Лабораторная работа №1 (весна) – ступень 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
(метод верхней релаксации, погрешность/точность заданы)

Выполнил(а): Петрова Полина, Томагинская Виктория, Титова Анна, Семибабова Анна

Группа: 381903-3 Вариант: 4

1. Постановки задач

Основная задача

$\Delta u\,(x, y) = e^{-xy^2}$ при $x \in (1, 2), y \in (2, 3)$;

$u(1, y) = (y-2)(y-3)$ $u(2, y) = y(y-2)(y-3)$,

$y \in [2, 3]$;

$u(x, 2) = (x-1)(x-2)$ $u(x, 3) = x(x-1)(x-2)$.

$x \in [1, 2]$;

Форма пластины: квадрат $[1,2]\times[2,3]$

Функция температуры (обозначение): $u(x,y)$

Функция плотности источников и стоков тепла (обозначение): $f(x,y)$

Какую функцию нужно искать (запишите): $u(x,y)$, где $(x,y)\in[1,2]\times[2,3]$

Тестовая задача

$\Delta u\,(x, y) = \pi^2 \cdot \sin(\pi xy)(x^2+y^2)$ при $x \in (1, 2), y \in (2, 3)$;

$u(1, y) = \sin \pi y$ $u(2, y) = \sin 2\pi y$,

$y \in [2, 3]$;

$u(x, 2) = \sin 2\pi x$ $u(x, 3) = \sin 3\pi x$.

$x \in [1, 2]$;

Решение тестовой задачи

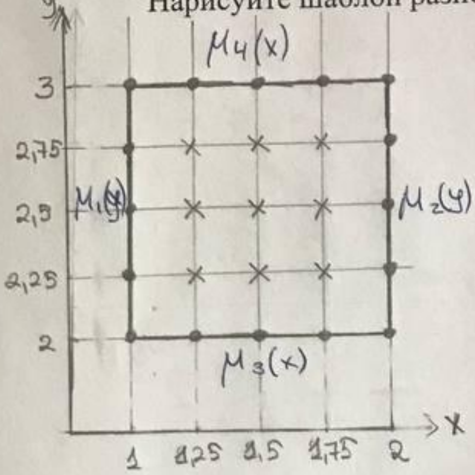
$u^*(x, y) = \sin(\pi xy)$

2. Сетка и разностная схема (общий вид)

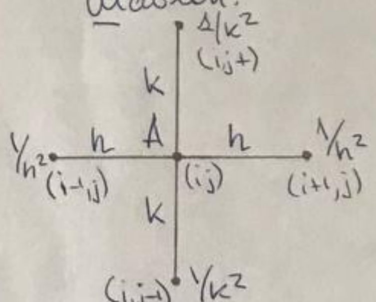
Приведите описание сетки (рисунок и формулы).

Запишите разностную схему как систему разностных уравнений (для сетки произвольной размерности), укажите диапазоны изменения индексов.

Нарисуйте шаблон разностного оператора.



Шаблон:



Сетка (n,m)

$h = \frac{b-a}{n}$ – шаг по x

$K = \frac{d-c}{m}$ – шаг по y

$x_i = a + ih$, $i = \overline{0,n}$

$y_j = c + jk$, $j = \overline{0,m}$

$A = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)$

Сетка (4,4): всего 25 узлов из них 16-граничные, 9-внутренние (неизвестные значения)

Разностная схема:

$[V_{x\bar{x}}]_{ij} - [V_{y\bar{y}}]_{ij} = -f_{ij}$ $\quad i = \overline{1,n-1}$, $j = \overline{1,m-1}$

$V_{0j} = \mu_1(y_j)$, $j = \overline{1,m-1}$

$V_{nj} = \mu_2(y_j)$, $j = \overline{1,m-1}$

$V_{i0} = \mu_3(x_i)$, $i = \overline{1,n-1}$

$V_{im} = \mu_4(x_i)$, $i = \overline{1,n-1}$

3. Разностная схема как СЛАУ $\mathcal{A}V = F$

Размерность матрицы $\mathcal{A}$ $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ Свойства матрицы $\mathcal{A}$:

1) невырожденная $\rightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$
2) Отрицат-но опред-ая
3) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$
4) имеет диаг-ый базис из собств. вект-в

Минимальное по модулю собственное число $= 4/h^2 \sin^2\left(\pi/2n\right) + 4/k^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) = 18.746$

Максимальное по модулю собственное число $= 4/h^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi(n-1)}{2n}\right) + 4/k^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi(m-1)}{2m}\right) = 109,254$

