নিচের যোগজগুলির মান নির্ণয় কর :

1.(a) $\int \frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})\,dx$ [ঢা.'০৫]

$= \int (1+x^{-2})\,dx = x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= x - \frac{1}{x} + c$

1(b) $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}}\,dx$ [ঢা.'০২]

$= \int \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{\frac{x}{2}}}\,dx$

$= \int (e^{2x-\frac{x}{2}} + 2e^{x-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})dx$

$= \int (e^{\frac{3x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})dx$

$= \frac{e^{\frac{3x}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + c$

1(c) $\int (1+x^{-1}+x^{-2})dx$ [রা.'০৯]

$= \int (1+\frac{1}{x}+x^{-2})dx$

$= x + \ln x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = x + \ln x - x^{-1} + c$

নিয়ম ঃ হরের অনুবন্ধি রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে হরকে $\sqrt{\ }$ মুক্ত করতে হয়।

2.(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1}\,dx$

$= \int \{x^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\}dx$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{2}{3}[x^{3/2} + (x-1)^{3/2}] + c$

2(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ [রা.'০২; দি.'১০]

$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\,dx$

$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int [(x+1)^{1/2} - (x+1)^{1/2}]\,dx$

$= \frac{1}{2}[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}] + c$

$= \frac{1}{2}[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}] + c$

$= \frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}] + c$ (Ans.)

3.(a) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ [ঢা.'০৭]

$= \int \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \int \frac{(1+\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1+\sin x)dx}{\cos^2 x}$

$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x})dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx$

$= \tan x + \sec x + c$

3(b) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ [য.'০৭,'১৩; চ.'১০ প্র.ভ.প.'০৩]

$= \int \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$= \int \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x}$

$= \int (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}) dx$

$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$

$= \tan x - \sec x + c$

3. (c) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$ [কু.'০৮]

$= \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \sec^2 x dx = \frac{1}{2} \tan x + c$

3(d) $\int \sqrt{1+\cos x}\, dx$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$= \int \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx = \int \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}\, dx$

$= 2\sqrt{2} \int \cos \frac{x}{2}\, d(\frac{x}{2})$ $[\because d(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} dx]$

$= 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + c$

3(e) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ [চ.'০৫,'০৯; সি.'০৬; ব.'০৮]

$= \int \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \int \sqrt{2} \sin x\, dx$

$= \sqrt{2}(-\cos x) + c = -\sqrt{2} \cos x + c$

3(f) $\int \sqrt{1-\cos 4x}\, dx$ [চ.'০৭]

$= \int \sqrt{2\sin^2 2x}\, dx = \int \sqrt{2} \sin 2x\, dx$

$= \sqrt{2}(-\frac{\cos 2x}{2}) + c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + c$

3(g) $\int \sec x(\sec x - \tan x) dx$ [ব.'১৩]

$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$

$= \tan x - \sec x + c$

4.(a) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}\, dx$

$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$

$= \int (\sin x - \cos x)\, dx$ বা $\int (\cos x - \sin x)\, dx$

$= -\cos x - \sin x + c$ বা $\sin x + \cos x + c$

4(b) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}} dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}} dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}} dx$

$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx$

বা, $\int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x} dx$

$= \int (\cos x + \sin x) dx$ বা, $-\int (\cos x + \sin x) dx$

$= \sin x - \cos x$ বা, $-(\sin x - \cos x)$

4(c) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ [প্র.ভ.প. '৯০]

$= \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x) dx$

$= \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$

5(a) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$ [ব.'০৮,'১২; য.'১০; চ.'১২]

$= \int \frac{1}{2} \{\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)\}\, dx$

$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x)\, dx$

$= \frac{1}{2} (\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8}) + c$

$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c$

5(b) $\int \sin 4x \sin 2x\, dx$ [য.'০৪; রা.বো'০৫; দি.'১১]

$= \int \frac{1}{2}\{\cos(4x-2x) - \cos(4x+2x)\}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x)\, dx$

$= \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 6x}{6}) + c$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

5(c) $\int 3\sin 3x \cos 4x\, dx$ [সি'০২,'০৩; ব.'০৬,'১০]

$= \int \frac{3}{2}\{\sin(4x+3x) - \sin(4x-3x)\}\, dx$

$= \frac{3}{2}\int (\sin 7x - \sin x)\, dx$

$= \frac{3}{2}(-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x) + c$

$= \frac{3}{14}(7\cos x - \cos 7x) + c$

5.(d) $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$ [কু.'০৬; সি.,দি.'১২]

$= \int \frac{1}{2}\{\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)\}\, dx$

$= \int \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x) dx$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x) + c$

$= \frac{1}{16}(4\cos 2x - \cos 8x) + c$

5(e) $\int 4\cos 4x \sin 5x dx$ [রা.'০৩]

$= \int 2\{\sin(5x+4x) + \sin(5x-4x)\}\, dx$

$= \int 2(\sin 9x + \sin x) dx$

$= 2(-\frac{1}{9}\cos 9x - \cos x) + c$

$= -\frac{2}{9}(\cos 9x + 9\cos x) + c$

5(f) $\int 5\cos 5x \sin 4x\, dx$ [ঢা.'০৬; দি.,সি.'১৪]

$= \int \frac{5}{2}\{\sin(5x+4x) - \sin(5x-4x)\}\, dx$

$= \int \frac{5}{2}(\sin 9x - \sin x)\, dx$

$= \frac{5}{2}(-\frac{1}{9}\cos 9x + \cos x) + c$

$= \frac{5}{18}(9\cos x - \cos 9x) + c$

5(g) $\int \sin px \cos qx\, dx,\ (p > q)$ [ঢা.'০৩; সি.'০৭]

$= \int \frac{1}{2}\{\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\}\, dx$

$= \frac{1}{2}\{-\frac{\cos(p+q)x}{p+q} - \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\} + c$

$= -\frac{1}{2}\{\frac{\cos(p+q)x}{p+q} + \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\} + c$

6.(a) $\int \cos^2 x\, dx$ [চ.'০৮]

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\{\int dx + \int \cos 2x\, dx\}$

$= \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 2x}{2}) + c$

6(b) $\int \cos^2 2x dx$ [ঢা.'০০]

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 4x}{4}) + c$

6(c) $\int (2\cos x + \sin x)\cos x\, dx$ [ঢা '০৫]

$= \int (2\cos^2 x + \sin x \cos x)\, dx$

$= \int (1 + \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x)\, dx$

$= x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}\cos 2x) + c$

$= x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$

6(d) $\int \sin^3 2x\, dx$ [ঢা.'০১]

$= \int \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\{3.(-\frac{1}{2}\cos 2x) + \frac{1}{6}\cos 6x\} + c$

$= \frac{1}{8}(-3\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 6x) + c$

6(e) $\int \sin^4 x\, dx$ [কু.'০৯]

$\sin^4 x\, dx = (\sin^2 x)^2 = \{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\}^2$

$= \frac{1}{4}\{1 - 2\cos x + \cos^2 2x\}$

$= \frac{1}{4}\{1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$\therefore \int \sin^4 x\, dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - 2.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x) + c$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + c$

6(f) $\int \cos^4 x\, dx$ [রা.'০৭,'১৪; সি.'০৮; দি.'১৩; ঢা.'১৪]

$\cos^4 x\, dx = (\cos^2 x)^2 = \{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\}^2$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\}$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x]$

$\therefore \int \cos^4 x\, dx$

$= \int \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x + 2.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x) + c$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + c$ (Ans.)

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন:

নিচের যোগজগুলি মান নির্ণয় কর ঃ

7(a) $\int \frac{4(\sqrt[3]{x^2}+4)^2}{3\sqrt[3]{x}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{(x^{\frac{2}{3}}+4)^2}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \frac{4}{3}\int \frac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{2}{3}} + 16}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \frac{4}{3}\int (x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} + 16x^{-\frac{1}{3}})dx$

$= \frac{4}{3}\int (x + 8x^{\frac{1}{3}} + 16x^{-\frac{1}{3}})dx$

$= \frac{4}{3}(\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 16\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}) + c$

$= \frac{4}{3}(\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 16\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}) + c$

$= \frac{2}{3}(x^2 + 12x^{4/3} + 48x^{2/3}) + c$ (২)

7(b) $\int \frac{a\cot x + b\tan^2 x - c\sin^2 x}{\sin x}dx$

$= \int (a\frac{\cot x}{\sin x} + b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin x} - c\sin x)dx$

$= \int (a\cot x \operatorname{cosec} x + b\tan x \sec x$

$- c\sin x)dx$

$= -a\operatorname{cosec} x + b\sec x + c\cos x + c_1$ (২)

8(a) $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= \int \frac{2\cos^2 x - 1 - (2\cos^2\theta - 1)}{\cos x - \cos\theta} dx$ (১)

$= 2\int \frac{\cos^2 x - \cos^2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int \frac{(\cos x + \cos\theta)(\cos x - \cos\theta)}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int (\cos x + \cos\theta) dx$

$= 2(\int \cos x dx + \cos\theta \int dx)$ (২)

$= 2(\sin x + \cos\theta . x) + c$

$= 2(\sin x + x\cos\theta) + c$

8(b) $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

$= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x) dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x) dx$

$= \int (2\sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x) dx$

$= 2\tan x - x + 2\sec x + c$ (২)

9(a) $\int \sqrt{1 \pm \sin x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \pm 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx$ (১)

$= \int \sqrt{(\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2})^2}\, dx$

$= \int (\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2}) dx$ বা $\int (\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}) dx$ (১)

$= 2(-\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}) + c$

বা $2(\sin\frac{x}{2} \mp \cos\frac{x}{2}) + c$ (২)

9(b) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}} dx$ (১)

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c$ (১)

9(c) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(1 - \sin 2x)\, dx$

$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(\cos x - \sin x)^2\, dx$ (১)

$= \int (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)\, dx$

$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int \cos 2x\, dx$ (১)

$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$ (২)

9(d) $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$

$= \int (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}) dx$

$= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + c$ (২)

10. $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\, dx$ (১)

$= \frac{1}{4}(3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x) + c$ (১)

প্রশ্নমালা X B

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1.(a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-4x)}} dx = \int \frac{1}{(1-4x)^{1/3}} dx$

$= \int (1-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(1-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{(-\frac{1}{3}+1)(-4)} + c$

$= \frac{(1-4x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}(-4)} + c = -\frac{3}{8}(1-4x)^{\frac{2}{3}} + c$

1(b) $\int \frac{e^{5x} + e^{3x}}{e^x + e^{-x}} dx$ [প্র.ভ.প. '১২]

$= \int \frac{e^{4x}(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} dx = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4} + c$

1(c) ধরি, $I = \int \sin x^0\, dx$ [চ.'০৪]

8(a) $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= \int \frac{2\cos^2 x - 1 - (2\cos^2\theta - 1)}{\cos x - \cos\theta} dx$ (১)

$= 2\int \frac{\cos^2 x - \cos^2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int \frac{(\cos x + \cos\theta)(\cos x - \cos\theta)}{\cos x - \cos\theta} dx$

$= 2\int (\cos x + \cos\theta) dx$

$= 2(\int \cos x dx + \cos\theta \int dx)$ (২)

$= 2(\sin x + \cos\theta . x) + c$

$= 2(\sin x + x\cos\theta) + c$

8(b) $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

$= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x) dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x) dx$

$= \int (2\sec^2 x - 1 + 2\sec x \tan x) dx$

$= 2\tan x - x + 2\sec x + c$ (২)

9(a) $\int \sqrt{1 \pm \sin x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \pm 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx$ (১)

$= \int \sqrt{(\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2})^2}\, dx$

$= \int (\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2}) dx$ বা $\int (\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}) dx$ (১)

$= 2(-\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}) + c$

বা $2(\sin\frac{x}{2} \mp \cos\frac{x}{2}) + c$ (২)

9(b) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}} dx$ (১)

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx$

$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c$ (১)

9(c) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(1 - \sin 2x)\, dx$

$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(\cos x - \sin x)^2\, dx$ (১)

$= \int (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)\, dx$

$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int \cos 2x\, dx$ (১)

$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$ (২)

9(d) $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$

$= \int (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}) dx$

$= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + c$ (২)

10. $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\, dx$ (১)

$= \frac{1}{4}(3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x) + c$ (১)

প্রশ্নমালা X B

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1.(a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-4x)}} dx = \int \frac{1}{(1-4x)^{1/3}} dx$

$= \int (1-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(1-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{(-\frac{1}{3}+1)(-4)} + c$

$= \frac{(1-4x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}(-4)} + c = -\frac{3}{8}(1-4x)^{\frac{2}{3}} + c$

1(b) $\int \frac{e^{5x} + e^{3x}}{e^x + e^{-x}} dx$ [প্র.ভ.প. '১২]

$= \int \frac{e^{4x}(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} dx = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4} + c$

1(c) ধরি, $I = \int \sin x^0 dx$ [চ.'০৪]

এবং $x^\circ = \frac{\pi x}{180} = z$.

তাহলে $\frac{\pi}{180}dx = dz \Rightarrow dx = \frac{180}{\pi}dz$ এবং

$I = \frac{180}{\pi}\int \sin z\, dz = \frac{180}{\pi}(-\cos z) + c$

$\therefore \int \sin x^\circ dx = -\frac{180}{\pi}\cos x^\circ + c$

2(a) ধরি , $I = \int \sin 5x\, dx$ [সি.'০৫]

এবং $5x = z$. তাহলে $5dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dz$

এবং $I = \frac{1}{5}\int \sin z\, dz = -\frac{1}{5}\cos z + c$

$\therefore \int \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

2(b) ধরি, $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ [কু.'০০]

এবং $\sqrt{x} = z$. তাহলে $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dz \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dz$

এবং $I = 2\int \cos z\, dz = 2\sin z + c$

$\therefore \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sin\sqrt{x} + c$

2(c) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ [ঢা.'০৪; য.'০৭]

ধরি, $\frac{1}{x} = z \;\therefore\; -x^{-2}dx = dz \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx = -dz$

$\therefore \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \int \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$

$= -\int \sin z\, dz = -(-\cos z) + c = \cos\frac{1}{x} + c$

3. (a) ধরি, $I = \int x e^{x^2} dx$ [ব.'০৩]

এবং $x^2 = z$. তাহলে, $2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}$

এবং $I = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

3(b) ধরি, $I = \int x^2 a^{x^3} dx$ [মা.'০৯]

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3x^2dx = dz \Rightarrow x^2dx = \frac{dz}{3}$

এবং $I = \frac{1}{3}\int a^z dz = \frac{a^z}{3\ln a} + c = \frac{a^{x^3}}{3\ln a} + c$

3(c) $\int e^x \tan e^x \sec e^x dx$

$= \int \sec e^x \tan e^x d(e^x)$ $[\because d(e^x) = e^x dx]$

$= \sec e^x + c$

3(d) ধরি, $I = \int e^{2x}\tan e^{2x}\sec e^{2x} dx$ [চ.'০৭]

এবং $e^{2x} = z$. তাহলে, $2e^{2x}dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{2}\int \sec z \tan z\, dz = \frac{1}{2}\sec z + c$

$\therefore \int e^{2x}\tan e^{2x}\sec e^{2x}dx = \frac{1}{2}\sec e^{2x} + c$

4(a) ধরি, $I = \int \sin^2 x \cos x\, dx$ [ঢা.'০২]

এবং $\sin x = z$. তাহলে, $\cos x\, dx = dz$ এবং

$I = \int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

4(b) ধরি, $I = \int (1+\cos x)^3 \sin x\, dx$ [কু.'০৩]

এবং $1 + \cos x = z$. তাহলে, $-\sin x\, dx = dz$ এবং

$I = -\int z^3 dz = -\frac{z^4}{4} + c = -\frac{(1+\cos x)^4}{4} + c$

4(c) ধরি, $I = \int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ [চ.'০৩]

এবং $\sin\frac{x}{2} = z$. তাহলে, $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = dz$ এবং

$I = 2\int z^2 dz = 2.\frac{1}{3}z^3 + c = \frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2} + c$

4(d) ধরি, $I = \int \sqrt{1-\sin x}\cos x\, dx$ [সি.'০১]

এবং $1 - \sin x = z$. তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$$I = -\int z^{\frac{1}{2}}\,dz = -\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore \int \sqrt{1-\sin x}\cos x\,dx = -\frac{2}{3}(1-\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$$

4(e) $\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^2}$ [রা.'০৪,কু.'০৬;ব.'১১]

ধরি, $1-\sin x = z$. তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$$\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^2} = -\int \frac{dz}{z^2} = -\int z^{-2}dz$$

$$= -\frac{z^{-2+1}}{-2+1} + c = z^{-1} + c = \frac{1}{1-\sin x} + c$$

4(f) $\int \frac{x^2\tan^{-1}x^3}{1+x^6}dx$ [চ. '০৭; কু. '০৮; রা.'১১]

ধরি, $\tan^{-1}x^3 = z$

$$\therefore \frac{1}{1+(x^3)^2}.3x^2\,dx = dz$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}dz$$

$$\therefore \int \frac{x^2\tan^{-1}x^3}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int z dz$$

$$= \frac{1}{3}\frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{6}(\tan^{-1}x^3)^2 + c \text{ (Ans.)}$$

5(a) ধরি, $I = \int \frac{1}{x(1+\ln x)^3}dx$ [ঢা.'০১]

এবং $1+\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x}dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{1}{z^3}dz = \int z^{-3}dz = \frac{z^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2z^2} + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = -\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + c$$

5(b) ধরি, $I = \int \frac{(\log_{10}x)^2}{x}dx$ [প্র.ভ.প.'৮৩]

এবং $\log_{10}x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x\ln 10}dx = dz$ এবং

$$I = \ln 10\int z^2 dz = \ln 10.\frac{1}{3}z^3 + c$$

$$\therefore \int \frac{(\log_{10}x)^2}{x}dx = \frac{\ln 10}{3}(\log_{10}x)^3$$

6(a) ধরি, $I = \int e^{\tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2}dx$

[ঢা.'০৯; মা.'১২,'১৪]

এবং $\tan^{-1}x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1+x^2}dx = dz$ এবং

$$I = \int e^z\,dz = e^z + c = e^{\tan^{-1}x} + c$$

6(b) $\int e^{\sin^{-1}x}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [চ.'০১; প্র.ভ.প.'০৬]

ধরি, $\sin^{-1}x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1-x^2}dx = dz$ এবং

$$\int e^{\sin^{-1}x}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^z dz = e^z + c$$

$$= e^{\sin^{-1}x} + c$$

6(c) ধরি, $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ [য.'০৬; দি.'১১; ঢা.'১৪]

এবং $1-x^2 = z$. তাহলে, $-2xdx = dz$ এবং

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{z} + c$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + c$$

6(d) ধরি, $I = \int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এবং

$\sin^{-1}x = z$ [কু. '০৭; ব. '১১,'১৪; য.'০৯,'১৩; ঢা.'১৩]

তাহলে, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dz$ এবং

$$\therefore I = \int \tan z\,dz = \ln|\sec z| + c$$

$$= \ln|\sec(\sin^{-1}x)| + c$$

7(a) ধরি, $I=\int\frac{\sin x}{3+4\cos x}dx$ [ঢা.'০৭, ব.'১৩]

এবং $3+4\cos x=z$. তাহলে, $-4\sin x dx = dz$

এবং $I=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{4}\ln|3+4\cos x|+c$

7(b) ধরি, $I=\int\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$ [রা.'০৩]

এবং $1+2\cos x=z$. তাহলে, $-2\sin x dx = dz$

এবং $I=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x|+c$

7(c) $\int\frac{\sec^2 x}{3-4\tan x}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{-4\sec^2 x dx}{3-4\tan x}$

$=-\frac{1}{4}\ln|3-4\tan x|+c$

7(d) ধরি, $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

[ব.'০৪; ঢা.'১০; সি.'১১; কু.'১৩]

এবং $\tan^{-1}x=z$. তাহলে, $\frac{1}{1+x^2}dx=dz$ এবং

$I=\int\frac{dz}{z}=\ln|z\}+c=\ln|\tan^{-1}x|+c$

8 $\int\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ [ব.'০৯; কু.'১২]

ধরি, $1+\ln x=z$. তাহলে, $\frac{1}{x}dx=dz$ এবং

$\int\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+c$

$=\ln(1+\ln x)+c$

9(a) $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{(3e^{3x}-0)dx}{e^{3x}-1}$

$=\frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1|+c$

9(b) $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^x+e^{-x})}{e^x+e^{-x}}$ [দি.'১০]

$=\ln|e^x+e^{-x}|+c$

9(c) $\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}dx$ [য.'১০]

$=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int\frac{(0-e^{-x})dx}{1+e^{-x}}$

$=-\ln|1+e^{-x}|+c$

10. (a) ধরি, $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{1-6x}}dx$ [প্র.ভ.প.'০৫]

এবং $1-6x=z$. তাহলে, $-6dx=dz$

$I=-\frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt[3]{z}}dz=-\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z^{1/3}}=-\frac{1}{6}\int z^{-\frac{1}{3}}dz$

$=-\frac{1}{6}\frac{z^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c=-\frac{1}{6}\frac{z^{2/3}}{\frac{2}{3}}+c$

$=-\frac{1}{4}(1-6x)^{2/3}+c$

10(b) ধরি, $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-2x^4)}}$ [চ.'০১]

এবং $1-2x^4=z$. তাহলে, $-8x^3dx=dz$ এবং

$I=-\frac{1}{8}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{1}{8}.2\sqrt{z}+c=-\frac{1}{4}\sqrt{z}+c$

$\therefore\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-2x^4)}}=-\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^4}+c$

10(c) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x-1}}$ [সি.'০২]

$=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\tan x-1}}=\int\frac{(\sec^2 x-0)dx}{\sqrt{\tan x-1}}$

$=2\sqrt{\tan x-1}+c$ $[\because\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}]$

10(d) ধরি, $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ [কু.'০৫; রা.'১০]

এবং $\sin x=z$. তাহলে, $\cos x\,dx=dz$ এবং

$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c=2\sqrt{\sin x}+c$

10(e) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ [কু.'০৩]

এবং $1 + \ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x}dx$ এবং

$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{1+\ln x} + c$

11(a) $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(2x)^2+3^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c$

11(b) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$ [রা.'০৮; ব.'১১]

$= \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}.\tan^{-1}(x^2) + c$

11(c) ধরি, $I = \int \frac{3x^2}{1+x^6}dx$ [রা.'০১, চ.'০৮]

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3x^2 dx = dz$ এবং

$I = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c$

$\therefore \int \frac{3x^2}{1+x^6}dx = \tan^{-1}(x^3) + c$

11(d) ধরি, $I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ [সি.'০৪]

এবং $e^x = z$. তাহলে, $e^x dx = dz$ এবং

$I = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$

11(e) $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{1+(e^{2x})^2}$ [চ.'০১,'১১]

$= \frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x}) + c$

11(f) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ [ঢা. '০৬; য. '০৫,'১২; রা. '০৭, '১৪; ব. '০৫,'০৭,'০৯; চ. '০৮;কু.'১২,'১৪; দি.'১৩; মা.'১৪]

$= \int \frac{e^x}{e^x(e^x+e^{-x})}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx$

ধরি, $e^x = z$. তাহলে, $e^x dx = dz$ এবং

$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c$

$= \tan^{-1}(e^x) + c$

12. (a) $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$ [চ.'০৩]

$= \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$= \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2}$ [$\because d(x-\frac{1}{2}) = dx$]

$= \frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} + c$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$

12(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$ [রা.'০২]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+13-4}}$

$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}$

$= \ln|\sqrt{(x+2)^2+3^2} + x + 2| + c$

$= \ln|\sqrt{x^2+4x+13} + x + 2| + c$

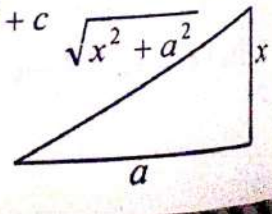
12(c) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ [য.'০২; প্র.ভ.প.'০৬]

ধরি, $x = a\tan\theta$. তাহলে $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$\therefore \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^{3/2}}$

$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^3\theta}$

$= \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta + c$



$$= \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + c$$

[চিত্র হতে $\tan\theta = \frac{x}{a}$ এবং $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$]

12(d) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

ধরি, $x = \sin\theta$. তাহলে $dx = \cos\theta\, d\theta$

$\therefore \int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \int \sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta$

$= \int \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2\, d\theta$

$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{8}(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}) + c = \frac{1}{8}(\theta - \frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta}{4}) + c$

$= \frac{1}{8}(\theta - \frac{2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta}{2}) + c$

$= \frac{1}{8}\{\theta - \frac{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}(1-2\sin^2\theta)}{2}\} + c$

$= \frac{1}{8}\{\sin^{-1}x - x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)\} + c$

13(a) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{1^2-x^2}$ [ব.'০৩]

$= \frac{1}{2.1}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + c$ [সুত্র প্রয়োগ করে।]

$= \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + c$

13(b) $\int \frac{dx}{9-4x^2} = \int \frac{dx}{3^2-(2x)^2}$ [সি.'১১]

$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{3^2-(2x)^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2.3}\ln|\frac{3+2x}{3-2x}| + c$

$= \frac{1}{12}\ln|\frac{3+2x}{3-2x}| + c$

13(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{9x^2-16}$ [ঢা.'০৩]

$= \int \frac{dx}{(3x)^2-4^2}$ এবং $3x = z$.তাহলে, $3dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2-4^2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2.4}\ln|\frac{z-4}{z+4}| + c$

$\therefore \int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{24}\ln|\frac{3x-4}{3x+4}| + c$

13(d) $\int \frac{dx}{16-4x^2}$ [ক.'০০; সি.'০১]

$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{2^2-x^2}$

$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2.2}\ln|\frac{2+x}{2-x}| + c = \frac{1}{16}\ln|\frac{2+x}{2-x}| + c$

13(e) $\int \frac{\cos x\, dx}{3+\cos^2 x}$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= \int \frac{\cos x\, dx}{3+1-\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2^2-(\sin x)^2}$

$= \frac{1}{2.2}\ln|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}| + c = \frac{1}{4}\ln|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}| + c$

13(f) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$ [রা.'০১; য.'০২]

$= \int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^x-e^{-x})}\,dx$

$= \int \frac{e^x}{(e^x)^2-1}\,dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1^2}$

$= \frac{1}{2.1}\, ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c = \frac{1}{2}\, ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$

14(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}$ [দি.'১০; চ.'১৩]

$= \sin^{-1}\frac{x}{5} + c$

14(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

[য.'০৫; কু.'০৭,'১০,'১৪; ঢা.,ব.'১২; সি.'১৩]

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}\, dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + c$

14(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

[ব.'০৬,'০৯; রা.'০৮;ঢা.'০৯; চ.'য.'১১]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(2x)^2}}$

ধরি, $2x = z$. তাহলে $2dx = dz$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-z^2}}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}} + c$

14(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ [সি.'০৪]

$= \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{5^2-(4x)^2}}$ $[\because d(4x) = 4dx]$

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{5} + c.$

14(e) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5-\cos^2 x}}dx$ [কু.'০৪]

$= -\int \frac{-\sin x dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\cos x)^2}} = \cos^{-1}(\frac{\cos x}{\sqrt{5}}) + c$

14(f) ধরি, $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

[ব.'০৮; য.'১১;দি.'১২]

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3x^2 dx = dz$

$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1} z + c$

$= \frac{1}{3}\sin^{-1} x^3 + c$

14(g) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ [য.'০৯]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x^2-2ax+a^2)}}$

$= \int \frac{(1-0)dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \sin^{-1}(\frac{x-a}{a}) + c$

14(h) ধরি, $I = \int \sqrt{1-9x^2}\, dx$ [ব.'০১]

এবং $3x = z$ তাহলে, $3dx = dz$ এবং

$I = \int \sqrt{1-(3x)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-z^2}\, dz$

$= \frac{1}{3}[\frac{z\sqrt{1-z^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} z] + c$

$= \frac{1}{3}[\frac{3x\sqrt{1-(3x)^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(3x)] + c$

$= \frac{1}{6}[3x\sqrt{1-9x^2} + \sin^{-1}(3x)] + c$

15. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3+2x-4x^2}}dx$

$= \int \frac{-\frac{3}{8}(-8x+2)+\frac{3}{4}-2}{\sqrt{3+2x-4x^2}}dx$

$= -\frac{3}{8}\int \frac{(-8x+2)dx}{\sqrt{3+2x-4x^2}}$

$-\frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-\{(2x)^2-2.2x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2\}+3+\frac{1}{4}}}$

$= -\frac{3}{8}\int \frac{d(3+2x-4x^2)}{\sqrt{3+2x-4x^2}}$

$-\frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2-(2x-\frac{1}{2})^2}}$

$= -\frac{3}{8}\cdot 2\sqrt{3+2x-4x^2}$

$-\frac{5}{4}\int \frac{\frac{1}{2}d(2x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2-(2x-\frac{1}{2})^2}}$

$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8}\sin^{-1}\frac{2x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + c$

$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8}\sin^{-1}\frac{4x-1}{\sqrt{13}} + c$

16(a) $\int \frac{x+25}{x-25}dx$ [সি.'০৭]

$= \int \frac{x-25+50}{x-25}dx = \int (\frac{x-25}{x-25} + \frac{50}{x-25})dx$

$= \int (1 + \frac{50}{x-25})dx = \int dx + 50\int \frac{1}{x-25}dx$

$= x + 50\ln|x-25| + c$

16(b) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4}$ [সি.'০৮; ব.'০৪; রা.'০৪,'১১]

$= \int \frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx = \int (\frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4})dx$

$= \int (1 + \frac{4}{x^2-2^2})dx$

$= x + \frac{4}{2.2}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + c = x + \ln|\frac{x-2}{x+2}| + c$

16(c) $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx$

[কু.'০৯; সি.'০৫,'১২; য.'০৯; ঢা.'১১; ব.'১৩]

$= \int \frac{x^2-4+3}{x^2-4}dx = \int (\frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-4})dx$

$= \int (1 + \frac{3}{x^2-2^2})dx = x + \frac{3}{2.2}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + c$

$= x + \frac{3}{4}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + c$

16(d) $\int \frac{xdx}{(1-x)^2} = -\int \frac{1-x-1}{(1-x)^2}dx$

$= -\int \{\frac{1-x}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\}dx$

$= -\int \frac{1}{1-x}dx + \int \frac{1}{(1-x)^2}dx$

$= -\int \frac{-d(1-x)}{1-x} - \int \frac{d(1-x)}{(1-x)^2}$

$= \ln|1-x| - (-\frac{1}{1-x}) + c$

$= \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + c$

17(a) $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{5^2-x^2}}dx$

$= \int \frac{5}{\sqrt{5^2-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx$

$= \int \frac{5}{\sqrt{5^2-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d(25-x^2)}{\sqrt{25-x^2}}$

$= 5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \frac{1}{2}.2\sqrt{25-x^2} + c$

$= 5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \sqrt{25-x^2} + c$

17(b) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int x\frac{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\times\sqrt{1-x}}dx$

$= \int x\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \frac{(1-x^2) - \frac{1}{2}(-2x) - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}x$

$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}x + c$

$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ (Ans.)

