Técnico en

<DESARROLLO DE SOFTWARE>

Matemática Financiera

Matemática Financiera

Unidad I

1. Exponentes y radicales

A excepción del interés simple, casi todas las operaciones en las cuales el dinero este siendo multiplicado por un número de periodos de tiempo iguales encontraremos ecuaciones con exponentes enteros y fraccionarios (racionales), es por eso la razón tan importante para que dentro del estudio de las matemáticas financieras comprendamos la utilización básica de estos.

¿Qué es una potencia?

Una potencia es un número compuesto por una base y un exponente entero

$$a^{n}$$

Exponente

Base

Lo que significa que la base será multiplicada por ella misma la cantidad que n indica,

Por ejemplo:

$$2^{4} = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

Es decir que la base 2 se multiplico por ella misma 4 veces como lo indica el exponente y entonces el resultado es 16.

Nuestro curso no es un curso de algebra, en donde tendríamos que ver con detenimiento cada una de las leyes de los exponentes, a nosotros nos servirán algunas leyes que veremos a continuación.

Exponente unitario:

Cuando una base tiene exponente igual a 1, este no lo escribiremos sino se sobreentenderá que existe, por ejemplo

$$3^1 = 3$$

Se lee como tres a la uno, tres elevado al exponente uno o simplemente 3, es decir cualquier número que nosotros observemos y que no tenga exponente su exponente será el 1.

Multiplicación de potencias de igual base

Cuando tenemos dos o más potencias de igual base y estas se están multiplicando, copiamos solamente una vez la base y luego sumaremos los exponentes, por ejemplo

$$3^2 \times 3^3 \times 3 \times 3^4 = 3^{2+3+1+4} = 3^{10}$$

Como podemos observar la multiplicación es de 4 potencias de base 3 y con exponentes diferentes, entonces copiamos la base 3 y luego sumamos todos los exponentes, lo que al final nos da el resultado de 3 elevado a la 10 y este número es 59,049

Si por ejemplo tenemos otra operación de multiplicación

$$2^6 \times 2^{-3} \times 2^{-1} \times 2^4 = 2^{6-3-1+4} = 2^6$$

Nuevamente observemos que las bases son iguales es decir 2 pero ahora tenemos exponentes negativos, entonces en vez de sumarlos realizaremos la operación aritmética de resta y entonces 6 -3 -1 + 4 = 6, debemos respetar las operaciones aritméticas que incluyan signos distintos.

División de potencias de igual base

Cuando dividimos potencias de igual base, copiamos la base y restamos los exponentes, ejemplo

$$\frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Vemos en este caso que al dividir la potencia 3 a la ocho, entre 3 a la cinco, copiamos la base 3 y restamos 8-5=3, que será el nuevo exponente del resultado.

Nuevamente si alguno de los exponentes tiene signo negativo, respetaremos la aritmética para operar dicha resta, ejemplo

$$\frac{4^{6}}{4^{-2}} = 4^{6-(-2)} = 4^{6+2} = 4^{8} = 65{,}536$$

Como podemos observar, el exponente de la potencia del denominador es -2, por lo tanto al restarla de 6 será –(-2) lo que convertirá al -2 en 2 positivo, y entonces en lugar de restarlo lo sumaremos.

Potencias con exponentes negativos

Cuando tenemos una potencia con exponentes negativos podemos “convertir” la potencia en una fracción, o si es una fracción en un numero entero. Ejemplo

$$4^{-2} = \frac{1}{4^{2}} = \frac{1}{16}$$

Vemos en el caso anterior que la base 4 está siendo elevada al exponente negativo 2, entonces para poder operar convertimos la potencia en una fracción de numerador 1 y en el denominador colocamos la potencia con el exponente positivo.

