1(a) $\sin(-1230°) - \cos\{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\}$

$= -\sin 1230° - \cos\{2n\pi + (\pi + \frac{\pi}{3})\}$

$= -\sin(3.360° + 150°) - \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$

$= -\sin 150° - (-\cos\frac{\pi}{3})$

$= -\sin(180° - 30°) + \cos\frac{\pi}{3}$

$= -\sin 30° + \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ (Ans.)

1(b) $\sin 780° \cos 390° + \sin(-330°)\cos(-300°)$ [চ.'০১]

$= \sin 780° \cos 390° - \sin 330° \cos 300°$

$= \sin(2.360° + 60°)\cos(360° + 30°) - \sin(360° - 30°)\cos(360° - 60°)$

$= \sin 60° \cos 30° - (-\sin 30°)\cos 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (Ans.)

2. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$

[ঢা. '০২; সি. '০৯; মা.বো.'০৯; ব.'১০; য.'১১]

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}) + \sin^2(\pi + \frac{\pi}{7}) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7})$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}$

$= 2(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}) = 2.1 = 2$ (Ans.)

2.(b) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= \sin^2(\pi - \frac{\pi}{18}) + \sin^2(\pi - \frac{3\pi}{8}) + \cos^2(2\pi + \frac{\pi}{18}) + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= \sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= (\sin^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{\pi}{18}) + (\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8})$

$= 1 + 1 = 2$ (Ans.)

3.(a) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$

$= \sec^2(\pi - \frac{3\pi}{17}) - \sec^2(2\pi + \frac{5\pi}{17}) + \cot^2(\pi + \frac{7\pi}{34}) - \cot^2(\pi - \frac{11\pi}{34})$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \cot^2\frac{7\pi}{34} - \cot^2\frac{11\pi}{34}$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \cot^2(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{17}) - \cot^2(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{17})$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \tan^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}$

$= (\sec^2\frac{3\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}) - (\sec^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{5\pi}{17})$

$= 1 - 1 = 0$ (Ans.)

3(b) $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \cdots + \tan 165°$

$= \tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \tan 105° + \tan 135° + \tan 165°$

$= \tan 15° + \tan 45° + \tan(90° - 15°) + \tan(90° + 15°) + \tan(180 - 45°) + \tan(180° - 15°)$

$= \tan 15° + \tan 45° + \cot 15° - \cot 15° - \tan 45° - \tan 15° = 0$ (Ans.)

3(c) $\cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + \ldots\ldots + \cos^2 75°$

$= \cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + \cos^2 45° + \cos^2 55° + \cos^2 65° + \cos^2 75°$

$= \cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \cos^2(90° - 35°) +$

$\cos^2(90°-25°)+\cos^2(90°-15°)$
$=\cos^2 15°+\cos^2 25°+\cos^2 35°+\frac{1}{2}+$
$\sin^2 35°+\sin^2 25°+\sin^2 15°$
$=(\sin^2 5°+\cos^2 5°)+(\sin^2 25°+\cos^2 25°)$
$+(\sin^2 35°+\cos^2 35°)+\frac{1}{2}$
$=1+1+1+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ (Ans.)

4. প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, [দি.'১৪;' য.'১২; চ.'০৯]
$\sin\theta=\frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta=\frac{13}{5}$, $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

$\therefore \sec\theta=-\frac{13}{12}$ এবং

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{13}\times(-\frac{13}{12})=-\frac{5}{12}$

$\Rightarrow \cot\theta=-\frac{12}{5}$

এখন, $\frac{\tan\theta+\sec(-\theta)}{\cot\theta+\operatorname{cosec}(-\theta)}=\frac{\tan\theta+\sec\theta}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}$

$=\frac{\frac{-5}{12}+\frac{-13}{12}}{\frac{-12}{5}-\frac{13}{5}}=\frac{\frac{-5-13}{12}}{\frac{-12-13}{5}}$

$=(-\frac{18}{12})\times(-\frac{5}{25})=\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

$\therefore \frac{\tan\theta+\sec(-\theta)}{\cot\theta+\operatorname{cosec}(-\theta)}=\frac{3}{10}$

5. সমাধান ঃ

(a) $\sin x+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi+x)+\cdots\cdots$ $(n+1)$তম পদ পর্যন্ত
$=\sin x-\sin x+\sin x-\sin x+\cdots\cdots$ $(n+1)$ তম পদ পর্যন্ত
$n=1$ হলে, $(1+1)$ বা ২য় পদ পর্যন্ত যোগফল
$=\sin x-\sin x=0$

$n=3$ হলে, $(3+1)$ বা ৪র্থ পদ পর্যন্ত
যোগফল $=\sin x-\sin x+\sin x-\sin x=0$
তদ্রুপ, n যেকোন বিজোড় সংখ্যা হলে নির্ণেয় যোগফল = 0
আবার, $n=2$ হলে $(2+1)$ বা ৩য় পদ পর্যন্ত
যোগফল $=\sin x-\sin x+\sin x=\sin x$
$n=4$ হলে, $(4+1)$ বা ৫ম পদ পর্যন্ত যোগফল
$=\sin x-\sin x+\sin x-\sin x+\sin x$
$=\sin x$
তদ্রুপ, nযেকোন জোড় সংখ্যা হলে নির্ণেয় যোগফল = $\sin x$

5(b) $\tan\theta+\tan(\pi+\theta)+\tan(2\pi+\theta)+\cdots$
$+\tan(n\pi+\theta)$
$=\tan\theta+\tan\theta+\tan\theta+\cdots$ n তম পদ পর্যন্ত
$=(n+1)\tan\theta$ (Ans.)

6(a) দেওয়া আছে, $\theta=\frac{\pi}{20}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=10\theta$

L.H.S.= $\cot\theta\cot3\theta\cot5\theta\cot7\theta$
$\cot9\theta\cot11\theta\cot13\theta\cot15\theta\cot17\theta$
$\cot19\theta$
$=\cot\theta\cot3\theta\cot5\theta\cot7\theta\cot9\theta$
$\cot(10\theta+\theta)\cot(10\theta+3\theta)$
$\cot(10\theta+5\theta)\cot(10\theta+7\theta)$
$\cot(10\theta+9\theta)$
$=\cot\theta\cot3\theta\cot5\theta\cot7\theta\cot9\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)\cot(\frac{\pi}{2}+3\theta)\cot(\frac{\pi}{2}+5\theta)$
$\cot(\frac{\pi}{2}+7\theta)\cot(\frac{\pi}{2}+9\theta)$

$=\frac{1}{\tan\theta\tan3\theta\tan5\theta\tan7\theta\tan9\theta}(-\tan\theta)$
$(-\tan3\theta)(-\tan5\theta)(-\tan7\theta)(-\tan9\theta)$
$=-1=$ R.H.S.

6. (b) দেওয়া আছে, $\theta=\frac{\pi}{28}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=14\theta$

L.H.S $=\tan\theta\tan3\theta\tan5\theta\tan7\theta$
$\tan9\theta\tan11\theta\tan13\theta$
$=\tan\theta\tan3\theta\tan5\theta\tan7\theta$
$\tan(14\theta-5\theta)\tan(14\theta-3\theta)$
$\tan(14\theta-\theta)$

$= \frac{1}{\tan\theta\tan3\theta\tan5\theta}\tan\frac{\pi}{4}$

$\tan(\frac{\pi}{2}-5\theta)\ \tan(\frac{\pi}{2}-3\theta)\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$= \frac{1}{\tan\theta\tan3\theta\tan5\theta}.1.\tan5\theta.\ \tan3\theta.\ \tan\theta$

$= 1 = \text{R.H.S.}$

(c) $\cos\frac{\pi}{11}.\cos\frac{2\pi}{11}.\cos\frac{3\pi}{11}\cdots\cos\frac{10\pi}{11} = -2^n$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

ধরি, $\frac{\pi}{11}=\theta \Rightarrow 11\theta=\pi \Rightarrow 6\theta+5\theta=\pi$

এখন, $\cos\frac{\pi}{11}.\cos\frac{2\pi}{11}.\cos\frac{3\pi}{11}\cdots\cos\frac{10\pi}{11}$

$= (\cos\theta.\cos2\theta.\cos3\theta.\cos4\theta.\cos5\theta)$
$(\cos6\theta.\cos7\theta.\cos8\theta.\cos9\theta.\cos10\theta)$

$= (\cos\theta.\cos2\theta.\cos3\theta.\cos4\theta.\cos5\theta)$
$\{\cos(\pi-5\theta).\cos(\pi-4\theta).\cos(\pi-3\theta).$
$\cos(\pi-2\theta).\cos(\pi-\theta)\}$

$= -\cos^2\theta\cos^2 2\theta\cos^2 3\theta\cos^2 4\theta\cos^2 5\theta$

$= -\cos^2\theta\cos^2 2\theta\cos^2 3\theta\cos^2 4\theta\cos^2 5\theta$

$= -\cos^2\theta\cos^2 2\theta\cos^2 3\theta\cos^2 4\theta\cos^2 5\theta$

$= -(\cos\theta\cos2\theta\cos3\theta\cos4\theta\cos5\theta)^2$

$= -\frac{1}{2^2\sin^2\theta}(2\sin\theta\cos\theta)^2$
$(\cos2\theta\cos3\theta\cos4\theta\cos5\theta)^2$

$= -\frac{1}{2^2\sin^2\theta}(\sin2\theta)^2$
$(\cos2\theta\cos3\theta\cos4\theta\cos5\theta)^2$

$= -\frac{1}{2^2.2^2\sin^2\theta}(2\sin2\theta\cos2\theta)^2$
$(\cos3\theta\cos4\theta\cos5\theta)^2$

$= -\frac{1}{2^4.2^2\sin^2\theta}(2\sin4\theta\cos4\theta)^2$
$(\cos3\theta\ \cos5\theta)^2$

$= -\frac{1}{2^6\sin^2\theta}(\sin8\theta\ \cos3\theta\ \cos5\theta)^2$

$= -\frac{1}{2^6\sin^2\theta}\{\sin(\pi-3\theta)\cos3\theta\cos5\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^6\sin^2\theta}\{\sin3\theta\cos3\theta\cos5\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^6.2^2\sin^2\theta}\{2\sin3\theta\cos3\theta\cos5\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^8\sin^2\theta}\{\sin6\theta\cos5\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^{10}\sin^2\theta}\{2\sin6\theta\cos5\theta\}^2$

উ: $n = -8$

$= -\frac{1}{2^{10}\sin^2\theta}\{\sin11\theta+\cos\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^{10}\sin^2\theta}\{\sin\pi+\sin\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^{10}\sin^2\theta}\{0+\sin\theta\}^2$

$= -\frac{1}{2^{10}\sin^2\theta}\sin^2\theta = -\frac{1}{2^{10}} = -2^{-10}$

$\therefore\ -2^n = -2^{-10} \Rightarrow 2^n = 2^{-10} \Rightarrow n = -10$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা

7. মান নির্ণয় কর :

(a) $\tan(-1590°) = -\tan(1590°)$ (১)

$= -\tan(4.360°+150°) = -\tan150°$ (১)

$= -\tan(180°-30°) = +\tan30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (১)

(b) $\cos420°\sin(-300°) - \sin870°\cos570°$

$= \cos420°(-\sin300°) - \sin870°\cos570°$ (১)

$= -\cos(360°+60°)\sin(360°-60°)$
$-\sin(2.360°+150°)\cos(2.360°-150°)$

$= -\cos60°(-\sin60°) - \sin150°\cos150°$ (১)

$= \cos60°\sin60° - \sin(180°-30°)$
$\cos(180°-30°)$

$= \cos60°\sin60° - \sin30°(-\cos30°)$

$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.) (১)

8. $\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\frac{31\pi}{24}+\cos^2\frac{37\pi}{24}$

$=\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2(\frac{\pi}{2}+\frac{19\pi}{24})$
$+\cos^2(3.\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24})$

$=\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{19\pi}{24}$ (১)

$=(\sin^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{\pi}{24})+(\sin^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24})$

$=1+1=2$ (Ans.) (১)

9(a) $\cos^2 25°+\cos^2 35°+\cos^2 45°+\cos^2 55°+\cos^2 65°$

$=\cos^2 25°+\cos^2 35°+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\cos^2(90°-35°)+\cos^2(90°-25°)$

$=\cos^2 25°+\cos^2 35°+\frac{1}{2}+\sin^2 35°+\sin^2 25°$ (১)

$=(\sin^2 25°+\cos^2 25°)+\frac{1}{2}+(\sin^2 25°+\cos^2 25°)$

$=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$ (Ans.) (১)

9(b) $\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\cdots+\sin^2 80°$

$=\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\sin^2 50°+\sin^2 60°+\sin^2 70°+\sin^2 80°$

$=\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\sin^2(90°-40°)+\sin^2(90°-30°)+\sin^2(90°-20°)+\sin^2(90°-10°)$

$=\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\cos^2 40°+\cos^2 30°+\cos^2 20°+\cos^2 10°$ (১)

$=(\sin^2 10°+\cos^2 10°)+(\sin^2 20°+\cos^2 20°)+(\sin^2 30°+\cos^2 30°)+(\sin^2 40°+\cos^2 40°)$

$=1+1+1+1=4$ (Ans.) (১)

10. $\tan\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$\tan\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

$\therefore\ \sec\theta=-\sqrt{1+\tan^2\theta}=-\sqrt{1+\frac{9}{16}}$ (১)

$=-\sqrt{\frac{25}{16}}=-\frac{5}{4}\quad\therefore\cos\theta=-\frac{4}{5}$ এবং

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{3}{4}(-\frac{4}{5})=-\frac{3}{5}$ (১)

এখন, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}{-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}$

$=-\frac{3+4}{5}\times\frac{4}{-5+3}=-\frac{7}{5}\times\frac{4}{-2}=\frac{14}{5}$ (Ans.) (১)

11. $\sin\theta=\frac{12}{13}$ এবং $90°<\theta<180°$ হলে দেখাও যে, $\frac{\tan\theta+\sec(-\theta)}{\cot\theta+\operatorname{cosec}(-\theta)}=\frac{10}{3}$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\sin\theta=\frac{12}{13}\Rightarrow\operatorname{cosec}\theta=\frac{13}{12}$ এবং $90°<\theta<180°$,

$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (১)

$=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$

$\therefore\ \sec\theta=-\frac{13}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{12}{13}\times(-\frac{13}{5})=-\frac{12}{5}$

$\Rightarrow \cot\theta = -\frac{5}{12}$ (১)

এখন , $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$ (১)

$= \frac{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}}{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}} = \frac{-25}{5} \times \frac{12}{-5-13}$

$= 5 \times \frac{12}{18} = \frac{10}{3}$ (১)

12. যোগফল নির্ণয় কর: $\cos\theta + \cos(\pi + \theta) + \cos(2\pi + \theta) + \cdots + \cos(n\pi + \theta)$

সমাধান: $\cos\theta + \cos(\pi + \theta) + \cos(2\pi + \theta) + \cdots + \cos(n\pi + \theta)$

$= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cdots + (-1)^n \cos\theta\}$ (১)

$n = 2$ হলে যোগফল $= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta\}$

$= \cos\theta$ (১)

$n = 4$ হলে যোগফল $= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cos\theta\} = \cos\theta$

তদ্রুপ, n যেকোনো জোড় হলে নির্ণেয় যোগফল $= \cos x$

$n = 1$ হলে যোগফল $= \cos\theta + (-\cos\theta) = 0$ (১)

$n = 3$ হলে যোগফল $= \cos\theta + \{-\cos\theta + \cos\theta -$

তদ্রুপ, n যেকোনো বিজোড় হলে নির্ণেয় যোগফল $= 0$ (১)

13. $n \in \mathbb{Z}$ হলে , $\sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ (a) $\sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$

n জোড় সংখ্যা হলে মনে করি, $n = 2m$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$.

$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$

$= \sin\{2m\pi + (-1)^{2m} \frac{\pi}{4}\}$

$= \sin(2m\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (১)

n বিজোড় সংখ্যা হলে মনে করি , $n = 2m + 1$; $m \in \mathbb{N}$

$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$

$= \sin\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1} \frac{\pi}{4}\}$

$= \sin\{2m\pi + (\pi - \frac{\pi}{4})\}$

$= \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Ans.) (১)

14. দেখাও যে , $\tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\frac{7\pi}{12} \tan\frac{11\pi}{12} = 1$

প্রমাণ: $\tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\frac{7\pi}{12} \tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12})$

$= \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \cot\frac{\pi}{12} \cot\frac{5\pi}{12}$ (১)

$= (\tan\frac{\pi}{12} . \cot\frac{\pi}{12})(\tan\frac{5\pi}{12} . \cot\frac{5\pi}{12})$

$= 1.1 = 1$ $[\because \tan\theta.\cot\theta = 1]$ (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন :

15. $A = \frac{\cot(-\theta) + \operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta + \sin(-\theta)}$ এবং $f(\theta) = \tan\theta$

(a) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ: $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

$= \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12}) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12})$

$= \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}$

$+\cos^2\frac{3\pi}{12}+\cos^2\frac{5\pi}{12}$

$=(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12})+(\sin^2\frac{3\pi}{12}+\cos^2\frac{3\pi}{12})$

$+(\sin^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{5\pi}{12})$

$=1+1+1=3$ (Ans.)

(b) $\cot\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ: যেহেতু $\cot\theta=\frac{3}{4}\Rightarrow\tan\theta=\frac{4}{3}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

$\therefore \sec\theta=-\sqrt{1+\tan^2\theta}=-\sqrt{1+\frac{16}{9}}$

$=-\sqrt{\frac{25}{9}}=-\frac{5}{3}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}$ এবং

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{4}{3}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{5}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta=-\frac{5}{4}$

এখন, $\frac{\cot(-\theta)+\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta+\sin(-\theta)}=\frac{-\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{-\frac{3}{4}+(-\frac{5}{4})}{-\frac{3}{5}-\frac{-4}{5}}=\frac{-3-5}{4}\times\frac{5}{-3+4}$

$=-\frac{40}{4}=-10$ (Ans.)

(c) $4n\theta=\pi$ হলে দেখাও যে, $f(\theta)f(2\theta)f(3\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots f\{(2n-1)\theta\}=1$

প্রমাণ: $f(\theta)f(2\theta)f(3\theta)\cdots\cdots f\{(2n-1)\theta\}$

$=\tan\theta.\tan2\theta.\tan3\theta.\cdots\tan(2n-1)\theta$

এখানে, পদসংখ্যা $=2n-1$, যা বিজোড় সংখ্যা।

$\frac{2n-1+1}{2}$ অর্থাৎ n তম পদ মধ্যপদ।

$\therefore$ মধ্যপদ $=\tan n\theta=\tan\frac{\pi}{4}=1$ [$\because 4n\theta=\pi$]

$\tan\theta.\tan(2n-1)\theta=\tan\theta.\tan(2n\theta-\theta)$

$=\tan\theta.\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$ [$\because 4n\theta=\pi$]

$=\tan\theta.\cot\theta=1$

$\tan2\theta.\tan(2n-2)\theta=\tan2\theta.\tan(2n\theta-2\theta)$

$=\tan2\theta.\tan(\frac{\pi}{2}-2\theta)$ উ: -10

$=\tan2\theta.\cot2\theta=1$

অনুরূপভাবে, $\tan3\theta.\tan(2n-3)\theta=1$

$\tan4\theta.\tan(2n-4)\theta=1,\cdots$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ, মধ্যপদ হতে সমদূরবর্তী পদ দুইটির গুণফল = 1

$\therefore f(\theta)f(2\theta)f(3\theta)\cdots\cdots f\{(2n-1)\theta\}=1$

প্রশ্নমালা VII B

1. মান নির্ণয় কর: (a) $\tan 105°$ (b) $\operatorname{cosec} 165°$

(a) $\tan105°=\tan(60°+45°)$

$=\frac{\tan60^0+\tan45^0}{1-\tan60^0\tan45^0}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1}$

$=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}$

$=\frac{2(\sqrt{3}+2)}{-2}=-(\sqrt{3}+2)$

1(b) $\operatorname{cosec}165°=\operatorname{cosec}(90°+75°)$

$=\sec75°=\frac{1}{\cos75^0}=\frac{1}{\cos(45^0+30^0)}$

$=\frac{1}{\cos45^0\cos30^0-\sin45^0\sin30^0}$

$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

$=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3-1}$

$=\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{3}$

$+\cos^2\frac{3\pi}{12}+\cos^2\frac{5\pi}{12}$

$=(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12})+(\sin^2\frac{3\pi}{12}+\cos^2\frac{3\pi}{12})$

$+(\sin^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{5\pi}{12})$

$=1+1+1=3$ (Ans.)

(b) $\cot\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ: যেহেতু $\cot\theta=\frac{3}{4}\Rightarrow\tan\theta=\frac{4}{3}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

$\therefore\sec\theta=-\sqrt{1+\tan^2\theta}=-\sqrt{1+\frac{16}{9}}$

$=-\sqrt{\frac{25}{9}}=-\frac{5}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{3}{5}$ এবং

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{4}{3}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ \text{cosec}\theta=-\frac{5}{4}$

এখন, $\frac{\cot(-\theta)+\text{cosec}\theta}{\cos\theta+\sin(-\theta)}=\frac{-\cot\theta+\text{cosec}\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{-\frac{3}{4}+(-\frac{5}{4})}{-\frac{3}{5}-\frac{-4}{5}}=\frac{-3-5}{4}\times\frac{5}{-3+4}$

$=-\frac{40}{4}=-10$ (Ans.)

(c) $4n\theta=\pi$ হলে দেখাও যে, $f(\theta)f(2\theta)f(3\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots f\{(2n-1)\theta\}=1$

প্রমাণ: $f(\theta)f(2\theta)f(3\theta)\cdots\cdots f\{(2n-1)\theta\}$

$=\tan\theta.\tan2\theta.\tan3\theta.\cdots\tan(2n-1)\theta$

এখানে, পদসংখ্যা $=2n-1$, যা বিজোড় সংখ্যা।

$\frac{2n-1+1}{2}$ অর্থাৎ n তম পদ মধ্যপদ।

$\therefore$ মধ্যপদ $=\tan n\theta=\tan\frac{\pi}{4}=1\ [\because 4n\theta=\pi]$

$\tan\theta.\tan(2n-1)\theta=\tan\theta.\tan(2n\theta-\theta)$

$=\tan\theta.\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\ [\because 4n\theta=\pi]$

$=\tan\theta.\cot\theta=1$

$\tan2\theta.\tan(2n-2)\theta=\tan2\theta.\tan(2n\theta-2\theta)$

$=\tan2\theta.\tan(\frac{\pi}{2}-2\theta)$ উ: −10

$=\tan2\theta.\cot2\theta=1$

অনুরূপভাবে, $\tan3\theta.\tan(2n-3)\theta=1$

$\tan4\theta.\tan(2n-4)\theta=1,\cdots$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ,মধ্যপদ হতে সমদূরবর্তী পদ দুইটির গুণফল = 1

$\therefore f(\theta)f(2\theta)f(3\theta)\cdots\cdots f\{(2n-1)\theta\}=1$

প্রশ্নমালা VII B

1. মান নির্ণয় কর : (a) tan 105° (b) cosec 165°

(a) $\tan105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$

$=\frac{\tan60^0+\tan45^0}{1-\tan60^0\tan45^0}=\frac{\sqrt3+1}{1-\sqrt3.1}$

$=\frac{(1+\sqrt3)^2}{(1-\sqrt3)(1+\sqrt3)}=\frac{1+2\sqrt3+3}{1-3}$

$=\frac{2(\sqrt3+2)}{-2}=-(\sqrt3+2)$

1(b) $\text{cosec}\,165^\circ=\text{cosec}(90^\circ+75^\circ)$

$=\sec75^\circ=\frac{1}{\cos75^0}=\frac{1}{\cos(45^0+30^0)}$

$=\frac{1}{\cos45^0\cos30^0-\sin45^0\sin30^0}$

$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt2}.\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{\sqrt2}.\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt2}{\sqrt3-1}$

$=\frac{2\sqrt2(\sqrt3+1)}{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}=\frac{2(\sqrt6+\sqrt3)}{3-1}$

$=\frac{2(\sqrt6+\sqrt3)}{2}=\sqrt6+\sqrt3$

2. মান নির্ণয় কর ঃ

(a) $\cos 38°15' \sin 68°15' - \cos 51°45' \sin 21°45'$

$= \cos 38°15' \sin 68°15' - \cos(90° - 38°15') \sin(90° - 68°15')$

$= \cos 38°15' \sin 68°15' - \sin 38°15' \cos 68°15'$

$= \sin(68°15' - 38°15') = \sin 30° = \frac{1}{2}$

2(b) $\cos 69°22' \cos 9°22' + \cos 80°38' \cos 20°38'$

$= \cos 69°22' \cos 9°22' + \cos(90° - 9°22') \cos(90° - 69°22')$

$= \cos 69°22' \cos 9°22' + \sin 9°22' \sin 69°22'$

$= \cos(69°22' - 9°22') = \cos 60° = \frac{1}{2}$

প্রমাণ কর যে ,

3. L.H.S. $= \sin(25° + A)\cos(25° - A) + \cos(25° + A)\cos(115° - A)$

$= \sin(25° + A)\cos(25° - A) + \cos(25° + A)\cos\{90° + (25° - A)\}$

$= \sin(25° + A)\cos(25° - A) - \cos(25° + A)\sin(25° - A)$

$= \sin\{(25° + A) - (25° - A)\}$

$= \sin(25° + A - 25° + A)$

$= \sin 2A =$ R.H.S. (Proved)

4. প্রমাণ কর যে,

(a) L.H.S.$= \sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B)$

$= \sin A(\sin B \cos C - \sin C \cos B) + \sin B(\sin C \cos A - \sin A \cos C) + \sin C(\sin A \cos B - \sin B \cos A)$

$= \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C + \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(b) L.H.S. $= \sin(B + C)\sin(B - C) + \sin(C + A)\sin(C - A) + \sin(A + B)\sin(A - B)$

$= \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(c) L.H.S. $= \sin(135° - A) + \cos(135° + A)$

$= \sin\{180° - (45° + A)\} + \cos\{180° - (45° - A)\}$

$= \sin(45° + A) - \cos(45° - A)$

$= \sin(45° + A) - \cos\{90° - (45° + A)\}$

$= \sin(45° + A) - \sin(45° + A)$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

5. প্রমাণ কর যে,

(a) L.H.S.$= \dfrac{\cos 25^0 - \sin 25^0}{\cos 25^0 + \sin 25^0}$

$= \dfrac{\cos 25^0 (1 - \frac{\sin 25^0}{\cos 25^0})}{\cos 25^0 (1 + \frac{\sin 25^0}{\cos 25^0})} = \dfrac{1 - \tan 25^0}{1 - \tan 25^0}$

$= \dfrac{\tan 45^0 - \tan 25^0}{1 + \tan 45^0 \tan 25^0} = \tan(45° - 25°)$

$= \tan 20° =$ R.H.S. (proved)

5(b) L.H.S.$= \dfrac{\sin 75^0 + \sin 15^0}{\sin 75^0 - \sin 15^0}$

$= \dfrac{\sin(90^0 - 15^0) + \sin 15^0}{\sin(90^0 - 15^0) - \sin 15^0}$

$= \dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} = \dfrac{\cos 15^0 (1 + \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}{\cos 15^0 (1 - \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}$

$= \dfrac{1 + \tan 15^0}{1 - \tan 15^0} = \dfrac{\tan 45^0 + \tan 15^0}{1 - \tan 45^0 \tan 15^0}$

$= \tan(45° + 15°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

6. প্রমাণ কর যে,

(a) $\tan\frac{\pi}{4} = \tan(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5})$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{\tan\frac{\pi}{20}+\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan\frac{\pi}{20}\tan\frac{\pi}{5}}$

$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{20}+\tan\frac{\pi}{5} = 1-\tan\frac{\pi}{20}\ \tan\frac{\pi}{5}$

$\therefore\ \tan\frac{\pi}{20}+\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{\pi}{20}\ \tan\frac{\pi}{5} = 1$

6(b) $\tan(A-B) = -\tan(B-A)$

$= -\tan\{(B-C)+(C-A)\}$

$= -\dfrac{\tan(B-C)+\tan(C-A)}{1-\tan(B-C)\tan(C-A)}$

$\Rightarrow \tan(A-B)-\tan(A-B)\tan(B-C)$
$\tan(C-A) = -\tan(B-C)-\tan(C-A)$

$\therefore\ \tan(B-C)+\tan(C-A)+\tan(A-B)$
$= \tan(B-C)\tan(C-A)\tan(A-B)$

7(a) **L.H.S.** $= 2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$

$= 2(\sin\theta\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\theta)$

$(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\theta)$

$= 2(\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$

$(\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$

$= 2.\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$= \sin^2\theta-\cos^2\theta =$ R.H.S. (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি: **L.H.S.**$= 2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$

$= 2(\sin^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{4})$

$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A-\sin^2 B]$

$= 2(\sin^2\theta-\frac{1}{2}) = 2\sin^2\theta-1$

$= 2\sin^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$= \sin^2\theta-\cos^2\theta =$ R.H.S. (Proved)

7(b) L.H.S.$= \tan(A+B)\tan(A-B)$

$= \dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$

$= \dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B} =$ R.H.S.

7.(c) L.H.S.$= \dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)-\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)+\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$= \left\{\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}-\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\right\} \div$

$\left\{\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}+\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\right\}$

$= \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)-\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\times$

$\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$= \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta-\frac{\pi}{4}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta+\frac{\pi}{4}-\theta)} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$= \sin 2\theta =$ R.H.S. (Proved)

8. (a) $a\cos(x+\alpha) = b\cos(x-\alpha)$ **হলে দেখাও যে,** $(a+b)\tan x = (a-b)\cot\alpha$ **[ঢা.'০৫]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a\cos(x+\alpha) = b\cos(x-\alpha)$

$\Rightarrow a(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)$
$= b(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha)$

$\Rightarrow (a-b)\cos x\cos\alpha = (a+b)\sin x\sin\alpha$

$\Rightarrow (a+b)\dfrac{\sin x}{\cos x} = (a-b)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\therefore\ (a+b)\tan x = (a-b)\cot\alpha$

8(b) $a \sin(x+\theta) = b\sin(x-\theta)$ হলে দেখাও যে, $(a+b)\tan\theta + (a-b)\tan x = 0$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a\sin(x+\theta) = b\sin(x-\theta)$

$\Rightarrow a(\sin x\cos\theta + \sin\theta\cos x)$

$= b(\sin x\cos\theta - \sin\theta\cos x)$

$\Rightarrow (a-b)\sin x\cos\theta = -(a+b)\sin\theta\cos x$

$\Rightarrow (a-b)\dfrac{\sin x}{\cos x} = -(a+b)\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow (a-b)\tan x = -(a+b)\tan\theta$

$\therefore (a+b)\tan\theta + (a-b)\tan x = 0$

8.(c) θ কোণকে α এবং β এই দুই অংশে এমন ভাবে বিভক্ত করা হল যেন, $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$ হয় ।

দেখাও যে, $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\theta = \alpha + \beta$ এবং

$\tan\alpha : \tan\beta = x : y$

$\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta} = \dfrac{x+y}{x-y}$

$\Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{x+y}{x-y}(\tan\alpha - \tan\beta)$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{x+y}{x-y}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= \dfrac{x+y}{x-y}\left(\dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{x+y}{x-y}\sin(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{x+y}{x-y}\sin(\alpha-\beta)$

$\therefore \sin(\alpha-\beta) = \dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$

8(d) $\tan\theta + \sec\theta = \dfrac{x}{y}$ হলে দেখাও যে,

$\sin\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $\tan\theta + \sec\theta = \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \dfrac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{x^2}{y^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

$\Rightarrow \dfrac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

[যোজন–বিয়োজন করে।]

$\Rightarrow \dfrac{1+2\sin\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(1-\cos^2\theta)+2\sin\theta+\sin^2\theta} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1+2\sin\theta+1}{\sin^2\theta+2\sin\theta+\sin^2\theta} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\Rightarrow \dfrac{2(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (Showed)

8(e) $\sin(A+B) = n\sin(A-B)$ এবং $n \neq 1$ হলে দেখাও যে, $\cot A = \dfrac{n-1}{n+1}\cot B$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin(A+B) = n\sin(A-B)$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = n$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)} = \dfrac{n+1}{n-1}$

[যোজন–বিয়োজন করে।]

$\Rightarrow \dfrac{2\sin A\cos B}{2\sin B\cos A} = \dfrac{n+1}{n-1}$

$\Rightarrow \dfrac{\cot B}{\cot A} = \dfrac{n+1}{n-1}$

$\therefore \cot A = \dfrac{n-1}{n+1}\cot B$

9. (a) $a\sin(\theta+\alpha) = b\sin(\theta+\beta)$ **হলে দেখাও যে,** $\cot\theta = \dfrac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ **[য.'০৫]**

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a\sin(\theta+\alpha) = b\sin(\theta+\beta)$

$\Rightarrow a(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta)$
$= b(\sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta)$

$\Rightarrow a\sin\theta\cos\alpha - b\sin\theta\cos\beta$
$= b\sin\beta\cos\theta - a\sin\alpha\cos\theta$

$\Rightarrow (a\cos\alpha - b\cos\beta)\sin\theta$
$= (b\sin\beta - a\sin\alpha)\cos\theta$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ (Showed)

9(b) $\sin\theta = k\cos(\theta-\alpha)$ **হলে দেখাও যে,** $\cot\theta = \dfrac{1+k\sin\alpha}{k\cos\alpha}$ **[কু.'১২]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\theta = k\cos(\theta-\alpha)$

$\Rightarrow \sin\theta = k(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)$

$\Rightarrow \sin\theta + k\sin\theta\sin\alpha = k\cos\theta\cos\alpha$

$\Rightarrow (1+k\sin\alpha)\sin\theta = k\cos\theta\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{1+k\sin\alpha}{k\cos\alpha} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{1+k\sin\alpha}{k\cos\alpha}$

9(c) $\cot\alpha + \cot\beta = a$, $\tan\alpha + \tan\beta = b$ **এবং** $\alpha+\beta = \theta$ **হলে দেখাও যে,** $(a-b)\tan\theta = ab$
[ঢা.'০১,'১১; য.'০১; ব.'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\cot\alpha + \cot\beta = a \cdots(1)$, $\tan\alpha + \tan\beta = b \cdots(2)$

এবং $\alpha+\beta = \theta \cdots\cdots(3)$

(1) হতে আমরা পাই, $\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta} = a$

$\Rightarrow \dfrac{\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta} = a$

$\Rightarrow \dfrac{b}{\tan\alpha\tan\beta} = a \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta = \dfrac{b}{a}$

এখন, $\theta = \alpha+\beta$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{b}{1-\dfrac{b}{a}} = \dfrac{ab}{a-b}$

$\therefore (a-b)\tan\theta = ab$

9(d) $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta}$ **হলে দেখাও যে,** $\cot\alpha - \cot\theta = 2\cot\beta$ **[কু.'১২]**

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \sin\beta.\sin(\alpha+\theta) = 2\sin\alpha.\sin(\beta+\theta)$

$\Rightarrow (\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\sin\beta$
$= 2\sin\alpha(\sin\beta\cos\theta + \sin\theta\cos\beta)$

$\Rightarrow \sin\alpha\cos\theta\sin\beta + \cos\alpha\sin\theta\sin\beta$
$= 2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta + 2\sin\alpha\sin\theta\cos\beta$

$\Rightarrow \cos\alpha\sin\theta\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$
$= 2\sin\alpha\sin\theta\cos\beta$

ধরি, $\sin\theta\sin\alpha\sin\beta \neq 0$ এবং উভয় পক্ষকে $\sin\theta\sin\alpha\sin\beta$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$\therefore \cot\alpha - \cot\theta = 2\cot\beta$

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে,

$$\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin(\beta+\theta)}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta}{\sin\alpha\sin\theta} = \frac{2(\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta)}{\sin\beta\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)$$

$\Rightarrow \cot\theta + \cot\alpha = 2(\cot\theta + \cot\beta)$

$\therefore \cot\alpha - \cot\theta = 2\cot\beta$

10. (a) $A+B+C = \pi$ **এবং** $\cos A = \cos B \cos C$ **হলে দেখাও যে,** $\tan B\tan C = 2$
[য.'০৩,'০৯]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$A+B+C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B\cos C$

$\therefore B + C = \pi - A$

$\Rightarrow \cos(B + C) = \cos(\pi - A)$

$\Rightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\cos A$

$\Rightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\cos B \cos C$ $[\because \cos A = \cos B \cos C]$

$\Rightarrow 2\cos B \cos C = \sin B \sin C$

$\Rightarrow \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} = 2$

$\therefore \tan B \tan C = 2$ (Showed)

10.(b) $A + B = \frac{\pi}{4}$ **হলে দেখাও যে,**

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $A + B = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B + 1 = 2$

$\Rightarrow 1(1 + \tan A) + \tan B(1 + \tan A) = 2$

$\therefore (1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ (Showed)

11.(a) $\sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta + 1 = 0$ **হলে প্রমাণ কর যে,** $1 + \cot\alpha \tan\beta = 0$ [য.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = 1$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos 0$

$\therefore \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$

এখন, L.H.S. $= 1 + \cot\alpha \tan(-\alpha)$

$= 1 + \frac{1}{\tan\alpha}(-\tan\alpha) = 1 - 1 = 0 =$ R.H.S.

