МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Курсовая работа

Юхневич Полина Александровна
студента 3 курса,
специальность «экономическая кибернетика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эпидемии всегда были большой проблемой человеческого рода, и мы все еще взволнованы драматическими описаниями, которые приходят к нам из прошлого, как в шестой книге Лукреция "О природе вещей" ("De Rerum Natura") или в других более поздних описаниях, которые мы находим в литературе. " Черная смерть", чума, которая распространилась по Европе с 1347 по 1352 год и унесла 25 миллионов жизней, кажется, далека от нас, но недавние события напоминают нам, что эпидемии являются актуальной проблемой и сегодня.

В этой работе мы рассмотрим математические модели развития эпидемий в целом и более детально остановимся на Коронавирусе(COVID-19)//

Еще раз подчеркнуть цель работы (не повторять указанную в реферате).

Кратко изложить содержание работы, примерно в таком виде: В частности, в разд. 1 обосновано .... В разд. 2 исследуется ..... В разд. 3 продолжается исследование задач .... В разд. 4 эффективность предложенных методов иллюстрируется численными примерами... В заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы и даются рекомендации о перспективах дальнейших исследований по исследуемой тематике.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ ЭПИДЕМИИ

Первая глава всегда посвящена обзору литературы. В начале каждой главы необходимо написать небольшую аннотацию о содержании главы (так называемая *врезка*). Например:

В настоящей главе формулируются основные понятия, используемые в курсовой работе. Приводится классификация (согласно работе [?]) моделей развития эпидемий. Объясняется принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования [?] и в применении к задачам стабилизации нелинейных объектов согласно теории управления по прогнозирующей модели [?].

1.1 Базовые модели развития эпидемии: SI, SIS, SIR

Модель - это сущность, которая в определенных аспектах напоминает систему или объект, но с ней легче работать по сравнению с исходной системой. Модели используются для
1) идентификации и лучшего понимания систем,
2) моделирования поведения систем,
3) предсказания их будущего поведения,
4) управления системой.
Очевидно, что с каждым пунктом задача все усложняется. И хотя конечная цель состоит в том, чтобы контролировать систему, она не всегда достижима. Рассмотрим простую модель заражения(распространения инфекции) 1-ая волна: первый зараженный человек. Будем считать, что в он контактирует в k людьми. И вероятность с которой он заражает каждого из них р. 2-ая волна: Каждый зараженный из 1-ой волны встречает k новых людей и заражает из с вероятностью p. 3-я волна:... Население представимо в виде дерева This is Galton-Watson branching stochastic process

pk - среднее число зараженных от одного узла(verage number of secondary infections from one node) <Здесь нужно вставить деревья, но я не знаю как>

Число pk настолько важное, что получило собственное название

$$R_0 = pk \tag{1.1}$$

- индекс репродукции, среднее число новых инфицированных узлов/ людей на каждом шаге.

На n шаге среднее число инфицированных людей

$$R_0^n = (pk)^n \tag{1.2}$$

Если $R_0 > 1$, индекс репродукции будет расти геометрически, т.к. R_0^n. Если $R_0 < 1$, индекс репродукции будет геометрически убывать.

Когда $n \to t$, геометрический рост становится экспоненциальным. R_0- индекс репродукции, среднее число вторичных инфекций, возникающих при введении одного инфицированного индивидуума в принимающую популяцию, где все восприимчивы <Хотела вставить картинку, но не знаю как> Отсюда видно, что повлиять на распространение эпидемии ты можем двумя способами: 1) снизив вероятность заражения (мыть руки, надевать маски и т. д.), 2) сократив количество встреч с людьми (карантинные меры).

Начиная с самых ранних времен моделирования эпидемий, основными элементами описания инфекционных болезней были три эпидемиологических класса Восприимчивые(Susceptible), Инфицированные(Infected) и Выздоровевшие(Removed), которые можно описать как -люди, которые здоровы и могут заболеть -люди, которые инфицированы и способны распространять болезнь -люди, которые переболели и выработали иммунитет(или умерли). Таким образом, базовыми переменными, определяющими состояние населения во время эпидемии, являются: - S(t) число восприимчивых в момент времени t; - I(t) число инфицированных в момент времени t; - R(t) число невосприимчивых в момент времени t;

Разумеется, эпидемиологических классов, характеризующих заболевание, может быть больше, но приведенного выше описания вполне достаточно для описания простейших моделей.

Рассмотрим модель SI. Эта аббревиатура происходит от английских слов Susceptible — Infected (Восприимчивые - Инфицированные).

$S \to I$

$$S(t) + I(t) = N \tag{1.3}$$

β- скорость передачи/заражения, количество передающих контактов в единицу времени;

$T_c = 1/\beta$- время между передающими контактами

Уравнения заражения:

$$I(t+\delta t) = I(t) + \beta S(t)/N \cdot I(t)\delta t,$$

$$\dot{I} = \beta S(t)/N \cdot I(t) \tag{1.4}$$

Переобозначим:

$$i(t) = I(t)/N,$$

$$s(t) = S(t)/N$$

Получим уравнения:

$$\dot{i} = \beta s(t) i(t)$$

$$\dot{s} = -\beta s(t) i(t)$$

$$s(t) + i(t) = 1 \tag{1.5}$$

Дифференциальное уравнение:

$$i(t=0) = i_0$$

$$\dot{i} = \beta(1 - i(t))i(t) \tag{1.6}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i(t) = i_0/(i_0 + (1-i_0)e^{-\beta \cdot t})$$

Предел при $t \to \infty$

$$i(t) \to 1$$

$$s(t) \to 0$$

Рассмотрим модель SIS. Susceptible — Infected - Susceptible (Восприимчивые - Инфицированные - Восприимчивые).

