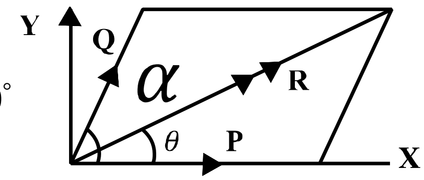
ভেক্টর

Type-01: সামান্তরিক সূত্র

সামন্তরিক সূত্র ঃ P **এবং** Q **বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ** α **এবং বলদ্বয়ের লব্ধি** R **,** P **বলের ক্রিয়ারেখার সাথে** θ **কোণ উৎপন্ন করে ।**



ভেক্টর গুণন প্রক্রিয়া ঃ $\vec{R}.\vec{R} = (\vec{P}+\vec{Q}).(P+Q)$ [ডট গুণন]

$$\Rightarrow R.R\cos 0^o = P.P\cos 0^o + PQ\cos\alpha + QP\cos\alpha + Q.Q\cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \quad \Rightarrow R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$$

$$\vec{R}.\vec{P} = (\vec{P}+\vec{Q}).\vec{P} \quad \Rightarrow R.P\cos\theta = P.P\cos 0^o + QP\cos\alpha \quad \therefore R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$$

$$\vec{P}\times\vec{R} = \vec{P}\times(\vec{P}+\vec{Q})$$ [ভেক্টর গুণন]

$$\Rightarrow PR\sin\theta\hat{\eta} = PP\sin 0^o\hat{\eta} + PQ\sin\alpha\hat{\eta} \quad \therefore R\sin\theta = Q\sin\alpha$$

[একই দিকে ঘূর্ণনের ফলে $\hat{\eta}$ অভিলম্ব বরাবর তলের উপর ক্রিয়া করে]

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

∴ দুটি ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়ের সামান্তরিক সূত্র ঃ

দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে এদের লব্ধি $\vec{R}$ এর মান $= \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{P}+\vec{Q}\right| = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

লব্ধি $\vec{R}$ যদি $\vec{P}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

আর লব্ধি $\vec{R}$ যদি $\vec{Q}$ এর সাথে কোণ উৎপন্ন করে তবে, $\tan\theta = \dfrac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$

যার সাথে θ কোণ তাকে নিচে একা রাখবে।

মনে রাখবে, $\alpha =$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ ; $\theta =$ লব্ধির সাথে যেকোন ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ $(i)\ \alpha = 0^o$ হলে অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে, লব্ধি ভেক্টর এর মান সর্বোচ্চ হয়।

$$\therefore R_{max} = P + Q$$

$(ii)\ \alpha = 180^o$ অর্থাৎ একটি ভেক্টরকে উল্টিয়ে দিলে লব্ধি ভেক্টরের মান সর্বনিম্ন হয়।

$$\therefore R_{min} = P \sim Q \,; P > Q \text{ হলে, } R_{min} = P - Q$$

$$P = Q \text{ হলে } R_{max} = 2P,\ R_{min} = 0$$

$(iii)\alpha = 90^o$ হলে $P \perp Q$ হবে, সেক্ষেত্রে $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [সমকোণী ত্রিভূজাকার]

$$\theta = 90^\circ \text{হলে,} \quad R\cos\theta = P + Q\cos\alpha = 0 \therefore \cos\alpha = -P/Q$$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ(-{}^{P}/_{Q})} = \sqrt{Q^2 - P^2}[Q > P]$$

EXAMPLE-01: একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি সমান মানের ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ কত হলে এদের লব্ধির মান যেকোনো একটি ভেক্টরের মানের সমান হবে?

সমাধান ঃ

১ম ভেক্টর, $p = p$

২য় ভেক্টর, $Q = P$

লব্ধি ভেক্টর, $R = P$

$\alpha = ?$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$

$$\Rightarrow P^2 = P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \times \cos\alpha$$

$$\Rightarrow P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 1 = 2 + 2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$.: \alpha = 120^\circ \quad (\text{Ans.})$$

EXAMPLE-02: দুইটি কণা যথাক্রমে 12ms^{-1} ও 20ms^{-1} বেগে 120° কোণ উৎপন্ন করে কোনো একটি বিন্দুকে অতিক্রম করল। 4s এর পরে তাদের দুরত্ব?

সমাধান ঃ 4s পর ১ম কণার সরণ $P = (12 \times 4) = 48m$;

4s পর ২য় কণার সরণ $Q = (20 \times 4) = 80m$ $\alpha = 120^\circ$; $R = ?$

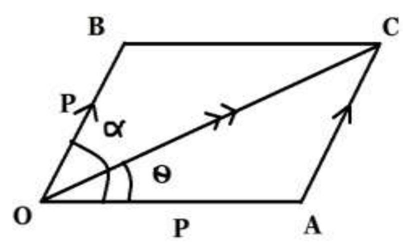
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha} = \sqrt{(48)^2 + (80)^2 - 2 \times 48 \times 80\cos 120^\circ} = 112 \text{ m}(\text{Ans.})$$

EXAMPLE-03: প্রমাণ কর যে, সমান সমান ভেক্টরের লব্ধি এদের ক্রিয়া রেখার মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অথবা, দেখাও যে, সমান সমান ভেক্টরের লব্ধির ক্রিয়ার দিক ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডক বরাবর।

সমাধান ঃ P মানের দুটি ভেক্টর o বিন্দুতে যথাক্রমে OA ও OB বরাবর ক্রিয়ারত। প্রমাণ করতে হবে যে, ভেক্টরের লব্ধির ক্রিয়ার দিক, মধ্যবর্তী কোণ α কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা OC, OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, সামন্তরিক সূত্র থেকে পাই,



$$\tan\theta = \frac{p\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{P\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \quad .: \theta = \frac{\alpha}{2}$$

অর্থাৎ, লব্ধির দিক রাশিদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

EXAMPLE-04: $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ হলে দেখাও যে, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব।

সমাধান ঃ

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$$

$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$

ভেক্টরে যোজনের সামন্তরিক সূত্র হতে, $R = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = (a^2+b^2+2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \{(a^2+b^2)+2ab\cos(180^o-\alpha)\}^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

এবং $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$

$$\text{or, } (a^2+b^2+2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{or, } (a^2+b^2+2ab\cos\alpha) = (a^2+b^2-2ab\cos\alpha)$$

$$\text{or, } (a^2+b^2+2ab\cos\alpha - a^2 - b^2 + 2ab\cos\alpha = 0$$

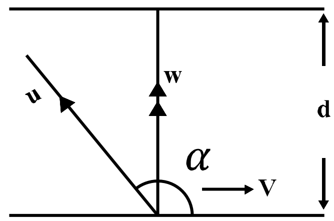
$$\text{or, } 4ab\cos\alpha = 0 \qquad \text{or, } \cos\alpha = 0 \text{ or, } \cos\alpha = \cos 90° \quad .: \alpha = 90°$$

$.:\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব। (Ans.)

Type-02: নদী ও স্রোত সংক্রান্ত

সবক্ষেত্রে নদীর স্রোতের বেগ v, নৌকা বা সাঁতারুর বেগ u, লব্ধিবেগ w এবং নদীর প্রস্থ d ধরা হয়েছে।

❖ **ক্ষুদ্রপথে বা সোজাসুজি / আড়াআড়ি নদী পার হওয়ার ক্ষেত্রে ঃ**

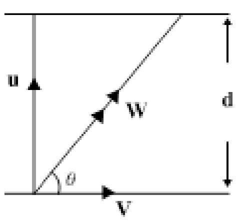


$$\mathrm{w}\cos 90^0 = v + u\,cos\alpha = 0 \;\; \therefore cos\alpha = -\frac{v}{u}$$

$\therefore u^2 = v^2 + w^2$ এবং সময়, $t = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$

সর্বনিম্ন দুরত্বে নদী পার হওয়া মানে সোজাসুজি পার হওয়া

❖ **সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হওয়া ঃ**



মনে করি, নৌকা স্রোতের সাথে α কোণে u বেগে যাত্রা করেছে।

তাহলে,

স্রোত বরাবর স্রোতের ও নৌকার বেগের উপাংশ $v\cos 0^0 + u\sin\alpha = u\sin\alpha = v + u\cos\alpha$

স্রোতের সাথে লম্ব বরাবর/প্রস্থ বরাবর স্রোতের ও নৌকার বেগের উপাংশ $= \mathrm{v}\sin 0^\circ + \mathrm{u}\sin\alpha = \mathrm{u}\sin\alpha$

$\therefore$ পাড় বরাবর নৌকার লব্ধি বেগের উপাংশ $= v + u\cos\alpha$

এই উপাংশ নদী পার করতে কাজ করে না, শুধু নৌকাকে স্রোতের দিকে নিয়ে যায়।

প্রস্থ বরাবর নৌকার লব্ধি বেগের উপাংশ $= u\sin\alpha$

এই উপাংশ নদী পার করতে কাজ করে শুধু, স্রোতের দিকে নিয়ে যায় না।

$\therefore$ নদীর শুধু এপাড় থেকে ওপাড়ে যাওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় বেগ $u\sin\alpha$ $\;\therefore t = \frac{d}{u\sin\alpha}$

$\sin\alpha = 1$ বা $\alpha = 90^o$ হলে t এর মান সবচেয়ে কম হবে। $\therefore t_{\min} = \frac{d}{u}$

মনে রাখবে, স্রোতহীন নদীতে নৌকার বেগ = নৌকার নিজের বেগ

স্রোতযুক্ত নদীতে নৌকার বেগ = নৌকা ও স্রোতের লব্ধি বেগ

EXAMPLE-01: একজন সাতারু $900m$ প্রশস্ত নদী স্বল্পতম সময়ে এবং অপর সাতারু ক্ষুদ্রতম পথে পার হতে চায়। স্রোতের বেগ ঘন্টায় 12km হলে সাতারুদ্বয়ের বেগ কত? দেওয়া আছে, উভয়ের নূন্যতম সময়ের পার্থক্য $0.04h$ এবং তাদের বেগদ্বয়ের পার্থক্য শূন্য।

Solve ঃ ধরি, সাতারুদ্বয়ের বেগ = u

প্রথম সাতারুর ক্ষেত্রে, $t_1 = \frac{d}{w_1 sin\theta} = \frac{d}{usin\alpha}$ [$sin\alpha$ এর বৃহত্তম মান 1 এর জন্য সময় t_1 ন্যূনতম হবে] ∴

$$t_{1min} = \frac{d}{u}$$

দ্বিতীয় সাতারুর ক্ষেত্রে, $t_2 = \frac{d}{w_2} = \frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$

শর্তানুযায়ী, $t_2 > t_{1min}$ $\therefore t_2 - t_{1min} = 0.04 \Rightarrow \frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}} - \frac{d}{u} = 0.04$

এখানে, $d = 0.9\ km$ এবং $v = 12\ kmh^{-1} \therefore u = 15\ kmh^{-1}$

EXAMPLE-02: নদীতে নৌকা স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় $50km$ বেগে যায় এবং স্রোতের বিপরীতে ঘণ্টায় $30km$ বেগে যায়। নৌকাটি কোনদিকে চালনা করলে তা সোজা ওপর পাড়ে পৌছাবে?

