Таблица с данными

	x	**y**	y_1
0	1.340	4.25562	4.26
1	1.345	4.35325	4.35
2	1.350	4.45522	4.46
3	1.355	4.56184	4.56
4	1.360	4.67344	4.67

Интерполяция – функция, проходящая точно через узлы

1. Полином Лагранжа

Формула:

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \text{ где } l_i(x)=\prod_{j=0\, j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Считаем коэффициенты:

$$L_0(x)=\frac{(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)(x-1.360)}{(1.340-1.345)(1.340-1.350)(1.340-1.355)(1.340-1.360)}$$

$$L_0(x)=\frac{(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)(x-1.360)}{15000}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.350)(x-1.355)(x-1.360)}{(1.345-1.340)(1.345-1.350)(1.345-1.355)(1.345-1.360)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.350)(x-1.355)(x-1.360)}{-3750}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.355)(x-1.360)}{(1.350-1.340)(1.350-1.345)(1.350-1.355)(1.350-1.360)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.355)(x-1.360)}{2500}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.360)}{(1.355-1.340)(1.355-1.345)(1.355-1.350)(1.355-1.360)}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.360)}{-3750}$$

$$L_4(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)}{(1.360-1.340)(1.360-1.345)(1.360-1.350)(1.360-1.355)}$$

$$L_4(x)=\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)}{15000}$$

Полином:

$$P(x)=4.26\frac{(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)(x-1.360)}{15000}+4.35\frac{(x-1.340)(x-1.350)(x-1.355)(x-1.360)}{-3750}+\text{¿}$$

$$+4.46\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.355)(x-1.360)}{2500}+4.56\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.360)}{-3750}+\text{¿}$$

$$+4.67\frac{(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)}{15000}$$

2. Первая интерполяционная схема Ньютона (Forward) 4-ой степени

Формула:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}),$$

$$a_k=\frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}.$$

Таблица разностей

x	**y**	Δy	Δ^{2y}	Δ^{3y}	Δ^{4y}
1.340	**4.26**	**0.09**	**0.02**	**-0.03**	**0.05**
1.345	4.35	0.11	-0.01	0.02	
1.350	4.46	0.1	0.01		
1.355	4.56	0.11			
1.360	4.67				

$$a_0=4.26,\qquad a_1=\frac{\Delta y}{1!0.005^1}=\frac{0.09}{0.005}=18,\quad a_2=\frac{\Delta^2 y}{2!0.005^2}=\frac{0.02}{0.00005}=400,$$

$$a_3=\frac{\Delta^3 y}{3!0.005^3}=\frac{-0.03}{0.00000075}=-40000,\qquad a_4=\frac{\Delta^4 y}{4!0.005^4}=\frac{0.05}{0.000000015}\approx-3333333.\overline{3}$$

$P(x)=4.26+18(x-1.340)+400(x-1.340)(x-1.345)-40000.\overline{3}(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)-\text{¿}$

$-3333333.\overline{3}(x-1.340)(x-1.345)(x-1.350)(x-1.355)$

3. Вторая интерполяционная схема Ньютона (Backward) 4-ой степени

Формула:

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_n)+b_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+b_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\ldots+b_n(x-x_n)\ldots(x-x_0),$$

$$b_k=\frac{\nabla^k y_n}{k!h^k}.$$

Таблица разностей

x	**y**	∇y	∇^{2y}	∇^{3y}	∇^{4y}
1.340	4.26	0.09	0.02	-0.03	**0.05**
1.345	4.35	0.11	-0.01	**0.02**	
1.350	4.46	0.1	**0.01**		
1.355	4.56	**0.11**			
1.360	**4.67**				

$b_0=4.67,\qquad b_1=\frac{\nabla y}{1!0.005^1}=\frac{0.11}{0.005}=22,\quad b_2=\frac{\nabla^2 y}{2!0.005^2}=\frac{0.01}{0.00005}=200,$

$b_3=\frac{\nabla^3 y}{3!0.005^3}=\frac{0.02}{0.00000075}=26666.\overline{6},\qquad b_4=\frac{\nabla^4 y}{4!0.005^4}=\frac{0.05}{0.000000015}\approx-3333333.\overline{3}$

