T8.

f – измерима $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ 1) $\forall \varepsilon$ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ – измеримо

$[a,b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{[a+\frac{1}{2^n}; b-\frac{1}{2^n}]}_{\text{измер}}$ $\Rightarrow$ объед. измер $\Rightarrow$

$[a,b]$ – измер.

2) $\forall c\ \forall \varepsilon$: $\{x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \mid f(x) < c\}$ – измеримо

$E = \{x \in [a,b] \mid f(x) < c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{E_n}_{\text{изм}}$ $\Rightarrow$ f – измер

измер

и так для $\forall c$.

$\Rightarrow f$ изм. на $[a,b]$.

$(E_n = \{x \in [a+\frac{1}{2^n}, b-\frac{1}{2^n}] \mid f(x) < c\})$

T10

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – изм. по Лебегу

Док: мера гр-ка $= 0$.

1) Разбиваем всю пл-ть на квадраты 1×1.

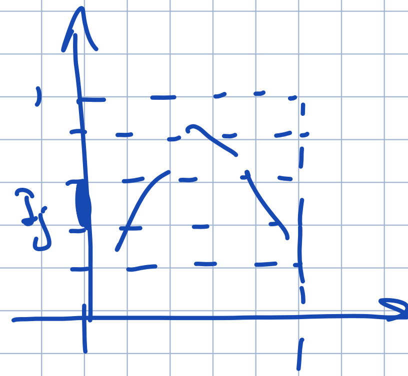
Если докажем, что внутри одного квадрата $\mu(\Gamma') = 0$, то т.к. $\Gamma = \bigcup\limits_{m,n \in \mathbb{N}} \underbrace{\Gamma \cap ([m, m+1] \times [n, n+1])}_{\mu = 0}$, то

и $\mu(\Gamma) = 0$

Б.о.о. рассм. квадрат $[0,1] \times [0,1]$

· Фиксируем $\forall k \in \mathbb{N}$

$$I_j = \left[\frac{j}{k}; \frac{j+1}{k}\right] \quad j = 0, 1, \dots k-1$$



$$\tilde{I}_j = \underbrace{\left(-\infty; \frac{j+1}{k}\right] \cup \left[\frac{j}{k}; +\infty\right)}_{\text{борел. мн-в}}$$

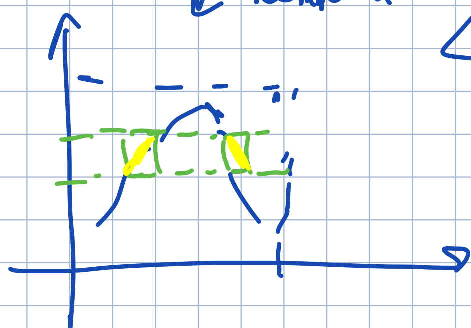
$\Rightarrow f^{-1}(I_j) \subset \mathbb{R}^1_x$ — измер

$\Rightarrow$ по кр. измеримости $\exists\ M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^1_x$:

$$\mu^*(f^{-1}(I_j) \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\mu^*(\underbrace{\Gamma' \cap ([0,1] \times I_j)}_{\text{жёлтый}}) \le \mu^*(f^{-1}(I_j) \times I_j) \le$$

зеленый



$$\le \mu^*((f^{-1}(I_j) \triangle M_\varepsilon) \times I_j) + \mu^*(M_\varepsilon \times I_j) \le \frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{k}\mu^*(M_\varepsilon) \le$$

$$\varepsilon + \frac{1}{k}\mu^*(M_\varepsilon) \le \frac{1}{k}\mu^*(f^{-1}(I_j)) + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \mu^*(\Gamma' \cap ([0,1] \times I_j)) \le \frac{1}{k}\mu^*(f^{-1}(I_j))$ т.к. ε — $\forall$.

$$\mu^*(F_{90}) = \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} \Gamma' \cap ([0,1] \times I_j)\right) \le \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mu^*(f^{-1}(I_j))}{k} \le \frac{1}{k}\mu([0,1]) = \frac{1}{k}$$

т.к. k-произв, то $\mu^*(F_{0,0})=0$

$\Rightarrow F_{0,0}$ - измер $\Rightarrow \mu(F_{0,0})=0 \Rightarrow \mu(\Gamma)=0$

(т.к. $\Gamma=\bigcup_{m,n} F_{m,n}$).