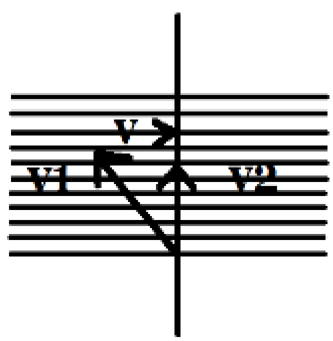
Solve ঃ $R_{max} = P + Q = 50km/hr$ $\therefore P = 40km/hr$ [নৌকার বেগ]

$R_{min} = P - Q = 30km/hr$ $Q = 10km/hr$ [স্রোতের বেগ]

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + sin^{-1}\left(\frac{10}{40}\right) = 104.48°$$

EXAMPLE-03: একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 100 মিটার প্রশস্থ একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি সাতরে পার হতে পারে; কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে অতিক্রম করে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $S = 100$ মিটার; $t_1 = 4$ মিনিট; $t_2 = 5$ মিনিট; $v = ?$



মনে করি, লোকটির বেগ, v_1

$s = v_1 t_1$

100 মিটার $= v_1 \times 4$ মিনিট $\therefore v_1 = 25$ মিটার/ মিনিট

লব্ধি বেগ = v_2 $\therefore S = v_2 t_2$ $v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{100}{5} = 20$ মিটার/মিনিট

পীথাগোরাস থেকে, $v_1^2 = v^2 + v_2^2 \Rightarrow (25)^2 = V^2 + (20)^2$ $\therefore V = 15$ মিটার/ মিনিট (Ans.)

EXAMPLE-04: কোনো নদীতে স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ 24kmh^{-1} এবং স্রোতের প্রতিকূলে 8kmh^{-1} । সোজা অপর পাড়ে পৌছাতে নৌকা কোন দিকে এবং কত বেগে চালাতে হবে?

স্রোতের বেগ $= v$; নৌকার বেগ $= u$

$v + u = 24$ ______(i)

$u - v = 8$ ____(ii)

সমাধান ঃ (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2u = 32$
$\therefore u = 16\text{kmh}^{-1}$

(i) ও (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $2v = 16 \therefore v = 8\text{kmh}^{-1}$

ধরা যাক, স্রোতের সাথে $\propto$ কোণ করে নৌকা চালনা করলে তা R বেগে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছাবে। এক্ষেত্রে v ও R এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90° \therefore \tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{v+u\cos\alpha}$ $\text{or}, \tan 90° = \frac{8\sin\alpha}{16+8\cos\alpha}$ $\text{or}, 16 + 8\cos\alpha = 0$

$$\text{or}, 8\cos\alpha = -16$$

$$\text{or}, \cos\alpha = -\frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = 120° \quad (\text{Ans.})$$

Practice:

01. একটি নদীতে একজন সাতারু $25kmh^{-1}$ বেগে সাতরিয়ে সোজাসুজি নদী পার হতে চায়। যদি স্রোতের বেগ $15kmh^{-1}$ এবং নদীর প্রস্থ $400m$ হয় তবে সে কোন দিকে যাত্রা করবে? অপর পাড়ে পৌছতে কত সময় লাগবে?

Ansঃ $\pi/2 + \tan^{-1}\frac{3}{4}, 1.2\ min.$

02. স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু $4\ kmh^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। $2\ kmh^{-1}$ বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে?

Ansঃ 120°

03.একজন সাঁতারু $100m$ প্রস্থের শান্ত নদী $4\ min$ এ আড়া-আড়িভাবে পার হতে পারে। স্রোত থাকলে ঐ নদী পর হতে $1\ min$ সময় বেশি লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

Ansঃ $15\ m/min$

04. দুইজন সাঁতারু একজন u_1 বেগে সাতরিয়ে ক্ষুদ্রতম পথে ও অপরজন u_2 বেগে সাতরিয়ে ক্ষুদ্রতম সময়ে v বেগে প্রবাহমান নদী পাড় হওয়ার লক্ষ্যে একই সঙ্গে একই স্থান হতে যাত্রা করে উভয়ে নদীর অপরতীরে একত্রে পৌছাল।
প্রমাণ কর যে, ${u_1}^2 - {u_2}^2 = v^2$ যেখানে $u_1 > v$

05. $500m$ প্রশস্থ এবং 3kmh^{-1}বেগে প্রবাহিত একটি নদী 5kmh^{-1} বেগে চলে দুইখানা নৌকা একটি ন্যূনতম পথে এবং অপরটি নুন্যতম সময়ে পার হয়। এদের সময়ের ব্যবধান নির্ণয় কর। Ansঃ 1.5min

Type-03: আপেক্ষিক গতি

❖ **আপেক্ষিক গতি ঃ**

একটা প্রসঙ্গ কাঠামো সাপেক্ষে অপরটির গতি।

একই দিকে বিপরীতে

সরলরেখায় ঃ

একই দিকে $\longrightarrow v_a$ $\longrightarrow v_b$ $\boxed{\mathbf{v_{ab} = v_b - v_a}}$

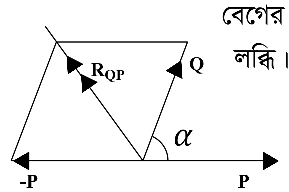
বিপরীতদিকে $\longrightarrow v_a$ $v_b \longleftarrow$ $\boxed{\mathbf{v_{ab} = v_a + v_b}}$

আনত হলে ঃ

নিয়মঃ (i) যার সাপেক্ষে আঃ বেগ বের করবে তার বেগ উল্টা করবে।

(ii) এবার এই উল্টা বেগের সাথে যার আপেক্ষিক বেগ বের করবে তার লব্ধি বের করবে। এই লব্ধিই আপেক্ষিক বেগ।

অর্থাৎ তোমার সাপেক্ষে আমার আপেক্ষিক বেগ মানে হল তোমার উল্টা বেগ আর আমার বেগের লব্ধি। আবার, আমার সাপেক্ষে তোমার আপেক্ষিক বেগ মানে আমার উল্টা বেগ আর তোমার বেগের লব্ধি। তোমার সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ মানে তোমার উল্টা বেগ আর বৃষ্টির বেগের লব্ধি।



$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi - \alpha)}$ যেখানে বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

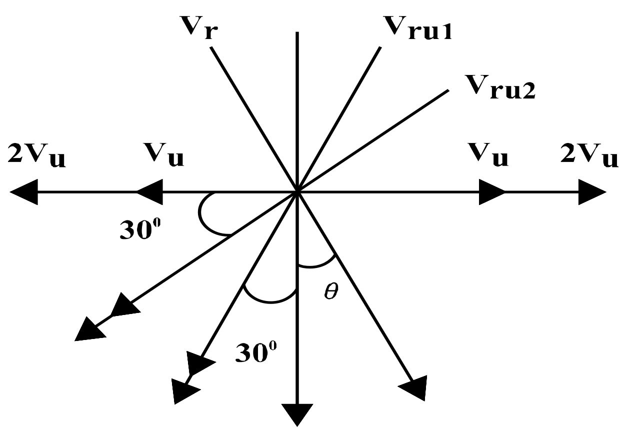
EXAMPLE-01: তুমি খুব দ্রুত স্কুলে যেতে চাও। বৃষ্টি হচ্ছে বলে ছাতা নিয়ে আগে যে বেগে যেতে এখন তার চেয়ে দ্রুত যাবে। ছাতা কোন দিকে ধরতে হবে যাতে বৃষ্টির ফোঁটা তোমার শরীরে না পড়ে। ছাতা সরালে বৃষ্টির ফোঁটা তোমার শরীরে কত কোণে পড়ত তার রাশিমালা বের কর। তোমার কাছে মনে হচ্ছে বৃষ্টি উলম্বের সাথে 30^o কোণে পড়ছে। এরপর তুমি তোমার বেগকে দ্বিগুণ করে দেখলে বৃষ্টি উলম্বের সাথে 60^o কোণে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক নির্ণয় কর।

Solve ঃ ১ম ক্ষেত্রে ঃ $\dfrac{V_u}{\sin(\theta + 30^o)} = \dfrac{V_r}{\sin 60^o}$

২য় ক্ষেত্রে ঃ $\dfrac{2V_u}{\sin(\theta + 60^o)} = \dfrac{V_r}{\sin 30^o}$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + 60^o)}{2\sin(\theta + 30^o)} = \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + 60^o)}{\sin(\theta + 30^o)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore \theta = 30^o$$



EXAMPLE-02: ঘন্টায় $60km$ বেগে পূর্ব দিকে চলমান একটি গাড়ির যাত্রীর কাছে মনে হল $20\sqrt{3}\ kmh^{-1}$বেগে একটি ট্রাক উত্তরদিকে যাচ্ছে। (ক) ট্রাকটি কোন দিকে চলছে? (খ) ট্রাকটির প্রকৃত বেগ কত?