11.(b) $\tan\beta = \frac{2\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$ **হলে দেখাও যে,**

$$\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{2}{\tan\beta}.$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\beta = \frac{2\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$

$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{2\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$

$\Rightarrow \sin\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha)$

$= 2\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$

$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma$

$= 2\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$

ধরি, $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \neq 0$ এবং উভয় পক্ষকে $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \cot\gamma + \cot\alpha = 2\cot\beta$

$\therefore \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{2}{\tan\beta}$ (Showed)

11(c) $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}$ **হলে দেখাও যে,**

$$\tan(\alpha - \beta) = (1 - n)\tan\alpha$$

প্রমাণ ঃ $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}$ ....(1)

এখন, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}}$

$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1 - \frac{n\cos^2\alpha}{1 - n\sin^2\alpha})}{1 + \frac{n\sin^2\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}}$

$= \tan\alpha(\frac{1 - n\sin^2\alpha - n\cos^2\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}) \times \frac{1 - n\sin^2\alpha}{1 - n\sin^2\alpha + n\sin^2\alpha}$

$= \tan\alpha \frac{1 - n(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{1}$

$\therefore \tan(\alpha - \beta) = (1 - n)\tan\alpha$ (Showed)

12(a) $\tan\alpha - \tan\beta = x$ **এবং** $\cot\beta - \cot\alpha = y$ **হলে দেখাও যে,** $\cot(\alpha - \beta) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\alpha - \tan\beta = x$ এবং

$\cot\beta - \cot\alpha = y$

এখন, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\tan\alpha-\tan\beta}+\frac{1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

$=\frac{1}{\frac{1}{\cot\alpha}-\frac{1}{\cot\beta}}+\frac{1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

$=\frac{\cot\alpha\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}+\frac{1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

$=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}=\cot(\alpha-\beta)$

$\therefore\ \cot(\alpha-\beta)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (Showed)

(b) $\tan\theta=\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$ এবং $\tan\varphi=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{x}{y}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta=\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$

$\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}$

$\Rightarrow x\cos\theta\sin\varphi=\sin\theta-x\sin\theta\cos\varphi$

$\Rightarrow x(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)=\sin\theta$

$\Rightarrow x\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\Rightarrow x=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}$

এবং $\tan\varphi=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}\Rightarrow\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$

$\Rightarrow y(\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi\cos\theta)=\sin\varphi$

$\Rightarrow y=\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}$

এখন, $\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}\times\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$

$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{x}{y}$ (Showed)

13.(a) $\sin x+\sin y=a$ এবং $\cos x+\cos y=b$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{1}{2}(x-y)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin x+\sin y=a$

$\Rightarrow\sin^2x+\sin^2y+2\sin x\sin y=a^2\cdots(1)$

এবং $\cos x+\cos y=b$

$\Rightarrow\cos^2x+\cos^2y+2\cos x\cos y=b^2\cdots(2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$(\sin^2x+\cos^2x)+(\sin^2y+\cos^2y)+$
$2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=a^2+b^2$

$\Rightarrow 1+1+2\cos(x-y)=a^2+b^2$

$\Rightarrow 2\{1+\cos(x-y)\}=a^2+b^2$

$\Rightarrow 2\{2\cos^2\frac{1}{2}(x-y)\}=a^2+b^2$

$\Rightarrow 4\{1-\sin^2\frac{1}{2}(x-y)\}=a^2+b^2$

$\Rightarrow 4\sin^2\frac{1}{2}(x-y)=4-a^2+b^2$

$\Rightarrow\sin^2\frac{1}{2}(x-y)=\frac{1}{4}(4-a^2-b^2)$

$\therefore\ \sin\frac{1}{2}(x-y)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$

13(b) $\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma=\cos(\alpha-\gamma+\beta)$ হলে দেখাও যে, $\cot\alpha$, $\cot\gamma$ এবং $\cot\beta$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ ঃ $\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma=\cos(\alpha-\gamma+\beta)$

$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\cos\{(\alpha+\beta)-\gamma\}=0$

$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\{\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+$
$\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\}=0$

$\Rightarrow\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\cos\gamma$
$-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\}=0$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-(\sin\alpha\cos\beta+$
$\sin\beta\cos\alpha)\sin\gamma=0$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$
$-\sin\beta\cos\alpha\sin\gamma=0$

$\Rightarrow 2\cot\gamma-\cos\beta-\cot\alpha=0$

[উভয় পক্ষকে $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow\cot\gamma-\cos\beta=\cot\alpha-\cot\gamma$

$\Rightarrow\cot\alpha-\cot\gamma=\cot\gamma-\cos\beta$

$\therefore\ \cot\alpha$, $\cot\gamma$ একং $\cot\beta$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

14. $\cot 165°$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\cot 165° = \cot(90° + 75°)$

$= -\tan 75° = -\tan(30° + 45°)$ (১)

$= -\dfrac{\tan 30^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 30^0 \tan 45^0}$ (১)

$= -\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.1} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= -\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = -\dfrac{2(\sqrt{3}+2)}{2} = -(\sqrt{3}+2)$ (১)

15. মান নির্ণয় কর :

(a) $\sin 76°40' \cos 16°40' - \cos 73°20' \sin 13°20'$

$= \sin 76°40' \cos 16°40' - \cos(90° - 16°40') \sin(90° - 76°40')$

$= \sin 76°40' \cos 16°40' - \sin 16°40' \cos 76°40'$ (১)

$= \sin(76°40' - 16°40') = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (১)

(b) $\cos 17°40' \sin 77°40' + \cos 107°40' \sin 12°20'$

$= \cos 17°40' \sin 77°40' + \cos(90° + 17°40') \sin(90° - 77°40')$

$= \cos 17°40' \sin 77°40' - \sin 17°40' \cos 77°40'$ (১)

$= \sin(77°40' - 17°40') = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (১)

(c) $\dfrac{\tan 68^0 35' - \cot 66^0 25'}{1 + \tan 68^0 35' \cot 66^0 25'}$

$= \dfrac{\tan 68^0 35' - \cot(90^0 - 23^0 35')}{1 + \tan 68^0 35' \cot(90^0 - 23^0 35')}$

$= \dfrac{\tan 68^0 35' - \tan 23^0 35'}{1 + \tan 68^0 35' \tan 23^0 35'}$ (১)

$= \tan(68°35' - 23^0 35')$

$= \tan 45° = 1$ (Ans.) (১)

প্রমাণ কর যে,

16. $\cos(A - B)\cos(A - C) + \sin(A - B)\sin(A - C) = \cos(B - C)$

L.H.S. $= \cos(A - B)\cos(A - C) + \sin(A - B)\sin(A - C)$

$= \cos\{(A - B) - (A - C)\}$ (১)

$= \cos(A - B - A + C) = \cos(-B + C)$

$= \cos(B - C) =$ R.H.S. (Proved) (১)

17. $\dfrac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{-\cot B - \cot(3A - B)} = -\cot 3A$

L.H.S. $= \dfrac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{-\cot B - \cot(3A - B)}$

$= \dfrac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{-\{\cot B + \cot(3A - B)\}}$

$= -\dfrac{\cot(3A - B)\cot B - 1}{\cot B + \cot(3A - B)}$

$= -\cot(3A - B + B)$ (১)

$= -\cot 3A$

$=$ R.H.S. (Proved) (১)

18. $\cos A + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - A\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + A\right) = 0$

L.H.S. $= \cos A + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - A\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + A\right)$

$= \cos A + 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos A$ (১)

$= \cos A + 2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos A$

$= \cos A - \cos A = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

19. $\dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} = \sqrt{3}$

L.H.S. $= \dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$

$$=\frac{\cos 15^0(1+\frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}{\cos 15^0(1-\frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}=\frac{1+\tan 15^0}{1-\tan 15^0}$$

$$=\frac{\tan 45^0+\tan 15^0}{1-\tan 45^0 \tan 15^0}=\tan(45°+15°) \quad (১)$$

$$=\tan 60° = \sqrt{3} = \text{R.H.S. (Proved)} \quad (১)$$

20. $\frac{\sin 75^0-\sin 15^0}{\sin 75^0+\sin 15^0}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin 75^0-\sin 15^0}{\sin 75^0+\sin 15^0}$$

$$=\frac{\sin(90^0-15^0)-\sin 15^0}{\sin(90^0-15^0)+\sin 15^0}$$

$$=\frac{\cos 15^0-\sin 15^0}{\cos 15^0+\sin 15^0} \quad (১)$$

$$=\frac{\cos 15^0(1-\frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}{\cos 15^0(1+\frac{\sin 15^0}{\cos 15^0})}$$

$$=\frac{1-\tan 15^0}{1+\tan 15^0}=\frac{\tan 45^0-\tan 15^0}{1+\tan 45^0 \tan 15^0}$$

$$=\tan(45°-15°) \quad (১)$$

$$=\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{R.H.S. (proved)} \quad (১)$$

21. (a) $\tan 5A \tan 3A \tan 2A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$

প্রমাণ: $\tan 5A = \tan(3A+2A)$

$$\Rightarrow \tan 5A = \frac{\tan 3A+\tan 2A}{1-\tan 3A \tan 2A} \quad (১)$$

$\Rightarrow \tan 3A + \tan 2A = \tan 5A - \tan 5A \tan 3A \tan 2A$

$\therefore \tan 5A \tan 3A \tan 2A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$ (১)

(b) $\tan 32° + \tan 13° + \tan 32° \tan 13° = 1$

প্রমাণ: $\tan 45° = \tan(32°+13°)$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\tan 32^0+\tan 13^0}{1-\tan 32^0 \tan 13^0} \quad (১)$$

$\Rightarrow \tan 32° + \tan 13° = 1 - \tan 32° \tan 13°$

$\therefore \tan 32° + \tan 13° + \tan 32° \tan 13° = 1$ (১)

(c) $\tan 50° = \tan 40° + 2\tan 10°$

প্রমাণ: $\tan 50° = \tan(40^0+10^0)$

$$\Rightarrow \tan 50° = \frac{\tan 40^0+\tan 10^0}{1-\tan 40^0 \tan 10^0} \quad (১)$$

$\Rightarrow \tan 50° - \tan 50° \tan 40° \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\Rightarrow \tan 50° - \tan(90°-40°) \tan 40° \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\Rightarrow \tan 50° - \cot 40° \tan 40° \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$ (১)

$\Rightarrow \tan 50° - \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$

$\therefore \tan 50° = \tan 40° + 2\tan 10°$ (১)

22. (a) $\tan(45°+A)\tan(45°-A) = 1$

প্রমাণ: **L.H.S.** $= \tan(45°+A)\tan(45°-A)$

$= \tan(45°+A)\tan\{90°-(45°+A)\}$

$= \tan(45°+A).\cot(45°+A)$ (১)

$= 1 =$ R.H.S. (Proved) (১)

(b) $\cos^2(A-B) - \sin^2(A+B) = \cos 2A \cos 2B.$

প্রমাণ: **L.H.S.**$= \cos^2(A-B) - \sin^2(A+B)$

$= \cos\{(A-B)+(A+B)\}\cos\{(A-B)-(A+B)\}$ (১)

$= \cos(A-B+A+B)\cos(A-B-A-B)$

$= \cos 2A \cos(-2B) = \cos 2A \cos 2B = $ R.H.S.(১)

23.(a) $\sin\alpha = k\sin(\alpha+\beta)$ হলে দেখাও যে, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - k}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\alpha = k\sin(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \sin\alpha = k(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$ (১)

$\Rightarrow \sin\alpha = k\sin\alpha\cos\beta + k\sin\beta\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha(1-k\cos\beta) = k\sin\beta\cos\alpha$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{k\sin\beta}{1-k\cos\beta} \quad (১)$$

এখন, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (১)

$$= \frac{\dfrac{k\sin\beta}{1-k\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{k\sin\beta}{1-k\cos\beta}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{k\sin\beta\cos\beta+\sin\beta-k\sin\beta\cos\beta}{(1-k\cos\beta)\cos\beta}}{\dfrac{\cos\beta-k\cos^2\beta-k\sin^2\beta}{(1-k\cos\beta)\cos\beta}}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\beta-k(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}$$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-k}$ (Showed) (১)

(b) $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ হলে দেখাও যে,

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

এখন, $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$

$= \sqrt{a^2\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)}.\cos(\theta-\alpha)$

$= a\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cos(\theta-\alpha)$

$= a\sqrt{\sec^2\alpha}\cos(\theta-\alpha)$

$= a\sec\alpha\ \cos(\theta-\alpha)$

$= \dfrac{a}{\cos\alpha}(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)$ (১)

$= a\cos\theta + a\sin\theta\tan\alpha$

$= a\cos\theta + a\sin\theta.\dfrac{b}{a}$

$= a\cos\theta + b\sin\theta$

$\therefore\ a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ (১)

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, $\tan\alpha = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{a}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{b} = \dfrac{\cos\alpha}{a} = \dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}{\sqrt{b^2+a^2}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (১)

$\therefore\ b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha,\ a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$

এখন, $a\cos\theta + b\sin\theta$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)$

$\therefore a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$ (১)

(showed)

24.(a) $\cos\alpha+\cos\beta = a$ এবং $\sin\alpha+\sin\beta = b$ হলে দেখাও যে, $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos\alpha+\cos\beta = a$

$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta = a^2$ ...(1)

এবং $\sin\alpha+\sin\beta = b$

$\Rightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta = b^2$ ... (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+$
$2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) = a^2+b^2$

$\Rightarrow 1+1+2\cos(\alpha-\beta) = a^2+b^2$ (১)

$\Rightarrow 2\cos(\alpha-\beta) = a^2+b^2-2$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)$ (Showed) (১)

(b) $\tan\theta = \dfrac{a\sin x+b\sin y}{a\cos x+b\cos y}$ হলে দেখাও যে,

$a\sin(\theta-x)+b\sin(\theta-y) = 0$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \dfrac{a\sin x+b\sin y}{a\cos x+b\cos y}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a\sin x+b\sin y}{a\cos x+b\cos y}$ (১)

$\Rightarrow a\sin\theta\cos x + b\sin\theta\cos y =$
$a\sin x\cos\theta + b\cos\theta\sin y$

$\Rightarrow a(\sin\theta\cos x - \sin x\cos\theta) +$
$b(\sin\theta\cos y - \cos\theta\sin y) = 0$ (১)

$\therefore\ a\sin(\theta-x)+b\sin(\theta-y) = 0$

(c) $\tan\beta = \dfrac{\sin 2\alpha}{5+\cos 2\alpha}$ হলে দেখাও যে,

$3\tan(\alpha-\beta) = 2\tan\alpha$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\beta = \dfrac{\sin 2\alpha}{5+\cos 2\alpha}$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{5+\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} \quad (১) + (১)$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{\frac{5+5\tan^2\alpha+1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{6+4\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{\tan\alpha}{3+2\tan^2\alpha}$$

এখন, $3\tan(\alpha-\beta) = 3\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (১)

$$= 3\frac{\tan\alpha - \frac{\tan\alpha}{3+2\tan^2\alpha}}{1+\tan\alpha.\frac{\tan\alpha}{3+2\tan^2\alpha}}$$

$$= 3\frac{3\tan\alpha+2\tan^3\alpha-\tan\alpha}{3+2\tan^2\alpha+\tan^2\alpha}$$

$$= 3\frac{2\tan\alpha+2\tan^3\alpha}{3+3\tan^2\alpha}$$

$$= 3\frac{2\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)}{3(1+\tan^2\alpha)} = 2\tan\alpha$$

$\therefore\ 3\tan(\alpha-\beta) = 2\tan\alpha$ (১)

25. (a) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\theta) = \cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\theta)$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\theta) = \cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin(\gamma-\theta)}{\sin(\gamma+\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))} = \frac{\sin(\gamma-\theta)+\sin(\gamma+\theta)}{\sin(\gamma-\theta)-\sin(\gamma+\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{-2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\sin\gamma\cos\theta}{-2\sin\theta\cos\gamma} \quad (১)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\gamma}{\tan\theta}$$

$\therefore\ \tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ (Showed) (১)

(b) $(\theta-\varphi)$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হলে দেখাও যে, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = 0$

প্রমাণ ঃ $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \sqrt{3}\{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)\} \quad (১)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi)$$

$$\Rightarrow \cot\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \sqrt{3} = \cot 30^0$$

$\therefore\ \frac{1}{2}(\theta-\varphi) = 30^0$, যেহেতু $(\theta-\varphi)$ সূক্ষ্মকোণ। (১)

$$\Rightarrow \theta-\varphi = 60^0$$

এখন, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi$

$$= 2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{3}{2}(\theta-\varphi) \quad (১)$$

$$= 2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{3}{2}(60^0)$$

$$= 2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\cos 90^0$$

$$= 2\sin\frac{3}{2}(\theta+\varphi)\times 0$$

$\therefore\ \sin 3\theta + \sin 3\varphi = 0$ (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

26. $A = \cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)$, $B = \tan 70°$

(a) প্রমাণ কর যে, $\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{6}-\beta) - \sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{6}-\beta) = \sin(\alpha+\beta)$

প্রমাণ : L.H. S. $= \cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{6}-\beta) - \sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{6}-\beta)$

$$= \cos\{(\frac{\pi}{3}-\alpha)+(\frac{\pi}{6}-\beta)\}$$

$= \cos\{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) - (\alpha + \beta)\}$

$= \cos\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\}$

$= \sin(\alpha + \beta)$ = R.H.S. (Proved)

(b) প্রমাণ কর যে, $B = \tan 20° + 2\tan 50°$

[চ.'০৫; ঢা'১০,'১৫]

প্রমাণ : $B = \tan 70° = \tan(50° + 20°)$

$\Rightarrow \tan 70° = \frac{\tan 50^0 + \tan 20^0}{1 - \tan 50^0 \tan 20^0}$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan 70° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan(90° - 20°)\tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \cot 20° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan 50° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$

$\therefore \quad B = \tan 20° + 2\tan 50°$

(c) $A = -\frac{3}{2}$ হলে দেখাও যে, $\Sigma \cos\alpha = 0$ এবং $\Sigma \sin\alpha = 0$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2(\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma + \cos\gamma \cos\alpha + \sin\gamma \sin\alpha + \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = -3$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha) + 2(\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha) + 1 + 1 + 1 = 0$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha) + 2(\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = 0$

$\Rightarrow \{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2(\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha)\} + \{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2(\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha)\} = 0$

$\Rightarrow (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 = 0$

$\therefore \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ এবং $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$

[$\because$ দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে সংখ্যা দুইটি পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয়।]

$\therefore \quad \sum \cos\alpha = 0$ এবং $\sum \sin\alpha = 0$

প্রশ্নমালা VII C

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{16}$

L.H.S.$= \sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70°$

$= \sin 10° . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\{\cos(70° - 50°) - \cos(70° + 50°)\}$

$= \frac{1}{4}\sin 10°(\cos 20° - \cos 120°)$

$= \frac{1}{4}\sin 10° \cos 20° - \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2}) \sin 10°$

$= \frac{1}{4} . \frac{1}{2}\{\sin(20° + 10°) - \sin(20° - 10°)\} + \frac{1}{8}\sin 10°$

$= \frac{1}{8}\sin 30° - \frac{1}{8}\sin 10° + \frac{1}{8}\sin 10°$

$= \frac{1}{8} . \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ = R.H.S. (Proved)

1(b) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$

L.H.S.$= \cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80°$

$= \frac{1}{2}\{\cos(40° + 20°) + \cos(40° - 20°)\} \frac{1}{2} . \cos 80°$

$= \frac{1}{4}\{\cos 60° + \cos 20°\} \cos(90° - 10°)$

$= \cos\{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) - (\alpha + \beta)\}$

$= \cos\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\}$

$= \sin(\alpha + \beta) =$ R.H.S. (Proved)

(b) প্রমাণ কর যে, $B = \tan 20° + 2\tan 50°$

[চ.'০৫; ঢা'১০,'১৫]

প্রমাণ : $B = \tan 70° = \tan(50° + 20°)$

$\Rightarrow \tan 70° = \frac{\tan 50^0 + \tan 20^0}{1 - \tan 50^0 \tan 20^0}$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan 70° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan(90° - 20°)\tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \cot 20° \tan 50° \tan 20° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° - \tan 50° = \tan 50° + \tan 20°$

$\Rightarrow \tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$

$\therefore B = \tan 20° + 2\tan 50°$

(c) $A = -\frac{3}{2}$ হলে দেখাও যে, $\Sigma\cos\alpha = 0$ এবং $\Sigma\sin\alpha = 0$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $A = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) + \cos(\alpha-\beta) = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma + \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = -3$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha) + 2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha) + 1 + 1 + 1 = 0$

$\Rightarrow 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha) + 2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = 0$

$\Rightarrow \{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha)\} + \{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha)\} = 0$

$\Rightarrow (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 = 0$

$\therefore \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ এবং $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$

[$\because$ দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে সংখ্যা দুইটি পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয়।]

$\therefore \sum\cos\alpha = 0$ এবং $\sum\sin\alpha = 0$

প্রশ্নমালা VII C

1. প্রমাণ কর যে,

(a) $\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{16}$

L.H.S.$= \sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70°$

$= \sin 10° . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\{\cos(70° - 50°) - \cos(70° + 50°)\}$

$= \frac{1}{4}\sin 10°(\cos 20° - \cos 120°)$

$= \frac{1}{4}\sin 10° \cos 20° - \frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{2})\sin 10°$

$= \frac{1}{4} . \frac{1}{2}\{\sin(20° + 10°) - \sin(20° - 10°)\} + \frac{1}{8}\sin 10°$

$= \frac{1}{8}\sin 30° - \frac{1}{8}\sin 10° + \frac{1}{8}\sin 10°$

$= \frac{1}{8} . \frac{1}{2} = \frac{1}{16} =$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$

L.H.S.$= \cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80°$

$= \frac{1}{2}\{\cos(40° + 20°) + \cos(40° - 20°)\}\frac{1}{2}.\cos 80°$

$= \frac{1}{4}\{\cos 60° + \cos 20°\}\cos(90° - 10°)$

$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \cos20°)\sin10°$

$= \frac{1}{8}\sin10° + \frac{1}{4}\cos20°\sin10°$

$= \frac{1}{8}\sin10° + \frac{1}{8}\{\sin(20° + 10°)$
$- \sin(20° - 10°)\}$

$= \frac{1}{8}\sin10° + \frac{1}{8}\sin30° - \frac{1}{8}\sin10°$

$= \frac{1}{8}.\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ = R.H.S. (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি: $\cos20°\cos40°\cos60°\cos80°$

$= \cos20°\cos(60°-20^0)\frac{1}{2}\cos(60°-20^0)$

$= \frac{1}{2}\cos20°\{\cos^2 20^0 - \sin^2 60^0)$

$= \frac{1}{2}\cos20°\{\cos^2 20^0 - \frac{3}{4})$

$= \frac{1}{2}.\frac{4\cos^3 20^0 - 3\cos 20^0}{4})$

$= \frac{1}{8}\cos(3\times 20^0)$

$[\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A]$

$= \frac{1}{8}\cos 60^0 = \frac{1}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ = R.H.S.

1(c) $\tan20°\ \tan40°\ \tan60°\ \tan80° = 3$

L.H.S. $= \tan20°\tan40°\tan60°\tan80°$

$= \tan20°\tan40°.\sqrt{3}.\tan80°$

$= \sqrt{3}\ \tan20°\tan40°\tan60°$

$= \sqrt{3}.\frac{2\sin20^0\sin40^0\sin80^0}{2\cos20^0\cos40^0\cos80^0}$

$= \frac{\sqrt{3}\{\cos(40^0-20^0)-\cos(40^0+20^0)\}\sin(90^0-10^0)}{\{\cos(40^0+20^0)+\cos(40^0-20^0)\}\cos(90^0-10^0)}$

$= \sqrt{3}\frac{(\cos20^0 - \cos60^0)\cos10^0}{(\cos60^0 + \cos20^0)\sin10^0}$

$= \sqrt{3}\ \frac{\cos20^0\cos10^0 - \frac{1}{2}\cos10^0}{\frac{1}{2}\sin10^0 + \cos20^0\sin10^0}$

$= \sqrt{3}\ \frac{\frac{1}{2}\{\cos(20^0+10^0)+\cos(20^0-10^0)\} - \frac{1}{2}\cos10^0}{\frac{1}{2}\sin10^0 + \frac{1}{2}\{\sin(20^0+10^0)-\sin(20^0-10^0)\}}$

$= \sqrt{3}.\frac{\frac{1}{2}\cos30^0 + \frac{1}{2}\cos10^0 - \frac{1}{2}\cos10^0}{\frac{1}{2}\sin10^0 + \frac{1}{2}\sin30^0 - \frac{1}{2}\sin10^0}$

$= \sqrt{3}.\frac{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4$

$= \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$ = R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি:

L.H.S. $= \tan20°\tan40°\tan60°\tan80°$

$= \sqrt{3}\tan20°\tan(60°-20°)\tan(60°+20°)$

$= \sqrt{3}\tan20°\ \frac{\tan^2 60^0 - \tan^2 20^0}{1-\tan^2 60^0\tan^2 20^0}$

$= \sqrt{3}\tan20°\ \frac{3-\tan^2 20^0}{1-3\tan^2 20^0}$

$= \sqrt{3}\ \frac{3\tan20^0 - \tan^3 20^0}{1-3\tan^2 20^0}$

$= \sqrt{3}\tan(3\times 20^0)$

$[\because \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}]$

$= \sqrt{3}\tan60^0 = \sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$

2.(a) $\cos\theta\ \cos(60° - \theta)\cos(60° + \theta) = \frac{1}{4}\cos3\theta$

L.H.S. $= \cos\theta\cos(60° - \theta)\cos(60° + \theta)$

$= \cos\theta.\frac{1}{2}\{\cos(60° + \theta + 60° - \theta)$
$+ \cos(60° + \theta - 60° + \theta)\}$

$= \frac{1}{2}\cos\theta(\cos120° + \cos2\theta)$

$= \frac{1}{2}\cos\theta(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cos\theta\cos2\theta$

$= -\frac{1}{4}\cos\theta + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+\theta)+\cos(2\theta-\theta)\}$

$= -\frac{1}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos3\theta + \frac{1}{4}\cos\theta$

$= \frac{1}{4}\cos3\theta =$ R.H.S. (Proved)

বিকল্প পদ্ধতি:

L.H.S. $= \cos\theta\cos(60° - \theta)\cos(60° + \theta)$

$= \cos\theta\,(\cos^2\theta - \sin^2 60°)$

$= \cos\theta\,(\cos^2\theta - \frac{3}{4}) = \cos\theta.\frac{4\cos^2\theta - 3}{4}$

$= \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{4} = \frac{1}{4}\cos3\theta =$ R.H.S.

$[\because \cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta]$

2(b) $\cos(36° - \theta)\cos(36° + \theta) + \cos(54° + \theta)\cos(54° - \theta) = \cos2\theta$

L.H.S. $= \cos(36° - \theta)\cos(36° + \theta) + \cos(54° + \theta)\cos(54° - \theta)$

$= \frac{1}{2}(\cos72° + \cos2\theta) + \frac{1}{2}(\cos108° + \cos2\theta)$

$= \frac{1}{2}\{\cos(90° - 18°) + \cos2\theta\} + \frac{1}{2}\{\cos(90° + 18°) + \cos2\theta\}$

$= \frac{1}{2}(\cos2\theta + \cos18°) + \frac{1}{2}(\cos2\theta - \cos18°)$

$= \frac{1}{2}(\cos2\theta + \cos18° + \cos2\theta - \cos18°)$

$= \frac{1}{2}.2\cos2\theta = \cos2\theta =$ R.H.S. (Proved)

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\cos(60° - \theta) + \cos(60° + \theta) - \cos\theta = 0$

L.H.S. $= \cos(60° - \theta) + \cos(60° + \theta) - \cos\theta$

$= 2\cos60°\cos\theta - \cos\theta$

$= 2.\frac{1}{2}\cos\theta - \cos\theta$

$= \cos\theta - \cos\theta = 0 =$ R.H.S. (Proved)

(b) $\sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta) = 0$ [চা.'১২]

L.H.S. $= \sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta)$

$= \sin\theta + \sin\{180° - (60° - \theta)\} + \sin\{180° + (60° + \theta)\}$

$= \sin\theta + \sin(60° - \theta) - \sin(60° + \theta)$

$= \sin\theta - \{\sin(60° + \theta) - \sin(60° - \theta)\}$

$= \sin\theta - 2\cos60°\sin\theta = \sin\theta - 2.\frac{1}{2}\sin\theta$

$= \sin\theta - \sin\theta = 0 =$ R.H.S. (Proved)

3(c) $\cos70° - \cos10° + \sin40° = 0$

L.H.S. $= \cos70° - \cos10° + \sin40°$

$= 2\sin\frac{1}{2}(70° + 10°)\sin\frac{1}{2}(10° - 70°) + \sin40°$

$= 2\sin40°\sin(-30°) + \sin40°$

$= -2\sin40°.(\frac{1}{2}) + \sin40°$

$= -\sin40° + \sin40° = 0 =$ R.H.S.

4(a) $\sin18° + \cos18° = \sqrt{2}\cos27°$ [ব'১১]

L.H.S. $= \sin18° + \cos18°$

$= \sin(90° - 72°) + \cos18°$

$= \cos72° + \cos18°$

$= 2\cos\frac{1}{2}(72° + 18°)\cos\frac{1}{2}(72° - 18°)$

$= 2\cos45°\cos27° = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos27°$

$= \sqrt{2}\cos27°$

4.(b) $\frac{\cos10^0 - \sin10^0}{\cos10^0 + \sin10^0} = \tan35°$

L.H.S. $= \frac{\cos10^0 - \sin10^0}{\cos10^0 + \sin10^0}$

$= \frac{\cos10^0(1 - \tan10^0)}{\cos10^0(1 + \tan10^0)} = \frac{\tan45^0 - \tan10^0}{1 + \tan45^0\tan10^0}$

$= \tan(45° - 10°) = \tan35° =$ R.H.S. (Proved)

5.(a) $\cot(A + 15°) - \tan(A - 15°)$

$$= \frac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1}$$

L.H.S. $= \cot(A + 15°) - \tan(A - 15°)$

$$= \frac{\cos(A+15^0)}{\sin(A+15^0)} - \frac{\sin(A-15^0)}{\cos(A-15^0)}$$

$$= \frac{\cos(A+15^0)\cos(A-15^0) - \sin(A+15^0)\sin(A-15^0)}{\sin(A+15^0)\cos(A-15^0)}$$

$$= \frac{\cos(A+15^0 + A - 15^0)}{\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 30^0)} = \frac{2\cos 2A}{\sin 2A + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\cos 2A}{2\sin 2A + 1} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

5(b) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ **[য.'১২]**

L.H.S. $= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin\beta$

$= 1 + 1 + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2\{1 + \cos(\alpha+\beta)\}$

$= 2.2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$= 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = $ R.H.S. (Prived)

6. $\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n = 2\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$ **অথবা 0 যখন n যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।**

$$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}\right)^n + \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)}\right)^n$$

$$= \left(\cot\frac{1}{2}(A-B)\right)^n + \left(\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{-\sin\frac{1}{2}(A-B)}\right)^n$$

$$= \cot^n\frac{1}{2}(A-B) + \left(-\cot\frac{1}{2}(A-B)\right)^n$$

$$= \cot^n\frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$$

যখন n বিজোড় সংখ্যা,

$$\cot^n\frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$$

$$= \cot^n\frac{1}{2}(A-B) - \cot^n\frac{1}{2}(A-B) = 0,$$

যখন n জোড় সংখ্যা,

$$\cot^n\frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$$

$$= \cot^n\frac{1}{2}(A-B) + \cot^n\frac{1}{2}(A-B)$$

$$= 2\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$$

$\therefore \left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n = 2\cot^n\frac{1}{2}(A-B)$ অথবা o যখন যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।

7. (a) $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ **হলে দেখাও যে,** $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

দেওয়া আছে,

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\sin\beta - \sin\alpha)$

$\Rightarrow a\,.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = b.2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

[যোজন – বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

7.(b) $\cos x = k\cos y$ হলে দেখাও যে,

$$\tan\frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\cot\frac{y-x}{2}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\cos x = k\cos y$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y-x}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot\frac{y-x}{2}}{\tan\frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \tan\frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\cot\frac{x+y}{2}$$

7(c) $\sin\Theta = k\sin(\alpha-\Theta)$ হলে দেখাও যে,

$$\tan(\Theta-\frac{\alpha}{2}) = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{\alpha}{2}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin\Theta = k\sin(\alpha-\Theta)$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{k}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta+\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta-\sin(\alpha-\theta)} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\theta+\alpha-\theta}{2}\cos\frac{\theta-\alpha+\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta+\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\alpha+\theta}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan(\theta-\frac{\alpha}{2})} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \tan(\Theta-\frac{\alpha}{2}) = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{\alpha}{2}$$ (Showed).

