

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Одесська політехніка»
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра інформаційних систем

Лабораторна работа №1
З дисципліни: «Обчислювальні методи»
Тема: «Рішення задач на визначення похибок обчислень»
Варіант №5

Виконала:
Студентка групи АІ-231
Бензрук Поліна
Перевірили:
д. Шпиньковський О.А.
д. Дрозд Ю.В.

Завдання 1: Похибка обчислення.

Дана функція $f(a, b, c)$. Значення змінних вказані у варіанті з усіма вірними цифрами. Оцінити похибку результату, використовуючи:

- оцінки похибок для арифметичних операцій;
- загальну формулу похибок.

Результат представити у двох формах запису: з явною вказівкою похибок і з урахуванням вірних цифр.

$f(a,b,c)$	a	b	c
$\frac{a+b}{a^2 - b^2}$	14.85	15.49	

Rішення

```
import sympy as sp

# 1. Вхідні дані
a = 14.85
b = 15.49
delta_a = 0.005
delta_b = 0.005

# 2. Функція
x, y = sp.symbols('x y')
f_expr = (x + y) / (x**2 - y**2)

f_val = float(f_expr.subs({x: a, y: b}))

print(" Розрахунок значення та похибки функції ")
print("Функція:  $f(a,b) = (a + b) / (a^2 - b^2)$ ")
print(f"Дані: a = {a} ± {delta_a}, b = {b} ± {delta_b}\n")

# 3. Метод (a) – покрокова похибка
print(" Метод (a): покрокова оцінка похибки ")

# чисельник
num = a + b
delta_num = delta_a + delta_b
print(f"Чисельник: a + b = {a} + {b} = {num:.6f}")
print(f"Похибка чисельника: Δ(a+b) = Δa + Δb = {delta_a} + {delta_b} = {delta_num:.6f}\n")

# знаменник
den = a**2 - b**2
delta_den = abs(2*a)*delta_a + abs(2*b)*delta_b
print(f"Знаменник:  $a^2 - b^2 = {a**2:.6f} - {b**2:.6f} = {den:.6f}$ ")
print(f"Похибка знаменника: Δ(a^2 - b^2) = |2a|Δa + |2b|Δb")
print(f"= 2*{a}*{delta_a} + 2*{b}*{delta_b} = {delta_den:.6f}\n")

# дробове ділення
delta_f_a = abs(f_val) * (delta_num/abs(num) + delta_den/abs(den))
print(f"Значення функції: f = {num:.6f} / {den:.6f} = {f_val:.6f}")
print(f"Похибка: Δf ≈ |f| * (Δnum/|num| + Δden/|den|)")
```

```

print(f"= {abs(f_val):.6f} * ({delta_num}/{abs(num):.6f} +
{delta_den}/{abs(den):.6f})")
print(f"= {delta_f_a:.6f}\n")

# 4. Метод (b) - загальна формула похибки
print(" Метод (b): загальна формула похибки (через похідні) ")

df_da = sp.diff(f_expr, x)
df_db = sp.diff(f_expr, y)

df_da_val = float(df_da.subs({x: a, y: b}))
df_db_val = float(df_db.subs({x: a, y: b}))

print(f"\partial f/\partial a = {sp.simplify(df_da)}")
print(f"\partial f/\partial b = {sp.simplify(df_db)}\n")

print(f"\partial f/\partial a (a={a}, b={b}) = {df_da_val:.6f}")
print(f"\partial f/\partial b (a={a}, b={b}) = {df_db_val:.6f}\n")

delta_f_b = abs(df_da_val)*delta_a + abs(df_db_val)*delta_b
print(f"\Delta f = |\partial f/\partial a|\Delta a + |\partial f/\partial b|\Delta b")
print(f"\Delta f = |{df_da_val:.6f}|*{delta_a} + |{df_db_val:.6f}|*{delta_b}")
print(f"\Delta f = {delta_f_b:.6f}\n")

```

5. Фінальний результат

```

print(" Фінальний результат")
print(f"\n f = {f_val:.6f} \pm {delta_f_b:.6f}")

```

Розрахунок значення та похибки функції
Функція: $f(a,b) = (a+b) / (a^2 - b^2)$
Дані: $a = 14.85 \pm 0.005$, $b = 15.49 \pm 0.005$

Метод (a): покрокова оцінка похибки
Чисельник: $a + b = 14.85 + 15.49 = 30.340000$
Похибка чисельника: $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b = 0.005 + 0.005 = 0.010000$

Знаменник: $a^2 - b^2 = 220.522500 - 239.940100 = -19.417600$
Похибка знаменника: $\Delta(a^2 - b^2) = |2a|\Delta a + |2b|\Delta b$
 $= 2*14.85*0.005 + 2*15.49*0.005 = 0.303400$

