ESERCIZI

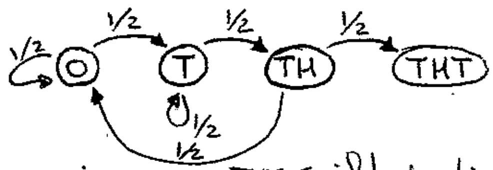
X E1 - 25-07-2005

① Gioco: viene lanciata una moneta ripetutamente finché non compare la sequenza THT;

a) # medio di lanci prima che il gioco finisca (costruire cdM);
b) ripetere se la seq. di fine è TH;
c) lancio ripetuto: se ottengo THT perdo un punto; se ottengo TH guadagno un punto; (considerare le sovrapposizioni THT contiene THT e TH);

↳ sia $R(N)$ il punteggio dopo N lanci; $R(0)=0$; calcolare $\lim_{N\to\infty} R(N)$ e $\lim_{N\to\infty}\left(\frac{R(N)}{N}\right)$

a) THT stato assorbente.



⇒ il tempo medio per arrivare in THT è il tempo di 1° passaggio:

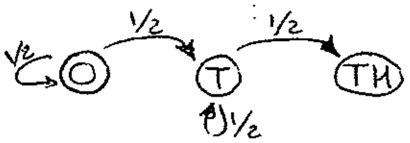
$$\begin{cases} V_O = 1 + \frac{1}{2} V_O + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T + \frac{1}{2} V_{TH} \\ V_{TH} = 1 + \frac{1}{2} V_O \end{cases}$$

$V_T = (\frac{1}{2} V_O - 1)\cdot 2 = (V_O - 2)$;

$V_O - 2 = \cancel{1} + \frac{1}{2} V_O - \cancel{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} V_O \Rightarrow V_O(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = (2+\frac{1}{2})$

$V_O = 4\cdot \frac{5}{2} = 10 \Rightarrow V_T = 8 \Rightarrow V_{TH} = 6$ #

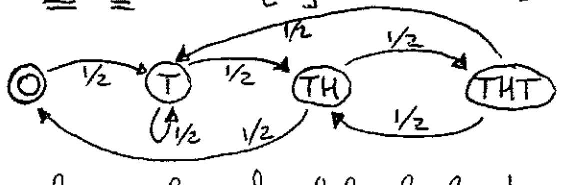
b) TH stato assorbente,



$$\begin{cases} V_O = 1 + \frac{1}{2} V_O + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T \end{cases} \Rightarrow V_T = 2 \Rightarrow V_O = 4 \quad \#$$

(oppure dato che non torno indietro uso il tempo di una geometrica di parametro $p=\frac{1}{2} \Rightarrow E[T] = \frac{1}{p} = 2 = V_T \Rightarrow$ sono lanci indipendenti quindi da $\underline{T} \Rightarrow E[TH]' = 2 \Rightarrow \Rightarrow V_{TH} = 4$)

c)



↳ dato che voglio il calcolo al limite devo usare le probabilità limite degli stati TH e THT ⇒ $R(N) \longrightarrow (\Pi_{TH} - \Pi_{THT})\cdot N$ (n° di visite)

⇒ o risolvo la catena (sistema);

⇒ o cerco la probabilità che compaia una certa combinazione:

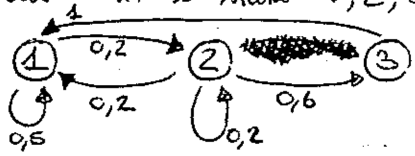
$\Pi_{TH} = \frac{1}{2}$; $\Pi_{THT} = \frac{1}{8}$ ⇒ dato che ho lanci indipendenti;

$R(N) \longrightarrow \frac{N}{8} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} R(N) = \infty$; $\lim_{N\to\infty} \frac{R(N)}{N} = \frac{1}{8}$

② E1 - 22-09-2005

cdM con $X(t)$ e stati 1, 2, 3 ; $X(0) = 3$; $P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$

$$P = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \\ \left(\begin{matrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right. & & \left.\right) & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$



a) $\begin{cases} \pi_1 = 0,5\,\pi_1 + 0,2\,\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 = 0,3\,\pi_1 + 0,2\,\pi_2 + / \\ \pi_3 = 0,2\,\pi_1 + 0,6\,\pi_2 + / \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \pi_2 = 0,3/0,8\ \pi_1 = \left(\frac{3}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{8}\right)\pi_1$

$$\Downarrow\ \pi_3 = 0,2\,\pi_1 + \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,8} \cdot \pi_1 = \left(\frac{2}{10} + \frac{18}{10\cancel{0}} \cdot \frac{\cancel{10}}{8}\right)\pi_1 = \pi_1\left(\frac{16+18}{80}\right) = \frac{34}{80}\,\pi_1$$

$$\pi_1 + \frac{3}{8}\pi_1 + \frac{34}{80}\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{80}{144} =$$

$$\pi_2 = \frac{3}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{80}^{10}}{144} = \frac{30}{144} \ ; \quad \pi_3 = \frac{34}{\cancel{80}} \cdot \frac{\cancel{80}}{144} = \frac{34}{144}$$

$\Rightarrow$ tempo medio di ricorrenza: $M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{144}{80}$

$$M_2 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{144}{30} \ ; \quad M_3 = \frac{1}{\pi_3} = \frac{144}{34}$$

b) ϑ_{ij} = tempo 1° passaggio ; $E[\vartheta_{ij}]$ = tempo medio di 1° passaggio,

$$= 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} \cdot E[\vartheta_{kj}]$$

$$E[\vartheta_{31}] = 1 + \underset{\overset{\parallel}{0}}{P_{32}} \cdot E[\vartheta_{21}] + \underset{\overset{\parallel}{0}}{P_{33}} \cdot E[\vartheta_{31}] = \boxed{1}$$

(infatti la probabilità di andare da 3 a 1 è 1)

(se NON fossero state 0 le P_{-} dovevo risolvere anche $E[\vartheta_{21}]$ ...)

$$\Rightarrow E[\vartheta_{ij}^2] = 1 + 2 \cdot (E[\vartheta_{ij}] - 1) + \sum_{k \neq j} P_{ik} \cdot E[\vartheta_{kj}^2]$$

(VEDI calcolo VARIANZA)

INVERSA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

c) $E[\vartheta_{13}] = 1 + P_{11} \cdot E[\vartheta_{13}] + P_{12} \cdot E[\vartheta_{23}] =$

$i = 1 ; j = 3$

$$= 1 + 0,5 \cdot E[\vartheta_{13}] + 0,2 \cdot E[\vartheta_{23}]$$

$$E[\vartheta_{23}] = 1 + P_{21} \cdot E[\vartheta_{13}] + P_{22} \cdot E[\vartheta_{23}]$$

$i = 2 ; j = 3$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \quad (I - Q)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ SISTEMA;
$\Rightarrow$ SOSTITUISCO: $\quad E[\vartheta_{23}] = 1 + P_{11}\cdot\left(\frac{E[\vartheta_{23}]\cdot(1-P_{22}) - 1}{P_{21}}\right)$

$$E[\vartheta_{23}]\cdot\left(1 - \frac{P_{11}(1-P_{22})}{P_{21}}\right) = 1 - \frac{P_{11}}{P_{21}}$$

$$E[\vartheta_{23}] = \left(1 - \frac{0{,}5}{0{,}2}\right)\cdot\frac{1}{1 - \frac{0{,}5\cdot(1-0{,}2)}{0{,}2}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{100}}\cdot\frac{10}{\cancel{2}}}$$

$$= \cancel{-}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{-}1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$E[\vartheta_{13}]\cdot(1 - P_{11}) = 1 + P_{12}\cdot E[\vartheta_{23}]$$

$$E[\vartheta_{13}] = \frac{1 + P_{12}\cdot E[\vartheta_{23}]}{(1-P_{11})} = \frac{1 + 0{,}2\cdot 3/2}{1-0{,}5} = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{100}}\cdot\cancel{2} = \boxed{5}$$