Число обусловленности $\mu_A = \max(\lambda(A)) / \min(\lambda(A)) = 109.254 / 18.745 = 5.82843$

4. Запись схемы в виде $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$ или $-\mathcal{A}\mathcal{V} = -\mathcal{F}$

на сетке размерности (4, 4)

(должны быть указаны все элементы матрицы, вектора и правой части на сетке конкретной размерности, использовать альбомный разворот или вклеить свой рисунок)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
V_{11} & V_{21} & V_{31} & V_{12} & V_{22} & V_{32} & V_{13} & V_{23} & V_{33}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
A & 1/h^2 & 0 & 1/k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/h^2 & A & 1/h^2 & 0 & 1/k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/h^2 & A & 0 & 0 & 1/k^2 & 0 & 0 & 0 \\
1/k^2 & 0 & 0 & A & 1/h^2 & 0 & 1/k^2 & 0 & 0 \\
0 & 1/k^2 & 0 & 1/h^2 & A & 1/h^2 & 0 & 1/k^2 & 0 \\
0 & 0 & 1/k^2 & 0 & 1/h^2 & A & 0 & 0 & 1/k^2 \\
0 & 0 & 0 & 1/k^2 & 0 & 0 & A & 1/h^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/k^2 & 0 & 1/h^2 & A & 1/h^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k^2 & 0 & 1/h^2 & A
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \\ V_{12} \\ V_{22} \\ V_{33} \\ V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-f_{11} - 1/h^2 \mu_1(y_1) - 1/k^2 \mu_3(x_1) \\
-f_{21} - 1/k^2 \mu_3(x_2) \\
-f_{31} - 1/h^2 \mu_2(y_1) - 1/k^2 \mu_3(x_3) \\
-f_{12} - 1/h^2 \mu_1(y_2) \\
-f_{12} \\
-f_{32} - 1/h^2 \mu_2(y_2) \\
-f_{13} - 1/k^2 \mu_4(x_1) - 1/h^2 \mu_1(y_3) \\
-f_{23} - 1/k^2 \mu_4(x_2) \\
-f_{33} - 1/h^2 \mu_2(y_3) - 1/k^2 \mu_4(x_3)
\end{pmatrix}
$$

$$= \mathcal{A} \qquad = V \qquad = F$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{(1/4)^2} = 16$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(1/4)^2} = 16$$

$$A = -2(16+16) = -64$$

5. Описание итерационного метода

1) Запишите итерационный метод в каноническом виде (т.е. для решения произвольных СЛАУ вида $Ax = b$, $A=A^T>0$), укажите диапазон значений параметра;

2) Запишите итерационный метод для решения схемы $-\mathcal{A}\mathcal{V} = -\mathcal{F}$, а именно:
– формулы для расчета каждой компоненты искомого вектора $\mathcal{V}$ на очередной итерации (исходный вариант и оптимизация):
– формулы для расчета невязки $\mathcal{R}$ (исходный вариант и оптимизация).

Укажите, зачем проведена замена знаков в системе $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$.

1) $Ax=b$, $A=A^T>0$

Обозначим: A - исходная матрица

L - нижняя треугольная с нулевой главной диагональю

R - верхняя треугольная | — " — " — |

D - диагональная

МВР примет вид: $(D+\omega L)\dfrac{x^{s+1}-x^s}{\omega}+Ax^s=b$

где ω - параметр метода $\omega\in(0;2)$

$$x_i^{(s+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[-\omega\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(s+1)}-\omega\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^s+(1-\omega)a_{ii}x_i^s+\omega b\right]$$

2) Вектор $v_{ij}^{(s+1)}$ расчитан как:

$$v_{ij}^{s+1}=-\frac{1}{A}\Big((1-\omega)\cdot(-A)\cdot v_{ij}^s+\omega\left(\frac{1}{h^2}v_{i-1j}^{s+1}+\frac{1}{k^2}v_{ij-1}^{s+1}\right)+$$
$$+\omega\left(\frac{1}{h^2}v_{i+1j}^s+\frac{1}{k^2}v_{ij+1}^s\right)+\omega\cdot f_{ij}\Big)$$