নিয়ম ঃ $\int \frac{1}{g(x)\sqrt{\varphi(x)}}dx$ আকারের জন্য,

(a) $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে একঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

(b) $g(x)$ একঘাত ও $\varphi(x)$ দ্বিঘাত হলে, $g(x) = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(c) $g(x)$ দ্বিঘাত ও $\varphi(x)$ একঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

(d) $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে দ্বিঘাত হলে, $x = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(e) $\int \frac{x}{g(x)\sqrt{\varphi(x)}}dx$ এবং $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে দ্বিঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

18(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ এবং [ঢা.'১০; ব.'১৩]

$x+1 = z^2$. তাহলে $dx = 2zdz$ এবং

$$I = \int \frac{2zdz}{(z^2-1-3)\sqrt{z^2}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2zdz}{(z^2-4)z} = 2\int \frac{dz}{z^2-2^2}$$

$$= 2.\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right| + c$$

18(b) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$= \sec^{-1}(x-1) + c$

নিয়ম ঃ (a) যদি কোন যোগজ $\int \frac{a+bx^l}{p+qx^m}dx$ আকারে থাকে, যেখানে l ও m উভয়ে ভগ্নাংশ এবং তাদের হরের ল.সা.গু **n** হয়, তবে $x = z^n$ ধরতে হয়।

(b) $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)}$ আকারের যোগজের জন্য, $x^n = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}$ আকারের যোগজের জন্য, $x^n = \frac{1}{z^2}$ ধরতে হয়।

(d) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$ আকারের যোগজের জন্য, $a + bx = zx$ ধরতে হয়।

(e) $\int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}$ আকারের যোগজের জন্য, $z = \frac{x-b}{x-a}$ ধরতে হয়।

19(a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}dx$ [চ.'০০]

ধরি, $x = z^6$. তাহলে, $dx = 6z^5dz$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{\sqrt{z^6}\ 6z^5dz}{1+\sqrt[3]{z^6}}$$

$$= \int \frac{z^3.6z^5dz}{1+z^2} = 6\int \frac{z^8\ dz}{1+z^2}$$

$$= 6\int \frac{1}{z^2+1}\{z^6(z^2+1) - z^4(z^2+1) + z^2(z^2+1) - (z^2+1) + 1\}dz$$

$$= 6\int (z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2})dz$$

$$= 6(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \tan^{-1}z) + c$$

$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1}x^{\frac{1}{6}} + c$$

19(b) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x(4+5x^{20})}$ এবং $x^{20} = \frac{1}{z}$.

তাহলে, $20x^{19}dx = -\frac{dz}{z^2} \Rightarrow x^{19}dx = -\frac{dz}{20z^2}$

এবং $I = \int \frac{x^{19}dx}{x^{20}(4+5x^{20})} = \int \frac{-\frac{dz}{20z^2}}{\frac{1}{z}(4+5\frac{1}{z})}$

$$= -\frac{1}{20}\int \frac{dz}{4z+5} = -\frac{1}{20}.\frac{1}{4}\int \frac{d(4z+5)}{4z+5}$$

$$= -\frac{1}{80}\ln|4z+5| + c = -\frac{1}{80}\ln\left|\frac{4}{x^{20}}+5\right| + c$$

19(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ [ক.'০১; রা.'১১]

এবং $x^4 = \frac{1}{z^2}$. তাহলে, $4x^3dx = -\frac{2dz}{z^3}$ এবং

$$I = \int \frac{x^3dx}{x^4\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{-\frac{dz}{2z^3}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\cos^{-1} z + c$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2) + c$$

(d) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$ এবং $z = \frac{x-1}{x-2}$

$$\Rightarrow zx - 2z = x - 1 \Rightarrow x(1-z) = 1-2z$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-2z}{1-z} \Rightarrow x - 2 = \frac{1-2z}{1-z} - 2$$

$$\Rightarrow x - 2 = \frac{1-2z-2+2z}{1-z} = -\frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{dz}{(1-z)^2}$$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 (x-2)^5} = \int \frac{-\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2 . \frac{-1}{(1-z)^5}}$$

$$= \int \frac{(1-z)^3\, dz}{z^2} = \int \frac{(1-3z+3z^2-z^3)dz}{z^2}$$

$$= \int \left(\frac{1}{z^2} - 3\frac{1}{z} + 3 - z\right)dz$$

$$= -\frac{1}{z} - 3\ln|z| + 3z - \frac{z^2}{2} + c$$

$$= -\frac{x-2}{x-1} - 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + 3\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + c$$

20(a) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + c$$

20(b) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$

$$= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right| + c$$

(c) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+a^2)+(x^2-a^2)}{x^4+a^4}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2+a^2}{x^4+a^4}dx + \int \frac{x^2-a^2}{x^4+a^4}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{a^4}{x^2}\right)}dx + \int \frac{x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{a^4}{x^2}\right)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{d\left(x-\frac{a^2}{x}\right)}{\left(x-\frac{a^2}{x}\right)^2 + (\sqrt{2}.a)^2} + \int \frac{d\left(x+\frac{a^2}{x}\right)}{\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2 - (\sqrt{2}.a)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\tan^{-1}\frac{x-\frac{a^2}{x}}{\sqrt{2}\,a} + \frac{1}{2.\sqrt{2}\,a}\ln\left|\frac{x+\frac{a^2}{x}-\sqrt{2}\,a}{x+\frac{a^2}{x}+\sqrt{2}\,a}\right| + c\right.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}\left[\tan^{-1}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{2}\,ax} + \right.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+a^2-\sqrt{2}\,ax}{x^2+a^2+\sqrt{2}\,ax}\right|+c$$

21(a) $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$ [য. '০৮; রা.,ঢা.'১৩]

$= \int \frac{1}{4}(2\sin x\cos x)dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + c$

21(b) ধরি, $I = \int \sin^3 x\cos^3 x\, dx$ [য.'০৬]

$= \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$ এবং $\sin x = z$.

তাহলে, $\cos x\, dx = dz$ এবং

$I = \int z^3(1-z^2)\, dz = \int (z^3 - z^5)\, dz$

$= \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{6}z^6 + c = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

21(c) ধরি, $I = \int \sin^3 x\cos^4 x\, dx$ [রা.'০১]

$= \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\sin x\, dx$ এবং $\cos x = z$

তাহলে, $-\sin x\, dx = dz$ এবং

$I = -\int (1-z^2)z^4\, dz = \int (z^6 - z^4)\, dz$

$= \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{5}z^5 + c = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

21(d) ধরি, $I = \int \sin^4 x\cos^4 x\, dx$

$\sin^4 x\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\sin x\cos x)^4$

$= \frac{1}{16}\sin^4 2x = \frac{1}{16}.\{\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\}^2$

$= \frac{1}{64}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)$

$= \frac{1}{64}\{1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1+\cos 8x)\}$

$= \frac{1}{128}(3 - 4\cos 4x + \cos 8x)$

$\therefore I = \int \frac{1}{128}(3 - 4\cos 4x + \cos 8x)dx$

$= \frac{1}{128}(3x - 4.\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + c$

$= \frac{1}{128}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + c$

21(e) $\int \sin^2 x\cos 2x\, dx$

[চ.'০৯; য.'০৫; কু.'০৭; সি.'১১]

$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \{\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}\, dx$

$= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}\sin 4x)\} + c$

$= \frac{1}{4}(\sin 2x - x - \frac{1}{4}\sin 4x)\} + c$

22(a) $\int \tan^2 x dx$ [ঢা.'০৫,'০৭]

$= \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + c$

22(b) ধরি, $I = \int \frac{\tan^2(\ln x)}{x}dx$ [ব.'০২]

এবং $\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x}dx = dz$ এবং

$I = \int \tan^2 z dz = \int (\sec^2 z - 1)dz$

$= \tan z - z + c = \tan(\ln x) - \ln x + c$

22(c) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx$

$= \int (\tan x\sec^2 x + \frac{2}{2\sin x\cos x})dx$

$= \int \tan x\sec^2 x dx + 2\int \frac{dx}{\sin 2x}$

$= \int \tan x\, d(\tan x) + \int \sec 2x\, d(2x)$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\tan\frac{2x}{2}| + c$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\tan x| + c$

23. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$

$= \int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x} = \ln|\sin x+\cos x|+c$

24. (a) ধরি, $I = \int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ এবং

$z = \sin^4 x+\cos^4 x$ তাহলে,

$dz = (4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x)dx$

$= 4\sin x\cos x(\sin^2 - \cos^2 x)\,dx$

$= -2\sin 2x\cos 2x\,dx = -\sin 4x\,dx$ এবং

$I = \int \frac{-dz}{z} = -\ln|z|+c$

$= -\ln|\sin^4 x+\cos^4 x|+c$

24(b) ধরি, $I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ [রা.'০৬]

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x(1+\cos^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x+1}$

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{1+\tan^2 x+1}$ এবং $z = \tan x \Rightarrow dz = \sec^2 x dx$

$\therefore I = \int \frac{dz}{(\sqrt{2})^2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{z}{\sqrt{2}})+c$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})+c$

24(c) $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$ [য.'০৩]

$= \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}dx = \int \tan^2 x dx$

$= \int (\sec^2 x-1)dx = \tan x - x + c$

24(d) $\int \frac{1-\cos 5x}{1+\cos 5x}$ [য.'০১; সি.'০২]

$= \int \frac{2\sin^2 \frac{5x}{2}}{2\cos^2 \frac{5x}{2}}dx = \int \tan^2 \frac{5x}{2}dx$

$= \int (\sec^2 \frac{5x}{2}-1)dx = \frac{2}{5}\tan\frac{5x}{2} - x + c$

25(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(e^x-1)^2} = \int \frac{dx}{\{e^x(1-e^{-x})\}^2}$

$= \int \frac{dx}{e^{2x}(1-e^{-x})^2} = \int \frac{e^{-x}.e^{-x}dx}{(1-e^{-x})^2}$ এবং

$e^{-x} = z$. তাহলে $-e^{-x}dx = dz$ এবং

$I = -\int \frac{zdz}{(1-z)^2} = \int \frac{(1-z)-1}{(1-z)^2}dz$

$= \int \{\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2}\}dz$

$= -\int \{\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2}\}d(1-z)$

$= -\{\ln|1-z| + \frac{1}{1-z}\}+c$

$= -\ln|1-e^{-x}| - \frac{1}{1-e^{-x}}+c$

25(b) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin(x+a)} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin x\cos a+\cos x\sin a}$

ধরি, sinx = l (sinx cosa + cosx sina) + m(cosx cosa – sinx sina) + n

$\Rightarrow$ sinx = (l cosa – m sina) sinx + ($l$sina + m cosa) cosx + n

উভয়পক্ষে sinx , cosx ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

n = 0 , $l$sina + m cosa = 0 $\Rightarrow$ m = $-\frac{l\sin a}{\cos a}$

এবং l cosa – m sina = 1

$\Rightarrow l\cos a + \frac{l\sin a}{\cos a}\sin a = 1$

$\Rightarrow l(\sin^2 a+\cos^2 a) = \cos a \Rightarrow l = \cos a$

$\therefore m = -\frac{\cos a\sin a}{\cos a} = -\sin a$

$\therefore \int \frac{\sin x\,dx}{\sin(x+a)} = \int \frac{\cos a\sin(x+a)\,dx}{\sin(x+a)} - \int \frac{\sin a\,(\cos x\cos a - \sin x\sin a)}{\sin x\cos a+\sin a\cos x}dx$

$= \cos a\int dx - \sin a\ln|\sin(x+a)|$

$= x\cos a - \sin a\ln|\sin(x+a)|+c$

25(c) $\int (\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})dx$

$$= \int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$$

$$= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx = \sqrt{2}\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2\sin x \cos x}} dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} dx$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর:

26(a) $\int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})dx = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$ (২)

$$= 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + c$$

(b) $\int a^{4x}dx = \frac{a^{4x}}{\ln a}\frac{1}{4} + c = \frac{a^{4x}}{4\ln a} + c$ (২)

27(a) $\int x^2 \cos x^3 dx = \frac{1}{3}\int \cos(x^3)(3x^2 dx)$ (১)

$= \frac{1}{3}\sin x^3 + c$ (১)

(b) $\int \frac{(1+\tan\frac{3x}{2})^2 dx}{1+\sin 3x}$ [প্র.ভ.প. '৮৬]

$= \int \frac{(1+\tan\frac{3x}{2})^2 dx}{1+\frac{2\tan(3x/2)}{1+\tan^2(3x\backslash 2)}}$ (১)

$$= \int \frac{\{1+\tan(3x/2)\}^2\{1+\tan^2(3x\backslash 2)\}dx}{1+\tan^2(3x\backslash 2)+2\tan(3x/2)}$$

$$= \int \frac{\{1+\tan(3x/2)\}^2\{1+\tan^2(3x\backslash 2)\}dx}{\{1+\tan(3x/2)\}^2}$$

$$= \int \{1+\tan^2(3x\backslash 2)\}dx = \int \sec^2(3x\backslash 2)dx$$

$= \frac{2}{3}\tan\frac{3x}{2} + c$ (২)

28. $\int \frac{2x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

ধরি, $\sin^{-1}x^2 = z$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}.2x\,dx = dz$ (১)

$$\Rightarrow \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = dz$$

$$\therefore \int \frac{2x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int z\,dz$$

$= \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2)^2 + c$ (Ans.) (১)

29. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int (\ln x)^{-2}d(\ln x)$ (১)

$= \frac{(\ln x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$ (১)

30(a) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin^{-1}x\,d(\sin^{-1}x)$ (১)

$= \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$ (১)

(b) $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$ [প্র.ভ.প.'১৩]

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$$

$= \int (1+\tan x)^{-2}\,d(1+\tan x)$ (১)

$= \frac{(1+\tan x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{1+\tan x} + c$ (১)

(c) ধরি, $I = \int \frac{\cos 2x}{(\sqrt{\sin 2x+3})^3}dx$ [প্র.ভ.প.'১৫]

এবং $\sin 2x + 3 = z$. তাহলে, $2\cos 2x\,dx = dz$ এবং

$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz$ (১)

$$=\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+c=\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+c=-\frac{1}{\sqrt{z}}+c \quad (১)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\sin 2x+3}}+c$$

31. (a) $\int \operatorname{cosec}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{1/2}\ln|\tan(\frac{x/2}{2})|+c$ (২)

$=2\ln|\tan\frac{x}{4}|+c$

31(b) $\int \sec\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int \sec(\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx)$ (১)

$=2\ln|\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}|+c$ (১)

31(c) $\int(\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x-2})dx$

$=3\ ln|x-1|-4\ ln|x-2|+c$ (১)

31(d) $\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\int\frac{(-\sin x dx)}{1+\cos x}$ (১)

$=-ln|1+\cos x|+c$ (১)

32. $\int\frac{1}{x\ln x}dx$

$=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}\quad[\because d(\ln x)=\frac{1}{x}dx]$ (১)

$=\ln(\ln x)+c$ (১)

33. (a) $\int\frac{dx}{16+x^2}=\int\frac{dx}{4^2+x^2}=\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{4}+c$ (১)

33(b) $\int\frac{4}{16a^2+x^2}dx=4\int\frac{dx}{(4a)^2+x^2}$

$=4.\frac{1}{4a}\tan^{-1}\frac{x}{4a}+c=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{4a}+c$ (১)

33(c) $\int\frac{x^2\,dx}{e^{x^3}+e^{-x^3}}$ [প্র.ভ.প. '৮৯,'০১]

$=\int\frac{x^2e^{x^3}dx}{e^{x^3}(e^{x^3}+e^{-x^3})}=\int\frac{x^2e^{x^3}dx}{(e^{x^3})^2+1}$

$=\int\frac{d(e^{x^3})}{1+(e^{x^3})^2}.\frac{1}{3}\quad[\because d(e^{x^3})=e^{x^3}3x^2\,dx]$ (১)

$=\frac{1}{3}\tan^{-1}(e^{x^3})+c$ (১)

34 (a) $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+25-9}$

$=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2}=\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+3}{4}+c$ (২)

34(b) $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$ [প্র.ভ.প.'০০]

$=\frac{1}{18}\int\frac{(x^2+9)-(x^2-9)}{(x^2+9)^2}dx$

$=\frac{1}{18}\{\int\frac{x^2+9}{(x^2+9)^2}dx-\int\frac{x^2-9}{(x^2+9)^2}dx\}$ (১)

$=\frac{1}{18}\{\int\frac{dx}{x^2+9}-\int\frac{x^2(1-\frac{9}{x^2})}{x^2(x+\frac{9}{x})^2}dx$ (১)

$=\frac{1}{18}\{\int\frac{dx}{x^2+3^2}-\int\frac{d(x+\frac{9}{x})}{(x+\frac{9}{x})^2}\}$ (১)

$=\frac{1}{18}\{\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}-(-\frac{1}{x+\frac{9}{x}})\}+c$ (১)

$=\frac{1}{18}(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x}{x^2+9})+c$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, $x=3\tan\theta$. তাহলে

$\theta=\tan^{-1}\frac{x}{3}$ এবং $dx=3\sec^2\theta\,d\theta$ (১)

$\therefore\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}=\int\frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{(9\tan^2\theta+9)^2}$

$=\int\frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{81(\tan^2\theta+1)^2}=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{27\sec^4\theta}$

$=\frac{1}{27}\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{27}\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$ (১)

$$=\frac{1}{54}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+c \quad (১)$$

$$=\frac{1}{54}(\theta+\frac{1}{2}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta})+c$$

$$=\frac{1}{54}(\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x/3}{1+x^2/9})+c$$

$$=\frac{1}{54}(\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{3x}{9+x^2})+c \quad (১)$$

35. $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$$=\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2+2-\frac{9}{4}}=\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2} \quad (১)$$

$$=\frac{1}{2.\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|+c=\ln|\frac{x-2}{x-1}|+c \quad (১)$$

36(*a*) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+12}}$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{7}{2})^2+12-\frac{49}{4}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}} \quad (১)$$

$$=\ln|\sqrt{(x+\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})}+x+\frac{7}{2}|+c$$

$$=\ln|\sqrt{x^2+7x+12}+x+\frac{7}{2}|+c \quad (১)$$

36(b) $\int\sqrt{16-9x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(4)^2-(3x)^2}\,d(3x) \quad (১)$$

$$=\frac{1}{3}[\frac{3x\sqrt{4^2-(3x)^2}}{2}+\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{3x}{4}]+c \quad (১)$$

$$=\frac{x\sqrt{16-9x^2}}{2}+\frac{8}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4}+c \text{ (Ans.)}$$

37(a) $\int\frac{xdx}{\sqrt{4+x}}=\int\frac{4+x-4}{\sqrt{4+x}}dx$ (১)

$$=\int(\frac{4+x}{\sqrt{4+x}}-\frac{4}{\sqrt{4+x}})dx$$

$$=\int\sqrt{4+x}dx-4\int\frac{1}{\sqrt{4+x}}dx$$

$$=\frac{(4+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-4.2\sqrt{4+x}+c \quad (২)$$

$$=\frac{2}{3}(4+x)^{3/2}-8\sqrt{4+x}+c$$

37(b) $\int\frac{6x-10}{(2x+1)^2}dx=\int\frac{3(2x+1)-13}{(2x+1)^2}dx$ (১)

$$=\int\frac{3}{2x+1}dx-\int\frac{13}{(2x+1)^2}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}-\frac{13}{2}\int(2x+1)^{-2}d(2x+1) \quad (১)$$

$$=\frac{3}{2}\ln|2x+1|-\frac{13}{2}\frac{(2x+1)^{-2+1}}{-2+1}+c \quad (২)$$

$$=\frac{3}{2}\ln|2x+1|+\frac{13}{2(2x+1)}+c \text{ (Ans.)}$$

(c) $\int\frac{x\,dx}{4-x}=\int\frac{-(4-x-4)}{4-x}dx$ [প্র.ভ.প'৮৮] (১)

$$=-\int\frac{4-x}{4-x}dx+4\int\frac{dx}{4-x}$$

$$=-\int dx-4\int\frac{d(4-x)}{4-x}=-x-4\ln|4-x|+c \quad (২)$$

38. ধরি, $I=\int\frac{\sqrt{x+3}}{x+2}dx$ এবং $x+3=z^2$ তাহলে,

$dx=2zdz$ এবং $I=\int\frac{\sqrt{z^2}\,2zdz}{z^2-3+2}$ (১)

$$\Rightarrow I=\int\frac{2z^2dz}{z^2-1}=2\int\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz \quad (১)$$

$$=2\int dz+2\int\frac{1}{z^2-1}dz$$

$$=2z+2.\frac{1}{2.1}\ln|\frac{z-1}{z+1}|+c \quad (২)$$

$$=2\sqrt{x+3}+\ln|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}|+c$$

39. ধরি, $I=\int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$ এবং

$2x+3=\frac{1}{z}$ তাহলে $z=\frac{1}{2x+3}$ এবং

$2dx=-\frac{1}{z^2}dz \Rightarrow dx=-\frac{dz}{2z^2}$ (১)

$\therefore I=\int\frac{-dz/2z^2}{\frac{1}{z}\sqrt{(\frac{1-3z}{2z})^2+3.\frac{1-3z}{2z}+2}}$

$=-\int\frac{dz}{2z\sqrt{\frac{1-6z+9z^2}{4z^2}+\frac{3-9z}{2z}+2}}$

$=-\int\frac{dz}{2z\sqrt{\frac{1-6z+9z^2+6z-18z^2+8z^2}{4z^2}}}$

$=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\cos^{-1}z+c$ (১)

$=\cos^{-1}(\frac{1}{2x+3})+c=\sec^{-1}(2x+3)+c$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$

$=\int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{\frac{1}{4}(4x^2+12x+8)}}$

$=\int\frac{dx}{(2x+3)\frac{1}{2}\sqrt{(2x+3)^2-1}}$

$=\int\frac{d(2x+3)}{(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2-1}}$ (১)

$=\sec^{-1}(2x+3)+c$ (১)

40(a) ধরি, $I=\int\frac{1+x^{1/4}}{1+x^{1/2}}dx$ এবং $x=z^4$. তাহলে,

$dx=4z^3dz$ এবং (১)

$I=\int\frac{(1+z)4z^3dz}{1+z^2}=4\int\frac{z^4+z^3}{1+z^2}dz$

$=4\int\frac{z^2(z^2+1)-(z^2+1)+z(z^2+1)-z-1}{1+z^2}dz$ (১)

$=4\{\int(z^2-1+z)dz-\int\frac{zdz}{z^2+1}-\int\frac{dz}{z^2+1}\}$

$=4\{\frac{z^3}{3}-z+\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(z^2+1)-\tan^{-1}z\}+c$ (২)

$=4\{\frac{x^{3/4}}{3}-x^{1/4}+\frac{x^{1/2}}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^{1/2}+1)$

$-\tan^{-1}x^{1/4}\}+c$

40(b) ধরি, $I=\int\frac{dx}{x(x^3+2)}$ এবং $x^3=\frac{1}{z}$ (১)

তাহলে, $3x^2dx=-\frac{1}{z^2}dz \Rightarrow x^2dx=-\frac{dz}{3z^2}$ (১)

এবং $I=\int\frac{x^2dx}{x^3(x^3+2)}=\int\frac{-\frac{dz}{3z^2}}{\frac{1}{z}(\frac{1}{z}+2)}$

$=-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+2z}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2z)}{1+2z}$ (১)

$=-\frac{1}{6}\ln|1+2z|+c=-\frac{1}{6}\ln|1+\frac{2}{x^3}|+c$ (১)

40(c) ধরি, $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{2+3\sqrt{x}}}$ এবং $\sqrt{x}=\frac{1}{z^2}$

তাহলে, $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\frac{2}{z^3}dz \Rightarrow \frac{z^2}{2}dx=-\frac{2}{z^3}dz$ (১)

$\Rightarrow dx=-\frac{4dz}{z^5}$ এবং $I=\int\frac{-\frac{4dz}{z^5}}{\frac{1}{z^4}\sqrt{2+\frac{3}{z^2}}}$

$=-4\int\frac{dz}{\sqrt{2z^2+3}}=-4\int\frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{z^2+(\sqrt{3/2})^2}}$

$=-2\sqrt{2}\ln|z+\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}|+c$ (১)

$=-2\sqrt{2}\ln|\frac{1}{x^{1/4}}+\sqrt{\frac{1}{x^{1/2}}+\frac{3}{2}}|+c$

40(d) ধরি, $I=\int\frac{dx}{x+x^n}, n\neq 1$ এবং $x^{n-1}=\frac{1}{z}$

তাহলে, $(n-1)x^{n-2}dx=-\frac{dz}{z^2}$ (১)

$\Rightarrow x^{n-2}dx=\frac{-dz}{(n-1)z^2}$

এবং $I=\int\frac{dx}{x(1+x^{n-1})}=\int\frac{x^{n-2}dx}{x^{n-1}(1+x^{n-1})}$

$=\int\frac{-\frac{dz}{(n-1)z^2}}{\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z})}=-\frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{1+z}$

$=-\frac{1}{n-1}\ln|1+z|+c$ (১)

$=-\frac{1}{n-1}\ln|1+\frac{1}{x^{n-1}}|+c$

41(a) ধরি, $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^3+4}}$ এবং $x^3=\frac{1}{z^2}$.

