দ্বিতীয় অধ্যায়

# যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

# Linear programming

## পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

### ▶ উদাহরণ-1 এর কাজ | পৃষ্ঠা-৪৬

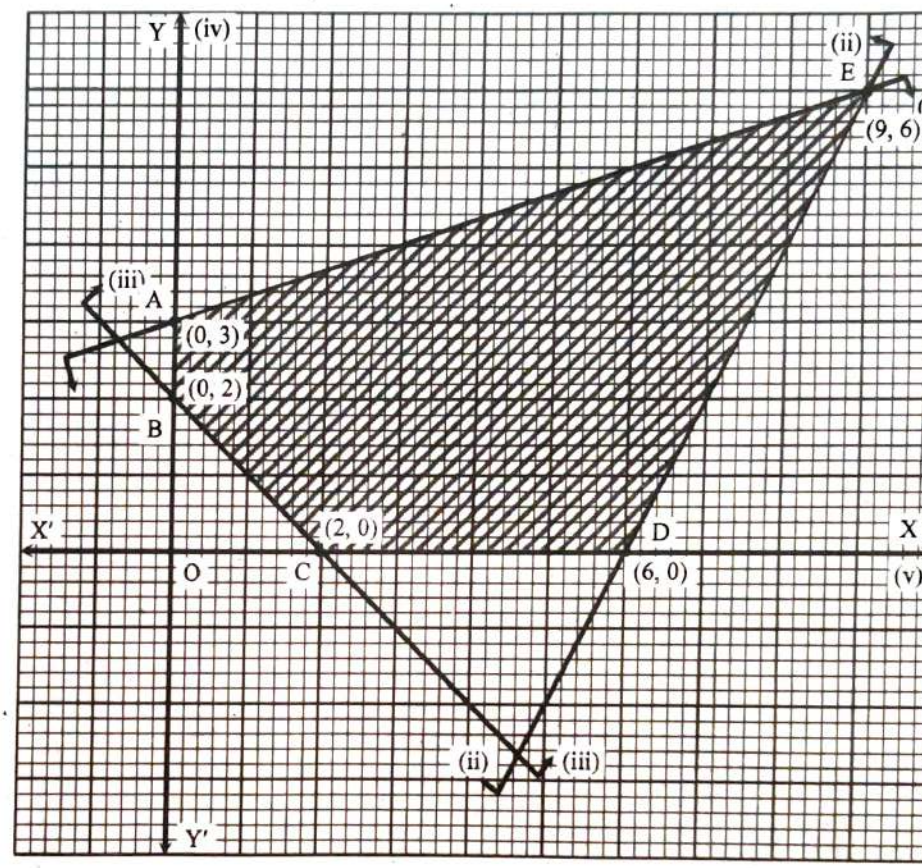
দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন,

$z = 5x + 7y$ এবং

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ:

$$-x + 3y \le 9$$
$$2x - y \le 12$$
$$x + y \ge 2$$
$$x, y \ge 0$$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে রূপান্তরিত সমীকরণগুলি পাওয়া যায়।




$-x + 3y = 9$ বা, $\frac{x}{-9} + \frac{y}{3} = 1$ ……… (i)

$2x - y = 12$ বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{-12} = 1$ ……… (ii)

$x + y = 2$ বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ ……… (iii)

$x = 0$ ……… (iv)

$y = 0$ ……… (v)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

লেখচিত্রে দেখা যায়, সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু ও এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) আছে ঐ পাশের এবং (iii) এর ক্ষেত্রে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

এখানে, A, B, C, D ও E বিন্দুগুলি যথাক্রমে (i) ও (iv); (iii) ও (iv); (iii) ও (v); (ii) ও (v) এবং (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দু। ABCDE সম্ভাব্য সমাধান এলাকা, যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। এ এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে—

A(0, 3), B(0, 2), C(2, 0), D(6, 0) এবং E(9, 6)

এখন, A বিন্দুতে, $z = 5 \times 0 + 7 \times 3 = 21$

B বিন্দুতে, $z = 5 \times 0 + 7 \times 2 = 14$

C বিন্দুতে, $z = 5 \times 2 + 7 \times 0 = 10$

D বিন্দুতে, $z = 5 \times 6 + 7 \times 0 = 30$

এবং E বিন্দুতে, $z = 5 \times 9 + 7 \times 6 = 87$

সুতরাং z এর সর্বোচ্চ মান E(9, 6) বিন্দুতে 87

## ▶ উদাহরণ-5 এর কাজ | পৃষ্ঠা-৫২

মনে করি, ফেরিওয়ালা দৈনিক xটি সবুজ ও yটি লাল চকোলেট কিনেন।

তাহলে, অভীষ্ট ফাংশন $z_{max} = (x + 2y)$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y = 600$

$x + 5y \le 1000$

$x, y > 0$

এখন অসমতাগুলিকে সমতা ধরলে রূপান্তরিত সমীকরণগুলি পাওয়া যায়:

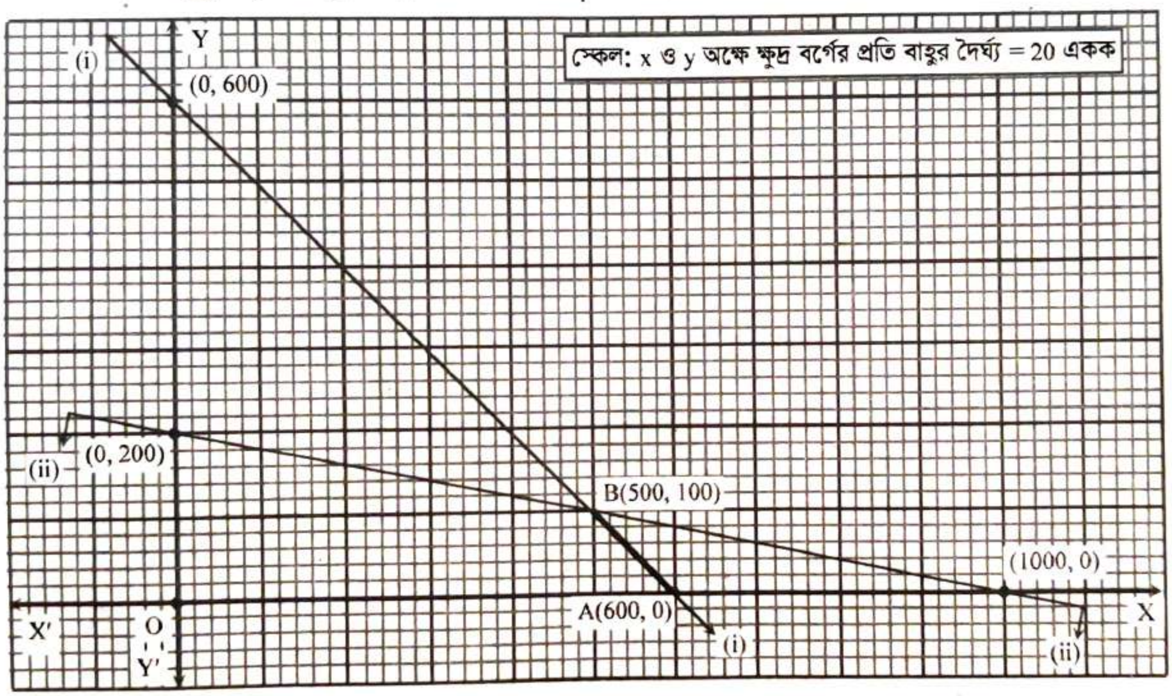
$x + y = 600$ বা, $\frac{x}{600} + \frac{y}{600} = 1$ ……… (i)

$x + 5y = 1000$ বা, $\frac{x}{1000} + \frac{y}{200} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii)

$y = 0$ ……… (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় (ii) নং সমীকরণ এর সকল বিন্দু ও এর যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) আছে ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + 5y \le 1000$ অসমতাটি সত্য। তাহলে চিত্রের (i) নং রেখার AB অংশই সমাধানের অনুকূল এলাকা যা মোটা কালি করে চিহ্নিত করা আছে।

এখানে, A(600, 0) এবং B(500, 100)

এখন, A(600, 0) বিন্দুতে $z = 600 + 2 \times 0 = 600$

B(500, 100) বিন্দুতে $z = 500 + 2 \times 100 = 700$

**(i)** স্পষ্টত B(500, 100) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়। সুতরাং ফেরিওয়ালা x = 500 টি সবুজ ও y = 100টি লাল চকোলেট কিনলে সর্বোচ্চ লাভ পাবেন।

**(ii)** যদি প্রতিটি সবুজ চকোলেটে লাভ 0.5 টাকা কমে যায় এবং লাল চকোলেটে লাভ 1 টাকা বেড়ে যায় তবে অভীষ্ট ফাংশন হয়, $z = \text{Max}\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)$

এইক্ষেত্রে,

A(600, 0) বিন্দুতে $z = \frac{1}{2} \times 600 + 3 \times 0 = 300$

B(500, 100) বিন্দুতে $z = \frac{1}{2} \times 500 + 3 \times 100 = 550$

অর্থাৎ সর্বোচ্চ লাভ হয় 550 টাকা।

যেহেতু তাঁর প্রতিদিনের সংসার খরচ 600 টাকা। কাজেই এমতাবস্থায় চকোলেট ফেরি করে তিনি তাঁর সংসারের খরচ চালাতে পারবেন না।

# অনুশীলনী-2 এর সমাধান

1. (i) **সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable):**
সমস্যাটিতে যা নির্ণয় করতে বলা হয়েছে তার সাথে সংশ্লিষ্ট পরিবর্তনযোগ্য অজানা রাশিগুলিকে সিদ্ধান্ত চলক (decision variable) বলা হয়। কেবলমাত্র এই রাশি গুলিকেই বাড়ানো বা কমানোর স্বাধীনতা সিদ্ধান্তকারীর থাকে।

সিদ্ধান্ত চলকের মান ঋণাত্মক হয় না। যেমন: কোনো বল প্রস্তুতকারী কোম্পানি দুই প্রকারের বল তৈরি করে, এক প্রকার হলো ফুটবল এবং অপরটি ক্রিকেট বল। ফুটবলকে $x$ এবং ক্রিকেট বলকে $y$ বিবেচনা করলে অবশ্যই $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ হবে। কেননা ঋণাত্মক পরিমাণ কোনো কিছু তৈরি করা যায় না।

**উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন (Objective function):**
যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল উদ্দেশ্যই হলো কোনো কিছুকে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় (Optimization) রূপদান। যার পরিমানকে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করতে হবে তাকে উপর্যুক্ত চলক দ্বারা গাণিতিক ফাংশনে প্রকাশ করতে হবে, তাকে অভীষ্ট ফাংশন (Objective function) বলা হয়।

**শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (constraints):**
যেকোনো কাজেই কিছু সীমাবদ্ধতা বা প্রতিবন্ধকতা থাকে, যেমন—অর্থের সীমাবদ্ধতা, যোগ্য লোকবলের সীমাবদ্ধতা, কাঁচামালের সীমাবদ্ধতা ইত্যাদি। এই সকল সীমাবদ্ধতাকে রৈখিক সমীকরণ বা অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করতে হয়। এগুলোকে একত্রে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (constraints) বলা হয়।

(ii) **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming):**
সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে (i) উদ্দেশ্য ফাংশন (objective function) (ii) সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable) ও (iii) শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints) এই তিনটি তথ্যকে ক্যানটোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে সমাধান যোগ্য গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming)** বলা হয়।

অন্যকথায়, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হচ্ছে কোনো শর্তাধীনে ও সীমাবদ্ধতায় একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও অভীষ্ট ফাংশন গঠনের মাধ্যমে সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকগুলো নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগণিতীয় পদ্ধতি। যেমন-

এখানে, $x$, $y$ একাধিক চলক, রৈখিক অসমতা ও শর্ত $x + y \leq 8$, $2x + y \geq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ এবং অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + 3y$

**যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের শর্ত নিম্নরূপ:**

**a.** সমস্যার অভীষ্ট ফাংশন অবশ্যই থাকতে হবে এবং তা সিদ্ধান্ত চলকের রৈখিক (একঘাতিক) ফাংশন রূপে প্রকাশযোগ্য হতে হবে।

**b.** উৎপাদনে বিকল্প কার্যক্রম থাকতে হবে, যাতে সুবিধাজনক কার্যক্রম বেছে নেয়া যায়। যেমন: কোনো পণ্য দুইটি পৃথক যন্ত্রের দ্বারা উৎপাদন করা যেতে পারে। এক্ষেত্রে কোনটিতে অধিক সুবিধা পাওয়া যায় তা নির্ণয় করতে হবে।

**c.** সিদ্ধান্ত চলকগুলি একে অপরের সাথে সম্পর্কযুক্ত হবে যাতে তাদের মধ্যে গাণিতিক সম্পর্ক তৈরি করা যায়। চলকগুলি ঋণাত্মক হবে না।

**d.** সম্পদের বা উৎসের সীমাবদ্ধতা থাকতে হবে।

**e.** সীমাবদ্ধতা বা শর্তগুলি সিদ্ধান্ত চলকের দ্বারা রৈখিক সমীকরণ বা অসমতা আকারে প্রকাশযোগ্য হতে হবে।

**যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সুবিধা নিম্নরূপ:**

**a.** সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যান্ত্রিক দক্ষতার প্রকৃত ব্যবহার ও কাঙ্খিত লক্ষ্য অর্জন।

**b.** তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।

**c.** উৎপাদন ও বিপণনে সকল প্রকার দৃশ্যমান প্রতিবন্ধকতার সঙ্গে পরিচয় এবং তা অতিক্রমের পন্থা অবলম্বনের জ্ঞান অর্জন।

(iii) মানব সমাজের একটি বিশেষ প্রচলিত প্রবাদ "পরিকল্পনা হলো কাজের অর্ধেক"। সৃষ্টি লগ্ন থেকেই মানুষ পরিকল্পনা করে এগিয়েছে। যে সকল মানবজাতি

সঠিক পরিকল্পনা করতে পেরেছে তারা উন্নতির ধারা অব্যাহত রেখে পৃথিবীর বুকে টিকে আছে এবং যারা সঠিক পরিকল্পনা করতে ব্যর্থ হয়েছে তারা ধ্বংস হয়ে গেছে। যেকোনো বিষয়ে পরিকল্পনা করার জন্য তিনটি মূখ্য বিষয় প্রথমেই চিন্তায় এসে যায়।

**a.** আমি কী করতে চাই (অর্থাৎ উদ্দেশ্য কী)?

**b.** উদ্দেশ্য সফল করার জন্য মূলত কোন কোন জিনিসের উপর নির্ভরশীল হতে হবে? এবং

**c.** আমার সীমাবদ্ধতা কী কী?

যেমন: আমি আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়ার্ড-এ দেশকে চ্যাম্পিয়ন করার লক্ষ্যে একটি গণিত প্রশিক্ষণ একাডেমী করতে চাই। এই পরিকল্পনা সঠিকভাবে বাস্তবায়নের জন্য আমাকে প্রশিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের উপর নির্ভর করতে হবে এবং এখানে যে সকল সীমাবদ্ধতা চিন্তা করতে হবে তা হলো- অর্থের পরিমাণ, প্রশিক্ষক ও শিক্ষার্থীর সরবরাহ। আমার একাডেমী পরিচালনা করার ক্ষেত্রে যে ধারণা সর্বদা পোষণ করতে হবে তা হলো—সর্বনিম্ন পরিশ্রম বা বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা প্রাপ্তি বা সর্বোৎকৃষ্ট শিক্ষার্থী তৈরি অর্থাৎ maximum profit for minimum cost এটা মানুষ মাত্রেরই সহজাত আকাঙ্খা।

যে সকল পরিকল্পনাকে গাণিতিকরূপ (মডেল) দেওয়া যায় বিজ্ঞানের ভাষায় তাদের সঠিক পরিকল্পনা বলে। এই ধরণের সমস্যাকে সর্বপ্রথম 1930 খ্রিস্টাব্দে গাণিতিক রূপ (মডেল) দেন পর্যায়ক্রমে রাশিয়ার গণিতিবিদ লিওনিদ ক্যান্টোরোভিচ (Leonid Kantorovich) এবং আমেরিকান অর্থনীতিবিদ ওয়াসিলি লিওনটিফ (Wassily Leontief)। যা Linear programming (যোগাশ্রয়ী বা রৈখিক প্রোগ্রাম) নামে খ্যাত। তাদের এই যুগান্তকারী আবিস্কার ঐ সময়ে ব্যবসা ক্ষেত্রে, কারখানার উৎপাদনে এবং দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধে সৈন্যদের সঠিক ব্যবহার, সর্বনিম্ন খরচে তাদের রসদ যোগান ও প্রশিক্ষণ দানে ব্যাপকভাবে ব্যবহার হয়। Linear programming কে কাজে লাগিয়ে উৎপন্ন সূত্র আবিস্কারের জন্য 1975 খ্রিস্টাব্দে অর্থনীতিতে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন Leonid Kantorovich। **বর্তমান বিশ্বে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি অপরিহার্য বিষয়।** কেননা মানুষের দৈনন্দিন সঠিক খাদ্য গ্রহণ, প্রশিক্ষণ, শিল্প ও বাণিজ্য, উৎপাদন ও বিপণন, নির্মাণ এবং সমর ক্ষেত্র সহ সকল পরিকল্পনারই সঠিক পদ্ধতি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম। সুতরাং আধুনিক উৎপাদক ও বন্টন ব্যবস্থায় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম একটি অপরিহার্য হাতিয়ার।

**(iv) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা গঠন**

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম সমস্যা গঠনের জন্য কেবলমাত্র তিনটি ধাপ (step) অতিক্রম করতে হয়। যা নিম্নরূপ:

**প্রথম ধাপ:** সিদ্ধান্ত চলক (Decision variables) খুঁজে বের করে তাদের গাণিতিক নামকরণ।

**দ্বিতীয় ধাপ:** উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন (Objective function) সনাক্তকরণ ও সিদ্ধান্ত চলকের দ্বারা গাণিতিক রূপে প্রকাশ।

**তৃতীয় ধাপ:** শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints or restrictions) গুলিকে চিহ্নিত করে একঘাতিক (রৈখিক) সমীকরণ বা অসমতা আকারে রূপদান।

অতঃপর প্রথমে উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন, দ্বিতীয়ত শর্ত বা সীমাবদ্ধতা এবং সর্বশেষে সিদ্ধান্ত চলকের পরিচয় নির্দিষ্ট আকারে লিখলে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম পাওয়া যায়।

**দ্রষ্টব্য:** দ্বিতীয় ও তৃতীয় ধাপ এর যে কোনোটি আগে পরে করা যেতে পারে।

**উদাহরণ:** একজন ছাত্র 1500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 টি ফাঁকা সিডি ও 4টি বই এর সিডি ক্রয় করতে চায়। প্রতিটি ফাঁকা সিডির মূল্য 30 টাকা এবং প্রতিটি বই এর সিডির মূল্য 80 টাকা। সর্বোচ্চ সংখ্যক ফাঁকা সিডি ও বই এর সিডি ক্রয়ের জন্য একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম তৈরি কর।

**সমাধান:**

**প্রথম ধাপ:** মনে করি, ছাত্রটি $x$ সংখ্যক ফাঁকা সিডি এবং $y$ সংখ্যক বই এর সিডি ক্রয় করবে।

**দ্বিতীয় ধাপ (অভীষ্ট বা উদ্দেশ্য ফাংশন সনাক্তকরণ):** মনে করি উদ্দেশ্য ফাংশন $z$ তাহলে, $z = x + y$ যা সর্বোচ্চ হবে।

**তৃতীয় ধাপ (শর্ত বা সীমাবদ্ধতা সনাক্তকরণ):** শর্ত বা সীমাবদ্ধতা-1 : যেহেতু ফাঁকা সিডি কমপক্ষে 6

টি ও বই এর সিডি কমপক্ষে 4 টি ক্রয় করতে হবে কাজেই, $x \geq 6$ এবং $y \geq 4$.

শর্ত বা সীমাবদ্ধতা-2 : 1 টি ফাঁকা সিডির মূল্য 30 টাকা এবং 1টি বই এর সিডির মূল্য 80 টাকা, সুতরাং x সংখ্যক ফাঁকা ও y সংখ্যক বই এর সিডি ক্রয়ের জন্য খরচ হবে $(30x + 80y)$ টাকা যা 1500 টাকার চেয়ে বেশি হতে পারবে না, অর্থাৎ $30x + 80y \leq 1500$ বা $3x + 8y \leq 150$ এবার তিনটি ধাপকে একত্রে লিখলে পাই, Maximize, $z = x + y$

শর্তসমূহ: $3x + 8y \leq 150$

$x \geq 6,\ y \geq 4$ এটাই নির্ণেয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যা গঠন।

**(v) লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিমাত্রিক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিষয়ক সমস্যার সমাধান**

L.P.P. বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। দ্বিমাত্রিক বা দুইচলক বিশিষ্ট L.P.P. সমাধানের জন্য অধিকতর সহজ পদ্ধতি হলো লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান। এখানে আমরা লেখচিত্র পদ্ধতি নিয়েই কেবল আলোচনা করব। এ পদ্ধতিতে সমাধানের জন্য—

**a.** প্রথমে অসমতাগুলি সমীকরণে রূপান্তর করে ছক কাগজে তাদের লেখচিত্র অঙ্কন করে অসমতাগুলির সম্ভাব্য সমাধান এলাকা (Feasible solution region) চিহ্নিত করতে হবে।

**b.** সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করতে হবে।

**c.** কৌণিক বিন্দুগুলিতে পর্যায়ক্রমে অভীষ্ট বা উদ্দেশ্য ফাংশনের মান নির্ণয় করতে হবে। অত:পর মানসমূহের মধ্যে চূড়ান্ত মান (Optimum Value) অর্থাৎ সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানই যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমাধান বলে বিবেচিত হবে।

**(vi) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের প্রয়োজনীয়তা:**

সর্বনিম্ন বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন মানুষের সহজাত আকাঙ্খা। দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় সেনাবাহিনীর রসদ ক্রয়, অস্ত্র ক্রয়, পরিবহন ব্যবস্থাপনা ও দায়িত্ব বণ্টন কাজের সর্বোচ্চ সুবিধা লাভের জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের প্রয়োজন বিশেষভাবে অনুভূত হয়। রাশিয়ার গণিতবিদ ক্যান্টোরোভিচ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মডেল উদ্ভাবন করেন যা সর্বনিম্ন বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ লাভ একাধিক চলরাশিযুক্ত একাধিক সরলরেখার মাধ্যমে দেখানো যায়। তাই মানব জাতির সামগ্রিক কল্যানে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বিশেষভাবে প্রয়োজন।

**(vii) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার:** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming) এর ব্যবহার ও ক্ষেত্র ব্যাপক।

ইতোমধ্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের ব্যবহার সম্পর্কে মোটামুটি একটি ধারণা দেওয়া হয়েছে।

এখানে সংক্ষিপ্ত পরিসরে বিভিন্ন নাম অনুযায়ী ব্যবহার বিষয়ে আলোচনা করা হলো।

**a. খাদ্য সমস্যা:** সুশিক্ষিত সভ্য এই আধুনিক সমাজের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা হলো খাদ্য সমস্যা। একজন অথবা কোনো জনগোষ্ঠী দৈনিক কি পরিমাণ খাদ্য গ্রহণ করলে তাদের সুষম খাদ্য গ্রহণ নিশ্চিত করা যায়। পুষ্টিগুণ বিবেচনায় সর্বনিম্ন খরচে সঠিক খাদ্য তালিকা তৈরি ও তা সরবরাহ করার জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

**b. শিক্ষা বা প্রশিক্ষণ সমস্যা:** কোনো শিক্ষা প্রতিষ্ঠান অথবা প্রশিক্ষণ একাডেমী হতে সর্বনিম্ন ব্যয়ে সর্বাপেক্ষা বেশি (চাহিদা অনুযায়ী) সাফল্য প্রাপ্ত ছাত্র অথবা প্রশিক্ষণার্থী পাবার লক্ষ্যে বিভিন্ন তথ্য ও উপাত্ত (যেমন : একজন শিক্ষক বা প্রশিক্ষক কতজনকে শিক্ষা দিতে পারেন, তাদের মান অনুযায়ী বেতন ও ভাতা, পরীক্ষাগার ও অন্যান্য প্রশিক্ষণ যন্ত্রের সীমাবদ্ধতা, শিক্ষার্থী সরবরাহের সীমাবদ্ধতা ইত্যাদি) কাজে লাগিয়ে যে গাণিতিক মডেল তৈরি করা হয় সেটাও যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

**c. উৎপাদন ও নির্মাণ সমস্যা:** কারখানা বা শিল্পপ্রতিষ্ঠানে সম্পদের সীমাবদ্ধতা, শ্রমিকের ভিন্নতা (যেমন: বিভিন্ন প্রকারের শ্রমিক থাকে যাদের কর্মদক্ষতা ও মজুরী কাঠামো ভিন্ন ভিন্ন হয়), যন্ত্রের কার্যক্ষমতা, সময়ের সীমাবদ্ধতা, উৎপাদিত পণ্যের চাহিদা ও যোগান নিশ্চিত করা একটি অত্যন্ত জটিল কাজ। এই সমস্যার সম্পূর্ণ সঠিক সমাধান করতে পারলে তবেই সর্বনিম্ন ব্যয়ে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন সম্ভব। আর এই গুরুত্বপূর্ণ কাজেও ব্যবহার হয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

**d. পরিবহণ সমস্যা:** বাংলাদেশ হতে উৎপন্ন তৈরি পোশাক বিশ্বের বিভিন্ন দেশে ব্যবসার উদ্দেশ্যে পাঠাতে হয়। মনে করি, আমাদের কোনো কোম্পানির ঢাকা, খুলনা, রাজশাহী ও চট্টগ্রাম এই

চারটি স্থানে কারখানা আছে। এখন ভারতে ঐ কোম্পানীর উৎপাদিত পোশাক আকাশপথ বা পানিপথ বা সড়কপথ বিভিন্ন মাধ্যমে পাঠানো যায় এবং সেক্ষেত্রে খরচও ভিন্ন ভিন্ন। ভারতের চাহিদা অনুযায়ী পণ্য পাঠানো এবং খরচ সর্বনিম্ন রেখে ব্যবসার মুনাফা সর্বোচ্চ রাখার জন্যও গাণিতিক হিসাব অপরিহার্য। আর এক্ষেত্রে ব্যবহার হয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

**e. যুদ্ধক্ষেত্র:** রসদ ও সৈন্যবাহিনী এক স্থান হতে অন্য স্থানে স্থানান্তর, স্থান বিবেচনায় সৈন্য ব্যবহার ও সীমাবদ্ধতার সূক্ষ্ম হিসাব সূচারুরূপে পরিচালনার জন্যও যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

2. (i) দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + 3y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \le 10$, $x + y \le 6, x \le 4, x, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

অতএব আমরা পাই, $x + 2y = 10$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (i)$$

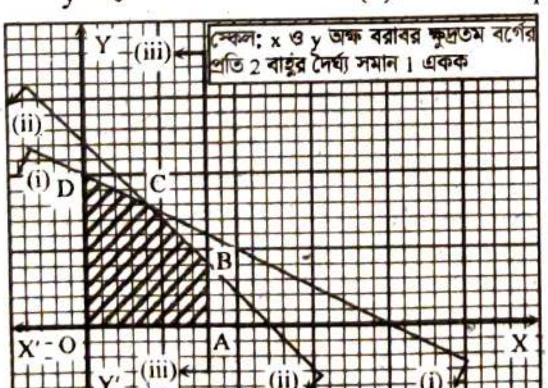
$$x + y = 6$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (ii)$$

$$x = 4 \quad \cdots\cdots\cdots (iii)$$

$$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iv)$$

$$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (v)$$




লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। যেখানে O(0, 0) হচ্ছে মূল বিন্দু।

চিত্রানুসারে, A, B, C ও D যথাক্রমে (iii) ও (v); (ii) ও (iii); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iv) এর ছেদ বিন্দু।

তাহলে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABCDO যা চিত্রে ছায়া ঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে-

O(0, 0), A(4, 0), B(4, 2), C(2, 4) এবং D(0, 5)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$

A(4, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 0 = 8$

B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$

C(2, 4) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 16$

D(0, 5) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 5 = 15$

স্পষ্টত: C(2, 4) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি C(2, 4) এবং সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 16$ **(Ans.)**

(ii) দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন $z = 12x + 10y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $2x + y \le 90$, $x + 2y \le 80$, $x + y \le 50$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

অতএব আমরা পাই,

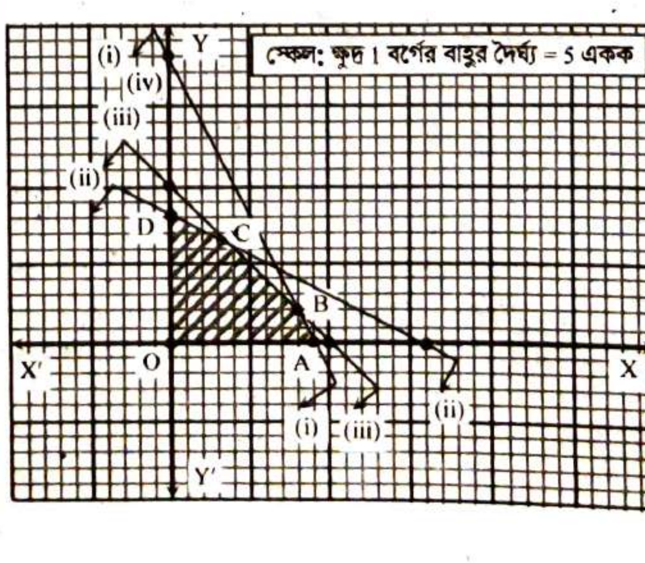
$$2x + y = 90 \Rightarrow \frac{x}{45} + \frac{y}{90} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (i)$$

$$x + 2y = 80 \Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{40} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (ii)$$

$$x + y = 50 \Rightarrow \frac{x}{50} + \frac{y}{50} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (iii)$$

$$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iv)$$

$$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (v)$$



লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B, C ও D যথাক্রমে (i) ও (v); (i) ও (iii); (ii) ও (iii) এবং (ii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু O মূলবিন্দু।

তাহলে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে-

O(0, 0), A(45, 0), B(40, 10), C(20, 30) এবং D(0, 40)

এখন, O(0, 0) বিন্দুতে $z = 12 \times 0 + 10 \times 0 = 0$

A(45, 0) বিন্দুতে $z = 12 \times 45 + 10 \times 0 = 540$

B(40, 10) বিন্দুতে $z = 12 \times 40 + 10 \times 10 = 580$

C(20, 30) বিন্দুতে $z = 12 \times 20 + 10 \times 30 = 540$

D(0, 40) বিন্দুতে $z = 12 \times 0 + 10 \times 40 = 400$

স্পষ্টত B(40, 10) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি B(40, 10) এবং সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 580$ **(Ans.)**

**(iii)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 4x + 6y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y = 5, x \geq 2, y \leq 4, x, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলো এবং প্রদত্ত অপর সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

এখানে,

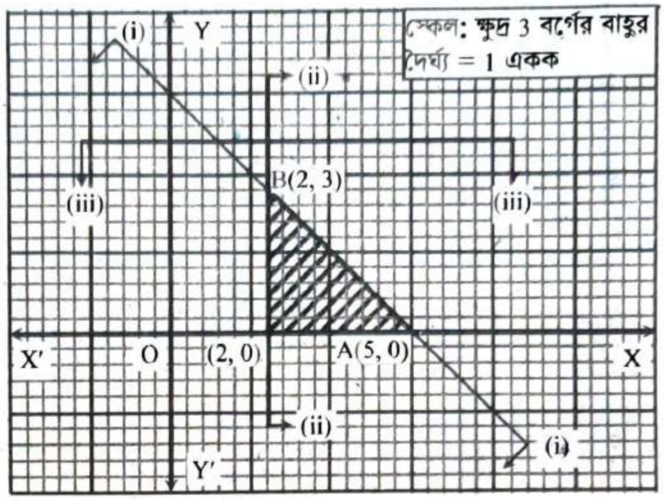
$x + y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ ……… (i)

$x = 2$ ……… (ii)

$y = 4$ ……… (iii)

$x = 0$ ……… (iv)

$y = 0$ ……… (v)




লেখচিত্রে দেখা যায়,

সমীকরণ (i) এর সকল বিন্দু; সমীকরণ (ii) এর সকল বিন্দু ও এই রেখার যে পাশে মূল বিন্দু (0, 0) অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দু; এবং সমীকরণ (iii) এর সকল বিন্দুসহ ঐ রেখার যে পাশে মূল বিন্দু O অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সংশ্লিষ্ট অসমতাগুলো সত্য।

চিত্রানুসারে, (i) নং রেখার কালি করা AB রেখাংশই সম্ভাব্য সমাধান এলাকা। কেননা এই অংশটুকুই প্রদত্ত সকল সমীকরণ ও অসমতা সিদ্ধ করে।

এখানে, A হচ্ছে (i) ও (v) এর ছেদ বিন্দু।

B হচ্ছে (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দু।

A এর স্থানাঙ্ক (5, 0) এবং B এর স্থানাঙ্ক (2, 3)

এখন A(5, 0) বিন্দুতে $z = 4 \times 5 + 6 \times 0 = 20$

B(2, 3) বিন্দুতে $z = 4 \times 2 + 6 \times 3 = 26$

স্পষ্টত: B(2, 3) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

সুতরাং সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি B(2, 3) এবং সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 26$ **(Ans.)**