Расчет невязки на шаге s для (4,4)

$$r_{11}^{(s)}=-Av_{11}^{(s)}-\frac{1}{h^2}\left(v_{01}^{(s)}+v_{21}^{(s)}\right)-\frac{1}{k^2}\left(v_{10}^{(s)}+v_{12}^{(s)}\right)-f_{11}$$
$$r_{21}^{(s)}=-Av_{21}^{(s)}-\frac{1}{h^2}\left(v_{11}^{(s)}+v_{31}^{(s)}\right)-\frac{1}{k^2}\left(v_{20}^{(s)}+v_{22}^{(s)}\right)-f_{21}$$
$$r_{31}^{(s)}=-Av_{31}^{(s)}-\frac{1}{h^2}\left(v_{21}^{(s)}+v_{41}^{(s)}\right)-\frac{1}{k^2}\left(v_{30}+v_{32}^{(s)}\right)-f_{31}$$

$$\Gamma_{12}^{(s)} = -AV_{12}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{02}^{(s)} + V_{22}^{(s)}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{11}^{(s)} + V_{13}^{(s)}\right) - f_{12}$$

$$\Gamma_{22}^{(s)} = -AV_{22}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{12}^{(s)} + V_{32}^{(s)}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{21}^{(s)} + V_{23}^{(s)}\right) - f_{22}$$

$$\Gamma_{32}^{(s)} = -AV_{32}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{22}^{(s)} + V_{42}^{(s)}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{31}^{(s)} + V_{33}^{(s)}\right) - f_{32}$$

$$\Gamma_{13}^{(s)} = -AV_{13}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{03} + V_{23}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{12} + V_{14}\right) - f_{13}$$

$$\Gamma_{23}^{(s)} = -AV_{23}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{13}^{(s)} + V_{33}^{(s)}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{22}^{(s)} + V_{24}^{(s)}\right) - f_{23}$$

$$\Gamma_{33}^{(s)} = -AV_{33}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{23}^{(s)} + V_{43}^{(s)}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{32}^{(s)} + V_{34}^{(s)}\right) - f_{33}$$

Таким образом видим, что:

$$\Gamma_{ij}^{(s)} = -AV_{ij}^{(s)} - \frac{1}{h^2}\left(V_{i-1j}^{(s)} + V_{i+1j}^{(s)}\right) - \frac{1}{k^2}\left(V_{ij-1}^{(s)} + V_{ij+1}^{(s)}\right) - f_{ij}$$

Замена знаков в системе $AV = F$ произведена для того, что бы применяемый метод сходился т.к $\exists$ теорема:

Если матрица $A = A^T > 0$ и параметр $\vartheta \in (0, 2)$ МВР сходится.

6. Анализ структуры погрешности

Запишите обозначения и определения всех типов (компонент) погрешностей, возникающих при решении основной и тестовой задачи с помощью разностных схем итерационными методами.

Запишите утверждения, необходимые для оценки погрешностей, и формулировку теоремы о сходимости итерационного метода.

Общая погрешность: — сеточная ф. $\tilde{z}^{\text{общ}} = \tilde{u} - \tilde{v}^{(s)}$, где

$\tilde{u}$ - точное реш. задачи с учетом погр-сти счета.

$\tilde{v}^{(s)}$ - решение разностной схемы на шаге s с учетом погр-ти счета

Погрешность решение задачи с помощью разностной схемы — разность между точным решением ДУ и точным решением схемы: $z = u - v$

u - точное решение задачи

v - точное решение схемы

Вычислительная погрешность решения: $z^{\text{выч}} = v^{(s)} - \tilde{v}^{(s)}$

Погрешность решения схемы с помощью метода:

$v_{\text{мет}} = v - v^{(s)}$

Погрешность задания тестовой ф.: $z_{\text{тест}} = \tilde{u} - u$

Структура общей погрешности:

$$\tilde{z}^{\text{общ}} = \underbrace{\tilde{u} - u}_{z_{\text{тест}}} + \underbrace{u - v}_{\text{погр. схемы}} + \underbrace{v - v^{(s)}}_{\text{погр. метода}} + \underbrace{v^{(s)} - \tilde{v}^{(s)}}_{\text{погр-ть счета}}$$

Погрешность решения СЛАУ на шаге s можно оценить по невязке на шаге s, используя норму обратной матрицы: $\|z^{(s)}\| \le \|A^{-1}\| \|r^{(s)}\|$ (нормы соглас-ны)

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min(\lambda(A))} = \frac{1}{4/h^2 \cdot \sin^2(\pi/2n) + 4/k^2 \cdot \sin^2(\pi/2m)}$$

<u>Теорема</u>: Если матрица A симметричная и положительно определена и параметр $\omega \in (0,2)$ метод верхней релаксации (МВР) сходится.

