МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
А. В. Чашкин

ЛЕКЦИИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Содержание

1 Основная теорема

Сформулируем и докажем теорему Пойа о сумме весов классов эквивалентности F функций из D в R, полагая, что на множестве D действует группа G, а на множестве R определена весовая функция w со значениями в коммутативном кольце K.

Теорема 1 *Сумма весов классов эквивалентности равна*

$$\sum_{F} W(F) = P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}(w(r))^2, \ldots, \sum_{r\in R}(w(r))^k\right),$$

где PG — цикловой индекс группы

Доказательство.Рассмотрим элемент g группы G, под действием которого множество D распадается на k_1 циклов длины единица, k_2 циклов длины два, и т. д. вплоть до k_s циклов длины s. Без ограничения общности будем полагать, что циклы длины единица формируются первыми $k1$ элементами множества D, циклы длины два формируются следующими $2k_2$ элементами так, что каждый цикл имеет вид $(d_i d_{i+1})$, и т. д. Последние sk_s элементов множества D образуют k_s циклов вида $(d_j d_{j+1} \ldots d_{j+s-1})$. Нетрудно видеть, что вектор значений $v(f)$ любой функции f, которая определена на D, принимает значения в R, и которая под действием элемента g переходит в себя, выглядит следующим образом. На первых k_1 местах произвольным образом располагаются любые элементы множества R. Следующие $2k_2$ мест заполнены k_2 парами одинаковых элементов из R. Это необходимо и достаточно для выполнения равенства $f(d) = f(g(d))$ при $d \in \{d_{k_1+1}, ..., d_{k_1+2k_2}\}$. Следующие $3k_3$ мест заполнены k_3 тройками одинаковых элементов из R и т. д. Наконец последние sk_s разрядов вектора $v(f)$ представляют собой последовательность из k_s блоков длины s, каждый из которых состоит из одинаковых элементов. Нетрудно видеть, что все такие векторы можно получить, раскрыв скобки в произведении

$$\left(\sum_{r\in R} r\right)^{k_1}\left(\sum_{r\in R} rr\right)^{k_2}\cdots\left(\sum_{r\in R}\underbrace{r\ldots r}_{s}\right)^{k_s}, \tag{1.1}$$

полагая при этом, что умножение в (1.1) некоммутативно. Таким образом,

$$\sum_{f=g(f)} v(f) = \left(\sum_{r\in R} r\right)^{k_1} \left(\sum_{r\in R} rr\right)^{k_2} \dots \left(\sum_{r\in R} \underbrace{r\dots r}_{s}\right)^{k_s}, \qquad (1.2)$$

Например, если $s = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и $R = \{x, y\}$, то

$$(x+y)(xx+yy)(xx+yy) = x\ xx\ xx + x\ xx\ yy + x\ yy\ xx + \\ +x\ yy\ yy + y\ xx\ xx + y\ xx\ yy + y\ yy\ xx + y\ yy\ yy. \qquad (1.3)$$

Теперь вычислим сумму весов всех функций, которые под действием элемента g переходят в себя. Для этого в (1.2) заменим каждый элемент r его весом $w(r)$. Тогда, в силумультипликативности функции w,

$$\sum_{f=g(f)} w(v(f)) = \left(\sum_{r\in R} w(r)\right)^{k_1} \left(\sum_{r\in R} (w(r))^2\right)^{k_2} \dots \left(\sum_{r\in R} (w(r))^s\right)^{k_s}. \quad (1.4)$$

Допустим, что веса функций, оставляемых элементом g на месте, принимают значения $w_1, \dots, w_m$. Тогда сумму весов рассматриваемых функций можно представить в виде

$$\sum_{w_i} w_i \psi_i(g) \qquad (1.5)$$

где $\psi_i(g)$ — число функций веса w_i. Сумма именно такого вида получится после открытия скобок в правой части равенства (1.4) и последующего приведения подобных слагаемых. Продолжая рассмотренный выше пример, положим $w(x) = t$, $w(y) = s$ и вычислим сумму весов всех функций, векторы значений которых перечислены в правой части равенства (1.3). Нетрудно видеть, что

$$(w(x) + w(y))(w(xx) + w(yy))(w(xx) + w(yy)) = \\ = (t+s)(t^2+s^2)(t^2+s2) = t^5 + t^4 s + 2t^3 s^2 + 2t^2 s^3 + ts^4 + s^5,$$

где коэффициент при одночлене $t^i s^j$ равен количествутех функций, вескоторых равен $t^i s^j$. Возвращаясь к равенству (1.4) , заметим, что произведение в его правой части есть ничто иное, как индекс элемента g, в который вместо переменных z_k подставлены суммы $\sum_{r\in R}(w(r))^2$. Следовательно, сумма весов всех функций, которые под действием элемента g переходят в себя, равна

$$I_g \left(\sum_{r\in R} w(r), (\sum_{r\in R}(w(r))^2, \ldots, (\sum_{r\in R}(w(r))^s \right). \tag{1.6}$$

Вычислив сумму величин (1.6) по всем элементам группы G и разделивезультат на порядок группы G, видим, что в силу (1.5)

$$P_G \left(\sum_{r\in R} w(r), (\sum_{r\in R}(w(r))^2, \ldots, (\sum_{r\in R}(w(r))^k, \ldots \right) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_{w_i} w_i \psi_i(g) = \sum_{w_i} w_i \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \psi_i(g) \right).$$

Из леммы Бернсайда следует, что при фиксированном значении веса w сумма $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_i(g)$ равна числуклассов эквивалентности, возникающих на множестве функций веса w_i в результате действия группы G на множестве D. Следовательно, левая часть последнего равенства равна сумме весов всех классов эквивалентности. Теорема доказана.