



Técnico en
< DESARROLLO DE SOFTWARE >

Matemática Financiera

(CC BY-NC-ND 4.0)
International

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0



Atribución

Usted debe reconocer el crédito de una obra de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace.



No Comercial

Usted no puede hacer uso del material con fines comerciales.



Sin obra derivada

Si usted mezcla, transforma o crea un nuevo material a partir de esta obra, no puede distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales - Usted no puede aplicar términos legales ni medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros hacer cualquier uso permitido por la licencia.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



Matemática Financiera

Unidad III

1. Interés compuesto

En el interés simple, los intereses que se generan permanecen constantes todo el tiempo de la operación. Así por ejemplo si se depositan Q 12,000 en una cuenta de ahorro que paga el 10% de interés simple anual los intereses después de un mes serán

$$I = 12,000 \times 0.10 \frac{1}{12} = Q100$$

Si queremos saber cuáles serán los intereses para el segundo mes, volvemos a aplicar la misma fórmula con el mismo capital.

$$I = 12,000 \times 0.10 \frac{1}{12} = Q100$$

Es decir se ganan Q 100 de intereses por mes, si queremos saber cuánto acumularemos en un año multiplicamos $100 \times 12 = Q 1,200$.

Ahora bien el interés compuesto es un interés capitalizable, es decir que los intereses ganados se suman al capital anterior, y los intereses ganan intereses sobre los intereses.

Ejemplo: Calcular cuál es el monto de Q 12,000 en tres meses a una tasa de interés del 10% anual si los intereses ganados se suman al capital original.

$$I = 12,000 \times 0.10 \frac{1}{12} = Q100$$

Entonces como en el caso anterior se ganaron Q 100 el primer mes, ahora esto se suman al capital el cual será Q 12,100.

Los intereses del segundo mes entonces son

$$I = 12,100 \times 0.10 \frac{1}{12} = Q100.83$$

Tal como lo observamos el interés no es constante pues ahora es Q 100.83 y estos se suman al capital anterior

$$12,100 + 100.83 = 12,200.83$$

Calculamos ahora el interés para el tercer mes

$$I = 12,200.83 \times 0.10 \frac{1}{12} = Q101.67$$

El monto al tercer mes será entonces $12,200.83 + 101.67 = 12,302.50$

Si comparamos el monto simple para tres meses con el monto compuesto para tres meses

Monto simple	Monto compuesto
12,300	12,302.50

Tenemos una diferencia de 2.50. Es decir el interés compuesto capitalizó más intereses pues como lo habíamos mencionado antes, en este caso los intereses también ganan intereses.

¿Pero si en vez de ser 3 meses hubieran sido 60? Es tedioso hacer esta operación a mano 60 veces (claro un algoritmo de computadora puede hacerlo sin mayor esfuerzo). Pero existen fórmulas de interés y monto compuesto que nos podrán ayudar a resolver el problema sin mayor complicación.

2. Monto compuesto

El monto compuesto es el valor futuro de un capital que se capitaliza periódicamente, es decir que los intereses ganan intereses por periodo.

La fórmula del monto compuesto es

$$M = C(1 + i)^n$$

Donde:

- M: Monto compuesto
- C: Capital
- i: tasa de interés capitalizable por período
- n: número de periodos

Un cambio importante en esta ecuación será la tasa de interés capitalizable por período.

Ejemplo:

Se deposita en una cuenta bancaria un capital de Q 20,000 a una tasa de interés compuesta del 24% anual con capitalización

- a) Mensual
- b) Trimestral
- c) Semestral
- d) Anual

Con esta información ¿Cuál es la tasa i que se debe utilizar por periodo para encontrar el monto a un año?

Tenemos que tener algunas cosas en consideración, primero la tasa de interés es anual. Entonces para encontrar la tasa de interés por periodo, debemos de saber cuántos periodos de capitalización hay en un año.

Para el inciso a, como la capitalización será mensual, sabemos que en un año existen 12 periodos mensuales, entonces la tasa i es

$$0.24/12 = 0.02$$

Es decir el dinero ganará un 2% de interés mensual

Lo mismo será para el inciso b, en el año hay cuatro trimestres por lo tanto la tasa debe ser dividida dentro de 4

$$0.24/4 = 0.06$$

Para el inciso c, en el año hay dos semestres por lo tanto la tasa se divide entre 2

$$0.24/2 = 0.12$$

Para el inciso d, como la tasa es anual y el periodo de capitalización es anual entonces no se divide, sino que la tasa será del 0.24 anual.