7(d) $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$ হলে দেখাও যে, $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\Theta+\alpha) - \sin^2(\Theta+\beta)$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)} = \frac{a+b}{a-b}$$

[যোজন – বিয়োজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}\sin(\alpha-\beta) = \sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\theta+\alpha) - \sin^2(\theta+\beta)$$

[$\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$]

8. $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\dfrac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\dfrac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$$\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই,

$$\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}=\frac{x+y}{x-y}$$

[যোজন – বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}+\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}{\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\dfrac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}}=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)+\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)-\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)}=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}}{\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}}=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y}\sin(\alpha-\beta)=\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin\{(\theta+\alpha)+(\theta+\beta)\}\sin\{(\theta+\alpha)-(\theta+\beta)\}$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2(\theta+\beta)$$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\sin^2(\theta+\beta)-\sin^2(\theta+\gamma)$$

এবং $\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}=\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}$.

$$\Rightarrow \frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\sin^2(\theta+\gamma)-\sin^2(\theta+\alpha)$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2(\theta+\beta)+\sin^2(\theta+\beta)-\sin^2(\theta+\gamma)+\sin^2(\theta+\gamma)-\sin^2(\theta+\alpha)=0$$

9. (a) sin A + cos A = sin B + cos B হলে দেখাও যে, A + B = $\dfrac{\pi}{2}$ [সি.'০৯; চ.,দি.'১০; কু.'১২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$

$$\Rightarrow \sin A-\sin B=\cos B-\cos A$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=1$$

$$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(A+B)=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{1}{2}(A+B)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$$

9(b) $\sin\theta+\sin\varphi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\varphi=b$ হলে দেখাও যে, $\tan\dfrac{\theta-\varphi}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sin\theta+\sin\varphi=a$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=a$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$$4\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=a^2\cdots(1)$$

এবং $\cos\theta+\cos\varphi=b$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=b$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই ,

$$4\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=b^2\cdots(2)$$

(1) ও (2) যোগ করে আমরা পাই ,

$$4\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)\{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)+\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)\}=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sec^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\frac{4}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\frac{4}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\frac{4}{a^2+b^2}-1$$

$$=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \tan\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

9.(c) cosec A + sec A = cosec B + sec B হলে দেখাও যে, tan A tan B = cot $\frac{A+B}{2}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$$\operatorname{cosec} A+\sec A=\operatorname{cosec} B+\sec B$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} A-\operatorname{cosec} B=\sec B-\sec A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\sin B}=\frac{1}{\cos B}-\frac{1}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B-\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\cos A-\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B-\sin A}{\cos A-\cos B}=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}=\tan A\tan B$$

$$\therefore \tan A\tan B=\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

প্রমাণ কর যে,

10(a) $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$\text{L.H.S}=\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$$

$$=\cos 10^\circ\{\cos(60^\circ-10^0)\cos(60^\circ+10^0)\}$$

$$=\cos 10^\circ(\cos^2 10^0-\sin^2 60^\circ)$$ (১)

$$=\cos 10^\circ(\cos^2 10^0-\frac{3}{4})$$

$$=\frac{1}{4}(4\cos^3 10^0-3\cos 10^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\cos(3\times 10^0)$$ (১)

$$[\because \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A]$$

$$=\frac{1}{4}\cos 30^0=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}=\text{R.H.S. (Proved)}$$ (১)

10.(b) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ=\frac{3}{16}$

$$\text{L.H.S}=\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(40^\circ-20^\circ)-\cos(40^\circ+20^\circ)\}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 80^\circ$$ (১)

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin(90^\circ-10^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 20^\circ-\frac{1}{2})\cos 10^\circ$$ (১)

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 20^\circ\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{2}\{\cos(20^\circ-10^\circ)+\cos(20^\circ+10^\circ)\}-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ$$ (১)

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{16}=\text{R.H.S. (Proved)}$$ (১)

10(c) $\cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70° = \frac{3}{16}$

L.H.S. $= \cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70°$

$= \cos 10° . \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \{\cos(70° + 50°) + \cos(70° - 50°)\}$ (১)

$= \frac{\sqrt{3}}{4} .\cos 10° \cos 120° + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 20° \cos 10°$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 10° .(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{1}{2} \{\cos(20° + 10°) + \cos(20° - 10°)\}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10° + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 30° + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} =$ R.H.S. (Proved) (১)

11(a) $4 \cos \theta \cos (\frac{2\pi}{3} + \theta) \cos (\frac{4\pi}{3} + \theta) = \cos 3\theta$

LH.S. $= 4\cos\theta\cos(\frac{2\pi}{3} + \theta) \cos(\frac{4\pi}{3} + \theta)$

$= 4 \cos\theta . \frac{1}{2} \{\cos (\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2\theta) + \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3})\}$ (১)

$= 2 \cos \theta \{ \cos (2\pi + 2\theta) + \cos \frac{2\pi}{3} \}$

$= 2 \cos \theta \cos 2\theta + 2 \cos \theta (-\frac{1}{2})$ (১)

$= \cos (2\theta + \theta) + \cos (2\theta - \theta) - \cos \theta$

$= \cos 3\theta + \cos \theta - \cos \theta$

$= \cos 3\theta =$ R.H.S. (Proved) (১)

11(b) $\sin (45° + A) \sin (45° - A) = \frac{1}{2} \cos 2A$

L.H.S. $= \sin (45° + A) \sin(45° - A)$

$= \frac{1}{2} \{\cos(45° + A - 45° + A) - \cos(45° + A + 45° - A)\}$ (১)

$= \frac{1}{2} (\cos 2A - \cos 90°) = \frac{1}{2} (\cos 2A - 0)$

$= \frac{1}{2} \cos 2A =$ R.H.S. (Proved) (১)

11(c) $4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \cos A + \cos B + \cos C + \cos (A + B + C)$

L.H.S. $= 4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2}$

$= 2\{\cos \frac{1}{2} (B + C + C + A) + \cos \frac{1}{2} (B + C - C - A)\} \cos \frac{A+B}{2}$ (১)

$= 2 \cos \frac{1}{2} (B + 2C + A) \cos \frac{A+B}{2} + 2 \cos \frac{1}{2} (B - A) \cos \frac{A+B}{2}$

$= \cos \frac{1}{2} (A + B + 2C + A + B) + \cos \frac{1}{2} (A + B + 2C - A - B) + \cos \frac{1}{2} (B - A + A + B) + \cos \frac{1}{2} (B - A - A - B)$

$= \cos(A + B + C) + \cos C + \cos B + \cos(-A)$

$= \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C)$

= R.H.S. (Proved) (১)

12(a) $\sin\theta + \sin (60° - \theta) - \sin(60° + \theta) = 0$

L.H.S. $= \sin\theta + \sin(60° - \theta) - \sin(60° + \theta)$

$= \sin\theta - \{\sin(60° + \theta) - \sin(60° - \theta)\}$

$= \sin\theta - 2\sin\theta\cos 60°$ (১)

$= \sin\theta - 2(\frac{1}{2}) \sin\theta$

$= \sin\theta - \sin\theta = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

(b) $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = 0$

L.H.S. $= \cos 40° + \cos 80° + \cos 160°$

$= \cos 40° + 2 \cos \frac{1}{2} (160° + 80°)$

$\cos\frac{1}{2}(160° - 80°)$ (১)

$= \cos 40° + 2\cos 120° \cos 40°$

$= \cos 40° + 2(-\frac{1}{2})\cos 40°$

$= \cos 40° - \cos 40° = 0 =$ R.H.S. (১)

13. $\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2}\cos 20°$

L.H.S. $= \sin 65° + \cos 65°$

$= \sin 65° + \cos(90° - 25°)$

$= \sin 65° + \sin 25°$ (১)

$= 2\sin\frac{1}{2}(65° + 25°)\cos(65° - 25°)$ (১)

$= 2\sin 45° \cos 20° = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20°$

$= \sqrt{2}\cos 20° =$ R.H.S. (Proved) (১)

14.(a) $\tan(\frac{\pi}{6} + \theta)\tan(\frac{\pi}{6} - \theta) = \frac{2\cos 2\theta - 1}{2\cos 2\theta + 1}$

L.H.S.$= \tan(\frac{\pi}{6} + \theta)\tan(\frac{\pi}{6} - \theta)$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)}$$

$$= \frac{2\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}{2\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)\cos(\frac{\pi}{6}-\theta)}$$

$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{6}+\theta-\frac{\pi}{6}+\theta)-\cos(\frac{\pi}{6}+\theta+\frac{\pi}{6}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{6}+\theta-\frac{\pi}{6}+\theta)+\cos(\frac{\pi}{6}+\theta+\frac{\pi}{6}-\theta)} \text{ (১)+(১)}$$

$$= \frac{\cos 2\theta - \cos\frac{\pi}{3}}{\cos 2\theta + \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos 2\theta - \frac{1}{2}}{\cos 2\theta + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\cos 2\theta - 1}{2\cos 2\theta + 1} = \text{R.H.S. (Proved)} \quad \text{(১)}$$

14.(b) $\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$

L.H.S.$= \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma)$

$= \sin\{\alpha + (\beta + \gamma)\} + \sin\{\alpha - (\beta + \gamma)\} + \sin\{\alpha + (\beta - \gamma)\} + \sin\{\alpha - (\beta - \gamma)\}$

$= 2\sin\alpha\cos(\beta + \gamma) + 2\sin\alpha\cos(\beta - \gamma)$ (১)

$= 2\sin\alpha\{\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)\}$

$= 2\sin\alpha . 2\cos\beta\cos\gamma$

$= 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma =$ R.H.S. (Prived) (১)

15. $\sin x = k\sin y$ **হলে দেখাও যে,**

$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{x+y}{2}$ **[প্র.ভ.প.'১৭]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\sin x = k\sin y$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1} \quad \text{(১)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{x+y}{2}}{\tan\frac{x-y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\therefore \tan\frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1}\tan\frac{x+y}{2} \quad \text{(১)}$$

16. $x\sin\varphi = y\sin(2\theta + \varphi)$ **হলে দেখাও যে,**

$\cot(\theta + \varphi) = \frac{x-y}{x+y}\cot\theta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $x\sin\varphi = y\sin(2\theta + \varphi)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\theta + \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\theta + \varphi) - \sin\varphi}{\sin(2\theta + \varphi) + \sin\varphi} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{2\theta+\varphi+\varphi}{2}\sin\frac{2\theta+\varphi-\varphi}{2}}{2\sin\frac{2\theta+\varphi+\varphi}{2}\cos\frac{2\theta+\varphi-\varphi}{2}} = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{(১)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot(\theta + \varphi)}{\cot\theta} = \frac{x-y}{x+y}$$

$\therefore \cot(\theta + \varphi) = \dfrac{x - y}{x + y}\cot\theta$ (Showed) (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

17. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k = x\cos\beta + y\sin\beta$ ……(i)

$A = \sin\dfrac{\pi}{16}.\sin\dfrac{3\pi}{16}.\sin\dfrac{5\pi}{16}.\sin\dfrac{7\pi}{16}$ ……(ii)

(a) প্রমাণ কর যে,

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$$

প্রমাণ : L.H.S.

$$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{13} + \frac{3\pi}{13}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{13} - \frac{3\pi}{13}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + 2\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + 2\cos\left(\pi - \frac{9\pi}{13}\right)\cos\frac{\pi}{13}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}$$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

(b) (ii) এর সাহায্যে A এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \sin\dfrac{\pi}{16}\sin\dfrac{3\pi}{16}\sin\dfrac{5\pi}{16}\sin\dfrac{7\pi}{16}$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sin\frac{7\pi}{16}\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(2\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{16} + \frac{\pi}{16}\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{16} - \frac{3\pi}{16}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{3\pi}{16}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - 0\right\}\left(\cos\frac{\pi}{8} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin 2.\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16} \text{ (Ans.)}$$

(c) (i) এর সাহায্যে দেখাও যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - k = 0$………(1)

$x\cos\beta + y\sin\beta - k = 0$………(2).

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সাহায্যে (1) ও (2) হতে আমরা পাই ,

$$\frac{x}{-\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{y}{-\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{k}{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{k}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$ উ: $\sqrt{2}/16$

$$= \frac{k}{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore \frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

প্রশ্নমালা –VII D

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\theta$

L.H.S.$= \dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \dfrac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore \cot(\theta+\varphi) = \dfrac{x-y}{x+y}\cot\theta$ (Showed) (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

17. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k = x\cos\beta + y\sin\beta$ …… (i)

$A = \sin\dfrac{\pi}{16}.\sin\dfrac{3\pi}{16}.\sin\dfrac{5\pi}{16}.\sin\dfrac{7\pi}{16}$ ……(ii)

(a) প্রমাণ কর যে,

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$$

প্রমাণ : L.H.S.

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13}+2\cos\dfrac{1}{2}(\dfrac{5\pi}{13}+\dfrac{3\pi}{13})\cos\dfrac{1}{2}(\dfrac{5\pi}{13}-\dfrac{3\pi}{13})$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13}+2\cos\dfrac{4\pi}{13}\cos\dfrac{\pi}{13}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13}+2\cos(\pi-\dfrac{9\pi}{13})\cos\dfrac{\pi}{13}$

$= 2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13} - 2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13}$

$= 0 =$ R.H.S. (Proved)

(b) (ii) এর সাহায্যে A এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $A = \sin\dfrac{\pi}{16}\sin\dfrac{3\pi}{16}\sin\dfrac{5\pi}{16}\sin\dfrac{7\pi}{16}$

$= \dfrac{1}{4}(2\sin\dfrac{7\pi}{16}\sin\dfrac{\pi}{16})(2\sin\dfrac{5\pi}{16}\sin\dfrac{3\pi}{16})$

$= \dfrac{1}{4}\{\cos(\dfrac{7\pi}{16}-\dfrac{\pi}{16})-\cos(\dfrac{7\pi}{16}+\dfrac{\pi}{16})\}\{\cos(\dfrac{5\pi}{16}-\dfrac{3\pi}{16})-\cos(\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{3\pi}{16})\}$

$= \dfrac{1}{4}(\cos\dfrac{3\pi}{8}-\cos\dfrac{\pi}{2})(\cos\dfrac{\pi}{8}-\cos\dfrac{\pi}{2})$

$= \dfrac{1}{4}\{\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8})-0\}(\cos\dfrac{\pi}{8}-0)$

$= \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{8}\sin 2.\dfrac{\pi}{8}$

$= \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$ (Ans.)

(c) (i) এর সাহায্যে দেখাও যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে ,

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - k = 0$………(1)

$x\cos\beta + y\sin\beta - k = 0$………(2).

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায় সাহায্যে (1) ও (2) হতে আমরা পাই ,

$$\frac{x}{-\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{y}{-\cos\beta+\cos\alpha} = \frac{k}{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{k}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$ উ: $\sqrt{2}/16$

$$= \frac{k}{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore \frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

প্রশ্নমালা –VII D

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\theta$

L.H.S.$= \dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \dfrac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \cot\theta =$ R.H.S. (proved)

1(b) $\sin 2x \ \tan 2x = \dfrac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x}$

L.H.S. $= \sin 2x \tan 2x$

$= \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \times \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$= \dfrac{4\tan^2 x}{1-\tan^4 x} =$ R.H.S. (proved)

2.(a) $4(\sin^3 10° + \cos^3 20°) = 3(\sin 10° + \cos 20°)$

L.H.S. $= 4(\sin^3 10° + \cos^3 20°)$

$= 4\sin^3 10° + 4\cos^3 20°$

$= 3\sin 10° - \sin(3.10°) + \cos(3.20°) + 3\cos 20°$

$= 3(\sin 10° + \cos 20°) - \sin 30° + \cos 60°$

$= 3(\sin 10° + \sin 20°) - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$

$= 3(\sin 10° + \cos 20°) =$ R.H.S. (Proved)

(b) $\sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60° - A) = \dfrac{3}{2}$

L.H.S. $= \sin^2(60° + A) + \sin^2 A + \sin^2(60 - A)$

$= \dfrac{1}{2}\{1 - \cos 2(60° + A) + 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2(60° - A)\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 - \cos(120° + 2A) - \cos(120° - 2A) - \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}[3 - \{\cos(120° + 2A) + \cos(120° - 2A)\} - \cos 2A]$

$= \dfrac{1}{2}\{3 - 2.\cos 120° \cos 2A - \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 - 2(-\dfrac{1}{2})\cos 2A - \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 + \cos 2A - \cos 2A\} = \dfrac{3}{2} =$ R.H.S.

2(c) $\cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°) = 3/2$ [ঢা.'০৩; কু.'০৭; য.'০৮]

L.H.S. $= \cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°)$

$= \dfrac{1}{2}\{1 + \cos 2(A - 120°) + 1 + \cos 2A + 1 + \cos 2(A + 120°)\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 + \cos(2A - 240°) + \cos(2A + 240°) + \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 + 2\cos 2A \cos 240° + \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 + 2\cos 2A \cos(180° + 60°) + \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 + 2\cos 2A(-\cos 60°) + \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}\{3 + 2.\cos 2A(-\dfrac{1}{2}) + \cos 2A\}$

$= \dfrac{1}{2}(3 - \cos 2A + \cos 2A) = \dfrac{3}{2} =$ R.H.S.

3.(a) $\cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x) = \dfrac{1}{4}(6\cos x - \cos 3x)$

L.H.S. $= \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$

$= \dfrac{1}{4}\{3\cos x + \cos 3x + 3\cos(60° - x) + \cos 3(60° - x) + 3\cos(60° + x) + \cos 3(60° + x)\}$

$= \dfrac{1}{4}[3\{\cos x + \cos(60° + x) + \cos(60° - x)\} + \cos 3x + \cos(180° + 3x) + \cos(180° - 3x)]$

$= \dfrac{1}{4}[3(\cos x + 2\cos 60° \cos x) + \cos 3x - \cos 3x - \cos 3x]$

$= \dfrac{1}{4}[3(\cos x + 2.\dfrac{1}{2}\cos x) - \cos 3x]$

$= \dfrac{1}{4}(3.2\cos x - \cos 3x)$

$= \dfrac{1}{4}(6\cos x - \cos 3x) =$ R.H.S. (Proved)

(b) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$ [ব.'০৩]

L.H.S.$= \cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x$

$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x +$

$\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\sin 3x$

$= \frac{1}{4}(\cos^2 3x + 3\cos x \cos 3x +$

$3\sin x \sin 3x - \sin^2 3x)$

$= \frac{1}{4}\{\cos 2.3x + 3\cos(3x - x)\}$

$= \frac{1}{4}\{\cos 3.2x + 3\cos 2x\} = \cos^3 2x =$ R.H.S.

3. (c) $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

L.H.S. $= \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$

$= \{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\}^2$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}\{\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)\}$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x =$ R.H.S.

3(d) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

L.H.S.$= \sin^4 x + \cos^4 x$

$= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1^2 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$ R.H.S. (Proved)

3(e) $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$

$= \frac{3}{2}$ [ঢা'১৫]

L.H.S.

$= \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$

$= \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) + \cos^4(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) +$

$\cos^4(\pi - \frac{\pi}{8})$

$= \cos^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}$

$= 2\{(\cos^2 \frac{\pi}{8})^2 + (\sin^2 \frac{\pi}{8})^2\}$

$= 2\{(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8})^2 - 2\cos^2 \frac{\pi}{8}\sin^2 \frac{\pi}{8}\}$

$= 2\{(1)^2 - \frac{1}{2}(2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8})^2\}$

$= 2\{1 - \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4})^2\} = 2\{1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\}$

$= 2\{1 - \frac{1}{4} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} =$ R.H.S (Proved)

4.(a) $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}}}$ [দি.'০৯; ঢা.'১৪]

L.H.S. $= \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{2\cos\theta}$

$= \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2\theta}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\theta)}}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\theta)}}}$

= R.H.S.

4.(b) $\frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$ [কু.'০৬; রা.'০৭;
ঢা.'০৭; চ., ব.'০৮; দি.'১১; সি.'১২; য.'১৩]

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$$

$$= \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 \cos 10^0}$$

$$= \frac{\cos 60^0 \cos 10^0 - \sin 60^0 \sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 20^0}$$

$$= \frac{4\cos(60^0 + 10^0)}{\sin(90^0 - 70^0)} = \frac{4\cos 70^0}{\cos 70^0} = 4 = \text{R.H.S.}$$

5. (a) $\tan\theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ হলে দেখাও যে, $\cos 2\theta = \sin 4\varphi$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan\theta = \frac{1}{7}$, $\tan\varphi = \frac{1}{3}$.

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1 - (1/7)^2}{1 + (1/7)^2}$$

$$= \frac{1 - 1/49}{1 + 1/49} = \frac{49 - 1}{49 + 1} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$$

$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi$$

$$= 2\,\frac{2\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi}\,\frac{1 - \tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi}$$

$$= \frac{4.\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{9})}{(1 + \frac{1}{9})^2} = \frac{4.\frac{1}{3}.\frac{8}{9}}{(\frac{10}{9})^2} = \frac{32}{27} \times \frac{81}{100} = \frac{24}{25}$$

$\therefore\ \cos 2\theta = \sin 4\varphi$ (Showed)

5.(b) $2\tan\alpha = 3\tan\beta$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $2\tan\alpha = 3\tan\beta$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{2}\tan\beta$$

$$\text{L.H.S.} = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{(\frac{3}{2} - 1)\tan\beta}{1 + \frac{3}{2}\tan^2\beta} = \frac{\tan\beta}{2 + 3\tan^2\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2 + 3\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta + 3\sin^2\beta}$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{2.2\cos^2\beta + 3.2\sin^2\beta}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2(1 + \cos 2\beta) + 3(1 - \cos 2\beta)}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2 + 2\cos 2\beta + 3 - 3\cos 2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$$

$= \text{R.H.S.}$ (Proved)

6.(a) $x = \sin\frac{\pi}{18}$ হলে দেখাও যে,

$$\mathbf{8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0}$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$

$$\therefore\ 4\sin^3\frac{\pi}{18} = 3\sin\frac{\pi}{18} - \sin 3\frac{\pi}{18}$$

$$\Rightarrow 4x^3 = 3x - \sin\frac{\pi}{6} \qquad [\because x = \sin\frac{\pi}{18}]$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

এখন, $8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

$$= 2x\,(4x^3 - 3x + \frac{1}{2}) + 1\,(4x^3 - 3x + \frac{1}{2})$$

$$= 2x \times 0 + 1 \times 0 = 0 \quad \text{(Showed)}$$

6(b) প্রমাণ কর ঃ $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ [রা.'১১]

প্রমাণ : $\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)$

$= \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta\sin 2\theta$

$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta).\ 2\sin\theta\cos\theta$

$= 8\cos^5\theta - 6\cos^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta - 2\cos\theta(3\sin^2\theta - 4\sin^4\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta -$

$2\cos\theta\{3(1-\cos^2\theta)-4(1-\cos^2\theta)^2\}$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta -$
$2\cos\theta\{3-3\cos^2\theta-4(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\}$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - (6\cos\theta - 6\cos^3\theta - 8\cos\theta + 16\cos^3\theta - 8\cos^5\theta)$

$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 6\cos\theta + 6\cos^3\theta + 8\cos\theta - 16\cos^3\theta + 8\cos^5\theta$

$\therefore \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

7.(a) $\tan\alpha \tan\beta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(a - b\cos 2\alpha)(a - b\cos 2\beta) = a^2 - b^2$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\tan\alpha\tan\beta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha\tan^2\beta = \frac{a-b}{a+b}$

$\Rightarrow (a-b) = (a+b)\tan^2\alpha\tan^2\beta \cdots\cdots(1)$

L.H.S $= (a - b\cos 2\alpha)(a - b\cos 2\beta)$

$= \left\{a - b\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right\}\left\{a - b\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}\right\}$

$= \frac{a + a\tan^2\alpha - b + b\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{a + a\tan^2\beta - b + b\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$= \frac{(a-b)+(a+b)\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(a-b)+(a+b)\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$= \frac{(a+b)\tan^2\alpha\tan^2\beta + (a+b)\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(a+b)\tan^2\alpha\tan^2\beta + (a+b)\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$= \frac{(a+b)\tan^2\alpha(\tan^2\beta+1)}{1+\tan^2\alpha} \times \frac{(a+b)\tan^2\alpha(\tan^2\beta+1)}{1+\tan^2\beta}$

$= (a+b)^2\tan^2\alpha\tan^2\beta = (a+b)^2 . \frac{a-b}{a+b}$

$= a^2 - b^2 =$ R.H.S. (Proved)

7. (b) যদি α ও β কোণদ্বয় ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম এবং $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta}{3\cos 2\beta - 1}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta - 3\cos 2\beta + 1}{3 - \cos 2\beta + 3\cos 2\beta - 1}$

$\Rightarrow \frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{4(1-\cos 2\beta)}{2(1+\cos 2\beta)}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{2.2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta} = 2\tan^2\beta$

$\therefore \tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$ (Showed)

7(c) $\cos A \sin(A - \frac{\pi}{6})$ এর মান বৃহত্তম হলে A এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\cos A \sin(A - \frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2}.2\cos A\cos(A - \frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2}\{\sin(A + A - \frac{\pi}{6}) - \sin(A - A + \frac{\pi}{6})\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \sin\frac{\pi}{6}\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\}$

ইহা বৃহত্তম হলে, $\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$

$\Rightarrow \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6}$

$\Rightarrow 2A = \frac{4\pi}{6} \therefore A = \frac{\pi}{3}$ (Ans.)

সম্ভাব্য ধাপসহ সমস্যা :

প্রমাণ কর যে,

8. (a) $\tan\theta\,(1+\sec 2\theta) = \tan 2\theta$

L.H.S. $= \tan\theta\,(1+\sec 2\theta)$

$= \tan\theta\,(1+\frac{1}{\cos 2\theta})$

$= \tan\theta\,(1+\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta})$ (১)

$= \tan\theta\,(\frac{1-\tan^2\theta+1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta})$

$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta =$ R.H.S. (proved) (১)

8.(b) $\frac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A} = \tan A$

L.H.S. $= \frac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A}$

$= \frac{\sin A+2\sin A\cos A}{1+\cos A+2\cos^2 A-1}$ (১)

$= \frac{\sin A(1+2\cos A)}{\cos A(1+2\cos A)} = \tan A =$ R.H.S. (১)

8. (c) $\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x} = 1-\frac{1}{2}\sin 2x$

L.H.S. $= \frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}$

$= \frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x-\cos x\sin x)}{\cos x+\sin x}$

$= 1-\cos x\sin x = 1-\frac{1}{2}\sin 2x =$ R.H.S. (১)

9. $\frac{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})-1}{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})+1} = \sin 2\theta$

L.H.S. $= \frac{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})-1}{\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})+1}$

$= -\frac{1-\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})}{1+\tan^2(\theta+\frac{\pi}{4})} = -\cos 2(\theta+\frac{\pi}{4})$ (১)

$= -\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta) = -(-\sin 2\theta)$

$= \sin 2\theta =$ R.H.S (Proved) (১)

10. $\tan(\alpha+\frac{\pi}{3}) + \tan(\alpha-\frac{\pi}{3}) = \frac{4\sin 2\alpha}{1-4\sin^2\alpha}$

L.H.S. $= \tan(\alpha+\frac{\pi}{3}) + \tan(\alpha-\frac{\pi}{3})$

$= \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})} + \frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})}$

$= \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})}$

$= \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\frac{\pi}{3})}$ (১) + (১)

$= \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+(-\frac{1}{2})}$

$= \frac{4\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1} = \frac{4\sin 2\alpha}{2(1-2\sin^2\alpha)-1}$ (১)

$= \frac{4\sin 2\alpha}{1-4\sin^2\alpha} =$ R.H.S. (Proved) (১)

11. $4\cos^3 x\sin 3x + 4\sin^3 x\cos 3x = 3\sin 4x$

L.H.S. $= 4\cos^3\sin 3x + 4\sin^3 x\cos 3x$

$= (\cos 3x + 3\cos x)\sin 3x + (3\sin x - \sin 3x)\cos 3x$ (১)

$= \cos 3x\sin 3x - \sin 3x\cos 3x + 3(\sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x)$

$= 3\sin(3x+x)$ (১)

$= 3\sin 4x =$ R.H. S **(Proved)**

12. $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$ হলে দেখাও যে, $\cos 2\varphi = 1 + 2\cos 2\theta$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$

এখন , $1 + 2\cos 2\theta = 1 + 2\frac{1-\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$ (১)

$= \frac{1+\tan^2\theta + 2 - 2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{3-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{3-1-2\tan^2\varphi}{1+1+2\tan^2\varphi} = \frac{2(1-\tan^2\varphi)}{2(1+\tan^2\varphi)}$

$= \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \cos 2\varphi$

$\therefore \cos 2\varphi = 1 + \cos 2\theta$ (Showed) (১)

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে , $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\varphi$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 1 = 2\tan^2\varphi$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\varphi} = \frac{2}{\tan^2\theta - 1}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{2-\tan^2\theta+1}{2+\tan^2\theta-1}$

$\Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{3-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ (১)

$= \frac{1+\tan^2\theta + 2(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + 2\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\therefore \cos 2\varphi = 1 + 2\cos 2\theta$ (১)

13. $\cos\alpha = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ হলে প্রমাণ কর যে ,

$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})$, $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x^3})$

, $\cos 4\alpha = \frac{1}{2}(x^4 + \frac{1}{x^4})$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\cos\alpha = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ (১)

$= 2.\left(\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\right)^2 - 1$

$= 2.\frac{1}{4}(x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - 1$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})$

$\therefore \cos 2\alpha = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})$ (১)

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ (১)

$= 4\left(\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\right)^3 - 3.\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$

$= 4.\frac{1}{8}(x^3 + 3x^2.\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})$

$- 3.\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$

$= \frac{1}{2}(x^3 + 3x + 3.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 3x - 3.\frac{1}{x})$

$= \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x^3})$

$\therefore \cos 3\alpha = \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x^3})$ [যোজন-বিয়োজন করে] (১)

$\cos 4\alpha = \cos 2.2\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$ (১)

$= 2.\{\frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})\}^2 - 1$

$= \frac{1}{2}(x^4 + 2.x^2.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}) - 1$

$= \frac{1}{2}(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} - 2)$

$\therefore \cos 4\alpha = (x^4 + \frac{1}{x^4})$ (১)

14. $\tan\theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ হলে দেখাও যে,

$\sin 2\theta = \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x.\sin 2y}$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$$=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$$

$$\sin 2\Theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}}{1+\{\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}\}^2} \quad (১)$$

$$=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)}\times\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x-y)+\sin^2(x+y)}$$

$$=\frac{2\sin(x+y)\cos(x-y)}{\frac{1}{2}\{1+\cos 2(x-y)\}+\frac{1}{2}\{1-\cos 2(x+y)\}} \quad (১)$$

$$=\frac{\sin(x+y+x-y)+\sin(x+y-x+y)}{\frac{1}{2}\{2+\cos 2(x-y)-\cos 2(x+y)\}} \quad (১)$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 2y}{1+\frac{1}{2}.2\sin\frac{2(x-y)+2(x+y)}{2}\sin\frac{2(x+y)-2(x-y)}{2}}$$

$$\therefore \quad \sin 2\Theta=\frac{\sin 2x+\sin 2y}{1+\sin 2x+\sin 2y} \quad \text{(Showed)} \quad (১)$$

15. $\tan\Theta=\frac{y}{x}$ **হলে দেখাও যে,**

$$x\cos 2\Theta+y\sin 2\Theta=x.$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $\tan\Theta=\frac{y}{x}$

$$x\cos 2\Theta+y\sin 2\Theta$$

$$=x\,\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+y\,\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \quad (১)$$

$$=x\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}+y\frac{2\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+y(\frac{2y}{x}\times\frac{x^2}{x^2+y^2})$$

$$=\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^3-xy^2+2xy^2}{x^2+y^2}=\frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad x\cos 2\Theta+y\sin 2\Theta=x \quad \text{(Showed)} \quad (১)$$

16. $\sqrt{2}\cos A=\cos B+\cos^3 B$ **এবং** $\sqrt{2}\sin A=\sin B-\sin^3 B$ **হলে দেখাও যে,** $\sin(A-B)=\pm\frac{1}{3}$.

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\sqrt{2}\cos A=\cos B+\cos^3 B$

$$\sqrt{2}\sin A=\sin B-\sin^3 B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A \quad (১)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin B-\sin^3 B)\cos B-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B(\cos B+\cos^3 B)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B)=\sin B\cos B-\sin^3 B\cos B-\sin B\cos B-\sin B\cos^3 B$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B=-\sin B\cos B(\sin^2 B+\cos^2 B)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(A-B)=-\frac{1}{2}\sin 2B \quad (১)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sin(A-B)=-\sin 2B \;\cdots\cdots (1)$$

$$\sqrt{2}\cos(A-B)=\sqrt{2}\cos A\cos B-\sqrt{2}\sin A\sin B$$

$$=(\cos B+\cos^3 B)\cos B-\sin B(\sin B-\sin^3 B)$$

$$=\cos^2 B+\sin^2 B+\cos^4 B-\sin^4 B$$

$$=1+(\cos^2 B+\sin^2 B)(\cos^2 B-\sin^2 B)$$

$$\therefore \sqrt{2}\cos(A-B)=1+\cos 2B \quad (১)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(A-B)-1=\cos 2B \;\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) ও (2) বর্গ করে যোগ করলে আমরা পাই ,

$$(2\sqrt{2})^2\sin^2(A-B)+(\sqrt{2})^2\cos^2(A-B)+1-2\sqrt{2}\cos(A-B)=\sin^2 2B+\cos^2 2B$$

$$\Rightarrow 8\{1-\cos^2(A-B)\}+2\cos^2(A-B)+1-2\sqrt{2}\cos(A-B)=1$$

$$\Rightarrow 8-8\cos^2(A-B)+2\cos^2(A-B)-2\sqrt{2}\cos(A-B)=0$$

$$\Rightarrow 6\cos^2(A-B)+2\sqrt{2}\cos(A-B)-8=0$$

$$\Rightarrow 3\cos^2(A-B)+\sqrt{2}\cos(A-B)-4=0$$

$$\Rightarrow 3\cos^2(A-B)+3\sqrt{2}\cos(A-B)-2\sqrt{2}\cos(A-B)-4=0$$

$\Rightarrow 3\cos(A-B)\{\cos(A-B)+\sqrt{2}\}$
$-2\sqrt{2}\{\cos(A-B)+\sqrt{2}\}=0$

$\Rightarrow \{\cos(A-B)+\sqrt{2}\}\{3\cos(A-B)-2\sqrt{2}\}=0$

$\therefore \cos(A-B)=-\sqrt{2}$ অথবা, $\cos(A-B)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (১)

কিন্তু $-1\le \cos\theta \le 1$ বলে $\cos(A-B)\neq -\sqrt{2}$ (১)

$\therefore \cos(A-B)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin(A-B)=\pm\sqrt{1-\cos^2(A-B)}$

$=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{8}{9}}$

$\therefore \sin(A-B)=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$ (১)

17. দেখাও যে, $\frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)$

প্রমাণঃ $\tan\theta(1+\sec 2\theta)=\tan\theta\left(1+\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$ (১)

$=\tan\theta\left(\frac{1-\tan^2\theta+1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$

$=\tan\theta\cdot\frac{2}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$ (১)

$\therefore \frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}=1+\sec 2\theta$

অনুরূপভাবে, $\frac{\tan 2^2\theta}{\tan 2\theta}=1+\sec 2^2\theta$,

$\frac{\tan 2^3\theta}{\tan 2^2\theta}=1+\sec 2^3\theta,\cdots,$

$\frac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta}=1+\sec 2^n\theta$ (১)

$\therefore \frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan 2^2\theta}{\tan 2\theta}\cdot\frac{\tan 2^3\theta}{\tan 2^2\theta}\cdots\cdots\frac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta}$
$=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)$
$(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)$
$(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)$ (১)

18.(a) দেখাও যে, $\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}-1)$

প্রমাণ : আমরা পাই ,

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=4\cos^2\theta-1$

$=4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)-1$ (১)

$=2+2\cos 2\theta-1$

$\therefore 2\cos\theta-1=\frac{2\cos 2\theta+1}{2\cos\theta+1}$

অনুরূপভাবে,

$2\cos 2\theta-1=\frac{2\cos 2^2\theta+1}{2\cos 2\theta+1}$

$2\cos 2^2\theta-1=\frac{2\cos 2^3\theta+1}{2\cos 2^2\theta+1}$

$2\cos 2^{n-1}\theta-1=\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}$ (১)

গুণ করে আমরা পাই ,

$(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$

$\frac{2\cos 2\theta+1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{2\cos 2^2\theta+1}{2\cos 2\theta+1}\cdot\frac{2\cos 2^3\theta+1}{2\cos 2^2\theta+1}\cdots\cdots\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos 2^{n-1}\theta+1}=\frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}$

$\therefore \frac{2\cos 2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}=(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)$
$(2\cos 2^2\theta-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$ (১)

18.(b) $13\theta=\pi$ হলে দেখাও যে, $\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 3\theta.\cos 4\theta.\cos 5\theta.\cos 6\theta=\frac{1}{2^6}$

প্রমাণ : $\cos\theta \cos2\theta \cos3\theta \cos4\theta \cos5\theta \cos6\theta$

আমরা জানি, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ (১)

$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\therefore \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \cos 2\theta$

$= \frac{1}{2^2}\sin 4\theta$

অনুরূপভাবে, $\sin\theta \cos\theta \cos 2\theta.\cos4\theta = \frac{1}{2^3}\sin 8\theta$

$\sin\theta \cos\theta \cos 2\theta.\cos4\theta \cos 8\theta = \frac{1}{2^3}\sin 16\theta$

… … … … … … … … … … … …

… … … …… … … … …… … … …

$\sin\theta \cos\theta \cos 2\theta.\cos4\theta \cos 8\theta \cos 16\theta$

$\cos 32 \theta = \frac{1}{2^6}\sin 64\theta$ (১)

$\Rightarrow \sin\theta \cos\theta \cos 2\theta.\cos4\theta \cos (13\theta - 5\theta)$
$\cos (13\theta + 3\theta) \cos (26\theta + 6\theta)$

$= \frac{1}{2^6}\sin(65\theta - \theta)$

$\Rightarrow \sin\theta \cos\theta \cos 2\theta.\cos 4\theta \cos (\pi - 5\theta)$
$\cos (\pi + 3\theta) \cos (2\pi + 6\theta)$

$= \frac{1}{2^6}\sin(5\pi - \theta)$

$\Rightarrow \sin\theta \cos\theta \cos 2\theta.\cos 4\theta (-\cos 5\theta)$

$(-\cos 3\theta).\cos 6\theta = \frac{1}{2^6}(\sin\theta)$ (১)

$\therefore \cos \theta \cos 2\theta \cos3\theta \cos 4\theta$

$\cos 5\theta \cos 6\theta = \frac{1}{2^6}$ (Showed) (১)

18.(c) $\theta = \frac{\pi}{2^n + 1}$ **হলে প্রমাণ কর যে ,** $2^n \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots\cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{2^n + 1} \Rightarrow 2^n\theta + \theta = \pi$

$\Rightarrow 2^n\theta = \pi - \theta \Rightarrow \sin 2^n\theta = \sin(\pi - \theta)$

$\Rightarrow 2 \sin 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-1}\theta = \sin\theta$ (১) + (১)

$\Rightarrow 2\cos 2^{n-1}\theta(2\sin 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-2}\theta) = \sin\theta$

$\Rightarrow 2^2 \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \sin 2^{n-2}\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-3}\theta \cdots\cdots$
$\cdots \sin 2^{n-n}\theta \cos 2^{n-n}\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-3}\theta \cdots\cdots$
$\cdots \sin 2^0\theta \cos 2^0\theta = \sin\theta$ (১)

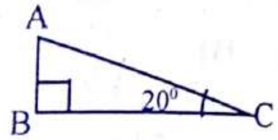
$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1}\theta \cos 2^{n-2}\theta \cos 2^{n-3}\theta \cdots\cdots$
$\cdots \sin\theta \cos\theta = 1$

$\therefore 2^n \cos \theta. \cos 2\theta. \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1$ (১)
(Showed)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

19. দৃশ্যকল্প -১: $A = \tan\theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta$;

দৃশ্যকল্প -২:



(a) প্রমাণ কর যে, $\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ [রা. '১১]

L.H.S. $= \sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2})\} - \frac{1}{2}\{1 - \cos2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})\}$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)\}$

$= \frac{1}{2}\{\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)\}$

$= \frac{1}{2}.2\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta =$ R.H.S.

(b) দৃশ্যকল্প -১ হতে প্রমাণ কর যে, $A = \cot\theta$ [য. '০২; সি. '০৮]

প্রমাণ ঃ $4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta$

$= 4(\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} + 2\frac{\cos 8\theta}{\sin 8\theta})$

$= 4(\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} + \frac{2\cos 8\theta}{2\sin 4\theta \cos 4\theta})$

$= 4(\frac{\sin^2 4\theta + 1 - 2\sin^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta})$

$= 4(\frac{1-\sin^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta}) = 4(\frac{\cos^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta})$

$= 4 \cot 4\theta$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় ,

$2 \tan 2\theta + 4 \cot 4\theta = 2 \cot 2\theta$ এবং

$\tan\theta + 2\cot 2\theta = \cot\theta$

L.H.S.$= \tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta$

$= \tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\cot 4\theta$

$= \tan\theta + 2\cot 2\theta = \cot\theta =$ R.H.S. (Proved)

(c) দৃশ্যকল্প -২ হতে দেখাও যে, $\sqrt{3}\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{BC} = 4$

[ঢা.'১০;চ.'১৪,'১৫]

দৃশ্যকল্প -২ হতে পাই, $\frac{AC}{AB} = \text{cosec } 20^0$ ও

$\frac{AC}{BC} = \sec 20^0$.

$\sqrt{3}\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}\,\text{cosec}\, 20^0 - \sec 20^0$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^0} - \frac{1}{\cos 20^0}$

$= \frac{\sqrt{3}\cos 20^0 - \sin 20^0}{\sin 20^0 \cos 20^0}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{2}\sin 20^0}{\frac{1}{2}\sin 20^0 \cos 20^0}$

$= \frac{\cos 30^0 \cos 20^0 - \sin 30^0 \sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 40^0}$

$= \frac{4\cos(30^0 + 20^0)}{\sin(90^0 - 50^0)} = \frac{4\cos 50^0}{\cos 50^0} = 4$

$\therefore \sqrt{3}\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{BC} = 4$

প্রশ্নমালা –VII E

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

L.H.S.$= \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$= \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2}{(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2} = \left(\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)^2$

$= \left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right)^2 = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) =$ R.H.S

1. (b) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2(\frac{\alpha}{2} - 60°) + \cos^2(\frac{\alpha}{2} + 60°) = \frac{3}{2}$

L.H.S. $= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2(\frac{\alpha}{2} - 60°)$

$+ \cos^2(\frac{\alpha}{2} + 60°)$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2.\frac{\alpha}{2} + 1 + \cos 2.(\frac{\alpha}{2} - 60°)$

$+ 1 + \cos 2(\frac{\alpha}{2} + 60°)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + \cos(\alpha - 120°) + \cos(\alpha + 120°)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + 2\cos\alpha\cos 120°\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + 2\cos\alpha.(-\frac{1}{2})\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha - \cos\alpha\} = \frac{3}{2}$

1(c) $\sin^2(\frac{\alpha}{2} - 36°) + \sin^2(\frac{\alpha}{2} + 36°)$

$= \frac{1}{4}\{4 - (\sqrt{5} - 1)\cos\alpha\}$

$= 4(\frac{\sin^2 4\theta + 1 - 2\sin^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta})$

$= 4\frac{1-\sin^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta}) = 4(\frac{\cos^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta})$

$= 4\cot 4\theta$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় ,

$2\tan 2\theta + 4\cot 4\theta = 2\cot 2\theta$ এবং

$\tan\theta + 2\cot 2\theta = \cot\theta$

L.H.S.= $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta$

$= \tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\cot 4\theta$

$= \tan\theta + 2\cot 2\theta = \cot\theta$ = R.H.S. (Proved)

(c) দৃশ্যকল্প -২ হতে দেখাও যে, $\sqrt{3}\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{BC} = 4$

[ঢা.'১০;চ.'১৪,'১৫]

দৃশ্যকল্প -২ হতে পাই, $\frac{AC}{AB} = \text{cosec } 20^0$ ও

$\frac{AC}{BC} = \sec 20^0$.

