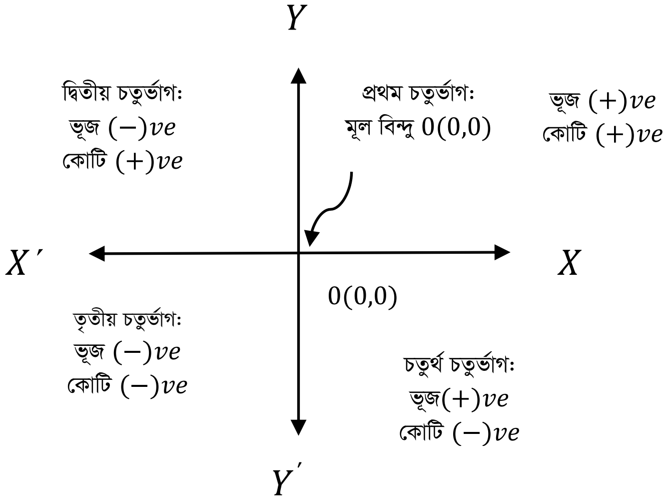
স্থানাংক

স্থানাংক নির্ণয়ঃ কার্তেসীয় বা আয়াতাকার স্থানাংকঃ

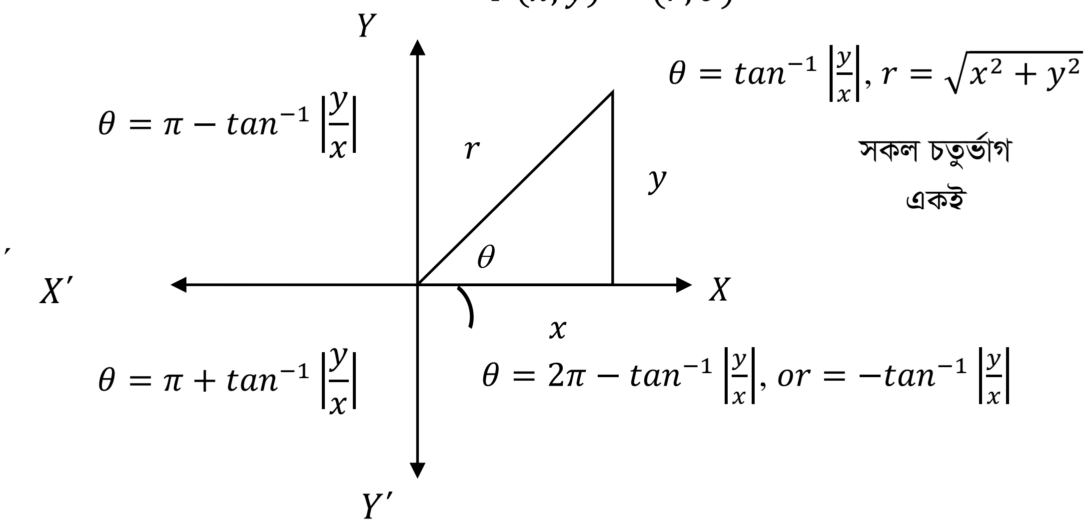


$XX' = X -$ অক্ষ যার সমীকরণঃ $y = 0$

$YY' = Y -$ অক্ষ যার সমীকরণঃ $x = 0$

পোলার আকারঃ

$$P(x,y) \equiv (r,\theta)$$



একটি বিন্দুর অবস্থানঃ $\mathrm{P(x,y)}$ বিন্দুটির পোলার অবস্থানঃ $(\mathrm{r},\theta) = \left(\sqrt{\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2}, \tan^{-1}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)$

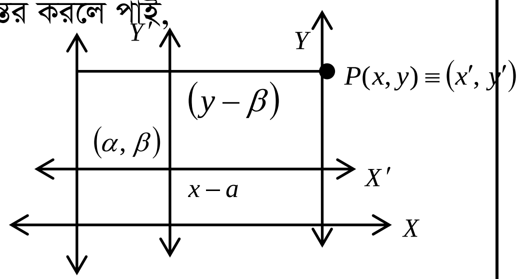
রূপান্তরঃ $\mathrm{r}\cos\theta = \mathrm{x}, \mathrm{r}\sin\theta = \mathrm{y}.$

যখন, $\mathrm{x} = 0$ এবং $\mathrm{y} = 2$ তখন, $\mathrm{p(x,y)} \equiv (0,2) \equiv 2, \pi/_2$

যখন, $\mathrm{x} = 2$ এবং $\mathrm{y} = 0$ তখন, $\mathrm{p(x,y)} \equiv (2,0) \equiv 2, 0$

যখন, $\mathrm{x} = 2$ এবং $\mathrm{y} = 2$ তখন, $\mathrm{p}(2,2) \equiv (2,2) \equiv 2\sqrt{2},\ \pi/_4$

অক্ষের সমান্তরাল অপসারন ঃ মূল বিন্দু 0 (0,0) কে (α, β)বিন্দুতে স্থানান্তর করলে পাই,



