Лабораторная работа 5. Броуновское движение.

Задание 1: Провести выкладки и доказать, что для процесса: $B_{(k+1)\Delta} = B_{k\Delta} + \varepsilon_{(k+1)\Delta}$ $(k=0,1,\dots)$ — выполняются условия, характеризующие на броуновское движение. В частности, доказать, что $EB_{k\Delta}=0$, $EB^2_{k\Delta}=k\Delta$, $EB_{k\Delta}B_{l\Delta}=\Delta\min(l,k)$, при $B_0=0$.

1) Д-ть: $EB_{k\Delta}=0$.

Пусть $B_{k\Delta}=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i\Delta}$ — сумма с.в.

Тогда мат. ожидание: $EB_{k\Delta}=E\left(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i\Delta}\right)=\sum_{i=1}^{k}E\varepsilon_{i\Delta}$, а так как $E\varepsilon_{i\Delta}=0$ для всех i, то

$EB_{k\Delta}=0$, ч.т.д.

2) Д-ть: $EB^2_{k\Delta}=k\Delta$.

$$DB_{k\Delta}=EB^2_{k\Delta}-\underbrace{(EB_{k\Delta})^2}_{=0}=EB^2_{k\Delta}$$

$$EB^2_{k\Delta}=DB_{k\Delta}=D\left(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i\Delta}\right)=\sum_{i=1}^{k}D\varepsilon_{i\Delta}=k\cdot\underbrace{D\varepsilon_{i\Delta}}_{\Delta}=k\cdot\Delta$$

Следовательно, $DB_{k\Delta}=k\cdot\Delta$.

3) Д-ть: $EB_{k\Delta}B_{l\Delta}=\Delta\min(l,k)$

Т.к. $B_{k\Delta}=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i\Delta}$, то

$$E(B_{k\Delta}B_{l\Delta})=E\left(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i\Delta}\cdot\sum_{j=1}^{l}\varepsilon_{j\Delta}\right)=E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\varepsilon_{i\Delta}\cdot\varepsilon_{j\Delta}\right).$$

Если $i\neq j$, то: $E(\varepsilon_{i\Delta}\cdot\varepsilon_{j\Delta})=E(\varepsilon_{i\Delta})\cdot E(\varepsilon_{j\Delta})=0$.

Поэтому $i=j$ и: $E(B_{k\Delta}\cdot B_{l\Delta})=\sum_{i=1}^{\min(k,l)}E(\varepsilon^2_{i\Delta})$.

Так как $D(\varepsilon_{i\Delta})=\Delta$, то: $E(B_{k\Delta}\cdot B_{l\Delta})=\sum_{i=1}^{\min(k,l)}\Delta$.

Следовательно, $E(B_{x\Delta} \cdot B_{l\Delta}) = \min(x, l) \cdot \Delta$, ч.т.д.