**(iv)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x, y \geq 0$

প্রথমে, অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \leq 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$x + y = 7$ বা $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ……… (i)

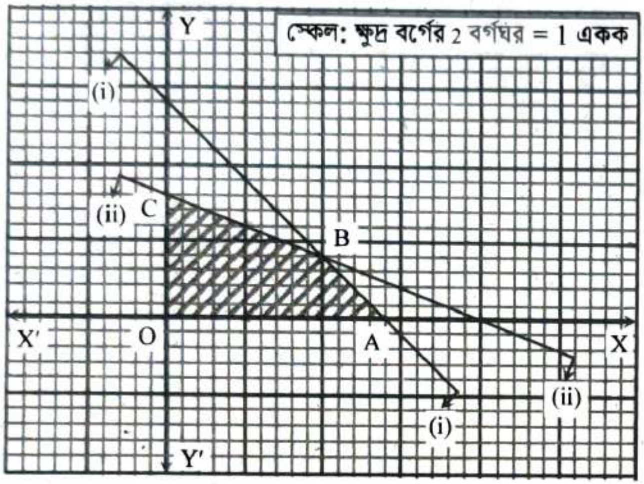
$2x + 5y \leq 20$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$2x + 5y = 20$ বা $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (ii)

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ …… (iii)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ …… (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায়, সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রে A, B ও C যথাক্রমে (i) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO যা চিত্রে, ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তাহলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে-

O(0, 0), A(7, 0), B(5, 2) এবং C(0, 4)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(7, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(5, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 5 + 4 \times 2 = 23$

এবং C(0, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 4 = 16$

**স্পষ্টত:** B(5, 2) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়। অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি B(5, 2) এবং সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 23$ **(Ans.)**

**(v)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + y$

এবং **সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ:** $x + 2y \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x - y \leq 2$, $x - 2y \leq 10$, $x, y \geq 0$

প্রথমে অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি, $x + 2y \leq 10$ এর জন্য প্রাপ্ত সমীকরণ

$x + 2y = 10$ বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ ……… (i)

$x + y \leq 6$ এর জন্য প্রাপ্ত সমীকরণ

$x + y = 6$ বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ ……… (ii)

$x - y \leq 2$ এর জন্য প্রাপ্ত সমীকরণ

$x - y = 2$ বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ ……… (iii)

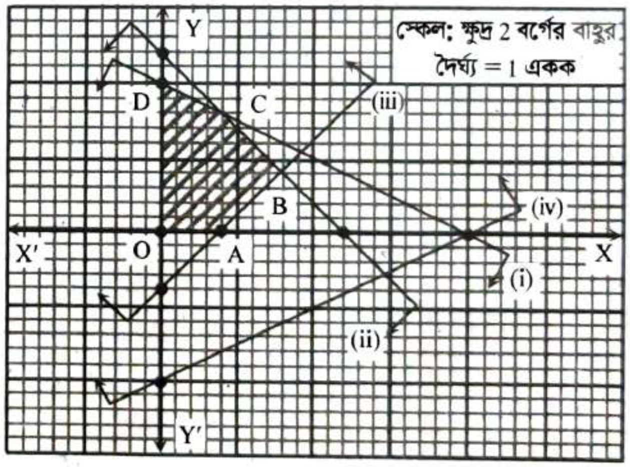
$x - 2y \leq 10$ এর জন্য প্রাপ্ত সমীকরণ

$x - 2y = 10$ বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1$ ……… (iv)

$x \geq 0$ এর জন্য প্রাপ্ত সমীকরণ $x = 0$ …… (v)

$y \geq 0$ এর জন্য প্রাপ্ত সমীকরণ $y = 0$ …… (vi)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায়, সমীকরণ (i), (ii), (iii) ও (iv) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B, C ও D যথাক্রমে (iii) ও (vi); (ii) ও (iii); (i) ও (ii) ও (i) ও (v) এর ছেদ বিন্দু। এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে, O(0, 0), A(2, 0), B(4, 2), C(2, 4) এবং D(0, 5)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 0 = 2$

A(2, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 0 = 4$

B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 2 = 10$

$C(2, 4)$ বিন্দুতে $z = 2 \times 2 + 4 = 8$

এবং $D(0, 5)$ বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 5 = 5$

স্পষ্টত: $B(4, 2)$ বিন্দুতে $z$ এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

সুতরাং সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি $B(4, 2)$

এবং সর্বোচ্চমান $z_{max} = 10$ **(Ans.)**

**(vi)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 2y$

এবং শর্তসমূহ $2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12, x, y \geq 0$

প্রথমে, অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$2x + y \leq 8$ এর জন্য রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1 \cdots \cdots \cdots (i)$

$2x+3y \leq 12$ এর জন্য রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \cdots \cdots \cdots (ii)$

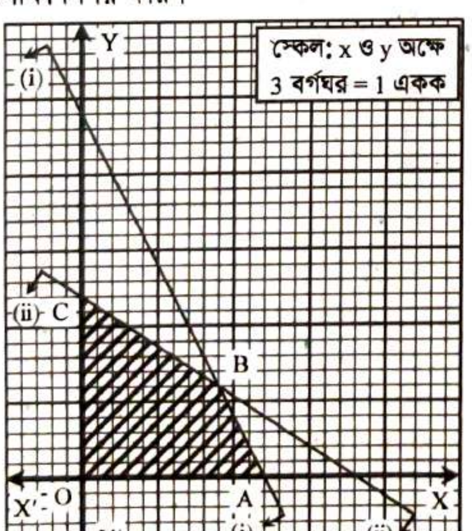
$x \geq 0$ এর জন্য রূপান্তরিত সমীকরণ

$x = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (iii)$

এবং $y \geq 0$ এর জন্য রূপান্তরিত সমীকরণ

$y = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (iv)$

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু $O(0, 0)$ অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (i) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। এখানে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে, $O(0, 0), A(4, 0), B(3, 2)$ এবং $C(0, 4)$

এখন $O(0, 0)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 0 = 0$

$A(4, 0)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 2 \times 0 = 12$

$B(3, 2)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$

$C(0, 4)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

স্পষ্টত: $B(3, 2)$ বিন্দুতে $z$ এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়। অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি $B(3, 2)$ এবং মানটি $z_{max} = 13$ **(Ans.)**

**(vii)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 4y$

এবং শর্তসমূহ $x + y \leq 450, 2x + y \leq 600,$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রথমে অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।

$x + y \leq 450$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{450} + \frac{y}{450} = 1 \cdots \cdots \cdots (i)$

$2x + y \leq 600$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

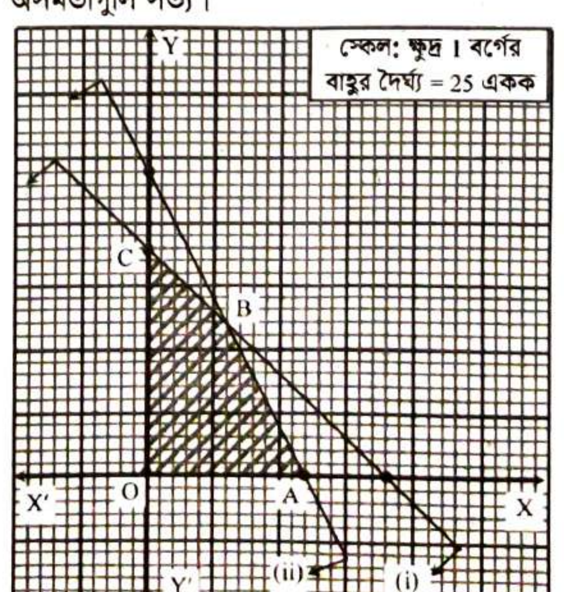
$\frac{x}{300} + \frac{y}{600} = 1 \cdots \cdots \cdots (ii)$

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ .......... (iii)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ .......... (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু $O(0, 0)$ অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।



চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (ii) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে—

O(0, 0), A(450, 0), B(150, 300) এবং C(0, 450)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(450, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 450 + 4 \times 0 = 1350$

B(150, 300) বিন্দুতে $z = 3 \times 150 + 4 \times 300 = 1650$

C(0, 450) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 450 = 1800$

স্পষ্টত: C(0, 450) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

সুতরাং সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি C(0, 450) এবং সর্বোচ্চমান $z_{max} = 1800$ **(Ans.)**

**(viii)** দেওয়া আছে, $Z = \text{Max}\ (3x + 2y)$

সীমাবদ্ধতার শর্ত: $x + y \geq 1;\ y - 5x \leq 0;\ 5y - x \geq 0;$
$x - y \geq -1;\ x + y \leq 6;\ x \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$x + y = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1 \cdots\cdots$ (i)

$y - 5x = 0 \therefore y = 5x \cdots\cdots$ (ii)

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | 0 | 5 | 10 |

$5y - x = 0$

$\therefore y = \frac{x}{5} \quad \cdots\cdots\cdots$ (iii)

| x | 0 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 2 |

$x - y = -1$

$\therefore \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \cdots\cdots$ (iv)

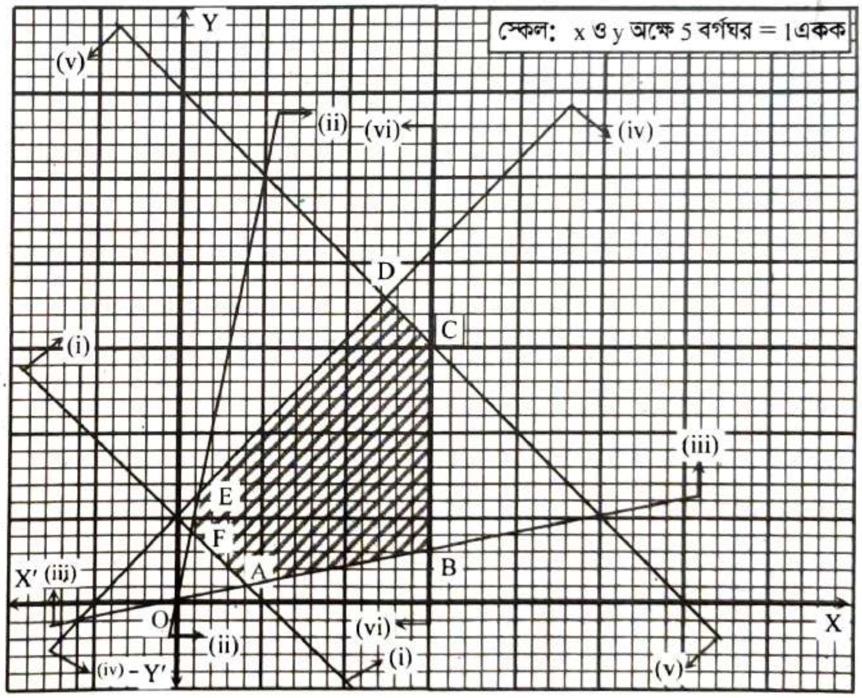
$x + y = 6$

$\therefore \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots\cdots$ (v)

$x = 3 \cdots\cdots$ (vi)

$x = 0 \cdots\cdots$ (vii)

$y = 0 \cdots\cdots$ (viii)




লেখচিত্রে দেখা যায় (iv), (v) এবং (vi) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য এদের আনুষঙ্গিক (Corresponding) অসমতাগুলো সত্য। (i) এর সকল বিন্দু এবং (i) এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \geq 1$ সত্য। আবার (ii) নং রেখার সকল বিন্দু এবং (ii) এর যে পাশে y অক্ষ আছে তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $y - 5x \leq 0$ সত্য। এবং (iii) নং রেখার সকল বিন্দু ও (iii) এর যে পাশে x অক্ষ আছে তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $5y - x \geq 0$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCDEF।

A হচ্ছে (i) এবং (iii) এর ছেদ বিন্দু। $\therefore A\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$

B " (iii) " (vi) " " " $\therefore B\left(3, \frac{3}{5}\right)$

C " (v) " (vi) " " " $\therefore C\ (3, 3)$

D " (iv) " (v) " " " $\therefore D\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

E " (ii) " (iv) " " " $\therefore E\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$

F " (i) " (ii) " " " $\therefore F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

এখন

$A\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$ এর জন্য, $z = \left(3 \times \frac{5}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) = 2.83$

$B\left(3, \frac{3}{5}\right)$ " " $z = (3 \times 3) + \left(2 \times \frac{3}{5}\right) = 10.2$

$C(3, 3)$ " " $z = (3 \times 3) + (2 \times 3) = 15$

$D\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ " " $z = \left(3 \times \frac{5}{2}\right) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = 14.5$

$E\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ " " $z = \left(3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2 \times \frac{5}{4}\right) = 3.25$

$F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ " " $z = \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{5}{6}\right) = 2.17$

স্পষ্টত C(3, 3) এর জন্য z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়। $\therefore z_{max} = 15$ **(Ans.)**

**(ix)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $2x + y \le 8$, $2x + 3y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$

প্রথমে, অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।

$2x + y \le 8$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = \cdots\cdots$ (i)

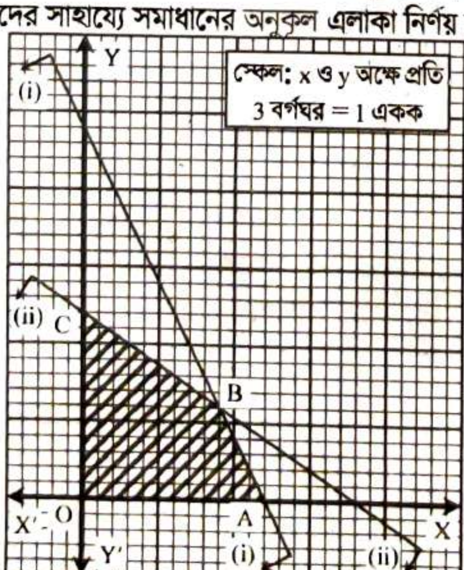
$2x + 3y \le 12$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \cdots$ (ii)

$x \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0 \cdots\cdots$ (iii)

$y \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0 \cdots\cdots$ (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রানুসারে A, B ও C যথাক্রমে (i) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO, যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে, O(0, 0), A(4, 0), B(3, 2) এবং C(0, 4)

এখানে, O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 0 = 0$

A(4, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 0 = 12$

B(3, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 3 + 2 = 11$

এবং C(0, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 = 4$

স্পষ্টত A(4, 0) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

সুতরাং সর্বোচ্চমানের বিন্দুটি A(4, 0) এবং সর্বোচ্চ মান, $z_{max} = 12$. **(Ans.)**

**(x)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন, $F = y - 2x$

শর্তগুলি : $x + 2y \le 6, x + y \ge 4, x, y \ge 0$

F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা চিহ্নিত করি।

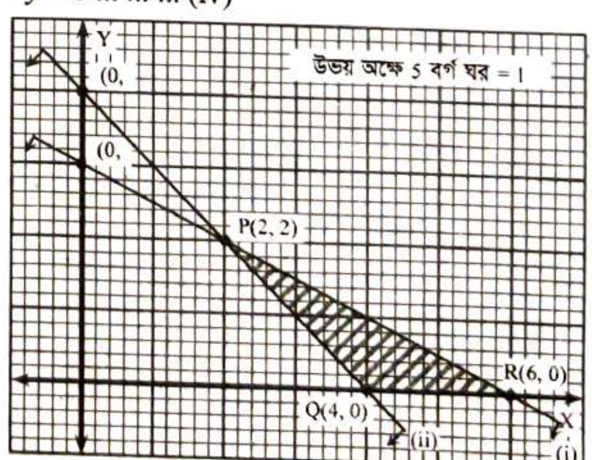
আমরা পাই, $x + 2y = 6$

বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$x + y = 4$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$x = 0 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

$y = 0 \ldots\ldots\ldots$ (iv)




লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

(ii) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

আবার (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু P(2, 2)

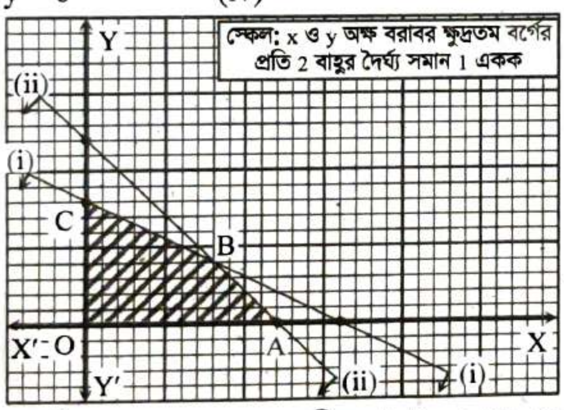
(iv) ও (ii) এর ছেদবিন্দু Q(4, 0)
(iv) ও (i) এর ছেদবিন্দু R (6, 0)
$\therefore$ নির্ণেয় কৌণিক বিন্দু P(2, 2), Q(4, 0) ও R(6, 0)
এখন P(2, 2) বিন্দুতে $F = 2 - 2.2 = 2 - 4 = -2$
Q (4, 0) বিন্দুতে $F = 0 - 2.4 = 0 - 8 = -8$
R (6, 0) বিন্দুতে $F = 0 - 2.6 = 0 - 12 = -12$
$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান $-2$ **(Ans.)**

**(xi)** দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন $z = 2x + 3y$ এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ:
$x + 2y \le 8, x + y \le 6, x, y \ge 0$
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি। অতএব আমরা পাই,

$$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots (i)$$

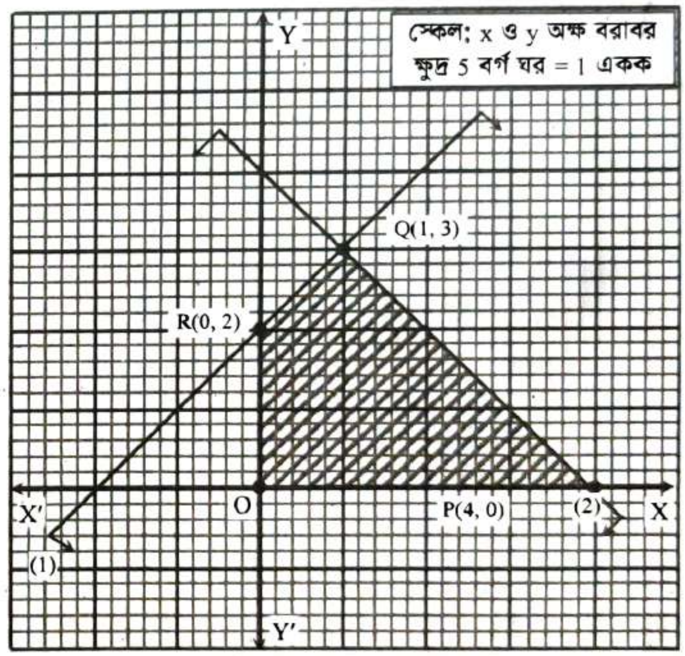
$$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots\cdots (ii)$$

$x = 0 \cdots\cdots\cdots (iii)$
$y = 0 \cdots\cdots\cdots (iv)$




লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। যেখানে O(0, 0) হচ্ছে মূল বিন্দু।
চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (ii) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু।
তাহলে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABCO যা চিত্রে ছায়া ঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে-
O(0, 0), A(6, 0), B(4, 2) এবং C(0, 4)
এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
A(6, 0) বিন্দুতে $z = 2 \times 6 + 3 \times 0 = 12$
B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$
C(0, 4) বিন্দুতে $z = 2 \times 0 + 3 \times 4 = 12$
স্পষ্টত B(4, 2) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।
$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 14$ **(Ans.)**

**3.** দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$, $g(x) = lx + my + n$
এখানে, $a = 1, b = -1, c = 2$ হলে $f(x) = x - y + 2$
এবং $l = 1, m = 1, n = -4$ হলে $g(x) = x + y - 4$
অভীষ্ট ফাংশন: $z = x + 2y$
শর্ত: $x - y + 2 \ge 0$ বা, $x - y > -2$
$x + y - 4 \le 0$ বা, $x + y \le 4$
$x \ge 0, y \ge 0$
প্রাপ্ত অসমতাগুলির সমাধানযোগ্য সমীকরণ,
$x - y = -2 \ldots\ldots (i)$
$x + y = 4 \ldots\ldots (ii)$
$x = 0 \ldots\ldots (iii)$
$y = 0 \ldots\ldots (iv)$
গ্রাফ কাগজে i, ii, iii ও iv নম্বর রেখা অঙ্কন করি।




সমীকরণ (1) $\Rightarrow 0 - 0 \ge -2$ সত্য
সমীকরণ (2) $\Rightarrow 0 + 0 \le 4$ সত্য
$\therefore$ সমাধান অঞ্চল সরলরেখা i, ii, iii, iv এর যেদিক মূলবিন্দু সেদিকে অবস্থিত। সমাধান অঞ্চল: OPQR
**P বিন্দু নির্ণয়:** (ii) ও (iv) নং রেখার ছেদবিন্দু:
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(4, 0)$$
**Q বিন্দু নির্ণয়:** i ও ii নং রেখার ছেদবিন্দু:
$$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(1, 3)$$
**R বিন্দু নির্ণয়:** i ও iii নং রেখার ছেদবিন্দু:
$$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(0, 2)$$
**O বিন্দু নির্ণয়:** iii ও iv নং রেখার ছেদবিন্দু O(0, 0)
এখন সমাধান অঞ্চল হতে প্রাপ্ত OPQR বিন্দুগুলো $z = x + 2y$ এ বসিয়ে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করি।

| | O(0, 0) | P(4, 0) | Q(1, 3) | R(0, 2) |
|---|---|---|---|---|
| $z = x + 2y$ | 0 | 4 | 7 | 4 |

$\therefore$ Q(1, 3) বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ 7 হয়। **(Ans.)**

**4.** দেওয়া আছে, $f = 2x + 3y$, $g = 5x + 3y$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $2x + 3y \le 12$, $5x + 3y \ge 15$

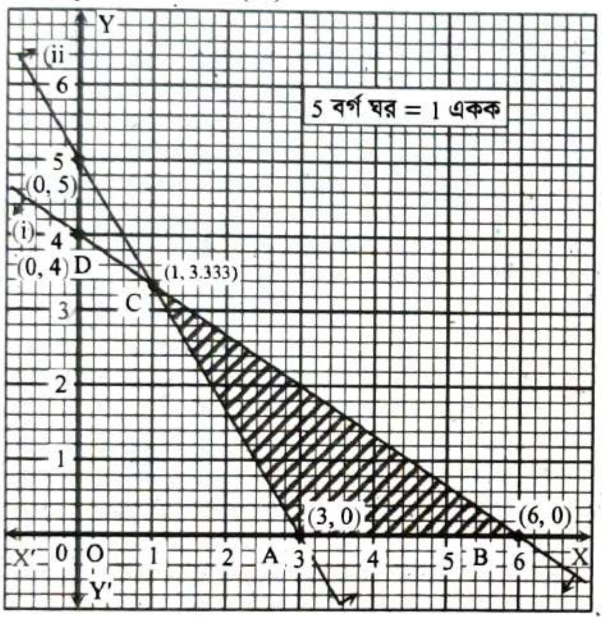
এবং $x, y \ge 0$

অসমতাগুলিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি, $2x + 3y = 12$ বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... (i)

$5x + 3y = 15$ বা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ ... ... ... (ii)

$x = 0$ ... ... ... (iii)

$y = 0$ ... ... ... (iv)




লেখচিত্রে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি ABC যা ত্রিভুজাকৃতির। **(Ans.)**

শর্তে $g \ge 15$ এর স্থলে $g \le 15$ বিবেচনা করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি হবে OACD যা একটি চতুর্ভুজ।

**5. (i)** দেওয়া আছে, $z = -x + 2y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $-x + 3y \le 10$

$x + y \le 6$

$x - y \le 2$

$x \ge 0, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$-x + 3y = 10$

$\Rightarrow \frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1$ ... ... (i)

$x + y = 6$

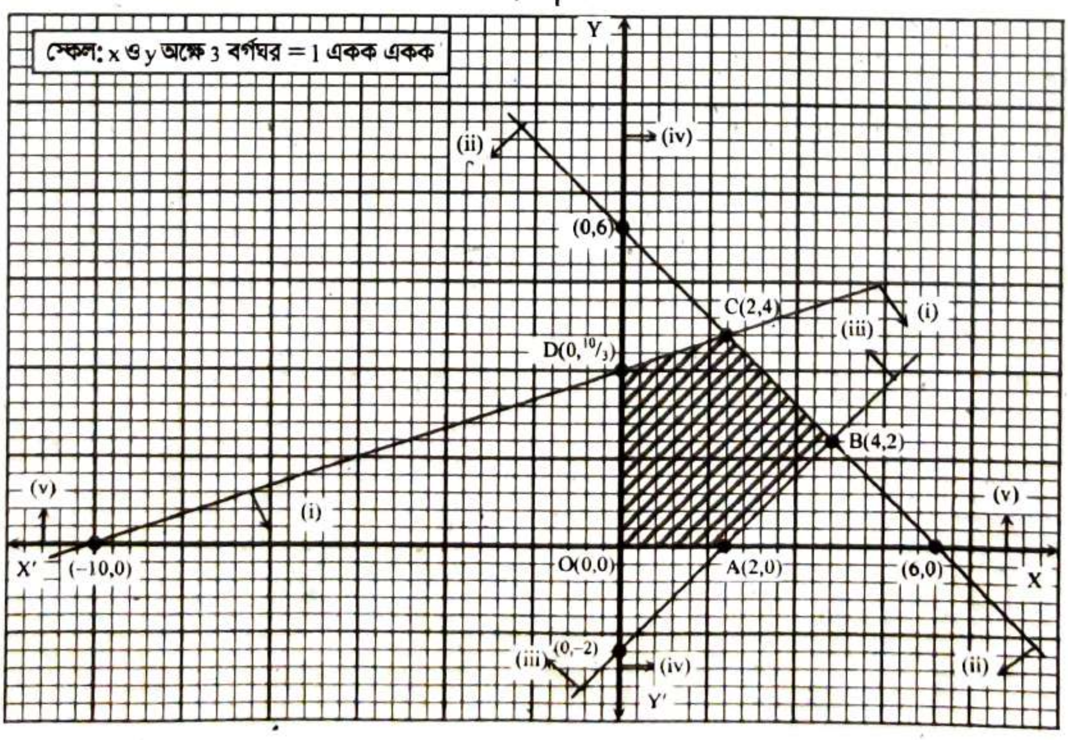
$\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ ... ... (ii)

$x - y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ ... ... (iii)

$x = 0$ ... ... (iv)

$y = 0$ ... ... (v)



লেখচিত্রে দেখা যায় (i), (ii), (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য এদের অনুষঙ্গিক অসমতাগুলো সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABCD।

যেখানে O হচ্ছে মূল বিন্দু। $\therefore$ O (0, 0), A(2, 0)

B হচ্ছে (ii) এবং(iii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore$ B(4, 2)

C " (i) " (ii) " "

$\therefore$ C(2, 4) এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0$

A(2, 0) " $z = -2 + 0 = -2$

B(4, 2) " $z = -4 + (2 \times 2) = 0$

C(2, 4) " $z = -2 + (2 \times 4) = 6$

এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ " $z = -0 + \left(2 \times \frac{10}{3}\right) = 6.67$

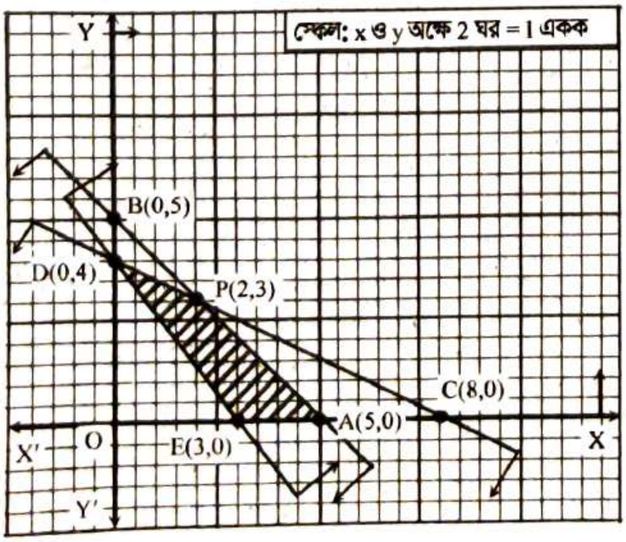
স্পষ্টত A(2, 0) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore z_{min} = -2$ **(Ans.)**

**(ii)** $Z = 2x - y$ **এর সর্বনিম্নকরণ:**

$x + y \leq 5, x + 2y \leq 8, 4x + 3y \geq 12, x, y \geq 0$

$x + y = 5$ হতে প্রাপ্ত A(5, 0), B(0, 5) এবং $x + 2y = 8$ হতে প্রাপ্ত C(8, 0), D(0, 4) ও $4x + 3y = 12$ হতে প্রাপ্ত E(3, 0), D(0, 4) বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজের দুই বর্গ = 1 একক স্কেলে স্থানাঙ্কায়িত করি ও AB, CD, ED সরলরেখাত্রয় অঙ্কন করি।




AB রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দু পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $x + y \leq 5$, CD রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দু পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $x + 2y \leq 8$ ED রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $4x + 3y \geq 12$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তগুলো সিদ্ধ করে এরূপ সকল বিন্দু সেট EAPD চতুর্ভুজের বাহু বা অভ্যন্তরে অবস্থান করে।

E (3, 0), A (5, 0), D (0, 4) ও P (2, 3)

এখন, (3, 0) বিন্দুতে $z = (2 \times 3) - 0 = 6$

(5, 0) বিন্দুতে $z = (2 \times 5) - 0 = 10$

(0, 4) বিন্দুতে $z = (2 \times 0) - 4 = -4$

(2, 3) বিন্দুতে $z = (2 \times 2) - 3 = 1$

স্পষ্টত D (0, 4) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore z_{min} = -4$ **(Ans.)**

**(iii)** দেওয়া আছে, $z = -x + y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $-x + 3y \leq 10$

$x + y \leq 6$

$x - y \leq 2$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

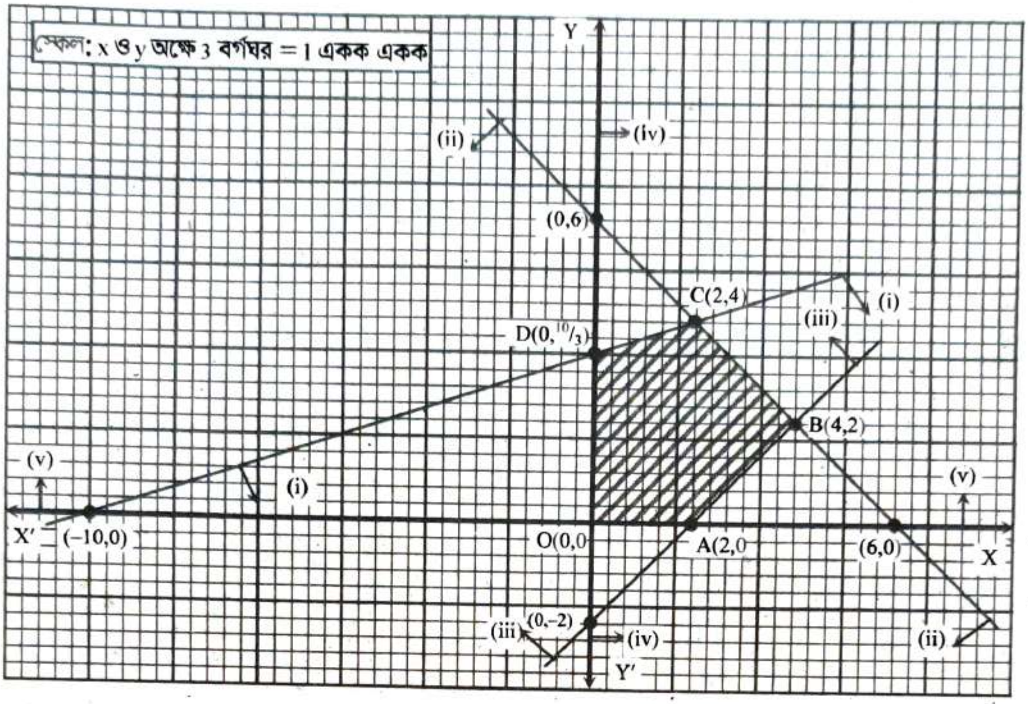
$$-x + 3y = 10 \Rightarrow \frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1 \quad \cdots \cdots (i)$$

$$x + y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \quad \cdots \cdots (ii)$$

$$x - y = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \cdots \cdots (iii)$$

$$x = 0 \quad \cdots \cdots (iv)$$

$$y = 0 \quad \cdots \cdots (v)$$




লেখচিত্রে দেখা যায় (i), (ii), (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য এদের অনুষঙ্গিক অসমতাগুলো সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABCD।

যেখানে O হচ্ছে মূল বিন্দু।

$\therefore$ O (0, 0), A(2, 0)

B হচ্ছে (ii) এবং(iii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ B(4, 2)

C হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু

$\therefore$ C(2, 4) এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0$

A(2, 0) " $z = -2 + 0 = -2$

B(4, 2) " $z = -4 + 2 = -2$

C(2, 4) " $z = -2 + 4 = 2$

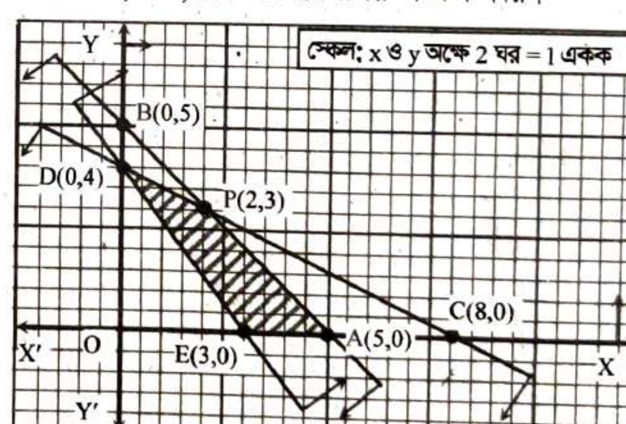
এবং $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ " $z = 0 + \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

স্পষ্টতঃ A(2, 0) ও B(4, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়। $z_{min} = -2$ **(Ans.)**

(iv) এখানে অভীষ্ট ফাংশন, $z = \text{Min}(4x - y)$

শর্তসমূহ: $x + y \leq 5$, $x + 2y \leq 8$, $4x + 3y \geq 12$, $x, y \geq 0$

$x + y = 5$ হতে প্রাপ্ত A(5, 0), B(0, 5) এবং $x + 2y = 8$ হতে প্রাপ্ত C(8, 0), D(0, 4) ও $4x + 3y = 12$ হতে প্রাপ্ত E(3, 0), D(0, 4) বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজের দুই বর্গ = 1 একক স্কেলে স্থানাঙ্কায়িত করি ও AB, CD, ED সরলরেখাত্রয় অঙ্কন করি।




AB রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দু পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $x + y \leq 5$,

CD রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দু পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $x + 2y \leq 8$

ED রেখাস্থ ও তার মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু সেটের জন্য $4x + 3y \geq 12$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তগুলো সিদ্ধ করে এরূপ সকল বিন্দু সেট EAPD চতুর্ভুজের বাহু বা অভ্যন্তরে অবস্থান করে।

E (3, 0), A (5, 0), D (0, 4) ও P (2, 3)

এখন, (3, 0) বিন্দুতে $z = 4 \times 3 - 0 = 12$

(5, 0) বিন্দুতে $z = 4 \times 5 - 0 = 20$

(0, 4) বিন্দুতে $z = 4 \times 0 - 4 = -4$

(2, 3) বিন্দুতে $z = 4 \times 2 - 3 = 5$

স্পষ্টত D (0, 4) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন মান $z = -4$ **(Ans.)**

**(v)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x_1 + 2x_2$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x_1 + 2x_2 \geq 4$

$2x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x_1 + 2x_2 \geq 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1$ ....(i)

$2x_1 + x_2 \geq 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} = 1$ ....(ii)

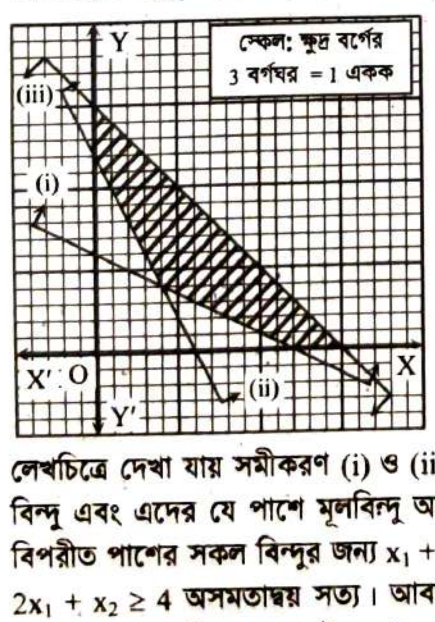
$x_1 + x_2 \leq 5$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} = 1$ ....(iii)

$x_1 \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x_1 = 0$ ....(iv)

$x_2 \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x_2 = 0$ ....(v)

এখন ছক কাগজে x-অক্ষের স্থলে $x_1$-অক্ষ এবং y-অক্ষের স্থলে $x_2$-অক্ষ বিবেচনা করে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করি এবং এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x_1 + 2x_2 \geq 4$ ও $2x_1 + x_2 \geq 4$ অসমতাদ্বয় সত্য। আবার সমীকরণ (iii) এর সকল বিন্দু এবং এই রেখার যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x_1 + x_2 \leq 5$ অসমতা সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B, C, D ও E বিন্দুগুলি যথাক্রমে (i) ও (v); (iii) ও (v); (iii) ও (iv) এবং (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দু এবং সকল অসমতা দ্বারা সিদ্ধ করে অর্থাৎ সমাধানের অনুকূল এলাকা ABCDEA যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। এখানে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে A(4, 0), B(5, 0), C(0, 5), D(0, 4) এবং $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

এখন, A(4, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 2 \times 0 = 15$

B(5, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 5 + 2 \times 0 = 15$

C(0, 5) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 5 = 10$

D(0, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

এবং $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে $z_{min} = 3 \times \frac{4}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$.

