ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক *(Matrics and Determinants)*

1.1.1. ম্যাট্রিক্সের ধারণা

মনে করি, $x' = a_1x + b_1y$ এবং $y' = a_2x + b_2y$ দুইটি প্রদত্ত সমীকরণ, যেখানে a_1, b_1, a_2, b_2 ধ্রুবক (Constant). এই দুইটি প্রদত্ত সমীকরণকে বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়।

ধরি, A তার দৈনিক কাজে 12 টাকার মালামাল ব্যবহার করলে তাকে দৈনিক 15 টাকা মজুরি দেয়া হয়। আবার B তার দৈনিক কাজে 10 টাকার মালামাল ব্যবহার করলে তাকে দৈনিক 14 টাকা মজুরি দেয়া হয়। এভাবে A ও B যথাক্রমে x সংখ্যক ও y সংখ্যক দিন কাজ করল। যদি তারা দুইজনে একত্রে x' টাকা মজুরি পায় এবং সর্বমোট y' টাকার মালামাল ব্যবহার করা হয়, তবে আমরা পাই

$$\begin{aligned} x' &= 15x + 14y \\ y' &= 12x + 10y \end{aligned} \quad \text{.............(i)}$$

উপরের দুইটি সমীকরণ থেকে আমরা বলতে পারি : যদি A ও B যথাক্রমে 7 দিন ও 5 দিন কাজ করে, তাহলে দুই জনের মোট মজুরি অর্থাৎ $x' = 175$ এবং মালামালের জন্য মোট ব্যয়, অর্থাৎ $y' = 134$.

প্রদত্ত সমীকরণের ধ্রুবকগুলিকে, অর্থাৎ সংখ্যাগুলিকে সারি *(Row)* এবং স্তম্ভ *(Column)* এ সাজালে একটি **আয়তাকার বিন্যাস *(Rectangular array)*** পাওয়া যায়। এ আয়তাকার বিন্যাসকে বলা হয় **ম্যাট্রিক্স *(Matrix)*.** ম্যাট্রিক্স বোঝাতে দুইটি তৃতীয় বন্ধনী [ ] বা দুইটি প্রথম বন্ধনী ( ) ব্যবহার করা হয়। কখনও কখনও ‘|| ||’ প্রতীকের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্স বোঝানো হয়।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় থেকে ম্যাট্রিক্স হলো: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

(i) থেকে ম্যাট্রিক্স হলো: $\begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$.

ম্যাট্রিক্স গঠনকারী সংখ্যা a_1, b_1, a_2, b_2 ইত্যাদিকে এর **ভুক্তি** *(Entry)* বলা হয়। ভুক্তিগুলির আনুভূমিক *(horizontal)* এবং উল্লম্ব *(Vertical)* বিন্যাসকে যথাক্রমে **সারি** *(Row)* এবং **স্তম্ভ** *(column)* বলা হয়। যেমন :

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

উপরের ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা 3 এবং কলামের সংখ্যা 4. এ ম্যাট্রিক্সকে 3×4 আকারের ম্যাট্রিক্স বা সংক্ষেপে 3×4 ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স লেখার সময় প্রত্যেক ভুক্তিতে ‘*Double subscript*’ ব্যবহার করা হয়। **প্রথমটি সারি এবং দ্বিতীয়টি কলাম** নির্দেশ করে।

নিচে কয়েকটি ম্যাট্রিক্স লেখা হলো :

(i) $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{Vmatrix}$ যা 2×3 ম্যাট্রিক্স।

(ii) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, যা 3×3 ম্যাট্রিক্স। (iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, যা 3×2 ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে, একটি ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা যথাক্রমে m ও n হলে, ঐ ম্যাট্রিক্সকে $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সের আকার বোঝাতে প্রথমে সারি এবং পরে কলাম উল্লেখ করা হয়।

সংক্ষেপে, $A = [\,a_{ij}\,]\, m \times n$, যেখানে $i = 1, 2, \ldots m$ এবং $j = 1, 2, \ldots n$; দ্বারা $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স বোঝানো হয়।

1.1.2. ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ

(i) আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (*Rectangular Matrix*) : যদি কোনো $m \times n$ **আকারের** ম্যাট্রিক্সে $m \neq n$ হয়, তবে তাকে **আয়তাকার ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ একটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

(ii) সারি ম্যাট্রিক্স (*Row Matrix*) **এবং কলাম ম্যাট্রিক্স** (*Column Matrix*) : কেবল একটি সারি সম্বলিত ম্যাট্রিক্সকে **সারি ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $[\,a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \ldots\ a_{1n}]_{1 \times n}$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স ।

কেবল একটি কলাম সম্বলিত ম্যাট্রিক্সকে **কলাম ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন,

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix} m \times 1$ একটি **কলাম ম্যাট্রিক্স** ।

(iii) বর্গ ম্যাট্রিক্স : কোন ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারি সংখ্যা পরস্পর সমান হলে, তাকে **বর্গ ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} 3 \times 3$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(iv) মুখ্য কর্ণ : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি ও ১ম কলামে অবস্থিত সাধারণ ভুক্তিগামী কর্ণকে **মুখ্য কর্ণ** বলা হয়।

(v) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (*Diagonal Matrix*) : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলি ব্যতীত অবশিষ্ট সব ভুক্তিগুলি শূন্য হলে, তাকে **কর্ণ ম্যাট্রিক্স** বলে। যেমন : $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} 2 \times 2$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

(vi) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (*Scalar Matrix*) : যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলি সমান, তাকে **স্কেলার ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$ একটি $n \times n$ স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(vii) অভেদক ম্যাট্রিক্স বা ইউনিট ম্যাট্রিক্স (*Identity Matrix or Unit Matrix*) : স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি একক (1) হলে, ম্যাট্রিক্সটিকে **অভেদক ম্যাট্রিক্স বা ইউনিট ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। n-পর্যায়ের ইউনিট ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} n \times n$$

(viii) শূন্য ম্যাট্রিক্স (*Null Matrix*) : শূন্য ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেকটি সারি এবং প্রত্যেকটি কলামের প্রতিটি ভুক্তি শূন্য। যেমন : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$ একটি $n \times n$ আকারের শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(ix) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (*Symmetric Matrix*) : যে বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [\,a_{ij}\,]_{m\times m}$ এর ক্ষেত্রে $a_{ij} = a_{ji}$, সব i এবং j এর জন্য, তাকে **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 3×3 একটি প্রতিসম বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(x) রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স (*Transpose of a matrix*) : কোনো ম্যাট্রিক্সের সারিগুলিকে কলামে এবং কলামগুলিকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে **প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স** বলা হয়। যেমন : $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2 এর রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2.

