

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет физики

Экзамен

«Оптика»



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Москва
2020

Содержание

1. Световой луч. Распространение световых лучей. Оптическая длина пути. Принцип Ферма, понятие таутохронима в оптике. Законы отражения и преломления света.	3
2. Явление полного внутреннего отражения, его применения. Оптические элементы и приборы, работающие на явлении полного внутреннего отражения. Оптоволокно, типы оптоволокна.	5
3. Преломление на сферической поверхности. Фокусы сферической поверхности. Изображение предмета. Преломление в линзе. Общая формула линзы (вывод). Фокусные расстояния тонкой линзы. Действительное и мнимое изображение. Линейное (поперечное) увеличение. Оптическая сила линз.	7
3.1. Преломление на сферической поверхности	8
3.2. Тонкие линзы	9
4. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. Коррекция сферической и хроматической аберрации.	12
4.1. Аберрации оптических систем.	12
4.1.1. Классификация геометрических аберраций	12
4.1.2. Сферическая аберрация	13
4.1.3. Хроматическая аберрация	14
4.2. Коррекция сферической и хроматической аберрации.	14
5. Оптические инструменты. Микроскоп. Телескоп (труба Кеплера, труба Галилея). Угловое увеличение телескопа.	15
6. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Соотношения амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля). Изменение фазы волны при отражении. Энергетические коэффициенты отражения и пропускания света. Коэффициент отражения для естественного света.	20
6.1. Законы отражения и преломления	20
6.2. Коэффициенты Френеля	21
7. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Интерференция плоской и сферической волн. Видность полос.	26
7.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн. Ширина полосы	26
7.1.1. Ширина полосы	26
7.2. Интерференция плоской и сферической монохроматических волн	26
7.3. Видность	27
8. Пространственная когерентность. Интерференция квазимонохроматических волн протяженных источников света. Роль конечных размеров источника света. Интерференционная картина в схеме Юнга.	32
9. Интерферометр Майкельсона. Фурье-спектрометр. Применение интерферометров в научных исследованиях	37
9.1. Интерферометр Майкельсона	37

9.2. Фурье-спектрометр	37
9.3. Применение интерферометров в научных исследованиях	38
10. Дифракция Френеля на прямолинейном краю плоского экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.	43
11. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Критерий Рэлея (применительно к формированию изображений). Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа.	48
12. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионная формула Зелмеера. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея.	53
13. Двухуровневая система. Взаимодействие двухуровневой системы с излучением: спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна	58
13.1. Вынужденное излучение	59
13.2. Коэффициенты Эйнштейна	59

1. Световой луч. Распространение световых лучей. Оптическая длина пути. Принцип Ферма, понятие таутохронима в оптике. Законы отражения и преломления света.

Световым лучом мы будем называть некоторый конечный, но очень узкий пучок, который может существовать изолированно от других лучей.

Согласно **закону прямолинейного распространения света** световые лучи в прозрачной *однородной* среде распространяются прямолинейно. Согласно **закону о независимости световых пучков** распространение каждого светового луча не зависит от того, есть ли в среде иные световые лучи, или нет. Это разумеется, не совсем корректно: тогда бы не было явления интерференции, однако в рамках геометрической оптики мы этим явлением пренебрежем.

Оптической длиной пути Δ между двумя точками мы назовем расстояние, на которое свет распространился бы в вакууме за время прохождения расстояния между этими двумя точками. Как известно, скорость света в вакууме есть максимальная достижимая скорость и является константой c , а скорость света в веществе равна:

$$v = \frac{c}{n} \quad (1)$$

где n — абсолютный показатель преломления среды, который и вводится, как отношение скорости света в вакууме к скорости света в этой среде.

Тогда на основании формулы (1) можем записать:

$$\Delta = nl$$

где l — расстояние между точками, n — абсолютный показатель преломления среды.

Указанная формула имеет обобщение на случай, когда показатель среды может зависеть от координаты, тогда:

$$\Delta = \int_a^b n dl \quad (2)$$

Принцип Ферма. *Луч движется из начальной точки в конечную по траектории, которая обеспечивает минимальную оптическую длину пути. Является постулатом.*

Из принципа Ферма в случае однородной среды логичным образом вытекает закон прямолинейного распространения света, упомянутый ранее.

Закон отражения света. *Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный из точки падения, лежат в одной полуплоскости. Угол падения равен углу отражения.*

Закон преломления света. *Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный в точке преломления, лежат в одной плоскости. Угол падения и угол преломления связаны следующим соотношением: $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$, где n_1 — абсолютный показатель преломления среды, из которой луч приходит, n_2 — среды, в которую луч преломляется, α — угол падения, γ — угол преломления.*

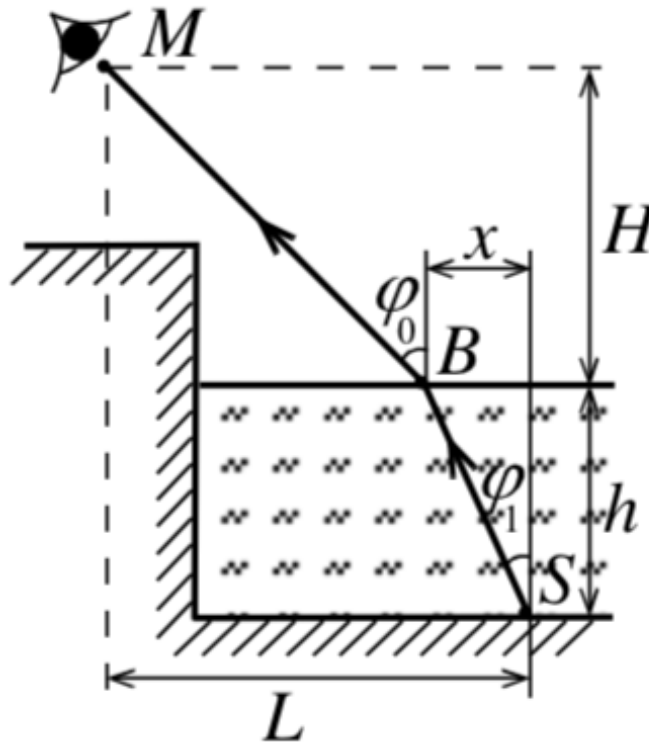
◀ Пусть глаз наблюдателя находится на высоте H над поверхностью некоего водоема, а точечный источник — на глубине h в этом водоеме на расстоянии S от места, где стоит наблюдатель (вдоль поверхности воды). Показатель преломления воздуха примем равным $n_{\text{возд}} = 1$, а показатель преломления воды — n , известный нам.