T_{11}

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - дифф-ма везде

Д-ть: f' - измер. по Лебегу

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{1/n}$$

$f(x)$ - дифф-ма $\Rightarrow f(x)$ - непрер $\Rightarrow f$ как композ. непрер и id - измер

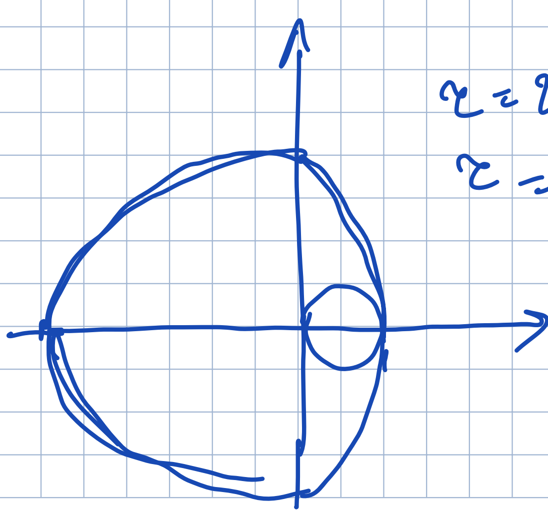
$f(x)$ - изм $\Rightarrow f(x+\frac{1}{n})$ - изм $\Rightarrow f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ - изм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{1/n}$ - изм.

$f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}$ (измер) $\Rightarrow f'(x)$ - измер.

§7

№34(2).



$r=2-\cos\varphi \leftarrow S_2$

$r=\cos\varphi \leftarrow S_1$

$S=S_2-S_1$

1) $S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

2) $S_2 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2-\cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi}(4-4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$

$= (4\varphi-4\sin\varphi)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = 4\pi + \left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} =$

$= 4\pi + \frac{\pi}{2}.$

$S = S_2 - S_1 = 4\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}.$

№ 65 (9)

$y = \frac{1}{3}\cdot x\sqrt{x+3} \qquad 1 \le x \le 6$

$S = \int_1^6 \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$y' = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{x+2}{2\sqrt{x+3}}.$

$1+y'^2 = 1 + \frac{(x+2)^2}{4(x+3)} = \frac{4(x+3)+(x+2)^2}{4(x+3)} = \frac{(x+2)^2+4(x+2)+4}{4(x+3)} =$

$= \frac{(x+4)^2}{4(x+3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \int_1^6 \sqrt{\frac{(x+4)^2}{4(x+3)}}\,dx \overset{\text{т.к. } x+4>0,\ x+3>0}{=} \frac{1}{2}\int_1^6 \frac{x+4}{\sqrt{x+3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+3}=a \\ x=a^2-3 \\ dx = 2a\,da \\ x+4 = a^2+1 \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{a^2+1}{\cancel{a}} \cancel{2a}\, da = \int_2^3 (a^2+1)\, da = \frac{a^3}{3} + a \Big|_2^3 =$$

$$= \frac{27}{3} + 3 - \frac{8}{3} - 2 = 9 + 1 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}.$$

№ 72(10)

$x = t^2\cos t \quad y = t^2\sin t \quad 0 < t \le 1$

$x' = 2t\cos t - t^2\sin t \quad y' = 2t\sin t + t^2\cos t$

$$x'^2 + y'^2 = t^2(2\cos t - \sin t \cdot t)^2 + t^2(2\sin t + t\cos t)^2 =$$

$$= t^2(4\cos^2 t + t^2\sin^2 t - \cancel{4t\cos t\sin t} + 4\sin^2 t + t^2\cos^2 t + \cancel{4\cos t\sin t\, t}) =$$

