বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

TYPE - 01 : মূলের প্রকৃতি নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলী

$ax^2 + bx + c = 0$ এর দুটি মূল, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ধরি, মূলদ্বয় α ও β তাহলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ দুটি মূল সমান হলে, মূলদ্বয় $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$;

সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac = 0$ হবে।

দ্বিঘাত সমীকরণঃ $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের সমষ্টি) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

মূলের প্রকৃতি নির্ণয় : $ax^2 + bx + c = 0$; সমীকরণের মূলদ্বয়, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(i) $b^2 - 4ac > 0$ হলে এবং পূর্ণবর্গ হলে, মূলদ্বয় (i) বাস্তব (ii) মূলদ (iii) অসমান হবে।

(ii) $b^2 - 4ac > 0$ হলে এবং পূর্ণবর্গ না হলে, মূলদ্বয় (i) বাস্তব (ii) অমূলদ (iii) অসমান হবে।

(iii) $b^2 - 4ac = 0$ হলে, মূলদ্বয় (i) বাস্তব (ii) মূলদ (iii) সমান হবে।

(iv) $b^2 - 4ac < 0$ হলে, মূলদ্বয় (i) জটিল (ii) অসমান হবে।

অণুবন্ধী মূল ঃ

(1) a ও b বাস্তব হলে, $a + ib$ ও $a - ib$ কে অণুবন্ধী জটিল সংখ্যা বলে

(2) $\sqrt{b}$ অমূলদ হলে, $a + \sqrt{b}$ ও $a - \sqrt{b}$ কে অণুবন্ধী করনী মূল বলে

অমূলদ বা জটিল মূলগুলি যুগলরূপে থাকে। মনে হয় একটি অন্যটির প্রতিচ্ছবি।

EXAMPLE – 01 : p এবংq মূলদ হলে, প্রমাণ কর যে, $(p^2 - q^2) - x^2 + 2(p^2 + q^2)x + (p^2 - q^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সব সময় মূলদ হবে।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ, $(p^2 - q^2) - x^2 + 2(p^2 + q^2)x + (p^2 - q^2) = 0$

আমরা জানি, দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চয়ক পূর্ণ বর্গ হলে উক্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সবসময় মূলদ হবে।

প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চয়ক,

$$D = \{2(p^2 + q^2)\}^2 - 4(p^2 - q^2)(p^2 - q^2) = 4(p^2 + q^2)^2 - 4(p^2 - q^2)^2$$

$$= 4(p^2 + q^2 + p^2 - q^2)(p^2 + q^2 - p^2 - q^2) = 4 \times 2p^2 \times 2q^2 = (4pq)^2$$

যদি p ও q মূলদ সংখ্যা হয়, তবে তাদের বর্গও মূলদ হবে। সুতরাং সমীকরণটির মূলদ্বয় মূলদ হবে। **(প্রমাণিত)**

EXAMPLE – 02 : প্রমাণ কর যে, $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদা বাস্তব হবে।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ, $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

$\Longrightarrow x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca=0$

$\Longrightarrow 3x^2-(a+b+b+c+c+a)x+ab+bc+ca=0$

$\Longrightarrow 3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$

আমরা জানি, যে কোন দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চয়কের মান শূন্য অপেক্ষা বড় বা সমান হলে উক্ত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকণের নিশ্চয়ক, $D=\{-2(a+b+c)\}^2-4.3(ab+bc+ca)$

$=4\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$

$=4(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ab-3bc-3ca)$

$=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=2(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=2\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

a, b, c এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সমীকরণটির নিশ্চয়ক $D\geqslant 0$ হবে সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে।

(প্রমাণিত)

EXAMPLE – 03 : $x^2-2px+q=0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে দেখাও যে, $(1+y)x^2-2(p+y)x+q+y=0$ এর মূলগুলো বাস্তব ও ভিন্ন হবে [যখন $p\neq 1$] এবং $y<0$] .

SOLVE : **প্রথম সমীকরণের জন্য ঃ** মূলদ্বয় সমান $\therefore D=0, 4p^2-4q=0\Rightarrow p^2=q$

দ্বিতীয় সমীকরণের জন্য ঃ $\therefore D=\{-2(p+y)\}^2-4(1+y)(q+y)$

$=4(p+y)^2-4(1+y)(q+y)=4\{(p+y)^2-(1+y)(q+y)\}$

$=4(p^2+2py+y^2-q-y-qy-y^2)=4(q+2py-q-y-qy)$

$=-4y(p^2-2p+1)=-4y(1-p)^2$ [$\because p^2=q$]

$\because y<0$ এবং $p\neq 1$ হলে $D>0$ হবে এক্ষেত্রে মূলগুলো বাস্তব ও ভিন্ন হবে।

EXAMPLE – 04: $x^2-5x+c=0$ সমীকরণের একটি মূল 4 তাহলে c এর মান এবং অপর মূলটি নির্ণয় কর।

16-20 +c =0 $\therefore$ c = 4

$x^2-5x+4=0$

$\therefore (x-4)(x-1)=0$

x = 1 অপর মূল।

c = মূলদ্বয়ের গুনফল $=4\times 1=4$

মূলদ্বয়ের গুনফল = 4

মূলদ্বয়ের সমষ্টি = 5

সমীকরণটির একটি মূল অপরটির গুনাত্মক বিপরীত হলে, x এর স্থানে $\frac{1}{x}$ বসিয়ে

$\frac{1}{x^2}-5.\frac{1}{x}+4=0$

$1-5x+4x^2=0$

এখানে মূল দ্বয়ের গুনফল $(\frac{1}{4})$

এবং মূল দ্বয়ের যোগফল = $(\frac{5}{4})$

EXAMPLE – 05: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুটি মূল $\frac{1}{2}$ ও 2; a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2} + 2\right)x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$

a = 2, b = -5, c = 2

EXAMPLE – 06: দেখাও যে, $z = \alpha + i\beta$, $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল হলে অপর মূল $\overline{z} = \alpha - i\beta$

