Solutions to Electromagnetics and Quantum Mechanics

电磁学与量子力学习题答案

(preliminary draft updated December 2023)

王学宇 *(Xueyu Wang)*

South-Central Minzu University

大学物理A习题册参考答案(电磁学篇试行版)

王学宇　光电信息科学与工程

2023 年 12 月 31 日

目录

1 第一版前言

此习题册参考答案完全由笔者手敲上千行代码，劳神伤财，版权所有，侵权必究。

1999年第23届国际物理与应用物理联合会(International Union of Pure and Applied Physics ,IUPAP)代表大会通过的决议指出:物理学——研究物质、能量和它们相互作用的学科，是一项国际事业 ,它对人类未来的进步起着关键的作用。

自然界,浩瀚广阔,丰富多彩,形形色色的物质在其中不断地运动变化着.什么是物质?大至日、月、星辰,小到分子、原子、电子，都是物质，不光固体、液体、气体和等离子体,这些实物是物质;电场、磁场、重力场和引力场,这些场也是物质。总之,物质是独立于人们意识之外的客观实在。

物理学是研究物质、能量和它们相互作用的学科,而物质、能量的研究涉及物质运动的普遍形式，这些普遍的运动形式包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核内的运动等,它们普遍地存在于其他高级的、复杂的物质运动形式之中,因此,物理学所研究的规律具有极大的普遍性。

物理学的研究对象是形形色色的物质。这些物质的空间尺度,从宇观的$10^{26}m$到微观的$10^{-5}m$;时间尺度从宇宙年龄10^{18} s到硬γ射线的周期10^{-27} s;速率范围从0到$3\times10^{8}m/s$,这些尺度范围十分广泛.生命现象是宇宙中最为复杂的运动形式,而人则是复杂的生命现象之-一.物质世界的尺度,由人体大小的实物起,向非常大和非常小的两个方向去观察,物质世界的结构都逐渐变得简单,还未发现类似生物体中见到的复杂组织存在。小尺度和大尺度的世界所用的一些理论竟是相通的.目前,天体物理与粒子物理两大尖端正在紧密地衔接起来。

物理学是自然科学的基础,也是当代工程技术的重大支柱,是人类认识自然、优化自然并最终造福于人类的最有活力的带头学科。回顾物理学发展的全过程，可以加深我们对物理学重要性的认识。

此外，更重要的是，大学物理是今后数电、模电、信号与系统、通信原理、量子力学、电动力学、工程光学、物理光学、傅里叶光学、量子场论、半导体物理、天体物理等等学科的的重要基础，因此，大学物理这一门课在整个大学四年的学习中都是至关重要的一环，这也是这册参考答案诞生的必要性。

在参考答案写完之际，笔者要感谢在编写过程中给予笔者极大帮助的钟同学（中南民族大学），莫同学（中南民族大学），王同学（中南民族大学），项同学（中南民族大学），朱同学（中南民族大学），梁同学（中南民族大学）以及全体宿舍成员（吴同学，林同学，黄同学，赵同学）的大力支持与鼎力相助.

同时特别感谢钟同学(Sun Yat-sen University)，曹同学(Tsinghua University)，及时指出该习题册在编写过程中考虑不清楚不全面的地方，在此特别感谢上两位同学。

特别感谢我的大物老师——潘林峰老师，没有潘老师的倾情相助，我根本没有撰写这册参考答案的动力，也就根本不会有这本参考答案的诞生，在此，向潘老师致以最高的敬意与感谢!

最后，由于最近事物诸多加之各学科作业大量布置与其他事情堆叠，导致投入时间精力有所减少，加之笔者能力水平有限，其间理解偏差与认知错误的知识点恳请各位同学多加批评，不吝赐教，笔者必当加以斧正。

王学宇

2023年6月3日

于智能光通信技术实验室

2 第二版前言

今年6月3日，笔者考虑到大物对于电信学院同学今后众多核心专业课程学习的重要性以及学业帮扶的参考价值花费不少时间制作了一本基于大学物理A习题册的参考答案，帮助了不少的同学对于大学物理这一学科的理解与认识。如今，为激起大家学习大学物理乃至更多与物理相关课程的热情以及帮助巩固物理基础，现继续开展大学物理A习题册参考答案(电磁学篇)的编写，针对于各位同学所反映的情况与指出来的各种问题，现笔者对于第二版习题册答案进行调整与修改，修改部分如下：

1.内容增多，答案逐渐详细。此次调整之后的习题册答案页数超过30页，大幅超过上个学期第一版的页数，对于各种解答题与填空题补充了更多详细的解答与理解，以帮助同学们加深对题目的理解与认识。

2.补充了大量插图与示意图。插图与示意图的使用不仅可以帮助同学们对于题目的理解，更能丰富习题册的内容，增强可读性与观感。

3.答案突出。为方便同学们快速查阅正确答案，笔者将每道大题的最终结果使用灰色框框出，以方便同学们进行参考与查阅。

最后，由于最近事物诸多加之各学科作业大量布置与其他事情堆叠，导致投入时间精力有所减少，加之笔者能力水平有限，其间理解偏差与认知错误的知识点恳请各位同学多加批评，不吝赐教，笔者必当加以斧正。

王学宇

2023年12月12日

于激光光谱应用实验室

3 练习十一 电场强度 高斯定理

3.1 选择题

1.Answer D

基本概念.

2.Answer B

电场强度公式适用范围.

3.Answer A

矢量的大小与方向.

4.Answer D

利用库仑定律易得.

5.Answer A

库仑定律.

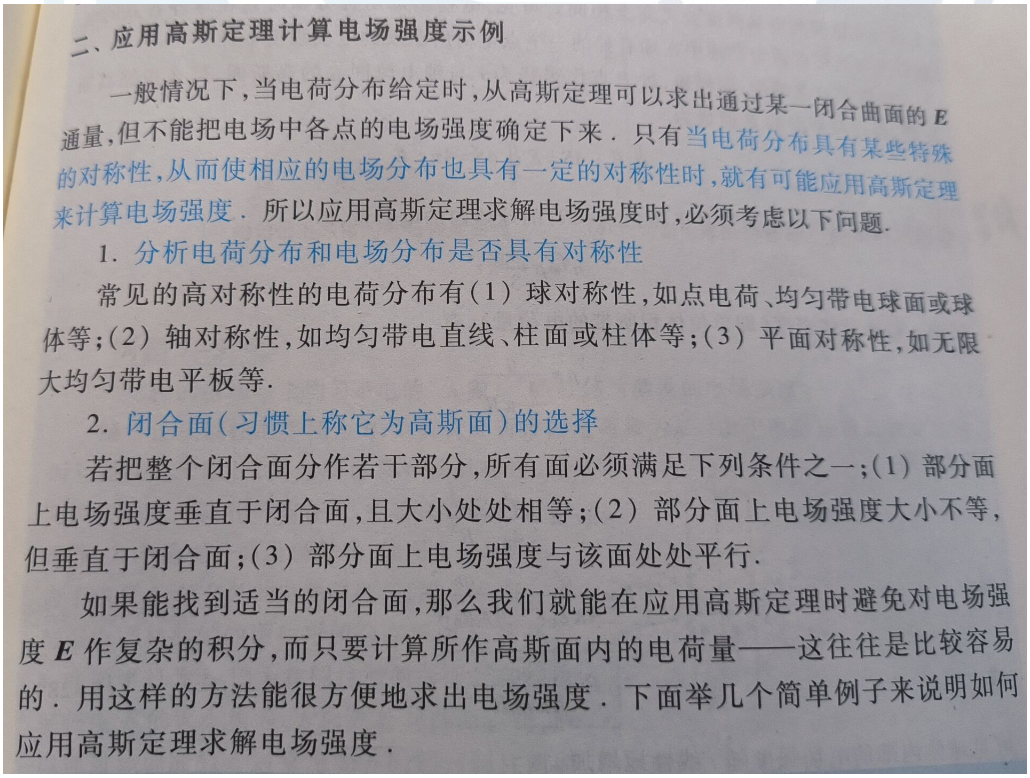
6.Answer A

提示：

正向穿过

$$\Phi = E \cdot S\cos\theta = E \cdot S\sin 30^\circ = \frac{1}{2}E\pi R^2 \tag{3.1.1}$$

7.Answer A



二、应用高斯定理计算电场强度示例

一般情况下，当电荷分布给定时，从高斯定理可以求出通过某一闭合曲面的 $\boldsymbol{E}$ 通量，但不能把电场中各点的电场强度确定下来．只有当电荷分布具有某些特殊的对称性，从而使相应的电场分布也具有一定的对称性时，就有可能应用高斯定理来计算电场强度．所以应用高斯定理求解电场强度时，必须考虑以下问题．

1．分析电荷分布和电场分布是否具有对称性

常见的高对称性的电荷分布有(1)球对称性，如点电荷、均匀带电球面或球体等；(2)轴对称性，如均匀带电直线、柱面或柱体等；(3)平面对称性，如无限大均匀带电平板等．

2．闭合面(习惯上称它为高斯面)的选择

若把整个闭合面分作若干部分，所有面必须满足下列条件之一：(1)部分面上电场强度垂直于闭合面，且大小处处相等；(2)部分面上电场强度大小不等，但垂直于闭合面；(3)部分面上电场强度与该面处处平行．

如果能找到适当的闭合面，那么我们就能在应用高斯定理时避免对电场强度 $\boldsymbol{E}$ 作复杂的积分，而只要计算所作高斯面内的电荷量——这往往是比较容易的．用这样的方法能很方便地求出电场强度．下面举几个简单例子来说明如何应用高斯定理求解电场强度．

图 1: 高斯定理计算电场强度示例

根据高斯定理(Gauss theorem)可知，只有当我们将此点电荷移至某具有高度对称性的空间几何图形中才好计算该题，因此构造一空间立体图形如下图1所示

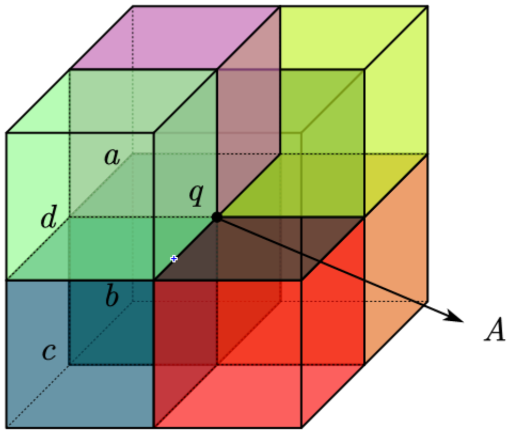


图 2: 第7题示意图

因此，我们可以得到此时通过侧面$abcd$的电场强度通量等于对应侧面与所有穿过的面相比，即

$$\Phi = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

8.Answer B

基本概念.