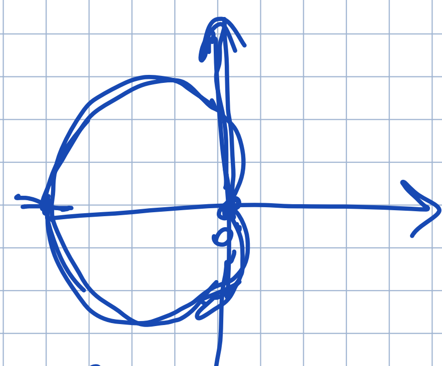
$$= t^2(4 + t^2)$$

$$S = \int_0^1 t\sqrt{4+t^2}\, dt = \frac{(4+t^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{5\sqrt{5}-8}{3}$$

№ 82(3)

$r = a(1 - \cos\varphi)$

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi =$$



$$r^2 + r'^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2 \cdot \sin^2\varphi = a^2 - 2a^2\cos\varphi + a^2 =$$

$$= 2a^2(1 - \cos\varphi)$$

$\ominus \int_\alpha^\beta \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi = \left|\sqrt{2}a\int_\alpha^\beta \sqrt{2}\sin\varphi/2\,d\varphi\right| = \cdot 2a\cos\varphi/2\cdot 2\Big|_\alpha^\beta =$

$\frac{1-\cos\varphi}{2} = \sin^2\varphi$

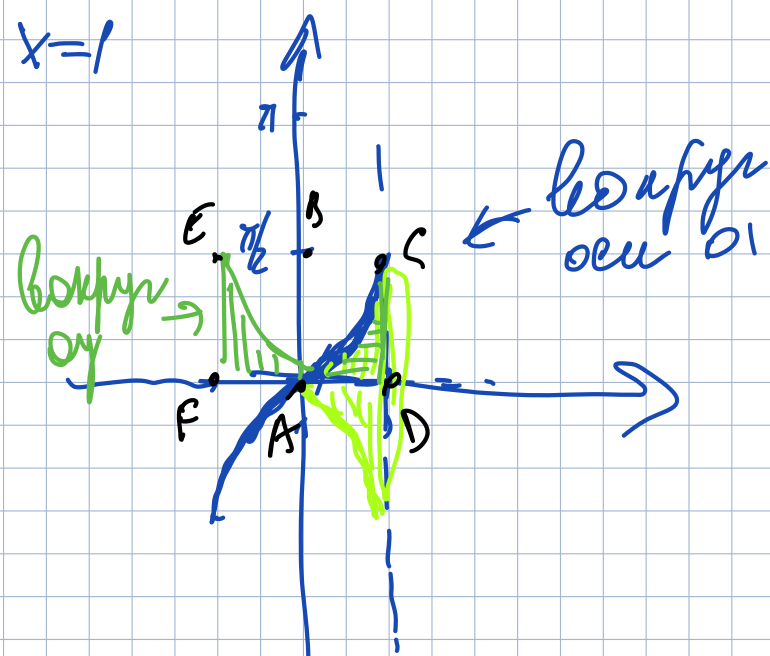
$= 4a\cos\varphi/2\Big|_0^\pi\cdot 2 = 8a$

§8 №12(з)

$y = \arcsin x,\quad y=0,\quad x=1$

$x = \sin y$

y меняется от 0 до $\pi/2$



а) вокруг Ox:

$V = V_{ACD}^{\text{об (вокр }Ox)} = \pi\int_0^1 \arcsin^2 x\,dx = \pi\left(x\arcsin^2 x\Big|_0^1 - \right.$

$-\int_0^1 x\cdot\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi\left(x\arcsin^2 x\Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2}\,2\arcsin(x)\Big|_0^1 - \right.$

$\left.-\int_0^1 \cancel{\sqrt{1-x^2}}\cdot 2\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}dx\right) = \pi\left(1\cdot\frac{\pi^2}{4}+0-2\right) = \frac{\pi^3}{4}-2\pi.$

$\shortparallel$
$-2x\Big|_0^1$

б) вокруг oy: $V_{ABCB}^{\text{вращ}(oy)} - V_{ACB}^{\text{вращ}(oy)} = \frac{\pi}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \, dy =$

$= \frac{\pi^2}{2} - \pi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2y}{2} dy = \frac{\pi^3}{2} - \pi \cdot \left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} =$

$= \frac{\pi^2}{2} - \pi \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$.