$a z^2 + bz + c = 0$

$a(\overline{z})^2 + b(\overline{z}) + c = 0$

সমীকরণের মূল দুটি α^1, β^1 হলে $\alpha^1 + \beta^1 = -\frac{b}{a} = 2\alpha$

$\alpha^1 \beta^1 = c_{/a} = \alpha^2 - \beta^2$

$\alpha^1 = z = \alpha + i\beta$

$\beta^1 = \overline{z} = \alpha - i\beta$

$x^2 - (2\alpha)x + (\alpha^2 - \beta^2) = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + c_{/a} = 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$p > 1$

p এর সকল মানের জন্য 1 ব্যাতিত উক্তিটি সত্য $\therefore p \neq 1$

EXERCISE :

01. k- এর মান কত হলে, $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব এবং সমান হবে ?

02 . প্রমাণ কর যে, কেবল, $p = q$ হলে, $2x^2 - 2(p+q)x + (p^2 + q^2) = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব হতে পারে।

TYPE - 02: মূলের অনুপাত বা প্রকৃতি হতে শর্তনির্ণয় বিষয়ক সমস্যা

মূল-সহগ সম্পর্ক ও কতিপয় সূত্রাবলী ঃ n ঘাত বা মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদীর n সংখ্যক মূল থাকবে।

ধরি, n একটি পূর্ণ সংখ্যা ≥ 0.এবং $a_0, a_1, a_2, a_3, ...\ ....\ ..a_n \in R\ a_0 \neq 0;\ a_0 \Rightarrow$ বহুপদীটির মূখ্য সহগ।

বহুপদীটির আকারঃ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + ...\ . + a_rx^{n-r} + ...a_nx^0$

$$= a_0\left(x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1}\frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \frac{a_3}{a_0}x^{n-3} + ...\ .a_n\right)$$

মূল সহগ সম্পর্কঃ মূলগুলো $\alpha, \beta, r......n$ সংখ্যক এর জন্য

$\sum\alpha = \alpha + \beta + r + ...\ ... = (-1)^1\frac{a_1}{a_0}$, $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + r\beta + r\alpha + ... = (-1)^2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_2}{a_0}$

$\sum\alpha\beta r = (-1)^3\frac{a^3}{a_\circ}, \sum_{n=1}^{n}\alpha\beta r\ ...\ ...\ ...\ ..\ \text{no, of n} = (-1)^n\frac{a_n}{a_\circ}.$

EXAMPLE – 01 : দেখাও যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে যদি $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ হয়।

SOLVE : রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরনের নিশ্চয়ক শূন্য হলে রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে,

শর্তানুযায়ী, নিশ্চায়ক, D = 0 $\Rightarrow (-2hk)^2 - 4(h^2 - a^2)(k^2 - b^2) = 0$

$\Rightarrow h^2k^2 - h^2k^2 + h^2b^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ [a^2b^2 দ্বারা ভাগ করে]

EXAMPLE – 02 : $ax^2 + bx + c = 0$ মূলদ্বয়ের অনুপাত $4 : 5$ হলে, প্রমাণ কর যে, $20b^2 = 81\ ac.$

SOLVE : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + bc + c = 0$ এর দুটি মূল 4α ও 5α

আমরা জানি, $4\alpha + 5\alpha = -\frac{b}{a}\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ (i)$

এবং $4\alpha \times 5\alpha = \frac{c}{a}\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ (ii)$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $9\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{9a}$ এবং

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $20\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 20\left(-\frac{b}{9a}\right)^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 20.\frac{b^2}{81a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 20b^2 = 81ac$

EXAMPLE – 03 : k এর মান কত হলে $(k^2 - 3)x^2 + 3kx - (3k + 1) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টা হবে ?

SOLVE : ধরি, মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha}$ তাহলে, $\alpha . \frac{1}{\alpha} = \frac{3k+1}{k^2-3} = 1 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$

$\Rightarrow (k - 4)(k + 1) = 0$ or, $k = 4$ বা -1

EXAMPLE – 04 : k এর মান কত হলে, $x^2 - 6x - 1 + k(2x + 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে ?

SOLVE : শর্তানুযায়ী, $x^2 - (6 - 2k)x - 1 + k = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক বা নিরূপক, $D = 0$

$\Rightarrow (-6 + 2k)^2 - 4.1.(k - 1) = 0 \Rightarrow (-3 + k)^2 - k + 1 = 0$

$\Rightarrow 9 - 6k + k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0 \Rightarrow (k - 5)(k - 2) = 0$

$k = 5$ or, 2 Ans.

EXERCISE :

01. $ax^2 + bx + b = 0$ মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$

02. k এর মান কত হলে $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে? (**Ans. 3 বা -2)**

TYPE - 03 :মূলের পার্থক্য হতে শর্ত নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলী

EXAMPLE – 01 : $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$.