$\Rightarrow$ VARIANZA: $\boxed{Var\left(E[\vartheta_{ij}]\right) = E[\vartheta_{ij}^2] - \{E[\vartheta_{ij}]^2\}}$

PUNTO b : $\quad E[\vartheta_{31}^2] = 1 + 2\cdot\left(E[\vartheta_{31}] - 1\right) + \underset{0}{P_{32}}\cdot E[\vartheta_{21}^2] + \underset{0}{P_{33}}\cdot E[\vartheta_{31}^2]$

$$E[\vartheta_{31}^2] = 1 + 2\cdot(1 - 1) = 1$$

$$Var\left(E[\vartheta_{31}]\right) = 1 - (1)^2 = \boxed{0} \quad \#$$

PUNTO c :

$$\begin{cases} E[\vartheta_{13}^2] = 1 + 2\cdot\left(E[\vartheta_{13}] - 1\right) + P_{11}\cdot E[\vartheta_{13}^2] + P_{12}\cdot E[\vartheta_{23}^2] \\ E[\vartheta_{23}^2] = 1 + 2\cdot\left(E[\vartheta_{23}] - 1\right) + P_{21}\cdot E[\vartheta_{13}^2] + P_{22}\cdot E[\vartheta_{23}^2] \end{cases}$$

$$E[\vartheta_{23}^2]\cdot(1 - P_{22}) = 1 + 2(3/2 - 1) + 0{,}2\cdot E[\vartheta_{13}^2]$$

SOSTITUISCO:

$$E[\vartheta_{13}^2] = 1 + 2\cdot(5-1) + 0{,}5\cdot E[\vartheta_{13}^2] + 0{,}2\cdot\frac{1 + 1 + 0{,}2\, E[\vartheta_{13}^2]}{1-0{,}2}$$

$$E[\vartheta_{13}^2]\cdot\underbrace{\left(1 - 0{,}5 - \frac{\cancel{2}\cancel{2}^2}{10\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{8}}\right)}_{3/10} = 1 + 8 + \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{10}}\cdot 2\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{8}_2} = 1 + 8 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

$$E[\vartheta_{13}^2] = \frac{10}{3}\cdot\frac{19}{2} = \frac{190}{6}$$

$$Var\left(E[\vartheta_{13}]\right) = \frac{190}{6} - 25 = \frac{190 - 150}{6} = \frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{6}_3} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

d) $\Rightarrow P\left[X(1)=1;\ X(3)=1 \mid X(2)=2\right] = \dfrac{P\left[X(1)=1;\ X(3)=1;\ X(2)=2\right]}{P\left[X(2)=2\right]} =$

$\Rightarrow \left[X(0)=3\right] \Rightarrow \dfrac{P\left[X(1)=1;\ X(2)=2;\ X(3)=1 \mid X(0)=3\right]}{P\left[X(2)=2 \mid X(0)=3\right]}$

$= \cancel{P_{31}} \cdot \cancel{P_{12}} \cdot P_{21} \Big/ P_{32}^{(2)} = \cancel{P_{31}} \cdot \cancel{P_{12}}$ (solo questo) $= P_{21}$

$\Rightarrow P\left[X(2)=2 \mid X(1)=1;\ X(3)=1\right] = \dfrac{P\left[X(2)=2;\ X(1)=1;\ X(3)=1\right]}{P\left[X(1)=1;\ X(3)=1\right]}$

$\left[X(0)=3\right]$

$\Rightarrow = \dfrac{P\left[X(1)=1;\ X(2)=2;\ X(3)=1 \mid X(0)=3\right]}{P\left[X(1)=1;\ X(3)=1 \mid X(0)=3\right]} =$

E2 - 22-09-2005 ?

③ CODA con arrivi di Poisson di intensità $\lambda = 1$ pck/sec.

↳ [redacted] 1) 2 pcks in coda;
(TUTTI i pcks TRASMESSI) 2) 1 pck con tempo di attesa = 2 sec.

$\Rightarrow$ ARRIVA un pck $\Rightarrow$ la coda si svuota se ce n'è già uno in coda o se il pck che è in coda ha troppo ritardo;

a) calcolare la percentuale di tempo durante la quale la coda è vuota;

b) media del ritardo di un pck (tempo medio in coda);

a) $\left[\%\ \text{VUOTA}\right] = \dfrac{E\left[\text{tempo VUOTA}\right]}{E\left[\text{tempo VUOTA}\right] + E\left[\text{tempo PIENA}\right]} = P\left[\text{CODA VUOTA}\right]$

⇒ per un processo di arrivi di Poisson di parametro λ ⇒ i tempi di interarrivo son $\sim \mathcal{E}(\lambda)$;

↳ i tempi medi di interarrivo sono: $\boxed{1/\lambda} = 1$ sec. ; Y = tempo di interarrivo

$\boxed{f_Y(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$ $\qquad F_Y(t) = P[Y \le t] = 1 - e^{-\lambda t}$

⇒ devo ora integrare tra 0 e 2 che sono tutti valori di tempo per i quali la coda può essere piena: (PCK in coda)

$$E[T_{\text{CODA PIENA}}] = \int_0^2 \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = -\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^2 = -\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \cdot (e^{-2\lambda} - 1) = \left(1 - e^{-2\lambda}\right)$$

$$= \left(\text{tempo medio per avere il } 1^{\circ} \text{ arrivo}\right)$$

$$E[T_{\text{CODA VUOTA}}] = \frac{1}{\lambda}$$ ⇒ tra un arrivo e l'altro ho in media $1/\lambda$ sec.

$$P[\text{CODA VUOTA}] = \left\{E[T_{\text{VUOTA}}] \Big/ E[T_{\text{VUOTA}}] + E[T_{\text{PIENA}}]\right\} = \left(1/\lambda \Big/ 1/\lambda + 1 - e^{-2\lambda}\right)$$

(se non è vuota ⇒ si scarta istantaneamente)

b) RITARDO MEDIO $= E[T_{\text{TOT.}}] \cdot P[\text{CODA VUOTA}] + 0 \cdot P[\text{CODA NON VUOTA}]$

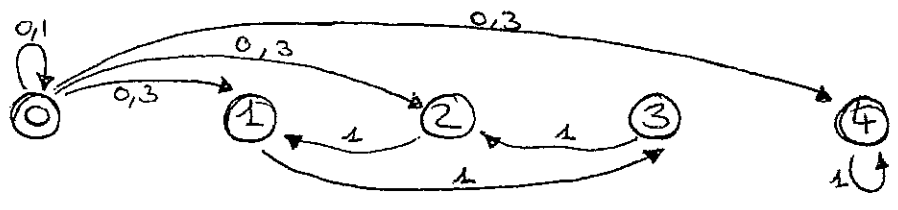
$$= \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{\cancel{\lambda}}\right) \cdot \frac{1}{2 - e^{-2\lambda}} = \frac{1 - e^{-2}}{2 - e^{-2}}$$

E1 - 02-09-2005

④ cdM:

