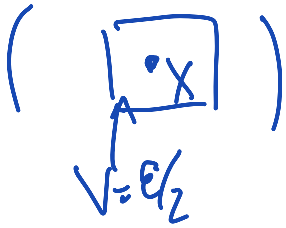
№ 7.22

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$

$\forall \varepsilon$ можем взять брус размера $\varepsilon/2$. Снаружи



лежит только конечное число точек т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Тогда все мн-во имеет меру $\le \varepsilon/2 + 0$ для $\forall \varepsilon$. $\Rightarrow \mu(\{x_k, k\in\mathbb{N}\}) = 0$.

№ 7.40 Измеримость по Жордану

1) Внешняя мера: $\mu_J^*(A_1)=1$ т.к. мн-во рац. всюду плотно, $[0,1]\subset \bigcup_{i=1}^N M_i$ $1=|[0,1]|\le \sum_{i=1}^N |M_i|$, причем $[0,1]\supset A_1$

С другой стороны $\mu_*^J(A) = 1-\mu_{(J)}^*(A^c) = 1-1=0$.

т.к. $0\ne 1$, то неизмер. по Ж-ну

2) Квадрат $[0,1]\times[0,1]\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$

по критерию изм. по Ж-ну.

если A - изм, то $\mu_J^*(\partial A)=0$, но

$\partial A=[0,1]^n$ т.к. в окр-ти $\forall$ точки есть т. из мн-ва и точка не из мн-ва)

(т.е. есть т. $\in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ и т. $\notin \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$)

$\Rightarrow \mu^*_7(\partial A) = 1 \neq 0$. противоречие

3) 1 рац, др. иррац:

ан-но в окр-ти $\forall$ точки есть точка вида (m, n), где $m, n \in \mathbb{Q}$, т. вида (m, q), (q_1, m_1) где q, q_1 - иррац, m, m_1 - рац, т. вида (p, q). где p, q - иррац

$\Rightarrow$ границей будет весь квадрат $[0,1] \times [0,1]$.

$\mu(\partial A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ неизмер.

№77

Возьмем мн-во $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. δ - $\forall$.

$\mu(A) = 0$ т.к. можем предст. $M_i = \left(r_i - \frac{\delta}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\delta}{2^{i+1}}\right)$ для кажд. т. r_i

$\mu^*(A) \leq \sum |M_i| = \delta$

$\Downarrow$

$\mu^*(A) = 0$.

но замыкание A - это весь отрезок $[0,1]$ т.к в $\forall$ окр-ти $\forall$ точки есть хотя бы 1 рац. точка.

T_1.

$\mu(F) = 3/4$ $F \subset [0,1]$. замкнутое, сост. из иррац. точек.

пусть $\{r_i\}_1^\infty$ - все рац. точки $\in [0,1]$

Заключим все r_i в отр-ки

$$A = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$$

$$\mu\left(\bigcup(\alpha_i, \beta_i)\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \left(r_i - \frac{1-\alpha}{2^{i+1}},\ r_i + \frac{1-\alpha}{2^{i+1}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(A) = 1 - \mu\left(\bigcup(\alpha_i, \beta_i)\right) \ge \alpha$$ (чтобы получить ровно α выкинуть будь больше отр-ки)

(A - измер как разность измер и объед. измер.).

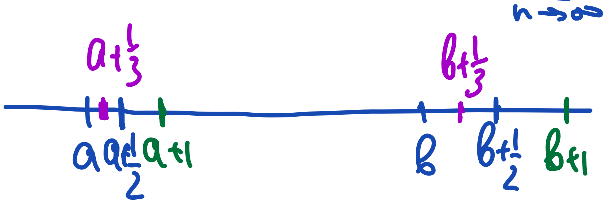
A - не содержит рац. точек т.к их всех выкинули, не содержит внутр. точек т.к. если содержит, то содерж. интервал $\Rightarrow$ содержит рац. точку. т.к. A не сод. внутр $\Rightarrow$ все изолир $\Rightarrow$ замкнуто.

Для получения F берем $\alpha = 3/4$, получилось, что $\mu(F) = 3/4$.

Т5.

$$\left[a+\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right] = A_n$$

Расс. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$



$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (a; b]$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (a; b]$$

т.к. $\forall$ подпосл-ть $\{a_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сх-ся к a справа, $\forall$ подпосл-ть $\{b_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сх-ся к b справа, то $\forall$ част. предел $= [a; b]$.

T_6

куб $[0,1]^n$

изм: $A_1, \dots A_n$ $\quad \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) > n-1$

Д-ть: $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0$

Д-во:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left([0,1]^n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \geq$$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k^c) = \sum_{k=1}^{n} 1 - \mu(A_k) = n - \mu(A_1) - \mu(A_2) - \dots$$

$$- \mu(A_n) < n - (n-1) < 1.$$

$$\geq 1 - 1 = 0$$

T_7

$\{E_k\}$ — посл-ть измер. подмн. в $\mathbb{R}^n$

$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ — сх-ся

Д-ть: $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in E_k$ для б.кол-ва $k\}$ — измеримо, $\mu(E) = 0$.

$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq k} E_i$ т.к. если какая-то точка встречается в беск. кол-ве E_i, то она лежит в каждом объединении $\Rightarrow$ в их пересечении тоже. если какая-то точка встреч в конеч. кол-ве E_i, то в каком-то $\bigcup_i E_i$ её нет.

тогда $\forall k: \mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{i \geq k} E_i\right) \leq \underbrace{\sum_{i \geq k} \mu(E_i)}_{k \to \infty} \to 0$

$\Rightarrow \mu(E) = 0.$

T_2

Возьмем любое неизмеримое мн-во ($= E_1$) на $[0,1]$ и дополнение к нему (E_2).

$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*([0,1]) = 1.$

$\mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) = \mu^*(E_1) + 1 - \mu_*(E_2^C) =$

$= \mu^*(E_1) + 1 - \mu_*(E_1) = 1 + \underbrace{\mu^*(E_1) - \mu_*(E_1)}_{\text{т.к неизмер, то это } > 0} > 1.$

(В кач-ве неизм. мн-ва на $[0,1]$ можем взять пример Витали)