

关于多波束测线问题的建模

王学宇 (Xueyu Wang)

中南民族大学电子信息工程学院

2024 年 8 月 24 日



中南民族大学
SOUTH-CENTRAL MINZU UNIVERSITY



- ① 引入
- ② 建模过程
- ③ 矩形海域测线布设
- ④ 微分方程模型
- ⑤ 参考文献



① 引入

② 建模过程

③ 矩形海域测线布设

④ 微分方程模型

⑤ 参考文献



引入原理

- 多波束系统工作时换能器同时发射多束声波（如下图），在垂直于航向方向上形成一个发射波束扇形声波传播区，从而得到一个条带覆盖区域内多个测点的海底深度值，实现对海底的条带式测量¹。

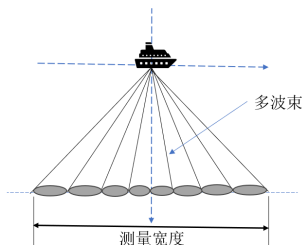


图 1: 多波束测深原理图

¹丁继胜, 周兴华, 刘忠臣, 等. 多波束测深声纳系统的工作原理 [J]. 海洋测绘, 1999, 3: 15-22.

问题分析

问题 1 与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角为 α 的斜线(图 7), 称 α 为坡度。请建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。

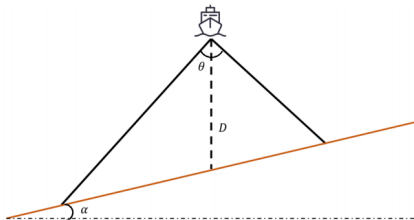


图 7 问题 1 的示意图

图 2: 问题 1

问题分析

问题 2 考虑一个矩形待测海域（图 8），测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β ，请建立多波束测深覆盖宽度的数学模型。

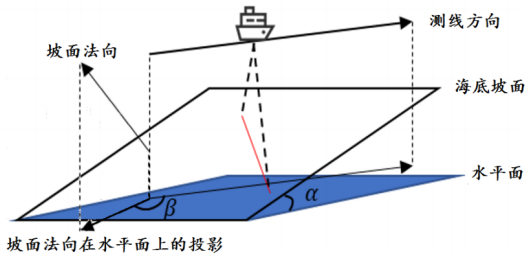


图 8 问题 2 的示意图

图 3: 问题 2

问题分析

问题 3 考虑一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，海域中心点处的海水深度为 110 m，西深东浅，坡度为 1.5° ，多波束换能器的开角为 120° 。请设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足 10%~20% 的要求。

图 4: 问题 3

问题分析

问题 4 海水深度数据（附件.xlsx）是若干年前某海域（南北长 5 海里、东西宽 4 海里）单波束测量的测深数据，现希望利用这组数据为多波束测量船的测量布线提供帮助。在设计测线时，有如下要求：(1) 沿测线扫描形成的条带尽可能地覆盖整个待测海域；(2) 相邻条带之间的重叠率尽量控制在 20% 以下；(3) 测线的总长度尽可能短。在设计出具体的测线后，请计算如下指标：(1) 测线的总长度；(2) 漏测海区占总待测海域面积的百分比；(3) 在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度。

图 5: 问题 4

① 引入

② 建模过程

③ 矩形海域测线布设

④ 微分方程模型

⑤ 参考文献



多波束测深覆盖宽度及重叠率的计算

- 计算海水深度

$$D(y) = D_0 \pm y \tan \alpha \quad (1)$$

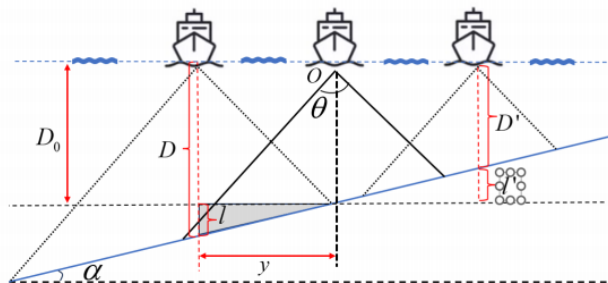


图 6: 不同测线的海水深度

多波束测深覆盖宽度及重叠率的计算

- **计算覆盖宽度**(等腰三角形²)

$$W = BG+FG = \frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \tag{2}$$

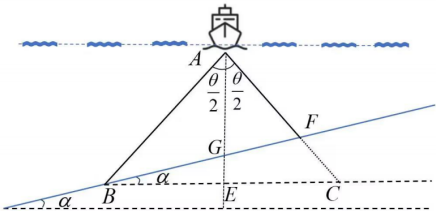


图 7: 覆盖宽度计算

²成芳, 胡奈成. 多波束测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术学报, 2016, 35(02): 87-91.