স্পষ্টত $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়। অতএব সর্বনিম্ন মানের বিন্দুটি $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ এবং সর্বনিম্ন মানটি $z_{min} = \frac{20}{3}$ **(Ans.)**

**(vi)** দেওয়া আছে, $z = 3x + 5y$

এবং শর্তসমূহ: $x \leq 2y + 2$ বা, $x - 2y \leq 2$

$x \geq 6 - 2y$ বা, $x + 2y \geq 6$

$y \leq x$ বা, $x - y \geq 0$

$x \leq 6$

$x \geq 0$

এবং $y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।

$x - 2y \leq 2$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$ ... ... (i)

$x + 2y \geq 6$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ ... ... (ii)

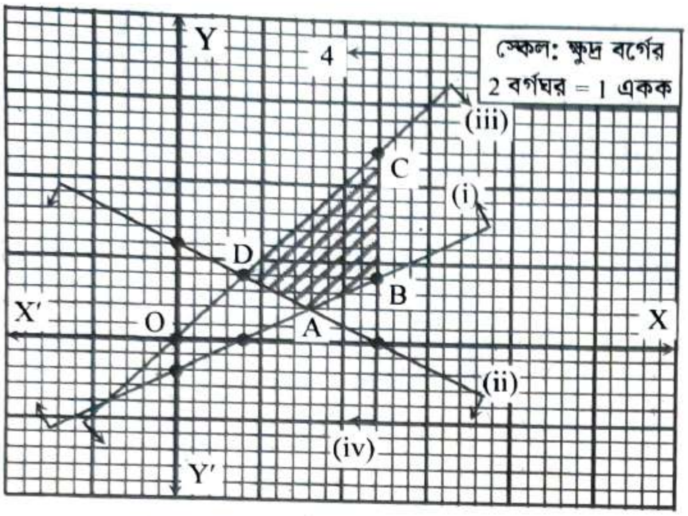
$x - y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = y$ ... ... (iii)

$x \leq 6$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 6$ ... ... (iv)

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ ... ... (v)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ ... ... (vi)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করি এবং এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় (i) এর সকল বিন্দু এবং যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x - 2y \leq 2$ অসমতা সত্য। (ii) এর সকল বিন্দু এবং এই সরলরেখার নিচের সকল বিন্দুর জন্য $x - y \geq 0$ অসমতা সত্য। আবার (iv) এর সকল বিন্দু এবং যে পাশে মূল বিন্দু আছে ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \leq 6$ অসমতা সত্য।

চিত্রানুসারে A, B, C ও D বিন্দুগুলি যথাক্রমে (i) ও (ii); (i) ও (iv); (iii) ও (iv) এবং (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু এবং সমাধানের অনুকূল এলাকা ABCDA যা, চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে।

সম্ভাব্য অনুকূল এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে, A(4, 2), B(6, 2), C(6, 6) এবং D(2, 2)

এখন,

A(4, 1) বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 5 \times 1 = 17$

B(6, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 6 + 5 \times 2 = 28$

C(6, 6) বিন্দুতে $z = 3 \times 6 + 5 \times 6 = 48$

এবং D(2, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 2 + 5 \times 2 = 16$

স্পষ্টতঃ D(2, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান। অতএব সর্বনিম্ন মানের বিন্দুটি D(2, 2) এবং সর্বনিম্ন মান $z_{min} = 16$ **(Ans.)**

**(vii)** দেওয়া আছে, $4x + y \geq 16$ ... ... ... (i)

$4x + 7y \geq 40$ ... ... ... (ii)

(i) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + y = 16$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} = 1$

যা A (4, 0) এবং B(0, 16) বিন্দু দিয়ে যায়.

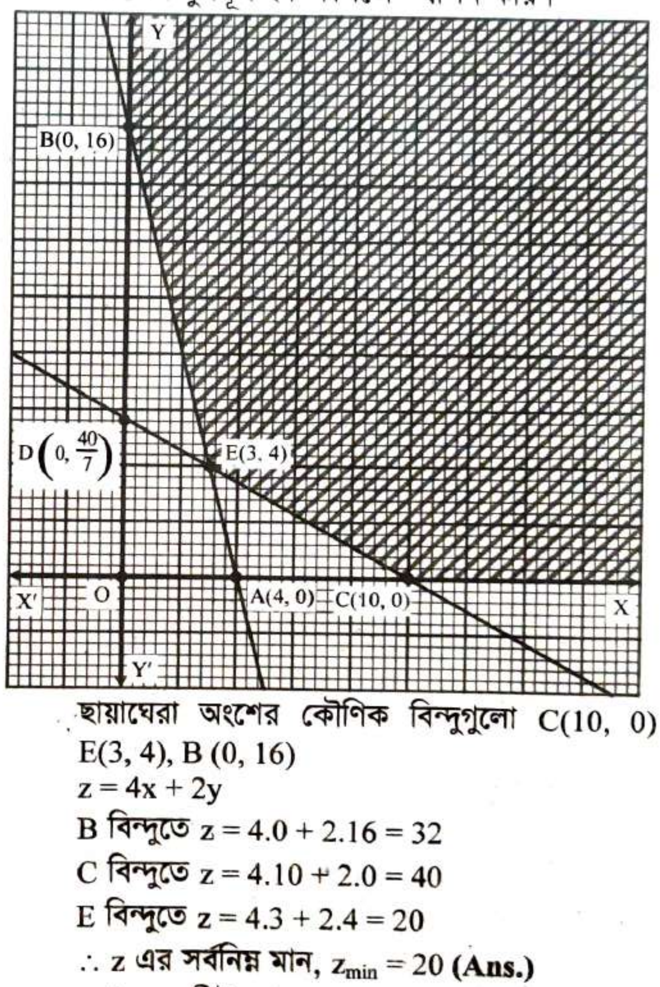
আবার (ii) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + 7y = 40$

বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{\frac{40}{7}} = 1$

যা C(10, 0) এবং $D\left(0, \frac{40}{7}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ছক কাগজে স্থাপন করি।




ছায়াঘেরা অংশের কৌণিক বিন্দুগুলো C(10, 0) E(3, 4), B (0, 16)

$z = 4x + 2y$

B বিন্দুতে $z = 4.0 + 2.16 = 32$

C বিন্দুতে $z = 4.10 + 2.0 = 40$

E বিন্দুতে $z = 4.3 + 2.4 = 20$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান, $z_{min} = 20$ **(Ans.)**

**(viii)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন, $Z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y - 7 \leq 0$

$\therefore x + y \leq 7$

$x - 2y - 4 \geq 0$

$\therefore x - 2y \geq 4$

$x, y \geq 0.$

প্রথমে অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \leq 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$x + y = 7$

$\therefore \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ... ... (1)

$x - 2y \geq 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$x - 2y = 4$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$ ... ... (2)

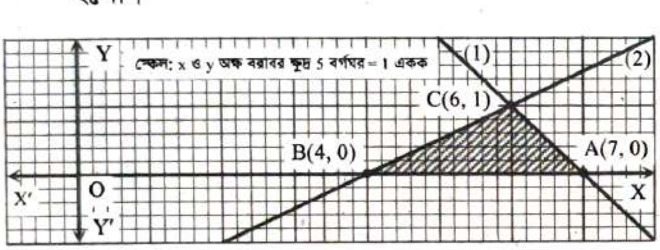
$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$x = 0$ ... ... (3)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$y = 0$ ... ... (4)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি। প্রতি 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হলো।




লেখচিত্র হতে দেখা যায় ABC সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো A(7, 0), B(4, 0) এবং C(6, 1)

A(7, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(4, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 4 + 4 \times 0 = 12$

C(6, 1) বিন্দুতে, $z = 3 \times 6 + 4 \times 1 = 18 + 4 = 22$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান 12 **(Ans.)**

**(ix)** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 2y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \geq 4$

$$2x + y \geq 4$$
$$x + y \leq 5$$
$$x, y \geq 0$$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + 2y \geq 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ ....(i)

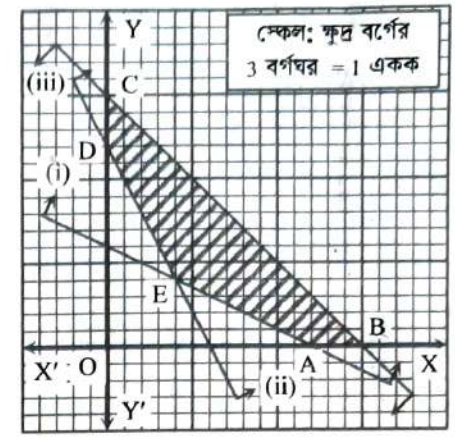
$2x + y \geq 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ ....(ii)

$x + y \leq 5$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ ....(iii)

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ ....(iv)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ ....(v)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করি এবং এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + 2y \geq 4$ ও $2x + y \geq 4$ অসমতাদ্বয় সত্য। আবার সমীকরণ (iii) এর সকল বিন্দু এবং এই রেখার যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \leq 5$ অসমতা সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B, C, D ও E বিন্দুগুলি যথাক্রমে (i) ও (v); (iii) ও (v); (iii) ও (iv); (ii) ও (iv) এবং (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দু এবং সকল অসমতা কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ সমাধানের অনুকূল এলাকা ABCDEA যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে।

এখানে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে

A(4, 0), B(5, 0), C(0, 5), D(0, 4) এবং $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

এখন, A(4, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 2 \times 0 = 12$

B(5, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 5 + 2 \times 0 = 15$

C(0, 5) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 5 = 10$

D(0, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

এবং $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{4}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

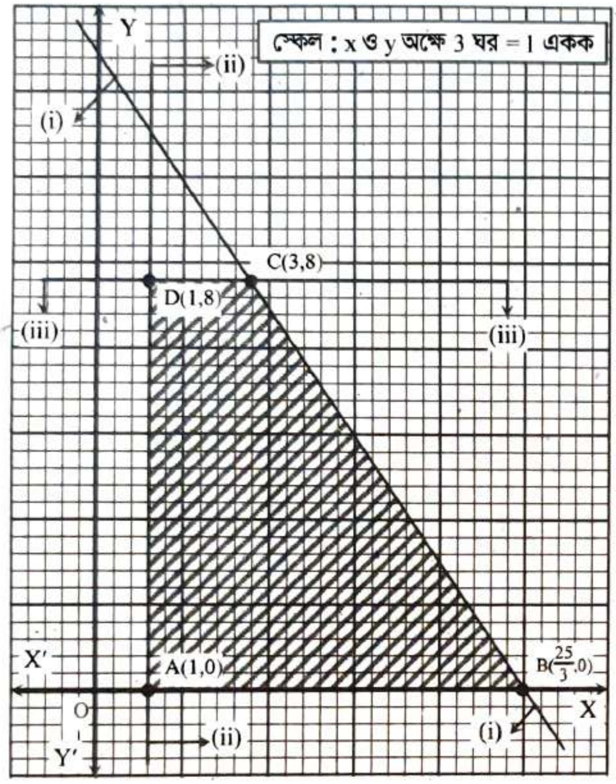
স্পষ্টত $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়। অতএব সর্বনিম্ন মানের বিন্দুটি $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ এবং সর্বনিম্ন মানটি $z_{min} = \frac{20}{3}$ **(Ans.)**

**6. (i)** মনে করি, কলম x টি এবং পেন্সিল y টি ক্রয় করবেন।

অভীষ্ট ফাংশন $z = Max\ (x + y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $12x + 8y \leq 100$; $x \geq 1$; $y \leq 8$; $x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।




$\therefore$ আমরা পাই,

$$12x + 8y = 100 \Rightarrow \frac{x}{\frac{25}{3}} + \frac{y}{\frac{25}{2}} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (i)$$

$x = 1 \quad \cdots\cdots\cdots$ (ii)
$y = 8 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iii)
$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iv)
$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (v)

লেখচিত্রে দেখা যায় (i) এবং (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $12x + 8y \leq 100$ এবং $y \leq 8$ সত্য।

আবার (ii) এর সকল বিন্দু এবং (ii) এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 1$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD.

$A(1, 0), B\left(\frac{25}{3}, 0\right)$

C হচ্ছে (i) এবং (iii) এর ছেদ বিন্দু। $\therefore C(3, 8)$
D " (ii) " (iii) " " " $\therefore D(1, 8)$
এখন A(1, 0) বিন্দুতে $z = 1 + 0 = 1$
$B\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ " $z = \frac{25}{3} + 0 = \frac{25}{3}$
C(3, 8) " $z = 3 + 8 = 11$
এবং D(1, 8) " $z = 1 + 8 = 9$

স্পষ্টত C (3, 8) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

**Ans.** কলম 3 টি ও পেন্সিল 8 টি।

**(ii)** মনে করি, প্লেট x টি এবং কাপ y টি ক্রয় করবে।

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}(x + y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $20x + 30y \leq 500$
$x \geq 3$
$y \leq 6$
$x \geq 0, y \geq 0$

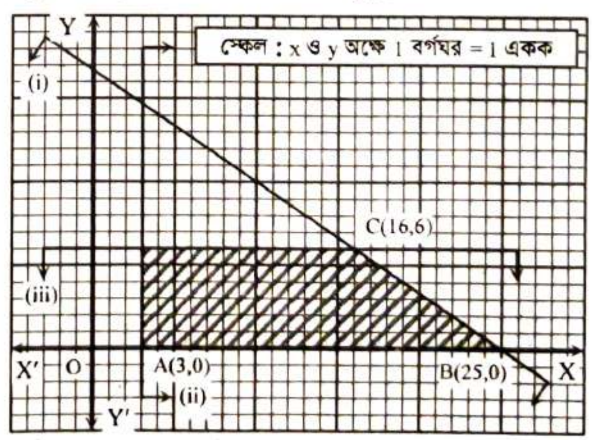
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$20x + 30y = 500$

$$\Rightarrow \frac{x}{25} + \frac{y}{\frac{50}{3}} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (i)$$

$x = 3 \quad \cdots\cdots\cdots$ (ii)
$y = 6 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iii)
$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iv)
$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (v)




লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এবং (iii) এর সকল বিন্দু এবং (i) ও (iii) এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $20x + 30y \leq 500$ এবং $y \leq 6$ সত্য। আবার (ii) এর সকল বিন্দু এবং (ii) এর পাশে মূল বিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 3$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD।

A(3, 0), B( 25, 0), C হচ্ছে (i) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore$ C (16, 6)

আবার D হচ্ছে (ii) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ D (3, 6)

এখন A (3, 0) বিন্দুতে $z = 3 + 0 = 0$

B (25, 0) " $z = 25 + 0 = 25$

C (16, 6) " $z = 16 + 6 = 22$

এবং D (3, 6) " $z = 3 + 6 = 9$

যেহেতু তিনি উভয় প্রকার জিনিস কিনতে চান, তাই B(25, 0) বিন্দুতে z = 25 গ্রহণযোগ্য নয়।

স্পষ্টত C(16, 6) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।

**Ans.** 16 টি প্লেট ও 6 টি কাপ ক্রয় করতে পারবেন।

**(iii)** মনে করি, গামছা x খানা এবং তোয়াল y খানা কিনতে হবে।

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন $Z = \text{Max}(x + y)$

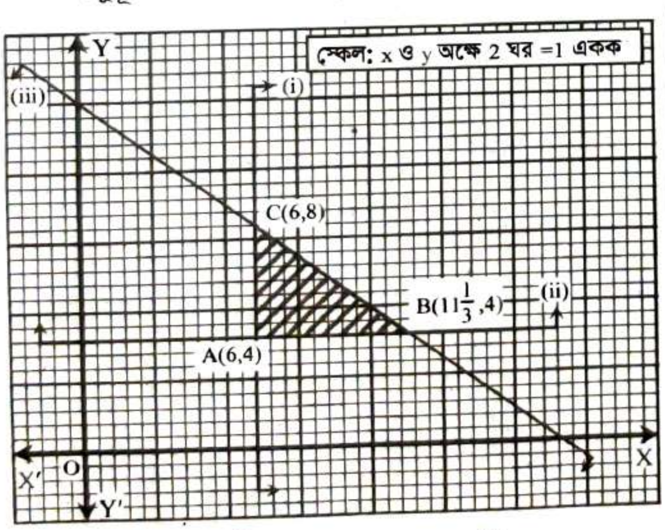
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x \geq 6$

$y \geq 4$

$30x + 40y \leq 500$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।




$\therefore$ আমরা পাই, $x = 6$ ……… (i)

$y = 4$ ……… (ii)

$30x + 40y = 500$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{50}{3}} + \dfrac{y}{\frac{50}{4}} = 1$ ……… (iii)

$x = 0$ ……… (iv)

$y = 0$ ……… (v)

লেখচিত্রে দেখা যায় (i) এবং (ii) এর সকল বিন্দু এবং (i) ও (ii) এর পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 6$ এবং $y \geq 4$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC.

A হচ্ছে (i) এবং(ii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore$ A(6, 4)

B " (ii) " (iii) " " $\therefore B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$

এবং C " (i) " (iii) " " $\therefore$ C (6, 8)

এখন A(6, 4) এর জন্য $z = 6 + 4 = 10$

$B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ " " $z = 11.33 + 4 = 15.33$

C (6, 8) " " $z = 6 + 8 = 14$

দেখা যায়, $B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ হয় যা একটি ভগ্নাংশ। জিনিসের সংখ্যা ভগ্নাংশ হবে না।

কাজেই এক্ষেত্রে x = 11 এবং y = 4

**Ans.** গামছা 11 খানা ও তোয়ালে 4 খানা।

**(iv)** মনে করি,

আমের ঝুড়ির সংখ্যা x এবং পেয়ারার ঝুড়ির সংখ্যা y

শর্তানুসারে,

$x + y \leq 12$

$50x + 25y \leq 500$

এবং $x \geq 0, y \geq 0$

এখানে উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}(10x + 6y)$

তাহলে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি দাঁড়ায়—

Maximize $z = 10x + 6y$

শর্তসমূহ: $x + y \leq 12$

$50x + 25y \leq 500$

$x, y \geq 0$

এখন প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমান ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।

$x + y \leq 12$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{12} = 1$ …… (i)

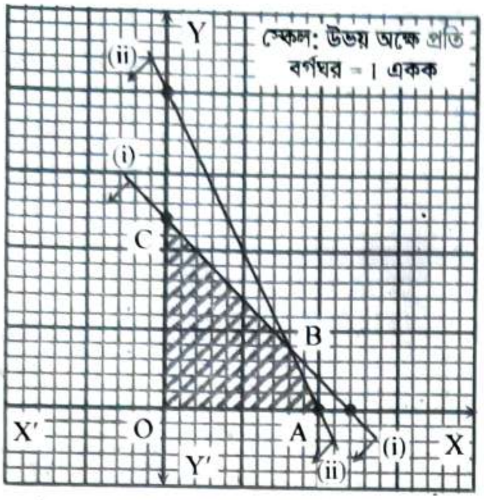
$50x + 25y \leq 500$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ,

$\dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{20} = 1$ … (ii)

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ …(iii)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ …(iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করি এবং এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য।

চিত্রানুসারে A, B ও C যথাক্রমে (ii) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABCO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে,

O(0, 0), A(10, 0), B(8, 4) এবং C(0, 12)

এখানে,

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 10 \times 0 + 6 \times 0 = 0$

A(10, 0) বিন্দুতে $z = 10 \times 10 + 6 \times 0 = 100$

B(8, 4) বিন্দুতে $z = 10 \times 8 + 6 \times 4 = 104$

C(0, 12) বিন্দুতে $z = 10 \times 0 + 6 \times 12 = 72$

স্পষ্টত B(8, 4) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ 8 ঝুড়ি আম এবং 4 ঝুড়ি পেয়ারা বিক্রি করলে ঐ বিক্রেতা সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন।

(v) মনে করি, নারকেলের চারা x এবং আমের চারা yটি

তাহলে, অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}(x + y)$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x \geq 12$

$$y \geq 8$$
$$20x + 30y \leq 600$$

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য অসমতাগুলিকে সমতা ধরে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করলে পাই,

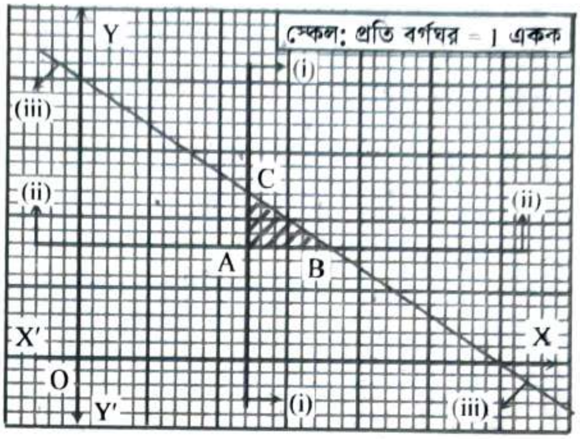
$x = 12 \cdots\cdots\cdots$ (i)

$y = 8 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$20x + 30y = 600$

বা, $\frac{x}{30} + \frac{y}{20} = 1 \cdots\cdots\cdots$ (iii)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য যথাক্রমে $x \geq 12$ ও $y \geq 8$ অসমতাদ্বয় সত্য। আবার (iii) এর সকল বিন্দু ও এর যে পাশে মূলবিন্দু আছে ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $20x + 30y \leq 600$ অসমতা সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (i) ও (ii), (ii) ও (iii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা ABC যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। ঐ এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে,

A(12, 8), B(18, 8) এবং C(12, 12)

এখন, A(12, 8) বিন্দুতে $z = 12 + 8 = 20$

B(18, 8) বিন্দুতে $z = 18 + 8 = 26$

এবং C(12, 12) বিন্দুতে $z = 12 + 12 = 24$

স্পষ্টত B(18, 8) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

সুতরাং নারকেলের চারা $x = 18$টি এবং আমের চারা $y = 8$টি।

(vi) মনে করি, হাঁসের বাচ্চা xটি ও মুরগির বাচ্চা yটি।

তাহলে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = \text{Max}(x + y)$

শর্তসমূহ: $20x + 40y \leq 800$, $x + y \leq 25$ এবং $x, y > 0$

অসমতাগুলিকে সমতা ধরে রূপান্তরিত সমীকরণ পাই,

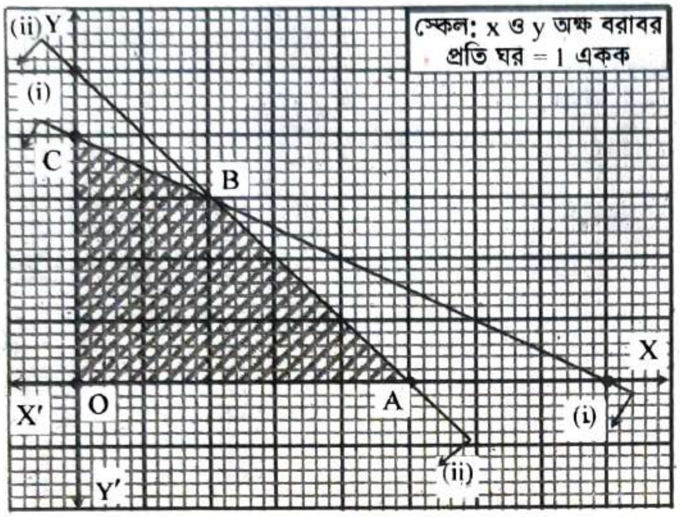
$20x + 40y = 800$ বা, $\frac{x}{40} + \frac{y}{20} = 1 \cdots\cdots\cdots$(i)

$x + y = 25$ বা, $\frac{x}{25} + \frac{y}{25} = 1 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iii)

$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সংখ্যারেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) আছে ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (ii) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABC যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। এই এলাকার প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে—

O(0, 0), A(25, 0), B(10, 15), C(0, 20)

কিন্তু, O(0, 0), A(25, 0) এবং C(0, 20) বিন্দুত্রয় $x, y > 0$ শর্তটি মেনে চলে না। ফলে, B(10, 15) প্রান্তিক বিন্দুটি প্রদত্ত সকল শর্ত সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ B(10, 15) বিন্দুতে, $Z = 10 + 15 = 25$

$\therefore$ 10টি হাঁসের বাচ্চা ও 15টি মুরগীর বাচ্চা কেনা হলে সর্বোচ্চ সংখ্যক বাচ্চা কেনা যাবে।

**(vii)** মনে করি, রেডিও x টি এবং টেলিভিশন y টি কিনতে হবে।

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}\ (16x + 32y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 100$

$$40x + 120y \le 10400$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

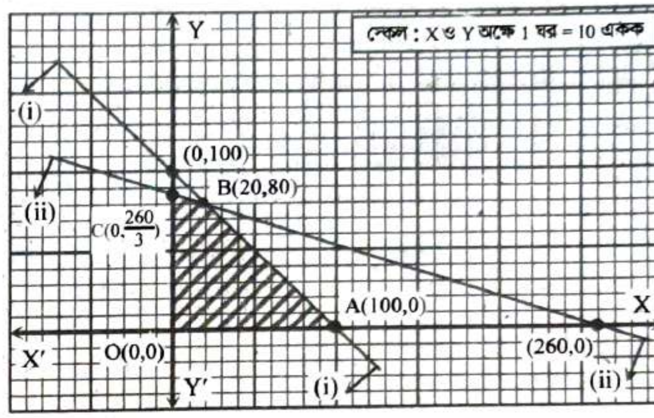
অতএব আমরা পাই,

$$x + y = 100 \Rightarrow \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1 \cdots\cdots\cdots (i)$$

$$40x + 120y = 10400 \Rightarrow x + 3y = 260$$

$$\therefore \frac{x}{260} + \frac{y}{\frac{260}{3}} = 1 \cdots\cdots\cdots (ii)$$

$$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iii)$$
$$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iv)$$




লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এবং (ii) এর সকলবিন্দু এবং (i) ও (ii) এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \le 100$ এবং $40x + 120y \le 10400$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABC।

যেখানে O হচ্ছে মূলবিন্দু, A (100, 0)।

B হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদ বিন্দু। $\therefore$ B(20, 80)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0$

A (100, 0) " $z = 1600$

B (20, 80) " $z = (16 \times 20) + (32 \times 80) = 2880$

$C\left(0, \frac{260}{3}\right)$ " $z = 0 + 2773.33 = 2773.33$

স্পষ্টত B (20, 80) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান হয়।

**Ans.** লাভ 2880 ডলার।

**(viii)** মনে করি, রুইমাছের পোনা x টি এবং কাতল মাছের পোনা y টি কিনতে হবে।

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Max}(x + y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $\frac{60x}{100} + \frac{30y}{100} \le 1200$

$$\therefore 2x + y \le 4000$$
$$x + y \le 3000$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

এ অসমতাগুলো হতে পাই,

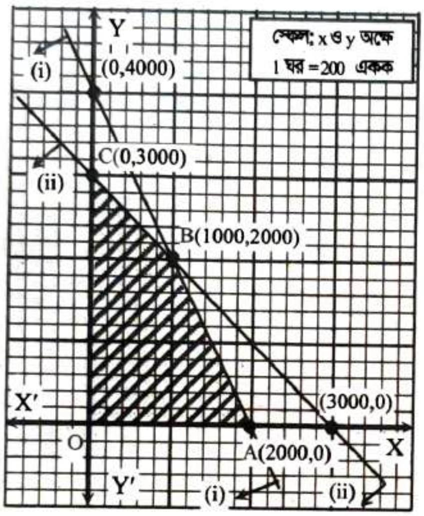
$2x + y = 4000 \Rightarrow \frac{x}{2000} + \frac{y}{4000} = 1 \cdots\cdots (i)$

$x + y = 3000 \Rightarrow \frac{x}{3000} + \frac{y}{3000} = \cdots\cdots\cdots (ii)$

$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iii)$

$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iv)$

লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এবং (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $2x + y \le 4000$ এবং $x + y \le 3000$ সত্য।




লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABC। O(0, 0), A(2000, 0), B হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ B (1000, 2000) এবং C (0, 3000)

অভীষ্ট ফাংশন $z = Max\ (x + y)$ যদি ধরা হয় তবে

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0 + 0 = 0$

A(2000, 0) " $z = 2000 + 0 = 2000$

B(1000, 2000) " $z = 1000 + 2000 = 3000$

C(0, 3000) " $z = 0 + 3000 = 3000$

যেহেতু তিনি উভয় প্রকারের পোনা কিনতে চান সুতরাং B(1000, 2000) বিন্দুই গ্রহণযোগ্য।

**Ans.** রুই মাছের পোনা 1000 টি, কাতল মাছের পোনা 2000 টি।

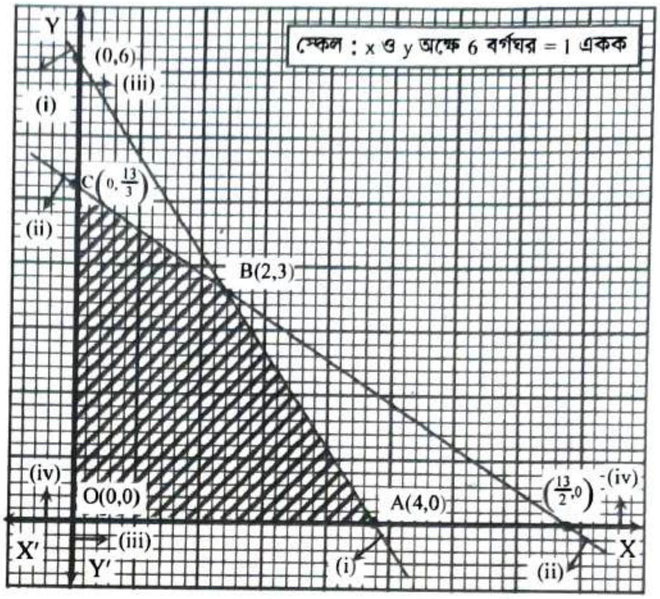
**(ix)** মনে করি, ধান x হেক্টর এবং গম y হেক্টর জমিতে চাষ করতে হবে।

অভীষ্ট ফাংশন $z_{max} = x + y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $1200x + 800y \le 4800$

$4x + 6y \le 26$

$x \ge 0, y \ge 0$




প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব এ অসমতাগুলো হতে পাই,

$1200x + 800y = 4800$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \cdots\cdots\cdots (i)$

$4x + 6y = 26$

$\therefore \frac{x}{\frac{13}{2}} + \frac{y}{\frac{13}{3}} = 1 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iii)$

$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (iv)$

লেখচিত্রে দেখা যায় (i) এবং (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $1200x + 800y \le 4800$ এবং $4x + 6y \le 26$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা OABC। যেখানে O হচ্ছে মূলবিন্দু; A(4, 0)। B হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ B (2, 3) এবং $C\left(0, \frac{13}{3}\right)$

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0 + 0 = 0$

A(4, 0) " $z = 4 + 0 = 4$

B(2, 3) " $z = 2 + 3 = 5$

এবং $C\left(0, \frac{13}{3}\right)$ " $z = 0 + \frac{13}{3} = \frac{13}{3}$

স্পষ্টত B (2, 3) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

**Ans.** 5 হেক্টর।

**(x)** মনে করি, সুপারি গাছের সংখ্যা x এবং পেয়ারা গাছের সংখ্যা y

$z_{max} = x + y$

$x + 2y \leq 23$

$120x + 40y \leq 1160$

বা, $3x + y \leq 29$ এবং $x \geq 0, y \geq 0$.

