Вычислительная физика. Кудишкина П.,
Домашняя работа №3. БФЗ-194.

(2).

1) Проектор : $A(A^TA)^{-1}A^T$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$(B^TB)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

2) QR-разложение

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Применим ортогонализацию Грама-Шмидта:

$b_1 = a_1$, $\quad b_2 = a_2 - \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$ ; $(a_2, b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$b_2 = a_2$

Нормируем полученные вектора $b_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $b_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ , $R = Q^{-1} A = Q^{T} A$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Применим ортогонализацию Грама-Шмидта:

$$a_1 = b_1; \quad b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$$

$$(a_2, b_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$(b_1, b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Нормируем векторы: $b_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$$b_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

1

Проектор ортогон. $\Rightarrow$ $\exists\ \vec{a}$ и $\vec{b}$ : $\vec{a} \perp \vec{b}$ и

$P\vec{a} = \vec{a}$, $P\vec{b} = 0$

т.к. $P$ - ортогон, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 = (\vec{b}, P\vec{a})$

$(b, Pa)_i = b_i (Pa)_i = b_i P_{ij} a_j$

$\Rightarrow b_i P_{ij} a_j$ свернётся в скалярное произвед,

если $b_i P_{ji} a_j \Rightarrow P_{ij} = P_{ji} \Rightarrow P = P^T$