多波束测深覆盖宽度及重叠率的计算

- 计算相邻条带之间重叠率
注意到

$$HF = HG' + GF - GG' \quad (3)$$

$$= \frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \frac{D(y-d)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{d}{\cos \alpha} \quad (4)$$

结合题目所给重叠率定义得到

$$\eta = \frac{\frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \frac{D(y-d)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{d}{\cos \alpha}}{W} \quad (5)$$

多波束测深覆盖宽度及重叠率的计算

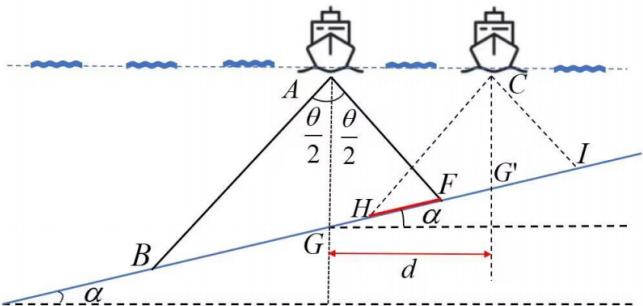


图 8: 相邻条带之间的重叠

多波束测深覆盖宽度及重叠率的计算

结合方程 (1),(2) 和 (4)，我们可以得到

$$\begin{cases} D(y) = D_0 \pm y \tan \alpha \\ W = \frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \eta = \frac{\frac{D(y)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \frac{D(y-d)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{d}{\cos \alpha}}{W} \end{cases} \quad (6)$$

多波束测深覆盖宽度及重叠率的计算

- 但真实海底地形起伏变化大，若采用海区平均水深设计测线间隔，虽然条带之间的平均重叠率可以满足要求，但在水深较浅处会出现漏测的情况（图 5），影响测量质量；若采用海区最浅处水深设计测线间隔，虽然最浅处的重叠率可以满足要求，但在水深较深处会出现重叠过多的情况（图 6），数据冗余量大，影响测量效率。

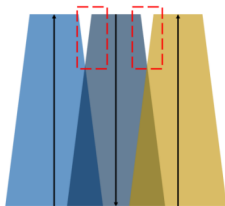


图 5 平均测线间隔

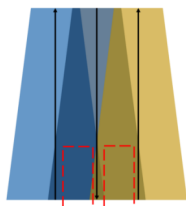


图 6 最浅处测线间隔

图 9: 结果分析

增加 β 的覆盖宽度及重叠率的计算

● 计算海水深度

根据立体关系我们可以得到

$$\vec{n}_p = (0, -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = (0, -\sin \alpha, \cos \alpha)$$

$$\vec{n}_I = (\sin(\beta - \frac{\pi}{2}), -\cos(\beta - \frac{\pi}{2}), 0) = (-\cos \beta, -\sin \beta, 0)$$

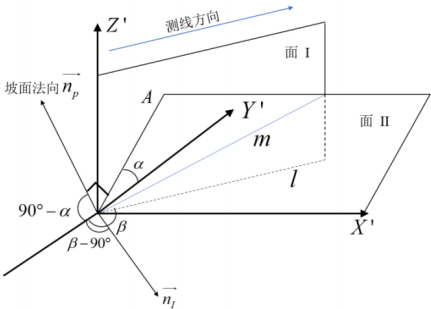


图 10: 问题二几何关系分析

增加 β 的覆盖宽度及重叠率的计算

交线 m 的方向向量表达式为

$$\begin{aligned}\vec{m} = \vec{n}_p \times \vec{n}_I &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\sin \beta \cos \alpha, -\cos \beta \cos \alpha, -\cos \beta \sin \alpha)\end{aligned}\quad (7)$$

考虑空间直线的点向式方程

$$\frac{x}{\sin \beta \cos \alpha} = \frac{y}{-\cos \beta \cos \alpha} = \frac{z}{-\cos \beta \sin \alpha} \quad (8)$$