$$\|z^{(s)}\|_2 \leq \frac{1}{\min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i(A)|} \|r^{(s)}\|_2 \sqrt{n}$$

$$\|z^{(s)}\|_2 \leq \frac{2\rho^{s}}{1+\rho^{2s}} \cdot \|z^{(0)}\|_s, \text{ где } \rho = \frac{1-\sqrt{\frac{M_{min}}{M_{max}}}}{1+\sqrt{\frac{M_{min}}{M_{max}}}}$$

7. Численное решение тестовой задачи с заданной погрешностью

Тестовая задача должна быть решена с заданной погрешностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Тестовая задача решена с погрешностью $\varepsilon_1 = 4{,}03706 \cdot 10^{-5}$

Максимальное отклонение точного и численного решений в узле

$x = 1{,}6725$ $y = 2{,}3$

Для решения тестовой задачи использована сетка

число разбиений по x $n = 400$ число разбиений по y $m = 400$

метод верхней релаксации с параметром $\omega = 1{,}984$

Значения критериев остановки метода:

по точности $\varepsilon_{мет} = 0.5 \cdot 10^{-9}$ по числу итераций $N_{max} = 5000$

На решение СЛАУ затрачено $N = 1603$ итерации

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)} = 4{,}58429 \cdot 10^{-10}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N)} \| = 0{,}000521971$ (указать)

для невязки использована норма евклидова (указать)

погрешность решения СЛАУ $\| Z^{(N)} \|_\infty \le \| Z^{(N)} \|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \, \|R^{(N)}\|_2 =$ (оценить)

$= \frac{1}{\min|\lambda(A)|} \|R^{(N)}\|_2 = 0{,}050660854 \cdot 0{,}000521971 = 2{,}644349 \cdot 10^{-5}$

Начальное приближение итерационного метода

нулевое (указать)

По теореме о сходимости схемы *погрешность схемы*

$\| z \|_\infty \le \frac{(M_1 h^2 + M_2 k^2)}{16}((b-a)^2 + (d-c)^2) = 0{,}000615149$ (оценить)

использована норма $\| z \|_\infty = \max|z_{ij}|,\ ij \in \Omega_{hk}$ (указать)

Общая погрешность решения тестовой задачи с учетом ее компонент

$\| z_{общ} \|_\infty \le \|Z^{(N)}\|_\infty + \|z\|_\infty \le 2{,}644349 \cdot 10^{-5} + 0{,}000615148 = 6{,}41592 \cdot 10^{-4}$ (оценить)

использована норма $\| z_{общ} \|_\infty = \max|z_{общ\,ij}|\ i = \overline{0,n}\ j = \overline{0,m}$ (указать)

1. Если не удалось решить тестовую задачу с заданной погрешностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, решите ее с *минимально возможной* погрешностью. Напишите, что нужно сделать, чтобы погрешность не превышала $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, и почему не получилось это сделать.
2. В любом случае сравните оценку общей погрешности, оценки ее компонент и фактическую погрешность ε_1. Сформулируйте выводы.

$M_1 = \frac{1}{12} \cdot \max|u^{IV}_{xxxx}(x,y)|$

$M_2 = \frac{1}{12} \max|u^{IV}_{yyyy}(x,y)|$

$\min \lambda(A) = -\left\{\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{4}{k^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right\}$

$$u^*(x,y) = \sin(\pi x y)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \pi^4 y^4 \cdot \sin(\pi x y)$$

Global maximum

$\max\{|\pi^4 y^4 \sin(\pi x y)| \mid 1 \le x \le 2 \wedge 2 \le y \le 3\} = 81\pi^4$ at $(x, y) = \left(\frac{11}{6}, 3\right)$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4} = \pi^4 x^4 \cdot \sin(\pi x y)$$

Global maximum

$\max\{|\pi^4 x^4 \sin(\pi x y)| \mid 1 \le x \le 2 \wedge 2 \le y \le 3\} = 16\pi^4$ at $(x, y) = \left(2, \frac{11}{4}\right)$

$$M_1 = \frac{1}{12} \cdot \max|u^{IV}_{xxxx}(x,y)|$$

$$M_2 = \frac{1}{12} \cdot \max|u^{IV}_{yyyy}(x,y)|$$

$$M_1 = \frac{1}{12} \cdot 81\pi^4$$

$$M_2 = \frac{1}{12} \cdot 16\pi^4$$

$$\|Z\|_\infty \le \frac{(M_1 \cdot h^2 + M_2 \cdot k^2)}{16}\left((b-a)^2 + (d-c)^2\right) =$$

$$= \frac{\frac{81\pi^4}{12} \cdot \frac{1}{400^2} + \frac{16\pi^4}{12} \cdot \frac{1}{400^2}}{16} \cdot \left((2-1)^2 + (3-2)^2\right) = 0{,}000615149$$

1) Тестовую задачу не удалось решить с заданной точностью ε.
Для уменьшения погрешности необходимо использовать $\overbrace{\text{большую сетку}}^{\text{увеличить} \sim \text{в 10 раз}}$, благодаря этому погрешность СЛАУ и погрешность схемы будут меньше. Но из-за роста количества итераций (много арифметических действий) будет накапливаться вычислительная погрешность, то при уменьшении одной погрешности, другая растет.

