

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 531+536.7](075.8)
М 55

Коллектив авторов:

*В.Г. Дубровский, А.А. Корнилович,
И.И. Суханов, И.Б. Формусатик*

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *В.К. Макуха*
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.Н. Холявко*

Работа подготовлена кафедрой прикладной
и теоретической физики

М 55 **Механика и термодинамика:** учебное пособие / В.Г. Дубровский, А.А. Корнилович, И.И. Суханов, И.Б. Формусатик. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 95 с.

ISBN 978-5-7782-3881-7

В пособие включены лабораторные работы по механике поступательного и вращательного движения, молекулярно-кинетической теории и термодинамике. В каждую лабораторную работу включено теоретическое описание исследуемого явления. Во вводной части пособия рассмотрены методы статистической обработки результатов измерений.

Учебное пособие по курсу общей физики предназначено для студентов I и II курса РЭФ, ФТФ, ФЭН всех специальностей и всех форм обучения.

УДК 531+536.7](075.8)

ISBN 978-5-7782-3881-7

© Дубровский В.Г., Корнилович А.А.,
Суханов И.И., Формусатик И.Б., 2019
© Новосибирский государственный
технический университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ	5
Часть 1. Многократные измерения времени соударения шаров.....	5
Часть 2. Обработка результатов измерений	15
Работа № 1. ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ	32
Работа № 2. ИЗМЕРЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА	44
Работа № 3. ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА	57
Работа № 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА	65
Работа № 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ МЕТОДОМ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА	71
Работа № 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ (ВЯЗКОСТИ) ЖИДКОСТИ ПО МЕТОДУ СТОКСА.....	85
Работа № 7. ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЬЦМАНА	89

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии представлены теоретические и экспериментальные исследования физических явлений, изучаемых в разделах «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика» курса общей физики высших учебных заведений. При проведении исследований студенты, во-первых, осваивают основные принципы постановки эксперимента, методы обработки результатов измерений и представления этих результатов в стандартном виде. Во-вторых, студенты знакомятся с построением теоретической модели физического явления, исследуют приближения модели, т. е. условия, в рамках которых она соответствует описываемому явлению.

Студенты знакомятся с основами теории измерений, источниками и видами погрешностей измерений, правилами определения доверительного интервала, т. е. границ, в пределах которых находится истинное значение измеряемой величины. Этот весьма общий материал необходим не только в курсе общей физики, но и в измерительных задачах последующих учебных курсов, прежде всего курса «Метрология».

Соответствие теоретических моделей исследуемым физическим явлениям в настоящем пособии проверяют простейшим графическим способом. Для этого результаты измерений линеаризуют, т. е. вычисляют их функции, для которых зависимость выглядит прямой линией. Отклонение от прямой линии легко обнаруживается и служит мерой подтверждения или нарушения теоретического закона.

В целом экспериментальные исследования – неотъемлемая часть курса физики. Благодаря практике измерений студент получает представление о сложности окружающего мира и о том, как много разнообразных факторов влияет на результаты даже, казалось бы, простейших измерений.

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

ЧАСТЬ 1. МНОГОКРАТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

В лабораторной работе измеряется время соударения τ двух одинаковых стальных шаров.

Цель работы: провести многократные измерения времени соударения шаров, исследовать статистическое распределение времени соударения (построить гистограмму, описать ее).

Измерительная установка включает кнопку «Сеть» на передней панели цифрового микросекундомера МС. Кнопку «Выбор работы» необходимо переключить в положение «Соударение шаров». Кнопка «Пуск» стирает предыдущее показание на индикаторе микросекундомера и переводит его в готовность к следующему измерению. Шары 1 и 2 подвешены на тонких проводящих нитях (рис. 1). Шар 1 отводят в сторону и помещают на основание 3, при этом шар поднимается. Затем основание 3 смещают, направление смещения показано стрелкой. Шар 1 срывается с основания, сталкивается со вторым, свободно висевшим шаром; электрическая цепь через шары замыкается. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряется микросекундомером и фиксируется на его индикаторе.

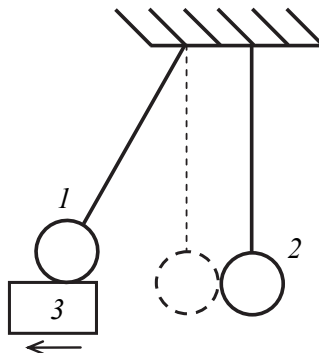


Рис. 1

Теоретически столкновение шаров изучается в приближении центрального удара, когда шары движутся вдоль линии, соединяющей их центры масс. Поэтому в настоящей работе необходимо обеспечить

стабильность положения и относительной скорости шаров в момент удара. Для этого:

- отрегулировать длину проводов так, чтобы центры висящих шаров располагались на одной высоте (смотреть на шары сбоку);
- разместить шары на проводах так, чтобы их центры располагались в вертикальной плоскости симметрии установки (смотреть на шары сверху);
- следить за тем, чтобы перед каждым ударом шар касался Основания 3 в одной и той же точке: если этого не сделать, то точка контакта шаров будет от удара к удару случайным образом смещаться по горизонтали;
- свободно висящий шар должен быть неподвижным перед каждым ударом.

Таблица результатов. Результаты многократных измерений и результатов промежуточных вычислений при обработке данных следует представить в виде табл. 1. Здесь № – порядковый номер измерения, τ – измеренное время соударения в микросекундах, $\bar{\tau}$ – среднее время соударения. Заметим, что единицы измерения указываются (обязательно!) в отдельной (второй) строке. В третьем столбце будем указывать номер интервала при построении гистограммы.

В последующих лабораторных работах студент может самостоятельно выбрать форму таблицы измерений (например, записывать результаты по строкам или столбцам, добавлять ячейки в таблицу для записи промежуточных и окончательных расчетов).

Т а б л и ц а 1

№ п/п	τ_i , $c \cdot 10^{-6}$	Номер интервала	$ \tau_i - \bar{\tau} $, $c \cdot 10^{-6}$	$(\tau_i - \bar{\tau})^2$, $c^2 \cdot 10^{-12}$	Среднее СКО, $c \cdot 10^{-6}$
1					$\bar{\tau} =$
2					
3					
⋮					
9					$s =$
10					$\sigma =$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Многократные измерения проводятся одно за другим, последовательно. Поэтому в табл. 1 результаты упорядочены по номеру измерения (не путать с длительностью соударения τ !). Нашей следующей задачей будет показать распределение результатов *по величине*. Однако привычный графический способ сравнения величин – нанести точки на числовую ось – становится не слишком наглядным, когда точек много.

Гистограмма (пример) – графический способ представления распределения большого числа данных. Предположим, что произведено N измерений времени соударения шаров, как говорят, получена *выборка* N измерений (из *генеральной совокупности* бесконечного числа всех возможных результатов измерений). Среди измеренных значений есть τ_{\min} и τ_{\max} . Пусть, например, $\tau_{\min} = 110,6$ мкс, $\tau_{\max} = 112,0$ мкс. Разобьем промежутки $\tau_{\max} - \tau_{\min}$ на k интервалов. Рекомендуется выбирать нечетное значение k , близкое к \sqrt{N} . При $N = 50$ возможные значения $k = 6, 7$ или 8 . Выберем $k = 7$. Ширина интервала

$$b = (\tau_{\max} - \tau_{\min}) / k.$$

В нашем случае $b = (112,0 - 110,6) / 7 = 0,200$ мкс. Следовательно, границами первого интервала будут $\tau_{\min} = 110,60$ мкс и $\tau_{\min} + b = 110,80$ мкс, границами второго – $\tau_{\min} + b = 110,80$ мкс и $\tau_{\min} + 2b = 111,00$ мкс и т. д. Составим таблицу расчетов гистограммы (табл. 2). Здесь первый столбец – порядковый номер m интервала от 1 до $k = 7$. Второй и третий столбец – границы интервалов, левая и правая.

Т а б л и ц а 2

m	Границы интервалов		N_m	Относительная частота $P_m = N_m / N$
	левая, мкс	правая, мкс		
1	110,60	110,80	4	0,08
2	110,80	111,00	10	0,20
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	$\tau_{\min} + 6b$	τ_{\max}	2	0,04

В промежуточных расчетах необходимо брать одну-две запасные значащие цифры по отношению к цене деления прибора. Цена деления микросекундомера 0,1 мкс, поэтому величину b следует округлять до 0,001 мкс, а границы интервалов до 0,01 мкс. Именно так в табл. 2 записаны численные значения границ первого интервала.

Подсчитаем число результатов измерений N_m из табл. 1, попавших в каждый из m интервалов ($1 \leq m \leq 7$). Удобно сделать это следующим образом. Рядом с каждым результатом в табл. 1 в третьем столбце укажем номер интервала, в который попал данный результат. Если результат измерения попал точно на границу, его следует относить всегда к левому либо всегда к правому интервалу. Под это правило не будет подпадать одна точка: либо крайняя правая, либо крайняя левая. Однако такое единичное исключение из правила незначительно влияет на форму гистограммы, а с увеличением выборки это влияние уменьшается. Теперь число единиц в третьем столбце табл. 1 – это количество результатов, попавших в первый интервал, число двоек – во второй и т. д.

Пусть, например, в первый интервал, между τ_{\min} и $\tau_{\min} + b$, попало 4 измерения, во второй – 10 и т. д. Запишем значения N_m в четвертый столбец табл. 2. *При этом необходимо проверить, что сумма всех N_m равна полному числу измерений N .* Подсчитаем относительную частоту попадания в m -й интервал $P_m = N_m / N$ для каждого интервала и запишем их все в четвертый столбец таблицы. Сумма всех частот равна единице:

$$P_1 + \dots + P_7 = \frac{N_1}{N} + \dots + \frac{N_7}{N} = \frac{N_1 + \dots + N_7}{N} = 1.$$

Мы все результаты измерений распределили по интервалам. Можно сказать, что вероятность попадания результата измерений в m -й интервал равна $P_m = N_m / N$, а в любой из интервалов промежутка $[\tau_{\min}; \tau_{\max}]$ равна единице. Поэтому относительную частоту P_m называют *эмпирической, т. е. опытной, вероятностью* попадания результата измерений в m -й интервал.

Построение гистограммы. По горизонтали – ось измеряемой величины τ , по вертикали две оси: слева от гистограммы – ось N_m (количество измерений, попавших в m -й интервал), а справа от гистограммы – ось эмпирической вероятности $P_m = N_m / N$. На рис. 2 масштабы по осям выбраны для рассмотренного выше примера гистограммы.

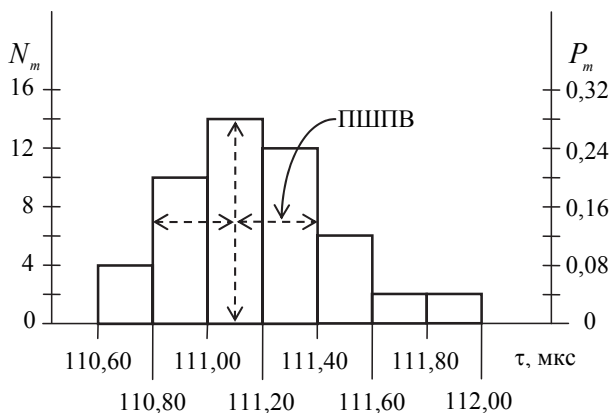


Рис. 2

Над каждым интервалом строим прямоугольник высотой N_m (ширина прямоугольника равна b). Гистограмма, представляющая собой ступенчатый график относительной частоты, наглядно показывает распределение результатов измерений.

Обработка гистограммы (предварительная). Необходимо графически определить полуширину гистограммы на полувисоте (ПШПВ), выборочное среднее результатов измерений $\bar{\tau}$ и выборочное среднеквадратичное отклонение σ_{τ} .

Для определения ПШПВ найдите на гистограмме столбец наибольшей высоты. Затем на уровне половины высоты проведите горизонтальную линию до пересечения с границами гистограммы. Половина этого отрезка между границами и есть полуширина на полувисоте. Определите величину ПШПВ в микросекундах по масштабу горизонтальной оси времени. Запишите это значение на миллиметровке.

Выборочное среднее результатов измерений определите по формуле

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i}{N}. \quad (1)$$

Выборочное среднеквадратичное отклонение от среднего определите через сумму квадратов отклонений результатов измерений от среднего значения

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\frac{(\tau_1 - \bar{\tau})^2 + (\tau_2 - \bar{\tau})^2 + \dots + (\tau_N - \bar{\tau})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^2}{N - 1}}. \quad (2)$$

Для трех измерений расчеты могут быть произведены на простом калькуляторе без математических функций. Однако для $N = 50$ попытка расчетов по формуле (2) вручную обречена на провал. Необходимо использовать статистические функции инженерного калькулятора или вид «Статистика» программы «Калькулятор» в операционной системе Windows. На калькуляторе режим статистики обычно вызывается кнопкой «STAT» или σ . В этом режиме каждое значение выборки набирается на клавиатуре и затем вводится кнопкой «DATA» (ДАННЫЕ), а в «Калькуляторе» Windows – кнопкой «ADD» (ДОБАВИТЬ). После этого осталось нажать кнопку \bar{x} и записать выборочное среднее значение, затем нажать кнопку σ_{n-1} (или s_{n-1}) и записать выборочное среднеквадратичное значение.

ЗАДАНИЕ К ЧАСТИ 1 ВВОДНОГО ЗАНЯТИЯ

1. Измерить время столкновения шаров $N = 50$ раз.
2. Построить гистограмму результатов измерений.
3. Обозначить полуширину на полувысоте (ПШПВ) гистограммы и рассчитать ее величину в масштабе оси времени.
4. По формулам (1) и (2) рассчитать выборочные среднее $\bar{\tau}$ и среднеквадратичное отклонение σ_{τ} .
5. Обозначить среднее $\bar{\tau}$ на горизонтальной оси времени.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТ

1. Ознакомьтесь с теорией вопроса, изложенной в описании лабораторной работы и в указанной к ней литературе.

2. Найдите ответы на контрольные вопросы:

- а) каковы цели эксперимента;
- б) принцип действия измерительной установки;
- в) какие величины непосредственно измеряются, а какие вычисляются;

г) какую зависимость вы должны получить теоретически и исследовать практически в процессе эксперимента?

3. К началу лабораторного занятия заготовьте титульный лист отчета о лабораторной работе, второй и третий листы отчета. Второй лист обычно содержит цель работы, таблицы приборов, исходные данные и рабочие формулы. В таблице приборов должны быть непременно указаны названия приборов. Характеристики приборов вносятся в таблицу после допуска к работе и включения установки. Рабочие формулы содержат два основных принципиально различных блока: теоретические зависимости, подлежащие исследованию в процессе эксперимента, и расчетные формулы, используемые при измерениях физических величин, входящих в исследуемые зависимости. Расчетные формулы содержат также формулы для определения погрешностей измеряемых величин. К началу занятия изобразите теоретические зависимости на графике с указанием единиц измерения величин, откладываемых по осям. На третьем листе расположите таблицу измерений.

4. На лабораторном занятии получите у преподавателя разрешение выполнять работу (допуск). Для этого необходимо:

- а) ответить на контрольные вопросы;
- б) уточнить объем измерений и форму таблицы измерений.

ОФОРМЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. В таблицу приборов для каждого прибора должно быть записано наименование (например, вольтметр), фабричный номер, тип, пределы измерений (в единицах измеряемой величины), цена деления (видимая – для цифрового прибора, расчетная – для стрелочного), класс точности прибора и максимальная приборная погрешность.

2. В таблицу результатов измерений первичные данные следует записывать «как вижу», например, в виде числа делений без пересчета в другие единицы, чтобы исключить ошибки при снятии первичных

данных. Для последующих промежуточных расчетов рекомендуется предусмотреть в таблице одну или несколько позиций (столбцов).

3. Окончательное значение измеряемой величины записывают в виде доверительного интервала (см. вводное занятие, часть 2).

4. Числовой результат следует представлять в стандартном виде $a = a_0 \cdot 10^n$, где целое число n – порядок числа a , а основа числа a_0 находится в промежутке $[1, 10]$, например, $e = 1,6021 \cdot 10^{19}$ Кл; $c = 2,9979 \cdot 10^8$ мс⁻¹.

Округление чисел

В соответствии с нормативными рекомендациями [1] погрешность измерений необходимо выражать числом с одной или двумя значащими цифрами.

Округление выполняется лишь в окончательном ответе, все промежуточные вычисления с целью сохранения точности производятся с одной-двумя лишними значащими цифрами. *Значащими цифрами* являются все цифры числа, начиная с первой слева, отличной от нуля.

Таким образом, в промежуточных вычислениях достаточно сохранять четыре значащие цифры.

Известно математическое правило округления: если первая отбрасываемая цифра меньше пяти, то последнюю оставляемую цифру не изменяют; если же последняя оставляемая цифра равна или больше пяти, то оставляемую цифру увеличивают на единицу [2].

Однако относительная погрешность округления при этом меняется в слишком широких пределах. Например, округление числа 1,49 до одной значащей цифры, т. е. до единицы, даст потерю точности вследствие большой ошибки округления: $(1,49 - 1) / 1,49 = 0,33 = 33 \%$. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, т. е. указание 0,94 вместо 0,9, может, наоборот, стать превышением точности, т. е. дезинформацией, так как исходные данные могут и не обеспечивать погрешность расчета, равную $(0,94 - 0,93) / 0,94 \approx 0,043 \approx 4 \%$.

На практике для уменьшения относительной погрешности округления было выработано следующее правило: если первая значащая цифра числа, выражающего погрешность измерений, равна 1 или 2, то в нем сохраняют две значащие цифры; если же первая значащая цифра числа равна 3 или больше, то сохраняется лишь одна значащая цифра.

С этим правилом согласуются нормируемые значения относительных погрешностей средств измерений: в числах 1,5 и 2,5 % указываются два знака, но в числах 0,5; 4; 6 % указывается лишь одна значащая цифра.

Погрешность округления величины погрешности измерений по математическому правилу, дополненному указанным выше эмпирическим правилом, лежит в пределах $\pm 3,5 \%$.

Существует альтернативный эмпирический метод округления: погрешность, задаваемую двумя значащими цифрами, округлять всегда в большую сторону. Достоинство этого метода в том, что погрешность не преуменьшается, недостаток – погрешность округления может достигать 8 %. Пример: округление 1,11 до 1,2. Относительная погрешность такого округления равна $(1,2 - 1,11) / 1,11 \approx 0,08$.