¡Cuidado! en algunas ocasiones la tasa de interés ya estará dada para el periodo.

Ejemplo

Se depositará un capital de Q 15,000 en una cuenta que paga el 4% de interés compuesto semestral capitalizable semestralmente.

Si nota en el problema anterior, la tasa es compuesta del 4% semestral y la capitalización se hará semestral. Por lo tanto no hay que dividir en periodos semestrales, la tasa es 0.04

Número de periodos

Ahora nuestra ecuación no tiene la t de tiempo, pero si esta elevada a una exponente n de número de periodos, estos periodos dependerán de la capitalización de la tasa de interés.

Ejemplo:

Se depositará un capital de Q 15,000 a una tasa del 24% compuesto anual con capitalización mensual durante 5 años. ¿Para cuántos periodos mensuales se debe calcular la deuda?

Como el problema nos dice que la capitalización es mensual, esto significa que cada mes ganará intereses, por lo tanto los 5 años los tenemos que convertir en meses

$$n = 5 \times 12 = 60$$

Aplicación de la fórmula de monto compuesto

Ernesto Cabrera gana un premio de lotería consistente en Q 150,000 pensando en que es buena idea depositar el dinero, lo hace en una cuenta que le pague el 15% anual capitalizable mensualmente durante un periodo de 4 años. ¿Cuál es el monto que recibirá al final de dicho periodo?

Como debemos de encontrar el monto de los 150,000 usamos la fórmula

$$M = C(1 + i)^n$$

El capital $C = 150,000$ la tasa de interés por periodo mensual es $0.15/12 = 0.0125$ y el número de periodos mensuales $n = 4 \times 12 = 48$, ahora pues, sustituimos en la fórmula.

$$M = 150,000(1 + 0.0125)^{48}$$

$$M = 150,000(1.0125)^{48}$$

$$M = 150,000(1.815354853) = 272303.23$$

Por lo tanto Ernesto tendrá después de 4 años Q 272,303.23

Mientras el periodo de capitalización sea más grande menos intereses se ganarán.

Supongamos el mismo ejemplo anterior, pero para una capitalización semestral.

Entonces el capital seguirá siendo $C = 150,000$ la tasa de interés por periodo $0.15/2 =$

0.075 y el número de periodos ahora serán $n = 4 \times 2 = 8$

$$M = 150,000(1 + 0.075)^8$$

$$M = 150,000(1.075)^8$$

$$M = 150,000(1.783477826) = 267,521.67$$

Como podemos constatar, a la misma tasa anual pero aumentando el periodo de capitalización para la misma cantidad de años, el monto es menor.

Con esto podemos entonces deducir que cuando el periodo de capitalización es menor los intereses son mayores que cuando el periodo de capitalización es mayor.

Para pensar

Algunos almacenes de electrodomésticos y enseres para el hogar ofrecen “cuotas chiquitas” pues estas son quincenales o semanales. Con la información antes expuesta ¿Usted cree que cobran menos que a los clientes que les cobran una cuota mensual?

Ejemplo:

Mariela Estrada solicita un préstamo a la cooperativa “Santa Lucía” por un total de Q 35,000 si la tasa que le cobraran es del 18% anual capitalizable trimestralmente ¿Cuánto pagará en 36 meses?

Nuevamente debemos encontrar el monto compuesto de un capital

$$C = 35,000$$

$$i = 0.18/4 = 0.045$$

$$n = 36/3 = 12 \text{ trimestres}$$

Como se pudo dar cuenta, ahora el tiempo no fue dado en años, sino que en meses pero como la tasa de interés se capitalizará trimestralmente, debemos encontrar cuántos trimestres hay en 36 meses, para encontrarlo únicamente dividimos el número total de meses entre los meses que hay en un trimestre.

$$M = C(1 + i)^n$$

$$M = 35,000(1 + 0.045)^{12}$$

$$M = 35,000(1.045)^{12}$$

$$M = 35,000(1.695881433) = 59,355.85$$

El total que deberá pagar es de Q 59,355.85

Para encontrar los intereses que se ganaron durante el periodo de 36 meses lo único que debemos hacer es restar el monto del capital.

$$59,355.85 - 35,000 = 24,355.85$$

3. Valor presente de un monto compuesto

Cuando conocemos el valor futuro de la deuda más no conocemos el capital que la originó podemos hacer uso de la ecuación de valor presente.

