

বৃত্ত

সাধারণ আলোচনা ও প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী - সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{যেখানে, } a, b, h, c \text{ হল প্রবক}$$

**CASE- 1 :** যদি  $a = b = h = 0$  হয় তবে,  $2gx + 2fy + c = 0 \rightarrow$  যা কোন সরলরেখার সমীকরণ.

**CASE- 2 :** যদি  $h = 0, a = b \neq 0$  হয় তবে,  $a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\Rightarrow (x^2 + \frac{g}{a})^2 + (y^2 + \frac{f}{a})^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2} = \left\{ \frac{1}{a} \sqrt{g^2 + f^2 - ac} \right\}^2$$

এখানে বৃত্তটির কেন্দ্রঃ  $(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a})$  এবং ব্যাসার্ধ  $= \frac{1}{a} \sqrt{g^2 + f^2 - ac}$ ,  $g^2 + f^2 > ac$ , হলে উক্ত সমীকরণটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে  $g^2 + f^2 = ac$  হলে, উক্ত সমীকরণটি বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

$g^2 + f^2 < ac$  হলে, এমন কোন বিন্দু পাওয়া যাবে না যা উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে। “কাল্পনিক বৃত্তের সমীকরণ” অনেকই ব্যবহার করে কিন্তু এখানে বাস্তব অক্ষ নিয়ে কাজ করা হচ্ছে সুতরাং উক্ত কথাটা উহ্য করা হল। তাহলে আমরা বলতে পারি দ্বিঘাত রাশির সাধারণ সমীকরণ। বৃত্তের সমীকরণে পরিণত হবে যদি

(i)  $xy$  সম্বলিত পদ না থাকে. (ii)  $x^2$  ও  $y^2$  এর সহগ সমান হয়।

$a = b = 1$ ;  $h = 0$ , হলে উক্ত সমীকরণের আকার হয়,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ , যা বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ।

$$\text{যার কেন্দ্রঃ } (-g, -f) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{g^2 + f^2 - c},$$

**বিশেষ ক্ষেত্র :** (i) কেন্দ্র মূল বিন্দুতে হলে  $-g = 0, -f = 0$  হবে। এক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণের আকার হবেঃ

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ যেখানে } r \text{ বৃত্তের ব্যাসার্ধ } r^2 = c$$

(ii) বৃত্তটি  $x$  অক্ষকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তার দৈর্ঘ্য বা বর্তিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় :

$$y=0 \text{ হলে, বৃত্তের সমীকরণটি দাঁড়ায় : } x^2 + 2gx + c = 0 \therefore x = \frac{-2g \pm \sqrt{4g^2 - 4c}}{2} = -g \pm \sqrt{g^2 - c}$$

$$\therefore \text{ যে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাংক দুটি } (x_1, 0) \text{ এবং } (x_2, 0) \text{ হলে, } (x_1, 0) \equiv (-g - \sqrt{g^2 - c}, 0)$$

$$\text{এবং } (x_2, 0) \equiv (-g + \sqrt{g^2 - c}, 0)$$

$$\therefore x \text{ অক্ষের কর্তিত অংশের পরিমাণ, } |\Delta x| = |x_2 - x_1| = |-g + \sqrt{g^2 - c} - (-g - \sqrt{g^2 - c})| = 2\sqrt{g^2 - c}$$

অনুরূপভাবে,  $x = 0$  হলে বৃত্তটি দ্বারা  $y$ - অক্ষের কর্তিত অংশের পরিমাণ পাওয়া যায়।  $|\Delta y| = 2\sqrt{f^2 - c}$

$\therefore x$  অক্ষের কর্তিত অংশের পরিমাণ শূন্য হলে বৃত্তটি শুধু  $x$  অক্ষকে স্পর্শ করবে, এক্ষেত্রে  $g^2 = c$  এবং কেন্দ্রের  $y$  স্থানাংক ব্যাসার্ধ সমান  $|y| = r$  হবে।  $g^2 < c$  হলে কোন বিন্দু পাওয়া যাবে না যা  $x$  অক্ষের উপর অবস্থিত।  $\therefore x$  অক্ষের স্পর্শ করবে বা  $x$  অক্ষ হইতে কিছু অংশ বর্জন করবে তার শর্ত হলো :  $g^2 \geq c$  এবং  $y = 0$ ।

a) তাহলে  $y$  অক্ষ স্পর্শ করলে  $f^2 = c$  হবে এবং কেন্দ্রের স্থানাংক হবে  $=$  ব্যাসার্ধ অর্থাৎ  $|x| = r$ ,  $f^2 < c$  হলে  $y$  অক্ষকে স্পর্শ করবে না এবং  $y$  অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করার শর্ত  $f^2 \geq c$  এবং  $x = 0$

c) উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে  $g^2 = f^2 = c$  হবে এবং  $|g| = |f| = r$  হবে।

(iii)  $(x_1, y_1)$  বিন্দু  $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তের উপর, ভিতরে, বাইরে তার গাণিতিক প্রকাশ :

$(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 = , < or > (\sqrt{g^2 + f^2 - c})$  হলে কেবল পর্যায়ক্রমে উক্ত তিনটি শর্ত সিদ্ধ হবে।

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$  , হলে,  $(x_1, y_1)$  বৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দু হবে,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$  , হলে,  $(x_1, y_1)$  বৃত্তের ভিতরে কোন বিন্দু হবে,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$  , হলে,  $(x_1, y_1)$  বৃত্তের বাইরে কোন বিন্দু হবে,

এক কথায়, বিন্দুটি হতে কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান , ব্যাসার্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্র, ব্যাসার্ধ অপেক্ষা বৃহৎ হলে বিন্দুটি  $(x_1, y_1)$  বৃত্তের উপর, ভিতরে বা বাইরে (পর্যায়ক্রমে) অবস্থিতি কোন বিন্দু হবে।

(iv) একটি বৃত্ত  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  এবং একটি রেখা  $ax^2 + bx + c' = 0$  এর ছেদবিন্দু গামী বৃত্তের সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + k(ax^2 + bx + c') = 0$

(v) দুটি বৃত্তের ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ :  $s_1 + ks_2 = 0$  যেখানে  $s_1$  ও  $s_2$  দুটি বৃত্ত।

(vi) সিদ্ধ প্রক্রিয়ায় ,

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c &= 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c &= 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + 2gx_3 + 2fy_3 + c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad g, f, c = ?$$

অথবা খলিফার সূত্র ব্যবহার করে : দুটো বিন্দুকে ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু ধরে বৃত্তের সমীকরণ  $+ k$  (উক্ত বিন্দু দুটি দিয়ে গমনকারী সরলরেখা)  $= 0$  অর্থাৎ,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + k\{(x - x_1)(y - y_2) - (y - y_1)(x - x_2)\} = 0$$

বৃত্তটি  $(x_3, y_3)$  বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,  $k$  এর মান পাওয়া যাবে।

$(x_1, y_1)$ , ও  $(x_2, y_2)$  বিন্দু দুটি কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু হলে উক্ত বৃত্তের সমীকরণ হবে।

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

(vii) দুটি বৃত্ত একটি অপরটিকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে ; বৃত্ত দুটির কেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব  $=$  ব্যাসার্ধদ্বয়ের পার্থক্য।

(viii) দুটি বৃত্ত একটি অপরটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে; বৃত্ত দুটির কেন্দ্রের দূরত্ব ব্যাসার্ধ দ্বয়ের সমষ্টি ।

(ix) দুটি বৃত্ত পরস্পর সমাপতিত হলে বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের স্থানাংকের একই হবে ।

(x) একটি সরল রেখার উপরস্থ কেন্দ্র বিশিষ্ট এবং  $(x_1, y_1)$  বিন্দু হতে  $r$  দূরত্বে কোন বৃত্তের সমীকরণ :  $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = \pm r$

[ব্যাসের সমীকরণ] অর্থাৎ,  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 \rightarrow$  যা একটি বৃত্তের সমীকরণ ।

(xi) একটা বৃত্তের সাথে সমকেন্দ্রিক অন্য আর একটি বৃত্তের সমীকরণ  $s + k = 0$

(xii)  $y = mx + c$  সরল রেখা  $x^2 + y^2 = r^2$  বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্তঃ

আবার, নিশ্চয়ক,  $D = 0$  ;  $(4mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - r^2) = 0$

$\Rightarrow m^2 c^2 - c^2 - m^2 c^2 + r^2 + r^2 m^2 = 0 \Rightarrow c = \pm r\sqrt{1 + m^2}$  [ইহাই নির্ণেয় শর্ত]

স্পর্শ বিন্দু :  $\left(\frac{-mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$  অথবা,  $\left(\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

$x^2 + m^2 x^2 + 2mc + c^2 = r^2, (1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$

স্পর্শ বিন্দুর ভূজ : [মূলদ্বয় সমান]

$2x = \frac{-2mc}{1+m^2}$  তাহলে কোটি,  $y = \frac{-mc}{1+m^2} + c = \left(\frac{-m^2+1+m^2}{1+m^2}\right)c = \frac{c}{1+m^2}$