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

$x + 2y = 23$ ........... (i)

বা, $\frac{x}{23} + \frac{y}{\frac{23}{2}} = 1$

$3x + y = 29$ ... ... ... (ii)

বা, $\frac{x}{\frac{29}{3}} + \frac{y}{29} = 1$

(ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) হতে বিয়োগ করি,

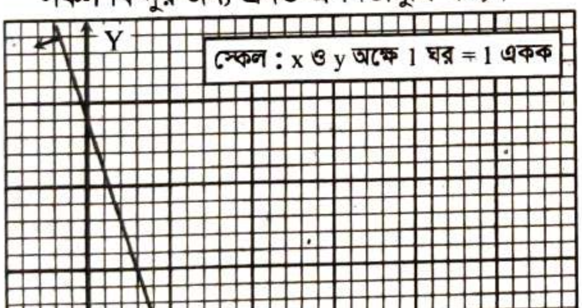
$x - 6x + 2y - 2y = 23 - 58$

বা, $-5x = -35$ বা, $x = 7$

(i) নং এ $x = 7$ বসিয়ে

$7 + 2y = 23$ বা, $2y = 16$ বা, $y = 8$

লেখচিত্রে (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।




(i) ও (ii) এর সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OABC যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা হয়েছে। সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি O(0, 0), A$\left(\frac{29}{3}, 0\right)$, B(7, 8) ও C$\left(0, \frac{23}{2}\right)$.

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 0 + 0 = 0$

A$\left(\frac{29}{3}, 0\right)$ " $z = \frac{29}{3} + 0 = \frac{29}{3}$

B(7, 8) " $z = 7 + 8 = 15$

C$\left(0, \frac{23}{2}\right)$ " $z = 0 + \frac{23}{2} = \frac{23}{2}$

B(7, 8) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়

$\therefore$ সুপারি গাছের সংখ্যা 7 এবং পেয়ারা গাছের সংখ্যা 8.

**(xi)** প্রশ্নে বর্ণিত তথ্যসমূহ নিম্নোক্তভাবে সাজানো হলো:

| খাদ্য | ভিটামিন A | ভিটামিন C | প্রতি এককের মূল্য |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 7 | 3 | 25 টাকা |
| $F_2$ | 2 | 5 | 18 টাকা |
| দৈনিক নূন্যতম প্রয়োজন | 45 | 60 | |

মনে করি, $F_1$ খাদ্য x একক এবং $F_2$ খাদ্য y একক।

অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 25x + 18y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $7x + 2y \geq 45$

$3x + 5y \geq 60$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণ গঠন করি এবং ছক কাগজে স্থাপন করে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

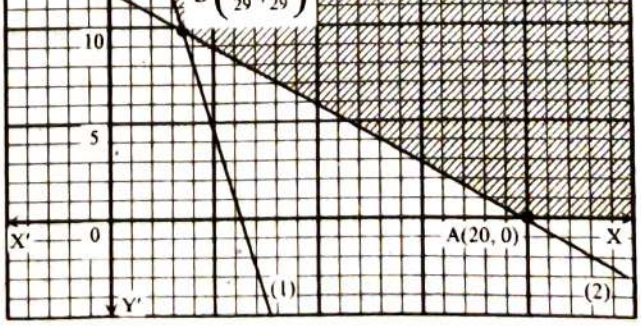
ছক কাগজে 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হল।

$7x + 2y = 45 \Rightarrow \frac{x}{\frac{45}{7}} + \frac{y}{\frac{45}{2}} = 1$ ... ... (1)

$3x + 5y = 60 \Rightarrow \frac{x}{20} + \frac{y}{12} = 1$ ... ... (2)

$x = 0$ ... ... (3)

$y = 0$ ... ... (4)



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, (1) ও (2) নং এর যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশের বিন্দুসমূহ সমাধান এলাকা গঠন করে। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা ABC হতে শুরু করে ১ম চতুর্ভাগের ডানদিকের সমস্ত এলাকা। এখানে $A(20, 0)$, $C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ এবং (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ সম্ভাব্য সমাধান বিন্দু।

$A(20, 0)$ বিন্দুতে $z = 25 \times 20 + 18 \times 0 = 500$

$B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে,

$$z = 25 \times \frac{105}{29} + 18 \times \frac{285}{29}$$
$$= \frac{7755}{29} = 267.41$$

$C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ বিন্দুতে, $z = 25 \times 0 + 18 \times \frac{45}{2}$
$$= 405.$$

স্পষ্টত $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন 267.41 টাকা খরচ করে নূন্যতম চাহিদা মেটানো সম্ভব। **(Ans.)**

**(xii)** ধরি, সর্বোচ্চ লাভের জন্য দবির মিয়ার x সংখ্যক কম্পিউটার এবং y সংখ্যক মোবাইল কিনতে হবে।

শর্তমতে, কম্পিউটারের ক্রয়মূল্য = $3 \times 20 = 60$ ডলার

প্রতিটি কম্পিউটারে লাভ = $2 \times 8 = 16$ ডলার

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন $z_{max} = 16x + 8y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 50$

$60x + 20y \le 5200$

$x \ge 0$ এবং $y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা বিবেচনা করে লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা চিহ্নিত করি।

$x + y = 50$

বা, $\frac{x}{50} + \frac{y}{50} = 1$ …… (i)

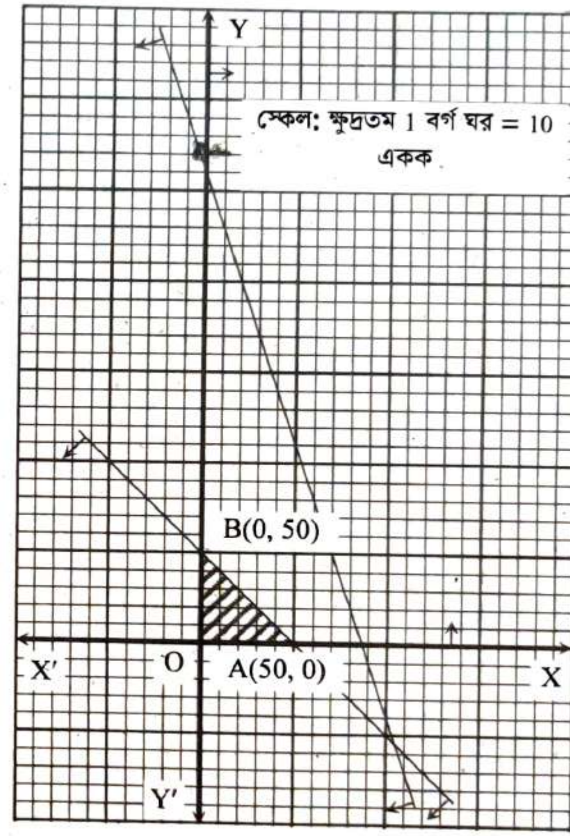
$60x + 20y = 5200$

বা, $\frac{60x}{5200} + \frac{20y}{5200} = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{260}{3}} + \frac{y}{260} = 1$ …… (ii)

$x = 0$ …… (iii)

$y = 0$ …… (iv)




লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা OAB.

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (50, 0)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, 50)

O বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, 0)

A বিন্দুতে $z = 16 \times 50 + 8 \times 0 = 800$

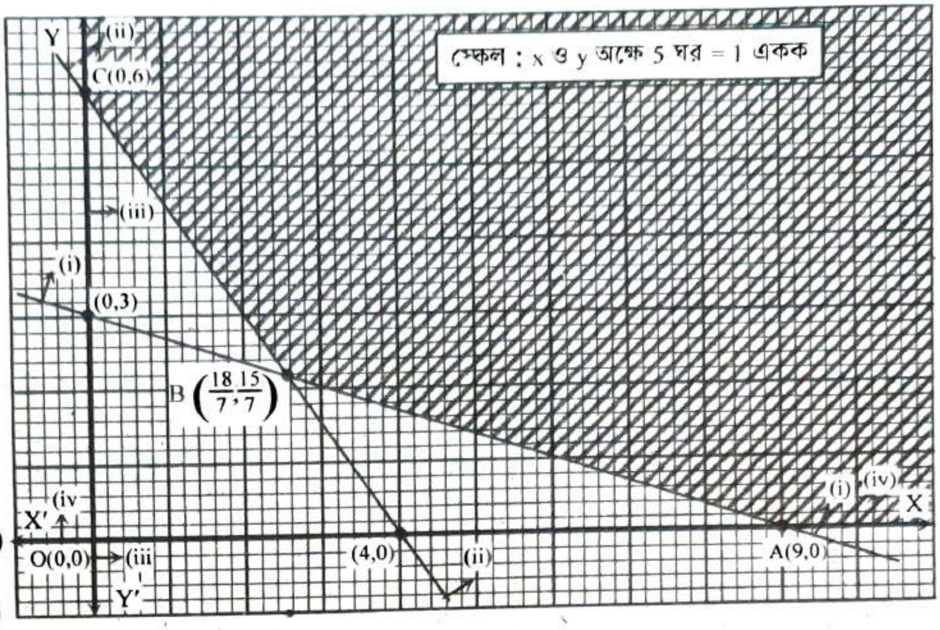
B বিন্দুতে $z = 16 \times 0 + 8 \times 50 = 400$

C বিন্দুতে $z = 16 \times 0 + 8 \times 0 = 0$

অর্থাৎ, A(50, 0) বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ।

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভের জন্য 50টিই কম্পিউটার কিনতে হবে এবং সর্বোচ্চ লাভ 800 ডলার। **(Ans.)**

**7. (i)** মনে করি, A খাদ্য x কেজি এবং B খাদ্য y কেজি।
অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Min}\,(2x + 3y)$
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ:
$x + 3y \geq 9$
$3x + 2y \geq 12$
$x \geq 0, y \geq 0$
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।
অতএব আমরা পাই,




$x + 3y = 9 \Rightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$ ... ... (i)

$3x + 2y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$...(ii)

$x = 0$ ......... (iii); $y = 0$ ......... (iv)

এবং লেখচিত্রে দেখা যায় (i), (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + 3y \geq 9$ এবং $3x + 2y \geq 12$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে ১ম চতুর্ভাগের ডান দিকের সমস্ত এলাকা।
যেখানে A (9, 0), B হচ্ছে (i), (ii) এর ছেদ বিন্দু।
$\therefore B\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ এবং C (0, 6)
এখন A (9, 0) বিন্দুতে $z = (2 \times 9) + (3 \times 0) = 18$

$B\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ " $z = \left(2 \times \frac{18}{7}\right) + \left(3 \times \frac{15}{7}\right) = \frac{81}{7}$
C (0, 6) " $z = (2 \times 0) + (3 \times 6) = 18$
স্পষ্টত B $\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

**Ans.** A প্রকারের খাদ্য $\frac{18}{7}$ কেজি; B প্রকারের খাদ্য $\frac{15}{7}$ কেজি এবং সর্বনিম্ন খরচ $\frac{81}{7}$ টাকা।

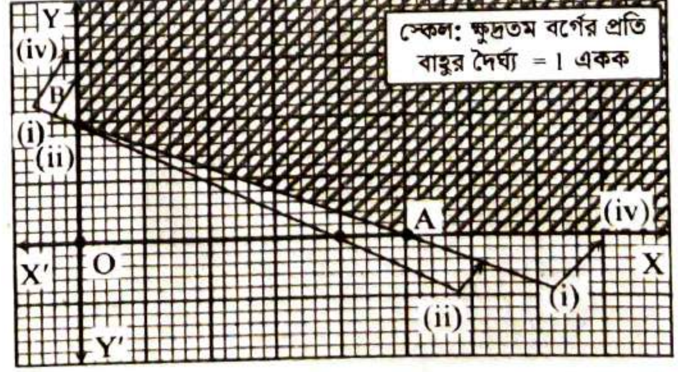
**(ii)** মনে করি, $F_1$ খাদ্য x কিলোগ্রাম ও $F_2$ খাদ্য y কিলোগ্রাম।
তাহলে, অভীষ্ট ফাংশন $Z = \text{Min}(5x + 3y)$
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $2x + 5y \geq 50$, $3x + 6y \geq 60$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে রূপান্তরিত সমীকরণগুলি পাই,

$2x + 5y = 50$ বা, $\frac{x}{25} + \frac{y}{10} = 1$ ⋯ ⋯ ⋯ (i)

$3x + 6y = 60$ বা, $\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = 1$ ⋯ ⋯ ⋯ (ii)

$x = 0$ ⋯ ⋯ ⋯ (iii); $y = 0$ ⋯ ⋯ ⋯ (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সমীকরণগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) আছে তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা AB রেখার উপরের দিকে চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে।
এখানে, A(25, 0), B(0, 10)
A(25, 0) বিন্দুতে $z = 5 \times 25 + 3 \times 0 = 125$
B(0, 10) বিন্দুতে $z = 5 \times 0 + 3 \times 10 = 30$
স্পষ্টত B(0, 10) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

অর্থাৎ $F_1$ খাদ্য সম্পূর্ণ বাদ রেখে কেবল $F_2$ খাদ্য 10 কি.গ্রা. গ্রহণ করলে সবচেয়ে কম খরচে C ও D ভিটামিনের চাহিদা মিটে যাবে।

সর্বনিম্ন খরচ = 30 টাকা $F_1$ প্রকারের খাবার 0 কেজি ও $F_2$ প্রকারের খাবার 10 কেজি।

**(iii)** মনে করি, A প্রকারের খাদ্য x একক এবং

B " " y " হলে সর্বনিম্ন খরচ হবে।

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Min}(x + 3y)$

সীমাবদ্ধতার শর্ত সমূহ: $30x + 12y \geq 60$

$15x + 15y \geq 60$

$6x + 18y \geq 36$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$30x + 12y = 60 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \; \cdots\cdots\cdots \; \text{(i)}$

$15x + 15y = 60 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \; \cdots\cdots\cdots \; \text{(ii)}$

$6x + 18y = 36 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \; \cdots\cdots\cdots \; \text{(iii)}$

$x = 0 \; \cdots\cdots\cdots \; \text{(iv)}$

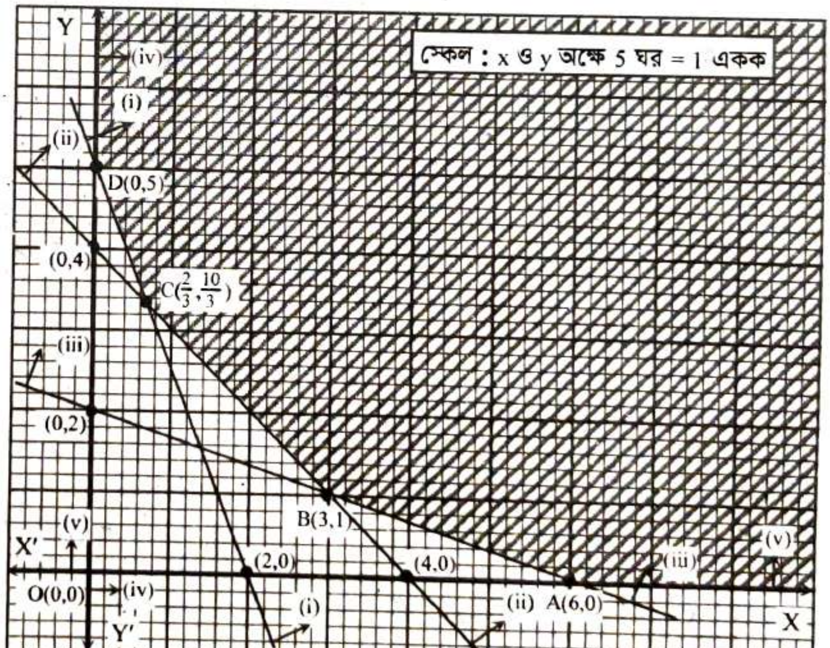
$y = 0 \; \cdots\cdots\cdots \; \text{(v)}$

লেখচিত্রে দেখা যায়, (i), (ii), (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $30x + 12y \geq 60$, $15x + 15y \geq 60$ এবং $6x + 18y \geq 36$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা।

যেখানে A (6, 0), B হচ্ছে (ii), (iii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ B(3, 1), C হচ্ছে (i), (ii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore C\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ এবং D (0, 5)




এখন A(6, 0) বিন্দুতে $z = 6$

B(3, 1) " $z = 3 + 3 = 6$

$C\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ " $z = \frac{2}{3} + \frac{3 \times 10}{3} = \frac{32}{3} = 10.67$

এবং D (0, 5) " $z = 0 + 3 \times 5 = 15$

এখানে B(3, 1) বিন্দুটি সকল শর্ত সিদ্ধ করে এবং সর্বনিম্ন মান এ বিন্দুতে পাওয়া যায়।

**Ans.** A প্রকারের খাদ্য 3 একক; B প্রকারের খাদ্য 1 একক এবং সর্বনিম্ন খরচ 6 টাকা।

**(iv)** মনে করি, খাদ্য-A এর পরিমাণ x একক এবং
খাদ্য-B " " y একক

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Min}\,(x + 2y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $20x + 8y \geq 40$
$10x + 10y \geq 40$
$4x + 12y \geq 24$
$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

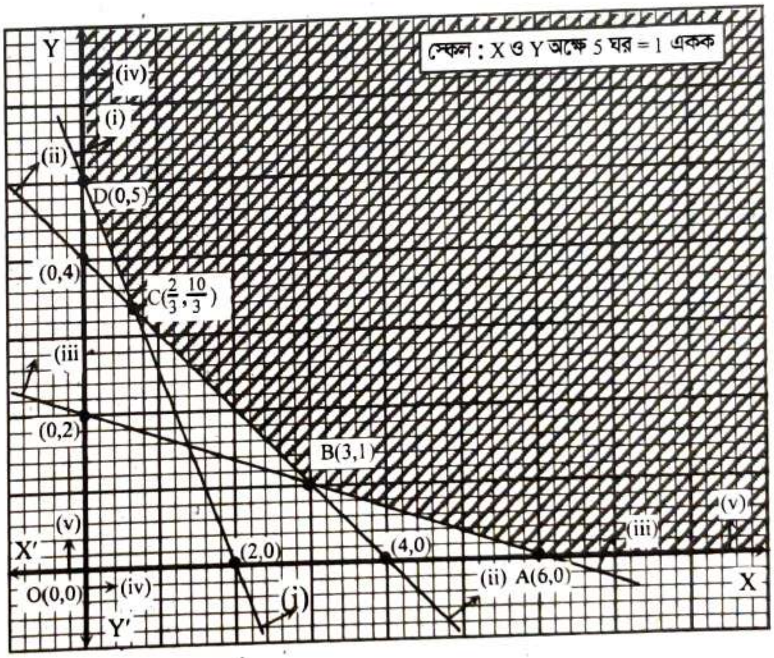
অতএব আমরা পাই,

$20x + 8y = 40 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ ……… (i)

$10x + 10y = 40 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (ii)

$4x + 12y = 24 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$ ……… (iii)

$x = 0$ ……… (iv)
$y = 0$ ……… (v)




লেখ চিত্রে দেখা যায় (i), (ii) এবং (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $20x + 8y \geq 40$, $10x + 10y \geq 40$, $4x + 12y \geq 24$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডান দিকের সমস্ত এলাকা। যেখানে A(6, 0), B হচ্ছে (ii) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু।
B(3, 1), C হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদ বিন্দু।

$\therefore C\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ এবং D(0, 5)

এখন A(6, 0) বিন্দুতে $z = 6$
B(3, 1) " $z = 3 + 2 = 5$
$C\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ " $z = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{22}{3}$
এবং D(0, 5) " $z = 10$

স্পষ্টত B(3, 1) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

**Ans.** খাদ্য-A = 3 একক; খাদ্য-B = 1 একক; সর্বনিম্ন খরচ 5 টাকা।

**(v)** মনে করি, I শাখা মাসে x দিন এবং II শাখা মাসে y দিন চালু রাখতে হবে।

অভীষ্ট ফাংশন $z = \text{Min}\,(600x + 400y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $3000x + 1000y \geq 24000$
$1000x + 1000y \geq 16000$
$2000x + 6000y \geq 48000$
$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$3000x + 1000y = 24000$

$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{24} = 1$ ... ... (i)

$1000x + 1000y = 16000$

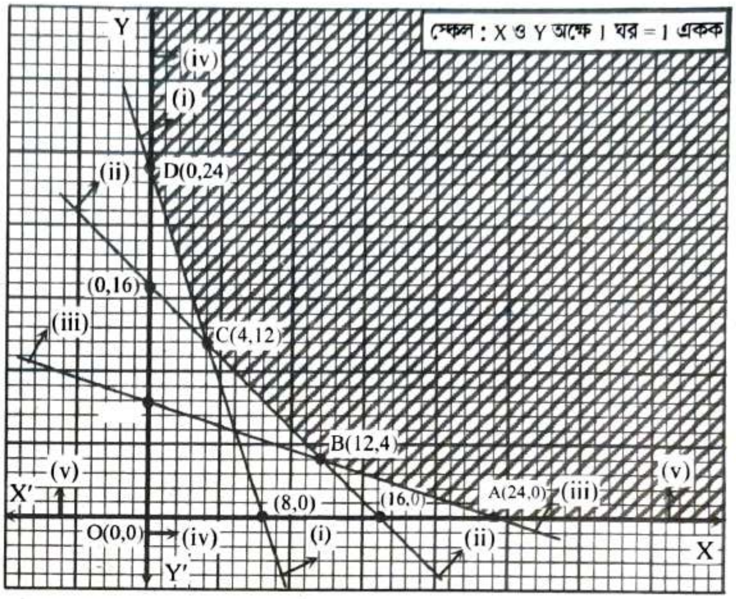
$\Rightarrow \frac{x}{16} + \frac{y}{16} = 1$ ... ... (ii)

$2000x + 6000y = 48000$

$\Rightarrow \frac{x}{24} + \frac{y}{8} = 1$ ... ... (iii)

$x = 0$ ... ... (iv)

$y = 0$ ... ... (v)




লেখচিত্রে দেখা যায় (i), (ii), (iii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য অনুষঙ্গিক অসমতাগুলো সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা। যেখানে A(24, 0), B হচ্ছে (ii) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ B(12, 4), C হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ C(4, 12) এবং D(0, 24)

এখন

A (24, 0) বিন্দুতে $z = (600 \times 24) = 14400$

B (12, 4) " $z = (600 \times 12) + (400 \times 4) = 8800$

C (4, 12) " $z = (600 \times 4) + (400 \times 12) = 7200$

D (0, 24) " $z = 0 + (400 \times 24) = 9600$

স্পষ্টত C (4, 12) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

**Ans.** I শাখা মাসে 4 দিন; II শাখা মাসে 12 দিন চালু রাখতে হবে। সর্বনিম্ন খরচ মাসে 7200 টাকা।

(vi) মনে করি, $F_1$ খাবার x কেজি এবং $F_2$ খাবার y কেজি প্রয়োজন।

দেওয়া আছে, $F_1$ এবং $F_2$ খাবারে ভিটামিন C আছে যথাক্রমে 6 একক ও 3 একক। দৈনিক ন্যূনতম ভিটামিন C প্রয়োজন 60 একক।

$F_1$ ও $F_2$ খাবারে ভিটামিন D আছে যথাক্রমে 2 একক ও 5 একক। দৈনিক ন্যূনতম ভিটামিন D প্রয়োজন 50 একক।

$F_1$ খাবারের প্রতি কেজির দাম = 3

$F_2$ খাবারের প্রতি কেজির দাম = 5

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = 3x + 5y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ ঃ $6x + 3y \geq 60$

$2x + 5y \geq 50$

$x \geq 0, y \geq 0$

অভীষ্ট ফাংশন, $z = 3x + 5y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ ঃ $6x + 3y \geq 60$

$2x + 5y \geq 50$

$x \geq 0, y \geq 0$

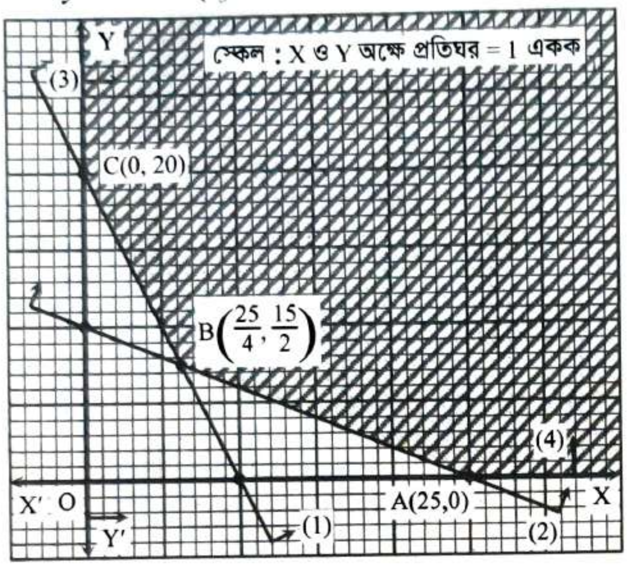
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমীকরণের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$6x + 3y = 60 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1$ ... ... (1)

$2x + 5y = 50 \Rightarrow \frac{x}{25} + \frac{y}{10} = 1 \ldots\ldots (2)$

$x = 0 \ldots\ldots (3)$
$y = 0 \ldots\ldots (4)$




লেখচিত্র হতে দেখা যায় (1), (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $6x + 3y \geq 60$ এবং $2x + 5y \geq 50$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা।

যেখানে A (25, 0), B $\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ এবং C (0, 20)

এখন,

A(25, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 25 + 5.0 = 75$

B $\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{25}{4} + 5 \cdot \frac{15}{2} = 56.25$

এবং C (0, 20) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 5.20 = 100$

স্পষ্টতঃ B $\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore F_1$ খাদ্য $\frac{25}{4}$ বা 6.25 কেজি

$F_2$ খাদ্য $\frac{15}{2}$ বা 7.5 কেজি

দৈনিক সর্বনিম্ন খরচ 56.25 **(Ans.)**

**(vii)** মনে করি, দৈনিক খাদ্য চাহিদা মেটানোর জন্য M খাবার x কেজি এবং N খাবার y কেজি পরিমাণ প্রয়োজন।

$\therefore x \geq 0$ এবং $y \geq 0$

শর্তানুযায়ী, $2x + 6y \geq 36$

$\therefore x + 3y \geq 18$

এবং $4x + 3y \geq 48$

মনে করি, অভীষ্ট ফাংশন Z

এখানে মোট খরচ (1) x কেজি M খাবারের মূল্য 20x টাকা এবং (2) y কেজি N খাবারের মূল্য 30y টাকা।

$\therefore$ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হল: $Z_{min} = 20x + 30y$

শর্তসমূহ: $x + 3y \geq 18$

$4x + 3y \geq 48$

$x, y \geq 0$

অসমতা গুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + 3y \geq 18$ এর অনুরূপ সমীকরণ, $x + 3y = 18$

$\therefore \frac{x}{18} + \frac{y}{6} = 1 \ldots\ldots (i)$

$4x + 3y \geq 48$ এর অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + 3y = 48$

$\therefore \frac{x}{12} + \frac{y}{16} = 1 \ldots\ldots (ii)$

$x \geq 0, y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে,

$x = 0 \ldots\ldots (iii)$
$y = 0 \ldots\ldots (iv)$

এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (1), (2), (3) ও (4) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।

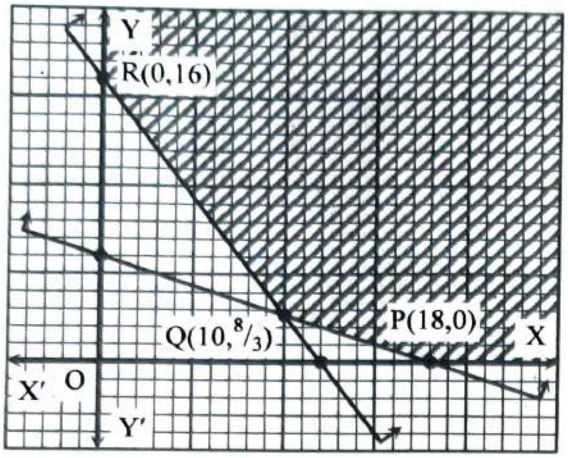
এবার, $x + 3y \geq 18$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 18$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রে ছক কাগজে (1) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে (সরল রেখার দুই প্রান্তে) $\rightarrow$ চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $x + 3y \geq 18$ অসমতার সমাধান।

পুনরায় $4x + 3y \geq 48$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই,

$0 \geq 48$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (2) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে রেখাটিতে $\rightarrow$ চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $4x + 3y \geq 48$ অসমতার সমাধান।

$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y অক্ষের ওপর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়। এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।

লেখচিত্রের ছায়াঘেরা এলাকা সম্ভাব্য সমাধান এলাকা।




লেখ চিত্রানুসারে, এখানে সম্ভাব্য এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু আছে।

কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (18, 0), $\left(10, \frac{8}{3}\right)$, (0, 16)

মনে করি, P(18, 0), Q$\left(10, \frac{8}{3}\right)$, R(0, 16)

| কৌণিক বিন্দু | $Z = 20x + 30y$ |
|---|---|
| P(18, 0) | $Z = 20 \times 18 + 0 = 360$ |
| Q$\left(10, \frac{8}{3}\right)$ | $Z = 10 \times 20 + 30 \times \frac{8}{3} = 280$ |
| R(0, 16) | $Z = 0 + 16 \times 30 = 480$ |

Z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 280

∴ দৈনিক 10 কেজি পরিমাণ M এবং $\frac{8}{3}$ কেজি পরিমান N খাদ্য গ্রহণে সর্বনিম্ন খরচে নূন্যতম প্রয়োজন মেটানো সম্ভব। **(Ans.)**

**(viii)** মনে করি, A খাবার x কেজি এবং B খাবার y কেজি প্রয়োজন।

দেওয়া আছে,

A এবং B খাবারে প্রোটিন আছে যথাক্রমে 4 একক ও 6 একক। দৈনিক ন্যূনতম প্রোটিন প্রয়োজন 16 একক।

A ও B দৈনিক শ্বেতসার আছে যথাক্রমে 5 একক ও 3 একক। প্রত্যেহ ন্যূনতম শ্বেতসার প্রয়োজন 11 একক।

A খাবারের প্রতি এককের দাম = 40 টাকা

B ,, ,, ,, ,, = 50 টাকা

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$

$5x + 3y \geq 11$

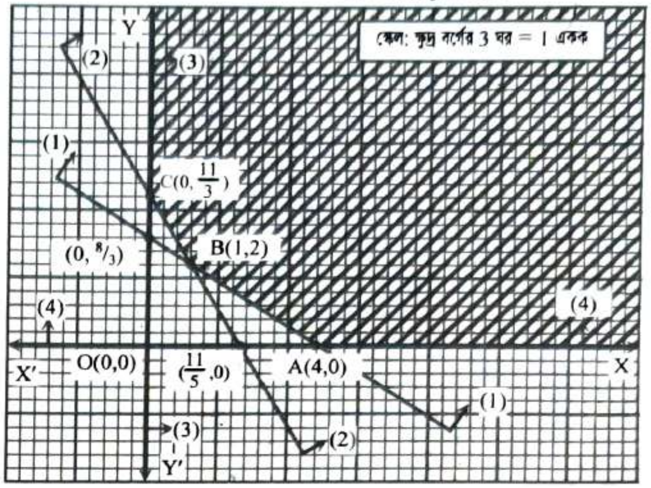
$x \geq 0, y \geq 0$

অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$

$5x + 3y \geq 11$

$x \geq 0, y \geq 0$




প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই, $4x + 6y = 16$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1 \; \ldots \ldots \ldots (1)$$

$5x + 3y = 11$

$$\therefore \frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1 \; \ldots \ldots \ldots (2)$$

$x = 0 \; \ldots \ldots \ldots (3)$

$y = 0 \; \ldots \ldots \ldots (4)$

লেখচিত্রে দেখা যায় (1), (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $4x + 6y \geq 16$ এবং $5x + 3y \geq 11$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা। যেখানে A (4, 0), B হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদ বিন্দু।

∴ B (1, 2) এবং C $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

এখন A(4, 0) বিন্দুতে $z = (40 \times 4) + (50 \times 0) = 160$

B (1, 2) " $z = (40 \times 1) + (50 \times 2) = 140$

এবং C$\left(0, \frac{11}{3}\right)$ " $z = (40 \times 0) + \left(50 \times \frac{11}{3}\right) = 183.33$

স্পষ্টতঃ B (1, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্নমান পাওয়া যায়। A খাদ্য 1 কেজি; B খাদ্য 2 কেজি; মোট সর্বনিম্ন খরচ 140 টাকা। **(Ans.)**

## ▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর

1. ঘ; **2.** খ; **3.** ঘ; **4.** ঘ; **5.** খ; **6.** গ; **7.** গ; **8.** গ; **9.** ক; **10.** ঘ; **11.** ক; **12.** ঘ; **13.** ক; **14.** খ; **15.** ঘ; **16.** খ; **17.** খ; **18.** খ; **19.** গ; **20.** ক; **21.** খ; **22.** গ; **23.** খ; **24.** খ; **25.** ঘ; **26.** ক; **27.** গ; **28.** ক;

**29.** গ; **ব্যাখ্যা:** $x + 2y \leq 10$

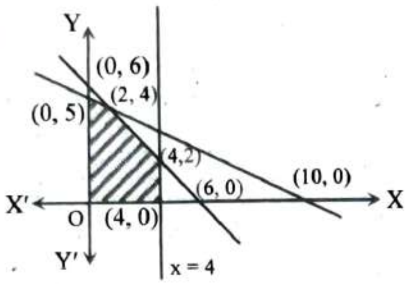
বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

$x + y \leq 6$

বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$

এবং $x \leq 4$

বা, $x = 4$




এখন, $x + y = 6$ ও $x = 4$ এর ছেদবিন্দু (4, 2)

এবং $x + 2y = 10$ এবং $x + y = 6$ এর ছেদবিন্দু (2, 4)

(4, 0) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 2x + 3y = 8$

(4, 2) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 8 + 6 = 14$

(2, 4) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 4 + 12 = 16$

(0, 5) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 0 + 15 = 15$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান = 16.

