগ, $v = 8 \text{ km h}^{-1}$

A নৌকাটি ক্ষুদ্রতম পথে নদী পার হলে স্রোতের বেগের সাথে লব্ধি বেগের উৎপন্ন কোণ, $\theta = 90°$ হবে।

ধরি, নৌকাটিকে স্রোতের বেগের সাথে α কোণে চালাতে হবে

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\tan 90° = \frac{8\sin\alpha}{2 + 8\cos\alpha}$

বা, $2 + 8\cos\alpha = 0$

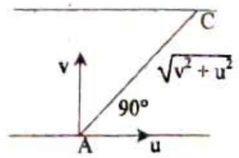
বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = 104.48°$

অতএব, A নৌকাটিকে স্রোতের সাথে 104.48° কোণে চালাতে হবে।

(ii) A নৌকা : ক্ষুদ্রতম পথে– নদীর প্রস্থ, s = 2 km
স্রোতের বেগ, u = 2 km/h এবং নৌকার বেগ, v = 8 km/h
A নৌকাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, s = 2 km
আমরা জানি, s = wt

$$s = \sqrt{v^2 - u^2}\times t$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{8^2 - 2^2}} = 0.258 \text{ hr}$$



B নৌকাটির ক্ষেত্রে :
নৌকার বেগ, $v = 8 \text{ km h}^{-1}$
নদীর প্রস্থ, s = 2 km
অতিক্রান্ত সময়, $t = \frac{2 \text{ km}}{8 \text{ km h}^{-1}} = 0.25 \text{ hr}$
B এর ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব s' হলে,

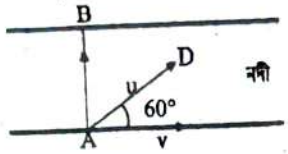
আমরা জানি, $s' = w't = \sqrt{v^2 + u^2} \times t$

$= \sqrt{8^2 + 2^2} \times 0.25 = 2.06$ km

B নৌকাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব = 2.06 km

অতএব, A ও B নৌকার অতিক্রান্ত সময় ও দূরত্ব যথাক্রমে 0.258 hr ও 0.25 hr এবং 2 km ও 2.06 km।

সমস্যা ১০৬। একটি নৌকা চিত্রানুযায়ী 5 km প্রস্থের একটি নদীতে A অবস্থান থেকে অন্য প্রান্তে AD বরাবর যাচ্ছে। স্থির পানিতে নৌকার বেগ $\vec{u} = (3\hat{i} + 9\hat{j})$ m s^{-1} এবং স্রোতের বেগ $\vec{v} = (6\hat{i})$ m s^{-1}। অন্য একটি ক্ষেত্রে নৌকাটি AB বরাবর একই দ্রুতিতে চালানো হয়।



(i) নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর। (ii) কোন ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর পাড়ে পৌছাবে তা গাণিতিক বিশ্লেষণ পূর্বক উত্তর দাও।

সমাধান : (i) এখানে, $\vec{u} = (3\hat{i} + 9\hat{j})$ m s^{-1} এবং $\vec{v} = 6\hat{i}$ m s^{-1}

নদীর সমতলের লম্ব বরাবর ভেক্টর,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6(0 - 9\hat{k}) = -54\hat{k}$$

∴ নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর,

$$\hat{a} = \pm \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \pm \frac{(-54\hat{k})}{\sqrt{(-54)^2}} = \pm \hat{k}$$

(ii) প্রথম ক্ষেত্রে নদীর প্রস্থ তথা AB বরাবর নৌকাটির বেগের উপাংশ, $u_{AB1} = 9$ m s^{-1}।

∴ ১ম ক্ষেত্রে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_1 = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ}} = \frac{5 \times 10^3}{9} \text{ s} = 555.556 \text{ s}$$

∴ $t_1 = 9.259$ min

১ম ক্ষেত্রে, নৌকার দ্রুতি ছিল, $u = \sqrt{3^2 + 9^2}$ m s^{-1} = $3\sqrt{10}$ m s^{-1}

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, AB বরাবর তথা নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ,

$u_{AB_2} = 3\sqrt{10}$ m s^{-1}

∴ ২য় ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সময়, $t_2 = \frac{5 \times 10^3}{3\sqrt{10}}$ s = 527.05 s = 8.78 min

∴ $t_2 < t_1$ অর্থাৎ, ২য় ক্ষেত্রে সময় কম লাগবে।

অতএব, ২য় ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর পাড়ে পৌছাবে।

সমস্যা ১০৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α। (i) m এর মান কত হলে α = 90° হবে? (ii) ভেক্টরদ্বয় কি ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার উত্তর যাচাই কর।

সমাধান : (i) উদ্দীপক থেকে পাই,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$

$\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ অর্থাৎ, α = 90° হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হবে। ভেক্টর দুটি পরস্পরের লম্ব হলে এদের ডট গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ হবে।

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) \cdot (m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k})$

$= 2m + 6 + 50 = 2m + 56$

সুতরাং, $2m + 56 = 0$

বা, $2m = -56 = -28$

অতএব, m এর মান − 28 হলে α = 90° হবে।

(ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গাণিতিক বিশ্লেষণ : উদ্দীপক হতে পাই, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ m & 2 & -10 \end{vmatrix}$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(-30 + 10) - \hat{j}(-20 + 5m) + \hat{k}(4 - 3m)$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -20\hat{i} + (20 - 5m)\hat{j} + (4 - 3m)\hat{k}$ .... (১)

আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m & 2 & -10 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

বা, $\vec{B} \times \vec{A} = \hat{i}(-10 + 30) - \hat{j}(-5m + 20) + \hat{k}(3m - 4)$

বা, $\vec{B} \times \vec{A} = 20\hat{i} - (20 - 5m)\hat{j} - (4 - 3m)\hat{k}$ .... (২)

(১) ও (২) নং সমীকরণ হতে দেখা যাচ্ছে, $\vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{B} \times \vec{A}$ এর মান সমান হবে, কিন্তু এদের দিক বিপরীত।

সুতরাং $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$।

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

সমস্যা ১০৮। একই ভেক্টর রাশি $\vec{A} = 4xy^3\,\hat{i} - 3x^2yz\,\hat{j} - 3\,xyz\,\hat{k}$ এবং একটি স্কেলার রাশি $\phi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$ (i) $\vec{A}$ এর কার্ল নির্ণয় কর। (ii) একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে কিভাবে ভেক্টর ক্ষেত্রে এবং একটি ভেক্টরের ক্ষেত্রকে কিভাবে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়? গাণিতিক বিশ্লেষণ করে দেখাও।

সমাধান : (i) এখানে, $\vec{A} = 4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$

∴ curl $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy^3 & -3x^2yz & -3xyz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(-3x^2yz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(4xy^3)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(4xy^3)\right\}$$

$= \hat{i}\,(-3xz + 3x^2y) - \hat{j}\,(-3yz - 0) + \hat{k}\,(-3yz\,.\,2x - 4.x.3y^2)$

$= \hat{i}\,3x(xy - z) + \hat{j}\,3yz - 6xy\,(z + 2y)\,\hat{k}$

∴ $\vec{A}$-এর কার্ল $3x\,(xy - z)\,\hat{i} + 3yz\,\hat{j} - 6xy\,(z + 2y)\,\hat{k}$.

(ii) এখানে, ভেক্টর ক্ষেত্র, $\vec{A} = 4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$

স্কেলার ক্ষেত্র, $\varphi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$

∴ div $\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . (4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k})$

$= \frac{\partial}{\partial x}(4xy^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3xyz)$

$= 4y^3 - 3x^2z - 3xy$ যা একটি স্কেলার ক্ষেত্র

আবার, grad $\varphi = \vec{\nabla}\varphi$

$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$

$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\varphi + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\varphi + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\varphi$

$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3)$

$= \hat{i}(4xyz + 2yz + 2z^3) + \hat{j}(2x^2z + 2xz + 0) + \hat{k}(2x^2y + 2xy + 6xz^2)$ যা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র

অতএব, গ্রাডিয়েন্ট করে একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর এবং ডাইভারজেন্স করে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তরিত করা যায়।

সেট-৪ : ভর্তি পরীক্ষায় আসা সমস্যাবলি

সমস্যা ১০৯। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 20 একক। এদের ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{2}$ একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [কুয়েট '১৭-১৮]

সমাধান : খণ্ড-১ এর ১৪১ পৃষ্ঠার ১নং সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১১০। কোনো নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে যথাক্রমে 18 এবং 6 km/hour। নৌকাটি কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে সোজা অপর পাড়ে পৌছাবে? [বুয়েট '১৫-১৬]

সমাধান : খণ্ড-১ এর ১৪১ পৃষ্ঠার ২নং সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১১১। p এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{V} = (5x + 2y)\vec{i} + (2py - z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$ সলিনয়ডাল হবে? [বুয়েট '১৫-১৬]

সমাধান : $\vec{V} = (5x + 2y)\vec{i} + (2py - z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$

$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial(5x + 2y)}{\partial x} + \frac{\partial(2py - z)}{\partial y} + \frac{\partial(x - 2z)}{\partial z} = 0$

বা, $5 + 2p - 2 = 0$

বা, $p = -\frac{3}{2}$.

সমস্যা ১১২। একটি নদীতে স্রোতের বেগ 5 m s^{-1}। নদীর প্রস্থ বরাবর 10 m s^{-1} বেগে চলমান একটি নৌকার সোজাসুজি পার হতে 1 min 40 sec সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত? [চুয়েট '০৩-০৪]

সমাধান : ধরি, নৌকার বেগ, $u = 10 \text{ m s}^{-1}$

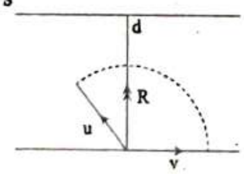
স্রোতের বেগ, $v = 5 \text{ m s}^{-1}$

u এবং v এর লব্ধি = R

নদীর প্রস্থ, d = ?

সময়, $t = 1$ min 40 s

$= (60 + 40)$ s $= 100$ s



এখন, লব্ধির বেগ, $R^2 = U^2 - V^2$

বা, $R = \sqrt{u^2 - v^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ m s}^{-1}$

এখন, দূরত্ব = বেগ × সময়

বা, $d = R \times 1 = 5\sqrt{3} \times 100 = 500\sqrt{3}$ m

∴ নদীর প্রস্থ $= 500\sqrt{3}$ m।

সমস্যা ১১৩। প্রতি ঘণ্টায় 1800 m বেগে 240 m প্রশস্ত একটি নদীতে স্রোত বইছে। প্রতি ঘণ্টায় 3600 m বেগে সাঁতারে সক্ষম একজন সাঁতারু নদীর প্রস্থ বরাবর বিপরীত পার্শ্বে পৌছাতে চায়। উক্ত বিন্দুতে পৌছাতে চাইলে সাঁতারু কোন দিক বরাবর সাঁতার দিবে? এতে কত সময় লাগবে? প্রাপ্ত সময়ের চেয়ে কম সময়ে নদী পার হওয়া সাঁতারুর পক্ষে সম্ভব কি-না? [বুয়েট '০৩-০৪]

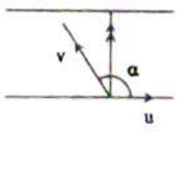
সমাধান : এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 1800$ m/h

$= \frac{1800}{3600} \text{ ms}^{-1} = 0.5 \text{ ms}^{-1}$

সাঁতারুর বেগ, $v = 3600$ m/h

$= \frac{3600}{3600} \text{ ms}^{-1}$

$= 1 \text{ ms}^{-1}$



এখন, নদীর প্রস্থ বরাবর অপর পাড়ে পৌছানোর জন্য স্রোতের বেগের সাথে সাঁতারু যদি α কোণে সাঁতার কাটে। তাহলে,

$\tan 90° = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$

বা, $\frac{1}{\tan 90°} = \frac{u + v \cos \alpha}{v \sin \alpha}$

বা, $0 = \frac{u + v \cos \alpha}{v \sin \alpha}$

বা, $u + v \cos \alpha = 0$

বা, $\cos \alpha = -\frac{u}{v}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{.5}{1}\right) = 120°$

সুতরাং উক্ত বিন্দুতে পৌছতে হলে সাঁতারু স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে সাঁতার দিবে।

এখন, লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos 120°}$

$= \sqrt{(.5)^2 + 1^2 + 2 \times 0.5 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \text{ ms}^{-1}$

$= \sqrt{.75} \text{ ms}^{-1}$

নদীর প্রশস্ততা, $d = 240$ m

∴ প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{240 \text{ m}}{\sqrt{.75} \text{ ms}^{-1}} = 277.13$ s

এখন, সাঁতারু যদি স্রোতের বেগের সাথে 90° কোণে অর্থাৎ সোজাসুজি অপর পাড়ের দিকে সাঁতার কাটতে শুরু করে তাহলে, লব্ধি বেগ, $w' = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos 90°}$

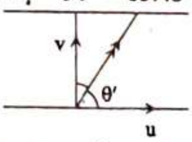
$= \sqrt{(.5)^2 + 1^2 + 2 \times .5 \times 1 \times 0} = \sqrt{1.25} \text{ ms}^{-1}$

এক্ষেত্রে লব্ধি u এর সাথে θ′ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan \theta' = \frac{v \sin 90°}{u + v \cos 90°}$

বা, $\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{.5}\right) = 63.43°$

∴ v এর সাথে সৃষ্ট কোণ $= 90° - 63.43° = 26.56°$



∴ অপর তীরে পৌছতে দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে

$= \frac{240}{\cos 26.56°} = 268.33$ m

∴ অপর পাড়ে পৌছাতে প্রয়োজনীয় সময়,

$t' = \frac{268.33 \text{ m}}{w'} = \frac{268.33 \text{ m}}{\sqrt{1.25} \text{ ms}^{-1}} = 240$ s.