Значение центра доверительного интервала (вводное занятие, часть 2) округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности. Например, результат расчета: центр доверительного интервала $x_1 = 62,73$ с; погрешность $\sigma = 4,52$ с. Тогда после округления σ до одной значащей цифры получаем $\sigma = 5$, а после округления x_1 до единиц получаем $x_1 = 63$. Окончательная запись результата измерения имеет вид: $x = (63 \pm 5)$ с.

Построение графиков

1. График строится на миллиметровой бумаге.

2. По горизонтальной оси обычно откладывают аргумент, а по вертикальной – его функцию. Для проверки теоретических зависимостей подбирают такие переменные, чтобы получить график в виде прямой линии, *линеаризуют* график. Например, график функции $y = ax^2$ можно построить в переменных y, x^2 или \sqrt{y}, x .

3. У осей должны быть проставлены обозначения и единицы размерности соответствующих величин. При этом по оси ординат обозначение самой величины указывают слева от оси, а единицы размерности – справа, без скобок и запятой. По оси абсцисс обозначения самой величины и ее размерности указывают под осью, через запятую, без скобок. Стрелки на осях экспериментальных графиков отсутствуют.

4. Масштабы по осям следует выбирать:

а) простыми (0,1 ед/см; 0,5 ед/см и т. д.), чтобы при построении не производить сложных вычислений;

б) масштабы и начала отсчета по каждой оси должны быть такими, чтобы график занимал как можно большую часть всего листа;

5. Размеры графика (гистограммы) по вертикали и по горизонтали должны относиться друг к другу примерно как 1:1 или 1:1,5, а экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом.

6. По осям откладывают только масштабные единицы, а точки с координатами (x, y) , полученными в эксперименте, наносят на график. Более детально о построении графиков см. в [3].

7. К каждой экспериментальной точке x, y пристраивается доверительный интервал $\pm \sigma_y$ вдоль оси y . Рекомендуется все доверительные интервалы вычислять при одном и том же значении доверительной вероятности $P = 0,95$.

8. Если экспериментальных кривых несколько, то возле каждой из них надо указать условия измерений и доверительную вероятность.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните принцип построения гистограммы.
2. Как относительная частота отображается на гистограмме?
3. Чему равна сумма всех частот?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. МИ 1317–2004. Рекомендация «Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления». – Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы (ВНИИМС). – Москва, 2004.

2. СТ СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления. – М.: Изд-во стандартов, 1977.

3. Холявко В.Н. и др. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.

ЧАСТЬ 2. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: проверить гипотезу о нормальном распределении времени соударения шаров, при необходимости провести цензурирование выборки, записать доверительные интервалы для времени соударения.

Основные понятия теории измерений. Измерения проводятся для получения количественной информации об измеряемой физической величине, о ее истинном значении $x_{\text{ист}}$. В метрологической практике истинным для измерительного прибора считают значение, измеренное более точным прибором.

Из-за множества причин измеренное значение x может не совпадать с $x_{\text{ист}}$. Следовательно, любые результаты измерений дают нам не точное значение $x_{\text{ист}}$, а лишь его оценку.

Меры погрешности. *Абсолютная погрешность* Δ (другие обозначения – Δx или Δ_x) – это отклонение измеренного значения от истинного:

$$\Delta = x - x_{\text{ист}}.$$

В единичном измерении Δ может иметь произвольный знак.

Необходимо различать термины *абсолютная погрешность* и *абсолютное значение погрешности*, так как абсолютное значение погрешности – значение погрешности без учета ее знака (модуль погрешности):

$$\Delta_{\text{абс}} = |\Delta| = |x - x_{\text{ист}}|.$$

Относительная погрешность δ (другие обозначения – δx или δ_x) – это отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{\text{ист}}} \approx \frac{\Delta}{x}, \text{ или } \delta(\%) = \frac{\Delta}{x_{\text{ист}}} 100 \%. \quad (1)$$

Виды погрешности. По характеру изменения и причинам возникновения погрешности можно разбить на три класса: *систематические, случайные и грубые (промахи, выбросы)*.

Систематические погрешности Δ_C (causal – причинный) постоянны для всей серии измерений или определенным образом зависят от

условий измерения (времени, координаты, силы тока и т. п.). Причины возникновения систематических погрешностей:

- отклонение параметров реального средства измерений от расчетных значений, например, погрешность калибровки микросекундомера; постоянная разность в высоте подвеса шаров; сдвиг шкалы стрелочного прибора (в других работах);
- влияние неучитываемых факторов, например, посторонней засветки при фотометрических измерениях в оптике.

Обнаружение и учет систематических погрешностей, устранение причин их возникновения – сложная метрологическая задача.

Случайные погрешности Δ_0 (occasional – случайный), непредсказуемо изменяющиеся по величине и знаку от измерения к измерению, возникают в результате действия большого числа независимых неконтролируемых или недостаточно изученных причин. Вследствие этого при постоянных условиях многократных наблюдений одной и той же величины обнаруживается разброс их результатов. Случайную погрешность, вызванную микроскопическими явлениями, например, тепловым движением молекул, можно в какой-то степени уменьшить, но полностью устранить нельзя.

К случайному разбросу приводит также и действие большого числа независимо изменяющихся микроскопических причин. Такой разброс по аналогии с систематическими погрешностями можно уменьшить или устранить, расширяя число контролируемых условий и стабилизируя их.

Один из основных признаков, по которому изменения измеряемой величины относят к систематическим или случайным, – это скорость изменения. Если причина, вызывающая погрешность, изменяется медленно или, более того, постоянна, ее закономерность может быть выявлена измерениями. Быстрые изменения, неизмеряемые данным прибором, приводят к непредсказуемым отклонениям результатов измерений. С ростом быстродействия средств измерения переменные погрешности из случайных переходят в разряд систематических.

Грубые погрешности (промахи, выбросы) – аномально большие отклонения результата измерения, существенно превышающие ожидаемую при конкретных условиях погрешность. Грубые погрешности возникают при резком однократном кратковременном изменении условий измерения (скачок напряжения в сети), а также из-за однократной ошибки экспериментатора в расчетах или при считывании показаний прибора.

Грубые погрешности обнаруживают с помощью статистических критериев. Результаты, содержащие грубые погрешности, отбрасывают. Такой пример будет рассмотрен ниже.

Теоретическая плотность вероятности. В этом разделе измеряемая величина обозначена буквой x . При построении гистограммы (см. вводное занятие, часть 1) эмпирические вероятности $P_m = N_m / N$ зависят от ширины интервала b , что может вызывать затруднения при сравнении гистограмм. Поэтому в математической статистике чаще используют вероятность, приходящуюся на единичный интервал изменения x , называемую *плотностью распределения вероятностей* или просто *плотностью вероятностей*:

$$p = \frac{N_m}{Nb}.$$

Если все высоты прямоугольников в гистограмме разделить на ширину интервала b , изменится только вертикальный масштаб гистограммы.

Рассмотрим поведение гистограммы, когда число измерений неограниченно увеличивается, следовательно, растет плотность расположения точек на числовой оси x . Поэтому величину b можно уменьшать, все равно точки в каждый интервал попадут. Огибающая такой преобразованной гистограммы при $N \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0$ (обозначим $b = dx \rightarrow 0$) перейдет в плавную кривую $p(x)$:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ b \rightarrow 0}} \frac{N_m / N}{b} = p(x) = \frac{p(x)dx}{dx}.$$

Отсюда видно, что относительная частота, или эмпирическая вероятность, $P_m = N_m / N$ переходит в $p(x)dx$ – вероятность попадания результата в интервал $x, x + dx$. Графически это площадь бесконечно узкого прямоугольника со сторонами $p(x)$ и dx (заштрихован на рис. 1). Термин «площадь» в теории функций понимается шире, чем в геометрии: стороны прямоугольника необязательно измеряются в метрах. Так, в нашем случае величина x , а также dx , τ и b измеряются в секундах, а размерность $[p(x)] = 1/[x]$, поэтому площадь $p(x)dx$ безразмерна.

Вероятность $P(x_1, x_2)$ попадания результата в конечный интервал $[x_1, x_2]$ находят интегрированием плотности распределения:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx .$$

Она численно равна площади под кривой $p(x)$ на соответствующем интервале $[x_1, x_2]$. Полная площадь под кривой $p(x)$ равна единице как вероятность достоверного события: в какой-то из интервалов результат измерения непременно попадет.

В реальных физических экспериментах результат измерений часто определяется суммой не зависящих друг от друга факторов, каждый из которых вносит в сумму незначительный вклад. В пределе сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых принимает значения, распределенные по так называемому *нормальному закону (распределению Гаусса)*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \quad (2)$$

Это замечательное распределение обладает следующими свойствами (рис. 1).

1. Существует наиболее вероятное значение x , *мода* распределения:

$$x(p = p_{\max}) = \mu .$$

2. Отклонения x от μ в обе стороны встречаются одинаково часто: гауссово распределение симметрично относительно μ , поэтому среднее значение \bar{x} равно μ .

3. Чем больше отклонение x от μ , тем реже оно встречается.

4. Мерой случайной погрешности, т. е. мерой отклонения x от центра распределения μ , является «сигма» σ – *стандартное* или *средне-квадратичное отклонение* (СКО), которое близко к полуширине на полувывоте (ПШПВ) гауссова распределения: $\text{ПШПВ} \approx 1,18\sigma$. (Англоязычный аналог этого термина: *HWHH* – half width on half height.)

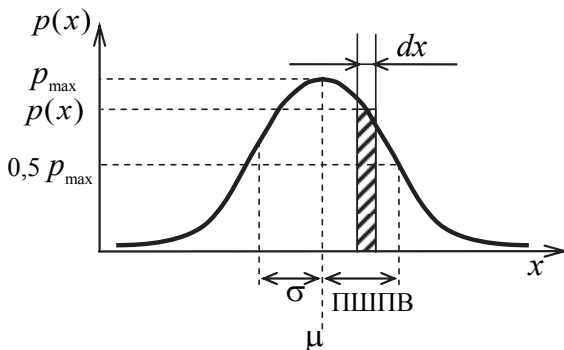


Рис. 1

5. При $\sigma \rightarrow 0$ все распределение «стягивается» к одному значению $x = \mu$ (рис. 2), которое в отсутствие систематической погрешности и принимается за истинное значение $x_{\text{ист.}}$. Следовательно, с точки зрения математической статистики *целью измерений является определение координаты центра распределения $\mu = x_{\text{ист.}}$* .

6. В интервал $\pm\sigma$ вокруг μ попадает примерно 68 % всех результатов измерений (рис. 3), т. е. «расстояние» между неизвестным центром распределения μ и любым взятым наугад результатом измерения x_i ($i=1...N$) не превышает σ с вероятностью $P = 0,68$:

$$|x_k - \mu| \leq \sigma; \quad P \approx 0,68. \quad (3)$$

В интервал $\pm 2\sigma$ вокруг центра попадает примерно 95 % всех результатов измерений, следовательно, расстояние между неизвестным центром распределения μ и любым результатом измерения x_i ($i=1...N$) не превышает 2σ с вероятностью $P = 0,95$:

$$|x_k - \mu| \leq 2\sigma; \quad P \approx 0,95, \quad (4)$$

а в интервале $\pm 3\sigma$ (его также называют шестисигмовым интервалом) заключено 99,73 % всех результатов:

$$|x_k - \mu| \leq 3\sigma; \quad P \approx 0,9973. \quad (5)$$

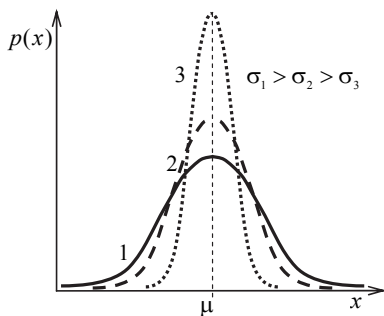


Рис. 2

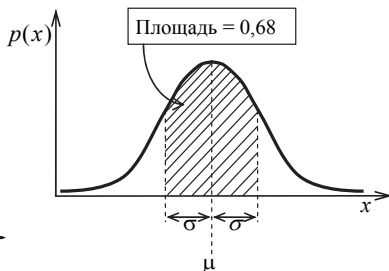


Рис. 3

Анализ гистограммы. На рис. 4 показана последовательность получения общего результата измерений. Этапы «Построение гистограммы» и «Расчет среднего и СКО» независимы, могут выполняться параллельно. Их результаты используются при проверке нормальности распределения.

Возможно удаление грубых погрешностей из выборки с повторением первых этапов.

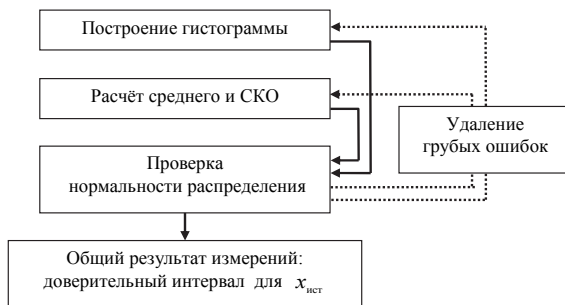


Рис. 4

Расчет среднего и СКО. Расчетной оценкой моды μ нормального распределения является *выборочное среднее* \bar{x} (т. е. среднее арифметическое значение выборки):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (6)$$

Среднее значение случайной величины x называют *математическим ожиданием*. Таким образом, выборочное среднее – оценка математического ожидания.

Оценкой случайной погрешности σ будет *выборочное среднеквадратичное s (СКО)*:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} . \quad (7)$$

Проверка нормальности распределения – важный этап статистического анализа данных. Формулы (6), (7) применимы только к нормальному распределению. Если выборка не принадлежит нормальной генеральной совокупности, то, вообще говоря, использовать (6), (7) некорректно.

Проведем простейшую оценку нормальности распределения по двум критериям:

- по форме гистограммы;
- по отношению ПШПВ гистограммы к выборочной СКО.

Форма гистограммы: если огибающая гистограммы симметрична и колоколообразна, пусть даже приближенно, как на рис. 5, – это один из признаков нормального распределения результатов измерений.

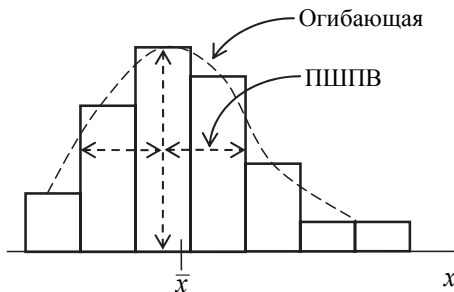


Рис. 5

Отношение ПШПВ / σ : если отношение близко к единице, а именно лежит в пределах $0,7 \dots 1,5$, – это тоже признак нормального распределения.

Если выполняются оба признака, то результаты измерений подчиняются нормальному закону, как говорят, нормальное распределение

не отвергается. Можно переходить к расчету общего результата измерений – доверительного интервала.

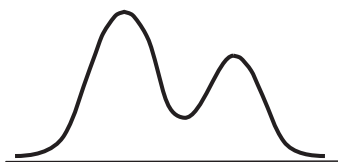


Рис. 6

Если один из признаков отсутствует, то нормальное распределение сомнительно. Если не выполняются оба признака, нормальное распределение отвергается. Следует искать причину аномальности результатов.

Например, если гистограмма имеет два максимума (рис. 6), то наиболее вероятная причина – однократное постоянное по величине изменение условий измерения.

Примеры:

- 1) «один раз уронили микроскоп и продолжили измерения, не проверив его настройку»;
- 2) в измерениях времени соударения шаров сдвинули основание (опору шара) в сторону;
- 3) включили освещение в комнате во время серии фотометрических измерений.

Наши критерии просты, но приближенны. Математически более сложный, но и более достоверный анализ, например, по критерию χ^2 – «хи-квадрат» – в случаях, признанных нами сомнительными, может как подтвердить нормальность, так и опровергнуть ее.

Грубая погрешность. Иногда на гистограмме есть крайний изолированный прямоугольник, содержащий всего одно значение, непременно минимальное или максимальное (рис. 7).

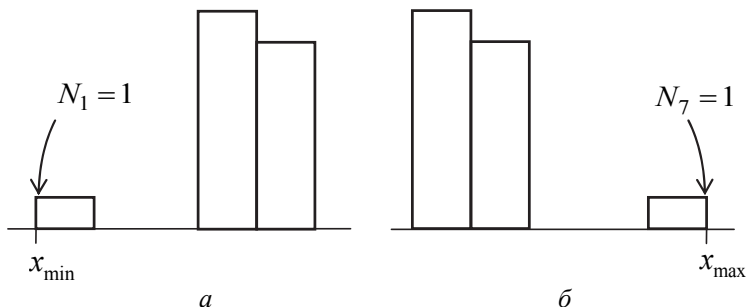


Рис. 7

Возможно, anomalно отклоняющееся значение является грубой ошибкой. Проверить это можно с помощью *правила трех сигм*. По свойствам нормального распределения в шестисигмовый интервал попадает 99,73 % всех нормально распределенных результатов. На долю отклонений от центра распределения, превышающих 3σ , приходится всего $0,27\% < 1/300$ от общего числа измерений. Поэтому достоверные значительно отклоняющиеся значения могут появиться при $N > 300 \dots 1000$, а при $N = 50$ они крайне маловероятны. Зато велика вероятность ошибочной записи одного из 50 чисел или сбоя микро-секундомера.

Чтобы проверить, является ли измеренное значение anomalным, на горизонтальной оси гистограммы от среднего значения \bar{x} откладываем интервал $3 \times \text{ПШПВ}$ (рис. 8). Если anomalное значение отклоняется от \bar{x} больше, чем на $3 \times \text{ПШПВ}$, как на рис. 8, его следует считать грубой ошибкой, удалить из выборки (*зачеркнуть, а не замазать!*) и, найдя новое крайнее значение τ , повторить построение гистограммы. Такая операция называется *цензурированием выборки* и может выполняться в цикле несколько раз до тех пор,

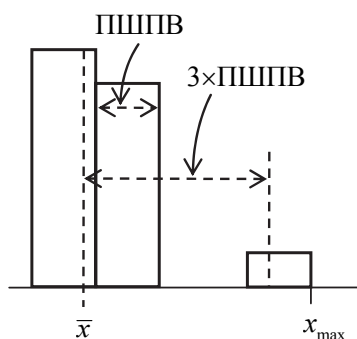


Рис. 8

пока не останутся значения, лежащие в пределах $3 \times \text{ПШПВ}$.