$\sqrt{3}\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}\,\text{cosec}\, 20^0 - \sec 20^0$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^0} - \frac{1}{\cos 20^0}$

$= \frac{\sqrt{3}\cos 20^0 - \sin 20^0}{\sin 20^0 \cos 20^0}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{2}\sin 20^0}{\frac{1}{2}\sin 20^0 \cos 20^0}$

$= \frac{\cos 30^0 \cos 20^0 - \sin 30^0 \sin 10^0}{\frac{1}{4}\sin 40^0}$

$= \frac{4\cos(30^0 + 20^0)}{\sin(90^0 - 50^0)} = \frac{4\cos 50^0}{\cos 50^0} = 4$

$\therefore \sqrt{3}\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{BC} = 4$

প্রশ্নমালা –VII E

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

L.H.S.= $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$= \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2}{(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2} = \left(\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)^2$

$= \left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right)^2 = \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) =$ R.H.S

1. (b) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2(\frac{\alpha}{2} - 60°) + \cos^2(\frac{\alpha}{2} + 60°) = \frac{3}{2}$

L.H.S. $= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2(\frac{\alpha}{2} - 60°)$

$+ \cos^2(\frac{\alpha}{2} + 60°)$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2.\frac{\alpha}{2} + 1 + \cos 2.(\frac{\alpha}{2} - 60°)$

$+ 1 + \cos 2(\frac{\alpha}{2} + 60°)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + \cos(\alpha - 120°) + \cos(\alpha + 120°)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + 2\cos\alpha\cos 120°\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha + 2\cos\alpha.(-\frac{1}{2})\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos\alpha - \cos\alpha\} = \frac{3}{2}$

1(c) $\sin^2(\frac{\alpha}{2} - 36°) + \sin^2(\frac{\alpha}{2} + 36°)$

$= \frac{1}{4}\{4 - (\sqrt{5} - 1)\cos\alpha\}$

L.H.S.$= \sin^2(\frac{\alpha}{2} - 36°) + \sin^2(\frac{\alpha}{2} + 36°)$

$= \frac{1}{2}\{1 - \cos 2(\frac{\alpha}{2} - 36°) + 1 - \cos 2(\frac{\alpha}{2} + 36°)\}$

$= \frac{1}{2}[2 - \{\cos(\alpha - 72°) + \cos(\alpha + 72°)\}]$

$= \frac{1}{2}\{2 - 2\cos\alpha\cos 72°\} = 1 - \cos\alpha\cos 72°$

$= 1 - \cos\alpha.\cos(90° - 18°)$

$= 1 - \cos\alpha \sin 18°$

$= 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\cos\alpha$

$= \frac{1}{4}\{4 - (\sqrt{5} - 1)\cos\alpha\} =$ R.H.S. (Proved)

2.(a) $2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos 11°15'$

$= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ [কু.'০৭,'১৩; চ.'০১; রা.'০৩]

R.H.S.$= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}}$

$= \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 45^0)}}$

$= \sqrt{2 + \sqrt{2.2\cos^2 22^0 30'}}$

$= \sqrt{2 + 2\cos 22^0 30'} = \sqrt{2(1 + \cos 22^0 30')}$

$= \sqrt{2.2\cos^2 11^0 15'} = 2\cos 11°15' =$ M.H.S.

আবার, $2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos 11°15'$

$\therefore 2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos 11°15' = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

2(b) $\tan(7\frac{1}{2})^0 = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$

L.H.S. $= \tan(7\frac{1}{2})^0 = \tan 7^0 30'$

$= \frac{\sin 7^0 30'}{\cos 7^0 30'} = \frac{2\sin^2 7^0 30'}{2\sin 7^0 30' \cos 7^0 30'}$

$= \frac{1 - \cos 15^0}{\sin 15^0} = \frac{1 - \cos(45^0 - 30^0)}{\sin(45^0 - 30^0)}$

$= \frac{1 - (\cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0)}{\sin 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \sin 30^0}$

$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$

$= \frac{2\sqrt{6} - 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{3 - 1}$

$= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 =$ R.H.S (Proved)

3. $\frac{\sec\alpha - \tan\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha} = \cot^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$

L.H.S. $= \frac{\sec\alpha - \tan\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha}$

$= \frac{\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$

$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2})^2}{(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})^2} = \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(\cot\frac{\alpha}{2} - 1)}{\cos\frac{\alpha}{2}(\cot\frac{\alpha}{2} + 1)}\right)^2$

$= \left(\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\pi}{2} - 1}{\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \left(\cot(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2})\right)^2$

$= \cot^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}) =$ R.H.S. (Proved)

4. $\cos\Theta = \frac{a\cos\varphi - b}{a - b\cos\varphi}$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{a+b}} = \frac{\tan\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{a-b}}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $\cos\theta = \dfrac{a\cos\varphi - b}{a - b\cos\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a\dfrac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} - b}{a - b\dfrac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$\text{or,} \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a(1-\tan^2\frac{\varphi}{2}) - b(1+\tan^2\frac{\varphi}{2})}{a(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}) - b(1-\tan^2\frac{\varphi}{2})}$$

$$\text{or,} \frac{2}{-2\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a(1-\tan^2\frac{\varphi}{2}+1+\tan^2\frac{\varphi}{2}) - b(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}+1-\tan^2\frac{\varphi}{2})}{a(1-\tan^2\frac{\varphi}{2}-1-\tan^2\frac{\varphi}{2}) - b(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}-1+\tan^2\frac{\varphi}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2a-2b}{-2a\tan^2\frac{\varphi}{2} - 2b\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a-b}{(a+b)\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2\frac{1}{2}\theta}{a+b} = \frac{\tan^2\frac{1}{2}\varphi}{a-b}$$

$$\therefore \frac{\tan\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{a+b}} = \frac{\tan\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{a-b}} \quad \text{(Showed)}$$

5. (a) $\sec(\theta+\alpha) + \sec(\theta-\alpha) = 2\sec\theta$ হলে দেখাও যে , $\cos\theta = \pm\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

প্রমাণ : $\sec(\theta+\alpha) + \sec(\theta-\alpha) = 2\sec\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta+\alpha)} + \frac{1}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\theta\cos\alpha}{\cos^2\theta - \sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\cos\alpha = \cos^2\theta - \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\,(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 1+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(Showed)}$$

5(b) $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে দেখাও যে ; $\tan\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2} = 5+2\sqrt{6}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \text{[যোজন–বিয়োজন করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{A-B}{2}\right) = 5+2\sqrt{6}$$

(Showed)

6. $A + B \neq 0$ এবং $\sin A + \sin B = 2\sin(A+B)$ হলে দেখাও যে, $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$ **[কু.'০১]**

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin A + \sin B = 2\sin(A+B)$

$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$= 2\times 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-$

$2\cos\frac{1}{2}(A+B)\}=0$

$A+B\neq 0$ বলে $\sin\frac{1}{2}(A+B)\neq 0$

$\therefore \cos\frac{1}{2}(A-B)-2\cos\frac{1}{2}(A+B)=0$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-$

$2(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})=0$

$\Rightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$ (Showed)

7 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ **সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α,β দ্বারা সিদ্ধ হলে দেখাও যে,**

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

সমাধান ঃ $\cos\theta+b\sin\theta=c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α ও β দ্বারা সিদ্ধ বলে,

$a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$

এবং $a\cos\beta+b\sin\beta=c$

$\therefore a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\beta+b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\alpha-\cos\beta)=b(\sin\beta-\sin\alpha)$

$\Rightarrow a.2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

$=b.2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

$\alpha\neq\beta$ বলে, $\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\neq 0$

$\therefore a\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=b\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$

এখন, L.H.S. $=\sin(\alpha+\beta)=\sin 2.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$=\frac{2\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\tan^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{2\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2}$

$=\frac{2b}{a}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}=$ R.H.S.

8. প্রমাণ কর যে, $\tan 6^0\tan 42^0\tan 66^0\tan 78^0=1$

প্রমাণ ঃ

L.H.S. $=\tan 6^0\tan 42^0\tan 66^0\tan 78^0$

$=\tan 6^0\tan 66^0\tan 42^0\tan 78^0$

$=\tan(36^0-30^0)\tan(36^0+30^0)$

$\tan(60^0-18^0)\tan(60^0+18^0)$

$=\frac{\tan^2 36^0-\tan^2 30^0}{1-\tan^2 36^0\tan^2 30^0}\frac{\tan^2 60^0-\tan^2 18^0}{1-\tan^2 60^0\tan^2 18^0}$

$=\frac{5-2\sqrt{5}-\frac{1}{3}}{1-(5-2\sqrt{5})\frac{1}{3}}\frac{3-\frac{1}{5}(5-2\sqrt{5})}{1-3.\frac{1}{5}(5-2\sqrt{5})}$

$=\frac{15-6\sqrt{5}-1}{3-5+2\sqrt{5}}\frac{15-5+2\sqrt{5}}{5-15+6\sqrt{5}}$

$=\frac{14-6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}\frac{10+2\sqrt{5}}{6\sqrt{5}-10}$

$=\frac{2(7-3\sqrt{5}).2(5+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}-1).2(3\sqrt{5}-5)}=\frac{(7-3\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)(3\sqrt{5}-5)}$

$=\frac{35-15\sqrt{5}+7\sqrt{5}-15}{15-5\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5}=\frac{20-8\sqrt{5}}{20-8\sqrt{5}}$

$=1=$ R.H.S. (Proved)

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$= 2\times 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B) -$

$2\cos\frac{1}{2}(A+B)\} = 0$

$A+B \neq 0$ বলে $\sin\frac{1}{2}(A+B) \neq 0$

$\therefore \cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\cos\frac{1}{2}(A+B) = 0$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} -$

$2(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}) = 0$

$\Rightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ (Showed)

7 $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α, β দ্বারা সিদ্ধ হলে দেখাও যে,

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

সমাধান ঃ $\cos\theta + b\sin\theta = c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α ও β দ্বারা সিদ্ধ বলে,

$a\cos\alpha + b\sin\alpha = c$

এবং $a\cos\beta + b\sin\beta = c$

$\therefore a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$

$\Rightarrow a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\sin\beta - \sin\alpha)$

$\Rightarrow a.2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

$= b.2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

$\alpha \neq \beta$ বলে, $\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha) \neq 0$

$\therefore a\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = b\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{b}{a}$

এখন, L.H.S. $= \sin(\alpha+\beta) = \sin 2.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$= \frac{2\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\tan^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{2\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2}$

$= \frac{2b}{a}\times\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2} =$ R.H.S.

8. প্রমাণ কর যে, $\tan 6^0 \tan 42^0 \tan 66^0 \tan 78^0 = 1$

প্রমাণ ঃ

L.H.S. $= \tan 6^0 \tan 42^0 \tan 66^0 \tan 78^0$

$= \tan 6^0 \tan 66^0 \tan 42^0 \tan 78^0$

$= \tan(36^0-30^0)\tan(36^0+30^0)$

$\tan(60^0-18^0)\tan(60^0+18^0)$

$= \frac{\tan^2 36^0 - \tan^2 30^0}{1-\tan^2 36^0\tan^2 30^0}\frac{\tan^2 60^0 - \tan^2 18^0}{1-\tan^2 60^0\tan^2 18^0}$

$= \frac{5-2\sqrt{5}-\frac{1}{3}}{1-(5-2\sqrt{5})\frac{1}{3}}\frac{3-\frac{1}{5}(5-2\sqrt{5})}{1-3.\frac{1}{5}(5-2\sqrt{5})}$

$= \frac{15-6\sqrt{5}-1}{3-5+2\sqrt{5}}\frac{15-5+2\sqrt{5}}{5-15+6\sqrt{5}}$

$= \frac{14-6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}\frac{10+2\sqrt{5}}{6\sqrt{5}-10}$

$= \frac{2(7-3\sqrt{5}).2(5+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}-1).2(3\sqrt{5}-5)} = \frac{(7-3\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)(3\sqrt{5}-5)}$

$= \frac{35-15\sqrt{5}+7\sqrt{5}-15}{15-5\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5} = \frac{20-8\sqrt{5}}{20-8\sqrt{5}}$

$= 1 =$ R.H.S. (Proved)

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

প্রমাণ কর যে,

9. $\cos^2(\frac{\alpha}{2} - 18°) + \cos^2(\frac{\alpha}{2} + 18°) = \frac{1}{4}\{4 + (\sqrt{5} + 1)\cos\alpha\}$

L.H.S.$= \cos^2(\frac{\alpha}{2} - 18°) + \cos^2(\frac{\alpha}{2} + 18°)$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos 2(\frac{\alpha}{2} - 18°) + 1 + \cos 2(\frac{\alpha}{2} + 18°)\}$ (১)

$= \frac{1}{2}\{2 + \cos(\alpha - 36°) + \cos(\alpha + 36°)\}$

$= \frac{1}{2}(2 + 2\cos\alpha\cos 36°)$

$= \{1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)\cos\alpha\}$

$= \frac{1}{4}\{4 + (\sqrt{5} + 1)\cos\alpha\} =$ R.H.S. (১)

10.(a) $\sin(292.5)^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

L.H.S. $= \sin(292.5)^0$

$= \sin\{270^0 + (22.5)^0\} = -\cos(22.5)^0$ (১)

$= -\sqrt{\cos^2(22.5)^0} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 45^0)}$ (১)

$= -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}}$

$= -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} =$ R.H.S. (১)

10.(b) $\cot(142.5)^0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6}$

L.H.S. $= \cot(142.5)^0 = \cot 142^0 30'$

$= \cot(180^0 - 37^0 30') = -\cot 37^0 30'$ (১)

$= -\frac{\cos 37^0 30'}{\sin 37^0 30'} = -\frac{2\cos^2 37^0 30'}{2\sin 37^0 30' \cos 37^0 30'}$

$= -\frac{1 + \cos 75^0}{\sin 75^0} = -\frac{1 + \cos(45^0 + 30^0)}{\sin(45^0 + 30^0)}$ (১)

$= -\frac{1 + \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0}{\sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0}$

$= -\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$

$= -\frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$ (১)

$= -\frac{2\sqrt{6} + 3 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}{3 - 1}$

$= -\frac{2\sqrt{6} + 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{2}$

$= -(\sqrt{6} + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{6}$ (১)

10(c) $\tan(82.5)^0 = \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$

L.H.S. $= \tan(82.5)^0 = \tan 82^0 30'$

$= \tan(90^0 - 7^0 30') = \cot 7^0 30'$ (১)

$= \frac{\cos 7^0 30'}{\sin 7^0 30'} = \frac{2\cos^2 7^0 30'}{2\sin 7^0 30' \cos 7^0 30'}$

$= \frac{1 + \cos 15^0}{\sin 15^0} = \frac{1 + \cos(45^0 - 30^0)}{\sin(45^0 - 30^0)}$ (১)

$= \frac{1 + \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0}{\cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \cos 30^0}$

$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$ (১)

$= \frac{2\sqrt{6} + 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{3 - 1}$

$= \frac{2\sqrt{6} + 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{6} + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2}$ (১)

11. $a\sin\Theta + b\sin\varphi = c = a\cos\Theta + b\cos\varphi$ হলে দেখাও যে,

$$\cos\frac{1}{2}(\Theta - \varphi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2 - (a-b)^2}{4ab}}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a \sin \theta + b \sin \varphi = c$

$\Rightarrow a^2 \sin^2\theta + b^2 \sin^2\varphi + 2ab\sin\theta \sin\varphi = c^2 \quad \cdots(1)$

এবং $a \cos \theta + b \cos \varphi = c$

$\Rightarrow a^2 \cos^2\theta + b^2 \cos^2\varphi + 2ab\cos\theta \cos\varphi = c^2 \quad \cdots(2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই ,

$a^2 + b^2 + 2ab(\sin\theta \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi) = 2c^2$

$\Rightarrow 2ab \cos(\theta - \varphi) = 2c^2 - a^2 - b^2$ (১)

$\Rightarrow 2ab\{2\cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) - 1\} = 2c^2 - a^2 - b^2$

$\Rightarrow 4ab \cos^2 \frac{1}{2} (\theta - \varphi) = 2c^2 - a^2 - b^2 + 2ab$

$= 2c^2 - (a - b)^2$

$\Rightarrow \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \frac{2c^2 - (a-b)^2}{4ab}$

$\therefore \cos\frac{1}{2} (\theta - \varphi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2 - (a-b)^2}{4ab}}$ (১)

12. দেখাও যে, $\sin x = 2^n \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.$

$\cos\frac{x}{2^3}.\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}.\sin\frac{x}{2^n}$

প্রমাণ : $\sin x = \sin 2.\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ (১)

$= 2\cos\frac{x}{2}.\sin 2.\frac{x}{2^2} = 2\cos\frac{x}{2}.2\sin\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2^2}$

$= (2\cos\frac{x}{2}).(2\cos\frac{x}{2^2}).\sin\frac{x}{2^2}$

$= (2\cos\frac{x}{2}).(2\cos\frac{x}{2^2}).(2\cos\frac{x}{2^3}).\sin\frac{x}{2^3}$

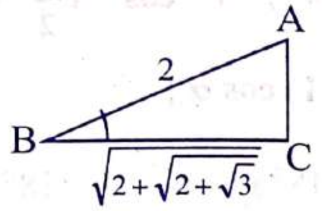
$= (2\cos\frac{x}{2}).(2\cos\frac{x}{2^2}).(2\cos\frac{x}{2^3}).\cdots\cdots\cdots$

$\cdots (2\cos\frac{x}{2^{n-1}})\,(2\cos\frac{x}{2^n})\,.\sin\frac{x}{2^n}$

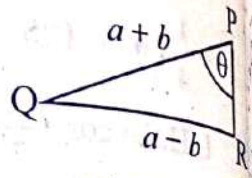
$\therefore \sin x = 2^n \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}.\sin\frac{x}{2^n}$ (১)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

13.



দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প -২:

(a) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$. [ঢা.'১৪,'১৫; চ.'০৮; সি.'০৮,'১২,'১৫; রা.'০৯,'১৫; মা.'১৩; কু.,ব.'১৫]

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\varphi}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-e}{1+e}\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2} - (1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2\frac{\theta}{2} + (1+e)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) - e(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2})}{(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}) - e(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}$

$\therefore \cos\varphi = \frac{\cos\theta - e}{1 - e\cos\theta}$

(b) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $\angle B = (7\frac{1}{2})^0$

প্রমাণ : দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\cos B = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 30^0)}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 15^0)}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 15^0}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos 15^0)}=\frac{1}{2}\sqrt{2.2\cos^2(7\frac{1}{2})^0}$

$=\frac{1}{2}.2\cos(7\frac{1}{2})^0=\cos(7\frac{1}{2})^0$

$\therefore\ \angle B=(7\frac{1}{2})^0$; যেহেতু $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ

(c) দৃশ্যকল্প -২ হতে প্রমাণ কর যে,

$\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

প্রমাণ : দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\sin\Theta=\frac{QR}{PQ}$

$\Rightarrow \sin\Theta=\frac{a-b}{a+b}$

$\therefore$ L.H.S. $=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$

$=\frac{2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$

$=\frac{\sin 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1+\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-(\frac{a-b}{a+b})^2}}{1+\frac{a-b}{a+b}}$

$=\frac{\frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}}{a+b}}{\frac{a+b+a-b}{a+b}}=\frac{\sqrt{4ab}}{2a}$

$=\frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2a}=\sqrt{\frac{b}{a}}=$ R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি : দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\sin\Theta=\frac{QR}{PQ}$

$\Rightarrow \sin\Theta=\frac{a-b}{a+b}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}=\frac{a+b}{a-b}\Rightarrow\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{a+b-a+b}{a+b+a-b}$

[বিয়োজন-যোজন করে।]

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2b}{2a}$

$\Rightarrow\frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\therefore\ \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{b}{a}}$

প্রশ্নমালা VII F

$A+B+C=\pi$ হলে প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\sin A+\sin B+\sin C$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [য.'০২]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\sin A+\sin B+\sin C$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\sin\frac{C}{2}\}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2})\}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2}-\frac{B}{2})+\cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})\}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 30^0)}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 15^0)}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 15^0}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos 15^0)}=\frac{1}{2}\sqrt{2.2\cos^2(7\frac{1}{2})^0}$

$=\frac{1}{2}.2\cos(7\frac{1}{2})^0=\cos(7\frac{1}{2})^0$

$\therefore\ \angle B=(7\frac{1}{2})^0$; যেহেতু $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ

(c) দৃশ্যকল্প -২ হতে প্রমাণ কর যে,

$\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

প্রমাণ : দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\sin\Theta=\frac{QR}{PQ}$

$\Rightarrow \sin\Theta=\frac{a-b}{a+b}$

$\therefore$ L.H.S. $=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$

$=\frac{2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}$

$=\frac{\sin 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1+\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-(\frac{a-b}{a+b})^2}}{1+\frac{a-b}{a+b}}$

$=\frac{\frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}}{a+b}}{\frac{a+b+a-b}{a+b}}=\frac{\sqrt{4ab}}{2a}$

$=\frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2a}=\sqrt{\frac{b}{a}}=$ R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি : দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\sin\Theta=\frac{QR}{PQ}$

$\Rightarrow \sin\Theta=\frac{a-b}{a+b}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}=\frac{a+b}{a-b}\Rightarrow\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{a+b-a+b}{a+b+a-b}$

[বিয়োজন-যোজন করে।]

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2b}{2a}$

$\Rightarrow\frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\therefore\ \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{b}{a}}$

প্রশ্নমালা VII F

$A+B+C=\pi$ হলে প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\sin A+\sin B+\sin C$

$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [য.'০২]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\sin A+\sin B+\sin C$

$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\sin\frac{C}{2}\}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2})\}$

$=2\cos\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2}-\frac{B}{2})+\cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$ (Proved)

1.(b) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [য.'০৮]

প্রমাণ : L.H.S.= $\sin A + \sin B - \sin C$

$= 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B) - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin\frac{C}{2}\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) - \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}) - \cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$

$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \text{R.H.S.}$ (Proved)

1. (c) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A\sin B\cos C$ [কু.'০১]

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin\frac{2A-2B}{2}\cos\frac{2A+2B}{2} + \cos 2C$

$= 2\sin(A-B)\cos(A+B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin(A-B)\cos(\pi - C) + 2\sin C\cos C$

$= -2\cos C\sin(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\cos C\{\sin C - \sin(A-B)\}$

$= 2\cos C[\sin\{\pi-(A+B)\} - \sin(A-B)]$

$= 2\cos C\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$

$= 2\cos C.2\sin B\cos A = 4\cos A\sin B\cos C$

= R.H.S. (Proved)

1.(d) $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A\cos B\sin C$

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$

$= \cos 2A + \cos 2C - \cos 2B$

$= 2\cos(A+C)\cos(A-C) - (2\cos^2 B - 1)$

$= 2\cos(\pi - B)\cos(A-C) - 2\cos^2 B + 1$

$= -2\cos B\cos(A-C) - 2\cos^2 B + 1$

$= 1 - 2\cos B\{\cos(A-C) + \cos B\}$

$= 1 - 2\cos B[\cos(A-C) + \cos\{\pi-(A+C)\}]$

$= 1 - 2\cos B\{\cos(A-C) - \cos(A+C)\}$

$= 1 - 2\cos B.2\sin A\sin C$

$= 1 - 4\sin A\cos B\sin C = \text{R.H.S.}$ (Proved)

(e) $\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$ [চ.'১১]

প্রমাণ :

L.H.S. $= \frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B}$

$= \frac{\cos A\sin A + \cos B\sin B + \cos C\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2\sin A\sin B\sin C}$

এখন, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin(\pi - C)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\{\cos(A-B) + \cos C\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B) + \cos(\pi - \overline{A+B})\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

$= 2\sin C.2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C$

$\therefore$ L.H.S.= $\frac{4\sin A\sin B\sin C}{2\sin A\sin B\sin C} = 2 = \text{R.H.S.}$

2.(a) $\sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B) = 4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

প্রমাণ : L.H.S.= $\sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B)$

$= \sin\{A+B+C+(C-A)\} + \sin\{A+B+C+(A-B)\} + \sin\{A+B+C+(B-C)\}$

$= \sin\{\pi-(A-C)\} + \sin\{\pi-(B-A)\} + \sin\{\pi-(C-B)\}$

$= \sin(A - C) + \sin(B - A) + \sin(C - B)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(A - C + B - A)\cos\frac{1}{2}(A - C - B + A)$

$- \sin(B - C)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(B - C)\cos\frac{1}{2}(2A - B - C) -$

$2\sin\frac{1}{2}(B - C)\cos(B - C)$

$= 2\sin\frac{1}{2}(B - C)\ \{\cos\frac{1}{2}(2A - B - C) -$

$\cos(B - C)$

$= 2\sin\frac{B-C}{2}\{2\sin\frac{1}{2}(\frac{2A - B - C + B - C}{2})$

$\sin\frac{1}{2}(\frac{B - C - 2A + B + C}{2})\}$

$= 2\sin\frac{B-C}{2}.2\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

$= 4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2} =$ R.H.S.

2.(b) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} =$

$4\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi - B}{4}\cos\frac{\pi - C}{4}$

R.H.S.$= 4\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi - B}{4}\cos\frac{\pi - C}{4}$

$= 2.2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$

$= 2[\cos(\frac{B+C}{4} + \frac{C+A}{4})$

$+ \cos(\frac{B+C}{4} - \frac{C+A}{4})]\cos\frac{A+B}{4}$

$= 2[\cos\frac{A+B+2C}{4} + \cos\frac{B-A}{4}]\cos\frac{A+B}{4}$

$= 2\cos\frac{A+B+2C}{4}\cos\frac{A+B}{4} +$

$2\cos\frac{B-A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$

$= \cos\frac{A+B+C}{2} + \cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos(-\frac{A}{2})$

$= \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

$= 0 + \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

$= \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} =$ R.H.S.(Proved)

3.(a) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$\therefore \tan(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})$

$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

$\therefore \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$

3(b) $\cot B\cot C + \cot C\cot A + \cot A\cot B = 1$ **[প্র.ভ.প.'০৫]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow A + B = \pi - C \Rightarrow \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$

$\Rightarrow \cot A\cot B - 1 = -\cot B\cot C - \cot C\cot A$

$\therefore \cot B\cot C + \cot C\cot A + \cot A\cot B = 1$

4. (a) $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$ **[ঢা.'০২ ; চ.'০২,'১৩; সি.'০৭; রা.'১১]**

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2C) - \sin^2 B$

$= 1 - \sin^2 B - \frac{1}{2}.2\cos(A + C)\cos(A - C)$

$= \cos^2 B - \cos(\pi - B)\cos(A - C)$
$= \cos^2 B + \cos B \cos(A - C)$
$= \cos B\{\cos B + \cos(A - C)\}$
$= \cos B[\cos\{\pi - (A + C)\} + \cos(A - C)]$
$= \cos B[-\cos(A + C) + \cos(A - C)]$
$= \cos B . 2\sin A \sin C$
$= 2\sin A \cos B \sin C$ = R.H.S. (Proved)

(b) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \cos C$ [ঢা.'০৩,'০৭,'০৯; য.'০৭]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) - \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) - \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\{\cos(A - B) + \cos C\}$
$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos\{\pi - (A + B)\}]$
$= 1 - \cos C.[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
$= 1 - 2\cos C \sin A \sin B$ = R.H.S

(c) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ [সি.'০২, '০৭; দি.'০৯; ঢা.'১১; চ.'১৩]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A - B) + \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C$
$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos C]$
$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos\{\pi - (A + B)\}]$
$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$
$= 1 - \cos C. 2\cos A \cos B$
$= 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ = R.H.S.

4(d) $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$= \cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos 4A + 1 + \cos 4B] + \cos^2 2C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos 2(A + B)\cos 2(A - B) + \cos^2 2C$

$= 1 + \cos(2\pi - 2C)\cos 2(A - B) + \cos^2 2C$
$= 1 + \cos 2C\{\cos 2(A - B) + \cos 2C\}$
$= 1 + \cos 2C[\cos 2(A - B) + \cos\{2\pi - 2(A + B)\}]$
$= 1 + \cos 2C[\cos 2(A - B) + \cos 2(A + B)]$
$= 1 + \cos 2C.2\cos 2A \cos 2B$
$= 1 + 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$ = R.H.C. (Proved)

4(e) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ [কু.'০৯]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.** $= \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos A + 1 - \cos B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}.2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{1}{2}(A - B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A - B) + \sin^2\frac{C}{2}$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{1}{2}(A - B) - \sin\frac{C}{2}\right\}$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{1}{2}(A - B) - \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A + B)\right\}\right]$

$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{1}{2}(A - B) - \cos\frac{1}{2}(A + B)\right]$

$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ = R.H.S. (Proved)

5. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

(a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A \sin B \sin C = 1$ [ঢা.,বা.'০১;মা., দি.'১২; কু.'১৪]

প্রমাণ : L.H.S. $= \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C + 2\sin A \cos B \sin C$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B) + \sin^2C + 2\sin A \cos B \sin C$

$= 1 - \frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B) + \sin^2C + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - C)\cos(A-B) + \sin^2C + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C\cos(A-B) + \sin^2C + 2\sin A\sin B\sin C$

$= 1 - \sin C\{\cos(A-B) - \sin C\} + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C[\cos(A-B) - \sin\{\frac{\pi}{2} - (A+B)\}] + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - \sin C.2\sin A\sin B + 2\sin A\cos B\sin C$

$= 1 - 2\sin A\sin B\sin C + 2\sin A\sin B\sin C$

$= 1 =$ R.H.S.

5(b) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$

প্রমাণ : দেওয়া আছে , $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C$

$\Rightarrow \cot(A+B) = \cot(\frac{\pi}{2} - C)$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = \tan C$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = \frac{1}{\cot C}$

$\Rightarrow \cot A + \cot B = \cot A\cot B\cot C + \cot C$

$\therefore \cot A + \cot B + \cot C = \cot A\cot B\cot C$

6. (a) $A + B + C = 2\pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C = 1$ [সি.'০১]

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos(2\pi - C)\cos(A-B) + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C\{\cos(A-B) + \cos C\} - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C[\cos(A-B) + \cos\{2\pi - (A+B)\}] - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 + \cos C.2\cos A.\cos B - 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C + 2\cos A\cos B\cos C$

$= 1$

6(b) $A + B + C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1$

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos A + \cos B + \cos C$

$= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\cos^2\frac{1}{2}C - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}(-C)\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\cos^2\frac{1}{2}C - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}C[\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos\frac{1}{2}\{-(A+B)\}] - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}C[\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos\frac{1}{2}(A+B)] - 1$

$= 2\cos\frac{1}{2}C.2\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B - 1$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1 =$ R.H.S. (Proved)

6(c) $A + B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $\tan A \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A + B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = (n\pi + \frac{\pi}{2}) - C$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan\{(n\pi + \frac{\pi}{2}) - C\}$

$= \tan\{n\pi + (\frac{\pi}{2} - C)\}$

$= \tan(\frac{\pi}{2} - C) = \cot C$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan A \tan C + \tan B \tan C = 1 - \tan A \tan B$

$\therefore \tan A \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1$

7(a) $A + B + C = \pi$ এবং $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $A = B = C$. [ব.'০৭]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \cot(A+B) = \cot(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$

$\Rightarrow \cot A \cot B - 1 = \cot B \cot C - \cot C \cot A$

$\Rightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

এখন, $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 3(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C - (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\{(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2\} = 0$

প্রত্যেকটি শূন্য না হলে তিনটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না।

$\therefore \cot A - \cot B = 0 \Rightarrow \cot A = \cot B$,

$\cot B - \cot C = 0 \Rightarrow \cot B = \cot C$

$\therefore \cot A = \cot B = \cot C$

$\Rightarrow A = B = C$

7(b) $A + B + C = \pi$ এবং $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B$ হলে দেখাও যে, $A = B = C$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A$

$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - (\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\{(\sin A - \sin B)^2 + (\sin B - \sin C)^2 + (\sin C - \sin A)^2\} = 0$

প্রত্যেকটি শূন্য না হলে তিনটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না।

$\therefore \sin A - \sin B = 0 \Rightarrow \sin A = \sin B$

$\Rightarrow \sin A = \sin B = \sin(\pi - B)$

$\therefore \sin A = \sin B$ অথবা, $\sin A = \sin(\pi - B)$

$\therefore A = B$ অথবা, $A = \pi - B \Rightarrow A + B = \pi$

কিন্তু $A + B + C = \pi$ বলে, $A + B = \pi$ হতে পারে না।

$\therefore A = B$. অনুরূপভাবে, $B = C$

$\therefore A = B = C$ (Showed)

7(c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ হলে দেখাও যে, $A + B + C = n\pi$, যখন $n \in \mathbb{Z}$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = -\tan C = \tan(\pi - C) = \tan(2\pi - C) = \tan(3\pi - C) = \ldots\ldots$

$= \tan(n\pi - C)$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore A + B = n\pi - C \Rightarrow A + B + C = n\pi$ (Showed)

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

$A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে,

8. $\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \cos A + \cos B - \cos C$

$= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) - (1-2\sin^2\frac{C}{2})$ (১)+(১)

$= 2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\sin^2\frac{C}{2} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A-B) + 2\sin^2\frac{C}{2} - 1$ (১)

$= 2\sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin\frac{C}{2}\} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A-B) + \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2})\} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\{\cos(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}) + \cos(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})\} - 1$

$= 2\sin\frac{C}{2}(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}) - 1$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1 =$ R.H.S. (Proved) (১)

9.(a) $\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) = 4\sin A\sin B\sin C$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C)$

$= \sin(A+B+C-2A) + \sin(A+B+C-2B) + \sin(A+B+C-2C)$

$= \sin(\pi-2A) + \sin(\pi-2B) + \sin(\pi-2C)$

$= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ (১)

$= 2\sin\frac{1}{2}(2A+2B)\cos\frac{1}{2}(2A-2B) + \cos 2C$ (১)

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$ (১)

$= 2\sin(\pi-C)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\{\cos(A-B) + \cos C\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B) + \cos(\pi - \overline{A+B})\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

$= 2\sin C.2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C$

= R.H.S. (Proved) (১)

9. (b) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$

M.H.S. $= 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 2.2\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + 2[\cos\frac{B+C-C-A}{4} - \cos\frac{B+C+C+A}{4}]\sin\frac{A+B}{4}$ (১)

$= 1 + 2\cos\frac{B-A}{4}\sin\frac{A+B}{4} - 2\cos\frac{A+B+2C}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$= 1 + \sin(\frac{A+B}{4} + \frac{B-A}{4}) + \sin(\frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4}) - \{\sin(\frac{A+B}{4} + \frac{A+B+2C}{4}) + \sin(\frac{A+B}{4} - \frac{A+B+2C}{4})\}$ (১)

$= 1 + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2} - \sin\frac{A+B+C}{2} - \sin(-\frac{C}{2})$

$= 1 + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{C}{2}$ (১)

$= 1 + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - 1$

$= \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} =$ L.H.S.

