Real Number (বাস্তব সংখ্যা)

১। **স্বাভাবিক সংখ্যাঃ** $N = \{1,2,3,4,5,6, \dots \dots\}$ (অর্থাৎ 1 থেকে শুরু করে $+\infty$ পর্যন্ত সকল পূর্ণসংখ্যা)

২। **পূর্ণসংখ্যাঃ** $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (অর্থাৎ $-\infty$ থেকে শুরু করে $+\infty$ পর্যন্ত সকল পূর্ণসংখ্যা)

৩। **মূলদ সংখ্যাঃ** $Q = \{x : x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0\}$ যেমন ঃ $\frac{11}{4}, \frac{2}{3}, 9 = \frac{27}{3}$ ইত্যাদি।

৪। **অমূলদ সংখ্যাঃ** $Q' =$ যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না। যেমন ঃ $\sqrt{2}, \sqrt{5}$, π ইত্যাদি।

৫। $\therefore$ **বাস্তব সংখ্যাঃ** $\mathbb{R} = Q \cup Q'$ আবার, $Q \cap Q' = \emptyset$

৬। **উপসেট ঃ** $N \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R}$

৬। **বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ঃ**

(i) **আবদ্ধতা বিধি ঃ** $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ $[b \neq 0]$

(অর্থাৎ কোন একটি বাস্তব সংখ্যার সাথে আরেকটি বাস্তবসংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা)

(ii) **বিনিময় বিধি ঃ** $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a + b = b + a$ এবং $ab = ba$

(iii) **সংযোজন বিধি ঃ** $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে $(a + b) + c = a + (b + c)$ এবং $(ab)c = a\,(bc)$

(iv) **বণ্টন বিধি ঃ** $a, b, c \in \mathbb{R}$ হলে $a(b + c) = ab + ac$ এবং $(a + b)c = ac + bc$

(v) **অভেদক বিধি ঃ** যোগের অভেদক ঃ $a + 0 = 0 + a = a;$ গুণের অভেদক ঃ $a.1 = 1.a = a$

(vi) **বিপরীতক বিধি ঃ** যোগের বিপরীতকঃ $a + (-a) = (-a) + a = 0;$ গুণের বিপরীতক। $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

(vii) **অনন্যতা বিধি ঃ** (দুইটি সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষ যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা)

যেমন ঃ $x = y \dots..(1)$ $\quad a = b \dots.(2)$

$\therefore x + a = y + b$ (যোগের অনন্যতা) এবং $xa = yb$ (গুণের অনন্যতা)

৭। **ব্যবধি সম্পর্কিত ঃ**

৭ **(ক) সসীম ব্যবধি ঃ** (i)$a \leq x \leq b$ হলে $[a, b]$ [অর্থাৎ $\leq$ সমানচিহ্ন থাকলে সঠিক Third bracket হবে]

যেমনঃ $2 \leq x \leq 5 \quad \therefore [2,5]$

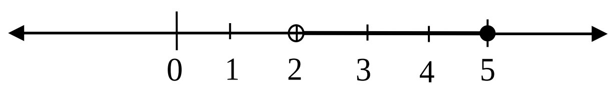
(ii) $a < x < b$ হলে (a, b) বা $]a, b[$ (অর্থাৎ $(=)$ চিহ্ন না থাকলে first bracket বা উল্টো Third bracket হবে) যেমন: $2 < x < 5 \quad \therefore (2,5)$ বা $]2,5[$

(iii) $a \leq x < b$ হলে $[a, b)$ বা $[a, b[$ **ব্যাখ্যা ঃ** এখানে a এর সাথে সমান চিহ্ন আছে এবং b এর সাথে নেই। তাই a এর সাথে Third bracket এবং b এর সাথে first bracket হবে। যেমন ঃ $2 \leq x < 5$ হলে $[2,5)$ বা $[2,5[$

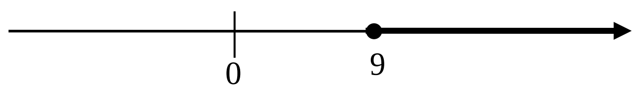
(iv) $a < x \leq b$ হলে $(a, b]$ বা $]a, b]$ যেমন ঃ $2 < x \leq 5$ হলে $(2,5]$ বা $]2,5]$ (চিত্র ১)