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

Esta fórmula también se puede escribir como

$$C = M(1 + i)^{-n}$$

Recordemos de las propiedades de los exponentes que el signo del exponente de una potencia puede cambiar, si lo cambiamos del numerador al denominador.

Ejemplo:

Laura Antillón recibió de un banco el total de Q 25,000 después de haber invertido hace 3 años un capital a una tasa de interés compuesto anual del 12% con capitalización mensual. ¿Cuánto depositó Laura hace tres años?



En muchas ocasiones es muy práctico realizar un gráfico de tiempo, en este gráfico colocamos el inicio de la deuda y el final de la misma, así nos hacemos una idea de lo que queremos hacer.

El monto que recibió Laura es de Q 25,000 de un capital que deposito hace tres años.

$$M = 25,000$$

$$i = 0.12/12 = 0.01$$

$$n = 3 \times 12 = 36 \text{ meses}$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{25,000}{(1+0.01)^{36}}$$

$$C = \frac{25,000}{(1.01)^{36}}$$

$$C = \frac{25,000}{1.43076878} = 17,473.12$$

El capital que depositó Laura hace tres años fue de Q 17,473.12

Ejemplo:

Hugo Ramírez desea asistir a un congreso sobre informática el cual se realizara dentro de 2 años y medio el cual tendrá un costo de \$ 2,000. Pensando en ello decide depositar el día de hoy en una cuenta que le pagará el 9% de interés anual con capitalización trimestral un capital que se convierta en el monto deseado. ¿Cuánto tendrá que depositar Hugo?

Sabemos que lo que quiere acumular es \$ 2,000 esto es nuestro monto.

$$M = 2,000$$

$$i = 0.09/4 = 0.0225$$

$$n = 2.5 \times 4 = 10 \text{ trimestres}$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{2,000}{(1+0.0225)^{10}}$$

$$C = \frac{2,000}{(1.0225)^{10}}$$

$$C = \frac{2,000}{1.24920343} = 1,601.02$$

Hugo debe depositar entonces \$ 1601.02

4. Tasa de interés compuesta

Para encontrar la tasa de interés compuesta por periodo podemos despejar la fórmula de la ecuación general del monto compuesto, la cual quedará de la siguiente forma

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$$

Ejemplo:

Don Mario deposita Q 38,500 en un banco durante 10 años, después de los cuales recibirá un total de Q 200,000 si el banco le ofrece capitalización bimestral. ¿Cuál es la tasa de interés por periodo bimestral que le están dando?

En este ejemplo debemos de encontrar la tasa de interés compuesta bimestral, para la cual tenemos los siguientes datos

$$M = 200,000$$

$$C = 38,500$$

$$n = 10 \times 6 = 60 \text{ como el año tiene 6 bimestres, multiplicamos el número de años por 6}$$

Ahora sustituimos en la fórmula

Como podemos ver, debemos encontrar la raíz sesenta

$$i = \sqrt[60]{\frac{200,000}{38,500}} - 1$$

$$i = \sqrt[60]{5.19480519} - 1$$

Ahora esto lo podemos reescribir según las reglas de exponentes y radicales como

$$i = (5.19480519)^{1/60} - 1$$

Recordemos que la raíz de un número es lo mismo que

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ahora dividimos $1/60 =$

$$i = (5.19480519)^{0.0166667} - 1$$

$$i = (5.19480519)^{0.0166667} - 1$$

$$i = 1.02784151 - 1$$

$$i = 0.02784151$$

Esto es que la tasa de interés bimestral es 0.0278 si lo multiplicamos por 100% obtendremos el porcentaje 2.78% bimestral. Si queremos saber cuál es la tasa anual únicamente la multiplicamos por 6

$$2.78\% \times 6 = 16.68\% \text{ anual compuesto con capitalización semestral}$$

Ejemplo:

Astrid quiere duplicar un capital de Q 80,000 el banco Ahorrador le ofrece duplicar el capital en 6 años a una tasa anual con capitalización trimestral. ¿Cuál es la tasa que le están ofreciendo?