$(x, y) \rightarrow$আদি অক্ষের সাপেক্ষে

$(x^{'}, y^{'} \rightarrow$ নতুন অক্ষের সাপেক্ষে

$\therefore$ নতুন অক্ষের সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান: $x^{'} = x - \alpha$, $y^{'} = y - \beta$

উদাহরন- 01: $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$ উপবৃত্তের অক্ষের মূল বিন্দুকে $(-1, 2)$ বিন্দুতে স্থানান্তর কর।

সমাধানঃ $x^{'} = x - \alpha$, $y^{'} = y - \beta$

$9(x^{'} + \alpha)^2 + 4(y^{'} + \beta)^2 + 18(x^{'} + \alpha) - 16(y^{'} + \beta) - 11 = 0$

এখানে, $\alpha = -1, \beta = 2 \therefore 9(x^{'} - 1)^2 + 4(y^{'} + 2)^2 + 18(x^{'} - 1) - 16(y^{'} + 2) - 11 = 0$

$\Rightarrow\ 9x^{'2} - 18x^{'2} + 9 + 4y^{'2} + 16y^{'2} + 16 + 18x^{'2} - 18 - 16y^{'2} - 32 - 11 = 0$

$\Rightarrow\ \frac{x^{'2}}{4} + \frac{y^{'2}}{9} = 1$ নতুন অক্ষের সাপেক্ষে সমীকরণটি যা একটি উপবৃত্ত।

নিজে চেষ্টা করঃ

$x^2 - 4y^2 - 6x - 32y - 59 = 0$ অধিবৃত্তকে নতুন মূলবিন্দু $(3, -4)$এর সাপেক্ষে রূপান্তর কর।

Ans: $\frac{x^{'2}}{4} - \frac{y^{'2}}{1} = 1$

$\mathbf{Type - 01}$: আয়তাকার (কার্তেসীয়ান) স্থানাংক হতে পোলার স্থানাংকে রূপান্তর বা পোলার স্থানাংক হতে কার্তেসীয়ান স্থানাংকে রূপান্তর সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $(-\sqrt{3}, \mathbf{1})$ **বিন্দুর পোলার স্থানাংক কত?** $-\sqrt{3} = r\cos\theta, 1 = r\sin\theta$ $\therefore$ $r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = 2$ $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, $\therefore$ পোলার স্থানাংক ঃ ($2, \frac{5\pi}{6}$)

EXAMPLE-02: $\left(\mathbf{2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}}\right)$ **বিন্দুর আয়তাকার স্থানাংক নির্ণয় কর।**

$x = r\cos\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -2$, $y = r\sin\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$ কার্তেসীয়ান স্থানাংকঃ $(-2,2)$

নিজে চেষ্টা কর :

(i) $(-1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাংক কত? **Ans**: $\left(\mathbf{2, \frac{5\pi}{4}}\right)$

(ii) কার্তেসীয়ান স্থানাংকে রূপান্তর করঃ (a) $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$ (b) $\left(1, \frac{11\pi}{6}\right)$ **Ans**: **(a)** $(\mathbf{0, -3})$ **(b)** $\left(\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}}\right)$

পোলার ও কার্তেসীয়ান স্থানাংকে রুপান্তর(সমীকরন)

EXAMPLE-01: $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0}$ **সমীকরনকে পোলার আকারে পরিনত কর।**

সমাধানঃ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \therefore r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\cos\theta + 4r\sin\theta = 0$

$\Rightarrow r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - r(2\cos\theta - 4\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow r^2 = r(2\cos\theta - 4\sin\theta) = 0 \Rightarrow r = 2\cos\theta - 4\sin\theta [\because r \neq 0]$

EXAMPLE-02: $\mathbf{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$ **সমীকরনকে পোলার আকারে পরিনত কর।**

পোলার আকারে: $b^2(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + a^2(y^2 - 2\beta y + \beta^2) = a^2b^2$

$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2\alpha x - 2a^2\beta y + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = a^2b^2$

ধরি, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ তাহলে,

$$b^2r^2\cos^2\theta + a^2r^2\sin^2\theta - 2b^2\alpha.r\cos\theta - 2a^2\beta.r\sin\theta + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - 2r(b^2\alpha\cos^2\theta - a^2\beta\sin^2\theta) = a^2b^2 - b^2\alpha^2 - a^2\beta^2$$

EXAMPLE-03: $\mathbf{r^2 = \frac{1}{\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}}$ **হলে কার্তেসীয়ান সমীকরন নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ $r^2 = \frac{1}{\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}$; $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$\therefore r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta = 1, x^2 - 2y^2 = 1 \longrightarrow$ অধিবৃত্তের সমীকরণ

EXAMPLE-04: $r = \frac{em}{1 - e\cos\theta}$ $(o < e \leq 1)$

সমাধানঃ $r - er\cos\theta = em \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - ex = em \Rightarrow x^2 + y^2 = e^2m^2 + e^2x^2 + 2e^2mx$

