সপ্তম অধ্যায়

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

Inverse Trigonometric Functions and Trigonometric Equations

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-7.1.2(i) | পৃষ্ঠা-২৬৩

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin^{-1}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= -\frac{\pi}{4}$ [$\because \sin^{-1}x$ এর মুখ্যমান $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ব্যবধিতে অবস্থিত]

(ii) $\sin^{-1}(-1) = \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sin^{-1}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= -\frac{\pi}{2}$

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= \frac{\pi}{6}$

(iv) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin^{-1}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= -\frac{\pi}{3}$

(v) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= \frac{\pi}{3}$

▶ অনুচ্ছেদ-7.1.2(ii) | পৃষ্ঠা-২৬৩

(i) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= \frac{\pi}{6}$ [$\because \cos^{-1}x$ এর মুখ্যমান $[0, \pi]$ ব্যবধিতে অবস্থিত]

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= \frac{\pi}{4}$

(iii) $\sin\left\{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \sin\left\{\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\right\} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(iv) $\tan\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \tan\left\{\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

▶ অনুচ্ছেদ-7.1.2(iii) | পৃষ্ঠা-২৬৪

(i) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= \frac{\pi}{3}$

[$\because \tan^{-1}x$ এর মুখ্যমান $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে অবস্থিত]

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ মুখ্যমান $= \frac{\pi}{6}$

(iii) $\cos[\tan^{-1}(-\sqrt{3})] = \cos\left[\tan^{-1}\left\{-\tan\frac{\pi}{3}\right\}\right]$

$= \cos\left[\tan^{-1}\left\{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right]$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(iv) $\tan\left[\tan^{-1}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \tan\left[\tan^{-1}\left\{-\tan\frac{\pi}{6}\right\}\right]$

$= \tan\left[\tan^{-1}\left\{\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$

$= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(v) $\tan[\tan^{-1}(1)] = 1$

▶ অনুচ্ছেদ-7.2 | পৃষ্ঠা-২৬৮

$\sin\sin^{-1}x = x$, এখানে, x একটি সংখ্যা যা একটি ত্রিকোণমিতিক সাইন অনুপাত বোঝায়।

$-1 \le x \le 1$ এর জন্য $\sin\sin^{-1}x$ এর মান সর্বদাই x. আবার, $\sin^{-1}\sin x = x$। এখানে x একটি কোণ বোঝায়। যা একটি বিপরীত বৃত্তীয় বহুমান ফাংশন। x এর যেকোনো মানের জন্য $\sin^{-1}\sin x$ এর মান $x + 2n\pi$ যখন, $n \in \mathbb{Z}$ অর্থাৎ x এর যে কোন মানের জন্য $\sin^{-1}\sin x$ এর অসংখ্য মান পাওয়া যায়। n এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য $\sin^{-1}\sin x = x$ হবে।

$\sin \sin^{-1}x = \sin^{-1} \sin x$ সব সময় সত্য নয়। যখন $\sin^{-1} \sin x = x$ এবং $-1 \le x \le 1$ শুধুমাত্র তখন $\sin \sin^{-1}x = \sin^{-1} \sin x$.

▶ অনুচ্ছেদ-7.2.1 | পৃষ্ঠা-২৭১

যেহেতু ত্রিকোণমিতিক ফাংশন পর্যায়ভিত্তিক ফাংশন কাজেই একটি নির্দিষ্ট ব্যবধান পরপর মানগুলির পুনরাবৃত্তি ঘটে। ফলে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সম্পর্কগুলির ক্ষেত্রে অসংখ্য মান পাওয়া যায়। মুখ্য সীমা ছাড়া কোনো বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সম্পর্ক তৈরি করা যায় না। অর্থাৎ, মুখ্য সীমা ছাড়া সমীকরণ গুলির সম্পর্ক সত্য নয়। তাই বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সম্পর্কগুলির ক্ষেত্রে সীমা নির্ধারণ প্রয়োজন।

▶ উদাহরণ-7 এর কাজ | পৃষ্ঠা-২৭৩

প্রমাণ: $2 = \sqrt{3}$.

আমরা জানি, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

ধরি, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \sin\left(\pi - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\pi - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $2\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi$

বা, $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

$\therefore \quad 2 = \sqrt{3}$ **(প্রমাণিত)**

প্রমাণ: $\pi = 0$

আমরা জানি, $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$

ধরি, $\theta = \tan^{-1}x \quad \therefore \tan\theta = x$

$\therefore \quad \tan(\pi + \tan^{-1}x) = x$

বা, $\pi + \tan^{-1}x = \tan^{-1}x$

$\therefore \quad \pi = 0$

$\sin^{-1}x$ এর মুখ্য মান $-\frac{\pi}{2}$ হতে $\frac{\pi}{2}$ এবং $\tan^{-1}x$ এর মুখ্য মান 0.

এখানে, $\pi - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ও $\pi + \tan^{-1}x$ লেখায় মুখ্য মানের সীমার বাইরে চলে গেছে। তাই এরূপ ভ্রমাত্মক ধূম্রজাল সৃষ্টি হয়েছে।

অনুশীলনী-7(A) এর সমাধান

1. (i) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\frac{7}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{7}{11}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13}}{1-\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13}-\frac{1}{13}\cdot\frac{7}{11}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{637+143+77-7}{1001}}{\frac{1001-91-11-49}{1001}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{850}{850} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{7}{11} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{13} = \frac{\pi}{4}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{15}}{\frac{16}{15}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{15}{56}}{\frac{55}{56}}\right) = \tan^{-1}\frac{15}{55} = \tan^{-1}\frac{3}{11} = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{3}{11}$ **(প্রমাণিত)**

(iii) বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{4}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{4}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{4}$$

$$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}\frac{1}{4}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{8}{12}}{\frac{43}{48}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{32}{43} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore\ 2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{32}{43}$$ **(প্রমাণিত)**

(iv) বামপক্ষ $= 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$

$$= 2.2\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{2.\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{5}{12} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \frac{\tan^{-1}\left(2.\frac{5}{12}\right)}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{28561}{28441}}{\frac{28561}{28441}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore\ 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$ **(প্রমাণিত)**

(v) বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}\right)$$

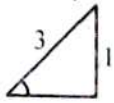
$$= \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore\ 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$ **(প্রমাণিত)**

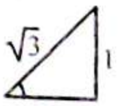
2. **(i)** বামপক্ষ $= \sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$= \sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



$2\sqrt{2}$

চিত্র-১



$\sqrt{2}$

চিত্র-২

$$= \tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$ [চিত্র ১ ও ২ হতে]

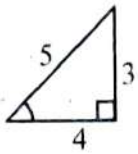
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$= \tan^{-1}\dfrac{3\sqrt{2}}{3} = \tan^{-1}\sqrt{2} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^{-1}\dfrac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \tan^{-1}\sqrt{2}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) বামপক্ষ $= \cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cot^{-1}\dfrac{5}{3}$

$= \tan^{-1}\dfrac{3}{4} + \tan^{-1}\dfrac{3}{5}$ [চিত্র হতে]



$= \tan^{-1}\left(\dfrac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{5}}\right)$

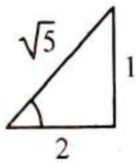
$= \tan^{-1}\dfrac{27}{11} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cot^{-1}\dfrac{5}{3} = \tan^{-1}\dfrac{27}{11}$ **(প্রমাণিত)**

(iii) বামপক্ষ $= 4\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3\right)$

$= 4\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$ [নিচের চিত্র হতে]

$= 4\tan^{-1}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}}$



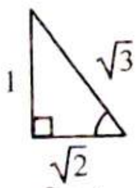
$= 4\tan^{-1}\dfrac{\dfrac{5}{6}}{\dfrac{5}{6}}$

$= 4\tan^{-1}(1)$

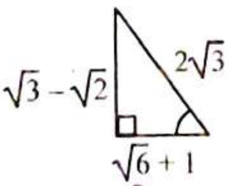
$= 4\cdot\dfrac{\pi}{4} = \pi =$ ডানপক্ষ

$\therefore 4\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3\right) = \pi$ **(প্রমাণিত)**

(iv) বামপক্ষ $= \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$



চিত্র-১



চিত্র-২

লম্ব $= \sqrt{\text{অতিভুজ}^2 - \text{ভূমি}^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6}+1)^2}$

$= \sqrt{12-(6+2\sqrt{6}+1)}$

$= \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

$= \sqrt{3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}$

$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{3}-\sqrt{2}$

চিত্র হতে পাই, $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+1}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+1}}{1+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{6}+1)}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}+1-\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}(\sqrt{6}+1)}}{\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{6}+1)}}$

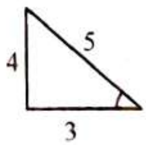
$= \tan^{-1}\dfrac{3}{3\sqrt{3}}$

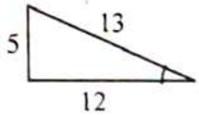
$= \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

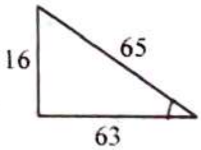
$= \dfrac{\pi}{6} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ **(প্রমাণিত)**

(v) L.H.S $= \sin^{-1}\dfrac{4}{5} + \sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \sin^{-1}\dfrac{16}{65}$







চিত্র হতে পাই,

L.H.S $= \tan^{-1}\dfrac{4}{3} + \tan^{-1}\dfrac{5}{12} + \tan^{-1}\dfrac{16}{63}$

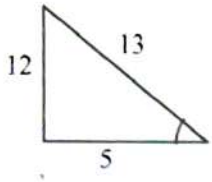
$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{12}}{1-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{12}} + \cot^{-1}\dfrac{63}{16}$

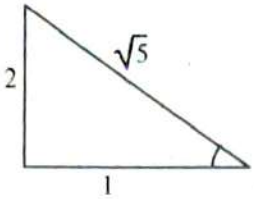
$= \tan^{-1}\dfrac{48+15}{16} + \cot^{-1}\dfrac{63}{16}$

$= \tan^{-1}\dfrac{63}{16} + \cot^{-1}\dfrac{63}{16} = \dfrac{\pi}{2}$

= R.H.S **(প্রমাণিত)**

(vi) $\text{L.H.S} = \sec^{-1}\frac{13}{5} - \text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}$





চিত্র হতে পাই,

$\text{L.H.S} = \tan^{-1}\frac{12}{5} - \tan^{-1}2$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{12}{5} - 2}{1 + \frac{12}{5}.2}$

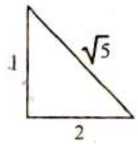
$= \tan^{-1}\dfrac{12 - 10}{5 + 24}$

$= \tan^{-1}\frac{2}{29} = \text{R.H.S}$ **(প্রমাণিত)**

(vii) বামপক্ষ $= \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= 2\tan^{-1}\frac{1}{2}$



$\therefore \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\dfrac{2.\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

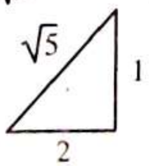
$= \tan^{-1}\dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\frac{3}{4}}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{3} = \cot^{-1}\frac{3}{4} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$ **(প্রমাণিত)**

(viii) বামপক্ষ $= \cot^{-1}3 + \text{cosec}^{-1}\sqrt{5}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$



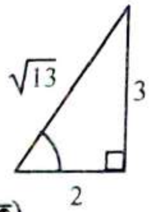
$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \cot^{-1}3 + \text{cosec}^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{4}$ **(প্রমাণিত)**

(ix) $\tan^{-1}\frac{2}{3} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2} = \tan^{-1}\frac{2}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{2}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{13}{6}}{0} = \frac{\pi}{2}$



$\therefore \tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$ **(প্রমাণিত)**

(x) বামপক্ষ $= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$

ধরি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \theta$ ... ... (i)

বা, $\cos^{-1}\frac{5}{13} = 2\theta$

বা, $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{5}{13}$

বা, $5 + 5\tan^2\theta = 13 - 13\tan^2\theta$

বা, $18\tan^2\theta = 8$ বা, $\tan^2\theta = \frac{8}{18}$

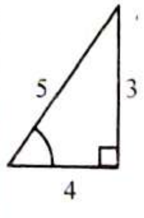
বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{9}$ বা, $\tan\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ [(i) নং হতে]

$\therefore$ বামপক্ষ $= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$

$= \left(\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{2}$



$= \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

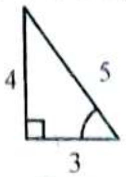
$= \tan^{-1}\frac{17}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{17}{6} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}}$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{29}{12}}\right) = \tan^{-1}\frac{28}{29} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2 = \tan^{-1}\frac{28}{29}$ **(প্রমাণিত)**

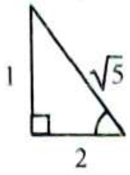
(xi) বামপক্ষ $= \sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} - \cot^{-1}\frac{2}{11}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} - \cot^{-1}\frac{2}{11}$ [চিত্র ১ ও ২ হতে]



চিত্র-১

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} - \cot^{-1}\frac{2}{11}$$



চিত্র-২

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{8+3}{6}}{\frac{6-4}{6}} - \cot^{-1}\frac{2}{11}$$

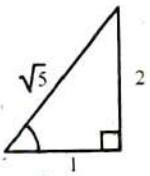
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}} - \cot^{-1}\frac{2}{11}$$

$$= \tan^{-1}\frac{11}{2} - \tan^{-1}\frac{11}{2}$$

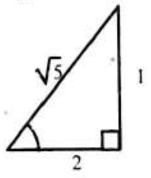
$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} - \cot^{-1}\frac{2}{11} = 0$

(xii) বামপক্ষ $= \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$



চিত্র-১



চিত্র-২

$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$ [চিত্র ১ ও ২ হতে]

$$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}.\, 2\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$$

$$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{\frac{5}{4}}$$

$$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}$$

$= \tan^{-1}2 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}2$ **(প্রমাণিত)**

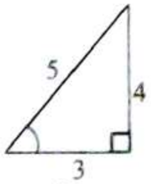
(xiii) $\sec^{-1}\frac{5}{3} + \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sec^{-1}\frac{5}{3} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{16}{63}$ [চিত্র-১ ও ২ হতে]

$$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{16}{63}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{16}{63}}$$

$$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{84+16}{63}}{\frac{189-64}{189}}\right)$$

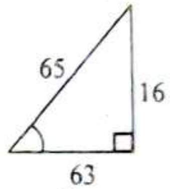


চিত্র-১

$$= \cot^{-1}\frac{12}{5} + \tan^{-1}\left(\frac{100}{63}\times\frac{189}{125}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \tan^{-1}\frac{12}{5}$$

$$= \tan^{-1}\frac{5}{12} + \cot^{-1}\frac{5}{12}$$



চিত্র-২

$= \frac{\pi}{2}\left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sec^{-1}\frac{5}{3} + \cot^{-1}\frac{12}{5} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$ **(প্রমাণিত)**

(xiv) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{36}}{\frac{17}{18}}\right)$$

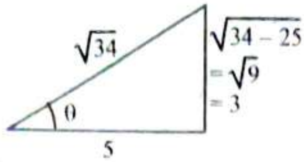
$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\, 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$ **(প্রমাণিত)**

(xv) ধরি, $\cos^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{34}} = \theta$



$\therefore\ \theta = \cot^{-1}\dfrac{5}{3}$

$\therefore \cos^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{34}} = \cot^{-1}\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ ডানপক্ষ $= \dfrac{\pi}{2} - \cot^{-1}\dfrac{5}{3}$

$= \tan^{-1}\dfrac{5}{3}\ \left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}\right]$

= বামপক্ষ

$\therefore \tan^{-1}\dfrac{5}{3} = \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ **(প্রমাণিত)**

3. **(i)** বামপক্ষ $= \sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}4) + \sec^2(\sec^{-1}3) - 1$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}4)\}^2 + \{\sec(\sec^{-1}3)\}^2 - 1$

$= 1 + 4^2 + 3^2 - 1$

$= 16 + 9 = 25 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3) = 25$ **(প্রমাণিত)**

(ii) বামপক্ষ $= \sec^2(\tan^{-1}2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$

$= 1 + 4 + 1 + 9 = 15 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec^2(\tan^{-1}2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$ **(প্রমাণিত)**

(iii) বামপক্ষ $= \sec^2(\cot^{-1}3) + \operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2)$

$= 1 + \tan^2(\cot^{-1}3) + 1 + \cot^2(\tan^{-1}2)$

$= 2 + \tan^2(\cot^{-1}3) + \cot^2(\tan^{-1}2)$

$= 2 + \left\{\tan\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2 + \left\{\cot\left(\cot^{-1}\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2$

$= 2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$= 2 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{85}{36} = 2\dfrac{13}{36} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec^2(\cot^{-1}3) + \operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2) = 2\dfrac{13}{36}$ **(প্রমাণিত)**

(iv) বামপক্ষ $= \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$

$= 1 + \cot^2\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) - 3\{1 + \tan^2(\cot^{-1}\sqrt{3})\}$

$= 1 + \cot^2(\cot^{-1}2) - 3 - 3\tan^2\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 1 + (2)^2 - 3 - 3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= 1 + 4 - 3 - 3.\dfrac{1}{3} = 2 - 1 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3}) = 1$ **(প্রমাণিত)**

(v) দেওয়া আছে, ΔABC-এ $AB = 2,\ BC = y = \sqrt{5}$

তাহলে, $x^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 4 + 5 = 9\ \therefore x = 3$

বামপক্ষ $= \sin^2\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$= \sin^2\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 1 - \cos^2\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) - \left\{1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$= 1 - \left\{\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2 - 1 + \left\{\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^2$

$= -\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= -\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^2\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2}{9}$ **(প্রমাণিত)**

4. **(i)** বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{\theta}{2}\right\}$

$$= \cos^{-1}\frac{1 - \dfrac{a-b}{a+b}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1 + \dfrac{a-b}{a+b}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1 - \dfrac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1 + \dfrac{(a-b)}{(a+b)}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{(a+b)\cos^2\dfrac{\theta}{2} - (a-b)\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\dfrac{\theta}{2} + (a-b)\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{a\cos^2\dfrac{\theta}{2} + b\cos^2\dfrac{\theta}{2} - a\sin^2\dfrac{\theta}{2} + b\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{a\cos^2\dfrac{\theta}{2} + b\cos^2\dfrac{\theta}{2} + a\sin^2\dfrac{\theta}{2} - b\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta} \quad [\because \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta]$$

= ডানপক্ষ

$$\therefore\ 2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right\} = \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$$

(প্রমাণিত)

(ii) বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{x}{2}\right)$

$$= \sin^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{x}{2}}{1+\frac{a}{b}\tan^2\frac{x}{2}} = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{b+a\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{b\cos^2\frac{x}{2}+a\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{ab}\sin x}{\frac{b}{2}(1+\cos x)+\frac{a}{2}(1-\cos x)}$$

$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{ab}\sin x}{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b-a}{2}\cos x}$$

$$= \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin x}{(a+b)+(b-a)\cos x}$$

= ডানপক্ষ

$$\therefore\ 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{ab}\sin x}{(a+b)+(b-a)\cos x}$$

(প্রমাণিত)

(iii) বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\left[\tan\frac{A}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right]$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\frac{A}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)-\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)}{2\left[\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)-\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right]}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sin A\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{2\left[\left\{\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right\}\left\{\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right\}\right]}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sin A\cos B}{2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)} = \tan^{-1}\frac{\sin A\cos B}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\cos A}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin A\cos B}{\cos A+\sin B}\right)$$

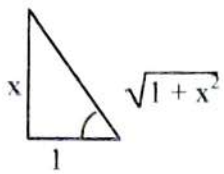
= ডানপক্ষ

$$\therefore\ 2\tan^{-1}\left[\tan\frac{A}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{\sin A\cos B}{\cos A+\sin B}\right)$$ (প্রমাণিত)

(iv) বামপক্ষ $= 2\tan^{-1}\{\text{cosec}(\tan^{-1}x) - \tan(\cot^{-1}x)\}$

$= 2\tan^{-1}\left\{\text{cosec}\left(\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) - \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)\right\}$

[নিচের চিত্র হতে]



$= 2\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right\}$

$= 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$= \tan^{-1}\frac{2\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}}{1-\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}^2}$

$= \tan^{-1}\frac{2\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}}{\frac{x^2-1-x^2+2\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x}}{\frac{2\sqrt{1+x^2}-2}{x^2}}$

$= \tan^{-1}\left\{\frac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x}\times\frac{x^2}{2(\sqrt{1+x^2}-1)}\right\}$

$= \tan^{-1}x$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(v) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\}$

$= \tan^{-1}\frac{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha - (\sqrt{2}-1)\tan\alpha}{1+(\sqrt{2}+1)\tan\alpha.(\sqrt{2}-1)\tan\alpha}$

$= \tan^{-1}\frac{2\tan\alpha}{1+(2-1)\tan^2\alpha}$

$= \tan^{-1}\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$= \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(vi) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\cot A + \cot^3 A}{1-\cot^4 A}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\left\{\frac{\cot A(1+\cot^2 A)}{(1+\cot^2 A)(1-\cot^2 A)}\right\}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\cot A}{1-\cot^2 A}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\tan A}}{1-\frac{1}{\tan^2 A}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\tan A}{\tan^2 A - 1}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}.\frac{2\tan A}{-(1-\tan^2 A)}\right\}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) - \tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}.\frac{2\tan A}{(1-\tan^2 A)}\right\}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)$

$= 0$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(vii) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2} + \tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}$

$= \tan^{-1}b^2 - \tan^{-1}c^2 + \tan^{-1}c^2 - \tan^{-1}a^2 + \tan^{-1}a^2 - \tan^{-1}b^2$

$= 0$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(viii) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} + \tan^{-1}\frac{\beta-\gamma}{1-\beta\gamma}$

$= \tan^{-1}\alpha - \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\beta - \tan^{-1}\gamma$

$= \tan^{-1}\alpha - \tan^{-1}\gamma$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(ix) বামপক্ষ $= \tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 3x - \frac{\pi}{2} + 5x = 2x$ = ডানপক্ষ

$\therefore \tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) = 2x$ **(প্রমাণিত)**

(x) বামপক্ষ $= \cot^{-1}(\tan 2x) + \cot^{-1}(-\tan 3x)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan 2x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\tan 3x}\right)$

$= \tan^{-1}(\cot 2x) + \tan^{-1}(-\cot 3x)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\cot 2x - \cot 3x}{1+\cot 2x.\cot 3x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin 3x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x}{\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x}\right)$

$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sin(3x-2x)}{\cos(3x-2x)}\right\}$

$= \tan^{-1}(\tan x) = x$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xi) বামপক্ষ $= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-\cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{1-2\sin^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta \times \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$
$= \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + \cos 2\theta\}$
$= \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + 1 - 2\sin^2\theta\} = \sin^{-1} 1$
$= \frac{\pi}{2} =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xii) বামপক্ষ $= \tan(2\tan^{-1} x)$

$= \tan\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$

ডানপক্ষ $= 2\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} x^3)$.

