MATEMÁTICAS DISCRETAS
GUÍA DE TRABAJO No 1
TEMA: ÁLGEBRAS BOOLEANAS Y CIRCUITOS LÓGICOS
Profesor: Walter G. Magaña S.

CAPITULO 1

ALGEBRAS BOOLEANAS Y CIRCUITOS LÓGICOS

Objetivos:

1. Aplicar adecuadamente las propiedades del Álgebra Booleana en la estructuración y simplificación de circuitos lógicos.

2. Usar correctamente las compuertas lógicas en el diseño y elaboración de circuitos lógicos.

Las Algebras de Boole corresponden al área del conocimiento matemático sobre las cuales se sustentó el diseño y construcción de circuitos lógicos y digitales, que se constituyeron en el avance tecnológico revolucionario tanto para la ingeniería electrónica como para la ingeniería de sistemas o informática. En esta sección se inicia con los axiomas del Algebra de Boole, su aplicación a los circuitos de conmutación para finalizar con las compuertas lógicas, diseñando circuitos con ellas mediante el uso de las álgebras de Boole.

5.1. AXIOMAS DEL ALGEBRA DE BOOLE

Sea B un conjunto en el cual se han definido dos operaciones binarias, + y * (En algunos casos se definen en términos de $\vee$ y $\wedge$ respectivamente), y una operación unaria, denotada '. Entonces a la terna $\langle$B, +, *$\rangle$ se le denomina **Algebra Booleana** si se cumplen los siguientes axiomas o leyes:

B1) Leyes Conmutativas. Las dos operaciones son conmutativas:
Para todos los elementos x, $y \in$ B, se cumple que:
1A) $x + y = y + x$ **1B)** $x * y = y * x$

B2) Leyes Distributivas. Cada operación es distributiva con respecto a la otra:
Para todos los elementos x, y, $z \in$ B, se cumple que:
2A) $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$ **2B)** $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

B3) Leyes Modulativas. Cada operación binaria es modulativa y los módulos son diferentes:
Para todo $x \in$ B, existen dos elementos diferentes 0 y 1 en B tales que:
3A) $x + 0 = 0 + x = x$ **3B)** $x * 1 = 1 * x = x$

B4) Leyes de Complemento.
Para todo elemento $x \in$ B existe un elemento $x' \in$ B tal que:
4A) $x + x' = 1$ **4B)** $x * x' = 0$

5.1.1. Ejemplos de estructuras booleanas

Ejemplo 1. La siguiente es una de las Álgebras Booleanas con aplicación directa a los circuitos de distribución. Para futuras referencias se denominará **Álgebra Binaria de Boole**.
Sea el conjunto B = {0, 1} en el cual se definen las operaciones + y * de acuerdo a las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Supongamos que los complementos se definen por $1' \equiv 0$ y $0' \equiv 1$.
(Observe la relación de estas tablas con la disyunción ($\vee$) y la conjunción ($\wedge$) respectivamente, y la relación de los complementos con la negación de una proposición)
Demostrar que $\langle$B, +, *, '$\rangle$ es un álgebra booleana, mostrando que se satisfacen los axiomas B1 a B4.

Solución:

B1) Las leyes conmutativas de las operaciones + y * se evidencian en la simetría de la matriz de resultados en ambas tablas.

B2) Establecer la distributividad de cada una de las operaciones con respecto a la otra exige calcular el resultado de ocho combinaciones posibles en cada caso.
Para **2A)** $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$:

				A			B
x	y	z	$y * z$	$x + (y * z)$	$x + y$	$x + z$	$(x + y) * (x + z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Observe que las columnas A y B son iguales

Para la forma **2B)** $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

				A			B
x	y	z	$y + z$	$x * (y + z)$	$x * y$	$x * z$	$(x * y) + (x * z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Observe que las columnas A y B son iguales

B3) En la tabla de la operación + es fácil observar que 0 es el módulo de esta operación y en la tabla de * análogamente se puede ver que 1 es el módulo; en efecto:

$0 + 0 = 0$; $1 + 0 = 1$ y $0 * 1 = 0$; $1 * 1 = 1$.

B4) Se han definido 1' = 0 y 0' = 1, de esta manera se puede observar que para cada elemento de B existe un complemento tal que:

$0 + 0' = 0 + 1 = 1$ y $1 + 1' = 1 + 0 = 1$
$0 * 0' = 0 * 1 = 0$ y $1 * 1' = 1 * 0 = 0$

De esta manera se ha demostrado que $\langle B, +, *, ' \rangle$ es una Algebra Booleana.

Ejemplo 2. Sea la familia $P(U)$ de conjuntos de U, demostrar que $\langle P(U), \cup, \cap, ' \rangle$ es un Álgebra de Boole para cada conjunto U.
Sugerencia: $B \equiv P(U)$, $+ \equiv \cup$, $* \equiv \cap$, $0 \equiv \phi$ y $1 \equiv U$

Solución: A continuación se verifican los cuatro axiomas de las álgebras booleanas:

B1) Las dos operaciones unión ($\cup$) e intersección ($\cap$) son conmutativas para todo A, B $\in P(U)$:

1A) $A \cup B = B \cup A$ **1B)** $A \cap B = B \cap A$

B2) La unión es distributiva con respecto a la intersección para todos los conjuntos A, B, C $\in P(U)$, y recíprocamente:

2A) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **2B)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

B3) Para todo $A \in P(U)$ existen $\phi \in P(U)$ y $U \in P(U)$ tal que

3A) $A \cup \phi = A$ **3A)** $A \cap U = A$

B4) Para cada $A \in P(U)$, existe el complemento de A, esto es $A' = U - A$, con $A' \in P(U)$, tal que satisface las siguientes relaciones:

4A) $A \cup A' = U$ **4B)** $A \cap A' = \phi$

Así queda demostrado que $\langle P(U), \cup, \cap, ' \rangle$ es un Álgebra de Boole.

Ejemplo 3. Sean $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, los divisores enteros positivos de 15. Se definen +, * y ' de la siguiente manera:

$x + y \equiv$ MCM (x, y): mínimo común múltiplo de x y y;
$x * y \equiv$ MCD (x, y): máximo común divisor de x y y, y
$x' \equiv 15/x$.

Demuestre que esta estructura así definida $\langle D_{15}, +, *, ' \rangle$ es un Álgebra Booleana.