SOLVE : ধরি, প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β

তাহলে, $\alpha + \beta = -p \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$

$\alpha\beta = q \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. (ii)$

$\alpha \sim \beta = 1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (iii)$

প্রশ্নমতে, (iii) নং সমীরকণ হতে পাই,

$(\alpha \sim \beta)^2 = (\alpha \sim \beta)^2 - 4\alpha\beta \Longrightarrow 1^2 = (-p)^2 - 4q \Longrightarrow 1 = p^2 - 4q \Longrightarrow p^2 = 1 + 4q$

$\Longrightarrow p^2 + 4q^2 = 1 + 2.12q + (2q)^2 \;\therefore p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ **(প্রমাণিত)**

EXAMPLE – 02 : যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$.

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ দুটি,

$x^2 - bx + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$x^2 - cx + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β তাহলে, $\alpha + \beta = b, \alpha\beta = c$

এবং (ii) নং সমীকণের মূলদ্বয় γ ও δ তাহলে, $\gamma + \delta = c, \gamma\delta = b$

প্রশ্নমতে, $\alpha \sim \beta = k$ এবং $\gamma \sim \delta = k$, তাহলে, $\alpha \sim \beta = \gamma \sim \delta$

$\Longrightarrow (\alpha \sim \beta)^2 = (\gamma \sim \delta)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Longrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\alpha\beta \Longrightarrow b^2 - 4c = c^2 - 4b$

$\Longrightarrow b^2 - c^2 - 4c + 4b = 0$ [পক্ষান্তর করে]

$\Longrightarrow (b - c)(b + c) + 4(b - c) = 0 \Longrightarrow (b - c)(b + c + 4) = 0$

$b \neq c, b$ কারণ $b = c$ হলে সমীকরণ দুটি একই হয়ে যায়। সুতরাং $b + c + 4 = 0$ **(প্রমাণিত)**

EXAMPLE – 03 : যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুটি মুলের অনুপাত r হলে দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$

SOLVE : নির্ণয় বিষয়ক সমস্যাবলী : ৬ মূলদ্বয় α ও αr হলে, $\alpha + \alpha r = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(1+r)}$

$\alpha \times \alpha r = \frac{c}{a} \Rightarrow \{\frac{-b}{a\,(1+r)}\}^2.r = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}.\frac{r}{(1+r)^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{(1+r)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$

EXAMPLE – 04 : $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূল দুটির অন্তর d হলে, p কে d এবং q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

SOLVE : সমীকরণটি, $x^2 - px + pq = 0.\ldots..$ a ও b দুটি মূল হলে, $a + b = p, ab = pq, a - b = |d|$

$\Rightarrow (a - b)^2 = d^2 \Rightarrow (a + b)^2 - 4ab = d^2 \Rightarrow p^2 - 4pq = d^2$

$\Rightarrow p^2 - 2.p.2q + (2q)^2 - 4q^2 = d^2 \Rightarrow (p - 2q)^2 = d^2 + 4q^2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{d^2 + 4q^2} + 2q$

EXERCISE :

01. $2x^2 + 2(a + b)x + 3a = 2b$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = 2b$ অথবা $4a = 11b$.

02. যদি $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b_1^2}{a_1c_1} = \frac{b_2^2}{a_2c_2}$.

TYPE - 04 : যখন একটি মূল অপরটির বর্গ

EXAMPLE – 01 : যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p^3 - q(3p-1) + q^2 = 0$.

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + px + q = 0$,ধরি, সমীকরণটি মূলদুটি α ও α^2

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$; $\alpha + \alpha^2 = q \Longrightarrow \alpha^2 = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

(i) নং সমীকরণকে ঘন করে পাই, $(\alpha + \alpha^2)^3 = (-p)^3$

$\Longrightarrow \alpha^3 + (\alpha^2)^3 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = -p^3 \Longrightarrow p^3 - q(3q-1) + p^3 = 0$ **(প্রমাণিত)**

EXAMPLE – 02 : $27x^2 - 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে p এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ, $27x^2 - 6x - (p+2) = 0$,ধরি, সমীকরণটি মূলদুটি α ও α^2 ;

তাহলে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$ ....(i); $\alpha.\alpha^2 = -\frac{p+2}{27}$..............(ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $9\alpha + 9\alpha^2 + 2 = 0 \Rightarrow (3\alpha+2)(3\alpha+1) = 0,$

$\therefore \alpha = -{}^{2}/_{3}$ বা $-{}^{1}/_{3}$; (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $(-{}^{2}/_{3})^3 = -\frac{p+2}{27}$ - 8 = -p – 2$\Rightarrow p = 6$

পূনরায়, $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{p+2}{27} \Rightarrow -1 = -p-2 \Rightarrow p = -1 \therefore p$ এর মান $(\mathbf{6}, -\mathbf{1})$ **Ans.**

EXAMPLE – 03 : $px^2 + qx + r = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে দেখাও যে, $p\,(q-r)^3 = r(q-p)^3$.

SOLVE : ধরি, মূলদ্বয় α ও α^2, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{q}{p}$............(i), $\alpha \times \alpha^2 = \frac{r}{p}$ ....(ii)

যেহেতু α উক্ত সমীকরণের একটি মূল $\therefore p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$ এবং

(i) নং সমীকরন হতে পাই , $p\alpha^2 + p\alpha + q = 0$,$(q-p)\alpha + r - q = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q-r}{q-p}$

(ii) নং সমীকরন হতে পাই , $(\frac{q-r}{q-p})^3 = \frac{r}{p} \Rightarrow p(q-r)^3 = r(q-p)^3$ (**Showed**)

EXERCISE :

01. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c(c-a)^3 = a(a-b)^3$.

02. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$.