$= 2\tan\left(\tan^{-1}\frac{x+x^3}{1-x^4}\right)$

$= 2\tan\tan^{-1}\frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$

$= \frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xiii) বামপক্ষ $= \tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}$

$= \tan\left(\frac{1}{2}.2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}.2\tan^{-1}x\right)$

$= \tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x)$

$= \tan(2\tan^{-1}x) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$= \frac{2x}{1-x^2} =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xiv) বামপক্ষ $= \cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$

$= \cos\left\{\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right\}$

$= \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}} = \frac{48}{49} \times \frac{49}{50} = \frac{24}{25}$

ডানপক্ষ $= \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) = \sin\left(2 \times 2\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{8}\right)\right\}$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right\} = \sin\left\{\sin^{-1}\frac{2.\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right\}$

$= \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{25} = \frac{24}{25}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xv) বামপক্ষ $= \cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$= \cos\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ $[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}]$

$= \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xvi) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}(2\tan^{-1}\sqrt{x})$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(xvii) বামপক্ষ $= \tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})\tan x\}$
$+ \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})\tan x\}$

$= \tan^{-1}\frac{(2+\sqrt{3})\tan x + (2-\sqrt{3})\tan x}{1-(2+\sqrt{3})\tan x.(2-\sqrt{3})\tan x}$

$= \tan^{-1}\frac{2\tan x + \sqrt{3}\tan x + 2\tan x - \sqrt{3}\tan x}{1-(4-3)\tan^2 x}$

$= \tan^{-1}\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}$

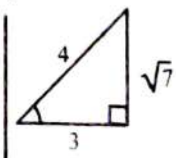
$= \tan^{-1}\left\{2.\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right\}$

$= \tan^{-1}\{2\tan(2x)\} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $\tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})\tan x\} + \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})\tan x\}$
$= \tan^{-1}\{2\tan(2x)\}$ **(প্রমাণিত)**

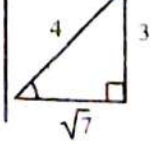
5. (i) বামপক্ষ $= \sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4}$

$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$



$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$

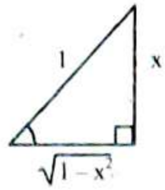
$= \sin\sin^{-1}\frac{3}{4}$



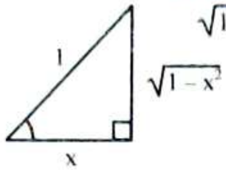
$= \frac{3}{4} =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ii) বামপক্ষ $= \cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x$

$= \cos\tan^{-1}\cot\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



$= \cos\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

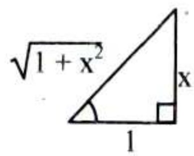


$= \cos\cos^{-1}\dfrac{x}{1}$

$= x =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

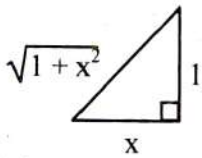
(iii) বামপক্ষ $= \cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x$

$= \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$



$= \cot\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

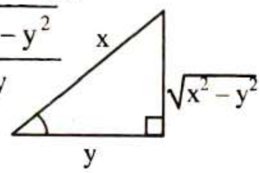
$= \cot\cot^{-1}\dfrac{x}{1}$



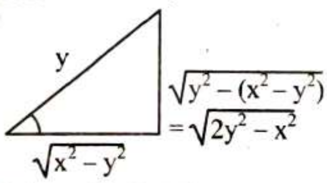
$= x =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(iv) বামপক্ষ $= \sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$



$= \sin\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

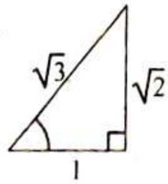


$= \sin\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y} = \dfrac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

$=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

6. (i) $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

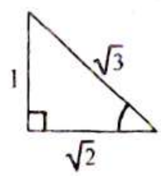
$= \cot^{-1}\cos\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$= \cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

(ii) $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$= \tan^{-1}\sin\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



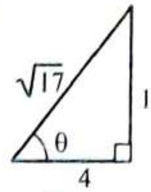
$= \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= 30°$ **(Ans.)**

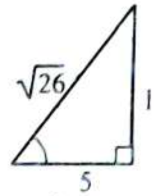
(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{17} + \sec^{-1}\dfrac{\sqrt{26}}{5}$

$= \tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{5}}$



চিত্র-১



চিত্র-২

$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{5+4}{20}}{\dfrac{20-1}{20}}$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{20}\times\dfrac{20}{19}\right) = \tan^{-1}\dfrac{9}{19}$ **(Ans.)**

(iv) $\tan^{-1}4 + \tan^{-1}\dfrac{5}{3} = \tan^{-1}\dfrac{4+\dfrac{5}{3}}{1-4\times\dfrac{5}{3}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\dfrac{12+5}{3}}{\dfrac{3-20}{3}} = \tan^{-1}\dfrac{17}{-17}$

$= \tan^{-1}(-1) = \tan^{-1}(\tan\dfrac{3\pi}{4}) = \dfrac{3\pi}{4}$ **(Ans.)**

7. **(i)** দেওয়া আছে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy} = \pi$

বা, $\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy} = \tan\pi$

বা, $\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy} = 0$

বা, $x+y+z-xyz = 0$

$\therefore$ $x+y+z = xyz$ **(প্রমাণিত)**

(ii) দেওয়া আছে,

$\tan^{-1}a + \dfrac{1}{2}\sec^{-1}\dfrac{1+b^2}{1-b^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1+c^2}{2c} = \pi$

বা, $\tan^{-1}a + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2} + \dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2c}{1+c^2} = \pi$

বা, $\tan^{-1}a + \dfrac{1}{2}.2\tan^{-1}b + \dfrac{1}{2}.2\tan^{-1}c = \pi$

বা, $\tan^{-1}a + \tan^{-1}b + \tan^{-1}c = \pi$

বা, $\tan^{-1}\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-ab} = \pi$

বা, $\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-ab} = \tan\pi$

বা, $\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-cb} = 0$

বা, $a+b+c-abc = 0$

$\therefore a+b+c = abc$ **(দেখানো হলো)**

(iii) দেওয়া আছে, $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$

বা, $2\tan^{-1}a - 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab} = \tan^{-1}x$

বা, $\frac{a-b}{1+ab} = x$

$\therefore x = \frac{a-b}{1+ab}$ **(দেখানো হলো)**

(iv) দেওয়া আছে, $\tan^{-1}2 = A \;\therefore \tan A = 2$

এবং $\tan^{-1}3 = B \;\therefore \tan B = 3$

এখন, $A + B = \pi - C$

বা, $\tan(A+B) = \tan(\pi-C)$

বা, $\frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B} = -\tan C$

বা, $\frac{2+3}{1-2.3} = -\tan C$

বা, $-1 = -\tan C$

বা, $\tan C = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore C = \frac{\pi}{4}$ **(প্রমাণিত)**

(v) দেওয়া আছে, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

বা, $\sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\} = \frac{\pi}{2}$

বা, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ **(প্রমাণিত)**

(vi) মনে করি, $\sin^{-1}x = A, \sin^{-1}y = B, \sin^{-1}z = C$

তাহলে, $A + B + C = \pi$

এখন, বামপক্ষ

$= x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2}$

$= \sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C$

$= \frac{1}{2}(2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C)$

$= \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B + 2\sin C\cos C)$

$= \frac{1}{2}\{2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\}$

$= \frac{1}{2}\{2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\}$

$[\because \sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C]$

$= \frac{1}{2}.2\sin C[\cos(A-B) + \cos C]$

$= \frac{1}{2}.2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$[\because \cos C = \cos\{(\pi-(A+B)\} = -\cos(A+B)]$

$= \sin C.2\sin A\sin B$

$= 2xyz =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

(vii) দেওয়া আছে,

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$

$\Rightarrow \cos^{-1}y = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2$ [বর্গ করে]

$\therefore x^2 + y^2 = 1$ **(দেখানো হলো)**

(viii) দেওয়া আছে, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$

বা, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z$

বা, $\cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) = \pi - \cos^{-1}z$

বা, $xy - \sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2} = \cos(\pi - \cos^{-1}z)$

বা, $xy - \sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2} = -\cos\cos^{-1}z = -z$

বা, $xy + z = \sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}$

বা, $x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$ [বর্গ করে]

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ **(দেখানো হলো)**

(ix) দেওয়া আছে, $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$

বা, $\sin(\pi\cos\theta) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right\}$

বা, $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $(\cos\theta \pm \sin\theta)^2 = \frac{1}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta + \sin^2\theta \pm 2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{4}$

বা, $1 \pm \sin 2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin 2\theta = \pm \frac{3}{4}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\left(\pm \frac{3}{4}\right)$

$\therefore \theta = \pm \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}$ **(দেখানো হলো)**

(x) দেওয়া আছে, $\sin(\pi \cos\theta) = \cos(\pi \sin\theta)$

বা, $\sin(\pi \cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \sin\theta\right)$

বা, $\pi \cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi \sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

[উভয় পক্ষে $\frac{1}{\sqrt{2}}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cos \frac{\pi}{4} \cos\theta \pm \sin \frac{\pi}{4} \sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\theta \pm \frac{\pi}{4} = \cos^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = \pm \frac{\pi}{4} + \cos^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(দেখানো হলো)**

(xi) দেওয়া আছে,

$\sec(\pi \operatorname{cosec}\theta) = \operatorname{cosec}(\pi \sec\theta)$

$\Rightarrow \sec(\pi \operatorname{cosec}\theta) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sec\theta\right)$

$\Rightarrow \pi \operatorname{cosec}\theta = \frac{\pi}{2} - \pi \sec\theta$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta.\cos\theta} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{4(\sin\theta\cos\theta)^2} = \frac{1}{4.4}$

$\Rightarrow \frac{1 + \sin2\theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow \sin^2 2\theta - 16\sin2\theta - 16 = 0$

$\Rightarrow \sin2\theta = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4.1.16}}{2.1}$

$\Rightarrow \sin2\theta = 8 \pm 4\sqrt{5}$

$\therefore \theta = \frac{1}{2} \sin^{-1}(8 \pm 4\sqrt{5})$ **(প্রমাণিত)**

(xii) $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta} = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta \cos\theta} = \frac{4}{3}$

বা, $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta \cos\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} = \frac{16}{9}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{1 - \sin2\theta}{(2\sin\theta \cos\theta)^2} = \frac{4}{9}$

বা, $\frac{1 - \sin2\theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{4}{9}$

বা, $4\sin^2 2\theta = 9 - 9 \sin2\theta$

বা, $4\sin^2 2\theta + 9\sin2\theta - 9 = 0$

বা, $4\sin^2 2\theta + 12\sin2\theta - 3\sin2\theta - 9 = 0$

বা, $(\sin2\theta + 3)(4\sin2\theta - 3) = 0$

বা, $4\sin2\theta - 3 = 0$ $[\because \sin2\theta + 3 \neq 0]$

বা, $\sin2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $2\theta = \sin^{-1} \frac{3}{4}$

$\therefore \theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}$ **(দেখানো হলো)**

(xiii) দেওয়া আছে, $\cos^{-1} \frac{x}{a} + \cos^{-1} \frac{y}{b} = \theta$

বা, $\cos^{-1} \left\{\frac{xy}{ab} - \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}\right\} = \theta$

বা, $\frac{xy}{ab} - \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = \cos \theta$

বা, $\frac{xy}{ab} - \cos \theta = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$

বা, $\frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$

বা, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \theta$ **(প্রমাণিত)**

(xiv) দেওয়া আছে, $\cot^{-1}y - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $\tan^{-1}\frac{1}{y} - \tan^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{y} - x}{1 + \frac{1}{y}.x} = \frac{\pi}{6}$

বা, $\dfrac{\frac{1 - xy}{y}}{\frac{y + x}{y}} = \tan\frac{\pi}{6}$ বা, $\frac{1 - xy}{x + y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $x + y = \sqrt{3} - \sqrt{3}xy$

$\therefore$ $x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ **(প্রমাণিত)**

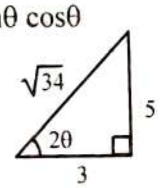
(xv) দেওয়া আছে, $\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5}$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{6}{5}$

বা, $\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{6}{5}$

বা, $5(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 6\sin\theta\cos\theta$

বা, $5\cos2\theta = 3\sin2\theta$



বা, $\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta} = \frac{5}{3}$

বা, $\tan2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $\sin2\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ **(প্রমাণিত)**

(xvi) দেওয়া আছে, $\sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b} = \alpha$

বা, $\cos^{-1}a + \cos^{-1}b = \alpha$

বা, $\cos^{-1}\{ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}\} = \alpha$

বা, $ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} = \cos\alpha$

বা, $ab - \cos\alpha = \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}$

বা, $a^2b^2 - 2ab\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$

বা, $-2ab\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha - a^2 - b^2$

বা, $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = \sin^2\alpha$

$\therefore$ $\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ **(প্রমাণিত)**

৪. **(i)** $\tan^{-1}(x + 2) + \tan^{-1}(x - 2) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

বা, $\tan^{-1}\frac{x + 2 + x - 2}{1 - (x + 2)(x - 2)} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

বা, $\tan^{-1}\frac{2x}{1 - x^2 + 4} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ বা, $\frac{2x}{5 - x^2} = \frac{1}{2}$

বা, $4x = 5 - x^2$ বা, $x^2 + 4x - 5 = 0$

বা, $(x + 5)(x - 1) = 0$ $\therefore x = -5, 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -5, 1$

(ii) $\tan^{-1}(x + 1) + \tan^{-1}x + \tan^{-1}(x - 1) = \tan^{-1}3x$

বা, $\tan^{-1}(x + 1) + \tan^{-1}(x - 1) = \tan^{-1}3x - \tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}\frac{x + 1 + x - 1}{1 - (x + 1)(x - 1)} = \tan^{-1}\frac{3x - x}{1 + 3x.x}$

বা, $\frac{2x}{2 - x^2} = \frac{2x}{1 + 3x^2}$

বা, $2x(1 + 3x^2) = 2x(2 - x^2)$

বা, $2x\{1 + 3x^2 - (2 - x^2)\} = 0$

বা, $2x(4x^2 - 1) = 0$

বা, $2x(2x + 1)(2x - 1) = 0$

$\therefore$ $x = 0, \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 0, \pm\frac{1}{2}$

(iii) $\tan\cos^{-1}x = \sin\cot^{-1}\frac{1}{2}$

বা, $\tan\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = \sin\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

[চিত্র ১ ও ২ হতে]

বা, $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

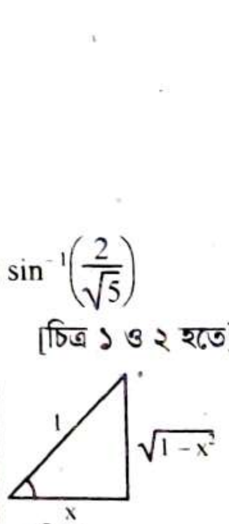
বা, $\frac{1 - x^2}{x^2} = \frac{4}{5}$ [বর্গ করে]

বা, $5 - 5x^2 = 4x^2$

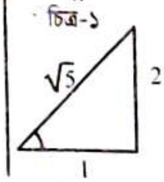
বা, $9x^2 = 5$

বা, $x^2 = \frac{5}{9}$

বা, $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$



চিত্র-১



চিত্র-২

x এর ঋণাত্মক মান সমীকরণকে সিদ্ধ করে না

$\therefore x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(iv) $\sin^{-1}x - \cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x - 2\cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ $[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}]$

বা, $2\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

বা, $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

বা, $x = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

বা, $2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{\frac{2(1-x)}{1+x}}{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} = \tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}\left\{\frac{2(1-x)}{1+x} \times \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2-(1-x)^2}\right\} = \tan^{-1}x$

বা, $\tan^{-1}\frac{2(1-x)(1+x)}{4x} = \tan^{-1}x$

বা, $\frac{1-x^2}{2x} = x$ $[\because (1+x) \neq 0]$

বা, $2x^2 = 1 - x^2$

বা, $3x^2 = 1$ বা, $x^2 = \frac{1}{3}$ $\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(vi) $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

বা, $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

বা, $\frac{\pi}{2} + \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ $[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}]$

বা, $\cot^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

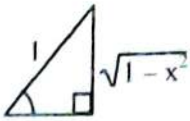
$\therefore x = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

নির্ণেয় সমাধান: $x = \sqrt{3}$

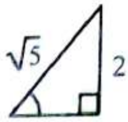
(vii) এখন, $\tan\cos^{-1}x = \sin\tan^{-1}2$

বা, $\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sin\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ [চিত্র ১ ও ২ হতে]

বা, $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$



চিত্র-১



চিত্র-২

বা, $\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{4}{5}$

বা, $4x^2 = 5 - 5x^2$

বা, $9x^2 = 5$ $\therefore x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

[$\because$ ঋণাত্মক মান সমীকরণকে সিদ্ধ করে না]

নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

9. (i) বামপক্ষ $= \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{2+3}{1-2.3}$ [এখানে $x = 2, y = 3$ $\therefore xy > 1$]

$= \pi + \tan^{-1}(-1)$

$= \pi - \tan^{-1}1 = \pi - \tan^{-1}\tan\frac{\pi}{4}$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} =$ ডানপক্ষ

যখন $xy > 1$ তখন $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ বৈধ নহে।

কাজেই $xy > 1$ হলে,

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ হবে।

[বি: দ্র: সূত্র: $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $xy > 1$]

(ii) বামপক্ষ $= \tan^{-1}2 + \tan^{-1}5 + \tan^{-1}8$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{2+5+8-2.5.8}{1-2.5-5.8-8.2}$

[এখানে $x = 2, y = 5, z = 8, xy + yz + zx \geq 1$]

$= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-65}{-65}\right)$

$= \pi + \tan^{-1}1$

$= \pi + \tan^{-1}\tan\frac{\pi}{4}$

$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} =$ ডানপক্ষ

যখন $xy + yz + zx \geq 1$ তখন

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

সূত্রটি বৈধ নয়। কাজেই যখন $xy + yz + zx \geq 1$ তখন $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$ হবে।

[বি:দ্র: সূত্র: $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$ যখন $xy + yz + zx \geq 1$]

(iii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{56}{65}=\pi$

বা, $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{12}{13}=\pi-\sin^{-1}\frac{56}{65}$

[এখানে $x=\frac{4}{5}$ এবং $y=\frac{12}{13}$ $\therefore x^2+y^2>1$]

$\therefore \sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{12}{13}$

$=\pi-\sin^{-1}\left\{\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}+\frac{12}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right\}$

$=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{144}{169}}+\frac{12}{13}\sqrt{1-\frac{16}{25}}\right)$

$=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{169}}+\frac{12}{13}\sqrt{\frac{9}{25}}\right)$

$=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}\right)$

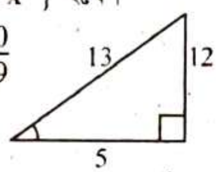
$=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{20}{65}+\frac{36}{65}\right)$

$=\pi-\sin^{-1}\frac{56}{65}$

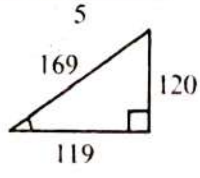
$\therefore \sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{56}{65}=\pi$ **(প্রমাণিত)**

যখন $x^2+y^2>1$ তখন $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y$ $=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$ সূত্রটি মুখ্যমানের জন্য বৈধ নয়। কাজেই $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y$ $=\pi-\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$ হবে।

(iv) বামপক্ষ $=2\sin^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{120}{169}$



$=2\tan^{-1}\frac{12}{5}+\tan^{-1}\frac{120}{119}$



$=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{2.\frac{12}{5}}{1-\frac{144}{25}}\right)+\tan^{-1}\frac{120}{119}$ $\left[\because \frac{12}{5}\cdot\frac{12}{5}>1\right]$

$=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{24}{5}\times\frac{25}{-119}\right)+\tan^{-1}\frac{120}{119}$

$=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{120}{-119}\right)+\tan^{-1}\frac{120}{119}$

$=\pi-\tan^{-1}\frac{120}{119}+\tan^{-1}\frac{120}{119}$

$=\pi=$ ডানপক্ষ

10. (i) $\text{L.H.S}=\tan^{-1}\left(\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}-\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}\cdot\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}}$

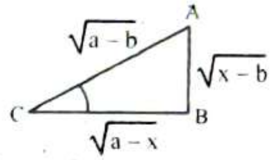
$=\tan^{-1}\frac{x\cos^2\theta-(x-\sin\theta-x^2\sin\theta+x\sin^2\theta)}{\cos\theta-x\sin\theta\cos\theta+x^2\cos\theta-x\sin\theta\cos\theta}$

$=\tan^{-1}\frac{x(1-\sin^2\theta)-x+\sin\theta+x^2\sin\theta-x\sin^2\theta}{x^2\cos\theta-2x\sin\theta\cos\theta+\cos\theta}$

$=\tan^{-1}\frac{\sin\theta\,(x^2-2x\sin\theta+1)}{\cos\theta\,.\,(x^2-2x\sin\theta+1)}$

$=\tan^{-1}\tan\theta=\theta=\text{R.H.S}$ **(দেখানো হলো)**

(ii)



$AB^2+BC^2=AC^2$

$\Rightarrow x-b+BC^2=a-b$

$\Rightarrow BC^2=a-x$ $\therefore BC=\sqrt{a-x}$

$\therefore \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-b}}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}}$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-b}}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-b}}$

$=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}}$ **(দেখানো হলো)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-7.4 | পৃষ্ঠা-২৮১

(i) $\tan2x=1;\ 0\le x\le\pi$

বা, $\tan2x=\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $2x=n\pi+\frac{\pi}{4}$

$\therefore x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n=0$ হলে, $x=\frac{\pi}{8}$

$n=1$ হলে, $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$

$n=2$ হলে, $x=\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{9\pi}{8}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে মানসমূহ: $\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}$

(ii) $\sin 2x = -1; -\pi < x < \pi$

বা, $2x = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $x = (4n-1)\frac{\pi}{4}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = -\frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{7\pi}{4}$

$n = -1$ হলে, $x = -\frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে মানসমূহ: $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

(iii) $\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}; -\pi < x < \pi$

বা, $\cos 3x = \cos\frac{\pi}{4}$

বা, $3x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$;

$\therefore$ $x = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$; যেখানে n-এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = \pm\frac{\pi}{12}$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{9\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$

$n = -1$ হলে, $x = -\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$

$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$

$= -\frac{8\pi - \pi}{12}, \frac{-8\pi - \pi}{12}$

$= -\frac{7\pi}{12}, -\frac{9\pi}{12}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে মানসমূহ: $\pm\frac{\pi}{12}, \pm\frac{9\pi}{12}, \pm\frac{7\pi}{12}$

(iv) $\tan\frac{x}{2} = -1; -2\pi < x < 0$

বা, $\tan\frac{x}{2} = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\frac{x}{2} = n\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = -\frac{\pi}{2}$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে মানসমূহ : $-\frac{\pi}{2}$

(v) $3\tan^2 x - 2 = 5\sec^2 x - 9; 0 < x < 2\pi$

বা, $3\tan^2 x - 2 - 5(1 + \tan^2 x) + 9 = 0$

বা, $-2\tan^2 x + 2 = 0$

বা, $\tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1$

বা, $\tan x = \pm\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $x = n\pi + \left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = \pm\frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $x = \pi \pm \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে মানসমূহ: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(vi) $3\cos^2 x - 6\cos x = \sin^2 x - 3; -\pi < x < \pi$

বা, $3\cos^2 x - 6\cos x - (1 - \cos^2 x) + 3 = 0$

বা, $4\cos^2 x - 6\cos x + 2 = 0$

বা, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x - 2\cos x - \cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos x(\cos x - 1) - 1(\cos x - 1) = 0$

বা, $(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\cos x - 1 = 0$ অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = 1 = \cos 0$ বা, $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi$ $\quad$ $\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = 0$ এবং $x = \pm\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $x = 2\pi$ এবং $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi$ এবং $x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$= -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{7\pi}{3}, \frac{-5\pi}{3}$$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে মানসমূহ: $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

? অনুশীলনী-7(B) এর সমাধান

1. (i) $\tan^2x + \sec^2x = 3$

বা, $\tan^2x + 1 + \tan^2x = 3$

বা, $2\tan^2x = 2$

বা, $\tan^2x = 1$

বা, $\tan x = \pm 1$

বা, $\tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \pm 1$

বা, $\tan\theta = \tan(\pm\frac{\pi}{4})$

$\therefore$ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$

বা, $2\tan^2\theta - 3\tan\theta + 1 = 0$

বা, $2\tan^2\theta - 2\tan\theta - \tan\theta + 1 = 0$

বা, $2\tan\theta(\tan\theta - 1) - 1(\tan\theta - 1) = 0$

বা, $(2\tan\theta - 1)(\tan\theta - 1) = 0$

হয়, $2\tan\theta - 1 = 0$ অথবা, $\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{2} = \tan\alpha$ বা, $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\theta = n\pi + \alpha$ $\therefore$ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

যেখানে $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iv) $\tan^2x = 3\text{cosec}^2x - 1$

বা, $\tan^2x = 3(1 + \cot^2x) - 1$

বা, $\tan^2x = 3 + 3\cot^2x - 1$

বা, $\tan^2x = 2 + \frac{3}{\tan^2x}$

বা, $\tan^4x = 2\tan^2x + 3$ [$\tan^2x$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4x - 2\tan^2x - 3 = 0$

বা, $\tan^4x - 3\tan^2x + \tan^2x - 3 = 0$

বা, $\tan^2x(\tan^2x - 3) + 1(\tan^2x - 3) = 0$

বা, $(\tan^2x - 3)(\tan^2x + 1) = 0$

বা, $\tan^2x - 3 = 0$ [$\tan^2x + 1 \neq 0$]

বা, $\tan^2x = 3$

বা, $\tan x = \pm\sqrt{3}$

বা, $\tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(v) $\sec^2\theta + 3\text{cosec}^2\theta = 8$

বা, $1 + \tan^2\theta + 3(1 + \cot^2\theta) = 8$

বা, $1 + \tan^2\theta + 3 + 3\cot^2\theta = 8$

বা, $\tan^2\theta + 3\cot^2\theta + 4 - 8 = 0$

বা, $\tan^2\theta + 3\cot^2\theta - 4 = 0$

বা, $\tan^4\theta + 3 - 4\tan^2\theta = 0$

[উভয় পক্ষকে $\tan^2\theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\theta - 4\tan^2\theta + 3 = 0$