Пусть проекция отрезка BS на поверхность воды равна x . В таком случае:

$$\begin{aligned}
 BS &= \sqrt{h^2 + x^2}, \\
 MB &= \sqrt{H^2 + (L - x)^2} \\
 t &= \frac{SB}{v} + \frac{MB}{c} = \left(n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{H^2 + (L - x)^2} \right) / c
 \end{aligned}$$

Согласно принципу наименьшего времени, полученное нами последнее выражение должно оказаться минимальным, другими словами $\frac{dt}{dx} = 0$ или:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}} = 0$$



В то же время из рисунка мы однозначно можем утверждать:

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \\
 \sin \gamma &= \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}}
 \end{aligned}$$

Отсюда напрямую следует факт:

$$n \sin \alpha = \sin \gamma$$



2. Явление полного внутреннего отражения, его применения. Оптические элементы и приборы, работающие на явлении полного внутреннего отражения. Оптоволокно, типы оптоволокна.

Сначала наивное. Мы знаем формулу Снеллиуса $\sin \theta = n_{21} \sin \theta'$, где n_{21} – это относительная оптическая плотность. Если $n_{21} < 1$ то должен существовать такой угол падения $\arcsin n_{21}$ после которого не может уже существовать никакого прошедшего луча, а только отраженный. Так как свету некуда деться, кроме как отразиться, то он отражается полностью.

Теперь как это выглядит с точки зрения волновой оптики (Сивухин с 402)
Пусть у нас есть падающая волна:

$$E^e = \mathcal{E} e^{i(\omega t - k_1 r)}$$

Мы из соображений геометрической оптики знаем, что должны быть еще отраженная (r) и прошедшая (d) волны:

$$E^r = \mathcal{R} e^{i(\omega t - k'_1 r)}$$

$$E^d = \mathcal{D} e^{i(\omega t - k_2 r)}$$

Мы предполагаем что они тоже плоские из соображений симметрии. Равенство частот у всех трех объясняется тем, что напряженности могут иметь только гармоническую зависимость от времени, а в случае наложения двух плоских полей с разными частотами такое не выполняется. Из соотношений симметрии надо заключить, что касательная к плоскости составляющая волнового вектора у всех трех волн одинаковая. В нашем случае это проекция на ось x (смотри рисунок)

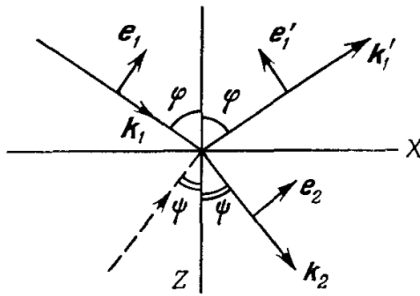


Рис. 238.

То есть: $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$

Так же можем написать про волновые вектора:

$$k_1^2 = k_{1x}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2$$

Где эpsilon 1 и 2 это диэлектрическая проницаемость среды из которой пришел луч и в которую ушел соответственно. Отсюда можно узнать их z составляющие:

$$k'_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}$$

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}$$

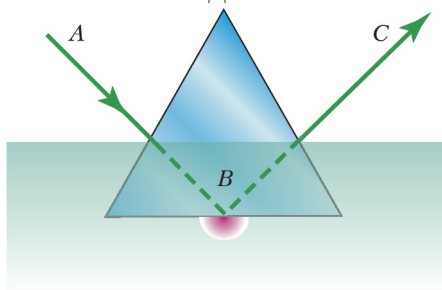
Так как нас волнует полное внутреннее отражение, то рассмотрим случай, когда $k_2^2 < k_{1x}^2$ так как $k_{1x} = k_1 \sin \varphi$, то это условие равносильно условию $\sin \varphi > \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}$ так же как в геометрической оптике. Естественно чтобы такое условие вообще могло выполняться надо чтобы $n_{21} < 1$. В этом случае k_{2z} комплексный. Обозначим так: $k_{2z} = \frac{-i}{2h}$ Почему минус? Потому что корень это функция многозначная и нужную ветвь мы выбираем исходя из физических требований, а тут нужен как раз минус. Со всем этим можем написать отраженную волну как:

$$E^d = \mathcal{D} e^{-z/2h} e^{i(\omega t - k_{1x}x)}$$

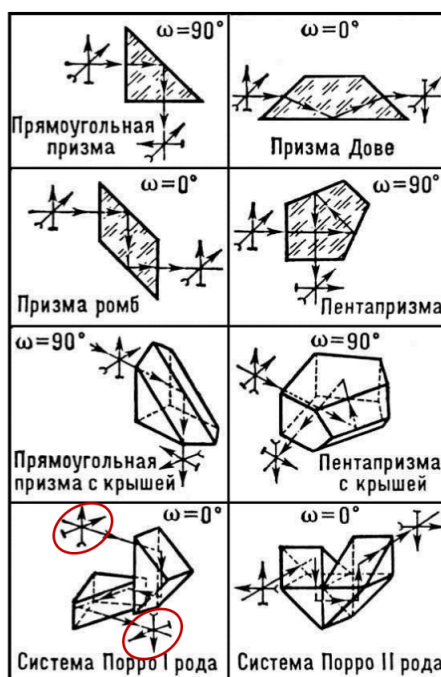
$$h = \frac{\lambda_1}{4\pi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{21}^2}}$$

То есть волна идет вдоль границы, но затухает вглубь вещества (см рисунок)

Рис. 1. Опыт Мандельштама и Селени



Эффект полного внутреннего отражения используется например в угловых отражателях и во многих других призмах:



Оптоволокно это такая штука, в которой свет постоянно испытывает отражения от стенок. Состоит из двух слоев очевидно. Внешний имеет оптическую плотность больше. Заодно он защищает внутренний слой от повреждений. Сгибать сильно нельзя.

3. Преломление на сферической поверхности. Фокусы сферической поверхности. Изображение предмета. Преломление в линзе. Общая формула линзы (вывод). Фокусные расстояния тонкой линзы. Действительное и мнимое изображения. Линейное (поперечное) увеличение. Оптическая сила линз.

