Формула общего принципа численного интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\,\Delta x$, где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Метод прямоугольников

Левый прямоугольник (частный случай)

Общий вид формулы: $I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

Формула для промежутка: $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$

Правый прямоугольник (частный случай)

Общий вид формулы: $I \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

Формула для промежутка: $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)$

Средний прямоугольник (частный случай)

Общий вид формулы: $I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$

Формула для промежутка: $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)$

Метод трапеций

Общий вид формулы: $I = \dfrac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 2f(x_n)]$

Формула для промежутка: $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)$

Оценка погрешности (теоретическая) для трапеций: $|E| \le \dfrac{(b-a)h^2}{12} M_2$,
где $M_2 = max|f''(x)|; x \in [a,b]$. Это даёт гарантию: если подставить M2, можно найти h, при котором ошибка не превосходит ε.

Правило Рунге: $R \approx \dfrac{|I_{2h} - I_h|}{2^p - 1} = \dfrac{|I_{2h} - I_h|}{3}$

Метод Симпсона

Общий вид формулы: $I=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+...+f(x_n)]$

Формула для промежутка: $\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2), \quad h=\frac{x_2-x_0}{2}$

Задание:
1. Найти шаг интегрирования h для вычисления интеграла функции $f(x)=x\,arctg\,x$, заданной на отрезке [0, 1] по формуле трапеций с точностью ε = 0.001.
2. Вычислить интеграл по формуле трапеций с шагами 2h и h. Дать уточненную оценку погрешности.
3. Вычислить интеграл по формуле Симпсона с шагами 2h и h. Дать уточненную оценку погрешности.
4. Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Сравнить приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

Указание. Шаг h следует выбирать с учетом дополнительного условия: отрезок интегрирования должен разбиваться на число частей, кратное 4.

Решение:

1. Сначала найдем шаг интегрирования h для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 (x\,arctg\,x)dx$ по формуле трапеций с точностью ε = 0.001.

Чтобы найти шаг h, воспользуемся формулой $M\frac{(b-a)h^2}{12}<\varepsilon, \quad M_2=max|f''(x)|; x\in[a,b]$, для этого найдем вторую производную.

$$f'(x)=arctg(x)+\frac{x}{x^2+1} \qquad f''(x)=\frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Тогда $M_2=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|\frac{2}{(1+x^2)^2}|=f''(2)=0.08.$

$$M\frac{(b-a)h^2}{12}<\varepsilon, \qquad 0.08\frac{(1-0)h^2}{12}<0.01, \qquad h^2<1.5, \qquad h<1.2247.$$

Найдем количество шагов, на которое нужно разделить отрезок с шагом $h<1.2247$ для достижения точности ε = 0.001.

$$n>\frac{b-a}{h}, \qquad n>0.8165.$$

Следуя указанию, возьмем количество частей отрезка кратное 4, т.е. n = 4. Следовательно, шаг интегрирования h = 0.25.

2. Вычислим интеграл по формуле трапеций с шагом h = 0.25.

Получим

$$I(h)=\int_0^1 (xarctgx)dx \approx 0.0077+0.03626+0.0897+0.1590 \approx 0.2926$$

Увеличим шаг в два раза и посчитаем интеграл I(2h).

2h = 0.5, n = 2, $I(2h)\approx 0.3123$

Для определения погрешности воспользуемся правилом Рунге.

$$I-I^{TP}(h)\approx \frac{0.3123-0.2926}{3}\approx 0.0197$$

Итак, по формуле трапеций

$$\int_0^1 (xarctgx)dx \approx 0.3123 \pm 0.0197.$$

3. Вычислим интеграл по формуле Симпсона с шагами 2h и h.
Интеграл с шагом h = 0.25, n = 4

$$I(h)=\int_0^1 (xarctgx)dx \approx \frac{1}{12}(0+2.1755+0.4636+0.7854)\approx 0.28538$$

Увеличим шаг в два раза и посчитаем интеграл I(2h).
h = 0.5, n = 2, $I(2h)\approx 0.28544$.
Для определения погрешности воспользуемся правилом Рунге.

$$I-I^{TP}(h)\approx \frac{0.28544-0.28537}{15}\approx 4.77\times 10^{-6}$$

Итак, по формуле Симпсона

$$\int_0^1 (xarctgx)dx \approx 0.28544 \pm 4.77\times 10^{-6}$$

4. Вычислим определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_0^1 (xarctgx)dx \approx 0.2853981634$$

Сравнивая приближенные значения интеграла с точными, видим,

что формула Симпсона дает более точный результат интегрирования

в отличие от формулы трапеций.