§ 13

№ 2(3)

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1/2}{n(n+1)}-\frac{1/2}{(n+1)(n+2)}=\frac{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}.$$

№ 10(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\alpha$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ia^n\sin n\alpha+a^n\cos n\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}(ae^{i\alpha})^n=$$

$$=ae^{i\alpha}\left(\frac{1}{1-ae^{i\alpha}}\right)=\frac{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{1-a\cos\alpha-ia\sin\alpha}=$$

$$=\frac{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)(1-a\cos\alpha+ia\sin\alpha)}{(1-a\cos\alpha)^2+a^2\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{Im}:\ \frac{a(i\sin\alpha(1-a\cos\alpha)+\cos\alpha\cdot ia\sin\alpha)}{1-2a\cos\alpha+a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{ia\sin\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\alpha = \frac{a\sin\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}$$

№12(5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$$

Хотим:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}} > 1/2$$

$$2 > \sqrt[n]{\ln(n+1)}$$

$$2^n > \ln(n+1)$$

$$\ln(n+1) < n+1 \le 2^n \quad \text{V}$$

$\Rightarrow a_n$ действительно $> 1/2 \Rightarrow \sum$ не сх-тся.

№13(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n = \frac{\cos\alpha n}{n^2}$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N = N_1 \quad \forall n \ge N \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos\alpha k}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\cos\alpha k}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

Знаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сх-ся т.к возраст. и огр. ч.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

Подставив N_1 в N и получаем, что $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos \alpha k}{k^2}\right| < \varepsilon$. чтд.

№14(4)

$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\exists\, \varepsilon = 1/2 \;\; \forall N \;\; \exists n = N+1 > N \;\; \exists p = 2^{N-1}$:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| > \sum_{k=n}^{n+p} \left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| > \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{n} =$$

т.к. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \left(\frac{1}{n} + O(1)\right)$
$n \to \infty$
$\Downarrow$
$\frac{1}{n} \to 0$

$$= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+2^{N-1}} > \underbrace{\frac{1}{2^{N}} + \ldots + \frac{1}{2^N}}_{2^{N-1} \text{ раз}} = \frac{1}{2}.$$

§ 14.

№2(7)

$$a_n = \frac{n+2}{n^2\left(4+3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)}$$

$$\frac{n+2}{n^2\left(4+3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)} \geq \frac{n+2}{n^2\left(4+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \geq \frac{1}{n\left(4+3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n+2}{n^2\left(4+3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)} \geq \frac{1}{4+\frac{3\sqrt{3}}{2}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}}_{\text{расх-ся}} \Rightarrow \sum a_n \text{ расход.}$$

№4(6)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$$

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} = \arcsin\frac{1}{n^{4/5}} = \frac{1}{n^{4/5}} + o\left(\frac{1}{n^{8/5}}\right)$$

$$a_n \sim \frac{1}{n^{1/3}}\cdot\frac{1}{n^{4/5}} = \frac{1}{n^{17/15}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{8}{5}+\frac{1}{3}}}\right) \qquad \frac{1}{3}+\frac{4}{5} = \frac{5+12}{15} = \frac{17}{15}$$

$\frac{17}{15} > 1 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся

№10(5)

$$a_n = \ln^{\alpha}\frac{ch(1/n)}{\cos(1/n)} = \qquad ch(1/n) = 1 + \frac{1}{2\cdot n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\cos(1/n) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \left(\ln(ch(1/n)) - \ln\cos(1/n)\right)^{\alpha} = \left(\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

сх-ся, если $2\alpha > 1$

$\alpha > 1/2$

расх-ся если $\alpha \leq 1/2$

№11(8)

$$a_n = 1 - \left(n\ln\cos\frac{1}{n}+1\right)^{n^{\alpha}} = 1 - e^{\ln\left(n\ln\cos\frac{1}{n}+1\right)\cdot n^{\alpha}}$$

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\ln\cos\frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + n\ln\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(n\ln\cos\frac{1}{n}+1\right)=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim-\frac{1}{2n}$$

$$e^{\ln\left(n\ln\cos\frac{1}{n}+1\right)n^{\alpha}}\sim e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}}=e^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}$$

если $\alpha\geqslant1$, то $n^{\alpha-1}>1\Rightarrow e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}}\to0\Rightarrow1-e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}}\not\to0.$

$\Rightarrow\alpha<1.$

$$e^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}\sim1-\frac{1}{n^{1-\alpha}}+o\left(\frac{1}{1^{1-\alpha}}\right)$$

$\Rightarrow a_n\sim-\frac{1}{n^{1-\alpha}}$, $\quad 1-\alpha>1$

$\underline{\alpha<0}$ $\Downarrow$ - сх-ся.

№ 14.4

$$a_n=\frac{\ln(e^n+n^2)}{n^2\ln^2(n+1)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}\to0\Rightarrow\ln(e^n+n^2)\sim\ln e^n=n.$

$\ln^2(n+1)\sim\ln^2n$

$\Rightarrow a_n\sim\frac{1}{n\ln^2n}$ $\quad\alpha=1$

$\beta=2\quad\beta>1\Rightarrow$ $\underline{\text{сх-ся.}}$

№ 19.8.

$a_n=\frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$ (через признак Д'Аламбера)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!!\cdot n!}{(n+1)!\,(2n)!!}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right)}=$$

$$= \frac{(2n+2)}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3^{n+1}} + o\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right)}{\left(\frac{1}{3^n} + o\left(\frac{1}{3^{n}}\right)\right)} \sim 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \underline{\text{сх-ся}}$$

№21.12.