Значения u (x,y)

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0	2	0	0,063	0,125	0,187	0,249	0,309
1	2,01	0,031	0,094	0,157	0,219	0,28	0,34
2	2,02	0,063	0,126	0,189	0,251	0,311	0,371
3	2,03	0,094	0,157	0,22	0,282	0,342	0,401
4	2,04	0,125	0,189	0,251	0,313	0,373	0,431
5	2,05	0,156	0,22	0,282	0,343	0,403	0,461
6	2,06	0,187	0,251	0,313	0,373	0,433	0,49
7	2,07	0,218	0,281	0,343	0,403	0,462	0,518
8	2,08	0,249	0,311	0,373	0,433	0,491	0,546
9	2,09	0,279	0,341	0,402	0,462	0,519	0,574
10	2,1	0,309	0,371	0,431	0,49	0,546	0,6
11	2,11	0,339	0,4	0,46	0,518	0,573	0,626
12	2,12	0,368	0,429	0,488	0,545	0,6	0,652
13	2,13	0,397	0,458	0,516	0,572	0,626	0,676

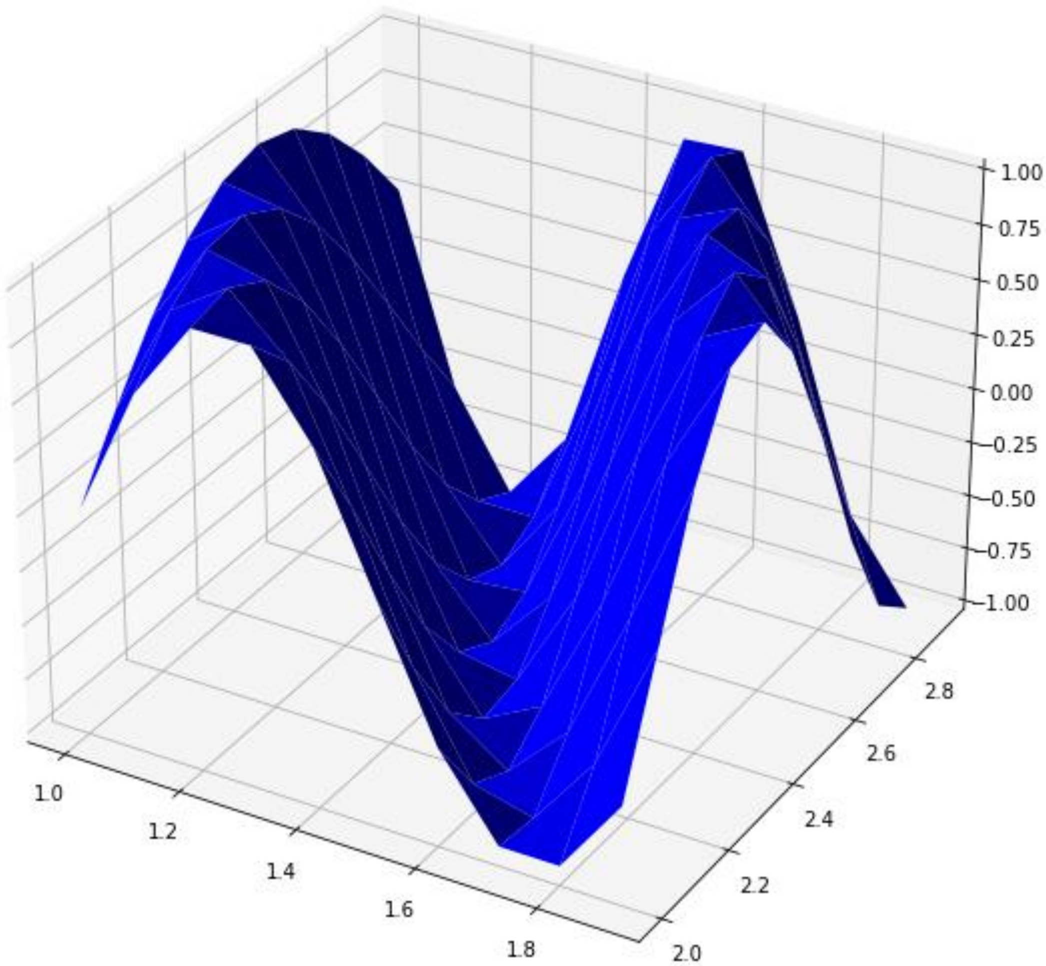
Значения V^(N) (x,y)

