Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005
prova scritta – 22 settembre 2005– parte B

1. Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.
2. Dimostrare che il periodo e' una proprieta' di classe.
3. Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i > 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitorieta' e ricavandone la distribuzione stazionaria.

T1) SIA $\{X_i\}$ UN PROC. DI RINN. CON $\mu = E[X_i] < +\infty$. ALLORA $\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$

DIM.

$$t < S_{N(t)+1} \Rightarrow t < \mu[M(t)+1] \Rightarrow \frac{1}{\mu} < \frac{M(t)}{t} + \frac{1}{t} \Rightarrow \liminf_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

– CONSIDERIAMO IL PROCESSO:

$$X^c_i = \begin{cases} X_i & \text{se } X_i < c \\ c & \text{se } X_i \geq c \end{cases}$$ allora

$S_{N^c(t)+1} \leq t + c \Rightarrow \mu^c[M^c(t)+1] \leq t + c$. Essendo $M^c(t) \geq M(t)$ si ha

ovvero: $t + c \geq \mu^c[M(t)+1] \Rightarrow \mu^c M(t) + \mu^c - c \leq t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu^c \frac{M(t)}{t} + \frac{1}{t}(\mu^c - c) \quad \text{per } c > 0 \quad \text{QUINDI}$$

$\limsup_{t\to+\infty} \left(\frac{M(t)}{t}\right) \leq \frac{1}{\mu^c}$ ed essendo $\mu_c = \int_0^c (1 - F(x))\,dx$ il

limite tende a $\mu$ quindi $\limsup_{t\to+\infty} \left(\frac{M(t)}{t}\right) \leq \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{\mu}$ DA CUI LA TESI.

T2) Se $i \leftrightarrow s$ allora $d(i) = d(s)$.

dim: Essendo comunicanti $\exists\, m, n : P^{(m)}_{is} > 0$, $P^{(n)}_{si} > 0$ ~~quindi~~ inoltre

$d(i) = s$ allora

$$P^{(n+s+m)}_{ss} \geq P^{(n)}_{si} P^{(s)}_{ii} P^{(m)}_{is} > 0$$

$$P^{(n+2s+m)}_{ss} \geq P^{(n)}_{si} P^{(2s)}_{ii} P^{(m)}_{is} > 0$$

quindi $d(s)$ divide $m+n+s$ e $m+n+2s$ dunque divide "$s$" ~~ed è~~ quindi divide qualunque elemento di $d(i) = \text{MCD}\{k : P^{(k)}_{ii} > 0\}$ QUINDI $d(i) = d(s)$

**Corso di Modelli e analisi delle prestazioni nelle reti – AA 2004/2005**
**prova scritta – 17 giugno 2005 – parte B - tempo 60 minuti**

T1 Dimostrare che $E[S_{N(t)+1}] = E[X_1](M(t)+1)$. (Sugg.: usando il renewal argument scrivere un'equazione di rinnovamento per $A(t) = E[S_{N(t)+1}]$.

T2 Dimostrare che in una catena di Markov con un numero finito di stati

(a) deve esserci almeno uno stato ricorrente

(b) non possono esserci stati ricorrenti nulli

CONTROLLARE

* T3 Dimostrare che il numero $k$ di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero $n$ di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

T2) a) SUPP. CHE TUTTI GLI STATI SIANO RICORR. NULLI O TRANSITORI, VALENDO:

$$\forall i, s \quad \sum_{i=1}^{N} P_{si}^{(n)} = 1 \quad \text{allora}$$

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} P_{si}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \lim_{n \to +\infty} P_{si}^{(n)} = 0 \quad \text{ASSURDO}$$

b) SUPP. CHE TUTTI GLI STATI SIANO RICORR. NULLI, ALLORA ESISTE UNA CLASSE NELLA QUALE TUTTI GLI STATI SONO RICORR. NULLI, QUINDI

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} P_{si}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \lim_{n \to +\infty} P_{si}^{(n)} = 0 \quad \text{ASSURDO.}$$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)**

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a $n$ passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$

$$P_{is}^{(n)} = P[X_n = s \mid X_0 = i]$$

$$= \sum_m P[X_n = s, X_k = m \mid X_0 = i] \quad \text{con } 0 < k \leq n$$

$$= \sum_m P[X_n = s \mid X_k = m, X_0 = i] \, P[X_k = m \mid X_0 = i]$$

= APPLICO LA PROPRIETÀ DI MARKOV.

$$= \sum_m P[X_n = s \mid X_k = m] \, P[X_k = m \mid X_0 = i]$$

$$= \sum_m P_{ms}^{(n-k)} P_{im}^{(k)}$$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005
prova scritta – 25 luglio 2005– parte B

~~1~~ Si dimostri che il periodo degli stati di una catena di Markov e' una proprieta' di classe

~~2~~ Per un processo di Poisson di intensità $\lambda$, si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro $\lambda$.

~~3~~ Usando il teorema del rinnovamento, dimostrare che la distribuzione asintotica della vita residua è

$$\lim_{t\to\infty} P[\gamma_t > z] = \frac{1}{\mu}\int_z^{\infty}[1 - F(y)]dy$$

in cui $F(y)$ è la distribuzione di probabilità del tempo $X$ fra due eventi di rinnovamento successivi. (Suggerimento: la funzione $A_z(t) = P[\gamma_t > z]$ soddisfa un'equazione di rinnovamento che si trova condizionando rispetto a $X_1$.)

$A_z(t) = P[\gamma_t > z]$

$$P[\gamma_t > z \mid X_1 = x] = \begin{cases} 1 & \text{se } x > z+t \\ 0 & \text{se } t \le x \le t+z \\ A_z(t-x) & x \le t \end{cases}$$

$$A_z(t) = \int_0^{+\infty} P[\gamma_t > z](X_1 = x)\, dF(x) = \int_0^{t} A_z(t-x)\, dF(x) + \int_{z+t}^{+\infty} dF(x) =$$

$$= 1 - F(z+t) + \int_0^{t} A_z(t-x)\, dF(x)$$

si osserva che

$$\int_0^{+\infty} 1 - F(z+t)\, dt \underset{z+t=y}{=} \int_z^{+\infty} 1 - F(y)\, dy \le E[X]$$ quindi è INTEGRABILE.

Allora:

$\frac{1}{\mu}$ per $t \to +\infty$

$$A_z(t) = 1 - \underbrace{F(t+z)}_{\to 0} + \int_0^{t} \left(1 - F(t+z-x)\right) dM(x)$$

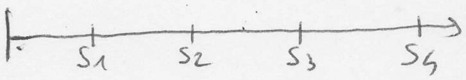
Per $t \to +\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} 1 - F(y)\, dy$$

SABRI

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006**
**prova scritta – 14 luglio 2006 – parte B (60 minuti)**

1. Per un processo di Poisson di intensità $\lambda$, si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro $\lambda$.
2. Dimostrare che il periodo è una proprietà di classe.
3. Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

1) 


$$P[S_1 > t] = P[N(0,t)=0] = e^{-\lambda t}$$

$$P[S_2 > t \mid S_1 = m] = P[N(m, t+m) = 0] = e^{-\lambda t}$$

$$P[S_i > t \mid S_{i-1} = m, S_{i-2} = k \ldots] = P[N(m, t+m) = 0] = e^{-\lambda t}$$

3) $E[S_{N(t)+1}] = A(t)$

$$E[S_{N(t)+1} \mid X_1 = x] = \begin{cases} x & \text{se } x > t \\ x + A(t-x) & \text{se } x < t \end{cases}$$

$$A(t) = \int_0^{+\infty} E[S_{N(t)+1} \mid X_1 = x]\, dF(x) = \int_t^{+\infty} x\, dF(x) + \int_0^t (x + A(t-x))\, dF(x) =$$

$$= E[X_i] + \int_0^t A(t-x)\, dF(x)$$ SOTTO LA COND. $E[X_i] < +\infty$

$$A(t) = E[X_i] + \int_0^t E[X_i]\, dM(x) = E[X_i] + E[X_i] M(t) = E[X_i](M(t)+1)$$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006**
**prova scritta – 18 settembre 2006– parte B**

1. Dimostrare che il numero $k$ di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero $n$ di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilità

2. Dare la definizione di stato ricorrente e dimostrare che uno stato $i$ e' ricorrente se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

3. Dimostrare che per un processo di rinnovamento $M(t) < \infty$ per ogni $t$ finito. (Sugg.: si ricordi che $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$.)

1) $F_k(t) = \int_0^t F(t-x)\, dF_{k-1}(x) \leq F(t)\, F_{k-1}(t)$

$F_{k-1}(t) = \int_0^t F(t-x)\, dF_{k-2}(x) \leq F(t)\, F_{k-2}(t)$ iterando il procedimento si arriva a:

$F_k(t) \leq (F(t))^{k-1} F(t)$, Essendo $F(t)$ con "$t$" finito $<1$ si avrà:

$\sum_{k=1}^{+\infty} F_k(t) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (F(t))^{k-1} F(t)$ che converge come una geometrica.

2) Se con $f_{ii}(n) = P[X_n = i$ per la prima volta $| X_0 = i]$ allora la prob. che prima o poi la catena torni a "$i$" è uguale $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}(n) = 1 = f_{ii}$ per stato ricorrente.

Per la def. ricorrente la media di visite nello stato $i$ è $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{ii})^k = \infty$.

Calcoliamo ora

$\infty = E\left[\sum_{k=1}^{+\infty} 1\{X_k = i\} \,|\, X_0 = i\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$ DA CUI L'ASSERTO

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005**
**prova scritta – 22 settembre 2005– parte A**

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati $1, 2, 3$, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 3 allo stato 1.

(c) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(d) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1|X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2|X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri una coda alla quale arrivano pacchetti secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 1$ pacchetto al secondo. Tutti i pacchetti presenti nella coda vengono trasmessi quando si verifica uno dei seguenti due eventi: i) ci sono due pacchetti in coda, oppure ii) c'e' un solo pacchetto e il suo tempo di attesa e' pari a due secondi. La trasmissione e' istantanea, cioe' la coda si svuota ogni volta che arriva un pacchetto e ce n'e' gia' uno in coda, o quando l'unico pacchetto in coda ha accumulato un ritardo sufficiente.

(a) Si calcoli la percentuale di tempo durante la quale la coda e' vuota.

(b) Si calcoli la media del ritardo di un pacchetto (cioe' il tempo medio speso in coda).

E3 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo $t$

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo $[2, 10]$ (minuti)

E4 Si consideri il funzionamento del protocollo Go-Back-N su un canale Markoviano a due stati con probabilita' di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilita' che un pacchetto sia errato e' 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono. Il tempo di round-trip e' pari a $m = 2$ slot (cioe' un pacchetto errato trasmesso al tempo $t$ verra' ritrasmesso al tempo $t + m$).

(a) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso di feedback perfetto (cioe' senza errori)

(b) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso in cui il feedback sia soggetto a errori indipendenti con probabilita' di errore 0.1.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005**
**prova scritta – 22 settembre 2005– parte B**

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = q, i > 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitorieta' e ricavandone la distribuzione stazionaria.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006**
**prova scritta – 14 luglio 2006– parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1, X_2$ e $X_{500}$, dato che $X_0 = 0$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dallo stato 0 agli stati 0, 1 e 2.

(c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\}\middle| X_0 = i\right]$ il numero medio di visite allo stato $j$ a partire dallo stato $i$ durante i primi $n$ istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

E2 Si consideri un link di capacita' 1 Mbps, condiviso da un gran numero di utenti che collettivamente producono pacchetti secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 500$ pacchetti al secondo. La lunghezza dei pacchetti e' costante e pari a 1000 bit. Il protocollo di accesso e' un CSMA ideale, secondo cui un pacchetto generato quando il canale e' libero ottiene accesso immediato, mentre quando un pacchetto trova il canale occupato se ne prova la ritrasmissione dopo un tempo esponenziale di media $100/\lambda$. (Nel caso questo nuovo tentativo trovi nuovamente il canale occupato si continua a riprovare a tempi casuali finche' non si trova il canale libero.) Si supponga che il traffico totale (nuovo piu' tentativi di ritrasmissione) si possa approssimare come Poissoniano di intensita' $\lambda$.

(a) Si calcoli il throughput (traffico medio smaltito) dal link.

(b) Si calcoli il ritardo medio di accesso, da quando un pacchetto e' generato a quando riesce ad accedere al canale.

(c) Se una trasmissione sul canale corrisponde a un guadagno di 1 unita' e ogni tentativo di accesso fallito (cioe' pacchetto generato quando il canale e' occupato) corrisponde a un costo di 0.2 unita', si calcoli il guadagno totale prodotto dal sistema (in unita' al secondo).

E3 Si consideri una mostra a cui arrivano visitori secondo un processo di Poisson con $\lambda = 10$ clienti all'ora. Ogni visitatore passa un tempo uniformemente distribuito fra 20 e 30 minuti e poi esce. La sala in cui la mostra e' allestita e' sufficiente grande da far si' che non sia mai necessario bloccare visitatori all'entrata a causa del numero eccessivo di persone. L'orario di apertura della mostra e' dalle 8 alle 18.

(a) Si calcoli la probabilita' che durante la prima mezz'ora arrivino meno di tre visitatori.

(b) Si calcoli la probabilita' che alle 8:15 vi sia in sala un solo visitatore.

(c) Si calcoli la probabilita' che all'orario di chiusura la sala sia vuota.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilita' 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e cosi' via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006**
**prova scritta – 14 luglio 2006– parte B (60 minuti)**

T1 Per un processo di Poisson di intensità $\lambda$, si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro $\lambda$.

T2 Dimostrare che il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006**
**prova scritta – 12 dicembre 2006– parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} P^n$

(c) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) Si calcoli $P[X_4 = 5, X_2 = 3|X_3 = 1, X_1 = 3]$

E2 Si consideri un nodo di rete che in condizioni normali riesce a smaltire un traffico pari a 1 Gbps. Tale nodo funziona normalmente per un tempo esponenziale di media $99T$, dopodiché entra in uno stato di allarme, durante il quale la sua capacità si riduce a 250 Mbps. Dopo essere rimasto $T$ secondi nello stato di allarme, il nodo viene istantaneamente riparato, e ricomincia a funzionare correttamente.

(a) Si calcoli la frazione del tempo che il nodo passa nello stato di allarme, e il traffico medio smaltito (si supponga che le code siano sempre piene, cioè che ci siano sempre pacchetti da trasmettere)

(b) Si supponga ora che una volta entrato nello stato di allarme il nodo smetta completamente di funzionare dopo un tempo esponenziale di media $2T$, a meno che non venga riparato prima (come nel caso precedente, la riparazione richiede esattamente $T$ da quando il nodo entra nello stato di allarme). Se il nodo smette di funzionare, deve essere interamente sostituito, e questo richiede un tempo $20T$, durante il quale il nodo non può gestire nessun traffico (si noti che questa sostituzione è diversa dalla semplice riparazione del caso precedente). Si calcolino: (i) il tempo medio fra due sostituzioni successive, (ii) la percentuale del tempo in cui il nodo non funziona, e (iii) il throughput del sistema.

E3 Si considerino due processi di Poisson indipendenti, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, in cui $X_i(t)$ è il numero di arrivi del processo $i$ nell'intervallo $[0, t]$. Il numero medio di arrivi per unità di tempo dei due processi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 1|X_1(3) + X_2(3) = 3]$ e $P[X_1(3) + X_2(3) = 3|X_1(3) = 1]$

(b) Si calcolino $P[X_1(2) = 1|X_1(3) = 3]$ e $P[X_1(3) = 3|X_1(2) = 1]$

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput (numero medio di successi per slot) di un protocollo che trasmette pacchetti direttamente sul canale, senza ritrasmissioni.

(b) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(c) Come al punto precedente, con la differenza che il canale di ritorno è soggetto a errori indipendenti con probabilità 0.1

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006**
**prova scritta – 12 dicembre 2006– parte B (60 minuti)**

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che se $i$ e $j$ comunicano e $i$ è ricorrente, allora anche $j$ è ricorrente.

T3 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007**
**prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A**

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1, X_2$ e $X_{500}$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati $0, 1, 2$ verso lo stato 2.

(c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1|X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1|X_1 = 1, X_3 = 1]$.

**Soluzione:**

(a) $X_1$: Prima riga di $P = (0.4, 0.4, 0.2)$; $X_2$: Prima riga di $P^2 = (0.44, 0.24, 0.32)$; $X_{500}$: $\simeq \pi = (1/2, 1/4, 1/4)$

(b) $E[\theta_{02}] = 3, E[\theta_{12}] = 2, E[\theta_{22}] = 1/\pi_2 = 4$

(c) $P[X_1 = 1, X_3 = 1|X_2 = 1] = 1/15$; $P[X_2 = 1|X_1 = 1, X_3 = 1] = 1/3$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento e' indipendente dall'altra, e' in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando e' funzionante.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione e' ferma (cioe' entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione e' ferma

(b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora

(c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora e' 12 quando c'e' una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

**Soluzione:**

(a) $(0.1)^2 = 0.01$; $(2\beta)^{-1} = 1.5$ giorni

(b) $2 \times 12 \times 0.9 = 21.6$

(c) $30 \times (0.9)^2 + 12 \times 0.18 + 0 \times 0.01 = 26.46$

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media $T$ e un periodo in cui e' sveglio ed e' in grado di ricevere, di durata fissa $\beta T$. In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a $\beta T$), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo $\beta T$. La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo e' sveglio è $\alpha$, l'istante di inizio della ricezione e' uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto e' pari a $\gamma T$. Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

(a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilita' di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.

(b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, $\mathbf{T}$, e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, $\mu_S, \mu_L, \mu_R$.

(c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

**Soluzione:**

(a) Il nodo resta nello stato S per un tempo medio $T$, dopodiche' con probabilita' 1 passa nello stato L. Da L, con probabilita' $\alpha$ il nodo passa nello stato R dopo un tempo medio $\beta T/2$, mentre con probabilita' $(1-\alpha)$ il nodo torna nello stato S dopo un tempo $\beta T$. Dallo stato R, il nodo passa nello stato S con probabilita' 1 dopo un tempo medio $\gamma T$. La matrice di transizione della catena inclusa e' (gli stati sono ordinati come (S,L,R)):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sulla base della descrizione precedente, la matrice dei tempi medi associati alle transizioni e':

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} - & T & - \\ \beta T & - & \beta T/2 \\ \gamma T & - & - \end{pmatrix}$$

e i tempi medi di permanenza negli stati si ottengono come $\mu_i = \sum_i P_{ij} T_{ij}$:

$$\mu_S = T, \qquad \mu_L = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta T, \qquad \mu_R = \gamma T$$

(c) la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati si calcola come $P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}$, dove le probabilita' limite della catena inclusa si calcolano dal sistema di equazioni:

$$\pi_L = \pi_S, \qquad \pi_R = \pi_L, \qquad \pi_S + \pi_L + \pi_R = 1 \qquad \to \pi_S = \pi_L = \frac{1}{2+\alpha}, \quad \pi_R = \frac{\alpha}{2+\alpha}$$

e quindi

$$P_S = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{1}{1.175} = 0.851 \qquad P_L = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{0.075}{1.175} = 0.064$$

$$P_R = \frac{\alpha\gamma}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{0.1}{1.175} = 0.085$$

**Sono rimasto stupito dal fatto che quasi nessuno abbia capito come si faceva questo esercizio. Come vedete dalla soluzione, non c'era niente di particolarmente difficile, bastava aver studiato e capito i processi semi-Markoviani...**

E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'e' limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

(a) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.

(b) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e $t$ si siano verificati 10 arrivi.

**Soluzione:**

(a) $e^{-2} = 0.135$

(b) $(0.8)^{10} = 0.107$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007**
**prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A**

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1, X_2$ e $X_{500}$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati $0, 1, 2$ verso lo stato 2.

(c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1|X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1|X_1 = 1, X_3 = 1]$.

**Soluzione:**

(a) $X_1$: Prima riga di $P = (0.4, 0.4, 0.2)$; $X_2$: Prima riga di $P^2 = (0.44, 0.24, 0.32)$; $X_{500}$: $\simeq \pi = (1/2, 1/4, 1/4)$

(b) $E[\theta_{02}] = 3, E[\theta_{12}] = 2, E[\theta_{22}] = 1/\pi_2 = 4$

(c) $P[X_1 = 1, X_3 = 1|X_2 = 1] = 1/15$; $P[X_2 = 1|X_1 = 1, X_3 = 1] = 1/3$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). Ogni macchina, il cui funzionamento e' indipendente dall'altra, e' in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando e' funzionante.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione e' ferma (cioe' entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione e' ferma

(b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora

(c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora e' 12 quando c'e' una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

**Soluzione:**

(a) $(0.1)^2 = 0.01$; $(2\beta)^{-1} = 1.5$ giorni

(b) $2 \times 12 \times 0.9 = 21.6$

(c) $30 \times (0.9)^2 + 12 \times 0.18 + 0 \times 0.01 = 26.46$

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media $T$ e un periodo in cui e' sveglio ed e' in grado di ricevere, di durata fissa $\beta T$. In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a $\beta T$), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo $\beta T$. La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo e' sveglio è $\alpha$, l'istante di inizio della ricezione e' uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto e' pari a $\gamma T$. Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare:

(a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilita' di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.

(b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, $\mathbf{T}$, e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, $\mu_S, \mu_L, \mu_R$.

