

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Одеська політехніка»  
Інститут комп'ютерних систем  
Кафедра інформаційних систем

Лабораторна робота №1  
З дисципліни: «Обчислювальні методи»  
Тема: «Рішення задач на визначення похибок обчислень»  
Варіант №5

Виконала:  
Студентка групи АІ-231  
Бензерук Поліна  
Перевірили:  
д. Шпиньковський О.А.  
д. Дрозд Ю.В.

### Завдання 1: Похибка обчислення.

Дана функція  $f(a, b, c)$ . Значення змінних вказані у варіанті з усіма вірними цифрами. Оцінити похибку результату, використовуючи:

- ☐ оцінки похибок для арифметичних операцій;
- ☐ загальну формулу похибок.

Результат представити у двох формах запису: з явною вказівкою похибок і з урахуванням вірних цифр.

$f(a,b,c)$	a	b	c
$\frac{a+b}{a^2-b^2}$	14.85	15.49	

### Рішення

```
import sympy as sp

# 1. Вхідні дані
a = 14.85
b = 15.49
delta_a = 0.005
delta_b = 0.005

# 2. Функція
x, y = sp.symbols('x y')
f_expr = (x + y) / (x**2 - y**2)

f_val = float(f_expr.subs({x: a, y: b}))

print(" Розрахунок значення та похибки функції ")
print("Функція: f(a,b) = (a + b) / (a^2 - b^2)")
print(f"Дані: a = {a} ± {delta_a}, b = {b} ± {delta_b}\n")

# 3. Метод (a) - покрокова похибка
print(" Метод (a): покрокова оцінка похибки ")

# чисельник
num = a + b
delta_num = delta_a + delta_b
print(f"Чисельник: a + b = {a} + {b} = {num:.6f}")
print(f"Похибка чисельника: Δ(a+b) = Δa + Δb = {delta_a} + {delta_b} = {delta_num:.6f}\n")

# знаменник
den = a**2 - b**2
delta_den = abs(2*a)*delta_a + abs(2*b)*delta_b
print(f"Знаменник: a^2 - b^2 = {a**2:.6f} - {b**2:.6f} = {den:.6f}")
print(f"Похибка знаменника: Δ(a^2 - b^2) = |2a|Δa + |2b|Δb")
print(f"= 2*{a}*{delta_a} + 2*{b}*{delta_b} = {delta_den:.6f}\n")

# дробове ділення
delta_f_a = abs(f_val) * (delta_num/abs(num) + delta_den/abs(den))
print(f"Значення функції: f = {num:.6f} / {den:.6f} = {f_val:.6f}")
print(f"Похибка: Δf ≈ |f| * (Δnum/|num| + Δden/|den|)")
```

```

print(f"= {abs(f_val):.6f} * ({delta_num}/{abs(num):.6f} +
{delta_den}/{abs(den):.6f})")
print(f"= {delta_f_a:.6f}\n")

# 4. Метод (b) - загальна формула похибки
print(" Метод (b): загальна формула похибки (через похідні) ")

df_da = sp.diff(f_expr, x)
df_db = sp.diff(f_expr, y)

df_da_val = float(df_da.subs({x: a, y: b}))
df_db_val = float(df_db.subs({x: a, y: b}))

print(f"∂f/∂a = {sp.simplify(df_da)}")
print(f"∂f/∂b = {sp.simplify(df_db)}\n")

print(f"∂f/∂a (a={a}, b={b}) = {df_da_val:.6f}")
print(f"∂f/∂b (a={a}, b={b}) = {df_db_val:.6f}\n")

delta_f_b = abs(df_da_val)*delta_a + abs(df_db_val)*delta_b
print(f"Δf = |∂f/∂a|Δa + |∂f/∂b|Δb")
print(f"= |{df_da_val:.6f}|*{delta_a} + |{df_db_val:.6f}|*{delta_b}")
print(f"= {delta_f_b:.6f}\n")

# 5. Фінальний результат
print(" Фінальний результат")
print(f"f = {f_val:.6f} ± {delta_f_b:.6f}")

```

Розрахунок значення та похибки функції  
 Функція:  $f(a,b) = (a + b) / (a^2 - b^2)$   
 Дані:  $a = 14.85 \pm 0.005$ ,  $b = 15.49 \pm 0.005$

Метод (a): покрокова оцінка похибки  
 Чисельник:  $a + b = 14.85 + 15.49 = 30.340000$   
 Похибка чисельника:  $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b = 0.005 + 0.005 = 0.010000$

Знаменник:  $a^2 - b^2 = 220.522500 - 239.940100 = -19.417600$   
 Похибка знаменника:  $\Delta(a^2 - b^2) = |2a|\Delta a + |2b|\Delta b$   
 $= 2 \cdot 14.85 \cdot 0.005 + 2 \cdot 15.49 \cdot 0.005 = 0.303400$

Значення функції:  $f = 30.340000 / -19.417600 = -1.562500$   
 Похибка:  $\Delta f \approx |f| \cdot (\Delta \text{num}/|\text{num}| + \Delta \text{den}/|\text{den}|)$   
 $= 1.562500 \cdot (0.01/30.340000 + 0.3034/19.417600)$   
 $= 0.024929$