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0	2	0	0,063	0,125	0,187	0,249	0,309
1	2,01	0,031	0,094	0,157	0,218	0,279	0,338
2	2,02	0,063	0,126	0,189	0,25	0,31	0,368
3	2,03	0,094	0,158	0,221	0,282	0,341	0,398
4	2,04	0,125	0,19	0,253	0,314	0,373	0,429
5	2,05	0,156	0,222	0,285	0,346	0,404	0,461
6	2,06	0,187	0,253	0,317	0,378	0,436	0,492
7	2,07	0,218	0,285	0,349	0,409	0,467	0,522
8	2,08	0,249	0,316	0,38	0,44	0,498	0,553
9	2,09	0,279	0,347	0,41	0,471	0,528	0,582
10	2,1	0,309	0,377	0,44	0,5	0,557	0,61
11	2,11	0,339	0,406	0,47	0,529	0,584	0,637
12	2,12	0,368	0,435	0,498	0,556	0,611	0,662
13	2,13	0,397	0,463	0,525	0,582	0,635	0,685

Значения $|U(x,y) - V(x,y)|$

		i	0	1	2	3	4	5
▸	j	Y\X	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
	0	2	0	0	0	0	0	0
	1	2,01	0	1,554912935991...	0,000300222130...	0,000805293785...	0,001482366527...	0,002284977079...
	2	2,02	0	0,000237756684...	6,442382045970...	0,000807386537...	0,001894624368...	0,003233773491...
	3	2,03	0	0,000711564317...	0,000612219212...	0,000147305269...	0,001421952345...	0,003073913710...
	4	2,04	0	0,001354118876...	0,001628898378...	0,001027687760...	0,000255843811...	0,002038513913...
	5	2,05	0	0,002111267134...	0,002881302465...	0,002566287352...	0,001408588314...	0,000364080120...
	6	2,06	0	0,002927951082...	0,004263617415...	0,004315889563...	0,003375000363...	0,001712163901...
	7	2,07	0	0,003748935876...	0,005670126135...	0,006124132908...	0,005447790888...	0,003954285520...
	8	2,08	0	0,004519540685...	0,006996139284...	0,007840339090...	0,007433761400...	0,006130068942...
	9	2,09	0	0,005186181889...	0,008139117460...	0,009317092946...	0,009144541877...	0,008013583206...
	10	2,1	0	0,005696813568...	0,008999689750...	0,010412053479...	0,010398704658...	0,009387432582...
	11	2,11	0	0,006001726638...	0,009483222154...	0,010989996443...	0,011023902810...	0,010045307636...
	12	2,12	0	0,006054216223...	0,009501054571...	0,010924165915...	0,010858801642...	0,009794499117...
	13	2,13	0	0,005811315587...	0,008971514752...	0,010098039339...	0,009755399083...	0,008458392762...

График u*(x,y) = sin(pi*x*y)



8. Численное решение основной задачи с заданной точностью

Основная задача должна быть решена с заданной точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Основная задача решена с точностью ε_2 = 4,079·10⁻⁷

Максимальное отклонение численных решений на основной сетке и сетке с половинным шагом в узле

x= 1,9 y= 2,9

Для решения основной задачи использована сетка

число разбиений по x n = 100 число разбиений по y m = 100

метод верхней релаксации с параметром ω = 1,93

Значения критериев остановки метода:

по точности $\varepsilon_{мет}$ = $5 \cdot 10^{-7}$ по числу итераций N_{max} = 1500

На решение СЛАУ затрачено N = 328 итерации

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)}$ = $4{,}86705 \cdot 10^{-7}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N)} \|$ = 0,01896973 (указать)

для невязки использована норма евклидова (указать)

погрешность решения СЛАУ $\| Z^{(N)} \|_\infty \le \| Z^{(N)} \|_2 \le 0.0506648 \cdot 0{,}01896973$ (оценить)

$= 9.6109758 \cdot 10^{-4}$

Начальное приближение итерационного метода

нулевое (указать)

Для контроля точности использована сетка

число разбиений по x $2n$ = 200 число разбиений по y $2m$ = 200

метод верхней релаксации с параметром $\omega 2$ = 1,9844

Значения критериев остановки метода:

