নির্ণায়ক

নির্ণায়ক : $a_1 b_2 - a_2 b_1$ কে $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ মাট্রিক্স এর নির্ণায়ক বলা হয়।

গাণিতিকভাবে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ লেখা হয়

নির্ণায়কের ক্রমঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ -ক্রম 2

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ – ক্রম 3

3 **ক্রমের নির্ণায়কের ক্ষেত্রেঃ** এখানে কর্ণপদঃ a_1, b_2, c_3 ; প্রধান কর্ণঃ $a_1\ b_2\ c_3$

অনুরাশি ও সহগুনকঃ

a_1 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b_1 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c_1 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

সহগুণক $=(-1)^{r+c}$ (অনুরাশি) যেখানে r ও c যথাক্রমে সারি ও কলামের সংখ্যা

a_1 এর সহগুণক $=(-1)^{1+1}$ (অনুরাশি) $= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b_1 এর সহগুণক $=(-1)^{1+2}$ (অনুরাশি) $= -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c_1 এর সহগুণক $=(-1)^{1+3}$ (অনুরাশি) $= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

নির্ণায়কের মান $= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

*** নির্ণায়কের বিশেষ ধর্মঃ**

উপপাদ্য-১ঃ কলামগুলো সারিতে এবং সারিগুলোকে কলামে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & \mathbf{b}_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix}$$

উপপাদ্য-২ঃ পাশাপাশি দুটি কলাম বা সারিকে স্থান বিনিময় করলে পরিবর্তিত নির্ণায়কের মান $(-)ve$ হয়।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{পাশাপাশি কলাম বিনিময় করে}$$

বা, $-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \leftarrow$ পাশাপাশি সারি বিনিময় করে

উপপাদ্য-৩ঃ দুটি কলাম বা সারির অনুরূপ উপাদান গুলোর অনুপাত সমান হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হয়।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = K \times \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = K \times 0 = 0$$

উপপাদ্য-৪ঃ নির্ণায়কের কলাম বা সারির প্রতিটি ভূক্তিকে একটি সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের যে মান হবে প্রদত্ত নির্ণায়কের মানকে ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে সেই মান হবে।

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

উপপাদ্য-৫ঃ একটি নির্ণায়কের কলাম বা সারির প্রত্যেক ভূক্তির সাথে একটি করে ভূক্তি যোগ বা বিয়োগ করলে উক্ত নির্ণায়কের মান নির্ণায়ক ও অনুরুপ ভূক্তির সাথে যুক্ত ভূক্তিগুলো ও অপর কলাম বা সারির ভূক্তিগুলো নিয়ে গঠিত নির্ণায়কের যোগফল বা অন্তরফলের সমান।

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

উপাপাদ্য-৬ঃ নির্ণায়কের যেকোন কলাম বা সারির প্রতিটি উপাদানকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর যেকোন একট কলাম বা সারির অনুরূপ উপাদানের সাথে যোগ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_1+b_1k & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2k & b_2 & c_2 \\ a_3+b_3k & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ c_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+k\times 0=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta$$

দুটি নির্ণায়কের গুণফলঃ

দেখাও যে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\ell_1+b_1m_1 & a_1\ell_2+b_1m_2 \\ a_2\ell_1+b_2m_1 & a_2\ell_2+b_2m_2 \end{vmatrix}$

$$L.H.S=(\ell_1m_2-\ell_2m_1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\ell_1m_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\ell_2m_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ \mathbf{b}_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow m_2\begin{vmatrix} a_1\ell_1 & b_1 \\ a_2\ell_1 & b_2 \end{vmatrix}+\ell_2\begin{vmatrix} b_1m_1 & a_1 \\ b_2m_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} a_1\ell_1 & b_1m_2 \\ a_2\ell_1 & b_2m_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1m_1 & a_1\ell_2 \\ b_2m_1 & a_2\ell_2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow\begin{vmatrix} a_1\ell_1+b_1m_1 & a_1\ell_2+b_1m_2 \\ a_1\ell_1+b_2m_1 & a_2\ell_2+b_2m_2 \end{vmatrix}$$

নিজে চেষ্টা করঃ

দেখাও যে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ell_1+c_1m_1 & b_1\ell_2+c_1m_2 \\ a_2 & b_1\ell_1+c_2m_1 & b_2\ell_2+c_2m_2 \\ a_3 & b_3\ell_1+c_3m_1 & b_3\ell_2+c_3m_2 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের প্রয়োগঃ *Cramer's Rule*:

দুই চলকের ক্ষেত্রেঃ

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta} \text{ যখন } \Delta \neq 0$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\Delta y}{\Delta} \text{ যখন } \Delta \neq 0$$

$\Delta = 0$ হলে উক্ত সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্যা সমাধান থাকবে অর্থাৎ রেখা দুটি সমান্তরাল বা সমবিন্দুগামী হবে।