তাহলে, $3x^2dx=-\frac{2dz}{z^3}\Rightarrow x^2dx=-\frac{2dz}{3z^3}$ এবং (১)

$I=\int\frac{x^2dx}{x^3\sqrt{x^3+4}}=\int\frac{-\frac{2dz}{3z^3}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{1}{z^2}+4}}$

$=-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{1+4z^2}}=-\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+z^2}}$

$=-\frac{1}{3}\ln|z+\sqrt{\frac{1}{4}+z^2}|+c$

$=-\frac{1}{3}\ln|\frac{1}{x^{3/2}}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x^3}}|+c$ (১)

41(b) $\int\frac{dx}{x^3(3+5x)^2}$

ধরি, $3+5x=zx\Rightarrow(z-5)x=3$

$\Rightarrow x=\frac{3}{z-5}$. তাহলে, $dx=-\frac{3dz}{(z-5)^2}$ এবং (১)

$\int\frac{dx}{x^3(3+5x)^2}=\int\frac{\frac{-3dz}{(z-5)^2}}{\frac{27}{(z-5)^3}(3+5\frac{3}{z-5})^2}$

$=\int\frac{-3(z-5)^3dz}{27(3z-15+15)^2}$

$=-\frac{1}{81}\int\frac{z^3-15z^2+75z-125)dz}{z^2}$

$=-\frac{1}{81}\int(z-15+\frac{75}{z}-125\frac{1}{z^2})dz$

$=-\frac{1}{81}\{\frac{z^2}{2}-15z+75\ln|z|-125(-\frac{1}{z})\}+c$ (২)

$=-\frac{1}{81}\{\frac{1}{2}(\frac{3+5x}{x})^2-15(\frac{3+5x}{x})+$
$75\ln|\frac{3+5x}{x}|+125(\frac{x}{3+5x})\}+c$ (১)

42(a) $\int\frac{a^2+x^2}{(x^2-a^2)^2}dx=\int\frac{x^2(1+\frac{a^2}{x^2})}{x^2(x-\frac{a^2}{x})^2}dx$

$=\int\frac{d(x-\frac{a^2}{x})}{(x-\frac{a^2}{x})^2}=-\frac{1}{x-\frac{a^2}{x}}+c=-\frac{x}{x^2-a^2}+c$ (২)

42(b) $\int\frac{(x^2-1)dx}{x^4+6x^3+7x^2+6x+1}$

$=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+6(x+\frac{1}{x})+7}$ (১)

$=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x})^2+6(x+\frac{1}{x})+5}$

$=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x}+3)^2+5-9}=\int\frac{d(x+\frac{1}{x}+3)}{(x+\frac{1}{x}+3)^2-2^2}$ (১)

$$=\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+3-2}{x+\frac{1}{x}+3-2}\right|+c \quad (১)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+1+x}{x^2+1+5x}\right|+c$$

43(a) $\int\cot^2 x dx=\int(\cos ec^2 x-1)dx$

$$=-\cot x-x+c \quad (১)$$

43(b) $\int\tan^2\frac{x}{2}dx=\int(\sec^2\frac{x}{2}-1)dx$

$$=2\int\sec^2\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})-\int dx=2\tan\frac{x}{2}-x+c \quad (২)$$

43(c) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx$

$$=\int\tan x\sec x dx+\int\cos ec x\, dx$$

$$=\sec x+\ln(\cos ec x-\cot x)+c \quad (২)$$

44(a) $\int\frac{dx}{4-5\sin^2 x}=\int\frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x(4-5\sin^2 x)}$

$$=\int\frac{\sec^2 dx}{4\sec^2 x-5\tan^2 x}$$

$$=\int\frac{\sec^2 dx}{4(1+\tan^2 x)-5\tan^2 x}=\int\frac{\sec^2 dx}{4-\tan^2 x}$$

$$=\int\frac{d(\tan x)}{2^2-(\tan x)^2}=\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2+\tan x}{2-\tan x}\right|+c \quad (২)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan x}{2-\tan x}\right|+c$$

44(b) $\int\frac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-1}{\sin x+\cos x}dx \quad (১)$$

$$=\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int(\sin x+\cos x-\frac{1}{\sin x+\cos x})dx$$

$$=\cos x-\sin x-\int\frac{dx}{\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})} \quad (১)$$

$$=\cos x-\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} \quad (১)$$

$$=\cos x-\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\cos ec(x+\frac{\pi}{4})dx$$

$$=\cos x-\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan\frac{1}{2}(x+\frac{\pi}{4})|+c \quad (১)$$

$$=\cos x-\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})|+c$$

45. ধরি, $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ এবং

$x=\sin^2\theta$. তাহলে $dx=2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$,

$\sin\theta=\sqrt{x}\Rightarrow\theta=\sin^{-1}\sqrt{x}$ এবং (১)

$$I=\int\frac{2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$=\int\frac{2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\int\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

$$=\int(\sin\theta+\cos\theta-\frac{1}{\sin x+\cos x})d\theta$$

$$=\cos\theta-\sin\theta-\int\frac{d\theta}{\sqrt{2}(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})} \quad (১)$$

$$=\cos\theta-\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\theta}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})} \quad (১)$$

$$=\cos\theta-\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\cos ec(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta$$

$$=\sqrt{1-\sin^2\theta}-\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan\frac{1}{2}(\theta+\frac{\pi}{4})|+c \quad (১)$$

$$=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\tan(\frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x}+\frac{\pi}{8})|+c$$

প্রশ্নমালা X C

[সূত্র (MCQ এর ক্ষেত্রে) ঃ $\int x^m e^{nx}dx = \{\frac{1}{n}x^m - \frac{1}{n^2}\frac{d}{dx}(x^m) + \frac{1}{n^3}\frac{d^2}{dx^2}(x^m) - \frac{1}{n^4}\frac{d^3}{dx^3}(x^m) + \dots \dots\} e^{nx}$]

1.(a) $\int xe^x dx$

$= x\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\}dx$

$= xe^x - \int 1.e^x dx = xe^x - e^x + c$

(b) $\int x^2 e^x dx$ [কু.'০৪; সি.'০৯]

$= x^2\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^x dx\}dx$

$= x^2e^x - \int (2x)e^x dx$

$= x^2e^x - 2[x\int e^x - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\}dx]$

$= x^2e^x - 2[xe^x - \int 1.e^x dx]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

(c) $\int x^2 e^{-3x} dx$

$= x^2\int e^{-3x}dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^{-3x}dx\}dx$

$= x^2(-\frac{1}{3})e^{-3x} - \int(2x)(-\frac{1}{3})e^{-3x}dx$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}[x\int e^{-3x} - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-3x}dx\}dx]$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}[x(-\frac{e^{-3x}}{3}) - \int(-\frac{e^{-3x}}{3})dx]$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}[\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{e^{-3x}}{3})] + c$

$= -\frac{1}{3}(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9})e^{-3x} + c$

(d) ধরি, $I = \int x^3 e^{x^2} dx$ এবং $x^2 = z$. তাহলে $2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz$ এবং

$I = \int x^2 e^{x^2}(xdx) = \frac{1}{2}\int ze^z dz$

$= \frac{1}{2}[z\int e^z dz - \int\{\frac{d}{dz}(z)\int e^z dz\}dz]$

$= \frac{1}{2}[ze^z - \int 1.e^z dz] = \frac{1}{2}(ze^z - e^z) + c$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + c$

2. সূত্র (MCQ এর জন্য)ঃ $\int x^n \sin xdx$

$= x^n(-\cos x) - (nx^{n-1})(-\sin x) + \cdots$

(a) $\int x\sin 3xdx$

$= x\int \sin 3xdx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin 3x\, dx\}dx$

$= x(-\frac{1}{3}\cos 3x) - \int 1.(-\frac{1}{3}\cos 3x)dx$

$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\sin 3x) + c$

$= \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x + c$

(b) $\int x^3 \sin x\, dx$

$= x^3\int \sin xdx - \int\{\frac{d}{dx}(x^3)\int \sin x\, dx\}dx$

$= x^3(-\cos x) - \int 3x^2(-\cos x)dx$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\int \cos x - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int \cos x\, dx\}dx]$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\sin x - \int 2x\sin xdx]$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\sin x - 2\{x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx\}]$

$= -x^3\cos x + 3[x^2\sin x -$

$2(-x\cos x+\sin x)]+c$

$=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

[MCQ এর ক্ষেত্রে, $\int x^3\sin x\,dx=x^3(-\cos x)$
$-(3x^2)(-\sin x)+(6x)(\cos x)-6\sin x$
$=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c]$.

(c) ধরি, $I=\int e^{2x}\cos e^x dx$ এবং $e^x=z$.

তাহলে $e^x dx=dz$ এবং

$I=\int e^x\cos e^x\,(e^x dx)=\int z\cos z\,dz$

$=z\int\cos z\,dz-\int\{\frac{d}{dz}(z)\int\cos z\,dz\}dz$

$=z\sin z-\int 1.\sin z\,dz$

$=z\sin z-(-\cos z)+c$

$=e^x\sin e^x+\cos e^x+c$

(d) ধরি, $I=\int\sin\sqrt{x}\,dx$ এবং $\sqrt{x}=z$

তাহলে $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dz\Rightarrow dx=2z\,dz$ এবং

$I=\int 2z\sin z\,dz$

$=2[z\int\sin z\,dz-\int\{\frac{d}{dz}(z)\int\sin z\,dz\}dz]$

$=2[z(-\cos z)-\int 1.(-\cos z)dz]$

$=-2z\cos z+2\sin z+c$

$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+c$

3 (a) $\int x\sin^2\frac{x}{2}dx$ [য.বো.'০২]

$=\int x\frac{1}{2}(1-\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}\int x dx-\frac{1}{2}\int x\cos x\,dx$

$=\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}[x\int\cos x\,dx-\int\{\frac{d}{dx}(x)\int\cos x dx\}dx]$

$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}[x\sin x-\int 1.\sin x\,dx]$

$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}[x\sin x-(-\cos x)]+c$

$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x+c$

(b) $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx=\int x^2\frac{1}{2}(1+\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}[\int x^2dx+\int x^2\cos x dx]$

$=\frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}+x^2(\sin x)-(2x)(-\cos x)+(2)(-\sin x)]+c$

$=\frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}+x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x]+c$

(c) $\int x\cos 2x\cos 3x dx$

$=\int x\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}[x\int\cos 5x dx-\int\{\frac{d}{dx}(x)\int\cos 5x dx\}dx$
$+x\int\cos x dx-\int\{\frac{d}{dx}(x)\int\cos x dx\}dx]$

$=\frac{1}{2}[x(\frac{\sin 5x}{5})-\int 1.(\frac{\sin 5x}{5})dx$
$+x\sin x-\int 1.\sin x dx]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{5}x\sin 5x+\frac{\cos 5x}{25}+x\sin x+\cos x]+c$

4. (a) $\int x\sec^2 x dx$ [ঢা.'০১,'১৪]

$=x\int\sec^2 x dx-\int\{\frac{d}{dx}(x)\int\sec^2 x dx\}dx$

$=x\tan x-\int 1.\tan x dx$

$=x\tan x+\ln|\cos x|+c$

4.(b) $\int x\sec^2 3x\,dx$ [ঢা.'০১]

$=x\int\sec^2 3x dx-\int\{\frac{d}{dx}(x)\int\sec^2 3x dx\}dx$

$=x\frac{\tan 3x}{3}-\int 1.\frac{\tan 3x}{3}dx$

$=\frac{x}{3}\tan 3x+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+c$

(c) $\int x\tan^2 xdx$ [রা.'০৫; সি.'০৫]

$= \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x\sec^2 xdx - \int xdx$

$= x\int \sec^2 xdx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \sec^2 xdx\}dx - \frac{x^2}{2}$

$== x\tan x - \int 1.\tan xdx - \frac{x^2}{2}$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$.

(d) ধরি, $\text{I} = \int \cos ec^3 x\, dx$

$= \int \cos ec^2 x \cos ecx\, dx$

$= \cos ecx \int \cos ec^2 x\ \ dx -$

$\int\{\frac{d}{dx}(\cos ecx)\int \cos ec^2 xdx\}dx$

$= -\cos ecx\cot x - \int(-\cos ecx\cot x).(-\cot x)dx =$

$-\cos ecx\cot x - \int \cos ecx(\cos ec^2 x - 1)dx$

$= -\cos ecx\cot x - \int \cos ec^3 xdx + \int \cos ecxdx$

$\Rightarrow \text{I} = -\cos ecx\cot x - \text{I} + \ln|\tan\frac{x}{2}| + c_1$

$\Rightarrow 2\text{I} = -\cos ecx\cot x + \ln|\tan\frac{x}{2}| + c_1$

$\Rightarrow \text{I} = -\frac{1}{2}\cos ecx\cot x + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{\pi}{2}| + \frac{1}{2}c_1$

$\Rightarrow \text{I} = -\frac{1}{2}\cos ecx\cot x + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{\pi}{2}| + c$

5. সূত্র (MCQ এর জন্য)ঃ

$$\int x^n \ln xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1})$$

(a) $\int x\ln xdx$ [য.'০৩; ঢা.'০৬; ব.'০৮]

$= \ln x\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int xdx\}dx$

$= \ln x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

(b) $\int x^n \ln xdx$ [প্র.ভ.প.'১৩]

$= \ln x\int x^n dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^n dx\}dx$

$= \ln x.\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^{n+1}}{n+1}dx$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}.\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$

(c) $\int x^2(\ln x)^2 dx$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= (\ln x)^2\int x^2 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)^2\int x^2 dx\}dx$

$= (\ln x)^2\frac{x^3}{3} - \int 2\ln x.\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\ln xdx$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 -$

$\frac{2}{3}[\ln x\int x^2 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^2 dx\}dx]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\ln x.\frac{x^3}{3} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3}] + c$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}] + c$

$= \frac{x^3}{27}[9(\ln x)^2 - 6\ln x + 2] + c$

(d) $\int(\ln x)^2 dx$ [য.'০৫; চ.'০৭; প্র.ভ.প. '১০]

$= (\ln x)^2\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)^2\int dx\}dx$

$= (\ln x)^2 . x - \int 2 \ln x . \frac{1}{x} . x dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx$

$= x(\ln x)^2 - 2[\ln x \int dx - \int \{\frac{d}{dx}(\ln x) \int dx\} dx] =$

$x(\ln x)^2 - 2[\ln x . x - \int \frac{1}{x} . x dx]$

$= x(\ln x)^2 - 2[x \ln x - \int dx]$

$= x(\ln x)^2 - 2[x \ln x - x] + c$

$= x\{(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\} + c$

(e) ধরি, $I = \int \frac{\ln(\ln x) dx}{x}$ এবং $\ln x = z$.

তাহলে $\frac{1}{x} dx = dz$ এবং $I = \int \ln z \, dz$

$\Rightarrow I = \ln z \int dz - \int \{\frac{d}{dz}(\ln z) \int dz\} dz$

$= \ln z . z - \int \frac{1}{z} . z dz = z \ln z - \int dz$

$= z \ln z - z + c = \ln x\{\ln(\ln x) - 1\} + c$

(f) ধরি, $I = \int \frac{\ln \sec^{-1} x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$ [ঢা.'০৮; সি.'১৪]

এবং $\sec^{-1} x = z \Rightarrow \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = dz$

$\therefore I = \int \ln z \, dz$

$= \ln z \int dz - \int \{\frac{d}{dz}(\ln z) \int dz\} dz$

$= \ln z . z - \int \frac{1}{z} . z dz = z \ln z - \int dz$

$= z \ln z - z + c$

$= \{\ln(\sec^{-1} x) - 1\} \sec^{-1} x + c$

6(a) $\int \tan^{-1} x dx$ [কু.'০২; ঢা.'০৪; ব.'১০]

$= \tan^{-1} x \int dx - \int \{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \int dx\} dx$

$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1 + x^2} dx$

$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{(0 + 2x) dx}{1 + x^2}$

$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$

(b) $\int x \sin^{-1} x dx$ [ঢা.'০৭]

$= \sin^{-1} x \int x dx - \int \{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) \int x dx\} dx$

$= \sin^{-1} x . \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} . \frac{x^2}{2} dx$

$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2}[\int \sqrt{1 - x^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx]$

$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x -$

$- \sin^{-1} x] + c$

$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} x] + c$

(c) $\int \sin^{-1} x \, dx$ [সি.'০৩; য.'১০; ঢা.'১৪]

$= \sin^{-1} x \int dx - \int \{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) \int dx\} dx$

$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$= x \sin^{-1} x - (-\frac{1}{2}) \int \frac{(0 - 2x) dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} . 2\sqrt{1 - x^2} + c$

$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(d) $\int \cos^{-1} x dx$ [কু. '০৫,'১৪; চ.'০৬; য.'০৮; রা.'১০]

$= \cos^{-1} x \int dx - \int \{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) \int dx\} dx$

$= x \cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$= x\cos^{-1}x + (-\frac{1}{2})\int \frac{(0-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\cos^{-1}x - \frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2} + c$

$= x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

(e) $\int x\sin^{-1}x^2 dx$

[ঢা.'০৫; রা.'০৬; প্র.ভ.প. '০৪,'০৬]

$= \sin^{-1}x^2\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x^2)\int xdx\}dx$

$= \sin^{-1}x^2.\frac{x^2}{2} - \int\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 - \int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 - (-\frac{1}{4})\int\frac{d(1-x^4)}{\sqrt{1-x^4}}$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{4}.2\sqrt{1-x^4} + c$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c$

6.(f) $\int x\tan^{-1}xdx$

[য.'০৬;সি. '০৪,'০৮; রা.'০৬ ; কু.'১০ ; ব.'১১]

$=\tan^{-1}x\int x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x\,dx\}\,dx$

$=\tan^{-1}x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\,dx$

$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x-\tan^{-1}x)+c$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + c$ (Ans.)

7(a) $\int e^x\cos x\,dx$ [ঢা.'০২;প্র.ভ.প.'০৪,'০৬]

ধরি, $I = \int e^x\cos x\,dx$

$= e^x\int\cos x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\cos x\,dx\}\,dx$

$= e^x\sin x - \int e^x\sin dx$

$= e^x\sin x - e^x\int\sin x\,dx + \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\sin x\,dx\}\,dx$

$= e^x\sin x - e^x(-\cos x) + \int e^x(-\cos x)\,dx$

$= e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$

$= e^x\sin x + e^x\cos x - I + c_1$

$\Rightarrow 2I = e^x\sin x + e^x\cos x + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x) + \frac{1}{2}c_1$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c$

7(b) $\int e^x\sin xdx$ [কু.'০৮,'১৩; যা.'০৯; রা.,দি.'১৪]

ধরি, $I = \int e^x\sin xdx$

$= e^x\int\sin x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\sin x\,dx\}\,dx$

$= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\,dx$

$= -e^x\cos x + e^x\int\cos x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\cos x\,dx\}\,dx$

$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin xdx$

$= e^x(\sin x-\cos x) - I + c_1$

$\Rightarrow 2I = e^x(\sin x-\cos x) + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x) + \frac{1}{2}c_1$

$\therefore \int e^x\sin xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$

7(c) $\int e^{2x}\sin xdx$ [সি.'০২]

ধরি, $I = \int e^{2x}\sin xdx$

$= e^{2x}\int\sin x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^{2x})\int\sin x\,dx\}\,dx$

$= e^{2x}(-\cos x) - \int 2e^{2x}(-\cos x)\,dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\int \cos x\,dx -$

$2\int\{\frac{d}{dx}(e^{2x})\int \cos x\,dx\}\,dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 2\int 2e^{2x}\sin x dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x dx$

$= e^{2x}(2\sin x - \cos x) - 4\text{I} + c_1$

$\Rightarrow 5\text{I} = e^{2x}(2\sin x - \cos x) + c_1$

$\Rightarrow \text{I} = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + \frac{1}{5}c_1$

$\therefore \text{I} = \int e^{2x}\sin x dx = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + \text{c}$

7(d) $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx = \int e^{2x}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}[\int e^{2x}dx + \int e^{2x}\cos 2x\,dx\,]$

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2^2+2^2}(2\cos 2x + 2\sin 2x)] + c$

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{8}(2\cos 2x + 2\sin 2x)] + c$

$= \frac{1}{8}(2 + \cos 2x + \sin 2x)e^{2x} + c$

8(a) $\int e^x(\sin x + \cos x)dx$

[সি.'০৫,'১১; ঢা.'১০; কু.'১১]

$= \int e^x \sin x dx + \int e^x \cos x dx$

$= \int e^x \sin x dx + e^x\int \cos x dx -$

$\int\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \cos x dx\}dx$

$= \int e^x \sin x dx + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

$= e^x \sin x + \text{c}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

ধরি, $f(x) = \sin x$. $\therefore f'(x) = \cos x$ এবং

$\int e^x(\sin x + \cos x)dx = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx$

$= e^x f(x) + c = e^x \sin x + c$

8(b) ধরি, $\text{I} = \int e^x \sec x(1+\tan x)dx$

[রা.'০৩; য.'১১;চ.'১৩; প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $f(x) = \sec x$. $\therefore f'(x) = \sec x \tan x$ এবং

$\text{I} = \int e^x(\sec x + \sec x \tan x)dx$

$= \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

$\therefore \int e^x \sec x(1+\tan x)dx = e^x \sec x + c$

8.(c) ধরি, $\text{I} = \int e^x(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})$ এবং

$f(x) = \tan^{-1} x \;\; \therefore f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ এবং

$\text{I} = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

$\therefore \int e^x(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2}) = e^x \tan^{-1} x + c$

8(d) $\int e^x\{\tan x - \ln(\cos x)\}\,dx$ [প্র.ভ.প.'৯২]

ধরি, $\text{I} = \int e^x\{\tan x - \ln(\cos x)\}\,dx$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

$f(x) = -\ln(\cos x)$

$\therefore f'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$ এবং

$\text{I} = \int e^x\{-\ln(\cos x) + \tan x\}dx$

$= \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

$\therefore \int e^x\{\tan x + \ln(\sec x)\}dx = -e^x \ln(\cos x) + c$

9(a) $\int \frac{e^x}{x}(1 + x\ln x)dx$ [ব. '০১; য.'০৭; দি.'১৩]

ধরি, $\text{I} = \int \frac{e^x}{x}(1 + x\ln x)dx = \int e^x(\frac{1}{x} + \ln x)dx$

এবং $f(x) = \ln x$. তাহলে $f'(x) = \frac{1}{x}$ এবং

$\text{I} = \int e^x(\ln x + \frac{1}{x})dx = \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx$

$= e^x f(x) + c = e^x \ln x + c$

$\therefore \int \frac{e^x}{x}(1 + x\ln x)dx = e^x \ln x + c$

9(b) $\int e^{-2x}(\frac{1}{x}-2\ln x)\,dx$ [কু.'০২]

$= \int e^{-2x}.\frac{1}{x}dx - 2\int e^{-2x}\ln x\,dx$

$= e^{-2x}\int\frac{1}{x}dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^{-2x})\int\frac{1}{x}dx\}dx - 2\int e^{-2x}\ln x\,dx$

$= e^{-2x}\ln x - \int(-2e^{-2x})\ln x dx - 2\int e^{-2x}\ln x\,dx$

$= e^{-2x}\ln x + 2\int e^{-2x}\ln x dx - 2\int e^{-2x}\ln x dx$

$\therefore \int e^{-2x}(\frac{1}{x}-2\ln x)\,dx = e^{-2x}\ln x + c$

9(c) $\int e^{5x}\left\{5\ln x+\frac{1}{x}\right\}dx$ [চ.'০৯; প্র.ভ.প.'৯৯]

$= \int 5e^{5x}\ln x dx + \int e^{5x}\frac{1}{x}dx$

$= \int 5e^{5x}\ln x dx +$

$e^{5x}\int\frac{1}{x}dx - \int\{\frac{d}{dx}(e^{5x})\int\frac{1}{x}dx\}dx$

$= \int 5e^{5x}\ln x dx + e^{5x}\ln x - \int 5e^{5x}\ln x dx$

$\therefore \int e^{5x}\left\{5\ln x+\frac{1}{x}\right\}dx = e^{5x}\ln x + c$

10(a) $\int\frac{dx}{x^2+x}$ [ব.'০৩]

$= \int\frac{dx}{x(x+1)} = \int\{\frac{1}{x(0+1)}+\frac{1}{(x+1)(-1)}\}dx$

$= \int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx = \ln|x|-\ln|x+1|+c$

10(b) $\int\frac{x+35}{x^2-25}dx$ [চ.'০৪]

$= \int\frac{x+35}{(x-5)(x+5)}dx$

$= \int\{\frac{5+35}{(x-5)(5+5)}+\frac{-5+35}{(-5-5)(x+5)}\}dx$

$= \int\{\frac{40}{10(x-5)}-\frac{30}{10(x+5)}\}dx$

$= \int\{\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x+5}\}dx$

$= 4\ln|x-5|-3\ln|x+5|+c$

10(c) $\int\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}dx$ [ঢা.'০৯]

$= \int\{\frac{2.0-1}{x(0-1)(0-2)}+\frac{2.1-1}{1(x-1)(1-2)}+\frac{2.2-1}{2(2-1)(x-2)}\}dx$

$= \int\{-\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}\}dx$

$= -\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-2|+c$

10(d) $\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$ [রা.'১১; প্র.ভ.প.'৯১]

$= \int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$= \int\{\frac{1}{(x^2-1)(1+1)}+\frac{-1}{(-1-1)(x^2+1)}\}dx$

$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-1^2}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2.1}\ln|\frac{x-1}{x+1}|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

$= \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

10(e) ধরি, $I = \int\frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $e^x = z$. তাহলে $e^x dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$ এবং

$I = \int\frac{1}{z^2-3z}\frac{dz}{z} = \int\frac{dz}{z^2(z-3)}$

এখন ধরি, $\frac{1}{z^2(z-3)} \equiv \frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-3}$

$\therefore\ 1 \equiv Az(z-3)+B(z-3)+Cz^2 \cdots (1)$

(1) এ $z=3$ বসিয়ে পাই, $1 = 9C \Rightarrow C = \frac{1}{9}$

(1) এ $z=0$ বসিয়ে পাই, $1=-3B \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে z^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0=A+C \Rightarrow A=-C=-\frac{1}{9}$

$\therefore I=\int\{-\frac{1}{9}\frac{1}{z}-\frac{1}{3}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{9(z-3)}\}dz$

$=-\frac{1}{9}\ln|z|-\frac{1}{3}(-\frac{1}{z})+\frac{1}{9}\ln|z-3|+c$

$=\frac{1}{9}\ln|\frac{z-3}{z}|+\frac{1}{3z}+c$

$\therefore \int\frac{dx}{e^{2x}-3e^x}=\frac{1}{9}\ln|\frac{e^x-3}{e^x}|+\frac{1}{3e^x}+c$

11. $\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx$ [কু.,রা. '০২; ব.'০৫,'১০]

ধরি, $\frac{1}{x^2(x-1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$

$\Rightarrow 1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2\cdots(1)$

(1) এ $x=0$ বসিয়ে পাই, $1=-B \Rightarrow B=-1$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1=C \Rightarrow C=1$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0=A+C \Rightarrow A=-C=-1$

$\therefore \int\frac{1}{x^2(x-1)}dx=\int\{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\}dz$

$=-\ln|x|-(-\frac{1}{x})+\ln|x-1|+c$

$=\ln|\frac{x-1}{x}|+\frac{1}{x}+c$

12 ধরি, $I=\int\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}dx$ এবং

$\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}\equiv\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow x+2=A(x^2+4)+(Bx+C)(1-x)\cdots(1)$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1+2=5A \Rightarrow A=\frac{3}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0=A-B \Rightarrow B=A=\frac{3}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$2=4A+C \Rightarrow C=2-\frac{12}{5}=-\frac{2}{5}$

$\therefore I=\frac{3}{5}\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}}{x^2+4}dx$

$=-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+2^2}$

$=-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\ln(x^2+4)-\frac{2}{5.2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$

$=-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\ln(x^2+4)-\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$

13(a) $\int\frac{x^7}{(1-x^4)^2}dx=\int\frac{-x^3(1-x^4)+x^3}{(1-x^4)^2}dx$

$=\int\{\frac{-x^3}{1-x^4}+\frac{x^3}{(1-x^4)^2}\}dx$

$=\frac{1}{4}\int\frac{d(1-x^4)}{1-x^4}-\frac{1}{4}\int\frac{d(1-x^4)}{(1-x^4)^2}$

$=\frac{1}{4}\ln|1-x^4|-\frac{1}{4}(-\frac{1}{1-x^4})+c$

$=\frac{1}{4}(\ln|1-x^4|+\frac{1}{1-x^4})+c$

13(b) ধরি, $I=\int\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}dx=\int\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1}dx$

$=\int\frac{(x^2+2x+1)-6x+3}{x^2+2x+2}dx$

$=\int\{1-\frac{6x-3}{(x+1)^2}\}dx$ এবং

$\frac{6x-3}{(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow 6x-3=A(x+1)+B\cdots(1)$

(1) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই, $B=-6-3=-9$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$6=A \Rightarrow A=6$

$\therefore I=\int\{1-\frac{6}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\}dx$

$= x - 6\ln|x+1| - \dfrac{9}{x+1} + c$

13(c) ধরি, $I = \int \dfrac{\sin 2x\, dx}{3+5\cos x} = \int \dfrac{2\sin x\cos x\, dx}{3+5\cos x}$

এবং $\cos x = z$. তাহলে $-\sin x dx = dz$ এবং

$I = \int \dfrac{-2z\, dz}{3+5z} = -\dfrac{2}{5}\int \dfrac{3+5z-3}{3+5z} dz$

$= -\dfrac{2}{5}\int (1 - \dfrac{3}{3+5z}) dz$

$= -\dfrac{2}{5}(z - \dfrac{3}{5}\ln|3+5z|) + c$

$= \dfrac{2}{25}(3\ln|3+5z| - 5z) + c$

$= \dfrac{2}{25}(3\ln|3+5\cos x| - 5\cos x) + c$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন

নিচের যোগজগুলি মান নির্ণয় কর ঃ

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

$= \int \dfrac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})}$ (১)

$= \int \dfrac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})dx}{(x+a)-(x+b)}$

$= \int \dfrac{(x+a)^{1/2}-(x+b)^{1/2}}{a-b} dx$

$= \dfrac{1}{a-b}\left[\dfrac{(x+a)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \dfrac{(x+b)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + c$

$= \dfrac{2}{3(a-b)}[(x+a)^{3/2} - (x+b)^{3/2}] + c$ (১)

15. $\int 3\sin x\cos x dx$

$= \int \dfrac{3}{2}(2\sin x\cos x)dx = \dfrac{3}{2}\int \sin 2x dx$ (১)

$= \dfrac{3}{2}(-\dfrac{1}{2}\cos 2x) + c = -\dfrac{3}{4}\cos 2x + c$ (১)

16. (a) $\int 3\cos 3x\cos x\, dx$

$= \int \dfrac{3}{2}\{\cos(3x+x) + \cos(3x-x)\}\, dx$ (১)

$= \int \dfrac{3}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\, dx$

$= \dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{4}\sin 4x + \dfrac{1}{2}\sin 2x) + c$

$= \dfrac{3}{8}(\sin 4x + 2\sin 2x) + c$ (১)

16(b) $\int \cos^2\dfrac{x}{2} dx = \int \dfrac{1}{2}(1+\cos x)dx$ (১)

$= \dfrac{1}{2}(x + \sin x) + c$ (১)

17(a) $\int \cos x\cos(\sin x)dx$

$= \int \cos(\sin x)\, d(\sin x) = \cos(\sin x) + c$ (২)

(b) ধরি, $I = \int (e^x + \dfrac{1}{x})(e^x + \ln x)\, dx$ [রা.'০১]

এবং $e^x + \ln x = z$.