3.2 填空题

1.Answer $E = \frac{Q\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R_4}$

(1)当没有挖去小块面积时，球心处电场强度为0;

(2)当挖去小块面积ΔS时，挖去的电荷量为

$$q = \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2} \tag{3.2.1}$$

因此根据对称性，带入(3.2.1)式球心处所受电场强度大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\frac{Q\Delta S}{4\pi R^2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4} \tag{3.2.2}$$

方向为$O \to \Delta S$.(因为总电量$Q > 0$)

2.Answer $\frac{x}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 沿中垂线指向O点 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ $\frac{qq_0}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}(N)$

根据电场力的叠加可知，对于$-q_0$有(注意下符号为黑体，代表矢量运算)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} \tag{3.2.3}$$

而

$$|\boldsymbol{F_1}|=|\boldsymbol{F_2}|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{a^2+x^2} \tag{3.2.4}$$

因此由于x方向电场力抵消，只有y方向电场力作用

$$\boldsymbol{F}=\frac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j} \tag{3.2.5}$$

方向沿y轴正方向.

若此时距离为x时，受力最大，可利用导数求极值

$$\frac{dF}{dx}\,|_x=0 \tag{3.2.6}$$

$$\frac{dF}{dx}=\frac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dx}[\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}]=0 \tag{3.2.7}$$

即

$$a^2+x^2=3x^2 \tag{3.2.8}$$

解得

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}a$$

此时

$$F_{max}=\frac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}a}=\frac{\sqrt{3}qq_0}{9\pi\varepsilon_0a^2} \tag{3.2.9}$$

即为所求.

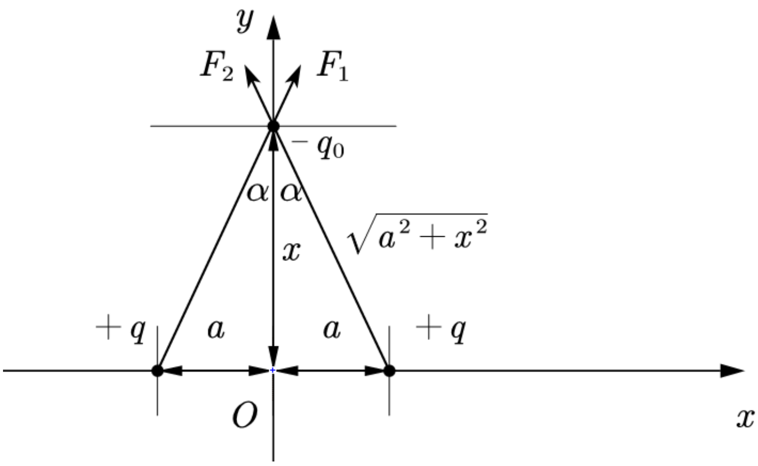


图 3: 第2题示意图

3.Answer $\quad q_0=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}Q$

由题，如下图所示，对D点分析根据库仑定律与电场力的叠加可知

受到C点的电场力大小

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2} \tag{3.2.10}$$

方向水平向右.

受到B点的电场力大小

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2} \tag{3.2.11}$$

方向竖直向下.

受到A点的电场力大小

$$F_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2a^2} \tag{3.2.12}$$

方向沿正方形对角线向外. 由此计算出

$$\sum F=F_3+\sum F_{12}=F_3+\sqrt{2}F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}(\frac{1}{2}+\sqrt{2}) \tag{3.2.13}$$

方向沿正方形对角线向外.

因此，此电荷中心所受的的电场力

$$F'=-\sum F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}(\frac{1}{2}+\sqrt{2}) \tag{3.2.14}$$

方向与$\sum F$方向相反, 从而解得

$$q_0=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}Q \tag{3.2.15}$$

即为所求.

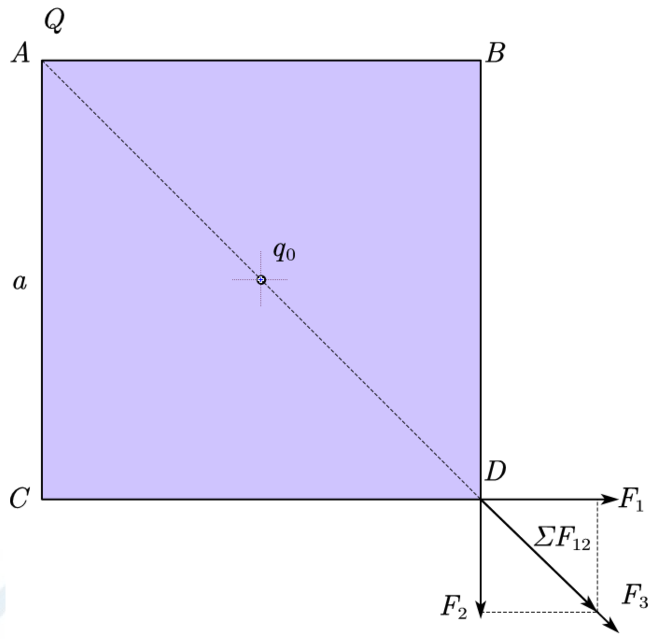


图 4: 第3题示意图

4.Answer $\frac{q_2}{\varepsilon_0}$ (q_1, q_2, q_3)
理解高斯定理的内容与使用条件可知。

5.Answer 0 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r^3-R_1^3}{R_2^3-R_1^3}$

(1)根据均匀带点球壳的对称性可知，当$r < R_1$，即当P点位于球壳内部时

$$E = 0 \tag{3.2.16}$$

(2)利用高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \tag{3.2.17}$$

得到

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3.2.18}$$

(3)同样由高斯定理，不过此时

$$\sum q = Q\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \tag{3.2.19}$$

得到

$$E = E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \tag{3.2.20}$$

即为所求.

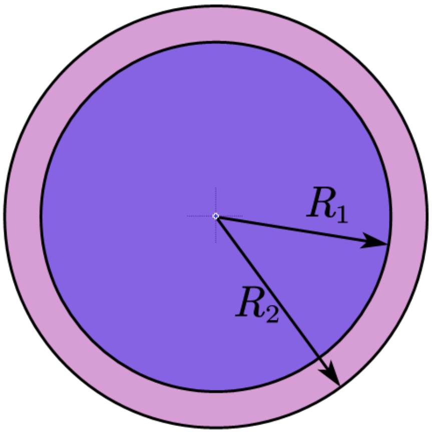


图 5: 第5题示意图

3.3 计算题

1.Answer

(1)由题绘制如下图所示的示意图，在长为L的线棒上取一线元dx距离O点为x，则有

$$dq = \lambda dx \tag{3.3.1}$$

此时A与dx微元点距离为$(d-x)^2$，A处

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{(d-x)^2} \tag{3.3.2}$$

因此对线棒求积分，即从$-\frac{L}{2}$至$\frac{L}{2}$处整个线棒对于A点处的电场强度

$$E_A = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(d-x)^2} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4d^2 - L^2} \tag{3.3.3}$$

(2)在垂直平分线B处，由于对称性

$$E_{Bx} = \int dE_x = 0$$

同样根据(1)中可得

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d^2+x^2)} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(d^2+x^2)} \tag{3.3.4}$$

因此，结合$Q=\lambda L$

$$E_B = \int dE_y = \int_L dE{\cdot}\sin\alpha = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2d}{L})^2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{\sqrt{L^2+4d^2}} \tag{3.3.5}$$

因此可以推广：

当$L \to \infty$时

$$E_B = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

即为课本中的例题.