সমস্যা ১১৪। একটি নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে 18 km/hr এবং প্রতিকূলে 6 km/hr। নৌকাটি কত বেগে এবং কোনদিকে চালনা করলে ঠিক অপর পাড়ে পৌছাতে পারবে? [বুয়েট '১০-১১]

সমাধান : মনে করি, নৌকার বেগ = v এবং স্রোতের বেগ = u

∴ $v + u = 18$ .... (1)

$v - u = 6$ .... (2)

(1) ও (2)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$v + u + v - u = 24$

বা, $2v = 24$

বা, $v = 12 \text{ kmh}^{-1}$

∴ $u = 18 - 12 = 6 \text{ kmh}^{-1}$

মনে করি, নৌকাটি স্রোতের বেগের সাথে α কোণে চালনা করলে ঠিক অপর পাড়ে পৌছতে পারবে। এক্ষেত্রে লব্ধি u এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করবে।

$\therefore \quad \tan 90^\circ = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$

বা, $\frac{1}{\tan 90^\circ} = \frac{u + v \cos \alpha}{v \sin \alpha}$

বা, $u + v \cos \alpha = 0$

বা, $\cos \alpha = -\frac{u}{v}$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{12}\right) = 120^\circ$

সুতরাং, স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে নৌকা চালাতে হবে।

লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}$

$= \sqrt{12^2 + 6^2 + 2 \times 12 \times 6 \times \cos 120^\circ}$ kmh^{-1}

$= 6$ kmh^{-1}

নির্ণেয় লব্ধি বেগ 6 kmh^{-1}।

সমস্যা ১১৫। $\vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ এর দিকে $\vec{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ বের কর। [বুয়েট '০০-০১]

সমাধান : ধরি,

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$

বা, $B \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$

এখানে,

$\vec{A} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

$\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ, $B \cos \theta = ?$

$= \frac{(5\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}) \cdot (10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k})}{\sqrt{5^2 + (6)^2 + 9^2}}$

$= \frac{50 + 48 - 72}{\sqrt{25 + 36 + 81}} = \frac{26}{\sqrt{142}}$

অতএব, $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ $\frac{26}{\sqrt{142}}$।

সমস্যা ১১৬। $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর। দেখাও যে, ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত নয়।

সমাধান : $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকবে না যদি $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot C \neq 0$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4 + 8) - \hat{j}(8 - 12) + \hat{k}(-4 + 3) = 4\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

এখন, $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (4\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 4 - 12 - 5 = -13 \neq 0$

অতএব, $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় নয়।

সমস্যা ১১৭। একটি ইঞ্জিন চালিত নৌকার বেগ ঘণ্টায় 14 কিলোমিটার। একটি নদী আড়াআড়ি পার হতে হলে নৌকাটিকে কোন দিকে চালাতে হবে? নদীর প্রস্থ 12.125 km হলে তা পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 7 km। [চুয়েট '০৪-০৫]

সমাধান : ধরি, নৌকার বেগ, $u = 14$ $km\,h^{-1}$

স্রোতের বেগ, $v = 7$ $km\,h^{-1}$

u ও v এর লব্ধি $= R$

স্রোতের বেগ বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $R \cos 90^\circ = v \cos 0^\circ + u \cos \alpha$

বা, $0 = v + u \cos \alpha$

বা, $\cos \alpha = -\frac{v}{u} = \frac{7}{14} = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ$

$\therefore \quad \alpha = 120^\circ$

লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{u^2 - v^2}$

$= \sqrt{(14)^2 - (7)^2} = \sqrt{196 - 49} = \sqrt{147} = 12.124$ $km\,h^{-1}$

আবার, দূরত্ব $=$ বেগ $\times$ সময়

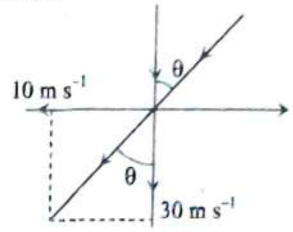
$d = R \times t$ বা, $t = \frac{d}{R} = \frac{12.125}{12.124}$ $h = 1h$

সমস্যা ১১৮। কোনো একদিন 30 $m\,s^{-1}$ গতিতে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। যদি বায়ু 10 $m\,s^{-1}$ গতিতে উত্তর থেকে দক্ষিণে বইতে শুরু করে, তাহলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তোমার ছাতা কোন দিকে মেলে ধরতে হবে? [বুয়েট '০৬-০৭]

সমাধান : এখানে, বৃষ্টির বেগ, $v = 30$ $m\,s^{-1}$

বায়ুর বেগ, $u = 10$ $m\,s^{-1}$

বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = ?$



এখন, $\tan \theta = \frac{u}{v} = \frac{10\ m\,s^{-1}}{30\ m\,s^{-1}}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43^\circ$

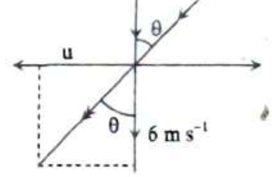
$\therefore$ বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে উল্লম্বের সাথে 18.48° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

সমস্যা ১১৯। একজন সাইকেল আরোহী রাস্তার উপর দিয়ে কত বেগে চললে 6 $m\,s^{-1}$ বেগের বৃষ্টির ফোটা তার গায়ে 45° কোণে পড়বে? [কুয়েট '০৫-০৬]

সমাধান : এখানে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6$ $m\,s^{-1}$

বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্বের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 45^\circ$

সাইকেল আরোহীর বেগ, $u = ?$



এখন, $\tan \theta = \frac{u}{v}$

বা, $\tan 45^\circ = \frac{u}{6}$

বা, $1 = \frac{u}{6}$ $\therefore u = 6$

$\therefore$ আরোহীর বেগ 6 $m\,s^{-1}$।

সমস্যা ১২০। $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\sqrt{3}\hat{k}$ ভেক্টর দুটি একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। $\vec{P}$ এর সাথে এদের লব্ধি ভেক্টরের দিক নির্ণয় কর। লব্ধির মান নির্ণয় করা সম্ভব কি-না গাণিতিক যুক্তি দাও। [ঢা. বি. '০৭-০৮]

সমাধান : এখানে, $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\sqrt{3}\hat{k}$

$\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90^\circ$

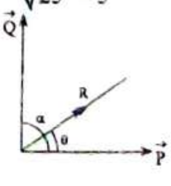
$\vec{P}$ এবং $\vec{R}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

এখন, $P = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$Q = \sqrt{3^2 + 2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 12} = \sqrt{25} = 5$

আমরা জানি,

$\tan \theta = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha} = \frac{5 \sin 90^\circ}{3 + 5 \cos 90^\circ} = \frac{5}{3 + 0}$



বা, $\tan \theta = \frac{5}{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59.03^\circ$

এখন, লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2 + (2 \times 3 \times 5 \times \cos 90^0)}$

$= \sqrt{9 + 25 + 0} = \sqrt{34}$

$\therefore$ $\vec{P}$ এর সাথে লব্ধির দিক 59.03° এবং লব্ধির মান $\sqrt{34}$।

সমস্যা ১২১। একটি কণার উপর $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল কাজ করার ফলে বলের দিকে কণাটির $\vec{r} = (2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। λ এর কোন মানের জন্য সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে? [বুয়েট '১২-১৩]

সমাধান : খণ্ড-১ এর ১৪২ পৃষ্ঠার ৪নং সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১২২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। যদি $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ হয়, তাহলে $\vec{R}$, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে কিনা? গাণিতিক যুক্ত দাও। [কুয়েট '০৯-১০, '১১-১২, '১৩-১৪]

সমাধান : খণ্ড-১ এর ১৪২ পৃষ্ঠার ৫নং সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১২৩। $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা সম্ভব কিনা? গাণিতিক যুক্তি দাও। [কুয়েট '০৬-০৭, '১২-১৩; বুয়েট '১৪-১৫]

সমাধান : খণ্ড-১ এর ১৪২ পৃষ্ঠার ৮নং সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

অধ্যায়-২

৩ ড. আমির হোসেন খান, মোহাম্মদ ইসহাক ও ড. মো. নজরুল ইসলাম স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর গাণিতিক সমস্যার সমাধান

সমস্যা ১। বায়ু উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্যদিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বেগের উত্তর দিকের অংশক ঘণ্টায় 5 km এবং পূর্ব দিকের অংশক ঘণ্টায় 12 km। লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক, $P = 5\ \text{km h}^{-1}$

এবং পূর্ব দিকের অংশক, $Q = 12\ \text{kmh}^{-1}$

উত্তর দিক ও পূর্ব দিকের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

লব্ধি বেগ বা বায়ু বেগের মান, $R = ?$

উত্তর দিকের সঙ্গে লব্ধি বেগের দিক, $Q = ?$

আমরা জানি,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(5\ \text{kmh}^{-1})^2 + (12\ \text{kmh}^{-1})^2 + 2 \times 5\ \text{kmh}^{-1} \times 12\ \text{kmh}^{-1} \times \cos 90°}$$
$$= \sqrt{25 + 144 + 0}\ \text{kmh}^{-1} = \sqrt{169}\ \text{kmh}^{-1}$$
$$\therefore\ R = 13\ \text{kmh}^{-1}$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{12\ \text{kmh}^{-1} \times \sin 90}{5\ \text{kmh}^{-1} + 12\ \text{kmh}^{-1} \times \cos 90} = \dfrac{12}{5}$

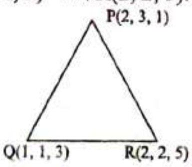
$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{12}{5} = 67°23'$$

অতএব, লব্ধি বেগের মান $13\ \text{kmh}^{-1}$ এবং দিক উত্তর দিকের সাথে $67°23'$।

সমস্যা ২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (2, 3, 1), (1, 1, 3) এবং (2, 2, 5) হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি,

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে P(2, 3, 1), Q(1, 1, 3) এবং R(2, 2, 5).



$$\therefore\ \vec{PQ} = (1-2)\,\hat{i} + (1-3)\,\hat{j} + (3-1)\,\hat{k}$$
$$= \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\therefore\ \vec{PR} = (2-2)\,\hat{i} + (2-3)\,\hat{j} + (5-1)\,\hat{k}$$
$$= -\hat{j} + 4\hat{k}$$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$

$$= \frac{1}{2}(-\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (-\hat{j} + 4\hat{k})$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\{(-8+2)\,\hat{i} + (0+4)\,\hat{j} + (1-0)\,\hat{k}\}$$
$$= \frac{1}{2}|(-6\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (4)^2 + (1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 16 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{53}\ \text{বর্গ একক।}$$

