§ 32

№ 2(3)

$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2 \quad (n=3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$b(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_2 + 7x_3y_3 + 6x_2y_3 + 6y_2x_3.$

№ 5 (3,4)

3) $e_i \to e_i + \lambda e_j \quad (i \neq j).$

Пусть $b(e_i, e_k) = \alpha_k$, $b(e_j, e_k) = \beta_k$, $b(e_i e_j) = c$

$\Rightarrow b(e_i + \lambda e_j, e_k') = b(e_i e_k') + \lambda b(e_j, e_k') =$

$=$ 1) при $k \neq i$ $\quad \underline{\alpha_k + \lambda\beta_k}$

2) при $k = i$ $\quad b(e_i + \lambda e_j,\ e_i + \lambda e_j) =$

$= b(e_i, e_i) + 2\lambda b(e_i, e_j) + \lambda^2 b(e_j, e_j) =$

$= \underline{\alpha_i^2 + 2\lambda c + \lambda^2 \beta_j}.$

$\Rightarrow$ в строка и столбцах добавится эл-ты строк и столбцов на диаг, а в т. (i,i) будет $\alpha_i^2 + 2\lambda c + \lambda^2 \beta_j$

4) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{22} & & \\ & & & \\ a_{n,1} & & & a_{nn}' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{nn} & & & a_{n,1} \\ & a_{n-1,n-1} & & \\ & & \ddots & \\ a_{1,n} & & & a_{11} \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$

i.e. отражение отн. побочной диагонали.

т.к $a(i,j) \to a(n-i, n-j)$

№ 7(5)

$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \qquad e_i' = e_i + e_{i+1} + \dots + e_n$

было:

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

матр. перехода:

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$S^T B S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & 1/2 & \\ & & & \ddots & 1/2 \\ & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & \dots & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ & & & & \\ 0 & \dots & & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-\frac{3}{2} & n-\frac{5}{2} & & \\ n-\frac{3}{2} & n-2 & n-2\frac{1}{2} & & \\ n-\frac{5}{2} & n-\frac{5}{2} & n-3 & & \\ \vdots & & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ф-ция: $(n-1)x_1'^2 + (n-2)x_2'^2 + \dots + x_{n-1}'^2 + (2n-3)x_1'x_2' + (2n-5)x_1'x_3' + (2n-5)x_2'x_3' + \dots + (2n-2j+1)x_i'x_j'$.
$(j>i)$

№8 (4, 10, 14, 16)

4) $25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2 = (5x_1+3x_2)^2 = x_1'^2$.

$$x_1' = 5x_1 + 3x_2.$$

$\Rightarrow$ $rg = 1$. полож. ind $= 1$
$\sigma = 1$ отр. ind $= 0$.

10) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = (3x_1 - 2x_2 - x_3)^2 =$
$= x_1'^2$ аналог $rg = 1$ полож ind $= 1$
$\sigma = 1$ отр ind $= 0$

14) $x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_5 + x_4^2 - 2x_4x_6 + x_5^2 + x_6^2 =$

$= (x_1 - x_3)^2 + (x_3 - x_5)^2 - x_3^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_4 - x_6)^2 - x_4^2.$

$rg = 4+2 = 6$ положит. инд $= 4$

$\sigma = 4-2 = 2$ отр. инд $= 2$.

16) $x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -(x_1 - \frac{1}{2} x_2)^2 - (x_2 - \frac{1}{2} x_3)^2 - \frac{1}{2} x_2^2 =$

$rg = 3$. положит. ind $= 0$ $= -(x_1')^2 - (x_2')^2 - (x_3')^2$

$\sigma = -3$. отр ind $= 3$.

№ 9 (4, 10, 15)

4) если $\dim \geq 2$, то т.к. $p = 1$, $q = 0 \Rightarrow$ есть ноль благ. ноль на диаг. $\Rightarrow$ полуполож.

если $\dim = 1$, то полож. опр.

10) при $\dim \geq 2$ – полуполож, при $\dim = 1$ полож.

15) $x_1 x_2 + 2x_2 x_3 - 3x_3 x_4 = x_2(x_1 + x_3) + x_3(x_2 - 3x_4) =$

$x_1' = \frac{x_1 + x_3 + x_2}{2}$

$x_2' = \frac{x_2 - x_1 - x_3}{2}$

$x_3' = (x_3 - x_2 + 3x_4)/2$

$x_4' = (x_3 + x_2 - 3x_4)/2$

$= (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') + (x_3' + x_4')(x_3' - x_4') = x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2$

$\mathrm{rg} = 4 \qquad p = 2$

$\sigma = 2 \qquad q = 2$.