৭(খ)। অসীম ব্যবধি ঃ (i) $\mathbf{x \geq a}$ হলে $[a, \infty)$ বা $[a, \infty[$ যেমন: $\mathbf{x \geq 9}$ হলে $[9, \infty)$ বা $[9, \infty[$(চিত্র ২)

(ii) $\mathbf{x < a}$ হলে $(-\infty, a)$ বা $(-\infty, a[$ যেমন: $\mathbf{x < 9}$ হলে $(-\infty, 9)$ বা $(-\infty, 9[$



(চিত্র ১)



(চিত্র ২)

৮। পরমমান ঃ

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

Example – 01: $|3| = 3$ কারণ $|x| = x$ এবং $3 > 0$

Example – 02: $|-3| = -(-3)$ কারণ $|x| = -x$ এবং $-3 < 0$

৮(ক)। পরমমানের ধর্ম ঃ যেকোন $a, b \in \mathbb{R}$ এর জন্য

(i) $|a| \geqslant a \rightarrow$ যেমন : $a = 2$ হলে $|2| = 2 \;\therefore |a| = a$ আবার, $a = -2$ হলে $|-2| = 2\,, |a| = 2, a = -2 \quad \therefore |a| > a$

(ii) $|a|^2 = a^2$ (iii) $|ab| = |a||b|$ (Important) (iv) $|ab| \geq ab$ (Important)

(v) $|x| \leq a$ হলে, $-a \leq x \leq a$ (V.V.I)

(vi) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (এই সূত্রের প্রমাণ H.S. C এর জন্য Important)

Complex Number (জটিল সংখ্যা)

১। i এর (Power) সম্পর্কিত ঃ $i = \sqrt{-1}$

$i^1 = 1, i^2 = -1, i^3 = i^2.i = -i$; $i^4 = i^2.i^2 = 1$; $i^{\pm 4n} = 1$; $i^{4n+x} = i^{4n}.i^x = i^x$

যেমন: $i^{63} = i^{60+3} = i^{60}.i^3 = 1.(-i) = -i$

$a + ib$ আকারের সংখ্যাকে **জটিল সংখ্যা** বলে। এখানে $a, b \in \mathbb{R}$; a অংশকে বাস্তব অংশ এবং ib অংশকে কাল্পনিক অংশ বলা হয়।

Remember ঃ (i) বাস্তব সংখ্যা একমাত্রিক কিন্তু জটিল সংখ্যা দ্বিমাত্রিক (ii) কোন সংখ্যাকে $c \times i^n$ দ্বারা গুণ করলে $n \times 90^0$ পরিমাণ ঘূর্ণন হবে (iii) যে চিত্রের উপর জটিল সংখ্যাকে সূচিত করা হয় তাকে Argand diagram বলে।

২। **জটিল সংখ্যার সমতাঃ** $a + ib = c + id$ হলে $a = c$; $b = d$ অর্থাৎ দুটি সংখ্যার সমতা হলে,

(বাস্তব অংশ) $_{(১ম\ সংখ্যা)}$ = (বাস্তব অংশ) $_{(২য়\ সংখ্যা)}$ এবং (i এর সহগ) $_{(১ম\ সংখ্যা)}$ = (i এর সহগ) $_{(২য়\ সংখ্যা)}$

যেমনঃ $x^2 - 2xyi - y^2 = 2 - 3i$ হলে $x^2 - y^2 = 2$; $-2xy = -3$ বা, $2xy = 3$

৩। মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সম্পর্কিত ঃ $Z = x + iy$ হলে মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$

(i) ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (চিত্র-১)

যেমনঃ $2 + 2i$ এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2}{2}\right| = \frac{\pi}{4}$

(ii) ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (চিত্র-১)

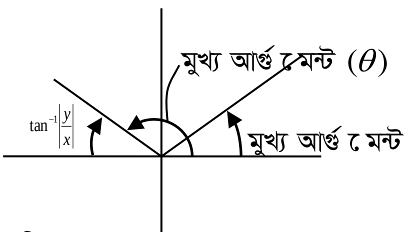
যেমন ঃ $-2 + 2i$ এর আর্গুমেন্ট $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{2}{-2}\right| = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