সমস্যা ৩। দেখাও যে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির লব্ধির পরম মান P + Q অপেক্ষা বেশি বা P – Q অপেক্ষা কম হতে পারেনা।

সমাধান : ধরি, দুটি ভেক্টর P ও Q পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি R হলে,

আমরা জানি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

যেহেতু $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মান স্থির তাই $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হলে R এর মান সর্বোচ্চ হবে এবং $\cos\alpha$ এর মান সর্বনিম্ন হলে R এর মান সর্বনিম্ন হবে।

এখন, $\cos\alpha$ এর সর্বোচ্চ মান = 1

$\therefore\ \cos\alpha = 1 = \cos 0°$

$\therefore\ \alpha = 0°$

এখন, লব্ধির সর্বোচ্চ মান,

$$R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ}\ [\because \cos 0° = 1]$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2} = P + Q$$

অপরদিকে, $\cos\alpha$ এর সর্বনিম্ন মান = – 1

$\therefore\ \cos\alpha = -1 = \cos 180°$

$\therefore\ \alpha = 180°$

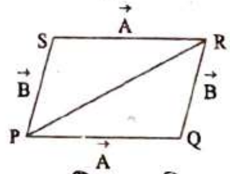
এখন লব্ধির সর্বনিম্ন মান,

$$R_{min} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°}$$
$$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}\ [\because \cos 180° = -1]$$
$$= \sqrt{(P-Q)^2} = P - Q$$

অতএব, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরের লব্ধির পরম মান P + Q অপেক্ষা বেশি বা P – Q অপেক্ষা কম হতে পারে না।

সমস্যা ৪। দেখাও যে, ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

সমাধান :



ধরি, PQRS একটি সামান্তরিক। যার দুটি সন্নিহিত বাহু PQ ও PS যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়কে নির্দেশ করে।

যেহেতু PQRS সামান্তরিক। সেহেতু $\vec{PQ} = \vec{SR} = \vec{A}$ এবং $\vec{QR} = \vec{PS} = \vec{B}$.

$\therefore$ PQR ত্রিভুজে ভেক্টরের ত্রিভুজবিধি প্রয়োগ করে $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

বা, $\vec{PR} = \vec{A} + \vec{B}$ .... (i)

আবার, PSR ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি প্রয়োগ করলে,

বা, $\vec{PS} + \vec{SR} = \vec{PR}$

বা, $\vec{PR} = \vec{B} + \vec{A}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে,

$\therefore\ \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$. (দেখানো হলো)

সমস্যা ৮। দেখাও যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি, $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ হয়?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৯(i)নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৯। একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 100 মিটার প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পার হতে পারে; কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৭৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১০। দুটি দিক রাশির প্রত্যেকটির মান 8 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান নির্ণয়ের সূত্র,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad \text{.......... (১)}$$

এবং দিক নির্ণয়ের সূত্র, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ .... (২)

এখানে, $\hat{P}$এর মান, $P = 8$ একক

$\hat{Q}$ এর মান, $Q = 8$ একক

$\hat{P}$ ও $\hat{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$

লব্ধি $\hat{R}$ এর মান, $R = ?$

$\hat{R}$ ও $\hat{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

সমীকরণ (১) নং হতে পাই,

লব্ধি, $R = \sqrt{8^2 + 8^2 + 2 \times 8 \times 8 \times \cos 120°}$

$= \sqrt{64 + 64 + 128(-0.5)} = \sqrt{64} = 8$

$\therefore$ লব্ধির মান 8 একক।

সমীকরণ (২) নং হতে পাই,

$$\tan\theta = \frac{8\sin 120°}{8 + 8\cos 120°} = 1.732$$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(1.732) = 60°$

অতএব, লব্ধির মান 8 এবং দিক 60°।

সমস্যা ১১। একটি বেগের অনুভূমিক ও উলম্ব অংশের মান যথাক্রমে $60\ m\ s^{-1}$ ও $80\ m\ s^{-1}$। বেগটির মান কত?

সমাধান : এখানে,অনুভূমিক অংশের বেগ, $v_1 = 60\ m\ s^{-1}$

এবং উলম্ব " " " $v_2 = 80\ m\ s^{-1}$

এবং v_1 ও v_2 এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

ধরি, লব্ধি বেগ, $v = ?$

আমরা জানি, $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta$

$= (60\ m\ s^{-1})^2 + (80\ m\ s^{-1})^2 + 2 \times 60\ m\ s^{-1} \times 80\ m\ s^{-1} \times \cos 90°$

$= 3600\ m^2 s^{-2} + 6400\ m^2 s^{-2} + 0 = 10000\ m^2 s^{-2}$

$\therefore v = 100\ m\ s^{-1}$

অতএব, লব্ধি বেগ $100\ m\ s^{-1}$।

সমস্যা ১২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। (ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর; (খ) $(2\vec{A} + 3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : (ক) $\vec{A} = A = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\vec{B} = B = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মান যথাক্রমে 3 ও 7

(খ) $2\vec{A} + 3\vec{B} = (4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) + (18\hat{i} - 9\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 22\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \quad |2\vec{A} + 3\vec{B}| = \sqrt{(22)^2 + (-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{525} = 22.91$

অতএব, $(2\vec{A} + 3\vec{B})$ এর মান 22.91।

সমস্যা ১৩। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয়, তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৪। $\vec{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি যে তলে অবস্থিত তার লম্বদিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : $\vec{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

এখন, $\vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}) \times (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (6 + 9)\hat{i} + (-12 + 2)\hat{j} + (6 + 24)\hat{k}$

$= 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$

$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2} = \sqrt{225 + 100 + 900} = 35$

ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকে একক ভেক্টর $\hat{\eta} = \pm \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

$= \pm \dfrac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35}$

$= \pm \left(\dfrac{3}{7}\hat{i} - \dfrac{2}{7}\hat{j} + \dfrac{6}{7}\hat{k}\right)$

সমস্যা ১৫। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এর ভেক্টর গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ।

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণফল, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-6 + 3) + \hat{j}(2 - 6) + \hat{k}(-3 + 2)$

$= -3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

আবার, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \dfrac{(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1 + 1 + 1} \times \sqrt{4 + 9 + 36}} = \dfrac{2 + 3 + 6}{\sqrt{3}\sqrt{49}}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{11}{7\sqrt{3}}\right) = 24.87°$

সুতরাং ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল $-3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ 24.87°।

সমস্যা ১৬। দেখাও যে, $\vec{A} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

সমাধান : আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$

এখানে,
$\vec{A} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$
$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$
এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

$= \dfrac{(5\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}}$

$= \dfrac{10 - 4 - 6}{\sqrt{45} \times \sqrt{14}} = \dfrac{0}{\sqrt{45} \times \sqrt{14}} = 0$

$\therefore \ \theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমস্যা ১৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \dfrac{(2\hat{i} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{-2 + 0 + 2}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = 0$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমস্যা ১৮। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{C} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ হলে, $|\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$= \hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}| = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{51} = 7.141$

সমস্যা ১৯। a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ২০। $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ বা অংশে নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

$\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ, $A \cos\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$

বা, $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B} = \dfrac{(\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}}$

$= \dfrac{6 + 12 + 10}{\sqrt{49}} = \dfrac{28}{7} = 4$

অতএব, $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ বা অংশক 4 একক।

সমস্যা ২১। দুটি ভেক্টরের যোগফল $\vec{A} + \vec{B} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ এবং বিয়োগফল $\vec{A} - \vec{B} = -6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ নির্ণয় কর এবং এদের স্কেলার গুণন নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} + \vec{B} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = -6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k}$

$\therefore (\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{A} - \vec{B}) = (12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}) + (-6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k})$

বা, $2\vec{A} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 8\hat{k}$

বা, $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}$

আবার, $(\vec{A} + \vec{B}) - (\vec{A} - \vec{B}) = (12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}) - (-6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k})$

বা, $2\vec{B} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k} + 6\hat{i} - 12\hat{j} - 10\hat{k}$

বা, $2\vec{B} = 18\hat{i} - 16\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{B} = 9\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}) \cdot (9\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k})$

$= 27 - 32 - 9 = 27 - 41 = -14$

সমস্যা ২২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এদের লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \times (6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (-4 + 3)\hat{i} + (-6 + 4)\hat{j} + (6 - 12)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর

$\hat{\eta} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \dfrac{-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}}$

$= \pm \dfrac{-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{41}} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{41}}(-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}).$

সমস্যা ২৩। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$

এখানে,
$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

$= \dfrac{(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \times \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}}$

$= \dfrac{12 - 6 - 2}{\sqrt{9} \times \sqrt{49}} = \dfrac{4}{3 \times 7} = \dfrac{4}{21}$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right) = 79°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 79°।

সমস্যা ২৪। $\hat{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\hat{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\hat{A} \cdot (\hat{B} \times \hat{C}) = (\hat{A} \times \hat{B}) \cdot \hat{C}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4 + 3) + \hat{j}(-3 - 2) + \hat{k}(1 - 2) = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}.$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-6 - 2) + \hat{j}(1 + 9) + \hat{k}(6 - 2) = -8\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}$

বামপক্ষ $= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

$= (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k})$

$= 21 - 10 - 1$

$= 10$

$\because \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
এবং $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

ডানপক্ষ $= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (-8\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$= -8 + 10 + 8$

$= 10.$

$\because \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
এবং $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

$\therefore \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. (প্রমাণিত)

সমস্যা ২৫। যদি $\vec{P} + \vec{Q} = R$ এবং $P + Q = R$ হয় তাহলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

আবার, $R = P + Q$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

আমরা জানি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $(P + Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $P^2 + 2PQ + Q^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $2PQ \cos\alpha = 2PQ$

বা, $\cos\alpha = 1$

বা, $\alpha = 0°$

$\therefore$ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 0°.

সমস্যা ২৬। প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত তিনটি ভেক্টর $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ একটি ত্রিভুজ গঠন করতে পারে। [Hints : দুটি ভেক্টরের যোগফল তৃতীয়টির সমান, দেখাও তাহলে ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী ভেক্টরগুলো ত্রিভুজ গঠন করে প্রমাণিত হবে।]

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{C} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি ত্রিভুজ গঠন করবে যদি তাদের যেকোনো দুটির যোগফল তৃতীয়টির সমান হয়।

$\vec{B} + \vec{C} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$= 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$= \vec{A}$

$\therefore \vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$

অতএব, $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি ত্রিভুজ গঠন করবে। **[প্রমাণিত]**

সমস্যা ২৭। $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–4, 3, 5) এবং (3, –1, 4) হলে স্থানাঙ্কের সাহায্যে $\vec{AB}$ ভেক্টরকে প্রকাশ কর এবং এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–4, 3, 5) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, –1, 4)

$\therefore$ A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{OA} = -4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{OB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + 4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} = 7\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $\vec{AB}$ ভেক্টরের মান, $|\vec{AB}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-1)^2}$ একক

$= \sqrt{66}$ একক

সমস্যা ৩০। দেখাও যে, দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : ধরা যাক, সমান ভেক্টরদ্বয় P, এদের মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি P এর সাথে θ কোণে আনত। প্রমাণ করতে হবে, $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha}$

বা, $\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$

বা, $\theta = \frac{\alpha}{2}$

অতএব, দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমস্যা ৩১। $(\hat{i} - \hat{j})$ এবং $(\hat{j} + \hat{k})$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j}$

$\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{1\times0 - 1\times1 + 0\times1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$

বা, $\theta = 120°$

অতএব, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°।

সমস্যা ৩২। দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y$ এবং $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y$ ভেক্টর দুটি (i) পরস্পরের সমান্তরাল এবং (ii) পরস্পরের লম্ব হওয়ার শর্তগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y$

$\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y$

(i) ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = 0$

বা, $\hat{k}(A_xB_y - B_xA_y) = 0$

উভয় পক্ষের $\hat{k}$ এর সহগকে সমীকৃত করে পাই,

$A_xB_y - B_xA_y = 0$

বা, $A_xB_y = B_xA_y$

বা, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y}$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে যদি $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y}$ হয়।

