№ 28.19 (5)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{\varphi} = \Gamma^{-1} A^{T} \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 28.27

$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^{*}(y))$

т.к A - диагонализ., то $A = BDB^{-1}$

$$A^{\varphi} = (BDB^{-1})^{*} = (BDB^{-1})^{T} = B^{-1 T} \cdot \underbrace{D^{T}}_{\text{диаг.}} B^{T}$$

$\Rightarrow A^{\varphi}$ тоже диагонализ. Сд

№ 28.36.

φ, φ^{*}

$\ker \varphi_{\lambda} \perp \ker \varphi^{*}_{\lambda_1} \quad \lambda \neq \lambda_1.$

$(\varphi(u), v) = \lambda (u, v) = (u, \varphi^{*}(v)) = \lambda_1 (u, v).$

$u \in \ker \varphi_{\lambda} \quad v \in \ker \varphi^{*}_{\lambda_1}$

но тогда $(u, v) = 0$

или $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow$

т.к $\lambda_1 \neq \lambda_1$, то $(u, v) = 0 \Rightarrow$ ортог.

№28.4.

Пусть $\varphi(e_1) = \lambda_1$ $\qquad \varphi(\neq 0)$ - нильп, пусть высота $= n$.

Рассм. СЗ λ_1

$$(\varphi(e_1), e_1) = \lambda_1 (e_1, e_1) = \lambda_1 \|e_1\|^2.$$

$$(\varphi(\lambda e_1), e_1) = \lambda^2 (e_1, e_1) ..$$

$$\vdots$$

$$(\varphi^n(e_1), e_1) = \lambda^n (e_1, e_1)$$, но $\varphi^n(e_1) = 0 \Rightarrow$

$$(\varphi^n(e_1), e_1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ все СЗ $= 0$

(т.к. опер. нильп, то все ЖК размера 1) $\Rightarrow$ все зануляется.

№28.14 (2,3)

2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (-x)(-1-x) + 1 = \underbrace{x^2 + x + 1}_{}$

нет вещ. корней

$\Rightarrow$ не может.

3) $\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (5-x)(13-x) - 84 = x^2 - 18x + 19 = (x-19)(x+1)$

может ✓

2) 28, 19 (3, 7, 13)

3) A_{28}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(9-x)^2 - 36 = 0$$

$$(9-x-6)(9-x+6) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 18$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A = QS$$

$$S = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad ✓$$

7) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ симм, те же X.

$$M_6 = (1-x)\left(\overset{16-x^2-17x}{(16-x)(1-x)} - 16\right) + 4\left(\overset{+4x}{-4(1-x)} + 4\right) + (16 - (16-x)) =$$

$$= x^2 - 17x - x^3 + 17x^2 + 16x + x =$$

$$= -x^3 + 18x^2 = x^2(x-18)$$

$x=0 \quad x=18$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_3 = -1$

$x_2 = 1 \quad x_1 = 0 \quad x_3 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -17 & -4 & 1 \\ 0 & -18/17 & 72/17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0 \quad x_3 = 1$

$x_1 = 17. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -72 \\ 18 \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

остав.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} - \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{18} \\ +4/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18}. \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} - \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 1 + 4/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

далее ан-но

№29.37 (1,2)

1) $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi^{**} = \varphi^*\varphi \Rightarrow$ самосопр.

$(\varphi^*\varphi(u), u) = (\varphi(u), \varphi^{**}(u)) = (\varphi(u), \varphi(u)) = |\varphi(u)|^2 \geq 0$

↑ сд

2) $\ker \varphi^*\varphi = \ker\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi^*\varphi = \operatorname{Im}\varphi^*$

$\varphi(u) = 0.$

$(\varphi^*\varphi(u), v)) = 0. \Rightarrow u \in \ker(\varphi^*\varphi)$

если $u \in \ker \varphi^*\varphi$

$0 = (\varphi^*\varphi(u), u) = \varphi(u), \varphi(u)) = |\varphi(u)|^2 \Rightarrow$

$\varphi(u) = 0$

$\operatorname{Im}\varphi^*\varphi = \operatorname{Im}\varphi^*.$

пусть $u \in \operatorname{Im}\varphi^*\varphi$

$\Rightarrow \exists v : \varphi^*\varphi(v) = u.$

у I:

$(\varphi^*\varphi(u), v) = (u, \varphi^*\varphi(v)) = (u, u).$

$\varphi(v) = f \Rightarrow \varphi^*(f) = u$

$\Rightarrow u \in \operatorname{Im}\varphi^*$

ан-но обратно.