Solución: Verifiquemos los axiomas del álgebra booleana:
B1) La conmutatividad de las operaciones se evidencia, pues $x + y = y + x$, equivale a MCM (x, y) = MCM (y, x) y $x * y = y * x$, significa que MCD (x, y) = MCD (y, x). Es decir, no importa el orden al obtener los resultados de un par de elementos del conjunto D_{15} para el MCM y el MCD. Esto se muestra en la simetría de la matriz de resultados en cada una de las siguientes tablas:

+	1	3	5	15
1	1	3	5	15

*	1	3	5	15
1	1	1	1	1

3	3	3	15	15
5	5	15	5	15
15	15	15	15	15

3	1	3	1	3
5	1	1	5	5
15	1	3	5	15

B2) Examinemos la distributividad de una operación respecto a la otra:

2A) Para la forma $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$ es equivalente a tener

MCM $[x, (y * z)]$ = MCD $[(x + y), (x + z)]$

MCM $[x$, MCD $(y, z)]$ = MCD [MCM (x, y), MCM $(x, z)]$

veamos algunos ejemplos que se condensan en la siguiente tabla:

				A			B
x	y	z	$y * z$	$x + (y * z)$	$x + y$	$x + z$	$(x + y) * (x + z)$
			MCD (y, z)	MCM $[x$, MCD $(y, z)]$	MCM (x, y)	MCM (x, z)	MCD [MCM (x, y), MCM $(x, z)]$
1	3	5	1	1	3	5	1
3	5	15	5	15	15	15	15
5	15	3	3	15	15	15	15
15	1	3	1	15	15	15	15

Observe que las columnas A y B son iguales

2B) Para la forma $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ es equivalente a tener

MCD $[x, (y + z)]$ = MCM $[(x * y), (x * z)]$

MCD $[x$, MCM$(y, z)]$ = MCM [MCD (x, y), MCD $(x, z)]$

veamos algunos casos en la siguiente tabla:

				A			B
x	y	z	$y + z$	$x * (y + z)$	$x * y$	$x * z$	$(x * y) + (x * z)$
			MCM (y, z)	MCD $[x$, MCM $(y, z)]$	MCD (x, y)	MCD (x, z)	MCM [MCD (x, y), MCD $(x, z)]$
1	3	5	15	1	1	1	1
3	5	3	15	3	1	3	3
5	5	1	5	5	5	1	5
15	1	3	3	3	1	3	3

Observe que las columnas A y B son iguales

Por lo tanto, cada operación es distributiva con respecto a la otra.

B3) Sean $0 \equiv 1$, $1 \in D_{15}$ es el módulo de +, y $1 \equiv 15$, $15 \in D_{15}$ es el módulo de *.

3A) Así $x + 0 = 0 + x = x$; esto es, para todo $x \in D_{15}$,

MCM $(x, 1)$ = MCM $(1, x) = x$.

3B) $x * 1 = 1 * x = x$, es decir, para todo $x \in D_{15}$,

MCD $(x, 15)$ = MCD $(15, x) = x$.

Por lo tanto, las dos operaciones son modulativas.

B4) Para cada $x \in D_{15}$ existe $x' \in D_{15}$ tal que $x + x' = 1$ y $x * x' = 0$. Esto es:

4A) Para $x + x' \equiv$ MCM (x, x') = MCM $(x, 15/x) = 15$;

veamos un caso, $5 + 5' \equiv$ MCM $(5, 5')$ = MCM $(5, 3) = 15$.

4B) Para $x * x' \equiv \text{MCD}(x, x') = \text{MCD}(x, 15/x) = 1$,
un caso es $3 * 3' \equiv \text{MCD}(3, 3') = \text{MCD}(3, 15/3) = \text{MCD}(3, 5) = 1$.

Esto demuestra que D_{15} con las operaciones MCM y MCD es un Algebra Booleana.

5.2. RESULTADOS QUE SE DERIVAN DE LOS AXIOMAS DE LAS ALGEBRAS DE BOOLE

5.2.1. EXPRESIONES BOOLEANAS.

Definición. Sea $B = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ un conjunto de n símbolos o variables. Una **expresión booleana** $E(x_1, x_2, \ldots x_n)$ o un **polinomio booleano** en $x_1, x_2, \ldots x_n$ se define recursivamente como sigue:

1. Los símbolos o variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ son expresiones booleanas.
2. Los símbolos 0 y 1 son expresiones booleanas.
3. Si $E_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $E_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$ son expresiones booleanas en $x_1, x_2, \ldots x_n$ entonces también los son $E_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + E_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $E_1(x_1, x_2, \ldots x_n) * E_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$, y $[E_1(x_1, x_2, \ldots x_n)]'$.

Observación: De acuerdo al uso en el álgebra clásica, se abrevia $x * y$ como xy. Igualmente se asume que $*$ se evalúa antes que +; esto permite en algunos casos eliminar ciertos paréntesis. Por ejemplo, se puede escribir $xy + z$ en lugar de $(x * y) + z$.

B5) TEOREMA 1. Leyes de Idempotencia. Todo elemento de un Álgebra Booleana es idempotente. Para todo elemento $x \in B$; se cumple que:

5A) $x + x = x$ y **5B)** $x * x = x$.

***Demostración*:**

Demostración de **5A**:

$x + x = (x + x) * 1$	B3 (Ley modulativa)
$= (x + x) * (x + x')$	B4 (Ley de complemento)
$= x + (x * x')$	B2 (Ley distributiva)
$= x + 0$	B4 (Ley de complemento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

Demostración de **5B**:

$x * x = (x * x) + 0$	B3 (Ley modulativa)
$= (x * x) + (x * x')$	B4 (Ley de complemento)
$= x * (x + x')$	B2 (Ley distributiva)

$= x * 1$	B4 (Ley de complemento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

DEFINICION DE DUAL. El dual de una expresión E de un Álgebra Booleana, es la expresión que resulta a partir de E intercambiando + por * y 0 por 1 y recíprocamente, en cada operación de estos símbolos.

Ejemplo ilustrativo:

1. Sea la expresión $E_1 = x + y * (z + 1)$,
   el dual es la expresión $E_1^d = x * (y + z * 0)$.
2. Dada la ecuación $E_2 = x + xz' = x$,
   su dual es la ecuación $E_2^d = x * (x + z') = x$

PRINCIPIO DE LA DUALIDAD. Si el teorema T es deducible de los axiomas de un Algebra de Boole, entonces el dual de T, que se denota por T^d, es también deducible y para deducirlo basta cambiar cada expresión surgida en la demostración de T, por su dual.

Observe la demostración del Teorema 1, realizada anteriormente, la demostración de **5B** se obtiene a partir de **5A**, realizando los cambios respectivos previstos + por * y 1 por 0, y recíprocamente. **5B** es el T^d de **5A**.

B6) TEOREMA 2. Leyes de acotamiento. Para todo $x \in$ B, se verifica que:

6A) $x + 1 = 1$ y **6B)** $x * 0 = 0$.

***Demostración*:**

Demostración de **6A**:

$x + 1 = 1 * (x + 1)$	B3 (Ley modulativa)
$= (x + x') * (x + 1)$	B4 (Ley de complemento)
$= x + (x' * 1)$	B2 (Ley distributiva)
$= x + x'$	B3 (Ley modulativa)
$= 1$	B4 (Ley de complemento)

La demostración de **6B** $x * 0 = 0$ se omite, ya que por el principio de la dualidad se puede deducir de manera análoga tomando el dual en cada paso de la demostración de **6A** (el lector puede demostrarlo).

B7) TEOREMA 3. Leyes de absorción. Para todo $x, y \in$ B, se verifica que:

7A) $x + (x * y) = x$ y **7B)** $x * (x + y) = x$.