(ii) ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে যদি, $\hat{A}.\vec{B} = 0$

বা, $A_xB_x + A_yB_y = 0$

বা, $A_xB_x = -A_yB_y$ হয়

সমস্যা ৩৩। এক ব্যক্তি অনুভূমিক রাস্তায় 4 km বেগে হাঁটছে। তার মনে হচ্ছে বৃষ্টি উল্লম্বভাবে ঘণ্টায় 4 km এসে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ কত এবং উল্লম্বের সাথে কত কোণে আনত নির্ণয় কর।

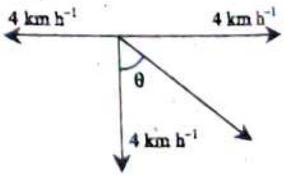
সমাধান : এখানে, লোকটির বেগ, $u = 4\ km\ h^{-1}$,

বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $R = 4\ k\ mh^{-1}$

ধরা যাক, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ, v

আপেক্ষিক বেগের নিয়মানুসারে

পাশের চিত্রটি আঁকা হলো :



চিত্রানুসারে, $\tan 90° = \frac{4\sin\alpha}{4 + 4\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{v\sin\alpha}{4 + \cos\alpha\times v}$

বা, $\cos\alpha = -\frac{4}{v}$

$\therefore R^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

বা, $4^2 = 4^2 + v^2 + 2uv\times\left(-\frac{4}{v}\right)$

বা, $4^2 = 4^2 + v^2 - 2\times4^2$

বা, $v^2 = 4^2 + 4^2$

বা, $v = 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ km\ h^{-1}$

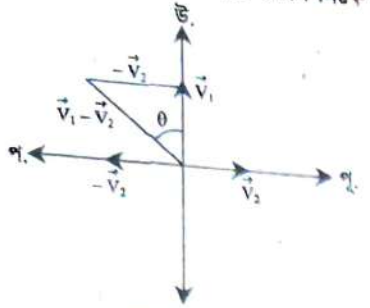
আবার, চিত্রানুসারে, $\tan\theta = \frac{4}{4}$

বা, $\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$

অতএব, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $4\sqrt{2}\ km\ h^{-1}$ এবং এটি উল্লম্বের সাথে 45° কোণে আনত।

সমস্যা ৩৫। উত্তর এবং পূর্ব দিকে যথাক্রমে $3\ ms^{-1}$ এবং $4\ ms^{-1}$ মানের দুটি বেগ ভেক্টরকে $\vec{v}_1$ এবং $\vec{v}_2$ দ্বারা সূচিত করা হলো। এদের বিয়োগফল $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ নির্ণয় কর। এটি কোন দিকে কত কোণে থাকবে?

সমাধান :



$\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ এর মান $= \sqrt{v_1^2 + (-v_2)^2}$
$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$= \sqrt{3^2 + 4}\ ms^{-1} = 5\ ms^{-1}$

এখানে,
$v_1 = 3\ ms^{-1}$
$v_2 = 4\ ms^{-1}$

চিত্রানুসারে, $\tan\theta = \dfrac{|-\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{v_2}{v_1}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) = 53.13°$

অতএব, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ভেক্টরের মান $5\ ms^{-1}$ এর দিক উত্তর দিকের সাথে $53.13°$ কোণে উত্তর-পশ্চিম দিকে।

সমস্যা ৩৬। একটি ভেক্টরের আদি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4) এবং শেষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 5)। ভেক্টরটির মান এবং দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, আদি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(3, 4)
শেষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক, B(8, 5)

$\therefore$ ভেক্টরটি $\vec{AB} = 8\hat{i} + 5\hat{i} - 3\hat{i} - 4\hat{j}$

$\therefore \vec{AB} = 5\hat{i} + \hat{j}$

ভেক্টরটির মান $|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

দিক, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right) = 11.31°$

সমস্যা ৪১। দুটি সমান ভেক্টরকে যোগ করলে কোন অবস্থায় তাদের লব্ধি (i) একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{2}$ গুণ হবে এবং (ii) একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{3}$ গুণ হবে?

সমাধান : এখানে, ভেক্টর দুটির মান সমান।
ধরি, ভেক্টর দুটি P এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α

(i) লব্ধি $\sqrt{2}P$ হলে, $(\sqrt{2}P)^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

বা, $2P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 90°$

অতএব, লব্ধি ভেক্টর একটি ভেক্টরের $\sqrt{2}$ গুণ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $90°$।

(ii) লব্ধি ভেক্টর $\sqrt{3}P$ হলে, $(\sqrt{3}P)^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

বা, $3P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 60°$

অতএব, লব্ধি ভেক্টর একটি ভেক্টরের $\sqrt{3}$ গুণ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $60°$।

সমস্যা ৪৩। $(6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$ এবং $(6\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$
$\vec{B} = 6\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল, $\vec{A} + \vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} + 6\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$
$= 12\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ যোগফলের মান $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}$ একক
$= \sqrt{144 + 9 + 16}$ একক
$= \sqrt{169}$ একক $= 13$ একক

ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল, $\vec{A} - \vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} - 6\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} = 5\hat{j}$

$\therefore$ বিয়োগফলের মান, $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{5^2}$ একক $= 5$ একক।

সমস্যা ৪৭। $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

এখানে, $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$
$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$
$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণ, $\theta = ?$

$= \dfrac{(3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}).(2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}}$

$= \dfrac{6 + 3 - 3}{\sqrt{19} \times \sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{266}} = 0.368$

বা, $\theta = \cos^{-1}(0.368) = 68.4°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণের মান $68.4°$।

সমস্যা ৪৮। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। দেখাও যে, এরা পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৪৯। এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা XY তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত।

সমাধান : ধরি, XY তলের সমান্তরাল ভেক্টর $x\hat{i} + y\hat{j}$

এখন, ভেক্টরটি XY তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত হলে,

$(x\hat{i} + y\hat{j}).(2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = 0$

বা, $2x - 2y = 0$

বা, $x = y$

$\therefore$ একক ভেক্টর, $\hat{n} = \pm\dfrac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm\dfrac{y\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{y^2 + y^2}}$

$= \pm\dfrac{y(\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{2y^2}} = \pm\dfrac{y(\hat{i} + \hat{j})}{y\sqrt{2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

অতএব, একক ভেক্টরের মান $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$।

সমস্যা ৫০। একটি কণার উপর $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})N$ বল প্রয়োগ করায় কণাটির $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})m$ সরণ হয়। বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ কত?

সমাধান : আমরা জানি,

$W = \vec{F}.\vec{r}$
$= (6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}).(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$
$= 18(\hat{i}.\hat{i}) - 6(\hat{j}.\hat{j}) - 2(\hat{k}.\hat{k})$
$= 18 - 6 - 2 = 10$

এখানে,
বল, $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})N$
এবং সরণ, $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})m$

অতএব, সম্পাদিত কাজ 10 J।

সমস্যা ৫১। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর এদের স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফল এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এদের স্কেলার গুণফল এর মান, $\vec{A} . \vec{B} = ?$

এবং এদের ভেক্টর গুণফল এর মান, $|\vec{A} \times \vec{B}| = ?$

এখন, $\vec{A} . \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) . (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 12(\hat{i} . \hat{i}) - 6(\hat{j} . \hat{j}) - 2(\hat{k} . \hat{k})$

$= 12 - 6 - 2$ $[\because (\hat{i} . \hat{i}) = (\hat{j} . \hat{j}) = (\hat{k} . \hat{k}) = 1]$

$= 4$

আবার, $|\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= (4 - 3)\hat{i} + (-6 - 4)\hat{j} + (-6 - 12)\hat{k}$

$= \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$

এখন, $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-18)^2}$

$= \sqrt{1 + 100 + 324}$

$= \sqrt{425} = \sqrt{25 \times 17} = 5\sqrt{17}$

অতএব, ভেক্টর দুটির স্কেলার ও ভেক্টর গুণফলের মান যথাক্রমে 4 ও $5\sqrt{17}$।

সমস্যা ৫২। P এবং Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2, 5, 7) এবং (2, 8, –5)। স্থানাঙ্কের সাহায্যে $\vec{PQ}$ ভেক্টরটিকে প্রকাশ কর। $\vec{PQ}$ এর মান এবং দিক নির্দেশক একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–2, 5, 7) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 8, –5)

$\therefore \vec{PQ} = 2\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k} + 2\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$

বা, $\vec{PQ} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}$

$\vec{PQ}$ এর মান $|\vec{PQ}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}$ একক

$= \sqrt{16 + 9 + 144}$ একক

$= \sqrt{169}$ একক $= 13$ একক

$\vec{PQ}$ এর দিকে একক ভেক্টর, $\hat{q} = \pm \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \pm \frac{4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}}{13}$

সমস্যা ৫৫। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A}.\vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2$

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৫৮। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$। ভেক্টরটির সঙ্গে $\vec{B}$ যোগ করলে, X অক্ষ বরাবর একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। তাহলে $\vec{B}$ ভেক্টরটি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$

আমরা জানি, X অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$

প্রশ্নমতে, $\vec{A} + \vec{B} = \hat{i}$

বা, $\vec{B} = \hat{i} - \vec{A} = \hat{i} - 2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$

সমস্যা ৫৯। $\vec{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ এবং $\vec{Q} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$। এমন একটি ভেক্টর নির্ণয় কর যার মান $\vec{Q}$ এর সমান এবং অভিমুখ $\vec{P}$ এর সমান্তরাল।

সমাধান : এখানে, $\vec{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$\vec{Q} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$

$\vec{Q}$ এর মান, $|\vec{Q}| = \sqrt{7^2 + 24^2}$ একক $= 25$ একক

$\vec{P}$ এর অভিমুখে একক ভেক্টর, $\hat{P} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}$

বা, $\hat{P} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$

অতএব, $\vec{Q}$ এর সমান $\vec{P}$ এর সমান্তরাল ভেক্টরটি $= |\vec{Q}|\hat{P}$

$= 25 \times \frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$

$= 15\hat{i} + 20\hat{j}$

সমস্যা ৬০। একটি ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ উভয় ভেক্টরের ওপর অভিলম্ব।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব ভেক্টর $= \vec{A} \times \vec{B}$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(4 + 4) - \hat{j}(12 - 4) + \hat{k}(-6 - 2) = 8\hat{i} - 8\hat{j} - 8\hat{k}$

সমস্যা ৬২। $2\vec{A}$ এবং $\vec{A}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট কোণে আনত। প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধির মান তিনগুণ বৃদ্ধি হয়। ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ কত?

সমাধান : ধরি, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি R।

$\therefore \quad R^2 = 4A^2 + A^2 + 2.2A.A \cos\alpha$

বা, $R^2 = 5A^2 + 4A^2 \cos\alpha$..........................(i)

আবার, $(3R)^2 = 16A^2 + A^2 + 2.4A.A \cos\alpha$

বা, $9R^2 = 17A^2 + 8A^2 \cos\alpha$

বা, $9(5A^2 + 4A^2 \cos\alpha) = 17A^2 + 8A^2 \cos\alpha$

বা, $28A^2 \cos\alpha = -28A^2$

বা, $\cos\alpha = -1$ বা, $\alpha = 180°$

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ 180°।

সমস্যা ৬৩। $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 45°। $|\vec{a} \times \vec{b}|$ এবং $|\vec{a} . \vec{b}|$ এর অনুপাত কত?

সমাধান : এখানে, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ, θ = 45°

$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta$

বা, $\vec{a} . \vec{b} = ab \sin 45°$..................... (i)

আবার, $\vec{a} . \vec{b} = ab \cos\theta$

বা, $\vec{a} . \vec{b} = ab \cos 45°$..................... (ii)

(i) নং ÷ (ii) নং করে

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} . \vec{b}} = \frac{ab \sin 45°}{ab \cos 45°} = \tan 45° = 1$$

$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| : \vec{a} . \vec{b} = 1 : 1$

সমস্যা ৬৪। $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} . \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} . \vec{B}$

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore \quad AB \sin\alpha = AB \cos\alpha$

বা, $\tan\alpha = 1$

বা, $\alpha = 45°$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণের মান 45°.

