Вычислительная физика ДЗ-1 Кудюкина Полина

(1)

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha}\,dx$$

i) $$I_n(\alpha) = \int_0^1 \left(x^{(n-1)} - \frac{x^{(n-1)}\alpha}{x+\alpha} \right) dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx - \int_0^1 \frac{\alpha x^{n-1}}{x+\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 - \alpha I_{n-1}(\alpha) = \frac{1}{n} - \alpha I_{n-1}(\alpha)$$ - прямая рекурсия

$$-\alpha I(n-1) = I_n(\alpha) - \frac{1}{n}$$

$$I(n-1) = \frac{1 - I_n(\alpha)\cdot n}{n\alpha} \Rightarrow I_n(\alpha) = \frac{1 - I_{n-1}(\alpha)\,n}{n\alpha}$$ - обратная рекурсия

ii) $$I_0(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x+\alpha} = \ln(x+\alpha)\Big|_0^1 = \ln(1+\alpha) - \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)$$

(4)

$\delta > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения м-цы A, выберем из них наибольшее:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 10 \\ \delta & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 10\delta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 10\delta = 0$$

$$D = 4 - 4(1-10\delta) = 4(1-1+10\delta) = 4\cdot 10\delta$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10\delta}}{2}$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{10\delta}$. Т.к. $\delta > 0$ - наибольшее собств. значение

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{10\delta} = E(\delta)$$

Число обусловленности собств. значения: $K(\delta) = \frac{dE(\delta)}{d\delta}$

$$K(\delta) = \frac{d(1+\sqrt{10\delta})}{d\delta} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{\delta}}$$

При $\delta = 10$

число обусловленности: $K(10) = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$

$$K\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{10} = \frac{10}{2} = 5$$

3

Рекуррентная последовательность

$I_n = -I_{n-1} + 6 I_{n-2}$

Решим характеристич. уравнение:

$q^2 + q - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 5^2$

$q_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$q_1 = -3 \quad q_2 = 2$

Для произвольных A и B последовательность $F_n = A(-3)^n + B(2)^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

По условию: $\begin{cases} F_0 = A + B = 1 \\ F_1 = -3A + 2B = -3 \end{cases}$

$B = 0 \Rightarrow A = +1$

$\Rightarrow F_n = 1 \cdot (-3)^n \Rightarrow \quad F_{2020} = (-3)^{2020}$