TYPE - 05 : সমীকরণের মূল হতে সংশ্লিষ্ট ভিন্ন মূল দ্বারা সমীকরণ গঠন সম্পর্কিত

EXAMPLE – 01 : $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β হলে, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ, $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α ও β

তাহলে, $\alpha + \beta = \frac{5}{4}$, $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠণ করতে গুণফল = 0 ....(i)

মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করতে হবে।

$\therefore$নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের সমষ্টি) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$ ... ... (i)

মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$$= \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2-2\times\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{25}{16}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{25-8+20}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{37}{4}$$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2 + 4 = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4}$

(i) নং হতে পাই, $x^2 - \frac{37}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 37x + 25 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $4x^2 - 37x + 25 = 0$

EXERCISE :

01. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে। $[\mathbf{Ans}: \mathbf{x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0}]$

02. $ax^2 + bx - a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $a\alpha + b$ এবং $a\beta + b$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। $[\mathbf{Ans}: \mathbf{x^2 - bx - a^2 = 0}]$

03. $x^2 - 25x + 150 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α ও β. এই সমীকরণ সমাধান না করে $\alpha + \beta^2$ ও $\beta + \alpha^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $\mathbf{x^2 - 350x + 27025 = 0}$.

TYPE - 06 : একটা সমীকরনের মূলকে অন্য সমীকরণের মূলের মাধ্যমে প্রকাশ সম্পর্কিত

EXAMPLE – 01 : $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ এর মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর ।

SOLVE : দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকণের মূলদ্বয় α ও β তাহলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

$ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকণের সরলীকৃত আকারঃ

$\Rightarrow \frac{c}{a}(x^2 + 1) - \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2.\frac{c}{a}\right\}x = 0$[$x^2$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \alpha\beta(x^2 + 1) - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x = 0 \quad \left[\because \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ \& \ \alpha\beta = \frac{c}{a}\right]$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0$

হয়, $\beta x - \alpha = 0 \Rightarrow \beta x = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}$ অথবা, $\alpha x - \beta = 0 \Rightarrow \alpha x = \beta \Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$

সুতরাং একটা মূল $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং অপর মূল $\frac{\beta}{\alpha}$ $\therefore$নির্ণেয় মূলদ্বয়, $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.

EXAMPLE – 02 : $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $2a = c$ অথবা $(2a = c)^2 = 2b^2$.

SOLVE : মনে করি, $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূল α তাহলে,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল 2α $\therefore cx^2 + bx + a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$a(2\alpha)^2 + b(2\alpha) + c = 0 \Rightarrow 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{\alpha^2}{bc-2ab} = \frac{\alpha}{4a^2-c^2} = \frac{1}{2bc-4ab} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) ও (ii) নং অনুপাত হতে পাই, $\alpha = \frac{bc-2ab}{4a^2-c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(iv)$

(ii) ও (iii) নং অনুপাত হতে পাই, $\alpha = \frac{4a^2-c^2}{2bc-4ab}$.................(v)

(iv) ও (v) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{bc-2ab}{4a^2-c^2} = \frac{4a^2-c^2}{bc-4ab}$

$\Rightarrow (bc - 2ab)(2bc - 4ab) = (4a^2 - c^2)^2 \Rightarrow 2b^2(c - 2a)^2 = \{(2a - c)(2a + c)\}^2$

$\Rightarrow 2b^2(c - 2a)^2 = (c - 2a)^2(2a + c)^2 \Rightarrow (c - 2a)^2(2a + c)^2 - 2b^2(c - 2a)^2 = 0$

$\Rightarrow (c - 2a)^2\{(2a + c)^2 - 2b^2\} = 0$

হয়, $(c-2a)^2=0 \Rightarrow c-2a=0 \Rightarrow c=2a$ অথবা, $(2a+c)^2-2b^2=0 \Rightarrow 2b^2=(2a+c)^2$

$\therefore c=2a$ অথবা, $2b^2=(2a+c)^2$ **(প্রমাণিত)**

EXERCISE :

01. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $cx^2-2bx+4a=0$ সমীকরণের মূল দুইটি α এবং β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর ।

TYPE - 07: সাধারণ মূলের শর্ত

$a_1x^2 + b_1x+c_1 = 0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত,

$(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)=(c_1a_2-c_2a_1)^2$

EXAMPLE – 01 : $x^2+kx-6k=0$ এবং $x^2-2x-k=0$ সমীকরণ দুইটির একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকলে k এর মান গুলো নির্ণয় কর ।

SOLVE : ধরি, সাধারণ মূলটি α তাহলে, $\alpha^2+k\alpha-6k=0$;$\alpha^2-2\alpha-k=0$

বজ্রগুণন কর পাই, $\frac{\alpha^2}{-k^2-12k}=\frac{-\alpha}{-k+6k}=\frac{1}{-2-k}$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে, $\alpha=\frac{k^2+12k}{5k}$, $\alpha=\frac{5k}{2+k}=\frac{k^2+12k}{5k}$

$\Rightarrow 25k^2=2k^2+24k+k^3+12k^2 \Rightarrow k^3-11k^2+24k=0$

$\Rightarrow k(k^2-11k+24)=0 \Rightarrow k(k-3)(k-8)=0 \therefore k=0,3,8$

EXAMPLE – 02: x^2 –ax+b = 0 এবং x^2 –bx+a = 0 $(a \neq b)$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, a+b= -1 এবং এদের অপর মূলগুলো $x^2 - x + ab = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

সমাধান: ধরি সাধারণ মূলটি α

$x^2 - ax + b = 0$ ....(i)

$x^2 - bx + a = 0$ ....(ii)

$\alpha^2 - a\alpha + b = 0$ এবং

$\alpha^2 - b\alpha + a = 0$

বিয়োগ করি, $(-a+b)\,\alpha + b - a = 0$

$\Rightarrow (b-a)\,\alpha + b - a = 0$

$\Rightarrow (b-a)\,(\alpha+1) = 0$

$\because a \neq b$, $\alpha = -1$ সাধারণ মূলa = -1 (i) নং সমীকরণ বসিয়ে,

$\alpha^2 - \alpha a + b = 0 \Rightarrow 1+a+b = 0 \Rightarrow a+b = -1$ showed.