En caso contrario si nos topamos con una potencia fraccionaria, donde la potencia del denominador sea negativa, entonces trasladamos la base hacia el numerador y cambiamos el exponente a positivo, ejemplo

$$\frac{1}{5^{-2}} = 5^{2} = 25$$

Podemos resumir “coloquialmente” que para cambiarle el signo al exponente de una potencia únicamente lo trasladamos al numerador o denominador, según sea el caso.

$$\frac{3^{-1}}{4^{-2}} = \frac{4^{2}}{3^{1}} = \frac{16}{3}$$

Tal y como lo indican las flechas para cambiar el signo de los exponentes únicamente los “trasladamos” del numerador al denominador y viceversa.

Radicales

Cuando nos encontramos con una potencia que tiene un exponente fraccionario estamos ante un radical $3^{2/5}$

La potencia anterior se lee como “tres elevado a la dos quintos” pero en realidad ¿qué significa esa expresión?

Una potencia con exponente fraccionario es llamado también un radical, y este no es más que una raíz.

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^{n}}$$

Que se lee como “Raíz m de la base a elevada a la n”

El numero $16^{1/2}$

Es en realidad la raíz cuadrada de 16

$$\sqrt[2]{16^1}$$

Donde cómo podemos observar el numerador paso a ser el exponente de 16 y el 2 es el grado de la raíz, sabemos que en una potencia elevada al número 1 podemos obviar escribir el uno, ahora también agregaremos que cuando se trata de raíces, si esta es cuadrada podemos obviar escribir el 2 en el radical de la siguiente manera.

$$\sqrt[2]{16^1} = \sqrt{16}$$

Esto no ocurre con raíces mayores a grado 2

Ejemplo

$$27^{1/3} = \sqrt[3]{27}$$

Lo cual seria 27 elevado a la un tercio o raíz cubica de 27

Ejemplo

Encuentre el resultado de

$$\sqrt[5]{8^2}$$

La raíz anterior se lee como, Raíz quinta de 8 elevado a la 2, esto lo podemos resolver ya sea mediante una calculadora científica que tenga la opción de raíces a la m, o convertimos la raíz en un radical

$$8^{2/5}$$

2/5 es igual a 0.4

$$8^{0.4}$$

Y por lo tanto el resultado final es

$$8^{0.4} = 2.29739671$$

2. Logaritmos

Así como en las potencias, el exponente determina el número de veces que se debe multiplicar la base por sí misma, en los logaritmos ya tenemos el numero resultado de la multiplicación de la base, lo que debemos encontrar es cuantas veces se multiplico por ella misma.

Ejemplo

Sabemos que $8^2 = 8x8 = 64$

Como el exponente es 2, la base 8 se multiplicara por ella misma 2 veces dando por resultado 64.

Ahora

$$2^n = 16$$

Podemos ir probando

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

Entonces cambiando el exponente de 1 en 1 encontramos que el resultado para que 2 elevado a la n sea 16 debe ser 4 y esto es un logaritmo, encontrar la base que hace que la base multiplicada por ella misma nos dé un resultado.

No profundizaremos mucho en el estudio de los logaritmos, sino que tomaremos las partes fundamentales que nos ayudaran en matemática financiera.

$$Log_b a = n$$

Que se lee de la siguiente forma

el logaritmo en base b de a es igual a n

Cuando la base del logaritmo es 10 se le llama logaritmo común y no se escribe la base 10

$$Log_{10}a = n$$

$$Loga = n$$

Cuando la base del logaritmo es el numero irracional e = 2.718281 se le llama logaritmo natural y se cambia la palabra Log por ln. Regularmente trabajaremos con logaritmos base 10 o comunes.

$$Log_{e}a = n$$
$$\ln a = n$$

Para el ejemplo anterior se puede escribir de la siguiente forma

$$2^{n} = 16$$

$$Log_{2}16 = n$$

$$Log_{2}16 = 4$$

Ejemplo: Encuentre el

$$Log_{5}25 = n$$

Entonces debemos encontrar el numero n, que siendo exponente de 5 de cómo resultado 25, para este caso nuevamente es relativamente sencillo pues empezamos a probar

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

Y llegamos rápidamente a la conclusión que el numero n es 2, pues 5 elevado a la 2 es 25

$$Log_5 25 = 2$$

En muchas ocasiones no es tan fácil deducir el numero n, pues no hay un número entero exacto que resuelva la incógnita.

