C_2

§6.

№5

$\int_1^2 x^3 dx$

$1 = x_0 < x_1 \dots < x_n = 2.$

геом. прогрессия $\Rightarrow$

$x_1 = \sqrt[n]{2}, \quad x_2 = \sqrt[n]{2^2} \dots x_n = 2.$

$$S_n = \left(\sqrt[n]{2}\right)^3\left(\sqrt[n]{2}-1\right) + \left(\sqrt[n]{2^2}\right)^3\left(\sqrt[n]{2^2}-\sqrt[n]{2}\right) + \dots + \left(\sqrt[n]{2^n}\right)^3\left(\sqrt[n]{2^n}-\sqrt[n]{2^{n-1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[n]{2^i}\right)^3\left(\sqrt[n]{2^i}-\sqrt[n]{2^{i-1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{3i}{n}}\cdot 2^{\frac{i-1}{n}}\left(\sqrt[n]{2}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{4i-1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt[n]{16}\left(1-\sqrt[n]{16^n}\right)}{1-\sqrt[n]{16}} =$$

$$= 15\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}\,8^{\frac{1}{n}}}{\cancel{\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}\left(2^{\frac{1}{n}}+1\right)\left(4^{\frac{1}{n}}+1\right)} = 15\cdot\frac{1}{2\cdot 2} = \boxed{\frac{15}{4}}$$

№24

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Рассм. отр-к $[a, b]$ и какое-то его разбиение

$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$

Тогда на каждом подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$ есть иррац. и рац. точка. (если отр-к длины 0, пропускаем его)

тогда $S(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b-a$

$s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$

Получается, что для $\forall$ разбиения $S(f,\tau) = b-a$

$\Rightarrow \overline{S}(f,\tau) = b-a$, ан-но $\underline{s}(f,\tau) = 0$

т.к $b-a \neq 0$, то ф-ция не интегр. по Риману

№30

f - огр., кон. # точек разрыва на $[a,b]$ интегр. по Риману

Пусть точки разрыва $- x_1\ x_2 \dots x_n$, причем $m < x_i < M$. (т.к. огранич.)

Рассм разбиение $a = x_0 < x_1 - \varepsilon_1 < x_1 + \varepsilon_1 < x_2 - \varepsilon_2 < x_2 + \varepsilon_2 \dots < x_n - \varepsilon_n$

ε_i - малое. $a = y_0 < y_1 < y_2 \dots < y_{2n-1}$

$S(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [y_i, y_{i-1}]} f(x) (y_{i-1} - y_i)$

Рассмотрим отдельно отрезки $[x_i + \varepsilon_i, x_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$ (1) и отр-ки $[x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i]$. (2)

1 тип отрезков: огр-ны и непрер-ны $\Rightarrow$ для них

$\overline{S}(f, \tau_i') = \underline{s}(f, \tau_i') = K$

теперь рассмотрим оставшиеся n отрезков и т.к. ε_i - малы, то для каждого такого отр-ка

$$S(f, \tau_i'') = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [\tau_i, \tau_{i-1}]} f(x) (\tau_{i-1} - \tau_i) < M \cdot 2\varepsilon_1$$

$\vee$

$m \cdot 2\varepsilon_1 \to 0 \qquad \to 0$

$\Rightarrow$ Сумма на таких отрезках <

$< n \cdot M \cdot 2\varepsilon_1 \to 0$

$\vee$

$m \cdot 2\varepsilon_1 \cdot n \to 0$

$\Rightarrow$ на всем отр-ке $[a, b]$

$$\overline{S}(f, \tau) = \underline{S}(f, \tau) = k.$$

№54 (5)

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}} \cdot 2x = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

№108 (4)

$$1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx < 1 + \frac{1}{42} \qquad 42 = 3 \cdot 7 \cdot 2$$

$$1 < \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} < 1 + x^{20} \quad \text{на} \quad (0; 1)$$

$$1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} < x + \frac{x^{21}}{21}\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{21}.$$

№ 112 (1)

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx = \cancel{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Предположим, что верна

тогда $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{-1}{x^2}dx =$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{x^2+1}dx = -\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

№117

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2 \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Рассм. ф-цию $\frac{1}{x}$ на отр-ке $[1;2]$

Рассмотрим разбиение $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1+\frac{1}{n}$, $a_n = 1+\frac{n}{n}$.