***Demostración*:**

Demostración de **7A**:

$x + (x * y) = x * 1 + (x * y)$	B3 (Ley modulativa)
$= x * (1 + y)$	B2 (Ley distributiva)
$= x * (y + 1)$	B1 (Ley conmutativa)

$= x * 1$	B6 (Teorema 2: Ley de acotamiento)
$= x$	B3 (Ley modulativa)

La parte **7B** se da por demostrada por el principio del dualismo (el lector puede demostrarlo)

B8) TEOREMA 4. Unicidad del complemento. Para cada $x \in$ B, siendo B un Algebra de Boole, el complemento de x, denotado por x', es único.

***Demostración*:** La demostración se hará por contradicción.
Supongamos que $x \in$ B tiene dos complementos diferentes y y z, es decir, con $y \neq z$, entonces satisfacen las condiciones del axioma **B4**: por **4A)** $x + y = 1$ (2) y $x + z = 1$ (3), y por **4B)** $x * y = 0$ (4) y $x * z = 0$ (1)

$y = y + 0$	B3
$y = y + (x * z)$	Sustitución de (1) en 0
$y = (y + x) * (y + z)$	B2
$= (x + y) * (y + z)$	B1
$= 1 * (y + z)$	Sustitución de (2)
$= (x + z) * (y + z)$	Sustitución de (3)
$= (x * y) + z$	B2
$= 0 + z$	Sustitución de (4)
$= z$	B3

Entonces $y = z$. Lo cual es una contradicción (contradice la condición de la hipótesis $y \neq z$).

B9) TEOREMA 5. Leyes de D'Morgan. Para todo $x, y \in$ B, se verifica que:
8A) $(x + y)' = x' * y'$ y **8B)** $(x * y)' = x' + y'$.

***Demostración*:**
Demostración de **8A)**: Mostraremos que $x' * y'$ satisface las condiciones que caracterizan el complemento de $(x + y)$, que es único.

1º) $(x + y) + (x' * y') = (x + y + x') * (x + y + y')$	B2
$= (x + x' + y) * (x + y + y')$	B1
$= (1 + y) * (x + 1)$	B4
$= 1 * 1$	B6: Teorema 2
$= 1$	B3

2º) $(x + y) * (x' * y') = x * (x' * y') + y * (x' * y')$	B2
$= (x * x')\, y' + (y * y')\, x'$	B1 y Propiedad asociativa
$= 0 * y' + 0 * x'$	B4
$= 0 + 0$	B6: Teorema 2
$= 0$	B3

En conclusión $(x + y)' = x' * y'$.

Por el principio del dualismo **8B** se da por demostrado (el lector puede comprobarlo).

B10) TEOREMA 6. Leyes asociativas. Para todo $x, y, z \in$ B, se verifica que:

9A) $(x + y) + z = x + (y + z)$ y **9B**) $(x * y) * z = x * (y * z)$

***Demostración*:**

Demostraremos **9B)**: Sea L = $(x * y) * z$ y R = $x * (y * z)$; entonces tenemos que demostrar que L = R. Primero demostraremos que x + L = x + R.

$$
\begin{aligned}
x + \mathrm{L} &= x + [(x * y) * z] \\
&= [x + (x * y)] * (x + z) \\
&= x * (x + x) \\
&= x \\
x + \mathrm{R} &= x + [x * (y * z)] \\
&= (x + x) * (x + (y * z)] \\
&= x * [x + (y * z) \\
&= x
\end{aligned}
$$

Así, x + L = x + R.

Ahora demostremos que x' + L = x' + R.

$$
\begin{aligned}
x' + \mathrm{L} &= x' + [(x * y) * z] \\
&= [x' + (x * y) * (x' + z) \\
&= [(x' + x) * (x' + y') * (x' + z)] \\
&=[1 * (x' + y) * (x' + z) \\
&=(x' + y) * (x' + z) \\
&= x' + (y * z) \\
x' + \mathrm{R} &= x' + [x * (y * z)] \\
&= (x' + x) * [x' + (y * z)] \\
&= 1 * [x' + (y * z)] \\
&= x' + (y * z)
\end{aligned}
$$

De donde x' + L = x' + R. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \mathrm{L} + 0 = \mathrm{L} + (x * x') \\
&= (\mathrm{L} + x) * (\mathrm{L} + x') \\
&= (x + \mathrm{L}) * (x' + \mathrm{L}) \\
&= (x + \mathrm{R}) * (x' + \mathrm{R}) \\
&= (\mathrm{R} + x) * (\mathrm{R} + x') \\
&= \mathrm{R} + (x * x') = \mathrm{R} + 0 = \mathrm{R}
\end{aligned}
$$

Por el principio de dualismo **9A** se da por demostrado.

B11) TEOREMA 7. Ley de involución. Para cada $x \in$ B, $(x')' = x$.

B12) TEOREMA 8. Leyes para el 0 y el 1. $0' = 1$ y $1' = 0$.

EJERCICIOS 5.1

1. Demuestre que $\langle B, +, *, ' \rangle$ es un Álgebra Booleana, donde B = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} es el conjunto de divisores enteros positivos de 30, en el que se definen las operaciones $x + y \equiv \text{MCM}(x, y)$, $x\,y \equiv \text{MCD}(x, y)$ y $x' \equiv 30/x$.

2. Sea B = {1, 2, 4, 8} el conjunto de divisores enteros positivos de 8, en el cual se definen las operaciones + y * como en el ejercicio 1 y $x' \equiv 8/x$. Demuestre que $\langle B, +, *, ' \rangle$ no es un Álgebra Booleana.

3. Escriba el dual de cada una de las siguientes expresiones:

3.1. $(x + y)(x + 1) = x + xy + y$.
3.2. $(x' + y')' = xy$.
3.3. Si $x + y = x + z$ y $x' + y = x' + z$, entonces $y = z$.
3.4. $xy' = 0$ si y sólo si $xy = x$.
3.5. $x + x(y + 1) = x$.
3.6. Si $x + y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.
3.7. $a\,(a' + b) = ab$.
3.8. $(x + 1)\,(x + 0) = x$.
3.9. $(x + y)\,(y + z) = xz + y$.
3.10. $b\,\{a + [a'\,(b + b')]\} = b$.

4. Verifique cada uno de los enunciados del ejercicio 3.

5. Verifique las siguientes ecuaciones:

5.1. $xy' = (x' + y)'$
5.2. $x\,(yz)' = xy' + xz'$.
5.3. $(x + y)\,(z + w) = zx + zy + wx + wy$.

6. Pruebe o dé un contraejemplo, si las ecuaciones siguientes son o no verdaderas:

6.1. $x'y' = x + y$
6.2. $x'\,(yz + xyz) = yz$.
6.3. $(x'y + xz')' = (x + y')\,(x + z')$
6.4. $(x + y)\,(z' + w)'\,(zy') = 0$.