**30.** ক; **ব্যাখ্যা:** $x + y \leq 7$

বা, $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ... ... ... (i)

$2x + 5y \leq 20$

বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং এর ছেদবিন্দু (5, 2)

এখন, (7, 0) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 21$

(0, 4) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 16$

(5, 2) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 15 + 8 = 23$

**31.** ক; **ব্যাখ্যা:** $2x + y \geq 5$

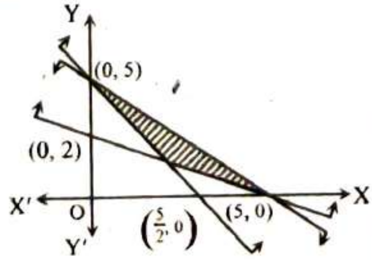
বা, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, (0, 5)

$2x + 5y \geq 10$

বা, (5, 0), (0, 2)

$x + y \leq 5$

বা, (5, 0), (0, 5)




অর্থাৎ, সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি ত্রিভুজ।

**32.** ঘ; **ব্যাখ্যা:**

| | শ্রম | কাঁচামাল | লাভ |
|---|---|---|---|
| A | 10 | 6 | 10 |
| B | 6 | 18 | 12 |
| | 480 | 864 | |

A দ্রব্য x একক ও B দ্রব্য y একক উৎপাদিত হলে,

$Z_{max} = 10x + 12y$

শর্ত: $10x + 6y \leq 480$

$6x + 18y \leq 864$

$x, y \geq 0$

সমাধান এলাকার প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ (0, 0), (0, 48), (48, 0), (24, 40)।

(24, 40) বিন্দুতে সর্বোচ্চ অভীষ্ট ফাংশনের মান

$= 10 \times 24 + 12 \times 40 = 720$ পাওয়া যায়।

**33.** গ; **ব্যাখ্যা:**

| | শ্রম | কাঁচামাল | লাভ |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 3 | 10 |
| B | 3 | 4 | 12 |
| | 165 | 132 | |

A দ্রব্য x একক ও B দ্রব্য y একক হলে, $Z_{max} = 10x + 12y$

শর্ত: $5x + 3y \leq 165$

$3x + 4y \leq 132$

$x, y \geq 0$

সমাধান এলাকার প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ (0, 0), (0, 33), (24, 15), (33, 0)।

(24, 15) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান

$= 10 \times 24 + 12 \times 15 = 420$

**34.** গ; **ব্যাখ্যা:** অঋণাত্মক [সিদ্ধান্ত চলক ঋণাত্মক হতে পারে না তবে শূন্য হতে পারে।]

**35.** ক; **36.** ক;

**37.** খ; **ব্যাখ্যা:** $x_1 + x_2 \leq 1$

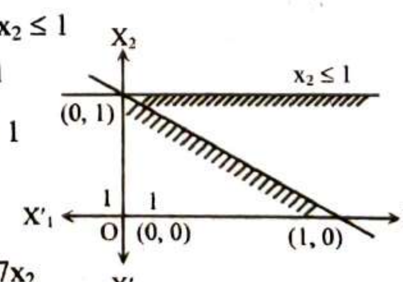
বা, $x_1 + x_2 = 1$

বা, $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{1} = 1$

$x_2 \leq 1$

বা, $x_2 = 1$

$z = 3x_1 + 7x_2$




(1, 0) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 3 + 0 = 3$

(0, 1) বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 0 + 7 = 7$

**38.** খ; **ব্যাখ্যা:** $\left.\begin{array}{l} x + 2y \leq 8, (8, 0), (0, 4) \\ 2x + y \leq 10, (5, 0), (0, 10) \end{array}\right\}$ ছেদবিন্দু, (4, 2)

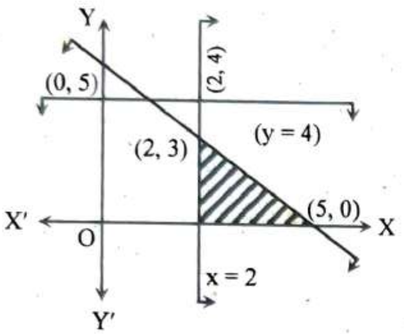
$Z = 7.4 + 9.2 = 28 + 18 = 46$

**39.** ঘ; **ব্যাখ্যা:** $x + y \le 5$

$x = 2$

$y = 4$ ছেদবিন্দু $(2, 4)$

বা, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} \le 1$




$(2, 0)$ বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 12 + 0 = 12$

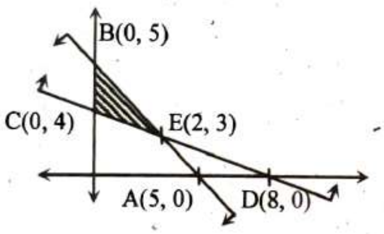
$(5, 0)$ বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 30 + 0 = 30$

$(2, 3)$ বিন্দুতে অভীষ্ট ফাংশনের মান, $Z = 12 + 6 = 18$

**40.** ঘ; **ব্যাখ্যা:**

$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$

$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$




$z = 2x - y$

$(2, 3)$ বিন্দুতে $z = 4 - 3 = 1$

$(0, 4)$ বিন্দুতে $z = 0 - 4 = -4$

$(0, 5)$ বিন্দুতে $z = 0 - 5 = -5$

**41.** গ;

## ▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

**1.** **ক** আমরা দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন ধরনের কাজ করে থাকি। প্রত্যেকটি কাজ যদি আমরা পরিকল্পনা মাফিক করে থাকি তবে তা আমাদের কাজের গতিকে অনেকটা ত্বরান্বিত করে এবং কাজটি সফল হতে অনেকটা সহায়তা করে। যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম আমাদেরকে এ ব্যাপারে মূখ্য ভূমিকাটি পালন করতে পারে। কোনো একটি কারখানাতে কাঁচামাল, পরিবহন খরচ, শ্রমিকের মজুরি, কলকব্জা, বিপণন প্রভৃতি বিভিন্নখাতে কোনটিতে কী পরিমাণ বিনিয়োগ করে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন সম্ভব হয় কিংবা উৎপাদন খরচ সর্বনিম্ন রাখা যায়, সেটি একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পণ্য উৎপাদনের প্রয়োজনীয় সম্পদ শ্রম, পুঁজি, যন্ত্রপাতি প্রভৃতি ব্যবহারের পরিমাণ ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। সর্বোচ্চ পরিমাণ মুনাফা অর্জন কিংবা উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন রাখার জন্য উৎপাদন উপকরণগুলির প্রয়োজনীয় পরিমাণের সমাবেশ প্রয়োজন। এই সমস্ত কিছুই যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের অন্তর্ভুক্ত। অতএব, আমরা বলতে পারি, পরিকল্পনা হলো কাজের অর্ধেক।

**খ** অভীষ্ট ফাংশন : $z = 4x + 6y$

শর্ত: $-x + y \le 11$ ........... (i)

$x + y \le 27$....................... (ii)

$2x + 5y \le 90$ .................. (iii)

$x, y \ge 0$

সমাধানযোগ্য সমীকরণসমূহ হতে পাই,

$-x + y = 11$ বা, $\frac{x}{-11} + \frac{y}{11} = 1$

যা $A(-11, 0)$, $B(0, 11)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

$x + y = 27$ বা, $\frac{x}{27} + \frac{y}{27} = 1$

যা $C(27, 0)$, $D(0, 27)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

$2x + 5y = 90$ বা, $\frac{x}{45} + \frac{y}{18} = 1$

যা $E(45, 0)$, $F(0, 18)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

$x = 0, y = 0$

প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ছক কাগজে স্থাপন করি

সমীকরণ (i) হতে, $0 + 0 \le 11$ সত্য

সমীকরণ (ii) হতে, $0 + 0 \le 27$ সত্য

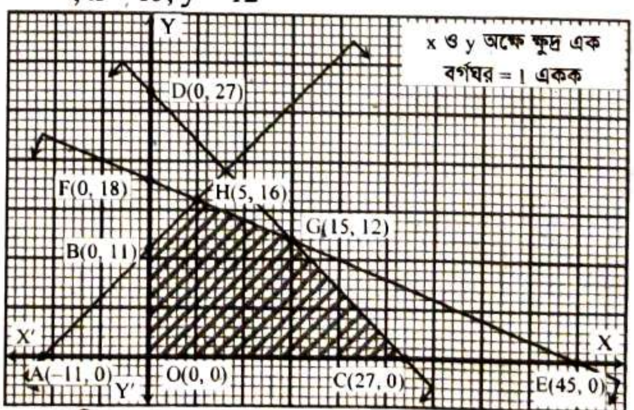
সমীকরণ (iii) হতে, $0 + 0 \le 90$ সত্য

সমাধান অঞ্চল (i), (ii) ও (iii) নং রেখার যেদিকে মূলবিন্দু সেদিকে। সমাধান অঞ্চল OCGHBO

G বিন্দু (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু

$x + y = 27, 2x + 5y = 90$

বা, $x = 15, y = 12$




H বিন্দু: (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু

$-x + y = 11, 2x + 5y = 90$

বা, $x = 5, y = 16$

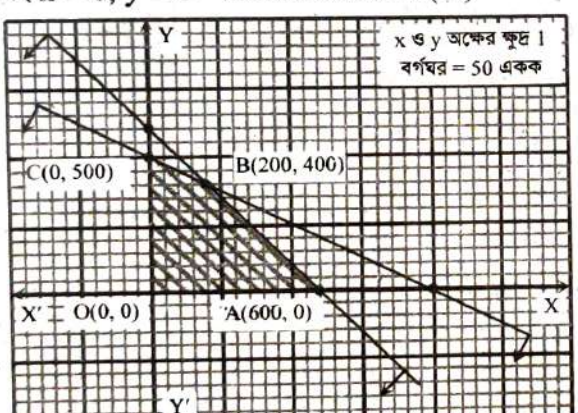
$O(0, 0)$ বিন্দুতে, $z = 4.0 + 6.0 = 0$

$C(27, 0)$ বিন্দুতে, $z = 4.27 + 6.0 = 108$

$G(15, 12)$ বিন্দুতে, $z = 4.15 + 6.12 = 60 + 72 = 132$

$H(5, 16)$ বিন্দুতে, $z = 4.5 + 6.16 = 20 + 96 = 116$
$B(0, 11)$ বিন্দুতে, $z = 4.0 + 6.11 = 66$
$\therefore$ সর্বোচ্চ মান 132 **(Ans.)**

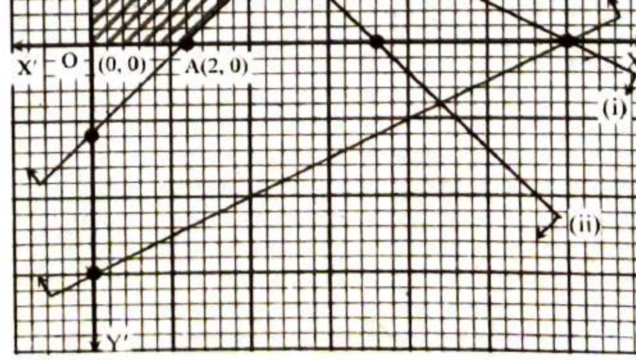
**গ** মনে করি, সবুজ চকোলেট x টি এবং লাল চকোলেট y টি দেওয়া আছে, সবুজ চকোলেটে লাভ হয় 1 টাকা ও লাল চকোলেটে লাভ হয় 2 টাকা
শর্তমতে, অভীষ্ট ফাংশন: Max, $z = x + 2y$
এবং শর্তসমূহ: $x + 2y \le 1000$; $x + y \le 600$
এবং $x \ge 0, y \ge 0$
এখন, অসমতাগুলোকে সমতা ধরে গ্রাফ কাগজে উপস্থাপন করি।
$x + 2y = 1000$
বা, $\frac{x}{1000} + \frac{y}{500} = 1$ .................... (iv)
এবং $x + y = 600$
বা, $\frac{x}{600} + \frac{y}{600} = 1$ ...................... (v)
এবং $x = 0, y = 0$ ...................... (vi)




এখানে সমাধান অঞ্চল মূলবিন্দুর দিকে এবং সম্ভাব্য সমাধান বিন্দু $O(0, 0)$, $A(600, 0)$, $B(200, 400)$ এবং $C(0, 500)$। কিন্তু সমাধান বিন্দু B (200, 400), কেননা তিনি উভয় প্রকার জিনিস কিনবেন।
$\therefore z = 200 + 2 \times 400 = 200 + 800 = 1000$
$\therefore$ সবুজ চকোলেট 200টি ও লাল চকোলেট 400টি। **(Ans.)**

2. **ক** যুদ্ধক্ষেত্র রসদ ও সৈন্যবাহিনী এক স্থান অন্য স্থানে স্থানান্তর, স্থান বিবেচনায় সৈন্য ব্যবহার ও সীমাবদ্ধতার সূক্ষ্ম হিসাব সূচারুরূপে পরিচালনার জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

**খ** $x + 2y \le 10$
$x + y \le 6$
$x - y \le 2$
$x - 2y \le 10$
$x, y \ge 0$
অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি।
$x + 2y = 10$ ........... (i)
বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (10, 0) ও (0, 5) বিন্দুতে ছেদ করে।
আবার, $x + y = 6$ ...........(ii)
বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (6, 0) ও (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।
$x - y = 2$ ............(iii)
বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (2, 0) ও (0, –2) বিন্দুতে ছেদ করে।
$x - 2y = 10$...........(iv)
বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1$
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (10, 0) ও (0, –5) বিন্দুতে ছেদ করে।
$x = 0$
$y = 0$
এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে অনুকূল সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা নির্ণয় করি।
লেখচিত্রে দেখা যায় যে, (i), (ii), (iii) ও (iv) এর সকল বিন্দু ও এদের পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।



চিত্রে OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তা হলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি

O(0, 0), A(2, 0), B(4, 2), C(2, 4) এবং D(0, 5)

**গ** অভীষ্ট ফাংশন, $z = 2x + y$ সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ,

$3y - x \leq 10,\ x + y \leq 6,\ x - y \leq 2$

অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি

$3y - x = 10$

বা, $x - 3y = -10$ .............(i)

বা, $\frac{x}{-10} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (–10, 0) ও $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $x + y = 6$..............(ii)

বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$

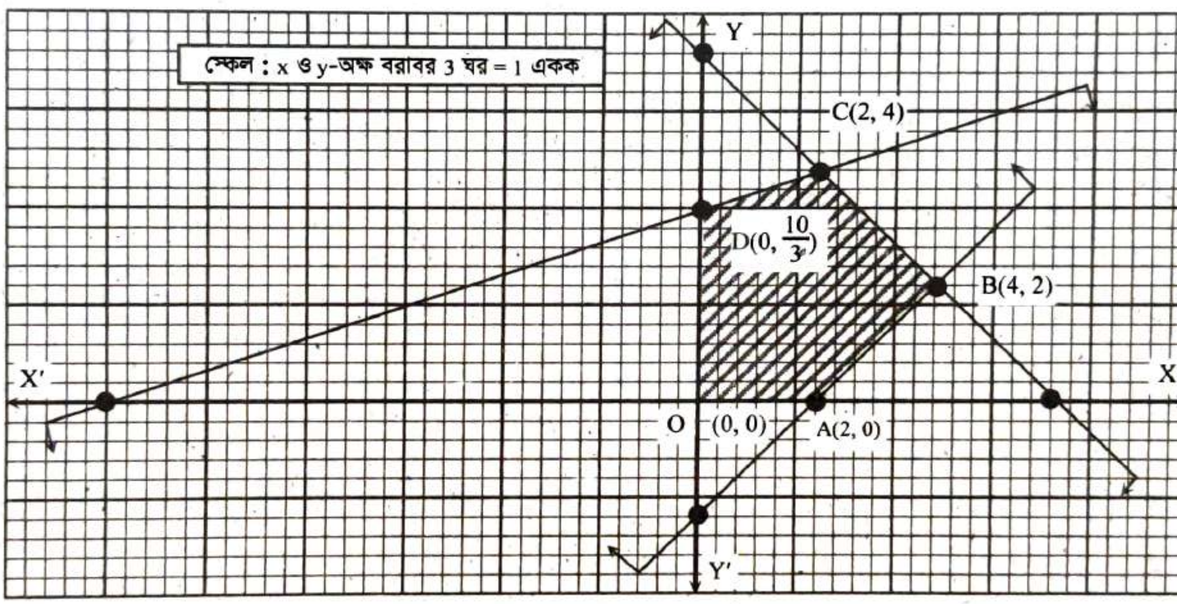
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (6, 0) ও (0, 6) বিন্দুতে ছেদ করে।

$x - y = 2$ ..........(iii)

বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (2, 0) ও (0, –2) বিন্দুতে ছেদ করে।

লেখচিত্রে দেখা যায় যে, (i), (ii) ও (iii) এর সকল বিন্দু ও এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।




চিত্রে OABCDO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তা হলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি O(0, 0), A(2, 0), B(4, 2), C(2, 4), $D\left(0, \frac{10}{3}\right)$

$z = 2x + y$

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 2.0 + 0 = 0$

A(2, 0) বিন্দুতে $z = 2.2 + 0 = 4$

B(4, 2) বিন্দুতে $z = 2.4 + 2 = 10$

C(2, 4) বিন্দুতে $z = 2.2 + 4 = 8$

$D\left(0, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 2.0 + \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

$\therefore z_{max} = 10$ **(Ans.)**

3. **ক** আধুনিক সভ্য সমাজের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা হলো খাদ্য সমস্যা। একজন অথবা কোন গোষ্ঠী দৈনিক কি পরিমাণ খাদ্য গ্রহণ করলে তাদের সুষম খাদ্য গ্রহণ নিশ্চিত করা যায়, পুষ্টিগত বিবেচনায় সর্বনিম্ন খরচে সঠিক খাদ্য তালিকা তৈরি ও তা সরবরাহ করার জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হয়।

**খ** মনে করি, দৈনিক খাদ্য চাহিদা মেটানোর জন্য চাল x কেজি এবং মাংস y কেজি প্রতিদিন খাওয়া হবে।

তাহলে $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$

শর্তানুযায়ী, $8x + 12y \geq 32$ বা, $2x + 3y \geq 8$

এবং $16x + 6y \geq 22$ বা, $8x + 3y \geq 11$

মনে করি, অভীষ্ট ফাংশন z.

এখানে মোট খরচ (i) x কেজি চালের মূল্য 30x টাকা

এবং (ii) y কেজি মাংসের মূল্য 40y টাকা

$\therefore z_{min} = 30x + 40y$

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হলো : $z_{min} = 30x + 40y$

শর্তসমূহ : $2x + 3y \geq 8$

$8x + 3y \geq 11$

এবং $x, y \geq 0$

অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$2x + 3y \geq 8$ এর অনুরূপ সমীকরণ $2x + 3y = 8$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{8/3} = 1$ ... ... ... (i)

$8x + 3y \geq 11$ এর অনুরূপ সমীকরণ $8x + 3y = 11$

বা, $\frac{x}{11/8} + \frac{y}{11/3} = 1$ ... ... ... (ii)

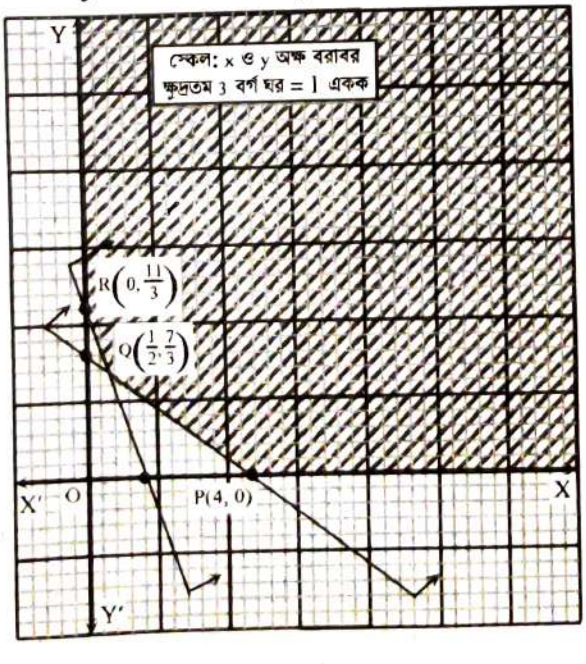
$x \geq 0, y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0$ ... ... ... (iii)

এবং $y = 0$ ... ... ... (iv)

এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 3 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (i), (ii), (iii) ও (iv) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।

এবার, $2x + 3y \geq 8$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 8$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রে ছক কাগজে (i) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে (সরল রেখার দুই প্রান্তে) → চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $2x + 3y \geq 8$ অসমতার সমাধান।

পুনরায় $8x + 3y \geq 11$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই, $0 \geq 11$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (ii) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে রেখাটিতে → চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $8x + 3y \geq 11$ অসমতার সমাধান।




$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y অক্ষের ওপর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়। এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়। লেখচিত্রের ছায়াঘেরা এলাকাকে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা বলা হয়।

লেখ চিত্রানুসারে, এখানে সম্ভাব্য এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু আছে।

কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (i) ও (iv) নং এর ছেদ বিন্দু (4, 0); (i) ও (ii) নং এর ছেদ বিন্দু $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$, (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

মনে করি, P(4, 0), Q$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$ এবং R$\left(0, \frac{11}{3}\right)$

| কৌণিক বিন্দু | $z = 30x + 40y$ |
|---|---|
| P(4, 0) | $z = 30 \times 4 + 40 \times 0 = 120$ |
| Q$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$ | $z = 30 \times \frac{1}{2} + 40 \times \frac{7}{3} = 108.33$ |
| R$\left(0, \frac{11}{3}\right)$ | $z = 30 \times 0 + 40 \times \frac{11}{3} = 146.67$ |

z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 108.33

$\therefore$ দৈনিক চাল $\frac{1}{2}$ কেজি এবং মাংস $\frac{7}{3}$ কেজি গ্রহণ করলে, সবচেয়ে কম খরচে প্রয়োজন মিটে যাবে। **(Ans.)**

**গ** প্রোটিন ও কার্বোহাইড্রেট উভয়েই দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন যদি 18 একক করে বেড়ে যায় তবে প্রোটিন ও কার্বোহাইড্রেট এর পরিমাণ হবে যথাক্রমে $(32 + 18) = 50$ ও $(22 + 18) = 40$ একক।

অসমতার সমীকরণ হবে,

$8x + 12y \geq 50$ বা, $4x + 6y \geq 25$

এবং $16x + 6y \geq 40$ বা, $8x + 3y \geq 20$

অসমতার সমীকরণগুলিকে সমতায় প্রকাশ করে পাই,

$4x + 6y = 25$ ... ... ... (i)

বা, $\frac{x}{\frac{25}{4}} + \frac{y}{\frac{25}{6}} = 1$

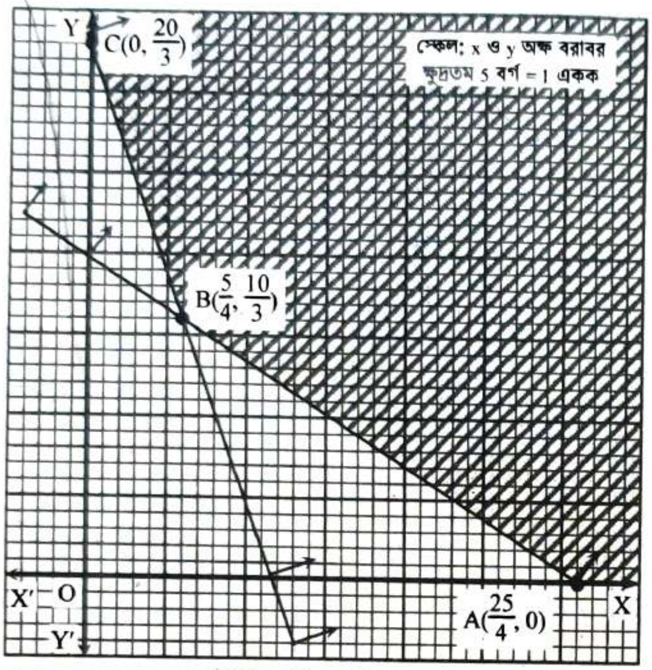
এবং $8x + 3y = 20$ ... ... ... (ii)

বা, $\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{20}{3}} = 1$

(i) ও (ii) নং কে সমাধান করে পাই, $x = \frac{5}{4}, y = \frac{10}{3}$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{3}\right)$.

সমতাগুলোকে লেখকাগজে x ও y অক্ষ বরাবরে যথাক্রমে 5 ঘর = 1 একক নিয়ে অঙ্কন করে এর অসমতার সমাধান অঙ্কন চিহ্নিত করি।




ছায়াঘেরা অংশের কৌণিক বিন্দুগুলি

$A\left(\frac{25}{4}, 0\right), B\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{3}\right)$ ও $C\left(0, \frac{20}{3}\right)$

$A\left(\frac{25}{4}, 0\right)$ বিন্দুতে $z = 30x + 40y$

$$= 30 \times \frac{25}{4} + 40 \times 0 = 187.5$$

$B\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 30 \times \frac{5}{4} + 40 \times \frac{10}{3}$

$$= 37.5 + 133.3 = 170.8$$

$C\left(0, \frac{20}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 30 \times 0 + 40 \times \frac{20}{3} = 266.67$

$z_{min} = 170.8$ টাকা।

মাংসের পরিমাণ $\frac{5}{4}$ কেজি এবং চালের পরিমাণ $\frac{10}{3}$ কেজি **(Ans.)**

**4.** ক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল সুবিধা হলো সর্বনিম্ন বিনিয়োগে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় রূপদান। বিষয়টি নিচে বর্ণনা করা হলো।

i. সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যন্ত্র দক্ষতার সাথে সঠিক ব্যবহার ও কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য অর্জন।

ii. তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।

iii. উৎপাদন ও বিপণনে সকল প্রকার দৃশ্যমান প্রতিবন্ধকতার সঙ্গে পরিচয় এবং তা অতিক্রমের পন্থা অবলম্বনের জ্ঞান অর্জন।

iv. অনাকাঙ্ক্ষিত প্রতিবন্ধকতা চিহ্নিত ও দূরীকরণের দ্বারা উৎপাদন বা বিপণন ব্যয় কমানো এবং মুনাফা বৃদ্ধি।

v. প্রাপ্ত তথ্য, উপাত্ত, সম্পদ, মূলধন ও সুবিধা-অসুবিধাকে বিবেচনা করে ভবিষ্যত পরিকল্পনাকে আরও টেকসই ও বেগবান করা।

খ মনে করি, কোম্পানিটি সপ্তাহে x একক A দ্রব্য এবং y একক B দ্রব্য উৎপন্ন করে।

উদ্দীপকের শর্তানুসারে অসমতাগুলো হলো—

$12x + 25y \leq 30 \times 60$

$\therefore\ 12x + 25y \leq 1800$

এবং $\frac{y}{2} \geq \frac{x}{5}$

$\therefore\ y \geq \frac{2}{5}x$

$x, y \geq 0$

$z_{max} = 3x + 5y$,

অসমতাগুলি সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা নির্ণয় করি।

$12x + 25y = 1800$ ... ... ... (i)

$y = \frac{2}{5}x$ ... ... ... (ii)

(i) হতে পাই, $\frac{x}{150} + \frac{y}{72} = 1$

রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (150, 0) ও (0, 72) বিন্দুতে ছেদ করে।

সমীকরণ (i) এ $y = \frac{2}{5}x$ বসিয়ে

$12x + 25.\frac{2}{5}x = 1800$

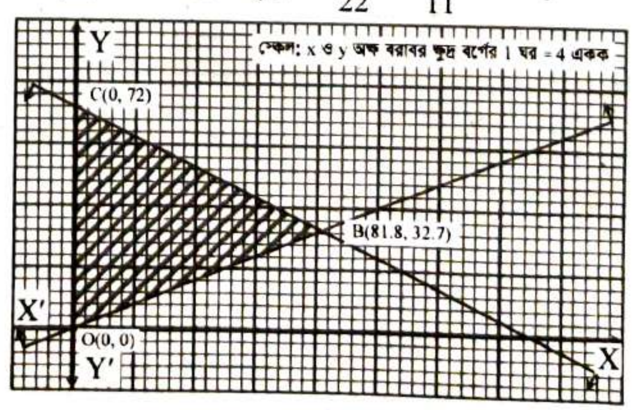
বা, $12x + 10x = 1800$

বা, $22x = 1800$ বা, $x = \frac{1800}{22} = \frac{900}{11}$

(ii) এ $x = \frac{900}{11}$ বসিয়ে

$y = \frac{2}{5} \times \frac{900}{11}$

$= \frac{360}{11}$

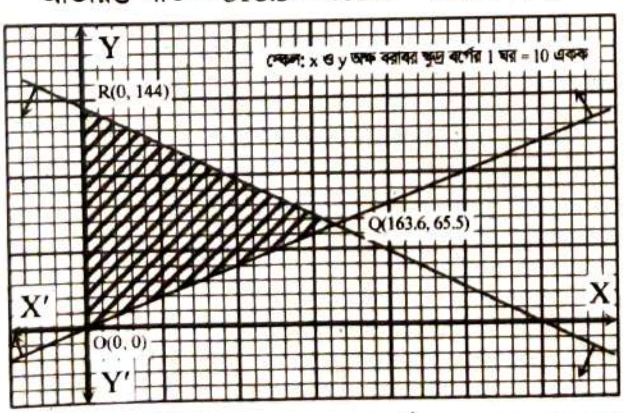



(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{900}{11}, \frac{360}{11}\right)$

বা, B(81.8, 32.7) সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি O(0, 0), B(81.8, 32.7) ও C(0, 72)

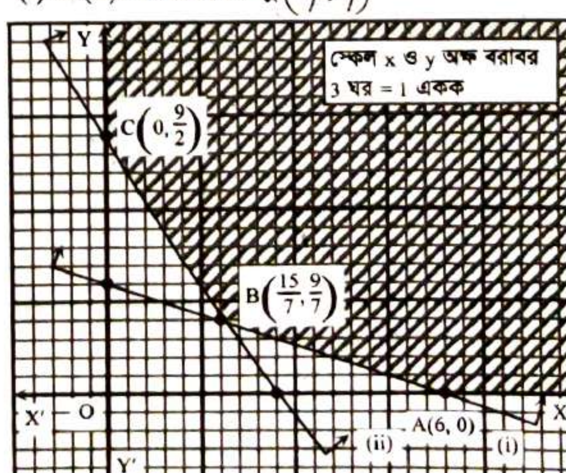
$O(0, 0)$ বিন্দুতে $z = 3x + 5y = 3.0 + 5.0 = 0$
$B(81.8, 32.7)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 81.8 + 5 \times 32.7$
$= 408.9$
$C(0, 72)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 5 \times 72 = 360$
$B(81.8, 32.7)$ বিন্দুতে $z_{max} = 408.9$ টাকা।