Сначала введём необходимые определения:

- 1) **Оптическая система** — совокупность оптических элементов (преломляющих, отражающих), созданная для преобразования световых пучков.
- 2) **Оптическая ось системы** — прямая линия, являющаяся осью симметрии преломляющих (отражающих) поверхностей. Она проходит перпендикулярно этим поверхностям через их центр кривизны.
- 3) **Центрированная оптическая система** — совокупность однородных преломляющих и отражающих сред, отделённых друг от друга симметричными поверхностями, центры кривизны которых находятся на одной прямой. Эту прямую называют *главной оптической осью системы*.
- 4) **Гомоцентрический пучок** — пучок, все образующие лучи которого при своём продолжении сходятся в одной точке. *Параллельный* пучок тоже считается гомоцентрическим, т.к. он исходит из бесконечно удалённой точки.
- 5) **Параксиальный пучок** — пучок, все образующие лучи которого распространяются вдоль оси центрированной оптической системы и образуют малые углы с осью и нормальными к преломляющим и отражающим поверхностям.
- 6) Пусть оптическая система преобразует свет, не нарушая гомоцентричности пучка, причём пучок лучей, исходящий из точки P , сходится в точке P' . Тогда точка P' — это **изображение** точки P .
- 7) Изображение называется **действительным**, если световые лучи от точки P сходятся к точке P' при своём распространении. Если же в точке P' сходятся продолжения лучей в направлении, обратном направлению распространения света, то изображение называется **мнимым**.
- 8) Пусть на оптическую систему падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. **Задний (второй главный) фокус** — это точка пересечения пучка таких лучей (или их продолжений) на выходе из системы.
- 9) Если на систему падает пучок лучей, исходящий из некоторой точки, и после прохождения оптической системы лучи идут параллельно главной оптической оси, исходная точка называется **передним (первым главным) фокусом**. Передний и задний фокусы всегда лежат на главной оптической оси.

- 10) **Линейное (поперечное) увеличение** — отношение линейных размеров изображения и предмета:

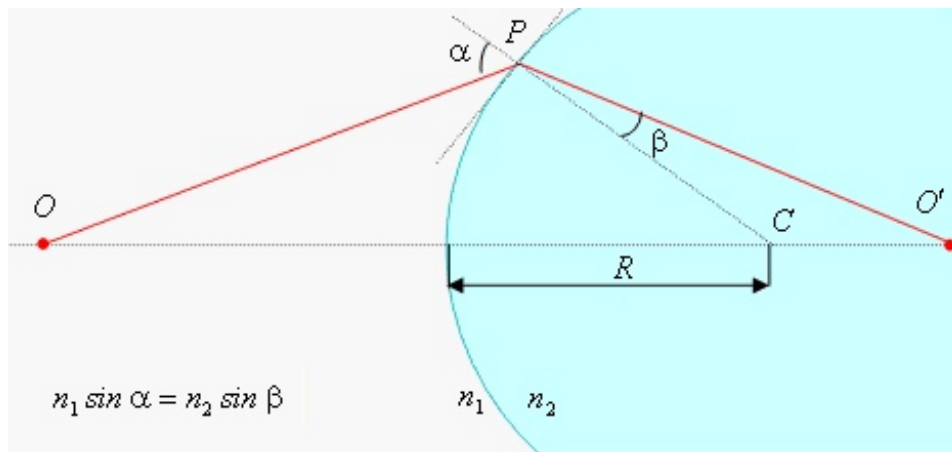
$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (3)$$

Отрезки y и y' считаются положительными, если они откладываются вверх от оптической оси, и отрицательными — в противном случае.

- 11) Если увеличение положительное, то изображение **прямое**. В противном случае изображение **обратное**.
- 12) Две сопряжённые плоскости, отображающиеся с линейным увеличением $\beta = 1$, называются **главными**. Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью — **главные точки** оптической системы.
- 13) **Главные фокусные расстояния** — расстояния от главных точек до соответствующих фокусов. Эти расстояния считаются положительными, если свет идёт от главной плоскости к соответствующему главному фокусу (правило знаков).

3.1. Преломление на сферической поверхности

Пусть две среды с разными показателями преломления (n и n') отделены друг от друга сферической границей S радиуса R . Эта граница может рассматриваться как оптическая система, преобразующая падающее на неё излучение предмета. Считаем радиус сферы положительным, если её центр находится с той стороны, куда распространяются лучи.



Рассмотрим луч OP , выходящий из точки O , испытывающий преломление в точке P и пересекающий оптическую ось в точке O' . Проведём из центра сферы радиус CP . Он ортогонален поверхности сферы S , так что для углов α и β можно записать закон Снеллиуса:

$$n \sin \alpha = n' \sin \beta. \quad (4)$$

Обозначим путь луча OP как u , а дальнейший путь PO' как u' . Найдём их связь из геометрических соображений:

$$S_{OPC} + S_{PCO'} = S_{O'PO},$$

$$\begin{aligned} S_{OPC} &= -\frac{1}{2}uR \sin \alpha, \\ S_{PCO'} &= \frac{1}{2}u'R \sin \beta, \\ S_{O'PO} &= -\frac{1}{2}uu' \sin (\pi - \alpha + \beta). \end{aligned}$$

Из этих равенств находим

$$-uR \sin \alpha + u'R \sin \beta = -uu' \sin (\alpha - \beta).$$

Подставляем (4) и находим

$$-u + u' \frac{n}{n'} = -\frac{uu'}{R} \left(\cos \beta - \cos \alpha \frac{n}{n'} \right),$$

или

$$\frac{n}{u} - \frac{n'}{u'} = \frac{n \cos \alpha - n' \cos \beta}{R}. \quad (5)$$

Это точное соотношение. В случае параксиальных пучков, для которых $|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$, формула (5) принимает вид

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{R}, \quad (6)$$

где x — расстояние от точки O до поверхности сферы, x' — расстояние от точки O' до поверхности сферы. Знаки величин x и x' определяются так же, как и для u и u' , из того условия, что отсчёт расстояния ведётся от преломляющей поверхности *по направлению лучей*.

Подставив $x = -\infty$ и $x' = \infty$, находим положение заднего и переднего фокусов соответственно:

$$\begin{aligned} f' = x' &= \frac{R}{1 - n/n'}, \\ f = x &= -R \frac{n/n'}{1 - n/n'}. \end{aligned}$$

3.2. Тонкие линзы

Линза — это прозрачное тело, изготовленное из прозрачного оптически однородного материала, ограниченное двумя полированными выпуклыми или вогнутыми поверхностями.