Again , $1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

$=1 + 4\sin\frac{\pi - A}{4}\sin\frac{\pi - B}{4}\sin\frac{\pi - C}{4}$ =R.H.S. (১)

(c) sin A cos B cos C + sin B cos C cos A + sin C cos A cos B = sin A sin B sin C

প্রমাণ ঃ L.H.S. = sinA cos B cos C + sin B cos C cos A + sin C cos A cos B

$= (\sin A\cos B + \sin B\cos A)\cos C + \sin C\cos A\cos B$

$= \sin(A + B)\cos C + \sin C\cos A\cos B$ (১)

$= \sin(\pi - C)\cos\{\pi - (A + B)\} + \sin C\cos A\cos B$

$= \sin C\{-\cos(A + B) + \cos A\cos B\}$ (১)

$= \sin C(-\cos A\cos B + \sin A\sin B + \cos A\cos B)$ (১)

$= \sin A\sin B\sin C$ = R.H.S. (Proved) (১)

10. tan 2A + tan 2B + tan 2C = tan 2A tan 2B tan 2C

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C$

$\Rightarrow \tan(2A + 2B) = \tan(2\pi - 2C)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A + \tan 2B} = -\tan 2C$ (১)

$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B = -\tan 2C + \tan 2A\tan 2B\tan 2C$

$\therefore \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A\tan 2B\tan 2C$ (১)

11. $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. = $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos A + 1 + \cos B) + \cos^2\frac{C}{2}$ (১)

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B) + \cos^2\frac{C}{2}$ (১)

$= 1 + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\cos\frac{1}{2}(A - B) + \cos^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{1}{2}(A - B) + 1 - \sin^2\frac{C}{2}$ (১)

$= 2 + \sin\frac{C}{2}\{\cos\frac{1}{2}(A - B) - \sin\frac{C}{2}\}$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}[\cos\frac{1}{2}(A - B) - \sin\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A + B)\}]$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}[\cos\frac{1}{2}(A - B) - \cos\frac{1}{2}(A + B)]$

$= 2 + \sin\frac{C}{2}.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$= 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ = R.H.S (Proved)(১)

12. $A + B + C = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \pm 4\cos A\cos B\cos C$

প্রমাণ ঃ $\sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \theta\} = \sin\{n\pi + (\frac{\pi}{2} - \theta)\}$

$= \pm\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \pm\cos\theta$ (১)

এখন, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$ (১)

$= 2\sin\{(2n + 1)\frac{\pi}{2} - C\}\cos(A - B) + 2\sin\{(2n + 1)\frac{\pi}{2} - (A + B)\}\cos C$

$= 2(\pm\cos C)\cos(A - B) + 2\{\pm\cos(A + B)\}\cos C$

$= \pm 2\cos C\{\cos(A - B) + \cos(A + B)\}$ (১)

$= \pm 2\cos C(2\cos A\cos B)$

$\pm 4\cos A\cos B\cos C$

$\therefore \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \pm 4\cos A\cos B\cos C$ (১)

13. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$ হলে দেখাও যে, $A \pm B \pm C = (2n + 1)\pi$, যেখানে n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা ।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C + \cos C . 2\cos A \cos B = 1$ (১)

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} . 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C + \cos C\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} = 1$ (১)

$\Rightarrow \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C + \cos C\cos(A+B) + \cos(A-B)\cos C = 0$

$\Rightarrow \cos(A-B)\{\cos(A+B) + \cos C\} + \cos C\{\cos(A+B) + \cos C\} = 0$

$\Rightarrow \{\cos(A+B) + \cos C\}\{\cos(A-B) + \cos C\} = 0$

$\therefore \cos(A \pm B) + \cos C = 0$ (১)

$\Rightarrow \cos(A \pm B) = -\cos C = \cos(\pi \pm C)$
$= \cos(3\pi \pm C) = \dots\dots$
$= \cos\{(2n+1)\pi \pm C\}$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow A \pm B = (2n+1)\pi \pm C$

$\Rightarrow A \pm B \pm C = (2n+1)\pi$ (১)

14. $x + y + z = x\,y\,z$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$$

মনে করি, $x = \tan A \Rightarrow A = \tan^{-1} x$
$y = \tan B \Rightarrow A = \tan^{-1} y$
$z = \tan C \Rightarrow C = \tan^{-1} z$ (১)

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C)$ (১)+(১)

$\Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C$

$\Rightarrow \tan(2A + 2B) = \tan(2\pi - 2C)$

$\Rightarrow \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B} = -\tan 2C$

$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B = \tan 2C + \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan A \tan B \tan C$

$\Rightarrow \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} + \frac{2\tan C}{1-\tan^2 C} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\,\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}\,\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$ (১)

$\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}\,\frac{2x}{1-x^2}\,\frac{2x}{1-x^2}$ (১)

15. $x + y + z = xyz$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

প্রমাণঃ মনে করি, $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$ $[\because x + y + z = x\,y\,z]$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = \tan C(\tan A . \tan B - 1)$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C)$ (১)+(১)

$\therefore A + B = \pi - C$

$\Rightarrow 3A + 3B + 3C = 3\pi$

$\therefore \tan(3A + 3B + 3C) = \tan 3\pi$

$\Rightarrow \frac{\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C - \tan 3A . \tan 3B . \tan 3C}{1 - \tan 3A . \tan 3B - \tan 3B . \tan 3C - \tan 3C . \tan 3A} = 0$ (১)

$\Rightarrow \tan 3A + \tan 3B + \tan 3C - \tan 3A . \tan 3B . \tan 3C = 0$

$$\Rightarrow \frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}+\frac{3\tan B-\tan^3 B}{1-3\tan^2 B}$$

$$+\frac{3\tan C-\tan^3 C}{1-3\tan^2 C}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\,\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

$$\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \quad (১)$$

$$\therefore \frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

$$=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\,\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\,\frac{3z-z^3}{1-3z^2} \text{ (Proved)} \quad (১)$$

16. $yz+zx+xy=1$ **হলে প্রমাণ কর যে,**

$$\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}+\frac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz}+\frac{(z^2-1)(x^2-1)}{zx}=4$$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x=\cot A \Rightarrow A=\cot^{-1}x$

$y=\cot B \Rightarrow A=\cot^{-1}y$

$z=\cot C \Rightarrow C=\cot^{-1}z$ (১)

$\therefore \cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

$\Rightarrow \cot A\cot B-1=-(\cot B+\cot A)\cot C$

$\Rightarrow \dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$

$\Rightarrow \cot(A+B)=\cot(\pi-C)$ (১)+(১)

$\Rightarrow A+B=\pi-C$

$\Rightarrow 2A+2B=2\pi-2C$

$\Rightarrow \cot(2A+2B)=\cot(2\pi-2C)$

$\Rightarrow \dfrac{\cot 2A\cot 2B-1}{\cot 2B+\cot 2A}=-\cot 2C$

$\Rightarrow \cot 2A\cot 2B+\cot 2B\cot 2C+\cot 2C\cot 2A=1$

$$\Rightarrow \frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}\,\frac{\cot^2 B-1}{2\cot B}+\frac{\cot^2 B-1}{2\cot B}\,\frac{\cot^2 C-1}{2\cot C}+\frac{\cot^2 C-1}{2\cot C}\,\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}=1$$

$$\frac{x^2-1}{2x}\cdot\frac{y^2-1}{2y}+\frac{y^2-1}{2y}\cdot\frac{z^2-1}{2z}+\frac{z^2-1}{2z}\,\frac{x^2-1}{2x}=1$$

$$\therefore \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}+\frac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz}+\frac{z^2-1)(x^2-1)}{zx}=4 \text{ (Showed)} \quad (১)$$

সৃজনশীল প্রশ্ন :

17. দৃশ্যকল্প - ১: $A+B+C=\pi$, $\sin 2A\cos 2B+\cos 2A\sin 2B+\sin 2C=0$

দৃশ্যকল্প - ২: $A+B+C=\dfrac{\pi}{2}$.

(a) $\cos A\cos B-\sin A\sin B+\cos C=0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$\cos A\cos B-\sin A\sin B+\cos C=0$

$\Rightarrow \cos A\cos B+\cos C=\sin A\sin B$

$\Rightarrow (\cos A\cos B+\cos C)^2=\sin^2 A\sin^2 B$

$\Rightarrow \cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 C=(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)$

$\Rightarrow \cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 C=1-\cos^2 A-\cos^2 B+\cos^2 A\cos^2 B$

$\therefore \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$

(b) দৃশ্যকল্প - ১ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

প্রমাণ : দৃশ্যকল্প – ১ হতে পাই, $A+B+C=\pi$ এবং $\sin 2A\cos 2B+\cos 2A\sin 2B+\sin 2C=0$

$\Rightarrow \sin 2A(1-2\sin^2 B)+(1-2\sin^2 A)\sin 2B+\sin 2C=0$

$\Rightarrow \sin 2A - 2\sin 2A \sin^2 B + \sin 2B - 2\sin^2 A \sin 2B + \sin 2C = 0$

$\Rightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin 2A \sin^2 B + 2\sin^2 A \sin 2B$

$= 4\sin A \cos A \sin^2 B + 4\sin^2 A \sin B \cos B$

$= 4\sin A \sin B (\cos A \sin B + \sin A \cos B)$

$= 4\sin A \sin B \sin (A + B)$

$= 4\sin A \sin B \sin (\pi - C)$

$\therefore \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 4\sin A \sin B \sin C$

(c) দৃশ্যকল্প - ২ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cos B \sin C$

প্রমাণ : দৃশ্যকল্প – ২ হতে পাই, $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C$

$\Rightarrow \cos (A + B) = \cos (\frac{\pi}{2} - C)$

$\Rightarrow \cos A \cos B - \sin A \sin B = \sin C$

$\Rightarrow \cos A \cos B - \sin C = \sin A \sin B$

$\Rightarrow (\cos A \cos B - \sin C)^2 = \sin^2 A \sin^2 B$

$\Rightarrow \cos^2 A \cos^2 B - 2\cos A \cos B \sin C + \sin^2 C = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B)$

$\Rightarrow \cos^2 A \cos^2 B - 2\cos A \cos B \sin C + 1 - \cos^2 C = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B)$

$\Rightarrow \cos^2 A \cos^2 B - 2\cos A \cos B \sin C + 1 - \cos^2 C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B$

$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= 2\cos A \cos B \sin C$

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\dfrac{a-b}{a+b} = \tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

[চ.'০৩; য.'০৯; রা.'১০]

প্রমাণ : L.H.S. $= \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B}$

$= \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$

$= \tan\dfrac{A-B}{2}\cot\dfrac{A+B}{2} = \tan\dfrac{A-B}{2}\cot(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2})$

$= \tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2} =$ R.H.S. (Proved)

1(b) $\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b+c}{a}\sin\dfrac{A}{2}$ [য.'১০; ঢা.'১২]

প্রমাণ : R.H.S. $= \dfrac{b+c}{a}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{2R\sin B + 2R\sin C}{2R\sin A}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{\sin B + \sin C}{\sin A}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$= \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \cos\dfrac{B-C}{2} =$ L.H.S.

2.(a) $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$

[রা. '০৭, য. '০৭,'১২]

প্রমাণ : L.H.S. $= a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B)$

$= 4R^2\sin^2 A(\cos^2 B - \cos^2 C) + 4R^2\sin^2 B(\cos^2 C - \cos^2 A) + 4R^2\sin^2 C(\cos^2 A - \cos^2 B)$

$= 4R^2(\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\cos^2 C + \sin^2 B\cos^2 C - \cos^2 A\sin^2 B + \sin^2 C\cos^2 A - \cos^2 B\sin^2 C)$

$= 4R^2\{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 A(1-\sin^2 C) + \sin^2 B(1-\sin^2 C) - \sin^2 B(1-\sin^2 A) + \sin^2 C(1-\sin^2 A) - \sin^2 C(1-\sin^2 B)\}$

$= 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A + \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 B - \sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 C + \sin^2 C\sin^2 B)$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (proved)

2(b) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$ [ব.'০৫ ; সি.'০৩,'০৭; রা.'১৪]

প্রমাণ : L.H.S.$= (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$

$= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= (c\cos B + b\cos C) + (c\cos A + a\cos C) + (b\cos A + a\cos B) = a+b+c =$ R.H.S.

[নোট : $a = c\cos B + b\cos C$]

2(c) $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$ [ঢা.'০০, য.'০৪]

প্রমাণ : L.H.S.$= a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

$= (2R\sin A)^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + (2R\sin B)^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + (2R\sin C)^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

$= 4R^2\{\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 B\sin^2 A + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 C\sin^2 B\}$

$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

3. (a) $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2}$

[য.'০৪; রা.'০৯; দি.'১০; ঢা.'১১; সি.'১২]

প্রমাণ : L.H.S. $= a(\cos C - \cos B)$

$= a\cos C - a\cos B$
$= (b - c\text{ Cos } A) - (c - b\cos A)$
$= b - c + (b - c)\cos A$
$= (b-c)(1+\cos A) = (b-c).2\cos^2\dfrac{A}{2}$
$= 2(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2} = \text{R.H.S.}$

3(b) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\dfrac{A}{2}$
[য.'০০; ব.'০৪; ঢা.'০৮; চ. '০৯; সি.'১৪]

প্রমাণ : **L.H.S.** $= a(\cos B + \cos C)$
$= a\cos B + a\cos C$
$= c - b\cos A + b - c\cos A$
$= b + c - (b+c)\cos A = (b+c)\{1 - \cos A)$
$= (b+c)\,2.\sin^2\dfrac{A}{2}$
$= 2(b+c)\sin^2\dfrac{A}{2} = \text{R.H.S.}$

3(c) $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 4\Delta$

প্রমাণ : L.H.S.$= b^2\sin 2C + c^2\sin 2B$
$= b^2.2\sin C\cos C + c^2.2\sin B\cos B$
$= 2b^2\dfrac{c}{2R}\cos C + 2c^2.\dfrac{b}{2R}\cos B$
$= \dfrac{bc}{R}(b\cos C + c\cos B) = \dfrac{bc}{R}a$
$= \dfrac{abc}{R} = 4\Delta = \text{R.H.S.}$

3(d) $a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A) + c^3\cos(A-B) = 3abc$ [ব.'০৩]

প্রমাণ : $a^3\cos(B-C)$
$= a(a^2\cos B\cos C + a^2\sin B\sin C)$
$= a(a\cos B.\,a\cos C + a\sin B.\,a\sin C)$
$= a\{(c - b\cos A)(b - c\cos A) + b\sin A.c\sin A\}$
$= a\{bc - b^2\cos A - c^2\cos A + bc\cos^2 A$
$+ bc\sin^2 A\}$
$= a\{bc - (b^2+c^2)\cos A + bc\}$
$= 2abc - a(b^2+c^2)\cos A.$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$b^3\cos(C-A) = 2abc - b(c^2+a^2)\cos B$ এবং
$c^3\cos(A-B) = 2abc - c(a^2+b^2)\cos C$

এখন, L.H.S.$= a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A)$
$+ c^3\cos(A-B)$
$= 6abc - a(b^2+c^2)\cos A - b(c^2+a^2)$
$\text{Cos } B - c(a^2+b^2)\cos C$
$= 6abc - ab^2\cos A - c^2a\cos A - bc^2\cos B -$
$a^2b\cos B - ca^2\cos C - b^2c\cos C$
$= 6abc - bc(c\cos B + b\cos C) - ab(a\cos B +$
$b\cos A) - ca(c\cos A + a\cos C)$
$= 6abc - bc.a - ab.c - ca.b$
$= 6abc - 3abc = 3abc = \text{R.H.S.}$ (Proved)

4.(a) $a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\sin(A-B) = 0$

প্রমাণ : $a^3\sin(B-C) = a^2.a\sin(B-C)$
$= a^2.2R\sin A\sin(B-C)$
$= 2Ra^2\sin\{\pi - (B+C)\}\sin(B-C)$
$= 2R\,a^2\sin(B+C)\sin(B-C)$
$= 2R.4R^2\sin^2 A(\sin^2 B - \sin^2 C)$
$= 8R^3\sin^2 A(\sin^2 B\ \ \sin^2 C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$b^3\sin(C-A) = 8R^3\sin^2 B(\sin^2 C - \sin^2 A)$ ও
$c^3\sin(A-B) = 8R^3\sin^2 C(\sin^2 A - \sin^2 B)$.

এখন ; L.H.S.$= a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A)$
$+ c^3\sin(A-B)$
$= 8R^3(\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C$
$- \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 B\sin^2 C)$
$= 8R^3 \times 0 = 0 = \text{R.H.S}$ (Proved).

4. (b) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

প্রমাণ : $(b^2 - c^2)\cot A$
$= (b^2 - c^2)\dfrac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2)$
$= \dfrac{R}{abc}\{(b^2-c^2)(b^2+c^2) - a^2(b^2-c^2)\}$
$= \dfrac{R}{abc}\{b^4 - c^4 - a^2(b^2-c^2)\}$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$(c^2 - a^2)\cot B = \dfrac{R}{abc}\{c^4 - a^4 - b^2(c^2 - a^2)\}$,

$(a^2 - b^2)\cot C = \dfrac{R}{abc}\{a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2)\}$

L.H.S. $= (b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C$

$= \dfrac{R}{abc}\{b^4 - c^4 + c^4 - a^4 + a^4 - b^4 - (a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2)\}$

$= \dfrac{R}{abc} \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved)

4(c) $(a - b)^2 \cos^2\dfrac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2\dfrac{C}{2} = c^2$ [কু.'০৯]

প্রমাণ:L.H.S.$=(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}$

$= (a-b)^2\dfrac{1}{2}(1+\cos C) + (a+b)^2\dfrac{1}{2}(1-\cos C)$

$= \dfrac{1}{2}[\{(a-b)^2 + (a+b)^2\} - \{(a+b)^2 - (a-b)^2\}\cos C]$

$= \dfrac{1}{2}.\{2(a^2+b^2) - 4ab\cos C\}$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2 =$ R.H.S. (Proved)

5 . (a) $(s - a)\tan\dfrac{A}{2} = (s - b)\tan\dfrac{B}{2} = (s - c)\cot\dfrac{C}{2}$

প্রমাণ : $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}$

$= (s-a)\dfrac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s(s-a)}}$

$= \dfrac{\sqrt{s-a}\sqrt{s-a}\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s(s-a)}}$

$= \dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$(s-b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-b)\dfrac{\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}}$

$= \dfrac{\sqrt{s-b}\sqrt{s-b}\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}}$

$= \dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$(s-c)\tan\dfrac{C}{2} = (s-c)\dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}}$

$= \dfrac{\sqrt{s-c}\sqrt{s-c}\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}}$

$= \dfrac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$

$\therefore (s-a)\tan\dfrac{A}{2} = (s-b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-c)\cot\dfrac{C}{2}$

5(b) $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$

প্রমাণ :**L.H.S.**$= \sin A + \sin B + \sin C$

$= \dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} + \dfrac{c}{2R} = \dfrac{a+b+c}{2R}$

$= \dfrac{2s}{2R} = \dfrac{s}{R} =$ R.H.S. (Proved)

5(c) $a\sin\left(\dfrac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\dfrac{A}{2}$

[কু.'০৩; সি.'০৯,'১১; ঢা.'১০; চ.'১১]

প্রমাণ : R.H.S.$= (b+c)\sin\dfrac{A}{2}$

$= (2R\sin B + 2R\sin C)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 2R(\sin B + \sin C)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 2R\, 2.\sin\dfrac{1}{2}(B+C)\cos\dfrac{1}{2}(B-C)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 4R\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{B-C}{2}\right)\sin\dfrac{A}{2}$

$= 2R.2\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{\pi + B - C}{2}$

$= 2R\sin A\sin\dfrac{A+B+C+B-C}{2}$

$= a\sin\left(\dfrac{A}{2} + B\right) =$ R.H.S. (Proved)

6.(a) $a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B = \frac{3\Delta}{R}$

প্রমাণ : L.H.S. = a sinB sinC + b sinC sinA + c sinA sinB

$= a.\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R} + b\frac{c}{2R}\,\frac{a}{2R} + c\,\frac{a}{2R}\,\frac{b}{2R}$

$= \frac{abc}{4R^2}+\frac{abc}{4R^2}+\frac{abc}{4R^2}=\frac{3abc}{4R^2}$

$= \frac{abc}{4R}.\frac{3}{R}=\Delta.\frac{3}{R}=\frac{3\Delta}{R}$ = R.H.S. (Proved)

6(b) $\frac{1}{a}\sin A+\frac{1}{b}\sin B+\frac{1}{c}\sin C=\frac{6\Delta}{abc}$

[প্র.ভ.প. '৯৫]

প্রমাণ : L.H.S. $= \frac{1}{a}\sin A+\frac{1}{b}\sin B+\frac{1}{c}\sin C$

$= \frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}=\frac{3}{2R}$

$=\frac{3}{2}.\frac{1}{R}=\frac{3}{2}.\frac{4\Delta}{abc}=\frac{6\Delta}{abc}$ = R.H.S. (Proved)

7.(a) $\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}+\frac{\cos A\cos B}{ab}=\frac{1}{4R^2}$

L.H.S. $= \frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}+\frac{\cos A\cos B}{ab}$

$= \frac{a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B}{abc}$

$= \frac{1}{abc}\{2R\sin A\cos B\cos C+ 2R\sin B\cos C\cos A+2R\sin C\cos A\cos B\}$

$=\frac{2R}{abc}$ {(sinAcosB + sinB cosA) cosC + sinC cosA cosB}

$= \frac{2R}{abc}$ {sin(A + B)cosC + cosA cosB sinC}

$= \frac{2R}{abc}$ {sin(π – C) cosC + cosA cosBsinC}

$=\frac{2R}{abc}$ [sinC sin{π – (A + B)} + cosA cosB sinC]

$=\frac{2R}{abc}$ sinC{ – cos(A + B) + cosA cosB}

$= \frac{2R}{abc}$ sinC(– cosAcosB + sinA sinB + cosA cosB)

$= \frac{2R}{abc}$ sinAsinB sinC $= \frac{2R}{abc}\,\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$

$=\frac{1}{4R^2}$ = R.H.S. (Proved)

7(b) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

প্রমাণ : $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A$

$= \frac{4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C)}{4R^2\sin^2 A}.2\sin A\cos A$

$= 2\cos A\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A}$

$= 2\cos A\ \frac{\sin(\pi-A)\sin(B-C)}{\sin A}$

$= \frac{2\cos\{\pi-(B+C)\}\sin A\sin(B-C)}{\sin A}$

= – 2 cos (B + C) sin (B – C)

= – (sin 2B – sin 2C) = sin 2C – sin 2B

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,

$\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B$ = sin2A – sin2C ,

$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$ = sin2B – sin2A

এখন , L.H.S. $= \frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$

= sin2C – sin2B + sin2A – sin2C + sin2B – sin2A

= 0 = R.H.S. (Proved)

8. (a) $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ হলে দেখাও যে, $C = 45^\circ$ অথবা 135° [য.'০৬,'১১; চ.'১৪ ; রা.'১০,'১৪; ঢা.'০৬,'১১,'১৪ ; কু.'০৬,'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে ,

$$a^4+b^4+c^4 = 2c^2(a^2+b^2)$$
$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4-2c^2a^2-2b^2c^2 = 0$$
$$\Rightarrow (a^2)^2+(b^2)^2+(-c^2)^2+2a^2.b^2+2b^2(-c^2)+2(-c^2)a^2 = 2a^2b^2$$
$$\Rightarrow (a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-c^2 = \pm\sqrt{2}\,ab$$
$$\Rightarrow 2ab\cos C = \pm\sqrt{2}\,ab \Rightarrow \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে , $\cos C = \cos 45^\circ \therefore C = 45^\circ$

$\cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে , $\cos C = -\cos 45^\circ$

$$\Rightarrow \cos C = \cos(180^\circ - 45^\circ) = \cos 135^\circ$$
$$\therefore C = 135^\circ$$

$\therefore C = 45^\circ$ অথবা , 135° (Showed)

8(b) $c^4 - 2(a^2+b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$ হলে দেখাও যে, $C = 60^\circ$ অথবা 120°

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$$c^4 - 2(a^2+b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$
$$\Rightarrow c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$
$$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = a^2b^2$$
$$\Rightarrow (a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2b^2.\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos C = \pm\frac{1}{2}$$
$$\therefore \cos C = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \Rightarrow C = 60^\circ$$

অথবা , $\cos C = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \Rightarrow C = 120^\circ$

$\therefore C = 60^\circ$ অথবা , 120°

9.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14 এবং 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব.'০২; চ.'০৫; য.'০৭; ঢা.'০৯]

সমাধান : মনে করি , $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$= \frac{1}{2}(13+14+15) = \frac{1}{2}\times 42 = 21$$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$
$$= \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ (Ans.)}$$

9(b) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{z}{x}+\frac{x}{y}$ এবং $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$ হলে,ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.বো.০৭]

সমাধান ঃ মনে করি, $a = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $b = \frac{z}{x}+\frac{x}{y}$ এবং $c = \frac{x}{y}+\frac{y}{z}$

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$$
$$s-a = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-\frac{y}{z}-\frac{z}{x} = \frac{x}{y}$$
$$s-b = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-\frac{z}{x}-\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$
$$s-c = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}-\frac{x}{y}-\frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)} \text{ (Ans.)}$$

9. (c) $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর। [চ.'০০; য.'০৫,'০৮; রা.'০৭,'১১,'১৩; ঢা.'০৮ ; সি.'১০; দি.'১১,'১৪]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে ,

$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$

$\Rightarrow (b+c)^2-a^2=3bc$

$\Rightarrow b^2+2bc+c^2-a^2=3bc$

$\Rightarrow b^2+c^2-a^2=bc \Rightarrow 2\,bc\cos A=bc$

$\Rightarrow \cos A=\frac{1}{2}=\cos 60° \therefore A=60°$ (Ans.)

9(d) ΔABC -এ যদি $A=60°$ হয়, তবে দেখাও যে, $b+c=2a\cos\frac{B-C}{2}$

[ঢা.,সি '১০; ব.'০৯; রা.'০৯,'১৪]

প্রমাণ ঃ $b+c=2R(\sin B+\sin C)$

$=2R.2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$=4R\sin\frac{1}{2}(120°)\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$[\because A=60°,\ \therefore B+C=120°]$

$=4R\cos 60°\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$=2.2R\cos A\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$=2a\cos\frac{1}{2}(B-C)=$ R.H.S.

(e) ΔABC -এ $C=60°$ হলে দেখাও যে , $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$

প্রমাণ০ঃ দেওয়া আছে, $C=60°$

$\therefore \cos C=\cos 60°$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=ab$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$

$2c^2+3ab+2bc+2ca$

$\Rightarrow (a+b+c)^2+c^2+bc+ca=$

$3c^2+3ab+3bc+3ca$

$\Rightarrow (a+b+c)^2+c(a+b+c)=$

$3\{c^2+bc+ab+ca)$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b+c+c)=$

$3\{c(c+b)+a(b+c)\}$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+c+b+c)=$

$3(a+c)(b+c)$

$\Rightarrow \frac{(b+c)+(a+c)}{(b+c)(a+c)}=\frac{3}{a+b+c}$

$\therefore \frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$

10.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে দেখাও যে, $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , ABC ত্রিভুজের বাহু a , b , c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ।

$\therefore a-b=b-c$

$\Rightarrow (s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)$

$\Rightarrow s(s-b)-s(s-a)=s(s-c)-s(s-b)$

$\Rightarrow \frac{s(s-b)}{\Delta}-\frac{s(s-a)}{\Delta}=\frac{s(s-c)}{\Delta}-\frac{s(s-b)}{\Delta}$

$\Rightarrow \cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}$

$\therefore \cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}$ ও $\cot\frac{C}{2}$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

10(b) a^2 , b^2 ও c^2 সমান্তর প্রগমন ভুক্ত হলে প্রমাণ কর যে, cot A , cot B ও cot C সমান্তর প্রগমন ভুক্ত ।

প্রমাণ ঃ a^2, b^2 ও c^2 সমান্তরাল শ্রেণীভুক্ত বলে ,

$a^2-b^2=b^2-c^2 \Rightarrow 2a^2-2b^2=2b^2-2c^2$

$\Rightarrow 2b^2-2a^2=2c^2-2b^2$

$\Rightarrow b^2+c^2-a^2-c^2-a^2+b^2$

$$= c^2 + a^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{R}{abc}\{(b^2 + c^2 - a^2) - (c^2 + a^2 - b^2)\}$$

$$= \frac{R}{abc}\{(c^2 + a^2 - b^2) - (a^2 + b^2 - c^2)\}$$

$$\Rightarrow \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc} - \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$$

$$= \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc} - \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

$$\Rightarrow \cot A - \cot B = \cot B - \cot C$$

$\therefore \cot A$, $\cot B$ ও $\cot C$ সমান্তরা শ্রেণীভুক্ত ।

10(c) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো m , n , $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ হলে , বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ m , n এবং $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ একটি ত্রিভুজের বাহু বলে , প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং m ও n এর যেকোন ধনাত্মক মানের জন্য ,

$$\sqrt{m^2 + mn + n^2} > \text{m বা , n}$$

$\therefore \sqrt{m^2 + mn + n^2}$ বৃহত্তম বাহু।বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$\cos A = \frac{m^2 + n^2 - (\sqrt{m^2 + mn + n^2})^2}{2mn}$$

$$= \frac{m^2 + n^2 - m^2 - mn - n^2}{2mn}$$

$$= -\frac{1}{2} = \cos 120° \quad \therefore A = 120°$$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $120°$.

10.(d) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $2x + 3, x^2 + 3x + 3$, $x^2 + 2x$ হলে , বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ $2x + 3$, $x^2 + 3x + 3$ এবং $x^2 + 2x$ একটি ত্রিভুজের বাহু বলে , প্রত্যেকেই ধনাত্মক ।

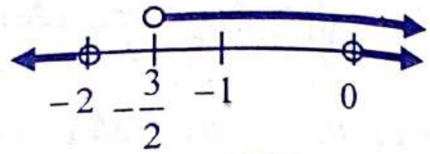
$$\therefore 2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2},$$

$$x^2 + 3x + 3 > 0 \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + 3 - \frac{9}{4} > 0$$

$\Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$; যা x -এর সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য এবং

$$x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x + 2) > 0$$

$\therefore x > 0$ অথবা $x < -2$



$\therefore x > 0$ - এর সকল বাস্তব মানের জন্য $2x + 3$, $x^2 + 3x + 3$ ও $x^2 + 2x$ প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং $x^2 + 3x + 3 > 2x + 3, x^2 + 3x + 3 > x^2 + 2x$.

$\therefore x^2 + 3x + 3$ বৃহত্তম বাহু । বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$(x^2 + 3x + 3)^2 = (2x + 3)^2 + (x^2 + 2x)^2 - 2(2x + 3)(x^2 + 2x)\cos A$$

$$\Rightarrow x^4 + 9x^2 + 9 + 6x^3 + 18x + 6x^2 = 4x^2 + 9 + 12x + x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 2(2x^3 + 7x^2 + 6x)\cos A$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 7x^2 + 6x = -2(2x^3 + 7x^2 + 6x)\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120° \quad \therefore A = 120°$$

10(e) যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুর সথে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

প্রমাণ ঃ মনে করি , ΔABC -এ ,

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2R\sin B}{2R\sin A}$$

$$\Rightarrow \cos A\sin A = \cos B \sin B$$

$$\Rightarrow 2\sin A\cos A = 2\sin B\cos B$$

$$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$$

$$\Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin(A - B)\cos(A + B) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(A - B)\cos(A + B) = 0$$

$$\therefore \sin(A - B) = 0 \Rightarrow \sin(A - B) = \sin 0$$

$$\therefore A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

অথবা , $\cos(A + B) = 0$

$$\Rightarrow \cos(A + B) = \cos 90° \Rightarrow A + B = 90°$$

$$\therefore C = 90°$$

অতএব , ত্রিভুজটি সমবাহু অথবা সমকোণী ।

10(f) দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 , 5 ও 7 হলে ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ ; স্থূলকোণটির মান নির্ণয় কর। [চ.,কু. '১০; দি.'১২]

প্রমাণ ঃ এখানে , বৃহত্তম বাহু = 7.

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটি A হলে আমরা পাই ,

$\cos A = \dfrac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5} = \dfrac{9+25-49}{30}$

$= \dfrac{34-49}{30} = \dfrac{-15}{30} = -\dfrac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore A = 120°$, যা স্থূলকোণ।

অতএব, ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী এবং স্থূলকোণটির মান $120°$.

11.(a) ΔABC -এ যদি $A = 75°$, $B = 45°$ হয় , তবে দেখাও যে , $c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ [ব.'০৭]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 75^0, B = 45^0$

$\therefore C = 180^0 - (75^0 + 45^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \dfrac{b}{\sin 45^0} = \dfrac{c}{\sin 60^0} \Rightarrow \dfrac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore c : a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

11. (b) ΔABC- এ যদি $A = 45°$, $B = 75°$ হয় , তবে দেখাও যে , $a + \sqrt{2}\, c = 2b.$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 45^0, B = 75^0$

$\therefore C = 180^0 - (45^0 + 75^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin 45^0} = \dfrac{b}{\sin 75^0} = \dfrac{c}{\sin 60^0}$

এখন, $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \dfrac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{b}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = k$ (ধরি)

$\therefore a = \dfrac{k}{\sqrt{2}}, b = \dfrac{k(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}, c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}k$

এখন, $a + \sqrt{2}c = \dfrac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}k = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}k$

$= 2.\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}k = 2b$

$\therefore a + \sqrt{2}c = 2b$

11(c) $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে, ত্রিভুজের কোণত্রয় নির্ণয় কর। [কু. '০৯,'১২ ; প্র.ভ.প'০৩]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $a = 2b \cdots\cdots(1)$

এবং $A = 3B \cdots\cdots\cdots(2)$

(1) হতে পাই , $2R \sin A = 2 .2R \sin B$

$\Rightarrow \sin A = 2\sin B \Rightarrow \sin 3B = 2\sin B$; (2) দ্বারা।

$\Rightarrow 3\sin B - 4\sin^3 B = 2\sin B$

$\Rightarrow 4\sin^3 B - \sin B = 0 \Rightarrow \sin B(4\sin^2 B - 1) = 0$

$\Rightarrow \sin B(2\sin B + 1)(2\sin B - 1) = 0$

$\sin B = 0$ হলে , $B = 0$

$2\sin B + 1 = 0$ হলে , $\sin B = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore B = 150°$ এবং $A = 3B = 450°$

কিন্তু ABC ত্রিভুজের জন্য, $B = 0$ এবং $A = 450°$ সম্ভব নয় ।

$\therefore \sin B \neq 0$ এবং $\sin B \neq -1/2$.

$\therefore \sin B = \dfrac{1}{2} = \sin 30° \Rightarrow B = 30°$

$\therefore A = 3B = 3 \times 30° = 90°$ এবং

$C = 180° - (90° + 30°)$

$= 180° - 120° = 60°$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণ তিনটি $30°, 60°, 90°$

12. (a) ΔABC - এ, $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60°$ হলে ত্রিভুজটির অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প'০২]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $a = 2, b = \sqrt{3}+1$ এবং $C = 60^0$. ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2.2.(\sqrt{3}+1)\cos 60^0$

$= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3}+1)/2$

$= 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 = 6 \quad \therefore c = \sqrt{6}$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^0}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^0 \Rightarrow A = 45^0$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^0 \Rightarrow B = 75^0$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অপর বাহু $c = \sqrt{6}$ এবং কোণদ্বয় $A = 45^0$ ও $B = 75^0$

12(b) Δ ABC- এ, A = 45°, C = 105° এবং c = $\sqrt{3}$ + 1 হলে ত্রিভুজটির অপর কোণ ও বহুদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $A = 45^0$, $C = 105^0$ এবং $c = \sqrt{3}+1$.

$$\therefore B = 180^0 - (45^0 + 105^0) = 180^0 - 150^0 = 30^0$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^0} = \frac{b}{\sin 30^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^0}$$

এখন , sin 105° = sin (60° + 45°)

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \sqrt{2}a = 2b = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 2, b = \sqrt{2}$$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অপর কোণ 30^0 এবং বাহুদ্বয় 2 ও $\sqrt{2}$

12(c) Δ ABC-এ , B = 30°, C = 45° ও *a* =($\sqrt{3}$ + 1) সেমি. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ সেমি.।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC –এ $B = 30^0, C = 45^0$ এবং $a = (\sqrt{3}+1)$ সে.মি.

$$\therefore A = 180^0 - (30^0 + 45^0) = 180^0 - 75^0 = 105^0$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^0} = \frac{c}{\sin 45^0}$$

এখন , sin 105° = sin (60° + 45°)

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2}c \Rightarrow c = 2$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}ac\sin B$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) \times 2\sin 30^0$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) \times 2 \times \frac{1}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ সে.মি.