(c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

**Soluzione:**

(a) Il nodo resta nello stato S per un tempo medio $T$, dopodiche' con probabilita' 1 passa nello stato L. Da L, con probabilita' $\alpha$ il nodo passa nello stato R dopo un tempo medio $\beta T/2$, mentre con probabilita' $(1-\alpha)$ il nodo torna nello stato S dopo un tempo $\beta T$. Dallo stato R, il nodo passa nello stato S con probabilita' 1 dopo un tempo medio $\gamma T$. La matrice di transizione della catena inclusa e' (gli stati sono ordinati come (S,L,R)):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sulla base della descrizione precedente, la matrice dei tempi medi associati alle transizioni e':

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} - & T & - \\ \beta T & - & \beta T/2 \\ \gamma T & - & - \end{pmatrix}$$

e i tempi medi di permanenza negli stati si ottengono come $\mu_i = \sum_i P_{ij} T_{ij}$:

$$\mu_S = T, \qquad \mu_L = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \beta T, \qquad \mu_R = \gamma T$$

(c) la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati si calcola come $P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_j \pi_j \mu_j}$, dove le probabilita' limite della catena inclusa si calcolano dal sistema di equazioni:

$$\pi_L = \pi_S, \qquad \pi_R = \pi_L, \qquad \pi_S + \pi_L + \pi_R = 1 \qquad \rightarrow \pi_S = \pi_L = \frac{1}{2+\alpha}, \quad \pi_R = \frac{\alpha}{2+\alpha}$$

e quindi

$$P_S = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{1}{1.175} = 0.851 \qquad P_L = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{0.075}{1.175} = 0.064$$

$$P_R = \frac{\alpha\gamma}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\beta + \alpha\gamma} = \frac{0.1}{1.175} = 0.085$$

**Sono rimasto stupito dal fatto che quasi nessuno abbia capito come si faceva questo esercizio. Come vedete dalla soluzione, non c'era niente di particolarmente difficile, bastava aver studiato e capito i processi semi-Markoviani...**

E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'e' limite al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

(a) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.

(b) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e $t$ si siano verificati 10 arrivi.

**Soluzione:**

(a) $e^{-2} = 0.135$

(b) $(0.8)^{10} = 0.107$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007**
**prova scritta – 05 settembre 2007 – parte A**

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione fisso pari a 20 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' uniformemente distribuita fra 1 MByte e 2 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che la velocita' di trasferimento di ciascun file sia 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti.

(a) Supponendo che il server venga acceso al tempo $t = 0$, si dica dopo quanto tempo la statistica del numero di richieste attive arriva alla condizione stazionaria, e si dia l'espressione di $P[k$ richieste attive$]$ in tale condizione.

(b) Sapendo che in un intervallo di durata $T$ sono arrivate $N$ richieste, si trovi la probabilita' che alla fine di tale intervallo non ci sia nessuna richiesta attiva per (b1) $T = 0.1$ s e $N = 2$ e (b2) $T = 1$ s e $N = 20$.

E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino le probabilita' di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori

(c) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC.

(b) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio e' T.

(c) Si risponda alle due domande precedenti nel caso in cui la moneta sia truccata, con probabilita' che a un lancio si verifichi testa pari a $p = 1/4$.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilita' 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e cosi' via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007**
**prova scritta – 05 settembre 2007 – parte B**

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a $n$ passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \dots, n$$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007**
**prova scritta – 24 settembre 2007– parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1, X_2$ e $X_{500}$, dato che $X_0 = 0$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2.

(c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\}\middle| X_0 = i\right]$ il numero medio di visite allo stato $j$ a partire dallo stato $i$ durante i primi $n$ istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di uscita $L_1$ e $L_2$. Entrambi i link hanno una capacita' di 1 Mbps e hanno al loro ingresso due code distinte $Q_1$ e $Q_2$ che possono contenere un solo pacchetto ciascuna. Si supponga che al nodo arrivino due flussi di pacchetti, modellati come processi di Poisson indipendenti con intensita' $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pkt/s, e che il flusso $\lambda_i$ sia relativo al solo link $L_i$ (e quindi alla coda $Q_i$), $i = 1, 2$. Due pacchetti vengono trasmessi contemporaneamente quando entrambe le code sono piene; in particolare, quando c'e' un pacchetto in una coda e l'altra e' vuota, si attende che arrivi un pacchetto anche alla seconda e solo allora si trasmettono entrambi, ognuno sul link corrispondente. (Si osservi che ad un intervallo di tempo in cui entrambe le code sono vuote ne segue un altro in cui una coda e' vuota e l'altra piena, e poi un terzo in cui i pacchetti sono in trasmissione.) Si supponga inoltre che quando la coda $Q_i$ e' piena (cioe' quando c'e' un pacchetto in attesa o in trasmissione) gli arrivi del flusso $\lambda_i$ vengano rifiutati. I pacchetti hanno tutti una lunghezza di 1000 bit.

(a) Si calcoli il traffico utile smaltito dal nodo, in termini di bps totali trasmessi

(b) Si calcoli la frazione del traffico totale che viene rifiutata

(c) Si ripetano i due punti precedenti nel caso in cui i pacchetti, anziche' avere lunghezza fissa 1000 bit, abbiano una lunghezza esponenziale di media 1000 bit. In questo caso, si supponga che le code si svuotino (e quindi il sistema ricominci ad accettare pacchetti) solo quando *entrambi* i pacchetti sono stati completamente trasmessi. (Cioe' la coda che aveva il pacchetto piu' corto ricomincia ad accettare gli arrivi solo quando anche il pacchetto dell'altra ha terminato la trasmissione.)

E3 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti di intensita' $\lambda_1 = \lambda_2 = 500$ pacchetti al secondo.

(a) Si calcoli la probabilita' che in un intervallo di 3 ms arrivino due pacchetti dal primo link e uno dal secondo.

(b) Si calcoli la probabilita' che in un intervallo di 3 ms arrivino al nodo tre pacchetti (in totale)

(c) Si calcoli la probabilita' che in un intervallo di 3 ms arrivino al nodo due pacchetti dal primo link dato che ne arrivano tre in totale

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilita' 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e cosi' via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007**
**prova scritta – 24 settembre 2007– parte B (60 minuti)**

T1 Dimostrare che se $i$ e $j$ comunicano e $i$ è ricorrente, allora anche $j$ è ricorrente.

T2 Per un processo di Poisson di intensità $\lambda$, si dimostri che i tempi di interarrivo sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro $\lambda$.

T3 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 17 giugno 2008 – parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri un nodo di rete che in condizioni di funzionamento normale N smaltisce un traffico pari a 100 Mbps. Dopo un tempo di funzionamento casuale con distribuzione esponenziale di media $T$, il nodo entra in uno stato di malfunzionamento M in cui la sua capacita' di smaltire traffico si riduce a 50 Mbps. Quando il nodo entra nello stato M, con probabilita' $\beta$ torna a funzionare normalmente dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_1 T]$, mentre con probabilita' $1 - \beta$ smette di funzionare dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_2 T]$ e deve essere sostituito, operazione che richiede un tempo deterministico pari a $\delta T$.

(a) Si costruisca un modello semi-Markoviano per il sistema. In particolare, indicando gli stati possibili con N, M e G (dove G e' lo stato durante il quale il nodo non funziona), si scrivano la matrice di transizione della catena di Markov inclusa e la matrice dei tempi medi associati alle transizioni.

(b) Usando il modello semi-Markoviano sviluppato al punto precedente, si calcoli in maniera parametrica la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati, e si calcoli il throughput medio smaltito dal nodo. Si calcolino inoltre i valori numerici di tali quantita' per $\beta = 0.9, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2$ e $\delta = 0.1$.

(c) Si calcolino le quantita' richieste al punto precedente usando la teoria dei processi di rinnovamento, individuando un ciclo di rinnovamento opportuno.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$ di intensita' $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pacchetti al secondo, dove un pacchetto e' composto da 1000 bit. Sia inoltre $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 2|X(3) = 3]$ e $P[X_1(2) = 2|X(2) = 3]$.

(b) Si calcolino $P[X_1(1) = 2|X(2) = 3]$ e $P[X(2) = 3|X_1(1) = 2]$.

(c) Si supponga che il link di uscita dal nodo sia un sistema di trasmissione costituito da un gran numero di canali paralleli, ognuno caratterizzato da un valore di bit rate pari a 1 Mbps. Supponendo che il sistema sia vuoto al tempo $t = 0$ e di poter trascurare l'eventualita' che un pacchetto che arriva non trovi un canale libero, determinare la probabilita' che vi siano due pacchetti in trasmissione agli istanti $t_1 = 0.5$ ms e $t_2 = 3$ ms.

E3 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(a) si disegni il diagramma di transizione della catena, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k$

(c) si calcoli la media del tempo di primo passaggio da tutti gli stati allo stato 4

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Come al punto precedente se il canale di ritorno e' affetto da errori indipendenti con probabilita' 0.02.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)**

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a $n$ passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 14 luglio 2008 – parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 5$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione uniformemente distribuito fra 10 e 30 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' esponenziale di media 1 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che si voglia trasferire ciascun file a 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti. Si supponga che il server venga acceso al tempo $t = 0$, e sia $X(t)$ il numero di richieste attive nel sistema al tempo $t$.

(a) Si calcoli la probabilita' che, dato che sono arrivate 5 richieste nell'intervallo da 0 a 1 s, almeno due di queste siano arrivate entro $t = 0.5$ s.

(b) Si dimensioni la capacita' del link di uscita dal server, in modo che la probabilita' che il numero di file da trasferire ecceda tale capacita' sia minore di 0.001

E2 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC, e la durata media del gioco.

(b) Come la domanda precedente, nel caso in cui il gioco finisca quando si verificano due lanci *diversi* in sequenza (cioe' CT o TC).

E3 Si consideri uno switch in cui vi sono due processori uguali e indipendenti. Ogni processore alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha$ (funzionamento) e $1/\beta = 1/(19\alpha) = 1$ giorno (guasto). Il traffico totale smaltito dallo switch e' pari a 2.5 Gbps se entrambi i processori sono attivi, 1 Gbps se ne funziona uno solo, e zero altrimenti.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui lo switch non smaltisce traffico

(b) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo durante il quale lo switch non smaltisce traffico

(c) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo in cui c'e' un solo processore funzionante, e la probabilita' che in questo caso esso si guasti prima che l'altro torni in funzione

(d) si calcoli il traffico medio smaltito dallo switch

E4 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1, X_2$ e $X_{500}$, dato che $X_0 = 0$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2, e il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati.

(c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \middle| X_0 = i\right]$ il numero medio di visite allo stato $j$ a partire dallo stato $i$ durante i primi $n$ istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 14 luglio 2008 – parte B (60 minuti)**

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t)$, $s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k|X(t) = n]$.

# ESERCIZI

X E1 - 25-07-2005

① Gioco: viene lanciata una moneta ripetutamente finché non compare la sequenza THT;

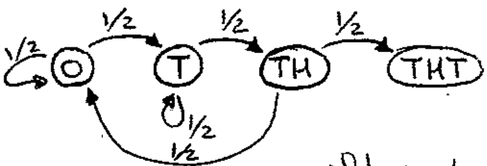
a) # medio di lanci prima che il gioco finisca (costruire cdM);

b) ripetere se la seq. di fine è TH;

c) lancio ripetuto: se ottengo THT perdo un punto; se ottengo TH guadagno un punto; (considerare le sovrapposizioni THT contiene THT e TH);

↳ sia $R(N)$ il punteggio dopo N lanci; $R(0)=0$; calcolare $\lim_{N\to\infty} R(N)$ e $\lim_{N\to\infty}\left(\frac{R(N)}{N}\right)$

a) THT stato assorbente:



⇒ il tempo medio per arrivare in THT è il tempo di 1° passaggio:

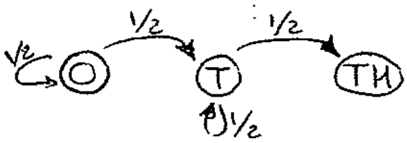
$$\begin{cases} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T + \frac{1}{2} V_{TH} \\ V_{TH} = 1 + \frac{1}{2} V_0 \end{cases}$$

$V_T = (\frac{1}{2} V_0 - 1)\cdot 2 = (V_0 - 2)$ ;

$V_0 - 2 = \cancel{1} + \frac{1}{2} V_0 - \cancel{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} V_0 \Rightarrow V_0(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = (2 + \frac{1}{2})$

$V_0 = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10 \Rightarrow V_T = 8 \Rightarrow V_{TH} = 6$ #

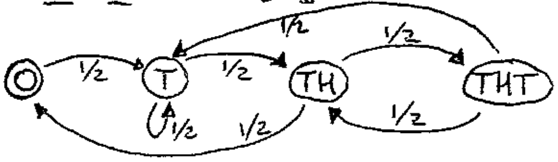
b) TH stato assorbente:



$$\begin{cases} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T \end{cases} \Rightarrow V_T = 2 \Rightarrow V_0 = 4 \ \#$$

(oppure dato che non torno indietro uso il tempo di una geometrica di parametro $p = \frac{1}{2} \Rightarrow E[T] = \frac{1}{p} = 2 = V_T \Rightarrow$ sono lanci indipendenti quindi da T ⇒ $E[TH]' = 2 \Rightarrow \Rightarrow V_{TH} = 4$)

c)



↳ dato che voglio il calcolo al limite devo usare le probabilità limite degli stati TH e THT ⇒ $R(N) \longrightarrow (\pi_{TH} - \pi_{THT}) \cdot N$ (n° di visite)

⇒ o risolvo la catena (sistema);

⇒ o cerco la probabilità che compaia una certa combinazione:

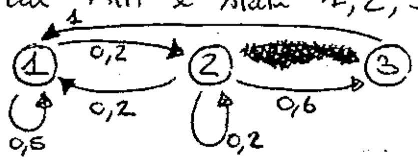
$\pi_{TH} = \frac{1}{2}$ ; $\pi_{THT} = \frac{1}{8}$ ⇒ dato che ho lanci indipendenti;

$R(N) \longrightarrow \frac{N}{8} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} R(N) = \infty$ ; $\lim_{N\to\infty} \frac{R(N)}{N} = \frac{1}{8}$

② E1 - 22-09-2005

cdM con $X(t)$ e stati $1, 2, 3$ ; $X(0) = 3$ ;

$$P = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \\ & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$




a)
$$\begin{cases} \pi_1 = 0{,}5\,\pi_1 + 0{,}2\,\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 = 0{,}3\,\pi_1 + 0{,}2\,\pi_2 + / \\ \pi_3 = 0{,}2\,\pi_1 + 0{,}6\,\pi_2 + / \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \pi_2 = 0{,}3/0{,}8\ \pi_1 = \left(\frac{3}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{8}\right)\pi_1$

$\Downarrow$

$\pi_3 = 0{,}2\,\pi_1 + \frac{0{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}8} \cdot \pi_1 = \left(\frac{2}{10} + \frac{18}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{10}}{8}\right)\pi_1 = \pi_1\left(\frac{16+18}{80}\right) = \frac{34}{80}\pi_1$

$$\pi_1 + \frac{3}{8}\pi_1 + \frac{34}{80}\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{80}{144} =$$

$\pi_2 = \frac{3}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{80}^{10}}{144} = \frac{30}{144}$ ; $\pi_3 = \frac{34}{\cancel{80}} \cdot \frac{\cancel{80}}{144} = \frac{34}{144}$

$\Rightarrow$ tempo medio di ricorrenza: $M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{144}{80}$

$M_2 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{144}{30}$ ; $M_3 = \frac{1}{\pi_3} = \frac{144}{34}$

b) $\vartheta_{ij}$ = tempo 1° passaggio ; $E[\vartheta_{ij}]$ = tempo medio di 1° passaggio,

$= 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} \cdot E[\vartheta_{kj}]$

$$E[\vartheta_{31}] = 1 + \underset{\overset{\parallel}{0}}{P_{32}} \cdot E[\vartheta_{21}] + \underset{\overset{\parallel}{0}}{P_{33}} \cdot E[\vartheta_{31}] = \boxed{1}$$

(infatti la probabilità di andare da 3 a 1 è 1)

(se NON fossero state 0 le P.. dovevo risolvere anche $E[\vartheta_{21}]$ ...)

$$\Rightarrow E[\vartheta_{ij}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\vartheta_{ij}] - 1) + \sum_{k \neq j} P_{ik} \cdot E[\vartheta_{kj}^2]$$

(VEDI calcolo VARIANZA)

c) $E[\vartheta_{13}] = 1 + P_{11} \cdot E[\vartheta_{13}] + P_{12} \cdot E[\vartheta_{23}] =$

$i = 1 ; j = 3$

$= 1 + 0{,}5 \cdot E[\vartheta_{13}] + 0{,}2 \cdot E[\vartheta_{23}]$

$E[\vartheta_{23}] = 1 + P_{21} \cdot E[\vartheta_{13}] + P_{22} \cdot E[\vartheta_{23}]$

$i = 2 ; j = 3$

$Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $(I - Q)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

INVERSA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

⇒ SISTEMA;
⇒ SOSTITUISCO: $E[\vartheta_{23}] = 1 + P_{11} \cdot \left( \frac{E[\vartheta_{23}] \cdot (1 - P_{22}) - 1}{P_{21}} \right)$

$$E[\vartheta_{23}] \cdot \left( 1 - \frac{P_{11}(1 - P_{22})}{P_{21}} \right) = 1 - \frac{P_{11}}{P_{21}}$$

$$E[\vartheta_{23}] = \left( 1 - \frac{0,5}{0,2} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,5 \cdot (1 - 0,2)}{0,2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{100}} \cdot \frac{10}{\cancel{2}}}$$

$$= \cancel{-} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{-}1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$E[\vartheta_{13}] \cdot (1 - P_{11}) = 1 + P_{12} \cdot E[\vartheta_{23}]$$

$$E[\vartheta_{13}] = \frac{1 + P_{12} \cdot E[\vartheta_{23}]}{(1 - P_{11})} = \frac{1 + 0,2 \cdot 3/2}{1 - 0,5} = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{100}} \cdot \cancel{2} = \boxed{5}$$

⇒ VARIANZA: $\boxed{Var(E[\vartheta_{ij}]) = E[\vartheta_{ij}^2] - \{E[\vartheta_{ij}]^2\}}$

PUNTO b : $E[\vartheta_{31}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\vartheta_{31}] - 1) + \underset{0}{P_{32}} \cdot E[\vartheta_{21}^2] + \underset{0}{P_{33}} \cdot E[\vartheta_{31}^2]$

$$E[\vartheta_{31}^2] = 1 + 2 \cdot (1 - 1) = 1$$

$$Var(E[\vartheta_{31}]) = 1 - (1)^2 = \boxed{0} \quad \#$$

PUNTO C :

$$\begin{cases} E[\vartheta_{13}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\vartheta_{13}] - 1) + P_{11} \cdot E[\vartheta_{13}^2] + P_{12} \cdot E[\vartheta_{23}^2] \\ E[\vartheta_{23}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\vartheta_{23}] - 1) + P_{21} \cdot E[\vartheta_{13}^2] + P_{22} \cdot E[\vartheta_{23}^2] \end{cases}$$

$$E[\vartheta_{23}^2] \cdot (1 - P_{22}) = 1 + 2(3/2 - 1) + 0,2 \cdot E[\vartheta_{13}^2]$$

SOSTITUISCO:

$$E[\vartheta_{13}^2] = 1 + 2 \cdot (5 - 1) + 0,5 \cdot E[\vartheta_{13}^2] + 0,2 \cdot \frac{1 + 1 + 0,2\, E[\vartheta_{13}^2]}{1 - 0,2}$$

$$E[\vartheta_{13}^2] \cdot \underbrace{\left( 1 - 0,5 - \frac{\cancel{2}\cancel{2}^{2}}{10\,\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{8}} \right)}_{3/10} = 1 + 8 + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}} \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{8}_2} = 1 + 8 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

$$E[\vartheta_{13}^2] = \frac{10}{3} \cdot \frac{19}{2} = \frac{190}{6}$$

$$Var(E[\vartheta_{13}]) = \frac{190}{6} - 25 = \frac{190 - 150}{6} = \frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{6}_3} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

d) $\Rightarrow P[X(1)=1; X(3)=1 \mid X(2)=2] = \dfrac{P[X(1)=1; X(3)=1; X(2)=2]}{P[X(2)=2]} =$

$\Rightarrow [X(0)=3] \Rightarrow \dfrac{P[X(1)=1; X(2)=2; X(3)=1 \mid X(0)=3]}{P[X(2)=2 \mid X(0)=3]}$

$= \cancel{P_{31}} \cdot \cancel{P_{12}} \cdot P_{21} \Big/ P_{32}^{(2)} = \cancel{P_{31}} \cdot \cancel{P_{12}}$ (solo questo) $= P_{21}$

$\Rightarrow P[X(2)=2 \mid X(1)=1; X(3)=1] = \dfrac{P[X(2)=2; X(1)=1; X(3)=1]}{P[X(1)=1; X(3)=1]}$

$[X(0)=3]$

$\Rightarrow = \dfrac{P[X(1)=1; X(2)=2; X(3)=1 \mid X(0)=3]}{P[X(1)=1; X(3)=1 \mid X(0)=3]} =$

E2 - 22-09-2005 ?

③ CODA con arrivi di Poisson di intensità $\lambda = 1$ pck/sec.

└ ~~[illegible]~~ 1) 2 pcks in coda;
(TUTTI i pcks TRASMESSI) 2) 1 pck con tempo di attesa = 2 sec.