Точки пересечения поверхностей линзы с оптической осью называются *вершинами линзы*. Расстояние d между вершинами линзы называется *толщиной линзы*. Линза считается **тонкой**, если её толщина мала по сравнению с радиусами кривизны поверхностей: $d \ll R_1$, $d \ll R_2$. Главные плоскости тонкой линзы совпадают.

Представим линзу как совокупность двух последовательных преломляющих поверхностей. Согласно (6), для первой поверхности имеем:

$$\frac{n_e}{x} - \frac{n_i}{x_1} = \frac{n_e - n_i}{R_1}.$$

Поскольку линза предполагается тонкой, то координата x_1 промежуточного изображения одинакова относительно обеих поверхностей. Следовательно, для второй поверхности можем записать

$$\frac{n_i}{x_1} - \frac{n_e}{x'} = \frac{n_i - n_e}{R_2}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -(n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (7)$$

Здесь мы перешли к относительному показателю преломления $n = n_i/n_e$.

Фокусные расстояния тонкой линзы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \\ f &= -f'. \end{aligned}$$

Для двояковыпуклой (или *собирающей*) линзы $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ и фокусное расстояние $f' > 0$, $f < 0$. Для двояковогнутой (или *рассеивающей*) линзы всё равным счётом наоборот.

Заметим, что соотношение (7) можно переписать как

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}. \quad (8)$$

Полученная формула называется **формулой тонкой линзы**.

Оптическую силу линзы определяют как величину, обратно пропорциональную фокусному расстоянию:

$$D = \frac{1}{f'}. \quad (9)$$

Для собирающих линз оптическая сила положительна ($f' > 0$), а для рассеивающих — отрицательна ($f' < 0$). Единица измерения оптической силы — *диоптрия* (оптическая сила такой системы, фокусное расстояние которой $|f'|$ равно одному метру).

Оптическая сила аддитивна (в случае тонких линз).

123

4. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. Коррекция сферической и хроматической аберрации.

4.1. Аберрации оптических систем.

Аберрации оптических систем (лат. aberratio - уклонение), погрешности изображений, даваемых оптическими системами. Проявляются в том, что оптические изображения в ряде случаев не вполне отчётливы, не точно соответствуют объекту или оказываются окрашенными. Аберрации делят на *монохроматические (геометрические)* и *хроматические*, среди геометрических выделяют

- Сферическая аберрация
- Кома
- Астигматизм
- Дисторсия
- Кривизна поля (поверхности) изображения

4.1.1. Классификация геометрических аберраций

Геометрические аберрации практически всегда являются учётом непараксиальности в ходе лучей. Произвольный луч в пространстве можно задать, указав прямоугольные координаты y , z , η и ζ точек его пересечения с предметной плоскостью (т.е. плоскостью, проходящей через изображаемую точку P перпендикулярно к главной оптической оси) и плоскостью входного зрачка. После прохождения через оптическую систему луч пересечёт плоскость параксиального изображения в точке с координатами y' и z' . Координаты самого параксиального изображения (*параксиального фокуса*) – y'_0 , z'_0 . Разности

$$\Delta y' = y' - y'_0 \qquad \Delta z' = z' - z'_0$$

примем за меру отступления от предельного случая параксиальной оптики. Координаты y' и z' будут функциями y , z , η и ζ :

$$y' = f_y(y, z, \eta, \zeta) \qquad z' = f_z(y, z, \eta, \zeta)$$

Линейные члены разложений f_y и f_z не зависят от η и ζ и соответствуют параксиальной оптике, члены чётных степеней не войдут в эти разложения в силу осевой симметрии оптической задачи. Поэтому $\Delta y'$ и $\Delta z'$ будут определяться третьими членами разложения f_y и f_z (поэтому часто рассматриваемые дальше аберрации называются аберрациями третьего порядка).

Введём три вектора, перпендикулярных главной оптической оси системы:

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}' = y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$$

Тогда вектор

$$\Delta \mathbf{r}' = \Delta y'\mathbf{j} + \Delta z'\mathbf{k}$$

может быть разложен по векторам \mathbf{r} и $\boldsymbol{\sigma}$. Причём в виду симметрии коэффициенты этих разложения могут зависеть только от «инвариантов вращения» σ^2 , $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})$ и r^2 :

$$\Delta\mathbf{r}' \approx \left(A\sigma^2 + B(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + C\mathbf{r}^2 \right) \boldsymbol{\sigma} + \left(D\sigma^2 + E(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + F\mathbf{r}^2 \right) \mathbf{r} \quad (10)$$

В дальнейшем под $|\boldsymbol{\sigma}|$ понимается радиус входного зрачка. *Аберрационной* кривой называют кривую, по которой плоскость параксиального изображения пересекает пучок лучей, проведённых из точки-объекта P через окружность входного зрачка. Изображением вместо точки теперь окажется область, ограниченная аберрационной кривой.

Каждый из постоянных коэффициентов A , B , C , D , E и F в уравнении (10) определяется конфигурацией оптической системы и отвечает за конкретный тип аберрации. Аберрация определяемая членом $A\sigma^2\boldsymbol{\sigma}$ называется **сферической**. Членам $B(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma} + D\sigma^2\mathbf{r}$ соответствует **кома**. Членам $C\mathbf{r}^2\boldsymbol{\sigma} + E(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\mathbf{r}$ – **астигматизм косых лучей** и **искривление плоскости изображения**. Члену $F\mathbf{r}^2\mathbf{r}$ соответствует **дисторсия**.

4.1.2. Сферическая аберрация

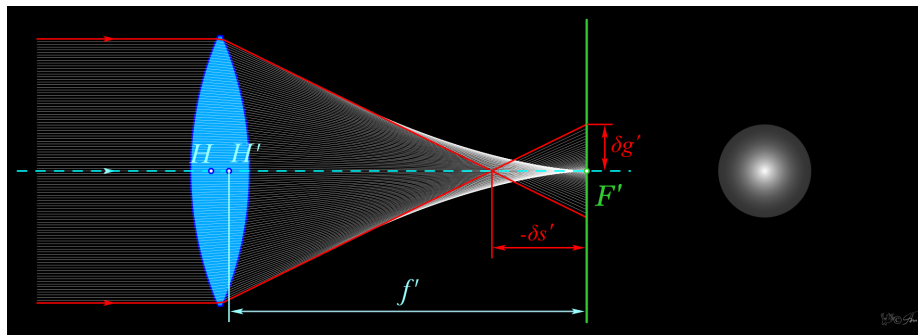


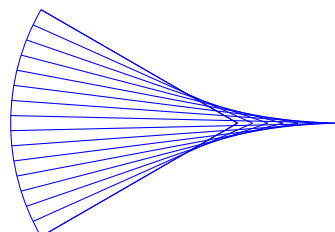
Рис. 2. Схема сферической аберрации, где H , H' — положения главных плоскостей; F' — задняя фокальная плоскость; f' — заднее фокусное расстояние; $-\delta s'$ — продольная сферическая аберрация; $\delta g' = \Delta r'$ — поперечная сферическая аберрация.