增加 β 的覆盖宽度及重叠率的计算

代入 $H = (L \cos(\beta - \frac{\pi}{2}), L \sin(\beta - \frac{\pi}{2}), 0)$ 得到 N 的 Z' 轴方向的坐标值，进一步得到

$$D = H_0 - z' = H_0 + L \tan \alpha \cos \beta \tag{9}$$

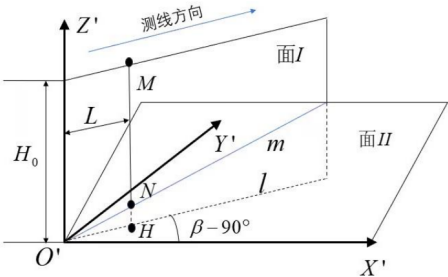


图 11: 海水深度计算

增加 β 的覆盖宽度及重叠率的计算

- 计算水平面与覆盖宽度所在直线的夹角 δ

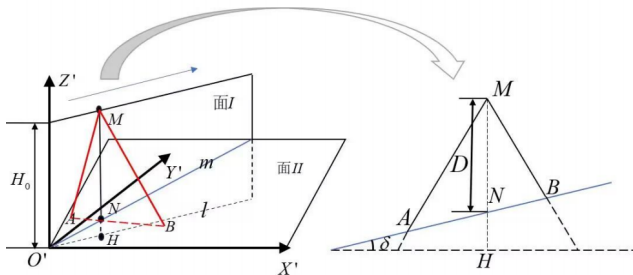


图 12: 三维空间到二维空间的转化

增加 β 的覆盖宽度及重叠率的计算

- 计算水平面与覆盖宽度所在直线的夹角 δ

得到

$$\begin{aligned}\vec{AB} = \vec{n}_p \times \vec{n}_c &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\cos \beta \cos \alpha, \sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha)\end{aligned}\quad (10)$$

任取水平面法向量 \vec{n} , 由线面角的计算公式可得

$$\sin \delta = \cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| |\vec{n}|} = \frac{|\sin \beta \sin \alpha|}{\sqrt{\cos^2 \beta \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \quad (11)$$

后取反函数即可。

增加 β 的覆盖宽度及重叠率的计算

代入方程 (6) 中即可得到

$$\begin{cases} W = \frac{D}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \delta)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \frac{D}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \delta)} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ D = H_0 + L \tan \alpha \cos \beta \\ \delta = \arcsin \frac{|\sin \beta \sin \alpha|}{\sqrt{\cos^2 \beta \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta}} \end{cases} \quad (12)$$



- ① 引入
- ② 建模过程
- ③ 矩形海域测线布设**
- ④ 微分方程模型
- ⑤ 参考文献



证明测线平行等深线方向是最佳方向

根据国土资源部发布的《海洋多波束水深测量规程》要求规范³，主测线一般采用平行等深线走向布设。这样就可以最大限度地增加海域探测覆盖率，提高工作效率。

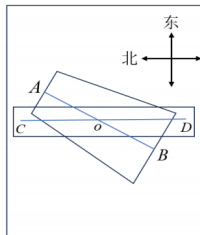


图 13: 待测矩形海域

³高慎明, 王晓云. 广西某海底管道项目的测线布设方法与优化 [A]. 中国石油学会石油工程专业委员会、中国石油学会石油工程建设专业标准委员会. 中国石油石化工程建设创新发展大会--石油天然气勘察技术第二十六次技术交流研讨会论文集 [C]. 中国石油学会石油工程专业委员会、中国石油学会石油工程建设专业标准委员会. 中国建筑学会工程勘察分会 2018: 4.

证明测线平行等深线方向是最佳方向

Proof

记 A 点的海水深度为 H_1 , B 点的海水深度为 H_2 , O 点的海水深度为 H_3 , 根据中点得 $H_3 = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$. 记 A、B、O 点的覆盖宽度分别为 W_1, W_2, W_3 , 结合方程组 (12) 我们可以得到

$$\frac{W_1 + W_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{H_1 + H_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha')} + \frac{H_1 + H_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha')} \right) \sin \frac{\theta}{2} \quad (13)$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{H_1 + H_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} + \frac{H_1 + H_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \right) \sin \frac{\theta}{2} \quad (14)$$

考虑两者之间关系, 可以得到平行于等深线的测线所对应的覆盖面积最大.