по точности $\varepsilon_{мет\text{-}2}$ = $5 \cdot 10^{-11}$ по числу итераций $N_{max\text{-}2}$ = 5000

На решение СЛАУ затрачено $N2$ = 2567 итерации

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N2)}$ = $4{,}991307 \cdot 10^{-11}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N2)} \|$ = 0,074518 (указать)

для невязки использована норма евклидова (указать)

погрешность решения СЛАУ $\| Z^{(N2)} \|_\infty \le \| Z^{(N2)} \|_2 \le$ (оценить)

Начальное приближение итерационного метода

нулевое (указать)

$\le 0.0506648 \cdot 0{,}074518 =$

$= 3.775439 \cdot 10^{-3}$

Требования к точности

Если не удается решить основную задачу с заданной точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, решите ее с *максимально высокой точностью*.

Вопросы

1. Погрешность решения СЛАУ на контрольной сетке не должна быть существенно хуже погрешности (СЛАУ) на основной сетке: при заполнении справки для отчета нужно сравнить оценки погрешности решения СЛАУ на основной и контрольной сетке. Сформулируйте выводы.

2. Сравните погрешности решения СЛАУ на основной и контрольной сетке с точностью решения основной задачи ε_2. Сформулируйте выводы.

3. Если не удалось решить основную задачу с заданной точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$, напишите, что нужно сделать, чтобы достичь указанной точности, и почему не получилось это сделать.

1) Погрешность на контрольной сетке не сильно хуже, чем на основной, но чуть больше. Это происходит из-за большого количества арифметических вычислений и заданной точности выхода метода ($5 \cdot 10^{-13}$), следовательно вычислительная погрешность больше

2) ε_2 - разность последних 2-х приближений на основной сетке, она меньше обеих погрешностей СЛАУ
Погрешность на основной сетке меньше погрешности на контрольной. Мы используем грубые оценки и не знаем точно решения функции $u(x,y)$

3) Основную задачу удалось решить с заданной точностью.

Значения v(x,y)

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0	2	0	-0,01	-0,02	-0,029	-0,038	-0,048
1	2,01	-0,01	-0,019	-0,028	-0,036	-0,045	-0,054
2	2,02	-0,02	-0,028	-0,036	-0,044	-0,052	-0,06
3	2,03	-0,029	-0,036	-0,044	-0,051	-0,059	-0,066
4	2,04	-0,038	-0,045	-0,052	-0,059	-0,065	-0,072
5	2,05	-0,047	-0,054	-0,06	-0,066	-0,072	-0,079
6	2,06	-0,056	-0,062	-0,068	-0,073	-0,079	-0,085
7	2,07	-0,065	-0,07	-0,075	-0,08	-0,086	-0,091
8	2,08	-0,074	-0,078	-0,083	-0,088	-0,093	-0,098
9	2,09	-0,082	-0,086	-0,09	-0,095	-0,099	-0,104
10	2,1	-0,09	-0,094	-0,098	-0,102	-0,106	-0,11

Значения v2(x,y)

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0	2	0	-0,01	-0,02	-0,029	-0,038	-0,048
1	2,01	-0,01	-0,019	-0,028	-0,036	-0,045	-0,054
2	2,02	-0,02	-0,028	-0,036	-0,044	-0,052	-0,06
3	2,03	-0,029	-0,036	-0,044	-0,051	-0,059	-0,066
4	2,04	-0,038	-0,045	-0,052	-0,059	-0,065	-0,072
5	2,05	-0,047	-0,054	-0,06	-0,066	-0,072	-0,079
6	2,06	-0,056	-0,062	-0,068	-0,073	-0,079	-0,085
7	2,07	-0,065	-0,07	-0,075	-0,08	-0,086	-0,091
8	2,08	-0,074	-0,078	-0,083	-0,088	-0,093	-0,098
9	2,09	-0,082	-0,086	-0,09	-0,095	-0,099	-0,104
10	2,1	-0,09	-0,094	-0,098	-0,102	-0,106	-0,11