5.3. CIRCUITOS LOGICOS

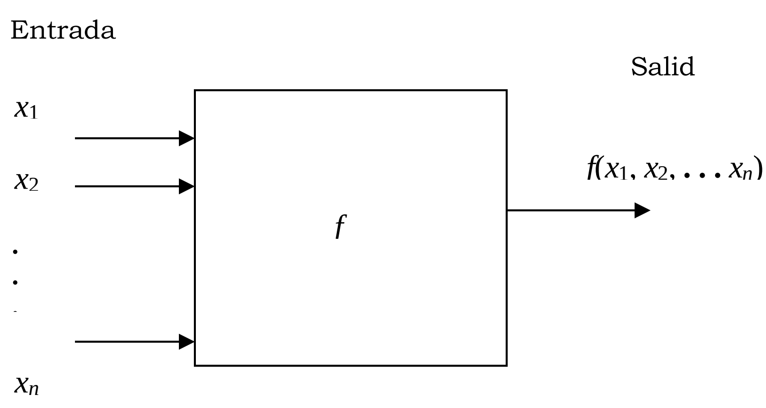
5.3.1. FUNCIONES DEL ÁLGEBRA BOOLEANA BINARIA

Sea $B = \{0, 1\}$ y sea $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \;/\; x_i \in B$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$, entonces se definen funciones f de B^n en B, que se denotan $f : B^n \to B$, como funciones en las que para cualquier n-upla $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in B^n$, $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es 1 o 0. Estas funciones se pueden considerar como funciones de n "variables", donde cada una de ellas toma sólo los valores 1 o 0. Es frecuente enlistarlas en tablas dando cada n-upla posible $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y el valor correspondiente de la función f.

Ejemplo ilustrativo: La tabla que se muestra a continuación representa una función f particular de tres variables; esto es, $f : B^3 \to B$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

El número de combinaciones posibles de ceros y unos de las n-upla $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es de 2^n, donde n es el número de variables diferentes. A menudo estas tablas se denominan **tablas de verdad** de f, debido a la analogía con la lógica proposicional.



La importancia de estas funciones es que pueden usarse para representar los requerimientos de salida de un circuito para todos los posibles valores de las entradas. Por lo tanto, cada x_i representa una entrada al circuito capaz de transportar dos voltajes indicadores (un voltaje para el 0 y otro diferente para el 1). La función f representa la respuesta de salida en todos los casos. Tales requerimientos se presentan al diseñar los pasos de todas las combinaciones y secuencias de los circuitos para los computadores. Cabe anotar que la especificación de una función $f : B^n \rightarrow B$ es sólo una lista de los requerimientos del circuito. Esto no nos da indicación alguna de cómo estos requerimientos se satisfacen.

5.3.2. CIRCUITOS DE CONMUTACION (O DE CONMUTADORES)

Un circuito eléctrico de interruptores normalmente contiene alguna fuente de energía (una pila o batería), un dispositivo de salida (por ejemplo una bombillo), y uno o más interruptores o "switches", todos ellos conectados por alambres. Sólo se considerarán los interruptores que permiten o impiden el paso de la corriente eléctrica que fluye por el circuito, y cuyo funcionamiento es de dos estados cerrado (encendido), on, y abierto (apagado), off.

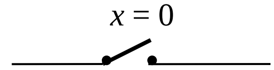
Cuando un interruptor x está en la posición cerrado (on) permite el paso de la corriente, se escribe $x = 1$, y cuando está en la posición abierto (off), no hay paso de corriente, se escribe $x = 0$.

INTERRUPTOR CERRADO (ON)

$x = 1$

INTERRUPTOR ABIERTO (OFF)

$x = 0$



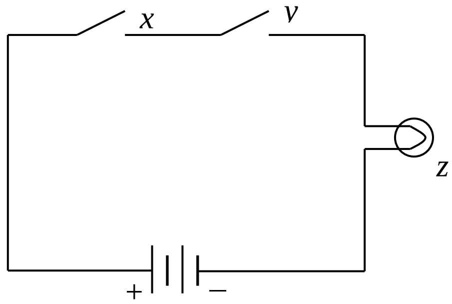
Existen dos formas básicas para interconectar interruptores: conexión en serie y conexión en paralelo.

5.3.3. CIRCUITO EN SERIE (CIRCUITO AND).

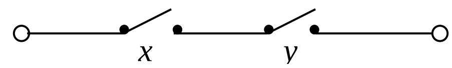
Se caracteriza porque hay paso de corriente a z si, y solo si, los dos interruptores x e y se encuentran cerrados. Es decir, la salida del circuito es 1 si, y solo si $x = 1$ y $y = 1$. Esta configuración se denota por $z = xy$. La tabla de conmutación que presenta las salidas del circuito en serie (AND) es:

x	y	$z = x\,y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Puesto que estamos interesados solamente en la posición de los interruptores, entonces usaremos la representación simplificada del circuito:



Circuito en serie



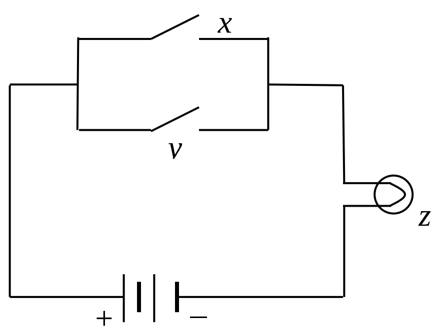
Circuito simplificado

5.3.4. CIRCUITO EN PARALELO (CIRCUITO OR).

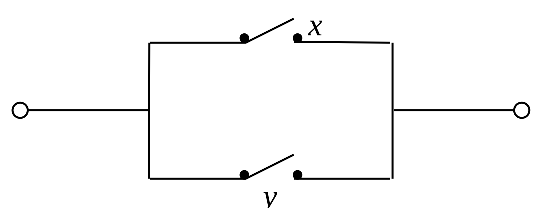
Se caracteriza porque hay paso de corriente a z si, y solo si uno de los interruptores del circuito, x o bien y, o ambos está(n) cerrado(s). Es decir, la salida del circuito es 1 si, y solo si $x = 1$ o $y = 1$, o ambos $x = y = 1$. Esta configuración se denota por $z = x + y$. La tabla de conmutación del circuito en paralelo es:

x	y	$z = x + y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Al igual que en el circuito en serie, usaremos la representación simplificada del circuito:



Circuito en paralelo

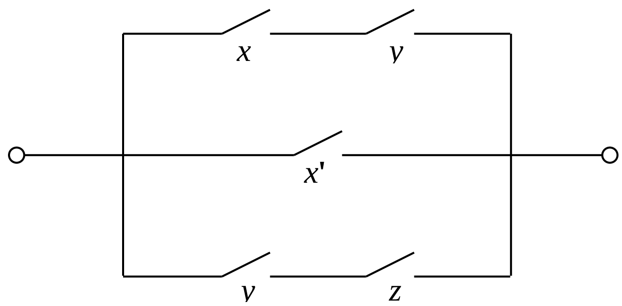


Circuito simplificado

Si en un circuito hay varios interruptores que coinciden en su estado (1 o 0) los designaremos con la misma variable. El símbolo x' (o $\bar{x}$) representa un interruptor que presenta el estado opuesto al que presenta un interruptor denotado por x, se denomina el **inversor de *x***. En un circuito junto con cualquier interruptor x podemos incluir cualquier interruptor x' que está abierto cuando x está cerrado, y está cerrado cuando x está abierto:

x	x'
1	0
0	1

Ejemplo 1: Determine una expresión de Boole para el siguiente circuito de interruptores y elabore su correspondiente tabla conmutadora