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুনফল = b একটি মূল α অপর মূল β হলে

$\beta \times (-1) = b \Rightarrow \beta = -b$

(ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুনফল = a একটি মূল α অপর মূল γ হলে $\gamma \times -1$ = a ⇒ - γ = a ∴ γ = - a

- b ও –a মূল বিশিষ্ট সমীকরণ : $x^2 -(-a-b)x+(-a)(-b) = 0$

$\Rightarrow x^2 +(a+b)x+ab =0$

$\Rightarrow x^2 - x+ab = 0$ [∵ a+b = - 1] showed.

EXAMPLE – 03 : $x^2 -px+q = 0$ এবং $x^2 -ax+b = 0$ সমীকরণদ্বয়ের দুটির সাধারণ মূল থাকে এবং দ্বিতীয় সমীকরণের দুটি মূল সমান হয় হবে দেখাও যে, b+q = $\frac{1}{2}ap$

সমাধান: ধরি α সাধারণ মূল।

α^2-pα+q = 0

α^2-αa +b = 0

যোগ করি: $2\alpha^2 -(p+a)\alpha+q+b= 0$

$\Rightarrow q+b = (p+a)\alpha -2\alpha^2= (p+a)\frac{a}{2} - 2\frac{a^2}{4}$ [$ii \Rightarrow \alpha+\alpha = a \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2}$]= $\frac{1}{2}ap$

[অপর সমীকরণের মূল দ্বয় সমান সুতরাং α ও α মূল]

EXERCISE :

01. $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকে হবে দেখাও যে, p = q বা $p + q + 1 = 0$

02. $ax^2 + 2x + 1 = 0$ এবং $x^2 + 2x + a = 0$ [$a \neq 1$] এর একটি সাধারণ মূল থাকলে সাধারণ মূল ও a এর মান নির্ণয় কর।

Ans. সাধারণ মূল 1 এবং a = 3. [সাধারণ মূল -1 এবং a = 1 যা গ্রহণযোগ্য নয়]

TYPE - 08 : প্রতিসম রাশির মান নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো এর α, β, γ

$$\therefore \sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = (-1)^1 a = -a = \sum \beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = (-1)^2 b = b$$

$$\sum \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma = (-1)^3 c = -c = \sum \alpha^3 = \alpha^3\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\} + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma) + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma) + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)\} + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= -a\{(-a)^2 - 3b\} + 3c - c = 3ab - a^3 - 3c$$

EXAMPLE – 02 : যদি $x^3 - px^2 + qx = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হয়, তবে $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

SOLVE : প্রদত্ত সমীকরণ $x^3 - px^2 + qx = 0$ এর তিনটি মূল a, b, c

তাহলে, $a + b + c = p, ab + bc + ca = q, abc = r$ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$$= \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2(abc^2 + a^2bc + acb^2)}{a^2b^2c^2} = \frac{q^2 - 2abc(a + b + c)}{(abc)^2} = \frac{q^2 - 2rp}{r^2}$$

EXAMPLE – 03 : $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণ এর মূল তিনটি α, β, γ হলে, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}$ মূল বিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

SOLVE : সমীকরণটি, $x^3 + 0.x2 + px + q = 0$

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \therefore \alpha + \beta = \gamma, \alpha + \gamma = -\beta, \beta + \gamma = -\alpha \therefore \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$

শর্তানুযায়ী, $x = -\frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{x}$ অনুরূপভাবে $\alpha = -\frac{1}{x}, \beta = -\frac{1}{x}$

$\therefore x^3 + px + q = 0$ সমীকরণটি $-\frac{1}{x}$ দ্বারাও সিদ্ধ হবে।

$$(-\frac{1}{x})^3 + p\left(-\frac{1}{x}\right) + q = 0 \Rightarrow -1 - px^2 + qx^3 = 0 \Rightarrow qx^3 - px^2 - 1 = \mathbf{0}\ (\mathbf{Ans.})$$

EXERCISE :

01. $x^3 + x - 1 = 0$ এর মূল α, β, γ হলে (a) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ এর মান নির্ণয় কর **Ans: 2 .**

02. $\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\beta}, \frac{1}{1-\gamma}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $\mathbf{(\frac{x-1}{x})^3 - \left(\frac{x-1}{x}\right) - 1 = 0}$.