(iii) ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে, মুখ্য আর্গুমেন্ট $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$, গৌণ $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (চিত্র-২)

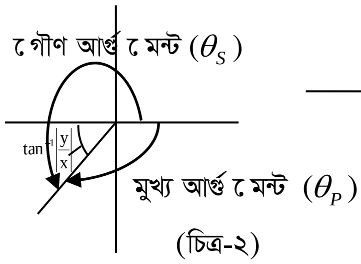
যেমন ঃ $-2 - 2i$ এর আর্গুমেন্ট $\theta_{(মুখ্য)} = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$; $\theta_{(গৌণ)} = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = \frac{5\pi}{4}$ (iv) ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে মুখ্য আর্গুমেন্ট $\theta_{(মুখ্য)} = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$; $\theta_{(গৌণ)} = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (চিত্র-৩)

যেমন ঃ $2 - 2i$ এর $\theta_{(মুখ্য)} = -\tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right| = -\frac{\pi}{4}$; $\theta_{(গৌণ)} = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right| = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

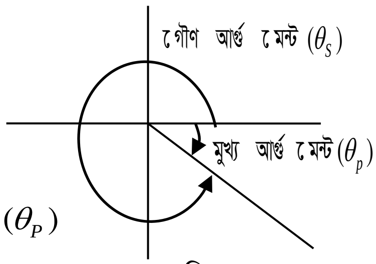
Note : মুখ্য আর্গুমেন্টের জন্য $-\pi < \theta \le \pi$



(চিত্র-১)



(চিত্র-২)



(চিত্র-৩)

৪। **জটিল সংখ্যার $x + iy$ আকার ঃ** $\frac{a+ib}{c+id}$ সংখ্যাকে $x + iy$ আকার নির্ণয় করতে হলে হরের অনুবন্ধী$(c - id)$ দ্বারা গুণ করতে হবে।

যেমনঃ (i) $\frac{2+5i}{3-2i} = \frac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+19i+10i^2}{3^2-4i^2} = \frac{6+19i-10}{9+4}\,[i^2 = -1] = \frac{-4+19i}{13}$

$$= \frac{-4}{13} + \frac{19}{13}i = x + iy \;\therefore x = \frac{-4}{13}, y = \frac{19}{13}$$

অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা ঃ $Z = a + ib$ এর অনুবন্ধী $\bar{Z} = a - ib$;$\sqrt{b}$ অমূলদ হলে, $a + \sqrt{b}$ এর অনুবন্ধী করণী $a - \sqrt{b}$

যেমনঃ $2 + 3i$ এর অনুবন্ধী $2 - 3i$; $2 - 3i$ এর অনুবন্ধী $2 + 3i$; $-2 - 3i$ এর অনুবন্ধী $-2 + 3i$

Remember: **(i)** $\frac{1}{3+2i}$ এর অনুবন্ধী $\frac{1}{3-2i}$ নয় $(\times)$

$\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3-2i}{9-4i^2}=\frac{3-2i}{9+4}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ $\therefore \frac{1}{3+2i}$ বা $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ এর অনুবন্ধী $\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$

(ii) কোন জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে হলে i এর পূর্বে $(+)$ চিহ্ন থাকলে $\sqrt{\text{ঐ সংখ্যা}}=x+iy$

আবার i এর পূর্বে $(-)$ চিহ্ন থাকলে $\sqrt{\text{ঐ সংখ্যা}}=x-iy$ ধরে শুরু করাই শ্রেয়।

যেমন ঃ $\sqrt{-7+24i}=x+iy$ (ধরি) ; $\sqrt{-8-6i}=x-iy$ (ধরি)

(iii) এককের ঘনমূল ঃ $\sqrt[3]{1}=1,\omega,\omega^2$ $\omega^3=1$,$\omega^{\pm 3n}=1; \omega^{3n+x}=\omega^{3n}.\omega^x=\omega^x$

$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ যেমন ঃ $\omega^{16}=\omega^{3\times 5+1}=\omega^1=\omega$

$\omega^3=1 \therefore \omega=\frac{1}{\omega^2}; 1+\omega+\omega^2=0$