

4

$$f(A) = A^{-1} X (X^T A^{-1} X)^{-1}$$

Докажем, что $f(X \Omega X^T + \Delta) = f(\Delta)$

Пусть $A = \Delta + X \Omega X^T \Rightarrow A^{-1} = (\Delta + X \Omega X^T)^{-1} = \Delta^{-1} - \Delta^{-1} X (\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1}$

Тогда: 1) $(X^T A^{-1} X)^{-1} = [X^T (\Delta^{-1} - \Delta^{-1} X (\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1}) X]^{-1}$

$$= [X^T \Delta^{-1} (\mathbb{I} - X (\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1}) X]^{-1} = [X^T \Delta^{-1} X (\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1} X)]^{-1}$$

Замена: $X^T \Delta^{-1} X = \beta \Rightarrow [X^T A^{-1} X]^{-1} = [\beta (\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta)]^{-1}$

$$= [\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta]^{-1} \beta^{-1} \quad (\text{т.к. } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1})$$

2) т.к. $X^T \Delta^{-1} X = \beta \Rightarrow$

из 1): $A^{-1} X = X \beta (\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta)^{-1} = X X^T \Delta^{-1} X (\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta)^{-1} = \Delta^{-1} X (\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta)^{-1}$

3) $\Rightarrow f(X \Omega X^T + \Delta) = \Delta^{-1} X (\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta)^{-1} \cdot [\mathbb{I} - (\Omega^{-1} + \beta)^{-1} \beta]^{-1} \beta^{-1} = \Delta^{-1} X \beta^{-1} =$

$$= \Delta^{-1} X (X^T \Delta^{-1} X)^{-1} = f(\Delta)$$

5

5) Докажем, что $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{n} \|A\|_2$$