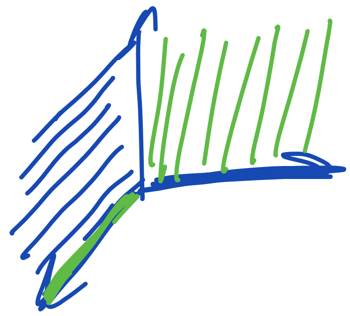
б) №26.6

$\mathcal{L}_1$ орт $\mathcal{L}_2$ нет.

$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ и $\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ - орт. пр-ва

но $\mathcal{L}_1^{\perp} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{L}_2^{\perp} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Big\}$ они не орт



№26.13(3)

$\begin{pmatrix}3\\-15\\9\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\\2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}3x_1 - 15x_2 + 9x_3 + x_4 = 0\\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\end{cases} \Rightarrow$ a) $\begin{pmatrix}3 & -15 & 9 & 1\\ 3 & -6 & -3 & 2\end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix}3 & -15 & 9 & 1\\ 3 & -6 & -3 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3 & -15 & 9 & 1\\ 0 & -9 & 12 & -1\end{pmatrix}$

1) $x_2 = 1$ $x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = -9$, $3x_1 - 15 - 9 = 0$
$x_1 = 8$ $\Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix}8\\1\\0\\-9\end{pmatrix}$.

2) $x_2=0 \quad x_3=1 \Rightarrow x_4=12, \quad 3x_1+9+12=0$
$x_1=-7$ $\Rightarrow e_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

№26.16(4)

$A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (x,y)=\xi^T\Gamma\eta$

$A\sim\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=$

1) $x_2=1 \quad x_3=0, x_4=1 \quad x_1=2$
2) $x_2=0 \quad x_3=1 \Rightarrow x_4=-1 \quad x_1=-1$

$=(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{cases} \sim \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

$y_2=1 \quad y_3=0 \quad y_4=1$
$y_1=-2$
$y_2'=0 \quad y_3'=1 \quad y_4'=1$
$y_1'=1$

$\Rightarrow$ базис в $L^{\perp}$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

№ 26.28 (5)

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1 \quad x_4 = 1. \Leftrightarrow$ пр-ние на $L^{\perp}$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

пр на L: $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{-2+4-2+6}{(1+1+1+1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{matrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3,5 \\ 2,5 \\ 3,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}.$

№ 26.42 (2,6)

2) $|2\ 1\ 0\ -1|^T \quad |3\ 6\ 2\ 6|^T$

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{6+\cancel{6}-\cancel{6}}{4+1+1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

6) $(1\ 2\ 1\ 2)^T \quad (4\ 0\ 4\ 1)^T \quad (1\ 13\ -1\ -3)^T$

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} \qquad e_2=\begin{pmatrix}4\\0\\4\\1\end{pmatrix}-\frac{4\cancel{+4}+2}{1+\cancel{4+1}+4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}}$$

$$e_3=\begin{pmatrix}1\\13\\-1\\-3\end{pmatrix}-\frac{1\overset{2}{\cancel{+26-1-6}}}{1+\cancel{4+1}+4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{3-26-\cancel{3}\cancel{+3}}{9+4+9+1}\begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\13\\-1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\0\\-8\end{pmatrix}$$

№26.51(1)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\ &1&0&0\\ 0&1&0&\\ 0&0&1&\end{pmatrix} \qquad \Gamma=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix} \qquad \det\Gamma=5$$

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{(1\ 0)\overset{\binom{1}{2}}{\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{(1\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{(1\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}{1}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{(1100)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{(1100)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

$$V = \sqrt{\left(1+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)}\cdot\sqrt{(1+1)}\cdot\sqrt{1} = \sqrt{5}$$

№ 27.12(5)

$$(2+i \quad 0 \quad 1+2i)\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 2 & -i\\ 0 & i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+i\\1\\2-i\end{pmatrix} =$$

$$= (2+i \quad 3i-2 \quad 2+4i)\begin{pmatrix}2+i\\1\\2-i\end{pmatrix} = \begin{matrix}+(3+4i)\\+(-3+3i)\\+(8+6i)\end{matrix} = 8+13i.$$

№ 27.20

$Rg(A^T\bar{A}) = Rg\,A$

пусть $Rg(A)=k$, $k\le n$, $\dim(A)=n$.

$$\begin{array}{c} \\ k\left\{ \right. \end{array}\begin{pmatrix} \overbrace{A'}^{k} & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

пусть это матрица A',
тогда $Rg(A'^T) = Rg(A') = k$.
$Rg\, A^T$ тоже очевидно $= k$
$Rg\, \bar{A}$ тоже равен k.

$$A^T = \begin{pmatrix} A'^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

$$A^T \bar{A} = k\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{A'}^{k} & B \\ C & D \end{pmatrix}\right. k\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{\bar{A'}}^{k} & B \\ C & D \end{pmatrix}\right. = k\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{A_2}^{k} & * \\ * & * \end{pmatrix}\right.$$

$rg\, A_2 = k$ т.к она явл. произв $A' \cdot \bar{A'}$ и их $\det \neq 0$

причем мы знаем что при произв ранг не увелич. $\Rightarrow$ $rg\, A \leq rg(A^T \cdot \bar{A})$, то $rg\, A = k$,
$rg(A^T \cdot \bar{A}) \geq k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ их $\underline{rg = k}$ чтд

№27.28(5)

$e_1 = (1+i, 2+i, 1-i)$ I

$$e_2=\begin{pmatrix}-2\\4+i\\1-i\end{pmatrix}-\frac{\left(\left(1+i,2+i,1-i\right),\overset{-2,\,4-i,\,1+i}{\left(-2,4+i,1-i\right)}\right)}{2+5+2}\begin{pmatrix}1+i\\2+i\\1-i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\4+i\\1-i\end{pmatrix}-\frac{-2\cancel{-2i}+9\cancel{+2i}\cancel{+2}}{9}\begin{pmatrix}1+i\\2+i\\1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-i\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$e_3=\begin{pmatrix}1\\2+i\\2-i\end{pmatrix}-\frac{\left(\left(-3-i,2,0\right),\left(1,2+i,2-i\right)\right)}{10+4}\begin{pmatrix}-3-i\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{\left(\left(1+i,2+i,1-i\right),\left(1,2+i,2-i\right)\right)}{2+5+2}\begin{pmatrix}1+i\\2+i\\1-i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2+i\\2-i\end{pmatrix}-\frac{\overset{1+i}{-3-i+4+2i}}{14}\begin{pmatrix}-3-i\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{\overset{2i+7}{1+i+3+4i+3-3i}}{9}\begin{pmatrix}1+i\\2+i\\1-i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2+i\\2-i\end{pmatrix}-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2-4i\\2+2i\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5+9i\\12+11i\\9+5i\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{домножим.}}\begin{pmatrix}2i\\1+3i\\-7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ОНБ}:\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i\\2+i\\1-i\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-3-i\\2\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{3\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2i\\1+3i\\-7\end{pmatrix}.$$