তিন চলকের ক্ষেত্রেঃ

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \Rightarrow a_1 x - d_1 + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \Rightarrow a_2 x - d_2 + b_2 y + c_2 z = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \Rightarrow a_3 x - d_3 + b_3 y + c_3 z = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 x - d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 x - d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 x - d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

অনুরূপভাবে, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \therefore y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \therefore z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

$\Delta \neq 0$ এর জন্য সত্য।

Type-1: বিস্তার না করে প্রমাণ

EXAMPLE-01: $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ac & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$L.H.S =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ac & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^1 & = & r_1 \times a \\ r_2^1 & = & r_2 \times b \\ r_3^1 & = & r_3 \times c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(abc)(\boldsymbol{abc})}{abc} \begin{vmatrix} 1 & abc & abc(b+c) \\ 1 & abc & abc(c+a) \\ 1 & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & b+c \\ a+b+c & 1 & c+a \\ a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix} [c_1^1 = c_1 + c_3]$$

$$= (abc)(\boldsymbol{a} + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= \mathbf{0}$ প্রমাণ

Try yoursefl: (i) : $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & bc \\ p & qr \\ x & yz \end{vmatrix}$

(ii) : $\begin{vmatrix} 1 & x+a & y+b \\ 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Type -2: বিস্তার করে প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলী

EXAMPLE-01: প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2ab \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

$$\text{L.H.S}=\begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 2ab & -2b \\ 0 & 1-a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad [c'_1=c_1-b\times c_3]$$

$$= (1+a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \quad [c'_2=c_2-a\times c_3]$$

$$= (1+a^2+b^2)(1+a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2)^2\,[1((1-a^2-b^2+2a^2)-2b(-b)\,]$$

$$= (1+a^2+b^2)^2\,(1+a^2+b^2)$$

$$= (1+a^2+b^2)^3 \text{ R.H.S (Proved)}$$

Try Yourself (i) : প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

(ii) : প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

EXAMPLE-02: প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

$$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2-ac^2 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & bc^2+a^2b & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & ca^2+b^2c \end{vmatrix} \quad [ac_1\times bc_2\times cc_3]$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & c^2a \\ -bc^2 & bc^2+a^2b & bc^2 \\ -b^2c & b^2c & ca^2+b^2c \end{vmatrix} \quad [c'_1=c_1-(c_2+c_3)]$$

$= \frac{1}{abc}(-2bc).bc\begin{vmatrix} 0 & ab & ca \\ c & c^2+a^2 & bc \\ b & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} \times a\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c^2+a^2 & bc \\ b & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} \; [\frac{r1}{a}]$

$= -2bc.\frac{1}{bc}\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ bc & bc^2+a^2b & b^2c \\ bc & bc^2 & ca^2+b^2c \end{vmatrix} \; \begin{bmatrix} r_2 \times b \\ r_3 \times c \end{bmatrix}$

$= -2\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & a^2b & -ca^2 \\ bc & bc^2 & ca^2+b^2c \end{vmatrix}$ = -2 (bc) (- ca^2b- ca^2b) = $4a^2b^2c^2$ ($r_2' = r_2 - r_3$)

Try Yourself: প্রমাণ কর যে,

(iii) $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)

(iv) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & a-b-c \end{vmatrix}$ = $(a+b+c)^3$

(v) $\begin{vmatrix} logx & logy & logz \\ log2x & log2y & log2z \\ log3x & log3y & log3z \end{vmatrix}$ = 0

(vi) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ = $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

(vii) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+B & 1 \\ 1 & 1 & 1+C \end{vmatrix}$ = $abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

Type -3: উৎপাদক ব্যবহার করে প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যাবলী

EXMPL-1: $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$; a = – b বসিয়ে, $\begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2b & -b+c & -b+c \\ 2b & -b+c & b+c \\ -2b & b-c & -2c \end{vmatrix} = 0 \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2, \\ c_2' = c_2 + c_3 \end{bmatrix}$ $\therefore b \neq 0$, $\therefore$ a+b উক্ত নির্ণায়কের একটি উৎপাদক,

$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = K(a+b)(b+c)(c+a)$

ধরি, a=1, b=1, c=2

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = K(2)(3)(3)$

18K = -2(8-9) - 2(-8-9) + 3(6+6)

= 2+34+36

= 72

$\therefore$ K=4.

$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$. Proved

Try Yourself: প্রমাণ কর যে,

$\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

Type-4: ব্যবহারিক প্রয়োগ (নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর)

EXAMPLE-01:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

সমাধান : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4+1-4 = -7$, $D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -20+5+8 = -7$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -10+10-14 = -14$, $D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 8-7+20 = 21$

$\therefore x = \frac{Dx}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$, $\therefore y = \frac{Dy}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$, $\therefore z = \frac{Dz}{D} = \frac{21}{-7} = -3$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : (x,y,z)= (1,2,3)

Try Yourself:

(i) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$

Ans. (i). (x,y,z) = (1, 1, -2), (ii). (x,y)= (5,-2)