তাহলে $(e^x + \dfrac{1}{x})dx = dz$ এবং (১)

$I = \int z\, dz = \dfrac{1}{2}z^2 + c = \dfrac{1}{2}(e^x + \ln x)^2 + c$ (১)

18. $\int e^{3\cos 2x}\sin 2x\, dx$

$= -\dfrac{1}{6}\int e^{3\cos 2x}(-6\sin 3x dx)$ (১)

$= -\dfrac{1}{6}e^{3\cos 2x} + c$ (১)

19(a) ধরি, $I = \int \sin^3 x\cos x dx$

এবং $\sin x = z$. তাহলে, $\cos x\, dx = dz$ এবং (১)

$I = \int z^3\, dz = \dfrac{1}{4}z^4 + c = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + c$ (১)

19(b) ধরি, $I = \int \tan^3 x\sec^2 x dx$ এবং $\tan x = z$ (১)

তাহলে, $\sec^2 x\, dx = dz$ এবং

$I = \int z^3 dz = \frac{z^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}\tan^4 x + c$ (১)

19(c) $\int \sin^2(3x+2)dx$

$= \int \frac{1}{2}\{1-\cos 2(3x+2)\}dx$ (১)

$= \frac{1}{2}\{\int dx - \int \cos(6x+4)dx\}$

$= \frac{1}{2}\{x - \frac{\sin(6x+4)}{6}\} + c$ (১)

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin(6x+4) + c$

20.(a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x)$ (১)

$= \frac{(\ln x)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$ (১)

20(b) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

$= \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} d(1+\ln x)$ (১)

$= \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} + c$ (১)

20(c) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos(\ln x)\, d(\ln x)$ (১)

$= \sin(\ln x) + c$ (১)

21. $\int \frac{e^{-x}dx}{(5+e^{-x})^2}$

$= \int (5+e^{-x})^{-2}\, d(5+e^{-x}).(-1)$ (১)

$= -\frac{(5+e^{-x})^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{5+e^{-x}} + c$ (১)

22. $\int \frac{e^x(1+x)dx}{\cos^2(xe^x)}$

ধরি, $xe^x = z \therefore e^x(x+1)dx = dz$ (১)

$\therefore \int \frac{e^x(1+x)dx}{\cos^2(xe^x)} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 z dz$

$= \tan z + c = \tan(xe^x) + c$ (১)

23(a) ধরি, $I = \int \frac{\sin(2+5\ln x)}{x} dx$ এবং

$2 + 5\ln x = z$. তাহলে, $\frac{5}{x}dx = dz$ এবং (১)

$I = \frac{1}{5}\int \sin z\, dz = \frac{1}{5}(-\cos z) + c$

$= -\frac{1}{5}\cos(2+5\ln x) + c$ (১)

23(b) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

$= \int \frac{\sin\{(x-b)-(x-a)\}dx}{\sin(a-b)\sin(x-a)\sin(x-b)}$

$= \int \frac{\sin(x-b)\cos(x-a) - \cos(x-b)\sin(x-a)\}dx}{\sin(a-b)\sin(x-a)\sin(x-b)}$ (১)

$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \{\cot(x-a) - \cot(x-b)\}dx$

$= \frac{\ln|\sin(x-a)| - \ln|\sin(x-b)|}{\sin(a-b)} + c$

$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + c$ (১)

24(a) $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{d(1+\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}}$ (১)

$= 2\sqrt{1+\tan x} + c$ (১)

24(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{(\sin^{-1}x)}\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\sin^{-1}x)}{\sqrt{(\sin^{-1}x)}}$ (১)

$[\because d(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx]$

$= 2\sqrt{\sin^{-1}x} + c$, $[\because \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}]$ (১)

24(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x + 3}}$

এবং $\tan^{-1}x+3=z$. তাহলে, $\frac{dx}{1+x^2}=dz$ এবং (১)

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c \quad [\because \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}]$$

$$\therefore \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}}=2\sqrt{\tan^{-1}x+3}+c \quad (১)$$

24(d) $\int\frac{\tan(\ln|x|)}{x}dx=\int\tan(\ln|x|)\,d(\ln|x|)$ (১)

$$=\ln\{\sec(\ln|x|)\}+c \quad (১)$$

25(a) $\int\frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}=\int\frac{d(\tan x)}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$ (১)

$$=\sin^{-1}(\tan x)+c \quad (১)$$

25(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{16-\{(2x)^2+2.2x.1+1^2\}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{4^2-(2x+1)^2}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2x+1}{4})+c \quad (২)$$

25(c) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x^2-4x+2^2)}}$$

$$=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=\sin^{-1}(\frac{x-2}{2})+c \quad (২)$$

25(d) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2(1-x)^2}}$

$$=-\frac{1}{b}\int\frac{d(b-bx)}{\sqrt{a^2-(b-bx)^2}} \quad (১)$$

$$=-\frac{1}{b}\sin^{-1}(\frac{b-bx}{a})+c \quad (১)$$

25(e) ধরি, $I=\int\sqrt{\tan x}dx$ এবং $\tan x=z^2$

তাহলে, $\sec^2 x\, dx=2z\, dz$ (১)

$\Rightarrow dx=\frac{2zdz}{1+\tan^2 x}=\frac{2z}{1+z^4}$ এবং

$$I=\int\frac{2z^2dz}{1+z^4}=\int\frac{(z^2+1)-(z^2-1)}{1+z^4}dz$$

$$=\int[\frac{z^2+1}{z^4+1}+\frac{z^2-1}{z^4+1}]dz$$

$$=\int[\frac{1+\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}+\frac{1-\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}]dz$$

$$=\int[\frac{1+\frac{1}{z^2}}{(z-\frac{1}{z})^2+2}+\frac{1-\frac{1}{z^2}}{(z+\frac{1}{z})^2-2}]dz$$

$$=\int\frac{d(z-\frac{1}{z})}{(z-\frac{1}{z})^2+(\sqrt{2})^2}+\int\frac{d(z+\frac{1}{z})}{(z+\frac{1}{z})^2-(\sqrt{2})^2} \quad (১)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z-\frac{1}{z}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{z-\frac{1}{z}-\sqrt{2}}{z-\frac{1}{z}+\sqrt{2}}|+c \quad (১)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z^2-1}{\sqrt{2}z}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{z^2-1-\sqrt{2}z}{z^2-1+\sqrt{2}z}|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}-1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}-1}|+c \quad (১)$$

26. ধরি, $I=\int 3\cos^3 x\cos 2x\, dx$

$$\cos^3 x\cos 2x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\cos 2x \quad (১)$$

$$=\frac{1}{4}[3\cos x\cos 2x+\cos 3x\cos 2x]$$

$$=\frac{1}{4}[3.\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)+\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)] \quad (১)$$

$$=\frac{1}{8}(3\cos 3x+4\cos x+\cos 5x)$$

$$\therefore I=\frac{3}{8}\int(3\cos 3x+4\cos x+\cos 5x)\,dx$$

$$=\frac{3}{8}(3.\frac{1}{3}\sin 3x+4\sin x+\frac{1}{5}\sin 5x)+c \quad (২)$$

27(a) ধরি, $I = \int e^{2x} \cos x dx$

$= e^{2x} \int \cos x\, dx - \int \{\frac{d}{dx}(e^{2x}) \int \cos x\, dx\}\, dx$ (১)

$= e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x\, dx$ (২)

$= e^{2x} \sin x - 2e^{2x} \int \sin x dx +$

$2 \int \{\frac{d}{dx}(e^{2x}) \int \sin x\, dx\}\, dx$

$= e^{2x} \sin x - 2e^{2x}(-\cos x) + 2\int 2e^{2x}(-\cos x)dx$

$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\int e^{2x} \cos x dx$

$= e^{2x}(\sin x + 2\cos x) - 4I + c_1$

$\Rightarrow 5I = e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + \frac{1}{5}c_1$

$\therefore I = \int e^{2x} \sin x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + c$ (১)

27.(b) $\int e^{-3x} \cos 4x\, dx$

$= \frac{e^{-3x}}{3^2 + 4^2}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$

[সূত্র প্রয়োগ করে।]

$= \frac{e^{-3x}}{25}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$ (২).

28(a) ধরি, $I = \int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

$= \int e^x \{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\} dx$

এবং $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

$\therefore f'(x) = \frac{(1 + \cos x)\cos x - \sin x(0 - \sin x)}{(1 + \cos x)^2}$ (২)

$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$

$= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$ এবং

$I = \int e^x \{\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}\} dx$

$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$ (১)

$\therefore I = \int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx = e^x \frac{\sin x}{1 + \cos x} + c$ (১)

28(b) $\int e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx)dx$

$= \int ae^{ax} \sin bx dx + \int be^{ax} \cos bx dx$

$= a \sin bx \int e^{ax} dx - \int \{\frac{d}{dx}(a \sin bx) \int e^{ax} dx\} dx$

$+ \int be^{ax} \cos bx dx$ (১)

$= a \sin bx.(\frac{e^{ax}}{a}) - \int (ab \cos bx)(\frac{e^{ax}}{a}) dx$

$+ \int be^{ax} \cos bx dx$ (২)

$= e^{ax} \sin bx - \int be^{ax} \cos bx dx + \int be^{ax} \cos bx dx$

$\therefore \int e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx)dx = e^{ax} \sin bx + c$ (১)

29(a) $\int \frac{x - 3}{(1 - 2x)(1 + x)} dx$

$= \int [\frac{\frac{1}{2} - 3}{(1 - 2x)(1 + \frac{1}{2})} + \frac{-1 - 3}{\{1 - 2(-1)\}(1 + x)}] dx$ (১)

$= \int [\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}(1 - 2x)} + \frac{-4}{3(1 + x)}] dx$

$= -\frac{5}{3}(-\frac{1}{2}) \int \frac{d(1 - 2x)}{(1 - 2x)} - \frac{4}{3} \int \frac{1}{1 + x} dx$ (১)

$= \frac{5}{6} \ln|1 - 2x| - \frac{4}{3} \ln|1 + x| + c$ (১)

29(b) $\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$

$= \int \{\frac{1}{(x^2 - 1)(1 + 1)} + \frac{1}{(-1 - 1)(x^2 + 1)}\} dx$ (১)

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1^2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2.1}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c \quad (২)$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

30(a) $\int\frac{1}{x(x+1)^2}dx$

ধরি, $\frac{1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \cdots(1)$

(1) এ $x=0$ বসিয়ে পাই, $1 = A \Rightarrow A = 1$

(1) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই, $1 = -C \Rightarrow C = -1$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$

$$\therefore \int\frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\}dz \quad (১)$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| - (-\frac{1}{x+1}) + c \quad (২)$$

$$= \ln|\frac{x}{x+1}| + \frac{1}{x+1} + c$$

30(b) $\int\frac{3x+1}{(x+1)^2}dx = \int\frac{3(x+1)-2}{(x+1)^2}dx$

$$= \int\{\frac{3(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2}\}dx$$

$$= \int\{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\}dx$$

$$= 3\ln|x+1| - 2(-\frac{1}{x+1}) + c$$

$$= 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c \quad (২)$$

31. (a) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)} = \int\frac{(x^2+1)-x^2dx}{x(x^2+1)}$

$$= \int\{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\}dx$$

$$= \int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int\frac{(2x+0)dx}{x^2+1} \quad (১)$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \quad (১)$$

31(b) ধরি, $I = \int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$ এবং

$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) \cdots(1)$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$0 = 4A - C \Rightarrow C = 4A = \frac{4}{5}$

$$I = \frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}dx + \int\frac{-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4}dx \quad (১)$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int\frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+2^2} \quad (১)$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{4}{5}.\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c \quad (২)$$

32.(a) $\int xe^{-x}dx$

$$= x\int e^{-x}dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-x}dx\}dx \quad (১)$$

$$= -xe^{-x} - \int 1.(-e^{-x})dx = -xe^{x} - e^{-x} + c \quad (১)$$

32(b) $\int xe^{ax}dx$

$$= x\int e^{ax}dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{ax}dx\}dx \quad (১)$$

$$= x.\frac{1}{a}e^{ax} - \int 1.(\frac{1}{a}e^{ax})dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + c$$

$$= \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + c \quad (১)$$

32(c) $\int x^3e^{2x}dx$

$= x^3\int e^{2x}dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^3)\int e^{2x}dx\}dx$ (১)

$= x^3(\frac{1}{2}e^{2x}) - \int(3x^2)(\frac{1}{2}e^{2x})dx$ (২)

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[x^2\int e^{2x} - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^{2x}dx\}dx]$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[x^2.\frac{1}{2}e^{2x} - \int(2x).\frac{1}{2}e^{2x}dx]$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[\frac{x^2e^{2x}}{2} - \{x\int e^{2x} - \int 1.\frac{e^{2x}}{2}dx\}]$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}[\frac{x^2e^{2x}}{2} - \{x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\}] + c$

$= (\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8})e^{2x} + c$ (১)

[MCQ এর ক্ষেত্রেঃ

$\int x^3e^{2x}dx = \{\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2^2}(3x^2) + \frac{1}{2^3}(6x) - \frac{1}{2^4}.6\}e^{2x} = \{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\}e^{2x}$]

33. (a) $\int x\sin x dx$

$= x\int \sin x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin x\, dx\}\, dx$ (১)

$= x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)dx$

$= -x\cos x + \sin x + c$ (১)

33. (b) $\int x\cos x dx$

$= x\int \cos x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x\, dx\}\, dx$ (১)

$= x\sin x - \int 1.\sin x dx$

$= x\sin x + \cos x + c$ (১)

33(c) $\int x^2 \sin x dx$

$= x^2\int \sin x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int \sin x\, dx\}\, dx$ (১)

$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx$ (১)

$= -x^2\cos x + 2[x\int \cos x - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x\, dx\}\, dx]$

$= -x^2\cos x + 2[x\sin x - \int 1.\sin x\, dx]$ (১)

$= -x^2\cos x + 2[x\sin x - (-\cos x)] + c$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$ (১)

33.(d) $\int x^2\cos^2 x\, dx$ [প্র.ভ.প.'৮৫,'৯৬]

$= \int x^2\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$ (১)

$= \frac{1}{2}[\int x^2\, dx + \int x^2\cos 2x\, dx]$ (১)

$= \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + x^2(\frac{1}{2}\sin 2x) - (2x)(-\frac{1}{2^2}\cos 2x) + 2(-\frac{1}{2^3}\sin 2x)] + c$ (২)

$= \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x] + c$

33(e) ধরি, $I = \int\cos\sqrt{x}\, dx$ এবং $\sqrt{x} = z$

তাহলে $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz \Rightarrow dx = 2z\, dz$ এবং (১)

$I = \int 2z\cos z\, dz$

$= 2[z\int\cos z\, dz - \int\{\frac{d}{dz}(z)\int\cos z\, dz\}\, dz]$ (১)

$= 2[z\sin z) - \int 1.\sin z dz]$ (১)

$= 2z\sin z - 2(-\cos z) + c$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c$ (১)

34(a) $\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx$ (১)

$= \frac{1}{2}[x\int\sin 2x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int\sin 2x dx\}dx]$ (১)

$= \frac{1}{2}[x(-\frac{\cos 2x}{2}) - \int 1.(-\frac{\cos 2x}{2})dx]$ (১)

$= \frac{1}{4}[-x\cos 2x + \frac{\sin 2x}{2}] + c$ (১)

34(b) $\int x\sin x\sin 2x\, dx$

$= \int x \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\,dx$ (১)

$= \frac{1}{2}[x\int \cos x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x dx\}dx$ (১)

$- x\int \cos 3x dx + \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 3x dx\}dx]$

$= \frac{1}{2}[x\sin x - \int 1.\sin x dx$

$- x\frac{\sin 3x}{3} + \int 1.\frac{\sin 3x}{3}dx]$ (১)

$= \frac{1}{2}[x\sin x + \cos x - \frac{x\sin 3x}{3} - \frac{\cos 3x}{9}] + c$ (১)

34. (c) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \int x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= x\int \operatorname{cosec}^2 x dx - \int\{\frac{d}{dx}(x)\int \operatorname{cosec}^2 x dx\}dx$ (১)

$= x(-\cot x) - \int 1.(-\cot x)dx$ (১)

$= -x\cot x + \ln|\sin x| + c$ (১)

34(d) ধরি, $I = \int \sec^3 x\, dx = \int \sec^2 x \sec x\, dx$

$= \sec x\int \sec^2 x\, dx - \int\{\frac{d}{dx}(\sec x)\int \sec^2 x dx\}dx$ (১)

$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan x.\tan x dx$ (১)

$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$

$\Rightarrow I = \sec x \tan x - I + \ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + c_1$ (১)

$\Rightarrow 2I = \sec x \tan x + \ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \frac{1}{2}c_1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})| + c$ (১)

35(a) $\int x^2 \ln x dx$

$= \ln x\int x^2 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^2 dx\}dx$ (১)

$= \ln x.\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx$ (২)

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$ (১)

35(b) $\int x^3 \ln x dx$

$= \ln x\int x^3 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x^3 dx\}dx$ (১)

$= \ln x.\frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^4}{4}dx$ (২)

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}.\frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c$ (১)

35(c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= \ln x\int \frac{1}{x^2}dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int \frac{1}{x^2}dx\}dx$ (১)

$= \ln x.(-\frac{1}{x}) - \int \frac{1}{x}.(-\frac{1}{x})dx$ (২)

$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x + (-\frac{1}{x}) + c$

$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$ (১)

36(a) $\int 2^x \sin x\, dx = \int e^{x\ln 2}\sin x\, dx$

$= \frac{e^{x\ln 2}}{(\ln 2)^2 + 1^2}[\ln 2.\sin x - 1.\cos x] + c$ (২)

[সূত্র প্রয়োগ করে।]

$= \frac{2^x}{(\ln 2)^2 + 1}[\ln 2.\sin x - \cos x] + c$

36(b) $\int (3^x e^x + \ln x)dx$ [প্র.ভ.প.'৮৪]

$= \int (3e)^x dx + \int \ln x dx$

$$= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + \frac{1}{x} + c = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + \ln e} + \frac{1}{x} + c \quad (২)$$

$$= \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + \frac{1}{x} + c$$

36(c) ধরি, $I = \int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx$ এবং

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$\therefore f'(x) = -(1-x)^{-1-1}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$ এবং (১)

$$I = \int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} \right\} dx$$

$$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c \quad (১)$$

$$\therefore \int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx = \frac{e^x}{1-x} + c \quad (১)$$

36(d) ধরি, $I = \int [\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}] dx$ এবং $\ln x = y$.

তাহলে, $x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$ এবং (১)

$$I = \int e^y [\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}] dy = \int e^y [\frac{1}{y} + D(\frac{1}{y})] dy \quad (১)$$

$$[\because D(\frac{1}{y}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y^2}]$$

$$= \frac{e^y}{y} + c = \frac{x}{\ln x} + c \quad (১)$$

37(a) $\int e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right\} dx = \int \frac{e^{-x}}{x} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx$

$$= \frac{1}{x} \int e^{-x} dx - \int \{ \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) \int e^{-x} dx \} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx \quad (১)$$

$$= \frac{1}{x}(-e^{-x}) - \int (-\frac{1}{x^2})(-e^{-x}) dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx \quad (২)$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx$$

$$\therefore \int e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right\} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + c \quad (১)$$

37(b) $\int e^x \{\tan x + \ln(\sec x)\} dx$ [প্র.ভ.প. '৯১]

ধরি, $I = \int e^x \{\tan x + \ln(\sec x)\} dx$ এবং

$$f(x) = \ln(\sec x)$$

$\therefore f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$ এবং (১)

$$I = \int e^x \{\ln(\sec x) + \tan x\} dx$$

$$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$$

$$\therefore \int e^x \{\tan x + \ln(\sec x)\} dx = e^x \ln(\sec x) + c \quad (১)$$

38. ধরি, $I = \int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx$ [প্র.ভ.প.'০২]

$$= \int e^x \frac{x^2 - 1 + 2}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int e^x \{ \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \} dx$$

$= \int e^x \{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \} dx$ এবং $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$\therefore f'(x) = \frac{(x+1).1 - (x-1).1}{(x+1)^2} \quad (২)$$

$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ এবং

$$I = \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c \quad (১)$$

$$\therefore \int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx = e^x (\frac{x-1}{x+1}) + c \quad (১)$$

39. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$

ধরি, $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

$$\Rightarrow x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \cdots (1)$$

(1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = 3B \Rightarrow B = 1/3$

(1) এ $x = -2$ বসিয়ে পাই, $-2 = 9C \Rightarrow C = -2/9$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + C \Rightarrow A = -C = 2/9$

$$\therefore \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

$=\int\{\frac{2/9}{x-1}+\frac{1/3}{(x-1)^2}+\frac{-2/9}{x+2}\}dz$ (১)

$=\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3}(-\frac{1}{x-1})-\frac{2}{9}\ln|x+2|+c$ (২)

$=\frac{2}{9}\ln|\frac{x-1}{x+2}|-\frac{1}{3(x-1)}+c$ (১)

40. ধরি, $I=\int\frac{x^2+1}{(x+2)^2}dx$

$=\int\frac{x^2+4x+4-(4x+3)}{(x+2)^2}dx$

$=\int\{1-\frac{4x+3}{(x+2)^2}\}dx$ এবং (১)

$\frac{4x+3}{(x+2)^2}\equiv\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$

$\Rightarrow 4x+3=A(x+2)+B\cdots(1)$

(1) এ $x=-2$ বসিয়ে পাই, $B=-8+3=-5$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $4=A\Rightarrow A=4$

$\therefore\ I=\int\{1-\frac{4}{x+2}+\frac{5}{(x+2)^2}\}dx$ (১)

$=x-4\ln|x+2|-\frac{5}{x+2}+c$ (২)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ

1. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}=?$ **[DU 07-08; NU06-07]**

$Sol^n: I=\int\frac{\sec^2 xdx}{\sqrt{\tan x}}=\int\frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}}=2\sqrt{\tan x}$

2. $\int\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx=?$ **[DU 07-08; NU07-08; KU 03-04]**

$Sol^n: I=\int\sec^2(xe^x)\,d(xe^x)=\tan(xe^x)$

3. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=?$ **[DU 02-03]**

$Sol^n: I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=2\int\frac{d(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1})$

$=2\ln(\sqrt{x}+1)+c$

4. $\int\sin^5 x\cos xdx=?$ **[DU 98-99]**

$Sol^n: I=\int\sin^5 xd(\sin x)=\frac{1}{6}\sin^6 x+c$

5. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=?$ **[JU 06-07; CU 04-05]**

$Sol^n: I=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$=\tan^{-1}(e^x)+c$

6. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=?$ **[DU 95-96; JU 07 08]**

$Sol^n: I=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+(-\frac{1}{2})\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\sin^{-1}x-\frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$

7. $\int xe^x dx=?$ **[JU 07-08]**

$Sol^n: I=(x-1)e^x+c$

8. $\int\frac{dx}{ay-bx}=?$ **[SU 06-07]**

$Sol^n: I=-\frac{1}{b}\int\frac{d(ay-bx)}{ay-bx}$

$=-\frac{1}{6}\ln|ay-bx|+c$

9. $\int e^x\sec x(1+\tan x)dx=?$ **[RU 06-07]**

$Sol^n: I=\int e^x(\sec x+\sec x\tan x)dx$

$=\int e^x\{\sec x+D(\sec x)\}dx=e^x\sec x$

10. $\int-\sin\phi\,dt=?$ **[CU 04-05]**

$Sol^n: I=-\sin\phi\int dt=-t\sin\phi+c$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = ?$ [KU 03-04]

$Sol^n.: I = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{3^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}$

12. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = ?$ [DU 01-02; CU 02-03; RU 04-05, 05-06; JU 06-07;BUET 06-07]

$Sol^n.: I = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx$

$= \int e^x\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\}dx$

$= \int e^x\{\frac{1}{x+1} + D(\frac{1}{x+1})\}dx = \frac{e^x}{x+1} + c$

13. $\int x\cos x dx = ?$ [DU 96 - 97]

$= x\sin x - (1)(-\cos x) = x\sin x + \cos x + c$

14. $\int x\ln(1+2x)\,dx = ?$ [SU 96-97]

$Sol^n.: I = \ln(1+2x).\frac{x^2}{2} - \int \frac{2.}{1+2x}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+2x) - \int \frac{\frac{1}{2}x(2x+1) - \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}}{2x+1}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+2x) - \int (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2x+1})dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+2x) - \{\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(2x+1|\} + c$

$= \frac{x^2}{2}\ln(1+2x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln(2x+1| + c$

15. $\int \log_3 x\,dx = ?$ [CU 06-07]

$Sol^n.: I = x\log_3 x - \int \frac{1}{x\ln 3}.x\,dx$

$= x\log_3 x - \frac{x}{\ln 3} + c$

অন্তরক ও যোগজের মিশ্রিত সমস্যা

16. $y = x^2$ হলে $\int (\frac{dy}{dx})dx$ এর মান কত? [CU 02-03; IU 05-06]

$Sol^n.: \int (\frac{dy}{dx})dx = y + c = x^2 + c$

17. যদি $\frac{dy}{dx} = 2a$ হয় তাহলে y এর মান কত? [CU 02-03]

$Sol^n.: \frac{dy}{dx} = 2a \Rightarrow y = \int 2adx = 2ax + c$

18. $\int f(x)dx = \cos x + k$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [CU 02-03]

$Sol^n.: f(x) = \frac{d}{dx}(\cos x + k) = -\sin x$

19. $\frac{d}{dx}(\int ydx)$ এর মান কত যখন $y = \sin x$ [CU 02-03]

$Sol^n.: \frac{d}{dx}(\int ydx) = y = \sin x$

আংশিক ভগ্নাংশ

20. $\frac{x+17}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$ হলে a ও b এর মান কত? [DU 08-09; JU, CU 07-08]

$Sol^n.: a = \frac{3+17}{3+2} = 4$; $b = \frac{-2+17}{-2-3} = -3$

21. $\frac{x+A}{(x+1)(x-3)} \equiv \frac{B}{x+1} + \frac{1}{x-3}$

$Sol^n.: \frac{3+A}{3+1} = 1 \Rightarrow A = 1$;

$B = \frac{-1+A}{-1-3} = \frac{-1+1}{-4} = 0$

নির্দিষ্ট যোগজ ও এর প্রয়োগ
প্রশ্নমালা X D

মান নির্ণয় কর :

1(a) $\int_0^3 (3-2x+x^2)dx$ [কু.'০৬,'০৭]

$= \left[3x - 2.\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \{(3.3 - 3^2 + \frac{3^3}{3}) - 0\}$

$= (9-9+9) = 9$

(b) $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta$ [চ.'০৪]

$= [-\cos\theta + \sin\theta]_0^{\pi/2} = [-\cos\theta + \sin\theta]_0^{\pi/2}$

$= (\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin 0 - \cos 0)$

$= (1-0) - (0-1) = 2$

(c) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\{(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi) - (0 - \frac{1}{2}\sin 2.0)\} = \frac{\pi}{2}$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec x + 1}{\sec x} dx$ [য.'০৬; কু.,'০৯]

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \frac{1}{\sec x}) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos x) dx$

$= x[1 + \sin x)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \{-\frac{\pi}{2} + \sin(-\frac{\pi}{2})\}$

$= \frac{\pi}{2} + 1 - (-\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2 = \pi + 2$

(e) $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$ [প্র.ভ.প.'০৬]

$= \int_{-1}^{0} |x|\, dx + \int_0^1 |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x) dx + \int_0^1 x dx$

$[\because |x| = x, x \ge 0; |x| = -x, x \le 0]$

$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$

2(a) $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1-\sin x} dx$

[ঢা. '০৯,'১৩; য.'০৯; সি.'১০; রা.'১৩]

$= \int_0^{\pi/3} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} dx$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\pi/3} \{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\} dx$

$= \int_0^{\pi/3} \{\sec^2 x + \sec x \tan x\} dx$

$= [\tan x + \sec x]_0^{\pi/3}$

$= \tan\frac{\pi}{3} + \sec\frac{\pi}{3} - (\tan 0 + \sec 0)$

$= \sqrt{3} + 2 - 0 - 1 = \sqrt{3} + 1$

2(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x} dx$ [ব.'০৮; ঢা.,সি.'১১]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sec^2\frac{x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}\left[2\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$ [ব.'১১]

$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta} d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} (2 - \sec^2\theta) dx = [2\theta - \tan\theta]_0^{\pi/4}$

$= 2.\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4} - (2.0 - \tan 0) = \frac{\pi}{2} - 1$

4(a) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ [চ. '০৪; রা.'০৫ ,'০৯; সি.'১১]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi) - (0 + \frac{1}{2}\sin 0)\} = \frac{\pi}{4}$

4 (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ [সি.'০৬,'০৭; য. '০৭,'০৯, '১৩; ব. '০৮; মা.'০৬; দি.'১৩]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)dx$

$= \frac{1}{4}\left[3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{4}(3\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - 3\sin 0 - \frac{1}{3}\sin 0)$

$= \frac{1}{4}(3.1 + \frac{1}{3}(-1) - 0 - 0) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

4(c) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$ [য.'০৪]

$\cos^4 x = \frac{1}{4}(2\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2$

$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\}$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} + \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi - 0)$

$= \frac{1}{4}(\frac{3\pi}{4} + 0) = \frac{3\pi}{16}$

4(d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0)$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$

4(e) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\, d\theta$ [মা.বো.'০৯]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\{\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - (0 - \frac{\sin 0}{4})\}$

