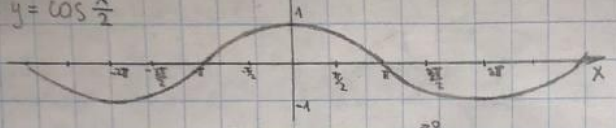
Билет 1

①

1) $y = \cos\frac{x}{2}$



2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-3n}{5n^2+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2(1-\overset{\to 0}{3/n})}{n^2(5-\underset{0\leftarrow}{2/n^2})} = \frac{1}{5}$

3) под каким $\angle$ линия $y_1 = \sqrt{3}\ln(x+1)$ $\cap$ ось OX

$y' = tg\,\alpha$, ур-е оси OX: $y_2 = 0$, абсцисса т. $\cap$: $y_1 = y_2$, $\sqrt{3}\ln(x+1) = 0$

$\ln(x+1) = 0$

$x+1 = e^0 \quad x+1 = 1 \quad x = 0 \Rightarrow$

$\angle$ наклона 1ой прямой l т. $x=0$: $\quad y_1' = (\sqrt{3}\ln(x+1))' = \frac{\sqrt{3}}{x+1}$; $x_0 = 0$

$tg\,\alpha = f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{0+1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$

$\angle$ наклона 2ой прямой l т. $x=0$: $\quad y_2' = (0)' = 0 \quad tg\,\beta = y_2' = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\angle = \alpha - \beta = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

Ответ: 60°

4) $y = 2x^3 - 6x$

1. $D(f)$: $x \in R$

2. $E(f)$: $y \in R$

3. $f(x) = 2x^3 - 6x$

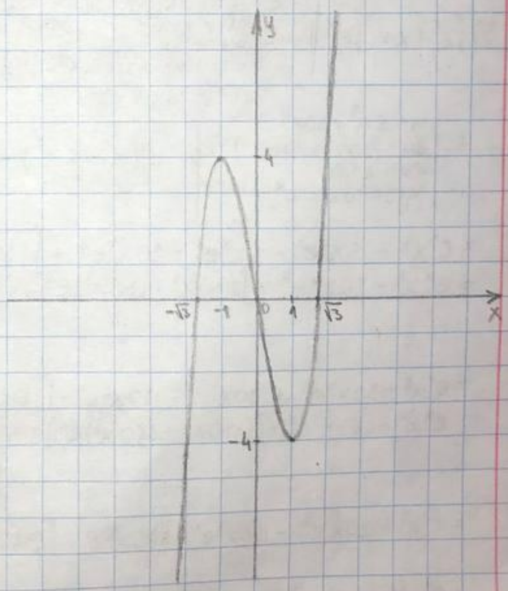
$f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x) = -2x^3 + 6x$

$f(x) \neq f(-x) \Rightarrow$ ф. нечёт.

4. $\cap$ с OX: $y = 0 \quad 2x^3 - 6x = 0$

$x(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

$\cap$ с OY: $x = 0 \quad y = 2\cdot(0)^3 - 6\cdot 0 = 0$



5. лок. экстремумы:

$f'(x) = (2x^3 - 6x)' = 6x^2 - 6$

$6x^2 - 6 = 0 \quad x = \pm 1$

$+ \quad - \quad +$

$\nearrow \; -1 \; \searrow \; 1 \; \nearrow$

$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1) = 4$

$f(1) = 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1 = -4$

5) $\int f(x)dx = F(x) + C = \frac{\ln x}{x} + C$

6) $\int x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x\,dx = \\ v = \int\cos x\,dx = \sin x\end{matrix}\right| = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

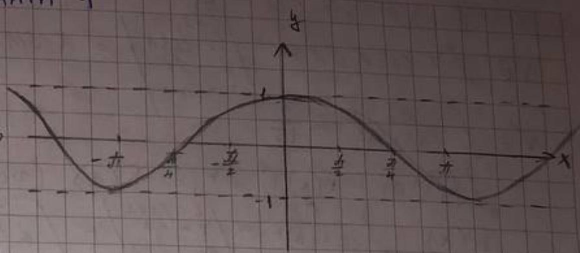
7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+3)^2} = \left|\begin{matrix} t = 2x+3 \\ x = \frac{t-3}{2} \\ dx = \left(\frac{t-3}{2}\right)'dt = \frac{1}{2}dt \\ t_в = 5 \quad t_н = 3\end{matrix}\right| = \int\limits_3^5 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_3^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Вариант 1

№1. гр. ф. $y = \cos \frac{x}{2}$

1) $y = \cos x$

2) $y = \cos \frac{x}{2}$ $f(k \cdot x)$ растян в 2 раза вдоль оси x



№2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 3n}{5n^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\cancel{n^2}(1 - 3/n)}{\cancel{n^2}(5 + 2/n^2)}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - \frac{3}{n}}{5 + \frac{2}{n^2}}\right) = \frac{1}{5}$

№3. $y = \sqrt{3} \ln(x+1)$ $\quad \alpha - ?$

$y_0 = 0$

$\sqrt{3} \ln(x+1) = 0$ при $x_0 = 0$

$y' = \frac{\sqrt{3}}{x+1}$

$y'(x_0) = tg\, \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} (60°)$

№4. $y = 2x^3 - 6x$

1. $D(f)$: $x = R$
2. $E(f)$: $y \in (-\infty; +\infty)$
3. $f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x)$

$-f(x) = -(2x^3 - 6x)$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ ф. нечет

4. т. пересеч с Ox: $2x^3 - 6x = 0$

$2x(x^2 - 3)$

$2x = 0 \quad x^2 - 3 = 0$

$x = 0 \quad x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}; -\sqrt{3}$

т. пересеч с oy: $2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0 = 0$

5. экстремумы

$f'(x) = 6x^2 - 6$

$6x^2 - 6 = 0$

$6x^2 = 6$

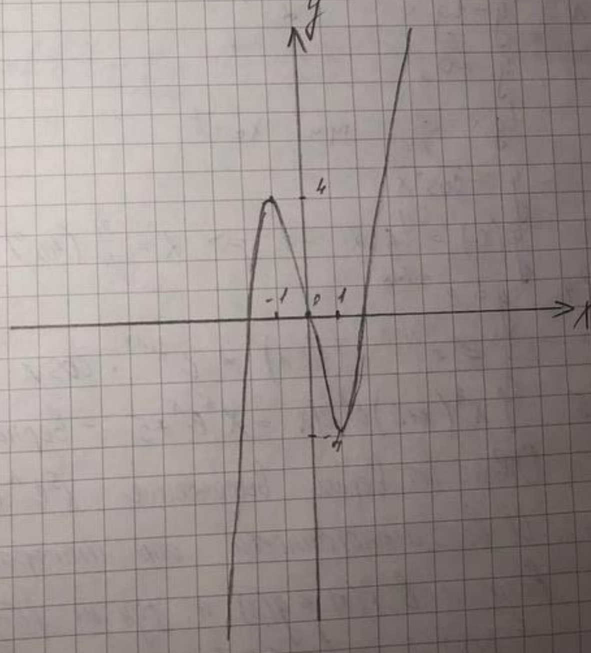
$x^2 = 1$

$x = 1; -1$

$(1; -4)$ $(-1; 4)$

6. убыв: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

возр: $[-1; 1]$



№5. $f(x) = \frac{\ln x}{x} + C$

№6. $\int x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ dv = \cos x \\ du = dx \\ v = \sin x \end{matrix} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$

№7. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+3)^2} = \frac{1}{15}$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (формула Ньютона – Лейбница)

$F(x) = \int \frac{dx}{(2x+3)^2} = \left| \begin{matrix} t = 2x+3 \\ x = \frac{t-3}{2} \\ dt = \frac{3}{2} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^{-1}}{-1} dt = -\frac{1}{2t} =$

$= -\frac{1}{4x+6} + C$

$F(x) = -\frac{1}{4x+6}$ $\quad F(1) = -\frac{1}{10}$ $\quad F(0) = -\frac{1}{6}$

$-\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

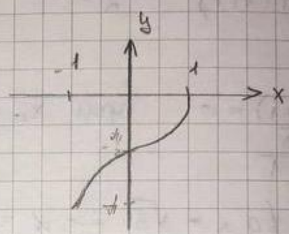
Билет 2

Вариант 2

№1 $y = -\arccos x$

1) $y = \arccos x$

2) $y = -\arccos x$ $\Big\} -f(x)$ симм. оси x



№2. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x+2} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty$

№3. $y = tg\, x$ $\quad \alpha - ?$

$y_0 = 0$

$tg\, x = 0$ при $x_0 = \pi$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y'(x_0) = tg\, \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \; (45^\circ)$

№4. $y = e^{\sin x}$

$y' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

№5. $\int x^4 (x+5) e^x dx = x^5 e^x + 5$ – верно?