$P(x)=4.67+22(x-1.360)+200(x-1.360)(x-1.355)-26666.\overline{6}(x-1.360)(x-1.355)(x-1.350)-\text{¿}$

$-3333333.\overline{3}(x-1.360)(x-1.355)(x-1.350)(x-1.345)$

4. Интерполирование на основе кубического сплайна

Аппроксимация - функция, проходящая максимально близко к узлам

** 5. Полином Ньютона в разделенных разностях (универсальная форма)*

6. МНК (метод наименьших квадратов) с использованием линейной функции

Отклонение:

$\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$ или $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i$ без разницы, потому в МНК мы минимизируем квадрат ошибки:

$$\varepsilon_i^{\,2} = (y_i - f(x_i))^2 = (f(x_i) - y_i)^2$$

Модель линейной регрессии:

$$f(x) = ax + b$$

Функция суммы квадратов ошибок:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \rightarrow min$$

Берем производные по параметрам a и b:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Производная по a:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = -2\sum x_i(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum x_i y_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0$$

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$

Производная по b:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum 2(y_i - ax_i - b)(-1) = -2\sum (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum y_i - a\sum x_i - bn = 0$$

$$a\sum x_i + bn = \sum y_i$$

Получили систему из нормальных формул:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i\ y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

Решаем систему с помощью метода Крамера:

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i\ y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$\Delta = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$\Delta_a = n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

$$\Delta_b = \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Получаем систему из явных формул:

$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \end{cases}$$

Возможные другие формулы:

Центрированная форма:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Матричная форма:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$\beta=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Пример с использованием нормальных формул:

Возьмем два первых узла:

$x_0=1.340 \qquad y_0=4.26$

$x_1=1.345 \qquad y_1=4.35$

Вычислим набор сумм:

$\sum_{i=1}^{n} x_i=2.685, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i=8.61, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2=5.350, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i=11.55915.$

Система из нормальных формул:

$\begin{cases} a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_i\ y_i \\ a\sum x_i+bn=\sum y_i \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a5.350+b2.685=11.55915 \\ a2.685+2b=8.61 \end{cases}$, $\qquad \begin{matrix} a\approx 0.0001289 \\ b\approx 4.3048269 \end{matrix}$.

Система из явных формул (тот же пример):

$\begin{cases} a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \\ b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i-a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a=\dfrac{2*11.55915-2.685*8.61}{2*5.350-(2.685)^2} \\ b=\dfrac{8.61-a2.685}{2} \end{cases}$, $\qquad \begin{matrix} a\approx 0.0001289 \\ b\approx 4.3048269 \end{matrix}$

Получили линейную аппроксимирующую функцию:

$\tilde{y}=0.0001289x+4.3048269$

Найдем сумму ошибок:

x	1.340	1.345	1.350	1.355	1.360
y	4.26	4.35	4.46	4.56	4.67
$\tilde{y}$	4.30	4.31	4.31	4.31	4.31

$S(a,b)=\sum_{i=1}^{5}(\tilde{y}-y)^2=(4.30-4.26)^2+(4.31-4.35)^2+(4.31-4.46)^2+(4.31-4.56)^2+(4.31-4.67)^2=0.2178$

Вывод: без разницы, нормальные формулы или явные формулы использовать, результаты одинаковые.

7. МНК (метод наименьших квадратов) с использованием квадратичной функции

Модель квадратичной регрессии

$f(x)=ax^2+bx+c$

Функция суммы квадратов ошибок:

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i^2+bx_i+c))^2\rightarrow min$$

Берем производные по параметрам a и b:

…

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i^2-bx_i-c)^2\rightarrow min$$

Производная по a:

…

Производная по b:

...