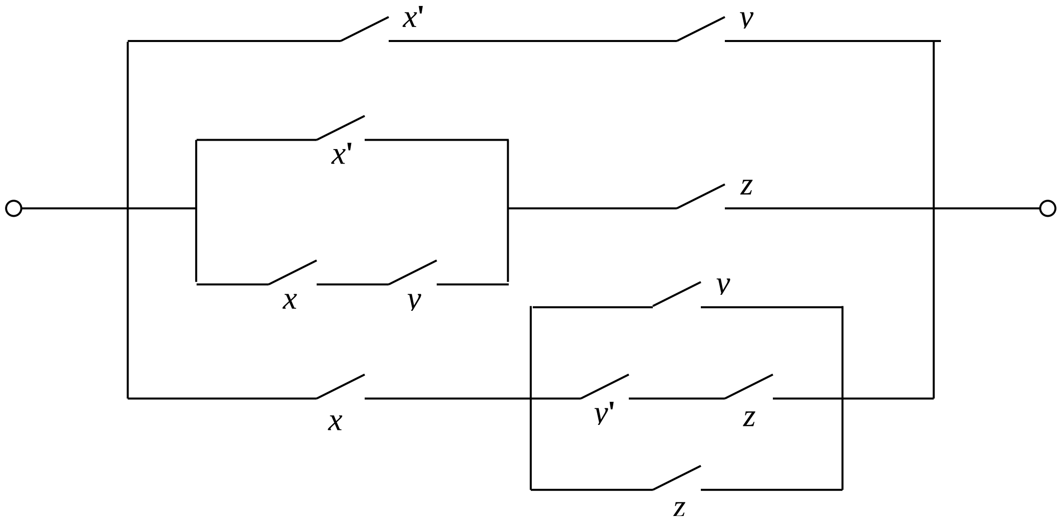
Solución: Se procede por niveles de arriba a abajo: 1) xy, 2) x', 3) yz.
Al final obtenemos la expresión: $xy + x' + yz$ que corresponde a la expresión de Boole del circuito, donde los niveles son de un circuito en paralelo.

La tabla conmutadora correspondiente es:

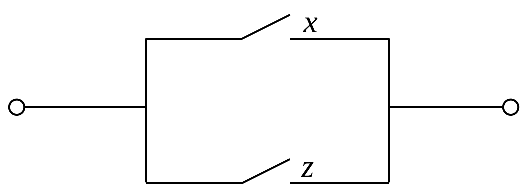
x	y	z	xy	x'	yz	$xy + x' + yz$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

Ejemplo 2: Determine una expresión booleana para el circuito de la figura y halle un circuito equivalente “más sencillo”.

Solución: Procediendo por niveles de arriba hacia abajo obtenemos la expresión $x'y + (x' + xy)\, z + x\,(y + y'z + z)$.



Simplificando la expresión por las leyes del álgebra de Boole se obtiene la expresión $y + z$ (verifíquelo). El circuito que se obtiene realiza las mismas funciones que el anterior:

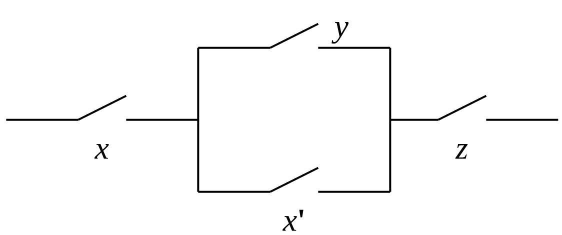


Ejercicio en clase: Represente la función $f(a, b, c, d) = a\,[(b + d') + c\,(a + d + c')]b$ como un circuito conmutador y elabore la correspondiente tabla conmutadora.

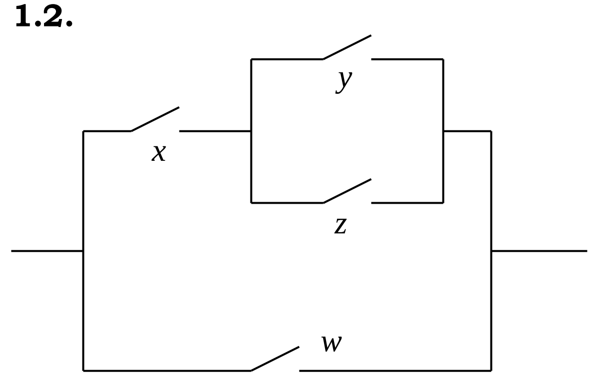
EJERCICIOS 5.2

1. Exprese cada circuito en forma simbólica y construya su correspondiente tabla conmutadora:

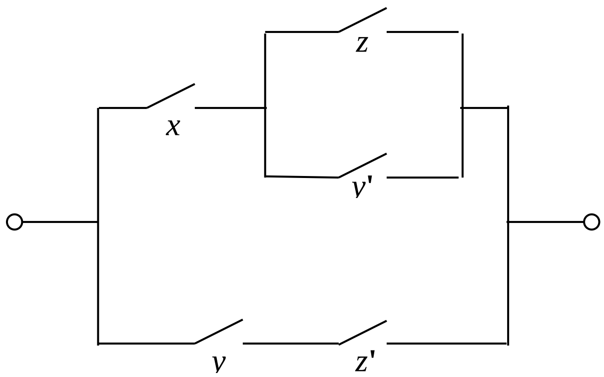
1.1.



1.2.



1.3.



2. Represente las expresiones de los siguientes ejercicios como circuitos conmutadores y escriba las correspondientes tablas conmutadoras:

2.1. $(x + y)\, x$

2.2. $x + (y'\, z)$

2.3. $(a'\, b) + (c\, a)$

2.4. $\{a\ [(b\, c') + (b'\, c)]\} + (a'\, b\, c)$

5.4. COMPUERTAS LOGICAS

En los sistemas digitales se utilizan, empaquetados como circuitos integrados, ciertos circuitos electrónicos llamados compuertas lógicas, denominados también dispositivos de estado sólido. En ellos no hay interruptores sino entradas al circuito, en forma de alto voltaje (1) y de bajo voltaje (0), esto es exactamente un bit de información, estos datos son procesados por el circuito para obtener una salida que depende de la combinación de las entradas, es decir un bit de salida, o sea, un 0 ó un 1.

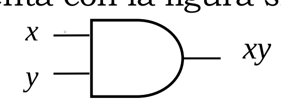
Los circuitos lógicos se construyen a partir de ciertas compuertas lógicas básicas, se comenzará estudiando tres tipos de compuertas: compuerta AND, compuerta OR y compuerta NOT (o inversor).

5.4.1. COMPUERTA AND.

Una compuerta AND acepta x y y como datos de entrada, en donde x y y son bits, y produce un dato de salida z, que se denota $z = xy$. El valor de z está determinado por la tabla de valor que aparece a continuación. Es decir, $z = xy = 1$ si, y solo si $x = 1$ y $y = 1$, 0 en otro caso.

Entrada		Salida
x	y	$z = xy$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Una compuerta AND se representa con la figura siguiente:

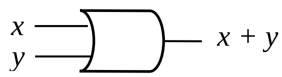


5.4.2. COMPUERTA OR.

Una compuerta OR acepta x y y como datos de entrada, en donde x y y son bits, y produce un dato de salida z, que se denota $z = x + y$. El valor de verdad de z está determinado por la tabla de valor que aparece a continuación; en donde $z = x + y = 1$ si, y solo si $x = 1$ o bien $y = 1$, 0 solo si $x = 0$ y $y = 0$.