$\Rightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2mx - e^2m^2 = 0$ যখন, $e = 1, y^2 - 2mx - m^2 = 0 \rightarrow$ যা পরাবৃত্তের সমীকরন।

নিজে চেষ্টা কর ঃ

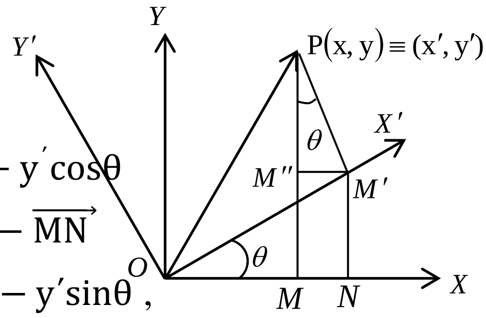
(i) পোলার আকারে পরিনত কর:

(a) $y^2 = 4(1 - x)$, (a) $y = x\tan\alpha$, (c) $x^2y^2 = 2ay$

Ans: (a) $r(1 + \cos\theta) = 2$, (b) $\theta = n\pi + \alpha$, (c) $r\text{cox}2\theta = 2a\sin\theta$

(ii) কার্তেসীয়ান আকারে পরিনত কর: (a) $r^2\sin 2\theta = 2a^2$ (b) $r^2 = \frac{400}{25\sin^2\theta + 16\cos^2\theta}$, (c)$r = a\text{cosec}^2\frac{\theta}{2}$ Ans: (a) $xy = a^2$, (b) $25y^2 + 16x^2 = 400$, (c) $y^2 - 4ax - 4a^2 = 0$

অক্ষের ঘূর্ণন ঃ



নতুন অক্ষের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাংক $(x^{\prime},y^{\prime})$

নতুন অক্ষের সাপেক্ষে ঃ $x = x^{\prime}\cos\theta - y^{\prime}\sin\theta$, $x = x^{\prime}\sin\theta + y^{\prime}\cos\theta$

$\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OX'}$ উপর P বিন্দুর অভিক্ষেপ নিয়ে পাই, $x = \overline{OM} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{MN}$

$=\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{M''M'}$ $=\overrightarrow{OM'}\cos\theta - \overrightarrow{M'P}\sin\theta$ $\therefore x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$,

$x' = \overline{OM'}$, $y' = \overrightarrow{M'P}$,

$y = \overline{MP} = \overrightarrow{MM''} + \overrightarrow{M''P} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{M''P} = \overrightarrow{OM'}\sin\theta + \overrightarrow{M'P}\cos\theta$

$\therefore y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

পুরাতন অক্ষের সাপেক্ষে ঃ $x^{\prime} = x\cos\theta - y\sin\theta$; $y^{\prime} = x\sin\theta + y\cos\theta$

$\mathbf{Type - 02}$: অক্ষের ঘূর্ণন সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: **$\mathbf{2xy = a^2}$ সমীকরনটিকে $+45°$ কোণে অক্ষকে ঘুড়িয়ে নতুন অক্ষের সাপেক্ষে রূপান্তর কর।**

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = x'\cos45° - y'\sin45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = x'\sin45° + y'\cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $2xy = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = x^{\prime 2} - y^{\prime 2}$

নতুন অক্ষের সাপেক্ষে পরিবর্তিত সমীকরণঃ $x^{\prime 2} - y^{\prime 2} = a^2 \rightarrow$ যা অধিবৃত্তের সমীকরণ।

নিজে চেষ্টা কর ঃ

$x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$ সমীকরণকে অক্ষদ্বয়কে $+45°$ কোণে ঘুড়িয়ে নতুন অক্ষের সাপেক্ষে রূপান্তর কর। Ans: $3x^{\prime 2} - y^{\prime 2} + 3 = 0$

EXAMPLE-02: **পরাতন অক্ষকে $+45°$ কোণে ঘুড়িয়ে নতুন অক্ষের সাপেক্ষে $(-3, 4)$ বিন্দুর পরিবর্তিত অবস্থান নির্ণয় কর।**

$\therefore x^{\prime} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3 + 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $y^{\prime} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 + 3) = \frac{7}{\sqrt{2}}$

$\therefore$বিন্দুর নতুন অবস্থান ঃ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

EXAMPLE-03: $(0,0)$ বিন্দুর অবস্থান নতুন অক্ষের সাপেক্ষে নির্ণয় কর। নতুন অক্ষ যখন $(2,1)$ বিন্দুগামী এবং পুরাতন অক্ষের সাথে নতুন অক্ষ $-45°$ কোন উৎপন্ন করে।

$= x' \cos(-45°) - y' \sin(-45°) + 2 \Rightarrow x - 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$

$y = x' \sin(-45°) + y' \cos(-45°) + 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x')$

$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(x-2) + (y-1\}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(0-2) + (0-1\}) = -\frac{3}{\sqrt{2}},\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(y-1) - (x-2)\}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(0-1) - (0-2)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, (0,0) \equiv \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