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

13(a) (*b* – *c*) sin A + (*c* – *a*) sin B + (*a* – *b*) sin C = 0

প্রমাণ : **L.H.S.** = (b – c) sin A + (c – a) sin B + (a – b) sin C

= (2R sin B – 2R sin C) sin A + (2R sin C – 2RsinA) sinB +(2RsinA–2RsinB)sinC (১)

= 2R (sin A sinB – sinA sinC + sinB sinC – sin A sin B + sin A sin C – sin B sin C) (১)

= 2R × 0 = 0 = R.H.S. (Proved)

13(b) *a*(sin B – sin C) + *b* (sinC – sin A) + *c* (sin A – sin B) = 0

প্রমাণ : **L.H.S.** = a (sin B – sin C) + b(sin C – sin A) + c (sin A – sin B)

= 2R sin A (sin B – sin C) + 2R sin B (sinC– sinA) + 2R sinC (sin A–sin C)(১)

= 2R(sinA sinB – sinA sinC + sinB sinC

$-\sin A\sin B + \sin A\sin C - \sin B\sin C)$
$= 2R \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

14.(a) $(b^2 - c^2)\sin^2 A + (c^2 - a^2)\sin^2 B + (a^2 - b^2)\sin^2 C = 0$

প্রমাণ : L.H.S.$= (b^2 - c^2)\sin^2 A + (c^2 - a^2)\sin^2 B + (a^2 - b^2)\sin^2 C$
$= (4R^2\sin^2 B - 4R^2\sin^2 C)\sin^2 A + (4R^2\sin^2 C - 4R^2\sin^2 A)\sin^2 B + (4R^2\sin^2 A - 4R^2\sin^2 B)\sin^2 C$ (১)
$= 4R^2(\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 C\sin^2 A + \sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 B\sin^2 C)$
$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

14 (b) $a\sin(B - C) + b\sin(C - A) + c\sin(A - B) = 0$ [কু.'০০]

প্রমাণ : L.H.S. $= a\sin(B - C) + b\sin(C - A) + c\sin(A - B)$
$= 2R\sin A(\sin B\cos C - \cos B\sin C) + 2R\sin B(\sin C\cos A - \sin A\cos C) + 2R\sin C(\sin A\cos B - \sin B\cos A)$ (১) + (১)
$= 2R(\sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C + \cos A\sin B\sin C - \sin A\sin B\cos C + \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C)$
$= 2R \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

15. (a) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 0$

প্রমাণ : $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}$
$= \dfrac{(2R\sin A)^2\sin(B-C)}{\sin A}$ (১)
$= 4R^2\sin A\sin(B-C)$
$= 4R^2\sin\{\pi - (B+C)\}\sin(B-C)$
$= 4R^2\sin(B+C)\sin(B-C)$ (১)
$= 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,
$\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} = 4R^2(\sin^2 C - \sin^2 A)$ এবং
$\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$ (১)

এখন , L.H.S.$= \dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}$
$= 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B)$
$= 4R^2 \times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

15(b) $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2} + b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} + c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = 0$ [রা.'০৩]

প্রমাণ : $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$
$= 2R\sin A\sin\dfrac{1}{2}A\sin\dfrac{B-C}{2}$ (১)
$= 2R\sin A\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B+C}{2}\right)\sin\dfrac{B-C}{2}$
$= 2R\sin A\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$ (১)
$= R\sin A(\sin B - \sin C)$ (১)

অনুরূপভাবে আমরা পাই ,
$b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} = R\sin B(\sin C - \sin A)$ এবং
$c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = R\sin C(\sin A - \sin B)$ (১)

এখন , L.H.S.$= a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2} + b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} + c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$= R(\sin A\sin B - \sin C\sin A + \sin B\sin C - \sin A\sin B + \sin C\sin A - \sin B\sin C)$
$= R \times 0 = 0$ (১)

16(a) $\dfrac{2\cot A+\cot B+\cot C}{\cot A-\cot B+2\cot C}=\dfrac{b^2+c^2}{2b^2-c^2}$

প্রমাণ : $2\cot A+\cot B+\cot C$

$=2\dfrac{R}{abc}(b^2+c^2-a^2)+\dfrac{R}{abc}(c^2+a^2-b^2)+\dfrac{R}{abc}(a^2+b^2-c^2)$ (১)

$=\dfrac{R}{abc}(2b^2+2c^2-2a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$

$=\dfrac{R}{abc}(2b^2+2c^2)=\dfrac{2R}{abc}(b^2+c^2)$

এবং $\cot A-\cot B+2\cot C=\dfrac{R}{abc}\{b^2+c^2-a^2-(c^2+a^2-b^2)+2(a^2+b^2-c^2)\}$

$=\dfrac{R}{abc}(b^2+c^2-a^2-c^2-a^2+b^2+2a^2+2b^2-2c^2)$

$=\dfrac{R}{abc}(4b^2-2c^2)=\dfrac{2R}{abc}(2b^2-c^2)$

এখন , L.H.S. $=\dfrac{2\cot A+\cot B+\cot C}{\cot A-\cot B+2\cot C}$

$=\dfrac{\frac{2R}{abc}(b^2+c^2)}{\frac{2R}{abc}(2b^2-c^2)}=\dfrac{b^2+c^2}{2b^2-c^2}=$ R.H.S. (১)

16(b) $4\Delta(\cot A+\cot B+\cot C)=a^2+b^2+c^2$

প্রমাণ :L.H.S.$=4\Delta(\cot A+\cot B+\cot C)$

$=4\Delta\dfrac{R}{abc}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$ (১)

$=4.\dfrac{abc}{4R}\dfrac{R}{abc}(a^2+b^2+c^2)$

$=a^2+b^2+c^2=$ R.H.S (Proved) (১)

17(a) $(a\ \ b+c)(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2})=2c\cot\dfrac{C}{2}$

প্রমাণ :L.H.S.$=(a+b+c)(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2})$

$=(a+b+c)\left(\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta}+\dfrac{(s-c)(s-a)}{\Delta}\right)$ (১)

$=(s-c)(a+b+c)\dfrac{2s-b-a}{\Delta}$

$=(s-c).2s\ \dfrac{a+b+c-b-a}{\Delta}=2c.\dfrac{s(s-c)}{\Delta}$

$=2c\cot\dfrac{C}{2}=$ R.H.S. (Proved) (১)

(b) $(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}$

প্রমাণ : L.H.S. $=(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}$

$=(a+b+c-2a)\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$ (১)

$=(2s-2a)\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$

$=\dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$

M.H.S. $=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}$

$=(2s-2b)\dfrac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$

$=\dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$

R.H.S. $=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}$

$=(2s-2c)\dfrac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

$=\dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$

$\therefore$ L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved) (১)

18(a) $\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{s^2}{abc}$ [প্র.ভ.প. '০০]

L.H.S. $= \frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{a}\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b}\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c}\frac{s(s-c)}{ab}$ (১)

$= \frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{abc}$

$= \frac{3s^2 - s(a+b+c)}{abc} = \frac{3s^2 - s.2s}{abc}$

$= \frac{s^2}{abc} =$ R.H.S. (১)

18(b) $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$

প্রমাণ : $\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$

$= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$ (১)

$= \frac{2R^2\sin(A+B)\sin(A-B)\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$

$= 2R^2\sin(\pi - C)\sin A\sin B$

$= 2R^2\sin A\sin B\sin C$ (১)

$= 2R^2.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$ (১)

$= \frac{abc}{4R} = \Delta =$ R.H.S.(Proved) (১)

19. (a) $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B} = 0$

প্রমাণ : $\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} = \frac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{\cos B+\cos C}$ (১)

$= \frac{4R^2(\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos B+\cos C}$ (১)

$= \frac{4R^2(\cos C+\cos B)(\cos C-\cos B)}{\cos B+\cos C}$

$= 4R^2(\cos C - \cos B)$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} = 4R^2(\cos A - \cos C)$ এবং

$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B} = 4R^2(\cos B - \cos A)$ (১)

এখন, L.H.S. $= \frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}$

$= 4R^2\{\cos C - \cos B + \cos A - \cos C + \cos B - \cos A\}$

$= 4R^2\times 0 = 0 =$ R.H.S. (Proved) (১)

19(b) $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$

প্রমাণ : L.H.S. $= \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{b-c}{a}\times\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b}\times\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{a-b}{c}\times\frac{s(s-c)}{ab}$ (১)

$= \frac{s}{abc}\{(b-c)(s-a) + (c-a)(s-b) + (a-b)(s-c)\}$

$= \frac{s}{abc}\{s(b-c+c-a+a-b) + (-ab+ca-bc+ab-ca+bc)\}$

$= \frac{s}{abc}\{s\times 0 + 0\} = 0 =$ R.H.S.(Proved) (১)

20(a) Δ ABC -তে $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{b+c+c+a+a+b}{11+12+13}$ (১)

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{2(a+b+c)}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c}{18}$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{18}=\frac{b+c}{11}=\frac{a+b+c-b-c}{18-11}=\frac{a}{7},$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b+c-c-a}{18-12}=\frac{b}{6} \text{ এবং}$$

$$\frac{a+b+c}{18}=\frac{a+b}{13}=\frac{a+b+c-a-b}{18-13}=\frac{c}{5} \quad (১)$$

$$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}=\mathrm{k}\ (\text{say})$$

$\Rightarrow \mathrm{a}=7\mathrm{k}, \mathrm{b}=6\mathrm{k}, \mathrm{c}=5\mathrm{k}$

এখন ,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (১)$$

$$=\frac{36k^2+25k^2-49k^2}{2.6k.5k}=\frac{61-49}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{25k^2+49k^2-36k^2}{2.5k.7k}$$

$$=\frac{74-36}{70}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49k^2+36k^2-25k^2}{2.7k.6k}$$

$$=\frac{85-25}{84}=\frac{60}{84}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \cos A : \cos B : \cos C=\frac{1}{5}:\frac{19}{35}:\frac{5}{7}=7:19:25$$

$$\therefore \frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25} \text{ (Showed)} \quad (১)$$

20. (b) ΔABC- এ , $a = 6$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 90°$ হলে B কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

ΔABC -এ $a = 6, b = 3\sqrt{3}$ ও $A = 90^0$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ (১)

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^0}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{1}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0 \therefore B=60^0 \quad (১)$$

21. $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=p$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=p$

প্রমাণ : $\cos(x+y)=\cos(x+y+z-z)$

$=\cos(x+y+z)\sin z-\sin(x+y+z)\cos z$

অনুরূপভাবে,

$\cos(y+z)=\cos(x+y+z)\sin x-\sin(x+y+z)\cos z$

$\cos(z+x)=\cos(x+y+z)\sin y-\sin(x+y+z)\cos y$

$\therefore \cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=$

$(\sin x+\sin y+\sin z)\cos(x+y+z)-$

$(\cos x+\cos y+\cos z)\sin(x+y+z)$

$=p\cos^2(x+y+z)+p\sin^2(x+y+z)$

$\therefore \cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=p$

22. ΔABC- এ, প্রমাণ কর যে $P = \sin A + \sin B + \sin C$ সর্বোচ্চ হবে যদি $A = B = C$.

প্রমাণ : $P = \sin A + \sin B + \sin C$

$= \sin A + \sin B + \sin(\pi - A - B)$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}.2\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}$$

P সর্বোচ্চ হবে যদি, A = B হয়।

$\therefore P=2\sin A(1+\cos A)$

$=2\sin A(1+\cos A)$

ধরি, $f(x)=2\sin x(1+\cos x)$

$\therefore f'(x)=2\cos x(1+\cos x)+2\sin x(-\sin x)$

$=2\{\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x\}$

$=2\{\cos x+2\cos^2 x-1\}$

$= 2\{2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1\}$
$= 2\{2\cos x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1)\}$
$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f'(x) = 0$ হলে, $\cos x = \frac{1}{2}$ অথবা $\cos x = -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ হলে, $x = \frac{\pi}{3}$

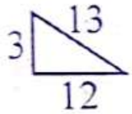
$\therefore A = B = \frac{\pi}{3} = C$, $[A + B + C = \pi]$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উত্তরসহ ঃ

1.(a) $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে $\sin\theta + \sec(-\theta)$ এর মান– **[DU 08-09]**

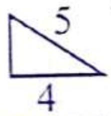
(b) যদি $\cos A = \frac{4}{5}$ হয়, তবে $\frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A}$ এর মান– **[BUET 06-07]**

$Sol^n.$: (a) θ সূক্ষ্মকোণ বলে



$\sin\theta + \sec(-\theta) = \frac{5}{13} + \frac{13}{12} = \frac{229}{156}$

(b) $\tan A = \frac{3}{4}$ $\therefore$ $\frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A} = \frac{25}{7}$



(ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

2. $\cot A - \tan A$ সমান– **[DU 08-09]**

$Sol^n.$: $\cot A - \tan A = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{2\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$

3.(a) $\cos^2 0^0 + \cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \cdots + \cos^2 90^0$ এর মান – **[DU 08-09]**

(b) $\cos^2 30^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 90^0 + \cdots + \cos^2 180^0$ এর মান – **[BUET 06-07]**

$Sol^n.$: (a) এখানে পদ সংখ্যা $= \frac{90 - 0}{10} + 1 = 10$ অর্থাৎ 5 জোড়া পদ। Ans. 5

(b) এখানে পদ সংখ্যা $= \frac{180 - 30}{30} + 1 = 6$ অর্থাৎ 3 জোড়া পদ। Ans. 3

4. $\cos 75^0$ এর সঠিক মান –**[BUET, DU 07-08]**

A. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$Sol^n.$: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\cos 75^0 = 0.2588$
Option D = 0.2588 **Ans.** D

5. $\sin(780^0)\cos(390^0) - \sin(330^0)\cos(-300^0)$ এর মান–**[DU 02-03, 05-06;Jt U 05-06,08-09]**

$Sol^n.$: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে রাশি মান = 1.

6. $\tan 54^0 - \tan 36^0$ এর মান– **[DU 03-04; BUET 03-04]**

$Sol^n.$: প্রদত্ত মান $= 2\tan(54^0 - 36^0)$
$= 2\tan 18^0$ [নিয়ম ঃ $A + B = 90^0$ হলে $\tan A - \tan B = 2\tan(A - B)$]
অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে করতে হবে।

7. $\sin 65^0 + \cos 65^0$ সমান– **[DU 02-03; KU 06-07]**

প্রদত্ত মান $= \sqrt{2}\sin(65^0 + 45^0) = \sqrt{2}\sin 115^0$
$= \sqrt{2}\cos(65^0 - 45^0) = \sqrt{2}\cos 20^0$

নিয়ম ঃ $a\cos A + b\sin A$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(A + \tan^{-1}\frac{b}{a})$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\cos(A - \tan^{-1}\frac{b}{a})$

8. $\tan 15^0$ এর মান– **[DU 00-01; CU 07-08]**

A. $2 + \sqrt{2}$ **B.** $2 - \sqrt{3}$
C. $2 + \sqrt{3}$ **D.** $3 + \sqrt{2}$

$Sol^n.$: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\tan 15^0 = 0.268$
Option B = 0.268 . Ans.B

9. $\frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0}$ এর মান– **[DU 99-00, 04-05]**

Sol^n.: প্রদত্ত রাশি = $\dfrac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{\cos 15^0 + \sin 15^0}$

$= \tan(45^0 - 15^0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

নিয়ম : **1.** $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \tan(45^0 - A)$

2. $\dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan(45^0 + A)$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 0.57735

10. $\cot\dfrac{\pi}{20}\cot\dfrac{3\pi}{20}\cot\dfrac{5\pi}{20}\cot\dfrac{7\pi}{20}\cot\dfrac{9\pi}{20}$ **[RU 07-08]**

Sol^n.: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত মান = 1

$\dfrac{\pi}{20} = \dfrac{180}{20} = 9$

1 ÷ tan Ans tan 3 Ans tan 5 Ans tan 7 Ans tan 9 Ans =

11. $\dfrac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = ?$ **[CU 02-03, RU 07-08]**

A. $\sec\theta$ **B.** $\sin\theta$ **C.** $\tan\theta$ **D.** $\cot\theta$

Sol^n.: $\theta = 30^0$ বসিয়ে প্রদত্ত রাশি = 0.5773

$\tan 30^0 = 0.5773$

Ans. D

12. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos\{(2n+1)\pi + \pi/3\}$ **[SU 06-070]**

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B. 0** **C. 1** **D.** কোনটিই নয়।

Sol^n.: n = 0 হলে প্রদত্ত রাশি $= \cos(\pi + \pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

n = 1 হলে প্রদত্ত রাশি $= \cos(3\pi + \pi/3) = -\dfrac{1}{2}$

13.(a) $\tan 27^0 + \tan 18^0 + \tan 27^0 \tan 18^0$ এর মান– **[IU 05-06]**

(b) $\tan 75^0 - \tan 30^0 - \tan 75^0 \tan 30^0$ এর মান– **[DU 03-04]**

Sol^n.: (a) প্রদত্ত রাশি $= \tan(27^0 + 18^0) = 1$

b) প্রদত্ত রাশি = 1

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 1

নিয়ম : (a) $A + B = n\pi + \pi/4$ হলে,

$\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$

(b) $A - B = \pi/4$ হলে,

$\tan A - \tan B - \tan A \tan B = 1$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে প্রদত্ত রাশি = 1

14. $\sin A = \dfrac{1}{2}$ এবং $\tan B = \sqrt{3}$ হয় তবে, $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ এর মান– **[KU 03-04]**

Sol^n.: $A = 30^0, B = 60^0$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \sin(A + B) = \sin 90^0 = 1$

16. $A + B + C = \pi$ হলে $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ এর মান– **[KU ; RU 07-08]**

a. 4sinA sinB sinC **b.** $4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$

c. 1 − 4sinA sinB sinC **d.** 4sinA sinB sinC -1

Sol^n.: A=B=C= 60^0 ধরে প্রদত্ত রাশি = 2.598

Option গুলোতে A=B=C= 60^0 বসালে a = 2.598

17. tanA + tanB + tanC = tanA tanBtan C হলে A + B + C এর মান কত? **[EA 05-06]**

A. $\pi/2$ **B. 0** **C.** π **D.** 2π

Sol^n.: Ans. π

18. $\sin^2(60^0 + A) + \sin^2 A + \sin^2(60^0 - A)$ এর মান -

Sol^n.: $A = 30^0$ ধরে,

((arg) sin 9 0) X x² + ((arg) sin 3 0) X x² + ((arg) sin 3 0) X x² =

19. ABC ত্রিভুজে cos A + cos C = sin B হলে, $\angle C$ সমান – **[DU 04-05]**

A. 30° **B.** 60° **C.** 90° **D.** 45°

কৌশল ঃ কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের cosine অনুপাতের যোগফল অপর কোণের sine এর সমান হলে ত্রিভুজটি সমকোণী এবং cosine এর সাথের কোণদ্বয়ের যেকোন একটি কোণ সমকোণ।

Sol^n.: Ans. C

20. ABC ত্রিভুজে $a = 8$, $b = 4, c = 6$ হলে $\angle A = ?$ [SU 08-09] A. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{8}$ B. $2\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{8}$ C. $\sin^{-1}\frac{4}{5}$ D. $2\sin^{-1}\frac{4}{5}$

$Sol^n.: \cos A = \frac{4^2+6^2-8^2}{2.4.6} = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ A= 104.48°

Option গুলোতে $D = 106.26^0 \approx 104.48^0$

21. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার a = 10 cm এবং b = c ত্রিভুজটির পরিলিখিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm হলে $\angle B = ?$ [SU 08-09]

$Sol^n.: \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{10}{2.10}$

$\Rightarrow A = 30^0 \therefore B + C = 180° - 30° = 150°$

$\therefore B = 150°/2 = 75°$

22. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাপ যথাক্রমে 3, 5 ও 7 হলে স্থূলকোণটির মান – [IU 06-07; RU 07-08]

$Sol^n.:$ স্থূলকোণটি $= \cos^{-1}\frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5} = 120^0$

23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14, 15 হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল – [RU 07-08; BUET 06-07]

$Sol^n.: S = \frac{13+14+15}{2} = 21$

ক্ষেত্রফল $= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$

24. ABC ত্রিভুজে $\angle A = 60^0, \angle B = 75^0$ এবং $c = \sqrt{6}\, cm$ হলে $a = ?$ [SU 06-07]

$Sol^n.: \angle C = 180^0 - (60^0 + 75^0) = 45^0$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \sqrt{6}\frac{\sin 60^0}{\sin 45^0} = 3$

25. $(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2} = ?$ [SU 06-07]

প্রদত্ত রাশি $= a^2 + b^2 - 2ab(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2})$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$

26. ABC একটি ত্রিভুজ হলে $2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = ?$ [RU 06-07]

$Sol^n.:$ প্রদত্ত রাশি $= 2bc\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2ca\,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + 2bc\,\frac{a^2+a^2-b^2}{2ab}$

$= a^2 + b^2 + c^2$

27. যেকোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = ?$ [IU 05-06]

$Sol^n.:$ প্রদত্ত রাশি $= bc\,\frac{s(s-a)}{bc} + ca\frac{s(s-b)}{ca} + ab\frac{s(s-c)}{ab} = s\{3s - 2(a+b+c)\}$

$= s(3s - 2s) = s^2$

3(c) L.H.S.= $\sin(n+1)x\ \cos(n-1)x - \cos(n+1)x\ \sin(n-1)x$

$= \sin\{(n+1)x - (n-1)x\}$

$= \sin(nx + x - nx + x)$

$= \sin 2x =$ R.H.S. (Proved)

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

1. $Sol^n: \sec(-135^0) = \sec 135^0$
$= \sec(180^0 - 45^0) = -\sec 45^0 = -\sqrt{2}$
$\therefore$ Ans.(b)

2. $Sol^n: \cos\theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \sec\theta = \frac{13}{5}$
$\therefore \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \frac{12}{5}, [\because \theta < 90^0]$
$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\frac{12}{5}}{1-\frac{144}{25}}$
$= \frac{24}{5}\times(-\frac{25}{119}) = -\frac{120}{119}$ $\therefore$ Ans. (c)

3. $Sol^n: \cot 45^0 + \cot(\pi + 45^0) + \cot(2\pi + 45^0) + \cdots\cdots + \cot(9\pi + 45^0)$

$= (9+1)\cot 45^0 = 10 .1 = 10 \therefore$ Ans.(a)

4. সব তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. (d)

5. **Sol^n :** ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\sin 15°$ এবং $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ এর আসন্ন মান $= 0{\cdot}258 \therefore$ Ans. (c)

6. **Sol^n :** $\cos 68°20'\cos 8°20' + \cos 81°40'\cos 21°40' = \cos(68°20' - 8°20')$

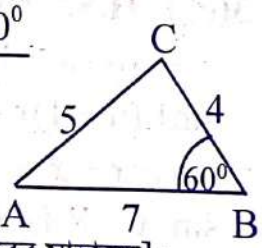
$= \cos 60° = \frac{1}{2} \therefore$ Ans. (c)

7. **Sol^n :** $\frac{\cos 8^0 + \sin 8^0}{\cos 8^0 - \sin 8^0} = \frac{1+\tan 8^0}{1-\tan 8^0}$

$= \frac{\tan 45^0 + \tan 8^0}{\tan 45^0 - \tan 8^0} = \tan(45° + 8°) = \tan 53°$

8. **Sol^n :** $\Delta = sr = \frac{4+5+7}{2} r = 8r \therefore$ Ans. (a)

9. **Sol^n :** $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin 60^0}{5}$



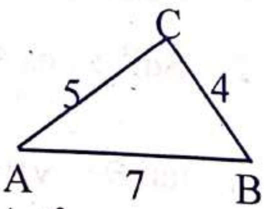
$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore A = 43{\cdot}85^0$ [ক্যালকুলেটরের সাহায্যে]

ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ $R = \frac{5}{2\sin 60^0} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$\sec B = \sec 60^0 = 2 \therefore$ Ans. (b)

10. **Sol^n :** $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{5}{7}$



$\therefore$ Ans (a).

11. **Sol^n :** $\cos A = \frac{7^2 + 5^2 - 4^2}{2\times 7 \times 5}$

$= \frac{49+25-16}{70} = \frac{58}{70} = \frac{29}{35} \therefore \sec A = \frac{35}{29}$

$\therefore$ Ans. (d).

12. **Sol^n :** $\sin^2\theta - \cos^2\theta = -\cos 2\theta$

$= -\cos 60^0 = -\frac{1}{2} \therefore$ Ans. (b).

13. **Sol^n :** $\sec(\theta - 990^0) = \sec(990^0 - \theta)$
$= \sec(11\times 90^0 - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

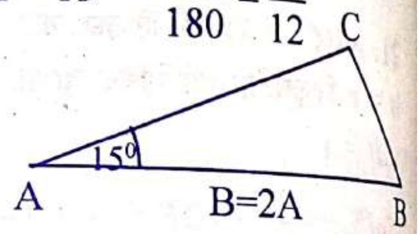
$\therefore$ Ans. (d).

14. **Sol^n :** $\sin(-\theta)\sec(-\theta)\cot(630^0 + \theta)$
$= (-\sin\theta)(\sec\theta)\cot(7\times 90^0 + \theta)$
$= -\sin\theta \times \frac{1}{\cos\theta} \times (-\tan\theta) = \tan^2\theta$

$\therefore$ Ans. (c)

15. **Sol^n :** $\angle A = 15^0 = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ Ans. (b)



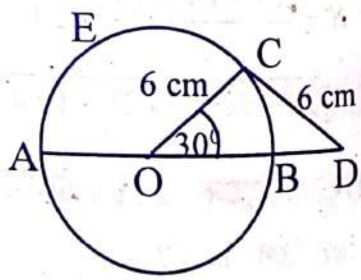
16. **Sol^n :** $b : c = \sin B : \sin C$
$= \sin 30^0 : \sin(180^0 - 45^0)$
$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : \sqrt{2} \therefore$ Ans. (a)

17. **Sol^n :** $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \therefore$ Ans. (b)

18. **Sol^n :**



$\angle AOC = 180^0 - 30^0$

$= 150^0 = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ চাপ $AEC = 6 \times \frac{5\pi}{6}$

$= 5\pi \therefore$ Ans.(d)

19. **Sol^n :**

OCD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}(OC\times CD)\sin(180^0-60^0)$

$=\frac{1}{2}(6\times 6)\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (b)

20. Sol^n : $\frac{OD}{\sin C}=\frac{6}{\sin 30^0}$

$\Rightarrow \frac{OD}{\sqrt{3}/2}=\frac{6}{1/2}\Rightarrow OD=6\sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (c)

21. Sol^n : $\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{13^2-12^2}}{12}=\pm\frac{5}{12}$

$\therefore$ Ans. (a)

22. Sol^n : $\angle C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin 60^0}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^0}$

$\Rightarrow a=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{2}}=\frac{6}{2}=3$ $\therefore$ Ans.(b)

23. Sol^n : $\theta=20^\circ$ ধরে প্রদত্ত রাশি $=0{\cdot}766$ এবং $\cos 2\theta=0{\cdot}766$. $\therefore$ Ans. (c)

24. Sol^n : $\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$

$=\pm\sqrt{\frac{25-24}{25+24}}=\pm\frac{1}{7}$ $\therefore$ Ans. (d)

25. Sol^n : $9^2+40^2=41^2$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ,যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\frac{41}{2}=20{\cdot}5$ $\therefore$ Ans.(a)

26. Sol^n : $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$

$\Rightarrow \sin A-\sin B=\cos B-\cos A$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)=$

$2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$

$\Rightarrow \tan\frac{1}{2}(A+B)=1=\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(A+B)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ Ans. (b)

$\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$ হলে, $A+B=?$ [DU 13-14; BUTex 14-15]

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

27. Sol^n : $\frac{\sin 75^0+\sin 15^0}{\sin 75^0-\sin 15^0}=\tan(45^0+15^0)$

$=\tan 60^0=\sqrt{3}$ $\therefore$ Ans. (a)

28. Sol^n : $\cos A\sin(A-\frac{\pi}{6})$

$=\frac{1}{2}\{\sin(2A-\frac{\pi}{6})-\sin\frac{\pi}{6}\}$

$=\frac{1}{2}\{\sin(2A-\frac{\pi}{6})-\sin\frac{\pi}{6}\}$

বৃহত্তম মানের জন্য, $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2A=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ Ans.(b)

29. Sol^n : $\sin\alpha+\sin\beta=a$

$\Rightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=a^2\cdots\cdots$(i)

$\cos\alpha+\cos\beta=b$

$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=b^2\cdots$ (ii)

$(i)^2+(ii)^2\Rightarrow 2+2\cos(\alpha-\beta)=a^2+b^2$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=\frac{a^2+b^2-2}{2}$ $\therefore$ Ans.(b)

30. Sol^n : $\tan\theta=\frac{3}{4},\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ হলে,

$\cos 2\theta+\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{1+2\tan\theta-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1+2\times\frac{3}{4}-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}$

$=\frac{\frac{16+24-9}{16}}{\frac{25}{16}}=\frac{31}{25}$ $\therefore$ Ans.(d)

31. **Sol^n** : $\tan 75^0$ এর মান ধনাত্মক এবং 1 এর চেয়ে বড়। $\therefore$ Ans. (b)

32. **Sol^n** : $\dfrac{\cos 27^0 - \sin 63^0}{\cos 27^0 + \sin 63^0} = \tan(45^0 - 27^0)$
$= \tan 18^0$. $\therefore$ Ans. (d)

33. **Sol^n** : $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\therefore$ Ans. (b)

34. **Sol^n** : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin 90^0} = \dfrac{b}{\sin 60^0} = \dfrac{3cm}{\sin 30^0}$

$\Rightarrow b = \cos(-\theta) = 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3}$ cm

$\therefore$ Ans. (c)

35. **Sol^n** : $\cos\left(7\dfrac{1}{2}\right)^0 = \sqrt{\cos^2(7\frac{1}{2})^0}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \cos 15^0)}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \cos 30^0)}\}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2})}\}}$

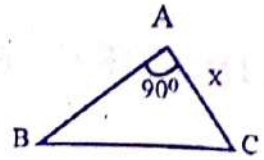
$= \sqrt{\dfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}\}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2}\{1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\}}$

$\therefore$ Ans. (b)

36. **Sol^n** : $\sin 10^0 = 2\sin 5^0 \cos 5^0$
$= 2\sin 5^0 \sqrt{1 - \sin^2 5^0}$
$= 2p\sqrt{1 - p^2}$ $\therefore$ Ans. (b)

উদ্দীপকের আলোকে 37 ও 38 নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ-



37. **Sol^n** : $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{90^0} = \dfrac{CA}{\sin 30^0} = \dfrac{AB}{\sin 60}$

$\Rightarrow BC : CA : AB = 1 : \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2 : 1 : \sqrt{3}$ $\therefore$ Ans.. (b)

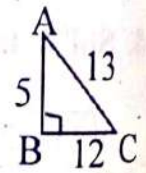
38. **Sol^n** : $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$ হলে $\sin C$ এর মান কত?

(a) x (b) $\dfrac{1}{x}$

(c) $\sqrt{x^2 - 1}$ (d) $\sqrt{1 - x^2}$

39. **Sol^n** : $\sec(270^0 + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
$\therefore$ Ans. (c)

40. **Sol^n** : $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$



$\therefore$ Ans. (b)

(a) $\dfrac{-5}{13}$ (b) $\dfrac{5}{13}$ (c) $\dfrac{-12}{13}$ (d) $\dfrac{12}{13}$

41. **Sol^n** : $a = b\cos B + c\cos C$ সঠিক নয়?
$\therefore$ Ans. (a)

42. **Sol^n** : $\operatorname{cosec}(-2580^0) = -\operatorname{cosec} 2580^0$
$= -\operatorname{cosec}(28 \times 90^0 + 60^0)$
$= -\operatorname{cosec} 60^0 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ Ans. (b)

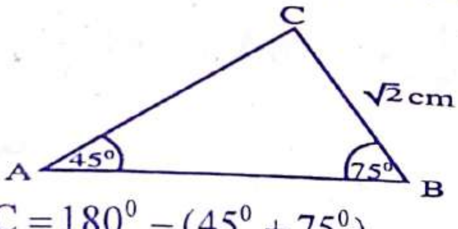
43. **Sol^n** : $\sec(B + C) = \sec(\dfrac{\pi}{2} - A)$
$= \operatorname{cosec} A$ $\therefore$ Ans. (d)

44. **Sol^n** : $\dfrac{1 - \tan^2(45^0 + x)}{1 + \tan^2(45^0 + x)}$
$= \cos 2(45^0 + x) = \cos(90^0 + 2x)$

$= \sin 2x \quad \therefore$ Ans. (d)

45. **Sol^n** : $A = 60^0, B = 45^0$ হলে,
$\cos(B - A) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$= \cos 60^0 \cos 45^0 + \sin 60^0 \sin 45^0$
$= \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \therefore$ Ans. (c)

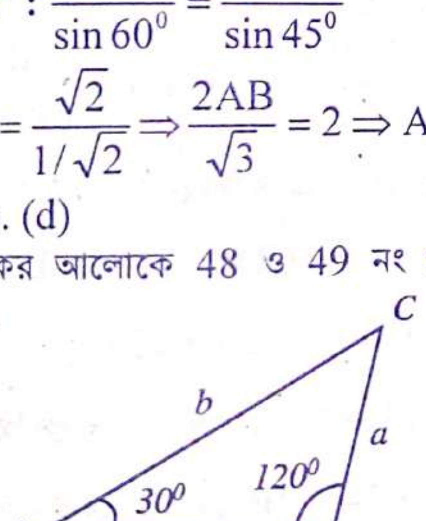
নিচের উদ্দীপকের আরেঅকে 46 ও 47 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:-



46. **Sol^n** : $\angle C = 180^0 - (45^0 + 75^0)$
$= 60^0$
$\therefore \quad \sin(B + C) = \sin(75^0 + 60^0) = \sin 135^0$
$= \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore$ Ans. (b)

47. **Sol^n** : $\frac{AB}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^0}$
$\Rightarrow \frac{AB}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2AB}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$
$\therefore$ Ans. (d)

উদ্দীপকের আলোকে 48 ও 49 নং প্রশ্নের উত্তর দাও-



48. **Sol^n** : $\frac{c+a}{b} = \frac{2R\sin C + 2R\sin A}{2R\sin B}$
$= \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{\sin 30^0 + \sin 30^0}{\sin 120^0}$
$= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore$ Ans.(c)

49. **Sol^n** : $\frac{a}{\sin 30^0} = \frac{b}{\sin 120^0}$
$\Rightarrow \frac{a}{1/2} = \frac{3}{\sqrt{3/2}} \Rightarrow a = \sqrt{3}$
$\therefore \Delta AOB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} ab \sin 30^0$
$= \frac{1}{2}(3\sqrt{3})\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \therefore$ Ans. (a)

50. **Sol^n** : $\operatorname{cosec}(-660^0) = -\operatorname{cosec} 660^0$
$= -\operatorname{cosec}(7 \times 90^0 + 30^0) = +\operatorname{cosec} 30^0$
$= 2 \quad \therefore$ সঠিক উত্তর অনুপস্থিত।

51. **Sol^n** : $2\sin^2 15^0 = 1 - \cos 30^0$
$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$ Ans. (a)

52. **Sol^n** : ΔABC এর পরিসীমা 12 একক।
$\therefore$ Ans.(b)

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1. ABC ত্রিভুজে A, B ও C কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে a, b ও c. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$, যখন $\cos A = \cos B \cos C$. [য.'০৩,'০৯; ব.,কু.,দি.'১৩; রা.'১৪]

সমাধান : প্রশ্নমালা VII B এর উদাহরণ 7 দ্রষ্টব্য।

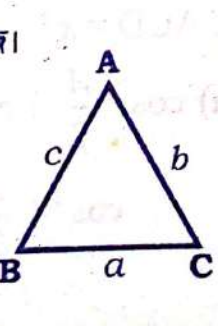
(b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ [ঢা.'১২;কু.'০৬; ব.'১২]

সমাধান : প্রশ্নমালা VII F এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

(c) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ [ব.'১১ ; য.'১১,'১৪; চ.'১০; দি.'১১; রা.'১৩; মা.'১০,'১২,'১৪]

প্রশ্নমালা VII G এর কোসাইন সূত্র ও সাইন সূত্র দ্রষ্টব্য।

2. পাশের চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ।



(a) ত্রিভুজটির বাহু তিনটি $a = 3$ একক , $b = 5$ একক ও $c = 7$ একক হলে, এর পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা,

$$s = \frac{3+5+7}{2} = 7\cdot5 \text{ একক।}$$

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল,

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{7\cdot5(7\cdot5-3)(7\cdot5-5)(7\cdot5-7)}$$
$$= \sqrt{7\cdot5\times4\cdot5\times2\cdot5\times0\cdot5}$$
$$= 6\cdot495 \text{ বর্গ একক।}$$

∴ ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ, $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3\times5\times7}{4\times6\cdot495}$

$$= \frac{3\times5\times7}{4\times6\cdot495} = 4\cdot041 \text{ একক (প্রায়)।}$$

(b) $A = \frac{\pi}{16}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$2\sin A = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

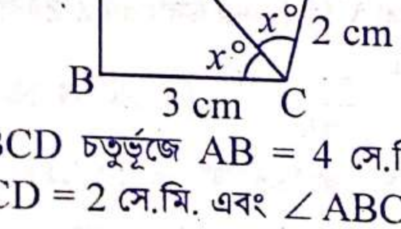
[য. '১৪; কু.'০৩; ব. '১০,'১৪; রা.'১২,'১৪; চ.'১৪]

সমাধান : প্রশ্নমালা VII D এর উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।

(c) $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী । **[কু.'১৩ ; রা.'১২; চ.'০৮ ; য.'০৯,'১২,'১৪ ; সি.'১১; ঢা.'০৭,'১৩; ব.'১০,'১২; মা.'০৯,'১৪ প্র.ভ.প.'০৪,'০৫]**

সমাধান : প্রশ্নমালা VII G এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

3.



চিত্রে ABCD চতুর্ভূজে AB = 4 সে.মি., BC = 3 সে.মি., CD = 2 সে.মি. এবং $\angle ABC = 90°$। কর্ণ AC , $\angle BCD$ এর সমদ্বিখন্ডক এবং $\angle ACB = \angle ACD = x°$ ।

(a) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{2}) + \cos^2(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$ **[ব.'১১]**

প্রমাণ : L.H.S. $= \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{2}) + \cos^2(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{3})$

$$= \frac{1}{2}\{1+\cos2.\frac{A}{2}+1+\cos2(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{2})+1+\cos2(\frac{\pi}{3}-\frac{A}{2})\}$$
$$= \frac{1}{2}\{3+\cos A+\cos(\frac{2\pi}{3}+A)+\cos(\frac{2\pi}{3}-A)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{3+\cos A+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos A\}$$
$$= \frac{1}{2}\{3+\cos A+2(-\frac{1}{2})\cos A\}$$
$$= \frac{1}{2}\{3+\cos A-\cos A\} = \frac{3}{2} = \text{R.H.S.}$$

(b) বর্গ সে.মি. এ AD^2 এর প্রকৃত মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

∴ $\cos x° = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$, $\sin x° = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

এখন, ΔADC এ কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

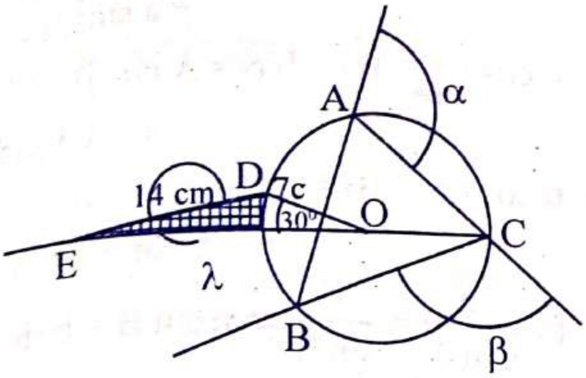
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD\cos x°$$
$$= 5^2 + 2^2 - 2\times5\times2\times\frac{3}{5}$$
$$= 25 + 4 - 12 = 17 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

(c) বর্গ সে.মি. এ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ACD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AB\times BC) + \frac{1}{2}(AC\times CD\sin x^0)$$
$$= \frac{1}{2}(4\times3) + \frac{1}{2}(5\times2\times\frac{4}{5})$$
$$= 6 + 4 = 10 \text{ বর্গ সে.মি.।}$$

4.