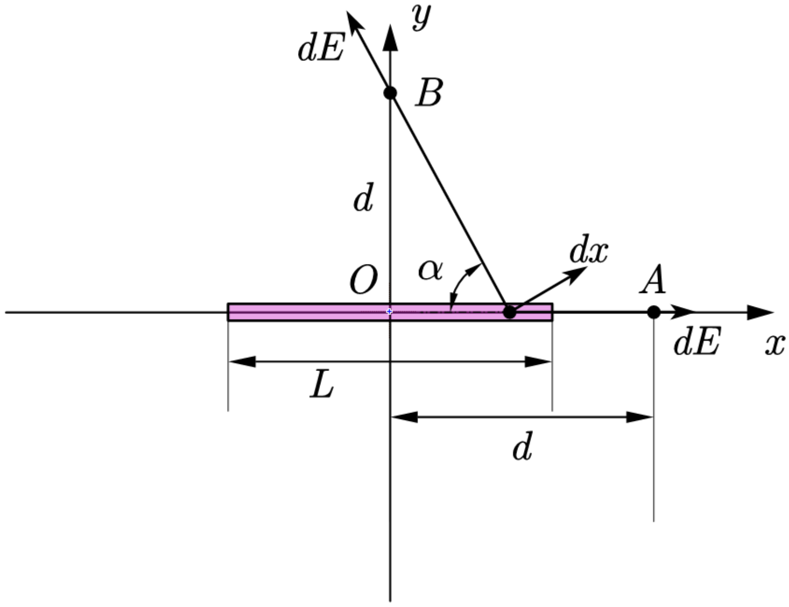


图 6: 第1题示意图

2.Answer

根据题意，在圆弧上取一微元，此时根据几何知识可知

$$l(\text{圆弧长}) = \varphi R \tag{3.3.6}$$

即

$$dl = R d\varphi \tag{3.3.7}$$

则对于此时

$$\lambda = \lambda_0 \cos\varphi \tag{3.3.8}$$

$$dq = \lambda dl = \lambda_0 \cos\varphi R d\varphi \tag{3.3.9}$$

由此利用(3.3.7)(3.3.9)式可得

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0 \cos\varphi R d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{3.3.10}$$

根据$\cos\varphi$的函数性质与圆环对称性可知

$$\int dE_y = 0$$

规定沿x轴正向为正方向，因此

$$\int dE_x = -\int dE\cos\varphi = -\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos^2\varphi d\varphi = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R} \tag{3.3.11}$$

即为所求.(注意：下图中θ为多余字符)

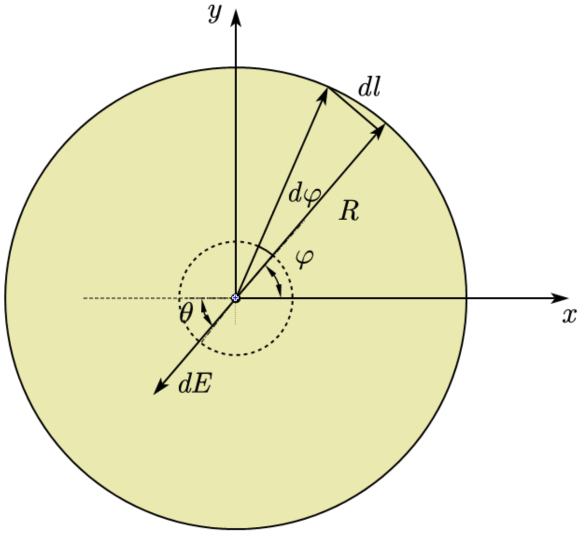


图 7: 第2题示意图

3.Answer

由题，根据球体对称性与高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \tag{3.3.12}$$

对于球体内$(0 \le r \le R)$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r kr\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\pi k}{\varepsilon_0}r^4\,, E(r) = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\,; \tag{3.3.13}$$

对于球体外$(r > R)$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R kr\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\pi k}{\varepsilon_0}R^4, E(r) = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}. \tag{3.3.14}$$

即为所求.

4 练习十二 场强与电势的关系

4.1 选择题

1.Answer C

基本概念.

2.Answer A

基本概念.

3.Answer B

提示：

从P到M，电势为零处

$$V_P=\int_a^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_a^{2a}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}da=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a} \tag{4.1.1}$$

求解可得.

4.Answer A

电势与电荷分布均不均匀无关，因为电势是标量叠加；如果是电场强度，则不相等，因为矢量除了大小还有方向.

5.Answer B

提示：

场强相等不能推出电势相等；电场场强相等处电势梯度绝对值应该是相等的.

6.Answer C

与第四题同理.

7.Answer B

选取球面为高斯面，则由高斯定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot dS=E\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\epsilon_0} \tag{4.1.2}$$

得到

$$E=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.1.3}$$

考虑到选取$r=R$为零势能点，因此

$$U=\int_r^R E\cdot dr=\int_r^R\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}) \tag{4.1.4}$$

故选B.

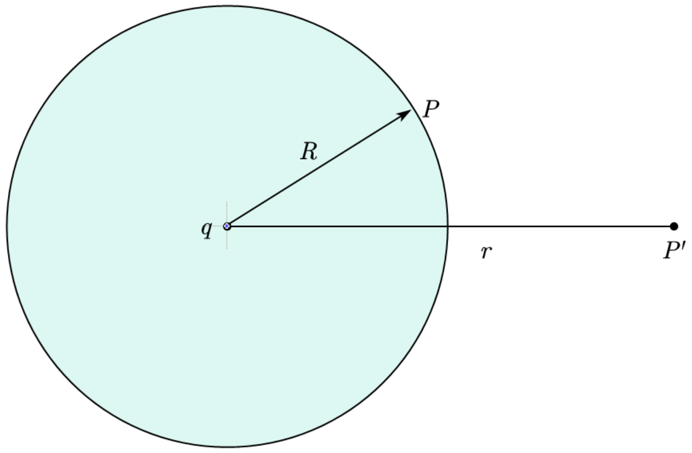


图 8: 第7题示意图

4.2 填空题

1.Answer　$10cm$

2.Answer

根据静电场力做功知识与能量守恒可知

$$A_{ab} = q(U_A - U_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{4.2.1}$$

解得

$$v_A = \sqrt{v_B^2 - \frac{2q}{m}(U_A - U_B)}$$

即为所求.

3.Answer

根据电场强度与电势的微分关系

$$\boldsymbol{E} = -\frac{d\,V}{dn}\boldsymbol{e}_n = -grad\,V = -\nabla\,V \tag{4.2.2}$$

由此利用上式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\,V = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \frac{11}{20}\boldsymbol{i} + \frac{3}{5}\boldsymbol{j}$$

因此可知

$$E_x = +0.55V, E_y = +0.6V, E_z = 0V.$$

4.3 计算题

1.Answer

(1)利用电势叠加原理求电势，已知对于一个均匀带电的球面，在球面外产生的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{4.3.1}$$

在球面内电场强度为0，电势处处相等，等于球面的电势

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{4.3.2}$$

其中，R为球面半径，由此对于此题，由各球面电势的叠加计算电势分布

若该点位于两个球面内,即 $r \leqslant R_1$, 则

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R_2} \tag{4.3.3}$$

若该点位于两个球面之间,即$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$,则

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\,\pi\varepsilon_0 R_2} \tag{4.3.4}$$

若该点位于两个球面之外,即$r \geqslant R_2$,则

$$V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \tag{4.3.5}$$

绘制图如下

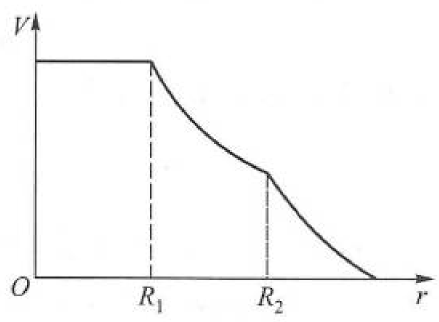


图 9: 各区域电势分布曲线

(2)两个球面间的电势差为

$$U_{12} = \left(V_1 - V_2 \right)\Big|_{r=R_2} = \frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon_0 R_2} \tag{4.3.6}$$

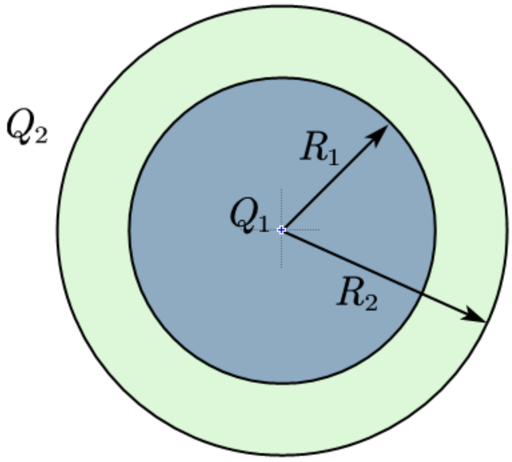


图 10: 第1题示意图

2.Answer

此题可用补偿法求解.P点场强可看作是电荷面密度为σ的无限大均匀带电平面与电荷面密度为$-\sigma$、半径为r的带电圆盘在P点产生场强的叠加.

无限大平面在P点产生的场强为

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{4.3.7}$$

方向沿平面法向.

带电圆盘在P点产生的场强为

$$E_2 = \int dE_2 = \int_0^r \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}) \tag{4.3.8}$$

方向与法向相反.(具体圆盘激发的电场大小的推导见教材)

所以P点的总场强为

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{4.3.9}$$

方向沿平面法向.

此时

$$V = \int_x^0 Edx = \int_x^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r - \sqrt{x^2+r^2}) \tag{4.3.10}$$

即为所求.

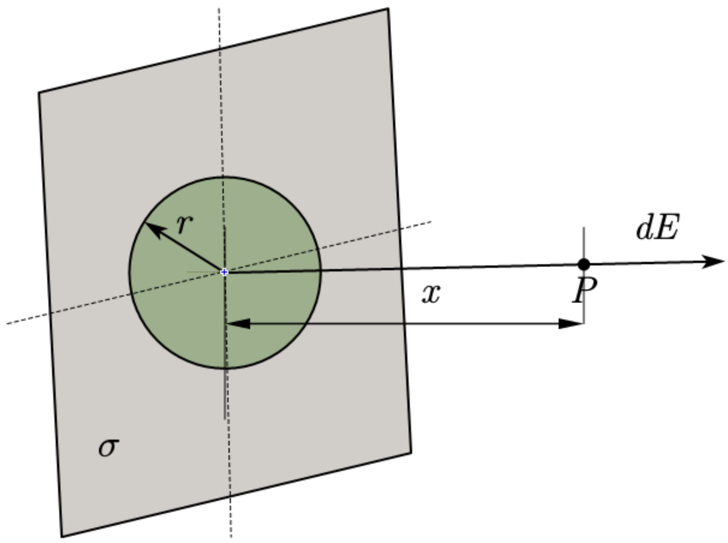


图 11: 第2题示意图

5 练习十三 静电场中的导体和电介质 静电场中的能量

5.1 选择题

1.Answer A

提示：

首先，A处作为尖端，电荷面密度要比D处的电荷面密度大，而C处作为球壳内部，电荷面密度等于0.在考虑由电荷产生的场强时，哪处的电荷密度大，哪处的场强就更大，故A处的场强比D处的场强大，C处的场强为0.A、C、D作为一个整体，电势处处相等.