(xi) বক্র প্রতিসম বর্গ ম্যাট্রিক্স (*Skew symmetric square matrix*) : যদি A এর রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স = – A হয়, তবে A কে বক্র প্রতিসম বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয় । যেমন : $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

1.2.1. ম্যাট্রিক্সের সমতা *(Equality of matrices)*

যদি এবং কেবল যদি দুইটি ম্যাট্রিক্সের আকার সমান হয় এবং একটির ভুক্তি অপরটির অনুরূপ ভুক্তির সমান হয়, তবে ম্যাট্রিক্স দুইটি সমান হবে। যেমন, দুইটি সমান মাত্রার ম্যাট্রিক্স

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varphi & \psi \end{bmatrix}$, যখন $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$, $e = \varphi$ এবং $f = \psi$.

কিন্তু $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, কারণ এদের আকার সমান নয়।

যদি $4x - 6y = 5$ এবং $7x + 9y = 13$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স আকারে আমরা লেখতে পারি $\begin{bmatrix} 4x - 6y \\ 7x + 9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$

1.2.2. ম্যাট্রিক্স এর যোগ

দুইটি ম্যাট্রিক্স যদি একই আকারের হয়, তবে তাদের যোগ করা যায়। A এবং B এর উভয়ে $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স হলে,

$(A + B)$ ও হবে $m \times n$ ম্যাট্রিক্স যার ভুক্তি হবে $m \times n$ সংখ্যক।

নিয়ম : A এবং B যোগ করতে হলে, A এর প্রত্যেক ভুক্তির সাথে B এর অনুরূপ ভুক্তি যোগ করতে হবে।

উদাহরণ। $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে , $A + B$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -1+0 & 3+(-4) \\ 3+5 & 6+3 & -4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 8 & 9 & -5 \end{bmatrix}$.

মন্তব্য: A ও B এর উভয়ে 2×3 আকারের ম্যাট্রিক্স। সুতরাং $A + B$ হলো 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং এর ভুক্তির সংখ্যা 2×3.

1.2.3. ম্যাট্রিক্স এর বিয়োগ

যদি দুইটি ম্যাট্রিক্স একই আকারের হয়, তবে একটি থেকে অপরটি বিয়োগ করা যায়। যদি A ও B দুইটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $A - B$ নির্ণয় করতে হলে, A এর প্রত্যেকটি ভুক্তি থেকে B এর প্রত্যেকটি অনুরূপ ভুক্তি বিয়োগ করতে হবে।

1.2.4. ধ্রুব সংখ্যা দ্বারা ম্যাট্রিক্সের গুণন

একটি ধ্রুব সংখ্যা K দ্বারা A ম্যাট্রিক্সকে গুণ করতে হলে, A এর প্রত্যেকটি ভুক্তিকে K দ্বারা গুণ করতে হবে।

1.2.5. ম্যাট্রিক্সের গুণন *(Multiplication of matrices)*

দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B থেকে AB কেবল তখনই নির্ণয় করা যায়, যখন A এর কলামের সংখ্যা B এর সারি সংখ্যার সমান হয়। অর্থাৎ, $m \times p$ ম্যাট্রিক্স ও $p \times n$ ম্যাট্রিক্সের গুণফল নির্ণয় করা সম্ভব।

নিয়ম : (i) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রত্যেকটি ভুক্তিকে B ম্যাট্রিক্সের প্রথম কলামের অনুরূপ প্রত্যেকটি ভুক্তি দিয়ে গুণ করতে হবে। এ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি AB ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রথম ভুক্তি। অনুরূপভাবে প্রথম ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির ভুক্তিগুলিকে যথাক্রমে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলি দ্বারা গুণ করে AB এর প্রথম সারির দ্বিতীয় ভুক্তি বের করতে হবে। এভাবে অগ্রসর হয়ে AB এর প্রথম সারির সব ভুক্তি নির্ণয় করা যায়।

(ii) নিয়ম (i) এর প্রক্রিয়ায় AB এর সব সারি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় কর।

প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$.

সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0-4 & 3+0-12 \\ -3-8-2 & 9+0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$.

আবার $BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1+9 & 0-6 & 2-3 \\ 4+0 & 0+0 & -8+0 \\ 2+18 & 0-12 & -4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 4 & 0 & -8 \\ 20 & -12 & -10 \end{bmatrix}. \quad \therefore AB \neq BA.$$

মন্তব্য : ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে গুণনের বিনিময় বিধি প্রযোজ্য নয়।

প্রশ্নমালা 1.1

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ হলে, $2A$ ও $A + B$ এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে, $3A + 4B$ নির্ণয় কর। [ব. '০৪]

3. $A = [20 \quad 17 \quad 11]$ এবং $B = [32 \quad 57 \quad 23]$ হলে, $A + B$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $3A - 5B$ নির্ণয় কর। [কু. '০৫]

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$, $A - B$ এবং AB. [রা. '০৫]

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ হলে, AB নির্ণয় কর।

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $AB \neq BA$. [দি. '১০]

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় কর।

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, (i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [য. '১৩]

(ii) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, BA এর মান নির্ণয় কর।

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ও $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, AB এবং BC নির্ণয় কর।

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $AB \neq BA$. [ঢা'০৮; সি. য. '১২; দি. '১৩]

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও CA নির্ণয় কর।

16. যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -16 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর মান বের কর।

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB = BA$. [ঢা. '০৫; চ. '০৮]

18. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB \neq BA$.

19. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 6]$ হলে, $(AB)C$ নির্ণয় কর।

[দি. কু. '১২; য. ব. '১০; রা. '১১; রা. ঢা. '১৩]

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(AB)C = A(BC)$.

[য. চ. '১১; কু '১০; ব. সি. '১৩]

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $AB = AC$, (ii) $A(BC) = (AB)C$,

(iii) $A(B + C) = AB + AC$, (iv) $(A + B)C = AC + BC$.

22. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর।

23. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 5A + 6.\mathrm{I}$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ঢা. '০৭; ব. '১২; কু. '১৩]

24. ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^3 - 2A^2 - \mathrm{I}$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. [সি. '০৬]

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^3 - 2A^2 + A - 2.\mathrm{I}$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. '১২]

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 4A - 5.\mathrm{I}$ নির্ণয় কর, যেখানে $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. [চ. '১৩]

27. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, $AB = BA = \mathrm{I}_3$.

[ব. '০৮; কু. '০৯; ঢা. '১০]

নির্ণায়ক :

1.3.1. নির্ণায়কের ধারণা

মনে করি, $a_1x + b_1 = 0$....... (i) এবং $a_2x + b_2 = 0$ ...... (ii), যেখানে a_1, b_1, a_2, b_2 ধ্রুবক।

(i) সমীকরণ থেকে আমরা পাই $x = -\frac{b_1}{a_1}$.

এখন x এর মান (ii) সমীকরণকে সিদ্ধ করলে আমরা পাই $a_2 (-\frac{b_1}{a_1}) + b_2 = 0$

অর্থাৎ, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ...... (iii)

তাহলে, (iii) হলো ঐ শর্ত যার সাপেক্ষে x এর একই মান দ্বারা (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটির উভয়ে সিদ্ধ হয়।

(iii) এর বামপক্ষের রাশিকে বলা হয় নির্ণায়ক এবং সাধারণত $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ আকারে লেখা হয়।

a_1, a_2, b_1, b_2 কে উপরের নির্ণায়কের ভুক্তি বলা হয়।

ভুক্তিগুলির আনুভূমিক *(horizontal)* বিন্যাসকে সারি ও উলম্ব বিন্যাসকে **স্তম্ভ বা, কলাম** (*column*) বলে।

আমরা জানি, একটি ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান হলে, ঐ ম্যাট্রিক্সকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

মনে করি, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স। ভুক্তিগুলি একই রেখে এবং তাদের অবস্থান পরিবর্তন না করে

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ আকারে লেখলে এটিকে প্রদত্ত বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বা, সংক্ষেপে নির্ণায়ক বলা হয়।

একটি নির্ণায়কের **সারি** *(Row)* সংখ্যা এবং **স্তম্ভ বা কলাম** *(Column)* সংখ্যার উভয়ে 2 হলে, ঐ নির্ণায়ককে **দ্বিতীয় আকারের (*Second order*)** নির্ণায়ক বলে।

নির্ণায়ক হচ্ছে একটি বিশেষ আকারে লিখিত বর্গ ম্যাট্রিক্সের সংখ্যা রাশি।

আবার নিচের তিনটি সমীকরণ (x ও y সম্বলিত) বিবেচনা করি :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ .... (iii)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (iv)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ .... (v)

(iv) এবং (v) সমীকরণদ্বয় সমাধান করে আমরা পাই

$$\frac{x}{b_2c_3 - b_3c_2} = \frac{-y}{a_2c_3 - a_3c_2} = \frac{1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\therefore x = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \quad y = \frac{-(a_2c_3 - a_3c_2)}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

তাহলে, x ও y এর জন্য প্রাপ্ত মান দ্বারা যদি (iii) সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তবে আমরা পাই

$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$

বা, $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ ...... (vi)

[দ্বিতীয় আকারের নির্ণায়কের সাহায্যে]

(vi) এর বামপক্ষকে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ বা, $(a_1b_2c_3)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি তৃতীয় আকারের *(Third order)* নির্ণায়ক।

মন্তব্য : তৃতীয় আকারের নির্ণায়ককে 3×3 বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বলা হয়।

1.3.2. নির্ণায়কের পদ *(terms)*, মুখ্য কর্ণ *(Principal or leading diagonal)* এবং মাধ্যমিক কর্ণ *(Secondary diagonal)*

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের ভুক্তি a_1, b_1, c_1 ইত্যাদি থেকে প্রাপ্ত $a_1\, b_2\, c_3$, $a_1\, b_3\, c_2$ ইত্যাদি গুণফলকে নির্ণায়কের পদ *(terms)* বলা হয়।

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ক লক্ষ করলে দেখা যাবে a_1, b_2, c_3 ভুক্তিগুলি একটি কর্ণ এবং a_3, b_2, c_1 ভুক্তিগুলি অপর একটি কর্ণ গঠন করে। প্রথম কর্ণকে মুখ্য কর্ণ এবং এর ভুক্তিগুলির গুণফল, অর্থাৎ $a_1b_2c_3$ কে মুখ্য পদ বলা হয়। দ্বিতীয় কর্ণকে মাধ্যমিক কর্ণ এবং এর ভুক্তিগুলির গুণফল, অর্থাৎ $a_3b_2c_1$ কে মাধ্যমিক পদ বলে।

1.4. নির্ণায়কের বিস্তৃতি *(Expansion of determinant)*

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$ [অনু : 5.8 থেকে]

$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1).$

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের বিস্তৃতিতে আমরা লক্ষ করেছি :