03. $2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ এর মূল তিনটি α, β, γ হলে, $\frac{1}{2\beta+1}, \frac{1}{2\gamma+1}, \frac{1}{2\alpha+1}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $\mathbf{12x^3 - 11x^2 + 4x - 1 = 0}$

EXAMPLE – 04: $(a+b+c)x^2 + (b+2c)x + c = 0$ এর দুটি মূল α ও β হলে $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ এবং $\frac{\beta}{\beta+1}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

$\frac{\alpha}{\alpha+1} = x \Rightarrow \alpha = \alpha x + x \Rightarrow \alpha(1-x) = x,\ \alpha = \frac{x}{1-x}$, xএর স্থলে $\frac{x}{1-x}$ বসিয়ে পাই।

$(a+b+c)\,(\frac{x}{1-x})^2 + (b+2c)\left(\frac{x}{1-x}\right) + c = 0$

$\Rightarrow (a+b+c)\,x^2 + (b+2c)x(1-x) + c(1-x)^2 = 0$

$\Rightarrow$ **$ax^2 + bx + c = 0$ Ans**

EXAMPLE – 05: $x^2 - 6x + p = 0$ এর মূল α, β এবং $8x^2 + 10x + q = 0$ এর মূল $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ এবং $(1-\beta)/\beta$ হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর।

$\frac{1-\alpha}{\alpha} = x$ হয় তবে $1 - x = \alpha x \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1+x}$

$(\frac{1}{1+x})^2 - 6\left(\frac{1}{1+x}\right) + p = 0$

$\Rightarrow 1 - 6(1+x) + p(1+x)^2 = 0$

$\Rightarrow 1 - 6 - 6x + p + 2px + px^2 = 0$

$\Rightarrow px^2 + (2p-6)x + p - 5 = 0$ যা $px^2 + 10x + 2 = 0$ এর সমতুল্য।

$2p - 6 = 10 \Rightarrow p = 8$

$q = p - 5 = 8 - 5 = 3$

TYPE - 09 : মূল নির্ণয়

EXAMPLE – 01 : $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $-1 + i$ হলে অপর মূল নির্ণয় কর।

SOLVE : $x = -1 + i \Rightarrow (x+1)^2 = i^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \therefore x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2$

$= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 2x - 2$

$= x^2(x^2 + 2x + 2) + 2x(x^2 + 2x + 2) - 1(x^2 + 2x + 2)$

$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 1) = 0 \therefore x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2} - 1 \therefore$ নির্ণেয় মূল চারটি, $-1 \pm i, \pm\sqrt{2} - 1$ (**Ans.**)

নিজে কর:(i) একটি মূল $3+\sqrt{2}$ হলে $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। Ans. $3 \pm \sqrt{2}$, 2, 1

(ii) একটি মূল 1+i হলে $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$ এর সমাধান কর। Ans. $1 \pm i$, $-2 \pm \sqrt{3}$

EXAMPLE – 02 : $2x^3 - 19x^2 + 38x + 24 = 0$ এর দুটি মূলের অনুপাত 2:3 হলে মূল তিনটি নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, মূল তিনটি $2\alpha, 3\alpha, \beta$

$2\alpha . 3\alpha . \beta = -\frac{24}{2} \Rightarrow 6\alpha^2\beta = -12 \Rightarrow \alpha^2\beta = -2$

$2\alpha + 3\alpha + \beta = \frac{19}{2} \Rightarrow 5\alpha + \beta = \frac{19}{2}$

$\Rightarrow 5\alpha + \left(-\frac{2}{\alpha^2}\right) = \frac{19}{2} \Rightarrow 5\alpha^3 - 2 = \frac{19}{2}\alpha^2$

$\Rightarrow 10\alpha^3 - 4 = 19\alpha^2$

$\Rightarrow 10\alpha^3 - 19\alpha^2 - 4 = 0,$

$\alpha = 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

তাহলে মানগুলো ঃ $2\alpha, 3\alpha, \beta = 4, 6, -\frac{1}{2}$ (**Ans:**)

EXAMPLE – 03: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ সমীকরণের তিনটি মুল সমান্তর ধারায় থাকলে মূল তিনটি নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, মূল তিনটি $a - k,\ a,\ a + k$ তাহলে, $a - ka + a + a + k = -(-15) = 15 \Rightarrow$

$3a = 15 \therefore a = 5$

$(a - k)a + a(a + k) + (a + k)(a - k) = 71 \Longrightarrow a^2 - ka + a^2 + ka + a^2 - k^2 = 71$

$\Longrightarrow 3a^2 - k^2 = 75 = 4 \Longrightarrow k = \pm 2 (k = 2,\ a = 5) \therefore a - k, a, a + k = 3, 5$ এবং 7 **(Ans:)**

EXAMPLE – 04 : $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর ধারায় আছে মূলগুলি নির্ণয় কর।

SOLVE : ধরি, মূলগুলো $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$.

মূল তিনটির গুণফল $= \frac{\alpha}{r} \times \alpha \times \alpha r = -\frac{-27}{8} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

মূল তিনটির সমষ্টি, $\frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = -\frac{-42}{8} \Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{-21}{8}$

$\Rightarrow 1 + r + r^2 = \frac{21}{4} \times \frac{2}{3} r \Rightarrow r^2 + r + 1 = \frac{7}{2} r \Rightarrow 2r^2 + 5r + 2 = 0 \Rightarrow 2r - 4r - r + 2 = 0$

$\Rightarrow 2r(r - 2) - 1(r - 2) = 0 \Rightarrow (2r - 1)(r - 2) = 0$

$r = \frac{1}{2}, 2$; $r = \frac{1}{2}$ হলে মূল তিনটি $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$; $r = 2$ হলে মূল তিনটি $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$ Ans.