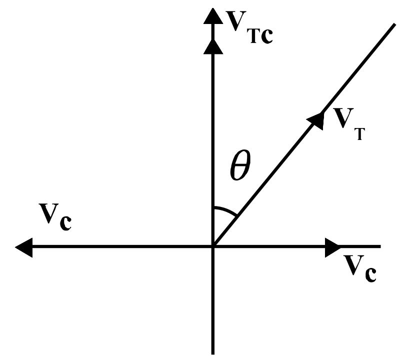
Solve ঃ (ক) $\tan\theta = \dfrac{60}{20\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \tan 60^o \therefore \theta = 60^o$

(খ) $V_T{}^2 = (20\sqrt{3})^2 + 60^2 = 4800 = (40\sqrt{3})^2 \therefore V_T = 40\sqrt{3}\, ms$

$V_{TC} \rightarrow$ গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের গতি = $20\sqrt{3}\ \ kmh^{-1}$

$T_T \rightarrow$ট্রাকের গতি

$V_C \rightarrow$ গাড়ির গতি



Practice:

01. বৃষ্টির দিনে একটি ঘন্টায় 5 কি.মি বেগে হেঁটে দেখল বৃষ্টি খাঁড়াভাবে পড়ছে। তার বেগ দ্বিগুন করে দেখল বৃষ্টি খাড়া রেখার সাথে 30^0 কোণে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর। Ansঃ10kmh^{-1}

02. 200 ও 300 দৈর্ঘ্যের দুটি ট্রেন একটি ষ্টেশন থেকে একই দিকে দুটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40kmh^{-1} এবং 30kmh^{-1} বেগে যাত্রা করে। কত সময়ে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে? $Ans: 3\ min$

03. ঘন্টায় 45 কি.মি বেগে চলমান একটি ট্রেনের যাত্রীর নিকট মনে হচ্ছে বৃষ্টির ধারার আপেক্ষিক বেগের দিক উলম্ব রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃষ্টি প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর। Ans: ঘন্টায় 30 কি.মি.

Type-04: অভিক্ষেপ, উপাংশ, ভেক্টর গুণন, মধ্যবর্তী কোণ , সমান্তরাল, লম্ব, একই তল, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

ভেক্টরের উপাংশঃ

কোন ভেক্টর $\vec{R}$-কে α ও β কোণে বিভাজিত করে যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পাওয়া গেল যেন, $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ হয়।

তাহলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ হলো $\vec{R}$ এর দুটি উপাংশ।

$$P=\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \;;\qquad Q=\frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ভেক্টরের অনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশঃ

$\vec{R}$ যদি ভূমির সাথে θ কোণে থাকে, তবে ভূমি বরাবর $\vec{R}$ এর উপাংশ, $P=R\cos\theta$

উলম্ব বরাবর $\vec{R}$ এর উপাংশ, $Q=R\sin\theta$

বল , বেগ এবং সরণের মান ও দিক নির্ণয় সংক্রান্ত সূত্রাবলী ঃ

লামীর বিপরীত সূত্র ঃ $\frac{Q}{BC}=\frac{P}{AB}=\frac{R}{AC}$

লামীর সূত্র ঃ $\frac{P}{\sin\hat{Q}R}=\frac{Q}{\sin\hat{R}P}=\frac{R}{\sin\hat{P}Q}$

sin সূত্র ঃ $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$

ত্রিভূজ সূত্র ঃ $cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় ভেক্টরের প্রকাশ:

❖ ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x,y,z) হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{OP}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

একইভাবে যেকোন ভেক্টর $\vec{A}$ এর $x,\ y,\ z$ অক্ষ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে $Ax,\ Ay,\ Az$ হলে, $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

$\vec{A}$ **ভেক্টরের মান,** $\left|\vec{A}\right|=A=\sqrt{Ax^2+Ay^2+Az^2}$

$\vec{A}$ **সমান্তরালে অথবা** $\vec{A}$ **বরাবর একটি একক ভেক্টর** $=\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}=\frac{A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^{\,2}+A_y^{\,2}+A_z^{\,2}}}$

❖ $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$; $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ **এর লব্ধি** $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}\Rightarrow(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}$

$$\left|\vec{R}\right|=R=\sqrt{(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_z)^2};$$

$\vec{R}$ **এর দিকে/ সমান্তরালে একক ভেক্টর** $=\dfrac{\vec{R}}{R}$

❖ $\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2+(A_z-B_z)^2}$$

ভেক্টরের স্কেলার গুণন / ডট গুণন

$\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$ $=A(B\cos\theta)$ $=A(\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ$)=B(A\cos\theta)$ $=B(\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

অভিক্ষেপ ও উপাংশ ঃ অভিক্ষেপ $\rightarrow$ স্কেলার রাশি, উপাংশ $\rightarrow$ ভেক্টর রাশি।

$\therefore\vec{A}$ **বরাবর** $\vec{B}$ **এর লম্ব অভিক্ষেপ** $=B\cos\theta=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{A}$;

$\vec{B}$ **বরাবর** $\vec{A}$ **এর লম্ব অভিক্ষেপ** $=A\cos\theta=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{B}$

$\therefore\vec{A}$ **বরাবর** $\vec{B}$ **এর উপাংশ** $=B\cos\theta.(\vec{A}$ বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{a}=\dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$) $=B\cos\theta.\hat{a}.$

❖ $\hat{i}.\hat{i}=(1)\,(1)\cos0^o=1$ $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}\,\hat{k}=1$

❖ $\hat{i}.\hat{j}=(1)\,(1)\cos90^o=0$ $\hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=0$

একক ভেক্টরের নিজেদের মধ্যে ডট গুণনে 1 আর পারস্পরিক গুণনে 0 ।

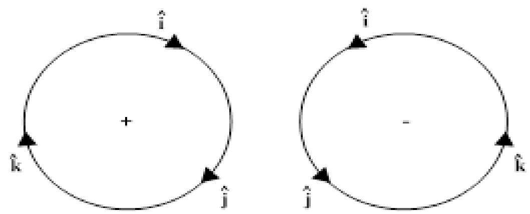
❖ $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$; $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ $\therefore\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ **এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় ঃ** $\cos\theta=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}=\dfrac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\,\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$

স্কেলার গুণনের উদাহরণ ঃ $\vec{F}.\vec{S}=W$ **(কাজ স্কেলার রাশি**

ভেক্টরের ভেক্টর গুণন/ ক্রস গুণ

$\vec{A}\times\vec{B}=\hat{\eta}\ AB\sin\theta$ $\hat{\eta}=\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে তলে অবস্থিত সেই তলের লম্বদিকে একক ভেক্টর $=\vec{A}\times\vec{B}$ এর দিকে একক ভেক্টর $AB\sin\theta=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| \therefore \eta=\dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{\pm\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$; $\hat{\eta}$ একক ভেক্টরটি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর উভয়ের লম্বদিকে কিন্তু $\vec{A}\times\vec{B}$ এর দিকে সমান্তরালে।



❖ $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{\eta}\ (1)\ (1)\ \sin 0^o=0$

$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

আবার, $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ (1)\ (1)\ \sin 90^o=\hat{k}$

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ $\quad$ $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ $\quad$ $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$

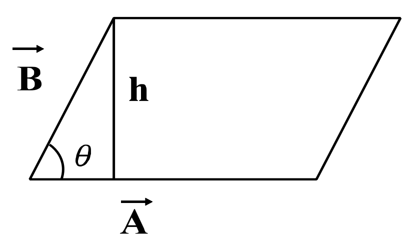
$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ $\quad$ $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ও $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ হলে,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_y B_z-B_y A_z)\hat{i}-(A_x B_z-A_z.B_x)\hat{j}+(A_x B_y-B_x A_y)\hat{k}$$

ভেক্টর রাশি দুটিকে বিনিময় করলে, $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

ভেক্টর আকার ঃ $\vec{A}\times h=\vec{A}.\vec{B}\sin\theta\hat{\eta}$



❖ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ **কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল =** $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$

❖ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ **কে কর্ণ ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল** $=\frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$

❖ **ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল** $=\frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ এখানে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ত্রিভূজের দুটি সন্নিহিত বাহু

❖ **দুটি ভেক্টর সমান্তরাল $(\theta=0^o)$ হওয়ার শর্ত ঃ**

$$\vec{A}\times\vec{B}=\hat{\eta}\,AB\sin\theta=\hat{\eta}\,AB\sin 0^o=0$$

$\therefore$ **দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ক্রস গুণ $=0$ হবে।**

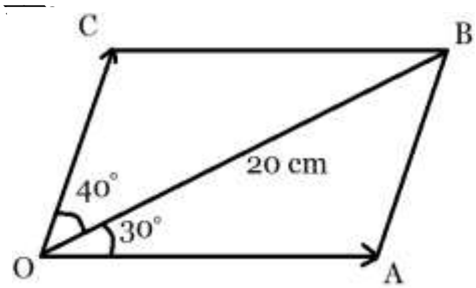
দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে, $\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$

❖ **দুটি ভেক্টর লম্ব $(\theta=90^o)$ হওয়ার শর্ত ঃ** $\vec{A}\,.\,\vec{B}=AB\cos\theta=AB\cos 90^o=0$

$\therefore$ **দুটি ভেক্টর লম্ব হলে তাদের ডট গুণন $=0$ হবে।**

❖ $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ তিনটি ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে, $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})=0$ হবে।

EXAMPLE-01: 0ABC একটি সামন্তরিক। এর সন্নিহিত বাহুদ্বয় OA এবং OC. কর্ণ OB এর সাথে যথাক্রমে 30° ও 40° কোণ উৎপন্ন করে। কর্ণের দৈর্ঘ্য 20cm হলে, OA ও OC এর দৈর্ঘ্য ––



সমাধান ঃ OB = 20cm ; OA = ? ; OC = ?

$$OA=\frac{20\sin 40^\circ}{\sin(30^\circ+40^\circ)}=\frac{20\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}=13.68\text{ cm}\quad(\text{Ans.})$$

$$OC=\frac{20\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+40^\circ)}=\frac{20\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}=10.64\text{ cm}\quad(\text{Ans.})$$

EXAMPLE-02: একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত?

Solve ঃ $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\hat{i}-\hat{k}\quad\therefore\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\ sq.unit.$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $==\frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,sq.\,unit.=\frac{1}{\sqrt{2}}\ sq.\,unit$

$\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ দুটি সামান্তরিকের বাহু হলে,

ক্ষেত্রফল $=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{2}\ sq.\,unit$

EXAMPLE-03: $\vec{P}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এর উপর $\vec{Q}=3\hat{i}+4\hat{j}$ এর অভিক্ষেপ ও উপাংশ কত?