Общий результат измерений – доверительный интервал. Расчет общего результата измерений зависит от вида измерений, которые подразделяют на прямые и косвенные, однократные и многократные (табл. 1).

Таблица 1

Измерения	
Прямые	Однократные
Косвенные	Многократные

Прямое измерение – это измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных, как, напри-

мер, при измерении массы на циферблатных весах, температуры термометром, электрического напряжения стрелочным или цифровым вольтметром. С помощью цифрового микросекундомера на вводном занятии выполняется прямое измерение интервала времени.

Прямое однократное измерение

- ! *Сведения, изложенные в этом разделе, необходимы для записи результатов всех последующих лабораторных работ*

Возможна оценка истинного значения $x_{\text{ист}}$ по результату однократного измерения x_1 , если предварительно на данной измерительной установке в одинаковых условиях проведены многократные измерения ($N > 30$), в результате чего СКО σ определено с высокой точностью.

Используем шестое свойство нормального распределения (см. рис. 3): чем шире интервал, в середине которого находится распределение μ , тем больше результатов измерений в этом интервале. Формулу (3) можно «перевернуть» относительно неизвестного центра μ : с вероятностью $P = 0,68$ центр распределения удален от любого единичного результата измерений x_1 на расстояние, не превышающее σ . Это условие записывают в виде *доверительного интервала* для истинного значения измеряемой величины:

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm \sigma; \quad P = 0,68. \quad (8)$$

Аналогично на основе (4), (5) можно записать доверительные интервалы $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$:

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm 2\sigma; \quad P \approx 0,95; \quad (9)$$

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm 3\sigma; \quad P \approx 0,9973. \quad (10)$$

Все три варианта доверительного интервала показаны на рис. 9, причем отрезки σ и кратные ему изображены в масштабе числовой оси измеряемой величины x .

Вероятность P , с которой истинное значение измеряемой величины может находиться в выбранном доверительном интервале, называется *доверительной вероятностью*. *Запись доверительного интервала без указания доверительной вероятности неполна.*

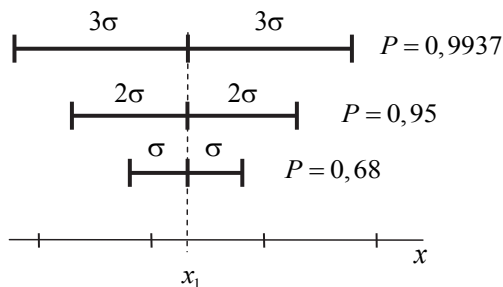


Рис. 9

Доверительные интервалы (8)–(10) можно объединить в общую формулу с коэффициентом $t(P)$ при σ :

$$\begin{array}{l}
 x_{\text{ист}} = x_1 \pm t(P)\sigma; \quad P = \dots \\
 P = 0,68; \quad t = 1, \\
 P = 0,95; \quad t = 2, \\
 P = 0,9973; \quad t = 3.
 \end{array}
 \quad (11)$$

Чем больше доверительная вероятность, тем шире должен быть доверительный интервал, в центре которого находится измеренное значение, тем больше коэффициент $t(P)$.

Метрологические нормативные документы рекомендуют записывать результат измерений для $P \geq 0,9$. Поэтому проще всего выбрать доверительный интервал $\pm 2\sigma$ для $P = 0,95$.

Допустима форма записи доверительного интервала в виде

$$x_1 - t(P)\sigma \leq x_{\text{ист}} \leq x_1 + t(P)\sigma; \quad P = \dots$$

Трехкратное измерение. Единичное измерение может оказаться грубой погрешностью. Поэтому для повышения достоверности измерений рекомендуется провести не одно, а три измерения в неизменных

условиях и в качестве центра доверительного интервала (9) взять среднее трех измерений:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{\text{ист}} &= x_1 \pm t(P)\sigma; \quad P = \dots \\ \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}. \end{aligned}} \quad (12)$$

Среднеквадратичные отклонения измеряемых величин и исходных данных указаны на пояснительных табличках к каждой лабораторной работе.

Если погрешность прямого измерения не указана, она определяется исходя из погрешностей измерительных приборов.

1. Прибор с штриховой шкалой. Принято считать, что для шкалы с интервалом между штрихами 1 мм, рассматриваемой с расстояния наилучшего зрения 250 мм, погрешность отсчета равна 0,3...0,5 цены деления $C_{\text{дел}}$, т. е. в единицах измеряемой величины $\sigma = (0,3...0,5)C_{\text{дел}}$.

2. Погрешность цифрового прибора принимаем равной единице последнего разряда.

Прямые многократные измерения. Если СКО измеряемой величины неизвестно, то его можно определить многократными, т. е. повторяющимися в одной и той же неизменной экспериментальной обстановке, измерениями. Этот метод и используется на вводном лабораторном занятии.

С увеличением числа измерений выборочное среднее (6) приближается к моде нормального распределения, а выборочное СКО (7) стремится к σ :

$$\bar{x} \rightarrow \mu; \quad s \rightarrow \sigma.$$

Поэтому, казалось бы, можно по аналогии с (11) записать доверительный интервал

$$x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm t(P)s; \quad P = \dots$$

Однако при любом конечном числе N измерений выборочное СКО может оказаться как больше, так и меньше неизвестного σ . Второй случай – самый опасный: при подстановке s вместо σ уменьшается ширина доверительного интервала, расчетная погрешность оказывается меньше истинной. Именно поэтому иногда ис-

пользуют упоминавшийся выше способ округления погрешности в большую сторону.

Заданную доверительную вероятность обеспечивают, расширяя интервал путем замены коэффициентов $t(P)$ на коэффициенты Стьюдента (табл. 2) $t(P, N) > t(P)$. Из табл. 2 видно, что, например, $t(P = 0,95; N) \approx t(P)$ только при $N \geq 30$, т. е. только при таком большом числе измерений выборочное СКО s незначительно отличается от σ – СКО генеральной совокупности с бесконечным числом измерений.

Т а б л и ц а 2

Количество измерений	P				
	0,68	0,9	0,95	0,99	0,997
	$t(P, N)$				
2	1,84	6,3	12,7	63,6	212,3
3	1,32	2,9	4,3	9,9	182
4	1,20	2,4	3,2	5,8	9,0
5	1,14	2,1	2,8	4,6	6,4
10	1,06	1,8	2,3	3,2	4,0
15	1,04	1,8	2,1	3,0	3,6
20	1,03	1,7	2,1	2,9	3,4
30	1,02	1,7	2,0	2,8	3,2
50	1,01	1,7	2,0	2,7	3,1

С другой стороны, для сужения интервала, т. е. для уточнения оценки $x_{\text{ист}}$, используют свойство среднего значения: выборочное среднее \bar{x} в (6) зависит от суммы случайных нормально распределенных результатов измерений x_k и потому само является случайной нормально распределенной величиной со среднеквадратичным отклонением среднего $\sigma_{\bar{x}}$.

В математической статистике доказывается, что если результаты измерений не зависят друг от друга, то СКО выборочного среднего выборочных средних

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Иными словами, если бы мы провели 50 серий по 50 измерений, то получили бы выборку 50 средних (из генеральной совокупности средних). Тогда, применяя эту формулу математической статистики, получаем

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{50}}.$$

Таким образом, проведя 50 измерений, можно сузить доверительный интервал (фактически уменьшить погрешность измерений более чем в семь раз)!

В общем случае точное значение σ неизвестно, однако при большом числе измерений $\sigma \approx s$, поэтому

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

Видно, что отклонение \bar{x} от μ при больших N уменьшается как $1/\sqrt{N}$. Это означает, что, хотя от измерения к измерению единичные результаты «прыгают» в среднем на σ , разброс выборочных средних от выборки к выборке по N случайных измерений уменьшается с ростом N , что и позволяет сузить доверительный интервал, проводя многократные измерения. Уменьшение случайного разброса путем усреднения многократных измерений широко используется в цифровых приборах.

Используя коэффициенты Стьюдента и переходя к выборочному СКО среднего значения, окончательно запишем погрешность измерений и доверительный интервал для результата многократных измерений:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{t(P, N)s_{\bar{x}}}{\sqrt{N}}; \quad P = \dots; \quad x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \frac{t(P, N)s}{\sqrt{N}}; \quad P = \dots \quad (13)$$

Важным свойством нормального распределения является вложенность доверительных интервалов: интервал для большего числа измерений целиком вложен в доверительный интервал для меньшего числа измерений (рис. 10). Для аномально распределенных результатов, как, например, на рис. 7, вложенность может нарушаться. Это обстоятельство можно использовать в качестве дополнительной проверки нормальности распределения.

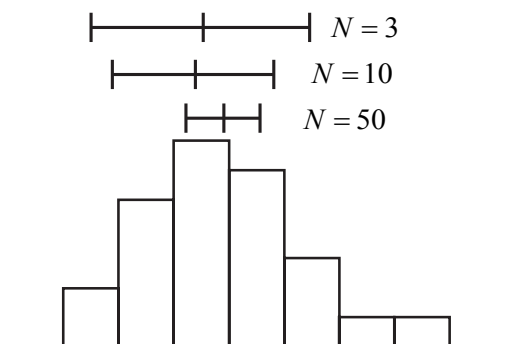


Рис. 10

Итак, как было показано выше, *три – минимально допустимое число измерений в лабораторных работах при неизменных условиях*. Запишем доверительный интервал (13), подставив из табл. 2 коэффициент Стьюдента $t(0,95; 3) = 4,3$:

$$x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \frac{4,3s}{\sqrt{3}} \approx \bar{x} \pm 2,48s; \quad P = 0,95. \quad (14)$$

ЗАДАНИЕ К ЧАСТИ 2 ВВОДНОГО ЗАНЯТИЯ

Необходимо использовать результаты многократных ($N = 50$) измерений времени соударения шаров с вычисленными по ним средним значением времени соударений $\bar{\tau}$ и среднеквадратичным отклонением σ_{τ} , а также построенную по результатам гистограмму, на которой обозначены $\bar{\tau}$ и полуширина на полувывоте (ПШПВ).

1. По гистограмме провести, если необходимо, цензурирование выборки (см. выше раздел «Грубая погрешность»).

2. Найти отношение ПШПВ к СКО для $N = 50$ или для $N = 49$, если выборка цензурирована.

3. Нарисовать огибающую гистограммы. По форме гистограммы и по отношению ПШПВ к СКО сделать вывод, подтверждается или нет нормальное распределение результатов измерений.

4. Записать доверительный интервал для моды многократных измерений времени соударения шаров по формуле (13) при доверительной вероятности $P = 0,95$, используя табл. 2:

- а) для $N = 50$ ($N = 49$);
- б) для $N = 3$ (выбрать любые три измерения);
- в) для $N = 10$ (любые 10 измерений).

5. Изобразить на гистограмме полученные доверительные интервалы в виде отрезков, «привязав» их к оси времени.

6. Сделать вывод о связи числа измерений с точностью определения истинного значения измеряемой величины.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение погрешности: абсолютной, относительной, систематической, случайной, грубой.

2. Как по функции плотности вероятности графически определить вероятность попадания результата измерений в интервал $[x, x + dx]$?

3. Чему равна полная площадь под кривой функции плотности вероятности?

4. Запишите функцию нормального распределения, нарисуйте ее график и укажите на графике ее характерные параметры: а) моду случайной величины; б) математическое ожидание случайной величины; в) ПШПВ и СКО.

5. Как изменится график функции нормального распределения, если случайная погрешность измерений уменьшится?

6. Чему равна площадь под графиком нормального распределения: а) в пределах $\pm\sigma$ вокруг моды; б) в пределах $\pm 2\sigma$; в) в пределах $\pm 3\sigma$?

7. Что такое правило трех сигм?

8. Какая выборочная величина будет наилучшей оценкой: а) моды случайной величины; б) среднеквадратичного отклонения?

9. В прямом однократном измерении получен результат x . СКО измерительного прибора σ . Напишите формулу доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины: а) при $P = 0,68$; б) $P = 0,95$. Что означает равенство $P = 0,68$ или $P = 0,95$?

10. Что такое среднеквадратичное отклонение среднего значения многократных измерений и как оно изменяется с увеличением числа измерений?

11. Запишите формулу доверительного интервала прямых трехкратных измерений при доверительной вероятности $P = 0,95$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. МИ 1317-2004. Рекомендация «Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления». – Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы (ВНИИМС). – Москва, 2004.

2. СТ СЭВ 543-77. Числа. Правила записи и округления. – М.: Изд-во стандартов, 1977.

3. Холявко В.Н. и др. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.

4. Джиджи К., Де Карло Н., Вильямс Б. Шесть сигм для «чайников». – М.: Вильямс, 2008.

Работа № 1

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

В этой работе проводится измерение времени упругого соударения двух одинаковых стальных шаров для нескольких пар шаров различного диаметра.

Цель работы: сравнение экспериментально полученной зависимости времени соударения τ от диаметра шара D с теоретической зависимостью.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Измерительная установка та же, что и на вводном занятии. Напомним, она включается кнопкой «Сеть» на передней панели цифрового микросекундомера $МС$. Кнопку «Выбор работы» необходимо переключить в положение «Соударение шаров». Кнопка «Пуск» стирает предыдущее показание на индикаторе микросекундомера и переводит его в готовность к следующему измерению.

Два одинаковых металлических шара подвешены на проводящих нитях (см. вводное занятие, часть 1, рис. 1). Шар I отводят в сторону до соприкосновения с упором и при этом поднимают на высоту h . Затем шар отпускают. При движении шар соударяется со вторым, неподвижно висящим шаром, вследствие чего замыкается электрическая цепь через шары. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряется микросекундомером и отображается на его индикаторе.

ЗАВИСИМОСТЬ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ ОТ РАЗМЕРА ШАРОВ

Упругий удар двух тел. В лабораторной системе отсчета (ЛСО или Л-системе) шар I , начиная двигаться с высоты $h \approx 0,1$ м, к моменту соударения приобретает скорость \vec{V}_0 . На шар действуют две силы: тяжести и упругости подвеса. Шар движется по дуге окружности, сила упругости всегда перпендикулярна вектору скорости шара, поэтому ее работа равна нулю. Работой сил трения в подвесе можно пренебречь.

По закону сохранения полной механической энергии увеличение кинетической энергии шара I (она была равна нулю, а стала $\frac{mV_0^2}{2}$) равно уменьшению его потенциальной энергии $mg\Delta h = mgh$. Поэтому

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{2gh} \approx 1,4 \text{ м/с}.$$

Из вводного занятия (часть 1) известно, что длительность удара – сотни микросекунд, $\tau \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$ с. Импульс силы тяжести за время удара $|\Delta \vec{p}_G| = mg\tau$ намного меньше импульса шара I :

$$\frac{mg\tau}{mV_0} = \frac{g\tau}{V_0} \leq \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1,4} \leq 10^{-2}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для силы натяжения нити подвеса. Таким образом, импульс внешних сил намного меньше суммарного импульса шаров mV_0 до удара. Силы взаимодействия шаров – внутренние силы этой системы тел – не меняют суммарного импульса шаров в соответствии с третьим законом Ньютона. Следовательно, с относительной погрешностью порядка 1 % суммарный импульс пары шаров при ударе можно считать постоянным. Иными словами, в приближении «мгновенного» ($\tau \rightarrow 0$) удара суммарный импульс группы тел сохраняется, даже если результирующая внешних сил отлична от нуля.

Кроме того, зная время соударения шаров $\tau \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$ с, попытаемся ответить на вопрос: можно ли в течение этого достаточно малого времени взаимодействия считать движение шаров прямолинейным

(по горизонтальной прямой, лежащей в плоскости подвесов)? Обозначим угол отклонения нитей подвесов от вертикали α . Такой же угол α будет между направлением движения каждого из шаров (вектором скорости) и горизонтальной плоскостью, поскольку шары движутся по окружности и их векторы скорости всегда перпендикулярны нитям подвесов. В течение всего времени соударения угол отклонения нитей подвесов от вертикали $\alpha \leq \frac{V_0 \tau}{L}$ (почему?), где L – длина подве-

сов шаров. Значит, $\alpha \leq \frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 7 \cdot 10^{-3}$. Насколько модули векторов

скорости, импульса, а также сил взаимодействия шаров отличаются от их горизонтальных составляющих? Как известно, проекция вектора на горизонтальную ось, касательную к траектории движения, равна модулю соответствующего вектора, умноженному на $\cos \alpha$. Известно так-

же, что для малых углов $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$, а $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots$, т. е.

$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \approx 0$ с погрешностью $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$, а $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \approx 1$

с погрешностью $\frac{\alpha^2}{2!} \leq \frac{0,007^2}{2!} \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, модули век-

торов скорости, импульса, а также сил взаимодействия шаров равны их горизонтальным составляющим с относительной погрешностью не более $2,5 \cdot 10^{-5}$ в процессе взаимодействия шаров. Получается, что движение шаров можно считать прямолинейным в течение всего времени соударения. Относительная погрешность при таком приближении не превышает $2,5 \cdot 10^{-5}$, что во много раз меньше погрешности нашего эксперимента.

Перейдем непосредственно к решению основной задачи. Нам нужно теоретически, с помощью основных законов механики, хотя бы приближенно найти время соударения шаров (в таких случаях говорят не о расчете, а о некоторой «оценке» в рамках модели, являющейся грубым приближением),

Для оценки времени соударения шаров используем второй закон Ньютона: $d\vec{p}_1 / dt = \vec{F}_{12}$. Здесь \vec{p}_1 – импульс шара 1, а \vec{F}_{12} – сила, с которой шар 2 действует на шар 1. Поскольку движение шаров в про-

цессе соударения будем считать прямолинейным, можно от векторов перейти к проекциям на горизонтальную ось, выбранную в направлении движения: $dp/dt = F$. Проинтегрируем это соотношение по времени от момента начала соударения ($t = 0$) до момента окончания соударения ($t = \tau$). Получим

$$\Delta p_1 = p_1(\tau) - p_1(0) = \int_0^{\tau} F_{12} dt.$$

Правую часть этого равенства можно представить в виде

$$\int_0^{\tau} F_{12} dt = \tau \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F_{12} dt = \tau \overline{F_{12}},$$

где $\overline{F_{12}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F_{12} dt$ – средняя за время соударения сила, действующая на шар 1 (по определению средней величины). Отсюда время соударения шаров

$$\tau = \frac{\Delta p_1}{\overline{F_{12}}} = \frac{|\Delta p_1|}{|\overline{F_{12}}|}, \quad (1)$$

где $|\overline{F_{12}}| = \overline{|F_{12}|}$ – среднее за время соударения значение модуля упругой силы, с которой шар 2 действует на шар 1. По третьему закону Ньютона шар 1 действует на шар 2 с такой же по величине силой $\overrightarrow{F_{21}}$, направленной противоположно: $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$. Обозначим для краткости среднее значение модуля силы взаимодействия буквой $F \equiv \overline{|F_{12}|} = \overline{|F_{21}|} = \overline{|F_{12}|} = \overline{|F_{21}|}$.

