Прямолинейные образующие ПВП

Прямая далее будет называться *образующей* поверхности, если она целиком содержится в ней. Примерами поверхностей второго порядка (ПВП), каждая точка которых проходит через некоторую прямолинейную образующую, очевидно, являются цилиндры (7 типов) и конус. Далее мы покажем, что через каждую точку гиперболического параболоида (ГП) и однополостного гиперболоида (ОГ) проходит ровно две прямолинейных образующих. Остальные типы ПВП (эллипсоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид и точка = «мнимый конус») не имеют никаких прямолинейных образующих, что очевидно из геометрических соображений (либо из рассуждений, аналогичных приведённым ниже).

Прямолинейные образующие ГП. Рассмотрим ГП, задающийся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

и предположим, что прямая, заданная параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + x_\ell t, \\ y(t) = y_0 + y_\ell t, \\ z(t) = z_0 + z_\ell t \end{cases} \tag{1}$$

содержится в нём. Подставляя их в уравнение ГП и приводя подобные слагаемые, имеем:

$$t^2\left(\frac{x_\ell^2}{a^2} - \frac{y_\ell^2}{b^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0 x_\ell}{a^2} - \frac{y_0 y_\ell}{b^2} - z_\ell\right) + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 2z_0 = 0.$$

Поскольку многочлен от переменной t в левой части тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его коэффициенты, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_\ell^2}{a^2} - \dfrac{y_\ell^2}{b^2} = 0, \\ \dfrac{x_0 x_\ell}{a^2} - \dfrac{y_0 y_\ell}{b^2} - z_\ell = 0, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} - 2z_0 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим: $x_\ell/a = \pm y_\ell/b$. Очевидно, $x_\ell \neq 0$ и $y_\ell \neq 0$, иначе из второго уравнения следовало бы, что и $z_\ell = 0$, но направляющий вектор (x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ) прямой не может быть нулевым! Таким образом, можно положить[1] $x_\ell := a$, и тогда $y_\ell = \pm b$ и $z_\ell = x_0/a \mp y_0/b$. Итак, через каждую точку (x_0, y_0, z_0), лежащую на ГП, проходит пара прямолинейных образующих

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{x_0/a - y_0/b} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{-b} = \frac{z - z_0}{x_0/a + y_0/b},$$

составляющих два семейства (см. рис. 1), каждое из которых полностью покрывает ГП. Очевидно, прямые первого семейства параллельны (либо лежат в) плоскости $bx - ay = C$, а прямые второго — плоскости $bx + ay = C$ при любом значении C.

[1] Это возможно, поскольку направляющий вектор прямой можно заменить на любой пропорциональный ему ненулевой вектор.

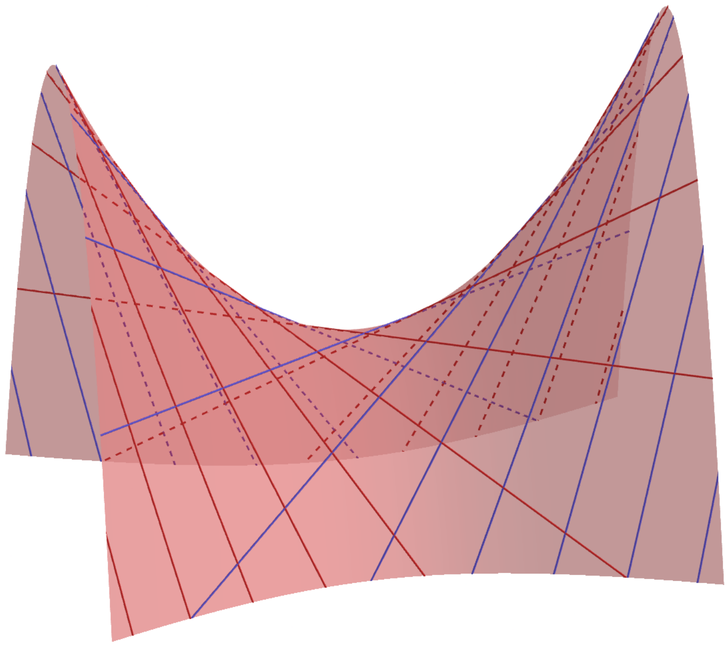

Рис. 1: Два семейства прямолинейных образующих ГП, обозначенных разными цветами. Интерактивная версия рисунка доступна по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/eefvvgmm.

Прямолинейные образующие ОГ. Пусть ОГ задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

После подстановки в него уравнений (1) и приведения подобных слагаемых, получаем, что при каждом t выполнено

$$t^2\left(\frac{x_\ell^2}{a^2} + \frac{y_\ell^2}{b^2} - \frac{z_\ell^2}{c^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0x_\ell}{a^2} + \frac{y_0y_\ell}{a^2} - \frac{z_0z_\ell}{c^2}\right) + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_\ell^2}{a^2} + \dfrac{y_\ell^2}{b^2} - \dfrac{z_\ell^2}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x_0x_\ell}{a^2} + \dfrac{y_0y_\ell}{b^2} - \dfrac{z_0z_\ell}{c^2} = 0, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $z_\ell \neq 0$, поскольку в противном случае первое уравнение повлекло бы равенства $x_\ell = y_\ell = 0$. Следовательно, мы можем положить $z_\ell \coloneqq c$, в результате чего

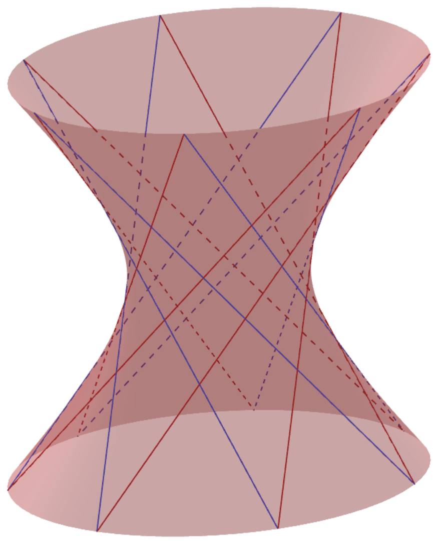

Рис. 2: Два семейства прямолинейных образующих ОГ, обозначенных разными цветами. Интерактивная версия рисунка доступна по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/yet9adgm.