Entrada		Salida
x	y	$z = x + y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Una compuerta OR se representa como se muestra en la figura:



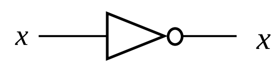
5.4.3. COMPUERTA NOT.

Una compuerta NOT (o inversor) acepta a x como dato de entrada (tiene solamente una entrada), en donde x es un bit, y produce un dato de salida que se denota por x' (o $\bar{x}$). El valor de salida x' es el opuesto (complemento a unos) del valor de entrada x; esto es, $x' = 1$ sí $x = 0$ y $x' = 0$ sí $x = 1$.

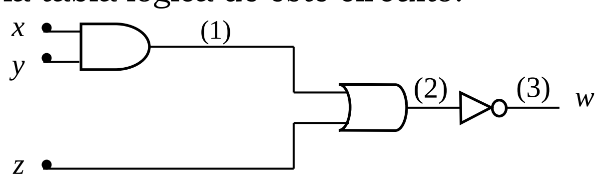
La tabla de verdad de la compuerta NOT es la siguiente:

Entrada	Salida
x	x'
1	0
0	1

Una compuerta NOT se representa como aparece en la figura siguiente:



Ejemplo 1. Determine la expresión booleana correspondiente al circuito lógico de la figura y encuentre la tabla lógica de este circuito:



Solución:

Se han enumerado las salidas de cada compuerta para indicar el seguimiento:

1) Se aplica AND a x y y y se obtiene xy.

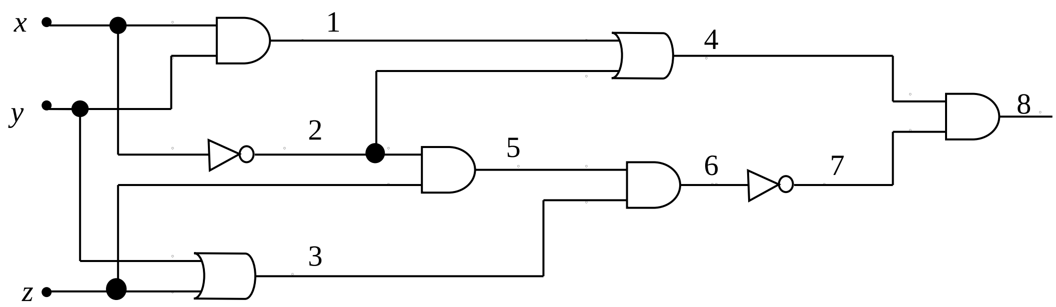
2) Luego al aplicar OR a (xy) y z se obtiene $(xy) + z$.

3) Entonces el dato de salida se escribe como $[(xy) + z]'$.

La tabla de verdad es la siguiente:

Entradas				Salida	
x	y	z	xy	$(xy) + z$	$[(xy) + z]'$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1

Ejercicio en clase. Determine la expresión booleana correspondiente al circuito lógico de la figura: (*Sugerencia*: proceda por niveles de acuerdo a la numeración de las salidas en cada compuerta)



5.4.4. OTRAS COMPUERTAS LOGICAS

Las tres compuertas fundamentales anteriormente presentadas (AND, OR y NOT) son suficientes para describir cualquier ecuación booleana. Toda función lógica puede expresarse con la combinación de estas tres compuertas. Sin embargo, se utilizan otras cuatro compuertas lógicas como simplificación de combinaciones muy usuales de las fundamentales: NAND, NOR, XOR y XNOR.

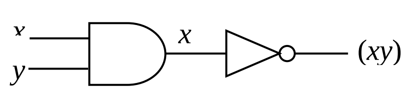
COMPUERTA NAND.

La compuerta NAND (NOT AND), denominada también **operación de Sheffer**, se obtiene cuando a la salida de una compuerta AND se conecta un inversor (NOT); es decir, es la negación de una compuerta AND y acepta x y y como datos de entrada, en donde x y y son bits, y produce un dato de salida z, que se denota como $z = (xy)'$.

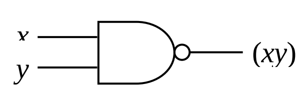
La tabla de verdad de la compuerta NAND es la siguiente:

Entrada			Salida
		AND	NAND
x	y	xy	$z = (xy)'$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Una compuerta NAND se representa con la figura siguiente:



Compuerta NAND



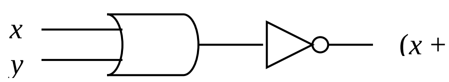
Compuerta NAND simplificada

COMPUERTA NOR.

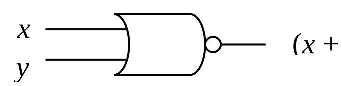
La compuerta NOR (NOT OR), denominada también **operación de Pierce**, se consigue cuando a la salida de una compuerta OR se conecta un inversor (NOT); es decir, es la negación de una compuerta OR y acepta x y y como datos de entrada, en donde x y y son bits, y produce un dato de salida z, que se denota como $z = (x + y)'$.
La tabla de verdad de la compuerta NOR es la siguiente:

Entrada			Salida
		OR	NOR
x	y	$x + y$	$z = (x + y)'$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Una compuerta NOR se representa con la figura siguiente:



Compuerta NOR



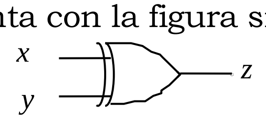
Compuerta NOR simplificada

COMPUERTA XOR (OR Exclusiva).
La compuerta XOR, corresponde a la operación lógica disyunción exclusiva. Por lo tanto, la salida es 1 si, y sólo si, exactamente una de las entradas es 1. Realiza la función lógica de salida de la forma $z = xy' + x'y$. Para denotar esta disyunción exclusiva o suma exclusiva se emplea el símbolo $\oplus$; y la función se escribe simplificadamente como $x \oplus y$, así: $f(x, y) = x \oplus y = xy' + x'y$.

La tabla de verdad de la compuerta XOR es la siguiente:

Entrada				Salida
				XOR
x	y	xy'	$x'y.$	$z = x \oplus y$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

Una compuerta XOR se representa con la figura siguiente:



COMPUERTA XNOR.

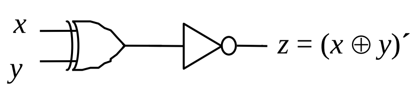
La compuerta XNOR, se forma conectando a la salida de la compuerta XOR un inversor. Por lo tanto, la función de salida es $z = f(x, y) = (x \oplus y)'$.

La tabla de verdad de la compuerta XNOR es la siguiente:

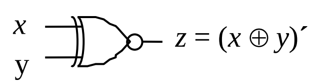
Entrada			Salida
		XOR	XNOR
x	y	$x \oplus y$	$z = (x \oplus y)'$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Observe que la tabla de verdad de la compuerta XNOR es exactamente igual a la tabla de verdad de la equivalencia (o bicondicional); por esta razón, esta compuerta recibe el nombre de **comparador**.