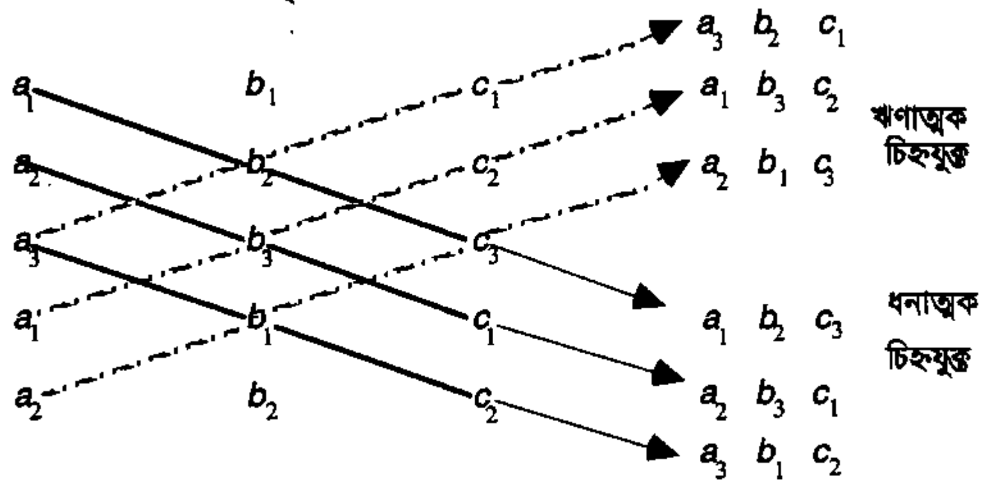
(i) প্রথম সারির ভুক্তি 3টি দ্বারা যথাক্রমে তিনটি দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে গুণ করা হয়েছে। এ গুণফলগুলির আগে পর্যায়ক্রমে যোগ ও বিয়োগ চিহ্ন বসিয়ে [প্রথম গুণফল থেকে শুরু করে] বীজগণিতীয় সমষ্টি নেয়া হয়েছে। এ বীজগণিতীয় সমষ্টিই প্রদত্ত নির্ণায়কের মান।

(ii) প্রথম সারির ভুক্তি দ্বারা ঐ দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে গুণ করা হয়েছে যার মধ্যে প্রথম সারির সংশ্লিষ্ট ভুক্তিটি নেই, অর্থাৎ সংশ্লিষ্ট ভুক্তিটি যে সারি ও কলামে অবস্থিত ঐ সারি ও কলাম বাদ দিয়ে যে দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ক গঠিত হয়েছে।

উপরের নিয়ম বার বার প্রয়োগ করে যে কোনো পর্যায়ের নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়।

মন্তব্য : কলামের ভুক্তিগুলি দ্বারা গুণ করেও একই প্রক্রিয়ায় নির্ণায়কের মান বের করা যায়।

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের বিস্তৃতি (সহজ পদ্ধতি) ঃ



নিয়ম : নির্ণায়কের তিনটি সারি পর পর লিখে এরপর আবার প্রথম ও দ্বিতীয় সারি লেখা হয়েছে। তিনটি ভুক্তির ভিতর দিয়ে যায় এরূপ রেখাগুলি নিচ থেকে উপরে এবং উপর থেকে নিচে টানা হলো (চিত্র অনুযায়ী)। প্রত্যেকটি রেখায় যে ভুক্তিগুলি আছে তার গুণফল নির্ণয় করা হয়েছে। উপর থেকে নিচে টানা রেখার ক্ষেত্রে গুণফলগুলি (+) চিহ্নযুক্ত এবং নিচ থেকে উপরে টানা রেখার ক্ষেত্রে গুণফলগুলি (–) চিহ্নযুক্ত করতে হবে। যেমন, কোনো গুণফল ঋণাত্মক হলে, তা (–) চিহ্নযুক্ত করলে ধনাত্মক হবে। এরপর গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি হলো প্রদত্ত নির্ণায়কের মান। যেমনঃ

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর মান D দ্বারা সূচিত করা হলে,

$D = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3)$, যখন a_1, b_1, c_1 ইত্যাদির প্রত্যেকে ধনাত্মক।

1.5.1. নির্ণায়কের অনুরাশি (*Minor*) ও সহগুণক(*Cofactor*)

নির্ণায়কের অনুরাশি (*Minor*) ঃ

মনে করি, $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, যা একটি **দ্বিতীয় আকারের অর্থাৎ 2×2 আকারের নির্ণায়ক।**

এখন a_1 ভুক্তিটি যে সারি ও কলামে অবস্থিত তা বাদ দিয়ে নির্ণায়কে একটিমাত্র ভুক্তি b_2 থাকে যাকে বলা হয় a_1 এর **অনুরাশি (*Minor*)**। তদ্রূপ b_1, a_2, b_2 এর অনুরাশি যথাক্রমে a_2, b_1, a_1. অর্থাৎ, 2×2 আকারের নির্ণায়কের 2×2 বা, 4টি ভুক্তির জন্য 4টি অনুরাশি পাওয়া যায়।

আবার যদি $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হয়, তাহলে, ভুক্তি a_1 যে রাশি ও কলামে অবস্থিত ঐ রাশি ও কলামের ভুক্তিগুলি বাদ দিয়ে বাকি ভুক্তিগুলি (ভুক্তির অবস্থান পরিবর্তন না করে) নিয়ে গঠিত নির্ণায়ককে a_1 এর অনুরাশি বলে।

$\therefore a_1$ এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

তদ্রূপ, c_1, b_2, a_3 ইত্যাদির অনুরাশি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ইত্যাদি।

এক্ষেত্রেও 3×3 আকারের নির্ণায়ক থেকে 9টি ভুক্তির জন্য 9টি অনুরাশি পাওয়া যায়। তবে, এক্ষেত্রে অনুরাশিগুলি $(3-1) \times (3-1)$ বা, 2×2 আকারের নির্ণায়ক হবে। অর্থাৎ 3×3 আকারের (তৃতীয় মাত্রার) নির্ণায়ক থেকে প্রত্যেক ভুক্তির জন্য কেবল একটি অনুরাশি [দ্বিতীয় মাত্রার নির্ণায়ক] পাই।

একটি $m \times m$ আকারের নির্ণায়কের একটি ভুক্তি a_{ij} যদি i তম সারি ও j তম কলামে অবস্থান করে, তবে i তম সারি ও j তম কলামের সব ভুক্তি বাদ দিয়ে নির্ণায়কের বাকি ভুক্তিগুলি (অবস্থান পরিবর্তন না করে) দ্বারা গঠিত $(m-1) \times (m-1)$ আকারের নির্ণায়ককে (i, j)- তম অনুরাশি *(Minor)* বলা হয়।