Сферическая аберрация — аберрация оптических систем из-за несовпадения фокусов для лучей света, проходящих на разных расстояниях от оптической оси (см. рис. 2.). ак как сферическая аберрация отвечает члену $A\sigma^2\boldsymbol{\sigma}$, то если в системе есть только этот тип аберрации ($|B|, |C|, |D|, |E|, |F| \approx 0 \ll |A|$), то

$$|\Delta r'| = A\sigma^3 = \text{const}$$

Значит аберрационной кривой является окружность (радиус которой пропорционален кубу входного зрачка), а изображение — круглое пятнышко, ограниченное этой окружностью (см. рис.1).

В результате сферической аберрации цилиндрический пучок лучей, после преломления линзой (в пространстве изображений) получает вид не конуса, а некоторой воронкообразной фигуры, наружная поверхность которой, вблизи узкого места, называется **каустической поверхностью**. При этом изображение



18 Рис. 3. Каустика — огибающая лучей от фронта

точки имеет вид диска с неоднородным распределением освещённости, а форма каустической кривой позволяет судить о характере распределения освещённости. В общем случае, фигура рассеяния, при наличии сферической aberrации, представляет собой систему концентрических окружностей с радиусами пропорциональными третьей степени координат на входном (или выходном) зрачке.

Сферическая aberrация линзы (системы линз) объясняется тем, что её преломляющие поверхности встречают отдельные лучи сколько-нибудь широкого пучка под различными углами. Вследствие чего, более удалённые от оптической оси лучи преломляются сильнее, нежели нулевые лучи, и образуют свои точки схода удалённые от фокальной плоскости.

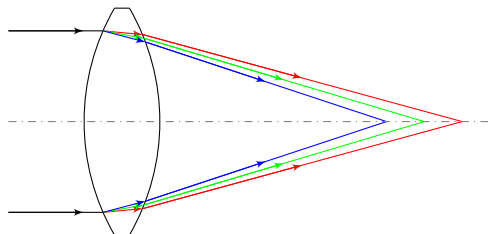


Рис. 4. Пример хроматической aberrации.

4.1.3. Хроматическая aberrация

Если используется белый свет, то в изображении возникают дополнительные aberrации. Это связано с тем, что показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия света). Поэтому оптическая система даёт не одно, а множество монохроматических изображений, отличающихся друг от друга по величине и положению. Результирующее же изображение, получающееся от наложения таких монохроматических изображений, оказывается нерезким и с окрашенными краями. Это явление и называется *хроматической aberrацией* (например рис. 4).

4.2. Коррекция сферической и хроматической aberrации.

И сферическая и хроматическая aberrации могут быть с той или иной мерой точности откорректированы путём комбинации линз (например, рис. 5).

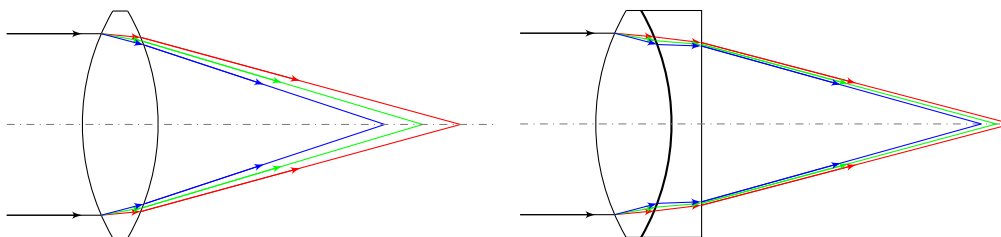


Рис. 5. Пример коррекции хроматической aberrации на собирающей линзе при помощи рассеивающей линзы.

5. Оптические инструменты. Микроскоп. Телескоп (труба Кеплера, труба Галилея). Угловое увеличение телескопа.

123

123

123

123

6. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Соотношения амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля). Изменение фазы волны при отражении. Энергетические коэффициенты отражения и пропускания света. Коэффициент отражения для естественного света.

При падении плоской волны на границу раздела двух изотропных диэлектриков, появляется две волны: преломленная (которая проходит границу раздела сред) и отраженная (не проходит), которые создаются за счет колебаний в диэлектриках, возбуждаемых падающей волной. Сразу быстро получим законы отражения и преломления.

6.1. Законы отражения и преломления

Пусть падающая волна имеет следующий вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

В таком случае, из-за того, что колебания являются вынужденными, мы можем сказать, что $\omega = \omega_r = \omega_t$.

Кроме того, как мы знаем из курса электричества, существует уравнение на граничное условие для вектора E , которое в нашем случае принимает вид (для тангенциальных компонент):

$$E_\tau + E_{r\tau} = E_{t\tau}$$

Возьмем любую точку на линии границы сред. В таком случае:

$$A_1 e^{i\vec{k}\vec{x}} + B_1 e^{i\vec{k}_r\vec{x}} = C_1 e^{i\vec{k}_t\vec{x}}$$

Это в свою очередь значит, что должны быть равны между собой величины, стоящие в показателе экспоненты. С учетом того, как мы ввели углы, получаем:

$$k \sin \varphi = k_r \sin \varphi_r = k_t \sin \varphi_t \quad (11)$$

При этом, как мы знаем, k зависит от свойств среды, поэтому для падающей волны и отраженной:

$$k = k_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \epsilon}$$

А для преломленной:

$$k_t = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu' \epsilon'}$$

Тогда из уравнения 11 получаем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_r \\ \frac{\sin \varphi_t}{\sin \varphi} &= \frac{k}{k_t} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon' \mu'}} = \frac{n}{n'} \end{aligned}$$