综上，正确答案为A.

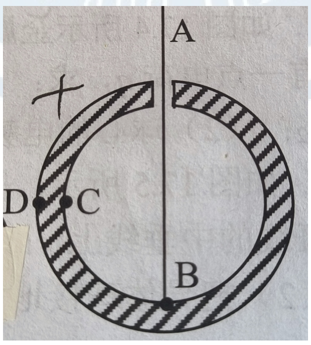


图 12: 第1题示意图

2.Answer D

提示：

因为接地

$$\frac{q_{感}}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2R}=0 \tag{5.1.1}$$

3.Answer A

提示：

从电容的定义出发即可.

两个球面之间电场线必定是均匀发散或汇聚的，则可根据高斯定理，包围内球面的封闭曲线的电场线通量只与A的带电量有关，即

$$\oint E\cdot dS=\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{5.1.2}$$

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}r\text{为点到球心距离} \tag{5.1.3}$$

$$\because C=\frac{Q}{U} \tag{5.1.4}$$

$$\therefore C=\frac{q}{U_{AB}} \tag{5.1.5}$$

4.Answer D

基本概念，回归课本.

5.Answer B

提示：

当电源断开后，Q不变

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q}{c^2} \tag{5.1.6}$$

放入均匀电介质后

$$C_0=C\cdot\varepsilon_r \tag{5.1.7}$$

$$\therefore W_0=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{c\cdot\varepsilon_r} \tag{5.1.8}$$

结合上两式对比即可.

5.2 填空题

1.Answer $\frac{U_0}{2}+\frac{dQ}{4S\varepsilon_0}$

提示：

$$\sigma = \frac{Q}{S} \tag{5.2.1}$$

$$U_C = U_C - U_B = U_{CB} = E \cdot \frac{d}{2} \tag{5.2.2}$$

$$\because E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \tag{5.2.3}$$

$$\therefore U_c = E\frac{d}{2} = (\frac{U_0}{d} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S})\frac{d}{2} \tag{5.2.4}$$

2.Answer $\frac{R_1}{R_2}$ $4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)$ $\frac{R_2}{R_1}$

提示：

第一空因为两个导体球相距甚远，结合

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{5.2.5}$$

由于U不变，相连后

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = 4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2) \tag{5.2.6}$$

结合

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{5.2.7}$$

成反比关系，即为所求.

3.Answer $3.88 \times 10^{11} V/m$

提示：

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \tag{5.2.8}$$

$$E = \sqrt{\frac{2w_e}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = 3.88 \times 10^{11} V/m \tag{5.2.9}$$

5.3 计算题

1.Answer

(1)根据高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \tag{5.3.1}$$

在金属球壳的内表面作高斯面.

考虑静电平衡，导体内部场强处处为0.

$$\because \oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S}=0$$

$$\Rightarrow q_1+q=0 \tag{5.3.2}$$

内表面

$$\therefore q_1=-q \tag{5.3.3}$$

因此，外表面

$$q_2=q+Q \tag{5.3.4}$$

(2)根据电势叠加原理，对于球心O处

$$u=u_r+u_a+u_b=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{5.3.5}$$

即为所求.

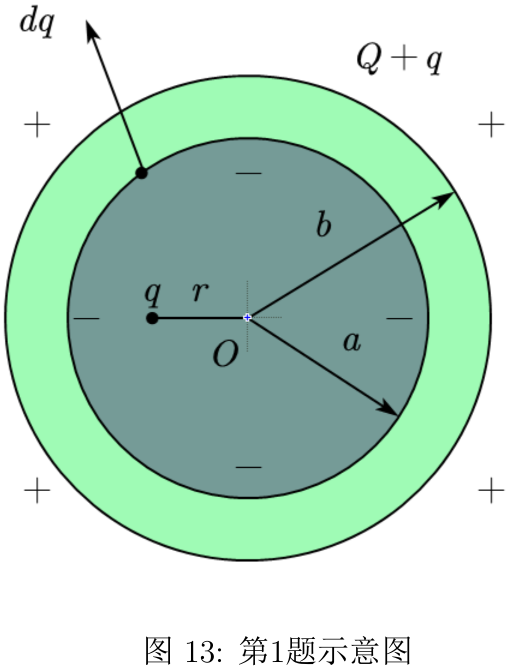


图 13: 第1题示意图

2.Answer

(1)由题，导体球球心处电势为0，取电流元$dq=\lambda dx$，则球心处电势

$$\int dV=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{-d}^{d}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+d^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{2}+1) \tag{5.3.6}$$

即为所求.

(2)接地后，设球上感应电量为q'，电势为0

$$\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\sqrt{2}+1)=0 \tag{5.3.7}$$

$$\Rightarrow q'=-2R\lambda\ln(\sqrt{2}+1) \tag{5.3.8}$$

即为所求.

6 练习十四 磁感应强度 磁通量

6.1 选择题

1.Answer D

右手定则即可判断.

2.Answer B

提示：

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}(\text{注意黑体粗体.}) \tag{6.1.1}$$

$$idl\cdot\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=idl\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&1\\x&y&z\end{vmatrix}=(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})idl \tag{6.1.2}$$

由于只考虑沿x轴的分量($\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$)

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(-y\boldsymbol{i})idl}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(-y\boldsymbol{i})idl}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(y\boldsymbol{i})dl}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \tag{6.1.3}$$

3.Answer C

右手定则判断均为正.

4.Answer A

提示：

穿过圆心的两条边不用计算，而剩下两条边方向相同，效果一样，由此

$$B_A=2\times\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(\sin 0^\circ-\sin\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l} \tag{6.1.4}$$

5.Answer C

提示：

由题，长直导线在圆心处产生的磁感应强度

$$B_1 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{6.1.5}$$

圆导线在圆心产生的磁感应强度

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{6.1.6}$$

根据方向关系，圆心处

$$B = B_2 - 2B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(1 - \frac{1}{\pi}) \tag{6.1.7}$$

6.Answer　D

提示：

平面与袋型曲面构成的整体闭合曲面磁通量为0,因此求得穿过平面的磁通量为

$$\Phi_n = BS\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\pi R^2 B \tag{6.1.8}$$

$$\Phi_m = -\Phi_n \tag{6.1.9}$$

6.2 填空题

1.Answer　$\frac{ev}{2\pi r}$　$\frac{evu_0}{4\pi r^2}$　$\frac{evr}{2}$

提示：

$$I = \frac{q}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{ev}{2\pi r} \tag{6.2.1}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0}{2r}\frac{ev}{2\pi r} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2} \tag{6.2.2}$$

$$P_m = IS = \frac{ev}{2\pi r}\cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2} \tag{6.2.3}$$

2.Answer　$\frac{u_0 I}{2\pi R}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})$

提示：

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos\frac{\pi}{3}}(\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) = \frac{u_0 I}{2\pi R}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}) \tag{6.2.4}$$

即为所求.(注意穿过圆心的AB段磁感应强度为0.)

3.Answer　$0.04T$ 提示：

$$B_{max} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\sin\frac{\pi}{2} = 0.04T \tag{6.2.5}$$

6.3 计算题

1.Answer

由于密绕，可看成由许多同心线圈组成的，在$R_1 \to R_2$范围内，半径上大部位长度的线圈匝数为

$$n = \frac{N}{R_2 - R_1} \tag{6.3.1}$$

于是，在距离中心从r到$r + dr$范围内共有圆线圈匝数

$$ndr = \frac{N}{R_2 - R_1}dr \tag{6.3.2}$$

当线圈中的电流为I时，他们在中心处产生的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot ndr = \frac{\mu_0 IN}{2(R_2 - R_1)}\frac{dr}{r} \tag{6.3.3}$$

所有线圈在中心处所产生的磁感应强度都是同方向的，于是，圆心处的总磁感应强度

$$B = \int B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 IN}{2(R_2 - R_1)}\frac{dr}{r} = \boxed{\frac{\mu_0 IN}{2(R_2-R_1)} \ln\frac{R_2}{R_1}} \tag{6.3.4}$$

即为所求,方向垂直于纸面.

另解：

取区域电流dI,有

$$\frac{dI}{NI} = \frac{dr}{R_2 - R_1} \tag{6.3.5}$$

$$\Rightarrow dI = \frac{NIdr}{R_2 - R_1} \tag{6.3.6}$$

则得到到O处的产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 NI}{2(R_2 - R_1)}\frac{dr}{r} \tag{6.3.7}$$

以下同上一种方法.(6.3.4)

2.Answer

不失一般性，不妨在圆盘上取半径为r，宽度为dr的同心圆环，此时

$$dq = \sigma 2\pi r dr = \frac{q}{\pi R^2}2\pi r dr \tag{6.3.8}$$

则圆环上的电流为

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\frac{q}{\pi R^2}2\pi r dr}{T} = \frac{\frac{q}{\pi R^2}2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{qr\omega}{\pi R^2}dr \tag{6.3.9}$$

因此在圆心处

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}dr \tag{6.3.10}$$

所以

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}dr = \boxed{\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}} \tag{6.3.11}$$

方向垂直于纸面.

7 练习十五 安培环路定理 安培力 磁场对载流线圈的运动电荷的作用

7.1 选择题

1.Answer B

提示：

$$B = \mu_0 nI \tag{7.1.1}$$

2.Answer A

提示：

指向圆心磁感应强度大小为0.

3.Answer D

安培环路定理.

4.Answer C

安培环路定理.

5.Answer A

右手定则.