$= \frac{1}{2}\{\frac{\pi}{2} - 0 - (0-0)\} = \frac{\pi}{4}$

5 (a) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x dx$ [ঢা.'০৩; দি.'১০; য.'১১]

$= -\int_0^{\pi/2} (\cos x)^5(-\sin x)dx$

$= -\left[\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_0^{\pi/2}$

$= -\frac{1}{6}\{(\cos\frac{\pi}{2})^6 - (\cos 0)^6\}$

$= -\frac{1}{6}\{0-1\} = \frac{1}{6}$

5(b) ধরি $I = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \cos^4 x\, dx$ [প্র.ভ.প'৮৯]

$\sin^4 x\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\sin x\cos x) = \frac{1}{16}\sin^4 2x$

$= \frac{1}{16}.\{\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\}^2$

$= \frac{1}{64}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)$

$= \frac{1}{64}\{1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1+\cos 8x)\}$

$= \frac{1}{128}(3 - 4\cos 4x + \cos 8x)$

$\therefore I = \frac{1}{128}\left[3x - 4.\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{128}(\frac{3\pi}{4} - \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi - 0)$

$= \frac{1}{128} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{512}$

5(c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x\, dx$

[ব.'০৫; মা.'০৪; য.'১৪]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin 3x\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x\sin 3x)\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \{\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)\}\, dx$

$$= \left[-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{6}(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0) + \frac{1}{20}(\cos\frac{5\pi}{2} - \cos 0)$$

$$+ \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{6}(0-1) + \frac{1}{20}(0-1) + \frac{1}{4}(0-1)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{4} = \frac{10-3-15}{60} = \frac{-8}{60} = \frac{-2}{15}$$

5(d) ধরি $I = \int_0^{\pi} 3\sqrt{1-\cos x}\sin x\, dx$ [কু.'০৪]

এবং $z = \cos x \therefore dz = -\sin x dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 1$, $x = \pi$ হলে $z = -1$

$$\therefore I = -3\int_1^{-1}\sqrt{1-z}\,dz = -3\left[-\frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{-1}$$

$$= 2\{(1+1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}\} = 2\times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

5(e) $\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\sin\theta\, d\theta$

[বুয়েট,'০৮-০৯;চ.'১১]

ধরি, $z = 1+\cos x \therefore dz = -\sin x dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 2$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\sin\theta\, d\theta = -\int_2^1 z^2 dz$$

$$= \left[-\frac{z^3}{3}\right]_2^1 = -(\frac{1^3}{3} - \frac{2^3}{3}) = -(\frac{1}{3} - \frac{8}{3}) = \frac{7}{3}$$

6(a) $\int_0^{\pi/2}\sin x\sin 2x\, dx$

[য.০৮;ব.'০৪,'০৬; চ. '০৬;দি.'১৩]

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0 + \frac{1}{3}\sin 0)$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - \frac{1}{3}(-1) - 0 + 0\} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

6(b) $\int_0^{\pi/2}\cos 2x\cos 3x\, dx$ [কু. '০০; চ. '০৩]

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{5}\sin 0 - \sin 0)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{5}.1 + 1) = \frac{1}{2}\times\frac{6}{5} = \frac{3}{5}$$

6(c) $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\cos x\, dx$ [য.'০৫; রা.'০৮; মা. '০৫]

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x - \cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}\cos 3\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}(\cos 3\frac{\pi}{2} - \cos 0) - (\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0)]$$

$$= \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}(0-1) - (0-1)] = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + 1) = \frac{2}{3}$$

7(ঃ) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin^3 x dx$ [চ.'০১; য.১০]

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin^2 x\sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x dx$$

এবং $z = \cos x \therefore dz = -\sin x dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 1$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 0$

$$\therefore I = -\int_1^0\sqrt{z}(1-z^2)\, dz$$

$$= -\int_1^0(\sqrt{z} - z^{5/2})\, dz = -\left[\frac{z^{3/2}}{3/2} - \frac{z^{7/2}}{7/2}\right]_1^0$$

$$= -\{\frac{2}{3}(0-1) - \frac{2}{7}(0-1)\} = -(-\frac{2}{3} + \frac{2}{7})$$

$= -\frac{-14+6}{21} = \frac{8}{21}$

7(b) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$ [ব.,চ.'১০; রা,'১২]

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$

এবং $z = \sin x \therefore dz = \cos x\, dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 1$

$\therefore I = \int_0^1 (\frac{1-z^2}{\sqrt{z}})\, dz = \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{z}} - z^{3/2})\, dz$

$= \left[2\sqrt{z} - \frac{z^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = 2(1-0) - \frac{2}{5}(1-0)$

$= 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

8(a) ধরি, $I = \int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [চ.'০৪; রা.'১১]

এবং $z = \sin^{-1} x \therefore dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 0$ এবং $x = 1$ হলে $z = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/2} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\{(\frac{\pi}{2})^3 - 0\}$

$= \frac{\pi^3}{24}$

8(b) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [য.'০৪;সি.'০৭;ব.'০৮; দি.'০৯]

ধরি, $z = \sin^{-1} x \therefore dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 0$ এবং $x = 1$ হলে $z = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} z dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2})^2 - 0\} = \frac{\pi^2}{8}$

8(c) ধরি, $I = \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ [বুয়েট'০৯; কু.'১১]

এবং $z = \tan^{-1} x \therefore dz = \frac{1}{1+x^2} dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 0$ এবং $x = 1$ হলে $z = \frac{\pi}{4}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} z dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$

9(a) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [ঢা.'০৭; য.'০৭]

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$

$= -(\sqrt{1-1^2} - \sqrt{1-0^2}) = -(0-1) = 1$

9(b) $\int_4^8 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-15}} = \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{d(x^2-15)}{\sqrt{x^2-15}}$

$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2-15}\right]_4^8 = \sqrt{64-15} - \sqrt{16-15}$

$= \sqrt{64-15} - \sqrt{16-15} = \sqrt{49} - \sqrt{1} = 6$

9(c) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{9-2x^2}}$

[বুয়েট'০৯; ব.'১০; রা.'১২; দি.'১৩; সি.,চ.'১৪]

$= -\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d(9-2x^2)}{\sqrt{9-2x^2}} = -\frac{1}{4}\left[2\sqrt{9-2x^2}\right]_0^2$

$= -\frac{1}{2}(\sqrt{9-8} - \sqrt{9-0}) = -\frac{1}{2}(1-3) = 1$

9(d) ধরি, $I = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$

[সি.'০৯; ঢা., রা., কু.'১০; দি.'১৩]

এবং $z = 4 - x^2 \therefore dz = -2x dx$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 4$ এবং $x = 1$ হলে $z = 3$

$\therefore I = -\frac{1}{2}\int_4^3 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{z}\right]_4^3$

$= -(\sqrt{3}-\sqrt{4}) = 2-\sqrt{3}$

9(e) ধরি, $I=\int_{-2}^{5} \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}}dx$ [মা.বো.'০৪]

এবং $z = x^2+3 \therefore dz = 2xdx$

সীমা: $x=-2$ হলে $z=7$ এবং $x=5$ হলে $z=28$

$\therefore I = \frac{7}{2}\int_7^{28} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{7}{2}\left[2\sqrt{z}\right]_7^{28}$

$= 7(\sqrt{28}-\sqrt{7}) = 7(2\sqrt{7}-\sqrt{7}) = 7\sqrt{7}$

9(f) ধরি,$I=\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$ [ব. '০৯; চ. '০৮ ; রা. ০৭,'০৯; কু. '০৭,'১০; সি. '০৮;মা.'০৫, '০৯]

এবং $z = 1+3x^4 \therefore dz = 12x^3dx$

সীমা: $x=0$ হলে $z=1$ এবং $x=1$ হলে $z=4$

$\therefore I = \frac{1}{12}\int_1^4 \sqrt{z}dz = \frac{1}{12}\left[\frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$

$= \frac{1}{12}\times\frac{2}{3}(4^{3/2}-1) = \frac{1}{18}(8-1) = \frac{7}{18}$

10. (a) $\int_1^2 x^2e^{x^3}dx$ [ঢা.'০৯; রা.'০৪,'০৬; ব.'১০]

ধরি, $z = x^3 \therefore dz = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dz$

সীমা: $x=1$ হলে $z=1$ এবং $x=2$ হলে $z=8$

$\therefore \int_1^2 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_1^8 e^z dz = \frac{1}{3}\left[e^z\right]_1^8$

$= \frac{1}{3}(e^8-e^1) = \frac{1}{3}(e^8-e)$

10(b) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ [ঢা.,ব.'০৫; চ., য. '০৬; সি. '০৭,'১০; চ.,কু.'দি.'১২]

ধরি, $z = x^2 \therefore dz = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz$

সীমা: $x=0$ হলে $z=0$ এবং $x=1$ হলে $z=1$

$\therefore \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^z dz = \frac{1}{2}\left[e^z\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e^1-e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$

10(c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ [য. '০৯,'১১; রা.'১০; ঢা. '১০, '১৩; কু.'১৩; চ.'০৯,'১১; দি.'০৯; সি. '০৮,'১২; মা.'১৪]

ধরি, $z = 1+e^x \therefore dz = e^xdx$

সীমা: $x=0$ হলে $z=1+e^0=1+1=2$ এবং $x=\ln 2$ হলে $z=1+e^{\ln 2}=1+2=3$

$\therefore \int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_2^3 \frac{dz}{z} = \left[\ln z\right]_2^3$

$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

10(d) $\int_1^3 \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$ [ঢা.'০৮; কু.'০৮,'১৪; ব.'১২]

ধরি, $z = \ln x \therefore dz = \frac{dx}{x}$

সীমা: $x=1$ হলে $z=\ln 1=0$ এবং
$x=3$ হলে $z=\ln 3$

$\therefore \int_1^3 \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx = \int_0^{\ln 3}\cos z\,dz$

$= \left[\sin z\right]_0^{\ln 3} = \sin(\ln 3) - \sin 0 = \sin(\ln 3)$

11. (a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx$

[য.'০৫; রা.'০৭; চ.'০৮; দি.'১১; ঢা.'১২; বুয়েট'০৯]

$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cot^5 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx$

ধরি, $\cot x = z \therefore -\mathrm{cosec}^2 x\,dx = dz$

সীমা: $x=\frac{\pi}{3}$ হলে $z=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং

$x=\frac{\pi}{2}$ হলে $z=\cot\frac{\pi}{2}=0$

$\therefore \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx = \int_{1/\sqrt{3}}^0 z^5(-dz)$

$= -\left[\frac{1}{6}z^6\right]_{1/\sqrt{3}}^0 = -\frac{1}{6}\{0-(\frac{1}{\sqrt{3}})^6\} = \frac{1}{162}$

11(b) ধরি, $I=\int_0^{\pi/4}\tan^3 x\sec^2 x\,dx$ [য.'০৬; রা.'০৬,'০৮; কু., সি, দি.'০৯; ঢা.,ব.'১১; সি.'১৩]

এবং $\tan x=z \therefore \sec^2 x\,dx=dz$

সীমা: $x=0$ হলে $z=\tan 0=0$ এবং

$x=\frac{\pi}{4}$ হলে $z=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore I=\int_0^1 z^3dz=\left[\frac{1}{4}z^4\right]_0^1=\frac{1}{4}(1^4-0^4)=\frac{1}{4}$

11(c) $\int_0^{\pi/4}(\tan^3 x+\tan x)dx$ [কু.'০৮]

$=\int_0^{\pi/4}(\tan^2 x+1)\tan x dx$

$=\int_0^{\pi/4}\sec^2 x\tan x dx$

$=\int_0^{\pi/4}(\tan x)d(\tan x)=\left[\frac{1}{2}(\tan x)^2\right]_0^{\pi/4}$

$=\frac{1}{2}\{(\tan\frac{\pi}{4})^2-(\tan 0)^2\}=\frac{1}{2}\{(1)^2-0\}=\frac{1}{2}$

11(d) $\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\sec^2 x\,dx$ [ঢা.'০৩,'১৩; কু.'০৪,'০৬; য.'০৪; ঢা.'০৫; রা.'০৫; চ.'১১]

ধরি, $\tan x=z \therefore \sec^2 x\,dx=dz$

সীমা: $x=0$ হলে $z=\tan 0=0$ এবং

$x=\frac{\pi}{4}$ হলে $z=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore \int_0^{\pi/4}\tan^2 x\sec^2 x\,dx=\int_0^1 z^2\,dz$

$=\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^1=\frac{1}{3}(1^3-0^3)=\frac{1}{3}$

12. (a) $\int xe^{-3x}dx$ [দি.'১০]

$=x\int e^{-3x}dx-\int\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-3x}dx\}dx$

$=x(-\frac{1}{3}e^{-3x})-\int 1.(-\frac{1}{3}e^{-3x})dx$

$=-x\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}e^{-3x})$

$=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}=-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}$

$\therefore\int_0^1 xe^{-3x}dx=\left[-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}\right]_0^1$

$=-\frac{1}{9}\{(3+1)e^{-3}-(0+1)e^{-0}\}$

$=-\frac{1}{9}(4e^{-3}-1)=\frac{1}{9}(1-4e^{-3})$

12(b) $\int\ln(2x)dx$ [য.'০১;ব.'০৯]

$=\ln(2x)\int dx-\int[\frac{d}{dx}\{\ln(2x)\}\int dx]dx$

$=x\ln(2x)-\int\frac{2}{2x}.xdx$

$=x\ln(2x)-\int dx=x\ln(2x)-x+c$

$\therefore\int_2^4\ln(2x)\,dx=[x\ln(2x)-x]_2^4$

$=4\ln 8-4-(2\ln 4-2)$

$=4\ln 2^3-4-2\ln 2^2+2$

$=12\ln 2-2-4\ln 2=8\ln 2-2$

12(c) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ [প্র.ভ.প'১৬]

$=\ln x\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx-\int[\frac{d}{dx}(\ln x)\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx]dx$

$=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{x}.2\sqrt{x}dx$

$=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=2\sqrt{x}\ln x-2.2\sqrt{x}+c$

$=2\sqrt{x}(\ln x-2)+c$

$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_1^4$

$=2\sqrt{4}(\ln 4-2)-2\sqrt{1}(\ln 1-2)$

$=4\ln 2^2-8-2(0-2)$

$=8\ln 2-8+4=8\ln 2-4$

12(d) $\int x^2\cos x\,dx$ [কু.'০৪]

$= x^2\int\cos x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int\cos x\,dx\}dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$

$= x^2\sin x - 2[x\int\sin x\,dx - \int 1.(-\cos x)dx]$

$= x^2\sin x - 2[x(-\cos x) + \sin x] + c$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$ =

$\left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\pi/2}$

$=(\frac{\pi}{2})^2\sin\frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} - 0$

$= \frac{\pi^2}{4}.1 + 2.\frac{\pi}{2}.0 - 2.1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$

12(e) $\int x\tan^{-1}x\,dx$

[রা. '০৮,'১২; চ. '০৮,'১২; য.'১১; দি.'১২; কু.'১৪]

$= \tan^{-1}x\int x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x dx\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int(1 - \frac{1}{1+x^2})dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x) + c$

$= \frac{1}{2}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\} + c$

$\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\,dx = \left[\frac{(x^2+1)\tan^{-1}x - x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{(3+1)\tan^{-1}\sqrt{3} - \sqrt{3} - (1+1)\tan^{-1}1 + 1}{2}$

$= \frac{1}{2}(4.\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - 2.\frac{\pi}{4} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{8\pi - 3\pi}{6} - \sqrt{3} + 1) = \frac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$

12(f) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2} e^x(\sin x + \cos x)\,dx$

[কু.'০৫,'১১; রা.'১০]

এবং $f(x) = \sin x \;\therefore\; f'(x) = \cos x$

$\therefore\; I = \int_0^{\pi/2} e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx$

$= \left[e^x f(x)\right]_0^{\pi/2} = \left[e^x\sin x\right]_0^{\pi/2}$

$= e^{\pi/2}\sin\frac{\pi}{2} - e^0\sin 0 = e^{\pi/2} - 0 = e^{\pi/2}$

12(g) $\int\ln x\,dx$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= \ln x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx$

$= x\ln x - \int\frac{1}{x}.x dx = x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

$\therefore\; \int_1^0 \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_1^0$

$= 0 - 1(\ln 1 - 1) = -1(0 - 1) = 1$

12(h) $\int x\sin^2 x\,dx$ [প্র.ভ.প.'০৫]

$= \int\frac{x}{2}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int(x - x\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}[x\int\cos 2x dx - \int\{1.\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\}]$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}[x.\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx]$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}[x\sin 2x - (-\frac{1}{2}\cos 2x)] + c$

$= \frac{1}{4}(x^2 - x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x) + c$

$\therefore\; \int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[x^2 - x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{4}\{(\pi^2 - \pi\sin 2\pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi) + \frac{1}{2}\cos 0\}$

$= \frac{1}{4}\{\pi^2 - 0 - \frac{1}{2}.1) + \frac{1}{2}.1\} = \frac{1}{4}\pi^2$

12(i) $\int x\cot^{-1}x\,dx$ [বুয়েট'০৯]

$= \cot^{-1}x\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)\int xdx\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{1}{2}(x+\cot^{-1}x)+c$

$= \frac{1}{2}\{(x^2+1)\cot^{-1}x + x\}+c$

$\int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1}x\,dx = \left[\frac{(x^2+1)\cot^{-1}x+x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{(3+1)\cot^{-1}\sqrt{3}+\sqrt{3}-(1+1)\cot^{-1}1-1}{2}$

$= \frac{1}{2}(4.\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2.\frac{\pi}{4}-1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}-1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{4\pi-3\pi}{6}+\sqrt{3}-1) = \frac{1}{12}(\pi+6\sqrt{3}-6)$

(j) $\int x\ln x\,dx$ [য.'০৫; রা.'১৪]

$= \ln x\int x\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int xdx\}dx$

$= \ln x.\frac{x^2}{2} - \int(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2})dx$

$= \ln x.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}+c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= \frac{(\sqrt{e})^2}{2}\ln\sqrt{e} - \frac{1}{4}(\sqrt{e})^2 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{2}.\frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}$

$= \frac{e}{4}.1 - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

13(a) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}$ [প্র.ভ.প.'০৬]

$= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x\,dx}{1+(x^2)^2} = \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\tan^{-1}1-\tan^{-1}0) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-0) = \frac{\pi}{8}$

13(b) $\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx$

[রা. '০৬, '০৯; ব. '০৭ ; ঢা. '০৯; কু.,সি.'১২,'১৪]

$= \int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2})dx =$

$\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2})dx$

$= \left[\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$= \tan^{-1}1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \tan^{-1}0 - \frac{1}{2}\ln 1$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - 0 + 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

13(c) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ [ঢা.'০৭]

$= -\int_0^{\pi}\frac{(-\sin x)}{1^2+\cos^2 x}dx = -\left[\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\pi}$

$= -\{\tan^{-1}(\cos\pi) - \tan^{-1}(\cos 0)\}$

$= -\{\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1)\}$

$= -(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

13(d) ধরি, $I = \int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$ [প্র.ভ.প.'০৭]

$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1-\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x) = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)$$

$$\therefore\ \mathrm{I} = 2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx$$

$$= 2(-\frac{1}{2})\int_0^{\pi/4}\frac{(-2\sin 2x)}{1^2+(\cos 2x)^2}dx$$

$$= -\left[\tan^{-1}(\cos 2x)\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\{\tan^{-1}(\cos\frac{\pi}{2}) - \tan^{-1}(\cos 0)\}$$

$$= -\{\tan^{-1}0 - \tan^{-1}1\} = -\{0-\frac{\pi}{4}\} = \frac{\pi}{4}$$

13(e) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ [রা.'১২; সি. '০৭; কু.'০৮; ব.'১৩; ঢা.'১৪]

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x+e^{-x})} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1}$$

ধরি, $e^x = z \ \therefore\ e^x dx = dz$

সীমা : $x = 0$ হলে, $z = e^0 = 1$

$x = 1$ হলে, $z = e^1 = e$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_1^e \frac{dz}{z^2+1} = \left[\tan^{-1}z\right]_1^e =$$

$$\tan^{-1}e - \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}$$

14(a) $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$ [ব.'১৩]

$$= \int_3^4 \frac{dx}{5^2-x^2} = \left[\frac{1}{2.5}\ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right|\right]_3^4$$

$$= \frac{1}{10}(\ln\left|\frac{5+4}{5-4}\right| - \ln\left|\frac{5+3}{5-3}\right|)$$

$$= \frac{1}{10}(\ln 9 - \ln 4) = \frac{1}{10}\ln\frac{9}{4} = \frac{1}{10}\ln(\frac{3}{2})^2$$

$$= \frac{1}{10}\times 2\ln(\frac{3}{2}) = \frac{1}{5}\ln(\frac{3}{2})$$

(b) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{9-\sin^2 x}dx$ [ঢা.'০৫; মা.'০৮; চ., সি.'০৯]

ধরি, $\sin x = z$. $\therefore \cos x dx = dz$

সীমা : $x = 0$ হলে $z = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{9-\sin^2 x}dx = \int_0^1 \frac{dz}{3^2-z^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2.3}\ln\left|\frac{3+z}{3-z}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{6}(\ln\left|\frac{3+1}{3-1}\right| - \ln\left|\frac{3+0}{3-0}\right|)$$

$$= \frac{1}{6}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{6}\ln 2$$

15 (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}$

$$= \int_0^1 \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \left[\sin^{-1}(x-1)\right]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1-1) - \sin^{-1}(0-1) = \sin^{-1}0 + \sin^{-1}1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

15 (b) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$ [প্র.ভ.প. '০৪]

$$= \int_{1/2}^1 \frac{2dx}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} = \left[\sec^{-1}(2x)\right]_{1/2}^1$$

$$= \sec^{-1}2 - \sec^{-1}1 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

15(c) ধরি $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ [প্র.ভ.প.'০৪]

এবং $x = 2\cos\theta$. তাহলে $dx = -2\sin\theta\, d\theta$

সীমা : $x = 1$ হলে $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ এবং

$x = 2$ হলে $\theta = \cos^{-1}1 = 0$

$$\therefore \mathrm{I} = \int_{\pi/3}^0 \frac{-2\sin\theta\, d\theta}{4\cos^2\theta\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}}$$

$$= \int_{\pi/3}^0 \frac{-2\sin\theta\, d\theta}{4\cos^2\theta . 2\sin\theta} = -\frac{1}{4}\int_{\pi/3}^0 \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\tan\theta\right]_{\pi/3}^0 = -\frac{1}{4}(\tan 0 - \tan\frac{\pi}{3})$$

$$= -\frac{1}{4}(0-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

15 (d) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1-\tan^2 x}$ [বুয়েট ০৭–০৮]

$= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \int_0^{\pi/6} \frac{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sec 2x + 1)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|\tan 2x + \sec 2x| + x\right]_0^{\pi/6}$

$= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{\pi}{3} + \sec\frac{\pi}{3}| + \frac{\pi}{6} - 0\}$

$= \frac{1}{4}\ln|\sqrt{3}+2| + \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\ln(\sqrt{3}+2) + \frac{\pi}{12}$

16. (a) ধরি $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ [সি. '০৭; রা. '০৫; কু.'০৯,'১৩; চ. '০৯; য.,ব. '১২, দি.'১২,'১৪]

এবং $x = a\sin\theta$. তাহলে $dx = a\cos\theta\, d\theta$

সীমা : $x=0$ হলে $\theta = \sin^{-1} 0 = 0$ এবং

$x=a$ হলে $\theta = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\, a\cos\theta\, d\theta$

$= a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{a^2}{2}\{(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi) - (0 + \frac{1}{2}\sin 0)\}$

$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi a^2$

16(b) ধরি $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}dx$ [প্র.ভ.প.'৮৫]

এবং $x = 2\sin\theta$. তাহলে $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

সীমা : $x=0$ হলে $\theta = \sin^{-1} 0 = 0$ এবং

$x=\sqrt{2}$ হলে $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \frac{4\sin^2\theta.2\cos\theta\, d\theta}{\{4(1-\sin^2\theta)\}^{3/2}}$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{8\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta}{8\cos^3\theta} = \int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} (\sec^2\theta - 1)\, d\theta = [\tan\theta - \theta]_0^{\pi/4}$

$= \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$

17. ধরি, $I = \int_0^4 y\sqrt{4-y}\, dy$

[ব.'০৫; রা.'০৭;ঢা.'০৯,'১২; রা.'১৩; চ.'১০,'১৪]

এবং $4 - y = z^2$. $\therefore -dy = 2z\, dz$

সীমা : $y=0$ হলে $z=2$ এবং $y=4$ হলে $z=0$

$\therefore I = \int_2^0 (4-z^2)\sqrt{z^2}.(-2z\, dz)$

$= 2\int_2^0 (z^4 - 4z^2)\, dz = 2\left[\frac{1}{5}z^5 - \frac{4}{3}z^3\right]_2^0$

$= 2(-\frac{1}{5}\times 2^5 + \frac{4}{3}\times 2^3) = 2^6(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}) = \frac{128}{15}$

18. $\int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}dx$ [প্র.ভ.প.'৯৫]

$= \int_1^{15} \{\frac{-1+2}{(x+1)(-1+3)} + \frac{-3+2}{(-3+1)(x+3)}\}dx$

$= \int_1^{15} \{\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+3)}\}dx$

$= \frac{1}{2}[\ln|x+1| + \ln|x+3|]_1^{15}$

$= \frac{1}{2}[\ln|(x+1)(x+3)|]_1^{15}$

$= \frac{1}{2}\{\ln|(15+1)(15+3)| - \ln|(1+1)(1+3)|\}$

$= \frac{1}{2}\{\ln(16\times 18) - \ln(2\times 4)\}$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{16\times 18}{2\times 4} = \frac{1}{2}\ln 6^2 = \frac{2}{2}\ln 6 = \ln 6$

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন :

19. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\, d\theta \quad (১)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})\, d\theta$$

$$= \left[-2\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \quad (২)$$

$$= 2\{-\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - (-\cos 0 + \sin 0)\} \quad (১)$$

$$= 2\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1+0)\} = 2$$

20. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \operatorname{cosec} x dx$

$$= \left[\ln|\tan\frac{x}{2}|\right]_{\pi/2}^{\pi/4} \quad (১)$$

$$= \ln|\tan\frac{\pi}{8}| - \ln|\tan\frac{\pi}{4}| = \ln(\tan\frac{\pi}{8}) - \ln 1$$

$$= \ln(\tan\frac{\pi}{8}) - 0 = \ln(\tan\frac{\pi}{8}) \quad (১)$$

21. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) dx$ (১)

$$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2} \quad (২)$$

$$= \frac{1}{4}\{-3\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} - (-3\cos 0 + \frac{1}{3}\cos 0)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{(-0+0) - (-3.1 + \frac{1}{3})\} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \quad (১)$$

22(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^5 d(\sin x) \quad (১)$$

$$= \left[\frac{1}{6}(\sin x)^6\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}\{(\sin\frac{\pi}{2})^6 - (\sin 0)^6\} \quad (২)$$

$$= \frac{1}{6}\{1-0\} = \frac{1}{6}$$

22(b) $\int_0^{\pi/4} \cos x \sin^3 x dx$

$$= \int_0^{\pi/4} (\sin x)^3 d(\sin x) \quad (১)$$

$$= \left[\frac{1}{4}(\sin x)^4\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}\{(\sin\frac{\pi}{4})^4 - (\sin 0)^4\} \quad (২)$$

$$= \frac{1}{4}\{(\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - 0\} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

23. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\, dx$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\sin 6x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 6x}{6}\right]_0^{\pi/6} \quad (২)$$

$$= -\frac{1}{12}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{12}(-1-1) = \frac{1}{6}$$

24(a) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x})$ (১)

$$= 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_0^1 = 2(e^{\sqrt{1}} - e^{\sqrt{0}}) = 2(e-1) \quad (১)$$

24(b) $\int_0^2 2x\cos(1+x^2)\, dx$

$$= \int_0^2 \cos(1+x^2)\, d(1+x^2) \quad (১)$$

$$= \left[\sin(1+x^2)\right]_0^2 = \sin(1+2^2) - \sin(1+0^2) \quad (২)$$

$$= \sin(5) - \sin(1)$$

25(a) ধরি, $I = \int 2x^3 e^{-x^2} dx$ এবং $x^2 = z$.