নিজে চেষ্টা করঃ

(i) $(2,0)$ বিন্দুর নতুন অবস্থান নির্ণয় কর যখন নতুন অক্ষ $+45°$ কোণে পুরাতন অক্ষ হতে ঘুরে যায়।

Ans: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

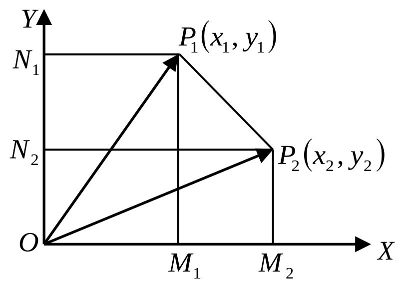
(ii) $(-2,-5)$ বিন্দুর পরিবর্তিত অবস্থান নির্ণয় কর। যখন নতুন অক্ষ পুরাতন অক্ষ হতে $+30°$ কোণে ঘুরে যায় এবং $(2,1)$বিন্দুগামী।

hints: $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-4) + \frac{1}{2}(-5-1) = -2\sqrt{3} - 3$

$y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) - \frac{1}{2}(x-2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-5-1) - \frac{1}{2}(-2-2) = -3\sqrt{3} + 2$

দুটি বিন্দুর মধ্যকার দুরত্ব নির্ণয়ঃ অনুপাত নির্ণয়ঃ ক্ষেত্রফল নির্নয়

দিক নির্দেশিত রেখাংশের দুটো অক্ষে অভিক্ষেপ নির্ণয়ঃP_1OP_2 এর X অক্ষের উপর অভিক্ষেপ$= \overline{P_1O}$ এর অভিক্ষেপ $+\overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ $= \overline{-OP_1}$ এর অভিক্ষেপ $+\overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ $= -\overline{OM_1} + \overline{OM_2} = -x_1 + x_2$ P_1OP_2 এর Y অক্ষের উপর অভিক্ষেপ $= \overline{OP_1}$ এর অভিক্ষেপ $+\overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ$== -\overline{ON_1} + \overline{ON_2} = -y_1 + y_2$



$\therefore$ দুই বিন্দুর মধ্যেকার দুরত্ব

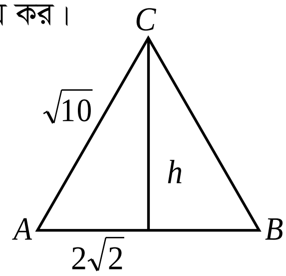
: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2} = d$ (say) যেখানে, d সবসময় ধনাত্বক সংখ্যা

Type − 03: দুরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: $\mathbf{P(-3,-6)}$ও $\mathbf{Q(-14,-8)}$ **হলে** $\overline{\mathbf{PQ}}=?$

সমাধানঃ $\overline{PQ}=\sqrt{(-14+3)^2+(-8+6)^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ একক।

উদাহরন-০২ঃ প্রমান কর যে, $(4,-2),(8,2),(7,-1)$, বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য কত? ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধানঃ

ধরি বিন্দু তিনটি $A(4,-2),B(8,2),C(7,-1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(8-4)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$ একক।

$\overline{BC}=\sqrt{(7-8)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$ একক।

$\overline{CA}=\sqrt{(4-7)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{10}$ একক।

$\overline{BC}=\overline{CA}$ সুতরাং ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। যার ভূমি, $\overline{AB}=4\sqrt{2}$ একক।

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{10-8}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ বর্গ একক

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) 10 একক দৈর্ঘ্যের একটি রেখার একপ্রান্তের স্থানাংক $(2,-3)$, যদি অপর প্রান্তের ভূজ 10 হয় তবে দেখাও যে কোটি 3 অথবা -9 হবে।

(ii) প্রমান কর যে $(2a,4a),(2a,6a)$ এবং $(2a+\sqrt{3}a,5a)$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভূজের শীর্ষ বিন্দু যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$একক।

(iii) A,B হলো দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(x,y)$একটি চলমান বিন্দু এমন ভাবে চলে যেন$|\overline{PA}|=2|\overline{PB}|$ হয়। দেখাও যে, P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি বৃত্ত যার সমীকরণ $x^2+y^2=4^2$

(iv) প্রমান কর যে, $(-7,1),(5,-4),(10,8)$ এবং $(-2,13)$ একটি বর্গের চারটি কৌনিক বিন্দু। বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(iv) A,B,C,D বিন্দুগুলোর স্থানাংক যথাক্রমে$(-2,4),(3,2),(-3,-1),(2,3)$ দেখাও যে X অক্ষের উপর $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ এর অভিক্ষেপ একই। Y অক্ষের উপর তাদের অভিক্ষেপ কি একই হবে ? দেখাও। Ans: না সামান নয়। $AB=-2,CD=4$

একটি রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তকরণঃ (a) অন্তঃস্থভাবে (b) বহিঃস্থভাবে

(a) অন্তঃস্থভাবে $m:n$ অনুপাতে বিভক্তকরণঃ $x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$