(a) প্রমাণ কর যে, $\sin x \sin(x+30°) + \cos x \sin(x+120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

(b) চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: DOE ত্রিভুজ হতে পাই,

$$\frac{DO}{\sin E} = \frac{DE}{\sin O} \Rightarrow \frac{7}{\sin E} = \frac{14}{\sin 30^0}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{\sin E} = \frac{14}{1/2} \Rightarrow \sin E = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \angle E = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14{\cdot}48^0$$

$$\therefore \angle D = \{180^0 - (30^0 + 14{\cdot}48)\} = 135{\cdot}52^0$$

$\therefore$ DOE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OD \times DE)\sin D$

$$= \frac{1}{2}(7 \times 14) \times \sin 135\cdot 52$$

$= 34{\cdot}33$ বর্গ সে.মি.

আবার, 30^0 কোণ দ্বারা সৃষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(7)^2 \times 30 \times \frac{\pi}{180} = 12{\cdot}83$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 34{\cdot}33 - 12{\cdot}83$

$= 21{\cdot}5$ বর্গ সে.মি. (পায়)

(c) চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\lambda - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\lambda = 1$

প্রমাণ: চিত্র হতে পাই,

$$\alpha + \beta + \lambda = \pi - A + \pi - B + \pi - C$$
$$= 3\pi - (A + B + C)$$
$$= 3\pi - \pi = 2\pi$$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 2\pi - \lambda$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(2\pi - \lambda)$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\lambda$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta - \cos\lambda = \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow (\cos\alpha\cos\beta - \cos\lambda)^2 = \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$\Rightarrow \cos^2\alpha\ \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\lambda + \cos^2\lambda = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)$

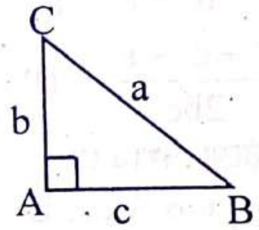
$\Rightarrow \cos^2\alpha\ \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\lambda + \cos^2\lambda = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\ \cos^2\beta$

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\lambda - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\lambda = 1$ (Proved)

5. ΔABC এ, $a = b\cos C + c\cos B$

(a) $\angle A = 90^0$ হলে $a = b\cos C + c\cos B$ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $a^2 = b^2 + c^2$

প্রমাণ :



ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\cos C = \frac{b}{a}$ এবং $\cos B = \frac{c}{a}$

এখন, $a = b\cos C + c\cos B$

$\Rightarrow a = b \times \frac{b}{a} + c \times \frac{c}{a}$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$

(b) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

প্রমাণ : $a = b\cos C + c\cos B$

$\Rightarrow a^2 = (b\cos C + c\cos B)^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2\cos^2 C + c^2\cos^2 B + 2bc\cos B\cos C$

$\Rightarrow a^2 = b^2(1-\sin^2 C) + c^2(1-\sin^2 B) + 2bc\cos B\cos C$

$\Rightarrow a^2 = b^2 - b^2\sin^2 C + c^2 - c^2\sin^2 B + 2bc\cos B\cos C$

$\Rightarrow b^2\sin^2 C + c^2\sin^2 B - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow (2R\sin B)^2\sin^2 C + (2R\sin C)^2\sin^2 B - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$$[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R]$$

$\Rightarrow 4R^2\sin^2 B\sin^2 C + 4R^2\sin^2 C\sin^2 B - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 8R^2\sin^2 B\sin^2 C - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 2(2R\sin B)(2R\sin C)\sin B\sin C - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 2bc\sin B\sin C - 2bc\cos B\cos C = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow -2bc\cos(B+C) = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow -2bc\cos(\pi - A) = b^2 + c^2 - a^2$

$\Rightarrow 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$\therefore \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (Proved)

(c) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে,
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin B\sin A$

প্রমাণ : $a = b\cos C + c\cos B$

$\Rightarrow -b\cos C = c\cos B - a$

$\Rightarrow -b\cos\{\pi - (A+B)\} = (a\cos B + b\cos A)\cos B - a$

$$[\because c = a\cos B + b\cos A]$$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = a\cos^2 B + b\cos A\cos B - a$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - a(1-\cos^2 B)$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - a\sin^2 B$

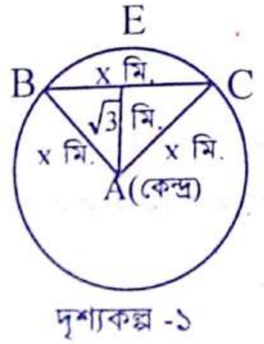
$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - a\sin B.\sin B$

$\Rightarrow b\cos(A+B) = b\cos A\cos B - b\sin A\sin B$

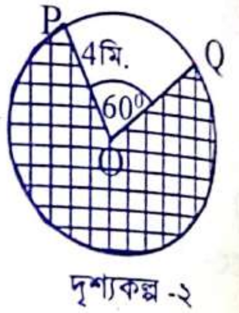
$$[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a\sin B = b\sin A]$$

$\therefore \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

6.



দৃশ্যকল্প -১



দৃশ্যকল্প -২

(a) $\sin 2\alpha = k\sin 2\theta$ হলে দেখাও যে,

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{k-1}{k+1}\tan(\alpha + \theta)$$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII C এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প -১ হতে ABEC ক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান: ABC সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x = \sqrt{3}$

$\therefore x = 2$ সে.মি. $= r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\angle BAC = 60^0 = \dfrac{\pi}{3} = \theta$

$\therefore$ বৃত্তাংশ $BEC = r\theta = 2\times\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ সে.মি.

$\therefore$ ABEC ক্ষেত্রের পরিসীমা $= 2x +$ বৃত্তাংশ BEC

$= 2\times 2 + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{12+2\pi}{3} = \dfrac{2(6+\pi)}{3}$ সে.মি.।

(c) দৃশ্যকল্প -২ হতে প্রতি বর্গ মিটার 500 টাকা হারে ছায়াঘেরা অংশে টাইলস করতে কত টাকা খরচ হবে নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তের ছায়াঘেরা অংশে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ θ হলে, $\theta = 360^0 - 60^0 = 300^0 = \dfrac{300\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{3}$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 4$ মি.

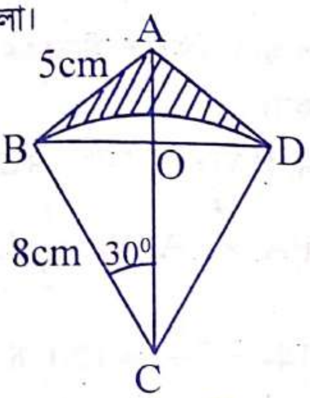
ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

$\therefore = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5\pi}{3} = \frac{40 \times 3 \cdot 1416}{3}$

$= 41 \cdot 89$ বর্গ মি.

$\therefore$ প্রতি বর্গ মিটার 500 টাকা দরে ছায়াঘেরা অংশে টাইলস করতে খরচ হবে $(41 \cdot 89 \times 500)$ টাকা।
$= 20945$ টাকা।

7. উদ্দীপক: চিত্রে, ABCD একটি ঘুড়ি। CBD একটি বৃত্তকলা।



(a) প্রমাণ করা যে, $\dfrac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1} = \sin 2\theta$

প্রমাণ: L.H.S. $= \dfrac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1}$

$= -\dfrac{1 - \tan^2(\theta + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan^2(\theta + \frac{\pi}{4})} = -\cos 2(\theta + \frac{\pi}{4})$

$= -\cos(\frac{\pi}{2} + 2\theta) = + \sin 2\theta =$ R.H.S.

(b) দেখাও যে, $BO = 4$ এবং এর সাহায্যে দেখাও যে, ΔBOC এর ক্ষেত্রফল $8\sqrt{3}$ বর্গ একক।

সমাধান: যেহেতু ABCD একটি ঘুড়ি, $AB = AD$, $BC = CD$ এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

ΔBOC এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{BC}{\sin 90^0} = \frac{BO}{\sin 30^0} \Rightarrow \frac{8}{1} = \frac{BO}{1/2}$$

$\Rightarrow BO = 4$

এখন, ΔBOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$CO = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{8^2 - 4^2}$
$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ ΔBOC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(OB \times OC)$

$= \frac{1}{2}(4 \times 4\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$ বর্গ একক। (প্রমাণিত)

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\angle BCD = 2\angle BCO$

$= 2 \times 30^0 = 60^0 = \frac{\pi}{3}$

$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\therefore$ ΔBCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BC \times CD)\sin 60^0$

$= \frac{1}{2}(8 \times 8)\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} = 27.71$ বর্গ একক

BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BC^2 \times \angle BCD)$

$= \frac{1}{2}(8^2 \times \frac{\pi}{3}) = 33.51$

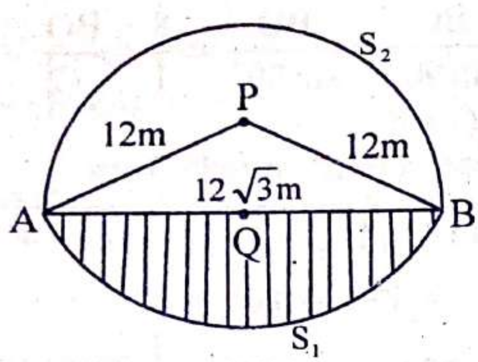
ΔABD এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABO$

$= 2 \times \frac{1}{2}(OA \times OB)$

$= 3 \times 4 = 12$ বর্গ একক

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল
$= \Delta ABD$ এর ক্ষেত্রফল – { BCD বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ΔBCD এর ক্ষেত্রফল}
$= 12 - (33.51 - 27.71) = 12 - 5.8$
$= 6.2$ বর্গ একক (প্রায়)

8. চিত্রে, P কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ S_1 এবং Q কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ S_2।



(a) দেখাও যে, $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$

সমাধান : $\cos APB = \frac{AP^2 + PB^2 - AB^2}{2 \times AP \times PB}$

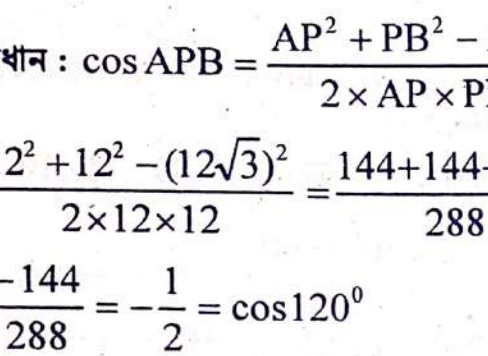
$= \frac{12^2 + 12^2 - (12\sqrt{3})^2}{2 \times 12 \times 12} = \frac{144 + 144 - 432}{288}$

$= \frac{-144}{288} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$

$\therefore \quad \angle APB = 120^0 = \frac{120}{180}\pi = \frac{2\pi}{3}$ (Showed)

(b) একজন খেলোয়াড় S_1 ও S_2 পথ 6 সেকেন্ডে অতিক্রম করলে তার গতিবেগ ঘন্টায় কত কিলোমিটার তা নির্ণয় কর।

সমাধান:



P কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_1 = 12m$ এবং Q কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r_2 = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}m$

$S_1 =$ PAB বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য $=$ AP $\times \angle APB$

$= 12 \times \frac{2\pi}{3} = 25 \cdot 13$ m

$S_2 =$ Q কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধ-পরিসীমা

$= \frac{1}{2}(2\pi r_2) = \pi r_2 = 6\sqrt{3}\pi$

$= 32 \cdot 65$ m

$\therefore \quad S_1 + S_2 = (25 \cdot 13 + 32 \cdot 65)$ m

$= 57 \cdot 78$ m

$\therefore$ খেলোয়াড়টির গতিবেগ $= \frac{57 \cdot 78}{6}$ মি. / সে.

$= \frac{57 \cdot 78 \times 1000}{6 \times 60 \times 60}$ কি.মি./ ঘন্টা

$= 2 \cdot 68$ কি.মি./ ঘন্টা (প্রায়)

(c) রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: PAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(PA^2 \times \angle APB) = \frac{1}{2}(12^2 \times \frac{2\pi}{3})$

$= \frac{1}{2}(144 \times \frac{2\pi}{3}) = 150 \cdot 8$ বর্গ মিটার

ΔPAB এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AP \times BP)\sin APB$

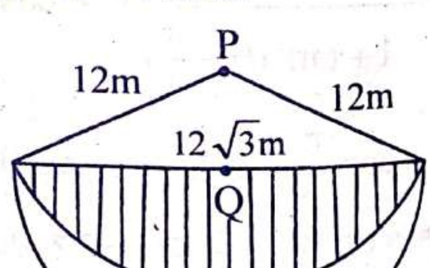
$= \frac{1}{2}(12 \times 12)\sin 120^0 = 62 \cdot 35$ বর্গ মিটার

$\therefore$ রেখাংশ দ্বারা চিহ্নিত সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল

$=$ PAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $-$ ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $= 150 \cdot 8 - 62 \cdot 35$

$= 88 \cdot 45$ বর্গ মিটার।

9.



চিত্রে, P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ S_1 মি. এবং Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধবৃত্তচাপ S_2 মি.।

(a) $a \sin\theta + b \sin\varphi = c = a \cos\theta + b \cos\varphi$ হলে দেখাও যে,

$$\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে , $a\sin\theta + b\sin\varphi = c$

$\Rightarrow a^2\sin^2\theta + b^2\sin^2\varphi + 2ab\sin\theta\sin\varphi = c^2 \cdots\cdots\cdots (1)$

এবং $a\cos\theta + b\cos\varphi = c$

$\Rightarrow a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\varphi + 2ab\cos\theta\cos\varphi = c^2 \cdots\cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই ,

$a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + 2ab(\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi) = 2c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta-\varphi) = 2c^2$

$\Rightarrow 2ab\{2\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi)-1\} = 2c^2 - a^2 - b^2$

$\Rightarrow 4ab\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = 2c^2 - a^2 - b^2 + 2ab$

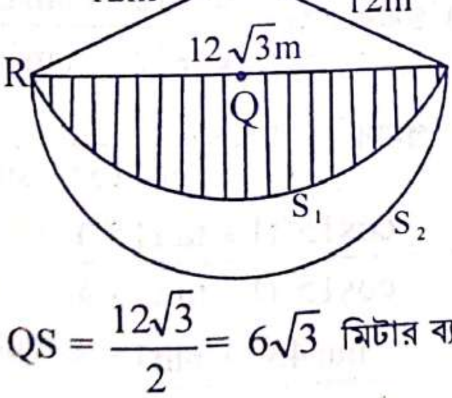
$= 2c^2 - (a-b)^2$

$\Rightarrow \cos^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}$

$\therefore \cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$

(b) একজন খেলোয়াড় S_2 বৃত্তচাপ 3 সেকেন্ডে অতিক্রম করলে তার গতিবেগ ঘন্টায় কত কিলোমিটার তা নির্ণয় কর।

সমাধান:



$r = RQ = QS = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ মিটার ব্যাসার্ধ

বিশিষ্ট অর্ধ-বৃত্তের পরিসীমা $S_2 = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$

$= 6\sqrt{3}\times 3\cdot1416 = 32\cdot65$ মিটার

$\therefore$ খেলোয়াড়টির গতিবেগ $= \frac{32\cdot65}{3}$ মি. / সে.

$= \frac{32\cdot65\times60\times60}{3\times1000}$ কি.মি./ ঘন্টা

$= 39\cdot18$ কি.মি./ ঘন্টা (প্রায়)

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\cos RPS = \frac{12^2+12^2-(12\sqrt{3})^2}{2\times12\times12}$

$= \frac{144+144-432}{288} = \frac{-144}{288} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \angle RPS = 120^0 = \frac{120}{180}\pi = \frac{2\pi}{3}$

PRS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(\angle RPS\times12^2)$

$= \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}\times144) = 150\cdot8$ বর্গ একক

PRS ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(PR\times PS)\sin RPS$

$= \frac{1}{2}(12\times12)\sin120^0 = \frac{1}{2}(12\times12)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 62\cdot35$ বর্গ মিটার

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$= (150\cdot8 - 62\cdot35) = 88\cdot45$ বর্গ মিটার।

10. ABC ত্রিভুজে, $A = \frac{\pi}{16}$, $B = \frac{9\pi}{16}$

(a) $\text{cosec}^2 A + \tan^2 B$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\text{cosec}^2 A + \tan^2 B$

$= \text{cosec}^2\frac{\pi}{16} + \tan^2\frac{9\pi}{16}$

$= \text{cosec}^2\frac{\pi}{16} + \tan^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16})$

$= \text{cosec}^2\frac{\pi}{16} - \cot^2\frac{\pi}{16} = 1$ (Ans.)

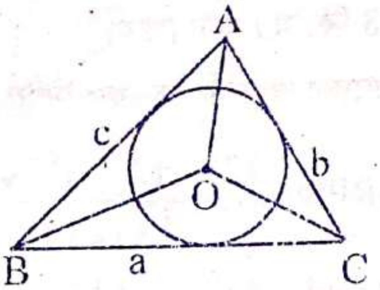
(b) প্রমাণ কর যে, $2\sin A = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

প্রমাণ: পশ্নমালা VIIE এর উদাহরণ -1 দ্রষ্টব্য।

(c) প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\sin A\sin B\sin C$

প্রমাণ: পশ্নমালা VIIF এর 4(c) দ্রষ্টব্য।

11. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O। $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \beta$ এবং $\angle OCA = \gamma$



(a) প্রমাণ কর যে, $\tan 75° = 2+\sqrt{3}$

প্রমাণ: L.H.S. $= \tan 75°$

$= \tan(45^0 + 30^0)$

$= \dfrac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1-\tan 45^0 \tan 30^0}$

$= \dfrac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1-\tan 45^0 \tan 30^0} = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1.\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2} = 2+\sqrt{3}$

= R.H.S. (Proved)

(b) $\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = \sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $A = B = C$.

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VIIF এর 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে, $\sin(\beta-\gamma) = \dfrac{AC-AB}{BC}\cos\alpha$

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O বলে, চিত্রানুযায়ী, α.

$\therefore \alpha = \dfrac{A}{2}, \beta = \dfrac{B}{2}, \gamma = \dfrac{C}{2}$

R.H.S. $= \dfrac{AC-AB}{BC}\cos\alpha$

$= \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\dfrac{A}{2}$; $\left[\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = R\right]$

$= \dfrac{\sin B - \sin C}{\sin A}\cos\dfrac{A}{2}$

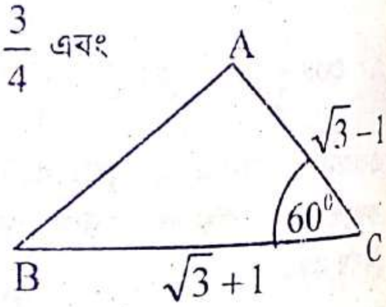
$= \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\dfrac{A}{2}$

$= \dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})}{\sin\frac{A}{2}}$

$= \dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \sin\dfrac{1}{2}(B-C)$

$= \sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C) = \sin(\beta-\gamma) =$ L.H.S.

12. $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ এবং



(a) প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0} = \sqrt{3}$

প্রমাণ: L.H.S. $= \dfrac{\cos 15^0 + \sin 15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$

$= \dfrac{\cos 15^0(1+\tan 15^0)}{\cos 15^0(1-\tan 15^0)}$

$= \dfrac{\tan 45^0 + \tan 15}{1-\tan 45^0 \tan 15^0}$

$= \tan(45^0 + 15^0) = \tan 60^0$

$= \sqrt{3}$ R.H.S.

(b) $\cos\alpha$ ঋণাত্মক হলে $\dfrac{\tan\alpha + \sin(-\alpha)}{\cot\alpha + \cos(-\alpha)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\alpha$ ঋণাত্মক।

$\therefore \sec\alpha = -\sqrt{1+\tan^2\alpha} = -\sqrt{1+\frac{9}{16}}$

$= -\sqrt{\frac{16+9}{16}} = -\frac{5}{4}$

$\therefore \cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

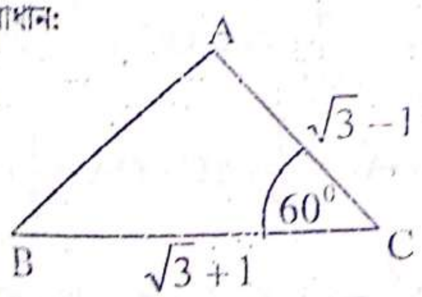
$\therefore \frac{\tan\alpha+\sin(-\alpha)}{\cot\alpha+\cos(-\alpha)} = \frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\cot\alpha+\cos\alpha}$

$= \frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{\frac{15+12}{20}}{\frac{20-12}{15}}$

$= \frac{27}{20}\times\frac{15}{8} = \frac{27}{4}\times\frac{3}{8} = \frac{51}{32}$.

(c) AB এর মান ব্যবহার করে ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



এখানে, $a = \sqrt{3}+1$, $b = \sqrt{3}-1$, $C = 60^0$

$\therefore A + B = 180° - C = 180° - 60°$

$\Rightarrow A + B = 120°$ ...... (i)

ট্যানজেন্ট সূত্র হতে আমরা পাই,

$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}\times\cot 30°$

$= \frac{2}{2\sqrt{3}}\times\sqrt{3} = 1$

$\Rightarrow \frac{A-B}{2} = 45° \Rightarrow A - B = 90° \cdots (ii)$

(i) + (ii) $\Rightarrow 2A = 210° \therefore A = 105°$

(i) − (ii) $\Rightarrow 2B = 30° \therefore B = 15°$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$

$= (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)\frac{1}{2}$

$= 2(3+1) - 2(3-1)\frac{1}{2}$

$= 8 - 2 = 6 \quad \therefore c = \sqrt{6}$.

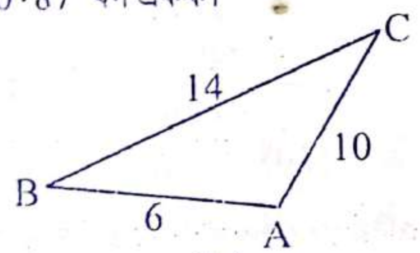
$\therefore$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}bc\sin A$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{6}\sin 105^0$

$= \frac{1}{2}\times 0\cdot73\times2\cdot45\times0\cdot97$

$= 0\cdot87$ বর্গ একক।

13.



(a) $\tan(1590°)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\tan(1590°)$

$= \tan(17\times360° + 60°)$

$= -\cot 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ ও অন্তঃব্যাসার্ধ যথাক্রমে R ও r হলে, R : r নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ত্রিভুজটির বাহু তিনটি $a = 14$, $b = 10$, $c = 6$.

$\therefore$ ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা $s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{14+10+6}{2} = 15$

আমরা জানি, $\frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$= \frac{14\times10\times6}{4\sqrt{15(15-14)(15-10)(15-6)}}$

$= \frac{210}{\sqrt{15\times1\times5\times9}} = \frac{210}{15\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

এবং $rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow 15r = 15\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}$

$\therefore \quad R : r = \frac{14\sqrt{3}}{3} : \sqrt{3} = \frac{14}{3} = 14 : 3$

(c) বৃহত্তম কোণের মাধ্যমে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ A.

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{10^2+6^2-14^2}{2\times10\times6}$

$= \frac{-60}{2\times10\times6} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$

$\therefore \quad A = 120^0.$

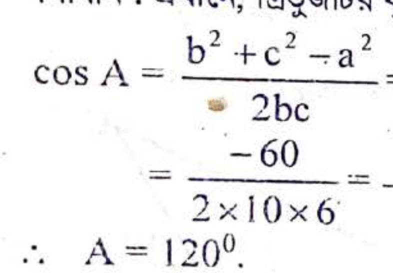
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$

$= \frac{1}{2}\times10\times6 \sin 120^0$

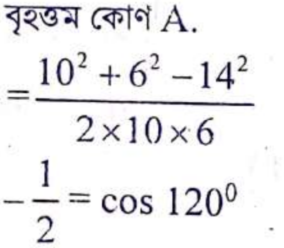
$= 30\times\sin(180^0-60^0) = 30\times\sin 60^0$

$= 30\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ বর্গ একক।

14.



চিত্র-১



চিত্র-২

(a) যেকোনো ত্রিভুজে দেখাও যে, $\sin 3B = 4 \sin B$, যখন $a = 4b$ এবং $A = 3B$.

প্রমাণ: ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{4b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B}$

$\therefore \quad \sin 3B = 4 \sin B$

(b) চিত্র-১ অনুযায়ী, ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ΔOAC এ, $\angle OAC = 90^0$, $\angle AOC = 30^0$.

$\therefore \quad \angle ACO = 90^0 - 30^0 = 60^0$

OAC ত্রিভুজে সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC}$

$\Rightarrow \frac{4 \text{ cm}}{\sin 60^0} = \frac{AC}{\sin 30^0} = \frac{OC}{\sin 90^0}$

$\Rightarrow \frac{4 \text{ cm}}{\sqrt{3}/2} = \frac{AC}{1/2} = \frac{OC}{1}$

$\Rightarrow AC = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm, $OC = \frac{8}{\sqrt{3}}$ cm

$\therefore \quad \Delta OAC = \frac{1}{2}(AC\times OA) = \frac{1}{2}(\frac{4}{\sqrt{3}}\times4)$

$= \frac{8}{\sqrt{3}} = 4\cdot6188$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 4$ cm, কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$.

$\therefore$ OADB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times4^2 = 4\cdot1888$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ΔOAC এর ক্ষেত্রফল – OADB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= 4\cdot6188 - 4\cdot1888 = 0\cdot43$ বর্গ সে.মি.।

(c) চিত্র-২ এর বৃহত্তম কোণ নির্ণয় করে তার সাহায্যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ΔPQR এর বৃহত্তম বাহু $PR = 7$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $\angle QPR$.

ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই,

$$\cos QPR = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2 \times PQ \times PR}$$

$$= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$= \cos 120^0$

$\therefore \angle QPR = 120^0$.

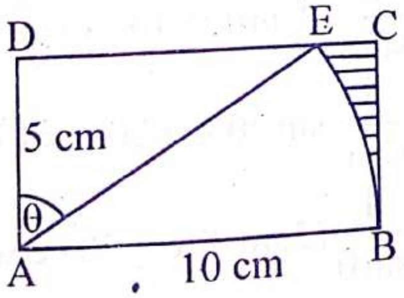
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(PQ \times PR \sin QPR)$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 120^0$$

$$= \frac{15}{2} \times \sin(180^0 - 60^0) = \frac{15}{2} \times \sin 60^0$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$ বর্গ একক।

15.



চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং A কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ BE।

(a) ΔPQR- এ , $p = 6$, $q = 3\sqrt{3}$ এবং $P = 90°$ হলে Q কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ΔPQR -এ $p = 6$, $q = 3\sqrt{3}$ এবং $P = 90°$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই; $\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q}$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^0} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin Q} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin Q}$$

$$\Rightarrow \sin Q = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0 \therefore Q = 60^0$$

(b) উদ্দীপকের $\frac{DE}{AE}$ অনুপাতটি θ কোণের যে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্দেশ করে তার লেখচিত্র $-2\pi \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে অঙ্কন কর।

সমাধান : ΔADE , $\frac{DE}{AE} = \sin\theta$.

$-2\pi \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে $\sin\theta$ এর লেখচিত্র পাঠ্যপুসত্মক দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশ BEC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : A কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপ BE ।

$\therefore AE = AB = 10$ cm এবং

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\Delta ADE \text{ এ, } \sin\theta = \frac{DE}{AE} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sin 60^0$$

$\therefore \angle DAE = \theta = 60^0$

$\therefore \angle BAE = 90^0 - 60^0 = 30^0 = \frac{\pi}{6}$

ছায়াঘেরা অংশ BEC এর ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – {ΔADE এর ক্ষেত্রফল + ABE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}

$$= 10 \times 5 - \{\frac{1}{2}(AD \times DE) + \frac{1}{2}(\angle BAE \times AB^2)\}$$

$$= 50 - \{\frac{1}{2}(5 \times 5\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} \times 10^2)\}$$

$= 50 - (21 \cdot 65 + 26 \cdot 18)$

$= 50 - 47 \cdot 83 = 2 \cdot 17$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

16. $S = \tan P \cot Q \cot R$,

$X=\sec\frac{\pi}{17}\sec\frac{2\pi}{17}$ এবং $Y=\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{9\pi}{17}$

(a) $\tan A=\frac{5}{12}$ হলে দেখাও যে, $\sin 2A=\frac{120}{169}$

প্রমাণ: $\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\frac{2\times\frac{5}{12}}{1+(\frac{5}{12})^2}$

$=\frac{\frac{5}{6}}{1+\frac{25}{144}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{144+25}{144}}=\frac{5}{6}\times\frac{144}{169}=\frac{120}{169}$

$\therefore\ \sin 2A=\frac{120}{169}$ (Showed)

(b) $P=20^0$, $Q=50^0$, $R=10^0$ হলে দেখাও যে, $S=\sqrt{3}$

প্রমাণ: $S=\tan P\cot Q\cot R$

$=\tan 20^0\cot 50^0\cot 10^0$

$=\frac{2\sin 20^0\cos 50^0\cos 10^0}{2\cos 20^0\sin 50^0\sin 10^0}$

$=\frac{\sin 20^0\{\cos(50^0+10^0)+\cos(50^0-10^0)\}}{\cos 20^0\{\cos(50^0-10^0)-\cos(50^0+10^0)\}}$

$=\frac{\sin 20^0(\cos 60^0+\cos 40^0)}{\cos 20^0(\cos 40^0-\cos 60^0)}$

$=\frac{\sin 20^0(\frac{1}{2}+\cos 40^0)}{\cos 20^0(\cos 40^0-\frac{1}{2})}$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin 20^0+\cos 40^0\sin 20^0}{\cos 20^0\cos 40^0-\frac{1}{2}\cos 20^0}$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin 20^0+\frac{1}{2}\{\sin(40^0+20^0)-\sin(40^0-20^0)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(40^0+20^0)+\cos(40^0-20^0)\}-\frac{1}{2}\cos 20^0}$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin 20^0+\frac{1}{2}\sin 60^0-\frac{1}{2}\sin 20^0}{\frac{1}{2}\cos 60^0+\frac{1}{2}\cos 20^0-\frac{1}{2}\cos 20^0}$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin 60^0}{\frac{1}{2}\cos 60^0}=\tan 60^0$

$\therefore\ S=\sqrt{3}$

(c) প্রমাণ কর যে, $\frac{16Y}{X}=-1$

প্রমাণ: L.H.S. $=\frac{16Y}{X}$

$=16\frac{\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{9\pi}{17}}{\sec\frac{\pi}{17}\sec\frac{2\pi}{17}}$

$=16\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{9\pi}{17}$

$=16\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$, যেখানে $\theta=\frac{\pi}{17}$

$=\frac{8}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos\theta).\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$

$=\frac{8}{\sin\theta}\sin 2\theta\ \cos 2\theta\cos 4\theta\cos 9\theta$

$=\frac{4}{\sin\theta}(2\sin 2\theta\cos 2\theta)\ \cos 4\theta\cos 9\theta$

$=\frac{4}{\sin\theta}\sin 4\theta\ \cos 4\theta\cos 9\theta$

$=\frac{2}{\sin\theta}(2\sin 4\theta\cos 4\theta)\ \cos 9\theta$

$=\frac{1}{\sin\theta}(2\sin 8\theta\ \cos 9\theta)$

$=\frac{1}{\sin\theta}\{\sin(8\theta+9\theta)-\sin(9\theta-8\theta)\}$

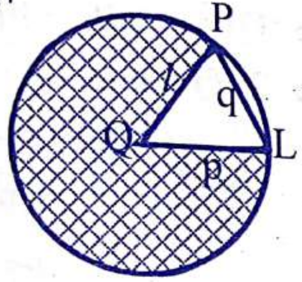
$=\frac{1}{\sin\theta}\{\sin 17\theta-\sin\theta\}$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin(17\times\frac{\pi}{17}) - \sin\theta\}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin\pi - \sin\theta\} = \frac{1}{\sin\theta}(0 - \sin\theta)$$

$= 0 - 1 = -1 =$ R.H.S. (Proved)

17. চিত্রে, Q বৃত্তটির কেন্দ্র।



(a) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos 33^0 - \sin 33^0}{\cos 33^0 + \sin 33^0} = \tan 12^0$

প্রমাণ: L.H.S. $= \frac{\cos 33^0 - \sin 33^0}{\cos 33^0 + \sin 33^0}$

$$= \frac{\cos 33^0(1 - \frac{\sin 33^0}{\cos 33^0})}{\cos 33^0(1 + \frac{\sin 33^0}{\cos 33^0})} = \frac{1 - \tan 33^0}{1 + \tan 33^0}$$

$$= \frac{\tan 45^0 - \tan 33^0}{1 + \tan 45^0 \tan 33^0} = \tan(45^0 - 33^0)$$

$= \tan 12^0 =$ R.H.S.

(b) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$$\sin\frac{Q-P}{2} = \frac{q-p}{4R}\operatorname{cosec}\frac{L}{2}$$

প্রমাণ: R.H.S. $= \frac{q-p}{4R}\operatorname{cosec}\frac{L}{2}$

$$= \frac{2R\sin Q - 2R\sin P}{4R}\operatorname{cosec}\frac{L}{2}$$

$$= \frac{2R(\sin Q - \sin P)}{4R}\frac{1}{\sin\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\sin Q - \sin P}{2\sin\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(Q-P)\cos\frac{1}{2}(Q+P)}{2\sin\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(Q-P)\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2})}{\sin\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(Q-P)\sin\frac{L}{2}}{\sin\frac{L}{2}}$$

$= \sin\frac{Q-P}{2} =$ L.H.S. (Proved)

(c) $\angle PQL = 60^0$ এবং p = 5 সে.মি. হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\angle PQL = 60^0 = \frac{\pi}{3}$ এবং

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, p = 5 সে.মি.।

$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi p^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi$

PQL বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\angle PQL \times p^2$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 5^2 = \frac{25}{6}\pi$$

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 25\pi - \frac{25}{6}\pi$

$= \frac{150-25}{6}\pi = \frac{125}{6}\pi$ বর্গ একক।

18. PQR একটি ত্রিভুজ।

(a) প্রমাণ কর যে, tanP = tanQ + tanR, যখন cosP = cosQ.cosR

প্রমাণ: R.H.S. = tan Q + tan R

$$= \frac{\sin Q}{\cos Q} + \frac{\sin R}{\cos R}$$

$$= \frac{\sin Q \cos R + \sin R \cos Q}{\cos Q \cos R}$$

$$= \frac{\sin(Q+R)}{\cos P}$$

$$= \frac{\sin(\pi - P)}{\cos P}, \text{ [}\because \text{ PQR একটি ত্রিভুজ]}$$

$$= \frac{\sin P}{\cos P} = \tan P = \text{L.H.S. (Proved)}$$

(b) প্রমাণ কর যে, $\sin^2 P - \sin^2 Q + \sin^2 R = 2\sin P \cos Q \sin R$.

প্রমাণ: **L.H.S.** $= \sin^2 P - \sin^2 Q + \sin^2 R$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2P + 1 - \cos 2R) - \sin^2 Q$

$= \frac{1}{2}(2 - \cos 2P - \cos 2R) - \sin^2 Q$

$= 1 - (\cos 2P + \cos 2R) - \sin^2 Q$

$= 1 - \sin^2 Q - \frac{1}{2}.2\cos(P+R)\cos(P-R)$

$= \cos^2 Q - \cos(\pi - Q)\cos(P-R)$

$= \cos^2 Q + \cos Q \cos(P-R)$

$= \cos Q \{\cos Q + \cos(P-R)\}$

$= \cos Q [\cos\{\pi - (P+R)\} + \cos(P-R)]$

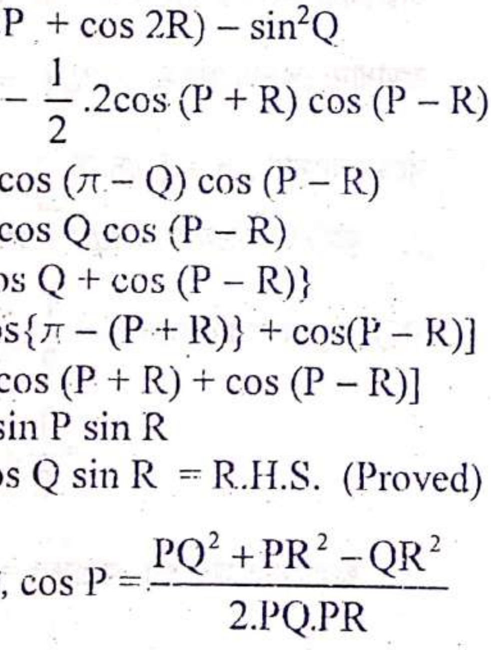
$= \cos Q [-\cos(P+R) + \cos(P-R)]$

$= \cos Q .2 \sin P \sin R$

$= 2\sin P \cos Q \sin R$ = R.H.S. (Proved)

(c) প্রমাণ কর যে, $\cos P = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2.PQ.PR}$

প্রমাণ:



QP কে S পর্যন্ত বর্ধিত করি। ত্রিভুজের ভেক্টর বিধি হতে পাই,

$\therefore \overrightarrow{QR}.\overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}).(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR})$

$QR^2 = \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR}.\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PR}$

$= QP^2 + 2\ \overrightarrow{QP}.\overrightarrow{PR} + PR^2$

$= QP^2 + 2|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{PR}|\cos RPS + PR^2$

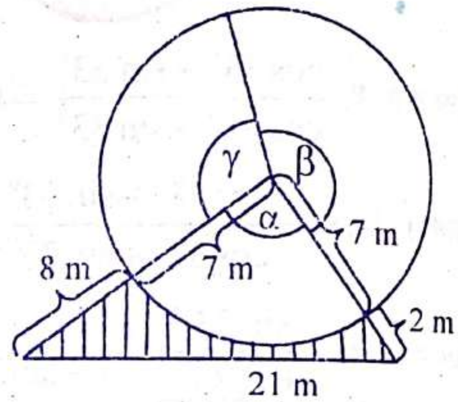
$\Rightarrow QR^2 = QP^2 + PR^2 + 2QP.PR\cos(\pi - P)$

$\Rightarrow QR^2 = QP^2 + PR^2 - 2PQ.PR\cos P$

$\Rightarrow 2PQ.PR\cos P = QP^2 + PR^2 - QR^2$

$$\therefore \cos P = \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2.PQ.PR}$$

19.