6.2. Коэффициенты Френеля

Разложим падающую волну \vec{E} по двум составляющим: в плоскости, параллельной плоскости рисунка, и в плоскости, перпендикулярной (E_{\parallel} и E_{\perp} соответственно). Мы имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} E_{\tau} + E_{r\tau} &= E_{t\tau} \\ H_{\tau} + H_{r\tau} &= H_{t\tau} \end{aligned}$$

Мы также знаем соотношение, связывающее между собой H и E : $H = \sqrt{\varepsilon}E$ (пренебрегаем магнитными свойствами сред и считаем $\mu = 1$, а также не забываем, что $\vec{H} \perp \vec{E}$). Также вспоминаем, что $n = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда граничные условия принимают вид (с учетом проекций, см. рисунок):

$$\begin{cases} E \cos \varphi_1 - E_r \cos \varphi_1 = E_t \cos \varphi_2 \\ n_1 E + n_1 E_r = n_2 E_t \\ \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{cases} \quad \text{— для параллельной}$$

$$\begin{cases} E - E_r = E_t \\ n_1 E \cos \varphi_1 + n_1 E_r \cos \varphi_1 = n_2 E_t \cos \varphi_2 \\ \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{cases} \quad \text{— для перпендикулярной}$$

Решив эту систему уравнений, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} E_r = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} E \\ E_t = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} E \end{cases} \quad \text{— для параллельной}$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} E \\ E_t = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} E \end{cases} \quad \text{— для перпендикулярной}$$

Можно сразу же ввести энергетические коэффициенты отражения и пропускания света:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \left(\frac{E_r}{E} \right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 + \varphi_2)} & T_{\parallel} &= 1 - R_{\parallel} \\ R_{\perp} &= \left(\frac{E_{\perp}}{E} \right)^2 = \frac{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 + \varphi_1)} & T_{\perp} &= 1 - R_{\perp} \end{aligned}$$

123

123

123

123

7. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Интерференция плоской и сферической волн. Видность полос.

Принцип суперпозиции. Если в одной точке пространства накладываются колебания двух волн, то они порождают новую волну, равную их векторной сумме.

Из-за наличия принципа суперпозиции возможно явление интерференции, когда волны взаимно усиливают друг друга, или же наоборот, гасят.

Монохроматическая волна — волна, в спектр которой входит только одна частота.

7.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн. Ширина полосы

Рассмотрим сперва интерференцию двух плоских монохроматических волн. Пусть распространяются две волны с одинаковой частотой ω :

$$E_1 = a_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \varphi_1)} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$E_2 = a_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \varphi_2)} \cdot e^{-i\omega t}$$

Как мы знаем, сами по себе волны складываются. Посмотрим теперь за интенсивностью I , которую мы запишем как $I = EE^*$. Распишем суммарную интенсивность (принимая во внимание, что временная часть в экспоненте одинаковая у всех, поэтому она сократится при произведении с комплексно сопряженным и поэтому следить за ней не будем):

$$I_{\Sigma} = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = E_1 E_1^* + E_1 E_2^* + E_2 E_1^* + E_2 E_2^* =$$

$$= a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos(k\Delta - \Delta\varphi) + a_2^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta - \Delta\varphi)$$

Здесь мы ввели $\Delta = r_2 - r_1$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Напоминаю, что $k = 2\pi/\lambda$.

Если же $k_1 \neq k_2$, то вместо k в результирующей формуле будет $K = |k_1 - k_2|$.

7.1.1. Ширина полосы

Рассмотрим чуть более общий случай, когда $|k_1| = |k_2|$, но при этом волны сходятся под некоторым углом α . Тогда $K = 2k \sin(\alpha/2)$

Шириной полосы будем называть расстояние между ближайшими максимумами (вообще говоря, в МФТИшном конспекте написано что между минимумами, а между максимумами это расстояние между полосами, но наш лектор видимо так не считает, но строго говоря какая разница казалось бы). В нашем случае она оказывается равной:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2k \sin(\alpha/2)} = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \approx \frac{\lambda}{\alpha}$$

7.2. Интерференция плоской и сферической монохроматических волн

Внимание на картинку.

Будем рассматривать область, где $R_0 \gg r$. При этом:

$$R = \sqrt{R_0 + r^2} \approx R_0 + \frac{r^2}{2R_0}$$

Для сферической волны:

$$E_{sp} = \frac{a_1}{R_0} e^{ikr} e^{-i\omega t} \approx \frac{a_1}{R_0} e^{ik(R_0 + r^2/(2R_0))} e^{-i\omega t}$$

Для плоской волны:

$$E_f = a_2 e^{ikR_0 - i\omega t}$$

Если это счастье расписать так же, как мы делали с плоской волной, то получим:

$$I_\Sigma = \frac{a_1^2}{R_0^2} + a_2^2 + 2 \frac{a_1 a_2}{R_0} \cos \left(k \frac{r^2}{2R_0} \right)$$

7.3. Видность

Для характеристики выраженности интерференции вводят величину, называемую **видностью** V :

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (12)$$

где I_{max} , I_{min} — максимальное и минимальное значения интенсивности в области интерференции волн.

При интерференции двух **монохроматических** волн видность будет равна:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

123

123

123

123

8. Пространственная когерентность. Интерференция квази-монохроматических волн протяженных источников света. Роль конечных размеров источника света. Интерференционная картина в схеме Юнга.

123

123

123

123

9. Интерферометр Майкельсона. Фурье-спектрометр. Применение интерферометров в научных исследованиях

9.1. Интерферометр Майкельсона

Схема интерферометра представлена на рисунке. Приведем краткое описание:

Свет от некоторого протяженного источника S попадает на плоскопараллельную полупрозрачную пластинку P_1 . Она разделяет попавший на нее пучок на два, первый и второй соответственно. Первый пучок, после прохождения пластинки, отражается обратно **статичным** зеркалом M_1 , после чего частично отражается от пластинки P_1 в указанном направлении. Второй же пучок, отразившись от границы пластинки P_1 , направляется к зеркалу M_2 , после чего проходит через пластинку P_1 и идет совместно с пучком 1. Отметим, что второй пучок проходит пластину P_1 трижды. Чтобы исключить получающуюся из-за этого разность фаз, на пути первого пучка ставят пластинку P_2 , идентичную P_1 .