স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় :

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তের  $(x_1, y_1)$  বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$x^2$  এর পরিবর্তে  $xx_1$ ,  $y^2$  এর পরিবর্তে  $yy_1$ ,  $x$  এর পরিবর্তে  $\frac{1}{2}(x + x_1)$ ,  $y$  এর পরিবর্তে  $\frac{1}{2}(y + y_1)$

অভিলম্বের সমীকরণ :

$x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তে  $(x_1, y_1)$  বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :  $y_1 x - x_1 y = 0 \Rightarrow \frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$ ,

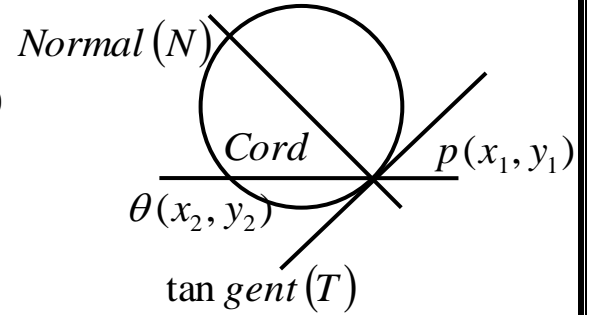
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তে  $(x_1, y_1)$  বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :  $\frac{y-y_1}{y_1+f} = \frac{x-x_1}{x_1+g}$

or,  $(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0$ , সুতরাং অভিলম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু  $(x_1, y_1)$  হতে  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তে অংকিত

স্পর্শকের সমীকরণ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$  তারপর  $r = d$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য :  $(x_1, y_1)$  বিন্দু হতে  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য



$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} \text{ এবং } (x_1, y_1) \text{ বিন্দু হতে } x^2 + y^2 = r^2 \text{ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$$

স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ :  $(x_1, y_1)$  বিন্দু হতে  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তে অংকিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ :  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ :  $S_1 = 0$  ,  $S_2 = 0$  বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ :  $S_1 - S_2 = 0$

বৃত্ত S ও L রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ :  $S + K.L = 0$

বৃত্ত  $S_1$  ও  $S_2$  বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ :  $S_1 + K(S_1 - S_2) = 0$  or,  $S_2 + K(S_1 - S_2) = 0$

**Note :** বৃত্ত দুটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে  $S_1 - S_2 = 0$  রেখাটি বৃত্তদুটির সাধারণ স্পর্শক হবে।

## TYPE- 1

তিন বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় :

**EXAMPLE - 01 :** একটি বৃত্ত  $(-6, 5)$ ,  $(-3, -4)$  এবং  $(2, 1)$  বিন্দু তিনটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots\dots (i)$

শর্তানুসারে, (i) নং বৃত্তটি  $(-6, 5)$  বিন্দুগামী সুতরাং,  $36 + 25 - 12g + 10f + c = 0$

$$\Rightarrow -12g + 10f + c + 61 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং বৃত্তটি  $(-3, -4)$  বিন্দুগামী সুতরাং,  $9 + 16 - 6g - 8f + c = 0$

$$\Rightarrow -6g - 8f + c + 25 = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

(i) নং বৃত্তটি  $(2, 1)$  বিন্দুগামী সুতরাং,  $4 + 1 + 4g + 2f + c = 0 \Rightarrow 4g + 2f + c + 5 = 0 \dots\dots\dots (iv)$

(ii) নং সমীকরণ হতে (iii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$-12g + 10f + c + 61 = 0$$

$$+6g + 8f + c + 25 = 0$$

---


$$-6g + 18f + 36 = 0$$

$$\Rightarrow -g + 3f + 6 = 0 \Rightarrow g = 3f + 6 \dots\dots\dots (v)$$

(iii)নং সমীকরন হইতে (iv) নং সমীকরন বিয়োগ করে পাই,

$$-6g - 8f + c + 25 = 0$$

$$\pm 4g \pm 2f \pm c \pm 5 = 0$$

---


$$-10g - 10f + 20 = 0$$

$$\Rightarrow -g - f + 2 = 0 \Rightarrow g = -f + 2 \dots\dots\dots (vi)$$

$$(v) \text{ ও } (vi) \text{ নং সমীকরন হইতে, } 3f + 6 = -f + 2 \Rightarrow 4f = -4 \Rightarrow f = -1 \Rightarrow -f = 1$$

$$(v) \text{ নং সমীকরনে } f = -1 \text{ বসিয়ে পাই, } g = 3(-1) + 6 = 3 \Rightarrow -g = -3.$$

$$(iv) \text{ নং সমীকরনে } g = 3, f = -1 \text{ বসিয়ে পাই, } 4 \times 3 + 2(-1) + c + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 12 - 2 + c + 5 = 0 \Rightarrow c = -15$$

$$\therefore g = 3, f = -1 \text{ এবং } c = -15 \text{ (i) নং সমীকরনে বসিয়ে পাই,}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র} = (-g, -f) = (-3, 1)$$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 - (-15)} = \sqrt{9 + 1 + 15} = 5$$

$$\therefore \text{বৃত্তটির সমীকরন, } x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \text{ কেন্দ্র} = (-3, 1) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = 5 (\text{Ans.})$$

### EXERCISE :

01. একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং  $x$  ও  $y$  অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে যথাক্রমে 3 ও 5 একক অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। (Ans.  $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$ )

## TYPE- 2

দুই বিন্দুগামী ও কেন্দ্র কোন রেখার উপর এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় .

**EXAMPLE -01:**  $2x - y = 3$  রেখার উপর কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত  $(3, -2)$  ও  $(-2, 0)$  বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুটি  $A(3, -2)$  এবং  $B(-2, 0)$  তাহলে  $AB$  রেখাংশ নির্ণেয় বৃত্তের জ্যা।

আমরা জানি, জ্যা - এর লম্ব সমদ্বিখন্ডক উক্ত বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

জ্যা এর মধ্যবিন্দু  $C$  হলে,  $C = \left(\frac{3-2}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

জ্যা এর ঢাল  $m_1$  হলে,  $m_1 = \frac{-2-0}{3+2} = -\frac{2}{5}$

জ্যা এর উপর লম্ব রেখার ঢাল  $m_2$  হলে,  $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow -\frac{2}{5} \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{2}$

তাহলে জ্যা এর উপর লম্ব সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,  $y + 1 = \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2y + 2 = 5x - \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow 10x - 4y - 9 = 0$$

প্রদত্ত রেখা  $2x - y = 3$  এবং রেখার  $10x - 4y - 9 = 0$  ছেদবিন্দুই হলো নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

$$2x - y = 3 \dots\dots\dots (i) ; 10x - 4y - 9 \dots\dots\dots (ii)$$

(i)নং সমীকরণকে 4 দ্বারা গুণ করে (ii) হইতে বিয়োগ করে পাই,

$$8x - 4y = 12$$

$$\pm 10x \mp 4y = \pm 9$$

$$\hline -2x = 3$$

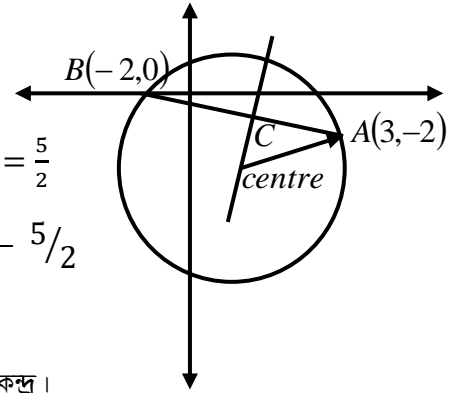
$$x = -\frac{3}{2}$$

(i) নং সমীকরণে  $x = -\frac{3}{2}$  বসিয়ে পাই,  $2\left(-\frac{3}{2}\right) - y = 3 \therefore$  নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক  $\left(-\frac{3}{2}, -6\right) \Rightarrow y = -6$

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \left(-\frac{3}{2}, -6\right) \text{ বিন্দু হতে } (3, -2) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - 3\right)^2 + (-6 + 2)^2}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 16 = \sqrt{\frac{81}{4} + 16} = \sqrt{\frac{81+64}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 6)^2 = \left(\sqrt{\frac{145}{4}}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 12y + 36 = \frac{145}{4}$$



$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0 \text{ (Ans.)}$$

**EXAMPLE -02:**  $y$  -অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং  $(p, q)$  বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র  $y$  অক্ষের উপর অবস্থিত সুতরাং, বৃত্তটির কেন্দ্রের ভূজ শূন্য

ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots\dots (i)$

এখানে, কেন্দ্র  $(-g, -f)$

শর্তানুযায়ী,  $-g = 0, c = 0$  [মূল বিন্দুগামী বলে  $c = 0$ ]