Значения $|V2(x,y) - V(x,y)|$

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0	2	0	0	0	0	0	0
1	2,01	0	6,602122560782...	5,957108659096...	4,634597943524...	3,685947094281...	2,980
2	2,02	0	5,957803026829...	7,506119270639...	7,105447160114...	6,239858019251...	5,419
3	2,03	0	4,638157273230...	7,107084082649...	7,703860949809...	7,482097399709...	6,886
4	2,04	0	3,685864795890...	6,240853767450...	7,479851504919...	7,792059040417...	7,643
5	2,05	0	2,987881098197...	5,425290090788...	6,889318091882...	7,647814231792...	7,866
6	2,06	0	2,534978696087...	4,721285014122...	6,302327178575...	7,289490121867...	7,832
7	2,07	0	2,157476497621...	4,177706960484...	5,737920154874...	6,891217759777...	7,629
8	2,08	0	1,923987574731...	3,755230972388...	5,296482652975...	6,500334133532...	7,373
9	2,09	0	1,726395231521...	3,439109154873...	4,917018098044...	6,145447524821...	7,091
10	2,1	0	1,595065999157	3,182533152665	4,599880451414	5,809741897483	6,791

9. Проверка программы: контроль «порядка сходимости»

Проверка убывания погрешности ε_1 при решении тестовой задачи и проверка убывания величины ε_2 (рост точности) при решении основной задачи показывают следующее:

Тестовая задача

n	m	$\varepsilon_{мет}$	$\varepsilon^{(s)}$	Тестовая задача, величина $max \mid u^*(x_i y_j) - v^{(N)}(x_i y_j) \mid$	Отношение значений погрешности
10	10	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}577 \cdot 10^{-7}$	0,065658314	≈ 4
20	20	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}623 \cdot 10^{-7}$	0,016087905	≈ 4
40	40	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}909 \cdot 10^{-7}$	0,004038639	
Порядок 2					

Основная задача

n	m	$\varepsilon_{мет}$	$\varepsilon^{(N)}$	$\varepsilon_{м2}$	$\varepsilon^{(N2)}$	Основная задача, величина $max \mid v^{(N)}(x_i y_j) - v2^{(N2)}(x_{2i} y_{2j}) \mid$	Отношение значений точности
10	10	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}8 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}9 \cdot 10^{-7}$	0.0028127	≈ 4
20	20	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}9 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}9 \cdot 10^{-7}$	0.000716	≈ 4
40	40	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}9 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4{,}8 \cdot 10^{-7}$	0,0001794	
Порядок 2							

На сетке (n, m) использованы значения ω= (перечислить)
На сетке ($2n$, $2m$) использованы значения ω_2= (перечислить)

Вопрос: Сходимость и порядок сходимости есть свойства схемы. Ни одно из значений – ни ε_1, ни ε_2, не является погрешностью схемы. Опираясь на теоретический материал, объясните, почему результаты работы программы должны подтвердить динамику величин ε_1 и ε_2 с каким-либо порядком.

Примечания

1. Значения критерия выхода по числу итераций (N_{max} и $N_{max\text{-}2}$) в каждом из расчетов должны быть таковы, чтобы выход состоялся по точности.

2. Если «порядок сходимости» не подтверждается, ошибку следует искать

Ответ на вопрос:

По опр:

$\varepsilon_1 = \max|u^* - \tilde{v}^{(s)}| \approx \max|\tilde{u} - u^* + u^* - \tilde{v}^{(s)}|$ - погрешность задания тестовой функции мала

$\max|\tilde{u} - u^* + u^* - \tilde{v}^{(s)}| = \max|\tilde{u} - \tilde{v}^{(s)}| = \max|z_{обу.}| = \|z\|_\infty$

Существенный вклад в погрешность ε_1 вносит погрешность схемы. По th о сходимости схемы ε имеет второй порядок сходимости.

$$\varepsilon_2 = \|v^{(2N)} - v^{(N)}\| = \|(u - v^{(2N)}) - (u - v^{(N)})\| = \|z_{обу.}^{(2N)} - z_{обу}^{(N)}\| \leq$$

$$\leq \|z_{обу.}^{(2N)}\| + \|z_{обу}^{(N)}\|$$

По утв для ε_1

$$\|z_{обу.}^{(N)}\| \approx \|z_{сх}^{(N)}\| \quad ; \quad \|z_{обу.}^{(2N)}\| \approx \|z_{сх}^{(2N)}\|$$

$$\frac{\varepsilon_2^{N}}{\varepsilon_2^{2N}} = \frac{\|z_{сх}^{(N)}\| + \|z_{обу.}^{(2N)}\|}{\|z_{сх}^{(2N)}\| + \|z_{сх}^{(4N)}\|} = \frac{M_1 h^2 + M_2 k^2 + M_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + M_2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{M_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + M_2\left(\frac{k}{2}\right)^2 + M_1\left(\frac{h}{4}\right)^2 + M_2\left(\frac{k}{4}\right)^2} = 4$$