Solve ঃ অভিক্ষেপ = $\left|\vec{Q}\right|\cos\theta=\left|\vec{Q}\right|\frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}=\frac{6-12}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(1)^2}}=\frac{-6}{\sqrt{14}}$ একক

উপাংশ = $\left|\vec{Q}\right|\cos\theta.\hat{a}=\frac{-6}{\sqrt{14}}\left[\frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i}-\frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}\right]=\frac{3}{7}\left[2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}\right]-$ *vector* রাশি

EXAMPLE-04: $\left|\vec{P}+\vec{Q}\right|=\left|\vec{P}-\vec{Q}\right|$ P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

$\vec{R}_{\max}=\vec{R}_{\min}\rightarrow$ এটা শর্ত হলে, $\theta=-180^o+180^o=0$ $[\hat{RP}=\theta\ or,\ \hat{RQ}=\theta$ হলে]

Solve ঃ বর্গ করে, $\therefore P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha=P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha$ যখন P ও Q এর মধ্যেকার কোণ।

$2PQ\cos\alpha=2PQ\cos(\pi-\alpha)\ \Rightarrow 2\alpha=\pi\quad\therefore\alpha=\frac{\pi}{2}$.

EXAMPLE-05: $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-a\hat{k}$, $\vec{B}=\frac{2}{3}\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে a এর মান কত?

Solve ঃ দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হওয়ার শর্তঃ $\vec{A}\times\vec{B}=0$

অথবা, $\frac{A_X}{B_X}=\frac{A_Y}{B_Y}=\frac{A_Z}{B_Z}$ হবে, $\frac{3}{1}=\frac{-a}{-3}\ \therefore a=9$

$\frac{2}{2/3}=\frac{-a}{-3}\Rightarrow\therefore a=9$

EXAMPLE-06: $\vec{A}=2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-5\hat{k},\vec{B}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}$ । $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\vec{A}=2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-5\hat{k}$; $\vec{B}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}$; $\hat{r}=?$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ । $\vec{R}$ এর সমান্তরালে একক ভেক্টর $\hat{n}=?$

$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}=2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-5\hat{k}+i+2\hat{\jmath}+3\hat{k}=3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-2\hat{k}$

$\therefore\ \hat{r}=\frac{\overline{R}}{\left|\overline{R}\right|}=\frac{3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-2\hat{k}}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{3i+6j-2k}{\sqrt{9+36+4}}=\frac{3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-2\hat{k}}{\sqrt{49}}=\frac{3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}-2\hat{k}}{7}=\frac{3}{7}\hat{\imath}+\frac{6}{7}\hat{\jmath}-\frac{2}{7}\hat{k}$ (Ans.)

EXAMPLE-07: $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর

সমাধান ঃ $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ $\quad \vec{B} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= A\cos\theta$ ____________(i)

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \quad$ or, $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{B} = \frac{(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}).(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{(5)^2+(4)^2+(3)^2}} = \frac{15+16-15}{\sqrt{50}}$ $\quad .: A\cos\theta = \frac{16}{\sqrt{50}}$ (Ans.)

$\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর উপাংশ $=$ $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $\times$ $\vec{B}$ এর দিকে একক ভেক্টর

$= \frac{16}{\sqrt{50}} \times \frac{5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{(5)^2+(4)^2+(3)^2}} = 0.32\,(5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) \qquad$ (Ans.)

EXAMPLE-08: m এর কি মানের জন্য $A = 2mi + mj - 4k$ এবং $B = mi - 2j + k$ পরস্পর লম্ব?

সমাধান ঃ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের লম্ব হলে, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90° = 0$

$\vec{A}.\vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz = 2m(m) + (m)(-2) + (-4)(1) = 2m^2 - 2m - 4$

$\therefore 2m^2 - 2m - 4 = 0 \quad$ or, $m^2 - m - 2 = 0 \quad$ or, $m^2 - 2m + m - 2 = 0$

or, $m(m-2) + 1(m-2) = 0 \quad$ or, $(m-2)(m+1) = 0$

$m - 2 = 0 \therefore m = 2 \qquad m + 1 = 0 \therefore m = -1 \qquad$ (Ans.)

EXAMPLE-09: এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা xy তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত।

xy তলে অবস্থিত ভেক্টর $= x\hat{i} + y\hat{j}$

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে, $(x\hat{i} + y\hat{j}).(2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = 0 \quad$ or, $2x - 2y = 0 \quad$ or, $x - y = 0$

$\therefore$ xy তলে একক ভেক্টর $= \pm\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\frac{x\hat{i}+x\hat{j}}{\sqrt{2x^2}} \quad [.: x = y\,] = \pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$ (Ans.)

EXAMPLE-10: a এর মান কত হলে, $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B} = -6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + a\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান ঃ $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$; $\overrightarrow{B} = -6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + a\hat{k}$; $a = ?$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে , $\theta = 0° \; or, 180°$

তাহলে, $sin\theta = 0 \; .: \vec{A} \times \vec{B} = 0$; $\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & a \end{vmatrix} = 0$

$or, \hat{\imath}\,(-a-9) - \hat{\jmath}\,(2a+18) + \hat{k}\,(6-6) = 0$

$or, \hat{\imath}\,(-a-9) - \hat{\jmath}\,(2a+18) = 0$

$\hat{\imath}$ ও $\hat{\jmath}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-a - 9 = 0$ $\qquad$ $-(2a+18) = 0$

$.: a = -9$ $\qquad$ $or, \quad 2a = -18 \quad .: a = -9 \qquad Ans: a = -9$

EXAMPLE-11: একটি সামন্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A} = \hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = -2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ । এর ক্ষেত্রফল?

$\vec{A} = \hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{B} = -2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$; $|\vec{A} \times \vec{B}| = ?$

সমাধান ঃ এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(-4-1) - \hat{\jmath}\,(1-2) + \hat{k}\,(-1-8) = -5\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 9\hat{k}$ $\; .: |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \sqrt{107}$ বর্গ একক $\quad (Ans.)$

EXAMPLE-12: একটি সামন্তরিকের দুটি কর্ণ যথাক্রমে $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5$ এবং $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ । সামন্তরিকটির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান ঃ $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5$; $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$; সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল = ?

আমরা জানি, সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(9+5) - \hat{\jmath}\,(12+10) + \hat{k}\,(4-6) = 14\hat{\imath} - 22\hat{\imath} - 2\hat{k}$

$.: |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(14)^2 + (-22)^2 + (-2)^2}$ =26.15

সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\,|\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2} \times 26.15 = 13.076$ বর্গ একক $\quad (Ans.)$

EXAMPLE-13: একটি ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (2,3,1) , (1,1,3) এবং (2,2,5) হলে ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল?

$$P\ (2,3,1), Q\ (1,1,3), R(2,2,5)$$

সমাধান ঃ $\overrightarrow{PQ} = (1-2)\hat{\imath} + (1-3)\hat{\jmath} + (3-1)\hat{k} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{PR} = (2-2)\hat{\imath} + (2-3)\hat{\jmath} + (5-1)\hat{k} \quad = -\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \times (-\hat{\jmath} + 4\hat{k})$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(-8+2)\hat{\imath} + (0+4)\hat{\jmath} + (1-0)\hat{k}\}$

$= \frac{1}{2}\{(-6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + \hat{k})\} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6) + (4)^2 + (1)^2} \quad = \frac{1}{2}\sqrt{53}$ বর্গ একক। $(Ans.)$

EXAMPLE-14: $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k},\ \vec{B} = 4\hat{\jmath},\ \vec{C} = 5\hat{\jmath} + m\hat{k}$, m এর মান কত হলে $Parallelopiped$ (সামন্তরিক) এর আয়তন 24 একক হবে?

সমাধান ঃ সামন্তরিকের আয়তন $= \vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = 24\ ;\ m = ?$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & m \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & m \end{vmatrix} = 4m\hat{\imath}$$

$$.:\ \vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right).(4m\hat{\imath}) = 8m$$

শর্তমতে, $8m = 24 \qquad .:\ m = 3 \qquad (Ans.)$

EXAMPLE-15: একটি কণার উপর $\vec{F} = 5\hat{i}$ সম একত্রে বল প্রয়োগ করায় কণাটির অবস্থান $\vec{r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ হতে $\vec{r_2} = \sqrt{2}\ \hat{j}$ হয়েছে। এতে কৃতকাজ এর মান কত? প্রযুক্ত টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর।

Solve ঃ $\vec{\Delta r} = \sqrt{2}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \qquad \therefore \vec{\Delta r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$

কৃতকাজ, $W = F.r = 5\hat{i}.(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}) = -5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -3.54N.m$

[$(-)$ চিহ্ন প্রমাণ করে বলের বিরুদ্ধে সরণ হয়েছে]

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{\mathrm{F}} \times \vec{r_1} + \vec{\mathrm{F}} \times \vec{r_2} = \left(5\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\hat{k} = \therefore \tau = 10.6N.m.$ $\hat{k}$ বরাবর

EXAMPLE-16:এরূপ একটি একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর যা $4\hat{i} + 3\hat{k}$ ও $3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব হয়।

Solve ঃ ধরি, ভেক্টর রাশিটি $= x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}$

$4x + 3z = 0$ [ডটগুণন $= 0$ ধরে]

$$3y + 4z = 0$$

একক ভেক্টর $= \hat{a} = \frac{-\frac{3z}{4}\hat{i} - \frac{4z}{3}\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(-\frac{3z}{4})^2 + (-\frac{4z}{3})^2 + z^2}} = \frac{-9\hat{i} - 16\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{338}}$

EXAMPLE-17:এরূপ একটি একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর যা $\boldsymbol{4\hat{i} + 3\hat{k}}$ ও $\boldsymbol{3\hat{j} + 4\hat{k}}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব হয়।

Solveঃ ধরি, ভেক্টর রাশিটি $= \boldsymbol{x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}}$