Ответ: нет, верное выражение $x^5 e^x + C$

№6. Св-во монотонности опр. интеграла

Если $a < b$, $f(x) \le g(x)$ и фун-ции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

designed by beSmart

+C

N7. $\int_4^9 \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = 2\ln 2$ $F(x) = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t}{t^2-t}\,dt = 2\int \frac{1}{t-1}\,dt = 2\int \frac{1}{t-1}\,d(t-1) =$

$= 2\ln|t-1| = 2\ln|\sqrt{x}-1| + C$

$F(x) = 2\ln|\sqrt{x}-1|$ $\quad F(9) = 2\ln 2$ $\quad F(4) = 2\ln 1 = 2\cdot 0 = 0$

$2\ln 2$

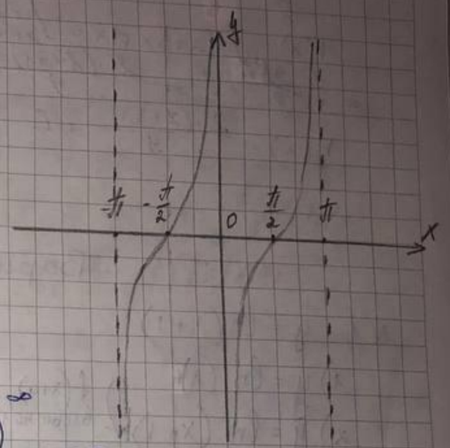
Билет 3

Вариант 3.

N1. $y = tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (-\pi; \pi)$

1) $y = tg\,x$

2) $y = tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\downarrow$ $f(x+a)$ влево на $\frac{\pi}{2}$

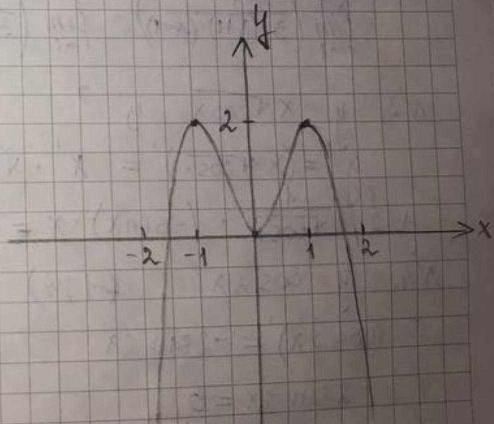


N2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \infty$

N3. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Rightarrow f'(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2+(\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2+(\Delta x)^2 = 2$

N4. $y = 4x^2 - 2x^4$



1. $D(f)$: $x \in R$
2. $E(f)$: $y \in (-\infty; 2]$
3. $f(x) = 4x^2 - 2x^4$
   $f(-x) = 4(-x)^2 - 2(-x)^4 = 4x^2 - 2x^4$
   $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ ф. четн
4. т. пересеч. с Ox: $2x^2 - 2x^4 = 0$
   $2x^2(2-x^2) = 0$
   $2x^2 = 0$ $\quad 2 - x^2 = 0$
   $x = 0$ $\quad x^2 = 2$
   $x = \sqrt{2};\ -\sqrt{2}$
   т. пересеч. с Oy: $4\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0$
5. экстремумы
   $f'(x) = 8x - 8x^3$
   $8x - 8x^3 = 0$
   $8x(1-x^2) = 0$
   $8x = 0$ $\quad 1 - x^2 = 0$
   $x = 0$ $\quad x = 1;\ -1$
   $(0;0)$ $(1;2)$ $(-1;2)$
6. убыв: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$
   возраст: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

$$N5 \quad \int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \left| \begin{matrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-2}{3} \right) + C$$

N6 ?

$$N7 \quad \int_{-2/3}^{-1/3} \sqrt{2+3x}\, dx = \frac{2}{9}$$

$$F(x) = \int \sqrt{2+3x}\, dx = \left| \begin{matrix} t = 2+3x \\ x = \frac{t-2}{3} \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{3} \cdot t^{1/2} dt = \frac{1}{3} \int t^{1/2} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{9} + C = \frac{2 \cdot (2+3x)^{3/2}}{9} + C$$

$$F(x) = \frac{2 \cdot (2+3x)^{3/2}}{9} + C \qquad F\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2 \cdot 1^{3/2}}{9} = \frac{2}{9} \qquad \frac{2}{9}$$

$$F\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{0}{9} = 0$$

$$N6. \quad f(x) = \sin x \text{ по } [0, \pi/3]$$

$$\text{при } n = 2,\ x_1 = \pi/6,\ \varepsilon_1 = x_0,\ \varepsilon_2 = x_1$$

$$\sum_{i=1}^{2} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 =$$

$$= \sin(x_0)(x_1 - x_0) + \sin(x_1)(x_2 - x_1) = \sin 0 \cdot (\pi/6 - 0) +$$

$$+ \sin \pi/6\ (\pi/3 - \pi/6) = \pi/6 + 1/2 \cdot \pi/6 =$$

$$= \pi/6\ (1 + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{12}$$

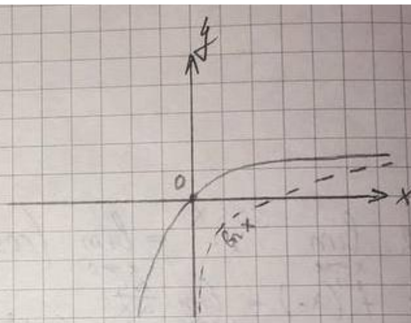
Билет 4

Вариант 4

№1. $y = \ln(x+1)$

1) $y = \ln(x)$

2) $y = \ln(x+1)$ } $f(x+a)$ влево на 1



№2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{3x^2-3} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\cancel{x-1}}{3\cdot(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{3(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{3x+3}\right) = \frac{1}{6}$

№3. $y = x\sqrt{\cos x}$ $\quad y' - ?$

$y' = (x\sqrt{\cos x})' = x'\cdot\sqrt{\cos x} + (\sqrt{\cos x})'\cdot x = 1\cdot\sqrt{\cos x} +$
$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot(-\sin x)\cdot x = \sqrt{\cos x} - \frac{x\cdot\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

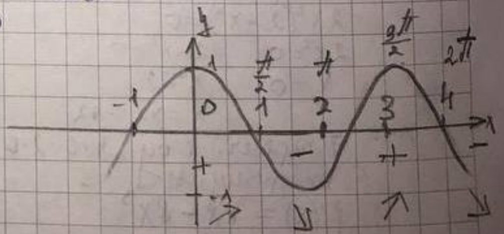
№4. $y = \cos 2x$ $\quad (-1;4)$ $\quad$ т. макс - ?

$(\cos 2x)' = -2\sin 2x$

$-2\sin 2x = 0$

$x = 0 \qquad x = \pi$

max: $x = 0$ ( )



№5. $\int \frac{dx}{x^2-2x} = \int \frac{dx}{x(x-2)} = \int \left(-\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-2)}{x-2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x| + C$

№6. Определенный интеграл (интеграл. Σ известна)
Пусть существует конечный предел интегральных сумм ($\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$), когда $\lambda \to 0$, ни зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части промежуточными точками $x_0, x_1 \dots x_{n-1}, x_n$, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$. Тогда этот предел назыв. определенным интегралом фун-ии $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозн $\int_a^b f(x)dx$, таким образом $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Простыми словами: опред. интеграл - предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю длины наиб. частичного интервала Δx.