тогда $\underline{S}(f,\tau) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}} =$

$$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau) = \int_1^2\frac{dx}{x} = \ln 2.$$

№126

$[-l;l]$

1) f - четная, д-ть: $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$

$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx$

$\int_{-l}^{0} f(x)dx = \left| \begin{matrix} t=-x \\ dt=-dx \\ 0 \to 0 \\ -l \to l \end{matrix} \right| = \int_{l}^{0} f(-t)\,{-dt} = \int_{0}^{l} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(t)dt$

$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$

2) f - нечетная д-ть: $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$

$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx$

$\int_{-l}^{0} f(x)dx = \left| \begin{matrix} t=-x \\ dt=-dx \\ 0 \to 0 \\ -l \to l \end{matrix} \right| = \int_{l}^{0} f(-t)\,{-dt} = \int_{0}^{l} f(-t)dt =$

$= -\int_{0}^{l} f(t)dt$

$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f(x)dx = -\int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0$

№157

$\int_{0}^{1} \arcsin\sqrt{x}\,dx = \int_{0}^{1} \left(\arcsin\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}\right)dx + \int_{0}^{1} \frac{\pi}{4}\,dx =$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\arcsin\sqrt{t+\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) dt + \frac{\pi}{4} \ =$$

$$\arcsin t + \arcsin\left(\sqrt{1-t}\right) = \pi/2$$

$$\Downarrow$$

$$\arcsin\sqrt{-t+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{1-\left(-t+\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{t+\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\arcsin\sqrt{-t+\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \arcsin\sqrt{t+\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{ф-ция нечётная}$$

$$= \int_{-1/2}^{0} \left(\arcsin\sqrt{t+\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) dt + \int_{0}^{1/2} \left(\arcsin\sqrt{t+1/2} - \frac{\pi}{4}\right) dt + \frac{\pi}{4} =$$

$$= 0 + \pi/4 = \pi/4$$

№197

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx \overset{?}{=} \int_0^T f(x)\,dx \quad \text{непрер, период.}$$

$$a < kT < a+T$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{kT} f(x)\,dx + \int_{kT}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a-kT}^{0} f(t+kT)\,dt +$$

$$+ \int_0^{a+T-kT} f(t+kT)\,dt = -\int_0^{-kT+a} f(t)\,dt + \int_0^{a+T-kT} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T f(t)\,dt \quad \text{чтд.}$$

§ 10.

№ 43(2)

$$\left|\int_a^b \sin x^2 dx\right| < \frac{1}{a} \qquad 0<a<b$$

$x^2 = t$

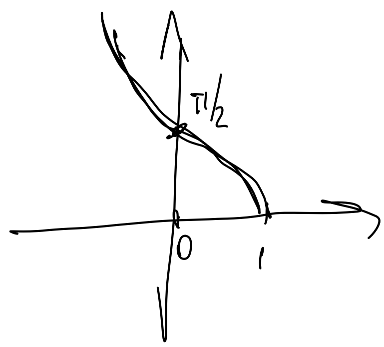
$x = \sqrt{t}$

$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\left|\int_a^b \sin(x^2)dx\right| = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t\, dt}{2\sqrt{t}} < \frac{1}{2\sqrt{a^2}} \int_{a^2}^{b^2} \sin t\, dt < \frac{2}{2\sqrt{a^2}} = \frac{1}{a}$$

№ 50(3)

$$\frac{1}{3} < \int_0^1 3^{-x} \arccos x\, dx < 1$$



$$\frac{1}{3}\arccos x < 3^{-x}\arccos x < 3^{-x}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 3^{-x}\frac{\pi}{2}dx = -\frac{3^{-x}\frac{\pi}{2}}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\ln 3} - \frac{\pi}{2\ln 3\cdot 3} < 1$$

$\approx 0{,}96$

$$\int_0^1 \frac{1}{3}\arccos x = \frac{1}{3}\left(x\arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3}.$$

ч.т.д.

$T_1.\quad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{2}{a} \qquad 0<a<b$

$a < 2k\pi < 2m\pi < b$

$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{a}$

Давайте будем рассматривать участки $[a_1 b_1], [a_2 b_2] \dots [a_i b_i] \dots$ т.к $[a_i b_i] \in [0;\pi]$ чтобы $\sin x$ был ≥ 0, другие уч-ки дают отриц. слагаемое $\Rightarrow$ если $\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{2}{a_i}$, то $\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{2}{a}$.

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\sin x}{x}dx \le \left| \frac{-\cos x}{x} \Big|_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} - \int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{\cos x}{x^2} \right| \le \left(\left|\frac{1}{2\pi k}\right| + \left| \int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{1}{(x^2)} \right| \le \right.$$

$$\left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\sin x}{x}dx \le \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x}dx \quad (\text{т.к. здесь } \frac{\sin x}{x} \geq 0) \right).$$

можем заменить a_i на $2\pi k$
b_i на $\pi+2\pi k$

$$\le \frac{1}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi k(2\pi k+\pi)} < \frac{2}{2\pi k} = \frac{2}{a_i} \qquad \text{чтд.}$$