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

a) disegnare il diagramma di trans.; class. gli stati ed indiv. le classi;



4: STATO ASSORBENTE ; RICORRENTE (positivo) ; APERIODICO;

STATI ASSORBENTI $\{1; 2; 3\}$: classe ; $d(1) = d(2) = d(3) = 3$; RICORRENTI (positivi) ; PERIODICI;

0: STATO TRANSITORIO;

b) prob. di assorb. nelle varie classi ricorrenti a partire da tutti gli stati transitori;

A : 0

B : 1, 2, 3

C : 4

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$0{,}6 \to (0{,}3+0{,}3)$

ASSORBENTI

VERSO B: $\mu_A = 0{,}1\,\mu_A + \underbrace{0{,}6\,\mu_B}_{\mu_B=1} + \underbrace{0{,}3\,\cancel{\mu_C}}_{\mu_C=0}$

VERSO C: $\mu_A = 0{,}1\,\mu_A + \underbrace{0{,}\cancel{6\mu_B}}_{\mu_B=0} + \underbrace{0{,}3\,\mu_C}_{\mu_C=1}$

1: $\mu_A = 0{,}1\,\mu_A + 0{,}6$

$\mu_{A\,(1,2,3)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}9} = \dfrac{2}{3}$; 2: $\mu_{A\,(4)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}9} = \dfrac{1}{3}$

c) calcolare $\lim_{n\to\infty} P^n =$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & \times & \times & \times & \mu_{A(4)}\cdot\pi_4 \\ 1 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 2 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 3 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{array}$$

{stati trans. verso classe periodica e stati della classe periodica verso la stessa classe}

(stati transitori verso classe periodica)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & \mu_{A(1,2,3)}\pi_1 & \mu_{A(1,2,3)}\pi_2 & \mu_{A(1,2,3)}\pi_3 & \mu_{A(4)}\cdot\pi_4 \\ 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{array}$$

al posto delle X c'è (1/PERIODO)

(SISTEMA per le π_i)

$\pi_4 = (\mu_{A_4}\cdot\pi_4)\pi_0 + 0 + 0 + 0 +$

classe periodica (stati verso la stessa classe)

$\Rightarrow$ per i sistemi delle π_i considero solo le sottomatrici degli stati della classe; CON LA COND. di NORMALIZZAZIONE;

$$1: \begin{cases} \pi_4 = [\ldots] + \pi_4 \\ \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_4 = 1$$

$$2: \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\cdot\pi_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi_2 + \frac{1}{3}\cdot\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ per i tempi medi di RICORRENZA: $M_i = \frac{1}{\pi_i}$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 3$$
$$M_4 = 1$$

E4 - 02-09-2005

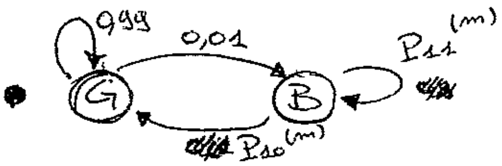
⑤ PROTOCOLLO GO-BACK-N su un canale Markoviano a 2 stati con prob. di transizione 0,99 (dallo stato buono a se stesso) e 0,1 (dallo stato cattivo allo stato buono);

↳ la prob. che un pck sia errato è $= 1$ nello stato cattivo;
" " " " " " " " $= 0$ " " buono;

↳ il tempo di ROUND-TRIP-TIME è $m = 2$ slot (pck errato a $\underline{t}$ verrà ritrasmesso al tempo $\underline{t+m}$)

a) calcolare il throughput nel caso di feedback perfetto (senza errori);

b) " " " " " " " " " soggetto ad errori indipendenti con prob. 0,1;

a) 

$$P[\text{pck errato} \mid G] = 0 \; ; \; P[\text{pck errato} \mid B] = 1$$

$\Rightarrow$ ogni volta che c'è un pck errato c'è un salto di $m-1$ slot

↳ il processo è semi-Markoviano $\Rightarrow$ certe transizioni avvengono in un passo mentre altre in m;

metriche: n^o successi $\begin{cases} 1 \; ; \text{ in } G \\ 0 \; ; \text{ in } B \end{cases}$ tempo $\begin{cases} 1 ; \text{ in } G \\ m \; ; \text{ in } B \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[n^o \text{ successi per slot} \right] = \lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_i (\pi_i \cdot R_i)}{\sum_i (\pi_i \cdot T_i)}$$

$$\pi_0 = \frac{P_{10}^{(m)}}{P_{10}^{(m)}+P_{01}} \quad ; \quad \pi_1 = \frac{P_{01}}{P_{10}^{(m)}+P_{01}}$$

$$\Rightarrow \left[n^\circ \text{ succ. per slot}\right] = \frac{\pi_0 \cdot 1 + \pi_1 \cdot 0}{\pi_0 \cdot 1 + \pi_1 \cdot m} = \left(\frac{\pi_0}{\pi_0 + m\cdot\pi_1}\right) = \frac{P_{10}^{(m)}}{P_{10}^{(m)} + m \cdot P_{01}}$$

(THROUGHPUT)

$\Downarrow$

(il feedback è perfetto ma in ANDATA ho comunque errori MARKOVIANI)

$$\begin{cases} \pi_0 = P_{00}\cdot\pi_0 + P_{10}^{(m)}\cdot\pi_1 \\ \pi_1 = P_{01}\cdot\pi_0 + P_{11}^{(m)}\cdot\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{m=2}}$$

$$P^m = \begin{pmatrix} P_{00}^{(m)} & P_{01}^{(m)} \\ P_{10}^{(m)} & P_{11}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}99\cdot 0{,}99 + 0{,}01\cdot 0{,}1 & \overbrace{0{,}99\cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}9}^{0{,}108} \\ 0{,}9\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}99 & 0{,}9\cdot 0{,}9 + 0{,}1\cdot 0{,}01 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la matrice che mi interessa:

$$P' = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0{,}99 & 0{,}01 \\ 1 & 0{,}0999 & 0{,}081+0{,}001 \end{array} = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}0999 & 0{,}082 \end{pmatrix}$$

$$THR = \left[0{,}0999 / 0{,}0999 + 2\cdot 0{,}01\right] = 0{,}833$$

---

se gli errori sono i.i.d., ε = prob. di errore sul canale

$$C = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = C^m$$

$\Downarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + m\cdot\varepsilon} = THR$$

(con errori indipendenti sul canale di andata)

$\longrightarrow$ ERRORI i.i.d. SUL CANALE DI ANDATA (feedback perfetto)

$\longrightarrow$ ERRORI MARKOVIANI in ANDATA e RITORNO

$$C_f = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}$$

metriche:
$$\begin{cases} R = 1 & \text{per } 00 \\ R = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = 1 & \text{per } 00 \\ T = m & \text{altrimenti} \end{cases}$$

	00	01	10	11
00	$P_{00}P_{00}$	$P_{00}P_{01}$	$P_{01}P_{00}$	$P_{01}P_{01}$
01	$P_{00}^{(m)}P_{01}^{(m)}$	$P_{00}^{(m)}P_{11}^{(m)}$		
10				
11				

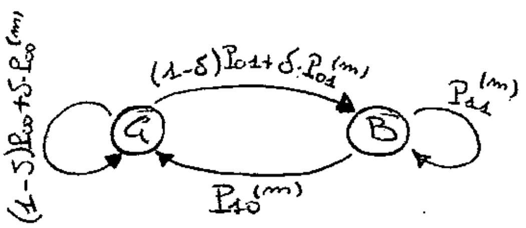
$$\text{THR}(\text{MARK andata e ritorno}) = \lim_{t\to\infty} R(t) = \frac{\pi_{00}}{\pi_{00}\cdot 1 + m\cdot(1-\pi_{00})}$$