$\Rightarrow$ это не полож, не отр, не полупол, не полуотр.

№32.18(4)

$x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2x_3 =$

$= (x_1 + \lambda x_2 + x_3)^2 - \lambda^2 x_2^2 - x_3^2 - 2\lambda x_2 x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 +$

$+ 2x_2x_3 = x_1'^2 + (4-\lambda^2)x_2^2 + 2(1-\lambda)x_2x_3 + (-1-\lambda)x_3^2 =$

$= x_1'^2 + (x_2 + (1-\lambda)x_3)^2 + (4-\lambda^2)x_2^2 - x_2^2 + (-1-\lambda)x_3^2 + (1-\lambda)^2 x_3^2 =$

$= (x_1')^2 + (x_2')^2 + (3-\lambda^2)x_2^2 + (2(1+\lambda^2))\,x_3^2$.

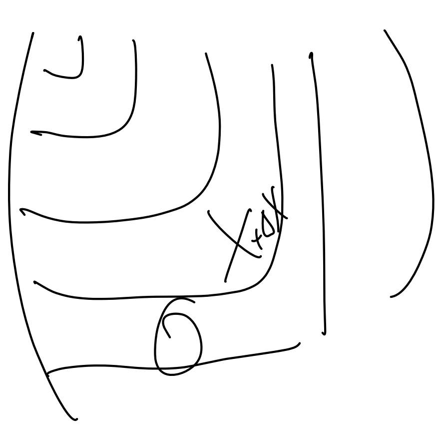
$\mathrm{rg} = 4$ полож: $3-\lambda^2 > 0$, $1+\lambda^2 > 0$ если $\dim = 4$ $\lambda \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. $\lambda = \pm\sqrt{3}$ если $\dim = 3$.

отр: не бывает.

полуполож: $\lambda = \pm\sqrt{3}$. если $\dim \geq 4$

№ 32.20(1,2).

1)



i

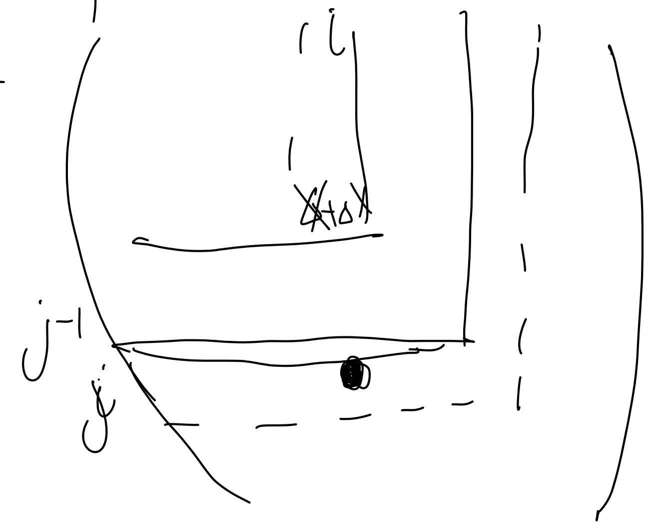
X – увеличили

т.к матрица полож опр., то все $\Delta_j > 0$. Посмотрим тогда как изменится главный?

минор в x. $\Delta_i' = \Delta_i + (x'-x)\Delta_{i-1}$ $\Rightarrow$ увеличился.

остальные главные миноры: если $j<i$, то не изменились.

Если $j>i$. почти все подминоры увеличили неск. своих слаг в Δx $\Rightarrow$ т.к. Δ_j был >0, то он и остался >0, причем увеличился на Δx. $\Rightarrow$ не изменились только те, осн. эл-т кот. стоит на $\cancel{з}$. вообще j. т.е



все подминоры кроме того, на что умнож a_{ji} увел на что-то, это не изменится $\Rightarrow$ минор увеличился.

$\Rightarrow$ конечный минор т.е $\det|A|$ увеличился.

2) предп. он ≤ 0, $\Rightarrow$ все $a_{ij} \leq 0$, тогда умножим матрицу на -1. det тоже умножится на -1. и $\forall$ минор тоже. но тогда т.к все числа стали ≥ 0 $\Rightarrow$

Все их миноры > 0 ⇒ форма осталась полож. опред., причем det > 0, но он был > 0.
Противоречие.

№32.21 (1)

$k(X) = tr(X^T X)$ – пол. опр. кв. ф-ция.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ & & \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

$$tr(X^T X) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

причем = 0 т.е. все эл-ты = 0.

⇒ полож. опр. кв. форма.