N 37.33 (б, в)

б) $x_1y_2 - x_1y_4 - x_2y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_4 + x_4y_1 - 3x_4y_3$

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

(+1) (+2)

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x_1'y_2' - x_2'y_1' + x_3'y_4' - x_4'y_3'$$

(+2)

в)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

(+1) (+1)

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

№37.35

$$h(f,g) = \int_0^1 f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx$$

$$\Downarrow$$

1) $h(f,f) = f^2(x)\Big|_0^1 - h(f,f)$

$$2h(f,f) = f^2(1) - f^2(0) = 0.$$

$$h(f,f) = 0$$

2) $h(g,f) = f(x)g(x)\Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 g'(x)f(x)dx}_{h(f,g)}$

$$\Downarrow$$

$$h(g,f) + h(f,g) = f(x)g(x)\Big|_0^1 = 0 - 0 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Базис: $x^2 - x = f_1(x) = x(x-1)$

$x^3 - x = f_2(x) = x(x-1)(x+1)$ через мн. ст. 2 $\Rightarrow$ ЛЗ.

$(x^4 - x) = f_3(x)$

мн-к: ≤ 1 степени быть не может т.к. 2 корня

если $f(x) = ax^2 + bx + c =$

$f(0) = c \Rightarrow c = 0.$

$f(1) = a + b + 0 = 0 \Rightarrow a = -b$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 - bx = ax(x-1). = a \cdot f_1(x)$

если $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f(1) = a + b + c = 0$

$a(x^3-x)+b(x^2-x) = ax^3+bx^2-\underbrace{(a+b)}_{=c}x =$

$= ax^3+bx^2+cx = f(x) \Rightarrow$ все ми-ов сл. 3

Вариант через $af_2(x)+b\cdot f_1(x)$.

если сл. = 4: $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+0$.

$a+b+c+d=0$ ан-но.

$$h(f_2,f_1) = \int_0^1 (x^3-x)\,2x\,dx = \frac{2x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{4}{15}$$

$$h(f_3,f_1) = \int_0^1 (x^4-x)\,2x\,dx = \frac{x^6}{3} - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$h(f_3,f_2) = \int_0^1 (x^4-x)(3x^2-1)\,dx = \frac{3x^7}{7} - \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{140}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4/15 & 1/3 \\ -4/15 & 0 & 3/140 \\ -1/3 & -3/140 & 0 \end{pmatrix}$$ ~ дальше приведется.

№ 38.2 Ц.

предп. $\exists U \le V$ $f|_U$ - вырожд. $\Rightarrow \exists \bar{u}\ \forall \bar{x}\ f(\bar{x},\bar{u}) = 0$.

$\Rightarrow f(\bar{u},\bar{u}) = 0$, $f(\bar{v},\bar{u}) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ (140) ← рассм.

$v_1^2+v_2^2+\dots+v_{k-1}^2+(-1)v_k^2 < 0$

$u_1^2+\dots+u_{k-1}^2+(1)u_k^2 = 0$

$(u_1^2+\dots+u_{k-1}^2)(v_1^2+\dots+v_{k-1}^2) \ge (u_1v_1+\dots+u_{k-1}v_{k-1})^2$

u_k^2 $\quad$ v_k^2

$\Rightarrow u_k v_k > u_1 v_1 + \dots + u_{k-1} v_{k-1} = u_k v_k$. противоречие

ч.т.к $f(u,v) = u_1 v_1 + \dots + u_{k-1} v_{k-1} - u_k v_k = 0$.

(5) №5.1

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$$

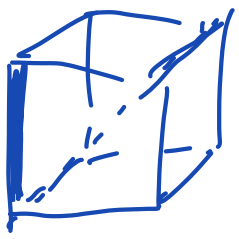
1) $\int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt = \int_{-1}^{1} g(t) f(t)\, dt$

2) $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \int_{-1}^{1} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) g(t)\, dt =$

$= \alpha \int_{-1}^{1} f_1(t) g(t)\, dt + \beta \int_{-1}^{1} f_2(t) g(t)\, dt = \alpha (f_1, g) + \beta (f_2, g)$.

3) $(f,f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt > 0$

№5.2



$$\cos\alpha = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$x_1 = (1, 0, \dots 0)$

$y_1 = (1, 1, \dots 1)$

№25.35

1) $|1\ 1\ 1\ 1|$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? $\cos 60^\circ$

2) $|-1\ -1\ -1\ -1| \Rightarrow (e_3, e_3) = 1$ – не может быть

3) да

4) $|0\ 1\ 0\ 1|$ – нет т.к. тогда $(e_3, e_3) = 0$

5) да $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 4 \end{pmatrix}$

$|e_3| = 1/2$.

Отсюда так: $\cos(e_1, e_3) = \cos(e_2, e_3) = \cos(e_4, e_3) = 60^\circ$

$|e_1| = |e_2| = |e_4| = 2$

e_1, e_2, e_4 – образуют базис