→ ERRORI MARKOVIANI in ANDATA e i.i.d. in RITORNO

sia δ = prob. di errore

$$P = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 00 & P_{00}(1-\delta) & P_{00}\cdot\delta & P_{01}\cdot(1-\delta) & P_{01}\cdot\delta \\ 01 & P_{00}^{(m)}(1-\delta) & P_{00}^{(m)}\cdot\delta & P_{01}^{(m)}(1-\delta) & P_{01}^{(m)}\cdot\delta \\ \hline 10 & P_{10}^{(m)}(1-\delta) & P_{10}^{(m)}\delta & P_{11}^{(m)}(1-\delta) & P_{11}^{(m)}\cdot\delta \\ 11 & P_{10}^{(m)}(1-\delta) & " & " & " \end{array}$$



⇒ sono in G: con prob. $(1-\delta)$; guad. = 1; tempo = 1

con prob. δ ; guad. = 0; tempo = m

$R_G = (1-\delta)$; $T_G = (1-\delta+m\cdot\delta)$

⇒ sono in B: guadagno = 0; tempo = m

$R_B = 0$; $T_B = m$

$$\text{THR}(\text{MARK. andata - i.i.d. RITORNO}) = \frac{\sum \pi_i R_i}{\sum \pi_i T_i} = \frac{\pi_G(1-\delta)}{\pi_G(1-\delta+m\delta)+\pi_B\cdot m}$$

$$= \left\{ P_{10}^{(m)}\cdot(1-\delta) \Big/ \left(P_{10}^{(m)}\cdot(1-\delta+m\delta) + m\left[(1-\delta)P_{01}+\delta P_{01}^{(m)}\right] \right) \right\}$$

→ ERRORI i.i.d. ANDATA e RITORNO

$$\text{THR}(\text{i.i.d. andata - ritorno}) = \frac{(1-\varepsilon)\cdot(1-\delta)}{(1-\delta)\cdot(1-\varepsilon)+m\cdot(1-(1-\delta)(1-\varepsilon))}$$

~~→ ERRORI i.i.d. ANDATA - feedback PERFETTO~~

~~THR(i.i.d. andata - feedback perfetto) = 1 - ε~~

equivalente ad un canale con errori i.i.d. in andata con:
$\varepsilon' = 1-(1-\varepsilon)\cdot(1-\delta)$; e feedback perfetto

b) in questo caso: MARK. andata - i.i.d. ritorno

$$THR = \frac{0{,}099 \cdot (1-0{,}1)}{0{,}099\,(1-0{,}1+0{,}2) + 2\cdot\big((1-0{,}1)\cdot 0{,}01 + 0{,}1\cdot 0{,}108\big)} = 0{,}6$$

[δ = prob. di errore = 0,1]

E2 - 02-09-2005 ?

⑥ FABBRICA con 2 MACCHINE UGUALI;

↳ si alternano periodi di funz. e guasto con durata esponenziale con media: $1/\alpha$ = 8 GIORNI (FUNZIONAMENTO)
$1/\beta = 1/4\alpha$ (ROTTURA)

↳ MACCHINE indipendenti; PRODUZIONE ⇒ 12 pezzi/ora (se funzionante)

a) - fraz. di tempo in cui la prod. è ferma;
- durata media di un intervallo di tempo durante il quale la produzione è ferma;

TEMPO

$$P[\text{1 MACCH. è ferma}] = \frac{1/\beta}{1/\beta + 1/\alpha} = \frac{2}{10} = \frac{2}{10}$$

$$P[\text{2 MACCH. ferme}] = P[\text{PROD. FERMA}] \Rightarrow \text{sono indipendenti}$$

$$\rightarrow \quad = P[G_1]\cdot P[G_2] = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

→ T_g = tempo in cui entrambe le macchine sono guaste

↳ i tempi di rottura sono esponenziali e uguali per entrambe le macchine; ⇒ esponenziale CON PARAMETRO DOPPIO; (o in genere la somma dei due)

$$E[T_g] = \frac{1}{\beta+\beta} = 1/2\beta = 1 = \left(\frac{1}{4\cdot 2\cdot \alpha}\right)$$

⇒ T_1 = tempo in cui funz. una sola macchina

$$E[T_1] = \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{5}$$

$\alpha = \frac{1}{8}$; $\beta = \frac{1}{2}$

N.B.

$$\Rightarrow P\left[1 \text{ MACCH. FUNZ.}\right] = \frac{1/_{\alpha+\beta}}{\underbrace{1/_{2\alpha}}_{\text{2 FUNZ.}} + \underbrace{1/_{2\beta}}_{\text{2 GUASTE}} + \underbrace{1/_{\alpha+\beta}}_{\text{1 FUNZ. - 1 GUASTA}}}$$

$$= \frac{8/5}{4+1+8/5} = \frac{8}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{33} = \frac{8}{33}$$

$$\Rightarrow P\left[2 \text{ MACCH. FUNZ.}\right] = \frac{1/2\alpha}{1/2\alpha + 1/2\beta + 1/\alpha+\beta} = \frac{4}{4+1+8/5} = 4 \cdot \frac{5}{33} = \frac{20}{33}$$

b) $\left[\begin{matrix}\text{N° MEDIO PEZZI in} \\ \text{1 ora}\end{matrix}\right] = 12 \cdot \frac{8}{33} + 24 \cdot \frac{20}{33} = \frac{96}{33} + \frac{480}{33} = 17{,}45 \left[\text{pezzi}/\text{ora}\right]$

λ = uguali = 12 pezzi/ora

c) $\left[\begin{matrix}\text{n° MEDIO pezzi} \\ \text{in 1 ora}\end{matrix}\right] = 12 \cdot \frac{8}{33} + 30 \cdot \frac{20}{33} = \frac{96}{33} + \frac{600}{33} = 21{,}09 \left[\frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}\right]$

$\lambda_1 = 12 \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}$; $\lambda_2 = 30 \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}$

ALTRE DOMANDE: dato un T fissato

$\rightarrow P\left[T_g > T\right] = 1 - \left(1 - e^{-2\beta T}\right) = e^{-2\beta T}$

$\rightarrow P\left[T_1 > T\right] = e^{-(\alpha+\beta)T}$

$\rightarrow$ dato che una macchina è rotta e l'altra funziona si vuole la prob. che quella ~~detta~~ funz. si rompa prima che l'altra venga agg.;

T_a = tempo agg. , T_r = tempo rottura di quella funz.

$$P\left[T_r < T_a\right] = \int_0^\infty P\left[T_a > T_r \mid T_r = t\right] \cdot P\left[T_r = t\right] dT_r =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{P\left[T_a > t\right]}_{} \underbrace{dF_{T_r}}_{} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-\beta t}}_{} \cdot \underbrace{\alpha \cdot e^{-\alpha t}}_{} dt = \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} dt =$$

cioè il tempo che la macch. sta guasta < t

cioè la distr. di prob. del tempo di funz. della macch. funz.

$$= \left(\alpha/\alpha+\beta\right) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha+\beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)t}\, dt}_{1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