Взаимодействие шаров проще всего рассматривать в системе их центра инерции, т. е. относительно системы отсчета, в которой центр инерции системы из двух шаров неподвижен. Такую систему обозначают СЦИ или Ц-система. Перейдем в СЦИ, т. е. определим скорости и импульсы шаров в системе их центра инерции.

Скорость центра инерции системы двух тел (не путать с системой отсчета!) определяется как суммарный импульс, отнесенный к суммарной массе:

$$\vec{V}_{\text{Ц}} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \vec{V}_0 + 0}{2m} = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

Так как суммарный импульс шаров при ударе сохраняется, то сохраняется и скорость центра инерции. Следовательно, систему отсчета, связанную с центром инерции (СЦИ или Ц-систему), можно в течение удара считать инерциальной. В нерелятивистских инерциальных системах отсчета приращения скоростей (импульсов) как разности двух векторов промежутки времени и силы являются инвариантами, поэтому при переходе в Ц-систему все величины в (1) не изменятся. Однако в Ц-системе соударение шаров математически выглядит проще, чем в Л-системе.

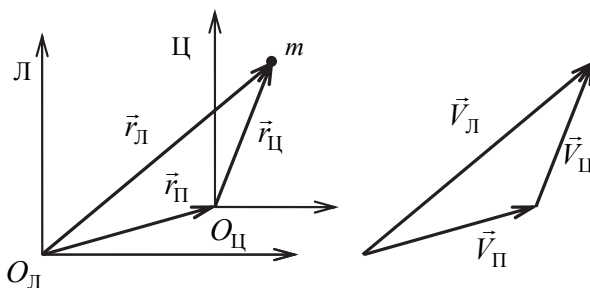


Рис. 1

Радиусы-векторы материальной точки m в Л- и Ц-системах отсчета $\vec{r}_\text{Л}$ и $\vec{r}_\text{Ц}$ связаны через радиус-вектор переноса начала отсчета $\vec{r}_\text{П}$, определяющий положение «нового» начала отсчета в «старой» системе (рис. 1): $\vec{r}_\text{Л} = \vec{r}_\text{Ц} + \vec{r}_\text{П}$. Продифференцировав это равенство по времени, получим преобразование скоростей Галилея: скорость точки $\vec{V}_\text{Ц}$ в движущейся Ц-системе равна разности скорости $\vec{V}_\text{Л}$ этой точки в неподвижной Л-системе отсчета и скорости переносного движения $\vec{V}_\text{П}$ движущейся системы отсчета относительно неподвижной:

$$\vec{V}_{\text{Ц}} = \vec{V}_{\text{Л}} - \vec{V}_{\text{П}}; \quad \vec{V}_{\text{П}} = \vec{V}_{\text{Ц}} = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

Применим эту формулу к каждому из шаров. Для шара 1 до удара скорость в Ц-системе равна $\vec{V}_{1\text{Ц}} = \vec{V}_0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = \frac{\vec{V}_0}{2}$, а для шара 2 $\vec{V}_{2\text{Ц}} = 0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = -\frac{\vec{V}_0}{2}$. Обозначим импульсы первого и второго шара в СЦИ до удара $\vec{p}_{1\text{Ц}}$ и $\vec{p}_{2\text{Ц}}$, а после соударения $\vec{p}'_{1\text{Ц}}$ и $\vec{p}'_{2\text{Ц}}$:

$$\vec{p}_{1\text{Ц}} = m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \vec{p}_{2\text{Ц}} = -m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \vec{p}_{1\text{Ц}} = -\vec{p}_{2\text{Ц}}, \quad p_{1\text{Ц}} = p_{2\text{Ц}}.$$

Следовательно, закон сохранения импульса в СЦИ имеет вид

$$\vec{p}_{1\text{Ц}} + \vec{p}_{2\text{Ц}} = \vec{p}'_{1\text{Ц}} + \vec{p}'_{2\text{Ц}} = 0. \quad (2)$$

Отсюда $p'_{1\text{Ц}} = p'_{2\text{Ц}}$. Соотношение (2) можно доказать и в более общем случае неравных масс шаров. Оно имеет простой физический смысл: в системе отсчета, связанной с центром инерции, сам центр инерции покоится.

Соударение называется упругим, если суммарная кинетическая энергия шаров не меняется. Реальное соударение можно считать упругим приближенно: часть энергии перейдет в энергию необратимой деформации, затем в тепло. Для шаров из закаленного стекла потери кинетической энергии при ударе достигают 10 %, для бильярдных шаров из слоновой кости – 20 %, для стальных шаров могут превышать 50 %.

Запишем закон сохранения кинетической энергии в СЦИ в приближении абсолютно упругого удара:

$$\frac{p_{1\text{Ц}}^2}{2m} + \frac{p_{2\text{Ц}}^2}{2m} = 2 \frac{p_{1\text{Ц}}^2}{2m} = \frac{p_{1\text{Ц}}'^2}{2m} + \frac{p_{2\text{Ц}}'^2}{2m} = 2 \frac{p_{1\text{Ц}}'^2}{2m}, \quad (3)$$

где были использованы связи длин векторов импульсов до и после удара. Из (2) и (3) следует, что длины всех векторов одинаковы:

$$p_{1\text{Ц}} = p_{2\text{Ц}} = p'_{1\text{Ц}} = p'_{2\text{Ц}}.$$

При ударе меняются только направления векторов. На рис. 2 показана диаграмма импульсов в СЦИ при абсолютно упругом центральном ударе и изменения импульсов шаров при ударе в Л-системе (нижняя диаграмма). Изменение импульса шара 1 в Л-системе

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_{1Ц} - \vec{p}_{2Ц} = -m\vec{V}_0 = -\Delta \vec{p}_2.$$

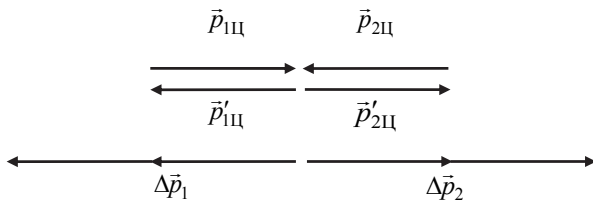


Рис. 2

Процесс упругого соударения шаров в СЦИ можно представить в виде следующих двух этапов:

1) на первом этапе оба шара одновременно тормозятся и упруго деформируются до тех пор, пока кинетическая энергия шаров полностью не превратится в энергию упругой деформации;

2) на втором этапе величина упругой деформации X уменьшается до нуля, энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию шаров.

Закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров имеет вид (кинетическая энергия двух шаров равна работе двух сил упругой деформации, действие которых и привело к полной остановке обоих шаров):

$$2 \frac{m(V_0/2)^2}{2} = 2 \frac{mV_0^2}{8} = 2 \int_0^{X_{\max}} F dx, \quad (4)$$

где X_{\max} – максимальная величина продольной деформации, одинаковая для каждого из шаров. По определению средней величины

$\frac{1}{X_{\max}} \int_0^{X_{\max}} F dx = \langle F \rangle$, где $\langle F \rangle$ – средняя сила, действующая на отрезке

от 0 до X_{\max} . Отсюда $\int_0^{X_{\max}} F dx = \langle F \rangle X_{\max}$ и средняя величина упругой силы

$$\langle F \rangle = \frac{mV_0^2}{8X_{\max}}. \quad (5)$$

Будем считать, что усредненное по координате x на этом отрезке значение силы $\langle F \rangle$ равно усредненному по времени соударения \bar{F} , которое входит в выражение (1). Подставляя в (1) выражение (5), получаем, что время соударения шаров

$$\tau = \frac{8X_{\max}}{V_0}. \quad (6)$$

Столкновение кубиков. Из (6) следует, что τ пропорционально X_{\max} . Для определения зависимости τ от диаметра D необходимо найти зависимость X_{\max} от D . Для этого рассмотрим сначала грубую физическую модель, в которой шар диаметром D заменен телом кубической формы с ребром D (рис. 3).

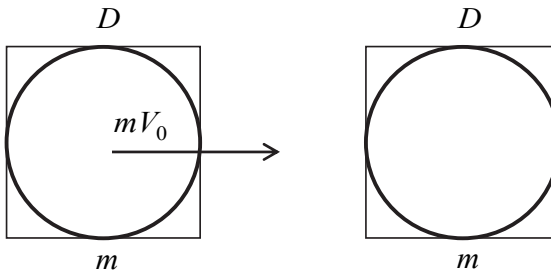


Рис. 3

Считаем, что при упругом соударении двух стальных кубов, когда при соударении соприкасающиеся грани идеально совпадают, справедлив закон Гука:

$$\frac{|\overrightarrow{F_{12}}(x)|}{S} = E \frac{x}{D} \quad (7)$$

– продольная деформация x/D пропорциональна механическому напряжению $|\overline{F_{12}}|/S$. Здесь E – модуль Юнга; $S = D^2$ – площадь поперечного сечения деформируемого тела.

Тогда работа силы упругой деформации, действующей на один шар от начала соударения до максимальной деформации (что соответствует полной остановке шаров в СЦИ), есть

$$\int_0^{X_{\max}} F dx = \int_0^{X_{\max}} E \frac{S}{D} x dx = ED \frac{X_{\max}^2}{2}.$$

Подставив это значение интеграла в (4), получим

$$2 \frac{m V_0^2}{8} = 2ED \frac{X_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда $X_{\max} = \sqrt{\frac{m V_0^2}{4ED}}$. Так как $m = \rho V = \rho D^3$, где ρ – плотность тела, а $V = D^3$ – его объем, получаем

$$X_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{E} \right)^{1/2} V_0 D, \quad (8)$$

где ρ – плотность стального куба. Подставляя найденное выражение для X_{\max} в формулу (6), для времени соударения кубических тел получаем

$$\tau = 4 \left(\frac{\rho}{E} \right)^{1/2} D. \quad (9)$$

Столкновение шаров. Закон Гука в виде (7) справедлив лишь для равномерно сжатого вдоль одного из ребер прямоугольного параллелепипеда (или цилиндра). Для шара картина принципиально другая. В этом случае зависимость силы упругости $F_{\text{упр}}$ от величины про-

дольной деформации будет нелинейной, потому что вместе с деформацией возрастает площадь контакта:

$$F_{\text{упр}} \approx 1,04ED^{1/2}x^{3/2}. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что $F_{\text{упр}}$ растет быстрее, чем величина деформации, – это случай так называемой системы с жесткой характеристикой.

В таком случае закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров можно записать так:

$$2 \frac{mV_0^2}{8} = 2 \int_0^{X_{\text{max}}} F_{\text{упр}} dx = 2 \int_0^{X_{\text{max}}} 1,04ED^{1/2}x^{3/2} dx = 0,83ED^{1/2}X_{\text{max}}^{5/2}.$$

Учитывая, что $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$, для X_{max} получаем

$$X_{\text{max}} = 0,95 \left(\frac{\rho}{E}\right)^{2/5} (V_0)^{4/5} \frac{D}{2}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), найдем время соударения шаров:

$$\tau = 3,80 \left(\frac{\rho}{E}\right)^{2/5} (V_0)^{-1/5} D. \quad (12)$$

Получается, что для стальных шаров в рамках модели системы с жесткой характеристикой, так же как и для тел кубической и цилиндрической формы, максимальная величина продольной деформации X_{max} пропорциональна размерам тел – диаметру D , т. е. обе модели приводят к линейной зависимости времени соударения стальных шаров от их диаметра:

$$\tau = AD, \quad (13)$$

где A – коэффициент пропорциональности, зависящий от ρ , E и V_0 и формы сталкивающихся тел.

Именно эту теоретически полученную зависимость τ от D необходимо подтвердить (или опровергнуть) экспериментально, измеряя время соударения шаров микросекундомером. Значения диаметров шаров приведены в паспорте установки.

ЗАДАНИЯ

1. Измерьте время соударения для четырех пар шаров (по 3 измерения для каждой пары).

2. Результаты измерений и расчеты представьте в виде таблицы (показана часть таблицы для одного диаметра). В последнем столбце таблицы для каждого диаметра запишите доверительный интервал для времени соударения.

D , мм	Номер измерения	τ , мкс	$ \tau_i - \bar{\tau} $, мкс	$(\tau_i - \bar{\tau})^2$, мкс ²	Среднее СКО, мкс	$\bar{\tau} \pm \sigma$, мкс
21	1				$\bar{\tau} = \dots$	
	2				$s = \dots$	
	3				$\sigma = \dots$	
	1					

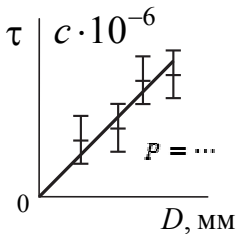


Рис. 4

3. Представьте зависимость времени соударения шаров τ от их диаметра D в виде графика. К каждому из четырех средних значений $\bar{\tau}$ пристройте доверительный интервал $\pm \sigma_{\bar{\tau}}$, где в соответствии с формулами (13) и (14) (см. вводное занятие, часть 2)

$$\sigma_{\bar{\tau}} = \frac{t(P, N)s}{\sqrt{N}} = \frac{4,3}{\sqrt{3}}s = 2,48s, \quad P = 0,95 \quad (\text{схема-}$$

точно вид графика показан на рис. 4). Проведите из начала координат *регрессионную*, т. е. сглаживающую, прямую через все доверительные интервалы. Существует ли такая прямая?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова цель настоящей работы?
2. Как определяется время соударения шаров на основе второго закона Ньютона?
3. Какие силы изменяют суммарный импульс системы тел?
4. Как упругие силы взаимодействия шаров влияют на суммарный импульс шаров?
5. Когда можно применять закон сохранения импульса приближенно?
6. Почему при расчете времени соударения мы можем перейти в другую инерциальную систему отсчета?
7. Что такое система центра инерции?
8. Что такое упругий удар? Какой закон выполняется при упругом ударе?
9. Изобразите диаграмму импульсов шаров в СЦИ и в Л-системе. Покажите векторы изменения импульса каждого шара при ударе.
10. Какие этапы можно выделить в процессе упругого соударения?
11. Перечислите основные допущения, используемые при анализе соударения в системе центра инерции.
12. Исходя из начальных условий соударения в лабораторной системе отсчета выведите формулу для изменения импульсов шаров при ударе в СЦИ.
13. Исходя из закономерностей упругого удара в СЦИ выведите зависимость τ от D при соударении кубиков.
14. Получите зависимость τ от D при упругом соударении двух сплошных цилиндров, радиусы которых равны радиусу шара, а длина – диаметру шара, в случае, если цилиндры ударяются торцевыми поверхностями.
15. Получили ли вы ожидаемую зависимость времени соударения шаров от их диаметров? Что это означает?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, год издания любой.

Работа № 2

ИЗМЕРЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

В этой работе с помощью баллистического маятника определяются скорости пуль различных масс. Скорость пули и теоретическая зависимость скорости от массы рассчитываются на основе законов сохранения импульса и энергии.

Цель работы: сравнение экспериментально полученной зависимости скорости пули от массы с теоретической.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Определение начальной скорости снаряда методом баллистического маятника является одним из примеров использования на практике процесса неупругого удара.

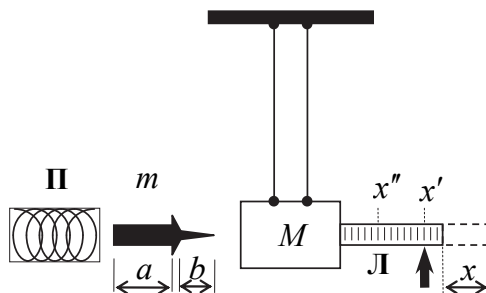


Рис. 1

Баллистический маятник (рис. 1) представляет собой подвешенный на длинных тонких нитях (или легком стержне) массивный цилиндр массой M , заполненный пластилином. В цилиндр в горизонтальном

направлении стреляют пулей массой m из пружинного пистолета П, неподвижно закрепленного вблизи маятника. Пуля входит в пластилин на расстояние b (длина острия) и дальше продолжает двигаться вместе с маятником. В результате маятник отклоняется от положения равновесия. Максимальное отклонение регистрируется механизмом измерения перемещения (подвижной измерительной линейкой Л).

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ

Длина острия пули $b = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$, минимальная скорость пули на выходе из пружинного пистолета примерно 2 м/с . Считая, что пуля, внедряясь острием в пластилин, движется равнозамедленно, примем среднюю скорость движения пули относительно пластилина равной 1 м/с . Тогда пуля проникает в пластилин на 2 см за $0,02 \text{ с} = 1/50 \text{ с}$. Такой промежуток времени глазом не воспринимается. В то же время отклонение маятника вполне обозримо, т. е. происходит примерно за 1 с . Следовательно, весь процесс взаимодействия пули с маятником можно представить в виде двух этапов.

1. Очень короткий промежуток времени, когда пуля внедряется в пластилин. На этом этапе максимальная скорость движения маятника с застрявшей пулей равна

$$V_1 = \frac{m}{m + M} V_0 \approx \frac{0,1}{0,1 + 3} 2 \text{ м/с} \approx 0,06 \text{ м/с}.$$

За $0,02 \text{ с}$ (пока пуля еще только «застрывает») маятник с пулей пройдет расстояние не более 1 мм . Угол наклона подвеса маятника при этом не превышает 10^{-3} рад , а косинус этого угла отличается от единицы не более чем на 10^{-6} . Именно с такой относительной погрешностью можно считать проекции векторов скоростей и импульсов на горизонтальную плоскость равными модулям этих векторов. Иными словами, в течение короткого времени первого этапа движение пули и маятника можно считать горизонтальным, прямолинейным с относительной погрешностью примерно 10^{-6} , что на несколько порядков меньше относительной погрешности наших измерений (мы линейкой с по-

грешностью $\geq 0,5$ мм измеряем отклонение маятника ≤ 50 мм, следовательно, относительная погрешность измерения не меньше чем $\frac{0,5 \text{ мм}}{50 \text{ мм}} \approx 10^{-2}$).