№7. $S = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2}$

$F(x) = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C =$
$= -\frac{1}{x-1} + C$

$F(x) = -\frac{1}{x-1}$ $\quad F(3) = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}$

$F(2) = -1$

Билет 5

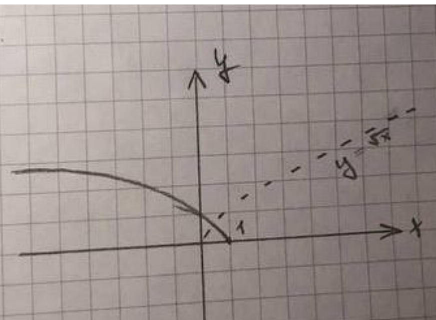
Вариант 5.

№1. $y = \sqrt{1-x}$

1) $y = \sqrt{x}$ $\downarrow$ $f(-x)$ сим оси x

2) $y = \sqrt{-x}$ $\downarrow$ $f(x+a)$ влево на 1

3) $y = \sqrt{1-x}$



№2. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)^2}{x^2+2x-x-2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)^2}{x\cdot(x+2)-(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{0}{-3} = 0$

N3. $y=(x^2-2x)e^{-x}$ $y'-?$

$y'=(x^2-2x)'\cdot e^{-x}+(e^{-x})'\cdot(x^2-2x)=(2x-2)\cdot e^{-x}+(-x)'\cdot e^{-x}\cdot(x^2-2x)=$

$=(2x-2)\cdot e^{-x}-(x^2-2x)\cdot e^{-x}=e^{-x}\cdot-(x^2+2x+2x+2)=-e^{-x}(x^2+4x+2)$

N4. $y=(x+1)^2$

N5. $F'(x)=f(x)$

$(x^4e^x+3)'=(x^4)'\cdot e^x+(e^x)'\cdot x^4+0=4x^3e^x+e^x\cdot x^4$

да является

N6. $\int\frac{\ln x}{x}dx=\left|\begin{matrix}t=\ln x\\ x=e^t\\ dx=e^t dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t}{e^t}\cdot e^t dt=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln x)^2}{2}+C$

N7. $\int_4^9\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=2\ln 4-2\ln 3=2\ln\frac{4}{3}$

$F(x)=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\left|\begin{matrix}t=\sqrt{x}\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2t}{t^2+t}dt=2\int\frac{t}{t(t+1)}dt=2\int\frac{dt}{t+1}=$

$=2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2\ln|t+1|=2\ln|\sqrt{x}+1|+C$

$F(9)=2\ln 4$

$F(4)=2\ln 3$

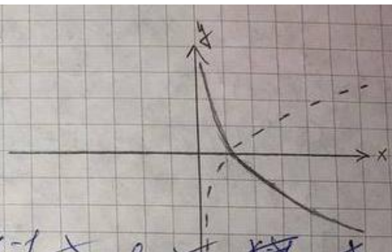
Билет 6

Вариант 6.

N1. $y=-\ln(x)$

1) $y=\ln(x)$ $-f(x)$ отразить по OX

2) $y=-\ln(x)$



$\cancel{N2\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3x^2-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{3(x+1)}=\frac{1}{6}}$

N2 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x}{x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(5+\frac{3}{x})}{x^2(1+\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}=5$

N3 ур-ие нормали $y=\frac{1}{x-1}$ в т. пересеч с Oy

ур-ие нормали: $(x-x_0)+y'(x_0)\cdot(y-y_0)=0$

$x_0=0$ $y_0=\frac{1}{-1}=-1$

$y'=\left(\frac{1}{x-1}\right)'=\frac{0\cdot(x-1)-1\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{0-1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$ $y'(x_0)=-1$

$(x-0)+(-1)(y+1)=0$

$x-y-1=0$ $y=x-1$

№4. Достаточное условие возрастания функции $f(x)$ на интервале

Если фун-ция имеет положит. производную на интервале, то она возрастает на этом интервале

№5. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

№6. интегр. сумма для $f(x)=x^3$

$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$

$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)^3\Delta x_i$

№7. $S=\int^{\pi/2} \sin 2x = 1$

$F(x)=\int \sin 2x\,dx \; \left| \begin{array}{l} t=2x \\ x=\frac{t}{2} \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\sin t}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt =$

$= \frac{1}{2}\cdot(-\cos t) = -\frac{\cos 2x}{2}+C$

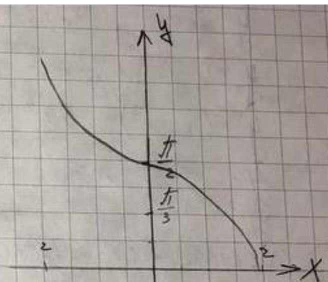
$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$F(0) = -\frac{1}{2}$ ①

Билет 7

$F(0) = -\frac{1}{2}$ ①

Вариант 7.



№1. $y=\arccos 2x$

1) $y=\arccos x$

2) $y=\arccos 2x$ } $f(x\cdot k)$ расет в 2р во оси x

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x \cdot x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{x} =$

$= \frac{1}{\cos 0}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$

№3. $y=\ln(\sin x)$ y' - ?

$y' = (\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$

№4. $f(x)$ имеющая 2 т. экстр. на $(-3;3)$

$y=\sin x$

№5. $\int\frac{dx}{x^2-2x+10} = \int\frac{dx}{(x-1)^2+9} = \int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+3^3} = \frac{1}{3}\,arctg\,\frac{x-1}{3}+C$

№6. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } -1\le x\le 0 \\ x^2, & \text{если } 0\le x\le 1 \end{cases}$

$0+\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}-0$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x^2dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

№7. $\int_1^e \ln x\,dx = 1$

$F(x) = \int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \\ v=x \end{vmatrix} = x\ln x - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - x + C$

$F(e) = e\ln e - e = 0$

$F(1) = \ln 1 - 1 = -1$

1

Билет 8

Вариант 8.

№1. $y=\sin 2x$

1) $y=\sin x$

2) $y=\sin 2x$ $\downarrow$ $f(x\cdot k)$ сжать в 2 раза по оси x

№2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n^2+1}}{1-3n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n\left(\frac{1}{n}-3\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}-3} =$

$= \frac{3\cdot\sqrt{1}}{-3} = -1$

№3. ур-ие касат. $y=1+x^3$ в т. пересеч. с Oy

$y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$

$y_0=0 \quad 1+x^3=0 \Rightarrow x_0=-1$

$y'=(1+x^3)'=3x^2 \quad y'(x_0)=3$

$y-0=3(x+1)$

$y=3(x+1)$

№4. Достаточное условие убыв. $f(x)$ на интервале.

Если фун-ия имеет отриц. производную на интервале, то она убывает на этом интервале.