**গ** সময় দ্বিগুণ হলে অসমতাগুলি হবে $12x + 25y \leq 3600$
এবং $y \geq \frac{2}{5}x$
অসমতাগুলি সমতা ধরে পাই,
$12x + 25y = 3600$ ... ... ... (iii)
এবং $y = \frac{2}{5}x$ ... ... ... (iv)
(i) হতে পাই, $\frac{x}{300} + \frac{y}{144} = 1$
সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে $(300, 0)$ ও $(0, 144)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।
(iii) এ $y = \frac{2}{5}$ বসিয়ে
$12x + 25.\frac{2}{5} = 3600$ বা, $12x + 10x = 3600$
বা, $22x = 3600$ $\therefore x = \frac{1800}{11}$
(iii) এ $x = \frac{1800}{11}$ বসিয়ে, $y = \frac{2}{5} \times \frac{1800}{11} = \frac{720}{11}$
$\therefore$ (iii) ও (iv) এর ছেদবিন্দু $\left(\frac{1800}{11}, \frac{720}{11}\right)$
$= (163.6, 65.5)$ সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি
$O(0, 0)$, $Q(163.6, 65.5)$, $R(0, 144)$
$O(0, 0)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 5 \times 0 = 0$
$Q(163.6, 65.5)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 163.6 + 5 \times 65.5$
$= 818.3$
$R(0, 144)$ বিন্দুতে, $z = 3 \times 0 + 5 \times 144 = 720$
$\therefore z_{max} = 818.3$
অতিরিক্ত লাভ $= 818.3 - 408.9 = 409.4$ টাকা




5. **ক** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যা গঠনের জন্য কেবলমাত্র তিনটি ধাপ (step) অতিক্রম করতে হয়। যা নিম্নরূপ :
**প্রথম ধাপ:** সিদ্ধান্ত চলক (Decision variables) খুঁজে বের করে তাদের গাণিতিক নামকরণ।
**দ্বিতীয় ধাপ:** উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন (Objective function) শনাক্তকরণ ও সিদ্ধান্ত চলকের দ্বারা গাণিতিক বাক্যরূপে প্রকাশ।
**তৃতীয় ধাপ:** শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints or restrictions) গুলোকে চিহ্নিত করে একঘাতিক (রৈখিক) সমীকরণ বা অসমতা আকারে রূপদান।
অতঃপর প্রথমে উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন, দ্বিতীয়ত শর্ত বা সীমাবদ্ধতা এবং সর্বশেষে সিদ্ধান্তচলকের পরিচয় নির্দিষ্ট করে লিখলে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম পাওয়া যায়।

**খ** মনে করি, A প্রকারের x কিলোগ্রাম ও B প্রকারের y কিলোগ্রাম খাদ্যের প্রয়োজন।
প্রোটিন ও ফ্যাটের ন্যূনতম প্রয়োজন 6 ও 9 একক।
প্রশ্নানুসারে, $x + 3y \geq 6$, $3x + 2y \geq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
উক্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি
$x + 3y = 6$............(i)
বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$
রেখাটি অক্ষদ্বয়কে $(6, 0)$ ও $(0, 2)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।
$3x + 2y = 9$ .................(ii)
বা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{9}{2}} = 1$
রেখাটি অক্ষদ্বয়কে $(3, 0)$ ও $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(i) কে 2 দ্বারা এবং (ii) কে 3 দ্বারা গুণ করে বিয়োগ করে পাই,
$2x - 9x + 6y - 6y = 12 - 27$
বা, $-7x = -15$ বা, $x = \frac{15}{7}$
(i) এ $x = \frac{15}{7}$ বসিয়ে
$\frac{15}{7} + 3y = 6$ বা, $3y = 6 - \frac{15}{7}$
বা, $3y = \frac{42 - 15}{7}$ বা, $3y = \frac{27}{7}$ $\therefore y = \frac{9}{7}$
(i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দু $\left(\frac{15}{7}, \frac{9}{7}\right)$



এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করি এবং এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা চিহ্নিত করি।
লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য। লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা $A(6, 0), B\left(\frac{15}{7}, \frac{9}{7}\right)$ ও $C\left(0, \frac{9}{2}\right)$

**গ** খরচের সম্ভাব্য সর্বনিম্ন মান $z = 2x + 3y$
প্রোটিন ও ফ্যাটের ন্যূনতম চাহিদা বেড়ে গিয়ে সম্ভাব্য সমাধানে কৌণিক বিন্দুগুলি $(9, 0), \left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ এবং $(0, 6)$

হলে, $(9, 0)$ বিন্দুতে $z = 2x + 3y = 2.9 + 3.0 = 18$

$\left(\frac{18}{7}, \frac{15}{7}\right)$ বিন্দুতে $z = 2.\frac{18}{7} + 3.\frac{15}{7} = \frac{36}{7} + \frac{45}{7}$

$$= \frac{81}{7} = 11.57$$

$(0, 6)$ বিন্দুতে $z = 2.0 + 3.6 = 18$

$z_{min} = 11.57$ টাকা

$\therefore \frac{18}{7}$ একক A এবং $\frac{15}{7}$ একক B খাদ্য দিয়ে কম খরচে দৈনিক চাহিদা মেটানো সম্ভব।

**6.** **ক** দেওয়া আছে, $\frac{1}{|3x-1|} > \frac{1}{9}$

$\Rightarrow |3x - 1| < 9 \Rightarrow -9 < 3x - 1 < 9$

$\Rightarrow -9 + 1 < 3x < 9 + 1$ [1 যোগ করে]

$\Rightarrow -8 < 3x < 10$

$\Rightarrow -\frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$ [$\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore -\frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$

কিন্তু, $x \neq \frac{1}{3}$

$\therefore$ পরমমান ব্যতীত মান $= \frac{-8}{3} < x < \frac{1}{3}$

অথবা, $\frac{1}{3} < x < \frac{10}{3}$

**খ** ধরি, এককের অঙ্ক = x
দশকের অঙ্ক = y
$\therefore$ সংখ্যাটি $z = 10y + x$
এককের অঙ্ককে 3 গুণ করলে হয় $= 3x$
দশকের অঙ্ককে 2 গুণ করলে হয় $= 2y$
$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10.(2y) + 3x = 20y + 3x$
শর্তসমূহ: $20y + 3x \geq 72$
$x \geq 2$
$y \geq 3$

অসমতাগুলি সমীকরণ আকারে লিখে পাই,
$20y + 3x = 72$

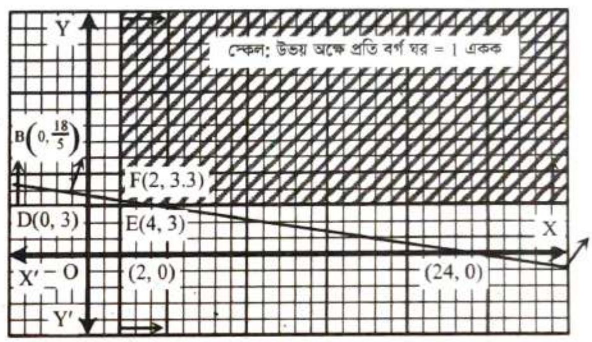
বা, $\frac{20y}{72} + \frac{3x}{72} = 1$ বা, $\frac{y}{\frac{72}{20}} + \frac{x}{24} = 1$

বা, $\frac{y}{\frac{18}{5}} + \frac{x}{24} = 1 \therefore \frac{x}{24} + \frac{y}{\frac{18}{5}} = 1$ ... ... ... (i)

$x = 2$ ... ... ... (ii)

এবং $y = 3$ ... ... ... (iii)

উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুকে একক ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন ও সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল চিহ্নিত করি।




**গ** (i) এবং (ii) সমাধান করে, $x = 2$
এবং $3x + 20y = 72$
বা, $3.2 + 20y = 72$
বা, $6 + 20y = 72$ বা, $20y = 72 - 6$

বা, $20y = 66$ বা, $y = \frac{66}{20} \therefore y = \frac{33}{10}$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $F\left(2, \frac{33}{10}\right)$

আবার, (i) এবং (iii) সমাধান করে,
$y = 3$
$\therefore 3x + 20y = 72$
বা, $3x + 20.3 = 72$ বা, $3x = 72 - 60$
বা, $3x = 12 \therefore x = 4$
$\therefore$ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $E(4, 3)$

লেখচিত্র হতে পাই, $F\left(2, \frac{33}{10}\right)$ এবং $E(4, 3)$

$F\left(2, \frac{33}{10}\right)$ বিন্দুতে ফাংশনের মান, $z = 10y + x$

$= 10.\frac{33}{10} + 2 = 33 + 2 = 35$

$E(4, 3)$ বিন্দুতে ফাংশনের মান, $z = 10y + x$
$= 10.3 + 4 = 34$, যা সর্বনিম্ন
$\therefore$ সর্বনিম্ন সংখ্যাটি $= 34$.

7. **ক** **উৎপাদন ও নির্মাণ সমস্যা:** কারখানা বা শিল্পপ্রতিষ্ঠানে সম্পদের সীমাবদ্ধতা, শ্রমিকের ভিন্নতা (যেমন: বিভিন্ন প্রকারের শ্রমিক থাকে যাদের কর্মদক্ষতা ও মজুরী কাঠামো ভিন্ন ভিন্ন হয়), যন্ত্রের কার্যক্ষমতা, সময়ের সীমাবদ্ধতা, উৎপাদিত পণ্যের চাহিদা ও যোগান নিশ্চিত করা অত্যন্ত জটিল কাজ। এই সমস্যার সম্পূর্ণ সঠিক সমাধান করতে পারলে তবেই সর্বনিম্ন ব্যয়ে সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জন সম্ভব। আর এই গুরুত্বপূর্ণ কাজে ব্যবহার হয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

**খ** দেওয়া আছে, $z = x + y$

$y = x + 5$

এবং $|z| < 1$

বা, $|x + y| < 1$

বা, $|x + x + 5| < 1$

বা, $|2x + 5| < 1$

বা, $-1 < 2x + 5 < 1$

বা, $-1 - 5 < 2x + 5 - 5 < 1 - 5$

বা, $-6 < 2x < -4$

বা, $-3 < x < -2$ $[\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore -3 < x < -2$

সংখ্যারেখায়:


**গ** মনে করি, রুমাল x খানা এবং টিস্যু বক্স y খানা কিনতে হবে।

এবং অভীষ্ট ফাংশন $z = Max\ (x + y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x \geq 6$

$y \geq 4$

$30x + 40y \leq 500$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

$\therefore$ আমরা পাই, $x = 6 \cdots\cdots\cdots$ (i)

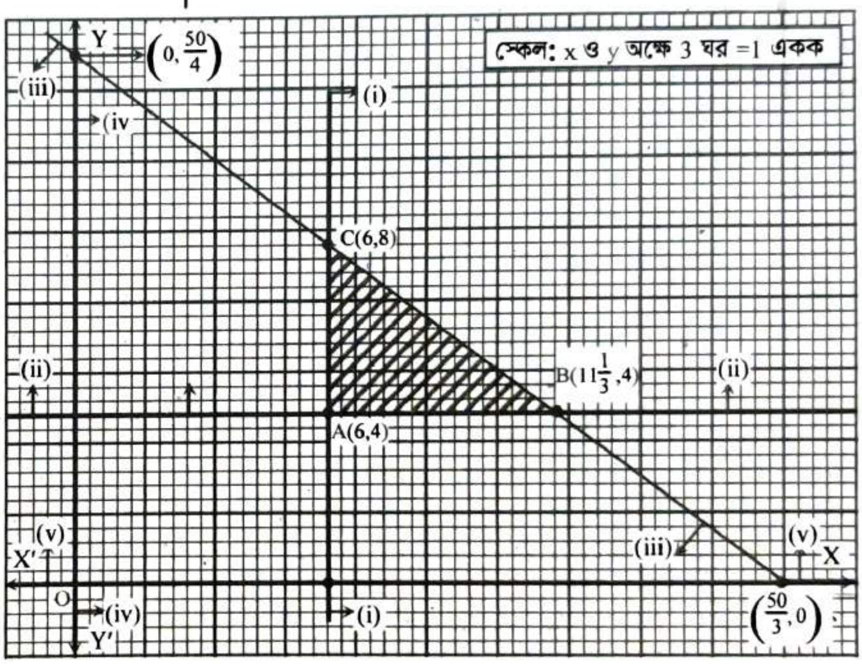
$y = 4 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$30x + 40y = 500$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{50}{3}} + \frac{y}{\frac{50}{4}} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iii)

$x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (iv)

$y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$ (v)




লেখচিত্রে দেখা যায় (i) এবং (ii) এর সকল বিন্দু এবং (i) ও (ii) এর পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \geq 6$ এবং $y \geq 4$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC.

A হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore A(6, 4)$

B " (ii) " (iii) " " $\therefore B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$

এবং C " (i) " (iii) " " $\therefore C\ (6, 8)$

এখন $A(6, 4)$ এর জন্য $z = 6 + 4 = 10$

$B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ " " $z = 11.33 + 4 = 15.33$

$C\ (6, 8)$ " " $z = 6 + 8 = 14$

দেখা যায়, $B\left(11\frac{1}{3}, 4\right)$ বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ হয় যা একটি ভগ্নাংশ। কিন্তু জিনিসের সংখ্যা ভগ্নাংশ হবে না। কাজেই এক্ষেত্রে $x = 11$ এবং $y = 4$ ধরলে $(11, 4)$ বিন্দুটি আচ্ছাদিত ক্ষেত্রের মধ্যে থাকে।

$\therefore$ রুমাল 11 খানা ও টিস্যুবক্স 4 খানা।

8. **ক** $S = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 5\}$ সেটের ঊর্ধ্বসীমার সেট,

$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$

$\therefore$ S সেটের সুপ্রিমাম $= 5$

আবার, নিম্নসীমার সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$

$\therefore$ S সেটের ইনফিমাম $= 2$

**খ** $f(x) = ab - ax$

$a = 3$ ও $b = 2$ হলে $f(x) = 3.2 - 3x = 6 - 3x$

এখন, $\frac{1}{|f(x)|} > a, x \neq 2$

বা, $\frac{1}{|6 - 3x|} > 3, x \neq 2$

বা, $|6 - 3x| < \frac{1}{3}, x \neq 2$

বা, $-\frac{1}{3} < 6 - 3x < \frac{1}{3}, x \neq 2$

বা, $-\frac{1}{3} - 6 < 6 - 3x - 6 < \frac{1}{3} - 6, x \neq 2$

[– 6 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{-19}{3} < -3x < \frac{-17}{3}, x \neq 2$

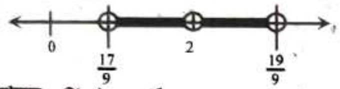
বা, $\frac{-19}{9} < -x < \frac{-17}{9}, x \neq 2$ [$\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{19}{9} > x > \frac{17}{9}, x \neq 2$ [–1 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \frac{17}{9} < x < \frac{19}{9}, x \neq 2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{17}{9} < x < \frac{19}{9}, x \neq 2\right\}$

সংখ্যারেখা :




**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = ab - ax$

$f(y) = by$

$x \leq 6, y \leq 6$

$a = b = 8$ হলে $f(x) = 8.8 - 8x = 64 - 8x$ এবং $f(y) = 8y$

আবার, $f(x) \leq f(y)$

বা, $64 - 8x \leq 8y$ বা, $8x + 8y \geq 64$

আমরা পাই, অভীষ্ট ফাংশনে $z_{max} = 6x + 7y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $8x + 8y \geq 64$

$y \leq 6$

$x \leq 6$

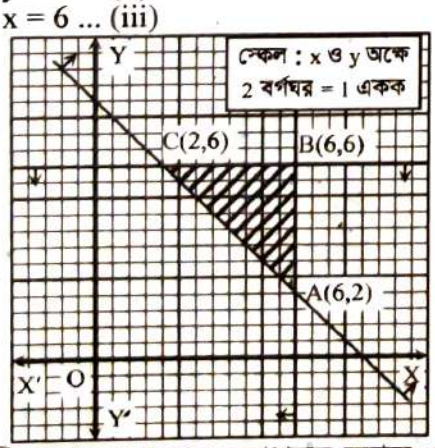
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অংকন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

$8x + 8y = 64$

বা, $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} = 1$ ..............................(i)

$y = 6$ ... (ii)

$x = 6$ ... (iii)




লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা ABC। A (6, 2) হলো (i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু, B (6, 6) হলো (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু এবং C (2, 6) হলো (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু।

এখন, A(6, 2) বিন্দুতে $z = 6.6 + 7.2 = 36 + 14 = 50$

B(6, 6) বিন্দুতে $z = 6.6 + 7.6 = 36 + 42 = 78$

C(2, 6) বিন্দুতে $z = 6.2 + 7.6 = 12 + 42 = 54$

অতএব, B(6, 6) বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান = 78 **(Ans.)**

**৭.** **ক** $(|p| + |q|)^2 = |p|^2 + 2|p||q| + |q|^2$

$= p^2 + 2|pq| + q^2$

$[\because |p|^2 = p^2, |q|^2 = q^2, |p||q| = |pq|]$

বা, $(|p| + |q|)^2 \geq p^2 + 2pq + q^2$

$[\because |pq| \geq pq]$

বা, $(|p| + |q|)^2 \geq (p + q)^2$

বা, $(|p| + |q|)^2 \geq (|p + q|)^2$

বা, $|A|^2 \leq (|p| + |q|)^2$

$\therefore |A| \leq |p| + |q|$ **(প্রমাণিত)**

**খ** দেওয়া আছে, $p, q, r \in \mathbb{R}$ এবং $A = p + q, B = p + r$

আবার, $A = B$

বা, $p + q = p + r$

বা, $(p + q) + (-p) = (p + r) + (-p)$

[যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $p + \{q + (-p)\} = p + \{r + (-p)\}$

[যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $\{p + (-p)\} + q = \{p + (-p)\} + r$

[যোগের বিনিময় বিধি]

বা, $0 + q = 0 + r$ [যোগের বিপরীতক]

$\therefore q = r$ [যোগের অভেদক] **(প্রমাণিত)**

**গ** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \leq 7, 2x + 5y \leq 20, x, y \geq 0$

প্রথমে, অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \leq 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$x + y = 7$ বা $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ......... (i)

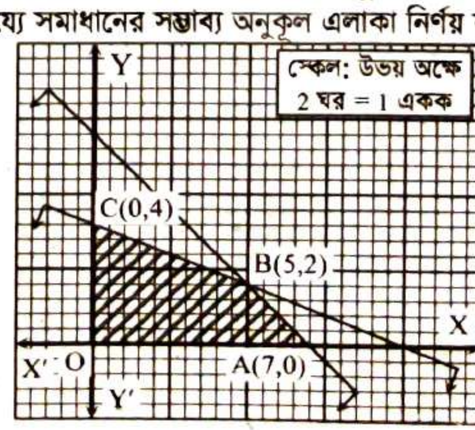
$2x + 5y \leq 20$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ

$2x + 5y = 20$ বা $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$ ......... (ii)

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $x = 0$ ......... (iii)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y = 0$ ......... (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।



লেখচিত্রে দেখা যায়, সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু O(0, 0) অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রে A, B ও C যথাক্রমে (i) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO যা চিত্রে, ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। তাহলে সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে-

O(0, 0), A(7, 0), B(5, 2) এবং C(0, 4)

এখন O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(7, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(5, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 5 + 4 \times 2 = 23$

এবং C(0, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 4 = 16$

স্পষ্টত: B(5, 2) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়। অতএব সর্বোচ্চ মানের বিন্দুটি B(5, 2) এবং

সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 23$

**10.** ক দেওয়া আছে, $f(x) = x - 5$

প্রশ্নমতে, $f(2) \leq f(10 - 2x) \leq f(12)$

বা, $2 - 5 \leq 10 - 2x - 5 \leq 12 - 5$

বা, $-3 \leq 5 - 2x \leq 7$

বা, $-3 - 2 \leq 5 - 2x - 2 \leq 7 - 2$

বা, $-5 \leq 3 - 2x \leq 5$

$\therefore |3 - 2x| \leq 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = x - 5,\ g(x) = x - 2,\ p(x) = x - 6$

এবং $q(x) = x - 3$

এবং $\frac{p(x)}{q(x)} < \frac{f(x)}{g(x)}$

বা, $\frac{x-6}{x-3} < \frac{x-5}{x-2}$

বা, $\frac{x-6}{x-3} - \frac{x-5}{x-2} < 0$

বা, $\frac{(x-6)(x-2) - (x-5)(x-3)}{(x-3)(x-2)} < 0$

বা, $\frac{x^2 - 8x + 12 - (x^2 - 8x + 15)}{(x-3)(x-2)} < 0$

বা, $\frac{x^2 - 8x + 12 - x^2 + 8x - 15}{(x-2)(x-3)} < 0$

বা, $\frac{-3}{(x-2)(x-3)} < 0$ বা, $\frac{3}{(x-2)(x-3)} > 0$

অসমতাটি সত্য হবে যদি $(x - 2)(x - 3)$ উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

| শর্ত | $(x-2)$ এর চিহ্ন | $(x-3)$ এর চিহ্ন | $(x-2)(x-3)$ এর চিহ্ন |
|---|---|---|---|
| $x < 2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $2 < x < 3$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x > 3$ | $+$ | $+$ | $+$ |

সমাধান $x < 2$ অথবা $x > 3$.

নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2$ অথবা $x > 3\}$

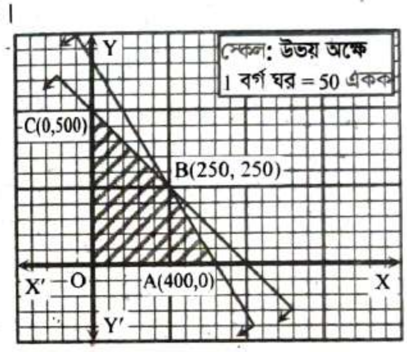
সংখ্যারেখাটি নিম্নরূপ:


গ মনে করি, বড় মুরগীর বাচ্চার সংখ্যা x এবং ছোট মুরগীর বাচ্চার সংখ্যা y

অভীষ্ট ফাংশন: $z = 2 \times \frac{3}{2}x + 2y = 3x + 2y$

শর্তসমূহ: $10x + 6y \leq 4000,\ x + y \leq 500,\ x, y \geq 0$

অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অংকন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




$10x + 6y = 4000$ ... ... ... (i)

বা, $\frac{x}{400} + \frac{y}{\frac{2000}{3}} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে A(400, 0) ও $\left(0, \frac{2000}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $x + y = 500$ ... ... ... (ii)

বা, $\frac{x}{500} + \frac{y}{500} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (500, 0) ও C(0, 500) বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) ও (ii) ছেদবিন্দু B(250, 250)

সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে O(0, 0), A(400, 0), B(250, 250) এবং C(0, 500)

A(400, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 400 + 0 = 1200$

B(250, 250) বিন্দুতে $z = 3 \times 250 + 2 \times 250 = 1250$

C(0, 500) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 500 = 1000$

তিনি ছোট মুরগী 250টি এবং বড় মুরগী 250টি উৎপাদন করলে সর্বোচ্চ 1250 টাকা লাভ করবেন।

**11.** ক প্রতিটি কাজ বা সমস্যা সুষ্ঠ ও নিপুনতার সাথে সম্পাদনের জন্য পরিকল্পনা একটি অতি অত্যাবশ্যকীয় বিষয়। যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং এ প্রদত্ত সমস্যাটি সমাধানকল্পে

পরিকল্পনার অংশ হিসেবে অভীষ্ট ফাংশন ও সিদ্ধান্ত চলক কি, কি তা প্রথমে নির্ধারণ করতে হয়। অতঃপর বিভিন্ন সীমাবদ্ধতাগুলিকে অসমতা বা সমতার মাধ্যমে প্রকাশ করে সমস্যাটি গাণিতিক আকারে উপস্থাপন করা হয়।

**খ** $\frac{1}{|5x-1|} > \frac{1}{9}$ এবং $x \neq \frac{1}{5}$

বা, $|5x - 1| < 9$

বা, $-9 < 5x - 1 < 9$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-9 + 1 < 5x - 1 + 1 < 9 + 1$

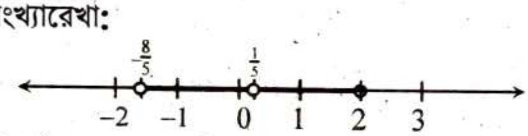
বা, $-8 < 5x < 10$

বা, $\frac{-8}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{10}{5}$

$\therefore -\frac{8}{5} < x < 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{8}{5} < x < 2$ এবং $x \neq \frac{1}{5}\}$

সংখ্যারেখা:




**গ** মনে করি, হাঁসের বাচ্চা xটি ও মুরগির বাচ্চা yটি।

তাহলে, $20x + 40y \leq 800$; $x + y \leq 25$ এবং $x, y > 0$,

$z = 20x + 40y$

অসমতাগুলিকে সমতা ধরে রূপান্তরিত সমীকরণ পাই,

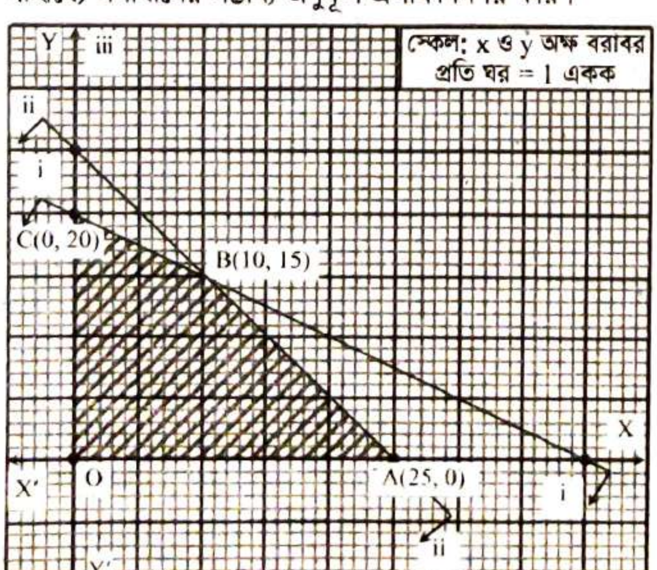
$20x + 40y = 800$ বা, $\frac{x}{40} + \frac{y}{20} = 1$ ……… (i)

$x + y = 25$ বা, $\frac{x}{25} + \frac{y}{25} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii)

$y = 0$ ……… (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সংখ্যারেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু O(0, 0) আছে ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (ii) ও (iv); (i) ও (ii) এবং (i) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু। সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABC যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে। এই এলাকার প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে— O(0, 0), A(25, 0), B(10, 15), C(0, 20)

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 20 \times 0 + 40 \times 0 = 0$

A(25, 0) বিন্দুতে $z = 20 \times 25 + 40 \times 0 = 500$

B(10, 15) বিন্দুতে $z = 20 \times 10 + 40 \times 15 = 800$

C(0, 20) বিন্দুতে $z = 20 \times 0 + 40 \times 20 = 800$

এই বিন্দুত্রয়ের কেবল B(10, 15) বিন্দুই প্রদত্ত সকল শর্ত সিদ্ধ করে। সুতরাং $x = 10$ টি হাঁসের বাচ্চা ও $y = 15$টি মুরগীর বাচ্চা কিনলে সর্বোচ্চ সংখ্যক বাচ্চা কেনা যাবে।

**12.** **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - x^2 + 4$

প্রশ্নমতে, $19 - f(x) > f(2) + x^2 + 7x - 1$

বা, $19 - 3x + x^2 - 4 > 3.2 - 2^2 + 4 + x^2 + 7x - 1$

বা, $15 - 3x > 5 + 7x$

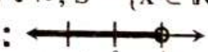
বা, $15 - 3x - 15 > 5 + 7x - 15$

বা, $-3x > 7x - 10$ বা, $-3x - 7x > -7x + 7x - 10$

বা, $-10x > -10$

বা, $x < 1$; [$-10$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

সংখ্যারেখা : 


**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - x^2 + 4$

$\therefore f(x + 1) = 3(x + 1) - (x + 1)^2 + 4$

$= 3x + 3 - x^2 - 2x - 1 + 4$

$= 6 + x - x^2 = 6 + 3x - 2x - x^2$

$= 3(2 + x) - x(2 + x) = (3 - x)(x + 2)$

এখন, $f(x + 1) > 0$

$\therefore (3 - x)(x + 2) > 0$ ……… (i)

(i)নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(3 - x)$ এবং $(x + 2)$ এর মধ্যে প্রত্যেকটি চিহ্ন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়।

| শর্ত | $(3 - x)$ এর চিহ্ন | $(x + 2)$ এর চিহ্ন | $(3 - x)(x + 2)$ এর চিহ্ন |
|---|---|---|---|
| $x < -2$ | + | − | − |
| $-2 < x < 3$ | + | + | + |
| $x > 3$ | − | + | − |

সুতরাং $-2 < x < 3$

বা, $-2 - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < 3 - \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{5}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$ $\therefore \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{5}{2}$ **(Ans.)**

**গ** অভীষ্ট ফাংশন, $z = 3x + y$

উদ্দীপক হতে পাই,

$x + 2y \le 10$
$x + y \le 6$
$x \le 4$
$x, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$x + 2y = 10$

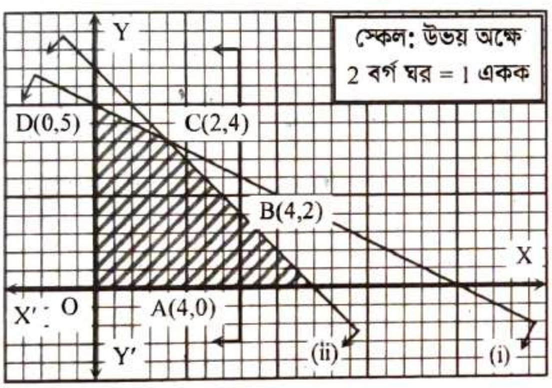
বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ .........(i)

$x + y = 6$

বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$ .........(ii)

$x = 4$ .............(iii)

বা, $x, y = 0$ ........(iv)




প্রদত্ত শর্তের আলোকে সমাধান অঞ্চলকে OABCD দ্বারা চিহ্নিত করি।

B বিন্দুতে $x = 4 \therefore 4 + y = 6$ বা, $y = 2$

$\therefore B(4, 2)$

C বিন্দু (i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু

(i) হতে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $y = 4$

$\therefore x + 4 = 6$ বা, $x = 2 \therefore C(2, 4)$

z এর সর্বোচ্চ করণের জন্য সমাধান বিন্দুগুলো অভীষ্ট ফাংশনে স্থাপন করি:

| সমাধান বিন্দু | O(0, 0) | A(4, 0) | B(4, 2) | C(2, 4) | D (0, 5) |
|---|---|---|---|---|---|
| $z = 3x + y$ | 0 | 12 | 14 | 10 | 5 |

$\therefore$ z এর সর্বোচ্চ মান, $z_{max} = 14$

যখন $x = 4; y = 2$ **(Ans.)**

**13.** **ক** $|a + 3a| - |5a - 7a|$
$= |4a| - |-2a|$

a অঋণাত্মক হলে,
$|4a| - |-2a| = 4a - 2a$
$= 2a = |2a|$

a ঋণাত্মক হলে,
$|4a| - |-2a|$
$= -4a - (-2a) = -2a$
$= |2a|$

সুতরাং নির্ণেয় মান $|2a|$

**খ** $S = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$
$= \{x : (5x - 1)(x - 3) < 0\}$

$(5x - 1)(x - 3) < 0$ ... ... ... (i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদিও কেবল যদি $(5x - 1)$ ও $(x - 3)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

| শর্ত | $(5x - 1)$ এর চিহ্ন | $(x - 3)$ এর চিহ্ন | $(5x - 1)(x - 3)$ এর চিহ্ন |
|---|---|---|---|
| $x < \frac{1}{5}$ | − | − | + |
| $\frac{1}{5} < x < 3$ | + | − | − |
| $x > 3$ | + | + | + |

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{5} < x < 3$

S এর ঊর্ধ্বসীমার সেট $= \{x : x \ge 3\}$

$\therefore$ S এর সুপ্রিমাম $= 3$

S এর নিম্নসীমার সেট $= \{x : x \le \frac{1}{5}\}$

$\therefore$ S এর ইনফিমাম $= \frac{1}{5}$

**গ** মনে করি, প্লেট x টি এবং কাপ y টি ক্রয় করবে।

অভীষ্ট ফাংশন, $z = (x + y)$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $20x + 30y \le 500$
$x \ge 3$
$y \le 6$
$x \ge 0, y \ge 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$20x + 30y = 500$

বা $\frac{x}{25} + \frac{y}{\frac{50}{3}} = 1$ ......... (i)

$x = 3$ ......... (ii)
$y = 6$ ......... (iii)
$x = 0$ ......... (iv)
$y = 0$ ......... (v)

লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) এবং (iii) এর সকল বিন্দু এবং (i) ও (iii) এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য $20x + 30y \le 500$ এবং $y \le 6$ সত্য। আবার (ii) এর সকল বিন্দু এবং (ii) এর যে পাশে মূল বিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x \ge 3$ সত্য।

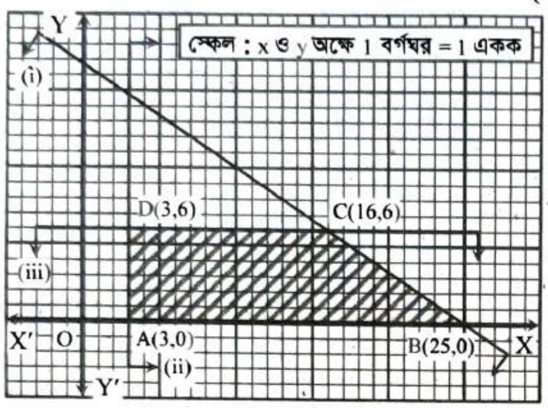
লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABCD।