6.Answer C

7.Answer B

提示：

$$\frac{dI}{I} = \frac{dr}{d} \tag{7.1.2}$$

$$\Rightarrow dI = \frac{I}{d}dr \tag{7.1.3}$$

$$\therefore dP_m = \pi r^2 dI = \frac{I}{d}\pi r^2 dr \tag{7.1.4}$$

$$\Rightarrow \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{d}\pi r^2 dr = \frac{I\pi}{3d}(R_2^3 - R_1^3) \tag{7.1.5}$$

8.Answer　D

提示：

圆环变成正方形

$$W = I\Delta\Phi = IB[(\frac{2\pi R}{4})^2 - \pi R^2] = -IB\pi R^2(1 - \frac{\pi}{4}) = -3.4\times 10^{-2}J \tag{7.1.6}$$

9.Answer　D

7.2　填空题

1.Answer　$\frac{\mu_0 Il}{4\pi}$

提示：

$$dS = ldr \tag{7.2.1}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = \int_S Bldr \tag{7.2.2}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{r}{R} ldr = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \tag{7.2.3}$$

2.Answer　$8\pi\times 10^{-6}Wb = 2.51\times 10^{-5}Wb$

提示：

$$\Phi = BS = \mu_0 nIS = 2.51\times 10^{-5}Wb \tag{7.2.4}$$

3.Answer　$-\mu_0 I_1$　$\mu_0(I_1+I_2)$　0

提示：安培环路定理.

4.Answer　$\frac{\pi}{10} = 0.314N\cdot m$　$\frac{\pi}{20} = 0.157J$

提示：

$$M = I\Phi = \frac{1}{2}IB\pi R^2 = \boxed{0.314N\cdot m} \tag{7.2.5}$$

$$A = I\Delta\Phi = IBS(1 - \sin 30^\circ) = \boxed{0.157J} \tag{7.2.6}$$

5.Answer　$1.216\times 10^{-13}\boldsymbol{k}N$

由题可知，根据

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\\ &= e(0.80\times10^6\boldsymbol{i}+1.50\times10^6\boldsymbol{j})\times(0.40\boldsymbol{i}-0.20\boldsymbol{j})\\ &= e\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0.80\times10^6 & 1.50\times10^6 & 0\\ 0.40 & -0.20 & 0\end{vmatrix}\\ &= \boxed{1.216\times10^{-13}\boldsymbol{k}N.}\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

即为所求.

6.Answer $\sigma\omega rdr$ $\pi\omega\sigma r^3dr$ $\pi B\omega\sigma r^3dr$ $\frac{B\pi\sigma\omega R^4}{4}$

提示：

电流

$$I=\frac{q}{T}=\frac{\sigma2\pi rdr}{\frac{2\pi}{\omega}}=\sigma\omega rdr \tag{7.2.8}$$

环磁矩

$$m=IS=\pi r^2\sigma\omega rdr=\pi\omega\sigma r^3dr \tag{7.2.9}$$

磁力矩

$$M=IBS=B\pi\omega\sigma r^3dr \tag{7.2.10}$$

合力矩

$$\tau=\int_0^R Mdr=\frac{1}{4}B\pi\sigma\omega R^4 \tag{7.2.11}$$

7.3 计算题

1.Answer

(1)由题考虑安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I \tag{7.3.1}$$

由此当$r<a$时

$$B\cdot2\pi r=\mu_0I(\frac{r^2}{R^2})(\text{电流占比}) \tag{7.3.2}$$

得到

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}} \tag{7.3.3}$$

当$a < r < b$时

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \tag{7.3.4}$$

得到

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \tag{7.3.5}$$

当$b < r < c$时

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I - \mu_0 I \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \tag{7.3.6}$$

得到

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)}} \tag{7.3.7}$$

当$r > c$时

$$B \cdot 2\pi r = 0 \tag{7.3.8}$$

得到

$$\boxed{B = 0} \tag{7.3.9}$$

即为所求.

2.Answer

由题可得，在AB上每个电流元所在磁感应强度大小和方向均相同，由此对于AB段

$$\boldsymbol{F_{AB}} = \int_B^A I_2 d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} = I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d}} \tag{7.3.10}$$

方向垂直AB直线水平向左.

对于AC段，距I_1距离为r处取线元dr,因此

$$F_{AC} = \int_d^{d+a} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} dr = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}} \tag{7.3.11}$$

方向垂直AC向下.

对于BC段，距I_1距离为r处取线元dr,此时同样

$$F_{BC} = \int_d^{d+a} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} dl \tag{7.3.12}$$

由于

$$dl = \frac{dr}{\cos\frac{\pi}{4}} \tag{7.3.13}$$

因此，结合(7.3.12)与(7.3.13)式可得

$$F_{BC} = \int_{d}^{d+a} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos\frac{\pi}{4}} \frac{dr}{r} = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{2}\pi} \ln\frac{d+a}{d}} \tag{7.3.14}$$

方向垂直BC向右上45°角.

3.Answer

(1)由线圈磁矩公式

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P_m} \times \boldsymbol{B} = P_m B \sin\frac{\pi}{2} = IB\frac{\pi R^2}{2} = \boxed{0.0785 N \cdot m} \tag{7.3.15}$$

方向沿直径向上.

(2)力矩做功

$$A = I\Delta\Phi = IB \times \frac{\pi R^2}{2} = \boxed{0.0785 J} \tag{7.3.16}$$

即为所求.

8 练习十六 电磁感应定律 动生电动势

8.1 选择题

1.Answer B

2.Answer A

提示：

翻转180$^{\ominus}$即可知2倍关系.

3.Answer C

提示：

$$\varepsilon = Blv = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right) \tag{8.1.1}$$

即为所求.

4.Answer D

5.Answer A

8.2 填空题

1.Answer $Blv\sin\theta$ $<$ $\frac{Blv\sin\theta}{R}$ $\frac{B^2l^2v^2\sin^2\theta}{R}$

提示：

利用高中知识即可解题.

2.Answer $\frac{B\omega l^2}{6}$ $\frac{B\omega l^2}{18}$ $\frac{2}{9}B\omega l^2$

提示：

利用右手定则与公式

$$\varepsilon = \frac{1}{2}BL^2\omega \tag{8.2.1}$$

注意区分正负.

3.Answer $\frac{B\omega a^2}{2}$ $P \to S$ 0

提示：

利用

$$\varepsilon = \frac{1}{2}BL^2\omega \tag{8.2.2}$$

8.3 计算题

1.Answer

由题，不妨连接oa,oc构成一个回路，由此

$$S_{oac} = \frac{1}{4}\pi R^2 \tag{8.3.1}$$

设ϕ为线圈平面与磁场方向的夹角，由此

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\frac{d\sin\phi}{dt} = -BS\cos\phi\frac{d\phi}{dt} = -BS\omega\cos\phi = -\cos\phi\frac{1}{4}\omega\pi R^2B \tag{8.3.2}$$

由此，为图示位置时，$\phi = 0$，且oa,oc上的电动势为0，因此电动势大小为

$$\varepsilon_{ac} = \varepsilon = \boxed{\tfrac{1}{4}B\omega\pi R^2} \tag{8.3.3}$$

c点电势高，a点电势低.

2.Answer

由题

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}S = -\frac{dB}{dt}(\frac{1}{2}\theta R^2 - \frac{1}{2}\times 0.06\times 0.06\times\sin\theta) = \boxed{-3.68\times 10^{-3}} \tag{8.3.4}$$

负号表示感生电动势为逆时针方向.

9 练习十七 感生电动势 磁场能量

9.1 选择题

1.Answer B

2.Answer D

3.Answer A

4.Answer D

提示：

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{9.1.1}$$

5.Answer D

6.Answer C

提示：

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{NBS}{I} = \frac{N\mu\frac{N}{l}IS}{I} = \mu\frac{N^2S}{l} = \mu\frac{N^2}{l}\pi r^2 \tag{9.1.2}$$

$$\because W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{9.1.3}$$

$$\therefore \frac{L_1}{L_2} = \frac{W_{m1}}{W_{m2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{2} \tag{9.1.4}$$

7.Answer D

课本基本概念.

8.Answer B

课本基本概念.

9.Answer D

1.关于非静电场是有旋场

其实要想搞清楚电磁场就绕不开麦克斯韦方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases}$$

语言描述一下上述四个方程依次是:(1)磁电感应强度的散度等于电荷密度,也就是电荷产生发散的场;(2)时变的磁场产生旋转电场;(3)磁场的散度为零,不存在磁单极子;(4)电流密度和时变电感应强度产生旋转的磁场。所以说我上面对非静电场中旋转电场的解释有些牵强,但作为一种理解,这样把电荷看成与磁荷一样不可分,从而去理解旋转电场也未尝不可。事实上应该冲麦克斯韦方程去理解才是严谨的,如(4)描述,是运动的电荷(电流密度J0)和变化的电感应强度(例如介质改变引起介电常数变化)产生了旋转的磁场,然后如(2)描述,这个磁场产生了旋转的电场。当然电磁场是同时存在不分先后的,这里然后只是承接上文没有时间先后的意思。

图 14: 非静电场的性质

区分静电场有源无旋,磁场与非静电场有旋.(详细请参照[15],[16])

比较	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L E \cdot dl = 0$ 保守场(有势场)
稳恒磁场	$\oint_S B \cdot dS = 0$ 无源场	$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i$ 非保守场(无势场)

知乎用户

图 15: 静电场与恒稳磁场比较

9.2 填空题

1.Answer $1.26\times10^{-3}V$ 6.3×10^{-4} $1.26\times10^{-3}C$

提示：

(此题可能不考.)

$$\because B=\mu_0 nI \tag{9.2.1}$$

$$\therefore \varepsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}(\Phi=BS)=-N\mu_0 nS\frac{dI}{dt} \tag{9.2.2}$$

而

$$q=I\Delta t \tag{9.2.3}$$

代入数据即可.

2.Answer $1.27\times10^{-4}T$

提示;

注意反向的2倍关系.

$$\Delta q=N\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{\frac{1}{4}NB\pi D^2\times 2}{R} \tag{9.2.4}$$

代入求B即可.