EXERCISE :

01 . $32x^3-48x^2+22x-3=0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর ধারায় আছে। মূলগুলি নির্ণয় কর Ans. $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$

EXAMPLE – 05: $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে দেখাও যে অপর মূল $4\alpha^3-3\alpha$

সমাধান: α দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ করি,

$$4\alpha^2+2\alpha-1=0 \Rightarrow 2\alpha^2+\alpha=\frac{1}{2}$$

ধরি অপর মূল b, $\alpha+b=-\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}-\alpha$

$4\alpha^2+2\alpha-1=0 \Rightarrow 4\alpha^3+2\alpha^2-\alpha=0$ [α দ্বারা গুন করে]$\Rightarrow 4\alpha^3-3\alpha=-(2\alpha^2+\alpha)-\alpha$

$=-\frac{1}{2}-\alpha=b$ Showed

নিজে চেষ্টা কর:

(i) $32x^3-48x^2+22x-3=0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর ধারায় আছে। মূলগুলি নির্নয় কর

Ans. $\frac{1}{4},\overline{\frac{1}{2},\frac{3}{4}}$

(ii) $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=$ সমীকরণে মূলগুলো গুনোত্তর প্রগমনভূক্ত হলে মূল গুলো নির্ণয় কর। ($\frac{8}{9}$, $\frac{4}{3}$, 2,3)

(iii) $2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=0$ সমীকরণের মূলগুলো গুনোত্তর ধারায় থাকলে মূলগুলি নির্ণয় কর।($\frac{1}{2}$,1,2,4)

EXAMPLE – 06: $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূল দুটির অন্তর d হলে, p কে d এবং q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: সমীকরণটি, $x^2-px+pq = 0$.....

a ও b দুটি মূল হলে

$a+b = p$

$ab = pq$

$a-b = |d|$

$\Rightarrow (a-b)^2 = d^2$

$\Rightarrow (a+b)^2-4ab = d^2$

$\Rightarrow p^2 - 4pq = d^2$

$\Rightarrow p^2 - 2.p.2q + (2q)^2 - 4q^2 = d^2$

$\Rightarrow (p-2q)^2 = d^2 + 4q^2$

$\Rightarrow p = \pm\sqrt{d^2+4q^2}+2q$

নিজে চেষ্টা কর: (1) $x^2+px+q = 0$ সমীকরণের মূল দ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে প্রমাণ কর যে, $p^2 + 4q^2 = (1+2q)^2$
(2) যদি $x^2 - bn+c = 0$ এবং $x^2-cn+b = 0$ $(b\neq c)$ মূল দ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হয় হবে প্রমান কর যে, $b+c+4 = 0$

EXAMPLE – 07: যদি $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুন হয় তবে দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $(2a+c)^2 = 2b^2$

$cx^2 + bx + a = 0$ এর মূল দুটি α, β

$ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল দুটি $2\alpha, \gamma$

$\alpha+\beta = -\frac{b}{c}, \alpha\beta = a/_c$

$2\alpha+\gamma = -b/_a, 2\alpha\gamma = c/_a$

α ও 2α দ্বারা $cx^2+bx+a = 0$ এবং $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণদ্বয়কে যথাক্রমে সিদ্ধ করি।

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$.....................(i)

$4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

From(ii)-2×(i) $\Rightarrow 2(2a-c)\,\alpha^2 + (c-2a) = 0$

$\Rightarrow (c-2a)(2\alpha^2-1) = 0 \therefore c = 2a$ or, $\alpha^2 = 1/2$

From(ii) $\Rightarrow 4a\times\frac{1}{2}+c = -2b\,\alpha \Rightarrow 2a + c = -2b\,\alpha$.....(iii)

From(iii)^2 $\Rightarrow (2a+c)^2 = 2b^2$ $[\alpha^2 = 1/2]$

EXAMPLE – 08: যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুটি মুলের অনুপাত r হলে দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$

সমাধান: মূলদ্বয় α ও αr হলে

$\alpha + \alpha r = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(1+r)}$

$\alpha \times \alpha r = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow \{\frac{-b}{a\,(1+r)}\}^2.r = \frac{c}{a}$		$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}.\frac{r}{(1+r)^2} = \frac{c}{a}$ $\Rightarrow \frac{(1+r)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$

নিজে চেষ্টা কর:(1) $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a - 2b = 0$ একটি মূল অপরটির দ্বিগুন হলে প্রমান কর $a = 2b$ অথবা $4a = 11b$.

(2) যদি $ax^2+bx+c = 0$ এর মূল দুটি বাস্তব সংখ্যা a,b ($a<-1$ও $b>1$) হয় তবে ,দেখাও যে,
$1+\left|\frac{b}{a}\right| + \frac{c}{a} < 0$

(3). $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ সমীকরণের মুলগুলো সমান হলে দেখাও যে, $a=b=c$

(4). $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a+b) = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে দেখাও যে, $b = \frac{1}{2}(c+a)$

EXAMPLE – 09: $px^2 + qx + r = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে দেখাও যে,
$p(q-r)^3 = r(q-p)^3$

সমাধান: ধরি মূল দ্বয় αও α^2

$\alpha+\alpha^2 = -\frac{q}{p}$............(i)

$\alpha \times \alpha^2 = \frac{r}{p}$ ....(ii)

যেহেতু α উক্ত সমীকরণের একটি মূল

$\therefore p\alpha^2+q\alpha+r = 0$ এবং $p\alpha^2+p\alpha+q = 0$ (i হতে)

(q-p)α+r-q=0

$\Rightarrow \alpha = \frac{q-r}{q-p}$

$(\text{ii}) \Rightarrow (\frac{q-r}{q-p})^3 = \frac{r}{p}$

$\Rightarrow p(q-r)^3 = r(q-p)^3$ Showed (i)

