Matrix (ম্যাট্রিক্স)

Matrix ঃ আয়তাকার সারি যা [ ] অথবা ( ) দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

১। Matrix এর কলাম/ সারি ঃ

$\underset{\text{সারি}}{m} \times \underset{\text{কলাম}}{n}$ প্রথমটি সবসময় সারি এবং ২য় টি কলাম নির্দেশ করে। যেমনঃ 2×3 এখানে $m = 2$ (সারি), $n = 3$ (কলাম)

(i) বর্গ (Square Matrix): (সারিসংখ্যা = কলাম সংখ্যা অর্থাৎ $m = n$) যেমন ঃ $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \times 2$

(ii) কর্ন (Diagonal Matrix): মুখ্য কর্ণের উপাদান গুলি ছাড়া অন্যসব উপাদান শূন্য।

যেমনঃ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

মুখ্যকর্ণ

Remember: যে কর্ণে প্রথম সারির প্রথম উপাদান এবং প্রথম কলামের প্রথম উপাদান (অর্থাৎ a_{11}) অথবা শেষ সারির শেষ উপাদান এবং শেষ কলামের শেষ উপাদান অবস্থিত তাকে মুখ্যকর্ণ বলে।

(iii) স্কেলার (Scalar) Matrix: → অবশ্যই কর্ণ Matrix হতে হবে

→ কর্ণ Matrix এর মুখ্য কর্ণের সকল মান সমান

যেমন ঃ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) অভেদক Matrix: → অবশ্যই কর্ণ Matrix হতে হবে

→ মুখ্য কর্ণের সকল উপাদান 1 যেমনঃ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Remember: $I^n = I$ যেমন ঃ $I^2 = I, I^3 = I$

(v) Transpose / বিম্ব Matrix: → সারিকে কলাম অথবা কলামকে সারিতে পরিবর্তন করা

→ একে A^T/A' দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

যেমনঃ $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (সারিকে কলামে পরিবর্তন করা হয়েছে)

(vi) Trace (ট্রেস)/ নাভি : মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলোর সমষ্টিকে ঐ ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস বলে।

ম্যাট্রিক্স এর ট্রেস (Trace) = ($a_{11} + a_{22} + a_{33}$) উপরের A Matrix এর Trace = 5+8-1=12

(vii) প্রতিসম / Symmetric Matrix : $A = A^T$

অর্থাৎ কোন Matrix কে Transpose/ বিম্ব করলে যদি আবার ঐ Matrix টিই ফিরে আসে তবে তাকে প্রতিসম Matrix বলে।

যেমন ঃ $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

যেহেতু $A = A^T$ তাই এটি একটি প্রতিসম Matrix.

(viii) বক্র প্রতিসম/Skew Symmetric ম্যাট্রিক্স : A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার প্রধান কর্ণ বরাবর উপাদানগুলো (0 0 0) এবং যাকে ট্রান্সপোজ করলে ঋনাত্মক A পাওয়া যায়। অর্থাৎ $A^T = -A$

যেমন : $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\because A^T = -A$ $\therefore$ A **একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স**

Remember: বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এর Trace = 0+0+0=0

(ix) ব্যতিক্রমী / Singular Matrix : কোন Matrix এর নির্ণায়কের মান শূন্য হলে তাকে ব্যতিক্রমী Matrix বলে।

অর্থাৎ $|A| = 0$

যেমন ঃ $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$, $|A| = 5 \times 12 - 6 \times 10 = 0 \therefore$ A একটি ব্যতিক্রমী Matrix

(x) Idempotent /একক্ষম ম্যাট্রিক্স ঃ $A^2 = A$ হলে Idempotent ম্যাট্রিক্স।

যেমন : $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}; A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

(xi) Involutry (উদঘাতিক) ম্যাট্রিক্স ঃ কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, A একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স। যেমন: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স।

২। **Matrix এর যোগ, বিয়োগ ঃ** দুটি Matrix যোগ/ বিয়োগ করতে হলে অবশ্যই order/ক্রম $(m \times n)$ সমান হতে হবে।

যেমনঃ $A = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}}, B = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}}, C = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}}$

$A + B, A - B$ সম্ভব কারণ $A(2 \times 2)$ & $B\,(2 \times 2)$

$A \pm C, B \pm C$ সম্ভব নয় কারণ $A(2 \times 2), C(2 \times 3)$

৩। **ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a Matrix):** কোন ম্যাট্রিক্স A কে কোন ধ্রুব সংখ্যা K দ্বারা গুণ করলে KA ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি উপাদানকে K দ্বারা গুণ করতে হবে। যেমন,

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ হলে, $KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & Ka_{23} \\ Ka_{31} & Ka_{32} & Ka_{33} \end{bmatrix}$ যেমনঃ $4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -4 & -8 & 28 \\ 12 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

৪। **Matrix এর গুণ :**

দুইটি Matrix গুণ করা যাবে যদি $\rightarrow$ প্রথম Matrix এর কলাম= ২য় Matrix এর সারি হয়।