সমস্যা ৬৫। **2A এবং A ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সাথে θ কোণে আনত। প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধির মান তিনগুণ হয়। θ-এর মান কত?**

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ৬২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৬৬। **একটি কণার ওপর $\vec{F} = (5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})N$ বল ক্রিয়া করার ফলে প্রাথমিক অবস্থান $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$ থেকে $(12\hat{i} + 15\hat{j} + 8\hat{k})$ অবস্থানে গেল। কৃত কাজ কত?**

সমাধান : এখানে, বল, $\vec{F} = (5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})N$

সরণ, $\vec{S} = (12\hat{i} + 15\hat{j} + 8\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= 12\hat{i} + 15\hat{j} + 8\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} = 10\hat{i} + 12\hat{j} + 13\hat{k}$

$\therefore$ কৃতকাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

$= F_xS_x + F_yS_y + F_zS_z$

$= \{5 \times 10 + 2 \times 12 + (-3) \times 13\}\ J$

$= (50 + 24 - 39)\ J = 35\ J$

সমস্যা ৬৭। **$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$।**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\therefore\ \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

বা, $\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = 0$

বা, $0 + \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c}$

$\therefore\ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$ ....(i)

আবার, $\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

বা, $\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = 0$

বা, $-\vec{a} \times \vec{b} + 0 + \vec{b} \times \vec{c} = 0$

$\therefore\ \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ....(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ [প্রমাণিত]

সমস্যা ৬৮। **দেখাও যে, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুটি দ্বারা উৎপন্ন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।**

সমাধান : PQRS সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = PQ × h

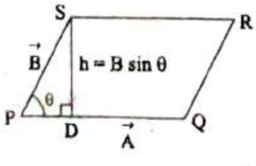
ধরি, θ কোণে ক্রিয়ারত $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় PQRS সামান্তরিকের $\vec{PQ}$ ও $\vec{PS}$ বাহু দ্বারা সূচিত। সুতরাং, PQ = A এবং PS = B।

PSD সমকোণী ত্রিভুজে,

$\sin\theta = \frac{h}{PS}$

বা, $h = PS \sin\theta$

$\therefore\ h = B\sin\theta$



এখন, $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta = PQ \times h$

$\therefore\ |\vec{A} \times \vec{B}|$ = PQRS সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

অতএব, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দুটি দ্বারা উৎপন্ন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান। [দেখানো হলো]

সমস্যা ৬৯। **$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল কত হবে?**

সমাধান: এখানে, কর্ণ, $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং কর্ণ, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$= (6 + 6)\hat{i} + (2 - 9)\hat{j} + (-9 - 2)\hat{k}$

$= 12\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(12)^2 + (-7)^2 + (-11)^2} = \sqrt{144 + 49 + 121} = \sqrt{314}$

$\therefore$ সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}\sqrt{314} = 8.86$ বর্গ একক

সমস্যা ৭১। **$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ দুটি দিক রাশি। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণন নির্ণয় কর। এবং দেখাও যে, এরা পরস্পর সমান্তরাল।**

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

এবং দেখাতে হবে যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$= (3 - 3)\hat{i} + (3 - 3)\hat{j} + (3 - 3)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$

আবার, যেহেতু $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ রাশিদ্বয়ের ভেক্টর গুণফলের মান শূন্য সেহেতু রাশিদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। (দেখানো হলো)

সমস্যা ৭২। **$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $(\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{A}) = 0$.**

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$= (6 + 4)\hat{i} + (-1 + 4)\hat{j} + (8 + 3)\hat{k} = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$

$\therefore\ \vec{A} \times \vec{B} = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$

আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-4 - 6)\hat{i} + (-4 + 1)\hat{j} + (-3 - 8)\hat{k} = -10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k}$

$\therefore\ \vec{B} \times \vec{A} = -10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{A})$

$= 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k} - 10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k}$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ $(\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{A}) = 0$. (দেখানো হলো)

সমস্যা ৭৩। **বল $\vec{F} = 12.0$ N এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $\vec{r} = 4.0$ m এবং এই ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ 60° ; ভেক্টর গুণন নির্ণয় কর। এটি কোন রাশি নির্দেশ করে?**

সমাধান : এখানে, বল, $|\vec{F}| = 12N$

ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $|\vec{r}| = 4$

এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 60°$

$\therefore$ ভেক্টর গুণন, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= rF\sin\theta\ \hat{n}$

$= (4 \times 12\sin 60°)\ \hat{n} = \left(4 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{n}$

$\therefore\ \vec{\tau} = 24\sqrt{3}\ \hat{n}$

এটি টর্ক নির্দেশ করে।

সমস্যা ৭৪। 2 kg ভরের একটি গতিশীল কণার গতিবেগ $\vec{v} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$। কণাটির অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j}$ হলে মূলবিন্দু সাপেক্ষে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, বেগ, $\vec{v} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

অবস্থান ভেক্টর, $\hat{r} = \hat{i} + \hat{j}$

ভর, $m = 2kg$

রৈখিক ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v} = 2(3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$\therefore \quad \vec{P} = 6\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-4-0) - \hat{j}(-4-0) + \hat{k}(6-6)$$

$$= -4\hat{i} + 4\hat{j}$$

সমস্যা ৭৫। প্রমাণ কর : $|\vec{A} \times \vec{B}| = (AB)^2 - (\vec{A} . \vec{B})^2$

সমাধান : বামপক্ষ $= |\vec{A} \times \vec{B}|^2$

$$= (AB \sin\theta)^2$$
$$= (AB)^2 \sin^2\theta$$
$$= (AB)^2 (1 - \cos^2\theta)$$
$$= (AB)^2 - (AB)^2 \cos^2\theta$$
$$= (AB)^2 - (AB\cos\theta)^2$$
$$= (AB)^2 - (\vec{A} . \vec{B})^2$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \; |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (AB)^2 - (\vec{A} . \vec{B})^2$ [প্রমাণিত]

সমস্যা ৭৬। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে দেখাও যে, $\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 45°

$\therefore$ বামপক্ষ $= \vec{A} . \vec{B}$

$$= AB\cos 45° = AB\sin(90° - 45°)$$
$$= AB\sin 45° = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

= ডানপক্ষ

অতএব, মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে $\vec{A} . \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$ [দেখানো হলো]

সমস্যা ৭৭। একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু

$\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$= |(\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}) \times (-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |(-4-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (-1-8)\hat{k}|$$
$$= |-5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}|$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-9)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 1 + 81} = \sqrt{107}$$

অতএব, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $\sqrt{107}$ বর্গ একক।

সমস্যা ৭৮। দেওয়া আছে $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{B} = -2\hat{j} + 5\hat{k}$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু,

$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$= |(4\hat{i} + 3\hat{j}) \times (-2\hat{j} + 5\hat{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= |(15-0)\hat{i} + (0-20)\hat{j} + (-8-0)\hat{k}|$$
$$= |15\hat{i} - 20\hat{j} - 8\hat{k}|$$
$$= \sqrt{(15)^2 + (-20)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{225 + 400 + 64} = 26.25$$

অতএব, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল 26.25 বর্গ একক।

সমস্যা ৭৯। কোনো কণার অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = 2t\hat{i} + 3t^2\hat{j}$ হলে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = 2t\hat{i} + 3t^2\hat{j}$

$\therefore$ বেগ, $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(2t\hat{i} + 3t^2\hat{j}) = 2\hat{i} + 6t\hat{j}$

ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(2\hat{i} + 6t\hat{j}) = 6\hat{j}$

অতএব, কণাটির বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে $2\hat{i} + 6t\hat{j}$ এবং $6\hat{j}$।

সমস্যা ৮০। কোনো কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = [(3.0\ ms^{-1})\ t + 4.2m]\ \hat{i} + (5.3\ m\ s^{-1})\ \hat{j}$ হলে বেগ $\vec{v}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = [(3.0\ m\ s^{-1})\ t + 4.2\ m]\ \hat{i} + (5.3\ m\ s^{-1})\ \hat{j}$

$$\therefore \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}[\{(3.0\ m\ s^{-1})t + 4.2m\}\ \hat{i} + (5.3 ms^{-1})\ \hat{j}]$$

$$= [3.0\ m\ s^{-1} + 0]\ \hat{i} + 0 = 3.0\ m\ s^{-1}\ \hat{i}.$$

সমস্যা ৮১। যদি $\varphi = 2xy^4 - x^2z$ হয়, তবে (2, – 1, 2) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\varphi = 2xy^4 - x^2z$

$$\therefore \quad \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^4 - x^2z)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^4 - x^2z)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(2xy^4 - x^2z)\hat{k}.$$

$$= (2y^4 - 2xz)\hat{i} + 8xy^3\hat{j} - x^2\hat{k}$$

এখন, (2, – 1, 2) বিন্দুতে

$$\vec{\nabla}\varphi = \{2(-1)^4 - 2 \cdot 2 \cdot 2\}\hat{i} + 8 \cdot 2(-1)^3\hat{j} - 2^2\hat{k}$$

$$= -6\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k} = -(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k}).$$

সমস্যা ৮২। যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হয়, তবে $\vec{\nabla}.\vec{r}$ বের কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.r = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) . (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

সমস্যা ৮৩। যদি $\vec{r} = (3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$ হয়, তবে (2, – 1, 2) বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{r}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{r} = (3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\{(3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$
$$= 6xz + xz - x^3y^2$$

এখন, $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে, $\vec{\nabla}.r = 6\cdot2\cdot2 + 2\cdot2 - 2^3(-1)^2 = 24 + 4 - 8 = 20$

সমস্যা ৮৪। যদি $\vec{A} = 4xyz\ \hat{i} + 2x^2y\ \hat{j} - x^2y^2z\ \hat{k}$ হয়, তবে $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 4xyz\ \hat{i} + 2x^2y\ \hat{j} - x^2y^2z)\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times (4xyz\ \hat{i} + 2x^2y\ \hat{j} - x^2y^2z\ \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xyz & 2x^2y & -x^2y^2z \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y)\right\}\hat{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(2xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(-x^2y^2z)\right\}\hat{j} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(4xyz)\right\}\hat{k}$$

$$= -2x^2yz\ \hat{i} + (4xy + 2xy^2z)\hat{j} + (4xy - 4xz)\ \hat{k}$$

এখন, $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -2\cdot2^2.(-2).(-1)\ \hat{i} + \{4\cdot2(-2) + 2\cdot2.(-2)^2.(-1)\}\hat{j} + \{4\cdot2.(-2) - 4\cdot2(-1)\}\ \hat{k}$$
$$= -16\ \hat{i} - 32\hat{j} - 8\hat{k} = -(16\hat{i} + 32\hat{j} + 8\hat{k}).$$

সমস্যা ৮৫। যদি $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$.

সমাধান : এখানে, $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times (V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_z\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\right)\hat{k}$$

এখন, $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}Vx - \frac{\partial}{\partial x}V_z\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial_y}V_x\right)\hat{k}\right\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\right)$$
$$= (0 - 0) + (0 - 0) + (0 - 0) = 0$$

অতএব, $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) = 0$ **(দেখানো হলো)**

সমস্যা ৮৬। যদি $\varphi(x, y, z) = 3xy^2z^3 - 4xy$ হয়, তবে $\vec{\nabla}\varphi$ বের কর। $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\varphi(x, y, z) = 3xy^2z^3 - 4xy$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^3 - 4xy)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^3 - 4xy)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(3xy^2z^3 - 4xy)\hat{k}$$
$$= (3y^2z^3 - 4y)\hat{i} + (6xyz^3 - 4x)\hat{j} + 9xy^2z^2\hat{k}$$

এখন, $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে

$$\nabla\varphi = \{3(-1)^2.1^3 - 4.(-1)\}\hat{i} + \{6.2(-1).i^3 - 4.2\}\hat{j} + 9.2(-1)^2.1^2\ k$$
$$= 7\hat{i} - 20\hat{j} + 18\hat{k}.$$

সমস্যা ৮৭। a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৮৮। যদি $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = x\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হলে x এর মান কত?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 22]

সমস্যা ৮৯। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 101.54°]

সমস্যা ৯০। একটি কণার ওপর $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$N বল কাজ করার ফলে বলের দিক কণাটির $\vec{r} = (2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k})$m সরণ হয়। λ এর কোন মানের জন্য সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে?