নিজে কর:

(1). $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান। p এর মান নির্ণয় কর। Ans [-1বা, 6]

(2). $8x^2 - 6x + (k-1) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান। kএর মান নির্ণয় কর। ans [-26 বা, 2]

(3). $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির n গুন হলে প্রমাণ কর যে, $nb^2 = ac(1+n)^2$

(4). kএর মান কত হলে $(3-k)x^2 + 2(k+3)x + 8k + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে। Ans [2,-1]

(5) $2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ এর দুটি মূলের গুনফল 1 হলে মূল চারটি নির্ণয় কর। (-1, 2, $\frac{1}{2}$, 3)

(6) $bx^2 + cx + c = 0$ সমীকরণের দুটি মূল α ও β হলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{b}} = 0$

EXAMPLE – 10: দুটি মূলের সমষ্টি শূন্য হলে $4x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 9x + 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান: a, -a, b, r

$\sum a = a - a + b + r = 1$

$\Rightarrow b + r = 1,\ b = 1 - r$

$\sum abrd = (a)(-a)br = -a^2\, br = \frac{9}{4}$

$\sum ab = a(-a) + ab + ar + (-a)b + (-ar) + br = -\frac{13}{4}$

$\sum abr = a(-a)b + a(-a)r + (-a)br + bra = -\frac{9}{4}$

$\Rightarrow a(-ab - ar - \cancel{b}r + \cancel{b}r) = -\frac{9}{4}$

$\Rightarrow -a^2\,(b+r) = -\frac{9}{4}$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\sum ab = -a^2 + br = -\frac{13}{4}$

$\Rightarrow br = -\frac{13}{4} + a^2$

$\Rightarrow \frac{13}{4} - \frac{9}{4} = -br \ \Rightarrow (1-r)r = -1$

$\Rightarrow r - r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$

$\Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore b = 1 - \frac{(1\pm\sqrt{5})}{2} = \frac{2-1\mp\sqrt{5}}{2} = \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$ Ans $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

নিজে চেষ্টা কর: (1) একটি মূল অন্য মূল দুটির যোগফলের অর্ধেক হলে $4x^3 - 11x^2 + 10x - 3 = 0$ সমীকরনটি সমাধান কর। Ans $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1$

(2) দুইটি মূলের পরমমান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। Ans $\pm\sqrt{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$

EXAMPLE – 11: k এর মান কত হলে $(k^2 - 3)x^2 + 3kx - (3k+1) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টা হবে?

ধরি, মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{a}$

$\alpha.\frac{1}{a} = \frac{3k+1}{k^2-3} = 1$

$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$

$\Rightarrow (k-4)(k+1) = 0$

$k = 4$ বা -1

EXAMPLE – 12: $27x^2 - 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে p এর মান নির্ণয় কর।

$\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$ ....(i)

$\alpha.\alpha^2 = -\frac{p+2}{27}$..............(ii)

From(i) ⇒

$9\alpha + 9\alpha^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow 9a^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$

$\Rightarrow (3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$

$\alpha = -{}^2/_3$ বা $-{}^1/_3$

From(ii) ⇒

$(-{}^2/_3)^3 = -\frac{p+2}{27}$

$-8 = -p - 2$

$\Rightarrow p = 6$

again $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{p+2}{27}$

$\Rightarrow -1 = -p - 2$

$\Rightarrow p = -1$

$\therefore p$ এর মান 6, -1 Ans.

1. $x^2 - (\alpha+\beta)x - \alpha\beta = 0$ এবং $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$ সমীকরণ দুটি অভিন্ন হলে, সঠিক সমীকরণ কোনটি?

Ans. $x^2+x+1 = 0$, এটা ছাড়াও সঠিক সমীকরণ আছে

নিজে চেষ্টা কর: k এর মান কত হলে $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে? Ans. 3 বা -2

[বি: দ্র: রাশিটি দ্বারা গঠিত সমীকরণের মূলদুটি সমান হলে রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে। অর্থাৎ নিশ্চয়নের মান শূন্য হলে কেবল রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে]।

EXAMPLE – 13: দেখাও যে, $(h^2 - a^2)^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে

যদি $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ হয়।

সমাধান: শর্তানুযায়ী নিশ্চায়ক D = 0

$\Rightarrow (-2hk)^2 - 4(h^2 - a^2)(k^2 - b^2) = 0$

$\Rightarrow h^2 k^2 - h^2 k^2 + h^2 b^2 + a^2 k^2 - a^2 b^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ [$a^2 b^2$ দ্বারা ভাগ করে]

নিজে চেষ্টা কর:

$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হলে দেখাও যে, $a = b = c$ হবে।

EXAMPLE – 14: বাস্তব সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\sqrt{-5} - 1$

$\therefore$ অপর মূল $-\sqrt{-5} - 1$

$x^2 - (\sqrt{-5} - 1 - \sqrt{-5} - 1)x + (\sqrt{-5} - 1)(\sqrt{-5} - 1) = 0$

$x^2 + 2x + 6 = 0$

নিজে চেষ্টা কর: (i) কি শর্তে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির n ঘাতের সমান হবে?

Ans. $(\frac{c}{a})^{\frac{1}{n+1}} + (\frac{c}{a})^{\frac{n}{n+1}} = -\frac{a}{b}$

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত 3:4 হলে দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$

(iii) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের অনুপাত $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটি মূলের অনুপাতের সমান হলে দেখাও যে, $\frac{{b_1}^2}{{b_2}^2} = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}$