Метод (b): загальна формула похибки (через похідні)  
 $\partial f/\partial a = -1/(x^2 - 2xy + y^2)$   
 $\partial f/\partial b = 1/(x^2 - 2xy + y^2)$

$\partial f/\partial a (a=14.85, b=15.49) = -2.441406$   
 $\partial f/\partial b (a=14.85, b=15.49) = 2.441406$

$\Delta f = |\partial f/\partial a|\Delta a + |\partial f/\partial b|\Delta b$   
 $= |-2.441406| \cdot 0.005 + |2.441406| \cdot 0.005$   
 $= 0.024414$

Фінальний результат  
 $f = -1.562500 \pm 0.024414$

---

## Завдання 2. Точність рівності

Визначити, яка рівність точніша.

№ вар.	Завдання
5	$6/7 \approx 0.857$ ; $\sqrt{4.8} \approx 2.19$

Рішення.

```
import math
```

```
print(" Завдання: порівняння точності двох рівностей ")
print("Дані рівності:")
print("1)  $6/7 \approx 0.857$ ")
print("2)  $\sqrt{4.8} \approx 2.19$ \n")
```

```
# 1. Обчислюємо точні значення
```

```
a1_true = 6/7
```

```
a2_true = math.sqrt(4.8)
```

```
a1_approx = 0.857
```

```
a2_approx = 2.19
```

```
print(" Точні значення ")
```

```
print(f"6/7 = {a1_true:.15f}")
```

```
print(f" $\sqrt{4.8}$  = {a2_true:.15f}\n")
```

```
# 2. Абсолютні похибки
```

```
delta_a1 = abs(a1_true - a1_approx)
```

```
delta_a2 = abs(a2_true - a2_approx)
```

```
print(" Абсолютні похибки ")
```

```
print(f" $\Delta_1$  =  $|a1\_true - a1\_approx|$  = {delta_a1:.15f}")
```

```
print(f" $\Delta_2$  =  $|a2\_true - a2\_approx|$  = {delta_a2:.15f}\n")
```

```
# 3. Відносні похибки
```

```
rel_a1 = delta_a1 / abs(a1_true)
```

```
rel_a2 = delta_a2 / abs(a2_true)
```

```
print(" Відносні похибки ")
```

```
print(f" $\delta_1$  =  $\Delta_1 / |a1\_true|$  = {rel_a1:.15f}")
```

```
print(f" $\delta_2$  =  $\Delta_2 / |a2\_true|$  = {rel_a2:.15f}\n")
```

```
# 4. Порівняння
```

```
print(" Висновок ")
```

```
if rel_a1 < rel_a2:
```

```
    print("Перша рівність ( $6/7 \approx 0.857$ ) є точнішою.")
```

```
else:
```

```
    print("Друга рівність ( $\sqrt{4.8} \approx 2.19$ ) є точнішою.")
```

Завдання: порівняння точності двох рівностей

Дані рівності:

1)  $6/7 \approx 0.857$

2)  $\sqrt{4.8} \approx 2.19$

Точні значення

$$6/7 = 0.857142857142857$$

$$\sqrt{4.8} = 2.190890230020664$$

Абсолютні похибки

$$\Delta_1 = |0.857142857142857 - 0.857| = 0.000142857142857$$

$$\Delta_2 = |2.190890230020664 - 2.19| = 0.000890230020664$$

Відносні похибки

$$\delta_1 = \Delta_1 / |a1\_true| = 0.000166666666667$$

$$\delta_2 = \Delta_2 / |a2\_true| = 0.000406332553072$$

Висновок

Перша рівність ( $6/7 \approx 0.857$ ) є точнішою.

---

Висновок: У процесі виконання лабораторної роботи я ознайомився з методами оцінки точності наближених обчислень. Для двох рівностей  $6/7 \approx 0.857$  та  $\sqrt{4.8} \approx 2.19$  було проведено розрахунки точних значень з великою кількістю десяткових знаків. Далі були визначені абсолютні похибки як різниця між точним і наближеним значенням, а також обчислені відносні похибки, які показують, наскільки сильно похибка впливає на результат у відсотковому співвідношенні.

У результаті порівняння виявилось, що відносна похибка першої рівності є меншою, ніж другої. Це означає, що рівність  $6/7 \approx 0.857$  є більш точною, ніж  $\sqrt{4.8} \approx 2.19$ . Таким чином, при практичних обчисленнях доцільніше використовувати саме це наближення, адже воно дає меншу похибку.

Загалом, лабораторна робота показала важливість правильного округлення чисел і необхідність перевірки точності наближених значень. Вона дала можливість закріпити знання про абсолютну та відносну похибки, а також зрозуміти, що навіть при незначних відхиленнях у результатах різні рівності можуть мати різну точність. Отже, можна зробити висновок, що оцінка похибок є невід'ємною частиною математичних і прикладних обчислень, адже саме вона дозволяє контролювати правильність і надійність отриманих результатів.