$\Rightarrow$ ARRIVA un pck $\Rightarrow$ la coda si svuota se ce n'è già uno in coda o se il pck che è in coda ha troppo ritardo;

a) calcolare la percentuale di tempo durante la quale la coda è vuota;

b) media del ritardo di un pck (tempo medio in coda);

a) $[\%\ \text{VUOTA}] = \dfrac{E[\text{tempo VUOTA}]}{E[\text{tempo VUOTA}] + E[\text{tempo PIENA}]} = P[\text{CODA VUOTA}]$

⇒ per un processo di arrivi di Poisson di parametro $\lambda$ ⇒ i tempi di interarrivo son $\sim \mathcal{E}(\lambda)$;

↳ i tempi medi di interarrivo sono: $\boxed{1/\lambda} = 1$ sec. ; $Y$ = tempo di interarrivo

$\boxed{f_Y(t)=\lambda e^{-\lambda t}}$ $\quad F_Y(t) = P[Y \le t] = 1 - e^{-\lambda t}$

⇒ devo ora integrare tra 0 e 2 che sono tutti valori di tempo per i quali la coda può essere piena: (PCK in coda)

$$E[T_{CODA\ PIENA}] = \int_0^2 \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^2 = -\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}\left(e^{-2\lambda}-1\right) = \left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{\cancel{\lambda}}\right)$$

$$= \left(\text{tempo medio per avere il } 1^{o} \text{ arrivo}\right)$$

$$E[T_{CODA\ VUOTA}] = \frac{1}{\lambda}$$ ⇒ tra un arrivo e l'altro ho in media $1/\lambda$ sec.

$$P[\text{CODA VUOTA}] = \left\{ E[T_{VUOTA}] \Big/ E[T_{VUOTA}] + E[T_{PIENA}] \right\} = \left( 1/\lambda \Big/ 1/\lambda + 1 - e^{-2\lambda} \right)$$

(se non è vuota ⇒ si scarta istantaneamente)

b) RITARDO MEDIO = $E[T_{TOT.}] \cdot P[\text{CODA VUOTA}] + 0 \cdot P[\text{CODA NON VUOTA}]$

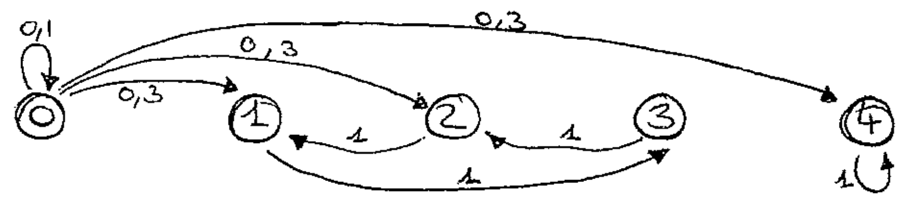
$$= \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1-e^{-2\lambda}}{\cancel{\lambda}}\right) \cdot \frac{1}{2-e^{-2\lambda}} = \frac{1-e^{-2}}{2-e^{-2}}$$

E1 - 02-09-2005

④ cdM:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) disegnare il diagramma di trans.; class. gli stati ed indiv. le classi;




4: STATO ASSORBENTE; RICORRENTE (positivo); APERIODICO;

STATI ASSORBENTI $\{1;2;3\}$: classe; $d(1)=d(2)=d(3)=3$; RICORRENTI (positivi); PERIODICI;

0: STATO TRANSITORIO;

b) prob. di assorb. nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori;

A : 0

B : 1, 2, 3

C : 4

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}1 & \overset{(0{,}3+0{,}3)}{0{,}6} & 0{,}3 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ASSORBENTI}$$

VERSO B: $\mu_A = 0{,}1\,\mu_A + \underbrace{0{,}6\,\mu_B}_{\mu_B=1} + 0{,}3\,\underbrace{\cancel{\mu_C}}_{\mu_C=0}$

VERSO C: $\mu_A = 0{,}1\,\mu_A + 0{,}\underbrace{\cancel{6\mu_B}}_{\mu_B=0} + 0{,}3\,\underbrace{\mu_C}_{\mu_C=1}$

1: $\mu_A = 0{,}1\,\mu_A + 0{,}6$

$\mu_{A\,(1,2,3)} = \frac{0{,}6}{0{,}9} = \frac{2}{3}$ ; 2: $\mu_{A\,(4)} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$

c) calcolare, $\lim_{n\to\infty} P^n =$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & X & X & X & \mu_{A(4)}\cdot\pi_4 \\ 1 & 0 & X & X & X & 0 \\ 2 & 0 & X & X & X & 0 \\ 3 & 0 & X & X & X & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{array}$$

{stati trans. verso classe periodica e stati della classe periodica verso la stessa classe}

(stati transitori verso classe periodica)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & \mu_{A(1,2,3)}\,\pi_1 & \mu_{A(1,2,3)}\,\pi_2 & \mu_{A(1,2,3)}\,\pi_3 & \mu_{A(4)}\cdot\pi_4 \\ 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{array}$$

al posto delle X c'è (1/PERIODO)

(SISTEMA per le $\pi_i$)

classe periodica (stati verso la stessa classe)

⇒ per i sistemi delle $\pi_i$ considero solo le sottomatrici degli stati della classe; CON LA COND. di NORMALIZZAZIONE;

$$1: \begin{cases} \pi_4 = \cancel{\quad} + \pi_4 \\ \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_4 = 1$$

$$2: \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\cdot\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$

⇒ per i tempi medi di RICORRENZA: $M_i = \frac{1}{\pi_i}$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 3$$
$$M_4 = 1$$

E4 - 02-09-2005

⑤ PROTOCOLLO GO-BACK-N su un canale Markoviano a 2 stati con prob. di transizione 0,99 (dallo stato buono a se stesso) e 0,1 (dallo stato cattivo allo stato buono);

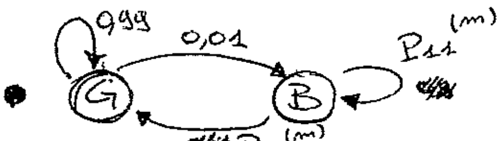
↳ la prob. che un pck sia errato è = 1 nello stato cattivo;
" " " " " " " = 0 " " buono;

↳ il tempo di ROUND-TRIP-TIME è $m = 2$ slot (pck errato a $t$ verrà ritrasmesso al tempo $t+m$)

a) calcolare il throughput nel caso di feedback perfetto (senza errori);

b) " " " " " " " " " soggetto ad errori indipendenti con prob. 0,1;

a)




$$P[\text{pck errato} \mid G] = 0 \;;\; P[\text{pck errato} \mid B] = 1$$

⇒ ogni volta che c'è un pck errato c'è un salto di $m-1$ slot

↳ il processo è semi-Markoviano ⇒ certe ~~fasi~~ transizioni avvengano in un passo mentre altre in $m$;

metriche: n° successi $\begin{cases} 1\ ; \text{ in } G \\ 0\ ; \text{ in } B \end{cases}$ tempo $\begin{cases} 1\ ; \text{ in } G \\ m\ ; \text{ in } B \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\text{n° successi per slot}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_i (\pi_i \cdot R_i)}{\sum_i (\pi_i \cdot T_i)}$$

$$\pi_0 = \frac{P_{10}^{(m)}}{P_{10}^{(m)} + P_{01}} \quad ; \quad \pi_1 = \frac{P_{01}}{P_{10}^{(m)} + P_{01}}$$

$$\Rightarrow \left[ n^\circ \text{ succ. per slot} \right] = \frac{\pi_0 \cdot 1 + \pi_1 \cdot 0}{\pi_0 \cdot 1 + \pi_1 \cdot m} = \left( \frac{\pi_0}{\pi_0 + m \cdot \pi_1} \right) = \frac{P_{10}^{(m)}}{P_{10}^{(m)} + m \cdot P_{01}}$$

(THROUGHPUT)

$\Downarrow$

(il feedback è perfetto ma in ANDATA ho comunque errori MARKOVIANI)

$$\begin{cases} \pi_0 = P_{00} \cdot \pi_0 + P_{10}^{(m)} \cdot \pi_1 \\ \pi_1 = P_{01} \cdot \pi_0 + P_{11}^{(m)} \cdot \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{m = 2}}$$

$$P^m = \begin{pmatrix} P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} \\ P_{10}^{(m)} & P_{11}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}99 \cdot 0{,}99 + 0{,}01 \cdot 0{,}1 & \overbrace{0{,}99 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}9}^{0{,}108} \\ 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}99 & 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la matrice che mi interessa:

$$P' = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}0999 & 0{,}081 + 0{,}001 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}0999 & 0{,}082 \end{pmatrix}$$

$$THR = \left[ 0{,}0999 / 0{,}0999 + 2 \cdot 0{,}01 \right] = 0{,}833$$

---

se gli errori sono i.i.d., $\varepsilon$ = prob. di errore sul canale

$$C = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = C^m$$

$\Downarrow$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + m \cdot \varepsilon} = THR$$

(con errori indipendenti sul canale di andata)

$\longrightarrow$ ERRORI i.i.d. SUL CANALE DI ANDATA (feedback perfetto)

---

$\longrightarrow$ ERRORI MARKOVIANI in ANDATA e RITORNO

$$C_f = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}$$

metriche:

$$\begin{cases} R = 1 & \text{per } 00 \\ R = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 1 & \text{per } 00 \\ T = m & \text{altrimenti} \end{cases}$$

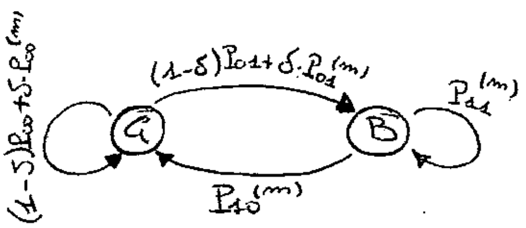
| | 00 | 01 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $P_{00} P_{00}$ | $P_{00} P_{01}$ | $P_{01} P_{00}$ | $P_{01} P_{01}$ |
| 01 | $P_{00}^{(m)} P_{01}^{(m)}$ | $P_{00}^{(m)} P_{11}^{(m)}$ | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |

$$THR(\text{MARK andata e ritorno}) = \lim_{t\to\infty} R(t) = \frac{\pi_{00}}{\pi_{00}\cdot 1 + m\cdot(1-\pi_{00})}$$

→ ERRORI MARKOVIANI in ANDATA e i.i.d. in RITORNO

sia $\delta$ = prob. di errore

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 00 & P_{00}(1-\delta) & P_{00}\cdot\delta & P_{01}\cdot(1-\delta) & P_{01}\cdot\delta \\ 01 & P_{00}^{(m)}(1-\delta) & P_{00}^{(m)}\cdot\delta & P_{01}^{(m)}(1-\delta) & P_{01}^{(m)}\cdot\delta \\ 10 & P_{10}^{(m)}(1-\delta) & P_{10}^{(m)}\delta & P_{11}^{(m)}(1-\delta) & P_{11}^{(m)}\cdot\delta \\ 11 & P_{10}^{(m)}(1-\delta) & " & " & " \end{array}$$




⇒ sono in G: con prob. $(1-\delta)$ ; guad. = 1; tempo = 1

con prob. $\delta$ ; guad. = 0; tempo = $m$

$R_G = (1-\delta)$ ; $T_G = (1-\delta+m\cdot\delta)$

⇒ sono in B: guadagno = 0; tempo = $m$

$R_B = 0$ ; $T_B = m$

$$THR(\text{MARK. andata - i.i.d. RITORNO}) = \frac{\sum \pi_i R_i}{\sum \pi_i T_i} = \frac{\pi_G(1-\delta)}{\pi_G(1-\delta+m\delta)+\pi_B\cdot m}$$

$$= \frac{P_{10}^{(m)}\cdot(1-\delta)}{P_{10}^{(m)}\cdot(1-\delta+m\delta) + m\left[(1-\delta)P_{01}+\delta P_{01}^{(m)}\right]}$$

→ ERRORI i.i.d. ANDATA e RITORNO

$$THR(\text{i.i.d. andata - ritorno}) = \frac{(1-\varepsilon)\cdot(1-\delta)}{(1-\delta)\cdot(1-\varepsilon)+m\cdot\left(1-(1-\delta)(1-\varepsilon)\right)}$$

~~→ ERRORI i.i.d. ANDATA - feedback PERFETTO~~

~~THR(i.i.d. andata - feedback perfetto) = 1 - ε~~

equivalente ad un canale con errori i.i.d. in andata con:
$\varepsilon' = 1-(1-\varepsilon)\cdot(1-\delta)$ ; e feedback perfetto

b) in questo caso; MARK. andata - i.i.d. ritorno

$$THR = \frac{0{,}099 \cdot (1-0{,}1)}{0{,}099\,(1-0{,}1+0{,}2)+2\cdot\big((1-0{,}1)\cdot 0{,}01 + 0{,}1\cdot 0{,}108\big)} = 0{,}6$$

$\delta$ = prob. di errore = 0,1

E2 - 02-09-2005

?

6) FABBRICA con 2 MACCHINE UGUALI;

→ si alternano periodi di funz. e guasto con durata esponenziale con media: $1/\alpha = 8$ GIORNI (FUNZIONAMENTO)
$1/\beta = 1/4\alpha$ (ROTTURA)

→ MACCHINE indipendenti; PRODUZIONE ⇒ 12 pezzi/ora (se funzionante)

a) - fraz. di tempo in cui la prod. è ferma;
- durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione è ferma;

TEMPO

$$P[1 \text{ MACCH. è ferma}] = \frac{1/\beta}{1/\beta+1/\alpha} = \frac{2}{10} = \frac{2}{10}$$

$$P[2 \text{ MACCH. ferme}] = P[\text{PROD. FERMA}] \Rightarrow \text{sono indipendenti}$$

$$\rightarrow \quad = P[G_1]\cdot P[G_2] = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

→ $T_g$ = tempo in cui entrambe le macchine sono guaste
→ i tempi di rottura sono esponenziali e uguali per entrambe le macchine; ⇒ esponenziale CON PARAMETRO DOPPIO; (o in genere la somma dei due)

$$E[T_g] = \frac{1}{\beta+\beta} = \frac{1}{2\beta} = 1 = \left(\frac{1}{4\cdot 2\cdot \alpha}\right)$$

⇒ $T_1$ = tempo in cui funz. una sola macchina

$$E[T_1] = \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{5}$$

$\alpha = \frac{1}{8}$; $\beta = \frac{1}{2}$

N.B.

$$\Rightarrow P\left[1 \text{ MACCH. FUNZ.}\right] = \frac{1/(\alpha+\beta)}{\underbrace{1/2\alpha}_{\text{2 FUNZ.}} + \underbrace{1/2\beta}_{\text{2 GUASTE}} + \underbrace{1/(\alpha+\beta)}_{\text{1 FUNZ. - 1 GUASTA}}}$$

$$= \frac{8/5}{4+1+8/5} = \frac{8}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{33} = \frac{8}{33}$$

$$\Rightarrow P\left[2 \text{ MACCH. FUNZ.}\right] = \frac{1/2\alpha}{1/2\alpha + 1/2\beta + 1/(\alpha+\beta)} = \frac{4}{4+1+8/5} = 4\cdot\frac{5}{33} = \frac{20}{33}$$

b) $$\left[\text{N° MEDIO PEZZI in 1 ora}\right] = 12\cdot\frac{8}{33} + 24\cdot\frac{20}{33} = \frac{96}{33} + \frac{480}{33} = 17,45 \left[\text{pezzi/ora}\right]$$

$\lambda$ = uguali = 12 pezzi/ora

c) $$\left[\text{N° MEDIO pezzi in 1 ora}\right] = 12\cdot\frac{8}{33} + 30\cdot\frac{20}{33} = \frac{96}{33} + \frac{600}{33} = 21,09 \left[\frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}\right]$$

$\lambda_1 = 12 \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}$ ; $\lambda_2 = 30 \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}$

---

ALTRE DOMANDE: dato un T fissato

→ $P\left[T_g > T\right] = 1 - \left(1 - e^{-2\beta T}\right) = e^{-2\beta T}$

→ $P\left[T_1 > T\right] = e^{-(\alpha+\beta)T}$

→ dato che una macchina è rotta e l'altra funziona si vuole la prob. che quella ~~detta~~ funz. si rompa prima che l'altra venga agg.;

$T_a$ = tempo agg. , $T_r$ = tempo rottura di quella funz.

$$P\left[T_r < T_a\right] = \int_0^{\infty} P\left[T_a > T_r \mid T_r = t\right]\cdot P\left[T_r = t\right] dT_r =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{P\left[T_a > t\right]}_{\text{cioè il tempo che la macch. sta guasta} < t} \underbrace{dF_{T_r}}_{} = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\beta t}}_{}\cdot \underbrace{\alpha\cdot e^{-\alpha t}}_{\text{cioè la distr. di prob. del tempo di funz. della macch. funz.}} dt = \int_0^{\infty} \alpha\cdot e^{-(\alpha+\beta)t} dt =$$

$$= \left(\alpha/\alpha+\beta\right) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha+\beta)\cdot e^{-(\alpha+\beta)t}\, dt}_{1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

E2 - 19-06-2006

## (7) NODO di RETE

1 Gbps → condiz. NORMALI ; $\left[\text{tempo funz. normale}\right] \sim \mathcal{E}(\mu)$; $\frac{1}{\mu} = 99T$

250 Mbp → stato di allarme ⇒ $\left[\text{tempo stato di allarme}\right] = T$ (media)

→ dopo T in allarme ⇒ riparazione istantanea; ⇒ funz. normale

a) $\left[\text{fraz. del tempo che il nodo passa in stato di allarme}\right] = \frac{T}{99T+T} = \frac{1}{100} = P\left[\text{stato di allarme}\right]$

↳ $\left[\text{traffico medio smaltito}\right] = 1\text{ Gbps}\cdot\frac{99}{100} + 250\text{ Mbps}\cdot\frac{1}{100}$

// (code sempre piene ⇒ sempre pkts da TX) $= 992500\text{ bps} = 992{,}5\text{ Mbps}$

b) ↳ una volta in allarme il nodo smette di funz. dopo un tempo esp. con media 2T ⇒ a meno che NON venga riparato ⇒ con un tempo T (medio);

↳ se smette di funz. deve essere sost. e questo richiede 20T (medio) ⇒ NO TRAFFICO

→ tempo medio fra 2 sost. successive;

→ perc. di tempo durante il quale il nodo NON funziona;

→ THR del sistema;

c)

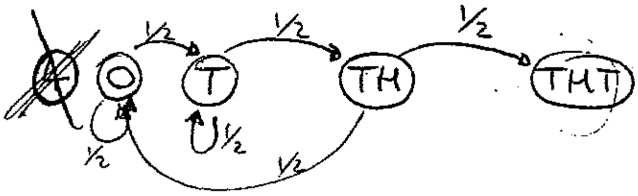
$\Rightarrow$ $T_a$ = tempo aggiustamento della macchina rotta;

$T_r$ = " rottura " " funzionante

$$\mathbb{P}[T_r < T_a] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T_a > T_r \mid T_r = t] \cdot \mathbb{P}[T_r = t] \, dT_r =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T_a > t] \, dF_{T_r} = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t} \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \alpha \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \, dt = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha+\beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \, dt}_{1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \frac{1}{10}$$




DEVO OTTENERE THT

THT = stato assorbente

a)

$\Rightarrow$ tempo medio per arrivare a THT $\Rightarrow$ = tempo primo passaggio in THT

$$\begin{cases} V_O = 1 + \frac{1}{2} V_O + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T + \frac{1}{2} V_{TH} \\ V_{TH} = 1 + \frac{1}{2} V_O \end{cases} \quad \text{RISOLVO} \;\; \text{---} \;\; \boxed{V_O = 10} \Rightarrow V_{TH} = 6 \Rightarrow V_T = 8$$

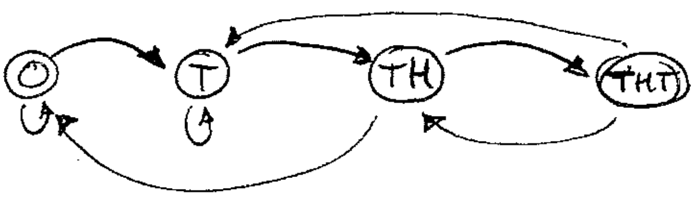
b)


$$\begin{cases} V_O = 1 + \frac{1}{2} V_O + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $V_T = 2$; $V_O = 4$

(oppure dato che NON tornano indietro ho tempi geometrici da O a T e da T a TH $\Rightarrow$ SOMMO)

c)




LANCIO RIPETUTAMENTE

PUNTI DI LANCI $\Rightarrow R(N) \longrightarrow (\pi_{TH} - \pi_{THT}) \cdot N$

VISITE

$\rightarrow \sigma$: RISOLVO le CATENE

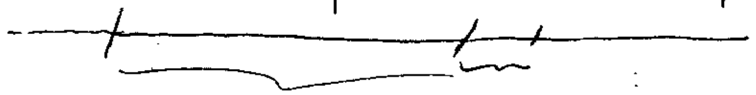
$\rightarrow \sigma$: cerco la prob. che COMINCI una certa COMBINAZIONE:

$\Rightarrow$ lanci indipendenti: $\pi_{THT} = \frac{1}{8}$ ; $\pi_{TH} = \frac{1}{4}$

$\hookrightarrow R(N) \longrightarrow \frac{N}{8} \Rightarrow \lim_{N \to \infty} R(N) = \infty$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{R(N)}{N} = \frac{1}{8}$$

NODO di rete: esercizio. E2 − 19-06-2006

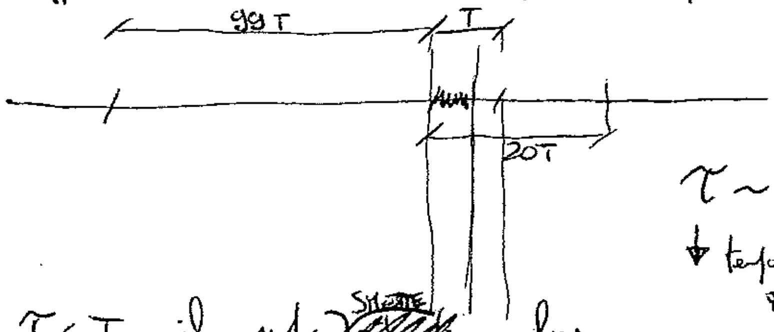



a) ~~[illegible]~~ fraz. del tempo che si passa nello stato di allarme:

$$\frac{T}{(99+1)T} = \frac{1}{100}$$

$\hookrightarrow$ traffico MEDIO smaltito: $0{,}99 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 0{,}25 = 0{,}9925$ Gbps

b)




$\tau \sim \mathcal{E}(\text{media } 2T)$

$\downarrow$ tempo dopo il quale non FUNZ. PIU'

$\Rightarrow$ se $\tau < T$ il nodo SMETTE a funz.