$4x + 3z = 0$[ডটগুণন $= 0$ ধরে] $3y + 4z = 0$ $\therefore$ একক ভেক্টর ,

$$\hat{a} = \frac{-\frac{3z}{4}\hat{i} - \frac{4z}{3}\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(-\frac{3z}{4})^2 + (-\frac{4z}{3})^2 + z^2}} = \frac{-9\hat{i} - 16\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{338}}$$

EXAMPLE-18:দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 18 একক। এদের ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{3}$ একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\vec{A}.\vec{B} = 18$ একক $|\vec{A} \times \vec{B}| = 6\sqrt{3}$ $\theta = ?$

$\vec{A}.\vec{B} = AB\ cos\theta$ $or, 18 = AB\ cos\theta$ $.: AB\ cos\theta = 18$ ________________(i)

$Again, |\vec{A} \times \vec{B}| = AB\ sin\theta$ $or, 6\sqrt{3} = AB\ sin\theta$ $.: AB\ sin\theta = 6\sqrt{3}$ ______________(ii)

$(ii) \div (i)$ হতে পাই,

$\frac{AB\ sin\theta}{AB\ cos\theta} = \frac{6\sqrt{3}}{18}$ $or, tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $or, \theta = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ $.: \theta = 30°$ $(Ans.)$

EXAMPLE-19: $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k},\ \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{4}k$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ । প্রমাণ কর যে, ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

সমাধান ঃ $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-10 + 12) - \hat{j}(15 - 4) + \hat{k}(-9 + 2)$ $= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

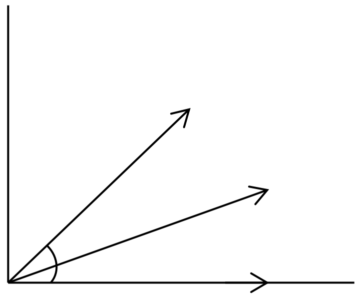
$.: \vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}) = 2 \times 2 \times 1 \times (-11) + (-1) \times (-7)$

$= 4 - 11 + 7$ $= 0$ $.:$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত। $(Ans.)$

EXAMPLE-20: দুটি দিক রাশি $\vec{A_1}$ এবং $\vec{A_2}$ একটি বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়া করে। $\vec{A_1}$ এর মান 4 একক এবং এটি অনুভূমিকের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। $\vec{A_2}$ এর মান 3 একক এবং এটি অনুভূমিক দিকে ক্রিয়াশীল। লব্ধির অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশক নির্ণয় করো।

ধরি, লব্ধির মান $=R$ এবং অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশ যথাক্রমে R_x ও R_y

Y



এখানে, $\vec{A_1}=4$ একক,

$\vec{A_2}=3$ একক

মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha=30^o$

$R_x=?$

$R_y=?$

সমাধান ঃ আমরা জানি,

$$R=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos30^o}=\sqrt{(4)^2+(3)^2+2\times4\times3\times\cos30^o}=\sqrt{45.78}=6.766$$

এখন, $\tan\theta=\dfrac{4\sin30^o}{3+4\cos30^o}$ বা, $\tan\theta=\dfrac{2}{6.46}$ বা, $\tan\theta=0.3096$ বা, $\theta=\tan^{-1}(0.3096)=17.2^o$

$\therefore$ লব্ধির অনুভূমিক উপাংশ, $R_x=R\cos\theta=6.766\times\cos17.2^o=6.46$

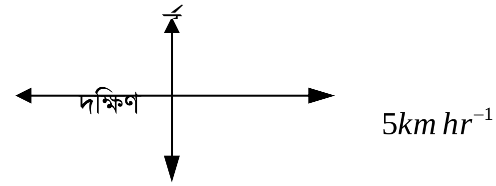
এবং লব্ধির উল্লম্ব উপাংশ,

$$R_y=R\sin\theta=6.766\times\sin17.2^o=2$$

অতএব, লব্ধির অনুভূমিক উপাংশ 6.46 এবং উল্লম্ব উপাংশ 2 ।

EXAMPLE-21: বায়ু ভূমির সমান্তরালে উত্তর দিকে $5km\ hr^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। নিম্নোক্ত দিকসমূহে এর উপাংশ কত? (ক) পূর্ব দিক (খ) পশ্চিম দিক, (গ) খাঁড়া উপরের দিক।

সমাধান ঃ এখানে,



ভূমির সমান্তরালে উত্তর দিকে বেগ $5km\ hr^{-1}$

পূর্ব, পশ্চিম ও খাড়া উপরের দিকে উত্তর দিকের বেগের উপাংশ = ?

(ক) ধরি, পূর্ব দিকের উপাংশ A_y

আমরা জানি, $A_y = (5km\ hr^{-1})\cos 90^o$ [$\because$ উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্যবর্তী কোণ 90^o] $= (5km\ hr^{-1}) \times 0 = 0$

$\therefore A_y = 0$

(খ) ধরি, পশ্চিম দিকের উপাংশ, $= B_y$

আমরা জানি,উত্তর ও পশ্চিম দিকের মধ্যবর্তী কোণ 90°; তাই $B_y = 0$

(গ) ধরি, খাড়া উপরের দিকের উপাংশ

আমরা জানি,উত্তর দিক ও খাড়া উপরের দিকের মধ্যবর্তী কোণ $= 90^o$

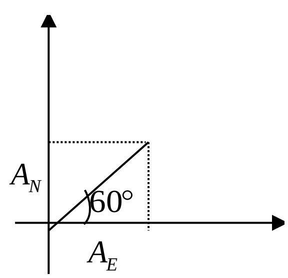
EXAMPLE-22: একটি জাহাজ পূর্ব-উত্তর দিকে 60^0 কোণে $130km$ দূরত্ব অতিক্রম করল। জাহাজটি যাত্রাবিন্দু থেকে কত দূর উত্তর ও কত দূর পূর্ব দিকে গেল?

সমাধান ঃ এখানে,

কোণ, $\theta = 60^o$; দূরত্ব, $A = 130km$

উত্তর দিকের দূরত্ব, $A_N = ?$

পূর্ব দিকের দূরত্ব, $A_E = ?$

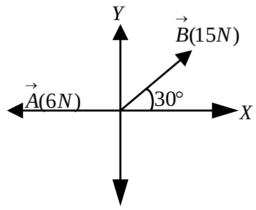


চিত্র থেকে, $A_E = (130km)\cos 60^o = 65km$

এবং $A_N = (130km)\sin 60^o = 112.6km$ অতএব, জাহাজটি যাত্রাবিন্দু থেকে $65km$ উত্তর ও $112.6km$ পূর্ব দিকে গেল।

EXAMPLE-23: চিত্রে প্রদর্শিত ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর সমষ্টি $\vec{A}+\vec{B}$ ও অন্তর $\vec{A}-\vec{B}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

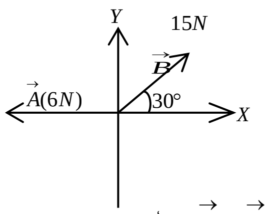


আমরা জানি, $\vec{A}+\vec{B} = (A_x\hat{i}+A_y\hat{j})+(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})$.....(1)   এবং $\vec{A}-\vec{B}=$ $(A_x\hat{i}+A_y\hat{j})-(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})$...........(2)

এখানে, $A_x = A\cos 180^\circ = -A = -6$; $A_y = A\sin 180^o = 6\times 0 = 0$

এবং $B_x = B\cos 30^o = 15\cos 30^o = 12.99 \approx 13$

$B_y = B\sin 30^o = 15\sin 30^o = 7.5$



(1) নং থেকে পাই, $\vec{A}+\vec{B} = -6\hat{i}+0\hat{j}+13\hat{i}+7.5\hat{j} \quad = 7\hat{i}+7.5\hat{j}$

$\theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{7.5}{7} = 46.975 \approx 47^o$

$\therefore \left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{(7)^2+(7.5)^2} \quad = 10.26$, যা X অক্ষের সাথে 47^o কোণে অবস্থিত।

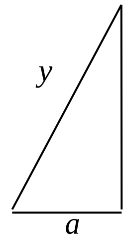
আবার, (2) নং থেকে পাই,

$\vec{A}-\vec{B} = -6\hat{i}+0\hat{j}-13\hat{i}-7.5\hat{j} = -19\hat{i}-7.5\hat{j}$

$\theta_2 = \tan^{-1}\dfrac{-7.5}{-19} = 21.54^o$

$\therefore \left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{(-19)^2+(-7.5)^2} \quad = \sqrt{361+56.25} \quad = 20.42$, যা, X -অক্ষের সাথে 21.54^o কোণে অবস্থিত।

EXAMPLE-24: একজন অগ্নিনির্বাপক দেওয়ালের সাথে 15^0 কোণে আনত 25 মিটার লম্বা মই দিয়ে 20 সে. এ উপরে উঠে সমতল ছাদে উঠল। লোকটির উপরের দিকে সরণ ও বেগ কত?



$h=25m$

উল্লম্বের সঙ্গে আনত কোণ, $\theta=15^o$

মইয়ের দৈর্ঘ্য, $h=25m$,সময়, $t=20s$

উল্লম্ব সরণ, $y=?$ বেগ, $v=?$

উল্লম্ব দিকে সরণ, $y=h\cos\theta$ $=25m\times\cos 15^o$ $=24.15m$

আবার, বেগ, $\frac{y}{t}=\frac{24.15m}{20s}=1.2ms^{-1}$

অতএব, লোকটির দিকে সরণ ও বেগ যথাক্রমে $24.15m$ ও $1.2ms^{-1}$ ।

EXAMPLE-25: একটি বস্তুকণার বেগ $6ms^{-1}$ । তার গতিমুখের সাথে 90^o কোণে $2ms^{-2}$ এর একটি ত্বরণ ক্রিয়া করলে 4 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ ও সরণ কত হবে?