বা, $\tan^4\theta - 3\tan^2\theta - \tan^2\theta + 3 = 0$

বা, $\tan^2\theta(\tan^2\theta - 3) - 1(\tan^2\theta - 3) = 0$

বা, $(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta - 1) = 0$

হয়, $\tan^2\theta - 3 = 0$ অথবা, $\tan^2\theta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\theta = 3$ বা, $\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$ বা, $\tan\theta = \pm 1$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ বা, $\tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $\therefore\ \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(vi) দেওয়া আছে, $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$

$\Rightarrow \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = 2$

$\Rightarrow \tan^4 x - 2\tan^2 x + 1 = 0 \Rightarrow (\tan^2 x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 1$

$\Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow \tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

(vii) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta = 0$

বা, $2(1 - \sin^2\theta) - 3\sin\theta = 0$

বা, $2 - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta = 0$

বা, $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + 4\sin\theta - \sin\theta - 2 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta + 2) - 1(\sin\theta + 2) = 0$

বা, $(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) = 0$

বা, $\sin\theta + 2 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = -2$ বা, $2\sin\theta = 1$

[গ্রহণযোগ্য নয়] বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(viii) $6\cos^2 x + \sin x = 5$

বা, $6(1 - \sin^2 x) + \sin x - 5 = 0$

বা, $6 - 6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0$

বা, $-6\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

বা, $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

বা, $6\sin^2 x - 3\sin x + 2\sin x - 1 = 0$

বা, $3\sin x(2\sin x - 1) + 1(2\sin x - 1) = 0$

বা, $(2\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$

হয়, $2\sin x - 1 = 0$ অথবা, $3\sin x + 1 = 0$

বা, $\sin x = \frac{1}{2}$ বা, $\sin x = -\frac{1}{3}$

বা, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ বা, $\sin x = \sin\alpha$

[যেখানে, $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$]

$\therefore\ x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ $\therefore\ x = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\pi + (-1)^n\alpha$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা যেখানে, $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$

(ix) $\sqrt{3}\cot^2 x + 4\cot x + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\cot^2 x + 3\cot x + \cot x + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\cot x(\cot x + \sqrt{3}) + 1(\cot x + \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\cot x + \sqrt{3})(\sqrt{3}\cot x + 1) = 0$

হয়, $\cot x + \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$

বা, $\cot x = -\sqrt{3}$ বা, $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\tan x = -\sqrt{3}$

বা, $\tan x = \tan\frac{5\pi}{6}$ বা, $\tan x = \tan\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\therefore\ x = n\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, n\pi + \frac{2\pi}{3}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(x) $\tan^2\theta - 2\sqrt{3}\sec\theta + 4 = 0$

বা, $\sec^2\theta - 1 - 2\sqrt{3}\sec\theta + 4 = 0$

বা, $\sec^2\theta - 2\sqrt{3}\sec\theta + 3 = 0$

বা, $(\sec\theta)^2 - 2.\sec\theta\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 0$

বা, $(\sec\theta - \sqrt{3})^2 = 0$

বা, $\sec\theta - \sqrt{3} = 0$ বা, $\sec\theta = \sqrt{3}$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\alpha$ (ধরি)

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \alpha$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 2n\pi \pm \alpha$; যেখানে $\sec\alpha = \sqrt{3}$ এখানে n এর মান শূন্য কিংবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xi) $\cot 2\theta - \cot 4\theta = \sqrt{2}$

বা, $\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} - \frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta} = \sqrt{2}$

বা, $\frac{\cos 2\theta \sin 4\theta - \cos 4\theta \sin 2\theta}{\sin 2\theta \sin 4\theta} = \sqrt{2}$

বা, $\frac{\sin(4\theta - 2\theta)}{\sin 4\theta \sin 2\theta} = \sqrt{2}$

বা, $\frac{\sin2\theta}{\sin4\theta \sin2\theta} = \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sin4\theta} = \sqrt{2}$

বা, $\sin4\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin4\theta = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $4\theta = n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{16}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{16}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xii) $3\tan\theta + \cot\theta = 5\text{cosec}\theta$

বা, $\frac{3\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{\sin\theta}$

বা, $3\sin^2\theta + \cos^2\theta = 5\cos\theta$

[উভয়পক্ষকে $\sin\theta \cos\theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $3(1 - \cos^2\theta) + \cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $3 - 3\cos^2\theta + \cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $3 - 2\cos^2\theta - 5\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

বা, $(\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 3 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -3$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

[যা গ্রহণযোগ্য নয়] বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xiii) $4\sin^2x + \sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})\sin x$

বা, $4\sin^2x + \sqrt{3} = 2\sin x + 2\sqrt{3}\sin x$

বা, $4\sin^2x - 2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin x(2\sin x - 1) - \sqrt{3}(2\sin x - 1) = 0$

বা, $(2\sin x - 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $2\sin x - 1 = 0$ অথবা, $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

বা, $\sin x = \frac{1}{2}$ বা, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ বা, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ $\therefore$ $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xiv) $2\sin\theta \tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$

বা, $2\sin\theta \tan\theta + 1 - \tan\theta - 2\sin\theta = 0$

বা, $2\sin\theta \tan\theta - 2\sin\theta - \tan\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\tan\theta - 1) - 1(\tan\theta - 1) = 0$

বা, $(\tan\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয় $\tan\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$; $\therefore$ $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xv) $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $(2\sin\theta\cos\theta)^2 - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $\cos^2\theta(4\sin^2\theta - 3) = 0$

হয়, $\cos^2\theta = 0$ বা, $\cos\theta = 0$ $\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $4\sin^2\theta - 3 = 0$

বা, $4\sin^2\theta = 3$ বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ বা, $\sin\theta = \pm\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\theta = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ $\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xvi) $2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2$

বা, $2\sin^2\theta + (2\sin\theta\cos\theta)^2 = 2$

বা, $2\sin^2\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2 = 0$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 2 = 0$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2(1 - \sin^2\theta) = 0$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $-2\cos^2\theta(1-2\sin^2\theta)=0$

বা, $-2\cos^2\theta.\cos2\theta=0$

বা, $\cos^2\theta\cos2\theta=0$

হয়, $\cos^2\theta=0$ অথবা, $\cos2\theta=0$

বা, $\cos\theta=0$ বা, $2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ \theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{4}$;

যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xvii) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=2$

বা, $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$

বা, $\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)=2\cos\theta(1+\sin\theta)$

বা, $1-\sin^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)-2\cos\theta(1+\sin\theta)=0$

বা, $(1+\sin\theta)\{1-\sin\theta+\sin\theta-2\cos\theta\}=0$

বা, $(1+\sin\theta)(1-2\cos\theta)=0$

$1-2\cos\theta=0\ [\because 1+\sin\theta\neq0]$

$\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, যেখানে, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xviii) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2\sin2\theta}$

বা, $(\sqrt{\sin\theta})^2+(\sqrt{\cos\theta})^2=\sqrt{2.2\sin\theta\cos\theta}$

বা, $(\sqrt{\sin\theta})^2-2\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}+(\sqrt{\cos\theta})^2=0$

বা, $(\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta})^2=0$

বা, $\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}=0$

বা, $\sqrt{\sin\theta}=\sqrt{\cos\theta}$

বা, $\sin\theta=\cos\theta$ [বর্গ করে]

বা, $\tan\theta=1=\tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=m\pi+\frac{\pi}{4}$, যেখানে m এর মান শূন্য বা যে কোনো পূর্ণসংখ্যা।

এখন m জোড় সংখ্যা হলে, ধরি, $m=2n$, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা

$\therefore\ \theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sin\theta+\cos\theta$

$=\sin(2n\pi+\frac{\pi}{4})+\cos(2n\pi+\frac{\pi}{4})$

$=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}=\sqrt2$

ডানপক্ষ $=\sqrt{2\sin2\theta}$

$=\sqrt{2\sin2(2n\pi+{}^{\pi}/_{4})}$

$=\sqrt{2\sin(4n\pi+{}^{\pi}/_{2})}$

$=\sqrt{2\sin\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2.1}=\sqrt2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

আবার, m বিজোড় সংখ্যা হলে, ধরি $m=2n+1$, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা

$\therefore\ \theta=(2n+1)\pi+{}^{\pi}/_{4}=2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sin\theta+\cos\theta$

$=\sin(2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4})+\cos(2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4})$

$=\sin(\pi+\frac{\pi}{4})+\cos(\pi+\frac{\pi}{4})$

$=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$

$=-\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\sqrt2$

ডানপক্ষ $=\sqrt{2\sin2\theta}$

$=\sqrt{2\sin2\left(2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\sqrt{2\sin\left(4n\pi+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\sqrt{2\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\sqrt{2\sin\frac{\pi}{2}}$

$=\sqrt2$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$, যেখানে n এর মান শূন্য বা কোনো পূর্ণসংখ্যা।

বি.দ্র.: সমাধানের সময় সমীকরণকে বর্গ করলে অবাস্তব মূল আসতে পারে। সেক্ষেত্রে শুদ্ধি পরীক্ষা আবশ্যক।

(xix) $\cos^3\theta \sin 3\theta + \sin^3\theta \cos 3\theta = \frac{3}{4}$

বা, $4\cos^3\theta \sin 3\theta + 4\sin^3\theta \cos 3\theta = 3$

বা, $(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \sin 3\theta + (3\sin\theta - \sin 3\theta)\cos 3\theta = 3$

বা, $\sin 3\theta \cos 3\theta + 3\sin 3\theta \cos\theta + 3\cos 3\theta \sin\theta - \sin 3\theta \cos 3\theta = 3$

বা, $3(\sin 3\theta \cos\theta + \cos 3\theta \sin\theta) = 3$

বা, $3\sin(3\theta + \theta) = 3$

বা, $\sin 4\theta = 1$

বা, $4\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{8}$, যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xx) $\cot 2x = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow \cot^2 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x$

$\Rightarrow \text{cosec}^2 2x - 1 = 1 + \sin 2x$

$\Rightarrow \frac{1 - \sin^2 2x}{\sin^2 2x} = 1 + \sin 2x$

$\Rightarrow 1 - \sin^2 2x = \sin^2 2x + \sin^3 2x$

$\Rightarrow \sin^3 2x + 2\sin^2 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^3 2x + \sin^2 2x + \sin^2 2x + \sin 2x - \sin 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^2 2x(\sin 2x + 1) + \sin 2x(\sin 2x + 1) - 1(\sin 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow (\sin 2x + 1)(\sin^2 2x + \sin 2x - 1) = 0$

হয় $\sin 2x = -1$ অথবা,

$\Rightarrow 2x = (4n - 1)\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \sin 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$\therefore x = (4n - 1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = \sin\alpha$ (ধরি)

কিন্তু $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1$ হওয়ায় গ্রহণযোগ্য নয়।

$\Rightarrow 2x = n\pi + (-1)^n \alpha\ ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\alpha}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = (4n - 1)\frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\alpha}{2}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ এবং $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

(xxi) $2\sin 2x + 3\cos x = 0$

বা, $2.2\sin x \cos x + 3\cos x = 0$

বা, $4\sin x \cos x + 3\cos x = 0$

বা, $\cos x(4\sin x + 3) = 0$

হয়, $\cos x = 0$ অথবা, $4\sin x + 3 = 0$

$\therefore x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\sin x = -\frac{3}{4} = \sin\alpha$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\alpha$

যেখানে, $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n\alpha$; যখন $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$; n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xxii) $2\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

বা, $2 . 2\sin\theta \cos\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(2\cos\theta + 1) + 1(2\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

হয়, $2\sin\theta + 1 = 0$ অথবা $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\sin\theta = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$ বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$ $\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, যেখানে n-এর মান শূন্য বা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

(xxiii) $2\cos^2 x + \cos^2 2x = 2$

বা, $1 + \cos 2x + \cos^2 2x - 2 = 0$

বা, $\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

বা, $\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 . 1 . (-1)}}{2.1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু, $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কেননা তা -1 অপেক্ষা ছোট মান এবং $\cos\theta$ এর সীমা -1 হতে 1 পর্যন্ত।

$\therefore \cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

বা, $\cos 2x = \cos\alpha$

ধরি, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

বা, $2x = 2n\pi \pm \alpha$.

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$ যেখানে $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

(xxiv) $1 + \sin^2 x - 2\cos^2 x + 3\cos x = 3 - \cos^2 x$

বা, $1 + 1 - \cos^2 x - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 + \cos^2 x = 0$

বা, $-2\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x - 2\cos x - \cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos x(\cos x - 1) - 1(\cos x - 1) = 0$

বা, $(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\cos x - 1 = 0$ অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = 1$ বা, $2\cos x = 1$

$\therefore x = 2n\pi$ বা, $\cos x = \frac{1}{2}$

বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান: $x = 2n\pi, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যেখানে n-এর মান শূন্য বা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

2. **(i)** $4(\cos^2 x + \sin x) = 5;\ 0 < x < 2\pi$

বা, $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$

বা, $4 - 4\sin^2 x + 4\sin x = 5$

বা, $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$

বা, $(2\sin x - 1)^2 = 0$ বা, $2\sin x - 1 = 0$

বা, $\sin x = \frac{1}{2}$ বা, $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $x = n\pi + (-1)^n \frac{1}{6}\pi$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, n = 0 হলে, $x = \frac{\pi}{6}$

n = 1 হলে, $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

n = 2 হলে, $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x-এর মানসমূহ: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(ii) $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5;\ -2\pi < \theta < 2\pi$

বা, $4\sin^2\theta + 4\cos\theta - 5 = 0$

বা, $4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 5 = 0$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$ বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

n = 0 হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

n = 1 হলে, $\theta = \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$

n = −1 হলে, $\theta = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে θ এর মানসমূহ : $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$

(iii) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0;\ 0° < x < 360°$

বা, $2 - 2\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$

বা, $2\cos^2 x + 6\cos x - \cos x - 3 = 0$

বা, $2\cos x(\cos x + 3) - 1(\cos x + 3) = 0$

বা, $(\cos x + 3)(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\cos x + 3 = 0$ অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = -3$ বা, $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

[যা সম্ভব নয়] $\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

n = 0 হলে, $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} = -60°, 60°$

n = 1 হলে, $x = \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} = 300°, 420°$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর মানসমূহ : $x = 60°, 300°$

(iv) $2\sin^2 x = 3\cos x;\ 0 < x < 2\pi$

বা, $2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x$

বা, $2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = 0$

বা, $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

বা, $2\cos^2 x + 4\cos x - \cos x - 2 = 0$

বা, $2\cos x(\cos x + 2) - 1(\cos x + 2) = 0$

বা, $(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\cos x + 2 = 0$ $\therefore \cos x = -2$

কিন্তু, cosx এর মান −2 হতে পারে না।

অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $2\cos x = 1$ বা, $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, n = 0 হলে, $x = \pm\frac{\pi}{3}$

n = 1 হলে, $x = \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর মানসমূহ : $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

(v) $3\tan^2x - 4\sqrt{3}\sec x + 7 = 0; 0° < x < 360°$

বা, $3(\sec^2x - 1) - 4\sqrt{3}\sec x + 7 = 0$

বা, $3\sec^2x - 3 - 4\sqrt{3}\sec x + 7 = 0$

বা, $3\sec^2x - 4\sqrt{3}\sec x + 4 = 0$

বা, $(\sqrt{3}\sec x)^2 - 2.\sqrt{3}\sec x.2 + (2)^2 = 0$

বা, $(\sqrt{3}\sec x - 2)^2 = 0$

বা, $\sqrt{3}\sec x - 2 = 0$ বা, $\sec x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec x = \sec 30° = \sec(360° - 30°) = \sec 330°$

$\therefore$ $x = 30°, 330°$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর মানসমূহ : $x = 30°, 330°$

(vi) $\tan^2x + \sec^2x = 3\tan x; 0 \leq x \leq 2\pi$

বা, $\tan^2x + 1 + \tan^2x - 3\tan x = 0$

বা, $2\tan^2x - 3\tan x + 1 = 0$

বা, $2\tan^2x - 2\tan x - \tan x + 1 = 0$

বা, $2\tan x(\tan x - 1) - 1(\tan x - 1) = 0$

বা, $(2\tan x - 1)(\tan x - 1) = 0$

হয়, $2\tan x - 1 = 0$ বা, $\tan x - 1 = 0$

বা, $\tan x = \frac{1}{2} = \tan\tan^{-1}\frac{1}{2}$ বা, $\tan x = 1$

$\therefore$ $x = n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ বা, $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

যখন $n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $x = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} > 2\pi$

নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধানসমূহ,

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **(Ans.)**

(vii) $\sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}; 0 < x < 2\pi$

বা, $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\sqrt{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

বা, $1 = 2\sqrt{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.\cos^2\frac{x}{2}$

বা, $1 = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

বা, $1 = \sqrt{2}.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x$

বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ $\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$

এখানে, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{4}$

আবার, $n = 1$ হলে, $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর মানসমূহ: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

(viii) $\cot\theta - \tan\theta = 2; 0 \leq \theta \leq \pi$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2$

বা, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

বা, $\cos 2\theta = \sin 2\theta$

বা, $\tan 2\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

বা, $2\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{8}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{8}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{9\pi}{8}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ: $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$

(ix) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta; -2\pi < \theta < 2\pi$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন $n = 0$, তখন, $\theta = \frac{\pi}{6}$

যখন $n = 1$, তখন, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

যখন $n = 2$, তখন, $\theta = \frac{13\pi}{6}$

যখন $n = -1$, তখন, $\theta = -\frac{7\pi}{6}$

যখন $n = -2$, তখন, $\theta = -\frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $\theta = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(x) $1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = (1 + \sqrt{3})\tan\theta;\ 0° < \theta < 360°$

বা, $1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = \tan\theta + \sqrt{3}\tan\theta$

বা, $1 - \tan\theta + \sqrt{3}\tan^2\theta - \sqrt{3}\tan\theta = 0$

বা, $(1 - \tan\theta) - \sqrt{3}\tan\theta\,(1 - \tan\theta) = 0$

বা, $(1 - \tan\theta)(1 - \sqrt{3}\tan\theta) = 0$

হয়, $1 - \tan\theta = 0$ অথবা, $1 - \sqrt{3}\tan\theta = 0$

বা, $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ বা, $1 = \sqrt{3}\tan\theta$

$\therefore\ \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n = 0$ তখন, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} = 45°, 30°$

যখন, $n = 1$ তখন $\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6} = 225°, 210°$

যখন, $n = 2$ তখন $\theta = \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{6} = 405°, 390°$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $\theta = 30°, 45°, 210°, 225°$

(xi) $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta;\ 0° < \theta < 180°$

বা, $4\sin\theta\cos\theta - 2\cos\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta\,(2\sin\theta - 1) + (2\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

হয়, $2\sin\theta - 1 = 0$ .... (i)

অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) নং হতে পাই, $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6},\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

যখন, $n = 0$, তখন, $\theta = \frac{\pi}{6}, \pm\frac{2\pi}{3}$

যখন, $n = 1$, তখন, $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$

অর্থাৎ $30°, 120°, 150°$

3. (i) $\tan 2\theta \tan\theta = 1$

বা, $\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\tan\theta = 1$

বা, $2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

বা, $3\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore\ \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\tan\frac{\pi}{6}$

(+ve) এর জন্য, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

(−ve) এর জন্য, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}$

যেখানে n-এর শূন্য বা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

বিকল্প সমাধান:

$\tan 2\theta \tan\theta = 1$

বা, $\frac{\sin 2\theta \sin\theta}{\cos 2\theta \cos\theta} = 1$

বা, $\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = 0$

বা, $\cos(2\theta + \theta) = 0$

বা, $\cos 3\theta = 0$

$\therefore 3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$, যখন n-এর মান শূন্য বা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

(ii) $\tan3\theta \tan\theta = 1$

বা, $\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

বা, $\cos 3\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin\theta = 0$

বা, $\cos(3\theta + \theta) = 0$

বা, $\cos 4\theta = 0$

বা, $4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\tan\theta + \tan3\theta = 0$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = 0$

বা, $\sin\theta \cos 3\theta + \cos\theta \sin 3\theta = 0$

বা, $\sin(3\theta + \theta) = 0$

বা, $\sin 4\theta = 0$

বা, $4\theta = n\pi$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{4}$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান:** $\theta = \frac{n\pi}{4}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

বিকল্প সমাধান: $\tan\theta + \tan 3\theta = 0$

বা, $\frac{\tan\theta + \tan3\theta}{1 - \tan\theta \tan 3\theta} = 0$

[উভয়পক্ষকে $1 - \tan\theta \tan 3\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\tan(\theta + 3\theta) = 0$

বা, $\tan 4\theta = 0$

বা, $4\theta = n\pi$

বা, $\theta = \frac{n\pi}{4}$; যখন $n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$

বা, $\tan x + \tan 2x = 1 - \tan x \tan 2x$

বা, $\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = 1$

বা, $\tan(x + 2x) = 1$

বা, $\tan 3x = \tan\frac{\pi}{4}$

বা, $3x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

বা, $3x = (4n+1)\frac{\pi}{4}$ $\therefore x = (4n+1)\frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = (4n+1)\frac{\pi}{12}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(v) $\sqrt{3}(\tan x + \tan 2x) + \tan x \tan 2x = 1$

বা, $\sqrt{3}(\tan x + \tan 2x) = 1 - \tan x \tan 2x$

বা, $\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x + 2x) = \tan\frac{\pi}{6}$

বা, $3x = n\pi + \frac{\pi}{6}$

বা, $x = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$

$\therefore x = (6n+1)\frac{\pi}{18}$

নির্ণেয় সমাধান: $x = (6n+1)\frac{\pi}{18}$

যেখানে n-এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(vi) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

বা, $\tan x + \tan 2x + \tan(x + 2x) = 0$

বা, $\tan x + \tan 2x + \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = 0$

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(1 + \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(\frac{1 - \tan 2x \tan 2x + 1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$

বা, $\left(\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}\right)(2 - \tan x \tan 2x) = 0$

বা, $\tan 3x(2 - \tan x \tan 2x) = 0$

হয়, $\tan 3x = 0$

বা, $3x = n\pi$ $\therefore x = \frac{n\pi}{3}$

অথবা, $2 - \tan x \tan 2x = 0$

বা, $2 - \tan x \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 0$

বা, $2 - 2\tan^2 x - 2\tan^2 x = 0$

বা, $4\tan^2 x = 2$

বা, $2\tan^2 x = 1$

বা, $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan\alpha$ [যেখানে $\tan\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]

বা, $x = n\pi + \alpha$

$\therefore x = n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{n\pi}{3}, n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

(vii) $\tan\theta + \tan2\theta + \tan3\theta = \tan\theta\tan2\theta\tan3\theta$

বা, $\tan\theta + \tan2\theta = \tan\theta\tan2\theta\tan3\theta - \tan3\theta$

বা, $\tan\theta + \tan2\theta = \tan3\theta(\tan\theta\tan2\theta - 1)$

বা, $\frac{\tan\theta + \tan2\theta}{\tan\theta\tan2\theta - 1} = \tan3\theta$

বা, $\frac{\tan\theta + \tan2\theta}{1 - \tan\theta\tan2\theta} = -\tan3\theta$

বা, $\tan(\theta + 2\theta) = -\tan3\theta$

বা, $\tan3\theta = -\tan3\theta$

বা, $2\tan3\theta = 0$ বা, $\tan3\theta = 0$

$\therefore 3\theta = n\pi$ বা, $\theta = \frac{n\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{n\pi}{3}$; যেখানে n শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(viii) $\cot\theta + \cot2\theta + \cot3\theta = \cot\theta\cot2\theta\cot3\theta$

বা, $\cot\theta\cot2\theta\cot3\theta - \cot3\theta = \cot\theta + \cot2\theta$

বা, $\cot3\theta(\cot\theta\cot2\theta - 1) = \cot\theta + \cot2\theta$

বা, $\cot3\theta \cdot \frac{\cot\theta\cot2\theta - 1}{\cot\theta + \cot2\theta} = 1$

বা, $\cot3\theta \cdot \cot(\theta + 2\theta) = 1$

বা, $(\cot3\theta)^2 = 1$

বা, $\cot3\theta = \pm1$

বা, $\frac{1}{\tan3\theta} = \pm1$

বা, $\tan3\theta = \pm1$

বা, $\tan3\theta = \pm\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan3\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore 3\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = (4n \pm 1)\frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = (4n \pm 1)\frac{\pi}{12}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

4. (i) $\cos7\theta = \cos3\theta + \sin5\theta$

বা, $(\cos3\theta - \cos7\theta) + \sin5\theta = 0$

বা, $2\sin5\theta\sin2\theta + \sin5\theta = 0$

বা, $\sin5\theta(2\sin2\theta + 1) = 0$

হয় $\sin5\theta = 0$ অথবা, $2\sin2\theta + 1 = 0$

বা, $5\theta = n\pi$ বা, $2\sin2\theta = -1$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{5}$ বা, $\sin2\theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