$\Rightarrow$ se $\tau \geq T$ il nodo riprende a funz. al tempo $T \Rightarrow$

$$\Rightarrow P[\tau < T] = 1 - e^{-1/2}$$

$$\Rightarrow (1-e^{-1/2}) \cdot \left( 99T + \frac{\int_0^T e^{-\tau/2T}\, d\tau}{1-e^{-1/2}} + 20T \right) + \left(e^{-\frac{1}{2}} \cdot 100T\right)$$

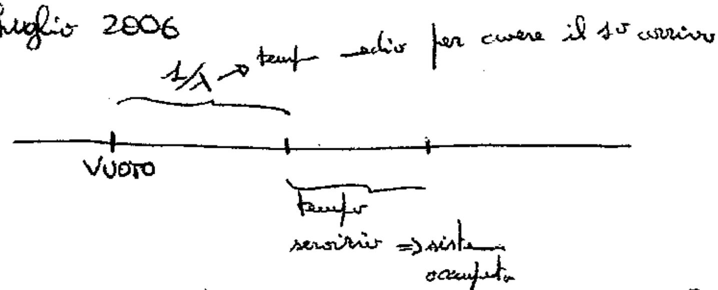
$$\left( E[\tau] = \int_0^{+\infty} P[\tau > a]\, da = \int_0^T e^{-a/2T}\, da \right)$$

---

$1$ Mbps; $\lambda = 500$ pck/sec. $L = 1000$ bit

E2 - 14 luglio 2006

a) throughput:




$$E[T_{vuoto}] = \frac{1}{500} = 2\ \text{ms}$$

$$E[T_{occ.}] = 1\ \text{ms}$$ ⇒ tempo medio di occup. determina il THROUGHPUT ⇒ $\frac{1\ \text{ms}}{(1+2)\ \text{ms}} = \frac{T_{occ.}}{T_{TOT.}} = \frac{1}{3}$

$\hookrightarrow$ $THR = \frac{1}{3} \cdot 1\ \text{Mbps} = 333{,}3\overline{3}$ kbps

b) TEMPO di accesso:

$$P[\text{accesso IMMEDIATO}] = 2/3$$

$$P[\text{accesso al K-esimo tentativo}] = \left(\frac{1}{3}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \quad ; K \geq 1$$

$$E[\text{n° medio di tentativi}] = \frac{3}{2}$$

⇒ tempo medio di accesso = [tempo medio da un tent. ad un altro] · [n° medio di tentativi − 1]

$$= \frac{100}{\lambda} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{50}{\lambda} = 0{,}1\ \text{sec.}$$

c) GUADAGNO :

TX = +1 UNITÀ DI GUADAGNO

FALLIMENTO sull'accesso = −0,2 UNITÀ DI GUADAGNO

$$\left.\begin{array}{l} P[\text{accettato}] = \frac{2}{3} \\ P[\text{rifiutato}] = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{vedi sistema VUOTO – OCCUPATO}$$

$$\left(\text{GUAD. TOT. del sistema}\right) = \lambda \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,2\right) = 300 \left(\frac{\text{unità di guad.}}{\text{sec.}}\right)$$

---

E3: 14 Luglio/06

⇒ CODA $M/G/\infty$

a) $\left(n^\circ \text{ utenti in sala alla chiusura}\right) \sim \mathcal{P}(\lambda)$ → CALCOLATO con le FORMULE

$$\lambda/\mu = \underbrace{\frac{10\,(\text{clienti}/h)}{} \cdot 25 \text{ minuti}}_{} = 25/6$$

$\mu$ = tempo medio di permanenza

$$P[\text{sala vuota alla chiusura}] = e^{-25/6} = 0{,}0155$$

ASINTOTICA

↳ È LA STESSA dopo un certo tempo

E2 - 14-07-2006

(8) <u>ES.2</u> LINK : 1 Mbps ; condiviso con clienti che producono traffico con COLLETTIVAMENTE con un processo di POISSON di $\lambda = 500 \frac{pck}{sec}$

$L = 1000$ bit (costante) ; PROTOCOLLO CSMA ideale

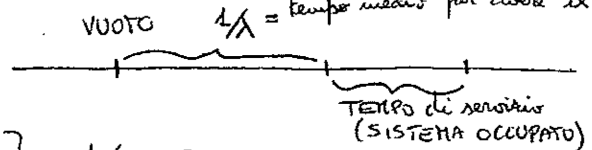
⇒ cioè : - pck generato con canale libero ha accesso immediato.
- pck che trova il canale occupato se ne prova la TX dopo un tempo $\sim \mathcal{E}(..)$ con media $100/\lambda$

↳ se ancora occupato si ritenta a tempi casuali finché non si trova il canale libero;

⇒ TRAFFICO TOTALE (nuovi ~~più~~ + ritrasmissioni) $\sim \mathcal{P}(\lambda)$

$1/\lambda$ = tempo medio per avere il 1° arrivo ⇒ tempi interarrivo $\sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow$ MEDIA $= \frac{1}{\lambda}$

a) THR :




$$E[T_{VUOTO}] = 1/\lambda = 2\ ms$$

$$E[T_{OCCUP.}] = \frac{L}{C} = 1\ ms \qquad \Rightarrow THR = \frac{1}{3} \cdot 1\ Mbps = 333{,}\bar{3}\ Kbps$$

$$\Rightarrow \left[\%\ \text{tempo che il sistema resta occupato}\right] = \frac{E[T_{occ.}]}{E[T_{occ.}] + E[T_{VUOTO}]} = \frac{1}{3} = P[\text{sist. occup.}]$$

b) ritardo medio di accesso da quando un pcK è generato a quando riesce ad accedere al canale;

$$\left[\begin{matrix}\text{\% tempo sistema} \\ \text{vuoto}\end{matrix}\right] = \frac{E[T_{vuoto}]}{E[T_{vuoto}] + E[T_{occ.}]} = \frac{2}{3} = P[\text{accesso immediato}] \overset{!}{=} P[\text{sistema vuoto}]$$

$$P[\text{accesso al K-esimo tentativo}] = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \quad ; K \geq 1 \; ; p = \frac{2}{3}$$

$\Downarrow$ dalla teoria sulla V.A. $\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{n° medio di} \\ \text{tentativi}\end{matrix}\right] = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{tempo medio di} \\ \text{accesso}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\text{tempo medio tra un} \\ \text{tent. ed un altro}\end{matrix}\right] \cdot \underbrace{\left[\begin{matrix}\text{n° medio di} \\ \text{tent. } - 1\end{matrix}\right]}_{\text{all'ultimo ho successo e TX}} = \frac{100}{\lambda} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{50}{\lambda}$$

( SE L'ACCES[illegible] [illegible] IMMEDIATO $\Rightarrow$

[illegible] = {[illegible] [canale occupato] + [illegible] }

c) se TX ha guadagno 1 e ogni tent. fallito (pcK generato su canale occupato) COSTO 0,2

$\hookrightarrow$ guad. totale del sistema (in unità al secondo);

$P[\text{accettato}] = P[\text{sist. vuoto}] = 2/3$

$P[\text{rifiutato}] = P[\text{sist. occup.}] = 1/3$

$$[\text{GUAD. TOTALE}] \overset{!}{=} \lambda \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}2\right) = 300 \left[\frac{\text{unità}}{\text{sec}}\right]$$

$$= \lambda \cdot \left(P[\text{accett.}] \cdot G + P[\text{rifiut.}] \cdot c\right) =$$

E3 - 25-07-2005

(9) ES.3 NEGOZIO: apertura e chiusura si alternano con durata esponenziale e media $\alpha = 12$ ore;

↳ tempi di ap. e chius. indipendenti e NON dip. dal giorno e dall'ora;

↳ aperto da molti anni;

a) prob. che un cliente al tempo $t$ trovi chiuso;

$$\underset{[\%\ \text{tempo aperto}]}{P[\text{aperto}]} \overset{!}{=} \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/\alpha} = \frac{1}{2} = \underset{[\%\ \text{tempo chiuso}]}{P[\text{chiuso}]}$$

b) clienti arrivano con un processo di Poisson con $\lambda = 10$ clienti/ora dalle 8 alle 20 e $\lambda' = 2$ clienti/ora dalle 20 alle 8;

$\Rightarrow$ [n° medio di clienti che trovano il negozio chiuso in 24 ore] ; sia $X(t)$ V.A. di Poiss. che conta il n° di arrivi/clienti

$N_1$ = n° clienti che trovano chiuso dalle 8 alle 20;

$$M(t) = E[N_i] = \sum_{k=0}^{+\infty} E[N_i \mid X(t) = k] \cdot P[X(t) = k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left[ \mathbb{1}\{\text{utente } n \text{ trova chiuso}\} \right] \cdot P[X(t) = k] =$$

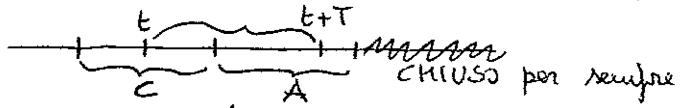
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2} \cdot P[X(t) = k] = \frac{1}{2} \cdot [\text{n° MEDIO di arrivi nell'intervallo } [8;20]]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda_{1,2}\, \Delta t = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60\ [\text{clienti}] \\ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 12\ [\text{clienti}] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ [in TOTALE il n° di clienti che trova chiuso in 24 ore] $= (60 + 12)$ clienti $= 72$ [clienti]

( INTERVALLI indip. - arrivi indip. $\Rightarrow$ ARRIVI $\cdot$ P[aperto o chiuso] )

c) al tempo $t$ un cliente trova chiuso; prossima apertura è l'ultima; se il cliente torna dopo $T$, prob. che trovi aperto;




$P$[al tempo $(t+T)$ sia aperto $\mid t$ è chiuso] $\Rightarrow$ considero le aperture e le chiusure come un processo di arrivi di eventi con: i tempi di interarrivo $\sim \mathcal{E}(-)$ e media $\alpha = 12$ ore $\Rightarrow$ è un processo di Poisson con $\lambda = \frac{1}{12}$ [eventi/ora]

$\Downarrow$

PARAMETRO $= \mu = 1/12$

$\Rightarrow P[\text{aperto a } (t+T) \mid \text{chiuso a } t] = P[1 \text{ evento A-C in un tempo } T] =$

$= (\lambda T)^K \cdot \dfrac{e^{-\lambda T}}{K!}$ ; con $K = 1$

$= \left(\lambda T \cdot e^{-\lambda T}\right)$

d) a le cond. del punto precedente; il cliente ha una sola possibilità di tornare; calcolare la scelta migliore di T cioè quella che massimizza la prob. di trovare aperto;

$$\frac{d}{dT}\left(\lambda T \cdot e^{-\lambda T}\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda T} + \lambda T(-\lambda) \cdot e^{-\lambda T} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda T = 1 \quad \Rightarrow \quad T = 1/\lambda = \alpha = 12 \text{ [ore]}$$

E2 - 17-06-2005

Es. 2

## 10 SUPERMERCATO : arrivi clienti con un processo di Poisson con $\lambda = 10$ [clienti/ora]

↳ orario: 8 → 20

a) prob. che dalle 8 alle 9 arrivi un solo cliente; n° medio totale di clienti arrivati fra le 8 e le 9,

$\rightarrow P[1 \text{ solo cliente dalle 8 alle 9}] = P[1 \text{ arrivo in } 1 \text{ ora}] =$

$= (\lambda \cdot \Delta t)^K \cdot \dfrac{e^{-\lambda \cdot \Delta t}}{K!} = (\lambda \cdot e^{-\lambda})$ ; $\Delta t = 1$ [ora] , $K = 1$ [cliente]

$\rightarrow$ [n° medio di clienti in 1 ora] $= \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot 1 = 10$ [clienti]

b) saputo che dalle 8 alle 12 arrivano 50 clienti; calcolare la prob. che dalle 8 alle 9 ne siano arrivati 10 e che dalle 8 alle 14 ne siano arrivati 60;

$\rightarrow P[8\text{-}9 \ 10 \text{ clienti} \mid 8\text{-}12 \ 50 \text{ clienti}] = \binom{50}{10} \cdot \left(\dfrac{1}{12}\right)^{10} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{12}\right)^{(50-10)}$

$p = \left[\text{prob. intervallo } 8\text{-}9\right] = \dfrac{1}{12}$

→ gli arrivi sono indipendenti :

$$P\left[\text{8-14 60 clienti} \mid \text{8-12 50 clienti}\right] = P\left[\text{12-14 10 clienti}\right] =$$

$$= (\lambda \Delta t')^{K} \cdot \frac{e^{-\lambda \Delta t'}}{K!} \quad \Rightarrow \text{con} \quad \begin{array}{l} K = 10 \text{ [clienti]} \\ \Delta t' = 2 \text{ [ore]} \end{array}$$

$$= (2\lambda)^{10} \cdot \frac{e^{-2\lambda}}{10!}$$

⇒ (⊛ se l'intervallo scelto è "DENTRO" quello della condizione si fa con una: $\underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{BINOMIALE}}$ ; $n$ = arrivi condiz.
$K$ = arrivi interv. scelto
$p$ = prob. interv. scelto $= \frac{\text{DIM (interv.)}}{\text{DIM (totale)}}$

⊛ se l'intervallo scelto "COMPRENDE" quello della condizione si spezza la probabilità; )

ALTRE DOMANDE : [~~...~~ il tempo speso nel supermercato] $\sim \mathcal{E}(\mu)$ ; media = 5 [min]

n° casse infinito ⇓ NO coda

[tempo passato alla cassa] $\sim \mathcal{U}[0{,}5 ; 2{,}5]$

→ calcolare il: [n° medio di clienti usciti dal negozio tra le 8 e le 12]

⇒ | i clienti ...

5 [minuti]

[min] 1,5 = E[ ...

~~ℓℓℓℓℓℓℓ~~ E3 - 14-07-2006

X

**(11) MOSTRA:**
- arrivi di Poisson con $\lambda = 10$ [clienti/ora]
- tempo passato da ogni visitatore $\Rightarrow \sim \mathcal{U}(20;30)$
- sala infinitamente grande $\Rightarrow$ NO CODA;
- orario di apertura 8 - 18;

a) P [PRIMA MEZZ'ORA arrivino meno di 3 visitatori] =

$$P[0,1,2 \text{ arrivi}] = \binom{\text{SONO}}{\text{indip.}} = \left[\frac{(\lambda\cdot\Delta t)^0 \cdot e^{-\lambda\Delta t}}{0!} + \frac{(\lambda\cdot\Delta t)^1\cdot e^{-\lambda\Delta t}}{1!} + \frac{(\lambda\Delta t)^2\cdot e^{-\lambda t}}{2!}\right]$$

$\Delta t = 30$ min $\stackrel{!}{=} \boxed{0,5 \text{ ora}}$ ← N.B. unità di MISURA COMPATIBILI con $\underline{\lambda}$.

b) ~~[illegible]~~
P[8.15 ci sia un solo visitatore in sala] ~~[illegible]~~

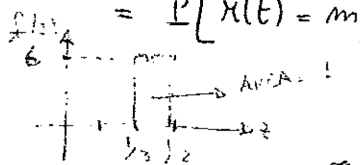
↳ il tempo di servizio è uniforme tra 20 e 30 min ; $\Rightarrow$ nei primi 15 minuti NON può uscire nessuno,

↳ P[di avere avuto un solo arrivo in 15 min.] $= \dfrac{(\lambda\Delta t')^1 \cdot e^{-\lambda\Delta t'}}{1!}$

$\Delta t' = 15$ min. $= 0,25$ [ora]

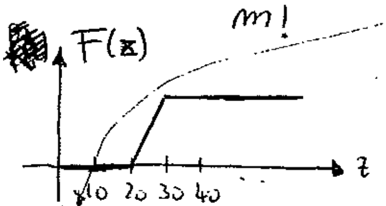
c) P[all'orario di chiusura la sala sia vuota] $\Rightarrow$ sia $n(t)$ = n° di presenze all'istante t

$$= P[n(t) = m] \Rightarrow P[n(18-8) = 0] = P[n(10) = 0] =$$

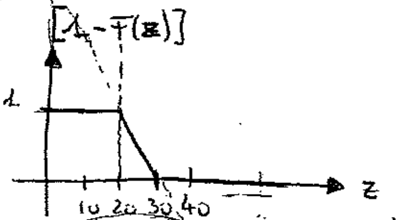


$$= \frac{(\lambda t_p)^m \cdot e^{-\lambda t_p}}{m!}$$

↳ con:



$\Rightarrow$



$$(\lambda t_p) = \lambda \cdot \int_0^{10}[1-G(z)]\,dz = \lambda\cdot\int_0^{10 \text{ ore}} \ldots =$$

10 → tempo considerato

(1/6 1/3 1/2) ← ORE!!

$$= \lambda\int_0^{1/3} 1\,dz + \lambda\int_{1/3}^{1/2} (3-6z)\,dz = \lambda z\Big|_0^{1/3} + \lambda\cdot\left(3z - 3z^2\right)\Big|_{1/3}^{1/2}$$

~~[illegible]~~

= (PIÙ SEMPLICE con AREA GEOMETRICA)

$$\stackrel{!}{=} \lambda\cdot\left(1\cdot(1/3) + \frac{1\cdot(1/2 - 1/3)}{2}\right)$$

$$\stackrel{!}{=} \lambda\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{5\cdot\lambda}{12}}$$

$= \cancel{\left(\frac{4+36-24-9\ 8+4}{24}\right)}$

E1 - 17-06-2005

(12) MACCHINA: 3 COMPONENTI UGUALI

- COMPONENTI con funz. $\sim \mathcal{E}(\alpha)$; dopo si guasta;
- la macchina funz. finché c'è almeno un COMP. FUNZ.;
- si ferma quando l'ultimo funz. si guasta;
- tempo di riparazione della macchina $\sim \mathcal{E}(\beta = 6\alpha)$ ⇒ DOPO TUTTI i componenti sono nuovi
  - (SOLO se tutti sono ROTTI)

a) ~~...~~ funz. di tempo in cui la macchina funz. con UNO, DUE e TRE componenti; e di quando la macchina è ferma;

~~...~~ $T_{F_c}$ = tempo di FUNZ. di un COMP.

$E[T_{F_c}] = 1/\alpha$ ; $T_{R_M}$ = tempo medio di riparazione della macchina $= 1/\beta = 1/6\alpha$

$[\text{tempo}^{\text{MEDIO}}\ 1\ \text{COMP.}] = 1/\alpha$

$[\text{tempo}^{\text{MEDIO}}\ 2\ \text{COMP.}] = 1/2\alpha$

$[\text{tempo}^{\text{MEDIO}}\ 3\ \text{COMP.}] = 1/3\alpha$

$[\text{tempo}^{\text{MEDIO}}\ \text{ferma}] = 1/\beta = 1/6\alpha$

$$\Rightarrow \underbrace{[\%\ \text{tempo}\ 1\ \text{COMP.}]}_{P[1\ \text{COMP.}]} = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1/3\alpha + 1/6\alpha} = \frac{6}{12} = 1/2$$

$$\underbrace{[\%\ \text{tempo}\ 2\ \text{COMP.}]}_{P[2\ \text{COMP.}]} = 3/12 = 1/4$$

$$\underbrace{[\%\ \text{tempo}\ 3\ \text{COMP.}]}_{P[3\ \text{COMP.}]} = 2/12 = 1/6$$

$$\underbrace{[\%\ \text{tempo ferma}]}_{P[0\ \text{COMP.}] = P[\text{PROD. FERMA}]} = 1/12$$

b) prod. media di pezzi all'ora se: $\left.\begin{array}{l}\lambda_{1c} = 5 \\ \lambda_{2c} = 12 \\ \lambda_{3c} = 20\end{array}\right\}$ [pezzi/ora]

$$\left[\text{n° MEDIO di pezzi (all'ora)}\right] = \lambda_{1c} \cdot P[1\ \text{COMP.}] + \lambda_{2c} \cdot P[2\ \text{COMP.}] + \lambda_{3c} \cdot P[3\ \text{COMP.}]$$

$$= 5 \cdot 1/2 + 12 \cdot 1/4 + 20 \cdot 1/6 = \frac{5}{2} + 3 + \frac{10}{3} = \frac{15+18+20}{6} = \frac{53}{6}$$

c) ripetere a e b con tempo di ripar. uniforme $\sim U[0; 2/\beta]$;

$T_{RM}$ = tempo rip. macchina ; $E[T_{RM}] = \frac{2}{2\beta} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{6\alpha}$

$\Rightarrow$ STESSI VALORI;

E3 - 18-09-2006

(13) 50 SENSORI : DISTRIBUITI su un'area A secondo un processo di Poisson in 2 dimensioni con tasso $\lambda$ [sensori/unità di area];

$\hookrightarrow$ SENSORI attivi per un tempo fissato e spenti per un tempo fissato;
$\hookrightarrow$ poi si riaccende $\Rightarrow$ ALTERNANZA ~~acceso~~ - spento

$\hookrightarrow$ [% tempo attivo] = DUTY CYCLE = 20% $\Rightarrow P[\text{attivo}] = 0,2$

$\Rightarrow$ n° nodi attivi CASUALE $\Rightarrow$ NODI INDIPENDENTI;

$\hookrightarrow$ interrogazione periodica dei sensori;

a) 50 sensori su un'area A $\Rightarrow \lambda = \left[\frac{\text{sensori}}{\text{unità di area}}\right] = \frac{50}{A}$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{n° MEDIO di} \\ \text{sensori che} \\ \text{rispondono}\end{matrix}\right] = n \cdot P[\text{attivo}] = 50 \cdot 0,2 = 10$ [sensori]

( tipo una binomiale: n = n° sensori ; p = prob. sensore attivo

$\Rightarrow P[X=k] = P[\text{n° sensori che risp. sia } k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\hookrightarrow$ in MEDIA : $\boxed{m_X = n \cdot p}$; $\sigma_X^2 = n \cdot p(1-p)$ )

b) la staz. può interr. solo un'area pari ad $a = A/2$

P[n° medio di sensori che rispondono]; P[NON risponde nessuno]

$\rightarrow \left[\begin{matrix}\text{n° medio sensori} \\ \text{in } a = A/2\end{matrix}\right] = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{n° medio di sensori} \\ \text{per unità di area}}}{\lambda} \cdot \text{area} = \frac{50}{\cancel{A}} \cdot \frac{\cancel{A}}{2} = 25$ sensori

$\left[\begin{matrix}\text{n° medio di sensori} \\ \text{che rispondono}\end{matrix}\right] = 25 \cdot 0,2 = 5$ sensori

→ BINOMIALE con $K=0$ ; $P[\text{attivo e nell'area giusta}] = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1$

$$P[\text{nessuno risponde}] = \binom{25}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot (0{,}9)^{25} = \frac{25!}{25!\,0!} \cdot 1 \cdot (0{,}9)^{25} = (0{,}9^{25})\ \#$$