Los datos que tenemos son los siguientes:

C=80,000

n= 6x4=24 trimestres

Como se quiere duplicar el capital entonces el monto será Q 160,000

$$i = \sqrt[24]{\frac{160,000}{80,000}} - 1$$

$$i = \sqrt[24]{2} - 1$$

$$i = (2)^{1/24} - 1$$

$$i = (2)^{0.04166667} - 1$$

$$i = 1.02930224 - 1$$

$$i = 0.02930224$$

La tasa trimestral será entonces del 0.029 o $0.029 \times 4 = 0.116$ anual

Si se multiplica por 100% se puede dar el resultado en porcentajes

2.9% trimestral o 11.6% anual

5. Número de periodos

El tiempo para un monto compuesto lo componen los periodos capitalizables, para determinar el número de periodos lo hacemos mediante la siguiente fórmula

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$$

Ejemplo:

Luis Fernando obtuvo Q 35,000 en préstamo a una tasa anual del 18% capitalizable mensualmente por los cuales pagará 15,000 en concepto de intereses. ¿Cuántos meses durará la deuda?

Como en todos los ejercicios anteriores primero apartamos los valores ya conocidos

$$C = 35,000$$

$$i = 0.18/12 = 0.015$$

Ahora bien, como Luis pagará Q 15,000 en concepto de intereses, para encontrar el monto sumamos Q 35,000 + Q 15,000 por lo tanto el monto es M= Q 50,000

Aplicando la fórmula

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{50,000}{35,000}\right)}{\text{Log}(1 + 0.015)}$$
$$n = \frac{\text{Log}(1.42857143)}{\text{Log}(1.015)}$$

Ahora operamos el logaritmo común (base 10) en la fórmula

$$n = \frac{0.15490196}{0.00646604} = 23.9562$$

Como la tasa de interés es capitalizable mensualmente, entonces el número de periodos que obtengamos serán meses.

Son por lo tanto 23.96 meses o aproximadamente 24, si queremos saber a cuánto equivale el 0.96 lo multiplicamos por 30 (puesto que el mes tiene 30 días)

$$0.96 \times 30 = 28.8 \text{ días casi } 29$$

Entonces podemos decir que el tiempo o número de periodos necesarios son 23 meses con 29 días.

Monto compuesto con periodo fraccionario

En muchas ocasiones el número de periodos n no serán enteros por lo cual utilizaremos la misma ecuación del monto compuesto y utilizaremos periodos con decimales.

Ejemplo:

Se obtiene un préstamo por Q 125,000 a un plazo de 39 meses con una tasa de interés compuesto anual del 24% con capitalización semestral. ¿Cuál será el monto que tendrá que pagarse?

Como en este caso tenemos 39 meses y la capitalización es semestral tenemos que encontrar cuántos semestres hay en 39 meses, para hacerlo dividimos el número total de meses entre el número de meses que tiene un semestre.

$$n = 39/6 = 6.5, \text{ esto es que en 39 meses hay 6.5 semestres}$$

$$C = 125,000$$

$$i = 0.24/2 = 0.12$$

Ahora aplicamos la fórmula de monto compuesto.

$$M = 125,000(1 + 0.12)^{6.5}$$

$$M = 125,000(1.12)^{6.5}$$

$$M = 125,000(2.088897583)$$

$$M = 125,000(2.088897583)$$

$$M = 261,112.20$$

Tasas equivalentes

Cuando dos tasas con diferentes periodos de capitalización producen el mismo interés en un año, se les llama capitalizables.

Para resolver este tipo de problemas utilizaremos la siguiente fórmula:

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

Donde

- i = la tasa anual desconocida

- n = número de periodos de capitalización de la tasa i en un año
- j = la tasa anual conocida
- m = número de periodos de capitalización de la tasa j en un año

Ejemplo:

¿Cuál es la tasa anual equivalente a una tasa del 15% anual capitalizable trimestralmente?