তাহলে $2x\, dx = dz$ এবং (১)

$$I = \int x^2 e^{-x^2}(2xdx) = \int ze^{-z} dz$$

$$= z\int e^{-z}dz - \int\{\frac{d}{dz}(z)\int e^{-z}dz\}dz \quad (১)$$

$$= z(-e^{-z}) - \int 1.(-e^{-z})dz \quad (১)$$

$$= -ze^{-z} + (-e^{-z}) = -(x^2+1)e^{-x^2}$$

$$\therefore \int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx = \left[-(x^2+1)e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$= -(1+1)e^{-1} + (0+1)e^0 = 1 - 2e^{-1} \quad (১)$$

25(b) $\int \ln(1+x)dx$

$= \ln(1+x)\int dx - \int[\frac{d}{dx}\{\ln(1+x)\}\int dx]dx$ (১)

$= x\ln(1+x) - \int \frac{1}{1+x}.xdx$ (১)

$= x\ln(1+x) - \int \frac{1+x-1}{1+x}dx$

$= x\ln(1+x) - \int (1-\frac{1}{1+x})dx$

$= x\ln(1+x) - \{x - \ln(1+x)\} + c$ (১)

$= (x+1)\ln(1+x) - x + c$

$\therefore \int_0^1 \ln(1+x)dx = [(x+1)\ln(1+x) - x]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1 - \ln 1 = 2\ln 2 - 1 - 0 = 2\ln 2 - 1$ (১)

26(a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3\,dx}{1+x^2} = 3[\tan^{-1} x]_1^{\sqrt{3}}$ (১)

$= 3(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1} 1) = 3(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$ (১)

$= 3\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

26(b) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+2^2} = \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2}^{2}$ (১)

$= \frac{1}{2}\{\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1)\} = \frac{1}{2}\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\} = \frac{\pi}{4}$ (১)

26(c) $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$= \frac{1}{a}(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{a}(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{4a}$ (১)

27. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1} x]_0^1$ (১)

$= \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ (১)

28(a) $\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 x(1 - 2\sqrt{x} + x)dx$

$= \int_0^1 (x - 2x^{\frac{3}{2}} + x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1$ (১)

$= (\frac{1}{2} - 2\times\frac{2}{5} + \frac{1}{3}) - 0 = \frac{15-24+10}{30} = \frac{1}{30}$ (১)

(b) $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}dx$.

$= \int_1^2 (x^2 - 2 + \frac{1}{x^2})dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2$ (১)

$= (\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} - 2 - 1)$

$= \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{16-6-3-2}{6} = \frac{5}{6}$ (১)

(c) $\int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \sin 2\theta)d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}$ (১)

$= (\pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi) - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos 2.\frac{\pi}{2})$

$= \pi - \frac{1}{2}.1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$ (১)

29. $\int_{-\pi/4}^{0} \tan(\frac{\pi}{4} + x)dx$

$= \left[-\ln|\cos(\frac{\pi}{4} + x)|\right]_{-\pi/4}^{0}$ (১)

$= -\ln|\cos\frac{\pi}{4}| + \ln|\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})|$ (১)

$= -\ln|\frac{1}{\sqrt{2}}| + \ln|\cos 0| = -\ln 2^{-\frac{1}{2}} + \ln 1$

$= \frac{1}{2}\ln 2 + 0 = \frac{1}{2}\ln 2$ (১)

30(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ **[য.'০১; কু.'০২]**

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$ (২)

$= \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi) - (0 - \frac{1}{2}\sin 0)\} = \frac{\pi}{4}$ (১)

30(b) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^4 x \sin x dx$

$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx$

মনে করি, $\cos x = z \quad \therefore -\sin x \, dx = dz$.

$x = 0$ হলে, $z = \cos 0 = 1$; (১)

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x dx = -\int_1^0 (1-z^2)^2 z^4 dz$

$= -\int_1^0 (1-2z^2+z^4)z^4 dz$

$= -\int_1^0 (z^4 - 2z^6 + z^8) dz$

$= -\left[\frac{1}{5}z^5 - 2.\frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9\right]_1^0$ (১)

$= -\{0 - (\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9})\} = \frac{63-90+35}{315}$

$= \frac{98-90}{315} = \frac{8}{315}$ (১)

30(c) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3} dx$

এবং $z = 1 + \sin x \therefore dz = \cos x dx$ (১)

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 1$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 2$

$\therefore I = \int_1^2 \frac{dz}{z^3} = \int_1^2 z^{-3} dz = \left[\frac{z^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2z^2}\right]_1^2$ (১)

$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 1) = \frac{3}{8}$ (১)

31. ধরি, $I = \int_0^1 \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ **[প্র.ভ.প.'০৪]**

এবং $z = \cos^{-1} x \therefore dz = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (১)

সীমা: $x = 0$ হলে $z = \frac{\pi}{2}$ এবং $x = 1$ হলে $z = 0$

$\therefore I = -\int_{\pi/2}^0 z dz = -\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\pi/2}^0$ (১)

$= -\frac{1}{2}\{0 - (\frac{\pi}{2})^2\} = \frac{\pi^2}{8}$ (১)

32(a) $\int_1^3 \frac{2x dx}{1+x^2} = \int_1^3 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$ (১)

$= [\ln(1+x^2)]_1^3 = \ln(1+9) - \ln(1+1)$ (১)

$= \ln\frac{10}{2} = \ln 5$ (১)

32(b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)}}$ (১)

$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{2x+1}\right]_0^4 = \sqrt{8+1} - \sqrt{0+1} = 3 - 1 = 2$ (২)

33(a) $\int \ln(x^2+1) dx$

$= \ln(x^2+1)\int dx - \int[\frac{d}{dx}\{\ln(x^2+1)\}\int dx]dx$ (১)

$= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x}{x^2+1}.x dx$ (১)

$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$

$= x\ln(x^2+1) - 2\int (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx$

$= x\ln(x^2+1) - 2(x - \tan^{-1} x) + c$ (১)

$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1} x) + c$

$\int_0^1 \ln(x^2+1) dx = \left[x\ln(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1} x\right]_0^1$

$= \ln 2 - 2 + 2\tan^{-1} 1 - 0$

$= \ln 2 - 2 + 2.\frac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ (১)

33(b) ধরি, $I = \int_2^e \{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\} dx$ [প্র.ভ.প'১৪,'০২]

এবং $\ln x = y \Rightarrow x = e^y \therefore dx = e^y dy$ (১)

$\therefore \int\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\} dx = \int\{\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\} e^y dy$

$= \int e^y\{\frac{1}{y} + D(\frac{1}{y})\} dy = \frac{e^y}{y} + c = \frac{x}{\ln x}$ (২)

$\therefore I=\left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^e=\frac{e}{\ln e}-\frac{2}{\ln 2}=e-\frac{2}{\ln 2}$ (১)

34(a) $\int_0^1\frac{3\,dx}{1+x^2}=3\left[\tan^{-1}x\right]_0^1$ (১)

$=3(\tan^{-1}1-\tan^{-1}0)=\frac{3\pi}{4}$ (১)

34(b) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{d(\sin x)}{1^2+(\sin x)^2}$ (১)

$=\left[\tan^{-1}(\sin x)\right]_0^{\pi/2}=\tan^{-1}(\sin\frac{\pi}{2})-\tan^{-1}(\sin 0)$

$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$ (১)

35(a) $\int_{-1}^2\frac{dx}{x^2-9}=\int_{-1}^2\frac{dx}{x^2-3^2}$

$=\left[\frac{1}{2.3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right]_{-1}^2$ (১)

$=\frac{1}{6}\{\ln\left|\frac{2-3}{2+3}\right|-\ln\left|\frac{-1-3}{-1+3}\right|\}$

$=\frac{1}{6}(\ln\frac{1}{5}-\ln 2)=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{5\times 2}=\frac{1}{6}\ln(0\cdot 1)$ (১)

35(b) $\int_0^{a/2}\frac{1}{a^2-x^2}dx=\left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right]_0^{a/2}$ (১)

$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+\frac{a}{2}}{a-\frac{a}{2}}\right|=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{3a}{a}\right|=\frac{1}{2a}\ln 3$ (১)

36(a) $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$ (১)

$=\sin^{-1}\frac{a}{a}-\sin^{-1}\frac{0}{a}=\sin^{-1}1-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}$ (১)

36(b) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ [কু.বো.'০১; প্র.ভ.প.৮৩]

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\sqrt{3}dx}{\sqrt{2^2-(\sqrt{3}x)^2}}=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]_0^1$ (১)

$=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}0)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3}-0)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (১)

36(c) ধরি, $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ এবং

$\sin x=z$. তাহলে $\cos x\,dx=dz$ (১)

সীমা : $x=0$ হলে $z=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে $z=1$

$\therefore I=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{2^2-z^2}}=\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1$ (১)

$=\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$ (১)

36(d) $\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ [প্র.ভ.প.'০১,'০৩]

$=\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x^2-2x+1)-1}}$

$=\int_2^3\frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$ (১)

$=\left[\sec^{-1}(x-1)\right]_2^3=\sec^{-1}(3-1)-\sec^{-1}(2-1)$ (২)

$=\sec^{-1}2-\sec^{-1}1=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$.

37. $\int_0^a\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$ [প্র.ভ.প. '০০]

$=\int_0^a\frac{x^2(\frac{a^2}{x^2}-1)}{\{x(\frac{a^2}{x}+x)\}^2}dx=\int_0^a\frac{(\frac{a^2}{x^2}-1)}{(\frac{a^2}{x}+x)^2}dx$ (১)

$=\int_0^a\frac{-(-\frac{a^2}{x^2}+1)}{(\frac{a^2}{x}+x)^2}dx=-\left[-\frac{1}{\frac{a^2}{x}+x}\right]_0^a$ (২)

$=\left[\frac{x}{a^2+x^2}\right]_0^a=\frac{a}{a^2+a^2}-0=\frac{1}{2a}$ (১)

38. $\int_8^{27}\frac{dx}{x-x^{1/3}}=\int_8^{27}\frac{dx}{x(1-x^{-2/3})}$

ধরি $x^{-\frac{2}{3}} = z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx = dz$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{x} = dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x} = dz$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$$

সীমা : $x = 8$ হলে $z = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ এবং

$x = 27$ হলে $z = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

$$\therefore \int_8^{27}\frac{dx}{x - x^{1/3}} = -\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{dz}{z(1-z)}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\{\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\}dz$$

$$= \frac{3}{2}[\ln|z-1| - \ln|z|]_{1/4}^{1/9} = \frac{3}{2}\left[\ln|\frac{z-1}{z}|\right]_{1/4}^{1/9}$$

$$= \frac{3}{2}\{\ln|\frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}}| - \ln|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}}|\}$$

$$= \frac{3}{2}\{\ln|-8| - \ln|-3|\} = \frac{3}{2}(\ln 8 - \ln 3)$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$$

39. $\int_{-1}^{1}\frac{1-x}{1+x}dx$ [প্র.ভ.প.'৮৪]

$$= \int_{-1}^{1}\frac{-(1+x)+2}{1+x}dx = \int_{-1}^{1}(-1+\frac{2}{1+x})dx$$

$$= [-x + 2\ln|1+x|]_{-1}^{1}$$

$$= -1 + 2\ln|1+1| - (1 + 2\ln|1-1|)$$

$$= -1 + 2\ln 2 - 1 - 2\ln 0$$

$$= 2(\ln 2 - 1)$$

40. ধরি, $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx \quad (a>0)$

$$= \int_{-\pi/4}^{0}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx$$

$= I_1 + I_2$, যেখানে

$$I_1 = \int_{-\pi/4}^{0}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx = -\int_0^{-\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx$$

ধরি, $x = -y$ তাহলে $dx = -dy$

সীমা : $x=0$ হলে $y=0$ এবং $x=-\frac{\pi}{4}$ হলে $y=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 y - \tan^6 y}{(a^{-y}+1)\cos^2 y}dy = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^{-x}+1)\cos^2 x}dx$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^{-x}+1)\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(\frac{1}{a^{-x}+1} + \frac{1}{a^x+1})\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(\frac{a^x}{1+a^x} + \frac{1}{a^x+1})\frac{(1+\tan^2 x)^3 - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\frac{1+3\tan^2 x+3\tan^4 x+\tan^6 x-\tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(1+3\tan^2 x+3\tan^4 x)\sec^2 x dx$$

$$= \left[\tan x + 3\frac{\tan^3 x}{3} + 3\frac{\tan^5 x}{5}\right]_0^{\pi/4}$$

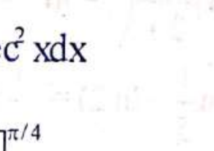
$$= (\tan\frac{\pi}{4} + \tan^3\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\tan^5\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{13}{5} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমালা X E

1(a) $y = 3x$ সরলরেখা , x-অক্ষ এবং কোটি $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = 3x$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =



$$\int_0^2 y\,dx = \int_0^2 3x\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(2^2 - 0) = 6 \text{ বর্গ একক।}$$

ধরি $x^{-\frac{2}{3}} = z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx = dz$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{x} = dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x} = dz$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$$

সীমা : $x = 8$ হলে $z = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ এবং

$x = 27$ হলে $z = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

$$\therefore \int_8^{27}\frac{dx}{x - x^{1/3}} = -\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{dz}{z(1-z)}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\{\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\}dz$$

$$= \frac{3}{2}[\ln|z-1| - \ln|z|]_{1/4}^{1/9} = \frac{3}{2}\left[\ln|\frac{z-1}{z}|\right]_{1/4}^{1/9}$$

$$= \frac{3}{2}\{\ln|\frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}}| - \ln|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}}|\}$$

$$= \frac{3}{2}\{\ln|-8| - \ln|-3|\} = \frac{3}{2}(\ln 8 - \ln 3)$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$$

39. $\int_{-1}^{1}\frac{1-x}{1+x}dx$ [প্র.ভ.প.'৮৪]

$$= \int_{-1}^{1}\frac{-(1+x)+2}{1+x}dx = \int_{-1}^{1}(-1 + \frac{2}{1+x})dx$$

$$= [-x + 2\ln|1+x|]_{-1}^{1}$$

$$= -1 + 2\ln|1+1| - (1 + 2\ln|1-1|)$$

$$= -1 + 2\ln 2 - 1 - 2\ln 0$$

$$= 2(\ln 2 - 1)$$

40. ধরি, $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx \quad (a>0)$

$$= \int_{-\pi/4}^{0}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx + \int_{0}^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx$$

$= I_1 + I_2$, যেখানে

$$I_1 = \int_{-\pi/4}^{0}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx = -\int_{0}^{-\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx$$

ধরি, $x = -y$ তাহলে $dx = -dy$

সীমা : $x=0$ হলে $y=0$ এবং $x=-\frac{\pi}{4}$ হলে $y=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad I_1 = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 y - \tan^6 y}{(a^{-y}+1)\cos^2 y}dy = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^{-x}+1)\cos^2 x}dx$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^{-x}+1)\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/4}\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{(a^x+1)\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(\frac{1}{a^{-x}+1} + \frac{1}{a^x+1})\frac{\sec^6 x - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(\frac{a^x}{1+a^x} + \frac{1}{a^x+1})\frac{(1+\tan^2 x)^3 - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\frac{1 + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x + \tan^6 x - \tan^6 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}(1 + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x)\sec^2 x dx$$

$$= \left[\tan x + 3\frac{\tan^3 x}{3} + 3\frac{\tan^5 x}{5}\right]_0^{\pi/4}$$

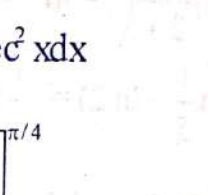
$$= (\tan\frac{\pi}{4} + \tan^3\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\tan^5\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{13}{5} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমালা X E

1(a) $y = 3x$ সরলরেখা , x-অক্ষ এবং কোটি $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = 3x$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^2 y\,dx = \int_0^2 3x\,dx$

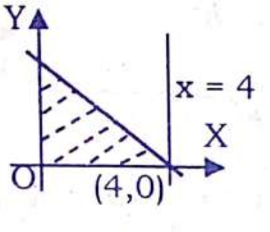


$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(2^2 - 0) = 6 \text{ বর্গ একক।}$$

1(b) $3x+4y=12$ সরলরেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৩]

সমাধান: $3x+4y=12$ অর্থাৎ $y=3-\frac{3}{4}x$ সরলরেখা x অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত রেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^4 y\,dx$



$=\int_0^4 (3-\frac{3}{4}x)dx$

$=\left[3x-\frac{3}{4}.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 12-\frac{3}{8}.16 = 6$ বর্গ একক।

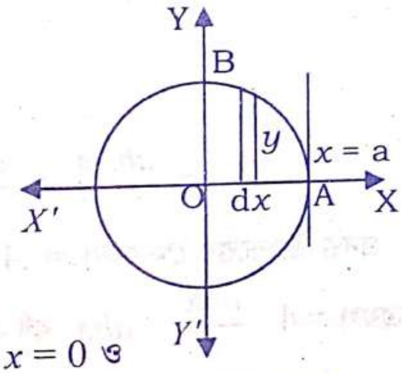
2(a) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৬,'০৯;ব.'১৩; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান : $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ a ।

$x^2+y^2=a^2$

$\Rightarrow y^2=a^2-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y=\sqrt{a^2-x^2}$. বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=$ a রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_0^a y\,dx=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{a^2\pi}{4}$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$=4\times\frac{a^2\pi}{4}$ বর্গ একক $=a^2\pi$ বর্গ একক ।

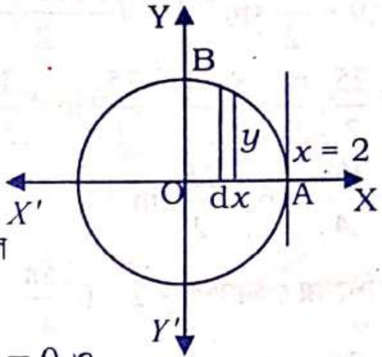
2(b) $x^2+y^2=4$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০৭]

সমাধান : $x^2+y^2=4$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 2

$x^2+y^2=4$

$\Rightarrow y^2=4-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= y=\sqrt{4-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^2 y\,dx=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{2^2-x^2}}{2}+\frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$

$=\frac{4}{2}\sin^{-1}1=2.\frac{\pi}{2}=\pi$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=4\pi$ বর্গ একক

2(c) $x^2+y^2=25$ বৃত্ত এবং $x=3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[ঢা.'০৫,'০৯,'১৪; রা.'০৯,'১৪; য.'১৩; কু.,চ.'১৪]

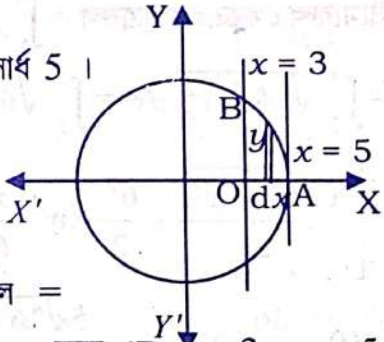
সমাধান : $x^2+y^2=25$

বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 5 ।

$x^2+y^2=25$

$\Rightarrow y^2=25-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y=\sqrt{25-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=3$ ও $x=5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_3^5 y\,dx$

$=\int_3^5\sqrt{25-x^2}\,dx=\int_3^5\sqrt{5^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{5^2-x^2}}{2}+\frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$

$=(0+\frac{25}{2}\sin^{-1}1)-(\frac{3\sqrt{25-9}}{2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$

$=\frac{25}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{3\times4}{2}-\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

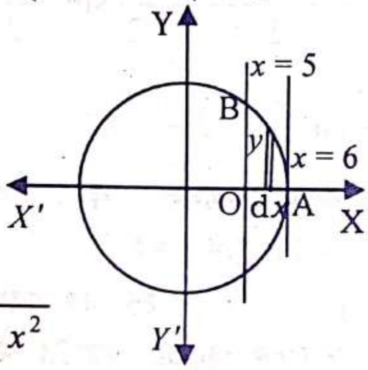
$=\frac{25\pi}{4}-6-\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=2\times(\frac{25\pi}{4}-6-\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$

$=(\frac{25\pi}{2}-12-25\sin^{-1}\frac{3}{5})$ বর্গ একক।

2(d) $x^2+y^2=36$ বৃত্ত এবং $x=5$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান : $x^2+y^2=36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।



$x^2+y^2=36$

$\Rightarrow y^2=36-x^2$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{36-x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর

ক্ষেত্রফল $=$ $y=\sqrt{36-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=5$ ও $x=6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_5^6 y\,dx$

$=\int_5^6\sqrt{36-x^2}\,dx=\int_5^6\sqrt{6^2-x^2}\,dx$

$=\left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2}+\frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_5^6$

$=(0+\frac{36}{2}\sin^{-1}1)-(\frac{5\sqrt{36-25}}{2}+\frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{5}{6})$

$=18.\frac{\pi}{2}-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}$

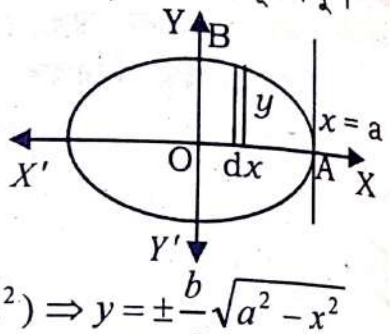
$=9\pi-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=2[9\pi-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}]$

$=(18\pi-5\sqrt{11}-36\sin^{-1}\frac{5}{6})$ বর্গ একক।

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; রা.'০৮; সি.'০৮; দি.'১৪]

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ।



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

$=$

$=\frac{ab}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{ab\pi}{4}$ বর্গ একক।

$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $=4\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=4\quad\frac{ab\pi}{4}=ab\pi$ বর্গ একক ।

4(a) পরাবৃত্ত এবং $y=4$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু.'০১]

সমাধান ঃ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y=0$ ও $y=4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $=$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\times 8=\frac{8}{3}$$ বর্গএকক

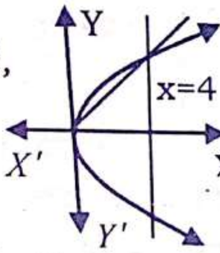
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$=\frac{16}{3}$$ বর্গএকক ।

4(b) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৩,'১৩; সি.'০৯; '১১; ব.'১০; চ.,কু.'১৩]

সমাধান : $y = x$ হতে y এর মান



$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$

$y_1 = 2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 4$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

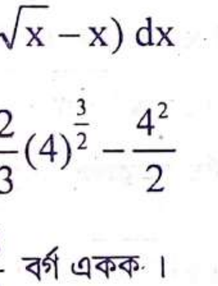
$$=\int_0^4 (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\, dx$$

$$=\left[2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 2\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{4^2}{2}$$

$$=\frac{32}{3} - 8 = \frac{32-24}{3} = \frac{8}{3}$$ বর্গ একক ।

4(c) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০২; চ.'১০]

সমাধান : $y = 2x$ হতে y এর মান



$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$

$y_1 = 2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 1$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

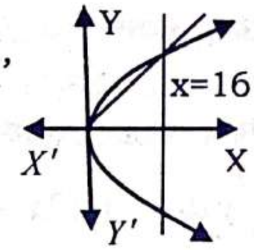
$$=\int_0^1 (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^2 (2\sqrt{x} - 2x)\, dx$$

$$=\left[2\times\frac{x^{3/2}}{3/2} - 2.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\times\frac{2}{3} - 1$$

$$=\frac{4}{3} - 1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$ বর্গ একক ।

4(d) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০২]

সমাধান : $y = x$ হতে y এর মান



$y^2 = 16x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = 16x \Rightarrow x = 0, 16$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$

$y_1 = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 16$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

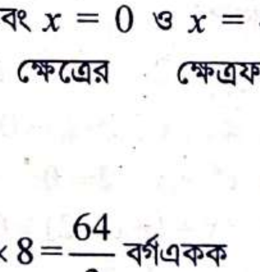
$$=\int_0^{16} (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)\, dx$$

$$=\left[4\times\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{16} = 4\times\frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}} - \frac{16^2}{2}$$

$$=\frac{512}{3} - 128 = \frac{512-384}{3} = \frac{128}{3}$$ বর্গ একক ।

4(e) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান : $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 4.4.x$



পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের

সমীকরণ $x = 4$.

$y^2 = 16x \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{x}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=$

$y = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^4 y\, dx = \int_0^4 4\sqrt{x} dx$$

$$=4\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = 4\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\times 8 = \frac{64}{3}$$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$=\frac{128}{3}$$ বর্গএকক ।

5(a) $y = 2x - x^2$ বক্ররেখা এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা.'০১]

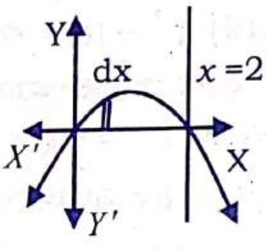
সমাধান ঃ $y = 2x - x^2 \cdots (1)$

x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0 \cdots (2)$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 = 2x - x^2 \Rightarrow x = 0,2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



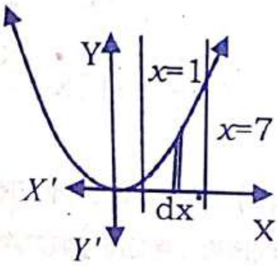
$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx$

$= \left[2.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক

5(b) $y = x^2$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 7$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$x = \sqrt{y}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$= \int_1^7 y\,dx = \int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7$

$= \frac{1}{3}(343 - 1) = 144$ বর্গ একক

5(c) $y = x^2$ বক্ররেখা এবং $x - y + 2 = 0$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

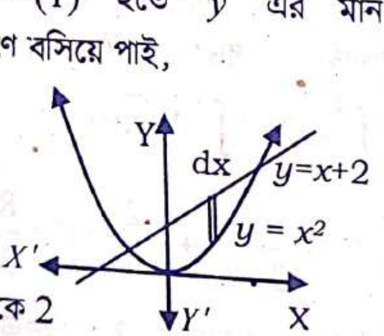
সমাধান ঃ $y = x^2 \cdots\cdots (1)$ হতে y এর মান $x - y + 2 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x - x^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 2$



এখানে x এর সীমা -1 থেকে 2

এবং $y_1 = x + 2$, $y_2 = x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $\int_{-1}^2 (y_1 - y_2)\,dx$

$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$

$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = 8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$= \frac{48 - 16 - 3 - 2}{6} = \frac{48 - 21}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ বর্গএকক

6. $x^2 + y^2 = 1$ ও $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০১]

সমাধান ঃ $y^2 = 1 - x = -(x - 1)$ হতে y^2 এর মান $x^2 + y^2 = 1$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 + 1 - x = 1$

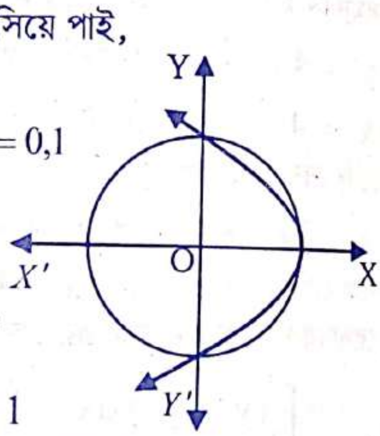
$\Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,1$

$x = 1$ হলে $y = 0$ এবং

$x = 0$ হলে $y = \pm 1$

$\therefore$ বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু

$(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$



এখানে x এর সীমা 0 থেকে 1

এবং $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $y_1 = \sqrt{1 - x}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $2\int_0^1 (y_1 - y_2)\,dx$

$= 2\int_0^1 (\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x})\,dx$

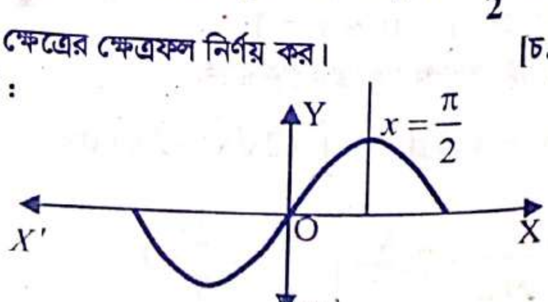
$= 2\left[\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{2}{3}(1 - x)^{3/2}\right]_0^1$

$= 2(\frac{1}{2}\sin^{-1} 1 - \frac{2}{3}) = 2(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$

$= 2(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3})$ বর্গ একক

7(a) $y = \sin x$ বক্ররেখা , x-অক্ষ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

সমাধান :



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$ $y = \sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = \dfrac{\pi}{2}$ রেখাদ্বয় দ্বা:

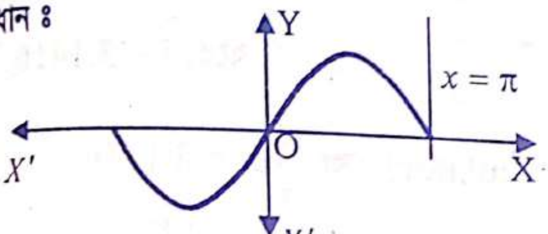
প্রশ্নমালা X E

ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi/2} y\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$ বর্গ একক।

7(b) x- অক্ষ এবং $y = \sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$ $y = \sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = \pi$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$

$= 1 + 1 = 2$ বর্গ একক।

সম্ভাব্য ধাপসহ প্রশ্ন :

8. $y = x^3$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $y = 0$, $x = 1$ ও $x = 3$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^3 y\,dx = \int_1^3 x^3\,dx$ (১)

$= \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_1^3 = \dfrac{1}{4}(81-1) = \dfrac{80}{4} = 20$ বর্গ একক ।(২)

9. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b \dfrac{c^2}{x}\,dx$ (১)

$= c^2[\ln x]_a^b = c^2(\ln b - \ln a) = c^2 \ln\dfrac{b}{a}$ (২)

10. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2/6$.