(i) নং বৃত্তটি  $(p, q)$  বিন্দুগামী,  $\therefore p^2 + q^2 + 2 \times 0 \times x + 2f \times q + 0 = 0$

$$\Rightarrow 2fq = -(p^2 + q^2) \Rightarrow 2f = -\frac{p^2 + q^2}{q}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, } x^2 + y^2 - \frac{p^2 + q^2}{q} y = 0 \Rightarrow q(x^2 + y^2) = (p^2 + q^2)y \text{ (Ans.)}$$

**EXERCISE :**

**01.**  $x + 2y - 10 = 0$  রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত  $(3, 5)$  ও  $(6, 4)$  বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। (**Ans.**  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ )

**02.**  $(3, 5)$  ও  $(6, 4)$  বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

- |       |  |  |
|-------|--|--|
| (i)   | যার কেন্দ্র $x + 2y = 10$ রেখার উপর অবস্থিত।     | <b>Ans:</b> $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ |
| (ii)  | যার কেন্দ্র $x$ অক্ষের উপর অবস্থিত। [ $f = 0$ ], | <b>Ans:</b> $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$      |
| (iii) | যার কেন্দ্র $y$ অক্ষের উপর অবস্থিত। [ $g = 0$ ]  | <b>Ans:</b> $x^2 + y^2 + 18y - 124 = 0$    |



### TYPE- 3

দুই বিন্দুগামী এবং কোন অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যাবলী :

**EXAMPLE -01:** (1, 2) ও (3, 2) বিন্দুগামী এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ :  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots \dots \dots$  (i) কেন্দ্র :  $(-g, -f)$

বৃত্তটি (1, 2) ও (3, 2) বিন্দুগামী বলে,

$$2g + 4f + c + 5 = 0$$

$$6g + 4f + c + 13 = 0$$

$$4g + 8 = 0$$

$$2g = -4 = g = -2 \Rightarrow g^2 = 4 = c \text{ [কারণ } x \text{ অক্ষকে স্পর্শ করে]}$$

$$-4 + 4f + 4 + 5 = 0 \Rightarrow 2f = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x - \frac{5}{2}y + 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 8x - 5y + 8 = 0 \rightarrow \text{ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।}$$

**EXAMPLE -02:** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4,5) এবং যা  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$  বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

$$\text{SOLVE : } x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0 \text{ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক } \left(-\frac{4}{2}, -\frac{-6}{2}\right) = (-2, 3)$$

$$\therefore (-2, 3) \text{ বিন্দুগামী এবং } (4, 5) \text{ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, } (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = (-2 - 4)^2 + (3 - 5)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 36 + 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0 (\text{Ans.})$$

**EXAMPLE -03:** (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x - অক্ষকে স্পর্শ করে। এর সমীকরণ ও y - অক্ষ থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় কর।

**SOLVE :** বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 2) এবং তা x - অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\therefore \text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, } r = |2| = 2 ; \therefore \text{বৃত্তটির সমীকরণ, } (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 (\text{Ans.})$$

২য় অংশ : এখানে বৃত্তটির কেন্দ্র,  $(h, k) = (1, 2)$  এবং ব্যাসার্ধ,  $r = 2$

$$\therefore y - \text{ অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{r^2 - h^2} = 2\sqrt{4 - 1} = 2\sqrt{3} \text{ একক } (\text{Ans.})$$

**EXERCISE – 01:** এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$  বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং  $(2, -1)$  বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। (Ans.  $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0$ )

**EXAMPLE -04:** একটি বৃত্তের কেন্দ্র  $(4, -8)$  এবং তা  $y -$  অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** দেওয়া আছে, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র  $(4, -8)$

যেহেতু বৃত্তটি  $y -$  অক্ষকে স্পর্শ করে সুতরাং কেন্দ্রের ভূজ বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান।  $\therefore$  নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ  $= 4$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,  $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 16y + 64 = 16$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$  (Ans.)

**EXERCISE – 02:**  $(-5, 7)$  কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং  $x -$  অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(Ans.  $x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$ )

**EXAMPLE -05:**  $(3, 0)$  ও  $(7, 0)$  বিন্দুগামী এবং  $y -$  অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি  $A(3, 0)$  ও  $B(7, 0)$  খেয়াল কর  $A$  ও  $B$  বিন্দু দুটির কোটি  $0$  সুতরাং বৃত্ত কর্তৃক কতিত জ্যা  $AB$  এর দৈর্ঘ্য  $= 7 - 3 = 4$  একক।

$AB$  এর মধ্যবিন্দু  $C$  হলে,  $AC = BC = 2$

$OC = OA + AC = 3 + 2 = 5 \therefore C$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(5, 0)$

কেন্দ্রের অবস্থান হবে প্রথম চতুর্ভাগে ও চতুর্থ চতুর্ভাগে।

অর্থাৎ, মোট দুটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। যেহেতু, নির্ণেয় বৃত্ত  $y$  অক্ষকে স্পর্শ করে

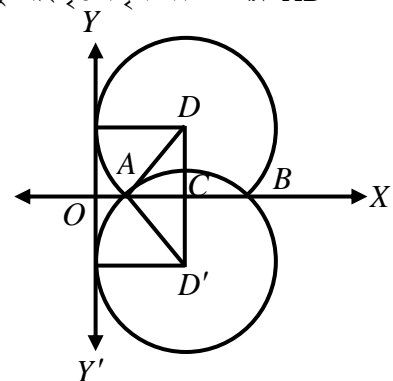
সুতরাং কেন্দ্রের ভূজ হবে ব্যাসার্ধের সমান। কেন্দ্রের ভূজ  $= 5 =$  নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র  $D(5, k)$

তাহলে,  $2^2 + k^2 = 5^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{21}$  [চিত্র হতে  $\triangle ACD$  এ  $\angle C = 90^\circ, AC = 2, AD = 5$ ]

$k(+)$ ve প্রথম চতুর্ভাগের জন্য,  $k(-)$ ve চতুর্থ চতুর্ভাগের জন্য। তাহলে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,  $(x - 5)^2 + (y \pm \sqrt{21})^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$



**EXAMPLE -06:** এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $x$ -অক্ষকে  $(2, 0)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং  $(3, -1)$  বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

**SOLVE :** ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots\dots (i)$

যেহেতু বৃত্তটি  $x$  অক্ষকে  $(2, 0)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে সুতরাং, বৃত্তটি দ্বারা  $x$  অক্ষের কর্তিত অংশের পরিমাণ শূণ্য।

অর্থাৎ,  $2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 - c = 0 \therefore g^2 = c$

(i)নং বৃত্তটি  $(2, 0)$  বিন্দুগামী,  $4 + 0 + 4g + 0 + c = 0$

$\Rightarrow 4g + g^2 + 4 = 0 \Rightarrow g^2 + 4g + 4 = 0 \Rightarrow (g + 2)^2 = 0 \Rightarrow g = -2, -2 \therefore c = g^2 = (-2)^2 = 4$

(i) নং বৃত্তটি  $(3, -1)$  বিন্দুগামী বলে,  $9 + 1 + 6g - 2f + c = 0 \Rightarrow 10 + 6(-2) - 2f + 4 = 0 \Rightarrow f = 1$

$\therefore$  নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2.1y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

**EXERCISE - 03 :** এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $x$ -অক্ষকে  $(2, 0)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং  $(-1, 9)$  বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। (Ans.  $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ )

#### TYPE- 4

ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দেয়া আছে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় :

**EXAMPLE -01:** প্রমাণ কর যে,  $(-2, 3)$  ও  $(3, -4)$  বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ

$(x + 2)(x - 3) + (y - 3)(y + 4) = 0$ । বৃত্তটি দ্বারা  $x$  ও  $y$  অক্ষের বর্তিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :**  $m_{PA} \times m_{PB} = -1$ ,  $m_{PA} \rightarrow PA$  রেখার ঢাল,  $m_{PB} \rightarrow PB$  রেখার ঢাল

$\frac{x+2}{x-3} \times \frac{y-3}{y+4} = -1 = (x - 3)(x + 2) + (y - 3)(y + 4) = 0$  (প্রমাণিত)

$\Rightarrow x^2 - x - 6 + y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x + y - 18 = 0$ ,  $-2g = -1, -2f = 1, c = 18$ ,

$x$  অক্ষ হইতে বৃত্ত কর্তৃক বর্তিত অংশের পরিমাণ  $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-18)} = 2\sqrt{\frac{1}{4} + 18} = \sqrt{73}$

এবং  $y$  অক্ষ হইতে বৃত্ত কর্তৃক বর্তিত অংশের পরিমাণ  $= 2\sqrt{f^2 - c} = \sqrt{73}$  একক

**EXAMPLE -02:** দেখাও যে,  $A(1, 1)$  বিন্দুটি  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$  বৃত্তের উপর অবস্থিত।  $A(1, 1)$  বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

$A(1, 1)$  বিন্দু দ্বারা প্রদত্ত বৃত্তটিকে সিদ্ধ করি,  $1 + 1 + 4 \times 1 + 6 \times 1 - 12 = 0$

$\therefore A(1, 1)$  বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তটির উপরস্থ বিন্দু।

প্রদত্ত বৃত্তের পরিবর্তিত আকার,  $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$

$\therefore$  বৃত্তটির কেন্দ্র  $C(-2, -3)$  এবং ব্যাসার্ধ,  $r = 5$

ধরি,  $A(1, 1)$  বিন্দু ও কেন্দ্র  $C(-2, -3)$  গামী ব্যাসের অপর প্রান্তের বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $B(\alpha, \beta)$

$AB$  ব্যাসটি কেন্দ্র  $C(-2, -3)$  দ্বারা সমদ্বিখন্ডিত হয়।

$$\therefore \frac{\alpha+1}{2} = -2 \Rightarrow \alpha + 1 = -4 \Rightarrow \alpha = -5, \frac{\beta+1}{2} = -3 \Rightarrow \beta + 1 = -6 \Rightarrow \beta = -7$$

$\therefore$  প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক  $(-5, -7)$  (Ans.)