3.Answer $\Phi_{BA}=\Phi_{AB}$

由于磁通量公式

$$\Phi=MI \tag{9.2.5}$$

其中M为互感系数.

两者均不发生改变，故而相等.

4.Answer 0 $\frac{2}{9}\frac{\mu_0 I^2}{\pi^2a^2}$

两根平行长直导线在相距都为a的O点处产生的磁感应强度大小相等、方向相反，所以O点处$B=0$,磁场能量密度$\omega_{mo}=\frac{B^2}{2\mu}=0$.

而在P点产生的磁感应强度方向相同，因此

$$B=B_1+B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}+\frac{\mu_0 I}{6\pi a}=\frac{2\mu_0 I}{3\pi a} \tag{9.2.6}$$

$$\Rightarrow \omega_{mP}=\frac{B^2}{2\mu_0}=\boxed{\frac{2\mu_0 I^2}{9\pi^2a^2}} \tag{9.2.7}$$

9.3 计算题

1.Answer

(1)由题根据无限长直导线产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{9.3.1}$$

利用该公式取矩形线框的正法线方向为垂直纸面向里，则

$$\Phi_m = \int_S B \cdot dS = \int_c^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a \cdot dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b}{c} \tag{9.3.2}$$

因此

$$M = \frac{\Phi}{I} = \boxed{\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b}{c}} \tag{9.3.3}$$

(2)线框中的互感电动势为

$$\varepsilon_i = -M\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} I_0 e^{-\omega t}(-\omega) \ln \frac{b}{c} = \boxed{\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \omega e^{-\omega t} \ln \frac{b}{c}} \tag{9.3.4}$$

为正，电动势方向为顺时针.

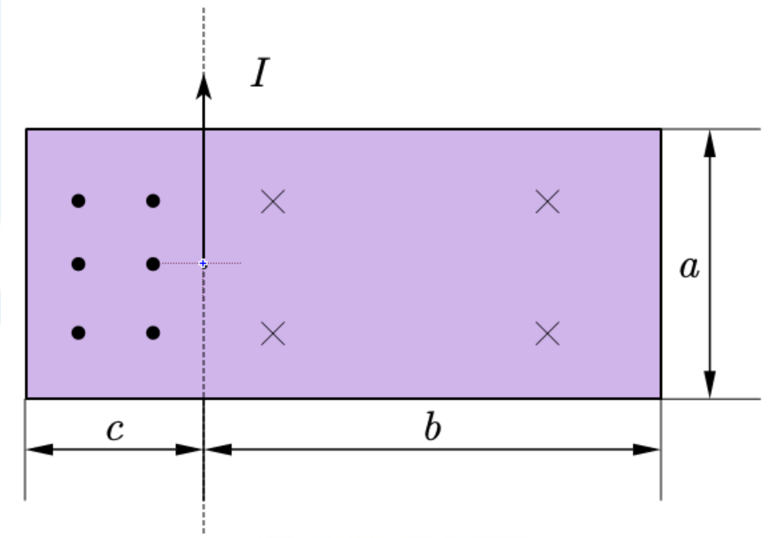


图 16: 第1题示意图

2.Answer

由题当大环以ω转动时产生的电流

$$I = \frac{q}{T} = \frac{\lambda 2\pi r_2}{\frac{2\pi}{\omega}} = \lambda \omega r_2 \tag{9.3.5}$$

在中心O点处产生的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r_2}=\frac{1}{2}\mu_0\lambda\omega \tag{9.3.6}$$

而由于$r_2>>r_1$，则在小环内可看成均匀磁场，此时

$$\Phi_m=B\pi r_1^2=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}\pi r_1^2 \tag{9.3.7}$$

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\frac{\mu_0\lambda\pi r_1^2}{2}\frac{d\omega}{dt} \tag{9.3.8}$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R}=\boxed{-\frac{\mu_0\lambda\pi r_1^2}{2R}\frac{d\omega}{dt}} \tag{9.3.9}$$

方向：$\frac{d\omega}{dt}>0$时，i为负值，即i为顺时针方向；
$\frac{d\omega}{dt}<0$时，i为正值，即i为逆时针方向.

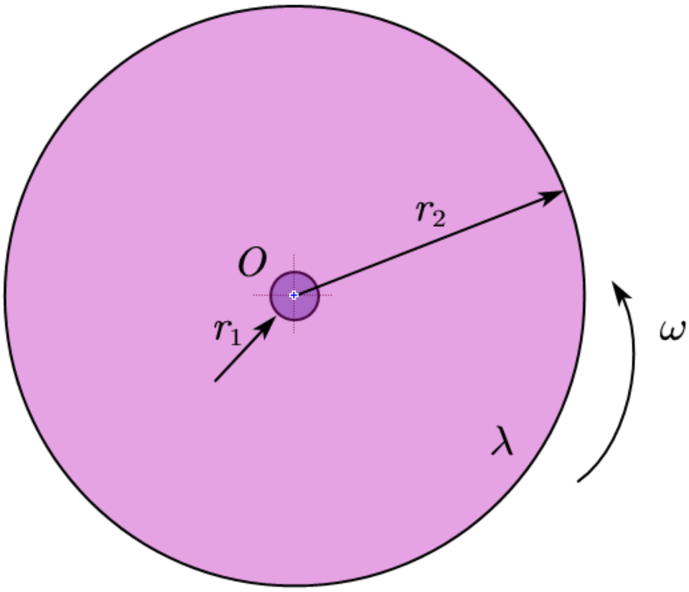


图 17: 第2题示意图

10 练习十八 狭义相对论

10.1 选择题

1.Answer B

基本概念.

2.Answer C

基本概念.

3.Answer D

同填空题第二题.

4.Answer　B

加速后

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1.25m_0 \tag{10.1.1}$$

粒子的动能为

$$E_k = (m-m_0)c^2 = \boxed{0.25m_0c^2} \tag{10.1.2}$$

5.Answer　A

运动时

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5m_0}{3} \tag{10.1.3}$$

$$\Rightarrow E_k = (m-m_0)c^2 = \frac{2m_0c^2}{3} \tag{10.1.4}$$

$$\Rightarrow E = E_k + E_0 = \frac{5m_0c^2}{3} \tag{10.1.5}$$

$$\Rightarrow p = mv = \frac{2E_k}{c} = \frac{4m_0c}{3} \tag{10.1.6}$$

即为所求$\boxed{\text{A}}$.

10.2　填空题

1.Answer　相对性原理　光速不变原理

2.Answer　$\frac{m}{ab}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

根据狭义相对论的长度收缩与相对论质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.2.1}$$

$$a' = a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{10.2.2}$$

而宽度不变

$$\therefore \sigma' = \frac{m}{a'b} = \frac{m_0}{ab(1-\frac{v^2}{c^2})} \tag{10.2.3}$$

3.Answer　4

由题

$$E_{all} = E_0 + K_{Kinetic} = 4E_0 \tag{10.2.4}$$

相对论总能量也可表示为

$$E_{all} = \gamma m_0 c^2 \tag{10.2.5}$$

其中，γ为洛伦兹因子，m_0为静止质量，c为光速，由于4倍关系

$$4m_0c^2 = \gamma m_0 c^2 \tag{10.2.6}$$

因此

$$\boxed{\gamma = 4} \tag{10.2.7}$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.2.8}$$

即

$$m = 4m_0 \tag{10.2.9}$$

即为所求.

10.3 计算题

1.Answer

根据洛伦兹变换公式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10.3.1}$$

可得

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10.3.2}$$

则在K系中，两事件同时发生$t_1 = t_2$，则

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10.3.3}$$

所以

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\frac{x_2-x_1}{x_2'-x_1'}=\frac{1}{2} \tag{10.3.4}$$

解得

$$\boxed{v=\frac{\sqrt{3}}{2}c} \tag{10.3.5}$$

而在K'系上述两事件不同时发生，设分别发生于t_1'和t_2'时刻，则

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad t_2'=\frac{t_2-\frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10.3.6}$$

由此得

$$t_1'-t_2'=\frac{\frac{v(x_2-x_1)}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\boxed{5.77\times10^{-6}s.} \tag{10.3.7}$$

即为所求.

2.Answer

根据相对论动能公式

$$E_k=mc^2-m_0c^2 \tag{10.3.8}$$

由此可得

$$E_k=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{(\frac{v}{c})^2}}-1\right) \tag{10.3.9}$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{v}{c})^2}}-1=\frac{E_k}{m_0c^2}=1.419 \tag{10.3.10}$$

解得

$$\boxed{v=0.91c.} \tag{10.3.11}$$

平均寿命

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=\boxed{5.31\times10^{-8}s.} \tag{10.3.12}$$

(实际上，由于计算取值位数的差异，最后答案可在5.30 ∼ 5.32附近波动.)

11 练习十九 热辐射 光的量子性 氢原子的波尔理论

11.1 选择题

1.Answer B

课本基本概念.

2.Answer D

根据维恩(W.Wien)位移定律.

$$T\lambda_m = b \tag{11.1.1}$$

其中，$b = 2.898 \times 10^{-3} m \cdot K$，为维恩常量.

3.Answer C

由斯特藩(Stefan)-玻尔兹曼(Boltzmann)定律

$$M_0(T) = \sigma T^4 \tag{11.1.2}$$

可知道四倍关系.

4.Answer D

三短一长选最长.

5.Answer A

(1)考虑介质存在的情况(折射率).

(3)一个光子的静止质量$m_0 = 0$，运动质量$m = \frac{hv}{c^2}$，能量$E = hv$，动量$p = \frac{hv}{c}$.

(5)考虑静止质量与动质量的关系(光子没有静止质量，但存在动质量).

6.Answer B

由题，结合下图中的能级示意图，激发到第三激发态时，则$n = 4$，氢原子激发出的光谱条数

$$N = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{11.1.3}$$

即

$$C_4^2 = 6 \tag{11.1.4}$$

可见光的条数只有2条.(即巴耳末系，从$n = 3$向$n = 2$跃迁，红色光谱；从$n = 4$向$n = 2$跃迁，蓝色光谱.)