SONO INDIPENDENTI
⇓
prob. di uno RISP./NON RISP. per tutti i sensori

E2 - 18-09-2006

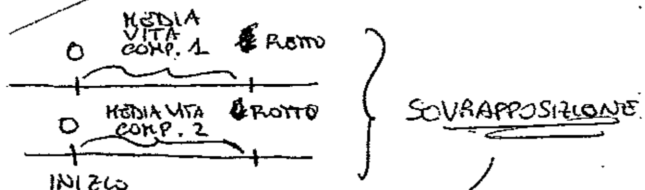
## (14) COMPONENTE ELETTRONICO:

per un sistema viene ridondato installandone 2 COPIE in ogni sistema e facendole funz. in parallelo;

↳ VITE COMP. $\sim \mathcal{E}(\alpha)$; media $= 1/\alpha = 66$ giorni

↳ 2 rotti ⇒ sost. tutto il sistema; $\frac{1}{\alpha} = 66$ giorni
↳ 1 rotto ⇒ non succ. nulla;

⇒ SOST. sistema = 1 GIORNO;




a) $[\text{tempo medio da quando inizia a funz. a quando uno dei due si guasta}] = \left(\frac{1}{2\alpha} = 33 \text{ giorni}\right)$

↳ $[\text{tempo medio in cui il sist. funz. con un solo componente}] = \frac{1}{\alpha} = 66$ giorni

b) da un istante t a caso; calcolare la media del tempo di funz. <u>ININTERROTTO</u> del sistema;

$$[\%\ \text{tempo 1 COMP. FUNZ.}] = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1}$$

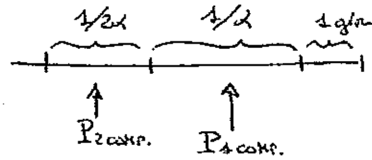
$$P[\text{1 COMP. FUNZ.}] = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1/66\alpha} = \frac{1/\alpha}{\frac{66+33+1}{66\alpha}} = \frac{66}{100}$$

$$[\%\ \text{tempo 2 COMP. FUNZ.}] = \frac{1/2\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1/66\alpha} = \frac{33}{100} = P[\text{2 COMP. FUNZ.}]$$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{tempo medio di}\\ \text{FUNZ. inint.}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\text{tempo medio}\\ \text{1 COMP.}\end{matrix}\right] \cdot \underline{P}\left[\text{1 COMP.}\right] +$

$+ \left[\begin{matrix}\text{tempo medio}\\ \text{2 COMP.}\end{matrix}\right] \cdot \underline{P}\left[\text{2 COMP.}\right] =$

$= 66 \cdot \frac{66}{100} + \frac{33}{100} \cdot (66 + 33) \Leftarrow$



↳ se cado nell'intervallo di 2 COMP. devo considerare di "errore" anche quello da 1 in seguito;

$= \frac{3960+360+36}{100} + \frac{2700+270+\cancel{90}\,270+\cancel{9}\,27}{100} =$

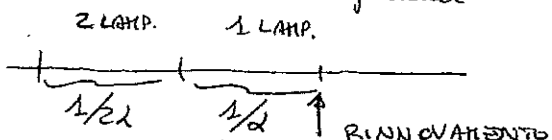
$= \frac{4356 + 3267}{100} = \frac{7623}{100} = 76{,}23 \text{ [giorni]}$

c) domanda a cu $\boxed{\text{vita}}$ dei sottosistemi sono V.A. indipendenti $\mathcal{U}[..]$; $\boxed{\text{media} = 1/\alpha}$

$\Rightarrow$ LA MEDIA È LA STESSA MA (non come il caso precedente dei tempi di riparazione) SI TRATTA DEI TEMPI DI VITA dei COMPONENTI $\Rightarrow$ CAMBIANO LE PROBABILITÀ; (cambia il numeratore del calcolo delle %)

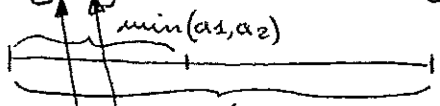
$\Rightarrow$ ESEMPIO 2 LAMPADINE: % tempo illuminaz. di 1 lampadina

↳ VITA $\sim \mathcal{E}(\lambda)$; media $1/\lambda$



$\left[\begin{matrix}\text{\% tempo 1}\\ \text{lampadina}\end{matrix}\right] = \frac{E[\text{1 lamp.}]}{E[\text{1 lamp.}] + E[\text{2 lamp.}]} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/2\lambda} = \frac{2}{3}$

↳ VITA $\sim \mathcal{U}[0,1] \Rightarrow$ calcolo $E[\max(\sim)]$ ed $E[\min(\sim)]$



$\% = \left[\frac{1/3}{2/3}\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$

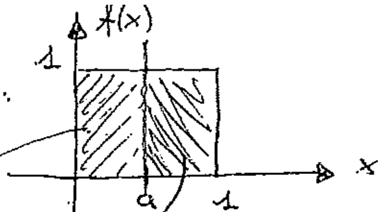
$\underline{P}[\min(a_1,a_2) > x] = \underline{P}[a_1 > x] \cdot \underline{P}[a_2 > x] = (1-x)^2 \quad ; x \in (0,1)$

$E[\min(a_1,a_2)] = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 1/3 \Rightarrow$ FUNZ. 2 LAMP.

$\underline{P}[\max(a_1,a_2) \leq x] = \underline{P}[a_1 \leq x] \cdot \underline{P}[a_2 \leq x] = x^2 \quad ; x \in (0,1)$

$E[\max(a_1,a_2)] = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3} \Rightarrow$ TEMPO TOTALE $\Leftarrow$

⇒ per una uniforme:




⇒ con le aree: $P[a_1 > a] = (1-a)\cdot 1 = (b\cdot h) =$ area rettangolo

$P[a_1 \le a] = (a-0)\cdot 1 =$

⇒ c) Ho due uniformi di media $1/\alpha$;

per una uniforme: $\text{MEDIA} = \frac{b-a}{2}$ ; si tratta di vite di componenti ⇒ l'estremo inferiore sarà $= 0$

⇒ $b = 2\cdot\text{MEDIA} + a = \frac{2}{\alpha} + 0 = 2/\alpha$

↳ le due uniformi saranno: $U[0; 2/\alpha]$

E3 - 19-06-2006

(15) DUE PROCESSI di POISSON <u>indipendenti</u>

$X_1(t), X_2(t)$; con $X_i(t) =$ n° arrivi del processo $i$ nell'intervallo $[0,t]$;

↳ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1{,}5$ $\left[\frac{\text{arrivi}}{\text{unità di tempo}}\right]$, $\doteq \lambda$

a) → $P[X_1(3) = 1 \mid X_1(3) + X_2(3) = 3] =$ ⇒ $P[X_1(3)+X_2(3)=3 \mid X_1(3)=1]$

$$\frac{P[X_1(3)=1 ;\ X_1(3)+X_2(3)=3]}{P[X_1(3)+X_2(3)=3]} = \frac{P[X_2(3)=2]\cdot P[X_1(3)=1]}{P[X_1(3)+X_2(3)=3]}$$

⇒ SOMMA PROCESSI di POISSON → PROC. DI POISSON con: $\lambda = \sum_i \lambda_i$

$$= \frac{\frac{(3\cdot\lambda)^2\cdot e^{-3\lambda}}{2!}\cdot\frac{(3\lambda)^1\cdot e^{-3\lambda}}{1!}}{[3(\lambda_1+\lambda_2)]^3\cdot\frac{e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}}{3!}} =$$

$$= \frac{(3\lambda)^3\cdot e^{-6\lambda}\cdot 3!}{[3\cdot(\lambda_1+\lambda_2)]^3\cdot e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot 2!} = \frac{(4{,}5)^3\cdot \cancel{e^{-9}}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{(9)^3\cdot\cancel{e^{-9}}\cdot\cancel{2}} = \frac{(4{,}5)^3\cdot 3}{(9)^3}$$

$\rightarrow P\left[X_1(3)+X_2(3)=3 \mid X_1(3)=1\right] = P\left[X_2(3)=2\right]$

$$= \frac{(3\lambda)^2 \cdot e^{-3\lambda}}{2!} = \frac{(4{,}5)^2 \cdot e^{-4{,}5}}{2}$$

b) $\rightarrow P\left[X_1(2)=1 \mid X_1(3)=3\right] = \frac{P\left[X_1(3)=3 \mid X_1(2)=1\right] \cdot P\left[X_1(2)=1\right]}{P\left[X_1(3)=3\right]}$

$$= \frac{P\left[X_1(\text{in } \cancel{1} \text{ int. di tempo})=2\right] \cdot \frac{(2\lambda)^1 \cdot e^{-2\lambda}}{\cancel{1}!}}{\frac{(3\lambda)^3 \cdot e^{-3\lambda}}{3!}}$$

$$= \frac{(\lambda)^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot \frac{(2\lambda)^1 \cdot e^{-2\lambda}}{\cancel{1}!} \cdot \frac{3!}{(3\lambda)^3 \cdot e^{-3\lambda}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{\lambda^2} \cdot \cancel{e^{-3\lambda}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{e^{-3\lambda}} \cdot \cancel{9}_{3} \lambda^{\cancel{3}}} = \boxed{\left(\frac{1}{3\lambda}\right)} = \boxed{\left(\frac{1}{4{,}5}\right)} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$\rightarrow P\left[X_1(3)=3 \mid X_1(2)=1\right] = P\left[2 \text{ arrivi in } 2 \text{ unità di tempo}\right]$

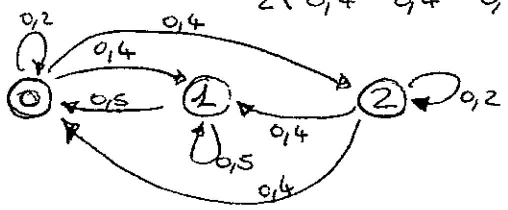
$$= \left(\frac{(2\lambda)^2 \cdot e^{-2\lambda}}{2!}\right) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2} = \boxed{\frac{9 \cdot e^{-3}}{2}}$$

E1 - 14-07-2006

(16) cdM $X_n$:

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \times$$

a)




$\rightarrow P[X_1 = m \mid X_0 = 0] = \begin{cases} m = 0 ; & 0,2 \\ m = 1 ; & 0,4 \\ m = 2 ; & 0,4 \end{cases}$

(1 PASSO)

$\rightarrow P[X_2 = m \mid X_0 = 0] = \begin{cases} m = 1 ; & 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \quad \# \\ m = 0 ; & 0,2 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \quad \# \\ m = 2 ; & 0,2 \cdot 0,4 + \cancel{0,4} \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,2 \quad \# \end{cases}$

(2 PASSI)

$\Rightarrow$ FACCIO i vari casi dal disegno

$\Rightarrow$ se ho TANTI STATI uso $P^{(n)} = P^n \Rightarrow P[X_n = m \mid X_0 = i] =$

$= $ (RIGA dello STATO $i$) $\cdot$ (COLONNA STATO $m$)

$\rightarrow P[X_{500} = m \mid X_0 = 0] = \begin{cases} m = 0 ; \\ m = 1 ; \\ m = 2 ; \end{cases}$

$$\begin{cases} \pi_0 = 0,2\,\pi_0 + 0,5 \cdot \pi_1 + 0,4\,\pi_2 \\ \pi_1 = 0,4\,\pi_0 + 0,5 \cdot \pi_1 + 0,4\,\pi_2 \\ \pi_2 = 0,4 \cdot \pi_0 + \;/\; + 0,2 \cdot \pi_2 \quad \Rightarrow 0,8\,\pi_2 = 0,4\,\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 2 \cdot \pi_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pi_2 = 0,5 \cdot \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$\pi_1 = 0,4\,\pi_0 + 0,5\,\pi_1 + 0,4 \cdot 0,5\,\pi_0$

$0,5\,\pi_1 = 0,6\,\pi_0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{6}{5}\pi_0$

$\cancel{\pi_0 = 0,2\,\pi_0 + 0,5 \cdot \frac{6}{5}\pi_0 + 0,4 \cdot 0,8\,\pi_0}$

$\Rightarrow \pi_0 + \frac{6}{5}\pi_0 + \cancel{6}\frac{5}{10}\pi_0 = 1 \Rightarrow \left(\frac{10+12+5}{10}\right)\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{10}{27}$

↳ $\pi_1 = \frac{6}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{10}^2}{27} = \frac{12}{27}$ ; $\pi_2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{10}^5}{27} = \frac{5}{27}$ #

b) $m_1 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{27}{10}$ ; $m_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{27}{12}$ ; $m_2 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{27}{5}$

c) $W_{ij}^{(m)}$ = n° medio di visite allo stato j (da 0 ad m) | $X_0 = i$

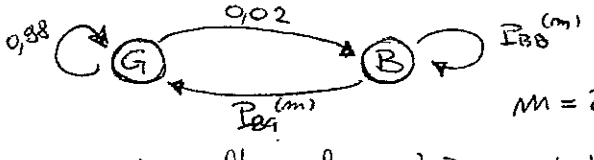
$$= E\left[\sum_{l=0}^{m} \mathbb{1}\{X_l = j\} \,\middle|\, X_0 = i\right] = \sum_{l=0}^{m} E\left[\mathbb{1}\{X_l = j\} \,\middle|\, X_0 = i\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} P\left[X_l = j \,|\, X_0 = i\right] = \sum_{l=0}^{m} P_{ij}^{(l)}$$

$\Rightarrow$ FORMULA STAZIONARIETÀ: $W = [I - Q]^{-1}$ $I$ = matrice identità

E4 - 14-07-2006

(17) CANALE MARKOVIANO:




$m = 2$

$P[\text{errore} \,|\, G] = 0$

$P[\text{errore} \,|\, B] = 1$

↳ ogni volta che c'è un pck errato c'è un "salto" di $(m-1)$ slots,
↳ PROCESSO SEMI-MARKOVIANO;

a) feedback perfetto: in andata ho comunque errori Markoviani;

$THR = \left[\text{n° succ. per slot}\right] = \frac{P_{BG}^{(m)}}{P_{BG}^{(m)} + m \cdot P_{GB}}$ ;

$\Rightarrow$ dati:

$$P = \begin{array}{c|cc} & G & B \\ \hline G & 0{,}98 & 0{,}02 \\ B & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}$$

$$P^{(m)} = P \begin{pmatrix} & & \\ 0{,}098+0{,}09 & 0{,}1\cdot 0{,}02 + \underbrace{0{,}9\cdot 0{,}9}_{0{,}81} \end{pmatrix} \#$$

$\Rightarrow P_{BG}^{(2)} = 0{,}0196$

$P_{BB}^{(2)} = 0{,}81 + 0{,}002 = 0{,}812$

$$THR = \frac{0{,}0196}{0{,}0196 + 2\cdot 0{,}02} = \frac{0{,}0196}{0{,}0196+0{,}04} = 0{,}3288$$

b) 1) errori markoviani $\Rightarrow$ ANDATA
2) errori indip. con $p_e = 0{,}01$ $\Rightarrow$ errori i.i.d. andata

$L_{medio} = \begin{cases} 1000000 \text{ (MARKOV)} \\ 2000000 \text{ (i.i.d.)} \end{cases}$

N.B

$$\left[\begin{matrix}\% \text{ tempo} \\ \text{slot } 1000000\end{matrix}\right] = \frac{1\cdot 10^6}{1\cdot 10^6 + 2\cdot 10^6} = \frac{1}{3} = P[\text{slot } 1000000]$$

$$\left[\begin{matrix}\% \text{ tempo} \\ \text{slot } 2000000\end{matrix}\right] = \frac{2}{3} = P[\text{slot } 2000000]$$

$$THR_{TOT.} = THR_{MARK} \cdot P[\text{slot } 1000000] + THR_{i.i.d.} \cdot P[\text{slot } 2000000]$$

$$THR_{i.i.d.} = \frac{1-p_e}{1-p_e + m\cdot p_e} = \frac{0{,}99}{0{,}99 + 2\cdot 0{,}01} = \frac{0{,}99}{1{,}01} = 0{,}9801$$

$$THR_{TOT.} = 0{,}1096 + 0{,}6534 = 0{,}763 \ \#$$

(N.B.: le lungh. degli slot sono V.A. ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ SI DEVE PRENDERE LA MEDIA)

$\Rightarrow$ ALTRE DOMANDE:

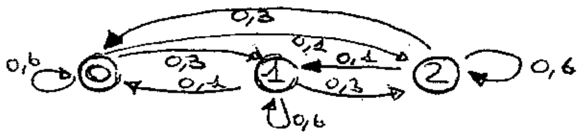
$\hookrightarrow$ SE TRASMETTE DIRETTAMENTE nel CANALE $\Rightarrow m = 1$

$$THR = \pi_a = \frac{P_{10}}{P_{10} + P_{01}} \quad \text{(prova con sistema)}$$

E3 - 17-06-2005

(18) 1 CDM con stati $\{0;1;2\}$, stato iniziale $X_0 = 0$ :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{array}$$




a) prob. che la catena si trovi in $X(2)=2$ ; e $X(1000)=2$

$\rightarrow \mathbb{P}[X(2)=2 \mid X(0)=0] = 0{,}3\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}6 = \frac{9}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{21}{100}$

$\Rightarrow$ OPPURE: $\overbrace{1^a \text{ RIGA}}^{\text{STATO } 0} \cdot \overbrace{3^a \text{ COLONNA}}^{\text{STATO } 2} \Rightarrow (0{,}6\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}3 + 0{,}1\cdot 0{,}6)$ #

$\rightarrow \mathbb{P}[X(1000)=2 \mid X(0)=0] \Rightarrow$ si può considerare distrib. staz.:

↳ DATA la $\overbrace{\text{MATRICE}}^{\text{PARTICOLARE}}$ POSSO dire che: $\pi_3 = (\pi_2 = \pi_1) = \frac{1}{3}$

↳ CONTROLLO :
$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}6\,\pi_0 + 0{,}1\,\pi_1 + 0{,}3\,\pi_2 \\ \pi_1 = 0{,}3\,\pi_0 + 0{,}6\,\pi_1 + 0{,}1\,\pi_2 \\ \pi_2 = 0{,}1\,\pi_0 + 0{,}3\,\pi_1 + 0{,}6\,\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

b) $\rightarrow \mathbb{P}[X_1 = 1; X_3 = 2 \mid X_2 = 0] = \dfrac{\mathbb{P}[X_1 = 1; X_3 = 2; X_2 = 0]}{\mathbb{P}[X_2 = 0]}$

$\Rightarrow$ $\overbrace{\text{HO TUTTO IL PERCORSO}}^{\text{A NUMERATORE}}$ $\Rightarrow$ ne consegue che $X_0 = 0 \Rightarrow$

$= \left[ (P_{01})\cdot(P_{10})\cdot(P_{02}) \Big/ \overbrace{(P_{00}\cdot P_{00} + P_{01}\cdot P_{10} + P_{02}\cdot P_{20})}^{\text{devo fare tutte le possibilità}} \right]$ #

$=$ (calcoli)

$\rightarrow \mathbb{P}[X_2 = 0 \mid X_1 = 1; X_3 = 2] = \dfrac{\mathbb{P}[X_2=0; X_1 = 1; X_3 = 2]}{\underbrace{\mathbb{P}[X_1=1; X_3=2]}_{\mathbb{P}[1 \to 2 \text{ in 2 passi}]}}$

$= \left[ (\cancel{P_{01}})\cdot P_{10}\cdot P_{02} \Big/ (\cancel{P_{01}})\cdot(P_{12}\cdot P_{22} + P_{10}\cdot P_{02} + P_{11}\cdot P_{12}) \right]$ #

$=$ (calcoli)

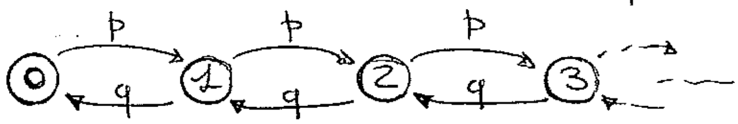
E4 - 17-06-2005

19 PASSEGGIATA CASUALE: sugli interi NON NEGATIVI;

$P_{01} = 1$ ; $P_{i,i+1} = p$ ; $P_{i,i-1} = q$ ; $i>0$ ; $p+q = 1$

$p = 0{,}4$

$\Rightarrow q = 0{,}6$




a) calc. le prob. staz. che la pass. casuale si trovi in 5 quando parte da 0 e da 5;

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
3 & 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\
4 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

$P =$ (matrice sopra)

$\Rightarrow$ le DISTR. STAZ.:
$$\begin{cases} \pi_i = \sum_{k=0}^{N} (\pi_k \cdot P_{kj}) \Rightarrow \pi_i = (\pi_{i-1} \cdot p_{i-1} + \pi_{i+1} \cdot q_{i+1}) \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si ha che: $\pi_0 = \pi_1 \cdot q_1$

$\hookrightarrow$ si può dimostrare che: $\pi_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \left( p_k / q_{k-1} \right)}$

$\Rightarrow$ se: $p_K = p$; $q_K = q = (1-p)$;
se $p<q$ (le serie CONVERGONO)

$\pi_0 = (\chi_0) = \frac{1}{2} \cdot (1 - p/q)$ VEDI TEORIA

$\pi_k = \frac{1}{p} \left( p/q \right)^K \cdot \frac{\pi_0}{(\chi_0)} = \left( \frac{1}{2p} \right) \cdot (1 - p/q) \cdot (p/q)^K$ ; $K>0$

$\Rightarrow \pi_5 =$ è indipendente dagli stati di partenza $\Rightarrow$ DISTR. STAZ.