система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x_\ell^2}{a^2} + \dfrac{y_\ell^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{z_0}{c} = \dfrac{x_0 x_\ell}{a^2} + \dfrac{y_0 y_\ell}{b^2}, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Возводя обе части второго уравнения в квадрат и подставляя полученное выражение для z_0^2/c^2 в третье уравнение, имеем:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \left(\frac{x_0 x_\ell}{a^2} + \frac{y_0 y_\ell}{b^2}\right)^2 = 1.$$

После очевидных преобразований получаем

$$\frac{x_0^2}{a^2}\left(1 - \frac{x_\ell^2}{a^2}\right) - \frac{2x_0 x_\ell y_0 y_\ell}{a^2 b^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\left(1 - \frac{y_\ell^2}{b^2}\right) = 1,$$

что вследствие первого уравнения системы (2) эквивалентно

$$\frac{x_0^2 y_\ell^2}{a^2 b^2} - \frac{2x_0 x_\ell y_0 y_\ell}{a^2 b^2} + \frac{x_\ell^2 y_0^2}{a^2 b^2} = 1 \quad \text{или} \quad (x_0 y_\ell - x_\ell y_0)^2 = a^2 b^2.$$

Таким образом, $x_0 y_\ell - x_\ell y_0 = \pm ab$, что позволяет при помощи второго уравнения системы (2) найти

$$x_\ell = \frac{x_0 z_0/c \pm a y_0/b}{x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2} \quad \text{и} \quad y_\ell = \frac{y_0 z_0/c \mp b x_0/a}{x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2}.$$

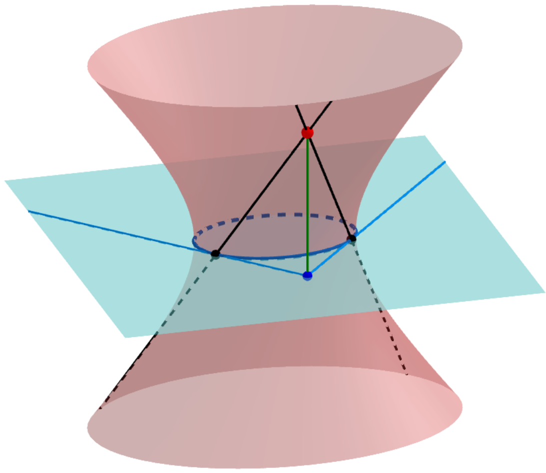

Рис. 3: Построеие прямолинейных образующих, проходящих через точку, не лежащую в плоскости $z = 0$. Интерактивная версия рисунка доступна по ссылке: https://www.geogebra.org/3d/qss6jvu3.

В обоих выражениях, согласно третьему уравнению из (2), знаменатели можно заменить на $1 + z_0^2/c^2$. Тем самым, через каждую точку (x_0, y_0, z_0) ОГ проходят две прямолинейных образующих, задающихся уравнениями

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{x_0 z_0}{c} + \dfrac{a y_0}{b}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{y_0 z_0}{c} - \dfrac{b x_0}{a}} = \frac{z - z_0}{c + \dfrac{z_0^2}{c}} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_0}{\dfrac{x_0 z_0}{c} - \dfrac{a y_0}{b}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{y_0 z_0}{c} + \dfrac{b x_0}{a}} = \frac{z - z_0}{c + \dfrac{z_0^2}{c}}$$

(все знаменатели здесь были умножены на ненулевую константу $1 + z_0^2/c^2$). Эти прямые также составляют два семейства, каждое из которых полностью покрывает ОГ (см. рис. 2).

Замечание. Ортогональная проекция любой образующей ОГ на плоскость $z = 0$ касается эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, лежащего в этой плоскости. В самом деле, если бы это было не так, то эта проекция пересекала бы эллипс и на ней нашлась бы точка $(\hat{x}, \hat{y})$, которая лежала бы внутри эллипса и потому удовлетворяла бы неравенству $\hat{x}^2/a^2 + \hat{y}^2/b^2 < 1$. С другой стороны, данная точка является проекцией некоторой точки ОГ, поэтому существует такое число $\hat{z}$, что $\hat{x}^2/a^2 + \hat{y}^2/b^2 = 1 + \hat{z}^2/c^2 \geqslant 1$?!

Это наблюдение позволяет находить образующие, проходящие через произвольную точку (x_0, y_0, z_0) ОГ с $z_0 \neq 0$. Для этого мы спроектируем её на плоскость $z = 0$ и проведём касательные к сечению ОГ этой плоскостью (которое в точности будет рассмотренным выше эллипсом). Полученные точки касания соединим с исходной точкой прямыми, которые и будут образующими ОГ (см. рис. 3).

Упражнение. Покажите, что как в случае ГП, так и ОГ, две различные прямолинейные образующие одного семейства всегда скрещиваются, а образующие разных семейств — либо пересекаются, либо параллельны (последнее возможно только в случае ОГ).