E2 - 19-06-2006

7 NODO di RETE

1 Gbps → condiz. NORMALI ; [tempo funz. normale] $\sim \mathcal{E}(\mu)$; $\frac{1}{\mu} = 99T$

250 Mbp → stato di allarme ⇒ [tempo stato di allarme] = T (media)

→ dopo T in allarme ⇒ riparazione istantanea; ⇒ funz. normale

a) [fraz. del tempo che il nodo passa in stato di allarme] $= \frac{\cancel{T}}{99\cancel{T}+\cancel{T}} = \frac{1}{100} = P$[stato di allarme]

↳ [traffico medio smaltito] $= 1\text{ Gbps} \cdot \frac{99}{100} + 250\text{ Mbps} \cdot \frac{1}{100}$

↑ (code sempre piene ⇒ sempre pckt da TX) $= 992500$ bps $= 992,5$ Mbps

b) ↳ una volta in allarme il nodo smette di funz. dopo un tempo esp. con media 2T ⇒ a meno che NON venga riparato ⇒ con un tempo T (medio);

↳ se smette di funz. deve essere sost. e questo richiede 20T (medio) ⇒ NO TRAFFICO

→ tempo medio fra 2 sost. successive;

→ perc. di tempo durante il quale il nodo NON funziona;

→ THR del sistema;

c)

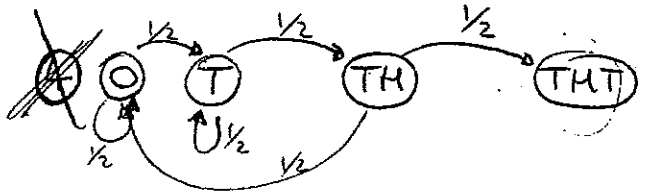
$\Rightarrow$ T_a = tempo aggiustamento della macchina rotta;

T_r = " rottura " " funzionante

$$P[T_r < T_a] = \int_0^{+\infty} P[T_a > T_r \mid T_r = t] \cdot P[T_r = t] \, dT_r =$$

$$= \int_0^{+\infty} P[T_a > t] \, dF_{T_r} = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t} \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \alpha \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \, dt = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha+\beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \, dt}_{1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \frac{1}{10}$$



DEVO OTTENERE THT

THT = stato assorbente

a)

$\Rightarrow$ tempo medio per arrivare a THT = tempo primo passaggio in THT

$$\begin{cases} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T + \frac{1}{2} V_{TH} \\ V_{TH} = 1 + \frac{1}{2} V_0 \end{cases}$$ RISOLVO -- $\boxed{V_0 = 10}$

$\Downarrow$

$V_{TH} = 6$

$\Downarrow$

$V_T = 8$

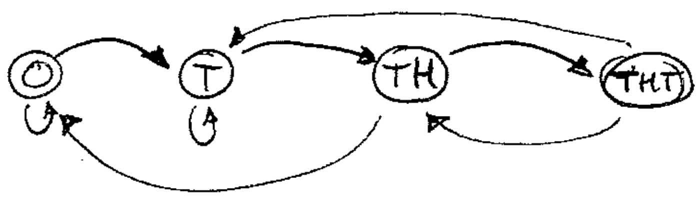
b)

$$\begin{cases} V_0 = 1 + \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{2} V_T \\ V_T = 1 + \frac{1}{2} V_T \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $V_T = 2$; $V_0 = 4$

(oppure dato di NON tornare indietro ho: tempi geometrici da O a T e da T a TH $\Rightarrow$ SOMMO)

c)



: LANCIO RIPETUTAMENTE

PUNTI DI LANCI $\Rightarrow R(N) \longrightarrow (\Pi_{TH} - \Pi_{THT}) \cdot \underset{\text{VISITE}}{N}$

$\rightarrow$ σ: RISOLVO le CATENE

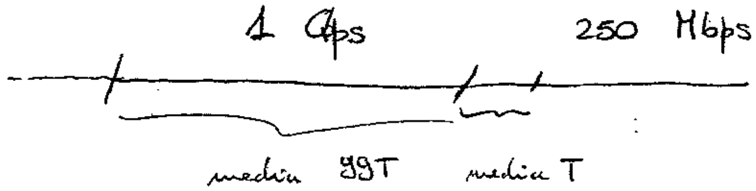
$\rightarrow$ σ: cerco la prob. che COMINCI una certa COMBINAZIONE:

$\Rightarrow$ lanci indipendenti: $\Pi_{THT} = \frac{1}{8}$; $\Pi_{TH} = \frac{1}{4}$

↳ $R(N) \longrightarrow \frac{N}{8} \Rightarrow \lim_{N \to \infty} R(N) = \infty$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{R(N)}{N} = \frac{1}{8}$$

NODO di rete: eserc. E2 − 19-06-2006

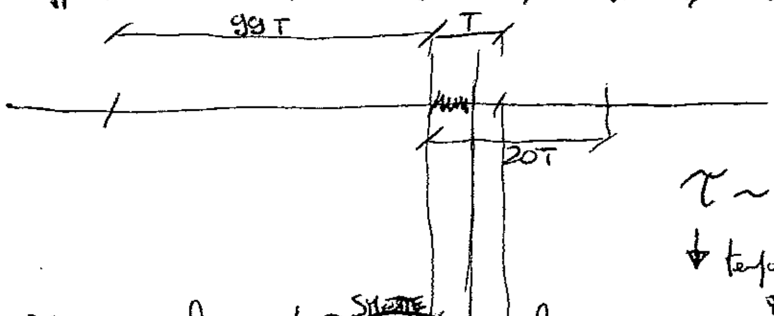


a) ~~...~~ fraz. del tempo che si passa nello stato di allarme:

$$\frac{T}{(99+1)T} = \frac{1}{100}$$

↳ traffico MEDIO smaltito: $0{,}99 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 0{,}25 = 0{,}9925$ Gbps

b)



$\tau \sim \mathcal{E}(\text{media } 2T)$

↓ tempo dopo il quale non FUNZ. PIU'

$\Rightarrow$ se $\tau < T$ il nodo SMETTE a funz.

$\Rightarrow$ se $\tau \geq T$ il nodo riprende a funz. al tempo $T \Rightarrow$

$$\Rightarrow P[\tau < T] = 1 - e^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \left(1-e^{-1/2}\right) \cdot \left(99T + \frac{\int_0^T e^{-\tau/2T}\, d\tau}{1-e^{-1/2}} + 20T \right) + \left(e^{-\frac{1}{2}} \cdot 100T\right)$$

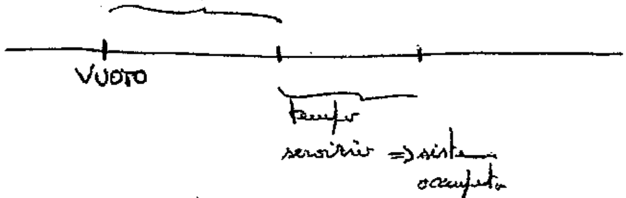
$$\left(E[\tau] = \int_0^{+\infty} P[\tau > a]\, da = \int_0^T e^{-a/2T}\, da \right)$$

~~1~~ 1 Mbps; $\lambda = 500$ pck/sec. $L = 1000$ bit

E2 - 14 luglio 2006

$1/\lambda \rightarrow$ tempo medio per avere il 1° arrivo

a) throughput:



$$E[T_{VUOTO}] = \frac{1}{500} = 2 \text{ ms}$$

$E[T_{occ.}] = 1$ ms $\Rightarrow$ tempo medio di occup. determina il THROUGHPUT $\Rightarrow \frac{1 \text{ ms}}{(1+2) \text{ ms}} = \frac{T_{occ.}}{T_{TOT.}} = \frac{1}{3}$