$= \left( 1/2 \cdot 0{,}4 \right) \cdot \left( 1 - \cancel{4}^{2} / \cancel{6}_{3} \right) \cdot \left( \cancel{4}^{2} / \cancel{6}_{3} \right)^5 = \left( \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{243} \right)$

b) $\lim_{n \to \infty} P_{05}^{(n)}$ ⇒ la cdM è APERIODICA ⇒ il limite NON ESISTE

c) prob. staz. che la pos. casuale si trovi in 5 partendo da 0; con $p = 0{,}5$;

$$\pi_5 = \left(\frac{1}{2 \cdot 0{,}5}\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{0{,}5}{0{,}5}\right)}_{=0} \cdot \left(\frac{0{,}5}{0{,}5}\right)^5 = 0$$

↳ infatti $p < q$ (MINORE STRETTO) altrimenti le serie geom. (parametro $p/q$) NON CONVERGONO

d) se parto da 1; tempo medio per arrivare (per la 1ª volta) in 3;

$V_i$ = tempo medio per arrivare a $j$ da $i$

$$\begin{cases} V_0 = 1 + V_1 \\ V_1 = 1 + q \cdot V_0 + p \, V_2 \\ V_2 = 1 + q \cdot V_1 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 12{,}5$$

ATTENZIONE

⇒ IN QUESTO CASO si considera 3 ASSORBENTE;

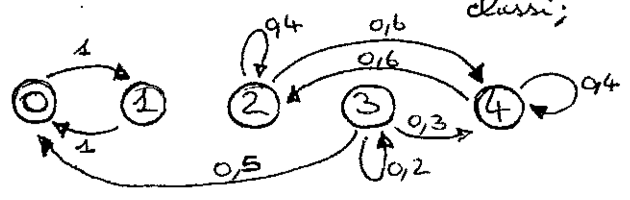
⇒ ALTRIMENTI: devo calcolare $E[S_{13}]$; (VEDI ESERCIZIO 2)

E2 - 25-07-2005

20 CDM: con stati $\{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 3 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 4 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{array}$$

a) CLASSIFICARE gli stati ed individuare le classi;




$\{0; 1\}$: PERIODO 2; RICORRENTE POSITIVA

$\{3\}$: TRANSITORIO; (lascio 3 e non torno più);

$\{2; 4\}$: RICORRENTE POSITIVA; APERIODICA;

b) prob. di assorb. nelle classi ricorrenti da tutti gli stati transitori;

$\{3\} \to \{0; 1\}$
$\{3\} \to \{2; 4\}$

⇒ CHIARO. $A=\{3\}$; $B=\{0,1\}$; $C=\{2,4\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

VERSO B
$\mu_C = 0$
$\mu_B = 1$

$$\Rightarrow \mu_A = 0{,}2\,\mu_A + 0{,}5\,\overset{1}{\mu_B} + \cancel{0{,}3\,\mu_C} \stackrel{!}{=} 0{,}2\,\mu_A + 0{,}5$$

$$\mu_{A_B} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = \frac{5}{8}$$

VERSO C
$\mu_B = 0$
$\mu_C = 1$

$$\Rightarrow \mu_A = 0{,}2\,\mu_A + \cancel{0{,}5\,\mu_B} + 0{,}3\,\overset{1}{\mu_C} \stackrel{!}{=} 0{,}2\,\mu_A + 0{,}3 \Rightarrow \mu_A = \frac{0{,}3}{0{,}8} = \frac{3}{8}$$

c)
$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 \\ X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \\ X & X & \mu_C\pi_2 & \boxed{0} & \mu_C\pi_4 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

N.B.: CON UN SOLO STATO TRANSITORIO la $\mu = \dfrac{P\{\text{classe scelta}\}}{\sum P[\text{classi}]}$ (NON SI CONTA LA PROB. verso se stesso)

X = da stato transitorio a classe periodica

X = da stati classe periodica verso se stessi

$\mu_{A_K}\cdot\pi_i$ = dallo stato transitorio → stato classe aperiodica ; 0 = su 0 e su gli stati transitori verso se stessi o altri transitori

d) tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati;

$$m_i = 1/\pi_i$$

↳ dalla matrice P ⇒

$$\begin{cases} \pi_0 = \quad + \pi_4 \\ \pi_1 = \pi_0 + \\ \pi_2 = \quad + 0{,}4\,\pi_2 + \quad + 0{,}6\,\pi_4 \\ \pi_3 = 0{,}5\,\pi_0 + \quad + 0{,}2\,\pi_3 + 0{,}2\,\pi_4 \\ \pi_4 = \quad + 0{,}6\,\pi_2 + \quad + 0{,}4\,\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

COLONNE

⇒ ALTRA DOMANDA: (vedi esercizio 3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \\ \mu_B\pi_0 & \mu_B\pi_1 & \mu_C\pi_2 & 0 & \mu_C\pi_4 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\frac{1}{\text{PERIODO}}$ ⇒ stati della classe periodica verso se stessi

TRANSITORIO VERSO CLASSE PERIODICA

~~E3~~ E3 - 02-09-2005

(21) NODO di RETE : 2 link di ingresso

↳ arrivi di Poisson indipendenti ; $\lambda_1 = \lambda_2 = 500 \left[\frac{pcks}{sec}\right]$

a) prob. che in un interv. di 3 ms arrivino 2 pcks al link 1 ed 1 pck al link **2** ;

$$P\left[\overbrace{2 \text{ pcks al link } 1}^{\text{in } 3\,ms} ; \overbrace{1 \text{ pck al link } 2}^{\text{in } 3\,ms}\right] \Rightarrow \text{sono INDIPENDENTI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[2 \text{ pck; link } 1 \text{ in } 3\,ms\right] \cdot P\left[1 \text{ pck; link } 2 \text{ in } 3\,ms\right] =$$

$$= \left[(\lambda \cdot 3m)^2 \cdot \frac{e^{-3m\cdot\lambda}}{2!}\right] \cdot \left[(\lambda \cdot 3m)^1 \cdot \frac{e^{-3m\cdot\lambda}}{1!}\right] =$$

= (calcoli) -

b) prob. che al NODO arrivino 3 pcks in totale in 3 ms;

⇒ SOMMA di PROC. di POISSON indipendenti ⇒ PROC. di POISSON con $\lambda_{TOT} = \lambda_1 + \lambda_2$

$$P\left[3 \text{ pcks; in } 3\,ms\text{; in totale}\right] = \left[(\lambda_{TOT} \cdot 3m) \cdot \frac{e^{-\lambda_{TOT}\cdot 3m}}{3!}\right] =$$

= (calcoli)

E3 - 22-09-2005

(22)

~~E3~~ E X - 31-08-2006

(23) CATENA PRODUTTIVA: N - sistemi INDIPENDENTI in parallelo

$\Rightarrow$ ogni sistema alterna operativo - guasto con durata $\sim \mathcal{E}(\alpha_i)$ e $\mathcal{E}(\beta_i)$

$i = 1; 2; \ldots; N$

↳ catena fuori servizio se tutti N i sistemi sono guasti;

a) → trovare la statistica (PDF) del tempo di fuori servizio;

(da tutti N rotti a 1 viene riparato);

→ tempo medio di fuori servizio;

b) $N = 2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = 50\alpha$

↳ se la prod. è di 25 pezzi con tutti e due i sistemi funzionanti, 10 pezzi con uno solo sistema funzionante, 0 altrimenti;

→ n° medio di pezzi prodotti ~~nelle~~ in 24 ore;

a) $\begin{bmatrix} \text{\% tempo 1 COMP} \\ \text{IN GUASTO} \end{bmatrix} = \left( \dfrac{1/\alpha_i}{1/\alpha_i + 1/\beta_i} \right) = P[\text{1 COMP. GUASTO}] = \boxed{p_a}$

$\begin{bmatrix} \text{\% tempo [illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{bmatrix} = (\text{SONO INDIPENDENTI}) = \prod_{i=1}^{N} P[\text{COMP. } i \text{ [illegible]}]$

$\Rightarrow P[Y = k] = P[\text{SISTEMI [illegible] } k] =$

$\binom{m}{k} \cdot (p_a)^k \cdot (1 - p_a)^{m-k}$; [illegible]

[illegible]

[illegible] $(1 - p_a)^N$

$\Rightarrow$ [illegible] $(1 - p_a)^N$

→ $T_{guast.}$ = tempo di [illegible]

[illegible]

$\Rightarrow E[T_{guast.}] = \dfrac{1}{\sum_i \beta_i}$ [illegible]

E2 - 31-08-2006

(24) SISTEMA SMISTAMENTO PCK-1

⇒ infiniti servitori; ARRIVI $\sim \mathcal{P}(\lambda)$; TEMPI SERVIZIO $\sim \mathcal{E}(\mu)$

⇒ CODA $M/M/\infty$; $\lambda = 2$ pck/sec  MEDIA $= \frac{1}{\mu} = 1$ sec

↳ sistema inizialmente VUOTO;
↳ FUNZIONAMENTO nell'intervallo $[0;5]$ sec.

a) $P\left[\text{in } [0;5] \overbrace{\text{nessun}}^{\text{no arrivi}} \text{ pcks}\right] = \dfrac{(\lambda \cdot 5)^0 \cdot e^{-5\lambda}}{0!} = e^{-5\lambda} = e^{-10}$

b) $P\left[\text{all'istante } t = 5 \text{ sec. il sistema sia vuoto}\right] =$

c) $P\left[\text{in } t = 5 \text{ sec. il sistema è vuoto} \mid \text{in } [0,4] \text{ ho avuto 8 arrivi}\right] =$

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte A

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2) e stato iniziale $X_0 = 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1$, $X_2$ e $X_{500}$. ✓

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1, 2 verso lo stato 2.

(c) Si calcolino $P[X_1 = 1, X_3 = 1 | X_2 = 1]$ e $P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_3 = 1]$.

E2 Si consideri una fabbrica in cui vi sono due macchine uguali. Ogni macchina alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha = 27$ giorni (funzionamento) e $1/\beta = 1/(9\alpha)$ (guasto). ✓ Ogni macchina, il cui funzionamento e' indipendente dall'altra, e' in grado di produrre 12 pezzi all'ora quando e' funzionante.

??

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui la produzione e' ferma (cioe' entrambe le macchine sono guaste), e la durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione e' ferma

??

(b) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora

(c) si calcoli il numero medio di pezzi prodotti all'ora se il numero di pezzi prodotti all'ora e' 12 quando c'e' una sola macchina in funzione e 30 quando sono in funzione entrambe

E3 Si consideri un nodo di rete con il seguente funzionamento. In assenza di traffico, il nodo alterna un periodo di sleep di durata esponenziale con media $T$ e un periodo in cui e' sveglio ed e' in grado di ricevere, di durata fissa $\beta T$. In presenza di traffico in rete, se durante un periodo di sveglia viene trasmesso un pacchetto, il nodo lo riceve interamente (anche se questo richiede di restare sveglio per un tempo complessivamente superiore a $\beta T$), e subito dopo comincia un periodo di sleep. Se durante il periodo di sveglia non viene trasmesso nessun pacchetto, il nodo torna nello stato di sleep dopo il tempo $\beta T$. La probabilità che venga trasmesso un pacchetto mentre il nodo e' sveglio è $\alpha$, l'istante di inizio della ricezione e' uniformemente distribuito in $[0, \beta T]$, e il tempo medio di trasmissione del pacchetto e' pari a $\gamma T$. Si costruisca un modello semi-Markoviano per il funzionamento del nodo. In particolare: ✓

(a) Si considerino i tre stati sleep (S), listening (L) e receiving (R), e si determini la matrice delle probabilita' di transizione della catena di Markov inclusa e se ne disegni il diagramma di transizione.

(b) Si determinino la matrice dei tempi medi associati ad ogni transizione, **T**, e i tempi medi associati alla visita di ciascuno dei tre stati, $\mu_S, \mu_L, \mu_R$.

(c) Si determini un'espressione per la frazione del tempo che il nodo passa in ognuno dei tre stati, e se ne calcoli il valore nel caso $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

E4 Si consideri un sistema a cui arrivano richieste di servizio secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste all'ora. Ogni richiesta rimane nel sistema per un tempo di servizio pari a 6 minuti, e non c'e' limite ✓ al numero di richieste contemporaneamente in servizio. Si supponga che il sistema inizi ad operare al tempo $t = 0$.

(a) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti.

(b) Si calcoli la probabilita' che il sistema sia vuoto al tempo $t = 30$ minuti, condizionata al fatto che fra 0 e $t$ si siano verificati 10 arrivi.

Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
prova scritta – 09 luglio 2007 – parte B

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t)$, $s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.

Compito 09 luglio 2007

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.24 & 0.32 \\ & 0.12 & \\ & & \end{pmatrix} \qquad x_0 = 0$$

) $x_1 = [0.4\ 0.4\ 0.2] \quad x_2 = [0.44\ 0.24\ 0.32] \quad \pi = [.05\ \ 0.25\ \ 0.25]$

) $\begin{cases} E[\theta_{02}] = 1 + P_{00}\, E[\theta_{02}] + P_{01}\, E[\theta_{12}] \\ E[\theta_{12}] = 1 + P_{10}\, E[\theta_{02}] + P_{11}\, E[\theta_{12}] \end{cases} \qquad E[\theta_{02}] = 3 \quad E[\theta_{12}] = 2$

$E[\theta_{22}] = \frac{1}{\pi_2} = 4$

) $P[X_1 = 1\ \ X_3 = 1 \mid X_2 = 1] = P_{11} \cdot \dfrac{P[X_2 = 1 \mid X_1 = 1]\, P[X_1 = 1]}{P[X_2 = 1]} = \dfrac{P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{01}}{P_{01}^{(2)}} = 0.1333$

$P[X_2 = 1 \mid X_1 = 1\ \ X_3 = 1] = \dfrac{P[X_1 = 1\ \ X_3 = 1 \mid X_2 = 1]\, P[X_2 = 1]}{P[X_3 = 1 \mid X_1 = 1]\ P_{01}} = \dfrac{P_{11}^2\, P_{01}}{P_{01}^{(2)}} \cdot \dfrac{P_{01}^{(2)}}{P_{01} \cdot P_{11}^{(2)}} = 0.333$

E2

Due macchine indipendenti $\to F \sim \mathcal{E}(\frac{1}{27})$ $\quad \to 12\,pz/h$
$\to G \sim \mathcal{E}(\frac{1}{3})$

) $P[1\text{ macchina guasta}] = \dfrac{E[G]}{E[F] + E[G]} = 0.1 \qquad P[2\text{ guaste}] = (P[1\text{ guasta}])^2 = 0.01$

$E[\text{fermo}] = E[\min\{\mathcal{E}(\frac{1}{3}), \mathcal{E}(\frac{1}{3})\}] = E[\mathcal{E}(\frac{2}{3})] = 1.5\,s$

) $E[\text{pezzi}] = [12 \cdot (1 - P[\text{guasta}])] \cdot 2 = 21.6\ pz$

c) 30 FF 12 GF FG 0 GG

$E[\text{pezzi}] = 30 \cdot (1 - P[\text{guasta}])^2 + 2 \cdot 12 \cdot (1 - P_{\text{guasta}})\, P_{\text{guasta}} = 26.46\ pz$

E3

SLEEP $\sim \mathcal{E}(\frac{1}{T})$

ACTIVE $\simeq \beta T$

$P[t_x \mid \text{ACTIVE}] = \alpha$

Inizio $t_x \sim \mathcal{U}[0, \beta T]$

$T_{Tx} = \gamma T$

a) 


$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} \times & T & \times \\ \beta T & \times & \frac{\beta T}{2} \\ \gamma T & \times & \times \end{pmatrix}$

b) $\mu_S = T$

$\mu_L = (1-\alpha)\beta T + \alpha \frac{\beta T}{2}$

$\mu_R = \gamma T$

c) $\alpha = 0.5 \quad \beta = 0.1 \quad \gamma = 0.2$

$\pi_S = \dfrac{1}{2+\alpha} \qquad \pi_L = \dfrac{1}{2+\alpha} \qquad \pi_R = \dfrac{\alpha}{2+\alpha}$

$P_S = \dfrac{\pi_S \mu_S}{\pi_S \mu_S + \pi_L \mu_L + \pi_R \mu_R} = 0.8511 \quad P_L = 0.06383 \quad P_R = 0.0851$

E4

$\lambda = 20/60 = 1/3$ call/h $\qquad T_{\text{servizio}} = 6$ min

a) $P[X(30) = 0] = P[N(24, 30) = 0] = e^{-6\lambda} = 0.1353$

b) $P[X(30) = 0 \mid N(0, 30) = 10] = \binom{10}{0} \left(\frac{6}{30}\right)^0 \left(1 - \frac{6}{30}\right)^{10} = 0.1074$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005**
**prova scritta – 22 settembre 2005– parte A**

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 3 allo stato 1.

(c) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(d) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2 | X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri una coda alla quale arrivano pacchetti secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 1$ pacchetto al secondo. Tutti i pacchetti presenti nella coda vengono trasmessi quando si verifica uno dei seguenti due eventi: i) ci sono due pacchetti in coda, oppure ii) c'e' un solo pacchetto e il suo tempo di attesa e' pari a due secondi. La trasmissione e' istantanea, cioe' la coda si svuota ogni volta che arriva un pacchetto e ce n'e' gia' uno in coda, o quando l'unico pacchetto in coda ha accumulato un ritardo sufficiente.

(a) Si calcoli la percentuale di tempo durante la quale la coda e' vuota.

(b) Si calcoli la media del ritardo di un pacchetto (cioe' il tempo medio speso in coda).

E3 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo $t$

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo [2, 10] (minuti)

E4 Si consideri il funzionamento del protocollo Go-Back-N su un canale Markoviano a due stati con probabilita' di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilita' che un pacchetto sia errato e' 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono. Il tempo di round-trip e' pari a $m = 2$ slot (cioe' un pacchetto errato trasmesso al tempo $t$ verra' ritrasmesso al tempo $t + m$).

(a) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso di feedback perfetto (cioe' senza errori)

(b) Si calcoli il throughput del protocollo nel caso in cui il feedback sia soggetto a errori indipendenti con probabilita' di errore 0.1.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2004/2005**
**prova scritta – 22 settembre 2005– parte B**

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q, i > 0$, con $p + q = 1$. Se ne studi il comportamento, caratterizzandone in particolare la ricorrenza o transitorieta' e ricavandone la distribuzione stazionaria.

Compito 22 sett 2005

1

$x(0)=3 \qquad P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{matrix} 0.3\pi_0 + 0.2\pi_1 = \pi_1 \\ 0.2\pi_0 + 0.6\pi_1 = \pi_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \pi_0 = 0.3556 & m_0 = 1.8 \\ \pi_1 = 0.2083 & m_1 = 4.8 \\ \pi_2 = 0.2361 & m_2 = 4.235 \end{matrix}$

b) $E[\theta_{ij}] = 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} E[\theta_{kj}] \qquad E[\theta_{ij}^2] = 2E[\theta_{ij}] - 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} E[\theta_{kj}^2]$

$\begin{cases} E[\theta_{31}] = 1 + P_{32}E[\theta_{21}] + P_{33}E[\theta_{31}] \\ E[\theta_{21}] = 1 + P_{22}E[\theta_{21}] + P_{23}E[\theta_{31}] \end{cases} \qquad E[\theta_{31}] = 1$

$\longrightarrow Var[\theta_{31}] = 0$

$E[\theta_{31}^2] = 2E[\theta_{31}] - 1 + P_{32}E[\theta_{21}^2] + P_{33}E[\theta_{31}^2] \qquad E[\theta_{31}^2] = 1$

c) $\begin{cases} E[\theta_{13}] = 1 + P_{12}E[\theta_{23}] + P_{11}E[\theta_{13}] \\ E[\theta_{23}] = 1 + P_{22}E[\theta_{23}] + P_{21}E[\theta_{13}] \end{cases} \qquad \begin{matrix} E[\theta_{13}] = 3.235 \\ E[\theta_{23}] = 2.055 \end{matrix}$

$Var[\theta_{33}] = 3.155$

$\begin{cases} E[\theta_{13}^2] = 2E[\theta_{13}] - 1 + P_{12}E[\theta_{23}^2] + P_{11}E[\theta_{13}^2] \\ E[\theta_{23}^2] = 2E[\theta_{23}] - 1 + P_{22}E[\theta_{23}^2] + P_{21}E[\theta_{13}^2] \end{cases} \qquad E[\theta_{13}^2] = 13.62$

d) $P[x(1)=1\ x(3)=1 \mid x(2)=2] = P[x(1)=1 \mid x(2)=2]\, P_{21} = \dfrac{P[x(2)=2 \mid x(1)=1]\, P[x(1)=1]\, P_{21}}{P[x(2)=2]}$

$= \dfrac{P_{12}\, P_{21} \cdot 1}{P_{12}} = 0.2$

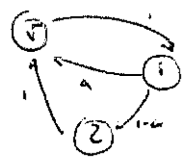
$P[x(2)=2 \mid x(1)=1\ x(3)=1] = \dfrac{P[x(1)=1\ x(3)=1 \mid x(2)=2]\, P[x(2)=2]}{P[x(3)=1 \mid x(1)=1]\, P[x(1)=1]} = \dfrac{P_{21}\ P_{12}}{P_{11}^{(2)}} = $

$= 0.1176$

2

$\lambda = 1\ s^{-1}$

$T_x \Leftrightarrow \begin{cases} > 2s \\ 2^\circ \text{ pack} \end{cases}$

a) 

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = P[\text{Conv.} \ldots\ 2s] = e^{-2\lambda}$

$T = \begin{pmatrix} x & 1/\lambda & x \\ 2s & x & \beta \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \qquad \beta = E[\underset{2}{z}_{\text{condiz.}}\ldots] = \int_0^2 \dfrac{x\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-2\lambda}}\,dx = \dfrac{1-3e^{-2\lambda}}{1-e^{-2\lambda}}$

Distr. staz.

