

Zapiski pri predmetu Statistika

Minimalni katalog znanja, ki ga bom sproti dopolnjeval. Verjetno bom izpustil kakšen dokaz in pa kakšen zgled.

1 Motivacija

Kako bi "ocenili" verjetnost, da pri metu kovanca pade cifra?

Izvedemo n neodvisnih "enakih" (v istih razmerah, na enak način, pošteno oz. naključno) metov kovanca in iskano verjetnost ocenimo z razmerjem $\frac{\text{število cifer}}{n}$.

Igramo igro, kjer kroglico položimo v eno od treh škatel. Zmešamo škatle med seboj in poskušamo uganiti kje je kroglica. Če uganemo dobimo 10, v nasprotnem primeru pa izgubimo 6.

Kako bi ocenili pričakovano vrednost te igre?

Izvedemo n neodvisnih slučajnih iger in pričakovano vrednost ene igre ocenimo z $\frac{\text{skupni izkupiček}}{n}$.

Zdi se nam, da mora z večjim vzorcem priti boljša ocena.

V 18. stoletju je grof Buffon kovanec vrgel 4040-krat in dobil 2048 cifer. Ocenjena verjetnost cifre je 0.50689.

V 19. stoletju je Pason vrgel kovanec 12000-krat in dobil 6019 cifer. Ocenjena verjetnost je 0.5016.

Aksiome verjetnosti zgradimo tako, da so naša mnenja glede vprašanj upravičena.

2 Konvergenca slučajnih spremenljivk in limitni izrek

DEFINICIJA 2.1. Naj bo X_1, X_2, X_3, \dots slučajne spremenljivke, definirane na skupnem prostoru Ω .

(1) Pravimo, da zaporedje $\{X_n\}_n$ konvergira k X v porazdelitvi, če

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

za vsa tista realna števila x , v katerih je komulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X zvezna.

(2) Pravimo, da je $\{X_n\}_n$ konvergira k X v verjetnosti, če velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

za vsak $\varepsilon > 0$.

(3) Pravimo, da $\{X_n\}_n$ k X skoraj gotovo, če je:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

TRDITEV 2.2. Iz konvergence skoraj gotovo sledi konvergenca v verjetnosti.

TRDITEV 2.3. (Neenakost Markova)

Naj bo X slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo in $a > 0$ pozitivna konstanta. Tedaj je:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[|X|]}{a}$$

DOKAZ. Naj bo $a > 0$. Pišemo $A = \{|X| \geq a\} = \{\omega \mid |X(\omega)| \geq a\}$. Tedaj $|X| \geq a \cdot \mathcal{I}_A$. Sledi $E[|X|] \geq a \cdot P(A)$. ■

POSLEDICA 2.4. Naj bo X slučajna spremenljivka s (končno) disperzijo. Tedaj velja

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

za vsako pozitivno število ε .

DOKAZ.

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P((|X - EX|)^2 \geq \varepsilon^2) < \frac{E((X - EX)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

■

IZREK 2.5. (Šibki zakon velikih števil)

Naj bodo $X_1, X_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke s pričakovano vrednostjo μ in (končnim) odklonom σ . Tedaj zaporedje "vzorčnih povprečij" $\frac{X_1, \dots, X_n}{n}$ konvergira v verjetnosti h konstantni μ .

DOKAZ. Trdimo, da velja $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{X_1, X_2, \dots, X_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$ za vsak pozitiven $\varepsilon > 0$.

Pišimo $\bar{X} = \frac{X_1, \dots, X_n}{n}$.

$$P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \leq P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{D(\frac{X_1, \dots, X_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} D(X_1) + \dots + D(X_n) = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}$$

Sledi, da rezultat konvergira proti 0, ko gre n v neskončnost. ■