## TYPE- 5

কোন বিন্দুতে একটি অক্ষকে স্পর্শ করে এবং একটি বিন্দু দিয়ে যায়

**EXAMPLE -01:** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $y$  অক্ষকে  $(0, \sqrt{3})$  বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং  $(-1, 0)$  বিন্দুর দিয়ে যায়। এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ :  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

যেহেতু বৃত্তটি  $y$  অক্ষকে স্পর্শ করে  $\therefore f^2 = c$ ,  $(0, \sqrt{3})$  বিন্দু গামী বলে,

$$3 + 2\sqrt{3}f + c = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3}f = -(3 + c) \Rightarrow 4 \times 3f^2 = (3 + c)^2 \Rightarrow 12c = 9 + 6c + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 6c + 9 = 0 \Rightarrow (c - 3)^2 = 0, c = 3 \therefore f = \pm\sqrt{3} \text{ এখানে,}$$

$f = -\sqrt{3}$  হবে কারণ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে কেন্দ্র।

আবার বৃত্তটি  $(-1, 0)$  গামী বলে,  $1 - 2g + c = 0 \Rightarrow 2g = 4$ , কেন্দ্র:  $(-2, \sqrt{3})$ , ব্যাসার্ধ: 2

নির্ণয়ে সমীকরণ :  $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

**EXERCISE – 01 :** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা ও  $x$  অক্ষকে  $(\sqrt{3}, 0)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং  $(0, -1)$  বিন্দু দিয়ে যায়। এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত? Ans:  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 4y + 3 = 0$ ;  $(\sqrt{3}, -2)$ ; 2

**EXERCISE – 02 :**  $x=0$ ,  $y=0$   $x=a$  রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।  $x^2 + y^2 - ax \pm ay + \frac{a^2}{4} = 0$

## TYPE- 6

নির্দিষ্ট দূরত্বে একটি অক্ষকে স্পর্শ করে এবং অপর অক্ষ হইতে নির্দিষ্ট পরিমাণের অংশ কর্তনকারী বৃত্তের সমীকরণ :

**EXAMPLE –01:** এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে  $-4$  একক দূরত্বে  $y$ -অক্ষকে স্পর্শ করে এবং  $x$ -অক্ষ থেকে  $6$  একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

**SOLVE :** নির্ণেয় বৃত্ত  $x$  অক্ষ হইতে  $6$  একক দীর্ঘ জ্যা কর্তন করে।

$\therefore AB = 6$  C, ABএর মধ্যবিন্দু  $\therefore AC = 3$ ;  $CD \parallel OP$  এবং  $OP = CD = 4$

ACD সমকোণী ত্রিভুজ,  $AC^2 + CD^2 = AD^2 \Rightarrow AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$

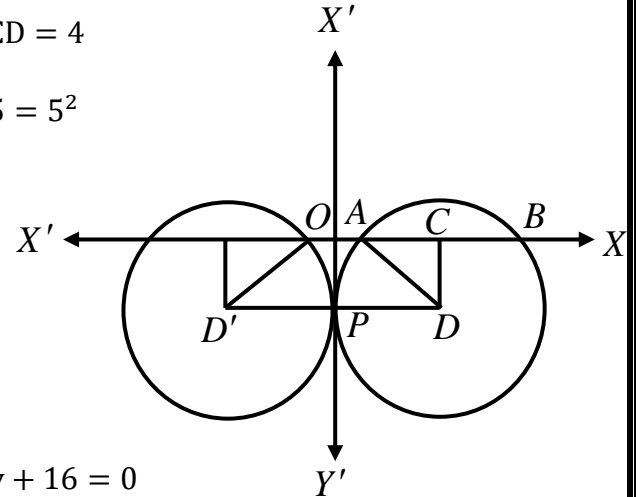
$\Rightarrow AD = 5$  একক  $OC = PD = AD = 5$

$\therefore D$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(5, -4)$

$D'$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(-5, -4)$  [শর্তমতে] এবং ব্যাসার্ধ,  $AD = AD' = 5$  একক

$\therefore$  নির্ণেয় বৃত্ত দুটির সমীকরণ,  $(x \pm 5)^2 + (y + 4)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 \pm 10x + 25 + y^2 + 8y + 16 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$



**Process : (2).**

(i) ধর, বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 29x + 2fy + c = 0$

(ii) কেন্দ্রের কোটি  $= -4 = -f$  বৃত্তের ব্যাসার্ধ  $= |\text{কেন্দ্রের ভূজ}| = |-g|$

(iii)  $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = |-g| \Rightarrow f^2 - c = 0 \Rightarrow f^2 = c \Rightarrow c = 16$

(iv)  $2\sqrt{g^2 - c} = 6 \Rightarrow g^2 - c = 9 \Rightarrow g = \pm 5 \therefore$  বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$

**EXERCISE – 01 :** এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $x$ - অক্ষকে  $(4, 0)$  বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং  $y$ -অক্ষ থেকে  $6$  একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে। (Ans.  $x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$ )

**EXERCISE – 02 :**  $(4, 3)$  কেন্দ্র বিশিষ্ট এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $x^2 + y^2 = 4$  হবে বৃত্তকে বহিঃভাবে স্পর্শ করে। Ans:  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

## TYPE- 7

বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় :

**EXAMPLE -01:**  $4\sqrt{2}$  বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং বিপরীত শীর্ষটি  $y$  অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** ব্যাসার্ধ =  $4\sqrt{2} \cos 45^\circ = 4$ , কেন্দ্র  $\equiv (0, \pm 4)$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ ;  $(x - 0)^2 + (y \pm 4)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \pm 8y = 0$

**EXERCISE - 01 :**  $b$  বাহুবিশিষ্ট  $OABC$  একটি বর্গক্ষেত্রে।  $OA$  ও  $OC$  কে অক্ষ ধরে প্রমাণ কর যে, বর্গটির পারিবৃত্তের সমীকরণ হবে  $x^2 + y^2 - b(x + y) = 0$

## TYPE- 8

ব্যাসার্ধ দেয়া আছে, কেন্দ্র কেনো সরলরেখার উপর ও একটি বিন্দুগামী এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

**EXAMPLE -01:**  $\frac{1}{2}\sqrt{10}$  একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত  $(1, 1)$  বিন্দুগামী এবং এর কেন্দ্র  $y = 3x - 7$  রেখার উপর অবস্থিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** বৃত্তটির সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ,  $(1, 1)$  বিন্দুগামী বলে

$$1 + 1 + 2g + 2f + c = 0 \Rightarrow 2g + 2f + c + 2 = 0 \dots \dots \dots (i),$$

$$\text{কেন্দ্র } (-g, -f), y = 3x - 7 \text{ রেখার উপর অবস্থিত বলে, } -f = 3g - 7 \dots \dots \dots (ii)$$

$$(-g - 1)^2 + (-f - 1)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow g^2 + 2g + 1 + f^2 + 2f + 1 = \frac{1}{4} \times 10$$

$$\Rightarrow g^2 + f^2 + 2g + 2f + 2 = \frac{5}{2} \dots \dots \dots (ii), \text{ সমাধান করে, } 2g = -5, 2f = -1, c = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমীকরণ : } x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

অথবা, ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র  $(h, k)$

$$\text{শর্তানুসারে, } (h, k) \text{ বিন্দুটি } y = 3x - 7 \text{ রেখার উপর অবস্থিত } \therefore k = 3h - 7 \dots \dots \dots (i)$$

$$(h, k) \text{ বিন্দু হতে, } (1, 1) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(h - 1)^2 + (k - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow h^2 - 2h + 1 + k^2 - 2k + 1 = \frac{10}{4} \Rightarrow h^2 - 2h + 1 + (3h - 7)^2 - 2(3h - 7) + 1 = \frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow h^2 - 2h + 1 + 9h^2 - 42h + 49 - 6h + 14 + 1 = \frac{10}{4} \Rightarrow 10h^2 - 50h + 65 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2h^2 - 10h + 13 = \frac{1}{2} \Rightarrow 4h^2 - 20h + 26 = 1 \Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (2h - 5)^2 = 0 \therefore h = \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$$

$$(i) \text{নং সমীকরণে } h = \frac{5}{2} \text{ বসিয়ে পাই, } k = 3 \times \frac{5}{2} - 7 = \frac{1}{2} \therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র} \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$\therefore \text{বৃত্তটির সমীকরণ, } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