সমাধান : দেওয়া আছে, বল, $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$N

সরণ, $\vec{r} = (2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k})$m

সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হলে, $\vec{F}.\vec{r} = 0$

বা, $F_x r_x + F_y r_y + F_z r_z = 0$

বা, $2.1 + (-3)\lambda + 2(-1) = 0$

বা, $2 - 3\lambda - 2 = 0$ বা, $-3\lambda = 0$

$\therefore\ \lambda = 0$

অতএব, $\lambda = 0$ হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে।

সমস্যা ৯১। $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\sqrt{3}\hat{k}$ ভেক্টর দুটি একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। $\vec{P}$ এর সাথে এদের লব্ধি ভেক্টরের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১১৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৯২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। যদি $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ হয়, তাহলে $\vec{R}, \vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে কিনা? গাণিতিক যুক্ত দাও। [KUET '09-'10, '11-'12, '13-'14]

সমাধান : আমরা জানি,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

$$= \frac{(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \times \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}}$$
$$= \frac{12 - 6 - 2}{\sqrt{9} \times \sqrt{49}} = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) = 79°$$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 79°।

সমস্যা ৯৩। ভেক্টর $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এর উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [BUET '09-'10]

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$ (ধরি)

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{B} = \dfrac{(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}}$

$= \dfrac{12 - 6 + 2}{\sqrt{49}} = \dfrac{8}{7}$

অতএব, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $\dfrac{8}{7}$।

সমস্যা ৯৪। $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা গঠিত সামন্তরিকের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [KUET '06-'07, 12-13; RUET '14-15]

সমাধান : এখানে, $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{P} \times \vec{Q} = (4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$

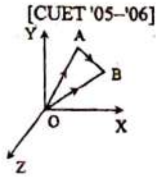
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (4 + 2)\hat{i} + (2 + 4)\hat{j} + (-8 + 8)\hat{k} = 6\hat{i} + 6\hat{j}$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু হলে ক্ষেত্রফল

$= |\vec{P} \times \vec{Q}| = |6\hat{i} + 6\hat{j}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} = 8.5$ বর্গ একক।

সমস্যা ৯৫। (ক) কোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক P(2, – 3, 4) হলে বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। (খ) A(2, – 1, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী দিক রাশিটি নির্ণয় কর। [CUET '05–'06]



সমাধান : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

(ক) $\vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

(খ) $\vec{AB} = (-1 - 2)\hat{i} + (2 + 1)\hat{j} + (-3 - 3)\hat{k}$

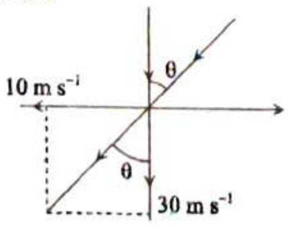
$\therefore \vec{AB} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

সমস্যা ৯৬। কোনো একদিন 30 m s^{-1} গতিতে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। যদি বায়ু 10 m s^{-1} গতিতে উত্তর থেকে দক্ষিণে বইতে শুরু করে, তাহলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তোমার ছাতা কোন দিকে মেলে ধরতে হবে? [BUET '06–'07]

সমাধান : এখানে, বৃষ্টির বেগ, $v = 30$ m s^{-1}

বায়ুর বেগ, $u = 10$ m s^{-1}

বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = ?$



এখন, $\tan\theta = \dfrac{u}{v} = \dfrac{10 \text{ m s}^{-1}}{30 \text{ m s}^{-1}}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 18.43°$

$\therefore$ বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে উল্লম্বের সাথে 18.43° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

সমস্যা ৯৭। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 18 একক। এদের ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{3}$ একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [KUET '11-'12]

সমাধান : আমরা জানি,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $18 = AB\cos\theta$

$\therefore AB\cos\theta = 18$ ...... (১)

এখানে, $\vec{A}.\vec{B} = 18$ একক

$\vec{A} \times \vec{B} = 6\sqrt{3}$ একক

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta$

বা, $6\sqrt{3} = AB\sin\theta$ বা, $AB\sin\theta = 6\sqrt{3}$........... (২)

(২) ÷ (১) নং থেকে পাই, $\dfrac{AB\sin\theta}{AB\cos\theta} = \dfrac{6\sqrt{3}}{18}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

তাহলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$.

অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 30°।

সমস্যা ৯৮। ভেক্টর $\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ এর মান যথাক্রমে 12, 5 এবং 13 একক এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত হবে? [BUET '06-'07]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ এর মান যথাক্রমে,

$A = 12; B = 5; C = 13$ এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

এখন, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

বা, $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{C}$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = C^2$

বা, $(12)^2 + 5^2 + (2 \times 12 \times 5\cos\theta) = (13)^2$

বা, $120\cos\theta = 169 - 144 - 25 = 0$

বা, $\theta = \cos^{-1} 0 = 90°$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90°।

সমস্যা ৯৯। $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + m\hat{j} + 9\hat{k}$। m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে? [KUET '10-'11]

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + m\hat{j} + 9\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে $m = ?$

আমরা জানি, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 15 & m & 9 \end{vmatrix}$

$= (18 - 3m)\hat{i} - (45 - 45)\hat{j} + (5m - 30)\hat{k}$

$= (18 - 3m)\hat{i} + (5m - 30)\hat{k}$

দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

$\therefore$ $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

বা, $(18 - 3m)\hat{i} + (5m - 30)\hat{k} = 0$

উভয়পক্ষে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$18 - 3m = 0$

বা, $m = \dfrac{18}{3} = 6$

$\therefore$ $m = 6$

আবার, $5m - 30 = 0$

বা, $m = \dfrac{30}{5} = 6$

অতএব, m এর মান 6 এর জন্য ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

সমস্যা ১০০। একটি কণার উপর $\vec{F} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [CUET '09-'10]

সমাধান : আমরা জানি,

$W = \vec{F}.\vec{r}$

$= (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

$= 12(\hat{i}.\hat{i}) - 6(\hat{j}.\hat{j}) - 2(\hat{k}.\hat{k})$

$= 12 - 6 - 2 = 4$

এখানে,

বল, $\vec{F} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$N

সরণ, $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m

কাজ, $W = ?$

অতএব, সম্পাদিত কাজের পরিমাণ 4 J।

৩ ড. শাহজাহান তপন, মুহম্মদ আজিজ হাসান ও ড. রানা চৌধুরী স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর গাণিতিক সমস্যার সমাধান

সমস্যা ১। কোনো এক বিন্দুতে একই সময় 10N এবং 6N মানের ভেক্টর 60° কোণে ক্রিয়া করলে ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্ণয় কর।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 14 N]

সমস্যা ২। একটি নদীর স্রোতের বেগ 5 kmh^{-1}। স্রোতের সাথে 60° কোণে 4 km h^{-1} বেগের একটি নৌকা চালনা করলে নৌকা প্রকৃতপক্ষে কত বেগে কোন দিকে চলবে?
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।
[উত্তর : 7.81 km h^{-1} বেগে স্রোতের সাথে 26.33° কোণে]

সমস্যা ৩। একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি সমান মানের ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ কত হলে এদের লব্ধির মান যে কোনো একটি ভেক্টরের মানের সমান হবে?
সমাধান : এখানে, একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরের মান সমান এবং লব্ধি ভেক্টরের মান ক্রিয়াশীল যেকোনো একটি ভেক্টরের মানের সমান।
ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = ?$
ধরি, প্রথম ভেক্টর, $P = P$; দ্বিতীয় ভেক্টর, $Q = P$; লব্ধি ভেক্টর, $R = P$
আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$
বা, $P^2 = P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \times \cos \alpha$
বা, $P^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos \alpha$
বা, $1 = 2 + 2 \cos \alpha$ [উভয় পক্ষকে P^2 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$
বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
বা, $\alpha = \cos^{-1} \cos 120°$ [$\because \theta = \cos^{-1} \cos \theta$]
$\therefore \alpha = 120°$.
অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°।

সমস্যা ৪। একটি নদীতে স্রোতের বেগ 5 kmh^{-1}। একটি নৌকাকে ঘন্টায় 10 kmh^{-1} বেগে চালনা করা যায়। কোন দিকে নৌকা চালালে অপর পাড়ে ঠিক সোজাসুজি পৌঁছা যায়?
সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : স্রোতের সাথে 120° কোণে]

সমস্যা ৫। কোনো বস্তুকে 10N বলে দক্ষিণ দিকের সাথে 30° কোণে পশ্চিম দিকে টানা হলে বলের দক্ষিণমুখী ও পশ্চিমমুখী উপাংশের মান কত?
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান অনুরূপ। [উত্তর : 8.66 N, 5N]

সমস্যা ৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টরটি নির্ণয় কর।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৮। দেখাও যে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৯। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১২২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১০। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। m এর মান কত হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হবে?
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১১। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এর ভেক্টর গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১২। $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{A}$.
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৩০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৩। $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ১৪। $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৩১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 2]

সমস্যা ১৫। $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১২৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৬। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তার লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। $\left[\text{উত্তর} : \pm\left(\frac{1}{\sqrt{150}}\hat{i} - \frac{10}{\sqrt{150}}\hat{j} - \frac{7}{\sqrt{150}}\hat{k}\right)\right]$

সমস্যা ১৭। $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ হলে, দেখাও যে, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫০(i)নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৮। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A}.\vec{B})^2 + \left|\vec{A} \times \vec{B}\right|^2 = A^2B^2$
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৯। দুটি ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + \hat{k}(2t+1)$ এবং $\vec{Q} = \hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{P}.\vec{Q})$ এবং $\frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{Q})$ নির্ণয় কর।
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ২০। একটি কণার উপর $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল কাজ করার ফলে কণাটির $\vec{d} = (2\hat{i} + d_y\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। d_y এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে?
সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১২০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

অধ্যায়-২

সমস্যা ২১। যদি $\varphi = 2xz^4 - x^2y$ হয় তবে, $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ এবং এর মান বের কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $10\hat{i} - 4\hat{j} - 10\hat{k}$; $\sqrt{372}$]

সমস্যা ২২। যদি $\vec{A} = 3xyz\,\hat{i} + 2xy^2\,\hat{j} - x^2yz\,\hat{k}$ হয় তবে—

(ক) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ও $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ নির্ণয় কর।

(খ) $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ এবং $|\vec{\nabla}\times\vec{A}|$ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৭৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

[উত্তর : $3xyz + 4xy - x^2y$; $-x^2z\,\hat{i} + (3xy + 2xyz)\hat{j} + (2y^2 - 3xz)\hat{k}$; (খ) 0; $\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$; $\sqrt{27}$]

সমস্যা ২৩। যদি $\vec{r} = x\hat{j} + y\hat{i} + 2z\hat{k}$ হয় তাহলে $\vec{\nabla}.\vec{r} = ?$

সমাধান : এখানে, $\vec{r} = x\hat{j} + y\hat{i} + 2z\hat{k} = y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(2z)$$

$$= 0 + 0 + 2 = 2$$

সমস্যা ২৪। যদি $\vec{r} = (3y^2z)\hat{i} + (2x^3z)\hat{j} - (x^3y^2)\hat{k}$ হলে দেখাও যে $\vec{r}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

সমাধান : এখানে, $\vec{r} = (3y^2z)\hat{i} + (2x^3z)\hat{j} - (x^3y^2)\hat{k}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

এখন, $\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\{(3y^2z)\hat{i} + (2x^3z)\hat{j} - (x^3y^2)\hat{k}\}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3y^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^3z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3y^2) = 0 + 0 + 0 = 0$$

এখানে, $\vec{r}$ ভেক্টরটির ডাইভারজেন্স শূন্য।

সুতরাং, $\vec{r}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

৩ গোলাম হোসেন প্রামাণিক, দেওয়ান নাসির উদ্দিন ও রবিউল ইসলাম স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর গাণিতিক সমস্যার সমাধান

সমস্যা ১। 6 একক ও 8 একক মানের দুটি ভেক্টর 60° কোণে কোনো কণার ওপর একই সময় ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধি মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 12.16 একক, 6 একক এর সাথে 34.71°]

সমস্যা ২। দুটি দিক রাশির প্রত্যেকের মান 6 একক। এরা একই বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়া করে। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করো।

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 6 একক, 60°]

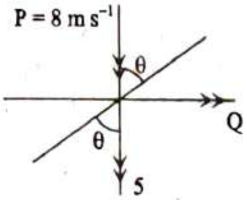
সমস্যা ৩। একটি সাইকেলের বেগ কত হলে $8\ m\ s^{-1}$ বেগের বৃষ্টির ফোঁটা আরোহীর গায়ে 30° কোণে আঘাত করবে?