Una compuerta XNOR se representa con la figura siguiente:



Compuerta XNOR



Compuerta XNOR simplificada

Si aplicamos las leyes del álgebra booleana a la expresión $(x \oplus y)'$ se obtiene el siguiente resultado:

$$
\begin{array}{rll}
(x \oplus y)' & = (xy' + x'y)' & \text{Definición de la compuerta XOR} \\
 & = (xy')'\,(x'y)' & \text{Leyes de D' Morgan, B9} \\
 & = (x' + y)\,(x + y') & \text{Leyes de D' Morgan, B9} \\
 & = (x' + y)\,x + (x' + y)\,y' & \text{Leyes Distributivas, B2} \\
 & = xx' + xy + x'y' + yy' & \text{Leyes Distributivas, B2} \\
 & = 0 + xy + x'y' + 0 & \text{Leyes de Complemento, B4} \\
 & = xy + x'y' & \text{Leyes Modulativas, B3}
\end{array}
$$

Esta última expresión es la función booleana que establece la equivalencia entre x y y, por lo tanto: $(x \leftrightarrow y) \equiv (x \oplus y)'$.

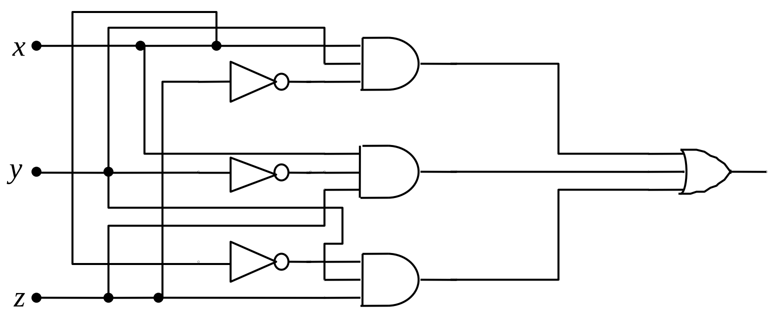
Ejemplo 2. Diseñe un circuito lógico de tres entradas x, y y z cuya salida es 1 cuando, y sólo cuando, exactamente dos de las entradas tienen el valor 1.

Solución: Es conveniente diseñar una tabla con tres entradas y una salida $f(x, y, z)$ evaluando esta con 1 si, y sólo si, dos de las entradas tienen el valor 1, de acuerdo al requerimiento del problema.

Entradas			Salida
x	y	z	$f(x, y, z)$

1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

La segunda fila de la tabla que tiene salida 1 origina la combinación xyz', observe que si $x = y = 1$ y $z = 0$ origina la salida 1, de acuerdo a la condición del problema. Así mismo es posible tomar la combinación $xy'z$ para la tercera fila y $x'yz$ para la quinta fila. A continuación se hace la suma de los términos para obtener la expresión booleana: $f(x, y, z) = xyz' + xy'z + x'yz$. Un posible diseño del circuito es el siguiente:



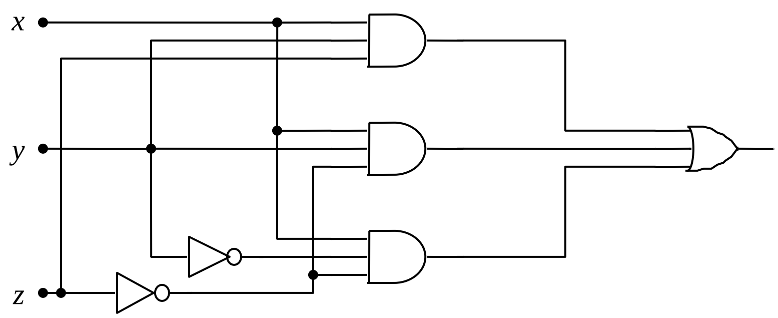
Ejemplo 3. Construir un circuito lógico combinatorio, de acuerdo a la siguiente tabla lógica, usando compuertas AND, OR y NOT.

Entradas			Salida
x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Solución:
La forma suma de productos (o forma normal disyuntiva) de f es:

$$f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z'.$$

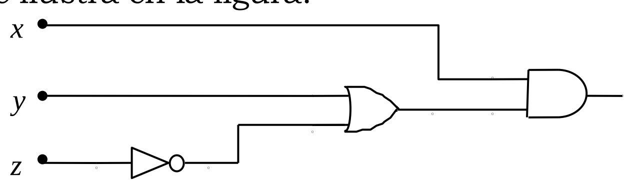
El circuito lógico correspondiente aparece en la siguiente figura:



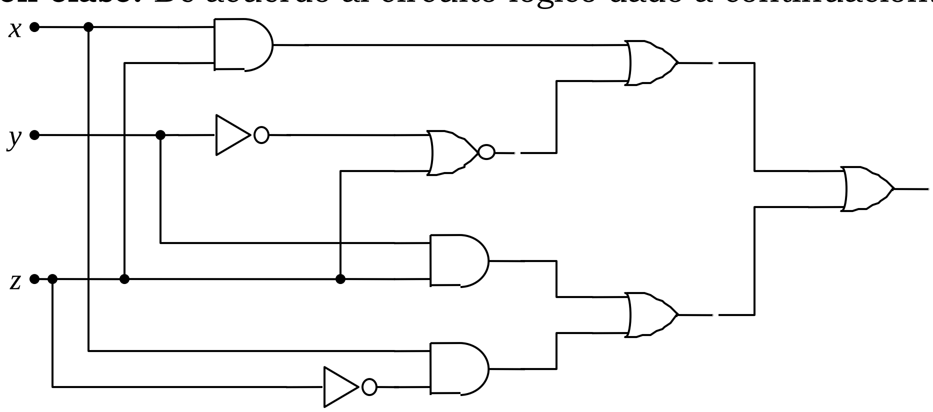
El circuito de la figura tiene seis compuertas; es posible diseñar un circuito equivalente que desempeñe la misma función con menos compuertas. El problema de encontrar el "mejor" circuito se llama **problema de minimización**. Para determinar un circuito lógico más simple y equivalente al de la figura se simplificará la expresión booleana que lo representa, como sigue:

$$
\begin{aligned}
xyz + xyz' + xy'z' &= xy\,(z + z') + xy'z' \\
&= xy\,(1) + xy'z' \\
&= xy\,(1+z') + xy'z' \\
&= xy + xyz' + xy'z' \\
&= xy + xz'\,(y + y') \\
&= xy + xz'\,(1) \\
&= xy + xz' \\
&= x\,(y + z')
\end{aligned}
$$

El circuito lógico correspondiente a la expresión $x\,(y + z')$, solo requiere tres compuertas, como se ilustra en la figura:



Ejercicio en clase: De acuerdo al circuito lógico dado a continuación:



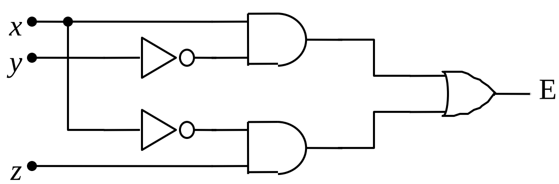
a) Escriba la expresión booleana que representa la salida del circuito.

b) Simplifique la expresión de Boole y diseñe el circuito combinatorio que utilice el menor número de compuertas.