Пусть M'_1 — изображение зеркала M_1 в отражающей плоскости пластинки P_1 . Тогда происходящая интерференция равносильна интерференции в воздушном слое между M'_1 и M_2 . Разность хода между лучами составляет $\Delta = 2d \cos \varphi$, где d — толщина слоя, φ — угол падения. Если слой плоскопараллелен, то мы получим интерференционные кольца с центром в точке схождения лучей, нормально отраженных от поверхностей M'_1 и M_2 . Этому направлению соответствует максимальная разность хода $\Delta = 2d$, значит максимальный порядок интерференции будет в центре. При увеличении d полосы будут перемещаться от центра; при увеличении зазора на $d = \lambda/2$, произойдет смещение картины на одну полосу (т.е. на место светлой полосы снова придет светлая), т.к. $\Delta = \lambda$. Если же мы изменим угол падения, то разность хода изменится на $\Delta = 2d \sin \varphi \Delta \varphi$. Полосы получаются чем шире, чем меньше d , т.е. при $d = 0$ мы получим равномерное освещение.

Интерферометр использовался, например, при проведении [опыта Майкельсона – Морли](#), в ходе которого было установлено отсутствие движения Земли относительно эфира.

9.2. Фурье-спектрометр

Схема спектрометра представлена на рисунке. Приведем краткое описание:

Основой спектрометра является интерферометр Майкельсона (только он тут почему-то без второй пластины, ха-ха). Предположим, что у нас есть некоторый когерентный источник излучения с длиной волны λ . Когда разность хода лучей в спектрометре оказывается равной $\lambda/2$, интенсивность регистрируемого света оказывается близкой к нулю. При перемещении правого зеркала интерферометра Майкельсона разность хода лучей изменяется, изменяется и интенсивность света, регистрируемая приёмником. Очевидно, что интенсивность света максимальная, когда разность хода лучей будет кратна длине волны λ .

При перемещении зеркала с постоянной скоростью на выходе приёмника будет наблюдаться электрический сигнал синусоидальной формы. При этом период синусоиды зависит от длины волны источника, а амплитуда от интенсивности источника.

Теперь представим, что на входе некогерентный источник. Каждая длина волны в спектре источника света будет давать свою синусоиду на выходе приёмника. Таким образом, на выходе приёмника мы получаем сложный сигнал. При выполнении над полученным сигналом обратного преобразования Фурье получаем спектр входного электрического сигнала, который также является спектром излучения источника (то есть интенсивность излучения источника на различных длинах волн).

За счет этого можно проводить спектральные анализы для выявления состава газов или

жидкостей. Каждый газ или жидкость имеет свой спектр поглощения проходящего через него излучения. Таким образом спектр на входе интерферометра будет иметь «провалы» на определённых длинах волн. После обратного преобразования Фурье получаем спектр поглощения, по которому достаточно просто определить присутствующие в анализируемом воздухе газы и их концентрацию.

9.3. Применение интерферометров в научных исследованиях

Фактически, интерферометр позволяет с большой точностью измерять расстояния, поэтому его можно применять для создания деталей, изготовление которых требует высокой точности (сдвиг в интерференционной картине будет виден даже при небольшом отклонении).

Интерференционные методы позволяют с высокой точностью выявлять очень малые изменения показателя преломления среды, которые влияют на изменение оптической длины пути, а значит, влекут за собой изменение интерференционной картины.

Можно также измерять и углы.

123

123

123

123

10. Дифракция Френеля на прямолинейном краю плоского экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.

123

123

123

123

11. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Критерий Рэля (применительно к формированию изображений). Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа.

Из-за наличия во Вселенной дифракции Фраунгофера на круглом отверстии, вместо точки при фокусировке света мы получаем небольшое пятнышко, которое называется **пятном (диском) Эйри**. Его радиус можно рассчитать по следующей формуле:

$$\rho_a = 1.22 \frac{\lambda}{D} F$$

Здесь λ — длина волны наблюдаемого излучения, D — диаметр линзы, F — ее фокусное расстояние.

Пусть мы наблюдаем некоторый объект, который находится на главной оптической оси. Тогда и его изображение будет находиться там же. Пусть теперь у нас добавляется еще один объект, который находится от первоначального на некотором (небольшом) угловом расстоянии ψ . Пятно Эйри от этого объекта в таком случае будет находиться на таком же угловом расстоянии от исходного пятна, а линейное расстояние тогда будет равно $l = F\psi$.

Для того, чтобы понять, возможно ли эти два объекта разрешить, был введен так называемый **критерий Рэля**, который говорит, что минимальное расстояние между объектами, на котором их можно разрешить, оказывается таким, что первый минимум пятна Эйри от одного объекта приходится на нулевой максимум пятна Эйри другого (см рисунок)

С учетом имеющейся у нас формулы для радиуса пятна Эйри мы получим:

$$\psi_{min} F = 1.22 \frac{\lambda}{D} F \quad \Rightarrow \quad \boxed{\psi_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}}$$

Рассмотрим теперь микроскоп. Предположим, что предмет у нас лежит в какой-то среде с показателем преломления n (так делается, например, в диффузионных микроскопах); по другую сторону линзы у нас, соответственно, воздух, с показателем преломления $n_{air} = 1$. Как уже было сказано ранее, от каждой точки предмета будет получаться не точечное изображение, а пятно Эйри. Введем углы u_1 и u_2 (см. рисунок). Угол u_1 называется апертурным углом объектива.

Как видно из рисунка, верно следующее:

$$\frac{D}{L} \approx 2u_2 \approx 2 \sin u_2$$

Согласно Аббе, идеальный с точки зрения геометрии микроскоп подчиняется следующему условию (**условие синусов Аббе**):

$$l_1 n_1 \sin u_1 = l_2 n_2 \sin u_2 \quad \Rightarrow \quad l_1 n \sin u_1 = l_2 \frac{D}{2L}$$

Здесь l_1 и l_2 есть линейные размеры предмета и изображения соответственно.

Ну и с учетом критерия Рэля, который в данном случае удобно сформулировать как "линейный размер изображения должен получаться не меньше радиуса пятна Эйри мы получим:

$$l_{2min} = \rho_a = l_{1min} \frac{2Ln \sin u_1}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{D} L \quad \Rightarrow \quad l_{1min} = 0.61 \frac{\lambda}{n \sin u_1}$$

Выражение $n \sin u_1$ в знаменателе называют **числовой апертурой микроскопа**.

123

123

123

12. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионная формула Зельмеера. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея.