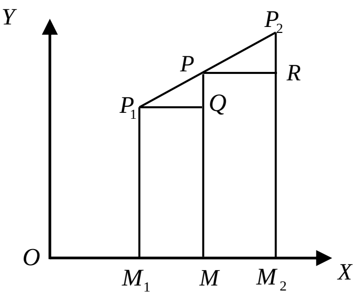
(b) বহিঃস্থভাবে $m:n$ অনুপাতে বিভক্তকরণঃ $x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$

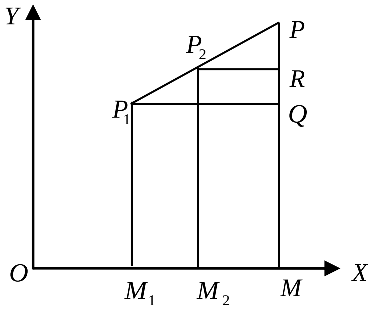
Note: (i) $\frac{m}{n}=\frac{k}{1}$ হলে, অন্তঃস্থভাবেঃ $x=\frac{kx_2+x_1}{k-1}, y=\frac{ky_2+y_1}{k+1}$ বহিঃস্থভাবে ঃ $=\frac{kx_2-x_1}{k-1}$ $, y=\frac{ky_2+y_1}{k-1}$

(ii) $m=n$ হলে, বা $k=1$ হলে, সমদ্বিখন্ডন বিন্দুর স্থানাংকঃ $x=\frac{x_2+x_1}{2}, y=\frac{y_2+y_2}{2}$

(x_1,y_1) ও (x_2,y_2) এর মধ্যবিন্দু (x,y) $\boxed{m:-n}$

লক্ষ করঃ





p_1 ও p_2 বিন্দু দুটিকে উভয় দিকে সরানো হচ্ছে। যখন P, P_1এর সাথে মিলে যাবে তখন $m:n=0, x=x_1, y=y_1$

যখন P P_1 ছাড়িয়ে অসীমে যায় তখন $m:n$ 0 থেকে -1 হতে পারে। যখন P ও P_1 থেকে P_2 এর দিকে যায় তখন $m:n$

0 থেকে অসীম হতে পারে। যখন P ও P_2 একত্রে মিলে যায় তখন $m:n=\infty$ হয়, যখন Pও P_2 এর ডান দিকে অসীমে

যায় তখন $m:n=-\infty$ হতে -1 হতে পারে যখন P সমস্থ রেখাংশ জুড়ে বাম হতে ডান দিকে দায়।

$1<m:n\le o\{P_1\}, o<m:n<\infty\{P_2\}, -\infty<m:n<-1$

Type − 04: অনুপাত নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: **$P_1: (5, -4)$ ও $P_2: (7, -9)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশকে এমনভাবে বাড়ানো হলো যেন তা p_2**
কে ছাড়িয়ে যায় এবং এর দৈর্ঘ্য দ্বিগুন হয়। প্রসারিত প্রান্তের স্থানাংক $p(x, y)$ নির্নয় কর।

সমাধানঃ P বিন্দু P_1 ও P_2 এর সংযোজক রেখাংশকে $-2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।
$x = \frac{-2\times7+1\times5}{-2+1} = 9, y = \frac{-2\times(-9)+1\times(-4)}{-2+1} = -14$ ∴ নির্ণেয় বিন্দুটির **স্থানাংকঃ** $(9, -14)$
দিক ঃ $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P$ $P_1 \xrightarrow{(+)} P \xrightarrow{(+)} P_2$[অন্তঃস্থভাবে] $P_1 \xrightarrow{(+)} P \xleftarrow{(-)} P_2$[বহিঃস্থভাবে]
P_1P $(+)$ve $\overline{PP_2}(-)$ve   [বহিঃস্থভাবে] $P_1P(+)$ve $\overline{PP_2}(+)$ve [অন্তঃস্থভাবে]

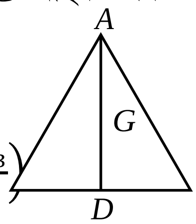
পুনরায়, P_1P $(+)$ve $\overline{PP_2}(-)$ve(also) [অন্তঃস্থভাবে বিভক্তির ক্ষেত্রে]

$P_1P(+)$ve $\overline{PP_2}(+)$ve [বহিঃস্থভাবে বিভক্তির ক্ষেত্রে

নিজে চেষ্টা কর ঃ
$p_1(-4, +1)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ব্যাসের একটি প্রান্তবিন্দু $p_2(2,6)$ অন্য প্রান্তের স্থানাংক $p(x, y)$ নির্নয় কর। Ans: $(-10, -4)$ Hints: $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} =$
$1: -2$ or, $-1: 2$ (as your wish)

EXAMPLE-02: দেখাও যে, একটি
ত্রিভুজেরভরকেন্দ্রঃ$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ যেখানে,$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ত্রিভূজটির তিনটি শীর্ষবিন্দু।