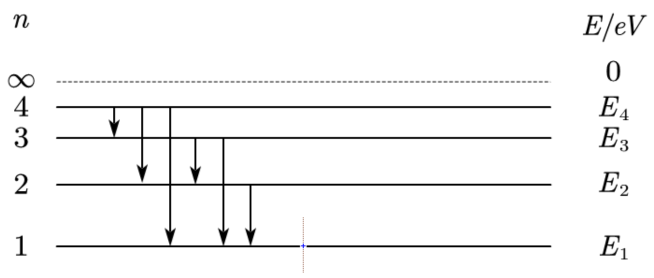


图 18: 能级示意图

7.Answer D

由于波数公式

$$\overline{v}=\frac{1}{\lambda}=\frac{v}{c}=R(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}),n=m+1,m+2,m+3,\cdots \tag{11.1.5}$$

莱曼（T.Lyman）系$(m=1,n=2,3,4,\cdots)$,有

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}) \tag{11.1.6}$$

可用最长的波长λ,那么$m=1,n\to\infty$,可得

$$R=\frac{1}{913} \tag{11.1.7}$$

$$\therefore\lambda=\frac{1}{R}\frac{n^2}{n^2-1} \tag{11.1.8}$$

后面就是单位换算的问题，即为所求，选D.

8.Answer C

考虑

$$h\frac{c}{\lambda_1}=E_2-E_1=E_1(\frac{1}{2^2}-1) \tag{11.1.9}$$

$$h\frac{c}{\lambda_2}=E_3-E_1=E_1(\frac{1}{3^2}-1) \tag{11.1.10}$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{32}{27} \tag{11.1.11}$$

9.Answer A

提示：

$$v_{nm}=\frac{|E_m-E_n|}{h} \tag{11.1.12}$$

$$\Rightarrow E_n = E_1 + \frac{hc}{\lambda_{n1}} = -11.82eV \tag{11.1.13}$$

10.Answer　C

根据波尔理论，氢原子在n能级上的电子动能为

$$K = -E = -(-\frac{13.6}{n^2})eV = \frac{13.6}{n^2}eV \tag{11.1.14}$$

其中，E为该能级能量，n为能级数(主量子数).

所以，$n=1$(基态)的动能为：

$$K_1 = \frac{13.6}{1^2}eV = 13.6eV \tag{11.1.15}$$

$n=4$的轨道的动能为

$$K_4 = \frac{13.6}{4^2}eV = \frac{13.6}{16}eV \tag{11.1.16}$$

$$\therefore \frac{K_4}{K_1} = \frac{1}{16} \tag{11.1.17}$$

故选C.

11.2　填空题

1.Answer　$1.42 \times 10^3 K$

$$M_B(T) = 22.8W \cdot cm^{-2} = 22.8 \times 10^4 W \cdot m^{-2} \tag{11.2.1}$$

根据玻尔兹曼定律

$$T = \sqrt[4]{\frac{M_B(T)}{\sigma}} = \boxed{1.42 \times 10^3 K} \tag{11.2.2}$$

2.Answer　$7.7 \times 10^5 m/s$　1.69V

3.Answer　$0.0112m$　$3.23 \times 10^{18} Hz$　$2.14 \times 10^{-15} J$

4.Answer　9

根据能级半径公式

$$E = -13.6eV + 12.09eV = -1.51eV = \frac{E_0}{n^2} \tag{11.2.3}$$

$$\Rightarrow n = 3 \tag{11.2.4}$$

$$\therefore r_n = n^2 r_1 = \boxed{9r_1} \tag{11.2.5}$$

5.Answer　13.6eV　5

由波尔理论可知,基态电离能

$$E = E_\infty - E_1 = 0 - (-13.6eV) = 13.6eV \tag{11.2.6}$$

而电离能为$0.85eV$的激发态氢原子满足

$$E_\infty - E_n = 0 - (-\frac{13.6}{n^2}) \tag{11.2.7}$$

$$\therefore n = \boxed{5.} \tag{11.2.8}$$

6.Answer　2.55eV

基态能量为$-13.6eV$,定态l的能量k的能量为-13.6+10.2=-3.4eV,跃迁过程中发射的光子能量为-0.85+3.4=2.55eV.

11.3　计算题

1.Answer

(1)由题太阳在单位时间内辐射的总功率

$$E = 1.37 \times 10^3 \times 4\pi (R_{earth})^2 = \boxed{3.87 \times 10^{26} W} \tag{11.3.1}$$

则可求出太阳的辐出度

$$E_0 = \frac{E}{4\pi R_{sun}} = 0.674 \times 10^8 W \cdot m^{-2} \tag{11.3.2}$$

(2)由斯特藩(Stefan)-玻尔兹曼(Boltzmann)定律

$$W_0(T) = \sigma T^4 \tag{11.3.3}$$

解出

$$T = \sqrt[4]{\frac{W_0(T)}{\sigma}} = \boxed{5872\text{K}} \tag{11.3.4}$$

即为所求.

2.由

$$evB = \frac{mv^2}{R} \tag{11.3.5}$$

再由

$$hv = \frac{1}{2}mv^2 + A(\text{逸出功}) \tag{11.3.6}$$

由此结合(11.3.5)与(11.3.6)可得

$$A = hv - \frac{1}{2}mv^2 = h\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{2}mv^2 = \boxed{4.66 \times 10^{-19}J} = \boxed{2.91\text{eV.}} \tag{11.3.7}$$

12 练习二十 量子力学初步

12.1 选择题

1.Answer D

2.Answer A

考虑相对论效应，实物粒子的总能量E可以分为静止能量E_0和动能E_k两部分，即

$$E = E_0 + E_k. \tag{12.1.1}$$

根据相对论能量-动量关系，总能量E和动量p之间的关系为

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \tag{12.1.2}$$

其中，m_0为实物粒子的静止质量，c为光速.

由此得到

$$E^2 = (\frac{hc}{\lambda})^2 + (m_0c^2)^2 \tag{12.1.3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{h^2c^2 + \lambda^2(m_0c^2)^2}}{\lambda} \tag{12.1.4}$$

由此结合(12.1.1)

$$E_0 + E_k = \frac{\sqrt{h^2c^2 + \lambda^2(m_0c^2)^2}}{\lambda} \tag{12.1.5}$$

$$\Rightarrow E_0 + E_k = \sqrt{\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + E_k^2} \tag{12.1.6}$$

$$\Rightarrow (E_0 + E_k)^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2} + E_k^2 \tag{12.1.7}$$

$$\Rightarrow E_0^2 + 2E_0E_k = \frac{h^2c^2}{\lambda^2} \tag{12.1.8}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_0^2 + 2E_0E_k}} \tag{12.1.9}$$

同样也可以根据德布罗意公式联立(12.1.2)可得

$$E_k = (m - m_0)c^2 = eU \tag{12.1.10}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{2m_0c^2eU + (eU)^2} \tag{12.1.11}$$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(E_k/c)^2 + 2m_0E}} = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k}} = \frac{hc}{\sqrt{(eU)^2 + 2m_0c^2eU}} \tag{12.1.12}$$

总能量为

$$E = m_0c^2 + E_k \tag{12.1.13}$$

即

$$hv = m_0c^2 + E_k \tag{12.1.14}$$

故选A.

补充:

若忽略相对论效应

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}} \tag{12.1.15}$$

3.Answer　B

忽略相对论效应

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 3.3 \times 10^{-11}m \tag{12.1.16}$$

故选B.

4.Answer　A

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv}{2eB} \tag{12.1.17}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{12.1.18}$$

结合(12.1.17)和(12.1.18)可得

$$\lambda = \frac{h}{2eRB} \tag{12.1.19}$$

故选A.

5.Answer　A

基本概念.

6.Answer D

基本概念.

7.Answer C

基本概念.

8.Answer D

归一化条件.

9.Answer A

将$x=\frac{5a}{6}$代入波函数方程

$$\Psi(\frac{5a}{6})=-\frac{1}{\sqrt{2a}} \tag{12.1.20}$$

$$[\Psi(x)]^2=\frac{1}{2a} \tag{12.1.21}$$

故选A.

10.Answer D

令

$$\frac{d|\Psi(x)|^2}{dx}=0 \tag{12.1.22}$$

$$\Rightarrow 2c^2xe^{-2kx}(1-kx)=0 \tag{12.1.23}$$

$$\because x\neq 0$$

$$\therefore x=\frac{1}{k} \tag{12.1.24}$$

处取极值.

故选D.

12.2 填空题

1.Answer $\lambda=0.136nm$

2.Answer $\lambda=1.8\times10^{-10}m$ $\lambda=1.6\times10^{-10}m$

3.Answer $\Delta P_x=1.33\times10^{-23}kg\cdot m/s$

4.Answer $\sqrt{\frac{2}{a}}$

根据教材定义，归一化系数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(|\Psi|)^2dx=\int_0^a(|\Psi|)^2dx=1 \tag{12.2.1}$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^a A^2\sin^2\frac{n\pi}{a}xdx &= \frac{a}{n\pi}A^2\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}xd(\frac{n\pi}{a}x)\\ &= \frac{a}{2n\pi}A^2\int_0^a(1-\cos\frac{2n\pi}{a}x)d(\frac{n\pi}{a}x)\\ &= \frac{a}{2n\pi}A^2 n\pi = \frac{a}{2}A^2 = 1\end{aligned} \tag{12.2.2}$$

$$\Rightarrow A = \boxed{\sqrt{\tfrac{2}{a}}} \tag{12.2.3}$$

∴粒子的波函数

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x \tag{12.2.4}$$

即为所求.