বা, $\sin2\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $2\theta = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{7\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{7\pi}{12}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) $\cos\theta - \cos7\theta = \sin4\theta$

বা, $2\sin4\theta\sin3\theta - \sin4\theta = 0$

বা, $\sin4\theta(2\sin3\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin4\theta = 0$ অথবা, $2\sin3\theta - 1 = 0$

বা, $4\theta = n\pi$ বা, $2\sin3\theta = 1$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{4}$ বা, $\sin3\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

বা, $3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\cos\theta - \cos9\theta = \sin5\theta$

বা, $2\sin5\theta\sin4\theta = \sin5\theta$

বা, $\sin5\theta(2\sin4\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin5\theta = 0$ অথবা, $2\sin4\theta - 1 = 0$

বা, $5\theta = n\pi$ বা, $2\sin4\theta = 1$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{5}$ বা, $\sin4\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

বা, $4\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iv) $\sqrt{2}\cos 3\theta - \cos\theta = \cos 5\theta$

বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta - (\cos 5\theta + \cos\theta) = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta - 2\cos 3\theta \cos 2\theta = 0$

বা, $\cos 3\theta(\sqrt{2} - 2\cos 2\theta) = 0$

হয়, $\cos 3\theta = 0$ অথবা, $\sqrt{2} - 2\cos 2\theta = 0$

বা, $3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$ বা, $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{6},\ n\pi \pm \frac{\pi}{8}$

যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(v) $\sin 7\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = \sin\theta$

বা, $(\sin 7\theta - \sin\theta) - \sqrt{3}\cos 4\theta = 0$

বা, $2\cos 4\theta \sin 3\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = 0$

বা, $\cos 4\theta(2\sin 3\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\cos 4\theta = 0$ অথবা, $2\sin 3\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$ বা, $3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{9}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}, \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{9}$;

এখানে, n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(vi) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

বা, $\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0$

বা, $2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$

বা, $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$

হয়, $\sin 2x = 0$ অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

বা, $2x = n\pi$ বা, $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2}$ বা, $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{n\pi}{2},\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(vii) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

বা, $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$

বা, $2\cos 2x\cos x + \cos 2x = 0$

বা, $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$

হয়, $\cos 2x = 0$ অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

বা, $2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ $\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = (2n+1)\frac{\pi}{4},\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(viii) $\cos 7x = \cos 3x + \sin 5x;\ \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

বা, $\cos 3x - \cos 7x + \sin 5x = 0$

বা, $2\sin 5x\sin 2x + \sin 5x = 0$

বা, $\sin 5x(2\sin 2x + 1) = 0$

হয়, $\sin 5x = 0$ অথবা, $2\sin 2x + 1 = 0$

বা, $5x = n\pi$ বা, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{5}$ $= -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin 2x = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\therefore 2x = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{7\pi}{12}$

যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ বসিয়ে,

$n = 0$ হলে $x = 0, \frac{7\pi}{12}$

$n = 1$ হলে $x = \frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{12}$

$n = -1$ হলে $x = -\frac{\pi}{5}, \frac{-13\pi}{12}$

$n = 2$ হলে $x = \frac{2\pi}{5}, \frac{19\pi}{12}$

$n = -2$ হলে $x = -\frac{2\pi}{5}, -\frac{5\pi}{12}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর মানসমূহ:

$-\frac{5\pi}{12}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{12}, 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$

(ix) $\cos2x + \cos x + 1 = 0;\ 0° < x < 360°$

বা, $2\cos^2x - 1 + \cos x + 1 = 0$

বা, $2\cos^2x + \cos x = 0$

বা, $\cos x\ (2\cos x + 1) = 0$

হয়, $\cos x = 0$ অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

$\therefore x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\cos x = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, n = 0, 1, 2 ... বসিয়ে,

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}$

বা, 90°, 120°, –120°

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

বা, 270°, 480°, 240°

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর মানসমূহ:
90°, 120°, 240°, 270°

5. (i) $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$

বা, $\cos x - \cos 2x - (\sin 2x - \sin x) = 0$

বা, $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$

হয়, $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$ অথবা, $2\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2}$ বা, $\sin\frac{x}{2} = 0$

বা, $x/2 = n\pi$

বা, $\tan\frac{3x}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ বা, $x = 2n\pi$

বা, $\frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi,\ \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) $\cos 6x + \cos4x = \sin 3x + \sin x$

বা, $2\cos5x\cos x = 2\sin 2x\cos x$

বা, $\cos x\ (\sin 2x - \cos5x) = 0$

বা, $\cos x\ \{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos 5x\} = 0$

বা, $\cos x.\ 2\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

বা, $\cos x\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ ... ... (i)

অথবা, $\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ... ... (ii)

অথবা, $\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ... ... (iii)

(i) নং হতে পাই, $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

(ii) নং হতে পাই, $\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = n\pi \quad \therefore x = (4n - 1)\frac{\pi}{6}$

এবং (iii) নং হতে পাই, $\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4} = n\pi \quad \therefore x = (4n + 1)\frac{\pi}{14}$;

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(2n + 1)\frac{\pi}{2}, (4n - 1)\frac{\pi}{6}, (4n + 1)\frac{\pi}{14}$;

যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\sin\theta + \sin2\theta + \sin3\theta = 1 + \cos\theta + \cos2\theta$

বা, $\sin3\theta + \sin\theta + \sin2\theta = 1 + \cos2\theta + \cos\theta$

বা, $2\sin2\theta\cos\theta + \sin2\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta$

বা, $\sin2\theta\ (2\cos\theta + 1) - \cos\theta\ (2\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(2\cos\theta + 1)(\sin2\theta - \cos\theta) = 0$

হয়, $\sin2\theta - \cos\theta = 0$ $\therefore$ অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\sin2\theta - \cos\theta = 0$ বা, $2\cos\theta = -1$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $\cos\theta\ (2\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos\theta = 0$ $\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iv) $\cos\theta + \cos3\theta + \cos5\theta + \cos7\theta = 0$

বা, $(\cos5\theta + \cos\theta) + (\cos7\theta + \cos3\theta) = 0$

বা, $2\cos3\theta \cos2\theta + 2\cos5\theta \cos2\theta = 0$

বা, $2\cos2\theta (\cos5\theta + \cos 3\theta) = 0$

হয়, $\cos 2\theta = 0$

বা, $2\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $\cos 5\theta + \cos 3\theta = 0$

বা, $2\cos 4\theta \cos\theta = 0$

হয় $2\cos\theta = 0$ বা, $\cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $\cos 4\theta = 0$

$\therefore 4\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$, $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $(2n + 1)\frac{\pi}{8}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(v) $\sin3\theta + \sin5\theta + \sin7\theta + \sin9\theta = 0$

বা, $(\sin 9\theta + \sin 3\theta) + (\sin 7\theta + \sin 5\theta) = 0$

বা, $2\sin 6\theta \cos 3\theta + 2 \sin 6\theta \cos \theta = 0$

বা, $2 \sin 6\theta (\cos 3\theta + \cos \theta) = 0$

হয়, $2\sin 6\theta = 0$

বা, $6\theta = n\pi$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{6}$

অথবা, $\cos 3\theta + \cos\theta = 0$

বা, $2\cos 2\theta \cos\theta = 0$

হয়, $\cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $2\cos 2\theta = 0$

বা, $\cos 2\theta = 0$

বা, $2\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{n\pi}{6}$, $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $(2n + 1)\frac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(vi) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1; 0 < x < \pi$

বা, $(2 \cos 3x \cos x) (2 \cos 2x) = 1$

বা, $(\cos 4x + \cos 2x) (2 \cos 2x) = 1$

বা, $2 \cos 4x \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1 = 0$

বা, $2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$

বা, $\cos 4x (2 \cos 2x + 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos 4x = 0$

বা, $4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2 \cos 2x + 1 = 0$

বা, $2 \cos 2x = -1$

বা, $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

যখন, n এর মান শূন্য বা যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন $n = 0$, তখন, $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

যখন $n = 1$, তখন, $x = \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

যখন $n = 2$, তখন, $x = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

যখন, $n = 3$, তখন, $x = \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর মানসমূহ:

$\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$.

(vii) $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x; \frac{-\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

বা, $2 \cos 9x \cos 7x = 2 \cos 5x \cos 3x$

বা, $\cos (9x + 7x) + \cos (9x - 7x) = \cos (5x + 3x) + \cos (5x - 3x)$

বা, $\cos 16 x + \cos 2x = \cos 8x + \cos 2x$

বা, $\cos 16x = \cos 8x$

বা, $\cos 16x - \cos 8x = 0$

বা, $2 \sin 12x \sin (-4x) = 0$

বা, $-2\sin 12x \sin 4x = 0$

হয়, $\sin 12x = 0$

বা, $12x = n\pi$

$\therefore x = \frac{n\pi}{12}$

অথবা, $\sin 4x = 0$

বা, $4x = n\pi$

$\therefore x = \frac{n\pi}{4}$

যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$, হলে $x = 0, 0$

$n = 1$ হলে $x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$

$n = -1$ হলে $x = -\frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}$

$n = 2$ হলে $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

$n = -2$ হলে $x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}$

$n = 3$ হলে $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$n = -3$ হলে $x = -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর

মানসমূহ: $0, \frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

(viii) দেওয়া আছে, $h(x) = \sin x$

প্রদত্ত সমীকরণটি, $2h(\theta)\, h(3\theta) = 1$

$\Rightarrow 2\sin\theta \sin 3\theta = 1$, যখন $0 \le \theta \le 2\pi$

$\Rightarrow \cos(3\theta - \theta) - \cos(3\theta + \theta) = 1$

$\Rightarrow \cos 2\theta - \cos 4\theta = 1$

$\Rightarrow \cos 2\theta - (1 + \cos 4\theta) = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta - 2\cos^2 2\theta = 0$

$\therefore \cos 2\theta(1 - 2\cos 2\theta) = 0$

হয়, $\cos 2\theta = 0$ অথবা, $1 - 2\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

যখন $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{4}$

$n = 3$ হলে, $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$n = 4$ হলে, $\theta = \frac{9\pi}{4} > 2\pi$

যখন, $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right), \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right), \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$0 \le \theta \le 2\pi$ সীমার মধ্যে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

6. (i) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin x \sin\frac{\pi}{6} + \cos x \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}$

$\therefore x = 2n\pi, (6n+1)\frac{\pi}{3}$; যখন x এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = 2n\pi, (4n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\cos\theta - \sin\theta = 1$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi$ এবং $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 2n\pi, (4n-1)\frac{\pi}{2}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(iv) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

বা, $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$

[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3} = 1$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\therefore x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi$

$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $2n\pi + \frac{\pi}{3}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(v) $\cos\theta + 2\sin\theta = 1$

বা, $\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}.2\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \cos\alpha$

[ধরি, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \therefore \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$]

বা, $\cos(\theta - \alpha) = \cos\alpha$

বা, $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \alpha$

(+) চিহ্ন ধরে, $\theta = 2n\pi + 2\alpha$

(−) চিহ্ন ধরে, $\theta = 2n\pi$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 2n\pi + 2\alpha, 2n\pi$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা এবং $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(vi) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}; -\pi < \theta < \pi$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

বা, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, 2n\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = (24n+1)\frac{\pi}{12}$ এবং $(24n-7)\frac{\pi}{12}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \ldots$ বসিয়ে,

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{25\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

$n = -1$ হলে, $\theta = \frac{-23\pi}{12}, \frac{-31\pi}{12}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ: $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$

(vii) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}; -\pi < \theta < \pi$

বা, $\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta.\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta.\sin\frac{\pi}{4} = 1$

বা, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

বা, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = (8n+1)\frac{\pi}{4}$

যেখানে, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$ বসিয়ে,

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{9\pi}{4}$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে θ এর মান: $\theta = \frac{\pi}{4}$

(viii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2; -2\pi < \theta < 2\pi$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $\theta - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n = 0$, তখন $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

যখন, $n = -1$, তখন $\theta = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান, $\theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

(ix) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1; -2\pi < x < 2\pi$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$; যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n = 0$ তখন,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

যখন, $n = 1$ তখন, $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

যখন, $n = -1$ তখন, $x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ -2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}$

(x) $\cos^3\theta - \cos\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 1$

বা, $\cos^3\theta - \sin^3\theta - \cos\theta\sin\theta = 1$

বা, $(\cos\theta - \sin\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta) - (1 + \cos\theta\sin\theta) = 0$

বা, $(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta) - (1 + \cos\theta\sin\theta) = 0$

বা, $(1 + \cos\theta\sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta - \sin\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = 1$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = 2n\pi$ এবং $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

অথবা,

$1 + \cos\theta\sin\theta = 0$

বা, $\cos\theta\sin\theta = -1$

বা, $2\cos\theta\sin\theta = -2$

$\therefore \sin2\theta = -2$

[গ্রহণযোগ্য নয়]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 2n\pi$ এবং $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

(xi) দেওয়া আছে, $\sin\sqrt{2}x - \cos\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\sqrt{2}x = \cos\frac{x}{2}$

বা, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right) = \cos\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{x}{2} = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right)$

(+) ve নিয়ে,

$\frac{x}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x$

বা, $\frac{x}{2} + \sqrt{2}x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x + 2\sqrt{2}x}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

বা, $x(1 + 2\sqrt{2}) = 4n\pi + \pi$

$\therefore \ x = \frac{(4n+1)\pi}{(1 + 2\sqrt{2})}$

(−) ve নিয়ে,

$\frac{x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}x$

বা, $\frac{x}{2} - \sqrt{2}x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x - 2\sqrt{2}x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

বা, $x(1 - 2\sqrt{2}) = 4n\pi - \pi$

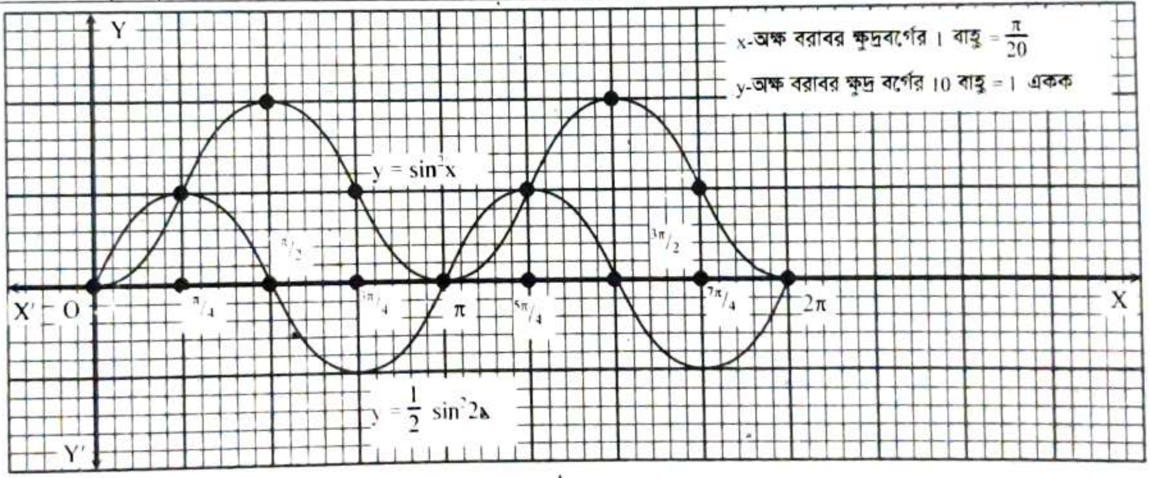
$\therefore \ x = \frac{(4n-1)\pi}{(1 - 2\sqrt{2})}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{(4n+1)\pi}{1+2\sqrt{2}}, \frac{(4n-1)\pi}{1-2\sqrt{2}}$

7. **(i)** $\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x, \ 0 \le x < 2\pi$

0 হতে 2π সীমার মধ্যে $y = \sin^2 x$ এবং $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ এর মান $\frac{\pi}{4}$ ব্যবধানে বিভিন্ন বিন্দুতে নির্ণয় ও তালিকাভুক্ত করি।

x	0	$\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{20}$	$\frac{\pi}{2} = \frac{10\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{20}$	$\pi = \frac{20\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{4} = \frac{25\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{2} = \frac{30\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{4} = \frac{35\pi}{20}$	$2\pi = \frac{40\pi}{20}$
$y = \sin^2 x$	0	0.5	1	0.5	0	0.5	1	0.5	0
$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	0	0.5	0	−0.5	0	0.5	0	−0.5	0



স্কেল নির্ধারণ: x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = $\frac{\pi}{20}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 ধরে ছক কাগজে বিন্দুগুলি উপস্থাপন করি এবং সরু শীষযুক্ত পেন্সিল দ্বারা যুক্ত করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।
লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে $x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$ বিন্দুতে লেখ দুইটি ছেদ করে।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$.

(ii) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0; \ 0 < \theta < \pi$

বা, $(\cos 7\theta + \cos\theta) + (\cos 5\theta + \cos 3\theta) = 0$

বা, $2\cos 4\theta \cos 3\theta + 2\cos 4\theta \cos\theta = 0$

বা, $2\cos 4\theta (\cos 3\theta + \cos\theta) = 0$

বা, $2\cos 4\theta . 2\cos 2\theta \cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta = 0$

বা, $\cos\theta = 0$ অথবা $\cos 2\theta = 0$ অথবা, $\cos 4\theta = 0$

$y = \cos\theta, \ 0 < \theta < \pi$

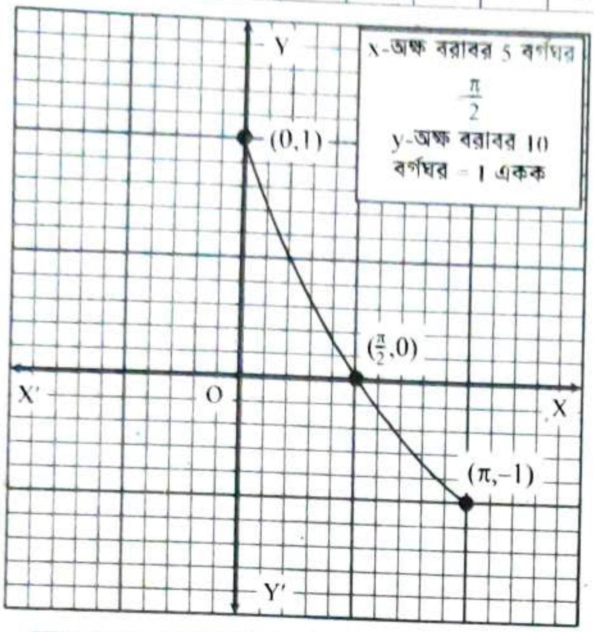
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$
$y = \cos\theta$	1	0	−1

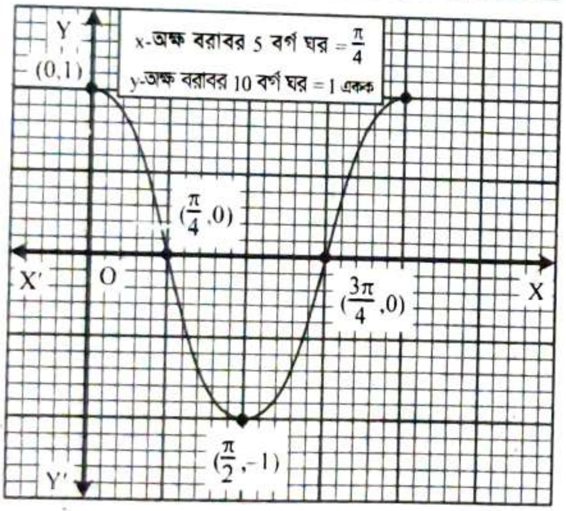
$y = \cos 2\theta, \ 0 < \theta < \pi$

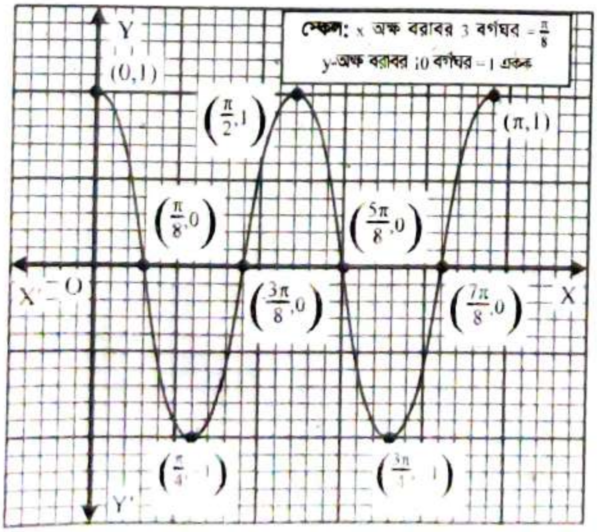
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$
$y = \cos 2\theta$	1	0	−1	0	1

$y = \cos 4\theta,\ 0 < \theta < \pi$

0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{8\pi}{8}$
1	0	–1	0	1	0	–1	0	1







$y = \cos\theta$ এর লেখচিত্র হতে পাই নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে

$\cos\theta = 0$ এর সমাধান $\theta = \frac{\pi}{2}$

$y = \cos 2\theta$ হতে পাই,

$\cos 2\theta = 0$ এর সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

এবং $y = \cos 4\theta$ হতে পাই,

$\cos 4\theta = 0$ এর সমাধান $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধান সমূহ

$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

(iii) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\pi < \theta < \pi$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

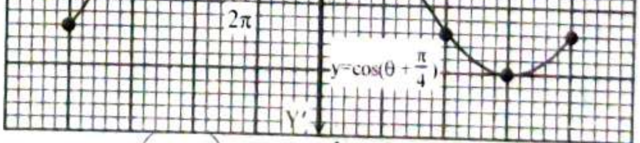
বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), -\pi < \theta < \pi$

θ	$\frac{-12\pi}{12}$	$\frac{-11\pi}{12}$	$\frac{-9\pi}{12}$	$\frac{-7\pi}{12}$	$\frac{-5\pi}{12}$	$\frac{-3\pi}{12}$	$\frac{-\pi}{12}$
y	–0.71	–0.5	0	0.5	0.87	1	0.87
θ	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$
y	0.5	0	–0.5	–0.87	–1	–0.87	–0.71

স্কেল নির্ধারণ: x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 2 বর্গ বাহু = $\frac{\pi}{12}$

এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বর্গ বাহু = 1



$y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ এবং $y = \frac{1}{2}$ এর লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, লেখচিত্রদ্বয় $\theta = \frac{-7\pi}{12}$ ও $\theta = \frac{\pi}{12}$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{-7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

(iv) $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta,\ 0 < \theta < \pi$

বা, $\sin 4\theta - \sin 2\theta = \cos 3\theta$

বা, $2\cos 3\theta \sin\theta - \cos 3\theta = 0$

বা, $\cos 3\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos 3\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

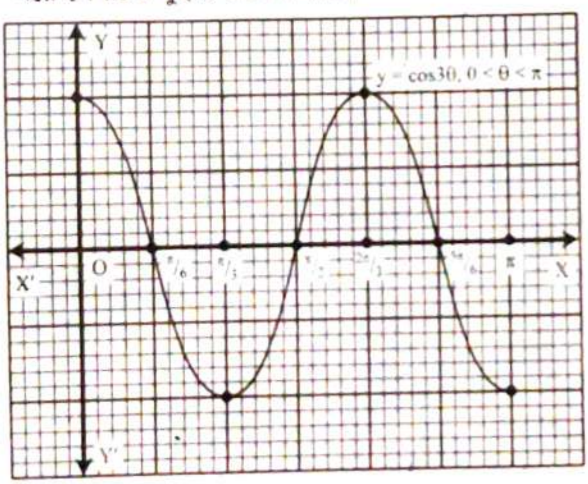
$y = \cos 3\theta,\ 0 < \theta < \pi$

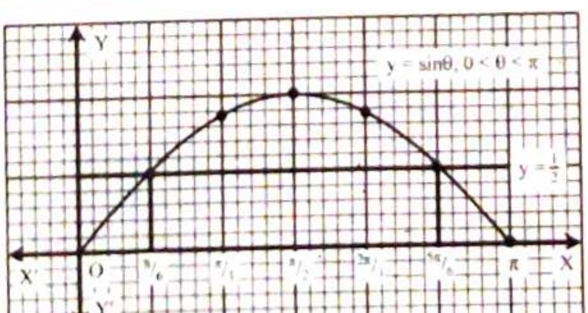
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$
y	1	0	−1	0	1	0	−1

$y = \sin\theta,\ 0 < \theta < \pi$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$
y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0

স্কেল নির্ধারণ: x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু $= \frac{6\pi}{6}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গের 10 বাহুর = 1 একক ধরে লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি।





১ম লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $y = \cos 3\theta,\ 0 < \theta < \pi$ ব্যবধিতে x-অক্ষকে $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ বিন্দুতে ছেদ করছে।

$\therefore$ $\cos 3\theta = 0$ এর সমাধান $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

আবার, ২য় লেখচিত্রে $y = \sin\theta$ ও $y = \frac{1}{2}$ এর লেখচিত্র $\theta = \frac{\pi}{6}$ ও $\theta = \frac{5\pi}{6}$ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং এক্ষেত্রে সমাধান $\theta = \frac{\pi}{6}$ ও $\frac{5\pi}{6}$.