উৎসঃ ভারকেন্দ্র ত্রিভূজের মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে [শীর্ষ A হতে বিপরীত BC- বাহুর উপর অংকিত মধ্যমা BC- কে D বিন্দুতে ছেদ করলে এবং G ভরকেন্দ্র হলে,



$\overline{AG} : \overline{GD} = 2:1, \overline{BD} : \overline{DC} = 1:1$ [D, $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু]

$D: \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right), G: \left(\frac{x_1+2\times\frac{x_2+x_2}{2}}{2+1}, \frac{y_1+2\times\frac{y_1+y_2}{2}}{2+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

নিজে চেষ্টা করঃ
(i) একটি ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $(3,2), (-1,-2)$ এবং $(5,-4)$ ত্রিভূজটির শীর্ষবিন্দু তিনটি এবং ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। Ans: $(3,4), (9,0), (1,-8)$ এবং $\left(\frac{7}{3}, \frac{-4}{3}\right)$
(ii) A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাংক যথাক্রমে $(3,1), (1,0), (5,1)$ এবং$(-10,-4)$, CD রেখা AB রেখাকে যে অনুপাতে বিভক্তি করে তা বের কর। Ans: $-2:1$ অনুপাতে অর্থাৎ $2:1$ অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফলঃ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, এবং $C(x_3, y_3)$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\}$$

n ভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_ny_1 - x_1y_n)\}$

<u>**চতুর্ভূজের ক্ষেত্রেঃ**</u> $\boxdot$ ABCD $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

বিঃদ্রঃ- (i) তিনটি বিন্দু সমরেখা নয়। ত্রিভূজ গঠন করা সম্ভব।

(ii) তিনটি বিন্দু সমরেখা হলে ক্ষেত্রফল শূন্য হয়। অর্থাৎ একটি মাত্র রেখা পাওয়া যায় যার দ্বারা ত্রিভূজ গঠন করা অসম্ভব।

Type – 05: ক্ষেত্রফল নির্ণয়সংক্রান্ত সমস্যাবলী

পাঁচ প্রকার চতুর্ভুজ ঃ

০১. সামন্তরিক - বিপরীত বাহুদ্বয় সমান্তরাল ও সমান। কর্নদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

০২. আয়তক্ষেত্র - যার দুটি কর্ন সমান এবং প্রত্যেক কোন $90°$

০৩. বর্গক্ষেত্র - আয়তক্ষেত্র যার প্রত্যেক বাহু সমান।

০৪. রম্বস -একটি চতুর্ভূজ যার প্রত্যেক বাহু সমান ও সমান্তরাল কিন্তু কর্নদ্বয় সমান নয়। কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদকরে

০৫. ট্রাপিজিয়াম - বিপরীত বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং অসমান। অপর দুইবাহু সমান নয়।

EXAMPLE-01: CDBA চতুর্ভূজের চারটি শীর্ষ A: (2,5), B: (4,1), C: (−4,2) এবং D: (1, −1) চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\boxdot$ CDBA $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{49}{2} = 24.5$ sq units. $[= \frac{1}{2}(4 + 1 + 20 + 4 - 2 + 4 - 2 + 20)]$

EXAMPLE-02: $Y -$ অক্ষ এবং $(7, 2)$ বিন্দু হতে $(a, 5)$ বিন্দুর দুরত্ব সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$Y -$অক্ষ হতে $(a, 5)$ বিন্দুর দুরত্ব $= a$, $(7,2)$ বিন্দু হতে $(a, 5)$ বিন্দুর দুরত্ব $=$
$\sqrt{(a-7)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{a^2 - 14a + 49 + 9} = \sqrt{a^2 - 14a + 58}$

প্রশমতে, $\sqrt{a^2 - 14a + 58} = a \Rightarrow a^2 - 14a + 58 = a^2 \Rightarrow a = \frac{29}{7}$ Ans.

নিজে চেষ্টা করঃ

০১. x অক্ষ এবং $(-5, -7)$ বিন্দু হতে $(4, k)$ বিন্দুর দুরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর।
$\left[\text{Ans: } \frac{-65}{7}\right]$

০২. একটি বিন্দুর কোটি এর ভূজের দ্বিগুন; যদি এর দুরত্ব $(4,3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক হয়,তবে বিন্দুটির স্থানাংক কত?

[Ans: (3,6) (1,2)]

০৩. AB রেখাটি $P(3,3)$ ও $Q(8,5)$ বিন্দু দুটি দ্বারা সমদ্বিখন্ডিত হয়। A ; B এর স্থানাংক কত?
[Ans: $A(-2,1)$; $B(13,7)$]

EXAMPLE-03: ABC ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু $A(5, 6), B(-9, 1)$, এবং $C(-3, -1)$ ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল, ভরকেন্দ্র ও A হতে BC এর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

<u>সমাধানঃ</u>

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -9 & 1 \\ -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(5 + 9 - 18 + 54 + 3 + 5) = \frac{1}{2}(58) = 29 \text{ বর্গ একক}$$