সমাধান : এখানে,

বৃষ্টির বেগ, $P = 8\ m\ s^{-1}$

কোণ, $\theta = 30°$

আরোহীর বেগ, $Q = ?$



তাহলে, $\tan\theta = \frac{Q}{P}$

বা, $Q = P \times \tan\theta = 8\ m\ s^{-1} \times \tan 30° = 4.62\ m\ s^{-1}$.

সমস্যা ৪। একটি নদীতে স্রোতের বেগ $8\ m\ s^{-1}$। $12\ m\ s^{-1}$ বেগের একটি ইঞ্জিন চালিত নৌকাকে সোজা পাড়ি দিতে হলে কোন দিকে চালনা করতে হবে? নৌকার লব্ধি বেগ কত হবে? নদীটি 400 m প্রশস্ত হলে পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৭৯(i) ও (iii)নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

[উত্তর : স্রোতের সাথে 131.81°, $8.94\ ms^{-1}$, 44.74 s]

সমস্যা ৫। দেখাও যে, দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে এদের মানের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান।

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৬। 75° কোণে ক্রিয়ারত দুটি বলের লব্ধি 12 N এবং তা একটির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। বল দুটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 6.21N, 8.78 N]

সমস্যা ৭। 10 একক মানের একটি ভেক্টরকে দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত করায় একটির মান 8 একক পাওয়া গেল। অপরটির মান নির্ণয় করো।

সমাধান : P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ, α

$P = R\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{P}{R}$

এখানে, R = 10 একক
একটি ভেক্টর এর মান, P = 8 একক
অপর ভেক্টরের মান, Q = ?

আবার, $Q = R\sin\alpha = R\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$= R\sqrt{1 - \frac{P^2}{R^2}}$$

$$= R\sqrt{\frac{R^2 - P^2}{R^2}} = \sqrt{R^2 - P^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6.$$

সমস্যা ৮। একই সময়ে একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরের মান সমান। দেখাও যে, এদের লব্ধি ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৯। $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $\frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$]

সমস্যা ১০। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ হলে নির্ণয় কর (ক) $|\vec{A} + \vec{B}|$ (খ) $|3\vec{A} - 2\vec{B}|$ এবং (গ) $\vec{A} - \vec{B}$ এর দিকে একক ভেক্টর।

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

(ক) $|\vec{A} + \vec{B}| = ?$

$\vec{A} + \vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) + (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 6.708$

(খ) $3\vec{A} = 3(2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) = 6\hat{i} + 12\hat{j} - 6\hat{k}$

$2\vec{B} = 2(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = 6\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$

$3\vec{A} - 2\vec{B} = (6\hat{i} + 12\hat{j} - 6\hat{k}) - (6\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 16\hat{j} + 18\hat{k}$

$|3\vec{A} - 2\vec{B}| = \sqrt{(16)^2 + (18)^2} = \sqrt{580} = 24.08$

(গ) $\vec{A} - \vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) - (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = -\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

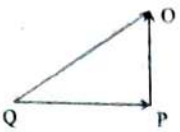
$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{101} = 10.05$

$\therefore \vec{A} - \vec{B}$ এর দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\vec{A} - \vec{B}}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \frac{-\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}}{10.05}$

সমস্যা ১১। **P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ এবং $\vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ হলে $\vec{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় করো।**

সমাধান : ধরি, মূলবিন্দু O। তাহলে O বিন্দুর সাপেক্ষে P এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{PQ} = \vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{OQ} = \vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$



$\therefore \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$= \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

সমস্যা ১৩। **যদি $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ হয়, তবে $\vec{A}\cdot\vec{B}$ নির্ণয় করো।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৪। **$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় করো।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 98.7°]

সমস্যা ১৫। **ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এর উপর $\vec{Q} = 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : – 1871]

সমস্যা ১৬। **দেখাও যে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ১৭। **$\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ১৮। **$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ কত।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : θ = 8/7]

সমস্যা ১৯। **$\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করো।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 2.98]

সমস্যা ২০। **a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে?**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 5]

সমস্যা ২১। **$\vec{A} = \hat{i} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$ ভেক্টরদ্বয়ের অভিলম্ব দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় করো।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৩৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ২২। **$\vec{A} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$। X, Y ও Z অক্ষের সাথে $\vec{A}$-এর কোণ নির্ণয় কর।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 31°; 73.4°; 64.62°]

সমস্যা ২৩। **দেখাও যে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ২৪। **a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 2a\hat{i} + 2a\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = a\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 3; – 2]

সমস্যা ২৫। **দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এর ভেক্টর গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।**

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ২৬। **$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}\times\vec{B}$ = কত?**

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ৫১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $-8\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$]

সমস্যা ২৭। **একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে এর ক্ষেত্রফল কত?**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 18.61 একক]

সমস্যা ২৮। **$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ হলে $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ = কত?**

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = ?$

এখন, $\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-2 + 12) - \hat{j}(6 - 6) + \hat{k}(-24 + 4)$

$= 10\hat{i} - 20\hat{k}$

$\therefore \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})\cdot(10\hat{i} - 20\hat{k})$

$= 2\times 10(\hat{i}.\hat{i}) + 3(-20)(\hat{k}.\hat{k}) = 20 - 60 = -40$

অতএব, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ এর মান – 40।

সমস্যা ২৯। **$\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে নির্ণয় কর : (ক) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ (খ) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ এবং (গ) দেখাও যে, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৯২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ৩০। **$\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(\vec{B}+\vec{C})\times\vec{A} = \vec{B}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{A}$.**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৩০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৩১। **$\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় করে দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব।**

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}\,.\,\vec{B} = ?$

এখন, $\vec{A}\,.\,\vec{B} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k})\,.\,(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 36(\hat{i}\,.\,\hat{i}) - 6(\hat{j}\,.\,\hat{j}) - 30(\hat{k}\,.\,\hat{k}) = 36 - 6 - 30 = 0$

যেহেতু ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল শূন্য, সেহেতু ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

অধ্যায়-২

সমস্যা ৩২। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৯২ (i) নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৩৩। দুটি ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + \hat{k}(2t+1)$ এবং $\vec{Q} = \hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{P}.\vec{Q})$ এবং $\frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{Q})$ নির্ণয় করো।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৩৪ ▶ $|\vec{P} + \vec{Q}| = |\vec{P} - \vec{Q}|$ হলে দেখাও যে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের ওপর লম্ব।

সমাধান : সূত্রভিত্তিক ৫০(i)নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৩৫। $\varphi(x, y, z) = 2xz^4 - x^2y$ হলে, $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ ও $|\vec{\nabla}\varphi|$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\varphi = 2xz^4 - x^2y$

$$\therefore \nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (2xz^4 - x^2y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xz^4 - x^2y)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2xz^4 - x^2y)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(2xz^4 - x^2y)\hat{k}$$

$$= (2z^4 - 2xy)\hat{i} - x^2\hat{j} + 8xz^3\hat{k}$$

এখন, $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে,

$$\vec{\nabla}\varphi = \{2(-1)^4 - 2.2(-2)\}\hat{i} - 2^2\hat{j} + 8.2(-1)^3\hat{k}$$

$$= 10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$|\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{(10)^2 + (-4)^2 + (-16)^2} = \sqrt{372}$$

সমস্যা ৩৬। $\vec{\nabla} \cdot (2x^2z\hat{i} - xy^2z\hat{j} + 3yz^2\hat{k})$ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $4xz - 2xyz + 6yz$]

সমস্যা ৩৭। $\phi = 2x^3y^2z^4$ হলে $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $2xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2$]

সমস্যা ৩৮। $\vec{A} = 3xyz^2\hat{i} + 2xy^3\hat{j} - x^2yz\hat{k}$ এবং $\phi = 3x^2 - yz$ হলে $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে নির্ণয় কর (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ (b) $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\phi$ (c) $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A})$ (d) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi$।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : (a) 4 (b) – 15 (c) 1 (d) 6]

সমস্যা ৩৯। দেখাও যে, $\vec{A} = 3y^4z^2\hat{i} + 4x^3z^2\hat{j} - 3x^2y^2\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়েডাল।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৬০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ৪০। $\vec{A} = 2xz^2\hat{i} - xy\hat{j} + 3xz^3\hat{k}$ এবং $\phi = x^2yz$ হলে $(1, 1, 1)$ বিন্দুতে নির্ণয় কর (a) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ (b) $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A})$ (c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৬৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : (a) $\hat{j} - \hat{k}$ (b) $4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ (c) 0]

সমস্যা ৪১। দেখাও যে, $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৬৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

ভর্তি পরীক্ষায় আসা সমস্যাবলি

সমস্যা ৫। কোনো একদিন উল্লম্বভাবে $30\ m\ s^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছিল। বায়ু উত্তর হতে দক্ষিণ দিকে $10\ m\ s^{-1}$ প্রবাহিত হলে বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১১৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৬। প্রতি ঘণ্টায় 1800 m বেগে 240 m প্রশস্ত একটি নদীতে স্রোত প্রবাহিত হচ্ছে। প্রতি ঘণ্টায় 3600 বেগে সাঁতার কাটবে সক্ষম একজন সাঁতারুকে সরাসরি অপর পাড়ে পৌছাতে তার কত সময় লাগবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১১৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ৭ ▶ একটি লন রোলার টানা বা ঠেলার জন্য অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 19.6 N বল প্রয়োগ করা হলো। টানার সময় ওজন ঠেলা অপেক্ষা কত কম হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 19.6 N]

সমস্যা ৮। $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k}$। a এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৩১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 6]

সমস্যা ৯। $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $\sqrt{200}$ একক]

সমস্যা ১০। $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 37.17°]

সমস্যা ১১। $\vec{A} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$। $\vec{B}$-এর দিকে $\vec{A}$-এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $\frac{26}{\sqrt{142}}$]

সমস্যা ১২। $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 101.49°]

সমস্যা ১৩। p এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{v} = (5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়েডাল হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $\frac{3}{2}$]

সমস্যা ১৪। দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর লব্ধিদ্বয় যথাক্রমে 28 একক ও 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে কোন একটি কণার উপর ক্রিয়া করল। লব্ধির মান কত?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৫। $\vec{A} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ এবং $\vec{B} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $\sqrt{14}$]

সমস্যা ১৬। একটি নৌকা নদীর প্রস্থ বরাবর $20\ m\ s^{-1}$ বেগে চলা শুরু করল। নদীর স্রোতের বেগ $15\ m\ s^{-1}$ হলে এবং নদীটি 2 km প্রশস্ত হলে অপর পাড়ে পৌছাতে নৌকাটির কত সময় লাগবে? নৌকার লব্ধি বেগ কত হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৭৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 1 min 40 s]

সমস্যা ১৭। কোন নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে যথাক্রমে 18 এবং 6 km/hour। নৌকাটি কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে সোজা অপর পাড়ে পৌছাবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 10.39 km/hr]

সমস্যা ১৮। (ক) কোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক P(2, – 3, 4) হলে বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। (খ) A (2, – 1, 3) এবং B(– 1, 2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী দিক রাশিটি নির্ণয় কর।

সমাধান : (ক) এখানে, স্থানাঙ্ক (2, – 3, 4)

$\therefore$ অবস্থান ভেক্টর $= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

(খ) বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A(2, – 1, 3), B (– 1, 2, 3)

$\therefore \vec{AB} = (-1-2)\,\hat{i} + (2+1)\,\hat{j} + (3-3)\,\hat{k} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$

সমস্যা ১৯। একটি নদীর স্রোতের বেগ $5\ m\ s^{-1}$। $10\ m\ s^{-1}$ বেগের একটি নৌকাকে সোজাসুজিভাবে নদী পাড়ি দিতে 1 min 40 s সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১১২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ২০। দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 3.0\,\hat{i} - 3.0\,\hat{j}$ এবং $\vec{B} = 5.0\,\hat{i} + 5.0\,\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? [DU '14–'15]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 60°]

সমস্যা ২১। যদি $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$ তবে m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে?