প্রদত্ত নির্ণায়ক, D এর ভুক্তি a_1, b_1, c_1 এর অনুরাশি যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ এবং } \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.5.2. নির্ণায়কের সহগুণক *(Co–factor)* :

নির্ণায়কের কোনো ভুক্তির **অনুরাশির আগে যথাযথ চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)** বসালে তাকে ঐ ভুক্তির **সহগুণক** *(Co–factor)* বলা হয়।

যথাযথ চিহ্ন নির্ণয়ের উপায় : মনে করি, যে ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় করতে হবে তা প্রদত্ত নির্ণায়কের 2 তম সারি ও 3 তম কলামে অবস্থান করে। এদের যোগফল = $2+3 = 5$ বিধায় সহগুণকের যথাযথ চিহ্ন হবে $(-1)^5$ চিহ্নযুক্ত।

আবার ভুক্তিটি নির্ণায়কের 2 তম সারি ও 2 তম কলামে অবস্থান করলে এর সহগুণকের চিহ্ন হবে $(-1)^{2+2}$ অর্থাৎ, $(-1)^4$ এর চিহ্ন, বা (+) চিহ্নযুক্ত।

কোনো ভুক্তি নির্ণায়কের i-তম সারি ও j-তম কলামে থাকলে ঐ ভুক্তির সহগুণকের চিহ্ন $(-1)^{j+k}$ হবে।

মন্তব্য : n তম আকারের নির্ণায়কের যে কোনো ভুক্তির অনুরাশি ও সহগুণকের উভয়ে $(n-1)$ তম মাত্রার নির্ণায়ক।

উদাহরণ। $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ থেকে b_3 এর অনুরাশি ও সহগুণক নির্ণয় কর।

সমাধান : b_3 ভুক্তিটি নির্ণায়কের 3 তম সারি ও 2 তম কলামে আছে। 3 তম সারি ও 2 তম কলামের ভুক্তিগুলি বাদ দিয়ে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$ আবার $3 + 2 = 5$, যা বিজোড় সংখ্যা।

$\therefore b_3$ এর অনুরাশি ও সহগুণক যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

1.5.3. তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের বিস্তৃতিকে সহগুণক দ্বারা প্রকাশ করা :

মনে করি, $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এখানে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

সাধারণত a_1, b_1, c_1 এর সহগুণককে যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$ ....(i) [অনুচ্ছেদ 1.4 থেকে]

অনুরূপভাবে, দেখানো যায়

$D = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$ (সারি বরাবর বিস্তৃত করে)

$= a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3$ (,, ,, ,, ,,)

$= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ (কলাম বরাবর বিস্তৃত করে)

$= b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3$ (,, ,, ,, ,,)

$= c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$ (,, ,, ,, ,,)

1.6. নির্ণায়কের ধর্মাবলি

(i) যদি একটি তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ককে পুনরায় এমনভাবে লেখা হয় যে এর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারি যথাক্রমে নির্ণীত নির্ণায়কের প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কলাম হয়, তবে প্রদত্ত নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : মনে করি, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

এখন অনুচ্ছেদ 1.4 অনুযায়ী বিস্তৃত করে,

$D = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) = D'$ [পদগুলি পুনর্বিন্যাস করে]

$\therefore D = D'$ [প্রমাণিত]

মন্তব্য : একটি প্রদত্ত নির্ণায়কের কলামকে নির্ণীত নির্ণায়কের সারিতে পরিণত করলেও উপপাদ্যটি সত্য হবে।

(ii) একটি নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি সারি বা দুইটি কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যে নতুন নির্ণায়ক পাওয়া যায় তার মান প্রদত্ত নির্ণায়কের সংখ্যা–সূচক মানের সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। অর্থাৎ প্রদত্ত নির্ণায়কের মান D হলে, নতুন নির্ণায়কের মান $-D$ হবে।

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত নির্ণায়ক, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$ এবং নতুন নির্ণায়ক,

$D' = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [পাশাপাশি ১ম ও ২য় কলামের স্থান বিনিময় করে]

এখন $D = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= -\{ b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)\}$ [পদগুলিকে পুনর্বিন্যাস করে]

$= -D'$ $\quad \therefore D' = -D.$ [প্রমাণিত]

মন্তব্য : এ ধর্মের পর্যায়ক্রমিক প্রয়োগের দ্বারা একটি কলাম বা সারিকে এক অবস্থান থেকে অন্য যে কোনো অবস্থানে নেয়া যায়। একবারে এ প্রক্রিয়া কেবল দুইটি সারি বা কলামে প্রয়োগ করতে হবে।

(iii) কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ হলে ঐ নির্ণায়কের মান 0 (শূন্য) হবে। অর্থাৎ,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$ [এখানে দুইটি কলাম সদৃশ]

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত নির্ণায়কের পাশাপাশি ১ম ও ২য় কলামের স্থান বিনিময় করা হলো। তাহলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -D$$ [(ii) এ বর্ণিত গুণাবলী অনুসারে]

দেখা যাচ্ছে নির্ণায়ক দুইটি একই।

$\therefore D = -D$, বা $2D = 0$, অর্থাৎ $D = 0$. [প্রমাণিত]

(iv) কোনো নির্ণায়কের যে কোনো সারি বা কলামের প্রত্যেকটি ভুক্তিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে ঐ নির্ণায়কের মানকেও একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হবে। অর্থাৎ,

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

প্রমাণ : মনে করি, D ও D' যথাক্রমে ডানপক্ষ ও বামপক্ষের নির্ণায়কের মান। সহগুণকের সংজ্ঞা থেকে দেখানো যায় বামদিকের নির্ণায়কের ভুক্তি ma_1, mb_1, mc_1এর সহগুণক যথাক্রমে ডানপক্ষের নির্ণায়কের ভুক্তি a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক।