Ejemplo:

$$Log_4 100 = n$$

Si empezamos a probar como lo hicimos con los ejemplos anteriores

$$4^1 = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$4^3 = 64$$

$$4^4 = 256$$

El número que estamos buscando es 100, y al probar con 3 obtenemos 64 y luego al probar con 4 obtenemos 256, esto quiere decir que el número que estamos buscando está entre 3 y 4. Para resolverlo utilizaremos una de las propiedades de los logaritmos.

$$Log_b a^x = xLog_b a$$

Vemos que en el logaritmo anterior el número a esta elevado a la x, este exponente x se puede “trasladar” adelante del logaritmo.

Retomando el ejemplo anterior, sabemos que la base es 4 y que debemos encontrar un numero n que siendo exponente de 4 de cómo resultado 100

$$4^n = 100$$

Ahora aplicaremos logaritmo común (base 10) a ambos lados de la expresión, esto lo podemos hacer porque es una ecuación y como lo haremos a ambos lados no alteraremos el resultado de la misma.

$$4^n = 100$$
$$Log 4^n = Log 100$$

Si observamos el lado izquierdo de la ecuación tenemos lo siguiente

$$Log 4^n$$

Podemos hacer uso de la propiedad de logaritmos vista anteriormente, donde el exponente n lo trasladaremos hacia adelante del logaritmo.

$$nLog 4$$

Entonces la expresión original la podemos escribir como

$$nLog 4 = Log 100$$

Ahora será un poco más fácil encontrar el valor de n, pues despejamos n dividiendo la expresión entre Log4

$$n = \frac{Log100}{Log4}$$

Ahora con una calculadora podemos encontrar el logaritmo común de 100 y de 4

$$Log100 = 2$$

$$Log4 = 0.60205999$$

Entonces
$$n = \frac{2}{0.60205999} = 3.321928$$

$$Log_4 100 = 3.321928$$

Este tipo de ecuaciones se les llama ecuaciones exponenciales, pues la incógnita aparece en el exponente.

Ejemplo:

$$1000(1+0.15)^n = 3000$$

Debemos determinar el valor de n, para lo cual empezaremos a despejar la ecuación del lado izquierdo

Primero dividiremos la expresión entre 1000, puesto que está del lado donde queremos dejar sola a la n

$$(1+0.15)^n = \frac{3000}{1000}$$

$$(1+0.15)^n = 3$$

En este paso podemos aplicar logaritmos como lo hicimos anteriormente.

$$(1.15)^n = 3$$

$$Log(1.15)^n = Log3$$

$$nLog(1.15) \;\; = Log3$$

$$n = \frac{Log3}{Log1.15}$$

$$n = \frac{0.4771212547}{0.0606978403} = 7.8605$$

El resultado de n es **7.86**

3. Sucesiones Aritméticas y Geométricas

Progresiones Aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión de números a los cuales se les llamara términos, que cumplen con la condición que entre cada dos términos seguidos existe la misma cantidad llamada distancia

Ejemplos

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 …

95.5 85.5 75.5 65.5 55.5 45.5 …

$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \ \dots \ t_n$

Para poder determinar la distancia de la progresión restamos el termino 3 menos el termino 2 y esta diferencia debe ser igual a la resta entre el termino 2 y el termino 1

$$t_3 - t_2 = t_2 - t_1$$

Así para la progresión

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 …

El termino

t3= 6

t2= 4

t1=2

$$t_3 - t_2 = t_2 - t_1$$

$$6 - 4 = 4 - 2$$

2

Por lo tanto la distancia que hay entre los términos es d = 2

Para conocer un término n cualquiera se utilizara la siguiente ecuación

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

Para el ejemplo anterior encontraremos el término de la posición 50

$$t_{50} = 2 + (50-1)2$$

$$t_{50} = 2 + (49)2$$

$$t_{50} = 2 + 98$$

$$t_{50} = 100$$

Por lo tanto el término que se encuentra en la posición 50 es el numero 100

La suma de todos los términos de una progresión se determina mediante la ecuación