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের প্রদত্ত ব্যবধিতে সমাধানসমূহ

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

৪. (i) $\frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = 4$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x \cos 2x} = 4$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = 2\sin 2x \cos 2x$

$\Rightarrow \cos 2x \sin\frac{\pi}{3} - \sin 2x \cos\frac{\pi}{3} = \sin 4x$

$\Rightarrow -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 4x$

$\Rightarrow \sin 4x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\frac{1}{2}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{1}{2}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\therefore \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ বা, $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\therefore 3x - \frac{\pi}{6} = n\pi$	$\therefore x + \frac{\pi}{6} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
$\therefore 3x = n\pi + \frac{\pi}{6}$	$\Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$
$\Rightarrow x = \frac{1}{3}n\pi + \frac{\pi}{18}$	$= n\pi + \frac{\pi}{3}$
$= (6n+1)\frac{\pi}{18}$	$= (3n+1)\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = (6n+1)\frac{\pi}{18}$ বা $(3n+1)\frac{\pi}{3}$;

$n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\sin 3x \sin x = \cos 2x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\sin 3x \sin x = 2\cos 2x + 1$

$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 2\cos 2x + 1$

$\Rightarrow \cos 4x + \cos 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$

$\therefore \cos 2x = 0$ বা, $2\cos 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$

$= \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা, $n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

▶ বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তর

1. খ; ব্যাখ্যা: $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2. ক; 3. গ; 4. খ; 5. গ; 6. খ; 7. খ; 8. খ;

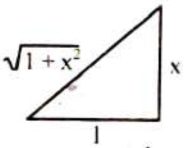
9. ঘ; ব্যাখ্যা: $2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sin^{-1}y$

বা, $3.\frac{\pi}{3} = 2\sin^{-1}y$

বা, $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

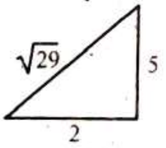
10. গ; ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}\cos\tan^{-1}x$

$= \sin^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



$= \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

এখন, $\tan^{-1}\frac{5}{2} = \sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{29}}$



$\therefore \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{29}}$

বা, $1 + x^2 = \frac{29}{25}$ বা, $25x^2 = 29 - 25$

$\therefore x = \pm\frac{2}{5}$

11. খ; 12. খ;

13. ক; ব্যাখ্যা: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

বা, $2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} + \sin 2x = 0$

বা, $2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$

বা, $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$

হয়, $\sin 2x = 0 = \sin 0°$ অথবা, $2\cos x + 1 = 0$

বা, $2x = n\pi$ বা, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2}$ $\therefore x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

14. খ; ব্যাখ্যা: $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\tan\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$

হয়, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\tan\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$

$\therefore \theta = 60°$ অথবা, $\theta = 30°$

15. খ; 16. গ; 17. গ; 18. ক; 19. গ; 20. ঘ; 21. গ;

22. ঘ; ব্যাখ্যা: $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}4) + \sec^2(\sec^{-1}3) - 1$

$= 4^2 + 3^2 = 25$

23. ঘ; ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}\frac{4}{3} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right\}$ $\therefore A = \frac{16}{25}$

24. গ; 25. ঘ; 26. ক; 27. গ; 28. গ; 29. ঘ; 30. ক; 31. ক; 32. ক; 33. ক; 34. ঘ; 35. খ; 36. ক; 37. ক; 38. গ; 39. ক; 40. ঘ; 41. খ; 42. ঘ;

43. গ; ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $k = \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{3}$

সুতরাং, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$. অর্থাৎ, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

44. খ; ব্যাখ্যা: $\cot\theta = k$ বা, $\cot\theta = 1$ $[\because k = 1]$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} \therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$n = 0$ হলে, $\theta = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$

যেহেতু, $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ সেহেতু, $\theta = \frac{5\pi}{4}$

45. গ; 46. গ; 47. খ; 48. ঘ; 49. গ; 50. খ; 51. খ; 52. খ; 53. খ; 54. খ; 55. গ; 56. খ; 57. গ; 58. ক;

59. ঘ; ব্যাখ্যা: $\sin 3x = \cos x$

বা, $\sin 3x = \sin(90° - x)$

বা, $\sin 3x - \sin(90° - x) = 0$

বা, $2\cos\frac{2x+90°}{2}\sin\frac{4x-90°}{2}=0$

বা, $2\cos(x+45°)\sin(2x-45°)=0$

হয়, $\cos(x+45°)=0$ অথবা, $\sin(2x-45°)=0$

বা, $\cos(x+45°)=\cos90°$	বা, $\sin(2x-45°)=\sin0$
বা, $x+45°=90°$	বা, $2x-45°=0$
বা, $x=45°$	বা, $x=22.5°$

60. গ;

61. ক; ব্যাখ্যা:

ধরি, $\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)=\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{x}{y}$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}$

$=\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}$

$$\tan\frac{1}{2}\theta=\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}}$$

$$=\frac{x}{y}\times\frac{y}{y+\sqrt{y^2-x^2}}=\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\theta=\tan^{-1}\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)=\tan^{-1}\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}$$

62. খ;

63. ঘ; ব্যাখ্যা: $\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}}{1-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\tan^{-1}2$

$$\Rightarrow\frac{2x}{1-x^2+\frac{1}{9}}=2\Rightarrow\frac{x}{\frac{10}{9}-x^2}=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{10}{9}-x^2\Rightarrow 9x^2+9x-10=0$$

$\Rightarrow 9x^2+15x-6x-10=0$

$\Rightarrow 3x(3x+5)-2(3x+5)=0$

$\Rightarrow (3x-2)(3x+5)=0$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}, x=-\frac{5}{3}$ (গ্রহণযোগ্য নয়)

64. ঘ; 65. ঘ; 66. গ; 67. ঘ; 68. ক; 69. ক; 70. ক;

71. গ;

72. খ; ব্যাখ্যা:

$2\cos^2\theta+2\sqrt{2}\sin\theta=3$

বা, $2(1-\sin^2\theta)+2\sqrt{2}\sin\theta=3$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta-1)^2=0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta-1=0$

বা, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin45°$

$\therefore \theta=45°$

73. খ; ব্যাখ্যা:

$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$

বা, $\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=1$

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}=1$

বা, $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$

$\therefore \theta-\frac{\pi}{3}=2n\pi$

বা, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$

74. ক; 75. গ;

76. গ; ব্যাখ্যা:

$\cot x+\tan x=2$

বা, $\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=2$

বা, $\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\sin x\cos x}=2$

বা, $\sin2x=1$

বা, $2x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=(4n+1)\frac{\pi}{4}$

77. খ; 78. খ; 79. খ;

80. গ; ব্যাখ্যা:

$\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}$

বা, $1+\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

বা, $2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$

বা, $\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2})=0$

হয়, $\cos\frac{\theta}{2} = 0$ অথবা, $\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2} = 0$

$\therefore \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ বা, $\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = \pi$ বা, $\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\pi}{6}$

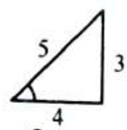
$\therefore \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\theta = \frac{\pi}{3}$

81. গ; 82. গ; 83. গ; 84. ঘ; 85. ক; 86. গ; 87. ক; 88. গ; 89. গ; 90. গ

▶ সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান

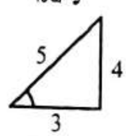
1. **ক** $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4}$



চিত্র-১

$= \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{3}{5}$ [চিত্র-১]

$= \cot\cos^{-1}\frac{3}{5}$



চিত্র-২

$= \cot\cot^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\sec 2P = \frac{1+b^2}{1-b^2}$ এবং $\operatorname{cosec} 2Q = \frac{1+c^2}{2c}$

বা, $2P = \sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2}$ এবং $2Q = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c}$

$\therefore P = \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2}$ $\therefore Q = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c}$

প্রশ্নমতে, $P + Q = \pi - \tan^{-1}a$

বা, $\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c} = \pi - \tan^{-1}a$

বা, $\tan^{-1}a + \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c} = \pi$

বা, $\tan^{-1}a + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2c}{1+c^2} = \pi$

বা, $\tan^{-1}a + \frac{1}{2}.2\tan^{-1}b + \frac{1}{2}.2\tan^{-1}c = \pi$

বা, $\tan^{-1}a + \tan^{-1}b + \tan^{-1}c = \pi$

বা, $\tan^{-1}\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-ab} = \pi$

বা, $\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-ab} = \tan\pi$

বা, $\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-cb} = 0$

বা, $a+b+c-abc = 0$

$\therefore$ $a+b+c = abc$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\{f(x)\}^3 g(3x) + \{g(x)\}^3 f(3x) = \frac{3}{4}$

বা, $\sin^3 x \,.\, \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}$

বা, $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$

বা, $4\cos^3 x \sin 3x + 4\sin^3 x \cos 3x = 3$

বা, $(\cos 3x + 3\cos x)\sin 3x + (3\sin x - \sin 3x)\cos 3x = 3$

বা, $\sin 3x\cos 3x + 3\sin 3x\cos x + 3\cos 3x\sin x - \sin 3x\cos 3x = 3$

বা, $3(\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x) = 3$

বা, $3\sin(3x + x) = 3$ বা, $\sin 4x = 1$

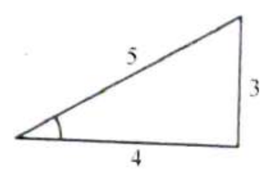
বা, $4x = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $x = (4n+1)\frac{\pi}{8}$, যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

2. **ক** বামপক্ষ $= \cos^{-1}\frac{4}{5} + \cot^{-1}\frac{5}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5}$ [চিত্র হতে]

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}.\frac{3}{5}}\right)$



$= \tan^{-1}\frac{\frac{15+12}{20}}{\frac{20-9}{20}} = \tan^{-1}\frac{27}{11} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cot^{-1}\frac{5}{3} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $\tan^{-1}(x+p) + \tan^{-1}(x-p) = \tan^{-1}2$

বা, $\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(x-\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}2$ [$\because p = \frac{1}{3}$]

বা, $\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{3}+x-\frac{1}{3}}{1-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \tan^{-1}2$

বা, $\tan^{-1}\frac{2x}{1-\left(x^2-\frac{1}{9}\right)} = \tan^{-1}2$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{2x}{\frac{10}{9}-x^2} = \tan^{-1}2$ বা, $\dfrac{2x}{\frac{10}{9}-x^2} = 2$

বা, $2x = \frac{20}{9} - 2x^2$ বা, $2x^2 + 2x - \frac{20}{9} = 0$

বা, $x^2 + x - \frac{10}{9} = 0$ বা, $9x^2 + 9x - 10 = 0$

বা, $9x^2 + 15x - 6x - 10 = 0$

বা, $3x(3x + 5) - 2(3x + 5) = 0$

বা, $(3x + 5)(3x - 2) = 0$

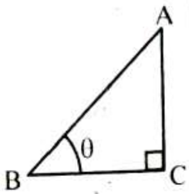
হয়, $3x + 5 = 0$ অথবা, $3x - 2 = 0$

বা, $3x = -5$ বা, $3x = 2$

∴ $x = -\frac{5}{3}$ ∴ $x = \frac{2}{3}$

∴ নির্ণেয় মান, $x = -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}$

গ $AC + BC = \sqrt{2}\,AB$



বা, $\frac{AC}{AB} + \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ [চিত্র হতে]

বা, $\sin\theta.\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta.\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta.\sin\frac{\pi}{4} = 1$

বা, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

বা, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

∴ $\theta = (8n + 1)\frac{\pi}{4}$

যেখানে, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots$ বসিয়ে,

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{9\pi}{4}$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{7\pi}{4}$

∴ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে θ এর মান: $\theta = \frac{\pi}{4}$

3. **ক** $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = -\frac{\pi}{3}$

∴ $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{3}$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

প্রশ্নমতে, $4[\{f(x)\}^2 + \sqrt{1 - \{f(x)\}^2}] = 5$

বা, $4(\sin^2x + \sqrt{1 - \sin^2x}) = 5$

বা, $4(\sin^2x + \cos x) = 5$

বা, $4\sin^2x + 4\cos x - 5 = 0$

বা, $4(1 - \cos^2x) + 4\cos x - 5 = 0$

বা, $4\cos^2x - 4\cos x + 5 - 4 = 0$

বা, $4\cos^2x - 4\cos x + 1 = 0$

বা, $(2\cos x - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$, হলে, $x = \pm\frac{\pi}{3}$

$n = 1$, হলে, $x = \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$

$n = -1$, হলে, $x = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

∴ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর মানসমূহ : $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

বামপক্ষ $= \sin^{-1}(\sqrt{2}f(x)) + \text{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1 - (f(2x))^2}}}$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x) + \text{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 2x}}}$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x) + \text{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{1}{\cos 2x}}$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2x})$

$=$

$\sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin x\sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}.\sqrt{1 - 2\sin^2x}\}$

$= \sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin x \times \sqrt{2}\sin x + \sqrt{\cos 2x}.\sqrt{\cos 2x}\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin^2x + \cos 2x\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin^2x + 1 - 2\sin^2x\} = \sin^{-1}1$

$= \frac{\pi}{2}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

4. **ক** ধরি, $\sin^{-1}x = \theta$

∴ $\sin\theta = x$

এখন, $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - x^2}$

∴ $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1 - x^2}$

∴ $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1 - x^2}$ (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে,

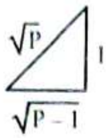
$\cos^{-1}\sin 2\tan^{-1}\cot\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{P} = 0$

বা, $\cos^{-1}\sin 2\tan^{-1}\cot\cot^{-1}\sqrt{P-1} = 0$

বা, $\cos^{-1}\sin 2\tan^{-1}\sqrt{P-1} = 0$

বা, $\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{P-1}}{1+(\sqrt{P-1})^2} = 0$

বা, $\cos^{-1}\dfrac{2\sqrt{P-1}}{1+P-1} = 0$



বা, $\cos^{-1}\dfrac{2\sqrt{P-1}}{P} = 0$

বা, $\dfrac{2\sqrt{P-1}}{P} = \cos 0$ বা, $\dfrac{2\sqrt{P-1}}{P} = 1$

বা, $2\sqrt{P-1} = P$ বা, $4(P-1) = P^2$

বা, $P^2 - 4P + 4 = 0$

বা, $P^2 - 2.P.2 + 2^2 = 0$

বা, $(P-2)^2 = 0$ বা, $P - 2 = 0$

বা, $x^2 - y^2 + 1 - 2 = 0$

$\therefore x^2 - y^2 = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \sin x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2g(x)\,g(3x) = 1$

$\Rightarrow 2\sin x\sin 3x = 1 \quad \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1$

$\Rightarrow \cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0$

$\Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x\,(1 - 2\cos 2x) = 0$

হয়, $\cos 2x = 0$ অথবা, $1 - 2\cos 2x = 0$

$\Rightarrow 2x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore x = (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$ $\quad \Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$

সুতরাং $x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}, (2n+1)\dfrac{\pi}{4}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = \pm\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}$;

$n = 1$ হলে, $x = \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{4}$;

$n = 3$ হলে, $x = \dfrac{17\pi}{6}, \dfrac{19\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{4}$

∴ প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ :

$x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

5. **ক** দেওয়া আছে, $P(x) = 2\tan^{-1}x$

মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta \quad \therefore \tan\theta = x$

আমরা জানি, $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

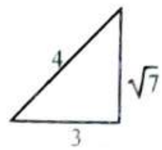
বা, $2\theta = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ **(প্রমাণিত)**

খ অনুশীলনী-7(A) এর 4(i) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৫

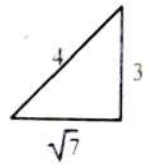
গ অনুশীলনী-7(A) এর 4(xii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৮

6. **ক** $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\dfrac{3}{4}$



$= \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$= \sin\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

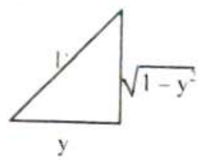


$= \sin\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{3}{4}$ **(Ans.)**

খ এখানে দেয়ালদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন কোণ $\cos^{-1}x$ এবং $\cos^{-1}y$.

শর্তমতে, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \dfrac{\pi}{2}$



বা, $\cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}y$

বা, $\cos(\cos^{-1}x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}y\right)$

বা, $x = \sin(\cos^{-1}y)$

বা, $x = \sin\sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$

বা, $x = \sqrt{1-y^2}$

বা, $x^2 = 1 - y^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ AB দেয়াল দ্বারা সার্চ লাইটে উৎপন্ন কোণ,

$\theta = \cos^{-1}x \quad \therefore x = \cos\theta$

আবার,

BC দেয়াল দ্বারা সার্চলাইটে উৎপন্ন কোণ $= \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \dfrac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1}y$

বা, $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore y = \sin\theta$

আবার, $x + y = \sqrt{2}$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta = 1$

বা, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ বা, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$

বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

7. **ক** $4(\sin^2x + \cos x) = 5$

বা, $4(1 - \cos^2x + \cos x) = 5$

বা, $4\cos^2x - 4\cos x + 1 = 0$

বা, $(2\cos x - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

সুতরাং $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

খ এখানে, নদীর প্রস্থ 1 একক। $\therefore CD = 1$

ΔACD-এ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{1} = \tan^{-1}y$ $\therefore y = \tan\theta$

ΔBCD-এ $3\theta = \tan^{-1}\frac{x}{1} = \tan^{-1}x$. $\therefore x = \tan 3\theta$

প্রশ্নমতে, $xy = 1$

বা, $\tan 3\theta \tan\theta = 1$

বা, $\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

বা, $\cos 3\theta\cos\theta - \sin 3\theta\sin\theta = 0$

বা, $\cos(3\theta + \theta) = 0$

বা, $\cos 4\theta = 0$

বা, $4\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{8}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{8}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{8}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{8}$

$n = 3$ হলে, $\theta = \frac{7\pi}{8}$

$n = 4$ হলে, $\theta = \frac{9\pi}{8}$

$n = 5$ হলে, $\theta = \frac{11\pi}{8}$

$n = 6$ হলে, $\theta = \frac{13\pi}{8}$

$n = 7$ হলে, $\theta = \frac{15\pi}{8}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ: $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ **(Ans.)**

গ এখানে, $\angle A = \tan^{-1}2$ $\therefore \tan A = 2$

$\angle B = \tan^{-1}3$ $\therefore \tan B = 3$

এবং $\angle C = 4\theta$

আমরা জানি, $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$

বা, $\angle A + \angle B = \pi - \angle C$

বা, $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

বা, $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C$

বা, $\frac{2 + 3}{1 - 2.3} = -\tan C$

বা, $-1 = -\tan C$

বা, $\tan C = \tan\frac{\pi}{4}$

বা, $C = \frac{\pi}{4}$

বা, $4\theta = \frac{\pi}{4}$ $[\because C = 4\theta]$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{16}$ **(প্রমাণিত)**

8. **ক** প্রদত্ত রাশি,

$$\tan^{-1}\frac{5}{7} + \tan^{-1}\frac{5}{8} = \tan^{-1}\frac{\frac{5}{7} + \frac{5}{8}}{1 - \frac{5}{7}\cdot\frac{5}{8}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{40 + 35}{56}}{\frac{56 - 25}{56}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{75}{31} \text{ (Ans.)}$$

খ $m = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

দেওয়া আছে,

$x = \frac{1}{2}\tan 2A$, $y = \cot A$ এবং $z = \cot^3 A$

$\therefore \quad m = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right) + \tan^{-1}\cot A + \tan^{-1}\cot^3 A$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}.\,2\tan A}{1-\tan^2 A}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{\tan A} + \tan^{-1}\frac{1}{\tan^3 A}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan A}{1-\tan^2 A}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan A}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan^3 A}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{\tan A}{1-\tan^2 A} + \frac{1}{\tan A}}{1 - \frac{\tan A}{1-\tan^2 A}.\frac{1}{\tan A}} + \tan^{-1}\frac{1}{\tan^3 A}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{\tan^2 A + 1 - \tan^2 A}{\tan A\,(1-\tan^2 A)}}{\frac{\tan A - \tan^3 A - \tan A}{\tan A(1-\tan^2 A)}} + \tan^{-1}\frac{1}{\tan^3 A}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\tan^3 A}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{\tan^3 A}$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan^3 A}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{\tan^3 A} = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $m = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

বা, $\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

বা, $\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \tan\frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$

বা, $\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \frac{1}{0}$

বা, $1 - xy - yz - zx = 0$

বা, $xy + yz + zx = 1$ **(দেখানো হলো)**

9. **ক** দেওয়া আছে, $\cos 7\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos 7\theta = \cos\frac{\pi}{4}$ বা, $7\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = \frac{2}{7}n\pi \pm \frac{\pi}{28}$

$= (8n+1)\frac{\pi}{28}, (8n-1)\frac{\pi}{28}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ অনুশীলনী-7(B) এর 4(ii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৫

গ দেওয়া আছে, $P = \sin\theta - \cos 7\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}$, যখন $-\pi < \theta < \pi$

বা, $\cos\theta - \cos 7\theta = \sin\theta - \cos 7\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\pi < \theta < \pi$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

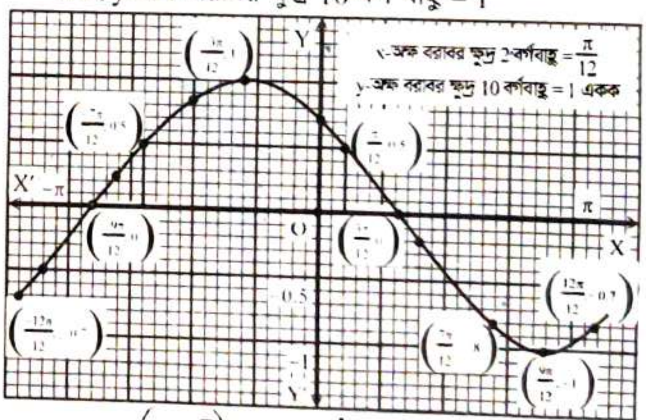
বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

ধরি, $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), -\pi < \theta < \pi$

θ	$-\pi$	$\frac{-11\pi}{12}$	$\frac{-9\pi}{12}$	$\frac{-7\pi}{12}$	$\frac{-5\pi}{12}$	$\frac{-3\pi}{12}$	$\frac{-\pi}{12}$
y	−0.7	−0.5	0	0.5	0.8	1	0.8
θ	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
y	0.5	0	−0.5	−0.8	−1	−0.8	−0.7

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 2 বর্গ বাহু = $\frac{\pi}{12}$

এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বর্গ বাহু = 1



$y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ এবং $y = \frac{1}{2}$ এর লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, লেখচিত্রদ্বয় $\theta = \frac{-7\pi}{12}$ ও $\theta = \frac{\pi}{12}$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta = \frac{-7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

10. **ক** দেওয়া আছে, $Q = \sin\theta, 0 < \theta < \pi$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta$ $[\because Q = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

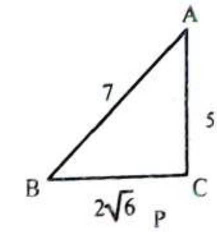
বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$

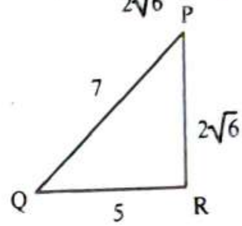
$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$, যখন $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,
$P + \sqrt{3}Q = \sqrt{2}$
বা, $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$
[উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ করে।]
বা, $\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$
বা, $\theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$
$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P^3 - PQ - Q^3 = 1$
বা, $\cos^3\theta - \sin\theta\cos\theta - \sin^3\theta = 1$
বা, $\cos^3\theta - \sin^3\theta - (1 + \sin\theta\cos\theta) = 0$
বা, $(\cos\theta - \sin\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta) - (1 + \sin\theta\cos\theta) = 0$
বা, $(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta) - (1 + \sin\theta\cos\theta) = 0$
বা, $(1 + \sin\theta\cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0$
বা, $(1 + \frac{1}{2}.2\sin\theta\cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0$
বা, $(1 + \frac{1}{2}\sin2\theta)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0$
কিন্তু, $1 + \frac{1}{2}\sin2\theta \neq 0$
বা, $\sin2\theta \neq -2$ কারণ $-1 \leq \sin\theta \leq 1$
$\therefore \cos\theta - \sin\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta - \sin\theta = 1$
উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (-1)^2}$ অর্থাৎ $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে।
$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$
বা, $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
বা, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$
বা, $\theta = 2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$
$\therefore \theta = 2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$
$n = 0$ বসিয়ে $\theta = 0, -\frac{\pi}{2} = 0, -90°$
$n = 1$ বসিয়ে $\theta = 2\pi, 2\pi - \frac{\pi}{2} = 2\pi, \frac{3\pi}{2} = 360°, 270°$
যেহেতু θ জ্যামিতিক কোণ; কাজেই θ কখনোই একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ হতে পারে না।
(প্রমাণিত)