ভরকেন্দ্রঃ $\left(\frac{5-9-3}{3}, \frac{6+1-1}{3}\right) = \left(\frac{-7}{3}, 2\right)$

A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য h হলে, $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times h \Rightarrow$
$\sqrt{(-3+9)^2 + (-1-1)^2} \times h = 2 \times 29 \Rightarrow h = \frac{2\times29}{2\sqrt{10}} = \frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক

EXAMPLE-04: $\mathbf{A, B, C}$ এবং $\mathbf{D}$ চার বিন্দু যথাক্রমে $(\mathbf{1}, -\mathbf{8})$, $(-\mathbf{3}, \mathbf{4}), (\mathbf{0}, \mathbf{7})$ এবং $(\mathbf{3}, \mathbf{16})$। $\overline{\mathbf{AB}}, \overline{\mathbf{CD}}$ কে ও $\overline{\mathbf{CD}}, \overline{\mathbf{AB}},$ কে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\overline{\mathrm{CD}}: y - 7 = \frac{16-7}{3-0}(x - 0) \Rightarrow y - 7 = 3x \Rightarrow 3x - y + 7 = 0$

$A\&B$ বিন্দু বসিয়ে পাই, $L_1 = 3\times1 + 8 + 7 = 18, L_2 = -9 - 4 + 7 = -6 - \frac{L_1}{L_2} = \frac{18}{-6} = 3:1$, $\overline{\mathrm{AB}}$ কে $\overline{\mathrm{CD}}$ $3:1$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে **বিভক্ত** করে অনুরূপ ভাবে দেখানো যায়। $\overline{\mathrm{CD}}$ কে$\overline{\mathrm{AB}}$ -2: 5 অনুপাতে বিভক্ত করে।

ধরি, $\overline{\mathrm{AB}}\& \overline{\mathrm{CD}}$ এর ছেদবিন্দু $P(x, y)$

$P(x, y)$; $\overline{\mathrm{AB}}$ কে $K: 1$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে। $x = \frac{K(-3)+1\times1}{K+1} = \frac{1-3K}{K+1}$, $y = \frac{4K+1(-8)}{K+1} = \frac{4K-8}{K+1}$

P, C, D তিনটি বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত।

অর্থাৎ

$$\therefore \Delta DCP = 0 \text{ অর্থাৎ } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 0 & 7 \\ \frac{-3K+1}{K+1} & \frac{4K-8}{K+1} \\ 3 & 16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 21 + \frac{-48K+16}{K+1} - \frac{12K-24}{K+1} - \frac{-21K+7}{K+1} = 0$$

$\Rightarrow 21K + 21 + 16 - 48K - 12K + 24 + 21K - 7 = 0 \Rightarrow -18K = -54 \;\therefore K = 3$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{CD}}, \overline{\mathrm{AB}}$ কে $3:1$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

ধরি $P(-2,1), \overline{\mathrm{CD}}$ কে $K: 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। তাহলে, $-2 = \frac{K\times3+1\times0}{K+1} = \frac{3K}{K+1}$

$\Rightarrow -2K - 2 = 3K$ [**NOTE**: $K: 1$ ধরে K এর মান $(+)$ve নিয়ে]

$\Rightarrow 5K = -2 \Rightarrow K = -{}^{2}/_{5}$

যেহেতু $K(-)$ve সুতরাং $\overline{\mathrm{AB}}\& \overline{\mathrm{CD}}$ রেখাকে $2:5$ অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে বা $-2:5$ অনুপাতে বিভক্ত করে। বা, $2:-5$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

নিজে চেষ্টা করঃ

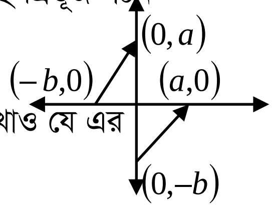
(i) $A(8,10), B(18,20)$ বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q ও R বিন্দু দুটি $2:3$ অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত ও বহিঃর্বিভক্ত করে। Q ও R এর স্থানাংক নির্ণয় কর। এবং P বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে, $PQ:PR = PB^2$. Ans: $(12,14), (-12,-10)$

(ii) ABC ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দুগুলো $A(-3,-2), B(-3,9)$ এবং $C(5,-8)$; ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং সেখান থেকে দেখাও যে, B হতে CA এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $8\frac{4}{5}$ একক।
Ans: 44 sq units.

(iii) $A(2,-1), B(a+1, a-3)$ এবং $C(a+2, a)$; হলে ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}$ হলে A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখা হয়।

(iv) একটি ত্রিভূজের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক $(at_1{}^2, 2at_1), (at_2{}^2, 2at_2)$, এবং $(at_3{}^2, 2at_3)$, যদি এর ভরকেন্দ্র x -অক্ষের উপর থাকে তবে প্রমাণ কর, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$; যেখানে $a \neq 0$.