Para resolver este problema separaremos primero los valores conocidos

- Nuestra incógnita será i
- Número de periodos n : como la tasa que buscamos es anual el periodo de capitalización es anual por lo tanto en un año hay solo un periodo n , por lo tanto $n = 1$
- Tasa conocida $j = 0.15$
- Número de periodos m : como la tasa de interés del 15% anual se capitaliza trimestralmente, en un año existen 4 trimestres, por lo tanto $m = 4$

Ahora sustituimos valores en la fórmula

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \\ \left(1 + \frac{i}{1}\right)^1 &= \left(1 + \frac{0.15}{4}\right)^4 \\ \left(1 + \frac{i}{1}\right)^1 &= (1 + 0.0375)^4 \end{aligned}$$

Si dividimos i entre 1 seguirá siendo $i \quad i/1 = i$

$$\begin{aligned} (1 + i) &= (1 + 0.0375)^4 \\ (1 + i) &= (1.0375)^4 \end{aligned}$$

Podemos sacar $1 + i$ del paréntesis

$$1 + i = 1.158650415$$

Ahora despejamos la tasa de interés i

$$\begin{aligned} i &= 1.158650415 - 1 \\ i &= 0.158650415 \end{aligned}$$

Por lo tanto la tasa de interés con capitalización anual equivalente a la tasa del 15% con capitalización trimestral es 0.1587 o 15.87%

Ejemplo:

Encuentre la tasa de interés anual capitalizable mensualmente que es equivalente a la tasa de interés anual del 36% con capitalización semestral.

- Nuestra incógnita es la tasa de interés i
- Número de periodos n : como la tasa que buscamos es anual con capitalización mensual y el año tiene 12 meses, entonces $n = 12$
- Tasa conocida $j = 0.36$
- Número de periodos m : como la tasa conocida anual es del 36% y esta se capitaliza semestralmente y en un año hay dos semestres, entonces $m = 2$

Ahora sustituimos valores

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \\ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} &= \left(1 + \frac{0.36}{2}\right)^2 \\ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} &= (1 + 0.18)^2 \\ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} &= (1.18)^2 \\ \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} &= 1.3924\end{aligned}$$

Ahora como el paréntesis donde se encuentra el valor i que estamos buscando esta elevado al exponente 12, para quitar ese exponente 12 debemos sacar raíz doceava de cada lado de la fórmula

$$\sqrt[12]{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}} = \sqrt[12]{1.3924}$$

El exponente 12 con la raíz 12 del lado izquierdo de la fórmula se cancelará

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}} &= \sqrt[12]{1.3924} \\ 1 + \frac{i}{12} &= \sqrt[12]{1.3924}\end{aligned}$$

Para obtener raíz doce, reescribimos la fórmula en forma de radical.

$$\begin{aligned}1 + \frac{i}{12} &= (1.3924)^{\frac{1}{12}} \\ 1 + \frac{i}{12} &= (1.3924)^{0.08333333} \\ 1 + \frac{i}{12} &= 1.027969\end{aligned}$$

Ahora despejamos el valor de i , del lado izquierdo de la fórmula

$$\begin{aligned}\frac{i}{12} &= 1.027969 - 1 \\ \frac{i}{12} &= 0.027969\end{aligned}$$

Entonces la tasa mensual (decimos que es mensual puesto que representa a las doce capitalizaciones en un año) es 0.02796 o 2.796% mensual

Ahora bien como el problema está solicitando encontrar la tasa de interés anual con capitalización mensual, lo único que debemos hacer es multiplicar la tasa mensual por 12

$$0.02796 \times 12 = 0.3355 \text{ o } 33.55\% \text{ anual.}$$

Descargo de responsabilidad

La información contenida en este documento descargable en formato PDF o PPT es un reflejo del material virtual presentado en la versión online del curso. Por lo tanto, su contenido, gráficos, links de consulta, acotaciones y comentarios son responsabilidad exclusiva de su(s) respectivo(s) autor(es) por lo que su contenido no compromete al área de e-Learning del Departamento GES o al programa académico al que pertenece.

El área de e-Learning no asume ninguna responsabilidad por la actualidad, exactitud, obligaciones de derechos de autor, integridad o calidad de los contenidos proporcionados y se aclara que la utilización de este descargable se encuentra limitada de manera expresa para los propósitos educacionales del curso.



Galileo
UNIVERSIDAD
La Revolución en la Educación

GES
Galileo Educational System