$\underset{2\times 3}{A}\;\underset{3\times 4}{B}$ (সমান) $\rightarrow AB$ সম্ভব

BA সম্ভব নয় কারন $\underset{3\times 4}{B}\;\underset{2\times 3}{A}$ (সমান নয়)

Remember ঃ গুণ করতে হবে সারি (row) by কলাম (column)।

Determinant (নির্ণায়ক)

১। **নির্ণায়কের অনুরাশি ঃ** যে উপাদানটির অনুরাশি নির্ণয় করতে হবে ঐ উপাদানটি যে কলামে এবং যে সারিতে থাকবে তা বাদ দিলে যা থাকবে, তা-ই হল ঐ উপাদানের অনুরাশি।

যেমন ঃ $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$ 5 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$

$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$ 6 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-8) = 12$

২। **সহগুণক ঃ** অনুরাশির সামনে যথাযথ চিহ্ন প্রয়োগ করতে হবে। $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5 এর অনুরাশি -2 ; 5 এর সহগুণক $+(-2) = -2$

6 এর অনুরাশি 12 ; 6 এর সহগুণক -12

Remember: (i) নির্ণায়কের উপাদানগুলিকে $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \ldots$.. ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সহগুণককে $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots \ldots$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) $+, -$নির্ণয় করা হয় $(-1)^{m+n}$ দ্বারা । যেমন, 6 উপাদানটি ১ম সারি এবং ২য় কলামে অর্থাৎ $m = 1$, $n = 2 \therefore (-1)^{1+2} = -1$, তাই 6 এর ক্ষেত্রে চিহ্ন ঋনাত্বক $(-)$; একই ভাবে অন্যসবগুলি চিহ্নও নির্ণয় করা যায় ।

৩। **নির্ণায়কের মান ঃ**

$2 \times 2 : \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; $\quad 3 \times 3 : \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

$= a \times (a$ এর অনুরাশি$) - b \times (b$এর অনুরাশি$) + c \times (c$ এর অনুরাশি$)$

যেমন ঃ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(2-0) - 3(1-1) + 6(0+2) \ = 4 - 0 + 12 = 16$

৪। **Inverse/ বিপরীত Matrix** ঃ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ Adj (A),

এখানে $|A|$ হল নির্ণায়কের মান এবং Adjoint Matrix = Adj (A) = (A এর সহগুণক Matrix) ^{T}

অর্থাৎ Adj (A) নির্ণয় করতে হলে

(i) A Matrix এর প্রতিটি উপাদানের সহগুণক নির্ণয় করে ঐ উপাদানের স্থলে সহগুণক বসাতে হবে।

(ii) এই সহগুণক Matrix কে Transpose/ বিম্ব Matrix করতে হবে।

Remember: বিপরীত Matrix এর ক্ষেত্রে $|A| \neq 0$

৫। নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় (ক্রেমারের নিয়ম / Cramer's Rule) ঃ

দুইটি চলকের ক্ষেত্রে ঃ $a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$

$\therefore x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ [x এর সহগ গুলোর স্থলে ধ্রুবক বসবে]

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ [y এর সহগ গুলোর স্থলে ধ্রুবক বসবে]

তিনটি চলকের ক্ষেত্রে ঃ $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}$

Remember : (i) $D \neq 0$ (ii) $D = 0$ হলে সমীকরণ জোটের কোন সমাধান থাকবে না।

৬। নির্ণায়কের ধর্ম ঃ

(i) যদি কোনে নির্ণায়কের কোন কলাম বা সারির প্রত্যেক উপাদান শূন্য হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে। যেমন ঃ

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (কারণ একটি কলামের সব উপাদান শূন্য)

(ii) নির্ণায়কের প্রতিটি সারিকে প্রতিটি কলাম এবং প্রতিটি কলামকে প্রতিটি সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না ।

যেমন ঃ $$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ y^2 & y^3 & y^4 \\ z^2 & z^3 & z^4 \end{vmatrix}$$ (সারিকে কলামে পরিবর্তন)

(iii) নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের পরিবর্তন হয় না কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যেমন ঃ $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-)\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} [c_1 \leftrightarrow c_2] = (-)(-)\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} [c_2 \leftrightarrow c_3]$$

(iv) যদি কোন নির্ণায়কের দুইটি কলাম বা সারি একই হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন ঃ $$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$ (কারণ দুইটি কলাম একই)

(v) **নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির প্রতিটি উপাদান কে কোন সংখ্যা দ্বরা গুণ করলে নির্ণায়কের মান** ঃ যে কোন একটি কলাম বা একটি সারির প্রতিটি উপাদানকে গুণ করতে হবে।

যেমন ঃ $$4\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a & d & g \\ 4b & e & h \\ 4c & f & k \end{vmatrix}$$ অথবা $$\begin{vmatrix} a & d & g \\ 4b & 4e & 4h \\ c & f & k \end{vmatrix}$$

(vi) যদি কোনো নির্ণায়কের কোন কলাম বা সারির প্রতিটি উপাদান দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমনঃ $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$