$S \to I \to S$

$$S(t) + I(t) = N \tag{1.7}$$

β - скорость заражения, γ - скорость восстановления;

$T_r = 1/\gamma$- время восстановления

Уравнения заражения:

$$\dot{i} = \beta s(t) i(t) - \gamma i(t)$$

$$\dot{s} = -\beta s(t) i(t) + \gamma i(t)$$

$$s(t) + i(t) = 1 \tag{1.8}$$

Дифференциальное уравнение, $i(t=0)=i_0$:

$$\dot{i} = (\beta - \gamma - i(t))i(t) \tag{1.9}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i(t) = (1-\gamma/\beta)C/(C+e^{-(\beta-\gamma)t}),$$

где

$$C = \beta i_0/(\beta - \gamma - \beta i_0)$$

Предел при $t \to \infty$

$$\beta > \gamma, i(t) \to (1-\gamma/\beta)$$

$$\beta < \gamma, i(t) = i_0 e^{(\beta-\gamma)t} \to 0$$

Рассмотрим модель SIR. Susceptible — Infected - Recovered (Восприимчивые - Инфицированные - Выздоровевшие). Эта модель получила популярность в силу простоты построения и использования. Она позволяет точно моделировать эпидемии гриппа и других заболеваний (где выздоровевшие имеют иммунитет) в больших городах, вводить новые параметры и анализировать разные сценарии.

$S \to I \to R$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \tag{1.10}$$

β - скорость заражения, γ - скорость восстановления;

Уравнения заражения:

$$\dot{i} = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t)$$

$$\dot{s} = -\beta s(t)i(t)$$

$$\dot{r} = \gamma i(t)$$

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1 \tag{1.11}$$

Дифференциальное уравнение:

$$\dot{s} = -\beta s dr/dt 1/\gamma$$

$$s = s_0 e^(- \beta/\gamma r)\dot{r} = \gamma(1 - r - s_0 e^{-\beta/\gamma r} \tag{1.12}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$t = 1/\gamma \int_0^r dr/(1 - r - s_0 e^{-\beta/\gamma r},$$

Предел при $t \to \infty$, $dr/dt = 0$, $r_\infty = const$,

$$1 - r_\infty = s_0 e^{-\beta/\gamma r_\infty}$$

$$r_\infty = 1 - e^{R_0 r_\infty}, R_0 = \beta/\gamma$$

$$(r_\infty)'|_{r_\infty=0} = (1 - e^{-R_0 r_\infty})'|_{r_\infty=0}$$

критическая точка: $R_0 = 1$ r_∞ - общий размер вспышки Если $R_0 > 1, \beta > \gamma, r_\infty = const > 0$, эпидемия имеет место. Если же $R_0 < 1, \beta < \gamma, r_\infty \to 0$ β - скорость заражения, γ - скорость восстановления $\to$ Индекс репродукции $R_0 = \beta/\gamma = T_r/T_c$ - это среднее число зараженный человеком людей до его выздоровления

$$R_0 = E[\beta\tau] = \beta \int_0^\infty \gamma\tau e^{-\gamma\tau} d\tau = \beta/\gamma$$

....

1.2 Модель SEIR

Susceptible — Exposed - Infected - Recovered (Восприимчивые - Контактные - Инфицированные - Выздоровевшие). Под Контактными(Exposed(e)) понимаются зараженные люди, которые не могут распространять болезнь. По этой модели развиваются по-настоящему опасные эпидемии, поскольку длительный инкубационный период может препятствовать своевременному обнаружению заболевания.

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$$

$$\dot{s} = -(1-u)\beta si$$

$$\dot{e} = (1-u)\beta si - \alpha e$$

$$\dot{i} = \alpha e - \gamma i$$

$$\dot{r} = \gamma i$$

где α — это скорость, с которой индивид переходит из класса контактных в класс инфецированных и $s + e + i + r = 1$

1.3 Модель SIDARTHE

Каждая глава завершается краткими выводами. Разумный способ написания выводов — переписать (это значит использовать те же мысли, но не копировать фразы!) в утвердительной форме (рассмотрено, получено и т.д.) то, что написано во врезке.

ГЛАВА 2

НАЗВАНИЕ ГЛАВЫ

(Врезка) ...

2.1 Название раздела 1

......

2.2 Название раздела 2

.....

Не забываем делать выводы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе/ магистерской диссертации рассмотрена задача... . Для исследуемой задачи сформулировны/доказаны/предложены... Проведен анализ... Результаты проиллюстрированы численными экспериментами для ...

Привести краткие выводы и рекомендации по дальнейшему развитию или использованию результатов.

Объем примерно 0,7-1 стр.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Mathematical Modeling of Epidemics: basic SI/SIS/SIR models explained // [Электронный доступ: https://www.youtube.com/watch?v=IXkr0AsEh1w&t=2461s]

2 Abou-Ismail A. Compartmental Models of the COVID-19 Pandemic for Physicians and Physician-Scientists // SN Compr Clin Med. – 2020. – 1-7. [Электронный доступ: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7270519]

3 Giordano G. et al. Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population- wide interventions in Italy // Nature Medicine. – 2020. – P. 1-6.

4 Koehler J. et al. Robust and optimal predictive control of the COVID-19 outbreak // arXiv preprint arXiv:2005.03580. – 2020.