**EXERCISE - 01 :** এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূল বিন্দু হতে 2 একক দূরে x অক্ষকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক । **Ans:**  $x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0$

**EXERCISE - 02 :** এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র y অক্ষের উপর এবং যা মূল বিন্দু ও (p, q) বিন্দু দিয়ে যায় । **Ans:**  $q(x^2 + y^2) - y(p^2 + q^2) = 0$

## TYPE- 9

**বৃত্ত ও রেখার ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় :**

**EXAMPLE -01:** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  বৃত্ত এবং

$2x + 3y + 1 = 0$  রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় ।

**SOLVE :** বৃত্তটির সমীকরণ  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0$  বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী

$$\therefore 0 + 0 - 2 \times 0 - 4 \times 0 - 4 + k(2 \times 0 + 3 \times 0 + 1) = 0 \Rightarrow k = 4$$

$$\therefore \text{বৃত্তটির সমীকরণ : } x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 4(2x + 3y + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$$

**EXAMPLE -02:** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6, 0) এবং যা  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  বৃত্ত ও  $x = 3$  রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় ।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 - 4x = 0$

এবং রেখা,  $x = 3, \Rightarrow x - 3 = 0$

প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 - 4x + k(x - 3) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + kx - 3k = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - (4 - k)x - 3k = 0 \dots\dots\dots (i)$$

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র  $\left(\frac{4-k}{2}, 0\right)$

দেওয়া আছে, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র (6, 0)

তাহলে,  $\frac{4-k}{2} = 6 \Rightarrow 4 - k = 12 \Rightarrow k = -8$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,  $x^2 + y^2 - (4 + 8)x - 3(-8) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0$  (Ans.)

**EXERCISE - 01 :** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  বৃত্ত

ও  $2x + 3y + 1 = 0$  রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। (Ans.  $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ )

**EXERCISE - 02 :** একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6, 0) এবং  $x^2 + y^2 = 4x$  বৃত্ত ও  $x = 0$  রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। Ans:  $x^2 + y^2 - 12x + 2y = 0$

### TYPE- 10

স্পর্শক, অভিলম্ব ও সাধারণ জ্যা সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা।

**EXAMPLE -01:** মূলবিন্দু হতে (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** মনেকরি, (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + c = 0 \dots\dots\dots(1)$

মূলবিন্দু হতে(1) বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য  $= \sqrt{c}$

প্রশ্নমতে,  $\sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4$ .

$\therefore$  নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

**EXAMPLE -02:**  $x^2 + y^2 = 81$  বৃত্তের একটি জ্যা (-2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়। ঐ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) ও জ্যা এর মধ্যবিন্দু (-2, 3) এর সংযোগ সরলরেখা উক্ত জ্যা এর উপর লম্ব।

$\therefore$  (-2, 3) বিন্দুগামী এবং (0, 0) ও (-2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 3 = -\frac{-2}{3}(x + 2) \Rightarrow 3y - 9 = 2x + 4 \therefore 2x - 3y + 13 = 0$ ; এটিই নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ।

বিকল্পপদ্ধতি : প্রদত্ত বৃত্তের যে জ্যাটি (-2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ,  $x \cdot (-2) + y \cdot 3 = (-2)^2 + 3^2 \Rightarrow$

$-2x + 3y = 4 + 9$  [  $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$  সূত্রের সাহায্যে ]

$\therefore$  নির্ণেয় জ্যা এর

সমীকরণ,  $2x - 3y + 13 = 0$



**EXERCISE – 01:**  $x^2 + y^2 = 144$  বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু  $(-2, 3)$  বিন্দুতে অবস্থিত।

নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,  $2x - 3y + 13 = 0$

**EXAMPLE -03:**  $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$  ও  $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$  বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,  $(x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1) - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2)$

$$= 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$  বৃত্ত ও (1) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 + k(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(k + 1)x + 3y + 1 + k = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(1) নং রেখা (2) নং বৃত্তের একটি ব্যাস হলে, বৃত্তটির কেন্দ্র  $(-k - 1, -\frac{3}{2})$  রেখাটির উপর অবস্থিত।

$$\therefore 2(-k - 1) + 1 = 0 \Rightarrow -2k - 2 + 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, } x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right)x + 3y + 1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

**EXAMPLE -04:**  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$  বৃত্তটি  $x$ - অক্ষকে স্পর্শ করে।  $c$  এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0 \dots\dots\dots (i)$

যে কোন বৃত্তের প্রমিত সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots\dots (ii)$

$$(i) \text{ কে } (ii) \text{ নং বৃত্তের তুলনা করে পাই, } 2g = -4 \Rightarrow g = -2$$

যেহেতু (i) নং বৃত্ত  $x$  অক্ষকে স্পর্শ করে সুতরাং বৃত্তটি কর্তৃক  $x$  অক্ষের কর্তিত অংশের পরিমাণ শূণ্য

$$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 - c = 0 \Rightarrow c = g^2 \Rightarrow c = (-2)^2 \therefore c = 4$$

$$\text{স্পর্শবিন্দু, } (-g, 0) = (2, 0)$$

**EXAMPLE -05:** দেখাও যে,  $lx + my = 1$  রেখাটি  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি  $a^2m^2 + 2al = 1$  হয়।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$

কেন্দ্র  $(a, 0)$  ও ব্যাসার্ধ  $= a$

প্রদত্ত রেখা,  $lx + my = 1$  প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\text{অর্থাৎ, } \left| \frac{al + m \times 0 - 1}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right| = a \Rightarrow (al - 1)^2 = (\pm a \sqrt{l^2 + m^2})^2 \Rightarrow a^2l^2 - 2al + 1 = a^2l^2 + a^2m^2$$

$$\Rightarrow a^2m^2 + 2al = 1 \therefore \text{নির্ণেয় শর্ত, } a^2m^2 + 2al = 1 \text{ (Showed)}$$

**EXAMPLE -06:**  $px + qy = 1$  রেখাটি  $x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে,  $(p, q)$  বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 = a^2$  এর কেন্দ্র  $(0, 0)$  ও ব্যাসার্ধ  $= a$

প্রদত্ত রেখা  $px + qy = 1$  উক্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র হতে রেখাটির উপর লম্ব দূরত্ব উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left| \frac{p \times 0 + q \times 0 - 1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right| = a \Rightarrow -1 = \pm a \sqrt{p^2 + q^2} \Rightarrow (-1)^2 = (\pm a \sqrt{p^2 + q^2})^2 \Rightarrow a^2(p^2 + q^2) = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore p^2 + q^2 = r^2 \text{ [যেখানে, } r^2 = \frac{1}{a^2} \text{ এবং } r \text{ ও } a \text{ ধনাত্মক]}$$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র  $(0, 0)$  এবং ব্যাসার্ধ  $r$ ।

সুতরাং,  $(p, q)$  বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপরস্থ চলমান কোন বিন্দু। (দেখানো হল)

**EXAMPLE -07:**  $3x + by - 1 = 0$  রেখাটি  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$  বৃত্তকে স্পর্শ করে।  $b$  এর মান নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$  এর সাথে

$$\text{বৃত্তের প্রমিত সমীকরণ, } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ তুলনা করে } 2g = -8 \Rightarrow g = -4 \Rightarrow -g = 4$$

$$\text{এবং, } 2f = -2 \Rightarrow f = -1 \Rightarrow -f = 1 \therefore \text{বৃত্তটির কেন্দ্র } (4, 1); c = 4$$

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 - 4} = \sqrt{16 + 1 - 4} = \sqrt{13}$$

প্রদত্ত রেখা  $3x + by - 1 = 0$  প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে, বৃত্তটির কেন্দ্র হতে উক্ত রেখার লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left| \frac{3 \times 4 + b \times 1 - 1}{\sqrt{3^2 + b^2}} \right| = \sqrt{13} \Rightarrow 11 + b = \pm \sqrt{13} \sqrt{3^2 + b^2} \Rightarrow (11 + b)^2 = (\pm \sqrt{13} \sqrt{9 + b^2})^2$$

$$\Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 13(9 + b^2) \Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 117 + 13b^2$$

$$\Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0 \Rightarrow 6b^2 - 11b - 2 = 0 \Rightarrow 6b^2 - 12b + b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6b(b - 2) + 1(b - 2) = 0 \Rightarrow (b - 2)(6b + 1) = 0$$

$$\text{হয়, } b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ অথবা, } 6b + 1 = 0 \Rightarrow 6b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore b \text{ এর নির্ণেয় মানগুলো : } 2 \text{ বা } -\frac{1}{6} \text{ (Ans.)}$$