测线间距的递推公式

$$P_1 = \frac{D_{\min} \sin(\theta/2) \cos \alpha}{\cos(\theta/2 - \alpha)} = D_{\min} \tan(\theta/2) \tag{15}$$

结合

$$P_{n+1} = P_n + P_{BD} + P_{CE} - P_{CD} \tag{16}$$

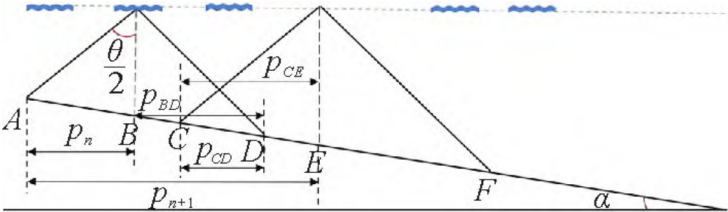


图 14: 测线位置

测线间距的递推公式

$$P_{BD} = \frac{D_{\min}}{\cot(\theta/2) - \tan \alpha} \quad (17)$$

$$P_{CE} = \frac{D_{\min} + (P_{n+1} - P_n) \tan \alpha}{\cot(\theta/2) + \tan \alpha} \quad (18)$$

$$P_{EF} = \frac{D_{\min} + (P_{n+1} - P_n) \tan \alpha}{\cot(\theta/2) - \tan \alpha} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P_{CD} &= (P_{CE} + P_{EF}) \cdot \eta \\ &= \left(\frac{D_{\min} + (P_{n+1} - P_n) \tan \alpha}{\cot(\theta/2) + \tan \alpha} + \frac{D_{\min} + (P_{n+1} - P_n) \tan \alpha}{\cot(\theta/2) - \tan \alpha} \right) \cdot \eta \end{aligned} \quad (20)$$



测线间距的递推公式

代入方程 (16) 可得

$$p_{n+1} = \frac{(\cot(\theta/2) - \eta \tan \alpha)(\cot(\theta/2) + \tan \alpha) \cdot p_n}{(\cot(\theta/2) - \tan \alpha)(\cot(\theta/2) + \eta \tan \alpha)} + \frac{2(1 - \eta)D_{\min} \cot(\theta/2)}{(\cot(\theta/2) - \tan \alpha)(\cot(\theta/2) + \eta \tan \alpha)}$$

当所有测线的覆盖范围大于该海域的东西宽度时停止计算，就能实现该海域的全覆盖。

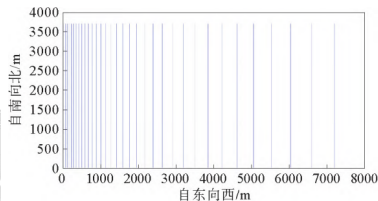


图 15: 最优测线布设图

另一种思路

我们需要证明在一个具有一定坡度的矩形海域中，沿等深线方向布设测线可以使测量覆盖面积最大，测线总长度最短。

在微分几何中，我们可以将海底视为一个二维曲面嵌入在三维欧几里得空间中。曲面的等深线是表面上的等高线，它们的几何特性将用于证明沿等深线布设测线的优势。

设海底曲面为 S ，其高度函数为 $z = f(x, y)$ ，其中 x 和 y 是海底平面上的坐标， z 是对应的海水深度。等深线（等高线）是满足 $f(x, y) = c$ 的曲线，其中 c 是常数。

另一种思路

设测线的方向向量为 v ，海底坡度的法向量为 n 。要证明测线方向 v 平行于等深线方向 (即垂直于 ∇f)，我们需要最小化测线的路径长度 L ，同时最大化其覆盖宽度 W ，使用路径积分公式，路径长度 L 可以表示为：

$$L = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt \quad (21)$$

沿等深线方向，路径变化主要取决于曲面的水平投影，因此在等高线上的路径长度变化是最小的。我们可以通过证明曲率最小时路径长度最小来加强这一结论。

另一种思路

覆盖宽度 W 可以被视为在垂直于测线方向的等深线方向上的投影长度。最大化这个投影长度，可以利用等深线与测线的垂直关系因为这使得曲面的法向变化最小，最大程度地保留了覆盖宽度。