11. **ক** প্রদত্ত রাশি
$= \sec\cot^{-1}\tan\operatorname{cosec}^{-1}\frac{7}{5}$
$= \sec\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{5}{2\sqrt{6}}$
$= \sec\cot^{-1}\frac{5}{2\sqrt{6}}$
$= \sec\sec^{-1}\frac{7}{5}$
$= \frac{7}{5}$ **(Ans.)**





খ দেওয়া আছে,
$2\sin\angle CAD \sin\angle BAE = 1$
বা, $2\sin\theta\sin3\theta = 1$
বা, $2\sin3\theta\sin\theta = 1$
বা, $\cos2\theta - \cos4\theta = 1$
বা, $\cos2\theta - (1 + \cos4\theta) = 0$
বা, $\cos2\theta - 2\cos^2 2\theta = 0$
বা, $\cos2\theta(1 - 2\cos2\theta) = 0$
হয় $\cos2\theta = 0$
বা, $2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$
অথবা, $1 - 2\cos2\theta = 0$
বা, $\cos2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$
বা, $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
বা, $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}, n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, যখন $n \in \mathbb{Z}$
$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{6}$
$n = 1$ হলে $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$
উদ্দীপকে ABCDEA একটি পঞ্চভুজ কাজেই
$\angle BAE < \pi$
বা, $3\theta < \pi$ বা, $\theta < \frac{\pi}{3}$
$\therefore$ শর্তানুসারে নির্ণেয় মান $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

গ ΔABC হতে পাই,

$\angle BAC = \cos^{-1}\frac{AB}{AC}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{AC}$ $[\angle BAC = \theta]$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{AC} = \cos\theta$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{AC} = \cos\frac{\pi}{3}$ $[\because \theta = \frac{\pi}{3}]$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{AC} = \frac{1}{2}$

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$

যেহেতু $AC = AD$

$\therefore AC = AD = 2\sqrt{3}$

$\therefore AC + AD = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

আবার $\angle BAC = \cos^{-1}\frac{AB}{AC}$

$\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{AC}$ $[\because \angle BAC = \theta]$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{AC} = \cos\theta$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{AC} = \cos\frac{\pi}{6}$ $[\because \theta = \frac{\pi}{6}]$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $AC = 2$

যেহেতু $AC = AD$

$\therefore AC = AD = 2$

$\therefore AC + AD = 2 + 2 = 4$

সুতরাং, $AC + AD$ এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ অথবা, 4 **(প্রমাণিত)**

12. **ক** এখানে, $CD = \sqrt{\cos 2x}$

বা, $\cos 2x = CD^2$

বা, $2x = \cos^{-1}(CD^2)$

$\therefore x = \frac{1}{2}\cos^{-1}(CD^2)$

আবার, $AB = \sqrt{2}\sin x$

বা, $x = \sin^{-1}\frac{AB}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sin^{-1}\frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cos^{-1}(CD^2)$

$\therefore 2\sin^{-1}\frac{AB}{\sqrt{2}} = \cos^{-1}(CD^2)$ **(দেখানো হলো)**

খ চিত্রানুসারে, ΔCOD এ, $\sin\angle COD = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{1}$

$\therefore \angle COD = \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2x})$

ΔAOB এ, $\sin\angle AOB = \frac{\sqrt{2}\sin x}{1}$

$\therefore \angle AOB = \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x)$

$\therefore \angle COD + \angle AOB$

$= \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2x}) + \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x)$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{\cos 2x}\left(\sqrt{1-2\sin^2 x}\right) + \sqrt{2}\sin x\left(\sqrt{1-\cos 2x}\right)\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{\cos 2x}\,.\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{2}\sin x.\sqrt{2\sin^2 x}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\left(\sqrt{\cos 2x}\right)^2 + \sqrt{2}\sin x.\sqrt{2}\sin x\right\}$

$= \sin^{-1}(\cos 2x + 2\sin^2 x)$

$= \sin^{-1}(\cos 2x + 1 - \cos 2x)$

$= \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান।

গ দেওয়া আছে,

$\left(\frac{OA}{AB}\right).\left(\frac{OD}{CD}\right) = 1$

বা, $\tan\theta.\tan 2\theta = 1$ [চিত্র হতে]

বা, $\tan\theta.\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 1$

বা, $\frac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = 1$

বা, $2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

বা, $3\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

বা, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \pi = 6\theta$

আবার, $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{\pi}{2} = \frac{6\theta}{2}$

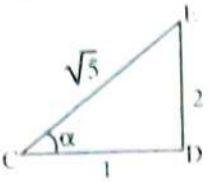
$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 3\theta$ **(দেখানো হলো)**

13. **ক** দেওয়া আছে, $DC = 1, CE = \sqrt{5}$

$\therefore DE = \sqrt{CE^2 - CD^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$

$= \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$



$\sin\alpha = \frac{DE}{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ **(দেখানো হলো)**

খ চিত্র হতে, $\tan\alpha = \frac{2}{1}$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}2$

আবার, $\sin\beta = \frac{AD}{AB}$

বা, $\beta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

বা, $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

এবং $\tan\gamma = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{3}$ $\therefore$ $\gamma = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

বামপক্ষ $= \alpha - \frac{\beta}{2} + \gamma$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\right)$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \tan^{-1}2 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$BD^2 = AB^2 - AD^2$ $\therefore BD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

আবার, $\beta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

বা, $\sin^{-1}\frac{3}{5} = 2.\frac{\beta}{2}$ বা, $\frac{3}{5} = \sin(2\frac{\beta}{2})$

বা, $\frac{3}{5} = \frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}$ বা, $3 + 3\tan^2\frac{\beta}{2} = 10\tan\frac{\beta}{2}$

বা, $3\tan^2\frac{\beta}{2} - 10\tan\frac{\beta}{2} + 3 = 0$

বা, $3\tan^2\frac{\beta}{2} - 9\tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\beta}{2} + 3 = 0$

বা, $3\tan\frac{\beta}{2}\left(\tan\frac{\beta}{2} - 3\right) - 1\left(\tan\frac{\beta}{2} - 3\right) = 0$

বা, $\left(\tan\frac{\beta}{2} - 3\right)\left(3\tan\frac{\beta}{2} - 1\right) = 0$

বা, $\tan\frac{\beta}{2} = 3$ বা, $\frac{1}{3}$

$\therefore$ $\frac{\beta}{2} = \tan^{-1}3$ অথবা, $\frac{\beta}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

ΔBDF হতে পাই,

$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{DF}{BD}$

বা, $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{DF}{4}$ $[\because BD = 4]$

$\therefore \tan(\tan^{-1}3) = \frac{DF}{4}\left[\because \frac{\beta}{2} = \tan^{-1}3\right]$

বা, $3 = \frac{DF}{4}$

বা, $DF = 12$

যেহেতু $AD = 3$ কাজেই $DF = 12$ হতে পারে না।

আবার, $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) = \frac{DF}{4}\left[\because \frac{\beta}{2} = \tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$

বা, $\frac{1}{3} = \frac{DF}{4}$ $\therefore DF = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

14. **ক** দেওয়া আছে,

$f(x) = \sin\left(\pi\cos\frac{x}{4}\right) - \cos\left(\pi\sin\frac{x}{4}\right)$

$\therefore f(0) = \sin\left(\pi\cos\frac{0}{4}\right) - \cos\left(\pi\sin\frac{0}{4}\right)$

$= \sin(\pi\cos0) - \cos(\pi\sin0)$

$= \sin(\pi.1) - \cos(\pi.0)$

$= \sin\pi - \cos0$

$= 0 - 1$

$= -1$

$\therefore$ রাত বারটায় সমুদ্রের পানি স্বাভাবিকের চেয়ে 1 সে. মি. নিচে নেমে যাবে। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin\left(\pi\cos\frac{x}{4}\right) - \cos\left(\pi\sin\frac{x}{4}\right)$

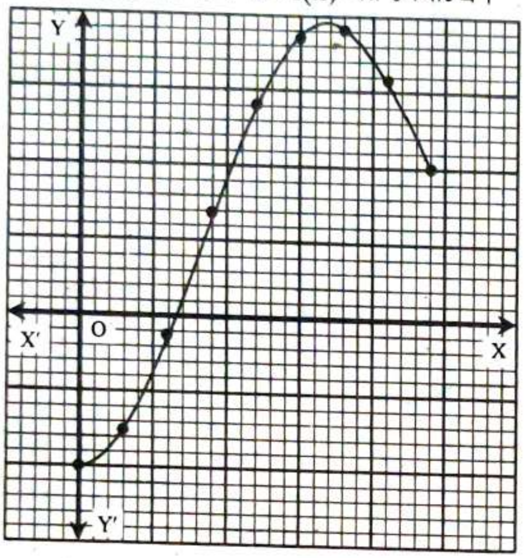
এখন প্রদত্ত ফাংশন হতে $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে x এর বিভিন্ন মানের জন্য f(x) এর প্রতিরূপী মানগুলি বের করি।

x	0	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$
f(x)	−1	−0.76	−0.12	0.68	1.4

x	$\frac{15\pi}{12}$	$\frac{18\pi}{12}$	$\frac{21\pi}{12}$	$\frac{24\pi}{12}$
f(x)	1.85	1.9	1.57	1

এখন ছক কাগজে XOX′ কে x অক্ষ, YOY′ কে y-অক্ষ এবং O কে মূলবিন্দু বিবেচনা করি। ছক কাগজে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 1 বাহু $= \frac{\pi}{12}$ এবং y-অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকায় প্রাপ্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করি এবং একটি বক্ররেখা দ্বারা সংযোগ করি।

ইহাই $0 \le x \le 2\pi$ ব্যবধিতে f(x) এর লেখচিত্র।



গ সমুদ্রের পানির উচ্চতা স্বাভাবিক থাকবে যদি f(x) = 0 হয়।

$\therefore \sin\left(\pi \cos\frac{x}{4}\right) - \cos\left(\pi \sin\frac{x}{4}\right) = 0$

বা, $\sin\left(\pi \cos\frac{x}{4}\right) = \cos\left(\pi \sin\frac{x}{4}\right)$

বা, $\sin\left(\pi \cos\frac{x}{4}\right) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi \sin\frac{x}{4}\right\}$

বা, $\pi \cos\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} \pm \pi \sin\frac{x}{4}$

বা, $\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \pm \sin\frac{x}{4}$

বা, $\cos\frac{x}{4} \pm \sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

বা, $\cos^2\frac{x}{4} \pm 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} + \sin^2\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$

বা, $1 \pm 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$

বা, $1 \pm \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ [$\because 2\sin A.\cos A = \sin 2A$]

বা, $\pm \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{4} - 1$

বা, $\pm \sin\frac{x}{2} = -\frac{3}{4}$

বা, $\sin\frac{x}{2} = \pm\frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{2} = \sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)$

$\therefore x = \pm 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ **(দেখানো হলো)**

15. **ক** $y_1 = 5 + \sin t$

A বিন্দুর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\sin t = 1$ হয়

অর্থাৎ $\sin t = \sin 90° \therefore t = 90°$

$\therefore$ A বিন্দুর সর্বোচ্চ মান $y_1 = 5 + \sin 90°$

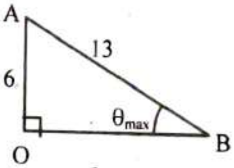
$= 5 + 1 = 6$ মি. **(Ans.)**

A বিন্দুর মান সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin t = -1$

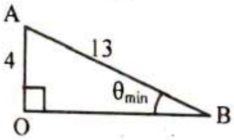
অর্থাৎ, $\sin t = -\sin 90° \therefore t = -90°$

A বিন্দুর সর্বনিম্ন মান $y_1 = 5 - 1 = 4$ মি. **(Ans.)**

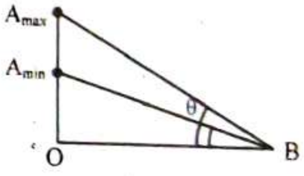
খ



$\theta_{max} = \sin^{-1}\frac{6}{13}$



$\theta_{min} = \sin^{-1}\frac{4}{13}$



মধ্যবর্তী বিচ্যুতি কোণ,

$\theta_{max} - \theta_{min} = \sin^{-1}\frac{6}{13} - \sin^{-1}\frac{4}{13}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{6}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{13}\right)^2} - \frac{4}{13}\sqrt{1-\left(\frac{6}{13}\right)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{6}{13}\frac{\sqrt{153}}{13} - \frac{4}{13}\frac{\sqrt{133}}{13}\right\}$

$= \sin^{-1}\frac{6\sqrt{153} - 4\sqrt{133}}{169}$

$= 9.57°$ **(Ans.)**

গ A এবং D বিন্দু ভূমি থেকে একই উচ্চতায় থাকবে যদি $y_1 = y_2$ হয়,

$\therefore 5 + \sin t = 7 + \cos 2t$

বা, $5 + \sin t = 7 + 1 - 2\sin^2 t$

বা, $2\sin^2 t + \sin t - 3 = 0$

বা, $2\sin^2 t + 3\sin t - 2\sin t - 3 = 0$

বা, $\sin t(2\sin t + 3) - 1(2\sin t + 3) = 0$

$\therefore (2\sin t + 3)(\sin t - 1) = 0$

কিন্তু $2\sin t + 3 \neq 0$ কারণ $-1 \leq \sin t \leq 1$.

$\therefore \sin t - 1 = 0$ বা, $\sin t = 1$ বা, $\sin t = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore t = \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

16. ক দেওয়া আছে,

$1 - y = (1 + x)^{-1}$

বা, $1 - y = \frac{1}{1 + x}$

বা, $1 + x = \frac{1}{(1 - y)}$

বা, $1 + x = (1 - y)^{-1}$

বা, $1 + x = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots\ldots$

$\therefore x = y + y^2 + y^3 + \ldots.$ **(দেখানো হলো)**

খ $P = \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1} 2$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}.\cos^{-1}\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4}.\frac{2}{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{17}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{17}{6} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{17}{6}.\frac{1}{2}}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{29}{12}}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{28}{29}$

এখন, $\sec^2 P = 1 + \tan^2 P = 1 + \tan^2\left(\tan^{-1}\frac{28}{29}\right)$

$= 1 + \left\{\tan\left(\tan^{-1}\frac{28}{29}\right)\right\}^2$

$= 1 + \left(\frac{28}{29}\right)^2 = \frac{(29)^2 + (28)^2}{(29)^2}$

$= \frac{841 + 784}{841} = \frac{1625}{841}$ **(Ans.)**

গ অনুশীলনী-7(B) এর 6(ix) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭১

17. ক দেওয়া আছে, $P = \cos\theta + \sin\theta$, $Q = \cos\theta - \sin\theta$

এখন, $\frac{P}{Q} = 1$

বা, $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = 1$ বা, $\cos\theta + \sin\theta = \cos\theta - \sin\theta$

বা, $2\sin\theta = 0$ বা, $\sin\theta = 0$

$\therefore \theta = n\pi$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

যখন, $n = 0$, তখন $\theta = 0$

যখন, $n = 1$, তখন $\theta = \pi$

যখন, $n = -1$, তখন $\theta = -\pi$

নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 0$

খ অনুশীলনী-7(B) এর 6(ii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৯

গ অনুশীলনী-7(B) এর 6(vi) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭০

18. ক দেওয়া আছে, $x = \tan^{-1}2$, $y = \tan^{-1}3$

এবং $x + y + z = \pi$

বা, $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 + z = \pi$

বা, $\tan^{-1}\left(\frac{3 + 2}{1 - 3.2}\right) + z = \pi$

বা, $\tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right) + z = \pi$

বা, $\tan^{-1}(-1) + z = \pi$

বা, $\pi - \tan^{-1}(1) + z = \pi$

বা, $-\frac{\pi}{4} + z = \pi - \pi \quad \therefore z = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

এখন, $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{3}f(x) = \sqrt{2}$

$\therefore \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

সুতরাং $x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$, যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

গ $f(x) = \sin x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$f\left(\pi\, f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f(\pi \cos x) = \sin(\pi \cos x)$

আবার, $f\left(\frac{\pi}{2} - \pi\ f(x)\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right)$

$= \cos(\pi \sin x)$

দেওয়া আছে,

$f\left(\pi\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \pi\, f(x)\right)$

$\therefore \sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$

বা, $\sin(\pi \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \sin x\right)$

বা, $\pi \cos x = \frac{\pi}{2} \pm \pi \sin x$

বা, $\cos x = \frac{1}{2} \pm \sin x$

বা, $\cos x \pm \sin x = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

[উভয় পক্ষে $\frac{1}{\sqrt{2}}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cos\frac{\pi}{4} \cos x \pm \sin\frac{\pi}{4} \sin x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

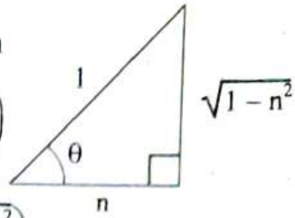
বা, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $x \pm \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore x = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(দেখানো হলো)**

19. ক দেওয়া আছে, $\cos^{-1} m + \cos^{-1} n = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1} m = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} n$



$\Rightarrow m = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} n\right)$

$\Rightarrow m = \sin(\cos^{-1} n)$

$\Rightarrow m = \sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{1 - n^2}}{1}\right)$

$\Rightarrow m = \sqrt{1 - n^2}$

$\Rightarrow m^2 = 1 - n^2$

$\therefore m^2 + n^2 = 1$ **(প্রমাণিত)**

খ $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{f(a)} - \sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \text{cosec}^{-1}\frac{1}{\frac{2a}{1+a^2}} - \sec^{-1}\frac{1}{\frac{1-b^2}{1+b^2}} = 2\tan^{-1}x$

$\left[\because f(x) = \frac{2x}{1+x^2}\right.$ এবং $\left. g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$

$\Rightarrow \text{cosec}^{-1}\frac{1+a^2}{2a} - \sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}a - 2\tan^{-1}b = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}x = \tan^{-1}a - \tan^{-1}b$

$\Rightarrow \tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}$

$\therefore x = \frac{a-b}{1+ab}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $h(x) = \sin x$

প্রদত্ত সমীকরণটি, $2h(\theta)\, h(3\theta) = 1$

$\Rightarrow 2\sin\theta \sin 3\theta = 1$, যখন $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin\theta \sin 3\theta = 1$

বা, $\cos 2\theta - \cos 4\theta = 1$

বা, $\cos 2\theta - (1 + \cos 4\theta) = 0$

বা, $\cos 2\theta - 2\cos^2 2\theta = 0$

বা, $\cos 2\theta\, (1 - 2\cos 2\theta) = 0$

হয়, $\cos 2\theta = 0$

$\therefore 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $1 - 2\cos 2\theta = 0$

বা, $\cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

সুতরাং $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, (2n+1)\frac{\pi}{4}$;

যখন n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4};$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{4};$

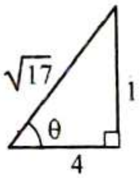
$n = 3$ হলে, $\theta = \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ:

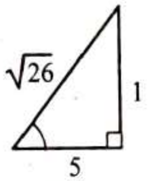
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \text{ (Ans.)}$$

20. ক $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{17} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5} = \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{5}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}$$



চিত্র-১



চিত্র-২

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{5+4}{20}}{\frac{20-1}{20}} = \tan^{-1}\left(\frac{9}{20}\times\frac{20}{19}\right) = \tan^{-1}\frac{9}{19} \text{ (Ans.)}$$

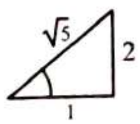
খ দেওয়া আছে,

$\sec A = \sqrt{5}$ $\therefore A = \sec^{-1}\sqrt{5} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{cosec} B = \frac{5}{3}$ $\therefore B = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{3} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

এবং $\cot C = 3$ $\therefore C = \cot^{-1}3 = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

প্রদত্ত রাশি $= A + C - \frac{1}{2}B$



চিত্র-১

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\right)$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}2 \text{ [চিত্র-১ হতে] (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = \sin x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 2;$

যখন $-2\pi < x < 2\pi$

বা, $\sqrt{3}\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{2}{2}$

[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $x - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (4n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

যেখানে n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা,

যখন, $n = 0$ তখন, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

যখন, $n = -1$ তখন, $x = \frac{-3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3};$

যখন $-2\pi < x < 2\pi$ **(Ans.)**

21. ক $\tan^{-1}4 + \tan^{-1}\frac{5}{3} = \tan^{-1}\frac{4+\frac{5}{3}}{1-4\times\frac{5}{3}}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{12+5}{3}}{\frac{3-20}{3}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{17}{-17}$$

$$= \tan^{-1}(-1) = \tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} \text{ (Ans.)}$$

খ প্রমাণ করতে হবে যে,

$\frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$

$\therefore \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$

[দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত চিত্রানুসারে]

ধরি, $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13} = \theta$ ... ... (i)

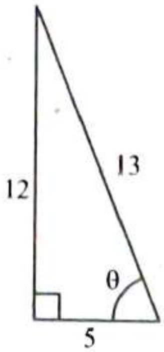
বা, $\cos^{-1}\frac{5}{13} = 2\theta$

বা, $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{5}{13}$

বা, $5 + 5\tan^2\theta = 13 - 13\tan^2\theta$

বা, $18\tan^2\theta = 8$ বা, $\tan^2\theta = \frac{8}{18}$



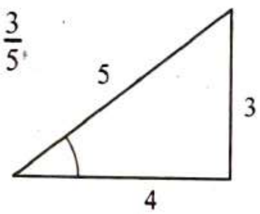
বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{9}$ বা, $\tan\theta = \frac{2}{3}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ [(i) নং হতে]

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= \tan^{-1}\frac{2}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$



$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{8+9}{12}}{1-\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{17}{6}$

ডানপক্ষ $= \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{28}{29} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{28}{29}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{28}{29}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{29+56}{58}}{\frac{58-28}{58}} = \tan^{-1}\frac{85}{30} = \tan^{-1}\frac{17}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}\varphi + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \cot x$

$g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).g\left(\frac{3\pi}{2}-2\theta\right) = 1, 0 \le \theta \le \pi$

$\therefore \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).\cot\left(\frac{3\pi}{2}-2\theta\right) = 1$

বা, $\tan\theta.\tan 2\theta = 1$ ... ... (i)

বা, $\frac{\sin\theta.\sin 2\theta}{\cos\theta.\cos 2\theta} = 1$

বা, $\cos\theta.\cos 2\theta = \sin\theta.\sin 2\theta$

বা, $\cos 2\theta.\cos\theta - \sin 2\theta.\sin\theta = 0$

বা, $\cos(2\theta+\theta) = 0$ বা, $\cos 3\theta = \cos\frac{\pi}{2}$

বা, $3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$; যেখানে n-এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে $\theta = 3.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য (i) নং সত্য নয়।

$n = 2$ হলে $\theta = 5.\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$n = 3$ হলে $\theta = 7.\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} > \pi$

নির্দিষ্ট ব্যবধিতে নির্ণেয় সমাধান $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

22. ক দেওয়া আছে, $h(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

এখন, $(1-x)^3 = \{1+(-x)\}^3$

এখন, সহগের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ (তৃতীয় সারি পর্যন্ত)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1-x)^3 = \{1+(-x)\}^3$
$= 1 + 3(-x) + 3(-x)^2 + 1(-x)^3$
$= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = h(x)$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt{2}x = \sin^{-1}A$

$\therefore A = \sin\sqrt{2}x$

এবং $\frac{-x}{2} = \cos^{-1}B$

$\therefore B = \cos\left(-\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}$

আবার, $A - B = 0$

$\therefore \sin\sqrt{2}x - \cos\frac{x}{2} = 0$

বা, $\sin\sqrt{2}x = \cos\frac{x}{2}$

বা, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}x\right) = \cos\frac{x}{2}$

$\therefore \ \frac{x}{2} = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right)$, যেখানে $n \in Z$

$(+)$ ve নিয়ে, $\frac{x}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x$

বা, $\frac{x}{2} + \sqrt{2}x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x + 2\sqrt{2}x}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

বা, $x(1 + 2\sqrt{2}) = 4n\pi + \pi$

বা, $x = \frac{1}{(1 + 2\sqrt{2})}(4n + 1)\pi$

$\therefore x = \frac{(4n + 1)\pi}{(1 + 2\sqrt{2})}$,

$(-)$ ve নিয়ে, $\frac{x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}x$

বা, $\frac{x}{2} - \sqrt{2}x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x - 2\sqrt{2}x}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