**EXAMPLE -08:**  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক  $3x - 4y - 1 = 0$  রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত, 3(b).  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  এর সাথে বৃত্তের প্রমিতসমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ এর তুলনা করে পাই, } 2g = -2 \Rightarrow g = -1 \therefore -g = 1, c = -4$$

$$\text{এবং, } 2f = -4 \Rightarrow f = -2 \therefore -f = 2$$

$$\therefore \text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1^2 + 2^2 - (-4)} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

$$\text{প্রদত্ত রেখা } 3x - 4y + 5 = 0 \text{ এর সমান্তরালে যে কোন রেখার সমীকরণ } 3x - 4y + k = 0 \dots\dots\dots (i)$$

(i)নং রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে বৃত্তের কেন্দ্র (1, 2) হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে

$$\therefore \left| \frac{3 \times 1 - 4 \times 2 + k}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = 3 \Rightarrow \left| \frac{k-5}{5} \right| = 3 \Rightarrow \frac{k-5}{5} = \pm 3$$

$$(+)ve \text{ এর জন্য } k - 5 = 15 \Rightarrow k = 20; (+)ve \text{ এর জন্য } k - 5 = -15 \Rightarrow k = -10$$

$$\therefore (i) \text{নং সমীকরণে } k = 20 \text{ বসিয়ে পাই, } 3x - 4y + 20 = 0$$

$$\text{আবার, (i)নং সমীকরণে } k = -10 \text{ বসিয়ে পাই, } 3x - 4y - 10 = 0$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় স্পর্শক } 3x - 4y + 20 = 0 \text{ এবং } 3x - 4y - 10 = 0 \text{ (Ans.)}$$

**EXAMPLE -09:**  $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$  বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্ন বিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$  এর সাথে বৃত্তের প্রমিতসমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ এর তুলনা করে পাই, } 2g = 4 \Rightarrow g = 2 \Rightarrow -g = -2; 2f = -8 \Rightarrow -f = 4; c = 2$$

$$\text{সুতরাং, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র } (-2, 4)$$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - 2} = \sqrt{4 + 16 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{নির্ণেয় রেখাটির ছেদ আকার, } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

যেহেতু, রেখাটি  $x$  ও  $y$  অক্ষ হতে একই চিহ্ন বিশিষ্ট সমমানের অংশ কর্তন করে।

সুতরাং,  $a = b = k$  এবং  $-a = -b = -k$

$\therefore$  রেখাটির পরিবর্তিত আকার,  $\frac{x}{k} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow x + y = k \Rightarrow x + y - k = 0$ . ..... (i)

(i) নং রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে বৃত্তটির কেন্দ্র  $(-2, 4)$  হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\Rightarrow \left| \frac{-2+4-k}{1^2+1^2} \right| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2-k}{\sqrt{2}} = \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow 2-k = \pm 3 \times 2 = \pm 6$$

(+)ve নিয়ে,  $k = -4$ , (-)ve নিয়ে,  $k = 8$

(i)সমীকরণে  $k = -4$  বসিয়ে পাই,  $x + y - (-4) = 0 \Rightarrow x + y + 4 = 0$

আবার, (i)নংসমীকরণে  $k = 8$  বসিয়ে পাই,  $x + y - 8 = 0$

$\therefore$  নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ,  $x + y + 4 = 0$ ,  $x + y - 8 = 0$

বি.দ্র :  $-k$  এর জন্য আরো দুটি স্পর্শক পাওয়া যাবে তা হলো :  $x + y - 4 = 0$ ,  $x + y + 8 = 0$

**EXAMPLE -10 :**  $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$  বৃত্তের ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 = b(5x - 12y) \Rightarrow x^2 + y^2 = 5bx - 12by \Rightarrow x^2 - 5bx + y^2 + 12by = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5b}{2} + \left(\frac{5b}{2}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 6b + (6b)^2 - \left(\frac{5b}{2}\right)^2 - (6b)^2 = 0$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5b}{2}\right)^2 + (y + 6b)^2 = \frac{25b^2}{4} - 36b^2 \Rightarrow \left(x - \frac{5b}{2}\right)^2 + (y + 6b)^2 = \left(\frac{13b}{2}\right)^2$$

$\therefore$  বৃত্তটির কেন্দ্র  $\left(\frac{5b}{2}, -6b\right)$  এবং ব্যাসার্ধ  $\frac{13b}{2}$

অথবা, বৃত্তের প্রমিত সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  এর সাথে তুলনা করে,

$$2g = -5b \Rightarrow -g = \frac{5b}{2} \text{ এবং, } 2f = 12b \Rightarrow -f = -6b \text{ এক্ষেত্রে কেন্দ্র } \left(\frac{5b}{2}, -6b\right)$$

প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাস মূলবিন্দুগামী ও উক্ত বৃত্তের কেন্দ্রগামী

$$\therefore \text{ব্যাসের সমীকরণ, } \frac{y-0}{0+6b} = \frac{x-0}{0-\frac{5b}{2}} \Rightarrow \frac{y}{6b} = \frac{x}{-\frac{5b}{2}} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{x}{-5} \Rightarrow -5y = 12x \Rightarrow 12x + 5y = 0$$

স্পর্শক ব্যাসের উপর লম্ব বলে স্পর্শকটির সমীকরণ,  $5x - 12y + k = 0$  যা মূলবিন্দু  $(0, 0)$  দিয়ে যায়,

সুতরাং,  $5 \times 0 - 12 \times 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \therefore$  নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ :  $5x - 12y = 0$

Observations:  $x^2 + y^2 + k(5x - 12y) = 0$  যা  $x^2 + y^2 = 0$  বিন্দুবৃত্ত ও  $5x - 12y = 0$  রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।  $k = -b$

সরাসরি বলা যায়  $5x - 12y = 0$  যা মূলবিন্দুগামী রেখা বলে বৃত্তটির স্পর্শক।

**EXAMPLE -11 :** দেখাও যে  $x + 2y = 17$  রেখাটি  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$  বৃত্তের একটি স্পর্শক। এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$  এর সাথে বৃত্তের প্রমিত সমীকরণ,  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  এর তুলনা করে পাই,  $2g = -2 \Rightarrow g = -1 \Rightarrow -g = 1; 2f = -6 \Rightarrow f = -3 \Rightarrow -f = 3$

এবং  $c = -10 \therefore$  বৃত্তটির কেন্দ্র  $(1, 3)$  ও ব্যাসার্ধ  $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1^2 + 3^2 - (-10)} = \sqrt{1 + 9 + 10} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

প্রদত্ত রেখা,  $x + 2y = 17$  or,  $x + 2y - 17 = 0 \dots\dots\dots (i)$

(i)নং রেখাটি উক্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র হতে (i) নং রেখাটি লম্ব দূরত্ব উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\therefore \left| \frac{1+2 \times 3-17}{\sqrt{1+2^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = \text{উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ}$$

$\therefore x + 2y = 17$  রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক (দেখানো হল)

দ্বিতীয় অংশ : প্রদত্ত রেখা,  $x + 2y = 17$  এর উপর লম্ব হয় এরূপ রেখার সমীকরণ,  $2x - y + k = 0$  যা কেন্দ্র  $(1, 3)$  গামী সুতরাং  $2 \times 1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 1$

স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এবং কেন্দ্র  $(1, 3)$  গামী ব্যাসের সমীকরণ,  $2x - y + 1 = 0$

$$\text{প্রদত্ত রেখা, } x + 2y = 17 \Rightarrow y = \frac{17-x}{2}$$

$$\text{প্রদত্ত বৃত্ত, } x^2 + \left(\frac{17-x}{2}\right)^2 - 2x - 6\left(\frac{17-x}{2}\right) - 10 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$\therefore x = 3, 3$  (সমাপতিত বিন্দু সুতরাং একটাই সমীকরণ পাওয়া যাবে)

$$y = \frac{17-x}{2} = \frac{17-3}{2} = 7 \text{ স্পর্শবিন্দু } = (3, 7) \text{ স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এবং কেন্দ্র } (1, 3) \text{ গামী ব্যাসের সমীকরণ,}$$

$$y - 7 = \frac{7-3}{3-1}(x-3) \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$$

**EXAMPLE -12 :**  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$  বৃত্তের  $(-2, 4)$  বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত,  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$

$(-2, 4)$  বিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণ,  $y - 4 = m(x + 2) \Rightarrow y - 4 = mx + 2m$

$$\Rightarrow mx - y + 2m + 4 = 0 \dots \dots \dots (i)$$

প্রদত্ত বৃত্তের সাথে বৃত্তের প্রমিত সমীকরণ  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$2g = 4 \Rightarrow g = 2 \Rightarrow -9 = -2; 2f = -10 \Rightarrow f = -5 \Rightarrow -f = 5; c = 28$$

$$\therefore \text{বৃত্তের কেন্দ্র } (-2, 5) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 - 28} = 1$$

(i)নং রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে বৃত্তটির কেন্দ্র  $(-2, 5)$  হতে উক্ত রেখাটির লম্ব দূরত্ব প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\text{অর্থাৎ, } \left| \frac{m \times (-2) - 5 + 2m + 4}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{-2m - 5 + 2m + 4}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{-1}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 = 1 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$\therefore (i) \text{নং সমীকরণে, } m = 0 \text{ বসিয়ে পাই, } -y + 4 = 0 \Rightarrow y - 4 = 0$$