সমাধান ঃ

$U_x = 6ms^{-1}$ $\quad U_y=0$

$a_x=0$ $\quad a_y=2ms^{-2}$

$V_x=U_x+a_xt$ $=6+0\times4$ $=6ms^{-1}$

$V_y=U_y+a_yt$ $=0+2\times4$

$V_y=8\ ms^{-1}$

$\therefore \vec{V}=V_x\hat{i}+V_y\hat{j}$

$\vec{V}=6\hat{i}+8\hat{j}$

$V=\sqrt{6^2+8^2}$ $=10ms^{-1}$

$x=V_xt+\frac{1}{2}a_xt^2$ $=6\times4=24m$

$y=V_yt+\frac{1}{2}a_yt^2$ $=\frac{1}{2}\times2\times4^2$ $=16m$

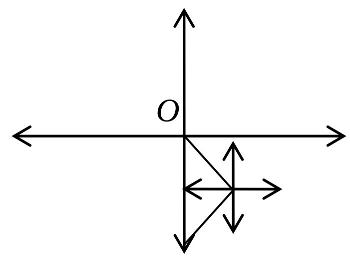
$\therefore \vec{S}=x\hat{i}+y\hat{j}=24\hat{i}+16\hat{j}$

$S=\sqrt{24^2+16^2}=28.84m$

অতএব, কণাটির বেগ $10ms^{-1}$ এবং সরণ 28.84 ।

EXAMPLE-26: একটি উড়োজাহাজ দক্ষিণ-পূর্ব দিকে 30^0 কোণে $250\,km$ উড়ে অতঃপর দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে 30^0 কোণে $250km$ উড়লো। উড়োজাহাটির সরণ ভেক্টরের মান ও দিক কত ?

সমাধান ঃ ধরি, সরণ ভেক্টরের মান R এবং R যে কোনো একটি ভেক্টরের সাথে θ কোণ করে।



সামান্তরিক সূত্রানুসারে,

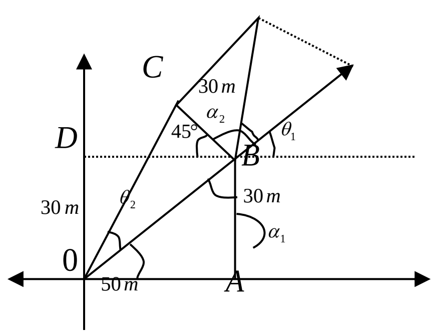
$R=\sqrt{(250)^2+(250)^2+2\times250\times250\times\cos60}$ $=\sqrt{62500+62500+62500}$ $=433 \therefore R=433km$

যেহেতু উভয় সরণ ভেক্টরের মান, কাজেই দিক দক্ষিণ দিক হবে। [অতএব, সরণ $433km$ দক্ষিণ।]

EXAMPLE-27: একটি গাড়ি পূর্বদিকে $50m$, তারপর উত্তর দিকে $30m$ এবং এরপর উত্তর-পশ্চিম দিকে $30m$ গেল। চিত্র অঙ্কন কর এবং যাত্রাস্থল থেকে গাড়িটির সর্বমোট সরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, একটি গাড়ির পূর্বদিকে সরণ, $OA=50m$ তারপর উত্তর দিকে সরণ, $AB=30m$

এবং পরিশেষে উত্তর-পশ্চিম দিকে সরণ, $BC=30m$; যাত্রাস্থল থেকে গাড়িটির মোট সরণ, $\vec{OC}=?$



এখানে, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha_2=180^o-\theta_1-45^o$ $=180^o-\tan^{-1}\dfrac{30m}{50m}-45^o$ $=104.04^o$

এখন, লব্ধি $\overrightarrow{OB}$ এবং সরণ $\overrightarrow{BC}$ এর লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ এর মান $=\sqrt{OB^2+BC^2+2.OB.BC.\cos\alpha_2}$

$=\sqrt{(58.3m)^2+(30m)^2+2\times58.3m\times30m\times\cos104.04^o}$ $=\sqrt{(3398.89+900-848.61)m^2}$ $=58.74m$

এবং দিক, $\theta_2=\tan^{-1}\dfrac{30m\times\sin104.04^o}{58.74m+30m\times\cos104.04^o}$ $=\tan^{-1}\dfrac{29.1}{51.46}$ $\therefore\theta_2=29.49^o$

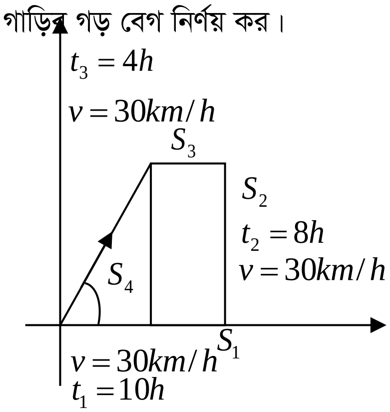
[সংকেত $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$]

মোট সরণ অর্থাৎ লব্ধি $\overrightarrow{OC}$ এর মান $= 58.74m$

এবং দিক $= \theta_1 + \theta_2 = 30.96^o + 29.49^o = 60.45^o$

নির্ণেয় লব্ধির মান $58.74m$ এবং দিক $60.66^o \ N \ of \ E$

EXAMPLE-28: একটি গাড়ি প্রতি ঘন্টায় 30 কিলোমিটার গতিতে চলে প্রথম 10 ঘন্টা সোজা পূর্ব দিকে, পরবর্তী 8 ঘন্টা সোজা উত্তর দিকে এবং শেষ 4 ঘণ্টা সোজা পশ্চিম দিকে গেল। গাড়ির গড় বেগ নির্ণয় কর। উত্তর



সমাধান ঃ এখানে, গাড়ির বেগ, $v = 30km/h$;

$t_1 = 10h;\ t_2 = 8h$ এবং $t_3 = 4h$

ধরি, গাড়িটির গড়বেগ $\vec{v}$ এবং

যার পূর্ব দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ $= \theta$

$\vec{v} = ?$ এবং $\theta = ?$

আমরা জানি, $s = vt$; $s_1 = (30km/h)\ (10h) = 300km$

$s_2 = (30km/h)\ (8h) = 240km$; এবং $s_3 = (30km/h)\ (4h) = 120km$ এখন,

$s_4 = s_1 - s_3 = (300 - 120)\,km = 180km$

মোট সময়, $t = t_1 + t_2 + t_3 = 10h + 8h + 4h = 22h$

অতিক্রান্ত লব্ধি দূরত্ব $= \sqrt{{s_2}^2 + {s_4}^2} = \sqrt{(240km)^2 + (180km)^2} = 300km$

গড় বেগ $\dfrac{\text{লব্ধির দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$ $= \dfrac{300km}{22h} = 13.636km/h$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{s_2}{s_4}$ $\tan\theta = \dfrac{s_2}{s_1}$ বা, $\tan\theta = \dfrac{240km}{180km}$ বা, $\tan\theta = 1.3333$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(1.3333) = 53°7'48''$

অর্থাৎ গড়বেগের লব্ধির দিক পূর্ব দিকের $53°7'48''$ উত্তরে।

EXAMPLE-29: একটি কণার উপর $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})N$ বল কাজ করার ফলে কণাটির $\vec{d} = (2\hat{i} - dy\hat{j} - \hat{k})m$ সরণ হয়। dy এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে?

সমাধান ঃ এখানে, বল, $\vec{F} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})N$ সরণ, $\vec{d} = (2\hat{i} - dy\hat{j} - \hat{k})m$

আমরা জানি, কাজ, $W = \vec{F}.\vec{d} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} - dy\hat{j} - \hat{k}) = 2(\hat{i}.\hat{i}) + 3dy(\hat{j}.\hat{j}) - 2(\hat{k}.\hat{k}.)$

বা, $0 = 2 - 3dy - 2 (\because W = 0)$ বা, $3dy = 0$ $\therefore dy = 0$ অতএব, dy এর মান 0 হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে।

EXAMPLE-30: যদি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি একক ভেক্টর হয় এবং θ এদের মধ্যবর্তী কোণ হয় তবে, দেখাও যে, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 4$

সমাধান ঃ বামপক্ষ = $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{a}.\vec{b} = 2(\vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b})$

$= 2(1+1)$[$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি একক ভেক্টর হওয়ায় $\vec{a}.\vec{a} = 1$ এবং $\vec{b}.\vec{b} = 1$] অতএব, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 4$

বিকল্প পদ্ধতিঃ

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^o - \theta)$$

$$= 2(a^2 + b^2) + 2ab\cos\theta - 2ab\cos\theta = 2(1^2 + 1^2) = 4$$

Practice:

01. $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ ও $\vec{b} = \sqrt{3}\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ হলে $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও উপাংশ নির্ণয় কর।

$Ans. \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ এবং $\frac{\sqrt{3}+1}{16}(\sqrt{3}\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k})$

02. $\vec{a} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

$Ans.\ \hat{\eta} = \pm\frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 6\hat{k})$

03. $\vec{A} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - \hat{k}$ হলে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

$$Ans.\ \ \frac{3}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{5}\hat{\imath}$$

04. কোন গতিশীল কণার ব্যাসার্ধ $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})m$ এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})N$ হলে কৃতকাজ, টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর। $Ans. 15j.\ \left|\vec{\tau}\right| = \sqrt{45}$ [$-j$ বরাবর]

05.একটি কণা $\vec{AB}$ পথে $5km/hr$ বেগে যাত্রা করে $2hr$-এ A হতে চিত্রানুযায়ী B বিন্দুতে যায় এবং একই বেগে কণাটি A বিন্দুতে ফিরে আসে।

$BC \perp AB, CD \perp DE \quad BD \| AE$ এবং $\angle DCB = 120^o$ হলে, $\vec{AD}$ ও $\vec{AC}$ এর মান ও দিক নির্ণয় কর।

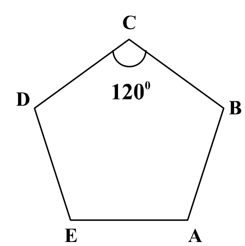
hints: কোণ বিশ্লেষণঃ পঞ্চভূজঃ মোট কোণের পরিমাণ 540^o শর্তানুযায়ী , $AB \| DE$

$\Rightarrow 120^o + 90^o + 90^o = 300^o$

অবশিষ্ট 240^o কোণ E ও A বিন্দুতে সমান অংশে বিভক্ত $\angle AED = 120^o, \angle EAB = 120^o$

$\angle CED = 45^o = \angle CAB \qquad \angle CEA = \angle CAE = 75^o$

$AB + BC + CD + DE + EA = 5AB = 5\times5\times2 = 5\times10$ প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য $10km.$