12.3 计算题

1.Answer

由题

$$E_k = 1keV = 1.60\times10^{-16}J \tag{12.3.1}$$

而

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e} \tag{12.3.2}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2m_eE_k} = 1.71\times10^{-23}kg\cdot m\cdot s^{-1} \tag{12.3.3}$$

(其中,$m_e = 9.11\times10^{-31}kg.$)

又根据不确定性关系

$$\Delta x\cdot\Delta p_x \geq h \tag{12.3.4}$$

因而

$$\Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x} = 6.626\times10^{-24}kg\cdot m\cdot s^{-1} \tag{12.3.5}$$

则至少应该为

$$\frac{\Delta p_x}{p}\times100\% = \boxed{38.75\%} \tag{12.3.6}$$

即为所求,其中普朗克(Planck)常量$h = 6.626\times10^{-34}J\cdot s$,具体计算请同学们自行通过计算器计算可得.

2.Answer

(1)由题，根据德布罗意(de Broglie)公式

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \boxed{1.66\times10^{-35}m} \tag{12.3.7}$$

(2)由于$\Delta x = 0.1\times10^{-3}m$，根据不确定关系

$$m\Delta v_x = \Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x} = 6.626\times10^{-30}kg\cdot m\cdot s^{-1} \tag{12.3.8}$$

$$\Rightarrow \Delta v_x = \boxed{1.66\times10^{-28}m\cdot s^{-1}} \tag{12.3.9}$$

即为所求.

3.Answer

(1)由题，一维无限深势阱中粒子的可能能量为

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8ma^2} \tag{12.3.10}$$

其中a为势阱宽度，当量子数$n=1$时，粒子处于基态，能量最低，电子的最低能级为基态，其能量为

$$E_1 = \frac{n^2h^2}{8ma^2} = \frac{h^2}{8ma^2} = \boxed{1.51\times10^{-18}J} \tag{12.3.11}$$

(2)电子在一维无限深方势阱中的波函数为

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}),\quad 0<x<a \tag{12.3.12}$$

当$n=2$时

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}),\quad 0<x<a \tag{12.3.13}$$

对应的概率密度函数

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{2\pi x}{a}),\quad 0<x<a \tag{12.3.14}$$

此时，令

$$\frac{d|\Psi(x)|^2}{dx} = 0 \tag{12.3.15}$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi}{a^2}\sin(\frac{2\pi x}{a})\cos(\frac{2\pi x}{a}) = 0,\quad 0<x<a \tag{12.3.16}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4} \tag{12.3.17}$$

时$|\Psi(x)|^2$有极值.

再由

$$\frac{d^2|\Psi(x)|^2}{dx^2} > 0 \tag{12.3.18}$$

可知

$$\Rightarrow x = \frac{a}{2} = 0.10nm \tag{12.3.19}$$

处概率最小，其值均为$\boxed{0.}$

即为所求.

补充:

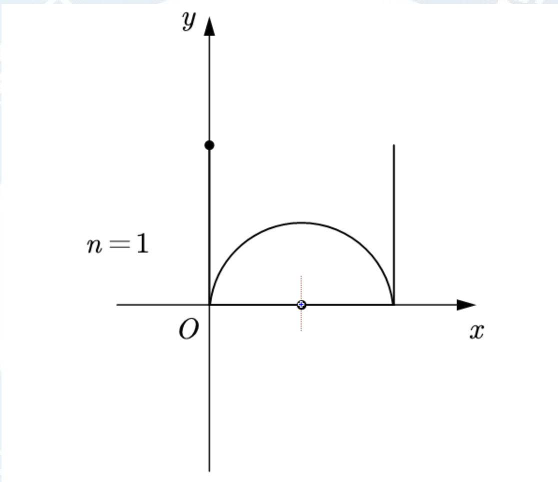


图 19: 电子处于基态$n = 1$时分布

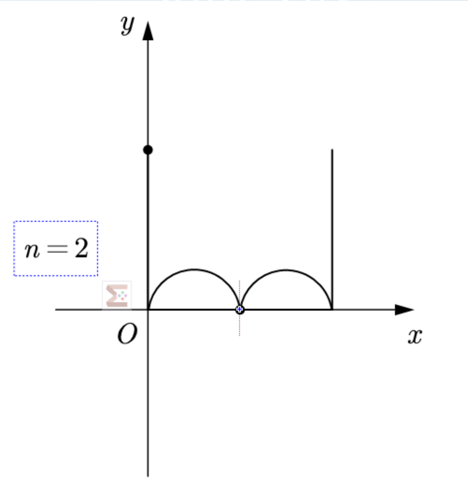


图 20: 电子处于基态$n = 2$时分布

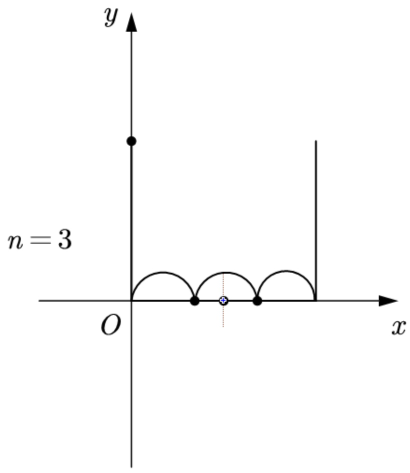


图 21: 电子处于基态$n = 3$时分布

(方势阱宽度为a.)

(你以为这就结束完结了吗？那你错啦！)

夹带私货

公式练手

(1)格林公式（Green equation）

设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数 $P(x,y)$及$Q(x,y)$在 D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

(2)高斯公式(Gauss's law)

设空间有界闭合区域Ω，其边界∂Ω 为分片光滑闭曲面。函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$及其一阶偏导数在Ω 上连续，那么

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y dz + Q\mathrm{d}z dx + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \iint_{\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

(3)麦克斯韦方程组(Maxwell's equation)

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}&=0\\ \nabla\times\vec{B}&=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{12.3.20}$$

或者

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ &\nabla\times\vec{E}=-\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ &\nabla\cdot\vec{B}=0\\ &\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\tfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

(4)梯度、散度、旋度与拉普拉斯算子

1. 梯度(Gradient)

   梯度是个向量 $\langle\frac{\partial f}{\partial z}i,\frac{\partial f}{\partial y}j,\frac{\partial f}{\partial z}k\rangle$，指向上升速度最快的方向。机器学习中梯度下降是沿着梯度反方向，故公式中用负号；

   梯度操作将一个标量场f 转变为向量场；

   梯度可被视为Del操作符 $(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$“数乘”标量(Scala)函数 f；

$$\langle\frac{\partial f}{\partial z}i,\frac{\partial f}{\partial y}j,\frac{\partial f}{\partial z}k\rangle \tag{12.3.22}$$

2. 散度(Divergence)

   散度操作将一个向量场$\vec{F}$转变为标量场；

   散度是Del算符(∇)“点积”一个向量(Vector)函数；

$$Div(\vec{F})=\nabla\cdot\vec{F}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot(f_1,f_2,f_3)=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{12.3.23}$$

3. 旋度(Curl)

   旋度是Del操作符(∇)“叉积”一个向量(Vector)函数；

   旋度操作将一个向量场 $\vec{F}$转变为向量场；

$$\begin{aligned} Curl(\vec{F})&=\nabla\times\vec{F}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(f_1,f_2,f_3)\\ &=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{12.3.24}$$

4.拉普拉斯算子(Laplacian)

$$
\begin{aligned}
\nabla &= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \\
\Delta &= \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{12.3.25}
$$

Laplacian在流体力学、电磁学和量子力学等领域中应用广泛。经典的例子就是以他名字命名的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{12.3.26}$$

也被称为物理学中三大偏微分方程之首。

在物理中ϕ通常表示势(potential)，这个方程表达：势的梯度的散度等于0，也就是说势的变化平稳，没有逼近最值，方程适用于以下场景：一个温度分布达到均衡的没有热源的房间；或一个电荷密度为0的区域等。如果房间里有根点燃的蜡烛，蜡烛周围的区域温度最高，这并非拉普拉斯方程适用的场景，而适用于泊松方程

$$\nabla^2 \phi = f \tag{12.3.27}$$

拉普拉斯方程的泛化形式。

总之，拉普拉斯方程描述的是一种不依赖时间的无源场的均衡情况。

13 参考文献

参考文献

[1] 数学物理方法.吴崇试主讲(2020新版)https://www.bilibili.com/video/BV1Ck4y1P7Gd/?spm_id_from=333.999.0.0

[2] 数学物理方法(全合集)https://www.bilibili.com/video/BV1ey4y1K7Yg/?spm_id_from=333.999.0.0&vd_source=784700fce11d6e417af83c29344fe88f

[3] Griffiths Quantum Mechanics 格里菲斯量子力学导论https://www.bilibili.com/video/BV1Gg4y1T7MV/?spm_id_from=333.999.0.0

[4] 北京大学量子力学全58讲主讲-田光善视频教程https://www.bilibili.com/video/BV1yb411G7bo/?spm_id_from=333.999.0.0

[5] https://zhuanlan.zhihu.com/p/99710616

[6] https://zhuanlan.zhihu.com/p/145785676

[7] https://zhuanlan.zhihu.com/p/145743480

[8] https://zhuanlan.zhihu.com/p/525901926

[9] https://pan.baidu.com/s/1BE5ZT1CZ1OpctbC6OW6LGw 提取码：ccnu 解压密码：22E09.249246BF

[10] https://zhuanlan.zhihu.com/p/56466991

[11] https://zhuanlan.zhihu.com/p/510741969

[12] 曾谨言著.量子力学.卷1|第5版[M].北京:科学出版社,2013.

[13] 曾谨言著.量子力学.卷2|第5版[M].北京:科学出版社,2013.

[14] (德)顾樵(Qiao Gu)编著.数学物理方法[M].北京:科学出版社,2012

[15] https://zhuanlan.zhihu.com/p/640263056

[16] https://zhuanlan.zhihu.com/p/389642864