对于给定的测线间距 d ，在等深线方向，覆盖宽度公式为

$$W = \int_{-d/2}^{d/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (22)$$

由于 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是等深线的特性，这意味着在等深线方向测线 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2$ 和 $(\frac{\partial z}{\partial y})^2$ 可以被最小化，从而使得 W 最大化。

另一种思路

- **第二基本形式**⁴ 对单位切向量 x ，第二基本形式分别在主方向 u_1, u_2 处取得最大值 k_1 与最小值 k_2 。因此第二基本形式也可表示为

$$\Pi = k_1(x \cdot u_1)^2 + k_2(x \cdot u_2)^2 \quad (23)$$

利用微分几何的曲率概念，我们可以理解沿等深线方向，曲率最小，因为在曲面上任何一点处，沿等高线方向的曲率就是主曲率中的最小曲率（即最小主曲率 k_2 ）。这意味着，如果我们在这个方向上进行测量，我们的路径是相对最“平”的，从而可以最大限度地减少路径长度。

对比之下沿最大曲率方向（即主曲率中的最大曲率 k_1 ）的测线将产生更大的变化率从而需要更频繁地调整测线方向，导致测线总长度增加。

⁴梅向明. 微分几何-第3版 [M]. 高等教育出版社, 2003.

- ① 引入
- ② 建模过程
- ③ 矩形海域测线布设
- ④ 微分方程模型**
- ⑤ 参考文献



常见偏微分方程模型

- 热传导方程 (Heat Equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u + f(x, y, z, t) \quad (24)$$

描述热量在物体内部的扩散.

- 波动方程 (Wave Equation):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (25)$$

描述波动 (如声波、电磁波) 在介质中的传播.

- 拉普拉斯方程 (Laplace's Equation):

$$\nabla^2 u = 0 \quad (26)$$

在静电学、流体静力学等领域描述稳定状态的场.



常见偏微分方程模型

- 泊松方程 (Poisson's Equation):

$$\nabla^2 u = -f(x, y, z) \quad (27)$$

在电势、引力势等领域描述由源或汇产生的场.

- Black-Scholes 方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (28)$$

金融数学中用于定价欧式期权的偏微分方程.

常见偏微分方程求解算法

- 分离变量法 (Separation of Variables) ;
- 傅里叶变换 (Fourier Transform) ;
- 有限差分法 (Finite Difference Method) ;
- 有限元法 (Finite Element Method, FEM) ;
- 格林函数法 (Green's Function Method) ;
- 数值积分方法.



常微分方程数值解法

1. Euler 方法
2. 改进的 Euler 方法
3. Runge-Kut

一阶常微分初值问题⁺

$$y' = f(x, y), a \leq x \leq b$$

$$y(a) = y_0$$

数值解法: 就是求解 $y(x)$ 在一系列离散点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \text{ 上的近似值}$$

相邻两个节点的间距 $h_n = x_{n+1} - x_n$ 称为步长

本质上就是差分 (数列)

初值问题的各种差分方法都采用步进式, 就是求解过程顺着节点排列的次序一步步地推进

$$y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \cdots \rightarrow y_N$$

给出前面的 y , 就可以计算相应的后面的 y 值

图 16: 一阶常微分初值问题



Euler 方法

就是把导数近似成做差的方式，然后编程把步长取得足够短。

向前欧拉：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n))$$

结果就有：

$$y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n)$$

向后欧拉：把上面的 x_n 和 x_{n+1} 互换

坏处：把整个式子变成了隐式公式，变成了非线性方程⁺。通常需要迭代法求解。



Euler 方法

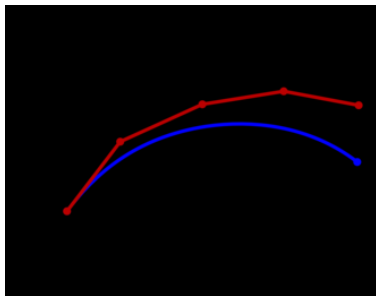


图 17: 欧拉方法的图示。待求的曲线为蓝色，它的折线近似为红色。

改进的 Euler 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

就是把矩形的近似变成梯形的近似

比向前Euler的近似精度高



Runge-Kutta

龙格-库塔方法 (Runge-Kutta Methods) 是一组数值方法，用于求解普通微分方程 (ODEs) 的初值问题。这些方法通过在已知初始条件的情况下，近似求解微分方程的解。