Type-05: কোন অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ নির্ণয়

কোন অক্ষের সাথে কোন ভেক্টর $\vec{A}$ এর উৎপন্ন কোণ নির্ণয় ঃ

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$;

X অক্ষের সাথে $\vec{A}$ এর উৎপন্ন কোণ θ_x হলে, $\vec{A}\,.\,\hat{i} = (A)\ (1)\ \cos\theta_x$

$$\therefore \cos\theta_x = \frac{\vec{A}\,.\,\hat{i}}{A} = \frac{(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\,.\,\hat{i}}{A} = \frac{(A_x)\ (1) + (A_y)(0) + (A_z)(0)}{A} = \frac{A_x}{A}$$

$$\therefore\ \theta_x = \cos^{-1}\frac{A_x}{A}$$

তদ্রুপ, y ও z অক্ষের সাথে কোন যথাক্রমে θ_y ও θ_z হলে, $\theta_y = \cos^{-1}\frac{A_y}{A}$, $\theta_z = \cos^{-1}\frac{A_z}{A}$

EXAMPLE-01: $\vec{p} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ এর সাথে x, y, z অক্ষের কৌণিক ব্যবধান নির্ণয় কর।

x, y, z অক্ষের সাথে p এর কৌণিক ব্যবধান α, β, δ ।

সমাধান ঃ $\vec{p} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ $\therefore$ $p = \sqrt{(1)^2 - (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

এখন, $\vec{p}.\hat{\imath} = \widehat{(\imath - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})}.\hat{\imath}$ or, $(p)(1)\cos\alpha = \hat{\imath}.\hat{\imath} - 2.\hat{\jmath}.\hat{\imath} + 2\hat{k}.\hat{\imath}$

or, $P\cos\alpha = 1 - 0 + 0$ or, $\cos\alpha = \frac{1}{p} = \frac{1}{3}$ $\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.528^0$ (Ans.)

Again, $\vec{p}.\hat{\jmath} = (\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})\,.\hat{\jmath}$ or, $(p)(1)\cos\beta = \hat{\imath}.\hat{\jmath} - 2\hat{\jmath}.\hat{\jmath} + 2\hat{k}.\hat{\jmath}$

or, $\cos\beta = -\frac{2}{p} = -\frac{3}{3}$ $\therefore \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 131.81°$ (Ans.)

EXAMPLE-02: **তিনটি অক্ষের সাথে সমান কোণ তৈরি করে এরূপ একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ ধরি ভেক্টর রাশিটি, $\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$

Solve ঃ শর্তানুযায়ী , $r_x = r_y = r_z$ এবং $r_x{}^2 + r_y{}^2 + r_z{}^2 = r^2$ $\therefore r^2 = 3r_x{}^2 = 3r_y{}^2 = 3r_z{}^2$

$$\therefore r_x = r_y = r_z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}r$$

$\frac{\vec{r}}{r} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$; যা $\vec{r}$ এর সমান্তরালে একক ভেক্টর।

Practice:

01. $2\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} + \hat{k}$ এবং $\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + \hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান কত? $Ans.\ {}^5/_2$

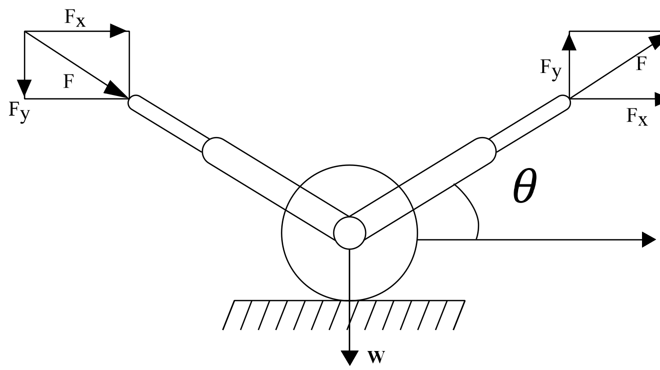
02. $2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

$$Ans.\ \theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right), \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right), \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Type-06: লন রোলার

লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ

ঠেলার ক্ষেত্রে ঃ ধরি w ওজনের একটি লন রোলারকে F বলে অনুভূমিকের সমান্তরাল রেখার সাথে θ কোণে ঠেলা হচ্ছে। তাহলে F এর অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$ যা লন রোলারকে সামনের দিকে গতিশীল করে এবং উলম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$ যা লন রোলারের ওজনের দিকে ক্রিয়া করে ফলে লন রোলারের ওজন $F\sin\theta$ পরিমাণ বৃদ্ধিপায়।



টানার ক্ষেত্রে ঃ ধরি w ওজনের একটি লন রোলারকে F বলে অনুভূমিকের সমান্তরাল রেখার সাথে θ কোণে টানা হচ্ছে। তাহলে F এর অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$ যা লন রোলারকে সামনের দিকে গতিশীল করে এবং উলম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$ যা লন রোলার ওজনের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে ফলে লন রোলারের ওজন $F\sin\theta$ পরিমাণ হ্রাস পায়।

এজন্য লন রোলারকে ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।

EXAMPLE-01: **একটি লন রোলারকে 10N বলে উলম্ব রেখার সাথে 60^0 কোণে টানা হচ্ছে। লন রোলারটি কতটুকু ওজন হারাবে?**

Solve ঃ হারানো ওজন, $W = 10\cos 60^0 = 5$ N

EXAMPLE-02: **একটি লন রোলারকে 10N বলে ঠেলা হচ্ছে এবং 50N বলে টানা হচ্ছে। লন রোলারের ওজন 2 kg-wt হলে লন রোলার 2 সেকেন্ডে কত দুরত্ব অতিক্রম করবে? ঠেলা এবং টানা একই কোণে হচ্ছে।**

Solve ঃ ধরি, ঠেলা এবং টানা উলম্বের সাথে θ কোণে হচ্ছে।

ঠেলার ক্ষেত্রে ওজন বৃদ্ধিপায় $= 10\cos\theta$ এবং টানার ক্ষেত্রে ওজন হ্রাস পায় $= 50\cos\theta \therefore 50\cos\theta - 10\cos\theta = 2\times 9.8 \Rightarrow \theta = 60.66°$, $50\sin\theta + 10 sin\,\theta = 2\times a = 52.3$

$\therefore a = 26.152 ms^{-2}$, 2 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দুরত্ব $= \frac{1}{2}\times 26.152\times 2^2 = 52.3m$

Practice:

01. একটি লন রোলারকে 15N বলে উলম্ব রেখার সাথে 30^0 কোণে ঠেলা হচ্ছে। লন রোলারটি কতটুকু ওজন লাভ করবে?

Ans. 12.99N

02. একটি লন রোলারকে 10N বলে ঠেলা হচ্ছে এবং FN বলে টানা হচ্ছে। লন রোলারের ওজন 2 kg-wt হলে লন রোলারটি 2 সেকেন্ডে 52.3m দুরত্ব অতিক্রম করে। ঠেলা এবং টানা একই কোণে হচ্ছে। F বল এবং কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

Ans. $50N, 60.66°$

Type-07: ভেক্টর অপারেটর

ভেক্টর অপারেটর ঃ [গ্রেডিয়েন্ট; ডাইভারজেন্স ও কার্ল]

ভেক্টর অপারেটরঃ $\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$; $\vec{\nabla}$ কে ন্যাবলা/ডেল বলে।

গ্রেডিয়েন্ট অপারেটর: এ অপারেটর স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্রে পরিণত করে।

সংজ্ঞা ঃ $\vec{\nabla}.\varphi = grad\varphi = \left(\hat{\imath}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{\jmath}\ \frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right).\varphi = \hat{\imath}\frac{\delta\varphi}{\delta x} + \hat{\jmath}\ \frac{\delta\varphi}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta\varphi}{\delta z}$

যা একটি ভেক্টর রাশি। এর মান অবস্থানের সাপেক্ষে ঐ স্কেলার রাশি $\varphi(x, y, z)$ এর সর্বোচ্চ বৃদ্ধির হার নির্দেশ করে এবং গ্রেডিয়েন্টের দিক হবে φ এর বৃদ্ধির হারের দিকে।

ডাইভারজেন্স ঃ এ অপারেটর এর মাধ্যমে একটি ভেক্টর রাশি স্কেলার ক্ষেত্রে পরিণত করা যায় । যদি কোন স্থানের একটি এলাকায় প্রতিটি বিন্দুতে $\vec{v}(x, y, z) = \hat{\imath}v_x + \hat{\jmath}v_y + \hat{k}v_z$ কে অন্তরীণকরণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হিসেবে ধরা হয় ,তবে $\vec{v}$ এর ডাইভারজেন্স এর সংজ্ঞা: $\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z}$ যা একটি স্কেলার রাশি।

$\vec{\nabla}.\vec{v} \neq \vec{v}.\vec{\nabla}$ হয় যদিও স্কেলার গুণন দিকের উপর নির্ভর করেনা।

কার্ল ঃ এটি দ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের ঘূর্ণন ব্যাখ্যা করা যায়।

$\vec{v} = \hat{\imath}v_x + \hat{\jmath}v_y + \hat{k}v_z$ একটি অন্তরীকরণযোগ্য ভেক্টরক্ষেত্র এর কার্ল: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{\delta v_z}{\delta y} - \frac{\delta v_y}{\delta z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\delta v_x}{\delta z} - \frac{\delta v_z}{\delta x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\delta v_z}{\delta x} - \frac{\delta v_x}{\delta z}\right)\hat{k}$ যা একটি ভেক্টর রাশি যার মান ঐ ভেক্টরের ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রফলের উপর সর্বোচ্চ রেখা যোগজের সমান। কার্ল শূন্য হলে ক্ষেত্র ঘূর্ণশীল হবে না।

মনে রাখবে,

- ❖ কোন ভেক্টরের $curl = 0$ মানে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল/ সংরক্ষণশীল
- ❖ কোন ভেক্টরের $\text{divergence} = 0$ মানে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল (সলিনয়ডাল)

EXAMPLE-01: যদি $\boldsymbol{\varphi(x,y,z) = 2xyz^3 - x^2z^2}$ **হয় তবে (-1,-2,1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\boldsymbol{\varphi}$ এর মান বের কর।**