2. Этап медленного (в сравнении с начальной скоростью пули) движения маятника вместе с застрявшей в нем пулей.

Эти качественные соображения еще необходимо подтвердить количественными результатами измерений.

Движение маятника и пули на первом этапе можно считать прямолинейным вдоль горизонтальной оси. Горизонтальная составляющая суммарного импульса пули и маятника при этом сохраняется, поскольку внешних горизонтальных сил нет, а взаимные силы трения пули и маятника (без сомнения, весьма значительные) являются внутренними силами системы этих тел и суммарного импульса не изменяют (на основании какого закона?). Закон сохранения горизонтальной составляющей импульса маятника и пули в лабораторной системе отсчета можно записать так:

$$mV_0 = (m + M)V_1, \quad (1)$$

где V_0 – проекция начальной скорости пули на горизонтальную ось движения маятника, т. е. горизонтальная составляющая скорости пули в начальный момент соприкосновения пули и маятника; V_1 – проекция на горизонтальную ось скорости маятника с застрявшей в нем пулей сразу после того, как пуля полностью остановилась относительно пластины маятника; m и M – массы пули и маятника соответственно. Левая часть равенства – импульс пули после вылета из пистолета, правая – импульс маятника с пулей после удара.

На втором этапе, когда маятник с пулей как целое отклоняется от положения равновесия, силы трения скольжения между маятником и пулей не действуют. Поэтому, если пренебречь слабыми потерями энергии (преодоление сопротивления воздуха, трение в подвесе, трение в механизме, измеряющем отклонение), можно считать, что выполняется закон сохранения механической энергии при движении маятника с пулей в поле силы тяжести (из точки B в точку C на рис. 2).

Закон сохранения энергии записываем в виде (слева – полная механическая энергия системы в нижней точке траектории, справа – полная

энергия в верхней точке, если принять, что в нижней точке потенциальная энергия равна нулю)

$$\frac{(m+M)V_1^2}{2} = (m+M)gh, \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения; h – высота максимального подъема маятника (рис. 2). Заметим, что на рис. 2 отрезки AO и OB по построению лежат на одной прямой и равны по величине длине подвеса маятника l . Точка O – точка закрепления подвеса.

Исключив из выражений (1) и (2) скорость маятника V_1 , можно по высоте максимального подъема маятника h определить начальную скорость пули V_0 . Однако практически гораздо проще, чем высоту подъема, измерить горизонтальное смещение маятника x при помощи простейшего измерительного «механизма» (см. рис. 1): $x = |x' - x''|$. Здесь x' , x'' – координаты, отсчитанные по линейке при двух ее положениях, начальном и конечном.

На рис. 2 видно, что прямоугольные треугольники ABC , ACD и BCD подобны. (Угол ACB опирается на диаметр описанной окружности и поэтому является прямым.) Из подобия треугольников ACD и BCD следует, что

$$\frac{h}{x} = \frac{x}{2l-h} = \frac{x}{2l\left(1-\frac{h}{2l}\right)}. \quad (3)$$

При малых углах отклонения маятника $h \ll l$. Пренебрегая $\frac{h}{2l}$ в скобках по сравнению с единицей, из (3) получаем

$$h = \frac{x^2}{2l}. \quad (4)$$

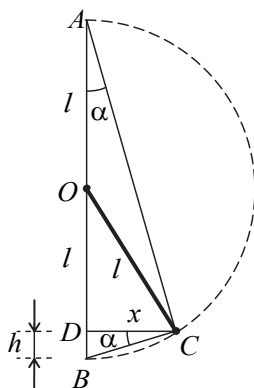


Рис. 2

Проверим справедливость допущения $\frac{h}{2l} \ll 1$. Из (4)

$$h = \frac{x^2}{2l} \leq \frac{(0,07 \text{ м})^2}{2 \cdot 1 \text{ м}} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

тогда $\frac{h}{2l} \leq 1,2 \cdot 10^{-3}$, что существенно меньше относительной погрешности наших измерений.

Решая систему уравнений (1), (2), (4), получаем, что начальная скорость пули

$$V_0 = \frac{m+M}{m} \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} x.$$

Введем обозначение:

$$\frac{m+M}{m} \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} = K, \quad (5)$$

тогда

$$V_0 = Kx.$$

Таким образом, измерение скорости в этой работе – косвенное измерение. Вычислив значение K по формуле (5) и измерив несколько раз смещение x (т. е. получив выборку случайной величины x), можно вычислить среднее значение смещения \bar{x} и среднее значение начальной скорости \bar{V}_0 для каждой пули:

$$\boxed{\bar{V}_0 = K\bar{x}}. \quad (6)$$

Проверка разделения удара на два этапа. Время внедрения пули в пластилин $\tau_1 = b/(V_0/2)$, где $V_0/2$ – средняя скорость равнозамедленного движения пули в пластине до остановки. Следовательно,

$$\tau_1 = 2b \frac{m}{m+M} \left(\frac{l}{g} \right)^{1/2} \frac{1}{x}.$$

Для оценки времени второго этапа заметим, что маятник с пулей совершает колебания с периодом $2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$. С момента попадания пули до полной остановки маятника пройдет приблизительно четверть периода. Следовательно, $\tau_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$. Отсюда

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{b/(V_0/2)}{x/(V_1/2)} = \frac{b}{x} \frac{4}{\pi} \frac{m}{m+M} \approx \frac{b}{x} \frac{m}{M}. \quad (7)$$

Если это соотношение меньше относительной погрешности эксперимента, считаем разбиение удара на два этапа допустимым. Оценку достаточно провести для самой тяжелой пули. Масса маятника $M \approx 3$ кг указана в паспорте установки.

ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ ПУЛИ ОТ ЕЕ МАССЫ

Полученная для расчета скорости формула (6) не характеризует явную зависимость скорости пули от ее массы, так как от массы зависит еще и горизонтальное смещение x .

Явную зависимость скорости пули от массы можно получить, применяя закон сохранения энергии. Потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию пули и пружины, движущейся вплоть до момента отрыва пули. Потерями энергии на преодоление сил трения в системе пренебрежем. Тогда для момента времени перед самым отрывом пули от пружины, когда скорость пули и скорость конца пружины практически равны V_0 , закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{ca^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + E_{\text{кин.пр}}, \quad (8)$$

где c – коэффициент жесткости пружины; a – уменьшение длины пружины при сжатии, равное длине хвостовика пули (см. рис. 1). При расчете кинетической энергии пружины $E_{\text{кин.пр}}$ в момент вылета пули предположим, во-первых, что пружина однородна; во-вторых, что

один конец пружины всегда покоится в лабораторной системе отсчета, а скорость второго конца равна скорости пули V_0 ; в-третьих, что скорость элемента пружины, расположенного на расстоянии y от неподвижного конца, в любой момент линейно зависит от y и в момент отрыва пули равна $V(y) = \frac{y}{L} V_0$ (здесь L – длина деформированной

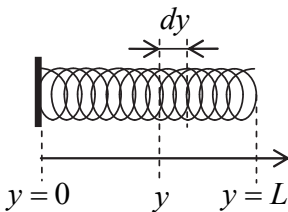


Рис. 3

пружины). Введем линейную плотность пружины $\rho = \frac{m_{\text{пр}}}{L}$. Тогда кинетическая энергия бесконечно малого элемента пружины длиной dy , масса которого $dm = \rho dy = \frac{m_{\text{пр}}}{L} dy$, находящегося на расстоянии y от неподвижного конца (рис. 3), равна

$$dE = \frac{dm V^2(y)}{2} = \frac{\rho dy V^2(y)}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}}}{L} \left(\frac{y}{L} V_0 \right)^2 dy = \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}} V_0^2}{L^3} y^2 dy. \quad (9)$$

Чтобы получить кинетическую энергию всех элементов пружины в момент отрыва пули от пружины, когда пружина уже не деформирована, проинтегрируем выражение (9) от нуля до L : $E_{\text{кин.пр}} = \int_0^L dE$. Проинтегрировав, получим

$$E_{\text{кин.пр}} = \frac{1}{6} m_{\text{пр}} V_0^2. \quad (10)$$

Подставив это выражение в (8), будем иметь

$$\frac{ca^2}{2} = \frac{m V_0^2}{2} + \frac{1}{6} m_{\text{пр}} V_0^2. \quad (11)$$

Видно, что зависимость скорости V_0 от массы m нелинейна.

После несложных преобразований соотношение (11) можно представить в виде линейной зависимости V_0^{-2} от m :

$$V_0^{-2} = \frac{1}{ca^2}m + \frac{1}{ca^2}\frac{m_{\text{пр}}}{3}. \quad (12)$$

Исследуем формулу (12). Функция V_0^{-2} линейно зависит от массы пули, графиком зависимости V_0^{-2} от m является прямая линия (рис. 4).

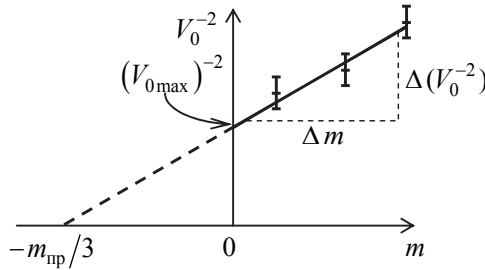


Рис. 4

Угловым коэффициентом k этой прямой равен

$$k = \frac{\Delta(V_0^{-2})}{\Delta m} = \frac{1}{ca^2}. \quad (13)$$

Заметим, что по осям x и y отложены физические величины, имеющие различные размерности. Поэтому размерность углового коэффициента получается при делении размерности V_0^{-2} на размерность массы m , т. е. равна $\frac{\text{с}^2/\text{м}^2}{\text{кг}} = \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^2$. Если же величины, откладываемые по осям, имеют одну и ту же размерность, угловой коэффициент безразмерен и равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс.

При $m = 0$ имеем $V_0^{-2} = \frac{1}{ca^2}\frac{m_{\text{пр}}}{3}$ (пересечение графика с осью ординат). Эта точка соответствует теоретически максимальной скорости «невесомой» пули с данной пружиной.

Величина V_0^{-2} была бы равна нулю при $m = -m_{\text{пр}} / 3$ (пересечение графика с осью абсцисс). По этой точке графика определяем массу пружины $m_{\text{пр}}$.

КОСВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Мы определяли скорость полета пули, измеряя отклонение баллистического маятника, т. е. фактически проводили так называемое косвенное измерение скорости пули.

Косвенное измерение – измерение, при котором значение искомой величины находят из известной зависимости между этой величиной и другими, полученными в прямых измерениях. Если измеряемая величина F связана с непосредственно измеряемыми величинами $x, y, z \dots$ уравнением $F = F(x, y, z \dots)$, то F вычисляют по указанному уравнению. Примерами косвенных измерений может служить определение плотности однородного тела по его массе и геометрическим размерам, определение скорости по длине пройденного пути за некоторый промежуток времени, определение электрического сопротивления проводника по разности потенциалов и силе электрического тока. Даже простое измерение длины тела с помощью линейки является, вообще говоря, косвенным, так как измеряемый размер L вычисляется как разность двух координат (начальной $x_{\text{н}}$ и конечной $x_{\text{к}}$), каждая из которых есть результат прямых измерений (рис. 5).

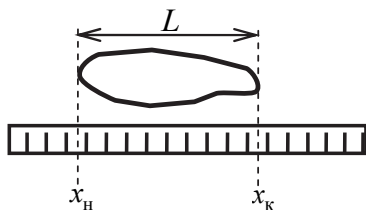


Рис. 5

Среднее значение косвенно измеряемой величины вычисляется подстановкой средних значений величин, измеренных непосредственно, в уравнение

$$\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \dots). \quad (14)$$

Например, средняя длина тела равна $\bar{L} = \bar{x}_{\text{к}} - \bar{x}_{\text{н}}$. В погрешность длины вносят вклад погрешности измерения обеих координат, начальной и конечной. Квадрат СКО σ^2 в математической статистике имеет

особое название – *дисперсия*. Для погрешностей нормально распределенных величин справедливо *правило суммирования дисперсий*:

$$\sigma_L^2 = \sigma_K^2 + \sigma_H^2. \quad (15)$$

Дисперсия функции нескольких независимых аргументов складывается из частных дисперсий, соответствующих изменению статистически независимых аргументов, подобно тому как дифференциал функции нескольких переменных складывается из частных дифференциалов, соответствующих приращению каждого из независимых аргументов:

$$\sigma_F^2 = \sigma_{F(x)}^2 + \sigma_{F(y)}^2 + \sigma_{F(z)}^2 + \dots = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \sigma_z \right)^2 + \dots$$

Отсюда СКО функции F нескольких переменных

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \sigma_z \right)^2 + \dots} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}, \dots}. \quad (16)$$

В частности, отсюда получается и формула (15).

В лабораторных работах часто встречаются рациональные функции

$$F(x, y, z) = \frac{x^\alpha y^\beta}{z^\gamma}.$$

Для них формула (16) упрощается: относительная СКО функции складывается из относительных СКО аргументов с соответствующими показателями степени

$$\frac{\sigma_F}{F} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \right)^2 + \left(\beta \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \right)^2 + \left(\gamma \frac{\sigma_z}{\bar{z}} \right)^2}. \quad (17)$$

Заметим при этом, что с какой доверительной вероятностью найдены доверительные интервалы аргументов, с такой доверительной вероятностью будет найден и доверительный интервал функции при косвенных измерениях.

Так, если в формулах (16) и (17) $\sigma_{\bar{x}}$, $\sigma_{\bar{y}}$ и $\sigma_{\bar{z}}$ рассчитаны по формуле (13)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{t(P, N) \cdot s_{\bar{x}}}{\sqrt{N}}; \quad P = \dots$$

вводного занятия (часть 2) для одинакового числа многократных измерений N и одинаковой доверительной вероятности P для всех аргументов – случайных величин x , y и z , где $s_{\bar{x}}$, $s_{\bar{y}}$, $s_{\bar{z}}$ – выборочные СКО, то при подстановке $\sigma_{\bar{x}}$, $\sigma_{\bar{y}}$ и $\sigma_{\bar{z}}$ в формулы (16) и (17) из-под корня можно вынести общий множитель:

$$\sigma_F = \frac{t(P, N)}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} s_z\right)^2 + \dots}. \quad (18)$$

Например, для трехкратных измерений получаем формулу

$$\sigma_F = 2,48 \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} s_z\right)^2 + \dots}. \quad (19)$$

ОЦЕНКА СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ν^{-2}

Из формулы (6) следует, что экспериментальное значение величины V_0^{-2} находится по формуле

$$V_0^{-2} = K^{-2} x^{-2}. \quad (20)$$

Величина V_0^{-2} вычисляется по измеряемому значению x и приведенному в паспорте установки измеренному ранее значению K . Следовательно, оценить стандартное отклонение величины V_0^{-2} можно по

формулам (16) или (17), которые применяются при косвенных измерениях:

$$\sigma_{V_0^{-2}} = \overline{V_0^{-2}} \sqrt{\left(\frac{2\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2}. \quad (21)$$

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. Проведите измерения смещения x при попадании в маятник пули различной массы (для каждой пули измерения повторите три раза). При каждом измерении после выстрела и перемещения измерительной линейки следует, не трогая линейку, выстрелить еще раз (произвести «контрольный выстрел»). Возможно, при повторном выстреле линейка переместится еще немного дальше, так как работа сил трения линейки в механизме при повторном, гораздо меньшем, ее перемещении существенно уменьшается по сравнению с первым выстрелом и не вносит заметной погрешности (иными словами, при повторном выстреле линейка почти не тормозит маятник). Поэтому результат, полученный после «достреливания», фактически совпадает с результатом, который получили бы «при отсутствии трения».

2. Рассчитайте значения величин V_0 , V_0^{-2} и $\sigma_{V_0^{-2}}$.

3. Постройте график зависимости V_0^{-2} от m с учетом $\sigma_{V_0^{-2}}$ и сравните с теоретической зависимостью (12) (см. рис. 4).

4. Оцените по графику массу пружины и максимально возможную скорость пули.

5. Измерьте линейкой хвостовик пули a (см. рис. 1) и оцените по графику коэффициент жесткости пружины c , а также максимальную силу, которую требуется приложить при зарядании пистолета.

6. По экспериментальным данным для самой тяжелой пули оцените по формуле (7) допустимость разбиения удара на два этапа.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова цель настоящей лабораторной работы?
2. Как в этой работе измеряется скорость пули?

3. На какие этапы можно условно разделить процесс соударения пули с маятником?

4. Нарисуйте векторы внешних сил, действующих на пулю и маятник: а) на первом этапе соударения; б) на втором этапе.

5. Влияют ли взаимные силы трения пули и маятника на суммарный импульс маятника и пули?

6. На каком этапе (этапах) удара выполняется закон сохранения импульса системы «маятник + пуля»?

7. На каком этапе (этапах) удара выполняется закон сохранения механической энергии при выводе теоретической зависимости (12) и какие при этом делаются допущения?

8. Как от высоты подъема маятника перейти к величине его горизонтального смещения и какие допущения при этом необходимо сделать?

9. Выведите зависимость скорости пули от горизонтального смещения маятника.

10. Выведите зависимость скорости пули от ее массы.

11. В каких осях следует строить зависимость скорости пули от ее массы, чтобы выяснить, подтвердилась ли теоретическая зависимость (12)?

12. Какие характеристики пружины можно определить по этому графику?

13. Получили ли вы ожидаемую зависимость скорости пули от ее массы? Что это означает?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, любой год издания.

Работа № 3

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

В настоящей работе на примере движения маятника Обербека изучается динамика вращательного движения твердого тела.

Цель работы: сравнение экспериментально полученной зависимости углового ускорения маятника Обербека от массы груза, приводящего маятник во вращение, с теоретической.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Маятник Обербека представляет собой крестовину, имеющую общую ось с двумя шкивами разных диаметров D_1 и D_2 (рис. 1). Крестовина и шкивы соединены между собой жестко. Контакт крестовины со шкивом и осью, на которую они насажены, происходит с помощью шарикоподшипника. На стержни крестовины надевают одинаковые тела массой m_1 , которые могут быть закреплены на различных расстояниях R от оси вращения. На шкив наматывается нить, к свободному концу которой подвешен груз массой m . Начальное положение груза отмечается на вертикальной шкале (см. рис. 1). Под действием опускающегося груза нить разматывается и приводит маятник в ускоренное вращение. Время движения груза измеряется электросекундомером. В момент начала движения груза необходимо нажать кнопку «Пуск» секундомера, при этом начнется отсчет времени движения. Когда груз, пройдя расстояние x , опустится на контактную площадку, отсчет прекратится, время опускания груза t фиксируется секундомером.