(a) প্রমাণ কর যে, $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

প্রমাণ: $\tan 75° = \tan(30° + 45°)$

$$= \frac{\tan 30^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 30^0 \tan 45^0}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

(b) উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$
$= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

প্রমাণ: উদ্দীপক অনুসারে আমরা পাই,

$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

L.H.S. $= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1+\frac{1}{2}.2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma$

$= 1+\cos(2\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma$

$= 1+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma$

$= 1+\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]$

$= 1+\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)$
$+\cos\{2\pi-(\alpha+\beta)\}]$

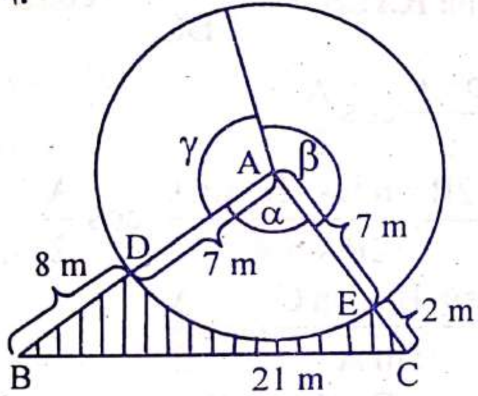
$= 1+\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$= 1+\cos\gamma . 2\cos\alpha\cos\beta$

$= 1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$ R.H.S.

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



চিত্রানুযায়ী, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য,

BC = a = 21 m, AC = b = 7 + 2 = 9 m,

AB = c = 7 + 8 = 15 m

$$\cos\alpha = \frac{9^2+15^2-21^2}{2\times9\times15} = \frac{81+225-441}{270}$$

$$= \frac{-135}{270} = -\frac{1}{2} = \cos120^0$$

$$\therefore\ \alpha = 120^0 = \frac{120}{180}\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2}\times AB\times AC\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}\times15\times9\times\sin120^0$

$= \frac{1}{2}\times15\times9\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 58\cdot46$ বর্গ মিটার (প্রায়)

ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\alpha(AD)^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times7^2 = \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times7^2$

$= 51\cdot31$ বর্গ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল$=58\cdot46-51\cdot31$
$= 7\cdot15$ বর্গ মিটার (প্রায়)

20. ABC ত্রিভুজে, $A=\frac{\pi}{16}, B=\frac{9\pi}{16}$

(a) $\sin^2A+\sin^2B$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\sin^2A+\sin^2B = \sin^2\frac{\pi}{16}+\sin^2\frac{9\pi}{16}$

$= \sin^2\frac{\pi}{16}+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16})$

$= \sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16} = 1$

(b) প্রমাণ কর যে, $2\sin A = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

প্রমাণ: R.H.S. $= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}} = \sqrt{2-\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}} = \sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{4})}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}$

$= \sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{8})} = \sqrt{2\times2\sin^2\frac{\pi}{16}}$

$= 2\sin\frac{\pi}{16} = 2\sin A =$ L.H.S.

(c) প্রমাণ কর যে, $\cos^2A+\cos^2B-\cos^2C = 1-2\sin A\sin B\cos C$

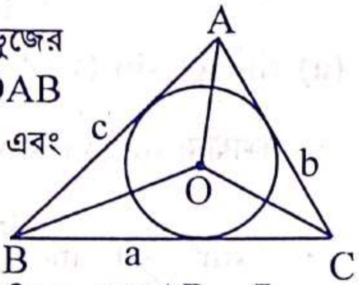
প্রমাণ: ABC একটি ত্রিভুজ বলে, $A+B+C=\pi$

L.H.S. $= \cos^2A+\cos^2B-\cos^2C$

$= \frac{1}{2}(1+\cos2A+1+\cos2B)-\cos^2C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$
$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$
$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A-B) - \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$
$= 1 - \cos C\{\cos(A-B) + \cos C\}$
$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos\{\pi - (A+B)\}]$
$= 1 - \cos C.[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$
$= 1 - 2\cos C \sin A \sin B = $ R.H.S

21. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O। $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \beta$ এবং $\angle OCA = \gamma$



(a) BC = 5 cm, AC = 3cm এবং AB = 7 cm হলে $\angle C$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, BC = a = 5 cm, AC = b = 3 cm এবং AB = c = 7 cm.
ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই,

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}$
$= \frac{25+9-49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} = \cos 120^0$
$\therefore \angle C = 120^0$.

(b) প্রমাণ কর যে, $\sin 4\alpha - \sin 4\beta + \sin 4\gamma = 4 \cos A \sin B \cos C$

প্রমাণ: যেহেতু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O,
$\angle OAB = \alpha = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle OBC = \beta$
$= \frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle OCA = \gamma = \frac{1}{2}\angle C$.
$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = \frac{1}{2}\times\pi = \frac{\pi}{2}$

L.H.S.$= \sin 4\alpha - \sin 4\beta + \sin 4\gamma$
$= 2\cos\frac{1}{2}(4\alpha+4\beta)\sin\frac{1}{2}(4\alpha-4\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$
$= 2\cos 2(\alpha+\beta)\sin 2(\alpha-\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$
$= 2\cos 2(\frac{\pi}{2}-\gamma)\sin(2\alpha-2\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$
$= 2\cos(\pi-2\gamma)\sin(2\alpha-2\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$
$= -2\cos 2\gamma\sin(2\alpha-2\beta) + 2\sin 2\gamma\cos 2\gamma$
$= 2\cos 2\gamma[-\sin(2\alpha-2\beta) + \sin\{\pi-(2\alpha+2\beta)\}]$
$= 2\cos 2\gamma[-\sin(2\alpha-2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta)]$
$= 2\cos 2\gamma.2\sin 2\beta\cos 2\alpha$
$= 4\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\gamma$
$= 4\cos A\sin B\cos C = $ R.H.S.

(c) দেখাও যে, $\sin(\beta-\gamma) = \frac{AC-AB}{BC}\cos\alpha$

প্রমাণ: R.H.S. $= \frac{AC-AB}{BC}\cos\alpha$

$= \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}$

$= \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{A}{2}\sin(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})}{\sin\frac{A}{2}}$

$= \sin(\beta-\lambda) = $ L.H.S.

22. $A = 10^0, B = 50^0, C = 60^0, D = 70^0$
$L = \sin(Q+R-P) + \sin(R+P-Q) + \sin(P+Q-R)$

(a) প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

প্রমাণ : L.H.S. $= \dfrac{\sin 75^0 - \sin 15^0}{\sin 75^0 + \sin 15^0}$

$= \dfrac{\sin(90^0 - 25^0) - \sin 15^0}{\sin(90^0 - 25^0) + \sin 15^0}$

$= \dfrac{\cos 25^0 - \sin 15^0}{\cos 25^0 + \sin 15^0} = \dfrac{\cos 25^0(1 - \tan 15^0)}{\cos 25^0(1 + \tan 15^0)}$

$= \dfrac{\tan 45^0 - \tan 15^0}{1 + \tan 45 \tan 15^0} = \tan(45^0 - 15^0)$

$= \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$ R.H.S. (Proved)

(b) দেখাও যে, $\sin A \sin B \cos C \sin D = \dfrac{1}{16}$

প্রমাণ : $\sin A \sin B \cos C \sin D$

$= \sin 10^0 \sin 50^0 \cos 60^0 \sin 70^0$

$= \sin 10^\circ \sin 50^\circ . \dfrac{1}{2} . \sin 70^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \sin 10^\circ \ \dfrac{1}{2} .(2 \sin 50^\circ \sin 70^\circ)$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ \{\cos(70^\circ - 50^\circ) - \cos(70^\circ + 50^\circ)\}$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ (\cos 20^\circ - \cos 120^\circ)$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ (\cos 20^\circ + \dfrac{1}{2})$

$= \dfrac{1}{4} \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ$

$= \dfrac{1}{4} . \dfrac{1}{2} \{\sin(20^\circ + 10^\circ) - \sin(20^\circ - 10^\circ)\} + \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ$

$= \dfrac{1}{8} \sin 30^\circ - \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ + \dfrac{1}{8} \sin 10^\circ$

$= \dfrac{1}{8} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16} =$ R.H.S. (Proved)

(c) প্রমাণ কর যে, $L = 4 \sin P \sin Q \sin R$, যেখানে $P + Q + R = \pi$

L.H.S.$= \sin(Q + R - P) + \sin(R + P - Q) + \sin(P + Q - R)$

$= \sin(P + Q + R - 2P) + \sin(P + Q + R - 2Q) + \sin(P + Q + R - 2R)$

$= \sin(\pi - 2P) + \sin(\pi - 2Q) + \sin(\pi - 2R)$

$= \sin 2P + \sin 2Q + \sin 2R$

$= 2 \sin \dfrac{1}{2}(2P + 2Q) \cos \dfrac{1}{2}(2P - 2Q) + \cos 2R$

$= 2\sin(P + Q)\cos(P - Q) + 2\sin R \cos R$

$= 2\sin(\pi - R)\cos(P - Q) + 2\sin R \cos R$

$= 2\sin C \cos(P - Q) + 2\sin R \cos R$

$= 2\sin R \{\cos(P - Q) + \cos R\}$

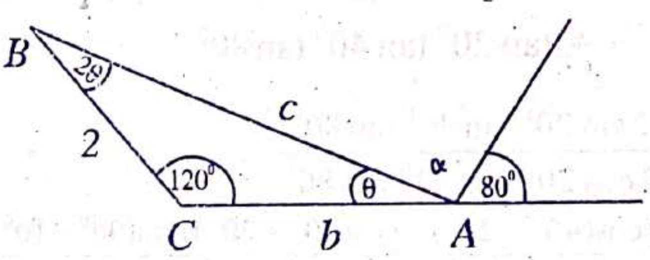
$= 2\sin R \{\cos(P - Q) + \cos(\pi - \overline{P + Q})\}$

$= 2\sin R \{\cos(P - Q) - \cos(P + Q)\}$

$= 2\sin R . 2\sin P \sin Q$

$= 4\sin P \sin Q \sin R =$ R.H.S.(Proved)

23. [ঢা.বো. ২০১৭]



দৃশ্যকল্প-I

দৃশ্যকল্প-II: $p = \tan\theta \tan 2\theta \tan\alpha$.

(a) $\sin 25^0 + \cos 25^0$ এর মান কত? ২

সমাধান: $\sin 25^0 + \cos 25^0$

$= \sin 25^0 + \cos(90^0 - 65^0)$

$= \sin 25^0 + \sin 65^0$

$= 2 \sin \dfrac{1}{2}(65^0 + 25^0) \cos \dfrac{1}{2}(65^0 - 25^0)$

$= 2 \sin 45^0 \cos 20^0 = 2 . \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos 20^0$

$= \sqrt{2} \cos 20^0$ (Ans.)

(b) দৃশ্যকল্প-I হতে b এবং c এর মান নির্ণয় কর। ৪

সমাধান: ΔABC এ, $\theta + 2\theta + 120^0 = 180^0$

$\Rightarrow 3\theta = 60^0 \Rightarrow \theta = 20^0$

ΔABC এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\Rightarrow \frac{2}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin 2\theta} = \frac{c}{\sin 120^0}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin 20^0} = \frac{b}{\sin 40^0} = \frac{c}{\sin 120^0}$

$\Rightarrow b = \frac{2\sin 40^0}{\sin 20^0} = \frac{4\sin 20^0 \cos 20^0}{\sin 20^0}$

$\Rightarrow b = 4\cos 20^0 = 3\cdot 76$ (প্রায়) এবং

$c = \frac{2\sin 120^0}{\sin 20^0} = \frac{1\cdot 73}{0\cdot 34} = 5.1$ (প্রায়)

(c) দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $p = \sqrt{3}$. ৪

সমাধান: চিত্র হতে পাই,

$\theta + \alpha + 80^0 = 180^0 \Rightarrow 20^0 + \alpha = 100^0$

$\Rightarrow \alpha = 80^0$

$p = \tan\theta \tan 2\theta \tan\alpha$

$= \tan 20^0 \tan 40^0 \tan 80^0$

$= \frac{2\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80^0}{2\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}$

$= \frac{\{\cos(40^0 - 20^0) - \cos(40^0 + 20^0)\}\sin(90^0 - 10^0)}{\{\cos(40^0 + 20^0) + \cos(40^0 - 20^0)\}\cos(90^0 - 10^0)}$

$= \frac{(\cos 20^0 - \cos 60^0)\cos 10^0}{(\cos 60^0 + \cos 20^0)\sin 10^0}$

$= \frac{\cos 20^0 \cos 10^0 - \frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 + \cos 20^0 \sin 10^0}$

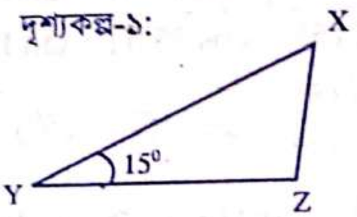
$= \frac{\frac{1}{2}\{\cos(20^0 + 10^0) + \cos(20^0 - 10^0)\} - \frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 + \frac{1}{2}\{\sin(20^0 + 10^0) - \sin(20^0 - 10^0)\}}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cos 30^0 + \frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{1}{2}\cos 10^0}{\frac{1}{2}\sin 10^0 + \frac{1}{2}\sin 30^0 - \frac{1}{2}\sin 10^0}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$

$\therefore p = \sqrt{3}$

24. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ [সি.বো.'১৭]

(a) $\cos 74^0 33' \cos 14^0 33' + \cos 75^0 27' \cos 15^0 27'$ এর মান বের কর। ২

সমাধান: $\cos 74^0 33' \cos 14^0 33' + \cos 75^0 27' \cos 15^0 27'$

$= \cos 74^0 33' \cos 14^0 33' + \cos(90° - 14^0 33')\cos(90° - 74^0 33')$

$= \cos 69°22' \cos 9°22' + \sin 14^0 33' \sin 74^0 33'$

$= \cos(74^0 33' - 14^0 33') = \cos 60° = \frac{1}{2}$

(b) উদ্দীপক ১-এ যদি $\cos x = \sin y - \cos z$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর $\angle x + \angle y = \angle z$. ৪

সমাধান: উদ্দীপক ১ হতে পাই,

$\angle x + \angle y + \angle z = 180^0$

এখন, $\cos x = \sin y - \cos z$

$\Rightarrow \cos x + \cos z = \sin y$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(x + z)\cos\frac{1}{2}(x - z) = \sin y$

$\Rightarrow 2\cos\frac{1}{2}(180^0 - y)\cos\frac{1}{2}(x - z) = \sin y$

$\Rightarrow 2\cos(90^0 - \frac{y}{2})\cos\frac{1}{2}(x - z) = \sin y$

$\Rightarrow 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{1}{2}(x-z) = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{1}{2}(x-z) = \cos\frac{y}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\angle x - \angle z) = \frac{\angle y}{2}$

$\Rightarrow \angle x - \angle z = \angle y$

$\therefore \angle x + \angle y = \angle z.$

(c) দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে $f(2\pi - 4\theta)$ এর লেখচিত্র অংকন কর। যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi.$ 8

সমাধান: $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

$\therefore f(2\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi - 4\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\sin(\pi - 2\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

ধরি, $y = f(2\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

নিচের তালিকায় $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$ এর জন্য $y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

θ	-2π	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{6\pi}{18}$	2π
y	0	−.43	0	.17	.43	.32	.43	0

স্কেল নির্ধারণ ঃ x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1.$

(উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে লেখচিত্র নিজে অঙ্কন কর।]

25. [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R.

(a) $A + B = 105^0$ হলে $\sin C$ নির্ণয় কর। ২

সমাধান: ΔABC -এ,

$A + B + C = 180^0 \Rightarrow 105^0 + C = 180^0$

$\Rightarrow C = 75^0 \Rightarrow \sin C = \sin 75^0$

$\Rightarrow \sin C = \sin(45^0 + 30^0)$

$= \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (Ans.)

(b) ΔABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A\cos B\cos C)$

প্রমাণ: ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore$ a= 2R sinA, b = 2R sinB, c = 2R sinC

L.H.S. $= a^2 + b^2 + c^2$

$= (2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2$

$= 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$; আতপর প্রশ্নমালা VII F এর উদাহরণ -5 দ্রষ্টব্য।

(c) ΔPQS এর ক্ষেত্রে-

$\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS}$ হলে $\angle Q$ নির্ণয় কর। 8

সমাধান: মনে করি, PQR ত্রিভুজে,

PQ = s, QS = p, PS = q. তাহলে,

$\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS}$

$\Rightarrow \frac{1}{s+q} = \frac{3}{q+s+p} - \frac{1}{q+p}$

$\Rightarrow \frac{1}{s+q} = \frac{2}{q+s+p} + \frac{1}{q+s+p} - \frac{1}{q+p}$

$\Rightarrow \frac{1}{s+q} - \frac{1}{q+s+p} = \frac{2}{q+s+p} - \frac{1}{q+p}$

$$\Rightarrow \frac{q+s+p-s-q}{(q+s+p)(s+q)} = \frac{2q+2p-q-s-p}{(q+s+p)(q+p)}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{s+q} = \frac{q+p-s}{q+p}$$

$$\Rightarrow pq + p^2 = q^2 - s^2 + ps + pq$$

$$\Rightarrow p^2 + s^2 - q^2 = ps$$

$$\Rightarrow \frac{p^2+s^2-q^2}{2s} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos Q = \cos 60^0$$

$$\Rightarrow \angle Q = 60^0 \quad \text{(Ans.)}$$

26. দৃশ্যকল্প-১ : ΔXYZ এ,
$\cos X = \sin Y - \cos Z$.

দৃশ্যকল্প-২ : $\sqrt{1+n}.\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n}.\tan\frac{\beta}{2}$

[য.বো.'১৭]

(a) প্রমাণ কর যে, $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

প্রমাণ: সৃজনশীল প্রশ্ন 11(a) দ্রষ্টব্য।

(b) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII G এর অনুরূপ।

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে,

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha - n}{1 - n\cos\alpha}$$

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$$\sqrt{1+n}.\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n}.\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1-n}{1+n}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1-n}{1+n}\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(1+e)\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{(1-n)\cos^2\frac{\alpha}{2} - (1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(1-n)\cos^2\frac{\alpha}{2} + (1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}) - n(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2})}{(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}) - n(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}$$

$$\therefore \cos\beta = \frac{\cos\theta - n}{1 - n\cos\theta}$$

27. $\angle E + \angle F = 65^\circ, \angle F - \angle E = 25^\circ$

[য.বো.'১৭]

(a) $\tan\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin 2\beta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\beta = \frac{1}{3}$

$$\therefore \sin 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1+(\frac{1}{3})^2}$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{9}{9+1} = 2\times\frac{3}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{(Ans.)}$$

(b) দেখাও যে,

$$2\sin(\pi + \frac{F}{4}) = -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

প্রমাণ: দেওয়া আছে,

$$\angle E + \angle F = 65^\circ, \angle F - \angle E = 25^\circ$$

$\therefore\ 2\angle F = 90^0 \Rightarrow \angle F = 45^0$ এবং
$2\angle E = 40^0 \Rightarrow \angle E = 20^0$

$$2\sin(\pi + \frac{F}{4}) = 2\sin(180^0 + \frac{45^0}{4})$$

$$= -2\sin\frac{45^0}{4} = -2\sin 11^0 15'$$

অতপর, প্রশ্নমালা VII E এর উদাহরণ-1 দ্রষ্টব্য।

(c) দেখাও যে,

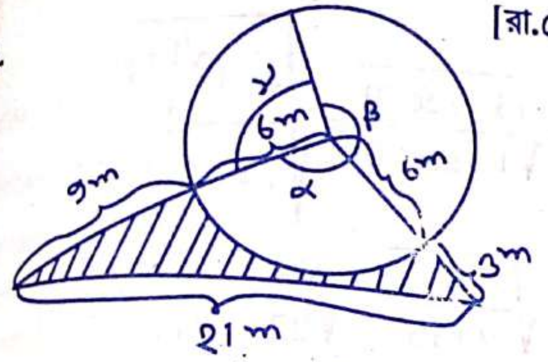
$$\tan\angle E.\tan 2\angle E.\tan 3\angle E.\tan 4\angle E = 3.$$

L.H.S.$= \tan\angle E.\tan 2\angle E.\tan 3\angle E.\tan 4\angle E$

$$= \tan 20^0 \tan 40^0 \tan 60^0 \tan 80^0$$

অতপর, প্রশ্নমালা VII C এর 1(c) দ্রষ্টব্য।

28. [রা.বো.'১৭]



(a) x-এর সাপেক্ষে $x^3 \sin(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: x-এর সাপেক্ষে $x^3 \sin(\ln x)$ এর অন্তরজ $= \frac{d}{dx}\{x^3 \sin(\ln x)\}$

$$= x^3 \cos(\ln x).\frac{1}{x} + \sin(\ln x).3x^2$$

$$= x^3 \frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\} + \sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= x^3 \cos(\ln x).\frac{1}{x} + \sin(\ln x)(3x^2)$$

$$= x^2 \cos(\ln x) + 3x^2 \sin(\ln x) \text{ (Ans.)}$$

(b) উদ্দীপকের সাহায্যে মান নির্ণয় কর:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

প্রমাণ: এখানে, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

অতপর প্রশ্নমালা VII F এর 6(a) এর অনুরূপ।

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: সৃজনশীল প্রশ্ন 8(c) দ্রষ্টব্য।

29. $A = \frac{2\pi}{15}, \alpha + \beta + \gamma = \pi$ এবং $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$ [কু.বো.'১৭]

(a) প্রমান কর যে, $\cos 2p = \frac{1 - \tan^2 p}{1 + \tan^2 p}$

প্রমাণ: L.H.S. $= \cos 2p$

$$= \cos^2 p - \sin^2 p = \cos^2 p(1 - \tan^2 p)$$

$$= \frac{1 - \tan^2 p}{\sec^2 p} = \frac{1 - \tan^2 p}{1 + \tan^2 p} = \text{R.H.S.}$$

(b) উদ্দীপকের আলোকে, প্রমাণ কর যে,

$16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = 1$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII D এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপক থেকে দেখাও যে,

$\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর 10(a) দ্রষ্টব্য।

30. দৃশ্যকল্প-১: $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ [কু.বো.'১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : ΔABC এর $A + B + C = \pi$

(a) যদি ΔOQR এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p, q, r এবং $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}pq$ হয় তবে R কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}pq$

$$p^2 + q^2 - r^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}2pq$$

$$\Rightarrow \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos R = \cos 45^0 \therefore R = 45^0 \text{ (Ans.)}$$

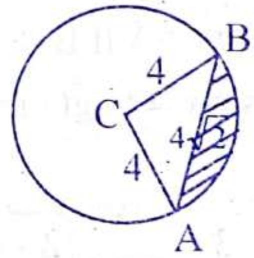
(b) দৃশ্যকল্প : ১ এর আলোকে $\cos(x + y)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা VII C এর উদাহরণ 7(a) দ্রষ্টব্য।

(c) দৃশ্যকল্প : ২ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$.

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII F এর 4(a) দ্রষ্টব্য।

31. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: $\sin C + \sin D = p$

$\cos C + \cos D = q$ [ব.বো.'১৭]

(a) $\tan\theta = \frac{b}{a}$ হলে $\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$$\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta} = \frac{\cos\theta(a - b\tan\theta)}{\cos\theta(a + b\tan\theta)}$$

$$=\frac{a-b\times\frac{b}{a}}{a+b\times\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

(b) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্রানুযায়ী, $AC^2+BC^2=4^2+4^2$

$\Rightarrow AC^2+BC^2=32=(4\sqrt{2})=AB^2$

$\therefore \angle ACB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ACB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(AC^2\times\angle ACB)$

$=\frac{1}{2}(4^2\times\frac{\pi}{2})=4\pi$ বর্গ একক

ACB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(AC\times BC)$

$=\frac{1}{2}(4\times4)=8$ বর্গ একক

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল = ACB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল − ACB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=(4\pi-8)$ বর্গ একক।

(c) দৃশ্যকল্প-২: এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{C-D}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$

প্রমাণ: প্রশ্নমালা VII B এর 13(a) দ্রষ্টব্য।

32. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$.

[দি.বো. ২০১৭]

(a) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$ হলে, $\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}\therefore\sec\theta=\frac{\sqrt{13}}{3}$

$$\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}=\sqrt{\frac{2-(\sec^2\theta-1)}{2+\sec^2\theta-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{3-\sec^2\theta}{1+\sec^2\theta}}=\sqrt{\frac{3-(\frac{\sqrt{13}}{3})^2}{1+(\frac{\sqrt{13}}{3})^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{27-13}{9+13}}=\sqrt{\frac{14}{22}}=\sqrt{\frac{7}{11}}\text{ (Ans.)}$$

(b) $f(x)+f(y)=p$ এবং $g(x)+g(y)=q$ হলে প্রমাণ কর যে, $f\left(\frac{x-y}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$.

প্রমাণ : $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$.

$\therefore f(x)+f(y)=p\Rightarrow\sin x+\sin y=p$

$g(x)+g(y)=q\Rightarrow\cos x+\cos y=q$

অতপর প্রশ্নমালা VII B এর 13(a) দ্রষ্টব্য।

(c) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ ব্যবধিতে $f(2x)$ এর লেখচিত্র অংকন করে এর একটি বৈশিষ্ট্য লিখ।

সমাধান : $f(x)=\sin x\Rightarrow f(2x)=\sin 2x$

অতপর প্রশ্নমালা VI B এর উদাহরণ 3 দ্রষ্টব্য।

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু যথাক্রমে a = 40 সে.মি., b = 50 সে.মি. এবং c = 60 সে.মি.। $\triangle ABC$ তে বৃহত্তম বাহু c = 60 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle C$ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহু a = 40 সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle A$ ক্ষুদ্রতম কোণ। তাহলে প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে $\triangle ABC$ অঙ্কন করে চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় করি এবং সূত্র $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ও

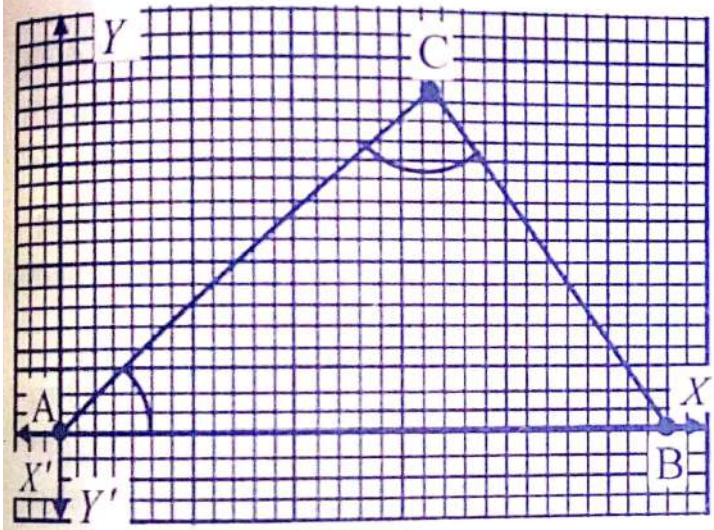
$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'AX ও YAY' আঁকি।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি. ধরি।



3. গ্রাফ পেপারে AX বরাবর ক্ষুদ্রতম $(60 \div 2)$ অর্থাৎ 30 বর্গের বাহুর সমান করে বৃহত্তম বাহু AB = 60 সে.মি. কেটে নেই।

4. A কে কেন্দ্র করে ক্ষুদ্রতম $(50 \div 2)$ অর্থাৎ 25 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং B কে কেন্দ্র করে $(40 \div 2)$ অর্থাৎ 20 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। A, B এবং B, C যোগ করি। তাহলে ΔABC তে AB = c = 60 সে.মি., BC = a = 40 সে.মি. এবং AC = b = 50 সে.মি. সূচিত করে।

5. চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম কোণ $\angle C$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A$ নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ $\cos C = \dfrac{40^2 + 50^2 - 60^2}{2 \times 40 \times 50}$

$$= \frac{1600 + 2500 - 3600}{4000} = \frac{500}{4000} = 0{\cdot}125$$

$\therefore \angle C = 82{\cdot}82°$

$$\cos A = \frac{50^2 + 60^2 - 40^2}{2 \times 50 \times 60}$$

$$= \frac{2500 + 3600 - 1600}{6000} = \frac{4500}{6000} = 0{\cdot}75$$

$\therefore \angle A = 41{\cdot}41°$

ফল সংকলন ঃ

বৃহত্তম কোণ C নির্ণয়		ক্ষুদ্রতম কোণ A নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
$\angle C = 83°$	$\angle C = 82{\cdot}82°$	$\angle A = 41{\cdot}5°$	$\angle A = 41{\cdot}41°$

ফলাফল ঃ নির্ণেয় বৃহত্তম কোণ $\angle C = 83°$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A = 41{\cdot}5°$।

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

2. **একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 105°, 60°, 15° হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।**

পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের কোণগুলি 105°, 60°, 15° হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয়।

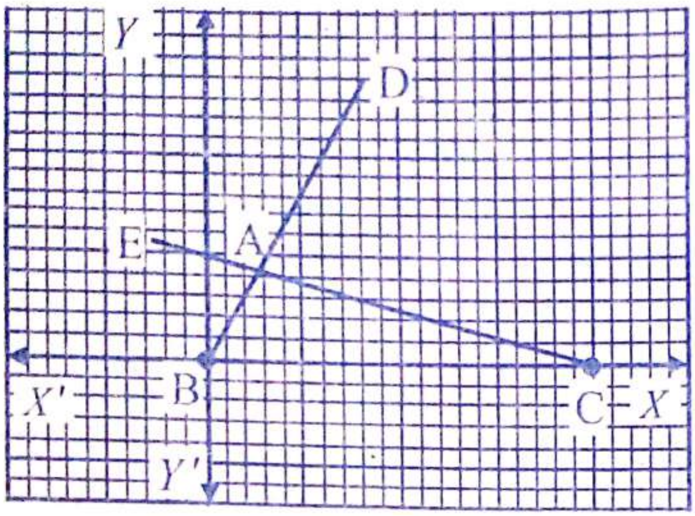
মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ΔABC এর কোণগুলি $\angle A = 105°$, $\angle B = 60°$ ও $\angle C = 15°$ এর বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c। তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত হতে গ্রাফের সাহায্যে এবং $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে a, b ও c এর অনুপাত নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'BX ও YBY' আঁকি।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BC = a = 10 সে.মি. কেটে নেই।



3. চাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে $\angle CBD = 60°$ ও C বিন্দুতে $\angle BCE = 15°$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

4. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে যথাক্রমে c ও b বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব : আমরা জানি, ΔABC তে

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A + 60° + 15° = 180°$

$\therefore \quad \angle A = 105°$

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^0} = \frac{b}{\sin 60^0} = \frac{c}{\sin 15^0}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{0.966} = \frac{b}{0.866} = \frac{c}{0.259}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{0.966\times10}{0.966}} = \frac{b}{\frac{0.866\times10}{0.966}} = \frac{c}{\frac{0.259\times10}{0.966}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{8.96} = \frac{c}{2.68}$$

$\therefore \quad a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68$

ফল সংকলন :

a : b : c নির্ণয়	
গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত অনুপাত :	সূত্র থেকে প্রাপ্ত অনুপাত :
a : b : c = 10 : 9 : 2.7	a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68

ফলাফল : নির্ণেয় অনুপাত ,

a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68

মন্তব্য : গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

3. একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম : একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় করতে হবে।

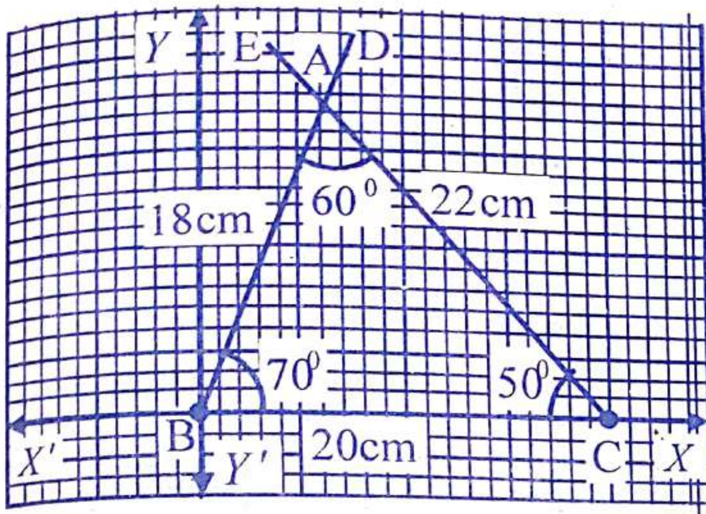
মূলতত্ত্ব : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার একটি বাহু a = 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle B = 70°$ ও $\angle C = 50°$ দেওয়া আছে। তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$ এবং $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে b ও c গ্রাফের সাহায্যে এবং $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ ও $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'BX ও YBY' আঁকি।

2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের বাহুর সমান করে BC = 20 সে.মি. কেটে নেই।



3. চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিন্দুতে $\angle CBD = 70°$ এবং C বিন্দুতে $\angle BCE = 50°$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

হিসাব ঃ আমরা জানি, ΔABC তে

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$\Rightarrow \angle A + 70° + 50° = 180°$$
$$\therefore \angle A = 60°$$

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{20}{\sin 60^0} = \dfrac{b}{\sin 70^0}$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin 70^0}{\sin 60^0} \times 20 = \frac{0\cdot939}{0\cdot866} \times 20$$

$= 21\cdot69$ সে.মি.(প্রায়)

তদ্রূপ, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{20}{\sin 60^0} = \dfrac{c}{\sin 50^0}$

$$\Rightarrow c = \frac{\sin 50^0}{\sin 60^0} \times 20 = \frac{0\cdot766}{0\cdot866} \times 20$$

$= 17\cdot69$ সে.মি. (প্রায়)

ফল সংকলন ঃ

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ
$\angle A$	$60°$	$60°$
b	22 সে.মি.	$21\cdot69$ সে.মি.(প্রায়)
c	18 সে.মি.	$17\cdot69$ সে.মি.(প্রায়)

ফলাফল ঃ নির্ণেয় $\angle A = 60°$

b বাহুর দৈর্ঘ্য $AC = 21\cdot69$ সে.মি. (প্রায়) ও c বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = 17\cdot69$ সে.মি. (প্রায়)

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

4. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. , 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর।

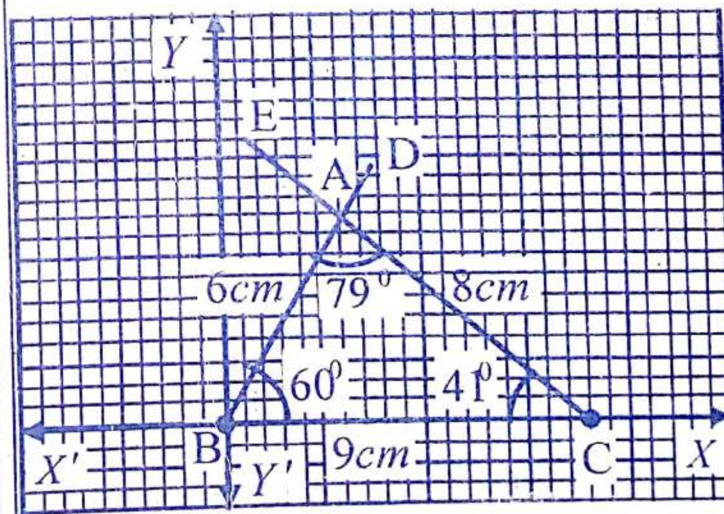
পরীক্ষণের নাম ঃ একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. , 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার দুইটি বাহু $BC = a = 9$ সে.মি., $AB = c = 6$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle B = 60°$ দেওয়া আছে । তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$, c বাহুর বিপরীত কোণ $\angle C$ এবং $AC = b$ গ্রাফের সাহায্যে এবং $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ ও $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেন্সিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি ।



2. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 18 বর্গের বাহুর সমান করে $BC = a = 9$ সে.মি. কেটে নেই।

3. চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিন্দুতে $\angle CBD = 60°$ অঙ্কন করি।

4. BD রেখা হতে ক্ষুদ্রতম 12 বর্গবাহুর সমান করে $BA = c = 6$ সে.মি. কেটে নেই। A, C যোগ করি।

4. গ্রাফ থেকে চাঁদার সাহায্যে $\angle A$, $\angle C$ এবং পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বসিয়ে b বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব ঃ আমরা জানি, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$$= 9^2 + 6^2 - 2\times9\times6\cos 60°$$
$$= 81 + 36 - 108(\cdot5)$$
$$\Rightarrow b^2 = 117 - 54 = 63$$
$\therefore$ $b = 7{\cdot}94$ সে.মি. (প্রায়)

আবার, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{9}{\sin A} = \frac{7\cdot94}{\sin 60^0}$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{9\times0\cdot866}{7\cdot94} = \frac{17\cdot32}{18} = 0{\cdot}982$$

$\therefore$ $A = 78{\cdot}99°$ (প্রায়)

তদ্রূপ, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{7\cdot94}{\sin 60^0} = \frac{6}{\sin C}$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{6\times0\cdot866}{7\cdot94} = 0{\cdot}65$$

$\therefore$ $C = 40{\cdot}87°$ (প্রায়)

ফল সংকলন ঃ

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান ঃ	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান ঃ
b	8 সে.মি.	7·94 সে.মি.(প্রায়)
$\angle A$	79°(প্রায়)	78·99° (প্রায়)
$\angle C$	41° (প্রায়)	40·87° (প্রায়)

ফলাফল ঃ নির্ণেয় $b = 7{\cdot}94$ সে.মি. (প্রায়), $\angle A = 79°$ এবং $\angle C = 41°$

মন্তব্য ঃ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।