এখন $D' = ma_1A_1 + mb_1B_1 + mc_1C_1$এবং $D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ [অনুচ্ছেদ 1.5.3 থেকে]

$\therefore D' = m(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) = mD.$ (প্রমাণিত)

(v) কোনো নির্ণায়কের যে কোনো দুইটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলি পরস্পরের সমানুপাতিক হলে, ঐ নির্ণায়কের মান 0 (শূন্য) হবে।

অর্থাৎ, $$\begin{vmatrix} ma_2 & mb_2 & mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$ যেখানে m ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে করি, $$\begin{vmatrix} m\,a_2 & m\,b_2 & m\,c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D.$$

$$\therefore D = m\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [ধর্ম (iv) থেকে]

$= m \times 0$ [ধর্ম (iii) থেকে]

$= 0.$ (প্রমাণিত)

(vi) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি দুইটি ভুক্তির সমষ্টিরূপে গঠিত হলে ঐ নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : মনে করি, $\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ – কে

যথাক্রমে D_1, D_2, D_3 দ্বারা সূচিত করা হলো।

তাহলে, প্রত্যেকটি নির্ণায়কের প্রথম কলামের ভুক্তিগুলির সহগুণকগুলি একই হবে। এখন প্রথম কলামের সহগুণকগুলিকে যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 দ্বারা সূচিত করলে

$$D_1 = (a_1+\alpha_1)A_1 + (a_2+\alpha_2)A_2 + (a_3+\alpha_3)A_3$$

$$D_2 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad D_3 = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3$$

$$\therefore D_1 = (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3)$$

$$= D_2 + D_3.$$ (প্রমাণিত)

(vii) কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে ঐ নির্ণায়কের অপর একটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলির সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে প্রদত্ত নির্ণায়কের মানের পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : $\begin{vmatrix} a_1 \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [ধর্ম (vi) থেকে]

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm m \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [প্রমাণিত]

[ধর্ম (iii) থেকে]

মন্তব্য : প্রদত্ত নির্ণায়কের সারিগুলিকে r_1, r_2, r_3 দ্বারা সূচিত করে উপরের ধর্ম প্রয়োগ করলে তাদেরকে যথাক্রমে r_1', r_2', r_3' লেখা হয়। কলামের ক্ষেত্রে c_1', c_2', c_3' ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।

1.7. ব্যতিক্রমী (Singular) ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

মনে করি, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স। এখন বর্গ ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিগুলির ক্রম ও অবস্থান পরিবর্তন না করে যে নির্ণায়ক গঠন করা যায়, তা $|a_{ij}|_{m\times m}$

অর্থাৎ, $|A| = |a_{ij}|_{m\times m}$

এখন $|A| = 0$ হলে, $[a_{ij}]_{m\times m}$ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় **ব্যতিক্রমী**।

আবার, $|A| \neq 0$ হলে, $[a_{ij}]_{m\times m}$ ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় **অব্যতিক্রমী**।

যেমন : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স, কারণ $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 12 = 0$

আবার, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ একটি অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স, কারণ $|A| = 15 - 8 = 7$; অর্থাৎ, $|A| \neq 0.$

1.8.1. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স

মনে করি, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, যেখানে $|A| \neq 0.$

এখন B যদি এমন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় যেন $AB = BA = I$, যেখানে I একটি ইউনিট ম্যাট্রিক্স, তাহলে B কে বলা হয় A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স। এটিকে A^{-1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore AA^{-1} = I$, যেখানে I একটি ইউনিট ম্যাট্রিক্স।

1.8.2. বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা

সহগুণক প্রক্রিয়ায় বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে হলে "Transpose ম্যাট্রিক্স এবং Adjoint ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে ধারনা থাকতে হবে।

Transpose ম্যাট্রিক্স : কোনো ম্যাট্রিক্স A এর সারিগুলিকে কলামে এবং কলামগুলিকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে A ম্যাট্রিক্সের Transpose ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A ম্যাট্রিক্সের Transpose ম্যাট্রিক্সকে A^T দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ এর $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

Adjoint ম্যাট্রিক্স : কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণকগুলি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের (ভুক্তিগুলির ক্রম অনুসারে) Transpose ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এর Adjoint Matrix বলা হয় এবং এটিকে **Adj** A দ্বারা সূচিত করা হয়।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স : যেকোনো অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে,

$A.(\text{Adj } A) = |A| . I$, যেখানে I ইউনিট ম্যাট্রিক্স

$\Rightarrow A.(\text{Adj } A) = |A| . AA^{-1}$ [বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা থেকে]

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} \quad [\,|A| \neq 0\,]$$

উদাহরণ 1. একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স থেকে $|A| = ad - bc$, $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$

আমরা জানি, $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

লক্ষ করি : A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} নির্ণয় করতে b ও c এর অবস্থান ঠিক রেখে কেবল চিহ্ন বিপরীত করে এবং a ও d এর অবস্থান বিনিময় করে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সকে $(ad - bc)$ দ্বারা ভাগ করা হয়। এটি শুধুমাত্র 2×2 আকারের ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

উদাহরণ 2. যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-9) + 2(1-6) = 8 - 10 = -2$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি নিম্নরূপ :

$A_{11} = 2 - 3 = -1, \quad A_{12} = -(1-9) = 8, \quad A_{13} = 1 - 6 = -5$

$A_{21} = -(1-2) = 1, \quad A_{22} = 0 - 6 = -6, \quad A_{23} = -(0-3) = 3$

$A_{31} = 3 - 4 = -1, \quad A_{32} = -(0-2) = 2, \quad A_{33} = 0 - 1 = -1$

$|A|$ এর সহগুণক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj\,A}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.8.3. নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান

নির্ণায়কের সাহায্যে যে কোনো সংখ্যক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান করা যায়। আমরা এখানে দ্বিচলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান করার প্রক্রিয়া বিশ্লেষণ করব।

মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ জোটঃ

$$a_1x + b_1y = c_1 \ ..... (i)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \ ..... (ii)$$

x ও y এর সহগগুলি দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে Δ দ্বারা সূচিত করা হলো। অর্থাৎ, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

