Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 17 giugno 2008 – parte A (90 minuti)

E1 Si consideri un nodo di rete che in condizioni di funzionamento normale N smaltisce un traffico pari a 100 Mbps. Dopo un tempo di funzionamento casuale con distribuzione esponenziale di media T, il nodo entra in uno stato di malfunzionamento M in cui la sua capacita' di smaltire traffico si riduce a 50 Mbps. Quando il nodo entra nello stato M, con probabilita' β torna a funzionare normalmente dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_1 T]$, mentre con probabilita' $1 - \beta$ smette di funzionare dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_2 T]$ e deve essere sostituito, operazione che richiede un tempo deterministico pari a δT.

(a) Si costruisca un modello semi-Markoviano per il sistema. In particolare, indicando gli stati possibili con N, M e G (dove G e' lo stato durante il quale il nodo non funziona), si scrivano la matrice di transizione della catena di Markov inclusa e la matrice dei tempi medi associati alle transizioni.

(b) Usando il modello semi-Markoviano sviluppato al punto precedente, si calcoli in maniera parametrica la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati, e si calcoli il throughput medio smaltito dal nodo. Si calcolino inoltre i valori numerici di tali quantita' per $\beta = 0.9, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2$ e $\delta = 0.1$.

(c) Si calcolino le quantita' richieste al punto precedente usando la teoria dei processi di rinnovamento, individuando un ciclo di rinnovamento opportuno.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$ di intensita' $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pacchetti al secondo, dove un pacchetto e' composto da 1000 bit. Sia inoltre $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 2|X(3) = 3]$ e $P[X_1(2) = 2|X(2) = 3]$.

(b) Si calcolino $P[X_1(1) = 2|X(2) = 3]$ e $P[X(2) = 3|X_1(1) = 2]$.

(c) Si supponga che il link di uscita dal nodo sia un sistema di trasmissione costituito da un gran numero di canali paralleli, ognuno caratterizzato da un valore di bit rate pari a 1 Mbps. Supponendo che il sistema sia vuoto al tempo $t = 0$ e di poter trascurare l'eventualita' che un pacchetto che arriva non trovi un canale libero, determinare la probabilita' che vi siano due pacchetti in trasmissione agli istanti $t_1 = 0.5$ ms e $t_2 = 3$ ms.

E3 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(a) si disegni il diagramma di transizione della catena, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k$

(c) si calcoli la media del tempo di primo passaggio da tutti gli stati allo stato 4

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot t è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Come al punto precedente se il canale di ritorno e' affetto da errori indipendenti con probabilita' 0.02.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008
prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a n passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$