№29.47(3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} B \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ если правда

1) $\left(\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\\-1, & -1\end{pmatrix} = 0$ ✓

$\parallel$

$1-1=0$

2) $\left(\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -3\\-1, & -6\end{pmatrix} = 3$ ✓

$\parallel$

3

3) $\left(\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}3\\-6\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & -3\\-1 & -6\end{pmatrix} = 9$ ✓

$\parallel$

$3+6=9$

$\Rightarrow$ да, является

№ 28.50 (3)

$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda E) = (-\lambda)^4+1 = \lambda^4+1 = \underset{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}\underset{2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

$\lambda^4 = -1.$

$e^{4i\varphi} = \cos\pi + i\sin\pi.$

2) $(1+i)/\sqrt{2} = \quad \varphi = \cos\pi/4 + i\sin\pi/4$

1) $(-1+i)/\sqrt{2} = \quad \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

1) $(-1-i)/\sqrt{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)$

2) $(1-i)/\sqrt{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\pi\right)$

$\Rightarrow A' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & \frac{-1-i}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & \frac{-1-i}{\sqrt2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & \cancel{\frac{2i}{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1+i}{\sqrt2} \end{pmatrix} \sim$$

$1+i^2+2i$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & 0 & \frac{-1-i}{\sqrt2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+i}{\sqrt2} & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 1 \quad x_3 = \frac{i-1}{\sqrt2} \quad x_2 = -i \quad x_1 = \frac{-1-i}{\sqrt2}$

$\frac{-1+i}{\sqrt2} x_3 + i = 0$

$x_3 = \frac{-i\sqrt2}{-1+i} = \frac{-i\sqrt2(1+i)}{2} = \frac{i-1}{\sqrt2}.$

$\frac{-1+i}{\sqrt2} x_1 - 1 = 0$

$x_1 = \frac{\sqrt2}{-1+i} = \frac{-1-i}{\sqrt2}$

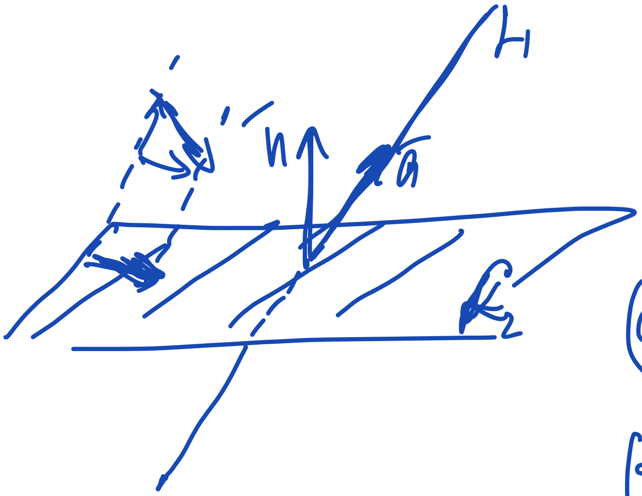
$\operatorname{Re} x: \left(-\frac{1}{\sqrt2}, 0, -\frac{1}{\sqrt2}, 1\right).$

$\operatorname{Im} x: \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -1, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right).$ ал-но следующие

Будет: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt2 & 0 \\ 0 & -\sqrt2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \sqrt2 \\ \sqrt2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Т.3.

з) проектир. на $\mathcal{L}_2 \parallel a$. a, n - ненул в-ры. $(a,n) \neq 0$.
$\mathcal{L}_1$ - прямая с напр в-ром a $\mathcal{L}_2$ - пл-ть с норм. в-ром n.



φ — проектир. на $L_2 \parallel a$.

$\varphi(v) = \bar{v} - pr_{\bar{a}} \bar{v}$

$(\varphi(v), u) \overset{?}{=} (v, \varphi(u))$

$\parallel$

$(v - pr_a \bar{v}, u) = (v, u) - (pr_a v, u) =$

$= (v, u) - \left(\frac{(a, v)}{|a|^2} \bar{a}, u\right) = (v, u) - \frac{(a, v)}{|a|}(\bar{a}, u) =$

по тому же самому $= (v, \varphi(u))$.

$\Rightarrow$ самосопр.

$(\varphi(v), \varphi(u)) \overset{?}{=} (v, u)$

$(\varphi(v), \varphi(u)) = \left(v - \frac{(v,a)}{|a|^2}\bar{a},\ u - \frac{(u,a)}{|a|^2}\bar{a}\right) =$

$= (v, u) - \frac{2(u,a)(v,a)}{|a|^2} + \frac{(v,a)(u,a)}{\cancel{|a|^2}} \cdot \cancel{|a|^2} \neq (v, u) \Rightarrow$ не ортог.

7) отраж. в $L_2 \parallel a$.

— это будет все со знаком — $\Rightarrow$ ~~анал~~ тоже н.з.