(v) দেখাও যে $(3, 90°), (3, 30°)$ শীর্ষবিশিষ্ট বিন্দু দুটি মূল বিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভূজ গঠন করে। ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। Ans: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক।



(vi) একটি চতুর্ভূজের শীর্ষ বিন্দুগুলো যথাক্রমে, $(a,0), (-b,0), (0,a), (0,b)$ দেখাও যে এর ক্ষেত্রফল শূন্য। এর ব্যাখ্যা দাও।

Hints: $\Delta BCO = \frac{-1}{2}ab$ Clockwised এবং $\Delta ODA = \frac{1}{2}ab$ Anti clock wised দিক অনুসারে। $\Delta BCO + \Delta ODA = +\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ab = 0$ [তিনটি বিন্দুর জন্য এমনটি সত্য নয়] সত্য ফল $= ab$ বর্গ একক।

(vii) প্রমান কর $(a+1, 1), (2a+1, 3), (2a+2, 2a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখা হবে যদি $a = 2$ বা $-\frac{1}{2}$ হয়।

(viii) $A(x,y), B(-3,2), C(-4,-4)$ এবং $\Delta ABC = +{}^{35}/_{2}$ হলে দেখাও যে, $6x - y - 15 = 0$।

(ix) একটি সমবাহু ত্রিভূজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(0,-4)$ ও $(0,4)$ হলে তৃতীয় শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক কত বের

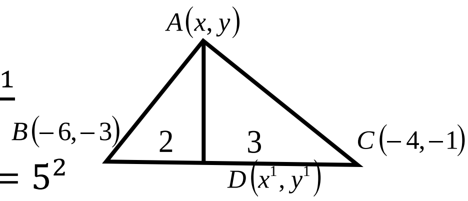
কর। Ans: $(4\sqrt{3}, 0)$ $(-4\sqrt{3}, 0)$

Type − 06: সঞ্চারপথ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী

সঞ্চার পথঃ একটি সেটের যে কোন বিন্দুর শর্তানুযায়ী চলমান পথ।

উদাহরন- ০১ ঃ $A(x,y), B(-6,-3)$, ও $C(-4,-1)$ বিন্দুগুলি একটি ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু। A বিন্দুটি এমন একটি সেটের সদস্য যে সেটটি যে কোন বিন্দু থেকে BC এর উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দু BC রেখাকে $2:3$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে। A বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে A বিন্দু হতে BC এর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক।

সমাধানঃ



$=x^1 = \frac{2(-4)+3(-6)}{2+3} = \frac{-26}{5}$, $y^1 = \frac{2(-1)+3(-3)}{2+3} = \frac{-11}{5}$

$AD = 5 \quad \therefore AD^2 = 5^2 \therefore \left(x+\frac{26}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{11}{5}\right)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + \frac{52}{5}x + \left(\frac{26}{5}\right)^2 + y^2 + \frac{22}{5}y + \left(\frac{22}{5}\right)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{52x}{5} + \frac{22y}{5} = 25 - \frac{1160}{25} = -\frac{535}{25} = -\frac{107}{5} \Rightarrow 5(x^2+y^2) + 52x + 22y - 107 = 0$

বৃত্তের সমীকরণ যা A বিন্দুর সঞ্চার পথ।

নিজে চেষ্টা কর ঃ

(i) $A: (-5,3), B: (2,4), PA: PB = 3:2$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

Ans: $5x^2 + 5y^2 - 76x - 48y + 46 = 0$

(ii) $P: (a\cos\theta, b\sin\theta)$ হলে P বিন্দুর সঞ্চারপথঃ $\left.\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\right\} \rightarrow$ polar স্থানাংক ব্যাবস্থা

$\theta = \tan\left(b/a\right)$, পরামিতিক স্থানাংক: $P\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right)$ যেখানে $t = \tan\theta/2$

অধিবৃত্তঃ $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ হলে P এর সঞ্চার পথ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ কার্তেসীয়ান স্থানাংক

$\left.\begin{aligned}\therefore x &= a\sec\theta = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2}\\ y &= b\tan\theta = b\frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}\right\}$ পরিমিতিক স্থানাংক যদি, $t = \tan\theta/2$ হয়।

পোলার স্থানাংক ঃ $\left.r^2 = \frac{a^2b^2}{-a^2\sin^2\theta + b\cos^2\theta}\right\}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

পরাবৃত্তঃ $P(at^2, 2at)$ হলে P বিন্দুর সঞ্চার পথ $y^2 = 4ax$, পোলার আকারঃ $r = \frac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}$

অথবা, পোলার আকারঃ $r = \frac{4a\sin\theta}{\cos^2\theta}$; কার্তেসীয়ান আকার ঃ $x^2 = 4ay$

আয়তাকার অধিবৃত্তঃ $r^2\cos^2\theta = a^2 \rightarrow$ পোলার আকার

কার্তেসীয়ান আকারেঃ $x^2 - y^2 = a^2$, $xy = c^2$ [Syllebus বহির্ভূত]

সরলরেখাঃ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর পোলার আকার, $r = \frac{ab}{a\sin\theta + b\cos\theta}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$