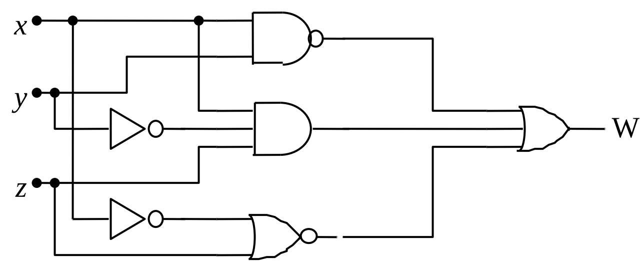
EJERCICIOS 5.3

1. En los siguientes ejercicios escriba las expresiones Booleanas que representan los circuitos combinatorios y elabore la tabla lógica correspondiente:

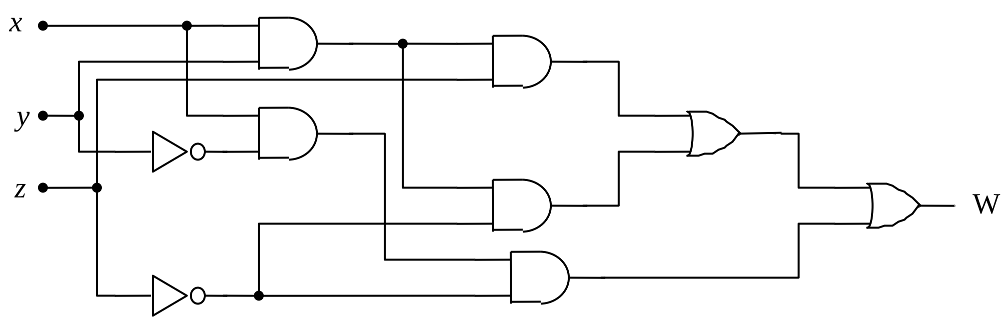
1.1.



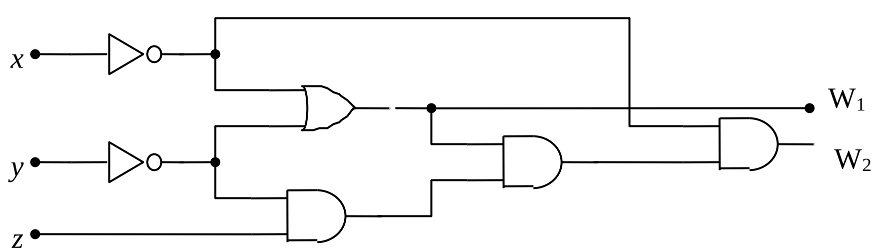
1.2.



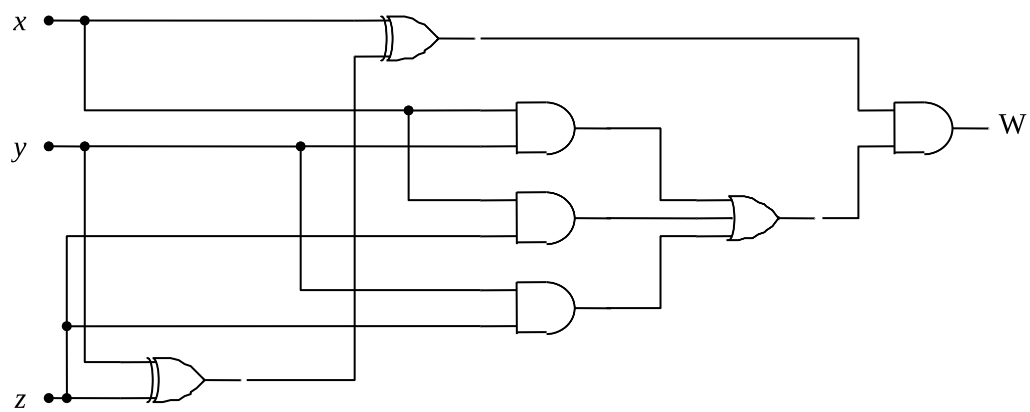
1.3.



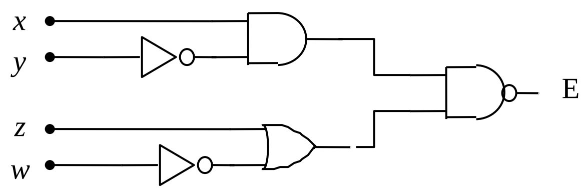
1.4.



1.5.



1.6.



2. Encuentre el circuito combinatorio correspondiente para cada una de las expresiones Booleanas de los siguientes ejercicios y elabore la tabla lógica correspondiente:

2.1. $xy' + xyz'$ **2.2.** $(x + yz)' + y$

2.3. $(a'b)' + (a + c)'$ **2.4.** $x + x'z$

2.5. $x (y + xy') + (xy' + (xz')')$ **2.6.** $xy' + y (x' + y)$

3. Determine la expresión de Boole en forma de suma de productos de cada uno de los siguientes ejercicios y trace el circuito combinatorio correspondiente:

3.1.

Entradas		Salida
x	*y*	*f*(*x*, *y*)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

3.2.

Entradas		Salida
x	*y*	*f*(*x*, *y*)
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

3.3.

Entradas			Salida
x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

3.4.

Entradas			Salida
x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

4. Escriba cada expresión de Boole $f(x, y, z)$ en forma suma de productos (o forma normal disyuntiva), y luego en forma completa de suma de productos:

4.1. $x(xy' + x'y + y'z)$
4.2. $(x + y)(x' + y')$
4.3. $(x' + y)' + y'z$
4.4. $x + y(x + z')$
4.5. $(yz + xz')(xy' + z)'$
4.6. $(x'y)'(x' + xyz')$
4.7. $x + [y' + (xy' + xz')]$
4.8. $(x + x'y + x'yz')(xy + (xz)')(y + xyz')$

BIBLIOGRAFIA

- KOLMAN, Bernard, BUSBY, Robert C. y ROSS, Sharon. ***Estructuras de matemáticas discretas para la computación.*** Tercera edición. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México,D. F., 1988.
- LIPSCHUTZ, Seymour. ***Matemáticas para computación.*** Editorial Mc. Graw-Hill. México,D. F., 1985.
- ROSS, Kenneth A. y WRIGHT, Charles R.B. ***Matemáticas discretas.*** Segunda Edición. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- JOHNSONBAUGH, Richard. ***Matemáticas discretas.*** Grupo Editorial Iberoamérica. México,D. F., 1988.
- BUSTAMANTE, Alfonso. ***Elementos de Álgebra en Ciencias de la Computación.*** Serie Textos Universitarios del ICESI. N°6. Cali, Valle del Cauca, Colombia, junio de 1988.

- GRIMALDI, Ralph P. ***Matemáticas discretas y combinatoria.*** Editorial Educativa. Addison Wesley Iberoamericana.
- BARCO G., Carlos; BARCO G., Germán y ARISTIZABAL B., William. ***Matemática Digital.*** Editorial Mc. Graw-Hill. Santa Fé de Bogotá, Colombia, abril de 1998.