§20

№2(5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{4n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (z^4)^n}{n^2} \qquad t = z^4$$

$$\frac{1}{R_t} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = 2 \Rightarrow R_t = \frac{1}{2}.$$

$|z^4| = |t| < \frac{1}{2}$ - сх-ся $\Rightarrow z < \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ сх-ся

$> \frac{1}{2}$ - расх

$R = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

№3.6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\dots(2-\sqrt[n]{e})z^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2-\sqrt{e})\dots(2-\sqrt[n+1]{e})}{(2-\sqrt{e})\dots(2-\sqrt[n]{e})} = \lim_{n\to\infty}(2-\underbrace{\sqrt[n+1]{e}}_{\to 1}) = 1$$

$R = 1$

№5.(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot z^n}{(1+i)(1+2i)\dots(1+ni)}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{(1+i)\dots(1+ni)}}{\cancel{(1+i)\dots(1+ni)}(1+(n+1)i)\,\cancel{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{1+(n+1)i} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+(n+1)^2}} = 1$$

$\Rightarrow R = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^x$

№8(4)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) x^n \quad a > 0$

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sqrt[n]{a} - 1|} \overset{?}{=} 1.$

$\sqrt[n]{|a - 1|} = |a^{\frac{1}{n}} - 1|^{1/n} =$

$= e^{\ln|a^{\frac{1}{n}} - 1| \cdot \frac{1}{n}} = e^{\ln|\underbrace{e^{\ln a \cdot \frac{1}{n}}}_{1 + \ln a \cdot \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} - 1| \cdot \frac{1}{n}} \sim$

$\sim e^{\ln|\frac{\ln a}{n}| \cdot \frac{1}{n}} \sim e^0 = 1.$

т.к. $\lim\limits_{t\to 0} \ln t \cdot t = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln t}{1/t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t \cdot (-\frac{1}{t^2})} = 0$

$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ на $(-1; 1)$ - сх-ся.

при $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \cdot (-1)^n$ $\quad \underset{\text{удовл.}}{(\sqrt[n]{a} - 1) \to 0}$ $\Rightarrow$ по призн. Лейбница сх-ся.

при $x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ — расх-ся. $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)(-1)^n$ — сх-ся условно.

§4

№6(9)

$\frac{5 - 3x}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{5 - 3x}{(2x - 1)(x + 3)} = \frac{\alpha}{(2x - 1)} + \frac{\beta}{(x + 3)} =$

$\alpha(x + 3) + \beta(2x - 1) = 5 - 3x$

$\alpha + 2\beta = -3 \qquad \alpha = 1$

$3\alpha - \beta = 5 \qquad \beta = -2$

$$= \frac{1}{(2x-1)} - \frac{2}{(x+3)} = -\left(\frac{1}{1-2x}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right) =$$

$$= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n + \frac{2}{3}(-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}\right)x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-2^n + \frac{2}{3}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}\right)x^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|-2^n + \frac{2}{3}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}\right|} = 2 \Rightarrow R = 1/2.$$

N 10 (5)

$$\ln \frac{2x-3}{3x^2+x-10} = \ln\left(\frac{|2x-3)|}{|(3x-5)(x+2)|}\right) = \ln(|2x-3|) - \ln(|3x-5|) -$$

$$-\ln(|x+2|) = \ln(3) + \ln\left(1-\frac{2x}{3}\right) - \ln(5) - \ln\left|1-\frac{3x}{5}\right| - \ln(2) -$$

$$-\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{10}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n}{n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)x^n}{n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n} =$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{3}{5} \qquad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = \frac{3}{2} \qquad R_2 = \frac{5}{3} \qquad R_3 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{3}{2}.$$

№11(б)

$$x\cos^3 2x = x\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\cos 2x = \frac{x\cos 2x}{2} + \frac{x\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{x\cos 2x}{2} + \frac{x\cdot 1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{3}{4}x\cos 2x + \frac{x\cos 6x}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}(3+3^{2n})\cdot x^{2n+1}}{4\cdot(2n)!}$$

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}} = 0 \qquad \frac{1}{R_2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n 6^{2n}}{(2n)!} = 0$$

$$R_1 = +\infty \qquad R_2 = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$R = +\infty$$

№19(8)

$$(x+1)\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3+x} \qquad x_0 = -1 \qquad x+1 = t$$

$$\parallel$$

$$t\operatorname{arctg}\frac{t-2}{t+2}$$

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\right)' = \frac{1\cdot((t+2)-(t-2))}{\left(1+\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2\right)(t+2)^2} = \frac{4}{(t+2)^2+(t-2)^2} = \frac{4}{2t^2+8} =$$

$$= \frac{1}{\frac{t^2}{2}+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{4}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}} \qquad \boxed{\operatorname{arctg} 0 = 0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{t-2}{t+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}$$

$t\,\mathrm{arctg}\,\frac{t-2}{t+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{2^{2n}(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} t^{2n}}{2^{2n-1}(2n-1)}$ $\quad y=t^2$

$\frac{1}{R_y} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)}} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_y = 4,\ \Rightarrow R_t = 2.$

№27 (2)

$\mathrm{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ $\qquad \mathrm{arctg}(1) = \pi/4$

$\left(\mathrm{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\left(1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}\,\cancel{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}} = \frac{1}{2(1+x^2)}$

$1+x^2+\cancel{2x}\sqrt{1+x^2}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

$\Rightarrow \mathrm{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2(2n-1)}$

$\frac{1}{R} = \sqrt[n]{\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)\cdot 2}} = 1 \Rightarrow R = 1$

№58 (3)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cancel{n}\cdot x^{3n}}{\cancel{n!}_{(n-1)!}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!} =$

$= 3x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!} = \left| t = x^3 \right| = 3x^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} +$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 3x^3 \cdot e^t + e^t = 3x^3 e^{x^3} + e^{x^3} = \underline{(3x^3-1)e^{x^3}}$$

№80

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1) Д-ем, что для $\forall m$ $f^{(m)}(x)$ существует.

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$$

Док-ем по индукции, что $f^{(k)}(x)$ имеет вид $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P(x)$, где $P(x)$ - др. рац. ф-ция. Тогда это будет значить, что $f^{(m)}(x)$ $\exists$ для $\forall m$.

Пусть $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_k(x)$

$$f^{(k+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \underbrace{\frac{2}{x} \cdot P_k(x)}_{\text{др. рац}} + e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \underbrace{P_k'(x)}_{\text{др. рац}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{k+1}(x),$$

$\Rightarrow P_{k+1}(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{a}{x^{k+1}} + \frac{a \cdot (k+2)}{x^{k+3}} = \frac{a \cdot k}{x^{k+3}} \Rightarrow$ каждый раз знаменатель умножается на $x$.

$\Rightarrow f^{(m)}(x)$ вида $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{t}{x^{k+2}}$.

при $x=0$ докажем по инд-ции, что $f^{(m)}(0)=0$.

База: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{1}=0$

переход: $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(k-1)}(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{t}{x^{k+1}}}{1}\overset{(*)}{=}0.$

$\Rightarrow f^{(m)}(0)=0\quad\forall m.$

$\Rightarrow\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)(x-0)^n}{n!}=0\neq f(x)$ при $x\neq 0$. Чтд

$(*)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^{k+1}}\right)=\lim\limits_{y\to\infty}e^{-y^2}\cdot y^{k+1}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^{k+1}}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{(k+1)y^k}{e^{y^2}\cdot 2y}=$

$=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{(k+1)y^{k-1}}{2e^{y^2}}=\ldots=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{c\cdot y^0}{e^{y^2}}=0$