№5. $\int \frac{\sin x\cos x + x}{\cos^2 x}dx = \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}_{1} + \underbrace{\int\frac{x}{\cos^2 x}dx}_{2} = \cancel{-\ln|\cos x|} + x\,tg x + \cancel{\ln|\cos x|} =$

$= x\,tg x$

1) $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|$

2) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \begin{vmatrix} u=x \\ du=dx \\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x} \\ v=tg x \end{vmatrix} = x\cdot tg x - \int tg x\,dx = x\cdot tg x + \ln|\cos x|$

№6. $\int \frac{x\,dx}{x+1} = \int 1 - \frac{1}{x+1}dx = \int 1dx - \int\frac{dx+1}{x+1} = x - \ln|x+1| + C$

№7. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2}-1$

$F(x) = \int x\cos\,dx = \begin{vmatrix} u=x \\ du=dx \\ dv=\cos x\,dx \\ v=\sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$F(0)=1$

$\frac{\pi}{2}-1$

designed by beSmart

Билет 9

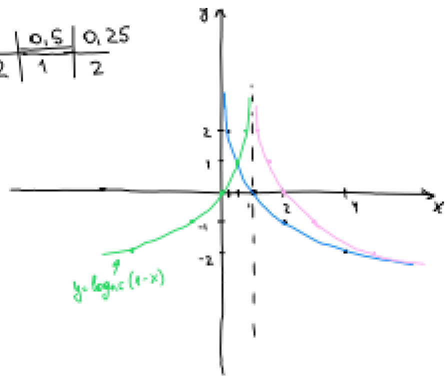
① $y = \log_{0,5}(1-x)$

x	1	2	4	0,5	0,25
y	0	-1	-2	1	2

1) $y = \log_{0,5} x$

2) $y = \log_{0,5}(x-1)$ – смещение на 1 вправо по Ох

3) $y = \log_{0,5}(-(x-1))$ – отображение относит. $x=1$



②

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

③

$f'(x) = 1 - \sqrt{x}$

$1 - \sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 1$

$x = 1$

$+ \quad 1 \quad -$

$f(x)$ - возрастает на $x \in (-\infty; 1)$

④ $y = 2x^3 - 9x^2 \quad [2; 5]$

$y' = 6x^2 - 18x$

$6x^2 - 18x = 0$

$6x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad 3 \quad + \quad 5$

$y(5) = 250 - 225 = 25$

Ответ: 25

⑤

$\int \sqrt{\sin x}\, dx =$

⑥

$$\int \frac{dx}{1-3x} = \left| \begin{array}{l} t = 1-3x \\ x = \frac{1-t}{3} \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{3}dt}{1-3\cdot\left(\frac{1-t}{3}\right)} = \int \frac{-\frac{1}{3}dt}{1-1+t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| = -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + C$$

⑦

$$\int_0^1 e^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

Билет 10

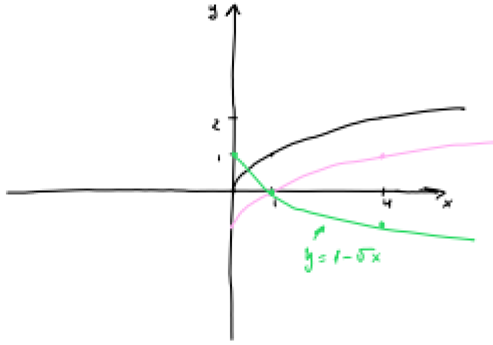
① $y = 1 - \sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

1) $y = \sqrt{x}$

2) $y = \sqrt{x} - 1$ – смещение на 1 ед. вниз по Oy

3) $y = -(\sqrt{x} - 1)$ – отображение относит. Ox



②

1й замеч. предел.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

③

④

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

$$y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}$$

⑤

$F(x) = \sqrt{\cos x} - 1 \qquad \int f(x)\,dx - ?$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = \sqrt{\cos x} - 1 + C$$

⑥

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{2} + C$$

⑦

$$\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2} = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 2\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 2\cdot\sin 0 = 2$$

Билет 11

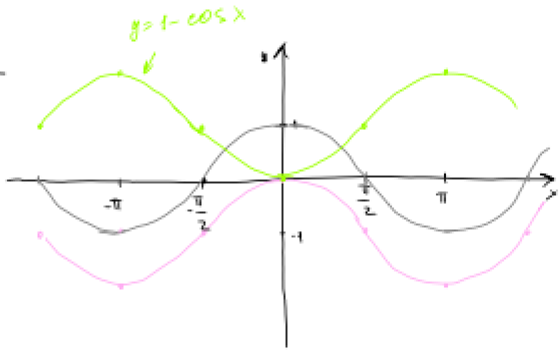
① $y = 1 - \cos x$

1) $y = \cos x$

2) $y = \cos x - 1$ – смещение на 1 вниз по Oy

3) $y = -(\cos x - 1)$ – отображ. относит. Ox

x	0
y	1



②

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ ← второй замечательный предел

③

$x = \arccos\sqrt{t}$ $\quad y = \sqrt{1-t}$ $\quad y'_x - ?$

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}$$

$$y'_x = \frac{1}{\cancel{2\sqrt{1-t}}}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{t}\cdot\cancel{\sqrt{1-t}}}{1} = \sqrt{t}$$

④

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{1+x^2 - x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

$-\quad(-1)\quad+\quad(1)\quad-\quad x$ $\qquad$ возрастает на $x\in(-1;1)$

⑤

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int dx - \int\frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \hline -\;x^2+1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

⑥

Св-во аддитивности определённого интеграла

Если точка c принадлежит отрезку $[a, b]$, то выполняется св-во аддитивности опр. интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

⑦

$$\int_1^2\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

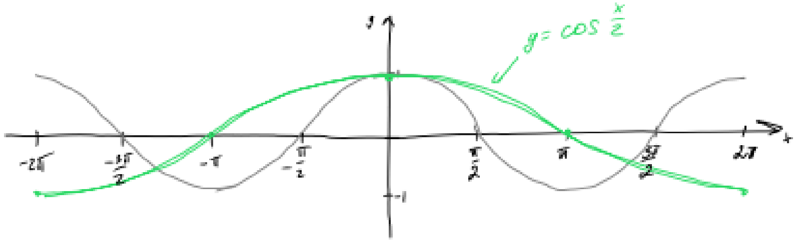
Билет 12

①

$y = \cos\frac{x}{2}$ $\quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

1) $y = \cos x$

2) $y = \cos\frac{x}{2}$ - растяжение в 2 раза вдоль оси Ox



②

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty$$

③

Как связаны координата точки, движущейся по оси x, время и скорость точки?

④

$$y = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$y' = \frac{-(\cos 2x)'}{(\cos 2x)^2} = \frac{2\cdot\sin 2x}{(\cos 2x)^2}$$

⑤

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+3} = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + C$$

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$A(x+3)+B(x+1) = 1$

$x=-3: \; -2B = 1$

$B = -\frac{1}{2}$

$x=-1: \; 2A = 1$

$A = \frac{1}{2}$

⑥

$$\int_1^2\frac{dx}{3+x^4} \quad ? \quad \int_1^2\frac{dx}{2+x^4}$$

$y_1 = \frac{1}{3+x^4}$ $\qquad y_2 = \frac{1}{2+x^4}$

⑦

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{4}\int\cos 2x\,d2x =$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\sin 2\pi + 0 = \frac{\pi}{2}$$

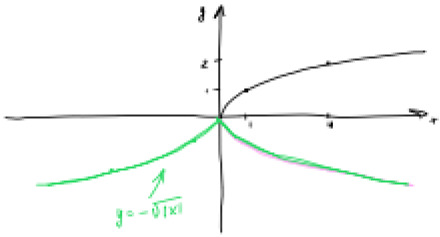
Билет 13

1) $y = -\sqrt{|x|}$

1) $y = \sqrt{x}$

2) $y = -\sqrt{x}$ – отображение относит. оси OX

3) $y = -\sqrt{|x|}$ – симметрия относит. OY



2)

3)

ур-ие нормали

$y = \ln(1+x)$ $\quad y_0 = 0$

1. $x_0 = 0$
2. $y_0 = 0$
3. $y' = \frac{1}{1+x}$
4. $y'(x_0) = \frac{1}{1+0} = 1$

ур-ие нормали:

$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) = 0$

$(x-0) + 1(y-0) = 0$

$x + y = 0$

4)

$y = x^{\alpha}$

$y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

$\alpha \cdot x^{\alpha-1} = 0$

$x^{\alpha-1} = 0$

5)

$F_1(x) = \frac{1-x}{x}$

$F_1'(x) = \frac{(1-x)' \cdot x - (1-x)}{x^2} = \frac{-x-1+x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$F_2(x) = \frac{2x+1}{x}$

$F_2'(x) = \frac{2 \cdot x - (2x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x-2x-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$F_1'(x) = F_2'(x)$

являются

6)