最常用的龙格-库塔方法是**四阶龙格-库塔方法**，其基本公式如下：

给定一个初值问题： $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

使用四阶龙格-库塔方法，我们可以在每一步 h 内近似求解 y 的增量，公式如下：

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

然后更新 y 的值： $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

这里， k_1, k_2, k_3, k_4 是在每一步中计算的斜率估计， h 是步长， x_n 和 y_n 分别是当前步的 x 和 y 的值。



Runge-Kutta

Runge-Kutta Method Order 4 Formula

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

where

$$F_1 = hf(x, y)$$

$$F_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{F_1}{2}\right)$$

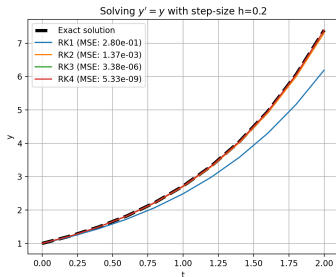
$$F_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{F_2}{2}\right)$$

$$F_4 = hf(x+h, y+F_3)$$



Runge-Kutta

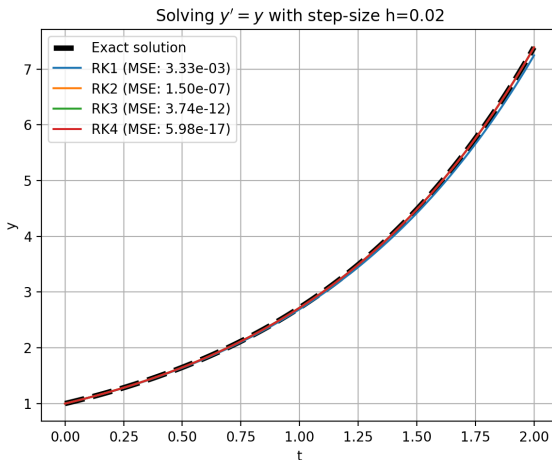
The MSE decreases with increasing order of the method, indicating that the higher order methods provide more accurate solutions. However, the computational cost also increases with the order of the method. Hence, the choice of method should balance accuracy requirements and computational efficiency⁵.



⁵[https:](https://www.fabriziomusacchio.com/blog/2020-10-03-runge_kutta/)

[//www.fabriziomusacchio.com/blog/2020-10-03-runge_kutta/](https://www.fabriziomusacchio.com/blog/2020-10-03-runge_kutta/)

Runge-Kutta



Runge-Kutta

Runge-Kutta (RK4) numerical solution for Differential Equations⁶.

Example

Use Runge-Kutta Method of Order 4 to solve the following, using a step size of $h = 0.1$ for $0 \leq x \leq 1$.

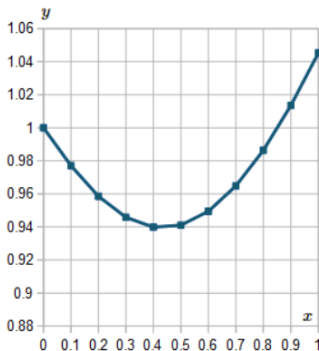
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2 - y}{e^{x+y}}$$

$$y(0) = 1$$

⁶<https://www.intmath.com/differential-equations/12-runge-kutta-rk4-des.php>

Runge-Kutta

Here is the graph of the solutions we found, from $x = 0$ to $x = 1$.



① 引入

② 建模过程

③ 矩形海域测线布设

④ 微分方程模型

⑤ 参考文献



References I

- [1] 丁继胜, 周兴华, 刘忠臣, 等. 多波束测深声纳系统的工作原理 [J]. 海洋测绘, 1999, 3: 15-22.
- [2] 成芳, 胡奈成. 多波束测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术学报, 2016, 35(02): 87-91.
- [3] 高慎明, 王晓云. 广西某海底管道项目的测线布设方法与优化 [A]. 中国石油学会石油工程专业委员会、中国石油学会石油工程建设专业标准委员会. 中国石化工程建设创新发展大会--石油天然气勘察技术第二十六次技术交流研讨会论文集 [C]. 中国石油学会石油工程专业委员会、中国石油学会石油工程建设专业标准委员会: 中国建筑学会工程勘察分会 2018: 4.
- [4] 梅向明. 微分几何-第 3 版 [M]. 高等教育出版社, 2003.

Thanks! Criticism and questioning!