$\pi_0 = \pi_1 = \dfrac{1}{3-\alpha} \qquad \pi_2 = \dfrac{1-\alpha}{3-\alpha}$

Medie temporali

$\mu_1 = \alpha \cdot 2 + (1-\alpha)\, \dfrac{(1-3e^{-2\lambda})}{1-e^{-2\lambda}}, \quad 2e^{-2\lambda} + 1 - 3e^{-2\lambda} = 1 - e^{-2\lambda} \longleftarrow E[Z_{\text{trasm.}}]$

$\mu_0 = 1/\lambda$

$\mu_2 = 0$

$P_0 = \dfrac{\pi_0 \mu_0}{\pi_0\mu_0 + \pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2} = 0.5363$

b) Tempo medio in coda

$E[\text{coda}] = P_0 \cdot \mu_1 + P_1 \cdot 0 = 0.4637$

— Il primo pack attende $\mu_1$
Il secondo attende 0

E3

$\lambda = \frac{5}{3}$ pck/min    Tempi di servizio $\mathcal{E}(1/6)$    $\boxed{11/4/00}$

a) $x(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_p t)$    $\lambda_p t = \lambda \int_0^t (1-G(z))dz = \frac{\lambda}{\mu}\left[1-e^{-\mu t}\right]$

$$E[x(t)] = \lambda_p t = \begin{cases} 6.321 & t=6 \\ 8.11 & t=10 \\ 10 & t=+\infty \end{cases}$$

b) $$P[x(t)=10] = \frac{(\lambda_p t)^{10}}{10!} e^{-\lambda_p t} = \begin{cases} 0.05046 \\ \\ 0.1251 \end{cases}$$

c) Tempi di servizio $\sim \mathcal{U}[2,10]$

$$\lambda_p t = \begin{cases} \lambda t & t<2 \\ \lambda \cdot 2 + \frac{5}{4}(t-2) - \frac{1}{16}\left[t^2-4\right] & 2<t<10 \\ \lambda \cdot 6 & t>10 \end{cases}$$

$$E[x(t)] = \begin{cases} 8.33 & t=6 \\ 10 & t=10 \\ 10 & t=+\infty \end{cases}$$ Stazionario    $$P[x(t)=10] = \begin{cases} 0.107 \\ \\ 0.125 \end{cases}$$

E4

$n=2$    $$P = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.3811 & 0.0159 \\ 0.159 & 0.811 \end{pmatrix}$$

a)

$$\text{Throughput} = \frac{P_{10}^{(\infty)}}{P_{10}^{(\infty)} + P_{01}\, m} = 0.506$$

b) $\delta = 0.1$

$$\text{Throughput} = \frac{(1-\delta)\, P_{10}^{(\infty)}}{(1-\delta)\left[P_{10}^{(\infty)} + m\, P_{01}\right] + m\delta\left[P_{10}^{(\infty)} + P_{01}^{(\infty)}\right]} = 0.7406$$

## Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
### prova scritta – 12 dicembre 2006– parte A (90 minuti)

E1 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 5)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} P^n$

(c) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) Si calcoli $P[X_4 = 5, X_2 = 3 | X_3 = 1, X_1 = 3]$

E2 Si consideri un nodo di rete che in condizioni normali riesce a smaltire un traffico pari a 1 Gbps. Tale nodo funziona normalmente per un tempo esponenziale di media $99T$, dopodiché entra in uno stato di allarme, durante il quale la sua capacità si riduce a 250 Mbps. Dopo essere rimasto $T$ secondi nello stato di allarme, il nodo viene istantaneamente riparato, e ricomincia a funzionare correttamente.

(a) Si calcoli la frazione del tempo che il nodo passa nello stato di allarme, e il traffico medio smaltito (si supponga che le code siano sempre piene, cioè che ci siano sempre pacchetti da trasmettere)

(b) Si supponga ora che una volta entrato nello stato di allarme il nodo smetta completamente di funzionare dopo un tempo esponenziale di media $2T$, a meno che non venga riparato prima (come nel caso precedente, la riparazione richiede esattamente $T$ da quando il nodo entra nello stato di allarme). Se il nodo smette di funzionare, deve essere interamente sostituito, e questo richiede un tempo $20T$, durante il quale il nodo non può gestire nessun traffico (si noti che questa sostituzione è diversa dalla semplice riparazione del caso precedente). Si calcolino: (i) il tempo medio fra due sostituzioni successive, (ii) la percentuale del tempo in cui il nodo non funziona, e (iii) il throughput del sistema.

E3 Si considerino due processi di Poisson indipendenti, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, in cui $X_i(t)$ è il numero di arrivi del processo $i$ nell'intervallo $[0, t]$. Il numero medio di arrivi per unità di tempo dei due processi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 1 | X_1(3) + X_2(3) = 3]$ e $P[X_1(3) + X_2(3) = 3 | X_1(3) = 1]$

(b) Si calcolino $P[X_1(2) = 1 | X_1(3) = 3]$ e $P[X_1(3) = 3 | X_1(2) = 1]$

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput (numero medio di successi per slot) di un protocollo che trasmette pacchetti direttamente sul canale, senza ritrasmissioni.

(b) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(c) Come al punto precedente, con la differenza che il canale di ritorno è soggetto a errori indipendenti con probabilità 0.1

## Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2005/2006
### prova scritta – 12 dicembre 2006– parte B (60 minuti)

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Dimostrare che se $i$ e $j$ comunicano e $i$ è ricorrente, allora anche $j$ è ricorrente.

T3 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

Compito 12 dicembre 2006

E1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

a) $\{0,4\}$ ricorr. per.
$\{2\}$ trans.
$\{1,3,5\}$ ricorr. aper.

b)
$$P^n = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \times & 0.2 & 0 & 0.2 & \times & 0.2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = 1/3 \qquad \pi_0 = \pi_4 = 1/2$

$\alpha_4 = 0.2 + 0.5\,\alpha_4 = 0.4$
$\alpha_1 = 0.3 + 0.5\,\alpha_4 = 0.6$

c)
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$P[X_4=5\ X_2=3 \mid X_3=1\ X_1=3] = \frac{P_{15}\cdot P[X_2=3\ X_3=1 \mid X_1=3]}{P[X_3=1 \mid X_1=3]} = \frac{P_{15}\ P_{31}\cdot P_{33}}{P_{31}^{(2)}} = 0.1217$$

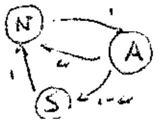
2

$N \to \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{55T}\right) \qquad 1\ \text{Gbps}$
$A \to \qquad T \qquad 250\ \text{Mbps}$

a)
$$P_{AE} = \frac{E[A]}{E[N]+E[A]} = 0.99 \qquad P_A = 0.01$$

$$E[\text{traffico}] = R_N P_N + R_A P_A = 0.3525\ \text{Gbps}$$

b)
$A \longrightarrow \quad T \quad \longrightarrow N$
$\longrightarrow \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2T}\right) \to S \longrightarrow 20T \longrightarrow N$




$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} \times & 55T & \times \\ T & \times & \beta \\ 20T & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\alpha = P\left[\mathcal{E}\left(\tfrac{1}{2T}\right) < T\right] = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta = E\left[\mathcal{E}_{\text{cond}}\left(\tfrac{1}{2T}\right)\right] = \frac{1}{1-e^{-1/2}} \int_0^T t \ldots = \frac{T}{1-e^{-1/2}}\left[2-3e^{-1/2}\right]$$

$\pi_N = \dfrac{1}{3-e^{-1/2}}$

$\pi_A = \dfrac{1}{3-e^{-1/2}}$

$\pi_S = \dfrac{1-e^{-1/2}}{3-e^{-1/2}}$

$\mu_N = 55T$
$\mu_S = 20T$
$$\mu_A = (1-e^{-1/2})\frac{T}{1-e^{-1/2}}\left[2-3e^{-1/2}\right] + T(e^{-1/2})$$
$= 2T(1-e^{-1/2}) \longleftarrow$ troncata
$$\left(f_A(a) = \tfrac{1}{2T}e^{-\frac{a}{2T}} + \delta(a-T)\right)$$

$$P_N = \frac{\pi_N \mu_N}{\pi_N\mu_N + \pi_S\mu_S + \pi_A\mu_A} = \frac{20T(1-e^{-1/2})}{22T(1-e^{-1/2})+55T}$$

$$\mu_{44} = \frac{\mu_4}{P_4} = \frac{22T(1-e^{-1/2})+55T}{1-e^{-1/2}} = 173.6\,T$$

$$\text{Throughput} = 250\cdot P_A + 1000\,P_N = 321.4\ \text{Mbps}$$

Caso geometrico

# transizioni $N \to A \in \mathcal{G}_{\text{mod}}(1-e^{-1/2}) \Rightarrow E[\#\ \text{trans}] = (1-e^{-1/2})^{-1}$

$$E[\text{ciclo}] = \frac{1}{1-e^{-1/2}}\,55T + \left(\frac{1}{1-e^{-1/2}} - 1\right)T + \frac{T}{1-e^{-1/2}}\left[2-3e^{-1/2}\right] + 20T \Rightarrow P_N = \frac{E[N]}{E[\text{ciclo}]}$$

ultimo $A \to N$

$$\Rightarrow Th = \frac{E[N]R_N + E[A]R_A}{E[\text{ciclo}]}$$

E3

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.5$

a) $P[X_1(3)=1 \mid X(3)=3] = \binom{3}{1}\left[\frac{\lambda 3}{2\lambda 3}\right]\left[1-\frac{\lambda 3}{3\cdot 2\lambda}\right]^2 = 0.375$

$P[X(3)=3 \mid X_1(3)=1] = P[X_2(3)=2] = 0.025$

b) $P[X_1(2)=1 \mid X_1(3)=3] = \binom{3}{1}\left(\frac{2\lambda}{3\lambda}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{3\lambda}\right)^2 = 0.2222$

$P[X(3)=3 \mid X_1(2)=1] = P[X_1(1)=2] = 0.2510$

E4

$$P = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.42 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow P^4 = \begin{pmatrix} 0.3624 & 0.6376 \\ 0.155 & 0.8120 \end{pmatrix}$$

b) $S = 0.8246$ $\qquad$ a) $\Rightarrow \pi_0 = 0.3333$

c) $S = 0.6760$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 17 giugno 2008 – parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri un nodo di rete che in condizioni di funzionamento normale N smaltisce un traffico pari a 100 Mbps. Dopo un tempo di funzionamento casuale con distribuzione esponenziale di media $T$, il nodo entra in uno stato di malfunzionamento M in cui la sua capacita' di smaltire traffico si riduce a 50 Mbps. Quando il nodo entra nello stato M, con probabilita' $\beta$ torna a funzionare normalmente dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_1 T]$, mentre con probabilita' $1-\beta$ smette di funzionare dopo un tempo distribuito uniformemente in $[0, \alpha_2 T]$ e deve essere sostituito, operazione che richiede un tempo deterministico pari a $\delta T$.

(a) Si costruisca un modello semi-Markoviano per il sistema. In particolare, indicando gli stati possibili con N, M e G (dove G e' lo stato durante il quale il nodo non funziona), si scrivano la matrice di transizione della catena di Markov inclusa e la matrice dei tempi medi associati alle transizioni.

(b) Usando il modello semi-Markoviano sviluppato al punto precedente, si calcoli in maniera parametrica la frazione del tempo che il nodo passa nei tre stati, e si calcoli il throughput medio smaltito dal nodo. Si calcolino inoltre i valori numerici di tali quantita' per $\beta = 0.9, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2$ e $\delta = 0.1$.

(c) Si calcolino le quantita' richieste al punto precedente usando la teoria dei processi di rinnovamento, individuando un ciclo di rinnovamento opportuno.

E2 Si consideri un nodo di rete con due link di ingresso, dai quali arrivano pacchetti secondo due processi di Poisson indipendenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$ di intensita' $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 500$ pacchetti al secondo, dove un pacchetto e' composto da 1000 bit. Sia inoltre $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

(a) Si calcolino $P[X_1(3) = 2 | X(3) = 3]$ e $P[X_1(2) = 2 | X(2) = 3]$.

(b) Si calcolino $P[X_1(1) = 2 | X(2) = 3]$ e $P[X(2) = 3 | X_1(1) = 2]$.

(c) Si supponga che il link di uscita dal nodo sia un sistema di trasmissione costituito da un gran numero di canali paralleli, ognuno caratterizzato da un valore di bit rate pari a 1 Mbps. Supponendo che il sistema sia vuoto al tempo $t = 0$ e di poter trascurare l'eventualita' che un pacchetto che arriva non trovi un canale libero, determinare la probabilita' che vi siano due pacchetti in trasmissione agli istanti $t_1 = 0.5$ ms e $t_2 = 3$ ms.

E3 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(a) si disegni il diagramma di transizione della catena, se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(c) si calcoli la media del tempo di primo passaggio da tutti gli stati allo stato 4

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.99 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t+2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Come al punto precedente se il canale di ritorno e' affetto da errori indipendenti con probabilita' 0.02.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 17 giugno 2008 – parte B (60 minuti)**

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t)+1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a $n$ passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_m P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$

ESAME 17 GIUGNO 2008

1

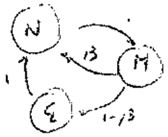
$N \to 100$ Mbps $\quad T_N \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{T}\right)$

$M \to 50$ Mbps $\quad \xrightarrow{\beta}\ T_M \sim \mathcal{U}(0, a_1 T) \to N$

$\quad \xrightarrow{1-\beta}\ T_M \sim \mathcal{U}(0, a_2 T) \to G$

$G \to 0 \quad T_G = \delta T$

a)



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1-\beta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} x & T & x \\ \frac{a_1 T}{2} & x & \frac{a_2 T}{2} \\ \delta T & x & x \end{bmatrix}$$

$$\mu_N = T \qquad \mu_M = \beta \frac{a_1 T}{2} + (1-\beta)\frac{a_2 T}{2} \qquad \mu_G = \delta T$$

b) $\pi_N = \pi_M = \frac{1}{3-\beta} \qquad \pi_G = \frac{1-\beta}{3-\beta}$

$$P_N = \frac{\pi_N \mu_N}{\pi_N \mu_N + \pi_M \mu_M + \pi_G \mu_G} = 0.535 \qquad P_M = \frac{\pi_M \mu_M}{\pi_N \mu_N + \pi_M \mu_M + \pi_G \mu_G} = 0.0514 \qquad P_G = \frac{\pi_G \mu_G}{\pi_N \mu_N + \pi_M \mu_M + \pi_G \mu_G} = 0.00555$$

Throughput $= R_N P_N + R_M P_M = 54.65$ Mbps

c) # successi $\in \mathcal{G}_{mod}(1-\beta) \qquad E[\#\text{ successi}] = \frac{1}{1-\beta}$

$$E[\text{ciclo}] = \left(\mu_N + \beta \frac{a_1 T}{2}\right) E[\#\text{ succ.}] + \frac{a_2 T}{2} + \delta T$$

$$P_N = \frac{\mu_N\, E[\#\text{ succ}]}{E[\text{ciclo}]} = 0.947 \qquad P_M = \frac{\left(\beta \frac{a_1}{2} T + (1-\beta)\frac{a_2}{2} T\right) E[\#\text{ succ}]}{E[\text{ciclo}]} = 0.04356$$

$P_G = 0.00547$

$$E[Th] = \frac{E[\#\text{ succ}]\left(100\,T + 50\,\beta \frac{a_1}{2} T\right) + 50\ \frac{a_2 T}{2}}{E[\text{ciclo}]}$$

E2

$\lambda_1 = \lambda_2 = 500$

a) $P[X_1(3) = 2 \mid X(3) = 3] = \binom{3}{2}\left(\frac{3\lambda}{3 \cdot 2 \cdot \lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{3\lambda}{3 \cdot 2 \cdot \lambda}\right) = 0.375$

$P[X_1(2) = 2 \mid X(2) = 3] = 0.375$

b) $P[X_1(1) = 2 \mid X(2) = 3] = \binom{3}{2}\left(\frac{\lambda}{4\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda}{4\lambda}\right) = 0.1406$

$P[X(2) = 3 \mid X_1(1) = 2] = P[X_1(1) + X_2(2) = 3] = (\lambda 3)\, e^{-3\lambda} = 0.3347$

c) Tempo servizio $= 1$ ms

$P[2 \text{ pck in } t_1 = 0.5] = P[N(0, t_1) = 2] = \frac{(2\lambda t_1)^2}{2} e^{-2\lambda t_1} = 0.7582$

$P[2 \text{ pck in } t_1 = 3] = \pi_2 = \frac{(\lambda \cdot 2 \cdot 1)^2 e^{-2\lambda \cdot 1}}{2} = 0.1535 \longleftarrow$ condizione stazionaria

E3

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

a) $\{0, 2\}$ ricorr. per.

$\{3\}$ trans.

$\{1, 4\}$ ricorr. aper.

b) $\pi_0 = \pi_2 = \pi_1 = \pi_4 = 0.5 \qquad u_0 = 0.4 + 0.2 u_0 \to u_0 = u_1 = 0.5$

$$P^n = \begin{pmatrix} x & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ x & 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0.5 & x & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^{(k)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

c) $E[\theta_{i4}]$

$E[\theta_{04}] = E[\theta_{24}] = E[\theta_{34}] = +\infty$

$E[\theta_{14}] = 1 + 0.3\, E[\theta_{14}] \qquad E[\theta_{14}] = 1.428$

$E[\theta_{44}] = \pi_4^{-1} = 2$

## Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
### prova scritta – 05 settembre 2007 – parte A

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 20$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione fisso pari a 20 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' uniformemente distribuita fra 1 MByte e 2 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che la velocita' di trasferimento di ciascun file sia 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti.

(a) Supponendo che il server venga acceso al tempo $t = 0$, si dica dopo quanto tempo la statistica del numero di richieste attive arriva alla condizione stazionaria, e si dia l'espressione di $P[k$ richieste attive$]$ in tale condizione.

(b) Sapendo che in un intervallo di durata $T$ sono arrivate $N$ richieste, si trovi la probabilita' che alla fine di tale intervallo non ci sia nessuna richiesta attiva per (b1) $T = 0.1$ s e $N = 2$ e (b2) $T = 1$ s e $N = 20$.

✓ E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino le probabilita' di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori

(c) si calcolino $\lim_{n\to\infty} P^n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k$

(d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC.

(b) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio e' T.

(c) Si risponda alle due domande precedenti nel caso in cui la moneta sia truccata, con probabilita' che a un lancio si verifichi testa pari a $p = 1/4$.

E4 Si consideri un canale Markoviano a due stati con probabilità di transizione 0.98 (dallo stato buono a se stesso) e 0.1 (dallo stato cattivo allo stato buono). La probabilità che un pacchetto sia errato è 1 nello stato cattivo e 0 nello stato buono.

(a) Si calcoli il throughput del protocollo Go-Back-N se il tempo di round-trip è pari a due slot (cioè se una trasmissione nello slot $t$ è errata questa verrà ritrasmessa nello slot $t + 2$), e il canale di ritorno è senza errori.

(b) Si consideri adesso un canale che alterna il comportamento precedente a uno con errori indipendenti con probabilita' 0.01. In particolare, il canale si comporta secondo il modello markoviano precedente per un numero geometrico di slot di media 1000000 slot, poi passa al comportamento iid per un numero geometrico di slot di media 2000000 slot, e cosi' via. Si calcoli il throughput del protocollo GBN in questa situazione.

## Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2006/2007
### prova scritta – 05 settembre 2007 – parte B

T1 Si dimostri che in una catena di Markov con un numero finito di stati non possono esserci stati ricorrenti nulli.

T2 Dimostrare che per un processo di rinnovamento $E[S_{N(t)+1}] = E[X](M(t) + 1)$.

T3 Dimostrare che per una catena di Markov le probabilità di transizione a $n$ passi, $P_{ij}^{(n)}$ soddisfano la relazione

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{m} P_{im}^{(k)} P_{mj}^{(n-k)}, k = 0, 1, \ldots, n$$

Compito 05 settembre 200[illegible]

1

$\lambda = 20$ [illegible]/s    Tempo servizio $\in \mathcal{U}[100, 150]$ ->

) La statistica diventa [illegible] dopo 150 ms $\rightarrow \lambda_p t = \lambda E[Y]$ $\forall$ $t \geq 150$ ms

$$x_k \in \mathcal{P}(\lambda_p t) \rightarrow \pi_k = \frac{(\lambda E[Y])^k}{k!} e^{-\lambda E[Y]} = \frac{(2.5)^k}{k!} e^{-2.5}$$

)

$$P[X(T)=0 \mid N(0,T)=N] = \frac{P[N(0,T-E[Y])=N \quad N(T-E[Y],T)=0]}{P[N(0,T)=N]}$$

$$= \begin{cases} 0 & T=0.1,\ N=2 \Rightarrow E[Y] > T \Rightarrow \text{Non posso avere 2 part. entro 100 ms essendo } X(0)=0 \\ \binom{N}{0}\left(\frac{\lambda E[Y]}{\lambda}\right)^0\left(1-\frac{\lambda E[Y]}{\lambda}\right)^N = 0.04557 & N=20,\ T=1 \end{cases}$$

2

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

)
$C_0 = \{0,1\}$ ricorr. per.
$C_1 = \{2,4\}$ ricorr. ap.
$\{3\}$ trans.

)
$u_0 = 0.5 + 0.2u_0 \rightarrow u_0 = 0.625$
$u_4 = 0.3 + 0.2u_4 \quad u_4 = 0.375$

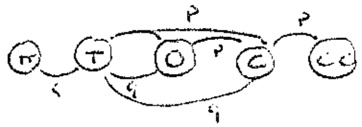
)

$$P^k = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ x & x & 0.3125 & 0 & 0.3125 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \sum_{k=1}^{k} P^k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0.1875 & 0.1875 & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

d) Tempo ricorrenza

$m_0 = m_1 = 2 = m_2 = m_4 \qquad m_3 = +\infty$

E3



a)
$P[X_F = cc \mid X_0 = c] = p u_c + q u_T$
$u_c = p + q u_T$    $\boxed{u_c = \frac{p}{1-qp}}$
$u_T = p u_c$    $\boxed{u_T = \frac{p^2}{1-qp}}$

$$\boxed{u_{O} = \frac{p^2}{1-qp} + \frac{qp^2}{1-qp}}$$

$p = q = 1/2 \rightarrow u_0 = 0.5$

b)
$P[X_F = cc \mid X_0 = T] = u_T = 1/3$

c) $q = 0.25 \rightarrow u_c = 0.2654$
$u_T = 0.1923$

E4

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.5644 & 0.0476 \\ 0.155 & 0.820 \end{pmatrix} \quad n = 2$$

a) $Th_1 = 0.8646$

b) $C = 0.01$
$Th_2 = 0.8086$

$$E[Th] = Th_1 \cdot \frac{1}{3} + Th_2 \cdot \frac{2}{3} = 0.8338$$

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 14 luglio 2008 – parte A (90 minuti)**

E1 Si consideri un server web a cui arrivano richieste di download secondo un processo di Poisson di intensita' $\lambda = 5$ richieste al secondo. Ognuna di esse, dopo un tempo di elaborazione uniformemente distribuito fra 10 e 30 ms, da' luogo al trasferimento di un file la cui dimensione e' esponenziale di media 1 MByte. Una richiesta si dice "attiva" da quando arriva fino a quando il trasferimento del file corrispondente e' terminato. Si supponga che la capacita' del server in termini di numero di richieste simultanee che puo' elaborare sia infinita, e che si voglia trasferire ciascun file a 100 Mbit/s, indipendentemente dal numero di file che vengono contemporaneamente trasferiti. Si supponga che il server venga acceso al tempo $t = 0$, e sia $X(t)$ il numero di richieste attive nel sistema al tempo $t$.