আমরা জানি, স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাই অভিলম্ব তাহলে, অভিলম্বের সমীকরণ,  $x = k$  যা  $(-2, 4)$  বিন্দুগামী

$$\therefore -2 = k \therefore \text{নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ, } x = -2 \text{ বা, } x + 2 = 0$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে } y - 4 = 0 \text{ এবং } x + 2 = 0$$

**EXERCISE – 01:**  $(1, -3)$  কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত  $2x - y - 4 = 0$  রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans:  $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$

**EXERCISE – 02:**  $x^2 + y^2 - 8x - 10y = 8$  বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক  $5x - 12y - 9 = 0$  রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans.  $5x - 12y + 131 = 0$  এবং  $5x - 12y - 51 = 0$

**EXERCISE – 03:**  $ax + 2y - 1 = 0$  রেখাটি  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$  বৃত্তকে স্পর্শ করলে  $a$  এর মান নির্ণয় কর। Ans. 3 বা  $-17/3$

**EXERCISE – 04:**  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক  $3x - 4y + 5 = 0$  রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। (Ans.  $4x + 3y - 25 = 0, 4x + 3y + 5 = 0$ )

**EXERCISE – 05:**  $px + qy = 1$  রেখাটি  $x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে,  $(p, q)$  বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

**EXERCISE – 06:**  $x^2 + y^2 = 16$  বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক  $x$ - অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে  $30^\circ$  কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। (Ans.  $\sqrt{3}y = x \pm 8$ )

**EXERCISE – 07:**  $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$  বৃত্তের উপর দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা  $y = x$  রেখার সমান্তরাল হবে।

**EXAMPLE -13 :**  $y = 2x$  রেখাটি  $x^2 + y^2 = 10x$  বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত  $x^2 + y^2 = 10x$  এ  $y = 2x$  বসিয়ে পাই,  $\Rightarrow x^2 + (2x)^2 = 10x \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x(x - 2) = 0$

হয়,  $5x = 0 \Rightarrow x = 0$  অথবা,  $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 0$  হলে  $y = 0$ ;  $x = 2$  হলে  $y = 2 \times 2 = 4 [\therefore y = 2x]$

$\therefore$  জ্যা বৃত্তকে  $(0, 0)$  ও  $(2, 4)$  বিন্দুতে ছেদ করে, এখন  $(0, 0)$  ও  $(2, 4)$  কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হলে ঐ বৃত্তের সমীকরণ :  
 $(x - 0)(x - 2) + (y - 0)(y - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$   
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$  (Ans.)

**EXAMPLE -14 :**  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$  ও  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$  বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্ত দুটি,  $S_1: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ ;  $S_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$

$S_1$  বৃত্তের কেন্দ্র  $(-2, 1)$  ও ব্যাসার্ধ  $= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 3} = \sqrt{2}$

$S_2$  বৃত্তের কেন্দ্র  $(2, -3)$  ও ব্যাসার্ধ  $= \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-21)} = \sqrt{4 + 9 + 21} = \sqrt{34}$

$S_1$  ও  $S_2$  বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,  $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 - x^2 - y^2 + 4x - 6y + 21 = 0 \Rightarrow 8x - 8y + 24 = 0$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0$

$S_2$  বৃত্তের কেন্দ্র  $(2, -3)$  হতে জ্যা এর লম্ব দূরত্ব,  $d = \frac{2+3+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

$AC = \sqrt{34}$ ,  $AB = \frac{8}{\sqrt{2}}$ ;  $BC^2 = AC^2 - AB^2 = (\sqrt{34})^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = 34 - \frac{64}{2} = \frac{68-64}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore BC = \sqrt{2}$  জ্যা CD এর দৈর্ঘ্য  $= 2 \times BC = 2\sqrt{2}$  একক

**EXAMPLE -15 :**  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$  এবং  $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$  বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ :  $S_1 - S_2 = 0$ ,  $-2x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2x + 4$

$x^2 + (2x + 4)^2 + 6x + 2(2x + 4) + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x^2 + 16x + 16 + 6x + 4x + 8 + 6 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 26x + 30 = 0$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \times 30}}{2 \times 5} = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 600}}{10} = \frac{-26 \pm \sqrt{76}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{19}}{5}$$

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{19}}{5}, x_2 = \frac{-13 - \sqrt{19}}{5}, y_1 = \frac{-26 + 2\sqrt{19}}{5} + 4 = \frac{-6 + 2\sqrt{19}}{5}, y_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{19}}{5}$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ : } (x - x_1)(x + x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 + y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{26}{5}x + \frac{(-13 + \sqrt{19})(-13 - \sqrt{19})}{25} + y^2 + \frac{12}{5}y + \frac{(6 + 2\sqrt{19})(-6 - 2\sqrt{19})}{25} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{26}{5}x + \frac{169 - 19}{25} + y^2 + \frac{12}{5}y + \frac{36 - 76}{25} = 0$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$$

**EXAMPLE -16 :** দেখাও যে,  $y - 3x = 10$  রেখাটি  $x^2 + y^2 = 10$  বৃত্তটিকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

**SOLVE :**  $y = 10 + 3x$  প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসাই ,

$$x^2 + (3x + 10)^2 = 10 \Rightarrow 10x^2 + 60x + 90 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$$

$x = -3, -3, y = 1, 1$  ,  $x$  এর মানদ্বয় একই সুতরাং  $y = 3x + 10$  রেখা  $x^2 + y^2 = 10$  বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাংক  $(-3, 1)$

**EXERCISE - 01:**  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  ও  $(x - q)^2 + (y - p)^2 = r^2$  বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।  $\sqrt{4r^2 - 2(p - q)^2}$  (Ans.)

**EXERCISE - 02 :**  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$  ও  $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$  বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।  $x - 2y + 7 = 0$  (Ans.)

**EXAMPLE -17 :** মূলবিন্দু থেকে  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$  বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :** প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$  ..... (i)

বৃত্তটি আকব যোভাবে ?

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ এর সাথে প্রদত্ত বৃত্ত মিলিয়ে, } 2g = -6 \Rightarrow g = -3 \Rightarrow -g = 3,$$

$$2f = -4 \Rightarrow f = -2 \Rightarrow -f = 2 \text{ এবং } c = 9$$

$$x \text{ অক্ষকে স্পর্শ করে কারণ } g^2 = 9 = c, y \text{ অক্ষ হতে কোন অংশ কর্তন করে না কারণ } f^2 = (2)^2 = 4 < c$$



ব্যাসার্ধ = 2 [ কারণ  $g^2 - c = 0$  ]

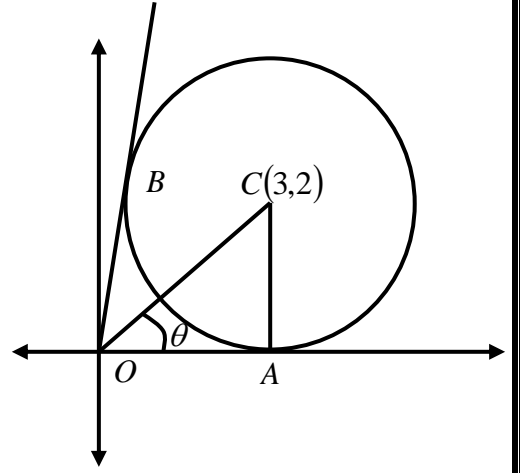
ধরি,  $\angle AOC = \theta$  তাহলে,  $\tan \theta = \frac{2}{3}$ ,  $\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3}$  OC

রেখা  $\angle AOB$  এর সমদ্বিখন্ডক কারণ OA ও OB রেখা দুটি স্পর্শক।

OAC ও OBC ত্রিভুজে

$AC = BC =$  বৃত্তের ব্যাসার্ধ;  $\angle AOC = \angle BOC$  এবং OC সাধারণ বহু

$\therefore$  OAC ও OBC ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।



$\therefore \angle AOB = 2\theta = 2 \tan^{-1} \frac{2}{3} = \tan^{-1} \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - (\frac{2}{3})^2} = \tan^{-1} \frac{4/3}{1 - 4/9} = \tan^{-1} \frac{4/3}{\frac{9-4}{9}} = \tan^{-1} \frac{12}{5}$

$\therefore$  নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণ  $\tan^{-1} \left( \frac{12}{5} \right)$

## TYPE- 11

উপরস্থ বিন্দুতে ও বহিঃস্থ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় :

উপরস্থ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় :

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তের  $(x_1, y_1)$  বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$x^2$  এর পরিবর্তে  $xx_1$ ,  $y^2$  এর পরিবর্তে  $yy_1$ ,  $x$  এর পরিবর্তে  $\frac{1}{2}(x + x_1)$ ,  $y$  এর পরিবর্তে  $\frac{1}{2}(y + y_1)$