$a_n = \left(n \operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$ (через признак Коши)

$$n \operatorname{sh}\frac{1}{n} \sim n \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right) = 1 + \frac{1}{6n^2}$$

$$\left(n \operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^{-n^3} = \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^{-n^3} = e^{-\ln\left(1+\frac{1}{6n^2}\right)n^3} \sim e^{-\frac{n^3}{6n^2}} = e^{-\frac{n}{6}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \sim e^{-\frac{1}{6}} < 1 \Rightarrow \underline{\text{сх-ся}}.$$

№25(9)

$a_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \geqslant 2$.

через инт. признак

Т.к. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сх-ся при $\alpha > 1$.
расх при $\alpha < 1$
$\alpha = 1$ $\beta > 1$ сх
$\beta < 1$ расх,

то $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ сх-ся и расх при тех же α и β.

(нужно проверить, что $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ монот. начин с какого-то момента)

$(x^\alpha \ln^\beta x)' = \alpha x^{\alpha-1} \ln^\beta x + \beta x^\alpha \ln^{\beta-1} x > 0 \Rightarrow$ возр

$\Rightarrow \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ - убыв.

№ 38* $a_n > 0 \quad a_{n+1} \leq a_n$

Усл. Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{k=n+p} a_k < \varepsilon$

~~Вз~~ $\Rightarrow$ при $p = n$, это тоже верно $\Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon$$

$$n \cdot a_{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

т.к $a_{2n} \leq a_{2n-1} \leq \ldots \leq a_n$

$$n \cdot a_{2n} < \varepsilon$$

$$\underbrace{2n \cdot a_{2n}}_{} < 2\varepsilon.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0 \qquad \text{чтд}$$

№ 39

$a_n \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся

т.к $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся, то $\lim_{n \to \infty} a_n \to 0.$

Усл. Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{k=n+p} a_k < \varepsilon$$

т.к. $\lim_{n \to \infty} a_n \to 0$, то $\forall \varepsilon \ \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n > M \quad a_n < \varepsilon < 1.$

$\Rightarrow$ возьмем $\max(N, M) = k$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \ \forall n > k \ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n} a_k^2 < \sum_{k=n+1}^{n} a_k < \varepsilon$$

т.к. $a_n^2 < a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ - сх-ся.

Обратное неверно:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сх-ся, но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расх-ся.

§ 15

№ 3.(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} = 0$

2) $\left(\frac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}\right)' = \frac{(n+2)\sqrt[4]{n+1} - n\cdot\left(\sqrt[4]{n+1} + (n+2)\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3}}\right)}{(n+2)\sqrt{n+1}} =$

$= \frac{2(n+1) - n(n+2)\cdot\frac{1}{4}}{(n+2)\sqrt{n+1}\cdot\sqrt[4]{(n+1)^3}} < 0 \Rightarrow$ монот. убывает.

т.к. предел $= 0$, то по признаку Лейбница сх-ся. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$.

№4(7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{n}} \sin 2n.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \sin 2n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} = e-1$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{e-1}{2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < e-1$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{n}} \to 0$$

– огр.

да

монотонность: $\frac{a_n}{a_{n+1}} \overset{?}{>} 1$

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) \sqrt[5]{n+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \sqrt[5]{n}} \overset{?}{>} 1$$

пусть $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = t > \frac{e-1}{2} > \frac{1}{2}$.

Д-ть: $t \sqrt[5]{n+1} > \left(t + \frac{1}{(n+1)!}\right) \sqrt[5]{n}$

$$t^5 (n+1) > \left(t^5 + \frac{5t^4}{(n+1)!} + \dots\right) n$$

$$n\left(t^5 + \frac{5t^4}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!^5}\right) < \left(n t^5 + n \cdot \frac{6t^4}{(n+1)!}\right)$$

Iд-ть: $\cancel{nt^5} + \frac{6nt^4}{(n+1)!} < \cancel{nt^5} + t^5$

$$\frac{6n}{(n+1)!} < t$$

$$\frac{6n}{(n+1)!} < \frac{1}{2} \Rightarrow < t \Rightarrow \text{моно}т\text{. убывает.}$$

$\Rightarrow \exists C \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=1}^{N} \sin 2n\right| \leq C.$ (по стр. 317)

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{n}} \sin 2n$ сх-ся

№8(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\sin^3 n}{n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)}_{\text{сх.}}$$

$\exists C \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=1}^{N} \sin n\right| \leq C$ (стр. 317).

$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ - монот. убыв $\to 0$.

$\Rightarrow$ по призн. Дирихле $\sum_{n=1} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ сх-ся

$\sin^3 n = \sin n \cdot (1 - \cos 2n) = \sin n - \sin n \cdot \cos 2n =$

$= \sin n - \frac{1}{2}(\sin(-n) + \sin 3n) = \frac{3}{2}\sin n - \frac{\sin 3n}{2}.$

$$\Rightarrow \sin^3 n = \frac{3}{2}\sin n - \frac{\sin 3n}{2}$$

$\sum\limits_{n=1}^{N} \sin$ – огр $\qquad \sum\limits_{n=1}^{N} \sin 3n$ – огр

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} \sin^3 n$ – огр.

$\frac{1}{n}$ – монот, убыв $\to 0$ $\Rightarrow$ по признаку Дирихле сх-ся

$\Rightarrow$ т.к. все 3 слаг. сх-ся, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ сх-ся.

№ 9(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+1}\right)\right)$$

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right)(-1)^n.$$

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$

$\sqrt{n^2+1}+n$ – возр, $\Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ – убыв. $\to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$ – монот $\to 0$.

$\Rightarrow$ по пр-ку Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ сх-ся