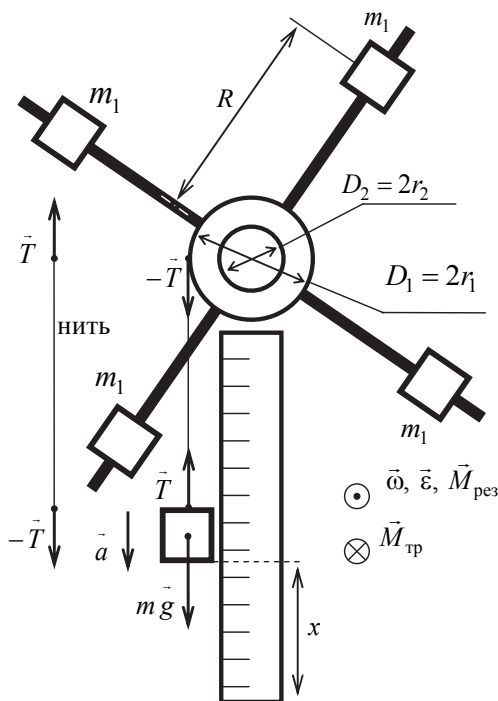


Рис. 1

ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ МАЯТНИКА ОТ МАССЫ m УСКОРЯЮЩЕГО ГРУЗА

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно фиксированной оси вращения в приближении невесомой нити имеет вид

$$I\varepsilon = M_{\text{рез}} = T \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Уравнение выписано в проекции на ось вращения, и в нем I – момент инерции маятника Обербека относительно оси вращения маятника; ε – проекция углового ускорения маятника на ось вращения; $M_{\text{рез}}$ – проекция результирующего момента всех сил на ось вращения, кото-

рый равен сумме момента силы натяжения нити M_T и момента силы трения $M_{тр}$, тормозящего вращение шкива; $\frac{D}{2} = r$ – радиус шкива, на который наматывается нить.

Из второго закона Ньютона в приближении невесомой нити следует, что сумма сил, действующих на нить, равна нулю (см. рис. 1). Тогда с учетом третьего закона Ньютона величина силы натяжения T , вращающей шкив, равна силе со стороны нити, действующей на груз.

Силу натяжения нити T можно определить из второго закона Ньютона, применяя его к движению груза массой m , его проекция на направление движения груза имеет вид

$$ma = mg - T, \quad (2)$$

где a – ускорение движения груза массы m .

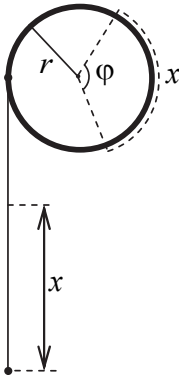


Рис. 2

В приближении нерастяжимой нити имеем кинематические соотношения (рис. 2) $\frac{x}{r} = \varphi$ (по определению, угол в радианах есть отношение длины дуги к радиусу):

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} r = \omega r, \quad a = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon r = \varepsilon \frac{D}{2}, \quad (3)$$

связывающие поступательное движение массы m с вращением шкива. Здесь φ (рад) – угол поворота шкива радиусом r при опускании груза на расстояние x ; V и ω – линейная и угловая скорость соответственно; D – диаметр шкива, равный D_1 или D_2 .

Решая совместно уравнения (1) и (2) (как систему уравнений) и используя при необходимости соотношения (3), находим из уравнения угловое ускорение маятника Обербека:

$$\varepsilon = \frac{mg \frac{D}{2} - M_{тр}}{I + m \frac{D^2}{4}}. \quad (4)$$

Очевидно, что при $M_{\text{тр}} = \text{const}$ (момент сил трения постоянен) вращение маятника является равноускоренным.

Из полученной формулы видно, что маятник будет вращаться с положительным ускорением $\varepsilon > 0$ лишь при выполнении условия

$$m > m_0 = \frac{2M_{\text{тр}}}{gd}, \quad (5)$$

т. е. при массе груза m , достаточной, чтобы был преодолен момент сил трения, препятствующий вращению маятника Обербека.

Формула (4) может быть записана в виде

$$\varepsilon = \frac{mg \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}}{I + m \frac{D^2}{4}} = \frac{mg \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}}{I \left(1 + \frac{m}{I} \frac{D^2}{4} \right)} = \frac{mg \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}}{I} \frac{1}{1 + \frac{m}{I} \frac{D^2}{4}},$$

и существенно упрощается при выполнении неравенства

$$\frac{m}{I} \frac{D^2}{4} = \frac{mr^2}{I} \ll 1. \quad (6)$$

Зависимость углового ускорения ε от массы опускающегося груза при этом становится линейной:

$$\varepsilon = \frac{mgD}{2I} - \frac{M_{\text{тр}}}{I}. \quad (7)$$

Само же неравенство (6) легко проверить непосредственной подстановкой, если учесть очевидное неравенство $I > 4m_1 R^2$, где m_1 – масса каждого из четырех грузов маятника ($m_1 \geq 0,15$ кг), а R – расстояние от грузов до оси вращения ($R \geq 0,15$ м), т. е. достаточно проверить ра-

венство $\frac{mr^2}{4m_1 R^2} \ll 1$, где в качестве m достаточно взять максимальную массу подвешиваемого груза.

График зависимости (7) $\varepsilon(m)$ при выполнении неравенства (6) показан сплошной линией на рис. 3. Штриховой линией показана точная зависимость (4). Штриховая горизонтальная прямая – асимптота при $m \rightarrow \infty$.

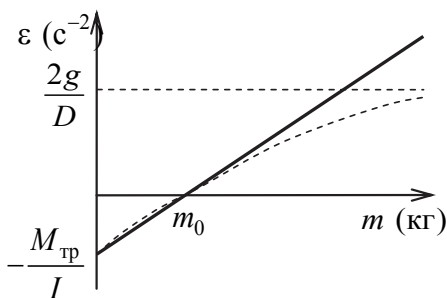


Рис. 3

Примечание. Если момент сил трения зависит от угловой скорости, то вращение маятника не будет равноускоренным. Пусть, например, момент сил трения пропорционален первой степени угловой скорости:

$$M_{\text{тр}} = M_0 + A\omega, \quad (8)$$

где $A > 0$ – коэффициент пропорциональности; $M_0 = m_0 g \frac{D}{2}$ – момент сил трения покоя при $\omega = 0$. Заметим, что при $m < m_0 = \frac{2M_0}{gD}$ (сравните с формулой (5)) вращения маятника не происходит. Решая дифференциальное уравнение (4) с учетом (8), можно получить, что угловое ускорение ε в момент времени t дается формулой

$$\varepsilon = \frac{(m - m_0)gD}{2 \left(I + m \frac{D^2}{4} \right)} e^{\frac{-A}{I + m \frac{D^2}{4}} t}. \quad (9)$$

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ

Движение маятника можно принять равноускоренным, если считать, что момент силы трения постоянен, $M_{\text{тр}} = \text{const}$, и что нить нерастяжима и не проскальзывает по шкиву. Используя известную формулу для координаты тела при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью

$$x = a \frac{t^2}{2}, \quad (10)$$

с учетом соотношения $a = \varepsilon \frac{D}{2}$ получаем формулу для косвенного измерения углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2}, \quad (11)$$

где x – высота, с которой опускается груз; D – диаметр шкива, на который намотана нить; t – время движения груза. Для расчетов удобно представить (11) в виде

$$\boxed{\varepsilon = \frac{K}{t^2}}, \quad (12)$$

где $K = \frac{4x}{D}$ и указывается в паспорте установки. При этом непосредственной подстановкой числа K из паспорта необходимо удостовериться, что высота x , полученная из формулы $K = \frac{4x}{D}$, соответствует отмеченной на стенде.

Угловое ускорение ε рассчитывается по формуле (12), т. е. по измеренному времени t и заданному значению константы K .

ОЦЕНКА СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ

Формула для оценки величины стандартного отклонения σ_ε должна быть получена по правилам обработки результатов косвенных измерений:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial K} \sigma_K\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \sigma_t\right)^2}. \quad (13)$$

Произведя все требуемые математические действия, находим формулу для вычисления величины σ_ε

$$\sigma_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2}. \quad (14)$$

ЗАДАНИЯ

1. Произведите трехкратное измерение времени опускания грузов масс $m = 100, 200, 300$ и 400 г (или других масс, существенно отличающихся друг от друга, по согласованию с преподавателем) с одинаковой высоты x при двух различных расстояниях R грузов m_1 . Расстояния R задаются преподавателем.

2. Вычислите значения ε для всех значений m и R предыдущего пункта.

3. Вычислите оценки стандартных отклонений σ_ε .

4. Постройте зависимость ε от m при двух значениях R на одном и том же графике с учетом оценок стандартных отклонений.

5. По полученным графикам сделайте оценку момента сил трения.

6. По полученным графикам оцените моменты инерции маятника Обербека.

7. Проверьте, используя оценку момента инерции I в п. 6, в какой степени выполняется неравенство $I \gg m \frac{D^2}{4}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова цель лабораторной работы? Какие величины в работе измеряются непосредственно?
2. Как направлены векторы угловой скорости $\vec{\omega}$, углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, результирующего момента сил и момента сил трения в случае ускоренного вращения?
3. Как вы записываете уравнение динамики вращательного движения маятника в настоящей работе?
4. Какова модель нити? При выводе каких соотношений она используется?
5. Покажите на рисунке все силы, действующие на крестовину маятника. Почему в уравнении динамики вращательного движения (1) не учтены моменты некоторых из этих сил?
6. Перечислите все допущения, при которых получается линейная зависимость углового ускорения ε от массы m .
7. Выведите зависимость углового ускорения ε от массы опускающегося груза m в приближении линейной зависимости $\varepsilon(m)$.
8. Как в работе рассчитать оценку стандартного отклонения величины ε ? Выведите формулу (14).
9. Как по графику линейной зависимости (7) ε от m оценить момент сил трения?
10. Как по графику линейной зависимости (7) ε от m оценить момент инерции маятника Обербека?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев И.Н.* Курс общей физики. – М.: Наука, любой год издания.
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука, любой год издания.

Работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цель работы: экспериментальное исследование зависимости момента инерции маятника Обербека от расстояния R между осью вращения и центром инерции каждого из четырех грузов маятника. Теоретически эта зависимость легко находится с использованием: 1) свойства аддитивности момента инерции и 2) теоремы Штейнера. Таким образом, при сравнении экспериментально полученной зависимости с теоретической фактически проверяют, является ли момент инерции аддитивной величиной и справедлива ли в этом случае теорема Штейнера.

Описание установки (маятника Обербека и секундомера) уже приводилось в описании лабораторной работы № 3.

ЗАВИСИМОСТЬ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОТ РАССТОЯНИЯ ГРУЗОВ ДО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Момент инерции – величина аддитивная, поэтому момент инерции маятника Обербека относительно его оси можно представить в виде суммы моментов инерции пяти тел: одной крестовины, состоящей из шкивов, подшипников и стержней, и четырех тел (грузов), закрепленных на стержнях крестовины на одинаковом расстоянии R от оси вращения.

Согласно теореме Штейнера момент инерции тела I относительно произвольной оси l равен сумме его момента инерции I_0 относительно оси l_0 , параллельной l и проходящей через центр инерции тела, и величины mR^2 , равной произведению массы тела m на квадрат расстояния между параллельными осями l и l_0 , т. е.

$$I = I_0 + mR^2 .$$

Поэтому для каждого из четырех грузов, представляющих собой одинаковые цилиндры массой m_1 и радиусом r_1 , момент инерции относительно оси маятника I_1 есть

$$I_1 = I_0 + m_1 a^2 = \frac{m_1 r_1^2}{2} + m_1 R^2 = m_1 R^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{R} \right)^2 \right).$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой фактических значений r_1 и R , что второе слагаемое в скобках достаточно мало по сравнению с единицей, и им можно пренебречь (строго говоря, максимальную величину этого члена нужно сравнить с оценкой относительной погрешности эксперимента $\left(\sim \frac{\sigma_t}{t} \approx 0,1 \right)$ и только после этого решать вопрос о целесообразности его учета или отбрасывания).

Заметим, что пренебрежение вторым членом в скобках соответствует модели, в которой четыре груза считаются точечными массами (материальными точками).

В рамках этой модели момент инерции всего маятника будет суммой моментов инерции крестовины $I_{кр}$ и четырех материальных точек массы m_1 , расположенных на расстоянии R от оси:

$$I = I_{кр} + 4m_1 R^2. \quad (1)$$

Именно эту теоретическую зависимость следует подтвердить (или опровергнуть) экспериментально в настоящей лабораторной работе.

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА

При опускании ускоряющего груза m изменение полной механической энергии системы равно работе сил трения.

Изменение полной механической энергии системы состоит из уменьшения потенциальной энергии при опускании груза массой m с высоты x , равной $-mgx$, увеличения кинетической энергии поступа-

тельного движения груза $\frac{mV^2}{2}$ (V – линейная скорость опускаемого

груза) и увеличения кинетической энергии вращательного движения маятника Обербека $\frac{I\omega^2}{2}$ (ω – угловая скорость маятника).

Работа сил трения при вращательном движении отрицательна и равна $(-M_{\text{тр}}\varphi)$, где $M_{\text{тр}} = \text{const}$ – момент сил трения; φ – угол поворота (угловой путь) маятника, соответствующий перемещению груза x при его опускании.

Таким образом, получаем, что при опускании груза

$$-mgx + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = -M_{\text{тр}}\varphi. \quad (2)$$

Если $M_{\text{тр}} = \text{const}$, нить нерастяжима и нет проскальзывания между нитью и шкивом, то движение системы тел можно считать равноускоренным.

Если начальные скорости V_0 и ω_0 равны нулю, то для равноускоренного поступательного и вращательного движения справедливы соотношения, которые следуют из теоремы об изменении кинетической энергии (как это доказать?):

$$V^2 = 2ax, \quad \omega^2 = 2\varepsilon\varphi. \quad (3)$$

Пусть $r = \frac{x}{\varphi}$ – радиус шкива, тогда $a = \varepsilon r$, $V = \omega r$. Подставим выражения (3) в соотношение (2), затем разделим левую и правую часть равенства на φ и получим

$$mgr = I\varepsilon + mar + M_{\text{тр}}. \quad (4)$$

Заметим, что в работе № 3 практически это же соотношение было получено из основного закона динамики вращательного движения для маятника и второго закона Ньютона для опускающегося груза (см. формулы (1), (2) и (3) из описания работы № 3).

Выражая ускорение груза a через угловое ускорение шкива ε и решая полученное уравнение относительно I , определим момент инерции маятника:

$$I = \frac{mgr - M_{\text{тр}}}{\varepsilon} - mr^2. \quad (5)$$

Для равноускоренного движения $x = \frac{at^2}{2}$. Так как $a = \varepsilon \frac{D}{2}$, где D – диаметр шкива, получаем

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2}. \quad (6)$$

Подставляя вместо ε это выражение в формулу (5), получаем

$$I = Kt^2 - m \frac{D^2}{4}, \quad (7)$$

где $K = \left(mg \frac{D}{2} - M_{\text{тр}} \right) D / 4x$.

Для нашей установки (в соответствии с формулой (5) лабораторной работы № 3) $M_{\text{тр}} \ll mgD / 2$, поэтому можно считать, что

$$K = \frac{mgD^2}{8x}. \quad (8)$$

Кроме того, для нашей установки (в соответствии с формулой (6) лабораторной работы № 3)

$$I \gg m \frac{D^2}{4} = mr^2. \quad (9)$$

Это неравенство может быть проверено непосредственно подстановкой конкретных величин. С учетом (9) из (7) для момента инерции получаем

$$\boxed{I = Kt^2}. \quad (10)$$

Для определения момента инерции маятника необходимо провести прямое измерение времени прохождения грузом массы m расстояния x (см. рис. 1 в описании лабораторной работы № 3).

ОЦЕНКА СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Из формулы (10) следует, что значение величины I находится в процессе косвенного измерения. Следовательно, оценка стандартного отклонения величины I должна быть получена по правилам обработки результатов косвенных измерений:

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial K} \sigma_K\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial t} \sigma_t\right)^2}. \quad (11)$$

Произведя все требуемые математические действия, находим формулу для вычисления стандартного отклонения величины I :

$$\sigma_I = \bar{I} \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2}. \quad (12)$$

ЗАДАНИЯ

1. Закрепив цилиндры m_1 на равных расстояниях R от оси вращения, измерьте это расстояние R .
2. Намотав нить на шкив большего диаметра, произведите трехкратное измерение времени опускания груза t .
3. Повторите опыт при четырех различных расстояниях цилиндров от оси вращения.
4. Подставив в (8) массу m опускающегося груза, вычислите коэффициент K по формуле (8).
5. Вычислите моменты инерции маятника для всех измерений пунктов 2 и 3.
6. Рассчитайте оценки стандартных отклонений для всех полученных значений момента инерции.
7. Постройте график зависимости момента инерции I от расстояния четырех масс до оси вращения R (в какой степени?) с учетом вычисленных оценок стандартных отклонений. Выберите переменные по осям, в которых целесообразно строить этот график, чтобы выяснить, подтвердилась ли теоретическая зависимость (1).

8. Определите по графику момент инерции крестовины $I_{кр}$.
9. (По заданию преподавателя). Прodelайте еще одну серию измерений (пункты 1–8), подвешивая груз другой массой, указанной преподавателем.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова цель настоящей работы?
2. Что называется моментом инерции тела?
3. При каких допущениях получена формула (1)? Что необходимо учесть при проведении эксперимента, чтобы эта формула была справедлива?
4. При каких допущениях движение маятника и груза можно считать равноускоренным?
5. При каких допущениях получена формула (8)?
6. Как измерить расстояния от оси вращения до центра массы тела, закрепленного на стержне?
7. Как рассчитать оценку стандартного отклонения момента инерции маятника Обербека? Выведите формулу (14).
8. Какую таблицу удобно заполнять при записи результатов прямых измерений и подготовке к построению экспериментальной зависимости?
9. Как по графику определить момент инерции крестовины?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев И.Н.* Курс общей физики. – М.: Наука, любой год издания.
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука, любой год издания.

Работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ МЕТОДОМ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Цель работы: экспериментальное определение показателя адиабаты воздуха γ , равного отношению теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме: $\gamma = C_P / C_V$.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ

Абсолютная температура T является мерой средней кинетической энергии $\bar{\epsilon}$ хаотического движения (поступательного, вращательного и колебательного) атомов и / или молекул газа. Для поступательного движения

$$\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T,$$

где k_B – постоянная Больцмана, чертой обозначено усреднение энергии (и квадрата скорости) по всем движущимся частицам газа.

В термодинамически равновесном состоянии молекулярного хаоса все направления движения атомов равновероятны, поэтому на каждое из трех независимых направлений поступательного движения приходится 1/3 полной средней энергии:

$$\bar{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_y = \bar{\epsilon}_z = \left(\frac{1}{3}\right)\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}k_B T.$$

Молекулы могут участвовать не только в поступательном, но и во вращательном и колебательном движении. Независимые возможные

перемещения системы в классической механике называются *степенями свободы*. В статистическом описании тепловых свойств макросистем доказывается *теорема о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы*. Согласно этой теореме на каждую степень свободы поступательного или вращательного движения атомов и молекул приходится в среднем энергия, равная $k_B T/2$. Каждой колебательной степени свободы соответствует удвоенная тепловая энергия, равная $k_B T$:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{кол}} = \bar{\varepsilon}_{\text{кин}} + \bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = \frac{k_B T}{2} + \frac{k_B T}{2} = k_B T.$$

Таким образом, полная внутренняя энергия системы N не взаимодействующих на расстоянии атомов или молекул (такова модель идеального газа) равна

$$U = N(i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}) \frac{k_B T}{2} = \frac{N}{N_A} \frac{i}{2} N_A k_B T = \nu \frac{i}{2} RT, \quad (1)$$

где $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вр}}$, $i_{\text{кол}}$ – число поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы; N_A – число Авогадро; R – универсальная газовая постоянная; $\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ – число молей вещества; m и M – соответственно его полная и молярная масса. Число $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$ условно называется (полным) числом степеней свободы молекулы.

Рисунок 1 иллюстрирует подсчет поступательных и вращательных степеней свободы атомов и различных молекул.

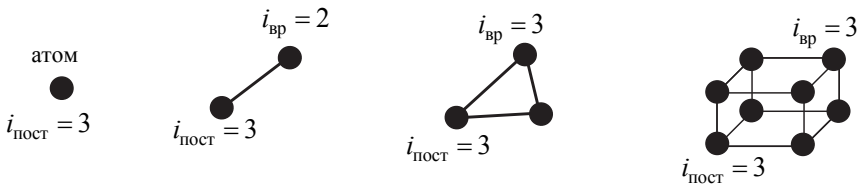


Рис. 1

Для расчета теплоемкости используют *первый закон (первое начало) термодинамики*:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (2)$$

Учитывая, что элементарная работа газа $\delta A = PdV$, получаем

$$\delta Q = dU + PdV, \quad (3)$$

где δQ – количество теплоты, переданной рабочему телу (газу); dU – изменение внутренней энергии газа; δA – работа, совершенная газом; dV – изменение объема газа.

Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния газа, тогда как теплота и работа зависят от процесса перехода из одного состояния газа в другое. Поэтому с математической точки зрения dU – полный дифференциал функции U , тогда как δQ , δA – бесконечно малые количества.

Теплоемкость системы (газа, жидкости или твердого тела) – это скалярная физическая величина, равная отношению количества теплоты δQ , которое надо подвести к системе для бесконечно малого повышения ее температуры dT , к этому приращению температуры dT :

$$c_{\text{сист}} = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (4)$$

Различают молярную (одного моля), удельную (единицы массы) и полную теплоемкость системы. Молярную теплоемкость обозначают прописной (заглавной) буквой. Как и количество тепла δQ , теплоемкость зависит от теплового процесса. Например, $C_{\text{адиаб}} = 0$, $C_{\text{изотерм}} = \infty$.

В изохорическом процессе $dV = 0$, $\delta A = 0$, $\delta Q = dU$, поэтому молярная теплоемкость при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (5)$$

Для изобарического процесса из (4), (3) и (1), используя уравнение Клапейрона–Менделеева

$$PV = \nu RT,$$

а точнее, его дифференциальное следствие $dPV + PdV = \nu R dT$, которое в случае $P = \text{const}$ приобретает вид $PdV = \nu R dT$, получаем

$$C_P = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + PdV}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + \nu R dT}{dT} = \frac{i+2}{2} R. \quad (6)$$

Отсюда находим связь C_P и C_V (уравнение Майера):

$$C_P = C_V + R. \quad (7)$$

Тогда показатель адиабаты равен

$$\boxed{\gamma_{\text{теор}} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}}. \quad (8)$$

Рассмотренная выше классическая теория не смогла правильно описать некоторые явления. Например, независимость теплоемкости C_V в (5) от температуры опровергается опытом. Согласовать классическую теорию с экспериментом удалось, только предположив, что некоторые степени свободы в определенном диапазоне температур не возбуждаются, «вымораживаются». Например, согласие с опытом при $T \sim 300$ К достигается, если считать, что не возбуждаются колебания молекул. Это явление было объяснено только в квантовой теории.

Учитывая для двухатомных молекул с жесткой связью атомов только поступательные и вращательные степени свободы, получаем $i = 5$, а из (8) $\gamma_{\text{теор}} = 1,4$.

С теоретическим значением γ для двухатомного газа (воздух на 99 % состоит из двухатомных молекул) следует сравнить значение, полученное в эксперименте.

МЕТОД КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Одним из самых простых и остроумных методов определения γ является метод Клемана и Дезорма, основанный на использовании адиабатических и изохорических процессов в воздухе, находящемся в сосудах (рис. 2).

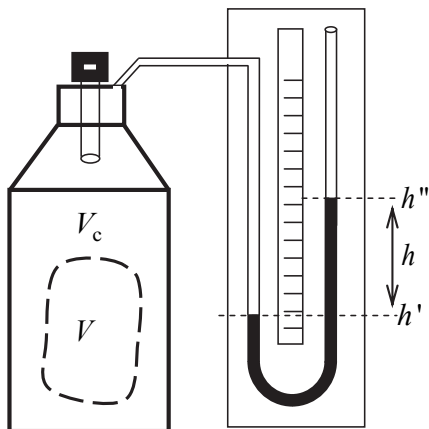


Рис. 2

В процессе эксперимента мы будем накачивать воздух в стеклянный сосуд (баллон) и выпускать его из сосуда. Объем сосуда V_c , естественно, постоянен, а количество воздуха в нем, т. е. число молей газа ν , будет изменяться. В этих условиях уравнение Клапейрона–Менделеева удобнее применять к исходному числу молей ν_0 газа (до накачивания воздуха в сосуд):

$$PV = \nu_0 RT.$$

Суть метода, согласно замыслу Клемана и Дезорма, иллюстрирует рис. 3, на котором в координатах P – V приведены графики всех процессов эксперимента.

Итак, перечислим процессы, происходящие с воздухом.

1. Кривая 0–1 соответствует подготовительному этапу – **накачиванию воздуха** в баллон. Число молей газа внутри баллона при этом возрастает. Можно считать, что исходное число молей ν_0 (т. е. исходная масса газа) занимает теперь объем V , меньший, чем объем всего сосуда V_c , что и отражает кривая 0–1. Для наглядности можно представить, что исходная масса газа будто бы заключена внутри невесомой эластичной непроницаемой оболочки внутри сосуда, показанной штриховой линией, и «не перемешивается» с поступающим из насоса. Давление газа в баллоне (и внутри оболочки) при этом увеличивается

от **атмосферного** P_0 до некоторого давления P_1 . Температура газа повышается. Легко понять, почему это происходит. При сжатии работа газа $\delta A = PdV < 0$. Согласно (2) изменение внутренней энергии $dU = \delta Q - \delta A$. Если бы процесс накачивания воздуха был адиабатическим процессом ($\delta Q = 0$), то $dT \sim dU > 0$ и повышение температуры было максимальным. Реальный процесс сжатия, вообще говоря, сопровождается отдачей тепла во внешнюю среду $\delta Q < 0$, которую можно уменьшить, проводя накачивание достаточно быстро.

2. Как только накачивание прекращается, давление в баллоне начинает падать при неизменном объеме, что является следствием остывания газа (закон Шарля). На участке 1–2 температура снижается до **комнатной** за счет теплообмена с окружающей средой. Давление при этом уменьшается от P_1 до P_2 .

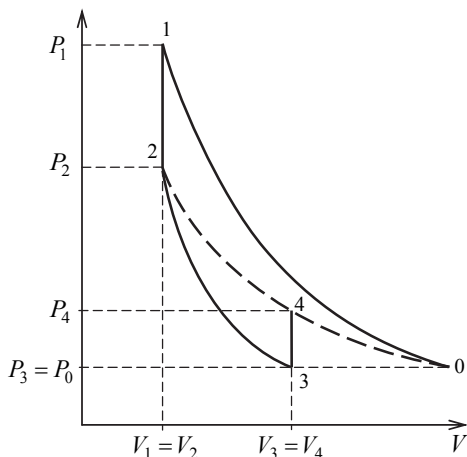


Рис. 3

3. Когда давление перестает изменяться (точка 2), **резко выпускаем** воздух из баллона. Процесс, происходящий с воздухом в сосуде, можно считать близким к адиабатическому расширению газа (кривая 2–3). В результате объем рассматриваемой массы газа увеличивается от $V_2 = V_1$ до $V_3 = V_4$, давление уменьшается от P_2 до **атмосферного** $P_3 = P_0$. При этом температура понижается ниже комнатной (почему?).

4. В точке 3 температура ниже комнатной, и теперь она повышается за счет теплообмена с окружающей средой. В это время мы никаких действий не совершаем – объем газа не изменяется. В конечной точке 4 температура газа в баллоне становится равной комнатной.

5. Заметим, что в точках 0, 4, 2 газ имеет одинаковую температуру – комнатную, т. е. эти точки лежат на одной изотерме $0 - 4 - 2$, которую называют «мнимой» изотермой (иногда «мысленной» или «гипотетической»), подчеркивая, что реально изотермический процесс $0 - 4 - 2$ не происходит. Это обстоятельство позволило Клеману и Дезорму обойтись без измерения начального и конечного объема газа. Именно в этом и заключается «кизюминка» предложенного метода.

Рассмотрим систему уравнений, соответствующих процессам 2–3, 3–4 и 4–2. Для точек 2 и 3, лежащих на одной адиабате, $P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$, или, так как $P_3 = P_0$,

$$P_2 V_2^\gamma = P_0 V_3^\gamma. \quad (9)$$

Для точек 2 и 4, лежащих на одной мысленно проведенной изотерме, по закону Бойля–Мариотта

$$P_2 V_2 = P_4 V_4. \quad (10)$$

Процесс 3–4 изохорический, для которого

$$V_3 = V_4. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получаем

$$V_2 = \frac{P_4}{P_2} V_3. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9), получаем уравнение

$$\left(\frac{P_4}{P_2} \right)^\gamma = \frac{P_0}{P_2}. \quad (13)$$

Логарифмируя (13), выражаем γ через атмосферное давление P_0 и давления в состояниях 2 и 4, которые требуется измерить в процессе эксперимента:

$$\gamma = \frac{\ln P_0 - \ln P_2}{\ln P_4 - \ln P_2} = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_2 - \ln P_4}. \quad (14)$$

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка состоит из стеклянного баллона, закрытого пробкой, в которую вмонтированы две трубки и быстродействующий клапан для выпуска воздуха из сосуда (см. рис. 1). Одна трубка соединяет полость сосуда с манометром. Манометром служит U -образная трубка, наполненная подкрашенной водой. Давление измеряется по разности уровней в коленях трубки. Вторая трубка через клапан соединяет полость баллона с насосом (не показана на рис. 1).

Процесс 2–3, строго говоря, не является адиабатическим, поскольку стеклянный сосуд, используемый в лабораторной работе, не теплоизолирован. Поэтому расширение воздуха, чтобы уменьшить потери тепла, следует производить быстро, нажимая на клапан в течение одной-двух секунд. Однако следует обратить внимание на другую сторону «быстроты» выполнения процесса. Уравнение, описывающее адиабатический процесс $PV^\gamma = \text{const}$, справедливо лишь для равновесных, квазистатических процессов. Вопрос: можно ли считать столь быстрое адиабатическое расширение квазистатическим (равновесным) процессом? Видимо, на этот вопрос все же можно дать положительный ответ на основании двух следующих оценок.

1. При выпуске воздуха из баллона давление внутри баллона уменьшается примерно на 10 см водяного столба. Атмосферное давление составляет примерно 10 м водяного столба. Следовательно, относительное отклонение давления от равновесного атмосферного невелико, примерно 1 %.

2. При выпуске воздуха из баллона внутри него около выпускного крана создается некоторое разрежение. Это возмущение распространяется внутрь баллона со скоростью звука в воздухе. Если принять характерный размер баллона равным 0,7 м, а скорость звука равной 330 м/с, то указанное возмущение распространится на весь объем за время около 0,002 с. В результате многократных отражений от различ-

ных участков стенок баллона первоначальное возмущение равномерно распределяется по всему объему. За две секунды в нашем баллоне должно произойти около тысячи отражений. Этого, надо полагать, вполне достаточно для установления равновесия.

Измерение. Давление воздуха в баллоне в состоянии, соответствующем точке 2 на рис. 3:

$$P_2 = P_0 + \rho gh_1 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right),$$

где P_0 – атмосферное давление; ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения; h_1 – разность уровней в U-образной трубке, а ρgh_1 , таким образом, – разность между атмосферным давлением и давлением воздуха в баллоне после первоначального накачивания воздуха и охлаждения его до комнатной температуры. Аналогично для давления воздуха в баллоне после адиабатического расширения и нагревания до комнатной температуры (т. е. в состоянии, обозначенном на рис. 2 точкой 4) получаем

$$P_4 = P_0 + \rho gh_2 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right),$$

где h_2 – разность уровней в U-образной трубке при втором измерении давления (в точке 4). Подставив эти выражения в формулу (13), получим выражение для определения γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0}{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right)} = \\ &= \frac{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0}{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0 - \ln \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В нашем случае, как уже отмечалось выше, $\frac{\rho gh_1}{P_0} \ll 1$ и $\frac{\rho gh_2}{P_0} \ll 1$. Точнее, $\frac{\rho gh_i}{P_0} \sim 10^{-2}$.

Разложение функции $\ln(1+x)$ в точке $x=0$ дает знакопеременный ряд Тэйлора $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$, остаток которого не превышает первого из отброшенных членов. Следовательно, $\ln\left(1 + \frac{\rho gh_i}{P_0}\right) \approx \frac{\rho gh_i}{P_0}$ с относительной погрешностью $\sim 10^{-4}$, что существенно меньше относительной погрешности наших измерений $\left(\text{мы измеряем } h_i \sim 10 \text{ см с погрешностью } \sim 1 \text{ мм, т. е. } \frac{\delta h_i}{h_i} \sim 0.01 \right)$. Следовательно, из формулы (11) получаем

$$\gamma = \frac{\frac{\rho gh_1}{P_0}}{\frac{\rho gh_1}{P_0} - \frac{\rho gh_2}{P_0}},$$

или

$$\boxed{\gamma_{\text{эксп}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}}. \quad (16)$$

Таким образом, эксперимент сводится к измерениям h_1 и h_2 , которые являются косвенными, поскольку фактически h_1 и h_2 вычисляются как разности уровней воды в U -образной трубке. Прямыми измерениями в настоящей работе являются измерения уровней воды в U -образной трубке слева и справа: h'_1 , h'_2 и h''_1 , h''_2 – координаты уровней

воды в левой и правой трубке при измерении соответствующих давлений $h_1 = h_1'' - h_1'$ и $h_2 = h_2'' - h_2'$:

$$\gamma_{\text{эксп}} = \frac{(h_1'' - h_1')}{(h_1'' - h_1') - (h_2'' - h_2')} . \quad (17)$$

ОЦЕНКА СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ

Формула для оценки стандартного отклонения величины γ должна быть получена по правилам обработки результатов косвенных измерений с учетом того факта, что погрешности прямых измерений величин h_1' , h_2' и h_1'' , h_2'' одинаковы и равны σ_h :

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h_1''} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h_1'} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h_2''} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h_2'} \sigma_h\right)^2} . \quad (18)$$

Произведя все требуемые математические действия, находим формулу для вычисления стандартного отклонения величины γ :

$$\sigma_\gamma = \bar{\gamma}^2 \frac{\sqrt{2(\bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2)}}{\bar{h}_1^2} \sigma_h . \quad (19)$$

С другой стороны, мы можем провести три (или более) измерения, получить соответствующую выборку случайной величины γ и по известным формулам вводного занятия получить $\sigma_{\gamma \text{ случ}}$. Эта погрешность характеризует случайные ошибки измерений, в то время как погрешность, рассчитанная по формуле (15), является систематической и связана с характеристиками измерительного прибора. Будем обозначать ее $\sigma_{\gamma \text{ сист}}$. Суммарная погрешность находится по формуле

$$\sigma_{\text{полн}}^2 = \sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2 . \quad (20)$$

Обычно систематическую ошибку, вносимую измерительным прибором, характеризуют не максимально возможной погрешностью Δ_x , которая оценивается по классу точности или паспортным данным прибора, а так называемой **стандартной систематической погрешностью**, которая, как показано в теории ошибок, равна

$$\sigma_{\text{ст.сист}} = \frac{\Delta_x}{3}.$$

В том случае, если класс точности неизвестен, стандартная погрешность с доверительной вероятностью 68 % может быть оценена по формуле $\sigma_{\text{ст.сист}} = (0,3...0,5)C$, где C – цена деления. Как известно из вводного занятия, стандартная погрешность с доверительной вероятностью 95 % в два раза больше. Поэтому в настоящей работе можно принять $\sigma_{\text{ст.сист}} = (0,6...1,0)C = (0,6...1,0)$ мм.

Таким образом, при совместном учете случайных и инструментальных погрешностей получается, что полная погрешность находится по формуле

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} \quad (21)$$

с заданной доверительной вероятностью.