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$$

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}$$

$A(x+2) + Bx = 1$

при $x = -2$ $\quad -2B = 1$ $\quad B = -\frac{1}{2}$

при $x = 0$ $\quad 2A = 1$ $\quad A = \frac{1}{2}$

7)

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} = \left| \begin{matrix} t = x^2+9 \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \\ x_в = 16 \\ x_н = 9 \end{matrix} \right| = \int_9^{16} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_9^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{u}\,\Big|_9^{16} = 4 - 3 = 1$$

① $y = \log_2(1-x)$

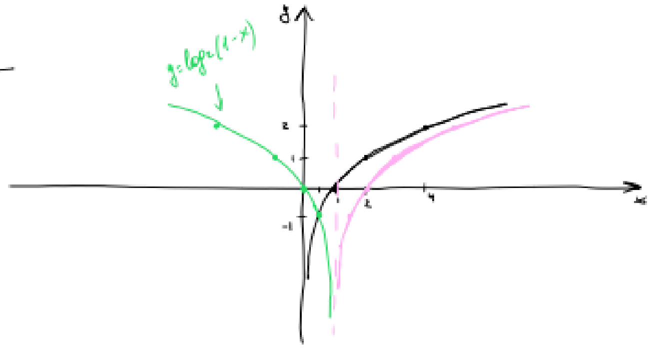
$y = \log_2 x$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-1	0	1	2

1) $y = \log_2 x$

2) $y = \log_2(x-1)$ – смещение на 1 вправо

3) $y = \log_2(-(x-1))$ – отображение относит. $x=1$



②

③

$y = 2-3x \quad (-1, 5) \quad f'(1) - ?$

ур-че касат.:

$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$

④

$y = 4x - x^4$
$y' = 4 - 4x^3$
$4 - 4x^3 = 0$
$4(1 - x^3) = 0$
$x^3 = 1$
$x = 1$

$+ \quad 1 \quad -$ (x)

возрастает на $x \in (-\infty; 1)$

⑤

$F(x) = \frac{1}{x^3} \quad f(x) - ?$

$f(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

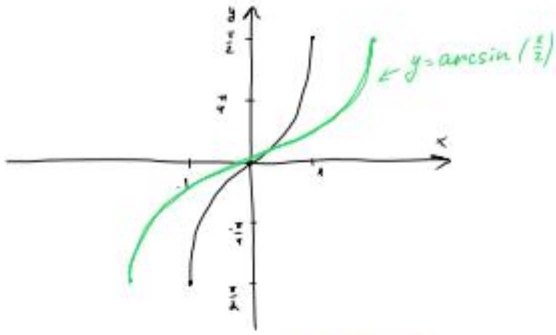
⑥

$$\int \frac{x\,dx}{x-2} = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t+2}{t}\,dt = \int\left(1 + \frac{2}{t}\right)dt = \int dt + 2\int\frac{dt}{t} = t + 2\ln|t| + C = x - 2 + 2\,|x-2| + C$$

⑦

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2e^{2x}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$$

Билет 15



① $y = \arcsin\frac{x}{2}$

1) $y = \arcsin x$

2) $y = \arcsin\frac{x}{2}$ – растяжение в 2 раза вдоль оси ox

②

$$\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,x)^2}{\sin x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\cos^2 x\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}} =$$

1й замечат. предел

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

③

$y = \sqrt{x+4}$ $\quad x_0 = 0$

1. $y_0 = 2$
2. $x_0 = 0$
3. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$
4. $y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

ур-ие нормали:

$x - x_0 + y'(x_0)(y - y_0) = 0$

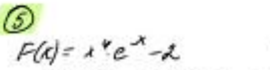
$x + \frac{1}{4}(y-2) = 0$

$x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0$

④

$f'(x) = x\cdot\log_{0,5}x$

$x\cdot\log_{0,5}x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \log_{0,5}x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1\end{array}\right.$



убывает на $x\in(1, +\infty)$

⑤

$F(x) = x^4 e^{-x} - 2$ $\qquad f(x) = -x^4e^{-x} + 3x^3e^{-x}$

явл. ли первообр. для $f(x)$ – ?

$F'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}$ – не является

⑥

$\int e^{1-x}dx = -e^{1-x} + C$

⑦

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos 0 = \frac{1}{3}$$

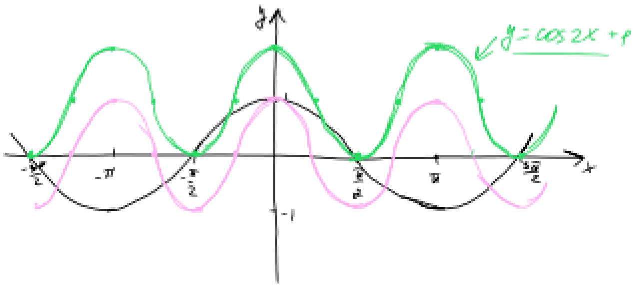
Билет 16

① $y = \cos 2x + 1$

1) $y = \cos x$

2) $y = \cos 2x$ – сжатие в 2 раза вдоль оси Ox

3) $y = \cos 2x + 1$ – смещение на 1 вверх по Oy



②

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n}{5n^2+2} = \left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}(1-\frac{3}{n})}{\cancel{n^2}(5-\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{5}$$

③

$y = \sqrt{3}\ln(x+1)$ пересек. Ox.

1. $y_0 = 0$
2. $x_0 = 0$ $\qquad y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$
3. $y' = \frac{\sqrt{3}}{x+1}$ $\qquad y'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = 60°$

Ответ: $60°$

④

$y = 3x^2 - 6x$

1. $D(f)$: $x \in R$
2. $E(f)$: $y \in$
3. $f(x) = 3x^2 - 6x$

$f(-x) = 3x^2 + 6x$

функция ни чётн. ни нечётн.

4. $\cap$ с Ox: $3x^2 - 6x = 0$ $\quad 3x(x-6) = 0$

$x = 0$, $x = 6$

$\cap$ с Oy: $y = 3\cdot 0 - 6\cdot 0 = 0$

5. т. экстремума

$f'(x) = 6x - 6$

$6x - 6 = 0$

$x = 1$

⑤

$\int f(x)\,dx$ – ? $\qquad F(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\int f(x)\,dx = \frac{\ln x}{x^2} + C$

⑥

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 2x\,dx \\ du = dx \\ v = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = -\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\cdot\cos\pi - 0 + \underbrace{\frac{1}{4}\sin\pi}_{0} - \underbrace{\frac{1}{4}\sin 0}_{0} = -\frac{\pi}{4}\cdot(-1) = \frac{\pi}{4}$$

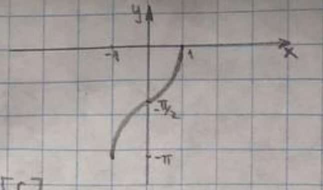
⑦

$$\int \frac{dx}{(3x+4)^2} = \left| \begin{array}{l} t = 3x+4 \\ x = \frac{t-4}{3} = \frac{1}{3}t - \frac{4}{3} \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3t^2}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3t} = -\frac{1}{3\cdot(3x+4)} = -\frac{1}{9x+12} + C$$

Билет 17

17

1) $y = -\arccos x$



2) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2}{x+3} = \left[\frac{9}{0}\right] = \infty \qquad \left[\frac{c}{0}\right] = \infty$

3) $y_1 = tg\,x \quad , \quad y_2 = 0 \qquad \angle = ?$

абсцисса т.п: $y_1 = y_2 \quad tg\,x = 0 \quad x = 0$

$\angle$ накл 1ой пр. в т. $x=0$: $tg\,\alpha = (tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad tg\,\alpha = \frac{1}{\cos^2(0)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\angle$ накл 2ой пр. в т. $x=0$: $tg\,\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\angle = \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Ответ: 45°

4) $y = e^{\sin^2 x} \qquad y' = \left(e^{\sin^2 x}\right)' = e^{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' =$
$= e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x$

5) $\int x^5(x+6)e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^6 + 6x^5 \\ dv = e^x dx \\ du = d(x^6+6x^5) = (6x^5+30x^4)dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x^6+6x^5) - \int e^x(6x^5+30x^4)dx =$