Получили систему из нормальных формул:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}$$

Вычисляем наборы сумм:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^4=1.340^4+1.345^4+1.350^4+1.355^4+1.360^4=16.61$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^3=1.340^3+1.345^3+1.350^3+1.355^3+1.360^3=12.30$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.340^2 + 1.345^2 + 1.350^2 + 1.355^2 + 1.360^2 = 9.11$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.340 + 1.345 + 1.350 + 1.355 + 1.360 = 6.75$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 1.340^2 * 4.26 + 1.345^2 * 4.35 + 1.350^2 * 4.46 + 1.355^2 * 4.56 + 1.360^2 * 4.67 = 40.66$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1.340 * 4.26 + 1.345 * 4.35 + 1.350 * 4.46 + 1.355 * 4.56 + 1.360 * 4.67 = 30.11$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 4.26 + 4.35 + 4.46 + 4.56 + 4.67 = 22.3$$

Подставляем наборы сумм в формулы:

$$\begin{cases} a\,16.61 + b\,12.30 + c\,9.11 = 40.66 \\ a\,12.30 + b\,9.11 + c\,6.75 = 30.11 \\ a\,9.11 + b\,6.75 + 5c = 22.3 \end{cases}$$

Решаем систему с помощью метода Крамера:

$$\begin{pmatrix} 16.61 & 12.30 & 9.11 \\ 12.30 & 9.11 & 6.75 \\ 9.11 & 6.75 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.66 \\ 30.11 \\ 22.3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \left| \begin{matrix} 16.61 & 12.30 & 9.11 \\ 12.30 & 9.11 & 6.75 \\ 9.11 & 6.75 & 5 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 16.61 & 12.30 \\ 12.30 & 9.11 \\ 9.11 & 6.75 \end{matrix} = 16.61 * 9.11 * 5 + 12.30 * 6.75 * 9.11 + 9.11 * 12.30 * 6.75 - \text{¿}$$

$$-5 * 12.30 * 12.30 - 6.75 * 6.75 * 16.61 - 9.11 * 9.11 * 9.11 \approx -0.000155\overline{9}$$

$$\Delta_a = \left| \begin{matrix} 40.66 & 12.30 & 9.11 \\ 30.11 & 9.11 & 6.75 \\ 22.3 & 6.75 & 5 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 40.66 & 12.30 \\ 30.11 & 9.11 \\ 22.3 & 6.75 \end{matrix} = 40.66 * 9.11 * 5 + 12.30 * 6.75 * 22.3 + 9.11 * 30.11 * 6.75 - \text{¿}$$

$$-5 * 30.11 * 12.30 - 6.75 * 6.75 * 40.66 - 22.3 * 9.11 * 9.11 = -0.000405$$

$$\Delta_b = \left| \begin{matrix} 16.61 & 40.66 & 9.11 \\ 12.30 & 30.11 & 6.75 \\ 9.11 & 22.3 & 5 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 16.61 & 40.66 \\ 12.30 & 30.11 \\ 9.11 & 22.3 \end{matrix} = 16.61 * 30.11 * 5 + 40.66 * 6.75 * 9.11 + 9.11 * 12.30 * 22.3 - \text{¿}$$

$$-5 * 12.30 * 40.66 - 22.3 * 6.75 * 16.61 - 9.11 * 30.11 * 9.11 \approx 0.000068\overline{9}$$

$$\Delta_c = \left| \begin{matrix} 16.61 & 12.30 & 40.66 \\ 12.30 & 9.11 & 30.11 \\ 9.11 & 6.75 & 22.3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 16.61 & 12.30 \\ 12.30 & 9.11 \\ 9.11 & 6.75 \end{matrix} = 16.61 * 9.11 * 22.3 + 12.30 * 30.11 * 9.11 + 40.66 * 12.30 * 6.75 - \text{¿}$$

$-22.3*12.30*12.30-6.75*30.11*16.61-9.11*9.11*40.66 \approx 0.000050\overline{9}$

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{-0.000405}{-0.000155\overline{9}}\approx 2.60$$

$$b=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{0.000068\overline{9}}{-0.000155\overline{9}}\approx -0.44$$

$$c=\frac{\Delta_c}{\Delta}=\frac{0.000050\overline{9}}{-0.000155\overline{9}}\approx -0.33$$

Получили квадратичную аппроксимирующую функцию:

$$\tilde{y}=2.60\,x^2-0.44\,x-0.33$$

Найдем сумму ошибок:

x	1.340	1.345	1.350	1.355	1.360
y	4.26	4.35	4.46	4.56	4.67
$\tilde{y}$	3.74896	3.781665	3.8145	3.847465	3.88056

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{5}(\tilde{y}-y)^2=(3.75-4.26)^2+(3.79-4.35)^2+(3.81-4.46)^2+(3.85-4.56)^2+(3.88-4.67)^2=2.1244$$