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ২২। দুইটি বলের লব্ধির মান 40 N। বল দুইটির মধ্যে ছোট বলটির মান 30 N এবং এটি লব্ধি বল বরাবর ক্রিয়া করে। বড় বলটির মান কত? [DU '10–'11]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৫১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 50 N]

সমস্যা ২৩। ভেক্টর $\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ এর মান যথাক্রমে 12, 5 এবং 13 একক এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ হবে– [BUET '06–'07]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ এর মান যথাক্রমে,

$A = 12;\ B = 5;\ C = 13$ এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

এখন, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

বা, $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{C}$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = C^2$

বা, $(12)^2 + 5^2 + (2 \times 12 \times 5\cos\theta) = (13)^2$

বা, $120\cos\theta = 169 - 144 - 25 = 0$ বা, $\theta = \cos^{-1} 0 = 90°$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90°।

সমস্যা ২৪। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণদ্বয় যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$। [KUET '14–'15]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 17.66 units]

সমস্যা ২৫। যদি $4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে তবে উহার ক্ষেত্রফল হবে– [KUET '06–'07]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $\sqrt{72}$ বর্গএকক]

সমস্যা ২৬। বায়ু উত্তর দিকে ও পূর্ব দিকের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক 5 km/hr এবং পূর্ব দিকের অংশক 12 km/hr। লব্ধিবেগ কত? [KUET '05–'06]

সমাধান : এখানে, বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক, $P = 5\ km\ h^{-1}$

এবং পূর্ব দিকের অংশক, $Q = 12\ km\ h^{-1}$

উত্তর দিক ও পূর্ব দিকের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

লব্ধি বেগ বা বায়ু বেগের মান, $R = ?$

উত্তর দিকের সঙ্গে লব্ধি বেগের দিক, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(5\ km\ h^{-1})^2 + (12\ km\ h^{-1})^2 + 2 \times 5\ km\ h^{-1} \times 12\ km\ h^{-1} \times \cos 90°}$$
$$= \sqrt{25 + 144 + 0}\ km\ h^{-1} = \sqrt{169}\ km\ h^{-1}$$

$\therefore\ R = 13\ km\ h^{-1}$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{12\ km\ h^{-1} \times \sin 90}{5\ km\ h^{-1} + 12\ km\ h^{-1} \times \cos 90} = \dfrac{12}{5}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{12}{5} = 67°23'$

অতএব, লব্ধি বেগের মান $13\ km\ h^{-1}$ এবং দিক উত্তর দিকের সাথে 67°23'।

সমস্যা ২৭। একটি ইঞ্জিন চালিত নৌকার বেগ 14 km/hr। নদীর প্রস্থ 12.12 km হলে নদীটির আড়াআড়ি পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? স্রোতের বেগ 7 km/hr। [KUET '04–'05]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১১৭নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 1 hr]

সমস্যা ২৮। নিম্নলিখিত ভেক্টর প্রোডাক্টের মান বের কর :
$(2\hat{i} - 3\hat{j}) \cdot [(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k})]$ [CUET '11–'12]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৯২নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 4]

সমস্যা ২৯। যদি $\vec{A} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিক সন্নিহিত দুটি বাহু নির্দেশ করবে তার ক্ষেত্রফল কত? [CUET '14–'15]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৯নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $2\sqrt{7}$]

সমস্যা ৩০। দুটি ভেক্টর রাশির প্রত্যেকটির মান 5 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কত? [CUET '14–'15]

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৮৩নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : 5 unit??]

সমস্যা ৩১। $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \cdot \vec{B}|$ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ কত? [RUET '14–'15]

সমাধান : ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore\ |\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$

$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = AB\cos\theta$

এখন, $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

বা $AB\sin\theta = AB\cos\theta$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$ বা, $\tan\theta = 1$ বা, $\tan\theta = \tan 45°$ $\therefore\ \theta = 45°$

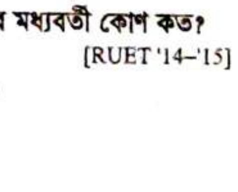
৩ ড. তফাজ্জল হোসেন, মহিউদ্দিন, নীলুফার, হুমায়ুন ও আতিকুর স্যারের বইয়ের অনুশীলনীর গাণিতিক সমস্যার সমাধান

সমস্যা ১। একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল দুটি বেগের মান $10\ m\ s^{-1}$ ও $6\ m\ s^{-1}$। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60°। লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১০নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [উত্তর : $14\ m\ s^{-1}$; $10\ m\ s^{-1}$ বেগের সাথে 21°45° কোণে]

সমস্যা ২। বায়ু ভূমির সমান্তরালে উত্তর দিকে $5\ km\ hr^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। নিম্নোক্ত দিকসমূহে এর উপাংশ কত? (ক) পূর্ব দিক (খ) পশ্চিম দিক, (গ) খাড়া উপরের দিক।

সমাধান : এখানে, ভূমির সমান্তরালে উত্তর দিকে বেগ $= 5\ km\ hr^{-1}$।



পূর্ব, পশ্চিম ও খাড়া উপরের দিকে উত্তর দিকের বেগের উপাংশ = ?

(ক) ধরি, পূর্ব দিকের উপাংশ $= A_y$

আমরা জানি, $A_y = (5\ km\ hr^{-1})\cos 90°$

[$\because$ উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্যবর্তী কোণ 90°]

$= (5\ km\ hr^{-1}) \times 0 = 0 \quad \therefore\ A_y = 0.$

(খ) ধরি, পশ্চিম দিকের উপাংশ $= B_y$

আমরা জানি, $B_y = (5\text{ km hr}^{-1}) \cos 90°$

[∵ উত্তর ও পশ্চিম দিকের মধ্যবর্তী কোণ $= 90°$]

$= (5\text{ km hr}^{-1}) \times 0 = 0$

$\therefore B_y = 0$

(গ) ধরি, খাড়া উপরের দিকের উপাংশ $= C_y$

আমরা জানি, $C_y = (5\text{ km hr}^{-1}) \cos 90°$

[∵ উত্তর দিক ও খাড়া উপরের দিকের মধ্যবর্তী কোণ $= 90°$]

$= (5\text{ km hr}^{-1}) \times 0 = 0 \therefore C_y = 0.$

সমস্যা ৮। $\vec{A} = 10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k}$ **হলে, (১) $\hat{A}$ এর মান নির্ণয় কর। (২) $\vec{A}$ এর দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [**উত্তর :** $15; \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$]

সমস্যা ১২। $\vec{P} = 5\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{Q} = \hat{k}$ **(১) $\vec{P} . \vec{Q}$ = কত? (২) $\vec{P} \times \vec{Q}$ = কত?**

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল সারের ৫১নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [**উত্তর :** (১) 3; (২) $-\hat{i} - 5\hat{j}$]

সমস্যা ১৪। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\vec{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এর ভেক্টর গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমির, ইসহাক ও নজরুল স্যারের ১৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৫। প্রমাণ কর : (i) $(\vec{A}.\vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2$

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪৬নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

সমস্যা ১৬। $\vec{P} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{Q} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ **; দেখাও যে, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ১৭। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j}$; $\vec{B} = \hat{k}$ **হলে, দেখাও যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ।

সমস্যা ১৮। a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 3\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ **ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর লম্ব হবে?**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ১৮নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [**উত্তর :** 2]

সমস্যা ১৯। $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$; **$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।**

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ২৫নং গাণিতিক সমস্যার সমাধানের অনুরূপ। [**উত্তর :** $\frac{13}{\sqrt{19}}$]

সমস্যা ২১। একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের মান সমান। দেখাও যে, এদের লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : শামসুর রহমান সেলু ও জাকারিয়া স্যারের ৪নং গাণিতিক সমস্যার সমাধান দ্রষ্টব্য।

NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহের অনুশীলনমূলক কাজের পূর্ণাঙ্গ সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, NCTB অনুমোদিত পাঠ্যবইসমূহে অনুশীলনমূলক কাজ (একক ও দলগত) দেওয়া আছে। কাজগুলোর পূর্ণাঙ্গ সমাধান পাঠ্যবইয়ের পৃষ্ঠা নম্বর উল্লেখ করে নিচে প্রদত্ত হলো। তোমরা এ কাজগুলো একক বা দলগতভাবে সম্পাদন করে মূল্যায়নের জন্য শ্রেণি শিক্ষকের নিকট জমা দিবে।

কাজ ১। $\vec{P} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ **হলে এর মান ও সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।** ● শামসুর রহমান ও জাকারিয়া স্যার; পৃষ্ঠা ৭০-এর কাজ

সমাধান : এখানে, $\vec{P} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{P}$ এর মান $|\vec{P}| = P = ?$ এবং একক ভেক্টর $\hat{P} = ?$

আমরা জানি, $\vec{P} = x\hat{i} + y\hat{j} + 2\hat{k}$

বা, $P = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ বা, $P = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}$

বা, $P = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7 = 7$ একক

$\vec{P}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{P} = \frac{\vec{P}}{P} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7}$

$\therefore \hat{P} = \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$

কাজ ২। ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে। অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

● শামসুর রহমান ও জাকারিয়া স্যার; পৃষ্ঠা ৭৭-এর কাজ

প্রমাণ : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = BA\cos\theta = \vec{B}.\vec{A}$

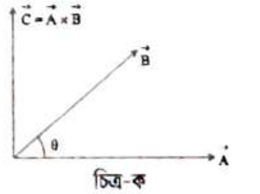
অর্থাৎ, দুটি ভেক্টরের ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে। অর্থাৎ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

কাজ ৩। ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। অর্থাৎ $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

● শামসুর রহমান ও জাকারিয়া স্যার; পৃষ্ঠা ৭৭-এর কাজ

প্রমাণ : $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ এর মান হলো $AB\sin\theta$ এবং এর দিক হলো এমন যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ একটি ডানহাতি ব্যবস্থা তৈরি করে (চিত্র-ক)। $\vec{C}$ এর দিক হচ্ছে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব বরাবর ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে যে দিকে অগ্রসর হবে সেদিকে।

আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = \vec{D}$ এর মান হলো $BA\sin\theta$ এবং দিক হলো এমন যে, $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ এবং $\vec{D}$ একটি ডানহাতি ব্যবস্থা তৈরি করে (চিত্র-খ)।



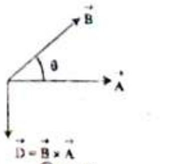
চিত্র-ক

$\vec{D}$ এর দিক হচ্ছে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব বরাবর ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{B}$ থেকে $\vec{A}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যেদিক অগ্রসর হবে সেদিকে।

সুতরাং দেখা যায় যে, $\vec{D}$ ও $\vec{C}$ এর মান সমান কিন্তু বিপরীত অর্থাৎ, $\vec{C} = -\vec{D}$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$



চিত্র-খ

অর্থাৎ ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। অর্থাৎ, $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

কাজ ৪। যদি $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, তবে দেখাও যে এরা পরস্পর লম্ব। ● শামসুর রহমান ও জাকারিয়া স্যার; পৃষ্ঠা ৮১-এর কাজ

সমাধান : এখানে, $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হবে।

অর্থাৎ, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = AB\cos 90° = 0$ হবে।

এখানে, $\vec{A}.\vec{B} = 0$

কিন্তু, $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$= 9 \times 4 + 1 \times (-6) + (-6).5 = 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$

সুতরাং, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব। **(দেখানো হলো)**