আবার Δx ও Δy দ্বারা যথাক্রমে $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কদ্বয়কে সূচিত করি।

$$\therefore \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 \end{vmatrix} \quad [\,(i) \text{ ও } (ii) \text{ থেকে}]$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y & b_1 \\ b_2y & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} = x.\Delta \quad [\because \text{দ্বিতীয় নির্ণায়কের মান } 0\,]$$

$\therefore x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ বা, $\dfrac{x}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta}$ অনুরূপভাবে, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ বা , $\dfrac{y}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta}$

সুতরাং $\dfrac{x}{\Delta x} = \dfrac{y}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta}$ ... (iii)

$\therefore x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ এবং $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ অর্থাৎ, (iii) থেকে x ও y এর মান নির্ণয় করা যায়।

মন্তব্য : Δx নির্ণায়কটি গঠন করতে Δ নির্ণায়কের ভুক্তিগুলি (x এর সহগ) এর পরিবর্তে ক্রম অনুসারে ধ্রুবকগুলি বসাতে হবে। আবার Δy গঠন করার সময় Δ নির্ণায়কের ভুক্তিগুলি (y এর সহগ) এর পরিবর্তে ক্রম অনুসারে ধ্রুবকগুলি বসাতে হয়। $\Delta \neq 0$ হলেই সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়। $\Delta = 0$ হলে, সমীকরণ জোটের কোনো অনন্য সমাধান পাওয়া যায় না।

1.8.4. তিনটি চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

প্রদত্ত সমীকরণ হলো ঃ

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

অনুচ্ছেদ 5.13 এ উল্লেখিত প্রক্রিয়ায় $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ হবে যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

এবং $\dfrac{x}{\Delta x} = \dfrac{y}{\Delta y} = \dfrac{z}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta}$, যা থেকে x, y, z এর মান নির্ণয় করা যায়।

মন্তব্য : সমীকরণ জোটের সমাধানের জন্য উপরে বর্ণিত প্রক্রিয়াকে "ক্রেমারের প্রক্রিয়া" *(Cramer's Rule)* বলা হয়।

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর ঃ

$$\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ a & a+c & c \\ b & c & b+c \end{vmatrix}$$

সমাধান : প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} a+b-a-b & a & b \\ a-a-c-c & a+c & c \\ b-c-b-c & c & b+c \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2 - c_3$ ব্যবহার করে]

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -2c & a+c & c \\ -2c & c & b+c \end{vmatrix} = (-2c)\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & a+c & c \\ 1 & c & b+c \end{vmatrix}$$

[অনুচ্ছেদ 1.6 থেকে]

$$= (-2c)\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & -b \\ 1 & c & b+c \end{vmatrix}$$ $[r_2' = r_2 - r_3$ ব্যবহার করে।]

$$= -2c\begin{vmatrix} a & b \\ a & -b \end{vmatrix} = -2c(-ab-ab) = 4abc.$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

সমাধান : $$\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

[১ম, ২য়, ৩য় কলামকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা গুণ করা হয়েছে। এতে অনুচ্ছেদ 1.6 (iv) অনুযায়ী নির্ণায়কটি abc দ্বারা গুণ করা হলো। ফলে মান একই রাখতে নির্ণায়ককে abc দ্বারা ভাগ করতে হয়েছে]

$$= \frac{1}{abc}\cdot(abc)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2 \text{ এবং } c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad [r_2' = r_2 - b\cdot r_1]$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & c-a \\ a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 - c_1]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ a^2 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

মন্তব্য : 1.6 অনুচ্ছেদের (vii) এর ধর্ম একই সঙ্গে একাধিক সারি বা কলামে ব্যবহার করা যায়। তবে কমপক্ষে একটি কলাম বা সারি অপরিবর্তিত রাখতে হবে।

উদাহরণ 3. $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক হলে, প্রমাণ কর যে,

$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0.$

সমাধান : সহগুণকের সংজ্ঞানুসারে,

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2,\quad B_1 = -(a_2c_3 - a_3c_2),\quad C_1 = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$\therefore a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = a_2(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2$$
$$= 0.\ \text{(প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ 4. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর : $5x + 2y - 11 = 0$
$3x + 4y - 1 = 0.$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ হলো : $5x + 2y = 11$
$3x + 4y = 1.$

এখানে $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 42, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -28$

$\therefore x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{42}{14} = 3, \; y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-28}{14} = -2. \qquad \therefore (x, y) = (3, -2)$

প্রশ্নমালা 1.2

1. মান নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 1 – 2)

(i) $\begin{vmatrix} 16 & 5 & 9 \\ 12 & 4 & 7 \\ 17 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$. **(iii)** $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$.

2. (i) $\begin{vmatrix} a+12b & a+13b & a+14b \\ a+14b & a+15b & a+16b \\ a+16b & a+17b & a+18b \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5+p & 1 \\ 1 & 1 & 5+q \end{vmatrix}$.

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$; যেখানে ω এককের যে-কোন একটি জটিল ঘনমূল।

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 3 – 21)

3. (a) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy.$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$ [ব. '১০]

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1).$ [ঢা. '১২; ব. য. '০৯; রা. '১০, '১১]

6. (a) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + x_3.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ [চ. '১০]

7. (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1).$ (b) $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3.$

8. $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y).$

9. $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac).$ [চ. '১৩; য. ঢা. '১০; য. সি. দি. রা. '১২]

10. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$ [কু. '১২]

11. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} x^2 & yz & \overset{zx+z^2}{zx+x^3} \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2.$ [রা. '১৩; য. '০৮]

13. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$ [য. '১২; ঢা. কু. '১৩]

14. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$ [সি. '০৮; ব. '১২]

15. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a).$ [ব. '১১]

16. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b).$ [চ. '০৬]

17. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$ [সি. '০৯; রা. '০৮]

18. $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ [সি. '০৭]

19. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x).$ [ঢা. চ. সি. '১১; দি. '১০, '১৩]

20. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$ [দি. '০৯, '১১]

21. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$ [কু. '০৩]

22. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3.$ [রা. '০৯; সি. '১০, '১৩]

23. $\begin{vmatrix} q+r & p-q & p \\ r+p & q-r & q \\ p+q & r-p & r \end{vmatrix} = 3\,pqr - p^3 - q^3 - r^3.$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

24. (a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & a+b \\ b+c & a-c & a \\ b-c & a+c & b \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$

25. x, y, z এর যে কোনো দুইটি সমান না হলে এবং

$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $1 + xyz = 0.$

26. k এর মান কত হলে, $\begin{bmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে?