A(3, 0), B(25, 0), C হচ্ছে (i) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore C(16, 6)$

আবার D হচ্ছে (ii) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore D(3, 6)$

এখন A (3, 0) বিন্দুতে $z = 3 + 0 = 3$
B (25, 0) " $z = 25 + 0 = 25$
C (16, 6) " $z = 16 + 6 = 22$
এবং D (3, 6) " $z = 3 + 6 = 9$
যেহেতু তিনি উভয় প্রকার জিনিস কিনতে চান,
তাই B(25, 0) বিন্দুতে $z = 25$ গ্রহণযোগ্য নয়।
স্পষ্টতঃ C(16, 6) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান পাওয়া যায়।
∴ প্লেট 16 টি ও কাপ 6 টি ক্রয় করতে পারবেন। **(Ans.)**




**14.** ক $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 9x - x + 3 < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : 3x(x-3) - 1(x-3) < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(3x-1) < 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < 3\}$

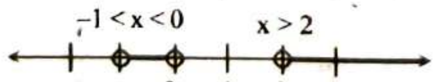
∴ লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা = 3

খ $\frac{x(x+1)}{x-2} > 0$ ... ... ... ... (i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হইবে যদি এবং কেবল যদি x, (x + 1) এবং (x − 2) এই তিনটির মধ্যে তিনটির চিহ্নই ধনাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ঋণাত্মক এবং একটির চিহ্ন ধনাত্মক হয়।

| শর্ত | x এর চিহ্ন | (x + 1) এর চিহ্ন | (x − 2) এর চিহ্ন | x(x + 1) / (x − 2) এর চিহ্ন |
|---|---|---|---|---|
| $x < -1$ | − | − | − | − |
| $-1 < x < 0$ | − | + | − | + |
| $0 < x < 2$ | + | + | − | − |
| $x > 2$ | + | + | + | + |

(i) নং সত্য হবে যদি $-1 < x < 0$ অথবা $x > 2$ হয়
নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$
সংখ্যারেখায়:




গ মনে করি, মিজান সাহেব xটি জামা এবং yটি পায়জামা তৈরি করেন।

15 মিনিট $= \frac{15}{60}$ ঘণ্টা $= \frac{1}{4}$ ঘণ্টা

20 মিনিট $= \frac{20}{60}$ ঘণ্টা $= \frac{1}{3}$ ঘণ্টা

অভীষ্ট ফাংশন $z = 40x + 50y$

অসমতার সমীকরণ, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \leq 8$

বা, $2x + y \leq 32$ এবং $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 8$

বা, $2x + 3y \leq 48$ এবং $x, y \geq 0$

অসমতার সমীকরণগুলিকে সমতা আকারে লিখে লেখচিত্র অংকন করি।

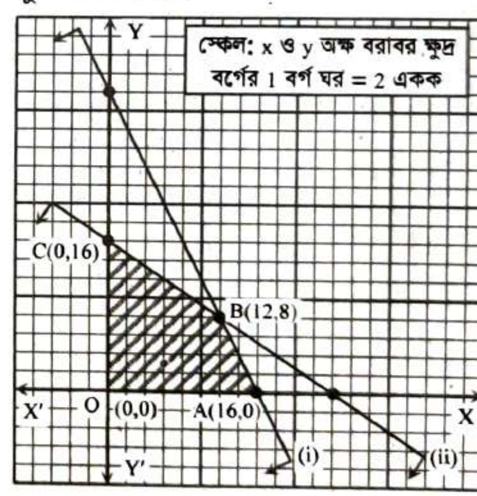
$2x + y = 32$ ... ... ... (i)

বা, $\frac{x}{16} + \frac{y}{32} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে A(16, 0) ও (0, 32) বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $2x + 3y = 48$ বা, $\frac{x}{24} + \frac{y}{16} = 1$

সুতরাং রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (24, 0) ও C(0, 16) বিন্দুতে ছেদ করে।




(i) ও (ii) এর সমাধান বিন্দু B(12, 8)

সম্ভাব্য সমাধান এলাকা OABCO যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসেবে চিহ্নিত করা হয়েছে। সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে O(0, 0), A(16, 0), B(12, 8) এবং C(0, 16)

এখন, O(0, 0) বিন্দুতে $z = 40x + 50y$
$= 40 \times 0 + 50 \times 0$
$= 0$ টাকা

A(16, 0) বিন্দুতে $z = 40 \times 16 + 50 \times 0$
$= 640$ টাকা

B(12, 8) বিন্দুতে $z = 40 \times 12 + 50 \times 8$
$= 480 + 400 = 880$ টাকা

C(0, 16) বিন্দুতে $z = 40 \times 0 + 50 \times 16 = 800$ টাকা

অতএব, মিজান সাহেব প্রতি দুই দিনের চক্রে 12টি জামা এবং ৪টি পায়জামা তৈরি করলে সর্বোচ্চ 880 টাকা মজুরি পান।

**15.** **ক** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল সুবিধা হলো সর্বনিম্ন বিনিয়োগে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় রূপদান। বিষয়টি নিচে বর্ণনা করা হলো।

i. সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যন্ত্র দক্ষতার সাথে সঠিক ব্যবহার ও কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য অর্জন।

ii. তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।

iii. উৎপাদন ও বিপণনে সকল প্রকার দৃশ্যমান প্রতিবন্ধকতার সঙ্গে পরিচয় এবং তা অতিক্রমের পন্থা অবলম্বনের জ্ঞান অর্জন।

iv. অনাকাঙ্ক্ষিত প্রতিবন্ধকতা চিহ্নিত ও দূরীকরণের দ্বারা উৎপাদন বা বিপণন ব্যয় কমানো এবং মুনাফা বৃদ্ধি।

v. প্রাপ্ত তথ্য, উপাত্ত, সম্পদ, মূলধন ও সুবিধা-অসুবিধাকে বিবেচনা করে ভবিষ্যত পরিকল্পনাকে আরও টেকসই ও বেগবান করা।

**খ** দেওয়া আছে,

$|x-1| < \frac{1}{3}$ ... ... ... (i)

বা, $|x-1| + 2 < \frac{1}{3} + 2$

বা, $|x-1+2| < \frac{7}{3}$ $[\because |a+b| \leq |a| + |b|]$

বা, $|x+1| < \frac{7}{3}$ ... ... ... (ii)

(i) কে (ii) দ্বারা গুণ করে পাই,

$|x-1|\,|x+1| < \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3}$

বা, $|x^2-1| < \frac{7}{9}$

$\therefore |x^2-1| < \frac{7}{9}$ **(প্রমাণিত)**

**গ** দেওয়া আছে,

অভীষ্ট ফাংশন, $z = 8x + 9y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x - y \geq 0$

$0 \leq x \leq 20$

$3 \leq y \leq 12.$

অসমতাগুলোকে সমতা বিবেচনা করে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অংকন করি এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকা নির্ণয় করি।

$\therefore$ আমরা পাই,

$x - y = 0$

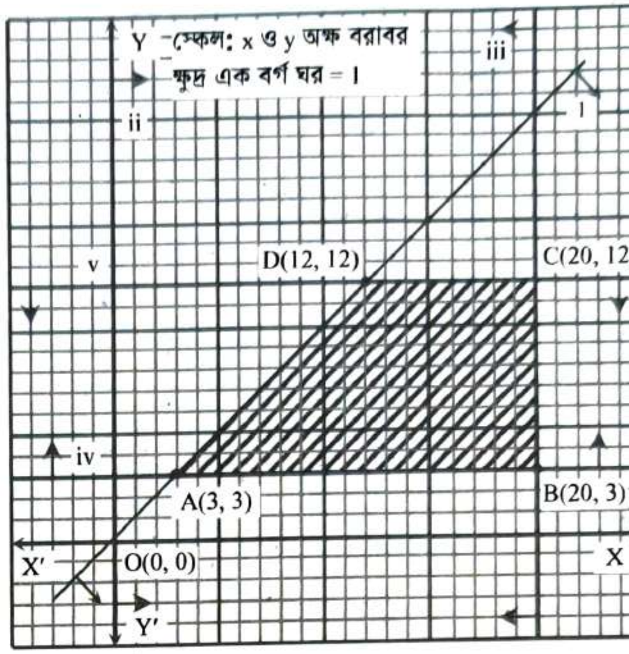
বা, $x = y$ ... ... ... (i)

$x = 0$ ... ... ... (ii)

$x = 20$ ... ... ... (iii)

$y = 3$ ... ... ... (iv)

$y = 12$ ... ... ... (v)




লেখচিত্র হতে দেখা যায় সম্ভাব্য সমাধান এলাকা ABCD।

(i) ও (iv) এর ছেদ বিন্দু A(3, 3)

(iii) ও (iv) " " " B(20, 3)

(iii) ও (v) " " " C(20, 12)

(i) ও (v) " " " D(12, 12)

A(3, 3) বিন্দুতে $z = 8.3 + 9.3 = 51$

B (20, 3) বিন্দুতে $z = 8.20 + 9.3 = 187$

C(20, 12) " $z = 8.20 + 9.12 = 268$

D(12, 12) " $z = 8.12 + 9.12 = 204$

স্পষ্টতঃ C(20, 12) বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান 268 **(Ans.)**

**16.** **ক** $-7 < x < -1$

বা, $-7 + 4 < x + 4 < -1 + 4$

বা, $-3 < x + 4 < 3$

$\therefore |x+4| < 3$ **(Ans.)**

$\frac{-7-1}{2} = -4$

অর্থাৎ অসমতাটির উভয় পাশে 4 যোগ করতে হবে।

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = |5x-3|$

প্রদত্ত অসমতাটি, $\frac{1}{f(x)} \geq 2$

বা, $\frac{1}{|5x-3|} \geq 2$; যেখানে $x \neq \frac{3}{5}$

বা, $|5x-3| \leq \frac{1}{2}$ বা, $-\frac{1}{2} \leq 5x - 3 \leq \frac{1}{2}$

বা, $\frac{-1}{2} + 3 \leq 5x - 3 + 3 \leq \frac{1}{2} + 3$

বা, $\frac{5}{2} \leq 5x \leq \frac{7}{2}$ বা, $\frac{5}{2 \times 5} \leq x \leq \frac{7}{2 \times 5}$

$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{10}$; যেখানে $x \neq \frac{3}{5}$

নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{10} \text{ এবং } x \neq \frac{3}{5} \right\}$

সংখ্যারেখা:


**গ** প্রদত্ত অসমতাগুলি: $x + 2y \geq 4$

$2x + y \geq 4$

$x + y \leq 5$

$x, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + 2y = 4$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ ......... (1)

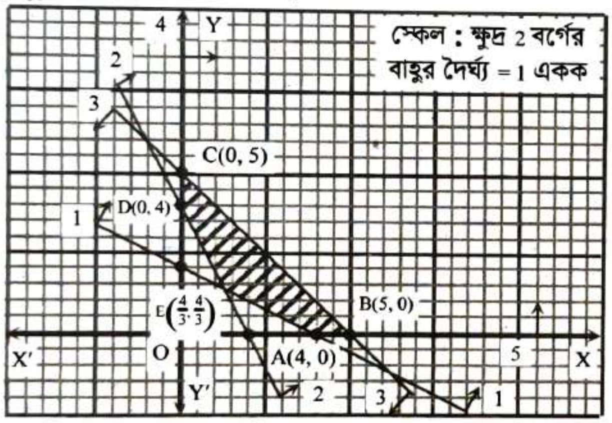
$2x + y = 4$ বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ ......... (2)

$x + y = 5$ বা, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ ......... (3)

$x \geq 0$ বা, $x = 0$ ...... (4)

$y \geq 0$ বা, $y = 0$ ...... (5)

এখন ছক কাগজে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ বিবেচনা করে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করি এবং প্রদত্ত অসমতা অনুসারে দিক নির্দেশ করি।




লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (1) ও (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + 2y \geq 4$ ও $2x + y \geq 4$ অসমতাদ্বয় সত্য। আবার সমীকরণ (3) এর সকল বিন্দু এবং এই রেখার যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত ঐ পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \leq 5$ অসমতা সত্য।

চিত্রানুসারে, A, B, C, D ও E বিন্দুগুলি যথাক্রমে (1) ও (5); (3) ও (5); (3) ও (4); (2) ও (4) এবং (1) ও (2) এর ছেদ বিন্দু এবং সকল অসমতা দ্বারা সিদ্ধ করে অর্থাৎ সমাধানের অনুকূল এলাকা ABCDE যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা আছে।

এখানে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে $A(4, 0), B(5, 0), C(0, 5), D(0, 4)$ এবং $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

এখন, $A(4, 0)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 2 \times 0 = 12$

$B(5, 0)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 5 + 2 \times 0 = 15$

$C(0, 5)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 5 = 10$

$D(0, 4)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

এবং $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{4}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

স্পষ্টত $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়। অতএব সর্বনিম্ন মানের বিন্দুটি $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ এবং সর্বনিম্ন মানটি $z_{min} = \frac{20}{3}$ **(Ans.)**

**17.** **ক** দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 1$ এবং $-2 < f(x) < 4$

$\therefore -2 < 2x + 1 < 4$

বা, $-2 - 1 < 2x + 1 - 1 < 4 - 1$

$\left[\text{প্রত্যেক পক্ষে } -\frac{4-2}{2} = -1 \text{ যোগ করে পাই}\right]$

বা, $-3 < 2x < 3 \therefore |2x| < 3$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে,

$f(x) = 2x + 1$ এবং $\left|\frac{1}{f(x) - 4}\right| > \frac{1}{10}; x \neq \frac{3}{2}$

$\therefore \left|\frac{1}{2x + 1 - 4}\right| > \frac{1}{10}$ বা, $\left|\frac{1}{2x - 3}\right| > \frac{1}{10}$

বা, $|2x - 3| < 10$

বা, $-10 < 2x - 3 < 10$

বা, $-10 + 3 < 2x - 3 + 3 < 10 + 3$

বা, $-7 < 2x < 13$

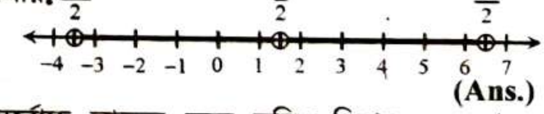
বা, $\frac{-7}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{13}{2}$

$\therefore \frac{-7}{2} < x < \frac{13}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-7}{2} < x < \frac{13}{2} \text{ এবং } x \neq \frac{3}{2}\right\}$

সংখ্যারেখায়:




**(Ans.)**

**গ** ধরি, সর্বোচ্চ লাভের জন্য দবির মিয়ার x সংখ্যক কম্পিউটার এবং y সংখ্যক মোবাইল কিনতে হবে।

শর্তমতে, কম্পিউটারের ক্রয়মূল্য $= 3 \times 20 = 60$ ডলার

প্রতিটি কম্পিউটারে লাভ $= 2 \times 8 = 16$ ডলার

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন $z_{max} = 16x + 8y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \leq 50, 60x + 20y \leq 5200$

$x \geq 0$ এবং $y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা বিবেচনা করে লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা চিহ্নিত করি।

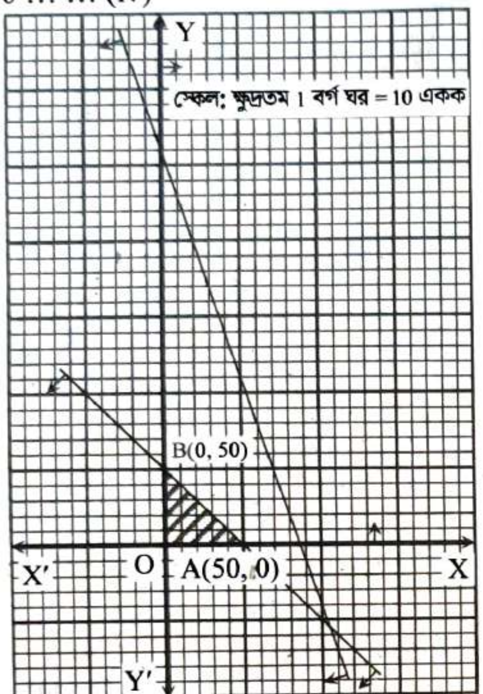
$x + y = 50$ বা, $\frac{x}{50} + \frac{y}{50} = 1$ ... ... (i)

$60x + 20y = 5200$ বা, $\frac{60x}{5200} + \frac{20y}{5200} = 1$

বা, $\frac{x}{\frac{260}{3}} + \frac{y}{260} = 1 \ldots \ldots$ (ii)

$x = 0 \ldots \ldots$ (iii)

$y = 0 \ldots \ldots$ (iv)




লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা OAB.

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (50, 0)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, 50)

O বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, 0)

A বিন্দুতে $z = 16 \times 50 + 8 \times 0 = 800$

B বিন্দুতে $z = 16 \times 0 + 8 \times 50 = 400$

C বিন্দুতে $z = 16 \times 0 + 8 \times 0 = 0$

অর্থাৎ, A(50, 0) বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ।

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভের জন্য 50টি কম্পিউটার কিনতে হবে এবং সর্বোচ্চ লাভ 800 ডলার। **(Ans.)**

**18.** ক $-1 < 2x - 3 < 5$

$-1 - 2 < 2x - 3 - 2 < 5 - 2$

$-3 < 2x - 5 < 3$

$\therefore |2x - 5| < 3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = |x - 3|$

এখন, $f(x) < \frac{1}{5}$ বা, $|x - 3| < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} < x - 3 < \frac{1}{5}$ বা, $-\frac{1}{5} + 3 < x < \frac{1}{5} + 3$

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$ বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 8 < x^2 - 8 < \frac{256}{25} - 8$

বা, $\frac{-4}{25} < x^2 - 8 < \frac{56}{25}$

বা, $-\frac{56}{25} < x^2 - 8 < \frac{56}{25}$ $\left[\because -\frac{56}{25} < \frac{-4}{25}\right]$

বা, $|x^2 - 8| < \frac{56}{25}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $z = px + qy$

এখন, $p = 3, q = 4$ হলে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

অতএব আমরা পাই, $x + 2y = 10$

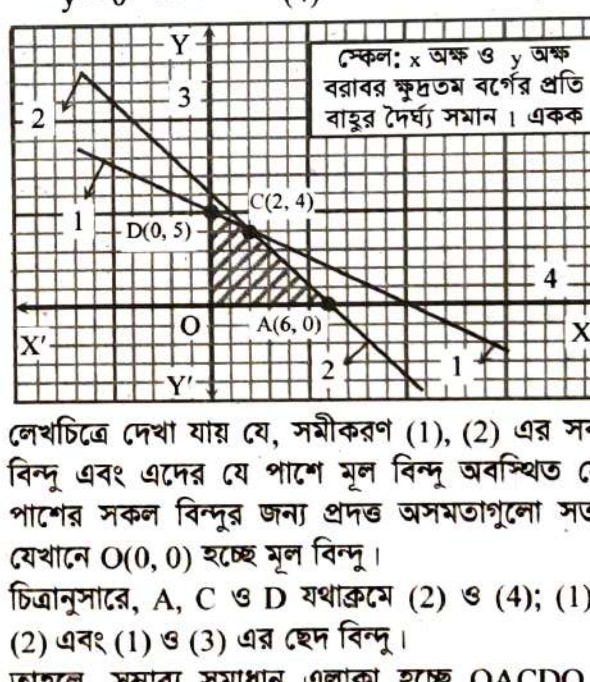
$\Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \cdots \cdots \cdots (1)$

$x + y = 6$

$\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots \cdots \cdots (2)$

$x = 0 \cdots \cdots \cdots (3)$

$y = 0 \cdots \cdots \cdots (4)$




লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (1), (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। যেখানে O(0, 0) হচ্ছে মূল বিন্দু।

চিত্রানুসারে, A, C ও D যথাক্রমে (2) ও (4); (1) ও (2) এবং (1) ও (3) এর ছেদ বিন্দু।

তাহলে, সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে OACDO যা চিত্রে ছায়া ঘেরা এলাকা হিস্যাবে চিহ্নিত করা আছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে-

O(0, 0), A(6, 0), C(2, 4) এবং D(0, 5)

এখন, O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

A(6, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 6 + 4 \times 0 = 18$

C(2, 4) বিন্দুতে $z = 3 \times 2 + 4 \times 4 = 22$

D(0, 5) বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 4 \times 5 = 20$

স্পষ্টত C(2, 4) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় এবং সর্বোচ্চ মান $z_{max} = 22$ **(Ans.)**

**19.** ক দেওয়া আছে, $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$\therefore \quad S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ......\right\}$

দেখা যাচ্ছে যে, S সেটের প্রতিটি সদস্য 0 হতে বৃহত্তর।

$\therefore$ সেটটির একটি নিম্নসীমা 0

সংজ্ঞানুসারে সেটটির বৃহত্তম নিম্নসীমা = 0 **(Ans.)**

খ $\frac{1}{|3x-4|} > 2 \left[\because x \neq \frac{4}{3}\right]$

বা, $|3x-4| < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} < 3x - 4 < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 4 < 3x - 4 + 4 < \frac{1}{2} + 4$ [4 যোগ করে]

বা, $\frac{7}{2} < 3x < \frac{9}{2} \quad \therefore \frac{7}{6} < x < \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{7}{6} < x < \frac{3}{2}$ এবং $x \neq \frac{4}{3}$

সংখ্যারেখায় :


গ দেওয়া আছে, অভীষ্ট ফাংশন $z = 3x + 2y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + 2y \leq 10$, $x + y \leq 6$, $x \geq 4$, $x, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে প্রাপ্ত সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

অতএব আমরা পাই, $x + 2y = 10$

$\Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \cdots\cdots\cdots$ (i)

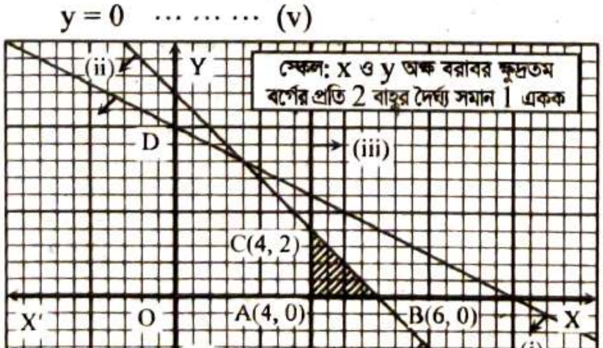
$x + y = 6$

$\Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$x = 4 \cdots\cdots\cdots$ (iii)

$x = 0 \cdots\cdots\cdots$ (iv)

$y = 0 \cdots\cdots\cdots$ (v)




লেখচিত্রে দেখা যায় যে, সমীকরণ (i), (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলো সত্য। যেখানে O(0, 0) হচ্ছে মূল বিন্দু।

(iii) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য তৃতীয় অসমতাটি সত্য।

চিত্র অনুসারে, A, B ও C যথাক্রমে (v) ও (iii); (ii) ও (v) এবং (ii) ও (iii) এর ছেদ বিন্দু।

সম্ভাব্য সমাধান এলাকা হচ্ছে ABC যা চিত্রে ছায়া ঘেরা এলাকা হিসেবে চিহ্নিত করা হয়েছে এবং সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলো যথাক্রমে A(4, 0), B(6, 0) এবং C(4, 2)

এখন, A(4, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 2 \times 0 = 12$

B(6, 0) বিন্দুতে $z = 3 \times 6 + 2 \times 0 = 18$

C(4, 2) বিন্দুতে $z = 3 \times 4 + 2 \times 2 = 16$

$\therefore$ B(6, 0) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান, $z_{max} = 18$ **(Ans.)**

**20.** ক যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম এর দুটি সুবিধা নিম্নরূপঃ

i. সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যন্ত্র দক্ষতার সাথে সঠিক ব্যবহার ও কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য অর্জন।

ii. তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।

খ মনে করি, $F_1$ খাবার x কেজি এবং $F_2$ খাবার y কেজি প্রয়োজন।

দেওয়া আছে, $F_1$ এবং $F_2$ খাবারে ভিটামিন C আছে যথাক্রমে 6 একক ও 3 একক। দৈনিক ন্যূনতম ভিটামিন C প্রয়োজন 60 একক।

$F_1$ ও $F_2$ খাবারে ভিটামিন D আছে যথাক্রমে 2 একক ও 5 একক। দৈনিক ন্যূনতম ভিটামিন D প্রয়োজন 50 একক।

$F_1$ খাবারের প্রতি কেজির দাম = 3

$F_2$ খাবারের প্রতি কেজির দাম = 5

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

অভীষ্ট ফাংশন, $z = 3x + 5y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ ঃ $6x + 3y \geq 60$

$2x + 5y \geq 50$

$x \geq 0, y \geq 0$

গ অভীষ্ট ফাংশন,

$z = 3x + 5y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ ঃ $6x + 3y \geq 60$

$2x + 5y \geq 50$

$x \geq 0, y \geq 0$

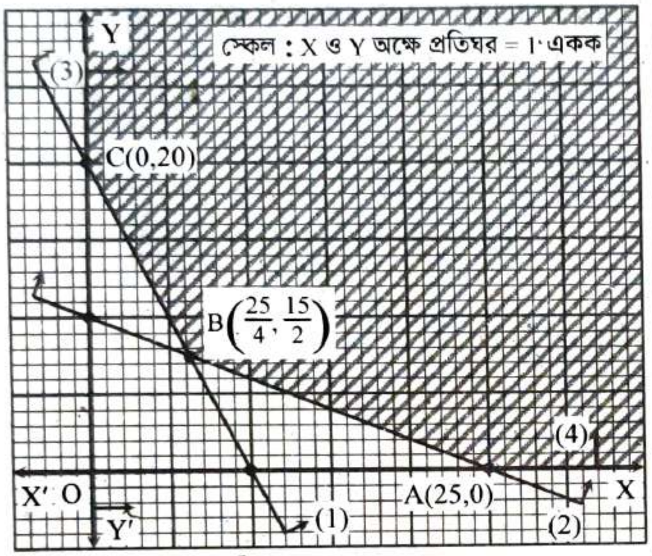
প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমীকরণের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই,

$6x + 3y = 60 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1$ ...... (1)

$2x + 5y = 50 \Rightarrow \frac{x}{25} + \frac{y}{10} = 1$ ...... (2)

$x = 0$ ...... (3)
$y = 0$ ...... (4)




লেখচিত্র হতে দেখা যায় (1), (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $6x + 3y \geq 60$ এবং $2x + 5y \geq 50$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই, সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা।

যেখানে $A(25, 0)$, $B\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ এবং $C(0, 20)$

এখন, $A(25, 0)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 25 + 5 \times 0 = 75$

$B\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ বিন্দুতে $z = 3 \times \frac{25}{4} + 5 \times \frac{15}{2} = 56.25$

এবং $C(0, 20)$ বিন্দুতে $z = 3 \times 0 + 5 \times 20 = 100$

স্পষ্টতঃ $B\left(\frac{25}{4}, \frac{15}{2}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore F_1$ খাদ্য $\frac{25}{4}$ বা 6.25 কেজি

$F_2$ খাদ্য $\frac{15}{2}$ বা 7.5 কেজি

দৈনিক সর্বনিম্ন খরচ 56.25 একক **(Ans.)**

**21.** ক $|2x + 3| < 7$ বা, $-7 < 2x + 3 < 7$

বা, $-7 - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 - 3$ [(−3) যোগ করে]

বা, $-10 < 2x < 4$

বা, $\frac{-10}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore -5 < x < 2$ **(Ans.)**

খ $(2x + 1)(x - 1)(x - 3) \leq 0$

$\Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)(x - 3) \leq 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)(x - 3) \leq 0$ ............(i)

(i) নং অসমতাটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $(x - 1)$ এবং $(x - 3)$ এর তিনটির চিহ্নই ঋণাত্মক অথবা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।

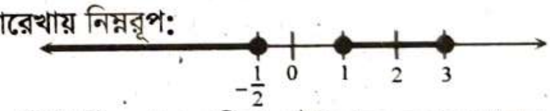
| শর্ত \ চিহ্ন | $x + \frac{1}{2}$ | $(x-1)$ | $(x-3)$ | $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-3)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x < -\frac{1}{2}$ | − | − | − | − |
| $-\frac{1}{2} < x < 1$ | + | − | − | + |
| $1 < x < 3$ | + | + | − | − |
| $x > 3$ | + | + | + | + |

$\therefore$ (i) নং অসমতা সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $x \leq -\frac{1}{2}$ অথবা $1 \leq x \leq 3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \leq -\frac{1}{2}$ অথবা $1 \leq x \leq 3$

নির্ণেয় সমাধান সেট $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{2}$ অথবা $1 \leq x \leq 3\}$

সংখ্যারেখায় নিম্নরূপ:




গ মনে করি, দৈনিক খাদ্য চাহিদা মেটানোর জন্য M খাবার x কেজি এবং N খাবার y কেজি পরিমাণ প্রয়োজন।

$\therefore$ $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$

শর্তানুযায়ী, $2x + 6y \geq 36$

$\therefore$ $x + 3y \geq 18$ এবং $4x + 3y \geq 48$

মনে করি, অভীষ্ট ফাংশন Z

এখানে মোট খরচ (1) x কেজি M খাবারের মূল্য 20x টাকা এবং (2) y কেজি N খাবারের মূল্য 30y টাকা।

$\therefore$ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হল : $Z_{min} = 20x + 30y$

শর্তসমূহ: $x + 3y \geq 18$, $4x + 3y \geq 48$, $x, y \geq 0$

অসমতা গুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + 3y \geq 18$ এর অনুরূপ সমীকরণ, $x + 3y = 18$

$\therefore$ $\frac{x}{18} + \frac{y}{6} = 1$ ...... (i)

$4x + 3y \geq 48$ এর অনুরূপ সমীকরণ, $4x + 3y = 48$

$\therefore$ $\frac{x}{12} + \frac{y}{16} = 1$ ...... (ii)

$x \geq 0, y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে,

$x = 0$ ... ... (iii)

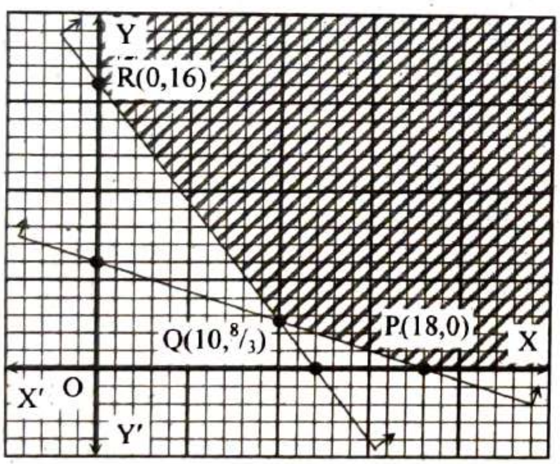
$y = 0$ ... ... (iv)

এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (i), (ii), (iii) ও (iv) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।

এবার, $x + 3y \geq 18$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 18$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রে ছক কাগজে (1) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে (সরল রেখার দুই প্রান্তে) → চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $x + 3y \geq 18$ অসমতার সমাধান।

পুনরায় $4x + 3y \geq 48$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই, $0 \geq 48$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (2) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত দিকে রেখাটিতে → চিহ্ন দিই। এই চিহ্নের পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $4x + 3y \geq 48$ অসমতার সমাধান।

$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y অক্ষের ওপর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়। এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়। লেখচিত্রের ছায়াঘেরা এলাকা সম্ভাব্য সমাধান এলাকা।




লেখ চিত্রানুসারে, এখানে সম্ভাব্য এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু আছে।

কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (18, 0), $\left(10, \frac{8}{3}\right)$, (0, 16)

মনে করি, P(18, 0), $Q\left(10, \frac{8}{3}\right)$, R(0, 16)

| কৌণিক বিন্দু | $Z = 20x + 30y$ |
|---|---|
| P(18, 0) | $Z = 20 \times 18 + 0 = 360$ |
| $Q\left(10, \frac{8}{3}\right)$ | $Z = 10 \times 20 + 30 \times \frac{8}{3} = 280$ |
| R(0, 16) | $Z = 0 + 16 \times 30 = 480$ |

Z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 280

∴ দৈনিক 10 কেজি পরিমাণ M এবং $\frac{8}{3}$ কেজি পরিমান N খাদ্য গ্রহণে সর্বনিম্ন 280 টাকা খরচে নূন্যতম প্রয়োজন মেটানো সম্ভব। **(Ans.)**

**22.** ক বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতা: সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, একটি মাত্র $-a \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হবে। এখানে, $-a$ কে a এর যোগের বিপরীতক বলা হয়। আবার, সকল $a \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, এখানে, $a^{-1}$ কে a এর গুণনের বিপরীতক বলা হয়।

খ দেওয়া আছে, $p = x - 5$

$\therefore \frac{1}{|p|} \geq 3$

বা, $\frac{1}{|x-5|} \geq 3$

বা, $|x - 5| \leq \frac{1}{3}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $-\frac{1}{3} \leq x - 5 \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 \leq x - 5 + 5 \leq \frac{1}{3} + 5$ [5 যোগ করে]

বা, $\frac{15-1}{3} \leq x \leq \frac{1+15}{3}$

বা, $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$ এবং $x \neq 5$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট:

$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3} \text{ এবং } x \neq 5\right\}$ **(Ans.)**

সংখ্যারেখা : 4 $\frac{14}{3}$ 5 $\frac{16}{3}$ 6

গ দেওয়া আছে, $f = 2x + 3y$

$g = 5x + 3y$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $2x + 3y \leq 12$