প্রমাণ ঃ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$

$\Rightarrow y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x$

এর সীমা 0 হতে a. (১)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^a y\,dx$

$= \int_0^a (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)\,dx$ (১)

$= \left[ax - 2\sqrt{a}.\dfrac{2}{3}x^{3/2} + \dfrac{x^2}{2}\right]_0^a$ (১)

$= a^2 - 2\sqrt{a}.\dfrac{2}{3}a^{3/2} + \dfrac{a^2}{2}$

$= a^2 - \dfrac{4}{3}a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6} = \dfrac{a^2}{6}$ (১)

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ এর মান কত হবে? [DU 06-07,08-09;NU 06-07; KU 03-04]

A. $\dfrac{\pi}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\dfrac{\pi}{4}$

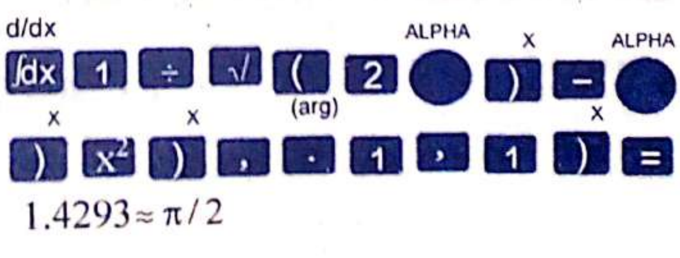
Sol^n. $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \dfrac{\pi}{2}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে : Mode radian- এ নিতে হবে। অত:পর ধারাবাহিকভাবে নিম্নোক্ত Button গুলো Press করতে হবে।

$\boxed{\int dx}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{Integrand}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{UpperLt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{Lower Lt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Lower Limit বা Upper Limit এর জন্য Integrand সরাসরি অসংজ্ঞায়িত হলে Lower Limit বা Upper Limit এর নিকটবর্তী মান নিতে হয়। যেমন - 0 এর পরিবর্তে 0.01 এবং 1 এর পরিবর্তে 0.99 বসানো যেতে পারে। Calculator অনেক problem calculation করতে বেশ সময় নেয়।

$I = 1.198 \approx \dfrac{\pi}{2}$



$1.4293 \approx \pi/2$

2. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[DU,NU 05-06]**

$Sol^n.\ I = -\left[\frac{1}{2}(\cos^{-1} x)^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\{0-(\frac{\pi}{2})^2\}$

$= \frac{\pi^2}{8}$. $I = 1.2237 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

3. $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x dx = ?$ **[DU 03-04; RU 06-07, 07-08; BUET 08-09]**

$Sol^n.\ I = -\left[\frac{1}{3}(1+\cos x)^3\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(1-8)$

$= \frac{7}{3}$. $I = 2.333 \approx \frac{7}{3}$ (By Calculator)

4. $\int_1^e \log_e x dx = ?$ **[DU 02-03; NU 04-05; 02-03; JU 05-06; BUET 05-06]**

$Sol^n.\ I = [(\log_e x - 1)x]_1^e = [(\log_e x - 1)x]_1^e = 1$

5. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[CDU 06-07,02-03; RU 02-03; 06-07; IU 04-05]**

$Sol^n.\ I = \left[\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2})^2 - 0\}$

$= \frac{\pi^2}{8}$. $I = 1.02 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

6. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2 dx}{x^2} = ?$ **[JU 06-07; SU 04-05; CU 05-06]**

$Sol^n.\ I = 0.833 \approx \frac{5}{6}$ (By Calculator)

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x} dx = ?$ **[CU 05-06]**

$Sol^n.\ I = 0.3809 \approx \frac{8}{21}$ (By Calculator)

8. $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ **[BUET 06-07]**

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{8}$ **D.** $\frac{2\pi}{3}$

$Sol^n.\ I = .392699 = \frac{\pi}{8}$ (By Calculator)

9. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = ?$ **[JU 07-08; RU 06-07; KU 06-07]**

$Sol^n.\ I = \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}a^2$. a = 2 ধরে, I = 3.1416

(By Calculator) এবং $\frac{\pi}{4}a^2 = 3.1416$

d/dx ∫dx √ (2 x² − ALPHA X) x²) , 0 , 2) = 3.1416

10. $y^2 = 4x$ ও $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[DU 05-06, 08-09]**

$Sol^n.\ x^2 = 4x \Rightarrow x = 0,4$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)\, dx = \frac{8}{3}$ (By Calculator)

11. $y = 3x$ সরলরেখা , x অক্ষ এবং $x = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[IU 07-08;SU 06-07]**

$Sol^n.$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 3x\, dx = \left[3.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6$

12. $x^2 + y^2 = a$ এর ক্ষেত্রফল কত? **[SU 04-05;CU 02-03]**

$Sol^n.\ x^2 + y^2 = (\sqrt{a})^2$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi(\sqrt{a})^2 = \pi a$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. Sol^n : $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

$\therefore$ Ans. (b)

2. Sol^n : $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2(2-1) = 2$

∴ Ans. (d)

3. $\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c$

∴ Ans. (a)

4. **Sol^n** : : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে

$\int_0^{\pi/2} \cos^5 xdx = 0.533$,যা 8/15 এর সমান।

∴ Ans. (d).

5. **Sol^n** : ন্যূনতম হতে হলে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = 0$ হতে হবে।

এখানে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{t-3}{t^2+7} = 0 \Rightarrow t = 3$

∴ Ans. (d)

6. **Sol^n** : $x^2 = 2y - 2 = 2(y-1) = 4 \times \frac{1}{2}(y-1)$

পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0,1)$, উপকেন্দ্রিক লম্ব, $y - 1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}$ ∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^{3/2} xdy =$

$\int_1^{3/2} \sqrt{2(y-1)}dy = 0.666 = \frac{2}{3}$ ∴ Ans. (c)

7. **Sol^n** : $\int \frac{dx}{ay-bx} = -\frac{1}{b}\int \frac{d(ay-bx)}{ay-bx}$

$= -\frac{1}{b}\ln(ay-bx) + c$ ∴ Ans. **A**

8. **Sol^n** : $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{3^2-(4x)^2}}$

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$ ∴ Ans. **B**

9. **Sol^n** : $\int_0^{1/a} d(\tan^{-1} ax) = \left[\tan^{-1} ax\right]_0^{1/a}$

10. **Sol^n** : কৌশল : $\int_a^b f(x) = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)$

এখানে, $\int_0^4 f(x)dx = \int_{0-1}^{4-1} f(x+1)dx$

$= \int_{-1}^3 f(x+1)dx = 6$

∴ Ans. (c)

11. **Sol^n** : $pv = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{v}$

∴ $\int_1^2 pdv = \int_1^2 \frac{5}{v}dv = 5\int_1^2 \frac{1}{v}dv$

$= 5(\ln 2 - \ln 1) = 5\, ln2$ ∴ Ans.(b)

12. **Sol^n** : ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ হলে

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \ln t dt\right) = \ln x - \ln 1 = \ln x$

∴ Ans. (b)

13. **Sol^n** : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$

∴ $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi a^2$

∴ Ans.(b)

14. **Sol^n** : রেখাঙ্কিত জায়গার ক্ষেত্রফল $= \int_2^5 ydx$

$= \int_2^5 x^2 dx = = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{1}{3}(125-8) = 39$

∴ Ans. (c).

15. **Sol^n** : $4x^2 + 25y^2 = 100$ **[দি.বো. ২০১৭]**

$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

∴ ক্ষেত্রফল $= ab\pi = (5\times 2)\pi = 10\pi$ ∴ Ans.(c)

16. **Sol^n** : $\int f(x)dx = \int \cos 2xdx$

$= \frac{\sin 2x}{2} + c$ ∴ Ans. (a) **[ঢা.বো. ২০১৭]**

17. **Sol^n** : $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

∴ Ans. (b) **[ঢা.বো. ২০১৭]**

18. **Sol^n** : $\int \frac{dx}{4x} = \frac{1}{4}\ln x + c$ **[ঢা.বো. ২০১৭]**

$\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

$$\int_0^2 4x dx = \left[4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2(2^2-0) = 8$$

$\therefore$ Ans. (d)

19. **Sol^n** : $\int \sin x^0 dx = = \int \sin\frac{\pi x}{180} dx$

$= -\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180} + c = -\frac{180}{\pi}\cos x^0 + c$

$\therefore$ Ans. (c) [ঢা.বো. ২০১৭]

20. **Sol^n** : $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$

$\therefore$ Ans. (c) [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

21. **Sol^n** : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= (4\times 3)\pi = 12\pi$

$\therefore$ Ans. (c) [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

22. **Sol^n** : $\int e^{-7x} dx = \frac{e^{-7x}}{-7} + c$

$\therefore$ Ans.(a) [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

23. **Sol^n** : $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭]

$= \int \frac{dx}{\sqrt{6^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{6} + c \therefore$ Ans.(b)

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 24 ও 25 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:-

$f(x) = \ln 2x.$

24. **Sol^n** : $f'(x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$ [য .বো.'১৭]

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{1}{2} \therefore$ Ans.(b)

25. **Sol^n** : $\int \ln 2x\, dx = x(\ln 2x - 1) + c$

$\therefore$ **Ans. (d)** [য .বো.'১৭]

26. **Sol^n** : $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

$\therefore$ Ans. (d) [য .বো.'১৭]

27. **Sol^n** : $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-1)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

$\therefore$ Ans. (b) [রা.বো.'১৭]

28. **Sol^n** : $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = 2\int \cot x dx$

$= \ln|\sin x| + c$ [কু.বো.'১৭]

29. **Sol^n** : $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2}$

$= -(0-1) = 1 \therefore$ Ans.(c) [কু.বো.'১৭]

30. **Sol^n** : $\int \ln x dx = x\ln x - x$

$\therefore$ Ans. (b) [ব.বো.'১৭]

31. **Sol^n** : $\int_0^1 \frac{3dx}{1+x^2} = 3\tan^{-1}1 = \frac{3\pi}{4}$

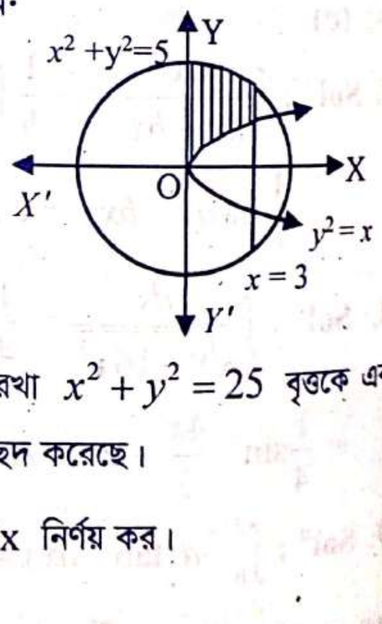
$\therefore$ Ans.(a) [ব.বো.'১৭]

32. **Sol^n** : $\int \frac{e^\theta d\theta}{1+e^\theta} = \ln(1+e^\theta) + c$

$\therefore$ Ans. (a) [ব.বো.'১৭]

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1.



চিত্রে, x = 3 সরলরেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে এবং $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করেছে।

(a) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

$= \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2} dx$

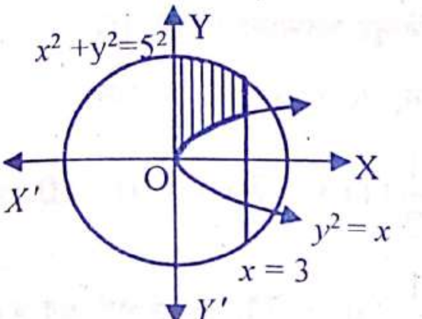
$= \frac{1}{2} \times 2\tan\frac{x}{2} + c = \tan\frac{x}{2} + c$ (Ans.)

(b) প্রদত্ত বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা XE এর 3(c) দ্রষ্টব্য।

(c) প্রদত্ত পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সাথে $y = 0$ সরলরেখা যে ক্ষেত্র তৈরি করে তার এবং রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল $= \int_0^3 (y_1 - y_2)dx$,

যেখানে $y_1 = \sqrt{5^2 - x^2}, y_2 = \sqrt{x}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^3 (\sqrt{5^2 - x^2} - \sqrt{x})dx$

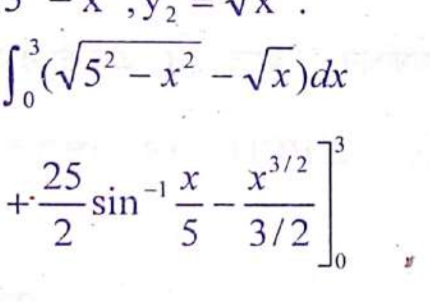
$$= \left[\frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5} - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$$

$$= \frac{3\sqrt{25 - 3^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{3 \times 4}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= 6 - 2\sqrt{3} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

2. চিত্রে $y = x - 2$ সরলরেখা $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।



(a) $\int x^3\sqrt{1 + 3x^4}dx$ নির্ণয় কর।

ধরি, $I = \int x^3\sqrt{1 + 3x^4}dx$

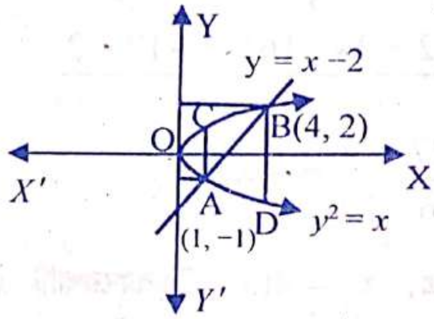
এবং $z = 1 + 3x^4 \therefore dz = 12x^3dx$

$$\therefore I = \frac{1}{12}\int \sqrt{z}dz = \frac{1}{12} \times \frac{z^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{18}(1 + 3x)^{3/2} + c \quad \text{(Ans.)}$$

(b) A ও B বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরাবৃত্তটিকে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$ হতে x এর মান $y^2 = x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y^2 = y + 2$

$\Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$\Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0$

$\therefore y = -1, 2$ এবং $x = 1, 4$.

ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

$$= 2\int_1^4 ydx = 2\int_1^4 \sqrt{x}dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$$

$$= 2 \times \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{4}{3} \times (8 - 1)$$

$$= \frac{28}{3}$$ বর্গ একক

(c) $y = x - 2$ সরলরেখা ও $y^2 = x$ পরাবৃত্ত দ্বারা অবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, −1) ও (2, 4).

$\therefore$ y এর সীমা -1 থেকে 2 এবং $x_1 = y+2$, $x_2 = y^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{-1}^{2}(x_1 - x_2)dy$

$$= \int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

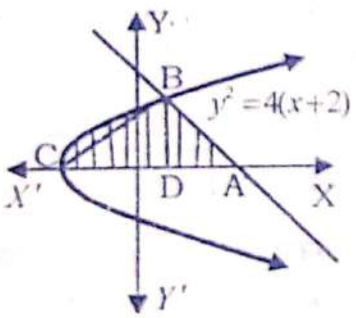
$$= \frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}-(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3})$$

$$= \frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}$$

$$= \frac{12+24-16-3+12-2}{6}$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$ বর্গ একক।

3. চিত্রে, $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে C বিন্দুতে ও AB রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার ঢাল -1 ও B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 6 ।



(a) দেখাও যে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 6) .

সমাধান : ধরি, AB রেখার সমীকরণ $y = -x + c \cdots$ (i) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha\ ,\ 6)$, যা (i) রেখা ও $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু।

$\therefore\ 6 = -\alpha + c \Rightarrow c = \alpha + 6$ এবং

$$6^2 = 4(\alpha+2) \Rightarrow \alpha+2 = 9 \Rightarrow \alpha = 7$$

$\therefore\ c = 7+6 = 13$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 6).

(b) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ $y = -x + 13$

$$\Rightarrow x+y = 13 \Rightarrow \frac{x}{13}+\frac{y}{13} = 1$$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13,0)

আবার , প্রদত্ত বক্ররেখা x অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ C বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0 .

$y^2 = 4(x+2)$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -2$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}|(13-7)(6-0)-(0-6)(7+2)|$$

$$= \frac{1}{2}|36+54| = 45$$ বর্গ একক।

(c) দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: B হতে AC এর উপর BD লম্ব টানি।

$\therefore\ \Delta BCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(CA \times BD)$

$$= \frac{1}{2}\times|-2-7|\times 6 = 27$$ বর্গ একক।

$y = 2\sqrt{x+2}$ বক্ররেখা , $x = 7$ সরলরেখা ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^{7} 2\sqrt{x+2}dx$

$$= 2\left[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{7}$$

$$= \frac{4}{3}\{(7+2)^{3/2}-(-2+2)^{3/2}\}$$

$$= \frac{4}{3}\times 27 = 36$$ বর্গ একক।

$\therefore$ দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল $= 45 + (36-27) = 54$ বর্গ একক।

4. $f(x) = \ln x$

(a) $f(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{d}{dx}f(\ln x) = \frac{d}{dx}\ln(\ln x) = \frac{1}{x\ln x}$

(b) প্রমাণ কর যে, $\int_2^4 f(2x)dx = 8\ln 2 - 2$

সমাধান: $\int \ln(2x)dx$

$= \ln(2x)\int dx - \int [\frac{d}{dx}\{\ln(2x)\}\int dx]dx$

$= x\ln(2x) - \int \frac{2}{2x}.xdx$

$= x\ln(2x) - \int dx = x\ln(2x) - x + c$

$\therefore \int_2^4 \ln(2x)\,dx = [x\ln(2x) - x]_2^4$

$= 4\ln 8 - 4 - (2\ln 4 - 2)$

$= 4\ln 2^3 - 4 - 2\ln 2^2 + 2$

$= 12\ln 2 - 2 - 4\ln 2 = 8\ln 2 - 2$

(c) f(x) বক্ররেখা অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x)=\ln x$ বক্ররেখা অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে

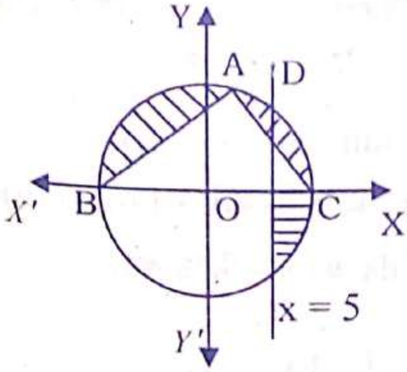
$f(x)=\ln x$ কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

(1,0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার (1 , 0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 0 = 1\,(x - 1) \Rightarrow x - y - 1 = 0$(Ans:)

5.



চিত্রে, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 = 36$ এবং AC = 8 একক।

(a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

এবং $1 - x^2 = z$. তাহলে, $-2xdx = dz$ এবং

$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{z} + c$

$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + c$

(b) x-অক্ষের উপরের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।

ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$,

AC = 8 একক, BC = 2 × 6 = 12 একক।

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5}$

ABC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(AB \times AC) = \frac{1}{2}(4\sqrt{5} \times 8)$

$= 16\sqrt{5}$ বর্গ একক।

আবার, ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\pi \times 6^2 = 18\pi =$ বর্গ একক।

$\therefore$ x-অক্ষের উপরের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − ABC ত্রিভুজে ক্ষেত্রফল

$= 18\pi - 16\sqrt{5}$ বর্গ একক।

(c) x−অক্ষের নিচের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।

$x^2 + y^2 = 36$

$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{36 - x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 5$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_5^6 y\,dx$

$$=\int_5^6 \sqrt{36-x^2}\,dx = \int_5^6 \sqrt{6^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2}+\frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_5^6$$

$$=(0+\frac{36}{2}\sin^{-1}1)-(\frac{5\sqrt{36-25}}{2}+\frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{5}{6})$$

$$=18.\frac{\pi}{2}-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$$=9\pi-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=[9\pi-\frac{5\sqrt{11}}{2}-18\sin^{-1}\frac{5}{6}]$ বর্গ একক।

6. $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(a) $\int\frac{\cos dx}{\sqrt{\sin x}}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

এবং $\sin x = z$. তাহলে, $\cos x\,dx = dz$ এবং

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}+c = 2\sqrt{\sin x}+c$$

(b) বৃত্তটির $(5, -1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-4-6\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 2(y-6)\frac{dy}{dx}=-2(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x-2}{y-6}$$

$(5,-1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=-\frac{5-2}{-1-6}=\frac{3}{7}$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের $(5,-1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y+1=\frac{7}{3}(x-5)$$

$$\Rightarrow 3y+3 = 7x-35 \therefore 7x-3y-38=0$$

(c) যোগজীকরণের সাহায্যে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=5^2$$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $x^2+y^2=5^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান।

এখন, $x^2+y^2=25$

$$\Rightarrow y^2=25-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$=$ $y=\sqrt{25-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^5 y\,dx=\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^5\sqrt{5^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{5^2-x^2}}{2}+\frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^5$$

$$=\frac{25}{2}\sin^{-1}1=\frac{25}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{25}{4}\pi$$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=25\pi$ বর্গ একক

7. $f(x)=\tan^{-1}x \quad \cdots\cdots$ (i)

$y=4x^3+3x^2-6x+1 \cdots\cdots$ (ii)

(a) $\int x^2e^{x^3}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $I=\int x\,e^{x^2}dx$

এবং $x^2=z$. তাহলে, $2xdx=dz \Rightarrow xdx=\frac{dz}{2}$

এবং $I=\frac{1}{2}\int e^z dz=\frac{1}{2}e^z+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

(b) (ii) বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$

স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(2x-1) = 0 \therefore x = -1, \frac{1}{2}$

$x = -1$ হলে, $y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = 4.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{4} - 6.\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{2+3-8}{4} = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ বিন্দু দুইটি $(-1, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

(c) $\int_1^{\sqrt{3}} xf(x)\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int x\tan^{-1}x\, dx$

$= \tan^{-1}x\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int xdx\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int(1 - \frac{1}{1+x^2})dx$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x) + c$

$= \frac{1}{2}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\} + c$

$\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\, dx = \left[\frac{(x^2+1)\tan^{-1}x - x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$

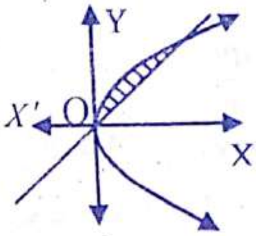
$= \frac{(3+1)\tan^{-1}\sqrt{3} - \sqrt{3} - (1+1)\tan^{-1}1 + 1}{2}$

$= \frac{1}{2}(4.\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - 2.\frac{\pi}{4} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} + 1)$

$= \frac{1}{2}(\frac{8\pi - 3\pi}{6} - \sqrt{3} + 1) = \frac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$

8.



চিত্রে, $y = x$ এবং $y^2 = 4x$ বক্ররেখা পরস্পর O ও A বিন্দুতে ছেদ করে।

(a) $\int\sqrt{1-\sin x}\cos x dx$ নির্ণয় কর।

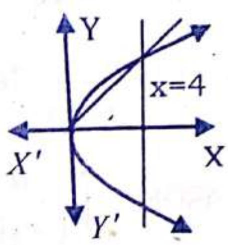
সমাধান : ধরি, $I = \int\sqrt{1-\sin x}\cos x\, dx$

এবং $1 - \sin x = z$. তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$I = -\int z^{\frac{1}{2}}\, dz = -\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + c$

$\therefore \int\sqrt{1-\sin x}\cos x\, dx = -\frac{2}{3}(1-\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$

(b) ছায়া ঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান : $y = x$ হতে y এর মান $y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y_1 = 2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$ সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^4(y_1 - y_2)\, dx = \int_0^4(2\sqrt{x} - x)\, dx$

$= \left[2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 2\times\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{4^2}{2}$

$= \frac{32}{3} - 8 = \frac{32-24}{3} = \frac{8}{3}$ বর্গ একক ।

(c) প্রদত্ত বক্ররেখার A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও প্রদত্ত সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃপ্রদত্ত বক্ররেখার A বিন্দুর স্থানাঙ্ক(4,4). বক্ররেখাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y^2 = 4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

(4,4) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{4} = 2$

$\therefore$ (4,4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ;

$$y - 4 = 2(x - 4) \Rightarrow y - 2x - 4 = 0$$

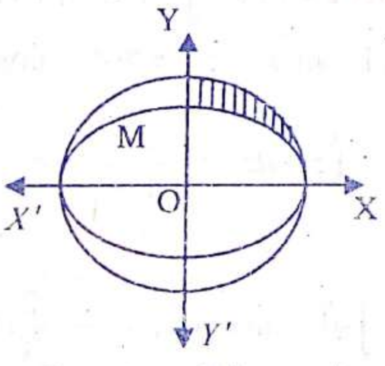
$$m_1 = 2 \ , \ m_2 = 1$$

প্রদত্ত বক্ররেখার A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও প্রদত্ত সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\theta \ = \tan^{-1}\frac{2-1}{1+2} = \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

(Ans:)

9.



এককেন্দ্রিক একটি বৃত্ত ও একটি উপবৃত্ত। উপবৃত্তটির সমীকরণ $9x^2 + 16y^2 = 144$.

(a) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{(1 - \sin x)dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$

$$= \int \frac{(1 - \sin x)dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin x)dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

(b) উপবৃত্তটির $(3, \frac{\sqrt{63}}{4})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃউপবৃত্তটির সমীকরণ $9x^2 + 16y^2 = 144$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$18x + 32y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}$$

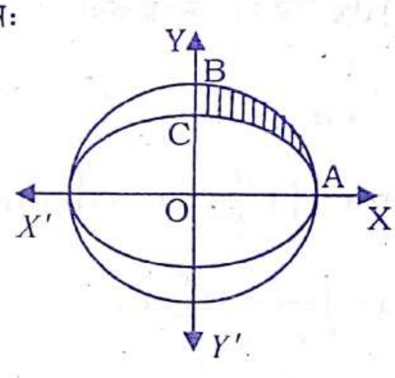
$(3, \frac{\sqrt{63}}{4})$ বিন্দুতে

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9.3}{16.\frac{\sqrt{63}}{4}} = \frac{-27}{4.3\sqrt{7}} = -\frac{9}{4\sqrt{7}}$$

$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্তটির $(3, \frac{\sqrt{63}}{4})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - \frac{\sqrt{63}}{4} = \frac{4\sqrt{7}}{9}(x - 3)$ (Ans)

(c) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



উপবৃত্তটির সমীকরণ $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \cdots \cdots (i)$$

$\therefore$ (i) উপবৃত্তের কেন্দ্র $O(0,0)$, $OA = 4$, $OC = 3$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $O(0,0)$, ব্যাসার্ধ , $OA = 4$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 4^2$

$$\Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

(i) হতে, $\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16}\Rightarrow y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$

$\Rightarrow\ y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

$\therefore$ উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল

= OAB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল – OAC উপবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx-\int_0^4\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^4\sqrt{4^2-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2}+\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$

$=\frac{1}{4}(\frac{16}{2}\sin^{-1}1)=2.\frac{\pi}{2}=\pi$ বর্গ একক।

10. $f(x)=\sin 2x,\ g(x)=\sqrt{a-x^2}$

(a) $f'(0)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x)=\sin 2x$

$\therefore\ f'(x)=2\cos 2x$

$\therefore\ f'(0)=2\cos 0=2\times 1=2$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-f(x)}{f(\frac{\pi}{2}+x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$

ধরি, $x=\frac{\pi}{4}+h$. $\because\ x\to\frac{\pi}{4}\ \therefore\ h\to 0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-\sin 2(\frac{\pi}{4}+h)}{\cos 2(\frac{\pi}{4}+h)}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+2h)}{\cos(\frac{\pi}{2}+2h)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{-\sin 2h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\sin^2 h}{-2\sin h\cos h}=-\lim\limits_{h\to 0}\tan h$

$=-\lim\limits_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}\times h=-1\times 0=0$ (Ans.)