(a) Si calcoli la probabilita' che, dato che sono arrivate 5 richieste nell'intervallo da 0 a 1 s, almeno due di queste siano arrivate entro $t = 0.5$ s.

(b) Si dimensioni la capacita' del link di uscita dal server, in modo che la probabilita' che il numero di file da trasferire ecceda tale capacita' sia minore di 0.001

E2 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza.

(a) Si calcoli la probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC, e la durata media del gioco.

(b) Come la domanda precedente, nel caso in cui il gioco finisca quando si verificano due lanci *diversi* in sequenza (cioe' CT o TC).

E3 Si consideri uno switch in cui vi sono due processori uguali e indipendenti. Ogni processore alterna periodi di funzionamento e di guasto di durata esponenziale con media $1/\alpha$ (funzionamento) e $1/\beta = 1/(19\alpha) = 1$ giorno (guasto). Il traffico totale smaltito dallo switch e' pari a 2.5 Gbps se entrambi i processori sono attivi, 1 Gbps se ne funziona uno solo, e zero altrimenti.

(a) Si calcoli la frazione del tempo in cui lo switch non smaltisce traffico

(b) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo durante il quale lo switch non smaltisce traffico

(c) si calcoli la durata media di un intervallo di tempo in cui c'e' un solo processore funzionante, e la probabilita' che in questo caso esso si guasti prima che l'altro torni in funzione

(d) si calcoli il traffico medio smaltito dallo switch

E4 Si consideri una catena di Markov $X_n$ con la seguente matrice di transizione (gli stati sono ordinati da 0 a 2)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(a) Si disegni il diagramma di transizione, e si calcoli la distribuzione di probabilita' di $X_1, X_2$ e $X_{500}$, dato che $X_0 = 0$.

(b) Si calcoli il tempo medio di primo passaggio dagli stati 0, 1 e 2 verso lo stato 2, e il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati.

(c) Sia $W_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = j\} \middle| X_0 = i\right]$ il numero medio di visite allo stato $j$ a partire dallo stato $i$ durante i primi $n$ istanti dell'evoluzione della catena. Si calcolino $W_{0j}^{(3)}$ e $W_{0j}^{(5000)}$ per $j = 0, 1, 2$.

**Corso di Modelli e Analisi delle Prestazioni nelle Reti – AA 2007/2008**
**prova scritta – 14 luglio 2008 – parte B (60 minuti)**

T1 Si enunci e si dimostri il teorema elementare del rinnovamento.

T2 Si dimostri che in una catena di Markov il periodo e' una proprieta' di classe.

T3 Si dimostri che per un processo di Poisson $X(t)$ la statistica di $X(s)$ condizionata a $X(t)$, $s < t$, e' binomiale, e si fornisca l'espressione di $P[X(s) = k | X(t) = n]$.

Compito in [illegible] 2008

1.

$\lambda = 5$ richieste/s $\quad T_s \sim \mathcal{U}[10, 20]$ ms $\quad T_{tx} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{10 MB/s}\right) \cdot \frac{1}{100 Mbps}$

)

$P[N(0, 0.5) \geq 2 \mid N(0,1) = 5] = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{0.5\lambda}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{0.5\lambda}{\lambda}\right)^4 - \binom{5}{0}\left(1 - \frac{0.5\lambda}{\lambda}\right)^5 = 0.8125$

) $\sum_{i=2}^{\infty} P[i \text{ richieste in } (100)\text{ms}] \leq 0.001 \qquad$ durata 100ms $= E[\mathcal{U}] + E[\mathcal{E}]/_{100 Mbps}$

Per via esaustiva

$e^{-\lambda 100ms} + (\lambda 100ms)\, e^{-\lambda 100ms} + \frac{(\lambda 100ms)^2}{2} e^{-\lambda 100ms} + \ldots \xrightarrow{\leq 0.999} n = 4 \to 0.9998$

Capacità minima $= n \cdot C = 400$ Mbps

2

) $\quad \pi_{C} = \frac{1}{2}\pi_C + \frac{1}{2}\pi_T$

$\pi_C = 2/3 \qquad \pi_{C} = 0.5$

$\pi_T = 1/3$

$v_C = 1 + \frac{1}{2}v_C + \frac{1}{2}v_T \qquad v_C = 3$

$v_C = 1 + \frac{1}{2}v_T \qquad v_C = 2$

$v_T = 1 + \frac{1}{2}v_C \qquad v_T = 2$

) I risultati risultano identici essendo $p = q$

E 3

Processi ind $\quad F \to T_F \sim \mathcal{E}(\alpha) \quad \alpha = 1.5 \qquad R_{FF} = 2.5$ Gbps $\quad R_{FG} = R_{GF} = 1$ Gbps

$\qquad G \to T_G \sim \mathcal{E}(\beta) \quad \beta = 1 \qquad R_{GG} = 0$

a) Dall'indipendenza

$P_G = \frac{E[T_G]}{E[T_G] + E[T_F]} = 0.05 \quad \longrightarrow \quad P_{GG} = (P_G)^2 = 0.0025$

b)

$E[\text{non soddisfacente}] = E[\min\{\mathcal{E}(\beta), \mathcal{E}(\beta)\}] = \frac{1}{2\beta} = 0.5$

c)

$E[1 \text{ solo proc funzionante}] = E[\min\{\mathcal{E}(\alpha), \mathcal{E}(\beta)\}] = \frac{1}{\alpha + \beta} = 0.55$

$P[2_{guasti} \mid 1_{guasto}] = P[\mathcal{E}(\alpha) < \mathcal{E}(\beta)] = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha x})\beta e^{-\beta x}\, dx = 1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 0.55$

d)

$\text{Traffico} = R_{FF}(P_F)^2 + 2 P_F P_G R_{FG} = 2.351$ Gbps

E 4

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \longrightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.32 & 0.32 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

a) $x_1 = [0.2 \quad 0.4 \quad 0.4] \qquad x_2 = [0.36 \quad 0.32 \quad 0.32] \qquad \pi = [1/3 \quad 1/3 \quad 1/3]$

b) $m_0 = m_1 = m_2 = 3 = E[\theta_{22}]$

$E[\theta_{i2}] \to \begin{cases} E[\theta_{02}] = 1 + P_{00}E[\theta_{02}] + P_{01}E[\theta_{12}] \\ E[\theta_{12}] = 1 + P_{10}E[\theta_{02}] + P_{11}E[\theta_{12}] \end{cases} \qquad \begin{matrix} E[\theta_{02}] = 2.5 \\ E[\theta_{12}] = 2.5 \end{matrix}$

c) $W_{0j}^{(3)} = P_{0j}^{(0)} + P_{0j}^{(1)} + P_{0j}^{(2)} = \begin{cases} 1.56 & j=0 \\ 0.72 & j=1 \\ 0.72 & j=2 \end{cases}$

$W_{0j}^{(5000)} = 5000\,\pi_j = \begin{cases} 1667 & j=0 \\ 1667 & j=1 \\ \ldots & j=2 \end{cases}$

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 2 settembre 2005– parte A**

E1 Si consideri un centralino telefonico con una sola linea e la possibilita' di mettere in attesa una sola chiamata (ulteriori chiamate che arrivano quando ce n'e' gia' una in attesa sono perse). Le chiamate arrivano secondo un processo di Poisson di parametro cinque chiamate all'ora, e la durata di ognuna e' distribuita esponenzialmente con media sei minuti. Si calcolino

(a) la percentuale di chiamate perse

(b) la statistica del tempo di attesa di una chiamata

(c) il tempo medio totale speso nel sistema da una chiamata (attesa piu' servizio)

E2 Si consideri un sistema di tipo Slotted ALOHA che usi un canale condiviso a 10 Mbps, e in cui la durata di uno slot corrisponda a un pacchetto di 1000 bit. Nel sistema vi sono 100 utenti e la probabilita' di ritrasmissione e' $q_r = 0.005$.

(a) Si calcoli il massimo traffico smaltibile dal sistema, indicando sotto quali ipotesi tale valore puo' essere effettivamente raggiunto

(b) se il traffico complessivo generato nel sistema e' pari a $\lambda = 2000$ pacchetti/s, si calcoli il valore del drift quando il numero di utenti in backlog e' pari a $n = 5$ e $n = 20$. (Si supponga di poter usare l'approssimazione di Poisson per il traffico offerto totale.)

E3 Si consideri la rete con cinque nodi numerati da 1 a 5 e la seguente matrice di connettivita' in cui l'elemento $d_{ij}$ e' la lunghezza del collegamento dal nodo $i$ al nodo $j$ (infinita se il collegamento diretto non e' presente):

$$D = \begin{pmatrix} - & 1 & \infty & 6 & \infty \\ 1 & - & 1 & 4 & \infty \\ \infty & 1 & - & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & - & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & - \end{pmatrix}$$

(a) si disegni la topologia della rete indicando i vari link e le distanze relative

(b) si applichi l'algoritmo di Bellman-Ford per la ricerca dei cammini minimi verso il nodo 1, elencando per ogni passo le distanze minime stimate

E4 Si consideri una passeggiata casuale sugli interi non negativi con le seguenti probabilita' di transizione: $P_{01} = 1$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, $i > 0$, con $p + q = 1$. Sia $p = 0.4$.

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie che la passeggiata casuale si trovi nello stato 5 quando parte dallo stato 0 e quando parte dallo stato 5.

(b) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} P_{05}^{(n)}$.

(c) Si calcoli la probabilita' stazionaria che la passeggiata casuale si trovi nello stato 5 quando parte dallo stato 0, nel caso in cui $p = 0.5$

(d) Se la catena parte dallo stato 1, si calcoli il tempo medio necessario per arrivare (per la prima volta) nello stato 3.

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 2 settembre 2005– parte B**

T1 Dimostrare che il numero $k$ di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero $n$ di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

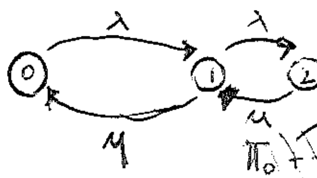
T2 Si analizzino le prestazioni del protocollo slotted ALOHA usando l'analisi dei drift, e se ne discuta la stabilita'.

T3 Si descriva il modello OSI, dando per ogni livello un elenco delle funzionalita' principali. Per i livelli piu' importanti, dare qualche esempio di possibile protocollo.

**E1** • arrivi con pdf P  $\lambda = 5/\text{ora} = 0.5/6'$

• Tempo servizio è $\mathcal{E}(\mu)$ con $\frac{1}{\mu} = 6$ minuti

M|M|1



$\cancel{\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu}$

$\cancel{\pi_0 + \pi_1 = 1}$

$\Rightarrow \cancel{\pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} = 1} \quad \cancel{\pi_0 = \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1}{1+\frac{5}{10}} = \frac{2}{3}} =$

$\pi_1 = \frac{1}{3}$ probabilità di chiamate perse

• $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$

$\pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \Rightarrow$

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$\pi_0 + \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 = 1$

$\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{1}{1+0.5+0.25} = \frac{1}{1.75} = 0.57$

ma $\frac{\lambda}{\mu} = 0.5$

$\pi_2$ = probabilità chiamata persa = $\pi_0 (0.25) = 0.142$

<u>TEMPO ATTESA CHIAMATA</u> — $T \in \mathcal{E}_1(\mu) + \mathcal{E}_2(\mu)$ → tempo di attesa chiamata nuova

tempo di servizio chiamata precedente

TEMPO ATTESA IN CODA :

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 16 dicembre 2005– parte A**

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcoli la media del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(c) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1|X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2|X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione (ogni connessione occupa un canale) secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo $t$

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo $[2, 10]$ (minuti)

E3 Una moneta e' lanciata finche' non si verificano due teste (TT) o due croci (CC) in sequenza. La moneta e' truccata. In particolare, la probabilita' che il risultato di un lancio sia testa (T) e' $p = 2/3$, mentre la probabilita' che si verifichi croce (C) e' $1 - p$. Calcolare:

(a) La probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC.

(b) La probabilita' che il gioco termini con la sequenza CC dato che il risultato del primo lancio e' T.

E4 Si consideri un nodo a cui arrivano pacchetti di lunghezza costante pari a 1000 bit, e in cui l'unico link di uscita ha una velocita' di 1 Mbps. La statistica degli arrivi segue un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 750$ pacchetti al secondo. Ogni pacchetto che arriva ha priorita' 1 (alta) con probabilita' 1/4 e priorita' 2 (bassa) con probabilita' 3/4. La priorita' di ogni pacchetto e' assegnata indipendentemente dagli altri. Il nodo implementa una politica di servizio che tiene conto delle priorita' dei pacchetti in maniera non-preemptive.

(a) si calcoli il tempo medio di attesa in coda e il tempo medio totale speso nel sistema dai pacchetti delle due classi

(b) si calcoli il tempo medio totale speso nel sistema da un pacchetto generico, e il numero medio totale di pacchetti nel nodo (compreso quello in trasmissione)

(c) si dica come cambiano le risposte al punto (a) nel caso in cui $\lambda = 1500$

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 16 dicembre 2005– parte B**

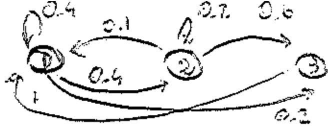
T1 Dimostrare che il numero $k$ di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero $n$ di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

T2 A partire dalle probabilita' degli eventi in intervalli infinitesimi, si derivi la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti in una coda M/M/1. (Si diano tutti i dettagli della dimostrazione.)

T3 Si descrivano i protocolli ARQ Selective Repeat e Go-Back-N discutendone i rispettivi vantaggi e svantaggi.

El:

$$\underline{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




$$\pi_0 = \pi_0 \cdot 0.4 + \pi_1\, 0.2 + \pi_2 \qquad \pi_1(1-0.2) = \pi_0\, 0.4 \Rightarrow \pi_1 = \frac{0.4}{0.8}\pi_0$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot 0.4 + \pi_1\, 0.2 + \quad \Rightarrow \quad \pi_0(1-0.4) = \pi_0 \frac{0.4}{0.8} \cdot 0.2 + \pi_2$$

$$\pi_2 = 0.2\,\pi_0 + 0.6\,\pi_1 \qquad \Rightarrow \pi_0 \cdot 0.5 = \pi_2 \Rightarrow \pi_0 + \pi_0\, 0.5 + \pi_0\, 0.5 = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2} \qquad \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow m_0 = 2 \qquad m_1 = m_2 = 4$$

- $E[\varphi_{13}] = 0.4\, E[\varphi_{23}] + 0.4\, E[\varphi_{13}] + 1 \qquad E[\varphi_{13}](1-0.4) = 0.4\, E[\varphi_{23}] + 1$
- $E[\varphi_{23}] = 0.1\, E[\varphi_{13}] + 0.2\, E[\varphi_{23}] + 1 \quad \Rightarrow \quad E[\varphi_{23}](1-0.2) = 0.1\, E[\varphi_{13}] + 1$

$$\Rightarrow \quad E[\varphi_{13}] = \frac{0.4\, E[\varphi_{23}] + 1}{0.6} = \frac{2}{3} E[\varphi_{23}] + \frac{5}{3}$$

$E$

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 2 settembre 2005– parte A**

E1 Si consideri la catena di Markov $X(t)$ con stati 1, 2, 3, $X(0) = 3$, e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino le probabilita' stazionarie e i tempi medi di ricorrenza di tutti gli stati.

(b) Si calcolino media e varianza del tempo di primo passaggio dallo stato 1 allo stato 3.

(c) Si calcolino $P[X(1) = 1, X(3) = 1|X(2) = 2]$ e $P[X(2) = 2|X(1) = 1, X(3) = 1]$.

E2 Si consideri un sistema di trasmissione a divisione di frequenza in cui il numero di canali sia sufficientemente elevato da trascurare la probabilita' che siano tutti occupati. A tale sistema arrivano richieste di connessione secondo un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 100$ chiamate all'ora, e la durata di ognuna di tali chiamate e' esponenziale con media 6 minuti. Sia $X(t)$ il numero di canali occupati al tempo $t$

(a) Si calcoli la media di $X(t)$ per $t = 6, 10$ minuti e per $t = \infty$.

(b) Si calcoli $P[X(t) = 10]$ per $t = 6$ e per $t = \infty$

(c) Si ripetano i calcoli delle due domande precedenti nel caso in cui la distribuzione della durata delle chiamate e' uniforme nell'intervallo [2, 10] (minuti)

E3 Si consideri un sistema di trasmissione che usa il protocollo Selective Repeat per scambiare dati lungo un collegamento caratterizzato da una probabilita' di errore sul bit pari a $\varepsilon = 0.00001$, da un canale di ritorno perfettamente affidabile, e da un tempo di round-trip pari a $n = 7$ slot (dove uno slot e' pari al tempo di trasmissione di un blocco di 2000 bit). Si noti che in questo caso se un blocco trasmesso nello slot $t$ e' errato, verra' ritrasmesso nello slot $t + n$.

(a) Si calcoli il massimo throughput del sistema in blocchi per slot.

(b) Sia $L' = 48$ bit l'overhead totale per blocco dovute al protocollo. Si determini la lunghezza ottima del pacchetto che massimizza il throughput in saturazione.

E4 Si consideri un nodo a cui arrivano pacchetti di lunghezza costante pari a 1000 bit, e in cui l'unico link di uscita ha una velocita' di 1 Mbps. La statistica degli arrivi segue un processo di Poisson con intensita' $\lambda = 750$ pacchetti al secondo. Ogni pacchetto che arriva ha priorita' 1 (alta) con probabilita' 1/3 e priorita' 2 (bassa) con probabilita' 2/3. La priorita' di ogni pacchetto e' assegnata indipendentemente dagli altri. Il nodo implementa una politica di servizio che tiene conto delle priorita' dei pacchetti in maniera non-preemptive.

(a) si calcoli il tempo medio di attesa in coda e il tempo medio totale speso nel sistema dai pacchetti delle due classi

(b) si calcoli il tempo medio totale speso nel sistema da un pacchetto generico, e il numero medio totale di pacchetti nel nodo (compreso quello in trasmissione)

(c) si dica come cambiano le risposte al punto (a) nel caso in cui $\lambda = 1500$

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 2 settembre 2005– parte B**

T1 Dimostrare che il numero $k$ di arrivi di Poisson nell'intervallo $(0, s)$ condizionato al numero $n$ di arrivi nell'intervallo $(0, t)$ con $t > s$ è una variabile casuale binomiale e darne la distribuzione di probabilita'

T2 A partire dalle probabilita' degli eventi in intervalli infinitesimi, si derivi la distribuzione stazionaria del numero di pacchetti in una coda M/M/1.

T3 Si descrivano i protocolli ARQ Selective Repeat e Go-Back-N discutendone i rispettivi vantaggi e svantaggi.

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 25 luglio 2005– parte A**

E1 Si consideri un gioco in cui una moneta viene lanciata ripetutamente finché non compare la sequenza THT.

(a) Si calcoli il numero medio di lanci prima che il gioco finisca (sugg.: si costruisca una catena di Markov opportuna)

(b) Si ripeta il punto precedente se la sequenza per la quale il gioco finisce è TH

(c) Si supponga ora che, invece che finire il gioco secondo le regole descritte in precedenza, si lanci ripetutamente la moneta. Ogni volta che si verifica la combinazione THT si perde un punto, mentre ogni volta che si verifica la combinazione TH se ne guadagna uno (si considerino anche eventuali sovrapposizioni, per esempio la sequenza THT contiene sia THT sia TH). Sia $R(N)$ il punteggio dopo $N$ lanci, con $R(0) = 0$. Si calcolino $\lim_{N\to\infty} R(N)$ e $\lim_{N\to\infty} R(N)/N$

E2 Si consideri una catena di Markov con la seguente matrice di transizione (gli stati sono numerati da 0 a 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

(a) se ne classifichino gli stati e si individuino le classi

(b) si calcolino le probabilita' di assorbimento nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori

(c) si calcoli $\lim_{n\to\infty} P^n$

(d) si calcoli il tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati

E3 Si consideri un sistema di trasmissione che usa il protocollo Go-Back-N per scambiare dati lungo un collegamento caratterizzato da una probabilita' di errore sul bit pari a $\varepsilon = 0.00001$, da un canale di ritorno perfettamente affidabile, e da un tempo di round-trip pari a $n = 7$ slot (dove uno slot e' pari al tempo di trasmissione di un blocco di 2000 bit, dei quali 16 costituiscono il CRC e 48 l'header). Si noti che in questo caso se un blocco trasmesso nello slot $t$ e' errato, verra' ritrasmesso nello slot $t + n$. La velocita' trasmissiva del link e' 1 Mbps.

(a) Si calcoli la probabilita' di errore (cioe' che un blocco sia errato) e si dia una stima della probabilita' di errore non rivelato (cioe' che un blocco errato venga accettato come corretto).

(b) Si calcoli il massimo throughput del sistema in blocchi per slot e in bit al secondo.

E4 Si consideri una stazione di servizio con due serventi e con un ulteriore posto in coda, in modo che nel sistema non ci possano essere piu' di tre utenti. Se gli utenti arrivano secondo un processo di Poisson con intensita' uno ogni dieci minuti e il tempo di servizio e' esponenziale con media 15 minuti, si calcolino

(a) la probabilita' che un utente venga rifiutato perche' il sistema e' pieno

(b) il tempo medio speso nel sistema da un utente

**Corso di Reti di Telecomunicazioni 1 – AA 2004/2005**
**prova scritta – 25 luglio 2005– parte B**

T1 Dimostrare che se $i$ e $j$ comunicano e $i$ è ricorrente, allora anche $j$ è ricorrente.

T2 Si analizzino le prestazioni del protocollo slotted CSMA, e se ne discuta la stabilita'.

T3 Si confrontino i protocolli ARQ Go-Back-N e Selective Repeat, dandone una breve descrizione ed evidenziando i rispettivi vantaggi e svantaggi.