Solve ঃ আমরা জানি: $\vec{\nabla}.\varphi = grad\varphi = \left(\hat{\imath}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{\jmath}\ \frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right).\varphi = \hat{\imath}\frac{\delta\varphi}{\delta x} + \hat{\jmath}\ \frac{\delta\varphi}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta\varphi}{\delta z}$

$$= \hat{\imath}(2yz^3 - 2xz^2) + \hat{\jmath}(2xz^3 - 0) + \hat{k}(6xyz^2 - 2x^2z)$$
$$= (2yz^3 - 2xz^2)\hat{\imath} + 2xz^3\hat{\jmath} + (6xyz^2 - 2x^2z)\hat{k}$$

(-1,-2,1) বিন্দুতে,

$$\vec{\nabla}.\varphi = [2\times(-2)\times 1^3 - 2(-1)\times 1^2]\hat{\imath} + 2\times(-1)\times 1^3.\hat{\jmath} + [6(-1)(-2)\times 1^2 - 2\times(-1)^2\times 1]\hat{k}$$

$$= -6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 10\hat{k}$$

Practice:

01.যদি ঢাকা শহরের প্রতিটি বিন্দুতে জীবানু থাকার একটি স্কেলার ফাংশন $\varphi(x,y,z) = 2xyz^4 - x^2z^2$ হয় তবে (1, -2,-1) বিন্দুতে জীবানুটির অবস্থান ও দিক নির্ণয় কর।

Ans. $(-6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 8\hat{k})$, φ এর বৃদ্ধির দিকে।

EXAMPLE-02: **যদি $\vec{\mathbf{A}} = \boldsymbol{3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}}$ হয় তবে (1, 1,-1) বিন্দুতে $\vec{\mathbf{A}}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।**

Solve ঃ $\vec{\nabla}.\vec{A} = 3yz + 4xy - x^2y$

(1, 1,-1) বিন্দুতে, $\vec{\nabla}.\vec{A} = 3\times 1(-1) + 4\times 1\times 1 - 1^2\times 1 = -3 + 4 - 1 = 0$

Practice:

01. যদি $\vec{A} = (3x^2z)\hat{\imath} + (xyz^2z)\hat{\jmath} - (x^3y^2z)\hat{k}$ হয় তবে (1, -1,1) বিন্দুতে স্কেলার ক্ষেত্র কত হবে? Ans 6.

EXAMPLE-03: **একটি স্থানের কোন এলাকায় $\vec{\mathbf{v}} = \boldsymbol{2x^3y\hat{\imath} + 2y^3z\hat{\jmath} + z^2xy\hat{k}}$ হয় তবে (-2, 2,-1) বিন্দুতে $\vec{\mathbf{v}}$ এর কার্ল নির্ণয় কর এবং $\left|\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{v}}\right| = ?$**

Solve ঃ $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ 2x^3y & 2y^3z & z^2xy \end{vmatrix}$

$$= (z^2x - 2y^3)\hat{\imath} + (0 - z^2y)\hat{\jmath} + (0 - 2x^3)\hat{k}$$
$$= (z^2x - 2y^3)\hat{\imath} - z^2y\hat{\jmath} - 2x^3\hat{k}$$

(-2,2,-1) বিন্দুতে, $\vec{\nabla}\times\vec{v} = (-2-16)\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 16\hat{k} = -18\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 16\hat{k}$

$$\left|\vec{\nabla}\times\vec{v}\right| = \sqrt{(-18)^2 + (-2)^2 +}\,(-16)^2 = 2\sqrt{146}$$

Practice:

01. যদি $\vec{A} = 3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}$ হয় তবে (1, 1,-1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ এবং $\left|\vec{\nabla}\times\vec{v}\right|$ নির্ণয় কর।

Ans. $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}; 3\sqrt{3}$.

EXAMPLE-04: প্রমাণ কর : $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$

সমাধান ঃ $\vec{\nabla} = \left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$$= \hat{i}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right) + \hat{j}\left(\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \hat{k}\left(\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}}{r^{\frac{3}{2}}}$$

এখন, $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{2x\hat{i}+2y\hat{j}+2z\hat{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$= 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= 2\left\{\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}.1 - x\,\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right.$$

$$+\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\left.+\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - z\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right\} = 2\left\{\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right\}$$

$$= 2\times 0 = 0$$

EXAMPLE-05: যদি $\vec{A}=3xyz\hat{i}+2xy^2\hat{j}-x^2yz\hat{k}$ হয় তবে-

(ক) $\vec{\nabla}.\vec{A}$ ও $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ নির্ণয় কর।

(খ) $(1,1,-1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{A}$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ এবং $\left|\vec{\nabla}\times\vec{A}\right|$ নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এখানে, $\vec{A}=3xyz\hat{i}+2xy^2\hat{j}-x^2yz\hat{k}$ (ক) $\vec{\nabla}.\vec{A}$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(3xyz\hat{i}+2xy^2\hat{j}-x^2yz\hat{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(3xyz)+\frac{\partial}{\partial y}(2xy^2)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2yz=3yz+4xy-x^2y\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times(3xyz\hat{i}+2xy^2\hat{j}-x^2yz\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3xyz & 2xy^2 & -x^2yz\end{vmatrix}$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-x^2yz)-\frac{\partial}{\partial z}(2xy^2)\right\}\hat{i}+\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-x^2yz)-\frac{\partial}{\partial z}(3xyz)\right\}\hat{j}+\left\{\frac{\partial}{\partial y}(2xy^2)-\frac{\partial}{\partial y}(3xyz)\right\}\hat{k}$$

$$=-x^2z\hat{i}-(3xy+2xyz)\hat{j}+(2y^2-3xz)\hat{k}\quad (\textbf{Ans}:)$$

(খ) $(1,1,-1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{A}$, $=3.1(-1)+4.1.1-1^2.1\quad=-3+4-1=0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=-1^2(-1)\hat{i}-\{3.11+2.1.1(-1)\}\hat{j}+\{\mathbf{2.1^2-3.1(-1)}\}\hat{k}=\hat{i}-(3-2)\hat{j}+\hat{k}=\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$$

$$|\vec{\nabla}\times\vec{A}|=\sqrt{1^2+1^2+5^2}=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$$

EXAMPLE-06: দেখাও যে, $\vec{E}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে একটি সংরক্ষিত ক্ষেত্র।

সমাধান ঃ এখানে, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=\hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z)-\frac{\partial}{\partial z}(y)\right\}-\hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z)-\frac{\partial}{\partial z}(x)\right\}+\hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(x)\right\}$$

$=\hat{i}(0-0)-\hat{j}(0-0)+\hat{k}(0-0)=0$ সুতরাং বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র $\vec{E}$ একটি সংরক্ষিত ক্ষেত্র।

EXAMPLE-07: $\vec{A} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি কি চোঙ্গাকৃতি (solenoidal) না অঘূর্ণনশীল (irrotational)?

সমাধানঃ $\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)^2 = 2x + 2y + 2z \neq 0$

সুতরাং ভেক্টর ক্ষেত্রটি কি চোঙ্গাকৃতি নয়।

আবার, $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2)\right\}$

$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0$ $\therefore$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।

EXAMPLE-08: $\vec{F} = \hat{i}(6x^2y - z^3) + 2\hat{j}x^3 - 3\hat{k}xz^2$ ভেক্টরটি একটি বলক্ষেত্র প্রকাশ করলে প্রমাণ কর যে, বলক্ষেত্রটি সংরক্ষণশীল বা অঘূর্ণনশীল।

সমাধানঃ এখানে, $\vec{F} = \hat{i}(6x^2y - z^3) + 2\hat{j}x^3 - 3\hat{k}xz^2$

এখন, $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left\{(6x^2y - z^3)\hat{i} + 2\hat{j}x^3 - 3xz^2\hat{k}\right\}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6x^2y - z^3 & 2x^3 & -3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^3)\right\}\hat{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(6x^2y - z^3)\right\}\hat{j} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{2x^3}) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y - z^3)\right\}\hat{k}$$

$= (0-0)\hat{i} + (-3z^2 + 3z^2)\hat{j} + (6x^2 - 6x^2)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ বলে, বল ক্ষেত্রটি সংরক্ষিণশীল বা অঘূর্ণনশীল।

EXAMPLE-09: প্রমাণ কর যে, $\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} = A.\frac{dA}{dt}$

ধরি, $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z \therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$$\therefore \vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt} = (\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z).\left(\hat{\imath}\frac{dA_x}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dA_y}{dt} + \hat{k}\frac{dA_z}{dt}\right)$$

$$= A_x\frac{dA_x}{dt} + A_y\frac{dA_y}{dt} + A_z\frac{dA_z}{dt}$$

এবং $A.\frac{dA}{dt}\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}\left(2A_x\frac{dA_x}{dt} + 2A_y\frac{dA_y}{dt} + 2A_z\frac{dA_z}{dt}\right)$

$= A_x\frac{dA_x}{dt} + A_y\frac{dA_y}{dt} + A_z\frac{dA_z}{dt} \quad \therefore A.\frac{d\vec{A}}{dt} = A.\frac{dA}{dt}$ **(প্রমাণিত)**

EXERCISES

০১. একটি ভেক্টর $\vec{A}$ কে $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। (ক) ভেক্টরটির মান র্নিণয় কর, (খ) ভেক্টরটির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

০২. চিত্রে প্রদর্শিত ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর উপাংশ এর মান নির্ণয় কর একক ভেক্টরের দ্বারা ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলের মান ও দিক র্নিণয় কর।

০৩. $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

০৪. $\vec{A} = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + 9\hat{k}$, a এর মান কত হলে ভেক্টদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে ?

০৫. $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$

০৬. দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণন কর।

০৭. $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 10\hat{k}$ । m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে ?

০৮. কোন কণার (গতিশীল) কোন মুহুর্তের অবস্থঅন ভেক্টর $\vec{r} = \hat{\imath}\cos\omega t + \hat{\jmath}\sin\omega t$ দ্বারা সূচিত, এখানে ω একটি ধ্রুবক। (ক) কণার তাৎক্ষণিক বেগ ও ত্বরণ কত (খ) দেখাও যে, $\vec{r} \times \vec{v} =$ ধ্রুব ভেক্টর।