$5x + 3y \geq 15$

এবং $x, y \geq 0$

অসমতাগুলিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি, $2x + 3y = 12$

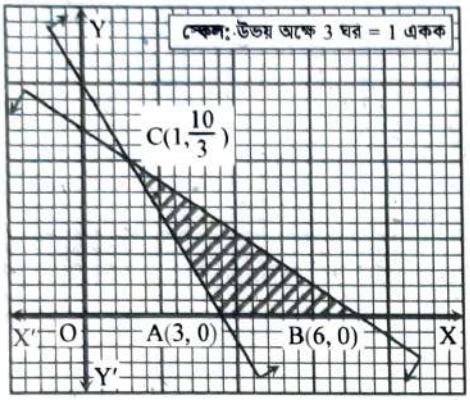
বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ ... ... ... (i)

$5x + 3y = 15$

বা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ ... ... ... (ii)

$x = 0$ ... ... ... (iii)

$y = 0$ ... ... ... (iv)

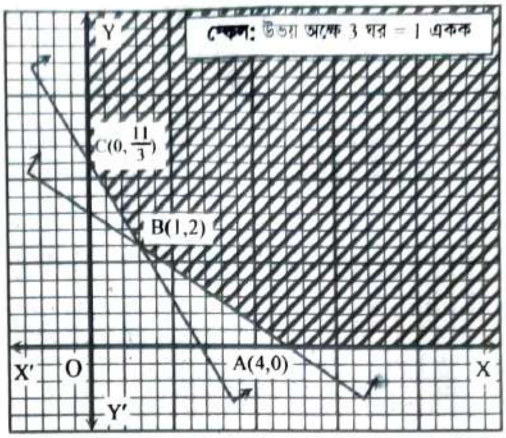



লেখচিত্রে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি ABC যা ত্রিভুজাকৃতির। **(Ans.)**
শর্তে $g \geq 15$ এর স্থলে $g \leq 15$ বিবেচনা করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি হবে OACD যা একটি চতুর্ভুজ।

**23.** ক **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming):** সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে (i) উদ্দেশ্য ফাংশন (objective function) (ii) সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable) ও (iii) শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints) এই তিনটি তথ্যকে ক্যানটোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে সমাধান যোগ্য গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming)** বলা হয়।

খ মনে করি, A খাবার x একক এবং B খাবার y একক প্রয়োজন।
দেওয়া আছে, A এবং B খাবারে প্রোটিন আছে যথাক্রমে 4 একক ও 6 একক। দৈনিক ন্যূনতম প্রোটিন প্রয়োজন 16 একক।
A ও B দৈনিক শ্বেতসার আছে যথাক্রমে 5 একক ও 3 একক। প্রত্যেহ ন্যূনতম শ্বেতসার প্রয়োজন 11 একক।
A খাবারের প্রতি এককের দাম = 40 টাকা
B ,, ,, ,, ,, = 50 টাকা
প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$
$5x + 3y \geq 11$
$x \geq 0, y \geq 0$

গ অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 40x + 50y$
সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$
$5x + 3y \geq 11$
$x \geq 0, y \geq 0$




প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।
অতএব আমরা পাই, $4x + 6y = 16$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1 \text{ ... ... ... (i)}$$

$$5x + 3y = 11$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1 \text{ ... ... ... (ii)}$$

$x = 0$ ... ... ... (iii)

$y = 0$ ... ... ... (iv)

লেখচিত্রে দেখা যায় (i), (ii) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $4x + 6y \geq 16$ এবং $5x + 3y \geq 11$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা। যেখানে A (4, 0), B হচ্ছে (i) এবং (ii) এর ছেদ বিন্দু।

$\therefore$ B (1, 2) এবং C $(0, \frac{11}{3})$

এখন A (4, 0) বিন্দুতে $z = (40 \times 4) + (50 \times 0) = 160$
B (1, 2) ” $z = (40 \times 1) + (50 \times 2) = 140$
এবং $C\left(0, \frac{11}{3}\right)$ ” $z = (40 \times 0) + \left(50 \times \frac{11}{3}\right) = 183.33$

স্পষ্টতঃ B (1, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্নমান পাওয়া যায়।
A খাদ্য 1 একক; B খাদ্য 2 একক; মোট সর্বনিম্ন খরচ 140 টাকা **(Ans.)**

**24.** ক $|2x - 1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x - 1 < \frac{1}{3}$

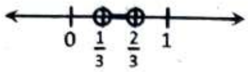
$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < 2x < \frac{1}{3} + 1$ [সকল পক্ষে 1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{2}{3} < 2x < \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$

সংখ্যারেখা: 

**(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

এবং $a = 1, b = c = 0$

তাহলে, $f(x) = x$

$\therefore \{f(x)\}^2 = x^2$

এখন, $|f(x) - 1| < \frac{1}{11}$

$|x - 1| < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} < x - 1 < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{11} + 1$ [1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{10}{11} < x < \frac{12}{11}$

$\Rightarrow \frac{100}{121} < x^2 < \frac{144}{121}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{100}{121} - 1 < x^2 - 1 < \frac{144}{121} - 1$ [−1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{100 - 121}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{144 - 121}{121}$

$\Rightarrow -\frac{21}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$

$\Rightarrow -\frac{23}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121} \left[\because -\frac{23}{121} < \frac{-21}{121}\right]$

$\therefore |\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ **(প্রমাণিত)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

$g(x) = lx + my + n$

এখানে, $a = 1, b = -1, c = 2$ হলে

$f(x) = x - y + 2$

এবং $l = 1, m = 1, n = -4$ হলে

$g(x) = x + y - 4$

তাহলে, আমরা পাই, অভীষ্ট ফাংশন: $z = x + 2y$

শর্ত: $x - y + 2 \geq 0$ বা, $x - y \geq -2$

$x + y - 4 \leq 0$ বা, $x + y \leq 4$

$x \geq 0, y \geq 0$

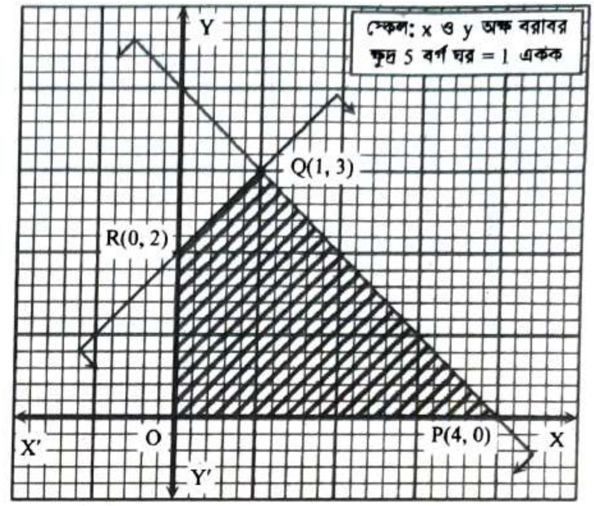
প্রাপ্ত অসমতাগুলির সমাধানযোগ্য সমীকরণ,

$x - y = -2$ ... ... ... (i)

$x + y = 4$ ... ... ... (ii)

$x = 0$ ... ... ... (iii), $y = 0$ ... ... ... (iv)

গ্রাফ কাগজে i, ii, iii ও iv নম্বর রেখা অঙ্কন করি।




সমীকরণ (i) $\Rightarrow 0 - 0 \geq -2$ সত্য

সমীকরণ (ii) $\Rightarrow 0 + 0 \leq 4$ সত্য

$\therefore$ সমাধান অঞ্চল সরলরেখা (i) ও (ii) এর যেদিকে মূলবিন্দু সেদিকে অবস্থিত।

সমাধান অঞ্চল: OPQR

**P বিন্দু নির্ণয়:** (ii) ও (iv) নং রেখার ছেদবিন্দু:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(4, 0)$

**Q বিন্দু নির্ণয়:** i ও ii নং রেখার ছেদবিন্দু:

$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(1, 3)$

**R বিন্দু নির্ণয়:** i ও iii নং রেখার ছেদবিন্দু:

$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(0, 2)$

**O বিন্দু নির্ণয়:** iii ও iv নং রেখার ছেদবিন্দু O(0, 0)

এখন সমাধান অঞ্চল হতে প্রাপ্ত OPQR বিন্দুগুলো $z = x + 2y$ এ বসিয়ে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করি।

| | O(0, 0) | P(4, 0) | Q(1, 3) | R(0, 2) |
|---|---|---|---|---|
| $z = x + 2y$ | 0 | 4 | 7 | 4 |

$\therefore$ Q(1, 3) বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ 7 হয়। **(Ans.)**

**25.** **ক** দেওয়া আছে, $-4 < 2x - 1 < 12$

বা, $-4 - 4 < 2x - 1 - 4 < 12 - 4$ [−4 যোগ করে]

বা, $-8 < 2x - 5 < 8 \therefore |2x - 5| < 8$ **(Ans.)**

**খ** $f(x) = |x - 3|$

$f(x^2 - 6) = |x^2 - 6 - 3| = |x^2 - 9|$

এখন, $f(x) < \frac{1}{5}$

বা, $|x - 3| < \frac{1}{5}$ বা, $-\frac{1}{5} < x - 3 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{5} + 3$ [3 যোগ করে]

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$ বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 9 < x^2 - 9 < \frac{256}{25} - 9$

বা, $-\frac{29}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$

বা, $-\frac{31}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}\left[\because -\frac{31}{25} < -\frac{29}{25}\right]$

বা, $|x^2 - 9| < \frac{31}{25} \therefore f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$ **(দেখানো হলো)**

**গ** দেওয়া আছে, $4x + y \geq 16$ ... ... ... (i)

$4x + 7y \geq 40$ ... ... ... (ii)

(i) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ, $4x + y = 16$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} = 1$

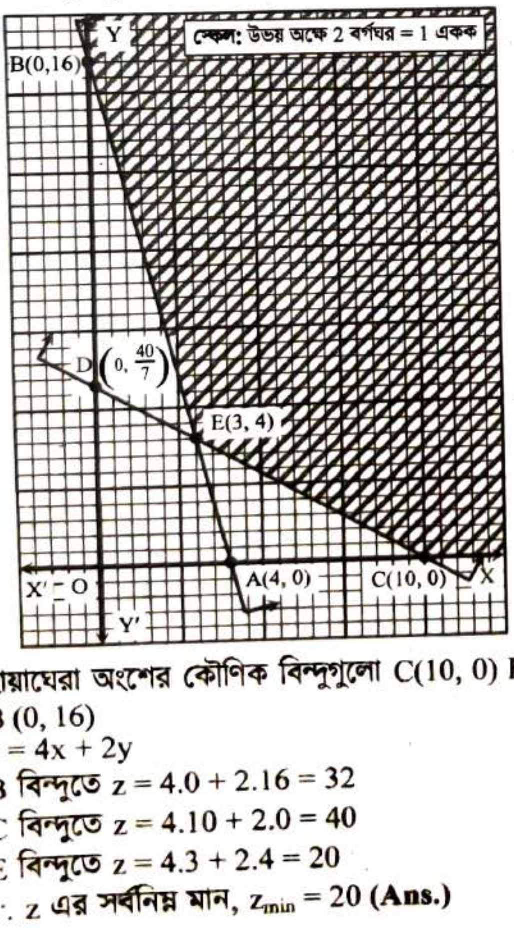
যা A (4, 0) এবং B(0, 16) বিন্দু দিয়ে যায়

আবার (ii) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + 7y = 40$ বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{\frac{40}{7}} = 1$

যা C(10, 0) এবং $D\left(0, \frac{40}{7}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ছক কাগজে স্থাপন করি।




ছায়াঘেরা অংশের কৌণিক বিন্দুগুলো C(10, 0) E(3, 4), B (0, 16)

$z = 4x + 2y$

B বিন্দুতে $z = 4.0 + 2.16 = 32$

C বিন্দুতে $z = 4.10 + 2.0 = 40$

E বিন্দুতে $z = 4.3 + 2.4 = 20$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান, $z_{min} = 20$ **(Ans.)**

**26.** **ক** মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$ বা, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

**খ** প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন, $Z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y - 7 \leq 0 \therefore x + y \leq 7$

$x - 2y - 4 \geq 0 \therefore x - 2y \geq 4$

$x, y \geq 0.$

প্রথমে অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \leq 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x + y = 7$

$\therefore \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ... ... (i)

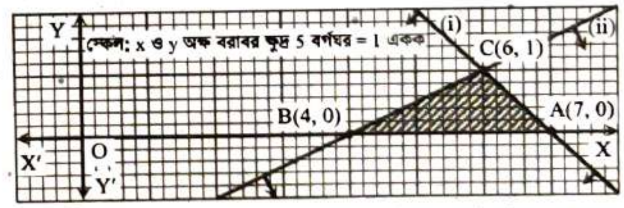
$x - 2y \geq 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x - 2y = 4$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$ ... ... (ii)

$x \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x = 0$ ... ... (iii)

$y \geq 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $y = 0$ ... ... (iv)

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি। প্রতি 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হলো।




লেখচিত্র হতে দেখা যায় ABC সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো A(7, 0), B(4, 0) এবং C(6, 1)

A(7, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(4, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 4 + 4 \times 0 = 12$

C(6, 1) বিন্দুতে, $z = 3 \times 6 + 4 \times 1 = 18 + 4 = 22$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান 12 **(Ans.)**

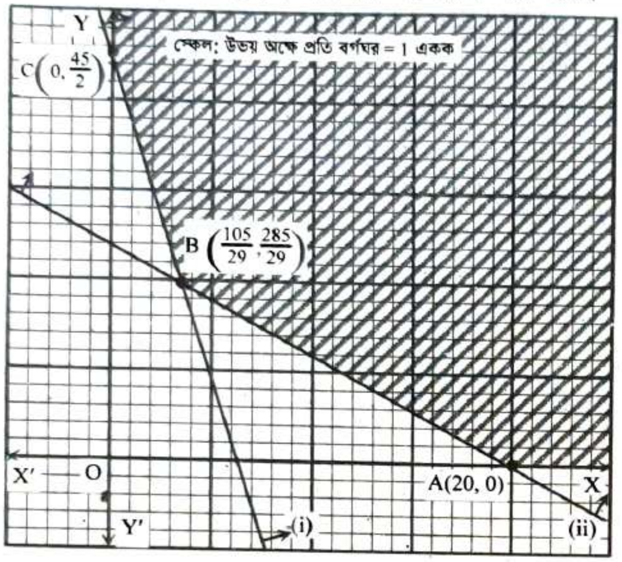
**গ** দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত তথ্যসমূহ নিম্নোক্তভাবে সাজানো হলো:

| খাদ্য | ভিটামিন A | ভিটামিন C | প্রতি এককের মূল্য |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 7 | 3 | 25 টাকা |
| $F_2$ | 2 | 5 | 18 টাকা |
| দৈনিক নূন্যতম প্রয়োজন | 45 | 60 | |

মনে করি, দৈনিক $F_1$ খাদ্য x একক এবং $F_2$ খাদ্য y একক প্রয়োজন। অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 25x + 18y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $7x + 2y \geq 45$, $3x + 5y \geq 60$
$x \geq 0, y \geq 0$

প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণ গঠন করি এবং ছক কাগজে স্থাপন করে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি। ছক কাগজে 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হল।




$$7x + 2y = 45 \Rightarrow \frac{x}{\frac{45}{7}} + \frac{y}{\frac{45}{2}} = 1 \text{ ... ... (i)}$$

$$3x + 5y = 60 \Rightarrow \frac{x}{20} + \frac{y}{12} = 1 \text{ ... ... (ii)}$$

$$x = 0 \text{ ... ... (iii)}, \quad y = 0 \text{ ... ... (iv)}$$

লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, (i) ও (ii) নং এর যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশের বিন্দুসমূহ সমাধান এলাকা গঠন করে। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা ABC হতে শুরু করে ১ম চতুর্ভাগের ডানদিকের সমস্ত এলাকা।

এখানে $A(20, 0)$, $C\left(0, \frac{45}{2}\right)$

এবং (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ সম্ভাব্য সমাধান বিন্দু।

$A(20, 0)$ বিন্দুতে $z = 25 \times 20 + 18 \times 0 = 500$

$B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে,

$$z = 25 \times \frac{105}{29} + 18 \times \frac{285}{29}$$
$$= \frac{7755}{29} = 267.41$$

$C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ বিন্দুতে,

$$z = 25 \times 0 + 18 \times \frac{45}{2} = 405.$$

স্পষ্টত $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন 267.41 টাকা খরচ করে নূন্যতম চাহিদা মেটানো সম্ভব। **(Ans.)**

## পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

### ▶ অনুচ্ছেদ-2.3 | পৃষ্ঠা-৭২

| **পরীক্ষণ নং 2.3.2.1.** | **লেখচিত্রের সাহায্যে অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়।** | **তারিখ: ... ...** |
|---|---|---|

**সমস্যা:** লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 10x + 7y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

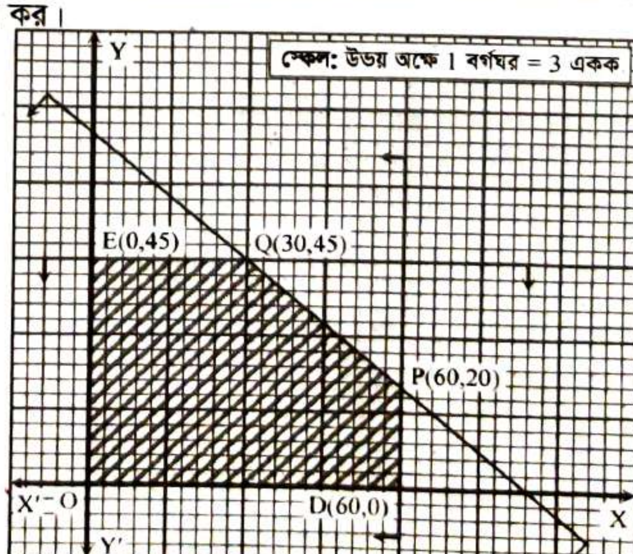
**সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ:** $0 \leq x \leq 60$
$0 \leq y \leq 45$
$5x + 6y \leq 420$

**সমাধান: তত্ত্ব:** (i) প্রদত্ত কোনো অসমতার রূপান্তরিত সমীকরণ (যা একটি সরলরেখা) সিদ্ধ করে না এমন যে কোনো বিন্দু (সাধারণত মূলবিন্দু (0, 0)) ঐ অসমতায় প্রয়োগের ফলে উহা সিদ্ধ হলে বিন্দুটি সরলরেখার যে দিকে আছে ঐ দিকে এবং সিদ্ধ না হলে উল্টা দিকের সকল বিন্দুই উক্ত অসমতার সমাধান।

(ii) সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকাই সম্ভাব্য সমাধান এলাকা।

(iii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি z এ বসিয়েই কাঙ্ক্ষিত ফলাফল পাওয়া যায়।

**উপকরণ:** পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ও ছক কাগজ ইত্যাদি।



**কার্যপদ্ধতি:**

(i) $5x + 6y = 420$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্যে উক্ত সমীকরণ থেকে দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। ধরি, বিন্দু দুইটি হলো (84, 0) ও (0, 70) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে ছক কাগজে বিন্দুগুলি স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে তাদের সংযোজন করে AB সরলরেখা অঙ্কন করি। একই পদ্ধতিতে $x = 60$ সমীকরণ থেকে CD সরলরেখা অঙ্কন করি এবং $y = 45$ সমীকরণ থেকে EF সরলরেখা অঙ্কন করি।

(ii) এখন মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগের দ্বারা যথাক্রমে AB, CD, EF, x-অক্ষ ও y-অক্ষের প্রত্যেক সরলরেখায় '$\rightarrow$' চিহ্ন ব্যবহার করে প্রদত্ত সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা চিহ্নিত করি।

(iii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি চিহ্নিত করি। এখানে কৌণিক বিন্দুগুলিকে O, D, P, Q ও E দ্বারা নামকরণ করা হলো।

(iv) ছেদ বিন্দু নির্ণয়ের কৌশল প্রয়োগ করে O(0, 0), D(60, 0), P(60, 20), Q(30, 45) ও E(0, 45) নির্ণয় করি।

**ফল সংকলন:** কৌণিক বিন্দুগুলি অভীষ্ট ফাংশনে বসিয়ে z এর মান নির্ণয় করি:

O(0, 0) বিন্দুতে $z = 10x + 7y = 10 \times 0 + 7 \times 0 = 0$ D(60, 0) বিন্দুতে $z = 10 \times 60 + 7 \times 0 = 600$

P(60, 20) বিন্দুতে $z = 10 \times 60 + 7 \times 20 = 740$ Q(30, 45) বিন্দুতে $z = 10 \times 30 + 7 \times 45 = 615$

E(0, 45) বিন্দুতে $z = 10 \times 0 + 7 \times 45 = 315$

সুতরাং $z_{max} = 740$

**ফলাফল:** P(60, 20) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চমান 740

**সতর্কতা:** i. অসমতাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা চিহ্নিত করণে ও দিক নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।
ii. সম্ভাব্য সমাধান এলাকায় কৌণিক বা শীর্ষবিন্দু নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

| পরীক্ষণ নং 2.3.2.2 | লেখচিত্রের সাহায্যে অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়। | তারিখ: ... ... |
|---|---|---|

**সমস্যা:** লেখচিত্রের সাহায্যে $z = 3x + 2y$ এর সর্বোচ্চকরন কর।

**সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ:** $x + 2y \leq 4$
$x - y \leq 1$
$x \geq 0, y \geq 0$

**সমাধান: তত্ত্ব:** (i) প্রদত্ত কোনো অসমতার রূপান্তরিত সমীকরণ (যা একটি সরলরেখা) সিদ্ধ করে না এমন যে কোনো বিন্দু (সাধারণত মূলবিন্দু (0, 0)) ঐ অসমতায় প্রয়োগের ফলে উহা সিদ্ধ হলে বিন্দুটি সরলরেখার যে দিকে আছে ঐ দিকে এবং সিদ্ধ না হলে উল্টো দিকের সকল বিন্দুই উক্ত অসমতার সমাধান।

(ii) সকল অসমতা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকাই সম্ভাব্য সমাধান এলাকা।

(iii) সম্ভাব্য সমাধান এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি z এ বসিয়েই কাঙ্ক্ষিত ফলাফল পাওয়া যায়।

**উপকরণ:** পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, ছক কাগজ ইত্যাদি।

**কার্যপদ্ধতি:**

(ii) প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরলে রূপান্তরিত সমীকরণগুলি পাওয়া যায়।

$x + 2y = 4$ ............... (i)

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

$x - y = 1$ ................ (ii)

বা, $\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1$

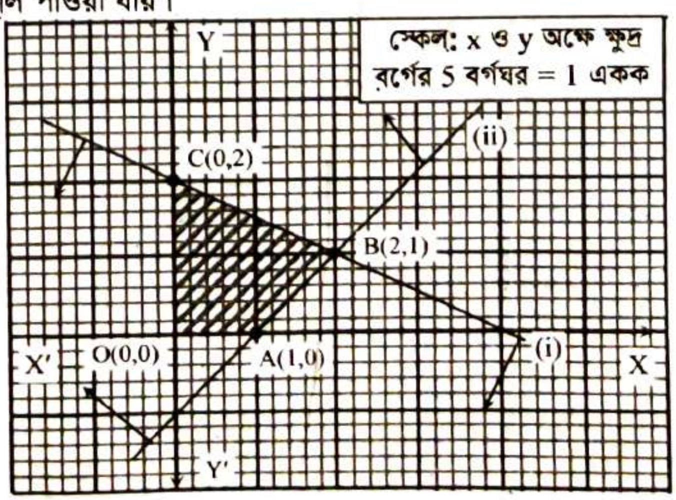
(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে,

$x - x + 2y + y = 4 - 1$

বা, $3y = 3$ বা, $y = 1$

(i) এ $y = 1$ বসিয়ে, $x + 2.1 = 4$ বা, $x = 2$

$\therefore$ (i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক B(2, 1)



**(ii)** এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমীকরণের এলাকা নির্ণয় করি।

**(iii)** লেখচিত্রে দেখা যায়, সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু যে পার্শ্বে মূলবিন্দু আছে ঐ পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত সমতাগুলি সত্য।

**(iv)** OABC সম্ভাব্য এলাকা যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসেবে চিহ্নিত করা আছে। এ এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে O(0, 0), A(1, 0), B(2, 1) এবং C(0, 2)

**ফল সংকলন:** কৌণিক বিন্দুগুলি অভীষ্ট ফাংশনে বসিয়ে z এর মান নির্ণয় করি।

এখানে, O(0, 0) বিন্দুতে $z = 3x + 2y = 3.0 + 2.0 = 0$

A(1, 0) বিন্দুতে $z = 3.1 + 2.0 = 3$

B(2, 1) বিন্দুতে $z = 3.2 + 2.1 = 8$

C(0, 2) বিন্দুতে $z = 3.0 + 2.2 = 4$

(2, 1) বিন্দুতে $z_{max} = 8$

**ফলাফল:** (2, 1) বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান 8

**সতর্কতা:** i. অসমতাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকা চিহ্নিত করণে ও দিক নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

ii. সম্ভাব্য সমাধান এলাকায় কৌণিক বা শীর্ষবিন্দু নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

| পরীক্ষণ নং 2.3.2.3 | লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের বাস্তব ভিত্তিক সমস্যার সমাধান। | তারিখ: … … |
|---|---|---|

**সমস্যা:** এক ব্যক্তির কিছু ফাইল কেবিনেট প্রয়োজন। প্রতিটি A ফাইল কেবিনেটের দাম 10 ডলার। প্রতিটি ফাইল কেবিনেট রাখতে 6 বর্গফুট জায়গার প্রয়োজন এবং এতে 8 ঘনফুট ফাইল ধরে। আবার প্রতিটি B ফাইল কেবিনেটের দাম 20 ডলার। এর জন্য 8 বর্গফুট জায়গার প্রয়োজন এবং এতে 12 ঘনফুট ফাইল ধরে। ফাইল কেবিনেট কিনতে সর্বোচ্চ বরাদ্দ 140 ডলার। অফিস কক্ষে ফাইল কেবিনেটের জন্য 72 বর্গফুট জায়গা বরাদ্দ করা হয়েছে। সর্বাধিক কত আয়তনের ফাইল কেবিনেট কিনতে পারবে?

**সমাধান: তত্ত্ব:** মনে করি, A ফাইল কেবিনেট সংখ্যা = x এবং B ফাইল কেবিনেট সংখ্যা = y

| | ব্যয় (ডলার) | জায়গা (বর্গফুট) | ফাইল ধরে (বর্গফুট) |
|---|---|---|---|
| কেবিনেট A | 10 | 6 | 8 |
| কেবিনেট B | 20 | 8 | 12 |
| | সর্বোচ্চ বরাদ্দ 140 | সর্বোচ্চ জায়গা বরাদ্দ 72 | - |

অভীষ্ট ফাংশন: $z = 8x + 12y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $10x + 20y \leq 140$

$6x + 8y \leq 72$

$x \geq 0, y \geq 0$

**উপকরণ:** পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, ছক কাগজ ইত্যাদি।

**কার্যপদ্ধতি:**

**(i)** প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরলে রূপান্তরিত সমীকরণগুলি পাওয়া যায়।

$10x + 20y = 140$

বা, $x + 2y = 14$ ……… (i)

বা, $\frac{x}{14} + \frac{y}{7} = 1$

এবং $6x + 8y = 72$

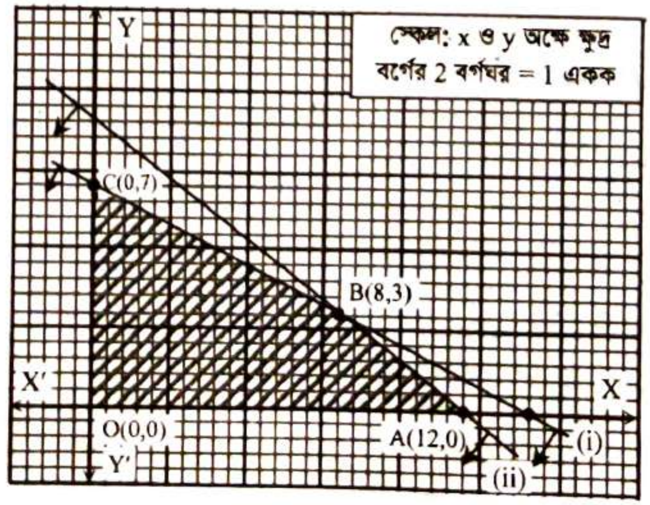
বা, $3x + 4y = 36$ ……… (ii)

বা, $\frac{x}{12} + \frac{y}{9} = 1$

$(i) \times 2 - (ii)$

$2x - 3x + 4y - 4y = 28 - 36$

বা, $-x = -8$ বা, $x = 8$



(i) এ $x = 8$ বসিয়ে,

$8 + 2y = 14 \Rightarrow 2y = 14 - 8 \Rightarrow 2y = 6 \therefore y = 3$

(i) ও (ii) এর ছেদ বিন্দু $B(8, 3)$

**(ii)** ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি।

লেখচিত্রে দেখা যায় সমীকরণ (i) ও (ii) এর সকল বিন্দু ও এদের যে পার্শ্বে মূল বিন্দু আছে এ পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাগুলি সত্য।

**(iii)** OABC সম্ভাব্য সমাধান এলাকা, যা চিত্রে ছায়াঘেরা এলাকা হিসেবে চিহ্নিত করা আছে।

এ এলাকার কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে $O(0, 0)$, $A(12, 0)$, $B(8, 3)$ এবং $C(0, 7)$

**ফল সংকলন:** কৌণিক বিন্দুগুলি অভীষ্ট ফাংশনে বসিয়ে $z$ এর মান নির্ণয় করি।

এখন $O(0, 0)$ বিন্দুতে $z = 8x + 12y = 8 \times 0 + 12 \times 0 = 0$

$A(12, 0)$, বিন্দুতে $z = 8 \times 12 + 12 \times 0 = 96$

$B(8, 3)$ বিন্দুতে $z = 8 \times 8 + 12 \times 3 = 100$

$C(0, 7)$ বিন্দুতে $z = 8 \times 0 + 12 \times 7 = 84$

$B(8, 3)$ বিন্দুতে $z_{max} = 100$

**ফলাফল:** সর্বোচ্চ 100 ঘনফুট আয়তনের ফাইল কেবিনেট কিনতে পারবে।

**সতর্কতা:** i. অসমতাগুলি দ্বারা সীমাবন্ধ এলাকা চিহ্নিত করণে ও দিক নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।
ii. সম্ভাব্য সমাধান এলাকায় কৌণিক বা শীর্ষবিন্দু নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

## ▶ মৌখিক প্রশ্নের উত্তর

1. **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming):** সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে (i) উদ্দেশ্য ফাংশন (objective function) (ii) সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable) ও (iii) শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints) এই তিনটি তথ্যকে ক্যান্টোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming)** বলা হয়।
অন্যকথায়, যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হচ্ছে কোনো শর্তাধীনে ও সীমাবন্ধতায় একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও অভীষ্ট ফাংশন গঠনের মাধ্যমে সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকগুলির নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগণিতীয় পদ্ধতি।
2. **উদ্দেশ্য বা অভীষ্ট ফাংশন (Objective function):** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল উদ্দেশ্যই হলো কোনো কিছুকে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় (Optimization) রূপদান। যার পরিমানকে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করতে হবে তাকে উপর্যুক্ত চলক দ্বারা গাণিতিক ফাংশনে প্রকাশ করতে হবে, তাকে অভীষ্ট ফাংশন (Objective function) বলা হয়।
3. যুদ্ধের প্রয়োজনে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের উদ্ভাবন হয়।
4. বর্তমানে কৃষি ও উৎপাদন শিল্পে, বাণিজ্যে, সুস্বাস্থ্যের জন্য সঠিক খাদ্য গ্রহণে এবং সামরিক কার্যক্রমে সাফল্যজনকভাবে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যবহার করা হচ্ছে।
5. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের মূল সুবিধা হলো সর্বনিম্ন বিনিয়োগে সর্বোচ্চ সুবিধাজনক অবস্থায় রূপদান। বিষয়টি বিশদভাবে নিম্নে আলোচনা করা হলো।
   (i) সীমিত অর্থ, কাঁচামাল, জনবল এবং যন্ত্র দক্ষতার সাথে সঠিক ব্যবহার ও কাঙ্খিত লক্ষ্য অর্জন।
   (ii) তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ভবিষ্যত উৎপাদনকে টেকসই ও অধিকতর লাভজনক করার জন্য দক্ষতা ও দূরদৃষ্টি বৃদ্ধিকরণ।
   (iii) উৎপাদন ও বিপণনে সকল প্রকার দৃশ্যমান প্রতিবন্ধকতার সঙ্গে পরিচয় এবং তা অতিক্রমের পন্থা অবলম্বনের জ্ঞান অর্জন।
   (iv) অনাকাঙ্ক্ষিত প্রতিবন্ধকতা চিহ্নিত ও দূরীকরণের দ্বারা উৎপাদন বা বিপণন ব্যয় কমানো এবং মুনাফা বৃদ্ধি।
   (v) প্রাপ্ত তথ্য, উপাত্ত, সম্পদ, মূলধন ও সুবিধা-অসুবিধাকে বিবেচনা করে ভবিষ্যত পরিকল্পনাকে আরও টেকসই ও বেগবান করা।
6. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং এ চলকের মান সর্বদাই $\geq 0$ হয়। অর্থাৎ চলকের মান ঋণাত্মক কখনই গ্রহণযোগ্য নয়।