$\hookrightarrow THR = \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ Mbps} = 333{,}3\overline{3}$ kbps

b) TEMPO di accesso:

$$P[\text{accesso IMMEDIATO}] = 2/3$$

$$P[\text{accesso al K-esimo tentativo}] = \left(\frac{1}{3}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \; ; \; K \geq 1$$

$$E[\text{n° medio di tentativi}] = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ tempo medio di accesso $= \left[\text{tempo medio da un tent. ad un altro}\right] \cdot \left[\text{n° medio di tentativi} - 1\right]$

$$= \frac{100}{\lambda} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{50}{\lambda} = 0{,}1 \text{ sec.}$$

c) GUADAGNO :

TX = +1 UNITÀ DI GUADAGNO

FALLIMENTO sull'accesso = −0,2 UNITÀ DI GUADAGNO

$$\left.\begin{array}{l} P[\text{accettato}] = \frac{2}{3} \\ P[\text{rifiutato}] = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{vedi sistema VUOTO – OCCUPATO}$$

$$\left(\text{GUAD. TOT. del sistema}\right) = \lambda \cdot \left(\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0,2\right) = 300 \left(\frac{\text{unità di guad.}}{\text{sec.}}\right)$$

E3: 14 Luglio/06

⇒ CODA $M/G/\infty$

a) $\left(\text{n° utenti in sala alla chiusura}\right) \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ↳ CALCOLATO con le FORMULE

$$\lambda/\mu = \frac{10\ (\text{clienti}/h)}{} \cdot 25 \text{ minuti} \;\stackrel{!}{=}\; 25/6$$

μ = tempo medio di permanenza

$$P[\text{sala vuota alla chiusura}] = e^{-25/6} = 0,0155$$

ASINTOTICA

↳ ~~Po~~ È LA STESSA dopo un certo tempo

E2 - 14-07-2006

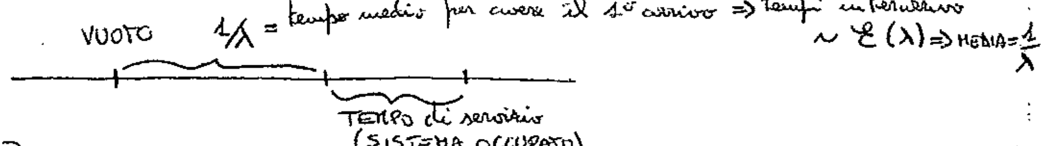
⑧ ES.2 LINK : 1 Mbps ; condiviso con clienti che producono traffico che COLLETTIVAMENTE è un processo di POISSON di $\lambda = 500 \frac{pck}{sec}$

L = 1000 bit (costante) ; PROTOCOLLO CSMA ideale

⇒ cioè : - pck generato a canale libero ha accesso immediato ;
- pck che trova il canale occupato se ne prova la TX dopo un tempo $\sim \mathcal{E}(..)$ a media $100/\lambda$
↳ se ancora occupato si ritenta a tempi casuali finché non si trova il canale libero ;

⇒ TRAFFICO TOTALE (nuovi + ritrasmissioni) $\sim \mathcal{P}(\lambda)$

a) THR :



$E[T_{vuoto}] = 1/\lambda = 2\ ms$

$E[T_{occup.}] = \frac{L}{C} = 1\ ms$ $\Rightarrow THR = \frac{1}{3} \cdot 1\ Mbps = 333{,}\bar{3}\ Kbps$

$\Rightarrow \left[\%\ \text{tempo che il sistema resta occupato}\right] = \frac{E[T_{occ.}]}{E[T_{occ.}] + E[T_{vuoto}]} = \frac{1}{3} = P[\text{sist. occup.}]$

b) ritardo medio di accesso da quando un pck è generato a quando riesce ad accedere al canale;

$$\left[\begin{array}{c}\%\text{ tempo sistema}\\ \text{vuoto}\end{array}\right] = \frac{E[T_{vuoto}]}{E[T_{vuoto}]+E[T_{occ.}]} = \frac{2}{3} = P[\text{accesso immediato}] \overset{!}{=} P[\text{sistema vuoto}]$$

$$P[\text{accesso al K-esimo tentativo}] = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{K-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) \quad ; K \geq 1 \; ; p = \frac{2}{3}$$

$\Downarrow$

dalla teoria sulla V.A. $\Rightarrow \left[\begin{array}{c}N^o\text{ medio di}\\ \text{tentativi}\end{array}\right] = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{tempo medio di}\\ \text{accesso}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{tempo medio tra un}\\ \text{tent. ed un altro}\end{array}\right]\cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c}n^o\text{ medio di}\\ \text{tent.}-1\end{array}\right]}_{\text{all'ultimo ho successo e TX}} = \frac{100}{\lambda}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{50}{\lambda}$$

(SE L'ACCES[illegible] [illegible] È
[illegible]MEDIATO $\Rightarrow$
[illegible]

c) se TX ha guadagno 1 e ogni tent. fallito (pcK generato su canale occupato) COSTO 0,2

↳ guad. totale del sistema (in unità al secondo);

$$P[\text{accettato}] = P[\text{sist. vuoto}] = 2/3$$
$$P[\text{rifiutato}] = P[\text{sist. occup.}] = 1/3$$

$$[\text{GUAD. TOTALE}] \overset{!}{=} \lambda\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}2\right) = 300 \left[\frac{\text{unità}}{\text{sec}}\right]$$

$$= \lambda\cdot\left(P[\text{accett.}]\cdot G + P[\text{rifiut.}]\cdot c\right) =$$

E3 - 25-07-2005

⑨ ES.3 NEGOZIO: apertura e chiusura si alternano con durata esponenziale e media $\alpha = 12$ ore;
↳ tempi di ap. e chius. indipendenti e NON dip. dal giorno e dall'ora;
↳ aperto da molti anni;

a) prob. che un cliente al tempo t trovi chiuso;

$$\mathbb{P}[\text{aperto}] = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/\alpha} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[\text{chiuso}]$$

$$[\%\text{ tempo aperto}] \overset{!}{=} \qquad \overset{!}{=} [\%\text{ tempo chiuso}]$$

b) clienti arrivano con un processo di Poisson con $\lambda = 10$ clienti/ora dalle 8 alle 20 e $\lambda' = 2$ clienti/ora dalle 20 alle 8;

$\Rightarrow$ [n° medio di clienti che trovano il negozio chiuso in 24 ore] ; sia $X(t)$ V.A. di Poiss. che conta il n° di arrivi/clienti

N_1 = n° clienti che trovano chiuso dalle 8 alle 20;

$$M(t) = E[N_i] = \sum_{k=0}^{+\infty} E[N_i \mid X(t) = k] \cdot \mathbb{P}[X(t) = k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left[\mathbb{1}\{\text{utente } n \text{ trova chiuso}\}\right] \cdot \mathbb{P}[X(t) = k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2} \cdot \mathbb{P}[X(t) = k] = \frac{1}{2} \cdot \left[\text{n° MEDIO di arrivi nell'intervallo } [8;20]\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda_{1,2}\, \Delta t = \begin{cases} 1/2 \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ [clienti]} \\ 1/2 \cdot 2 \cdot 12 = 12 \text{ [clienti]} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ [in TOTALE il n° di clienti che trova chiuso in 24 ore] $= (60 + 12)$ clienti $= 72$ [clienti]