বা, $x(1 - 2\sqrt{2}) = 4n\pi - \pi$

$\therefore \ x = \frac{(4n - 1)\pi}{(1 - 2\sqrt{2})}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{(4n + 1)\pi}{1 + 2\sqrt{2}}, \frac{(4n - 1)\pi}{1 - 2\sqrt{2}}$

গ দেওয়া আছে, $h(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1 - x)^3$

$\therefore \ \{h(x)\}^3 = \{(1 - x)^3\}^3 = (1 - x)^9$

$(1 - x)^9$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= 9 + 1 = 10$, যা জোড়।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে দুইটি।

একটি মধ্যপদ $= \left(\frac{9 + 1}{2}\right)$ তম পদ $= 5$ তম পদ

$= (4 + 1)$ তম পদ

এবং অপর মধ্যপদ $= \left(\frac{9 + 1}{2} + 1\right)$ তম পদ $= 6$ তম পদ

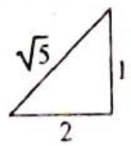
$= (5 + 1)$ তম পদ

5 তম পদ $= T_{4+1}$ তম $= {}^9C_4(-x)^4 = 126x^4$

এবং 6 তম পদ $= T_{5+1}$ তম পদ $= {}^9C_5(-x)^5 = -126x^5$

$\therefore$ মধ্যপদদ্বয় $126x^4, -126x^5$ **(Ans.)**

23. **ক** $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$



$= \cot . \cot^{-1}2$

$= 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $g(\alpha) = \sin(\pi \cos\alpha) - \cos(\pi \sin\alpha)$

$\therefore \ g(\alpha) = 0$

বা, $\sin(\pi \cos\alpha) - \cos(\pi \sin\alpha) = 0$

বা, $\sin(\pi \cos\alpha) = \cos(\pi \sin\alpha)$

বা, $\sin(\pi \cos\alpha) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi \sin\alpha\right\}$

বা, $\pi \cos\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \pi \sin\alpha$ বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2} \pm \sin\alpha$

বা, $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \frac{1}{2}$

বা, $(\cos\alpha \pm \sin\alpha)^2 = \frac{1}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\alpha \pm 2\cos\alpha \sin\alpha + \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $1 \pm \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ বা, $\pm \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$

বা, $\sin 2\alpha = \pm \frac{3}{4}$

বা, $2\alpha = \sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \ \alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$ এবং $f(a) = \alpha$

সুতরাং $\sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b} = \alpha$

বা, $\cos^{-1}a + \cos^{-1}b = \alpha$

বা, $\cos^{-1}\{ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}\} = \alpha$

বা, $ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} = \cos\alpha$

বা, $ab - \cos\alpha = \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}$

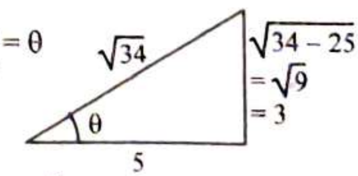
বা, $a^2b^2 - 2ab\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$

বা, $-2ab\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha - a^2 - b^2$

বা, $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = \sin^2\alpha$

$\therefore \ \sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ **(প্রমাণিত)**

24. **ক** ধরি, $\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}} = \theta$



$\therefore \ \theta = \cot^{-1}\frac{5}{3}$

$\therefore$ ডানপক্ষ $= \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}\frac{5}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{5}{3} \quad \left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$=$ বামপক্ষ

$\therefore \ \tan^{-1}\frac{5}{3} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ **(দেখানো হলো)**

খ বামপক্ষ $= \tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})f(x)\} + \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})f(x)\}$

$= \tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})\tan x\} + \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})\tan x\}$

$= \tan^{-1}\dfrac{(2+\sqrt{3})\tan x + (2-\sqrt{3})\tan x}{1-(2+\sqrt{3})\tan x\,.\,(2-\sqrt{3})\tan x}$

$= \tan^{-1}\dfrac{2\tan x + \sqrt{3}\tan x + 2\tan x - \sqrt{3}\tan x}{1-(4-3)\tan^2 x}$

$= \tan^{-1}\dfrac{4\tan x}{1-\tan^2 x} = \tan^{-1}\left\{2\,.\,\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right\}$

$= \tan^{-1}(2\times\tan 2x)$

$= \tan^{-1}(2\,f(2x))$ = ডানপক্ষ

$\therefore \tan^{-1}\{(2+\sqrt{3})f(x)\} + \tan^{-1}\{(2-\sqrt{3})f(x)\}$
$= \tan^{-1}\{2f(2x)\}$ **(প্রমাণিত)**

গ $f\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right) = \cos x + \sin x$

বা, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right) = \cos x + \sin x$

বা, $\cot 2x = \cos x + \sin x$

বা, $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x + \sin x$

বা, $(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x\cos x(\cos x + \sin x) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\therefore \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x\end{array}\right]$

বা, $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 2\sin x\cos x) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos x + \sin x = 0$

বা, $\tan x = -1 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \therefore x = n\pi - \dfrac{1}{4}\pi n \in Z$

অথবা, $\cos x - \sin x = \sin 2x$

বা, $(\cos x - \sin x)^2 = \sin^2 2x$

বা, $1 - \sin 2x = \sin^2 2x$

বা, $\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

বা, $\sin 2x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$

অর্থাৎ, $\sin 2x = \dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) = \sin\alpha$, কারণ সাইন অনুপাতের মান -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

$\therefore 2x = n\pi + (-1)^n\alpha$, যেখানে $n = 0$ অথবা $n = 4m-1$, $m \in Z$

বা, $x = \dfrac{1}{2}n\pi + (-1)^n\dfrac{1}{2}\alpha$;

যখন, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = n\pi - \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{n\pi}{2} + (-1)^n\dfrac{\alpha}{2}$,

যখন $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ এবং n এর মান শূন্য অথবা $n = 4m-1, (m \in Z)$

25. **ক** $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{3+2}{6}}{\frac{6-1}{6}} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$

$= \tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x$ এবং $g(x) = \cos x$

প্রদত্ত রাশি $= f\left\{\sqrt{2}\,g\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} + f\left\{\sqrt{g(2\theta)}\right\}$

$= f\left\{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} + f\left\{\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$

$= f(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-\cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{1-2\sin^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta \times \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{\cos 2\theta}.\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + \cos 2\theta\}$

$= \sin^{-1}\{2\sin^2\theta + 1 - 2\sin^2\theta\}$

$= \sin^{-1}1 = \dfrac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

গ $\sqrt{3}g(x) + g\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = 1$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}$; n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

'+' নিয়ে, $x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = 2n\pi + \dfrac{\pi}{6}$

$n = 0$ হলে, $x = 0 + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} > 2\pi$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-11\pi}{6}$

$n = -2$ হলে, $x = -4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-23\pi}{6} < -2\pi$

'–' নিয়ে, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$n = 0$ হলে, $x = -\frac{\pi}{2}$

$n = 1$ হলে, $x = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$n = 2$ হলে, $x = 4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} > 2\pi$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{-5\pi}{2} < -2\pi$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{11\pi}{6}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

26. **ক** প্রদত্ত রাশি $= \sec^2(\cot^{-1}3) + \csc^2(\tan^{-1}2)$

$= 1 + \tan^2(\cot^{-1}3) + 1 + \cot^2(\tan^{-1}2)$

$= 2 + \tan^2(\cot^{-1}3) + \cot^2(\tan^{-1}2)$

$= 2 + \left\{\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)\right\}^2 + \left\{\cot\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\}^2$

$= 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{85}{36} = 2\frac{13}{36}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2}$ এবং $f(\sin\theta) = 0$

$\therefore \sqrt{2}\sin^2\theta - 3\sin\theta + \sqrt{2} = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta(\sin\theta - \sqrt{2}) - 1(\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\therefore (\sin\theta - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\theta - 1) = 0$

হয় $\sin\theta - \sqrt{2} = 0$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{2}$

ইহা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ, $-1 \le \sin\theta \le 1$

অথবা, $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4}$

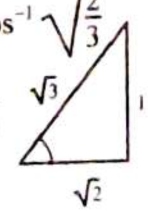
$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$

(Ans.)

গ প্রদত্ত রাশি, $A = 2\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$= \sin^{-1}\left(2\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

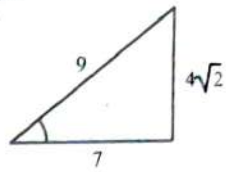
$= \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right) + \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



$= \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{8}{9}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$



$= \tan^{-1}\frac{4\sqrt{2}}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \tan^{-1}\frac{\frac{8+7}{7\sqrt{2}}}{1-\frac{4}{7}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{15}{7\sqrt{2}}}{\frac{3}{7}}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{15}{7\sqrt{2}} \times \frac{7}{3}\right) = \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore A = \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$ **(প্রমাণিত)**

27. **ক** মনে করি, $\sin^{-1}x = A$

$\therefore \sin A = x$

এবং $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-x^2}$

এখন, $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 2A = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

সুতরাং, $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ **(প্রমাণিত)**

খ অনুশীলনী-7(A) এর 2(xi) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৪

গ অনুশীলনী-7(B) এর 2(ii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬১

28. **ক** মনে করি, $\sin^{-1}x = \theta$

$\therefore \sin\theta = x$

এখন, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

$\Rightarrow \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \theta + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

সুতরাং, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ **(প্রমাণিত)**

খ অনুশীলনী-7(A) এর 3(v) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৫

গ অনুশীলনী-7(B) এর 1(xxiv) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬১

29. **ক** মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta \quad \therefore \tan\theta = x$

$\therefore \quad \sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

বা, $\sin 2\theta = \dfrac{2x}{1+x^2}$

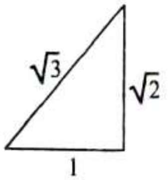
বা, $2\theta = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$

$\therefore \quad 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ **(দেখানো হলো)**

খ অনুশীলনী-7(A) এর 2(xiii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৪

গ অনুশীলনী-7(B) এর 6(viii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭১

30. **ক** $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$



$= \cot^{-1}\cos\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= \cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ এবং $f^{-1}(y) = \tan^{-1}y$

প্রশ্নমতে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi$

বা, $\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} = \pi$

বা, $\dfrac{x+y}{1-xy} = \tan\pi$

বা, $\dfrac{x+y}{1-xy} = 0$

বা, $x + y = 0$

$\therefore \quad y = -x$

অতএব, প্রাপ্ত সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে এবং সরলরেখাটির ঢাল -1 **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore \quad f'(x) = \dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\{f(x)\}^2 + f'(x) = 3f(x)$

বা, $\tan^2 x + \sec^2 x = 3\tan x$

বা, $\tan^2 x + 1 + \tan^2 x - 3\tan x = 0$

বা, $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$

বা, $2\tan^2 x - 2\tan x - \tan x + 1 = 0$

বা, $2\tan x(\tan x - 1) - 1(\tan x - 1) = 0$

বা, $(2\tan x - 1)(\tan x - 1) = 0$

হয়, $2\tan x - 1 = 0$ অথবা, $\tan x - 1 = 0$

বা, $\tan x = \dfrac{1}{2}$ বা, $\tan x = 1$

$\therefore \quad x = n\pi + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ বা, $\tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

যখন $n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right), \dfrac{\pi}{4}$

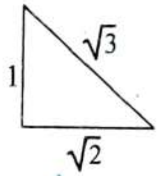
$n = 1$ হলে, $x = \pi + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ এবং $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $x = 2\pi + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ এবং $x = 2\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{4} > 2\pi$

নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধানসমূহ,

$\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right), \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ **(Ans.)**

31. **ক** $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$



$= \tan^{-1}\sin\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল-10(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮২

গ দেওয়া আছে, $A = \cos\theta$,

$B = \sin\theta$,

$C = \cos 2\theta$,

$D = \sin 2\theta$

$\therefore \quad A + B = C + D$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \cos 2\theta + \sin 2\theta$

বা, $\cos\theta - \cos 2\theta - (\sin 2\theta - \sin\theta) = 0$

বা, $2\sin\dfrac{3\theta}{2}.\sin\dfrac{\theta}{2} - 2\cos\dfrac{3\theta}{2}.\sin\dfrac{\theta}{2} = 0$

বা, $2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{3\theta}{2} - \cos\dfrac{3\theta}{2}\right) = 0$

$\therefore \quad \sin\dfrac{3\theta}{2} - \cos\dfrac{3\theta}{2} = 0$ অথবা, $2\sin\dfrac{\theta}{2} = 0$

বা, $\sin\dfrac{3\theta}{2} = \cos\dfrac{3\theta}{2}$ বা, $\sin\dfrac{\theta}{2} = 0$

বা, $\tan\dfrac{3\theta}{2} = 1$ বা, $\dfrac{\theta}{2} = n\pi$

বা, $\tan\dfrac{3\theta}{2} = \tan\dfrac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi$

বা, $\dfrac{3\theta}{2} = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

বা, $\theta = \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{6}, 0$

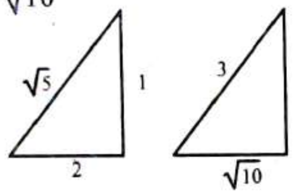
$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{6}, 2\pi$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{2}, 4\pi$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধান বিদ্যমান এবং $\theta = 0, \frac{\pi}{6}$

(Ans.)

32. ক $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5} + \sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$



এখানে, $\sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$ কে পর্যালোচনা করে দেখা যায় ভূমি $\sqrt{10}$ ও অতিভুজ 3। কিন্তু ভূমি কখনো অতিভুজের চেয়ে বড় হতে পারে না। তাই প্রদত্ত রাশির মান নির্ণয়যোগ্য নয়।

খ অনুশীলনী-7(A) এর 2(xii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৪

গ অনুশীলনী-7(B) এর 6(i) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৯

33. ক আমরা জানি, sinx এর পর্যায়কাল 2π

$\therefore \sin\frac{x}{3}$ এর পর্যায়কাল $= \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ **(Ans.)**

খ অনুশীলনী-7(A) এর 7(xiv) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫২

গ অনুশীলনী-7(B) এর 4(iii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬৫

34. ক বামপক্ষ $= \cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$$= \cos\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}]$

$$= \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ উদ্দীপকের চিত্র হতে, $\cos A = \frac{x}{r}$

$\therefore A = \cos^{-1}\frac{x}{r}$

এবং $\cos P = \frac{y}{r}$

$\therefore P = \cos^{-1}\frac{y}{r}$

প্রশ্নমতে, $\cos^{-1}\frac{x}{r} + \cos^{-1}\frac{y}{r} = \phi$

বা, $\cos^{-1}\left\{\frac{xy}{r^2} - \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)}\right\} = \phi$

বা, $\frac{xy}{r^2} - \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)} = \cos\phi$

বা, $\left(\frac{xy}{r^2} - \cos\phi\right)^2 = \left(\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)}\right)^2$

বা, $\frac{x^2y^2}{r^4} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi + \cos^2\phi = \left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)$

বা, $\frac{x^2y^2}{r^4} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi + \cos^2\phi = 1 - \frac{y^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^2y^2}{r^4}$

বা, $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{2xy}{r^2}\cos\phi = 1 - \cos^2\phi$

বা, $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{2xy}{r^2}\cos\phi = \sin^2\phi$

$\therefore x^2 + y^2 - 2xy\cos\phi = r^2\sin^2\phi$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$f(\theta) = \frac{r}{x} = \sec\theta$

$\therefore f(2\theta) = \sec 2\theta$

প্রশ্নমতে,

$f(2\theta) - f(\theta) = 2$

বা, $\sec 2\theta - \sec\theta = 2$

বা, $\frac{1}{\cos 2\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = 2$

বা, $\frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\cos 2\theta . \cos\theta} = 2$

বা, $\cos\theta - \cos 2\theta = 2\cos 2\theta . \cos\theta$

বা, $\cos\theta - \cos 2\theta = \cos\theta + \cos(2\theta + \theta)$

বা, $\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$

বা, $2\cos\frac{3\theta + 2\theta}{2}\cos\frac{3\theta - 2\theta}{2} = 0$

বা, $\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$

এখন, $\cos\frac{5\theta}{2} = 0$ আবার, $\cos\frac{\theta}{2} = 0$

বা, $\frac{5\theta}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\frac{\theta}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{5}$ $\therefore \theta = (2n+1)\pi$

$n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{5}, \pi$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{5}, 3\pi$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{\pi}{5}, -\pi$

$n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{3\pi}{5}, -3\pi$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{5}, \pi, -\frac{\pi}{5}, -\frac{3\pi}{5}, -\pi, \frac{3\pi}{5}$ **(Ans.)**

35. ক এখানে, $\tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 3x - \frac{\pi}{2} + 5x = 2x$

$\therefore \tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) = 2x$

(প্রমাণিত)

খ অনুশীলনী-7(A) এর 7(xv) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৫২

গ অনুশীলনী-7(B) এর 1(xxiii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬০

36. ক অনুশীলনী-7(A) এর 2(vii) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৪৩

খ দেওয়া আছে, $p = \frac{1}{2}$

এবং $g(x) = p\sin^{-1}x = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$

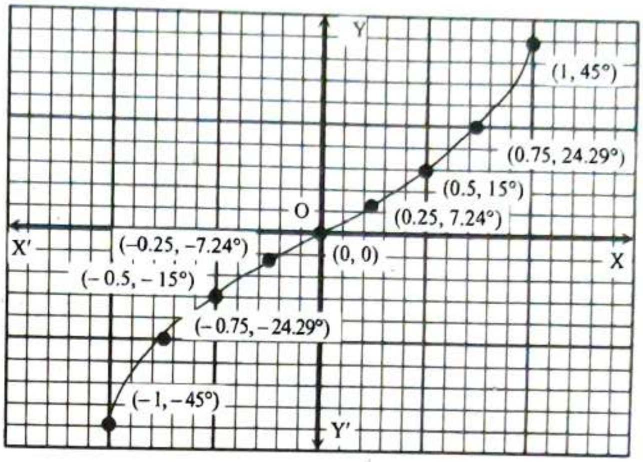
যেখানে $-1 \le x \le 1$.

ধরি, $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$.

x এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রতিসঙ্গী y এর মানগুলো নির্ণয় করি।

x	−1	− 0.75	− 0.5	− 0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$	− 45°	− 24.29°	− 15°	− 7.24°	0°	7.24°	15°	24.29°	45°

ছক কাগজের x অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর 1 ক্ষুদ্রতম ঘর = 5° একক ধরে প্রাপ্ত x ও y এর মানগুলি বসিয়ে $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।



গ দেওয়া আছে, $h(x) = \cos x$

$\therefore h(2x) = \cos 2x$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$

বা, $2\cos^2 x + \cos^2 2x = 2$

বা, $1 + \cos 2x + \cos^2 2x - 2 = 0$

বা, $\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

বা, $\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কেননা তা -1 অপেক্ষা ছোট মান এবং $\cos\theta$ এর সীমা -1 হতে 1 পর্যন্ত।

$\therefore \cos 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

বা, $\cos 2x = \cos\alpha$ [ধরি, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$]

বা, $2x = 2n\pi \pm \alpha$.

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$

যেখানে $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের ব্যবহারিকের সমাধান

▶ অনুচ্ছেদ-7.5। পৃষ্ঠা-৩০৯

পরীক্ষণ নং 7.5(i)	কাজের নাম: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ: ......

সমস্যা : $y = \sin^{-1}x$ **এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।**

সমাধান: তত্ত্ব: $\sin x$ ফাংশনটি $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে এক-এক এবং এর রেঞ্জ $[-1, 1]$।

কাজেই $\sin^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $= [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, পেন্সিল, রাবার, ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

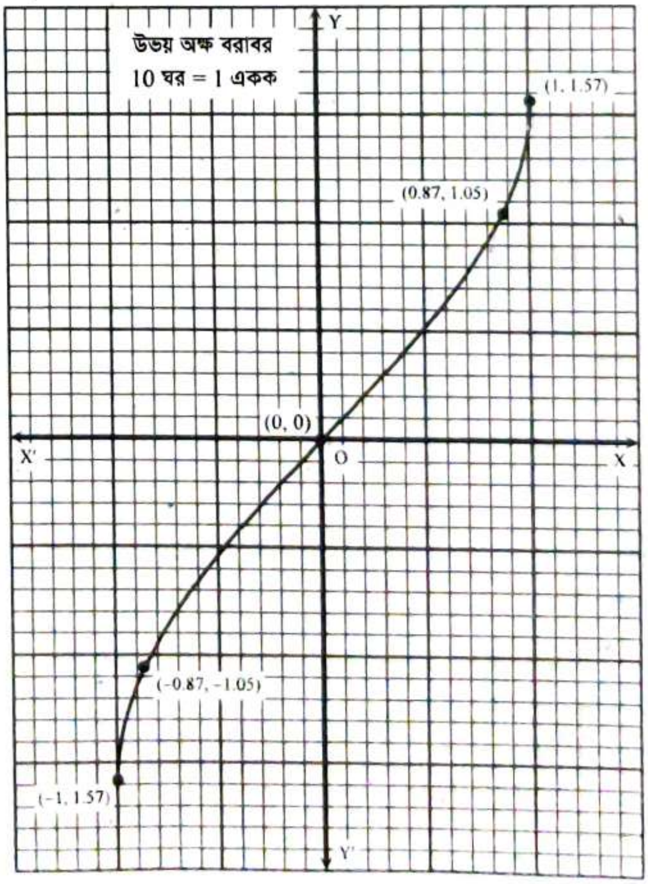
i. x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \sin^{-1}x$ হতে y এর মান নির্ণয় করি।

ii. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে x-অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক ও y-অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক স্কেলে স্থাপন করি।

iii. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে মসৃন বক্ররেখার সাহায্যে বিন্দুগুলি যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	-1	-0.87	0	0.87	1
$y = \sin^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2} = -1.57$	$\frac{-\pi}{3} = -1.05$	0	$\frac{\pi}{3} = 1.05$	$\frac{\pi}{2} = 1.57$



সতর্কতা:

(i) বিন্দুগুলির মান নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

(ii) ফাংশনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করে ফাংশনের লেখের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

(iii) বিন্দুগুলি যোগের সময় সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে।

বৈশিষ্ট্য:

(i) x এর $[-1, 1]$ মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

(ii) $\sin(\sin^{-1}x) = x$ যখন $-1 \le x \le 1$

(iii) $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ যখন $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

পরীক্ষণ নং 7.5(ii)	**কাজের নাম:** বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: $y = \cos^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: cosx ফাংশনটি $[0, \pi]$ ব্যবধিতে এক-এক এবং এর রেঞ্জ $\mathbb{R}$। কাজেই $\cos^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $= [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= [0, \pi]$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, পেন্সিল, রাবার, ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

i. x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \cos^{-1}x$ হতে y এর মান নির্ণয় করি।

ii. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে x-অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক ও y-অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক স্কেলে স্থাপন করি।

iii. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে মসৃন বক্ররেখার সাহায্যে বিন্দুগুলি যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \cos^{-1}x$	$\pi = 3.14$	$\frac{2\pi}{3} = 2.09$	$\frac{\pi}{2} = 1.57$	$\frac{\pi}{3} = 1.05$	0

সতর্কতা:

(i) বিন্দুগুলির মান নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

(ii) ফাংশনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করে ফাংশনের লেখের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

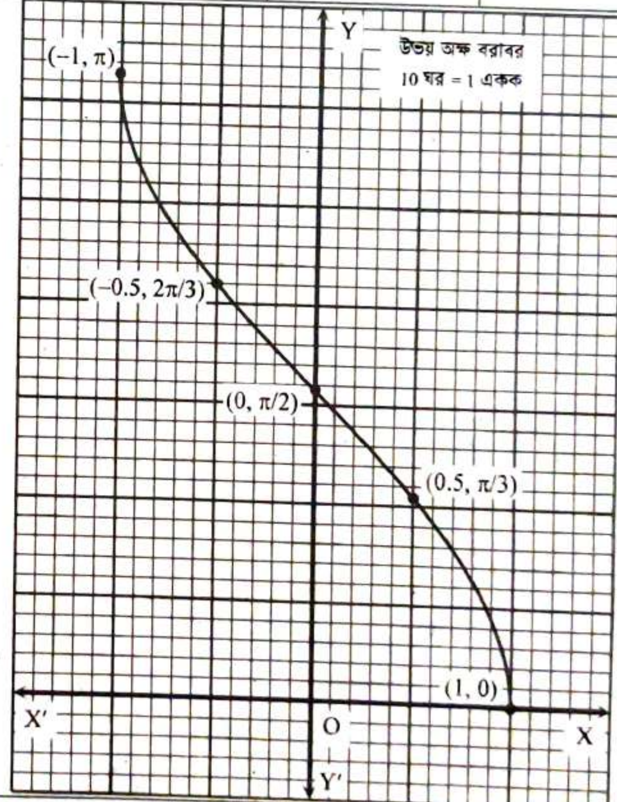
(iii) বিন্দুগুলি যোগের সময় সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে।

বৈশিষ্ট্য:

(i) x এর $[-1, 1]$ মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

(ii) $\cos(\cos^{-1}x) = x$ যখন $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $\cos^{-1}(\cos x) = x$ যখন $0 \leq x \leq \pi$



পরীক্ষণ নং 7.5(iii)	**কাজের নাম:** বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ: ... ...