$= \left| \begin{matrix} u = 6x^5 + 30x^4 \\ du = (30x^4+120x^3)dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = e^x(x^6+6x^5) - \left(e^x(6x^5+30x^4) - \int e^x(30x^4+120x^3)dx\right) =$

$= e^x x^6 + 6x^5 e^x - 6x^5 e^x - 30x^4 e^x + \int (30x^4 + 120x^3) e^x dx =$

$= e^x x^6 - 30x^4 e^x + \int (30x^4+120x^3) e^x dx = \left| \begin{matrix} u = 30x^4 + 120x^3 \\ du = 120x^3 + 360x^2 dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| =$

$= e^x x^6 - 30x^4 e^x + 30x^4 e^x + 120x^3 e^x - \int (120x^3 + 360x^2) e^x dx =$

$= e^x x^6 + 120x^3 e^x - \int (120x^3+360x^2) e^x dx = \left| \begin{matrix} u = 120x^3 + 360x^2 \\ du = 360x^2 + 720x\,dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| =$

$= e^x x^6 + 120x^3 e^x - 120x^3 e^x - 360x^2 e^x + \int (360x^2 + 720x) e^x dx = \left| \begin{matrix} u = 360x^2 + 720x \\ du = 720x + 720\,dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| =$

$= e^x x^6 - 360x^2 e^x + 360x^2 e^x + 720x e^x - \int (720x + 720) e^x dx = \left| \begin{matrix} u = 720x + 720 \\ du = 720 dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{matrix} \right| =$

$= e^x x^6 + 720x e^x - 720x e^x - 720e^x + \int 720 e^x dx = e^x x^6 - 720e^x + 720e^x = e^x x^6 + C$

$\Rightarrow \int x^5(x+6)e^x dx \neq x^6 e^x + 6$

6) Св-во линейности опр. интеграла:

Если ф-ции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, A и B - константы, то ф-ция $Af(x)+Bg(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и выполняется равенство

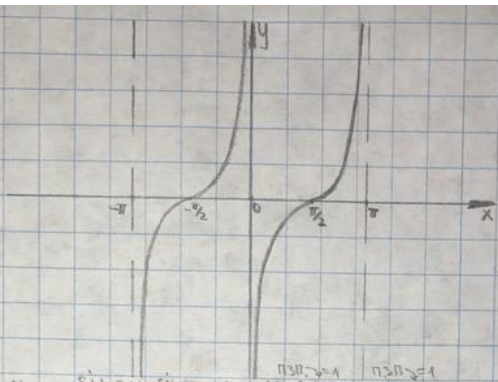
$\int\limits_a^b Af(x)+Bg(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)dx + B\int\limits_a^b g(x)dx$

7) $\int\limits_9^{16} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x}} = \int\limits_9^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x} - 2 \\ x = (t+2)^2 \\ dx = 2(t+2)dt \\ t_в = 2 \quad t_н = 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_1^2 \frac{2(t+2)}{(t+2)t} dt = 2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2$

Билет 18

18

1) $y = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ x \in (-\pi, \pi)$



2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot tg 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{x^2 \cdot \cos 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{15}{\cos 5x} \cdot \overset{\text{пзп} \to 1}{\frac{\sin 3x}{3x}} \cdot \overset{\text{пзп} \to 1}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{15}{\cos 5x} =$

$= \frac{15}{\cos(5 \cdot 0)} = \frac{15}{1} = 15$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x((\Delta x)^2 + 3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \overset{\to 0}{(\Delta x)^2} + 3 = 3$

4) $y = 8x^2 - 2x^4$

1. $D(f): x \in R$
2. $E(f): y \in (-\infty, 8]$
3. $f(x) = 8x^2 - 2x^4$

   $f(-x) = 8(-x)^2 - 2(-x)^4 = 8x^2 - 2x^4$

   $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ ф. чёт.
4. П с Ox: $y = 0$ $8x^2 - 2x^4 = 0$

   $x^2(8 - 2x^2) = 0$; $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

   П с Oy: $x = 0$ $y = 8 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$
5. лок. экстремумы:

   $f'(x) = 16x - 8x^3$

   $x(16 - 8x^2) = 0$

   $x = 0$ $x = \sqrt{2}$ $x = -\sqrt{2}$

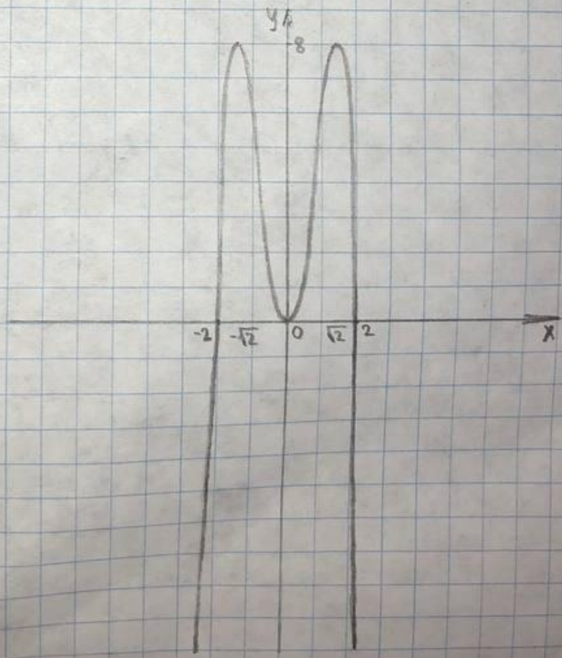
   $+ \quad - \quad + \quad -$

   $\nearrow -\sqrt{2} \searrow 0 \nearrow \sqrt{2} \searrow$

   $f(-\sqrt{2}) = 8$

   $f(0) = 0$

   $f(\sqrt{2}) = 8$



5) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \left| \begin{matrix} t = x-3 \\ x = t+4 \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{2} + C$

6) вычислить интегральн. сумму ф-ции $f(x) = \cos x$ по отр. $[0, \frac{\pi}{3}]$, при $n=2$, $x_1 = \pi/6$, $\varepsilon_1 = x_0$, $\varepsilon_2 = x_1$

отр. $[a,b]$ делится на n частей промежут. т. $x_{1,2,\dots,n}$ и в каждом отрезке берётся произвольная т. ε, длина каждого отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1,\dots,n$; тогда интегральная сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 = \cos(x_0)\cdot(x_1 - x_0) +$$

$x_0 = a$, $x_2 = b$

$$+ \cos(x_1)\cdot(x_2 - x_1) = \cos 0 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\cdot\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi(2+\sqrt{3})}{12}$$

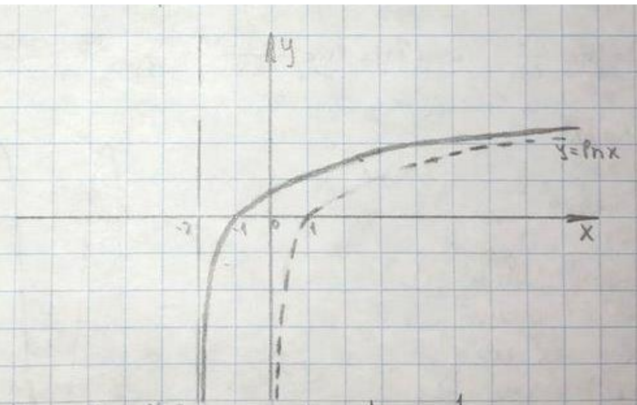
7) $\int_1^e x \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \\ v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^e =$

$$= \frac{e^2 \ln e}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Билет 19

19

1) $y = \ln(x+2)$



2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{8}$

3) $y = x\sqrt{\sin x + 1}$ $\quad y' = ?$

$y' = x'(\sqrt{\sin x + 1}) + x\cdot(\sqrt{\sin x + 1})' = \sqrt{\sin x + 1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x + 1}}\cdot \cos x =$