(INTERVALLI indip. - arrivi indip. $\Rightarrow$ ARRIVI $\cdot\, \mathbb{P}$[aperto o chiuso])

c) al tempo t un cliente trova chiuso; prossima apertura è l'ultima; se il cliente torna dopo T, prob. che trovi aperto;

$$\overset{t \qquad\qquad t+T}{\underbrace{\quad}_{C}\ \underbrace{\quad}_{A}} \text{ CHIUSO per sempre}$$

$\mathbb{P}$[al tempo $(t+T)$ sia aperto | t è chiuso] $\Rightarrow$ considero le aperture e le chiusure come un processo di arrivi di eventi con: i tempi di interarrivo $\sim \mathcal{E}(\cdot)$ e media $\alpha = 12$ ore $\Rightarrow$ è un processo di Poisson con $\lambda = \frac{1}{12}\left[\frac{\text{eventi}}{\text{ora}}\right]$

PARAMETRO $= \mu = 1/12$

$\Rightarrow P\left[\text{aperto a } (t+T) \mid \text{chiuso a } t\right] = P\left[1 \text{ evento A-C in un tempo } T\right] =$

$$= (\lambda T)^K \cdot \frac{e^{-\lambda T}}{K!} \quad ; \text{con } K = 1$$

$$= \left(\lambda T \cdot e^{-\lambda T}\right)$$

d) a le cond. del punto precedente; il cliente ha una sola possibilità di tornare; calcolare la scelta migliore di T cioè quella che massimizza la prob. di trovare aperto;

$$\frac{d}{dT}\left(\lambda T \cdot e^{-\lambda T}\right) = \cancel{\lambda} e^{-\lambda T} + \cancel{\lambda} T(-\lambda) \cdot e^{-\lambda T} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda T = 1 \quad \Rightarrow \quad T = 1/\lambda = \alpha = 12 \text{ [ore]}$$

E2 - 17-06-2005

Es. 2

10 SUPERMERCATO: arrivi clienti con un processo di Poisson con $\lambda = 10$ [clienti/ora]

↳ orario: 8 → 20

a) prob. che dalle 8 alle 9 arrivi un solo cliente; n° medio totale di clienti arrivati fra le 8 e le 9,

$\rightarrow P\left[1 \text{ solo cliente dalle 8 alle 9}\right] = P\left[1 \text{ arrivo in 1 ora}\right] =$

$$= (\lambda \cdot \Delta t)^K \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot \Delta t}}{K!} = \left(\lambda \cdot e^{-\lambda}\right) \quad ; \Delta t = 1 \text{ [ora]}, \ K = 1 \text{ [cliente]}$$

$\rightarrow$ [n° medio di clienti in 1 ora] $= \lambda \cdot \Delta t = \lambda \cdot 1 = 10$ [clienti]

b) sapendo che dalle 8 alle 12 arrivano 50 clienti; calcolare la prob. che dalle 8 alle 9 ne siano arrivati 10, e che dalle 8 alle 14 ne siano arrivati 60;

$$\rightarrow P\left[8\text{-}9 \ 10 \text{ clienti} \mid 8\text{-}12 \ 50 \text{ clienti}\right] = \binom{50}{10} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{(50-10)}$$

$$p = \left[\text{prob. intervallo } 8\text{-}9\right] = \frac{1}{12}$$

→ gli arrivi sono indipendenti :

$$P\left[\,8-14 \;\; 60 \text{ clienti} \;\middle|\; 8-12 \;\; 50 \text{ clienti}\right] = P\left[\,12-14 \;\; 10 \text{ clienti}\right] =$$

$$= (\lambda \Delta t')^{K} \cdot \frac{e^{-\lambda \Delta t'}}{K!} \quad \Rightarrow \text{con} \quad \begin{matrix} K = 10 \text{ [clienti]} \\ \Delta t' = 2 \text{ [ore]} \end{matrix}$$

$$= (2\lambda)^{10} \cdot \frac{e^{-2\lambda}}{10!}$$

⇒ (⊛ se l'intervallo scelto è "DENTRO" quello della condizione si fa con una: $\underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{BINOMIALE}}$; n = arrivi condiz. ; K = arrivi interv. scelto ; p = prob. interv. scelto $= \frac{\text{DIM (intervallo)}}{\text{DIM (totale)}}$

⊛ se l'intervallo scelto "COMPRENDE" quello della condizione si spezza la probabilità;)

ALTRE DOMANDE : $\left[\text{il tempo speso nel supermercato}\right] \sim \mathcal{E}(\mu)$; media = 5 [min]

n° casse infinito ⇓ NO coda

$\left[\text{tempo passato alla cassa}\right] \sim \mathcal{U}\left[0{,}5 \,;\, 2{,}5\right]$

→ calcolare il : [n° medio di clienti usciti dal negozio tra le 8 e le 12]

5 [minuti]

[min] 1,5 = E [illegible]

E3 - 14-07-2006

(11) MOSTRA: - arrivi di Poisson con $\lambda = 10$ [clienti/ora]
- tempo passato da ogni visitatore $\Rightarrow \sim \mathcal{U}(20;30)$
- sala infinitamente grande $\Rightarrow$ no coda;
- orario di apertura 8 - 18;

a) P[PRIMA MEZZ'ORA arrivino meno di 3 visitatori] =

$$P[0,1,2 \text{ arrivi}] = \left(\begin{matrix}\text{sono}\\ \text{indip.}\end{matrix}\right) = \left[\frac{(\lambda\cdot\Delta t)^0 \cdot e^{-\lambda\Delta t}}{0!} + \frac{(\lambda\cdot\Delta t)^1\cdot e^{-\lambda\Delta t}}{1!} + \frac{(\lambda\Delta t)^2\cdot e^{-\lambda t}}{2!}\right]$$

$\Delta t = 30$ min $\stackrel{!}{=} \boxed{0{,}5 \text{ ora}}$ ← N.B. unità di MISURA COMPATIBILI con $\underline{\underline{\lambda}}$.

b) P[8.15 ci sia un solo visitatore in sala]

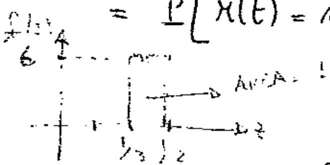
↳ il tempo di servizio è uniforme tra 20 e 30 $\underline{\underline{\text{min}}}$; $\Rightarrow$ nei primi 15 minuti NON può uscire nessuno,

↳ P[di avere avuto un solo arrivo in 15 min.] $= \dfrac{(\lambda\Delta t')^1\cdot e^{-\lambda\Delta t'}}{1!}$

$\Delta t' = 15$ min. $= 0{,}25$ [ora]

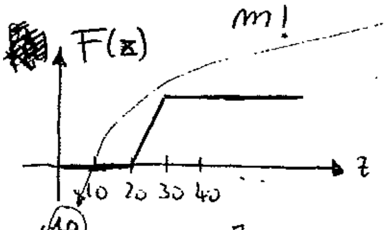
c) P[all'orario di chiusura la sala sia vuota] $\Rightarrow$ sia $x(t)$ = n° di presenze all'istante t

$$= P[x(t) = m] \Rightarrow P[x(18-8)=0] = P[x(10) = 0] =$$

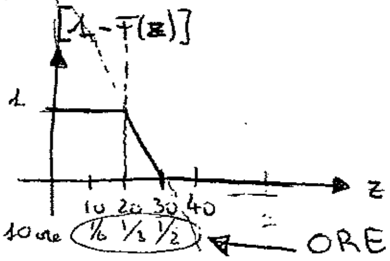


$$= \frac{(\lambda t_p)^m \cdot e^{-\lambda t_p}}{m!}$$

↳ con:



$\Rightarrow$



← ORE!!