সমস্যা: $y = \cot^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: cotx ফাংশনটি $(0, \pi)$ ব্যবধিতে এক-এক এবং এর রেঞ্জ $\mathbb{R}$। কাজেই $\cot^{-1}x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= (0, \pi)$

উপকরণ: ছক কাগজ, পেন্সিল, রাবার, ক্যালকুলেটর।

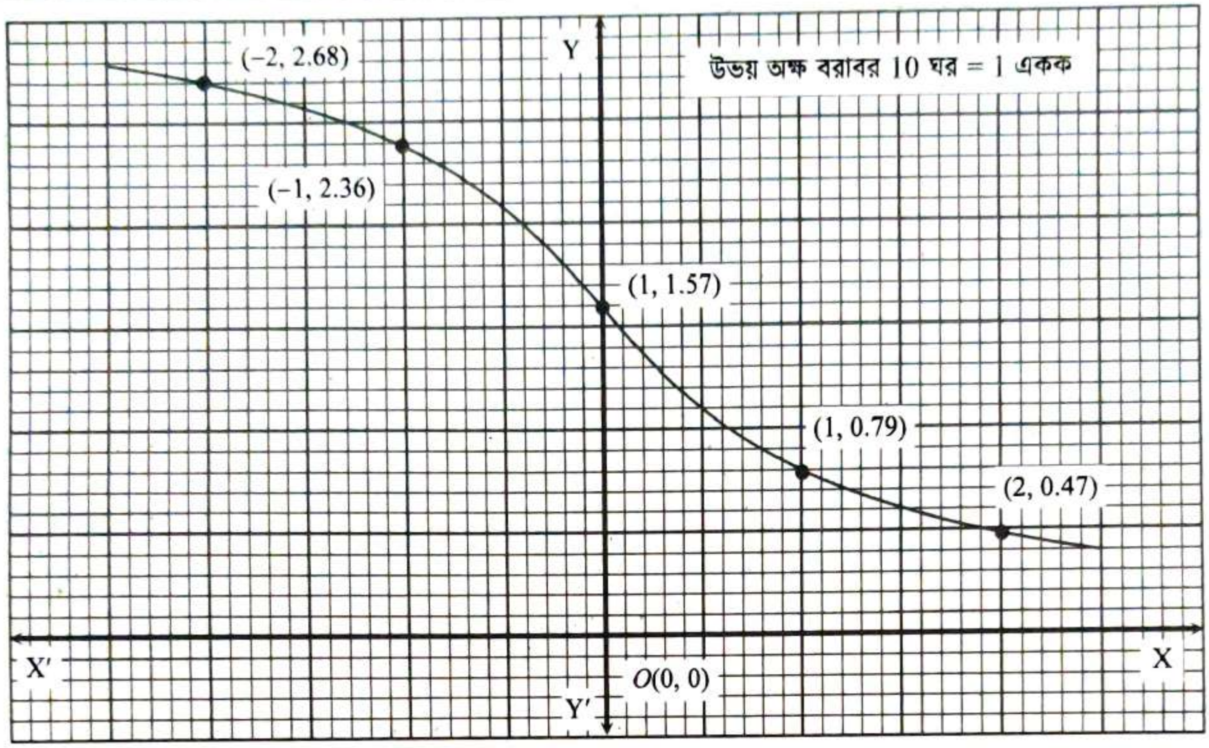
কার্যপদ্ধতি: i. x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \cot^{-1}x$ হতে y এর মান নির্ণয় করি।

ii. প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলি ছক কাগজে x-অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক ও y-অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক স্কেলে স্থাপন করি।

iii. একটি সরু শিষযুক্ত পেন্সিল দিয়ে মসৃন বক্ররেখার সাহায্যে বিন্দুগুলি যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	− 2	− 1	0	1	2
$y = \cot^{-1}x$	2.68	$\frac{3\pi}{4} = 2.36$	$\frac{\pi}{2} = 1.57$	$\frac{\pi}{4} = 0.79$	0.47



সতর্কতা:

(i) বিন্দুগুলির মান নির্ণয়ে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

(ii) ফাংশনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করে ফাংশনের লেখের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

(iii) বিন্দুগুলি যোগের সময় সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে।

বৈশিষ্ট্য: (i) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

(ii) $x \to \infty$ হলে $\cot^{-1}x \to 0$ এবং $x \to -\infty$ হলে $\cot^{-1} 0 \to \pi$ হওয়ায় $x = 0$ এবং $x = \pi$ রেখাদ্বয় ফাংশনের অসীমতট রেখা।

(iii) $\cot^{-1}(\cot x) = x$ যখন $x \in \mathbb{R}$

(iv) $\cot^{-1}(\cot x) = x$ যখন $0 < x < \pi$

▶ কাজ : অনুচ্ছেদ-7.6। পৃষ্ঠা-৩১০

পরীক্ষণ নং 7.6(i)	**কাজের নাম:** একই লেখচিত্রে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	**তারিখ** ... ...

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \sin x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sin^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= [-1, 1]$ কিন্তু $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক। সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

(i) $y = \sin x$ এর ফাংশন থেকে $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক, y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

(iii) সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \sin x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(iv) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।

(v) প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	$-\frac{\pi}{2} = -1.57$	$-\frac{\pi}{3} = -1.05$	0	$\frac{\pi}{3} = 1.05$	$\frac{\pi}{2} = 1.57$
$y = \sin x$	-1	-0.87	0	0.87	1

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

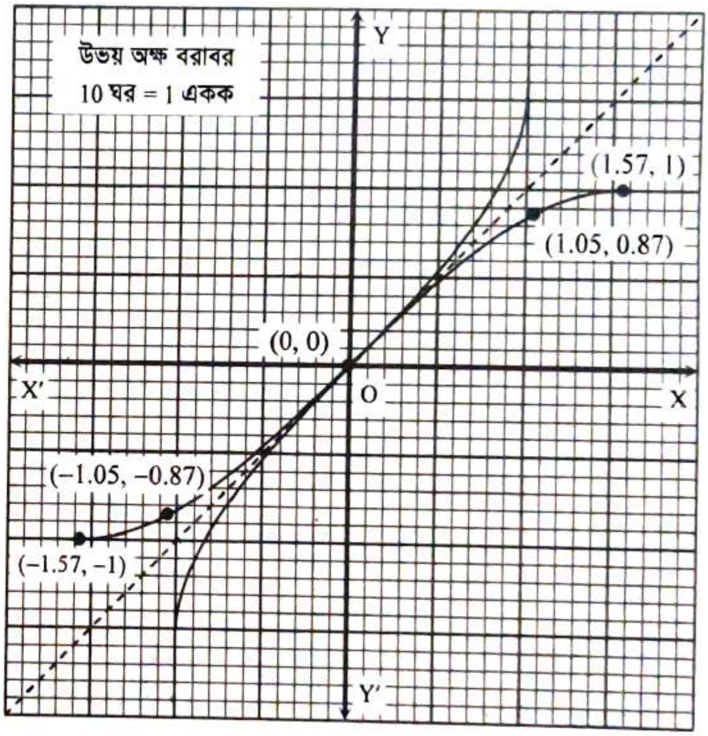
(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি অনন্য।

(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(iii) $\sin^{-1}(x) = t$ যদি এবং কেবল যদি $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ এবং $\sin(t) = x$

(iv) $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ যদি এবং কেবল যদি $-1 \le x \le 1$

(v) $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ যদি $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



পরীক্ষণ নং 7.6(ii)	**কাজের নাম:** একই লেখচিত্রে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	**তারিখ** ... ...

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \tan x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $y = f(x) = \tan x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$ কিন্তু $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক। সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি: (i) $y = \tan x$ এর ফাংশন থেকে $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক, y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

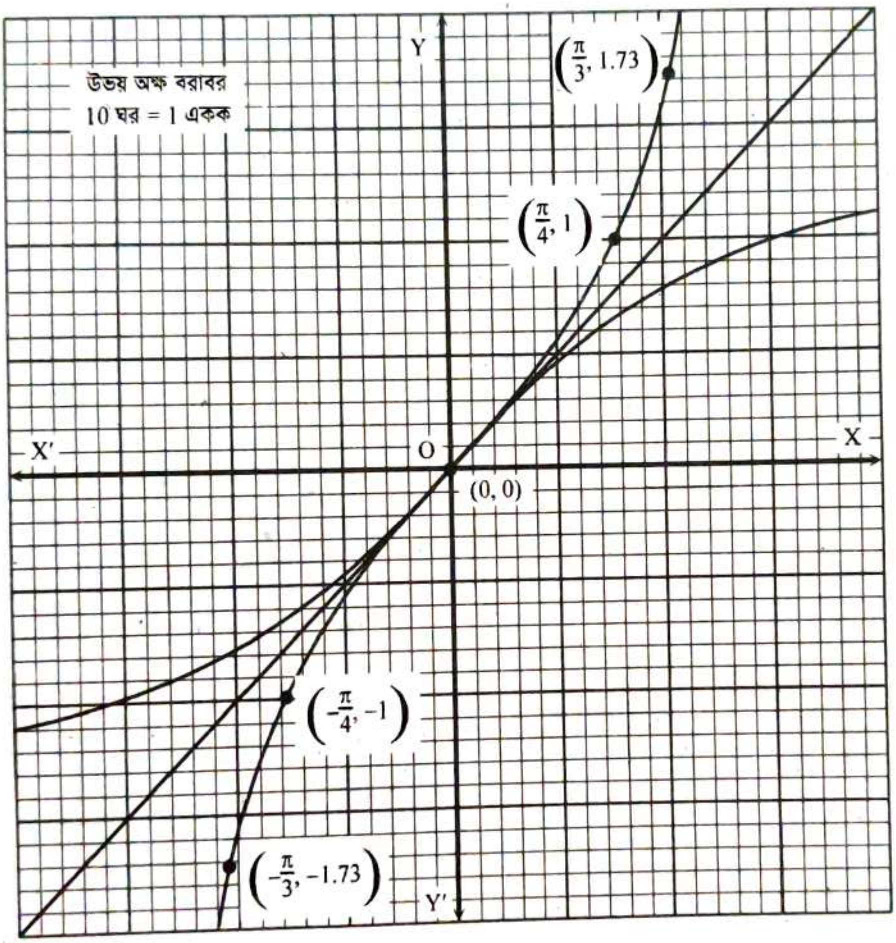
(iii) সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \tan x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(iv) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।

(v) প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	$\frac{-\pi}{3} = -1.05$	$-\frac{\pi}{4} = -0.79$	0	$\frac{\pi}{4} = 0.79$	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
$y = \tan x$	−1.73	−1	0	1	1.73



লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে $f(x) = \tan x$ ফাংশনটি অনন্য।

(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(iii) $\tan^{-1}(x) = t$ যদি এবং কেবল যদি $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ এবং $\tan(t) = x$

(iv) $\tan(\tan^{-1}(x)) = x$ যদি এবং কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$

(v) $\tan^{-1}(\tan(x)) = x$ যদি $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

পরীক্ষণ নং 7.6(iii)	কাজের নাম: একই লেখচিত্রে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ … …

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \sin 2x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sin^{-1} 2x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $y = f(x) = \sin 2x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= [-1, 1]$ কিন্তু $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক।

সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= [-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = 2x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = 2x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ:

(i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

(i) $y = \sin 2x$ এর ফাংশন থেকে $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক, y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

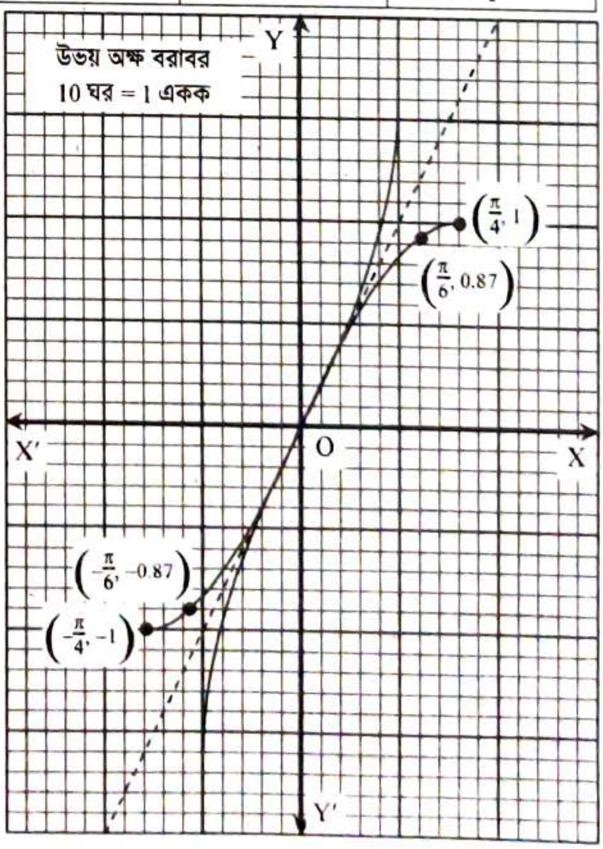
(iii) সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \sin 2x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(iv) $y = 2x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।

(v) প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ফল সংকলন:

x	$-\frac{\pi}{4} = -0.79$	$-\frac{\pi}{6} = -0.52$	0	$\frac{\pi}{6} = 0.52$	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
$y = \sin 2x$	-1	-0.87	0	0.87	1



লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ব্যবধিতে $f(x) = \sin 2x$ ফাংশনটি অনন্য।

(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $= \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

(iii) $\sin^{-1}(2x) = t$ যদি এবং কেবল যদি $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$ এবং $\sin(t) = 2x$

(iv) $\sin(\sin^{-}1(2(x))) = 2x$ যদি এবং কেবল যদি $-1 \le 2x \le 1$

(v) $\sin^{-1}(\sin(2x)) = 2x$ যদি $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

পরীক্ষণ নং 7.6(iv)	কাজের নাম: একই লেখচিত্রে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ ... ...

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \cot x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $y = f(x) = \cot x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R}$ কিন্তু $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক। সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= (0, \pi)$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

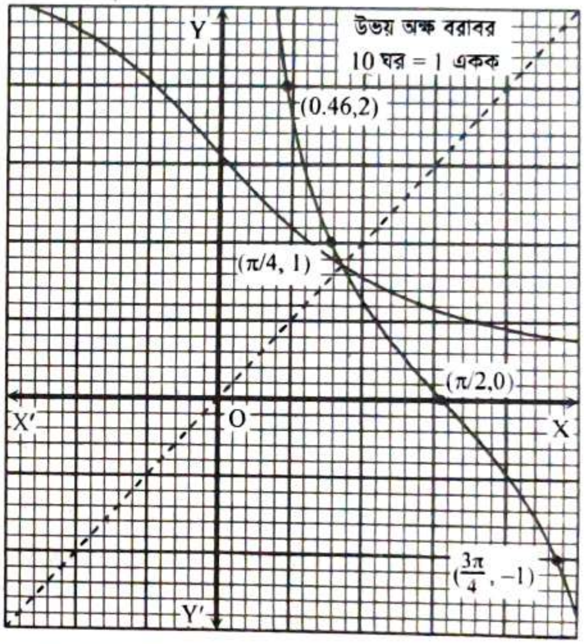
(i) $y = \cot x$ এর ফাংশন থেকে $(0, \pi)$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক, y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

(iii) সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \cot x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(iv) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।

(v) প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



ফল সংকলন:

x	0.46	$\frac{\pi}{4} = 0.79$	$\frac{\pi}{2} = 1.57$	$\frac{3\pi}{4} = 2.36$
$y = \cot x$	2	1	0	−1

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $f(x) = \cot x$ ফাংশনটি অনন্য।

(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $= (0, \pi)$

(iii) $\cot^{-1}(x) = t$ যদি এবং কেবল যদি $0 < t < \pi$ এবং $\cot(t) = x$

(iv) $\cot(\cot^{-1}(x)) = x$ যদি এবং কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$

(v) $\cot^{-1}(\cot(x)) = x$ যদি $0 < x < \pi$

পরীক্ষণ নং 7.6(v)	কাজের নাম: একই লেখচিত্রে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	তারিখ ... ...

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \sec x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sec^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $y = f(x) = \sec x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$

এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - (-1, 1)$ কিন্তু $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক।

সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - (-1, 1)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি: (i) $y = \sec x$ এর ফাংশন থেকে $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 5 বাহু = 1 একক, y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 5 বাহু = 1 একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

(iii) সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \sec x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।
(iv) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।
(v) প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

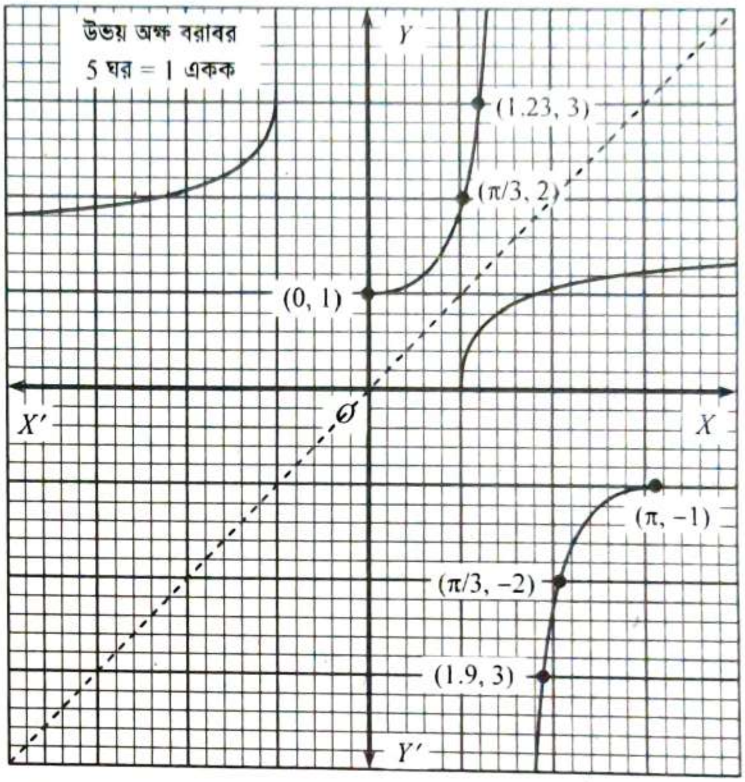
ফল সংকলন:

x	0	$\frac{\pi}{3} = 1.05$	1.23	1.9	$\frac{2\pi}{3} = 2.09$	$\pi = 3.14$
$y = \sec x$	1	2	3	−3	−2	−1

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ব্যবধিতে $f(x) = \sec x$ ফাংশনটি অনন্য।

(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - (-1, 1)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$



পরীক্ষণ নং 7.6(vi)	**কাজের নাম:** একই লেখচিত্রে $y = f(x)$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।	**তারিখ ... ...**

সমস্যা: একই লেখচিত্রে $f(x) = \text{cosec}\,x$ এবং এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \text{cosec}^{-1}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব : $y = f(x) = \text{cosec}\,x$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ এবং রেঞ্জ $= \mathbb{R} - (-1, 1)$

কিন্তু $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক। সুতরাং $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - (-1, 1)$ এবং রেঞ্জ $= [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$। $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ ফাংশনের লেখ $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ রেখার প্রতিফলিত চিত্র আঁকলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) পেন্সিল; (ii) স্কেল; (iii) ইরেজার; (iv) ছক কাগজ; (v) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি: (i) $y = \text{cosec}\,x$ এর ফাংশন থেকে $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

(ii) ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্ধারণ করে সুবিধাজনক স্কেলে (x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক, y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র 10 বাহু = 1 একক) বিন্দুগুলি স্থাপন করি।

(iii) সরু করে কাঁটা পেন্সিল দিয়ে বিন্দুগুলি সংযোগ করে $f(x) = \text{cosec}\,x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

(iv) $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের উপরস্থ বিন্দুগুলির প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করি।

(v) প্রতিফলিত বিন্দুগুলি পেন্সিল দিয়ে যোগ করে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।

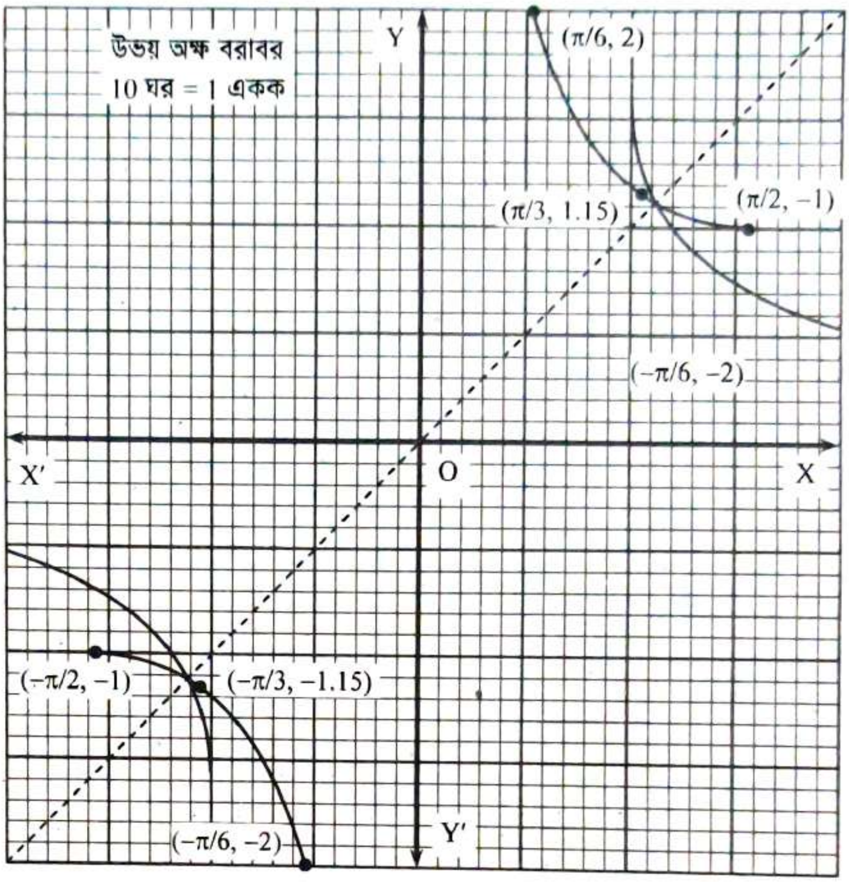
ফল সংকলন:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y = cosecx	−1	−1.15	−2	2	1.15	1

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে, $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ ব্যবধিতে $f(x) = \text{cosecx}$ ফাংশনটি অনন্য।

(ii) $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন $= \mathbb{R} - (-1, 1)$ এবং রেঞ্জ $= [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$



▶ মৌখিক প্রশ্নের উত্তর

1. এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বলিত সমীকরণকে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলে।
উদাহরণ : $\tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

2. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বিভিন্ন উপায়ে সমাধান করা যায় এবং বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় সমাধান করে প্রাপ্ত মূলগুলি দৃশ্যত ভিন্ন আকারের হলেও তারা সমতুল্য। কিছু কিছু সমীকরণকে বর্গ করে সমাধান নির্ণয় করা যায়। এ প্রক্রিয়া কিছুটা ত্রুটিপূর্ণ বলে প্রাপ্ত মূলগুলির কোনো কোনোটি প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এইরূপ মূলকে অবান্তর মূল বলে।

3. $\sin\theta = x$; ($-1 \le x \le 1$ এবং $x \in \mathbb{R}$) এর অর্থ একটি কোণ যার sin এর মান x এর সমান। উল্টাভাবে লেখা যায় $\theta = \sin^{-1}x$। সুতরাং $\sin^{-1}x$ প্রতীকটি একটি কোণ নির্দেশ করে যার sin অনুপাত x এর সমান।
$\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ সমীকরণদ্বয় সমতুল্য। তাই $\sin^{-1}x$ কে $\sin\theta$ এর বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন বলে।

4. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক মানকে এর মুখ্যমান বলা হয়।

5. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

6. $\frac{\pi}{2}$ বা, $90°$

7. $y = x$ রেখার সাথে প্রতিসম।