123

123

123

123

13. Двухуровневая система. Взаимодействие двухуровневой системы с излучением: спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна

Элементарная квантовая теория теплового излучения строится на основе двухуровневой модели атома. Допускают, что у атома имеется два дискретных энергетических состояния. Одно из них называют основным, его энергию обозначим E_0 . Второе состояние именуется возбуждённым, его энергия E_1 . Количества атомов в каждом из данных состояний (N_0 и N_1) называют населенностями уровней основного и возбужденного.

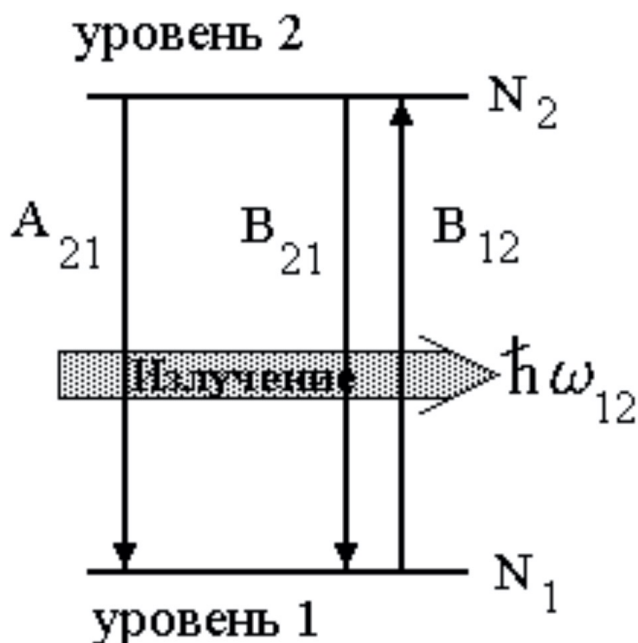


Рис. 6. Иллюстрация двухуровневой системы

Разность энергий описанных энергетических состояний равна энергии кванта света. Данный квант поглощается в том случае, если переход осуществляется с нулевого на первый уровень и излучается, если переход осуществляется с первого на уровень 0.

В соответствии с этой теорией возможно 2 вида переходов:

- 1) Спонтанное излучение. Атом первоначально находится в возбужденном состоянии E_1 . В некоторый момент времени он самопроизвольно переходит в основное состояние. При этом атом испускает фотон $\hbar\omega_{10}$. Данный процесс характеризуют вероятностью перехода в единицу времени.
- 2) Поглощение. В данном случае. Изначально атом находится в основном состоянии и, поглощая квант света, приходит в состояние возбуждения. Вероятность данного перехода пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля на частоте перехода и некоторому коэффициенту, который зависит от вида атома. При каждом акте поглощения количество фотонов уменьшается на один.

Вышеназванные типы переходов соответствуют классической теории, но они не могут обеспечить сохранение энергетического баланса. Если вероятность спонтанного излучения зависит

от внутренних свойств атома, то вероятность поглощения всегда определяется числом падающих фотонов имеющих определенную частоту. Значит, равновесие для всех частот не устанавливается. Для того чтобы устранить данное противоречие Эйнштейн предложил еще один тип перехода.

13.1. Вынужденное излучение

Атом переходит из возбужденного состояния в основное под действием внешнего электромагнитного поля. Количество фотонов увеличивается на один. При вынужденном излучении новый фотон невозможно отличить от фотона, который вызвал переход. Все фотоны, которые появились в результате вынужденного излучения, имеют одинаковую частоту, фазу, направление распространения и поляризацию. Вынужденное излучение когерентно.

Объектов с двумя энергетическими уровнями не существует в действительности. Существующие молекулы и атомы имеют существенно большее количество уровней энергии. Но, в условиях резонанса, если частота перехода между парой уровней в веществе близка к частоте света, обычно пренебрегают влиянием остальных уровней. В квантовой физике двухуровневая система играет важную роль, подобную роли гармонического осциллятора в классической физике. Данная модель используется в оптике для описания лазера и его взаимодействия веществом. Поэтому разговор о многоуровневой системе сводится к задаче об одноуровневой системе.

13.2. Коэффициенты Эйнштейна

A_{10} — вероятность спонтанного перехода атома из состояния 1 в состояние 2, B_{10} — эйнштейновский коэффициент индуцированного излучения, B_{01} — эйнштейновский коэффициент поглощения. Тогда заселенность верхнего уровня:

$$N_1 = N_1(0) \exp(-A_{10}t)$$

$$(A_{10} + B_{10}\rho_\omega) N_1 = B_{01}\rho_\omega N_0$$

где $\rho(\omega)$ — спектральная плотность. Соотношение выше показывает, что число переходов вверх равно числу переходов вниз, а также что с низкого энергетического уровня на более высокий энергетический уровень электрон может перейти, только поглотив фотон, то есть вынужденно. Спонтанно перейти на более высокий уровень атом не может, так как это вступает в противоречие с законом сохранения энергии. Переходы атомов с более высоких уровней на более низкие энергетические уровни возможны: вынужденные (вызванные внешними к атому причинами) и самопроизвольные (вызванные внутренними причинами).

Поговорим об излучении тел, закон Гиббса показывает распределение по энергетическим состояниям частиц в веществе, отсюда получаем:

$$N_J = g_J N_0 e^{-E_J/kT}$$

$$\frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/(kT)} = \frac{B_{12}\rho_\omega}{A_{21} + B_{21}\rho_\omega}$$

Замечая, что при $T \rightarrow \infty$ спектральная плотность неограниченно возрастает, замечаем симметричность коэффициента Эйнштейна у невырожденных уровней. Выражая спектральную плотность, получаем закон Планка:

$$\rho_\omega = \frac{A_{21}g_2}{g_1B_{12} \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega_{21}}{kT}\right) - 1 \right\}} \quad E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$$

Тогда получаем такие соотношения (g_i — кратность вырождения i -ого уровня):

$$g_1B_{21} = g_2B_{12}, \quad A_{21} = B_{21} \frac{\hbar\omega_{21}^3}{\pi^2c^3} \frac{g_1}{g_2}$$

Ну и тогда число переходов из состояния 1 в 2 будет равно:

$$dn_{12} = B_{12}\rho_\omega N_1 dt = N_1 \sigma_{12}(\omega) \frac{\rho_\omega c}{\hbar\omega_{12}} dt$$

где $\sigma_{12}(\omega)$ — сечения рассеяния частиц.

123

123

123

123