**EXAMPLE -01 :**  $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$  বৃত্তের  $(4, -11)$  বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

**SOLVE :**  $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$  বৃত্তের  $(4, -11)$  বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$x \cdot (4) + y(-11) - 3 \cdot \frac{x+4}{2} + 10 \cdot \frac{y-11}{2} - 15 = 0 \Rightarrow 5x - 12y - 152 = 0$

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু  $(x_1, y_1)$  হতে  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তে অংকিত

স্পর্শকের সমীকরণ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$  তারপর  $r = d$

**EXAMPLE -02 :**  $(-5, 4)$  বহিঃস্থ বিন্দুতে থেকে  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$  বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য এবং স্পর্শ বিন্দু দুটি নির্ণয় কর।

**SOLVE :**  $m$  ঢাল বিশিষ্ট  $(-5, 4)$  বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$y - 4 = m(x + 5) \Rightarrow y - 4 = mx + 5m \Rightarrow mx - y + 5m + 4 = 0 \dots\dots\dots(i)$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র : (1, 2) ব্যাসার্ধ =  $\sqrt{1^2 + 2^2 - 1} = 2$

(1, 2) বিন্দু হতে (i) নং রেখার দূরত্ব = ব্যাসার্ধ,  $\therefore \left| \frac{m-2+5m+4}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 2$

$$\Rightarrow 6m + 2 = 2\sqrt{1+m^2} \Rightarrow 3m + 1 = \sqrt{1+m^2} \Rightarrow 9m^2 + 6m + 1 = 1 + m^2 \text{ [ বর্গ করে ]}$$

$$\Rightarrow 8m^2 + 6m = 0 \Rightarrow m = 0, -\frac{3}{4}$$

নির্ণেয় স্পর্শক দুটিঃ  $y = 4$  এবং  $y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow 3x + 4y - 1 = 0$

অভিলম্ব কেন্দ্রগামী এবং স্পর্শকের উপর লম্ব সূত্রাং অভিলম্বের সমীকরণ :  $y = 4$  এর জন্য  $x = k$

এবং  $3x + 4y - 1 = 0$  এর জন্য  $4x - 3y + k = 0$  যারা কেন্দ্র (1, 2) গামী,

অভিলম্বের সমীকরণ :  $x = 1$  এবং  $4x - 3y + 2 = 0$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য =  $\sqrt{(-5)^2 + 4^2 - 2(-5) - 4 \cdot 4 + 1} = 6 \text{ unit}$

$y = 4$  রেখার ঢাল =  $\tan \theta = 0 \therefore \sin \theta = 0, \cos \theta = 1, \frac{x+5}{\cos \theta} = \frac{y-4}{\sin \theta} = 6$  হতে পাই,  $x = 1, y = 4$

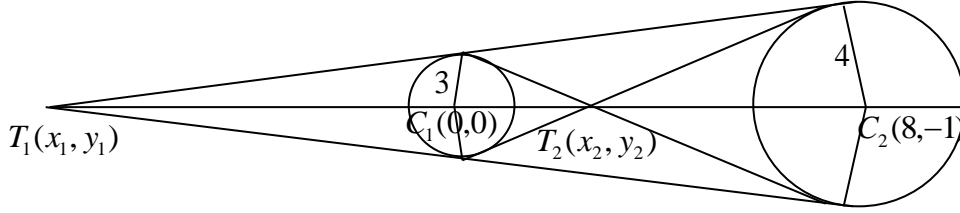
$3x + 4y - 1 = 0$  রেখার ঢাল =  $\tan \theta = \frac{-3}{4}, \therefore \sin \theta = \frac{-3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$  or,  $\sin \theta = \frac{+3}{5}, \cos \theta = \frac{-4}{5}$

$\frac{x+5}{\cos \theta} = \frac{y-4}{\sin \theta} = 6$  হতে পাই,  $x = \frac{-1}{5}, \frac{-49}{5}; y = \frac{2}{5}, \frac{38}{5} \therefore$  নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দু দুটি : (1, 4) এবং  $(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5})$

**EXAMPLE -03 :**  $x^2 + y^2 = 3^2$  ও  $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$  বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর।

সমাধান :  $x^2 + y^2 = 3^2$  বৃত্তের কেন্দ্র  $(0,0)$  ও ব্যাসার্ধ  $=3$

$x^2 + y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$  বৃত্তের কেন্দ্র  $(8,-1)$  ও ব্যাসার্ধ  $=\sqrt{8^2 + (-1)^2 - 49} = 4$



$T_1, T_1C_1C_2$  রেখাকে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

$$\frac{T_1C_2}{T_1C_1} = \frac{-4}{3}, x_1 = \frac{4 \times 0 - 3 \times 8}{4 - 3} = -24, y_1 = \frac{4 \times 0 - 3 \times (-1)}{4 - 3} = 3$$

$$\therefore T_1(x_1, y_1) = (-24, 3) \therefore T_1 \text{ স্পর্শকের সমীকরন : } y - 3 = m(x + 24) \Rightarrow mx - y + 3 + 24m$$

$$C_1(0,0) \text{ বিন্দু হতে } T_1 \text{ স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান।} \therefore \frac{m \times 0 - 0 + 3 + 24m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow m = 0, \frac{-16}{63}$$

$$\therefore T_1 \text{ স্পর্শকের সমীকরন : } y = 3, 16x + 63y + 195 = 0$$

$$T_2, T_1C_1C_2 \text{ রেখাকে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে।} \frac{T_2C_2}{T_2C_1} = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{4 \times 0 + 3 \times 8}{4 + 3} = \frac{24}{7}, y_1 = \frac{4 \times 0 + 3 \times (-1)}{4 + 3} = \frac{-3}{7}$$

$$\therefore T_2(x_2, y_2) = \left(\frac{24}{7}, \frac{-3}{7}\right) \therefore T_2 \text{ স্পর্শকের সমীকরন : } y - \frac{-3}{7} = m \left(x - \frac{24}{7}\right)$$

$$\Rightarrow 7mx - 7y - (3 + 24m) = 0$$

$$C_1(0,0) \text{ বিন্দু হতে } T_2 \text{ স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান।} \therefore \frac{7m \times 0 - 7 \times 0 - 3 - 24m}{\sqrt{(7m)^2 + (-7)^2}} = 3 \Rightarrow m = \frac{4}{3}, \frac{-12}{5}$$

$$T_2 \text{ স্পর্শকের সমীকরন : } 84x + 35y - 273 = 0, 4x - 3y - 15 = 0$$

নিজে চেষ্টা কর : (i)  $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$  বৃত্তের ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এই ব্যাসের সমীকরন ও মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর। Ans :  $12x + 5y = 0, 5x - 12y = 0$

(ii)  $x^2 + y^2 = 16$  বৃত্তের স্পর্শক অক্ষের সাথে কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরন নির্ণয় কর। Ans :  $\sqrt{3}y = x \pm 8$

(iii)  $(b,0)$  বিন্দু হতে  $x^2 + y^2 = a^2$  স্পর্শকের উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারণপথের সমীকরন নির্ণয় কর।

$$\text{Ans : } x^2 + y^2 - bx = 0$$

(iv)  $x^2 + y^2 = 13$  বৃত্তের যে বিন্দুতে কোটি 2 সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans :  $3x + 2y = 13, 2y - 3x = 13$

(v)  $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$  বৃত্তের স্পর্শক অক্ষদ্বয় হতে সমমানের একই চিহ্নবিশিষ্ট অংশ কর্তন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans :  $x + y = 8, x + y = -4$

(vi) মূলবিন্দু হতে  $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$  বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans :  $x = 2y, x = -2y$

(vii) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু  $2x - 3y + 21 = 0, 3x - 2y - 6 = 0$  এবং  $2x + 3y + 9 = 0$ । ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans :  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$

(viii) দেখাও যে,  $(-9, 3)$  ও  $(3, -1)$  বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে  $x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$  বৃত্ত 3:1 অনুপাতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

(ix) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা  $(1, 2)$  ও  $(3, 4)$  বিন্দুগামী এবং যার একটি স্পর্শক  $3x + y - 3 = 0$ ।

Ans :  $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$

(x)  $(h, k)$  বিন্দু থেকে  $x^2 + y^2 = 12$  বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য  $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$  বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুন।  $(h, k)$  বিন্দুটির সম্ভাব্যপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans :  $3x^2 + 3y^2 + 20x + 20y + 12 = 0$

(xi)  $3x + y - 1 = 0$  সরলরেখা  $(x - 2)^2 + y^2 = 5$  বৃত্তকে যে সূক্ষ্মকোণে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। Ans :  $45^\circ$

(xii) দেখাও যে,  $P(h, k)$  বিন্দু থেকে মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর সম্ভাব্যপথ একটি বৃত্ত।

(xiii)  $x^2 + y^2 = 3^2$  ও  $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$  বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

কর। Ans :  $y = 3, 16x + 63y + 195 = 0, 84x + 35y - 273 = 0, 4x - 3y - 15 = 0$