Значення функції: $f = 30.340000 / -19.417600 = -1.562500$
Похибка: $\Delta f \approx |f| * (\Delta num / |num| + \Delta den / |den|)$
 $= 1.562500 * (0.01/30.340000 + 0.3034/19.417600)$
 $= 0.024929$

Метод (b): загальна формула похибки (через похідні)
 $\partial f/\partial a = -1/(x^2 - 2xy + y^2)$
 $\partial f/\partial b = 1/(x^2 - 2xy + y^2)$

$\partial f/\partial a (a=14.85, b=15.49) = -2.441406$
 $\partial f/\partial b (a=14.85, b=15.49) = 2.441406$

$\Delta f = |\partial f/\partial a|\Delta a + |\partial f/\partial b|\Delta b$
 $= |-2.441406|*0.005 + |2.441406|*0.005$
 $= 0.024414$

Фінальний результат
 $f = -1.562500 \pm 0.024414$

Завдання 2. Точність рівності

Визначити, яка рівність точніша.

№ вар.	Завдання
5	$6/7 \approx 0.857$; $\sqrt{4.8} \approx 2.19$

Рішення.

```
import math

print(" Завдання: порівняння точності двох рівностей ")
print("Дані рівності:")
print("1)  $6/7 \approx 0.857$ ")
print("2)  $\sqrt{4.8} \approx 2.19$ \n")

# 1. Обчислюємо точні значення
a1_true = 6/7
a2_true = math.sqrt(4.8)

a1_approx = 0.857
a2_approx = 2.19

print(" Точні значення ")
print(f"6/7 = {a1_true:.15f}")
print(f"\sqrt{4.8} = {a2_true:.15f}\n")

# 2. Абсолютні похибки
delta_a1 = abs(a1_true - a1_approx)
delta_a2 = abs(a2_true - a2_approx)

print(" Абсолютні похибки ")
print(f"\Delta_1 = |{a1_true:.15f} - {a1_approx}| = {delta_a1:.15f}")
print(f"\Delta_2 = |{a2_true:.15f} - {a2_approx}| = {delta_a2:.15f}\n")

# 3. Відносні похибки
rel_a1 = delta_a1 / abs(a1_true)
rel_a2 = delta_a2 / abs(a2_true)

print(" Відносні похибки ")
print(f"\delta_1 = \Delta_1 / |a1_true| = {rel_a1:.15f}")
print(f"\delta_2 = \Delta_2 / |a2_true| = {rel_a2:.15f}\n")

# 4. Порівняння
print(" Висновок ")
if rel_a1 < rel_a2:
    print("Перша рівність ( $6/7 \approx 0.857$ ) є точнішою.")
else:
    print("Друга рівність ( $\sqrt{4.8} \approx 2.19$ ) є точнішою.")
```

Завдання: порівняння точності двох рівностей

Дані рівності:

$$1) \frac{6}{7} \approx 0.857$$

$$2) \sqrt{4.8} \approx 2.19$$

Точні значення

$$\frac{6}{7} = 0.857142857142857$$

$$\sqrt{4.8} = 2.190890230020664$$

Абсолютні похибки

$$\Delta_1 = |0.857142857142857 - 0.857| = 0.000142857142857$$

$$\Delta_2 = |2.190890230020664 - 2.19| = 0.000890230020664$$

Відносні похибки

$$\delta_1 = \Delta_1 / |a_{1_true}| = 0.0001666666666667$$

$$\delta_2 = \Delta_2 / |a_{2_true}| = 0.000406332553072$$

Висновок

Перша рівність ($\frac{6}{7} \approx 0.857$) є точнішою.

Висновок: У процесі виконання лабораторної роботи я ознайомився з методами оцінки точності наближених обчислень. Для двох рівностей $\frac{6}{7} \approx 0.857$ та $\sqrt{4.8} \approx 2.19$ було проведено розрахунки точних значень з великою кількістю десяткових знаків. Далі були визначені абсолютні похибки як різниця між точним і наближенним значенням, а також обчислені відносні похибки, які показують, наскільки сильно похибка впливає на результат у відсотковому співвідношенні.

У результаті порівняння виявилося, що відносна похибка першої рівності є меншою, ніж другої. Це означає, що рівність $\frac{6}{7} \approx 0.857$ є більш точною, ніж $\sqrt{4.8} \approx 2.19$. Таким чином, при практичних обчисленнях доцільніше використовувати саме це наближення, адже воно дає меншу похибку.

Загалом, лабораторна робота показала важливість правильного округлення чисел і необхідність перевірки точності наближених значень. Вона дала можливість закріпити знання про абсолютну та відносну похибки, а також зрозуміти, що навіть при незначних відхиленнях у результатах різні рівності можуть мати різну точність. Отже, можна зробити висновок, що оцінка похибок є невід'ємною частиною математичних і прикладних обчислень, адже саме вона дозволяє контролювати правильність і надійність отриманих результатів.