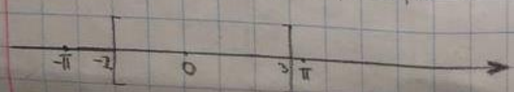
$= \sqrt{\sin x + 1} + \frac{x \cdot \cos x}{2\sqrt{\sin x + 1}}$

4) $y' = (\cos 2x)' = -2\sin(2x)$

$-2\sin(2x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = -\pi$

Ответ: на отр. $(-2, 3)$ лежит одна т. max ф-ции $x = 0$



5) $\int \frac{dx}{x^2-4x} = \int \frac{dx}{x(x-4)} \Rightarrow$

$\frac{1}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} = \frac{Ax-4A+Bx}{x(x-4)} \Rightarrow (A+B)x-4A=1 \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -4A=1 \end{cases} \quad A=-\frac{1}{4} \quad B=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \int \frac{-1/4}{x} + \frac{1/4}{x-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x-4)}{x-4} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln|x-4| - \frac{1}{4}\ln|x| + C$

6) Определённый интеграл ф-ции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ – это конечный предел интегральных сумм, когда $\lambda \to 0$ (λ - наибольшая из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,\dots,n$), не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части промежуточными точками $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Обозначается $\int_a^b f(x)dx$

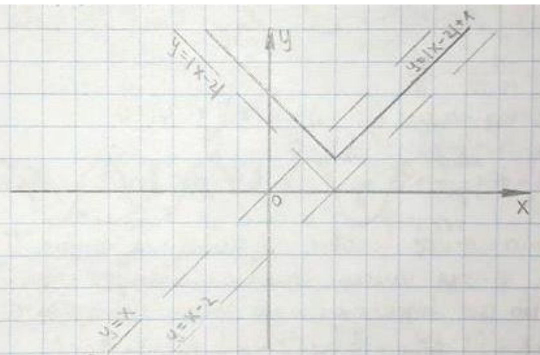
Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

7) $S_{\square} = \int_3^5 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_3^5 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)}\Big|_3^5 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Билет 20

20

1) $y = |x-2| + 1$



2) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+6x+9}{x^2+5x+6} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{-3+3}{-3+2} = 0$

$x^2+3x+2x+6$

3) $y = (x^3-4x)e^{-2x} \qquad y' = ?$

$y' = (x^3-4x)'e^{-2x} + (e^{-2x})'(x^3-4x) = e^{-2x}(3x^2-4) + (8x-2x^3)e^{-2x} =$

$= e^{-2x}(-2x^3+3x^2+8x-4)$

4) $y = -(x+1)^2$

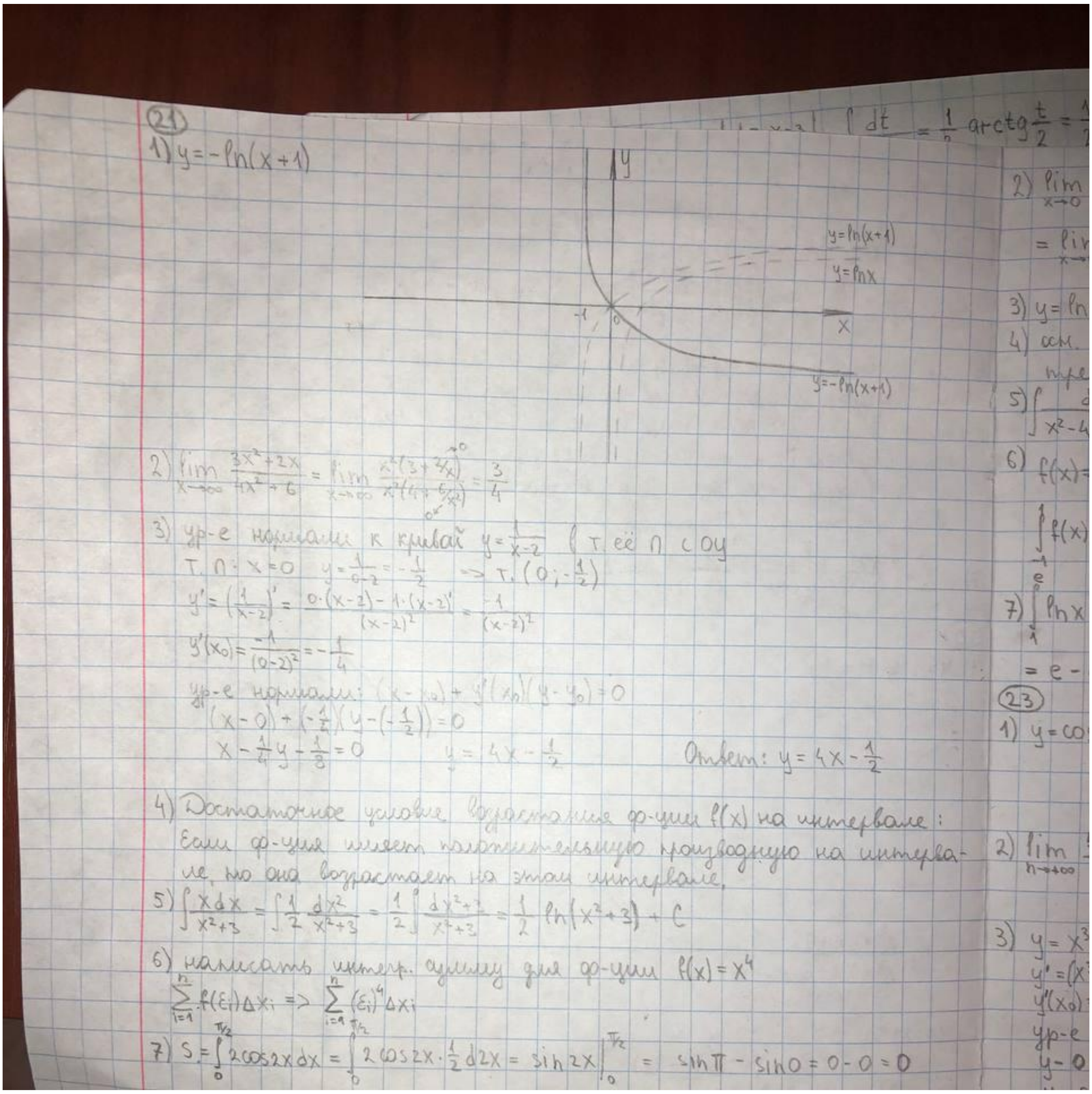
5) $F'(x) = f(x) \qquad (x^7e^x+5)' = 7x^6e^x + x^7e^x$

Ответ: да, ф-ция x^7e^x+5 является первообразной ф-ции $x^7e^x + 7x^6e^x$

6) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{matrix} t=\ln x \\ dx=e^t dt \\ x=e^t \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{e^t}\cdot e^t dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

7) $\int_1^9 \frac{dx}{x+4\sqrt{x}} = \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)} = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{x}+4 \\ x=(t-4)^2 \\ dx=2(t-4)dt \\ t_B=7 \quad t_H=5 \end{matrix} \right| = \int_5^7 \frac{2(t-4)}{(t-4)t}dt = \int_5^7 \frac{2dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_5^7 = 2\ln 7 - 2\ln 5 = 2\ln\frac{7}{5}$

Билет 21



(21)

1) $y=-\ln(x+1)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x}{4x^2+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(3+\frac{2}{x})}{x^2(4+\frac{6}{x^2})}=\dfrac{3}{4}$

3) ур-е нормали к кривой $y=\frac{1}{x-2}$ в т. её ∩ с Oy

т. ∩: $x=0$ $y=\frac{1}{0-2}=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ т. $(0;-\frac{1}{2})$

$y'=\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\frac{0\cdot(x-2)-1\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}$

$y'(x_0)=\frac{-1}{(0-2)^2}=-\frac{1}{4}$

ур-е нормали: $(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)=0$

$(x-0)+(-\frac{1}{4})(y-(-\frac{1}{2}))=0$

$x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}=0$ $\quad y=4x-\frac{1}{2}$ $\quad$ Ответ: $y=4x-\frac{1}{2}$

4) Достаточное условие возрастания ф-ции $f(x)$ на интервале: Если ф-ция имеет положительную производную на интервале, то она возрастает на этом интервале.