$$\frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

La suma de los 50 términos del ejemplo anterior es

$$\frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

$$\frac{50}{2}[2(2) + (50-1)2]$$

$25[4+(49)2]$

$25[4+98]$

$25[102]$

= 2550

Progresión Geométrica

Una progresión geométrica es una sucesión de números a los que llamaremos términos, de tal manera que entre dos números consecutivos se guarda una razón, es decir para conseguir el siguiente termino se multiplica el anterior por un factor.

Ejemplos

4 8 16 32 64 128 . . .

-5 15 - 45 135 - 405 1215 . . .

Para determinar la razón entre los números lo haremos de la siguiente forma

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

Tomaremos el ejemplo uno para encontrar la razón

t3 = - 45

t2 = 15

t1 = -5

$$\frac{-45}{15} = \frac{15}{-5}$$

$$-3 = -3$$

Por lo tanto la razón es -3 y la identificaremos mediante la letra r

r = -3

Termino n de una progresión geométrica

Para determinar el término n-esimo de una progresión geométrica utilizaremos la siguiente ecuación.

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

Que para nuestro ejemplo tenemos que

t1 = -5

r = 3

Si queremos encontrar el término que se encuentra en la posición 10

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

$$t_{10} = -5(-3)^{10-1}$$

$$t_{10} = -5(-3)^9$$

$$t_{10} = -5(-19683)$$

$$t_{10} = 98{,}415$$

Sumatoria de una progresión geométrica

Para realizar la sumatoria de n términos de una progresión geométrica debemos conocer si la razón es mayor o menor a 1

Si es mayor a 1 utilizaremos la siguiente ecuación.

$$S = t_1 \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

Si la razón es menor a 1 entonces utilizaremos la siguiente ecuación

$$S = t_1 \frac{(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Realizar la suma de los primeros 10 términos del ejemplo anterior:

Como ya vimos la razón del ejemplo anterior es menor 1, r = -3 entonces usamos la segunda ecuación.

$$S = t_1 \frac{(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$S = -5\frac{\left(1-(-3)^{10}\right)}{\left(1-(-3)\right)}$$

$$S = -5\frac{\left(1-(59049)\right)}{\left(1+3\right)}$$

$$S = -5\frac{\left(-59048\right)}{\left(4\right)}$$

$$S = \frac{295240}{4}$$

S= 73,810

Encontrar el término 8 y la sumatoria de los 8 términos de la progresión geométrica

4 8 16 32 64 128 256 512 1024

Primero determinamos la razón

$$\frac{16}{8} = \frac{8}{4}$$

$$2 = 2$$

r = 2

El termino 8 lo encontraremos de la siguiente forma

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

$$t_8 = 4(2)^{8-1}$$

$$t_8 = 4(2)^7$$

$$t_8 = 4(128)$$

$$t_8 = 512$$

Para encontrar la sumatoria de los 8 términos debemos usar la ecuación para r mayor que 1, puesto que r = 2

$$S = 4\frac{(2^8 - 1)}{(2 - 1)}$$

$$S = 4\frac{(256 - 1)}{(1)}$$

$$S = 4(255) = 1020$$

Descargo de responsabilidad

La información contenida en este documento descargable en formato PDF o PPT es un reflejo del material virtual presentado en la versión online del curso. Por lo tanto, su contenido, gráficos, links de consulta, acotaciones y comentarios son responsabilidad exclusiva de su(s) respectivo(s) autor(es) por lo que su contenido no compromete al área de e-Learning del Departamento GES o al programa académico al que pertenece.

El área de e-Learning no asume ninguna responsabilidad por la actualidad, exactitud, obligaciones de derechos de autor, integridad o calidad de los contenidos proporcionados y se aclara que la utilización de este descargable se encuentra limitada de manera expresa para los propósitos educacionales del curso.