В настоящей работе $\sigma_{\text{случ}}$ находится по известным формулам вводного занятия (части 2) (13) и (14) ($N=3$, $P=0,95$):

$$\sigma = \frac{t(P, N)s_\gamma}{\sqrt{N}} = \frac{4,3s_\gamma}{\sqrt{3}} = 2,48s_\gamma, \quad (22)$$

где выборочное СКО случайной величины γ равно

$$s_\gamma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\gamma_i - \bar{\gamma})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\gamma_i - \bar{\gamma})^2}. \quad (23)$$

ЗАДАНИЕ

1. Измерьте показатель адиабаты три раза.
2. Рассчитайте стандартное отклонение величины γ .
3. Сравните значение γ , полученное экспериментально, с теоретическим значением для жестких двухатомных молекул.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое теплоемкость?
2. Что такое молярная и удельная теплоемкость, какова связь между ними?
3. Что такое степени свободы в молекулярно-кинетической теории газов?
4. Чему равно число степеней свободы двухатомной или трехатомной молекулы, с жесткой связью или с упругими связями между атомами?
5. Что такое показатель адиабаты γ ? Как эта величина связана с числом степеней свободы молекулы? Выведите эту связь на основе первого начала термодинамики.
6. Как на $\gamma_{\text{теор}}$ влияет наличие в воздухе трехатомных молекул (углекислого газа, паров воды, например)?
7. Нарисуйте на P – V -диаграмме все процессы, используемые для измерения γ (исходное состояние обозначьте нулевым номером). Запишите уравнения этих процессов.
8. Какой объем изображается на P – V -диаграмме по одной из координатных осей?
9. Какому процессу принадлежат состояния в точках 0, 4, 2?
10. Объясните, почему в некоторых из рассматриваемых процессов возникает отклонение температуры от комнатной?
11. Выведите формулу, выражающую связь γ с измеряемыми давлениями.
12. Что измеряет U -образный манометр? Как соотносятся давления, измеряемые манометром, с атмосферным давлением?
13. Выведите формулу, выражающую γ через показания манометра.
14. Выведите формулу для расчета погрешности измерения величины γ .

15. Согласуется ли полученное вами значение с $\gamma_{\text{эксп}}$ теоретическим?

16. Чем может быть объяснено имеющееся у вас расхождение $\gamma_{\text{теор}}$ и $\gamma_{\text{эксп}}$?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т. 1, любой год издания.
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука, любой год издания.

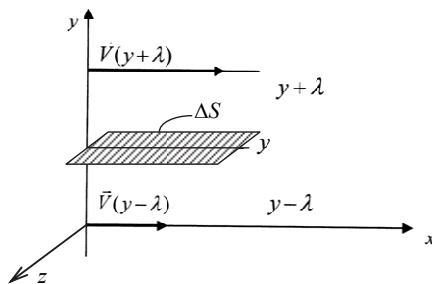
Работа № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ (ВЯЗКОСТИ) ЖИДКОСТИ ПО МЕТОДУ СТОКСА

Цель работы: определение коэффициента внутреннего трения η жидкостей и сравнение найденных его экспериментальных значений с табличными значениями.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ

Возникновение внутреннего трения в газах и жидкостях связано с переносом импульса в направлении, перпендикулярном скорости жидкости. Если скорость направленного движения $\vec{V}(y) = (V(y), 0, 0)$ в потоке жидкости изменяется от слоя к слою (см. рисунок), то на границе между слоями возникает сила, связанная с тем, что молекулы, переходящие из быстрого слоя в медленный, ускоряют медленный слой, а молекулы, переходящие из медленного слоя в быстрый, тормозят быстрый слой. Для случая плоского течения жидкости (газа) силу трения между слоями можно оценить, используя приведенный ниже рисунок, следующим образом [1–3].



Пусть в направлении оси x течет жидкость, причем существует градиент скоростей направленного движения жидкости $d\vec{V}/dy \neq 0$ вдоль оси y . Такой градиент скоростей можно реализовать в аквари-

уме в слоях жидкости между дном и поверхностью, двигая с постоянной скоростью параллельно оси x доску, лежащую на поверхности жидкости. Верхние слои жидкости, прилегающие к доске, вследствие трения между жидкостью и доской будут двигаться с максимальной скоростью, нижние слои жидкости из-за внутреннего трения в жидкости также придут в движение, скорость направленного движения жидкости с приближением ко дну аквариума будет уменьшаться.

Для силы трения, приходящейся на единицу площади площадки ΔS , расположенной параллельно оси x (касательного «натяжения» σ_x внутри жидкости в направлении оси x), исходя из второго закона Ньютона можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\Delta F_x}{\Delta S} = \frac{(1/6)(mn\bar{V}_{\text{тепл}})(V(y-\lambda) - V(y+\lambda))\Delta S}{\Delta S} \cong \\ &\cong -\frac{1}{3}mn\bar{V}_{\text{тепл}}\lambda \frac{dV}{dy} = -\eta \frac{dV}{dy},\end{aligned}\quad (1)$$

здесь $\eta = \frac{1}{3}nm\bar{V}_{\text{тепл}}\lambda$ – коэффициент внутреннего трения жидкости, выражающийся через массу молекулы m , концентрацию n , среднюю скорость теплового движения $\bar{V}_{\text{тепл}}$ и длину свободного пробега λ молекул. При получении формулы (1) учтено, что число молекул жидкости, пересекающих единичную площадку, расположенную посередине между слоями жидкости с координатами $y-\lambda$ и $y+\lambda$, за секунду в положительном и отрицательном направлении оси y , из-за теплового их движения равно $(1/6)n\bar{V}_{\text{тепл}}$. Молекулы, переходящие через слой с координатой y из слоев с координатами $y \pm \lambda$, переносят импульс $\mp mV(y \pm \lambda)$ направленного движения, это и приводит к возникновению внутреннего трения между слоями жидкости, характеризуемому выражением (1).

Стокс установил, что сила трения, действующая на медленно движущийся в жидкости шар, равна

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta rV, \quad (2)$$

где V – скорость и r – радиус шара. Условием «медленности» служит малость безразмерного числа Рейнольдса

$$\text{Re} = 2\rho_0 V r / \eta \ll 1, \quad (3)$$

где ρ_0 – плотность жидкости. Для практического использования формулы Стокса отметим, что при значениях числа Рейнольдса $\text{Re} \cong 0.01$ экспериментально измеренная сила сопротивления и сила, вычисленная по формуле (2), различаются не более чем на 1 %, в случаях же $\text{Re} \cong 1$ экспериментальные значения силы трения больше расчетных примерно на 20 %.

При движении шара в жидкости, кроме силы трения (2), на него действуют сила Архимеда

$$F_A = (4/3)\pi r^3 \rho_0 g \quad (4)$$

и сила тяжести

$$F_T = (4/3)\pi r^3 \rho g, \quad (5)$$

где ρ – плотность материала шара; g – ускорение свободного падения. Скорость свободно падающего в жидкости шара возрастает до момента, когда сила тяжести уравнивается силой Архимеда и силой сопротивления. Затем шар движется равномерно. Условие равномерного движения шара имеет вид

$$(4/3)\pi r^3 (\rho - \rho_0) g - 6\pi \eta r V = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что при равномерном падении шара в жидкости время t движения шара связано с высотой его падения h формулой $h = Vt$, из (6) получаем формулу для расчета коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{2r^2 (\rho - \rho_0) g t}{9h}. \quad (7)$$

ЗАДАНИЯ

1. Бросая стальные шарики известного диаметра в первую жидкость (глицерин), измерьте время их падения на участке равномерного движения.

2. Вычислите η для глицерина по формуле (7) и оцените средне-квадратичную погрешность σ_η по формуле для прямых измерений. (Опыт проделайте не менее чем с четырьмя-пятью шарами.)

3. Повторите измерения и расчеты для второй жидкости.

4. Используя полученные значения η , оцените величину числа Рейнольдса по формуле (3) для каждой жидкости и использованных в эксперименте шаров.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая величина измеряется в работе? Дайте ее определение.

2. Поясните смысл коэффициента внутреннего трения η . Какова его размерность?

3. Объясните природу сил внутреннего трения и выведите формулу (1).

4. При каких условиях шар движется равномерно?

5. Используя табличные значения η , оцените, какой путь должен пройти шар, прежде чем его скорость станет постоянной.

6. Согласуются ли найденные значения η с табличными?

7. Выполняется ли условие (3) в вашей работе?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – Т. 1. – М.: Наука, любое издание.

2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высшая школа, любое издание.

3. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1981. – § 13, с. 50–52.

Работа № 7

ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Цель работы: проверка применимости распределения Больцмана к газу электронов, эмитированных из нагретого металлического катода, и определение температуры электронного газа.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В результате термоэлектронной эмиссии вблизи нагретого катода электронной лампы возникает «облако» электронов, или электронный газ с температурой T , равной температуре катода. При включении между катодом и анодом некоторой задерживающей разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_K = U$ электронный газ оказывается во внешнем силовом электрическом поле типа гравитационного поля притяжения.

В состоянии термодинамического равновесия в электронном газе при температуре T устанавливается распределение Больцмана по координатам микрочастиц:

$$dP(\vec{r}) = \frac{n(\vec{r})}{N} d^3\vec{r} = A e^{-\frac{W(\vec{r})}{k_B T}} d^3\vec{r} = A e^{-\frac{q\varphi(\vec{r})}{k_B T}} d^3\vec{r}. \quad (1)$$

Здесь $dP(\vec{r})$ есть вероятность найти электрон в объеме $d^3\vec{r}$ в окрестности точки с радиусом-вектором \vec{r} ; N – полное число электронов в газе; A – нормировочная постоянная; $n(\vec{r})$ – концентрация электронов и $W(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$ – потенциальная энергия электрона с зарядом q во внешнем поле в точке с радиусом-вектором \vec{r} ; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Поясним, как такого рода распределение частиц макросистемы по координатам возникает. Рассмотрим макросистему N частиц в объеме V при температуре T . В отсутствие силового поля вероятность найти частицу в объеме $\Delta V = d^3\vec{r}$ в окрестности точки \vec{r} дается выражением

$$dP(\vec{r}) = \frac{d^3\vec{r}}{V} = \frac{nd^3\vec{r}}{nV} = \frac{nd^3\vec{r}}{N} = \text{const}, \quad n(\vec{r}) = \frac{N}{V} = n = \text{const} \quad (2)$$

и не зависит от координат! В присутствии силового поля ($m\vec{g} \neq 0$, $q\vec{E} \neq 0$) вероятность (2) из-за действия силового поля становится зависимой от местоположения частицы, т. е.

$$dP(\vec{r}) = \frac{n(\vec{r})d^3\vec{r}}{N} = \frac{n(\vec{r})}{N} d^3\vec{r} \neq \text{const}. \quad (3)$$

Покажем, как получается зависимость $n(\vec{r})$ в случае газа микрочастиц в однородном потенциальном силовом поле тяжести с потенциальной энергией микрочастицы $W(z) = mgz$. Для этого рассмотрим элемент объема $\Delta V = \Delta z \cdot \Delta S$ в газе микрочастиц на высоте z . Из условия равновесия этого элемента объема получаем соотношение

$$(p(z + \Delta z) - p(z))\Delta S \approx \frac{dp(z)}{dz} \Delta z \cdot \Delta S = -mgn(z)\Delta z \cdot \Delta S, \quad (4)$$

где $p(z)$ – давление газа на высоте z . Из уравнения Менделеева–Клапейрона $p(z) = n(z)k_B T$, примененного локально для газа в состоянии термодинамического равновесия на высоте z , выводим, подставляя давление $p(z)$ в (4), дифференциальное уравнение $\frac{dn(z)}{n(z)} = -\frac{mg}{kT} dz$, интегрируя которое получаем так называемую барометрическую формулу для концентрации $n(z)$ или давления $p(z)$:

$$n(z) = n(0)e^{-mgz/k_B T} = n(0)e^{-W(z)/k_B T}, \quad (5)$$

или $p(z) = n(z)k_B T = p(0)e^{-W(z)/k_B T},$

где $W(z) = mgz$ – потенциальная энергия микрочастицы в однородном поле тяжести. Из распределения Больцмана типа (5), примененного в макросистеме частиц (нагретого электронного газа в электрическом силовом поле с потенциальной энергией $W(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$), получаем следующее выражение для концентрации электронов n вблизи анода:

$$n = n_0 e^{-\frac{q(\phi_A - \phi_K)}{k_B T}} = n_0 e^{-\frac{qU}{k_B T}}. \quad (6)$$

Концентрация n_0 электронов вблизи поверхности катода определяется ее температурой. В эксперименте сила тока накала сохраняется постоянной, поэтому постоянны температура катода и температура «электронного облака». Вследствие этого можно считать, что $n_0 = \text{const}$. Если внешний участок анодной цепи замкнуть, то в ней возникнет электрический ток.

С помощью выражения $I = qn\langle V \rangle S$ для силы установившегося анодного тока через концентрацию n , среднюю скорость $\langle V \rangle$ движения электронов и площадь поверхности S анода, учитывая зависимость (6), выводим зависимость анодного тока лампы от анодного напряжения U :

$$I = I_0 e^{-\frac{qU}{k_B T}}. \quad (7)$$

Логарифмируя последнее выражение, получим

$$\ln(I / I_0) = -\frac{qU}{k_B T} = +\frac{|q|U}{k_B T}. \quad (8)$$

Таким образом, если после обработки результатов эксперимента зависимость $\ln I$ от U окажется линейной, то это будет свидетельствовать о распределении электронов в постоянном электрическом поле в соответствии с законом Больцмана (1).

График зависимости (8) анодного тока от задерживающего напряжения $U = \phi_A - \phi_K < 0$ представлен на рис. 1. В эксперименте наблю-

дается отклонение от линейной зависимости при малых задерживающих потенциалах, которое можно объяснить влиянием пространственного заряда, образующегося вблизи катода.

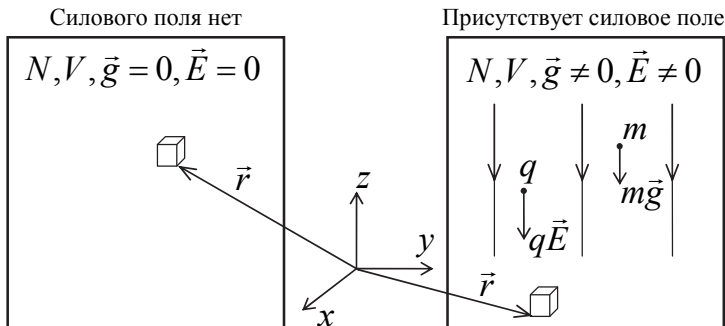


Рис. 1

Температуру катода можно в соответствии с формулой (8) определить по угловому коэффициенту прямолинейного участка графика (рис. 2), а именно

$$T = \frac{|q|}{k_B} \frac{\Delta U}{\Delta(\ln I)} = \frac{|q|}{k_B} \frac{U_1 - U_2}{\ln I_1 - \ln I_2} = \frac{|q|}{k_B} \frac{U_1 - U_2}{\ln(I_1 / I_2)} = \frac{|q|}{k_B} \frac{(|U_2| - |U_1|)}{\ln(I_1 / I_2)}. \quad (9)$$

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Схема установки показана на рис. 3. В ней используется электровакуумный диод с катодом и анодом цилиндрической формы. Анодный ток измеряется микроамперметром, а напряжение на аноде – вольтметром. При этом нужно учитывать падение напряжения $U_A = IR$ на амперметре:

$$U = U_I - IR. \quad (10)$$

Здесь U – напряжение между анодом и катодом; U_I – напряжение, показываемое вольтметром; I – анодный ток; R – внутреннее сопротивление микроамперметра.

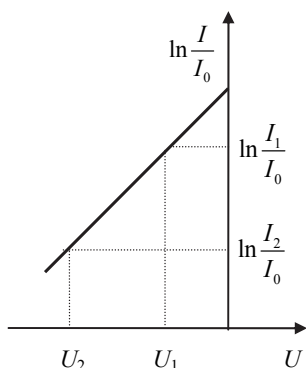


Рис. 2

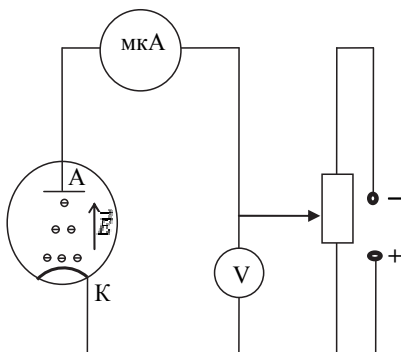


Рис. 3

Изменяя напряжение на аноде и измеряя ток, можно построить график экспериментальной зависимости $\ln I$ от U (рис. 2) и по нему определить температуру электронного газа.

ЗАДАНИЕ

1. Меняя анодное напряжение от -1.2 В до 0 В через 0.05 В, измерьте соответствующие значения анодного тока.
2. Постройте зависимость $\ln I$ от U , где U вычислите по формуле (10).
3. Вычислите и отложите на графике значения погрешностей σ_U и $\sigma_{\ln I}$.
4. Определите по графику, используя формулу (9) (по разнесенным друг от друга двум точкам, например, соответствующим $U_1 = -1,15$ В и $U_2 = -0,05$ В), температуру электронов.
5. Результаты проведенных измерений и вычислений в лабораторной работе занесите в таблицу.

U_I , В	I , А	$U = U_I - IR$, В	$\ln I$	T , К
-1.2				
-1.15		$U_1 =$	$\ln I_1 =$	
-1.10				

Окончание таблицы

U_I , В	I , А	$U = U_I - IR$, В	$\ln I$	T , К
...	...			
-0.05		$U_2 =$	$\ln I_2 =$	
0				

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое распределение Больцмана? Получите барометрическую формулу $n(z)$ или $p(z)$ (5).
2. Используя (1), вычисляя отношение концентраций электронов вблизи анода и катода, получите формулу (6) для концентрации электронов вблизи поверхности анода.
3. Получите зависимость анодного тока (7) от задерживающего напряжения.
4. В каких координатах нужно строить график зависимости анодного тока от задерживающего напряжения? Почему?
5. Как по графику определить температуру электронов?
6. Получилась ли ожидаемая зависимость анодного тока от задерживающего напряжения?
7. Как соотносятся температуры электронного газа в электронной лампе и молекул воздуха при нормальных условиях? Сравните средние скорости теплового движения электронов и молекул воздуха.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, т. 1, любое издание.
2. Электричество и магнетизм. Физический практикум / под ред. В.И. Ивероновой. – М.: Наука, 1968. – С. 72–78.

**Дубровский Владислав Георгиевич
Корилович Александр Антонович
Суханов Игорь Иванович
Формусатик Игорь Борисович**

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Кинит*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 14.05.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.
Уч.-изд. л. 5,58. Печ. л. 6,0. Изд. № 19. Заказ № 872. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20