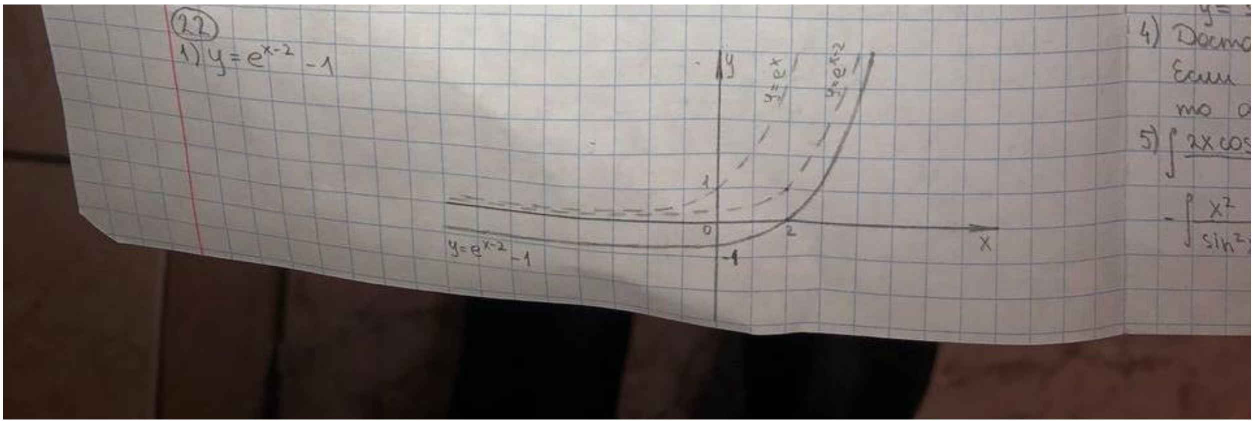
5) $\int\frac{x\,dx}{x^2+3}=\int\frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2+3}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3}=\frac{1}{2}\ln|x^2+3|+C$

6) написать интегр. сумму для ф-ции $f(x)=x^4$

$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i)^4\Delta x_i$

7) $S=\int\limits_0^{\pi/2}2\cos2x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}2\cos2x\cdot\frac{1}{2}d2x=\sin2x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\pi-\sin0=0-0=0$

Билет 22



(22)

1) $y=e^{x-2}-1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x\cdot\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5}{5x\cdot\sin 2x\cdot 2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos(5\cdot 0)}=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$

3) $y=\ln(\cos x)$ $\quad y'=(\ln(\cos x))'=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-tg\,x$

4) осн. элементарн. ф-ция, имеющая на интервале $(-3,3)$ две т. экстремума: $y=\sin x$

5) $\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+9}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{(x-2)}{3}+C$

6) $f(x)=\begin{cases}-2x, & -1\le x\le 0\\ x^3, & 0\le x\le 1\end{cases}$

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}-2x\,dx+\int_{0}^{1}x^3dx=-x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}=0+1+\frac{1}{4}-0=1{,}25$

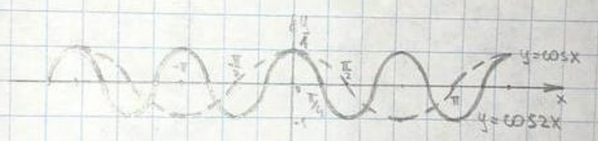
7) $\int_{1}^{e}\ln x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x\\ du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\\ v=x\end{matrix}\right|=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln x-x\Big|_{1}^{e}=e\cdot\ln e-e-\ln 1+1=$

$=e-e-0+1=1$

Билет 23

23

1) $y=\cos 2x$



2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5\sqrt{n^2+1}}{1-4n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n\left(\frac{1}{n}-4\right)}=-\frac{5}{4}$

3) $y=x^3-1$ $\quad$ ур-е кас. в т. п. с Ox $\Rightarrow$ $y_0=0$ $\quad x^3-1=0$

$y'=(x^3-1)'=3x^2$ $\quad x^3=1 \quad x_0=1$

$y'(x_0)=3\cdot(1)^2=3$

ур-е кас.: $\quad y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$y-0=3(x-1)$

$y=3x-3$ $\quad$ Ответ: $y=3x-3$

4) Достаточное усл-е убывания ф-ции $f(x)$ на интервале:
Если ф-ция имеет отрицательную производную на интервале, то она убывает на этом интервале.

5) $\int\frac{2x\cos x\sin x-x^2}{\sin^2x}dx=\int\frac{2x\cos x\sin x}{\sin^2x}dx-\int\frac{x^2}{\sin^2x}dx=\int\frac{2x\cos x}{\sin x}dx-$

$-\int\frac{x^2}{\sin^2x}dx=\left|\begin{matrix}u=ctg\,x\\ du=-\frac{1}{\sin^2x}dx\\ dv=2x\,dx\\ v=\int 2x\,dx=x^2\end{matrix}\right|=x^2ctg\,x+\int x^2\cdot\frac{1}{\sin^2x}dx-\int\frac{x^2}{\sin^2x}dx=x^2ctg\,x+C$

6) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{dx^2}{x^2+5} = \int \frac{1}{2}\,\frac{d(x^2+5)}{x^2+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C$

7) $\int_0^{\pi/4} x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x\,dx \\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} =$

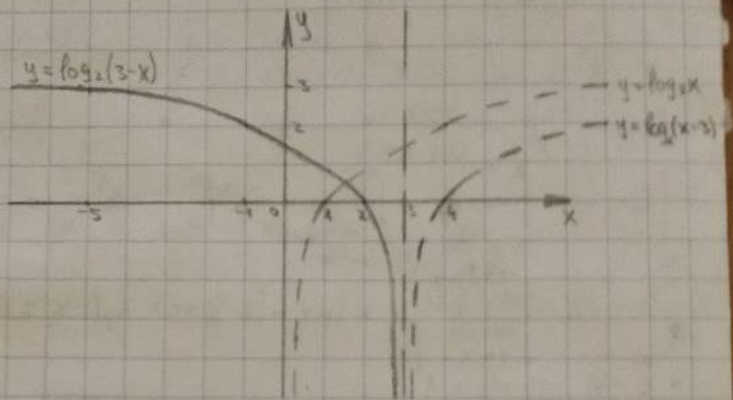
$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

Билет 24

(24)

1) $y = \log_2(3-x)$

$y = \log_2(x-3)$ отразить отн-но $x-3=0$; $x=3$



2) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2-x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2+2x-3x-6} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{5}$

3) найти интервал возрастания ф-ции $f(x)$, если $f'(x) = 2-\sqrt{x}$

$f'(x) = 0$ $\quad 2-\sqrt{x} = 0$ $\quad \sqrt{x} = 2$ $\quad x = 4$

$+ \quad 4 \quad -$

Ответ: интервал возрастания ф-ции $(-\infty, 4)$

4) наибольшее знач-е ф-ции $y = 4x^3 - 6x^2$ на отр. $[-1, 3]$

$y' = (4x^3 - 6x^2)' = 12x^2 - 12x$ $\qquad 12x^2 - 12x = 0$

$12x(x-1) = 0$ $\qquad x = 0$; $x = 1$

$-1 \; [\; - \; 0 \; - \; 1 \; + \;] \; 3$

на отр $[-1; 3]$ max знач-е ф-ции достигается в т. $x = 3$

$y(3) = 4\cdot(3)^3 - 6\cdot(3)^2 = 54$ $\qquad$ Ответ: 54

5) $d\int \sqrt{\cos x + 2}\,dx = \sqrt{\cos x + 2}\,dx$

6) $\int \frac{dx}{3-5x} = \int -\frac{1}{5}\,\frac{d(3-5x)}{3-5x} = -\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$

7) $S_\Delta = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}$