27. প্রমাণ কর যে, $\begin{bmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স।

28. যদি $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}.$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AA^{-1} = I_2$

30. নিচের বর্গ ম্যাট্রিক্সগুলির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

31. **সমাধান কর: (i)** $\begin{vmatrix} x+4 & 3 & 3 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 5 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0.$

(iii) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

32. A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক হলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ থেকে প্রমাণ কর যে, $a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0.$

33. সম্প্রসারণ না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0.$$ [ঢা. '০৯; য. '১৩]

34. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

(i) $4x + 3y - 2 = 0$
$x + 2y - 3 = 0;$

(ii) $2x + 3y = 4$
$x - y = 7.$

(iii) $2x + y - z = -4$
$x - y + 3z = 3$
$x + 2y - 4z = 1;$

(iv) $2x + y + z = 0$
$x + y - 3z = 0$
$3x + 2y - 3z = 1;$

(v) $2x - 3y + 4z = 3$
$x + 4y - 5z = 0$
$5x - y + z = 5.$

(vi) $2x + y - 2z = 10$
$3x + 2y + 2z = 1$
$5x + 4y + 3z = 4.$

প্রশ্নমালা 1.3

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(a) A^2 এর মান নির্ণয় কর।

(b) $A^2 + 2A - 11I$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. [রা. '১২]

(c) $A^2.A$ এবং $A.A^2$ এর সাহায্যে A^3 এর মান নির্ণয় কর। মান দুইটি কী পরস্পর সমান? যদি না হয়, তবে কেন?

2. (a) ম্যাট্রিক্সের *Adjoint* বলতে কি বোঝায় ?

(b) A এর (1, 1) তম, (1, 2) তম এবং (1, 3) তম সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 হলে, সহগুণকগুলির মান নির্ণয় কর।

(c) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$. $|A|$ এর মান নির্ণয় কর।

3. (a) বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলতে কি বোঝায় ?

(b) দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|A|$ এর মান নির্ণয় কর।

(c) A^{-1} নির্ণয় করে দেখাও যে, $AA^{-1} = I_3$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

4. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B$ এর সমান —

(*a*) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

5. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB হলো :

(*a*) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

6. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এর সমান —

(*a*) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a-5 & 3 \\ -3 & a+5 \end{vmatrix}$ এর মান 0 হলে, a এর মান —

(*a*) 4, – 4 (*b*) $\sqrt{37}, -\sqrt{37}$

(*c*) 5, 3 (*d*) 0, 4.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ এর মান —

(*a*) – 5 (*b*) 10 (*c*) 0 (*d*) 8.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, যখন x এর সমান —

(*a*) 2 (*b*) 5 (*c*) 1 (*d*) 0.

10. $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান —

(*a*) $abc(a+b)(b+c)(c+a)$ (*b*) $(a+b)(b+c)(c+a)$

(*c*) 0 (*d*) abc.

11. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, নিচে A ও B এর গুণফল দেওয়া আছে। কোনটি সঠিক —

(*a*) $\begin{bmatrix} -19 & -6 \\ 23 & -3 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 19 & 6 \\ -23 & 3 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} x+4 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে, যদি x এর মান —

(*a*) 4 (*b*) 0 (*c*) 12 (*d*) – 4

13. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, Adj. A হবে —

(*a*) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ হলে, A^{-1} হবে —

(*a*) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1.1

1. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 10 & 2 & -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$. **2.** $\begin{bmatrix} 10 & -23 & -9 \\ 9 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. **3.** [52 74 34]. **4.** $\begin{bmatrix} 44 & -18 & -13 \\ -5 & -12 & -26 \\ -10 & -8 & 19 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 11 & 15 \end{bmatrix}$. **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -33 & 56 & 43 \\ 16 & 15 & 10 \\ 24 & 74 & 46 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. **10.** $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 15 & 15 & -2 \\ 25 & -4 & 11 \\ -7 & -15 & 2 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. **15.** $\begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **16.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -8 \\ -2 & -11 & 0 \\ -8 & -78 & -16 \end{bmatrix}$.

19.(b) $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$. **22.** $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 5 & 12 & 8 \\ 8 & 1 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$. **25.** $\begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$. **26.** [0]

প্রশ্নমালা 1.2

1. (i) -1, **(ii)** 1, **(iii)** $4xyz$. **2 (i)** 0, **(ii)** $16 + 4(p+q) + pq$, **(iii)** -4.

24. (a) $-2(a+b)(a-b)^2$; **(b)** $a(a-b)(b-c)(c-a)$. **26.** -6; **30. (i)** $\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -13 \\ -3 & 6 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ **31. (i)** 1, -1, -12; **(ii)** 4.

(iii) $x = -9, \pm\sqrt{3}$. **34. (i)** $x = -1, y = 2$; **(ii)** $x = 5, y = -2$; **(iii)** সমাধান নেই।

(iv) $x = 4, y = -7, z = -1$; **(v)** $x = y = z = 1$. **(vi)** $x = 1, y = 2, z = -3$.

প্রশ্নমালা 1.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}$ (b) 0. **2. (a)** -48 (b) $-40, 30, -4$. **3. (a)** 36 **(b)** $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 20 \\ 8 & 0 & -4 \\ 1 & 9 & -15 \end{bmatrix}$

4. *c*. **5.** *b*. **6.** *a*. **7.** *a*. . **8.** *c*. **9.** *c*. **10.** *c*. **11.** *b* ও *d*. **12.** *a*. **13.** *b*. **14.** 0.