(c) $\int_0^a g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int_0^a g(x)dx=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ধরি, $x=a\sin\theta\Rightarrow\ \theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$ এবং

$dx=a\cos\theta\ d\theta$

সীমা: $x=0$ হলে, $\theta=\sin^{-1}\frac{0}{a}=\sin^{-1}0=0$

$x=a$ হলে, $\theta=\sin^{-1}\frac{a}{a}=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \int_0^a g(x)dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta}\,a\cos\theta d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2\theta}\ \cos\theta d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0-\frac{\sin 0}{2}\right]$

$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}-0-\frac{0}{2}\right]=\frac{a^2\pi}{4}$

11. $f(x)=x+\frac{1}{x},\ g(x)=e^x\sin 2x$

(a) $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$

$= \int(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})dx$

$= \int(1+\sin x)dx = x - \cos x + c$

(b) f(x) এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$\therefore \quad x = -1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

$\therefore \quad x = 1$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

(c) $\int_0^{\pi/2} g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $I = \int g(x)dx = \int e^x \sin 2x dx$

$= \sin 2x\int e^x dx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin 2x)\int e^x dx\}dx$

$= \sin 2x.e^x - \int 2\cos 2x.e^x dx$

$= e^x \sin 2x - 2[\cos 2x\int e^x dx -$

$\int\{\frac{d}{dx}(\cos 2x)\int e^x dx\}dx]$

$= e^x \sin 2x - 2[\cos 2x.e^x - \int\{-2\sin 2x.e^x\}dx]$

$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x\, dx$

$\Rightarrow \ I = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I + c$

$\Rightarrow \ 5I = e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$

$\Rightarrow \ I = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$

$\therefore \quad \int g(x)dx = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$

$\therefore \int_0^{\pi/2} g(x)dx = \left[\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{5}e^{\pi/2}(\sin\pi - 2\cos\pi - \sin 0 + 2\cos 0)$

$= \frac{1}{5}e^{\pi/2}\{0 - 2(-1) - 0 + 2(1)\}$

$= \frac{1}{5}e^{\pi/2}(2+2) = \frac{4}{5}e^{\pi/2}$

12. $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

$g(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+4)}$

(a) $e^x \cos 3x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $y = e^x \cos 3x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x\frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x\frac{d}{dx}(e^x)$

$= e^x(-\sin 3x).\frac{d}{dx}(3x) + \cos 3x.e^x$

$= -e^x \sin 3x.3 + e^x \cos 3x$

$\therefore \quad e^x \cos 3x$ এর অন্তরজ,

$\frac{d}{dx}(e^x \cos 3x) = e^x(-3\sin 3x + \cos 3x)$

(b) f(x) এর লঘুমান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$

$\therefore \quad f'(x) = 4x + 7$ এবং $f''(x) = 4$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 4x + 7 = 0 \Rightarrow 4x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$

এখন, $f''(-\frac{7}{4}) = 4 > 0$

$\therefore \quad x = -\frac{7}{4}$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$$= \frac{49}{8} - \frac{49}{4} - 1 = \frac{49-98-8}{8}$$

$$= -\frac{57}{8} \text{ (Ans.)}$$

(c) $\int_0^2 g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $I = \int_0^2 g(x)dx$

$= \int_0^2 \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}$ এবং

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1) \cdots (1)$$

(1) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই, $-1 = 5A \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{1}{5}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = 4A + C \Rightarrow C = -4A = -4(-\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore I = -\frac{1}{5}\int_0^2 \frac{dx}{1+x} + \int_0^2 \frac{\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4}dx$$

$$= -\frac{1}{5}[\ln(1+x)]_0^2 + \frac{1}{10}\int_0^2 \frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= -\frac{1}{5}(\ln 3 + \ln 1) + \frac{1}{10}[\ln(x^2+4)]_0^2 + \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{5}(\ln 3 + 0) + \frac{1}{10}(\ln 8 - \ln 4) + \frac{4}{10}.(\tan^{-1}1 - 0)$$

$$= \frac{1}{5}\ln 3 + \frac{1}{10}(\ln\frac{8}{4}) + \frac{4}{10}.(\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{5}\ln 3 + \frac{1}{10}\ln 2 + \frac{\pi}{10} \text{ (Ans.)}$$

13. $f(x) = 1 + \cos x$,

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x$$

(a) $f(x^2)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = 1 + \cos x$

$\therefore f(x^2) = 1 + \cos(x^2)$

$\therefore f'(x^2) = 0 - \sin(x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$

$= -\sin(x^2).(2x)$

$\therefore f(x^2)$ এর অন্তরজ $= -2x\sin(x^2)$

(b) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{f(x)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int_0^{\pi/2}\sqrt{f(x)}dx$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}dx = \sqrt{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{0}{2}) \qquad = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0)$$

$$= 2 \text{ (Ans.)}$$

(c) দেখাও যে,

$$(1-x^2)g''(x) - x\{g'(x) - 2\} + g(x) = 0$$

প্রমাণ : এখানে,

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x \cdots (1)$$

ইহাকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) - 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

$$= -\frac{x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)g'(x)$$

$$= -x(\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - x + x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)g'(x) = -x\{g(x) + x\}$$

[(1) দ্বারা।]

$$\Rightarrow (1-x^2)g'(x) + x\,g(x) + x^2 = 0$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)g''(x) + g'(x)(-2x) + xg'(x) + g(x) + 2x = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)g''(x) - xg'(x) + g(x) + 2x = 0$$

$$\therefore (1-x^2)g''(x) - x\{g'(x) - 2\} + g(x) = 0$$

14. $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1} \cdots \text{(i)},\ x^2 + y^2 = 16 \cdots \text{(ii)}$

(a) প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = 6$

প্রমাণ : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = 3+\sqrt{2^2+5}$$

$$= 3+3 = 6 \text{ (Ans.)}$$

(b) (i) বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - \ln x.(2x+0)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$$

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে, $y = \dfrac{\ln 2}{2^2+1} = \dfrac{\ln 2}{5}$ এবং

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2+1-2.2^2\ln 2}{2(2^2+1)^2} = \frac{5-8\ln 2}{50}$$

$\therefore$ প্রদত্ত বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

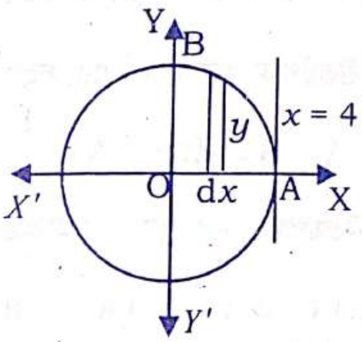
$$\left(y-\frac{\ln 2}{5}\right) = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{5y-\ln 2}{5} = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2)$$

$$\therefore 10(5y-\ln 2) = (5-8\ln 2)(x-2)$$

(c) প্রমাণ কর যে, (ii) নং বৃত্তের ক্ষেত্রফল 16π বর্গ একক।

প্রমাণ :



$x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 4।

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{16-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=$ $y = \sqrt{16-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ কোটি দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 y\,dx$

$$= \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{4^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{4\sqrt{4^2-4^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{4}{4} - \frac{0\sqrt{4^2-0^2}}{2} - \frac{0^2}{2}\sin^{-1}\frac{0}{4}$$

$= \frac{16}{2}\sin^{-1}1 = 8.\frac{\pi}{2} = 4\pi$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ $= 4\times 4\pi$ বর্গ একক $= 16\pi$ বর্গ একক ।

15. $h(x) = \ln x$ এবং $h'(x) = g(x)$

(a) $\int \cos^2 x dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}(x + \frac{\cos 2x}{2}) + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

(b) $x^2 g'(x) + h'(\tan 2x) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} 4x = 1$

প্রমাণ: $h(x) = \ln x \cdots$ (i) এবং $h'(x) = g(x)$ ... (ii)

(i) হতে, $h'(x) = \frac{1}{x} = g(x)$, [(ii) দ্বারা]

$\therefore \ g'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1.x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$

এখন, $x^2 g'(x) + h'(\tan 2x) = 0$

$\Rightarrow x^2(-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{\tan 2x} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan 2x} = 1 \Rightarrow \tan 2x = 1$

L.H.S. $= \operatorname{cosec} 4x = \frac{1}{\sin 2.2x}$

$= \frac{1}{\frac{2\tan 2x}{1+\tan^2 2x}} = \frac{1+\tan^2 2x}{2\tan 2x}$

$= \frac{1+1^2}{2.1} = 1 =$ R.H.S.

(c) দেখাও যে, $h(x)\ g(x)$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান e.

প্রমাণ: মনে করি, $f(x) = h(x)\ g(x) = \ln x.\frac{1}{x}$

$\therefore \ f'(x) = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x.1}{x^2} = \frac{1-\ln}{x^2}$ এবং

$f''(x) = \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - (1-\ln x).2x}{x^4}$

$= \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore \ \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \ \therefore \ x = e$

এখন, $f''(e) = \frac{-3+2.1}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$

$\therefore \ x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore \ h(x)g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ এর গুরুমান $= f(e) = \frac{1}{e}$

16. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$

(a) $\int_0^{\pi/2} 9g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int_0^{\pi/2} 9g(x)dx = \int_0^{\pi/2} 9e^{-x}dx$

$= -9\int_0^{\pi/2} e^{-x}d(-x) = -9\left[e^{-x}\right]_0^{\pi/2}$

$= -9(e^{-\pi/2} - e^{-0}) = -9(e^{-\pi/2} - e^0)$

$= -9(e^{-\pi/2} - 1) = 9(1 - e^{-\pi/2})$

(b) মূল নিয়মে $9g(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি; $F(x) = 9g(2x) = 9e^{-2x}$

$\therefore \ F(x+h) = 9e^{-2(x+h)} = 9e^{-2x-2h}$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$\frac{d}{dx}\{F(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$\therefore \ \frac{d}{dx}(9e^{-2x}) = \lim_{h\to 0}\frac{9e^{-2x-2h} - 9e^{-2x}}{h}$

$= 9\lim_{h\to 0}\frac{e^{-2x}.e^{-2h} - e^{-2x}}{h}$

$= 9\lim_{h\to 0}\frac{e^{-2x}}{h}(e^{-2h} - 1)$

$= 9e^{-2x}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\{1+(-2h)+\frac{(-2h)^2}{2!}+\frac{(-2h)^3}{3!}+\cdots\}-1]$

$= 9e^{-2x}\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(-2h+\frac{2^2h^2}{2!}-\frac{2^3h^3}{3!}+\cdots\cdots)$

$= 9e^{-2x}\lim\limits_{h\to 0}(-2+\frac{2^2h}{2!}-\frac{2^3h^2}{3!}+$ h- এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদসমূহ)

$= 9e^{-2x}(-2+0+0+\cdots\cdots) = -18e^{-2x}$

(c) দেখাও যে; $4f(x) + 9g(x)$ এর লঘুমান 12।

প্রমাণ: মনে করি, $y = 4f(x) + 9g(x)$

$= 4e^x + 9e^{-x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \therefore e^x = \pm\frac{3}{2}$

$e^x = \frac{3}{2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} > 0$

$\therefore e^x = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= 4.\frac{3}{2} + 9\times\frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$

17. $f(x) = x - x^{1/3} \cdots\cdots$ (i)

$y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1 \cdots\cdots$ (ii)

(a) $\int_8^{27} f(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int_8^{27} f(x)dx = \int_8^{27}(x - x^{\frac{1}{3}})dx$

$= \left[\frac{x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_8^{27} = \frac{27^2}{2} - \frac{27^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{8^2}{2} + \frac{8^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$

$= \frac{729}{2} - \frac{3}{4}\times 81 - \frac{64}{2} + \frac{3}{4}\times 16$

$= \frac{729}{2} - \frac{243}{4} - 32 + 12 = \frac{729}{2} - \frac{243}{4} - 20$

$= \frac{1458 - 243 - 80}{4} = \frac{1135}{4}$ (Ans.)

(b) (ii) বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$

স্পর্শক X- অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x+1) - 1(x+1) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(2x-1) = 0 \therefore x = -1, \frac{1}{2}$

$x = -1$ হলে, $y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, $y = 4.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{4} - 6.\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{2+3-8}{4} = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ বিন্দু দুইটি $(-1, 6)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

(c) দেখাও যে, $\int_8^{27}\frac{dx}{f(x)} = \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$

প্রমাণ: $\int_8^{27}\frac{dx}{f(x)} = \int_8^{27}\frac{dx}{x - x^{1/3}}$

$= \int_8^{27}\frac{dx}{x(1 - x^{-2/3})}$

ধরি, $x^{-\frac{2}{3}} = z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx = dz$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{x} = dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x} = dz$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$

সীমা : $x = 8$ হলে $z = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ এবং

$x = 27$ হলে $z = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

$$\therefore \int_8^{27}\frac{dx}{x-x^{1/3}}=-\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{dz}{z(1-z)}$$

$$=\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\frac{d}{z(1-z)}=\frac{3}{2}\int_{1/4}^{1/9}\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\}dz$$

$$=\frac{3}{2}[\ln|z-1|-\ln|z|]_{1/4}^{1/9}=\frac{3}{2}\left[\ln|\frac{z-1}{z}|\right]_{1/4}^{1/9}$$

$$=\frac{3}{2}\{\ln|\frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}}|-\ln|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}}|\}$$

$$=\frac{3}{2}\{\ln|-8|-\ln|-3|\}=\frac{3}{2}(\ln 8-\ln 3)$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$$

18. $f(x)=\ln x$ এবং $g(x)=e^x$.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ax}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}\cdots-1}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{(2x)^2}{2!}\cdots}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{4x}{4}\cdots}{a}=\frac{2}{a}$$

(b) $\frac{f(2x)}{x}$ এর গুরুমান এবং লঘুমান বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x)=\frac{\ln 2x}{x}$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{x\frac{1}{x}-\ln 2x.1}{x^2}=\frac{1-\ln 2x}{x^2}$$ এবং

$$f''(x)=\frac{x^2(-\frac{1}{x})-(1-\ln 2x).2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x+2x\ln 2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln 2x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$$\therefore\ \frac{1-\ln 2x}{x^2}=0\Rightarrow \ln 2x=1\ \therefore x=\frac{e}{2}$$

এখন, $f''(\frac{e}{2})=8.\frac{-3+2.1}{e^3}=\frac{-8}{e^3}<0$

$\therefore\ x=\frac{e}{2}$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore\ \frac{f(2x)}{x}$ এর গুরুমান $=f(\frac{e}{2})=\frac{2}{e}$ (Ans:)

(c) $\int_1^{e^2}\frac{f(x)}{x}dx+\int_1^2 g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^2 e^x dx$

ধরি, $z=\ln x\ \therefore\ dz=\frac{dx}{x}$

$$\therefore\ \int\frac{\ln x}{x}dx=\int zdz=\frac{z^2}{2}+c=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

$$\therefore\ \int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^2 e^x dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{e^2}+\left[e^x\right]_1^2$$

$$=2+e^2-e$$

19. $g(z)=mz\sin^{-1}z$ একটি ফাংশন এবং $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ একটি বক্ররেখা।

(a) $\int_1^2\frac{1}{z}\cos(\ln z)dz$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_1^2\frac{1}{z}\cos(\ln z)\,dz$

ধরি, $x=\ln z\ \therefore\ dx=\frac{dz}{z}$

সীমা: $z=1$ হলে $x=\ln 1=0$ এবং

$z=2$ হলে $x=\ln 2$

$\therefore \int_1^2 \frac{1}{z}\cos(\ln z)\,dz = \int_0^{\ln 2} \cos x\,dx$

$= [\sin x]_0^{\ln 2} = \sin(\ln 2) - \sin 0 = \sin(\ln 2)$

(b) $\int g(x)dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int g(x)dx = \int mx\sin^{-1}x dx$

$= m[\sin^{-1}x\int xdx - \int\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int xdx\}dx]$

$= m[\sin^{-1}x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{x^2}{2}dx]$

$= m[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx]$

$= m[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\int\sqrt{1-x^2}dx - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx]]$

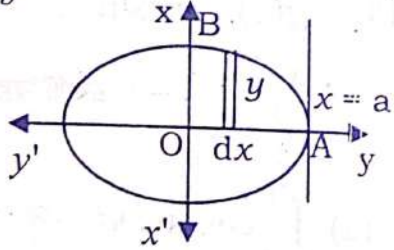
$= m[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \sin^{-1}x]] + c$

$= m[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x]] + c$

(c) b > a হলে উদ্দীপকে প্রদত্ত বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল বের কর।

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ।

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



$\Rightarrow \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{b^2}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2) \Rightarrow y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$

$\therefore$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = b$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =

$\int_0^b y\,dx = \int_0^a \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}\,dx$

$= \frac{a}{b}\left[\frac{x\sqrt{b^2 - x^2}}{2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{b}\right]_0^b$

$= \frac{a}{b}(\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1) = \frac{ab}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}$ বর্গ একক।

$\therefore$ প্রদত্ত অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল = 2 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $2\times\frac{ab\pi}{4} = \frac{1}{2}ab\pi$ বর্গ একক ।

20. দৃশ্যকল্প- I: $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$

দৃশ্যকল্প- II: $2x^2 + 2y^2 = 64.$

(a) $\int \ln x\,dx$ নির্ণয় কর।

$\int 1.\ln x\,dx = \ln x\int 1\,dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int 1.dx\}dx$

$= x\ln x - \int(\frac{1}{x}\times x)dx$

$= x.\ln x - \int 1\,dx = x(\ln x - 1) + c$

(b) দৃশ্যকল্প- I হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর।

ধরি, $I = \int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$ এবং

$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\Rightarrow x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \cdots(1)$

(1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

(1) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $A - C = 0 \Rightarrow A = C = \frac{1}{2}$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{-1}{2}$

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{-1}{2}$

$\therefore I = \int \{\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\} dx$

$= \frac{1}{2}[\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}]$

$= \frac{1}{2}[\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$

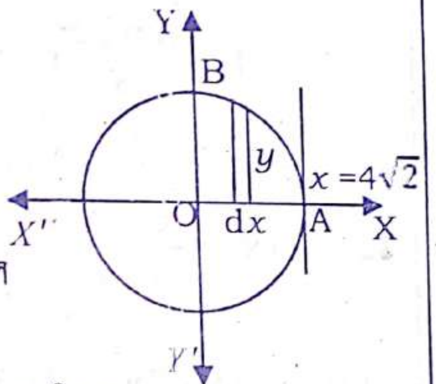
(c) দৃশ্যকল্প- II: দ্বারা প্রথম চর্তুভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$x^2+y^2=32$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ $4\sqrt{2}$

$x^2+y^2=32$

$\Rightarrow y^2 = 32 - x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{32-x^2}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= y = \sqrt{32-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও

$x = 4\sqrt{2}$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^{4\sqrt{2}} y\,dx = \int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{32-x^2}\,dx$ =

$\int_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - x^2}\,dx$

$= \left[\frac{x\sqrt{(4\sqrt{2})^2-x^2}}{2} + \frac{32}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_0^{4\sqrt{2}}$

$= 8\pi$

21. $\varphi(x,y) = 9x^2 + 16y^2 - 144; f(x) = x - 2$
এবং $g(x) = \sin^6 x$. [সিলেট বোর্ড ২০১৭]

(a) $\int \frac{xdx}{(x-1)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{xdx}{x-1} = \int \frac{x-1+1}{x-1}dx$

$= \int \frac{x-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$

$= \int dx + \int \frac{1}{x-1}dx = x + \ln|x-1| + c$

(b) (i) $\int_0^2 f(x)\tan^{-1}(x-2)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $f(x) = x - 2$

ধরি, $x - 2 = z \Rightarrow dx = dz$

$z = -2$ যখন $x = 0; z = 0$

$\therefore \int_0^2 (x-2)\tan^{-1}(x-2)dx = \int_{-2}^0 z\tan^{-1} z\,dz$

এখন, $\int z\tan^{-1} z\,dz$

$= \tan^{-1} z\int z\,dz - \int\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} z)\int z\,dz\}dz$

$= \tan^{-1} z.\frac{z^2}{2} - \int \frac{1}{1+z^2}.\frac{z^2}{2}dz$

$= \frac{z^2}{2}\tan^{-1} z - \frac{1}{2}\int \frac{1+z^2-1}{1+z^2}dz$

$= \frac{z^2}{2}\tan^{-1} z - \frac{1}{2}\{\int dz - \int \frac{1}{1+z^2}dz\}$

$= \frac{z^2}{2}\tan^{-1} z - \frac{1}{2}\{z - \tan^{-1} z\}$

$= \frac{1}{2}(z^2+1)\tan^{-1} z - \frac{1}{2}z + c$

$\therefore \int_{-2}^0 z\tan^{-1} z\,dz = \left[\frac{1}{2}(z^2+1)\tan^{-1} z - \frac{1}{2}z\right]_{-2}^0$

$= 0 - \{\frac{1}{2}.5\tan^{-1}(-2) + 1\}$

$= -\frac{5}{2}\tan^{-1}(-2) - 1$ (Ans:)

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx$

ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\, dx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = 1$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx = \int_0^1 z^6 dz$

$= \left[\frac{z^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$ (Ans.)

(c) $\varphi(x,y) = 0$ ও $f(x) = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\varphi(x,y) = 9x^2 + 16y^2 - 144$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \cdots\cdots$ (i)

এবং $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

উপবৃত্তটি x এবং y অক্ষকে যথাক্রমে $(\pm 4, 0)$ এবং $(0, \pm 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) হতে, $\frac{y^2}{3^2} = 1 - \frac{x^2}{4^2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

$\therefore y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ বক্ররেখাএবং $x = 2$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল =

$2\int_2^4 y\, dx = 2\int_2^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx$

ধরি, $x = 4\sin z \therefore dx = 4\cos z\, dz$

$x = 2$ হলে, $z = \frac{\pi}{6}$; $x = 4$ হলে, $z = \frac{\pi}{2}$

$\therefore 2\int_2^4 y\, dx$

$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\sqrt{16 - 16\sin^2 z}.4\cos z.dz$

$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{\cos^2 z}.4\cos z.dz$

$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos z.4\cos z.dz$

$= \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 8.2\cos^2 z.dz$

$= \frac{3}{2}.8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2z)dz$

$= 12\left[z + \frac{\sin 2z}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 4\pi - 3\sqrt{3}$ (Ans:)

22. $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}, H(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

[য .বো.'১৭]

(a) $y = (x-2)(x+1)$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পাখর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

$y = (x-2)(x+1)$

$\Rightarrow y = x^2 - x - 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.2 - 1 = 3$; যখন = 2

(b) দেখাও যে, $F(x)$ এর লঘুমান, গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ : মনে করি,

$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এবং $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$

এখন, $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$

$\therefore$ $x=-1$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$\therefore$ গুরুমান $= f(-1) = -1+1+\frac{1}{-1} = -1$

আবার, $f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$

$\therefore$ $x=1$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$\therefore$ লঘুমান $= f(1) = 1+1+\frac{1}{1} = 3$

$\therefore$ $\frac{x^2+x+1}{x}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(c) $\int_0^1 H(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমালা X C এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

23. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$....(i), $g(x) = x^2+1$....(ii)

[রা.বো.'১৭]

(a) $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2 dx$

$= \int(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})dx$

$= \int(1+\sin x)dx$

$= x - \cos x + c$ (Ans.)

(b) (i) বক্ররেখার $x=2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - \ln x.(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)\frac{1}{x} - 2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$$

$x=2$ বিন্দুতে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4+1-2.4.\ln 2}{2.25} = \frac{5-8\ln 2}{50}$$

$\therefore$ $x=2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-0 = \frac{5-8\ln 2}{50}(x-2) \quad \text{(Ans:)}$$

(c) $\int_0^1 f(x).g(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(x).g(x) = \ln x$

$\therefore \int \ln x\, dx$

$= \ln x\int dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx$

$= x\ln x - \int\frac{1}{x}.xdx = x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

$\therefore \int_0^1 \ln x\, dx = [x(\ln x - 1)]_0^1$

$= (1.\ln 1 - 1) - 0 = -1$(Ans:)

24. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1, x=3; f(x)=xe^x, g(x)=(x+1)^3$

[রা.বো.'১৭]

(a) $\cot x = \frac{1}{9}$ হলে $\sec 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\cot x = \frac{1}{9}$

$\therefore \tan x = 9 \Rightarrow \tan^2 x = 81$

$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\Rightarrow \sec 2x = \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = \frac{41}{40}$

(b) $\int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}\{g(x)\}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমালা X C এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

(c) উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ এবং $x=3$

উপবৃত্তটি x এবং y অক্ষকে $(\pm6, 0)$ এবং $(0,\pm5)$ ছেদ করে।

এখন, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{5^2}=1-\frac{x^2}{6^2}$

$\Rightarrow y=\pm\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$

$\therefore$ $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ বক্ররেখা এবং $x = 3$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল =

$2\int_3^6 y\,dx = 2\int_3^6 \frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}\,dx$

$=\frac{5}{3}[\frac{x\sqrt{36-x^2}}{2}+\frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}]_3^6$

$=10\pi-15\sqrt{3}/2$ (Ans:)

25. $u=e^x$ এবং $4x^2+9y^2=36$ [কু.বো.'১৭]

(a) প্রমাণ কর যে, $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

সমাধান ঃ $\int \ln x\,dx$

$=\ln x\int dx-\int\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int dx\}dx$

$=x\ln x-\int\frac{1}{x}x\,dx = x\ln x-\int dx$

$=x\ln x-x+c$

(b) $\int_0^{\ln 2}\frac{u}{1+u}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\ln 2}\frac{u}{1+u}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx$

ধরি, $z=1+e^x \therefore dz=e^x dx$

সীমা: $x=0$ হলে $z=1+e^0=1+1=2$ এবং $x=\ln 2$ হলে $z=1+e^{\ln 2}=1+2=3$

$\therefore$ $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_2^3\frac{dz}{z}=[\ln z]_2^3$

$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$ (Ans.)

(c) যোগজীকরণের সাহায্যে প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমালা X E এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

26. $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$,

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{12-16x^2}}$ ও $\psi(x)=\tan^{-1}(\frac{x}{5})$

(a) x এর সাপেক্ষে x^x এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নমালা IX-G এর উদাহরণ 6(a) দ্রষ্টব্য।

(b) উদ্দীপকের আলোকে f(x) এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$

$\therefore$ $f'(x)=3x^2-18x+24$ এবং

$f''(x)=6x-18$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0$

$\Rightarrow$ $3x^2-18x+24=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$

$\Rightarrow$ $(x-4)(x-2)=0 \therefore x=4, 2$

এখন, $f''(4)=6.4-18=6>0$

$\therefore$ $f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x=4$ এবং

এর মান $=f(4)=64-144+96-12$

$=4$

আবার, $f''(2)=6.2-18=-6<0$

$\therefore$ $f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x=2$ এবং

এর মান $=f(2)=8-36+48-12$

$=8$

(c) উদ্দীপকের আলোকে নির্ণয় কর:

(i) $\int\varphi(x)dx$

সমাধান: $\int\varphi(x)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{12-16x^2}}$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{4(3-4x^2)}}=$

$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(2x)^2}}$

$=\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{\sqrt{3}}+c$ (Ans.)

(ii) $\int\psi(x)dx$

সমাধান : $\int\psi(x)dx=\int\tan^{-1}\frac{(x}{5})dx$

$$= \tan^{-1}(\frac{x}{5})\int dx - \int[\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\frac{x}{5})\}\int dx]dx$$

$$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \int\frac{1/5}{1+(\frac{x}{5})^2}xdx$$

$$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \int\frac{xdx}{25+x^2}$$

$$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \frac{1}{2}\int\frac{(0+2x)dx}{25+x^2}$$

$$= x\tan^{-1}(\frac{x}{5}) - \frac{1}{2}\ln(25+x^2) + c$$

27. দৃশ্যকল্প-১: $f(\theta) = \cos^3\theta, g(\theta) = \sin\theta$

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 = 36$ [ব.বো.'১৭]

(a) $\int\frac{dx}{1+e^x}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int\frac{1}{e^x+1}dx = \int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}dx$

$$= \int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\int\frac{(0-e^{-x})dx}{1+e^{-x}}$$

$$= -\ln|1+e^{-x}| + c$$

(b) দৃশ্যকল্প-১ হতে নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+g(\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin\theta)}\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= \left[\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\{(-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}) - (-\cos 0 + \sin 0)\}$$

$$= 2\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}) - (-1+0)\} = 2 \quad \text{(Ans:)}$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta$

সমাধান : $\int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^3\theta.\sqrt[3]{\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta).\sqrt[3]{\sin\theta}.\cos\theta d\theta$$

ধরি, $\sin\theta = z \Rightarrow \cos\theta\,d\theta = dz$

$\theta = 0$ হলে, $z = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta = \int_0^1(1-z^2)z^{\frac{1}{3}}dz$$

$$= \int_0^1(z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{7}{3}})dz$$

$$= \left[\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}z^{\frac{10}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{15-6}{20} = \frac{9}{20} \text{ (Ans.)}$$

(c) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমাকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{36-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$= y = \sqrt{36-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^6 y\,dx = \int_0^6\sqrt{36-x^2}\,dx$$

$$\int_0^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2}+\frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_0^6$$

$$=\frac{36}{2}\sin^{-1}1=18.\frac{\pi}{2}=9\pi$$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= 36\pi$ বর্গ একক

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর : $\int_{1\cdot5}^{3\cdot5}\ln x\,dx$, $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

পরীক্ষণের নাম ঃ ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_{1\cdot5}^{3\cdot5}\ln x\,dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A=\int_{1\cdot5}^{3\cdot5}\ln x\,dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+\frac{y_4}{2})$ ব্যবহার করে $\int_{1\cdot5}^{3\cdot5}\ln x\,dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $1\cdot5\le x\le3\cdot5$ ব্যবধিতে সমদুরবর্তী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে $(5-1)=4$ দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$$\therefore\quad h=\frac{3\cdot5-1\cdot5}{4}=0\cdot5$$

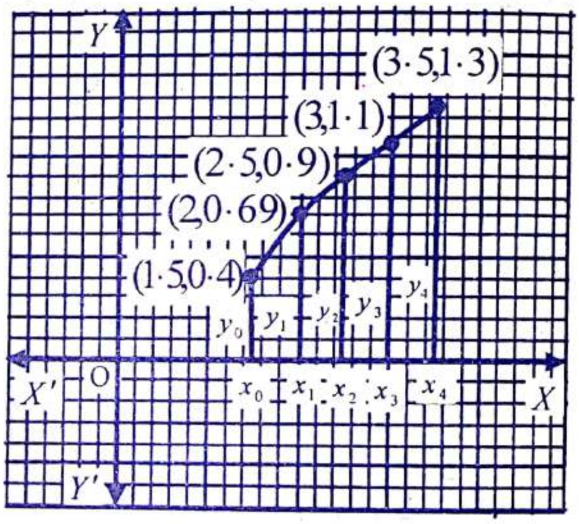
2. h এর মান হতে $x_n=x_{n-1}+h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0=1\cdot5$.

3. $y=f(x)=\ln x$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0=1\cdot5$	$y_0=\ln 1\cdot5=0\cdot405$
$x_1=x_0+h=2$	$y_1=\ln 2=0\cdot693$
$x_2=x_1+h=2\cdot5$	$y_2=\ln 2\cdot5=0\cdot916$
$x_3=x_2+h=3$	$y_3=\ln 3=1\cdot09$
$x_4=x_3+h=3\cdot5$	$y_4=\ln 3\cdot5=1\cdot25$

4. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।



হিসাব ঃ $A=h(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+\frac{y_4}{2})$

$$=0\cdot5(\frac{0\cdot405}{2}+0\cdot693+0\cdot916+1\cdot09+\frac{1\cdot25}{2})=1\cdot76325 \text{ বর্গ একক (প্রায়)।}$$

ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A=\int_{1\cdot5}^{3\cdot5}\ln x\,dx=1\cdot76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

পরীক্ষণের নাম ঃ পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ এর মান নির্ণয়।