↳ $(\lambda t_p) = \lambda \cdot \displaystyle\int_0^{10} [1-G(z)]\,dz = \lambda\cdot\int_0^{10\text{ ore}} \dots =$

tempo considerato

$$= \lambda\int_0^{1/3} 1\,dz + \lambda\int_{1/3}^{1/2} (3-6z)\,dz = \lambda z\Big|_0^{1/3} + \lambda\cdot(3z - 3z^2)\Big|_{1/3}^{1/2}$$

= (PIÙ SEMPLICE con AREA GEOMETRICA)

$$\stackrel{!}{=} \lambda\cdot\left(1\cdot(1/3) + \underline{1\cdot(1/2-1/3)}_{\,2}\right)$$

$$\stackrel{!}{=} \lambda\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \boxed{\frac{5\cdot\lambda}{12}}$$

E1 - 17-06-2005

(12) MACCHINA: 3 COMPONENTI UGUALI

- COMPONENTI con funz. $\sim \mathcal{E}(\alpha)$; dopo si guasta;
- la macchina funz. finché c'è almeno un COMP. FUNZ.;
- si ferma quando l'ultimo funz. si guasta;
- tempo di riparazione della macchina $\sim \mathcal{E}(\beta = 6\alpha)$ ⇒ DOPO TUTTI i componenti sono nuovi
  - (SOLO se tutti sono ROTTI)

a) ~~...~~ funz. di tempo in cui la macchina funz. con UNO, DUE e TRE componenti; e di quando la macchina è ferma;

~~MEDIA~~ ~~...~~ T_{F_c} = tempo di FUNZ. di un COMP.

$E[T_{F_c}] = 1/\alpha$; T_{R_M} = tempo medio di riparazione della macchina $= 1/\beta = 1/6\alpha$

$[\text{tempo MEDIO 1 COMP.}] = 1/\alpha$

$[\text{tempo MEDIO 2 COMP.}] = 1/2\alpha$

$[\text{tempo MEDIO 3 COMP.}] = 1/3\alpha$

$[\text{tempo MEDIO ferma}] = 1/\beta = 1/6\alpha$

$$\Rightarrow \underbrace{[\%\text{ tempo 1 COMP.}]}_{P[1\text{ COMP.}]} = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1/3\alpha + 1/6\alpha} = \frac{6}{12} = 1/2$$

$$\underbrace{[\%\text{ tempo 2 COMP.}]}_{P[2\text{ COMP.}]} = 3/12 = 1/4$$

$$\underbrace{[\%\text{ tempo 3 COMP.}]}_{P[3\text{ COMP.}]} = 2/12 = 1/6$$

$$\underbrace{[\%\text{ tempo ferma}]}_{P[0\text{ COMP.}] = P[\text{PROD. FERMA}]} = 1/12$$

b) prod. media di pezzi all'ora se: $\left.\begin{array}{l}\lambda_{1c} = 5\\ \lambda_{2c} = 12\\ \lambda_{3c} = 20\end{array}\right\}$ [pezzi/ora]

$$\left[\begin{array}{c}\text{n° MEDIO di pezzi}\\ \text{(all'ora)}\end{array}\right] = \lambda_{1c} \cdot P[1\text{ COMP.}] + \lambda_{2c} \cdot P[2\text{ COMP.}] + \lambda_{3c} \cdot P[3\text{ COMP.}]$$

$$= 5 \cdot 1/2 + 12 \cdot 1/4 + 20 \cdot 1/6 = \frac{5}{2} + 3 + \frac{10}{3} = \frac{15+18+20}{6} = \frac{53}{6}$$

c) ripetere $\underline{a}$ e $\underline{b}$ con tempo di ripar. uniforme $\sim \mathcal{U}[0; 2/\beta]$;

T_{RM} = tempo e rip. macchina ; $E[T_{RM}] = \frac{2}{2\beta} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{6\alpha}$

$\Rightarrow$ STESSI VALORI;

E3 - 18-09-2006

(13) 50 SENSORI : DISTRIBUITI su un'area A secondo un processo di Poisson in 2 dimensioni, con tasso λ [sensori/unità di area];

↳ SENSORI attivi per un tempo fissato e spenti per un tempo fissato; ↳ poi si riaccende $\Rightarrow$ ALTERNANZA ~~acceso~~ – spento

↳ [% tempo attivo] = DUTY CYCLE = 20% $\Rightarrow P[\text{attivo}] = 0{,}2$

$\Rightarrow$ n° nodi attivi CASUALE $\Rightarrow$ NODI INDIPENDENTI;

↳ interrogazione periodica dei sensori;

a) 50 sensori su un'area A $\Rightarrow \lambda = \left[\frac{\text{sensori}}{\text{unità di area}}\right] = \frac{50}{A}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{n° MEDIO di} \\ \text{sensori che} \\ \text{rispondono}\end{bmatrix} = n \cdot P[\text{attivo}] = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ [sensori]

(tipo una binomiale: n = n° sensori ; p = prob. sensore attivo

$\Rightarrow P[X=k] = P[\text{n° sensori che risp. sia } k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

↳ in MEDIA : $\boxed{m_x = n \cdot p ;}$ $\sigma_x^2 = n \cdot p(1-p)$) #

b) la staz. può interr. solo un'area pari ad $a = A/2$

$P[\text{n° medio di sensori che rispondono}]$; $P[\text{NON risponde nessuno}]$

$\rightarrow \begin{bmatrix}\text{n° medio sensori} \\ \text{in } a = A/2\end{bmatrix} = \lambda \cdot \text{area} = \frac{50}{A} \cdot \frac{A}{2} = 25$ sensori

λ ↓ n° medio di sensori per unità di area

$\begin{bmatrix}\text{n° medio di sensori} \\ \text{che rispondono}\end{bmatrix} = 25 \cdot 0{,}2 = 5$ sensori

→ BINOMIALE con $K=0$; P[attivo e nell'area giusta] $= 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1$

P[nessuno risponde] $= \binom{25}{0} \cdot 0{,}1^{0} \cdot (0{,}9)^{25}$

SONO INDIPENDENTI

⇓

prob. di uno RISP./NON RISP. per tutti i sensori

$= \frac{25!}{25!\,0!} \cdot 1 \cdot (0{,}9)^{25}$

$= (0{,}9^{25})$ #

E2 - 18-09-2006

(14) COMPONENTE ELETTRONICO;

per un sistema viene ridondato installandone 2 COPIE in ogni sistema e facendole funz. in parallelo;

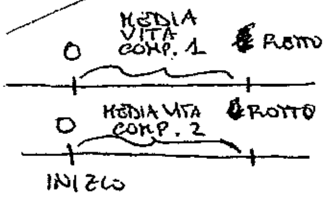
↳ VITE COMP. $\sim \mathcal{E}(\alpha)$; media $= 1/\alpha = 66$ giorni

↳ 2 rotti ⇒ sost. tutto il sistema;

↳ 1 rotto ⇒ non succ. nulla;

$\frac{1}{\alpha} = 66$ giorni

⇒ SOST. sistema = 1 GIORNO;



SOVRAPPOSIZIONE

a) [tempo medio da quando inizia a funz. a quando uno dei due si guasta] $= \left(\frac{1}{2\alpha} = 33 \text{ giorni}\right)$

↳ [tempo medio in cui il sist. funz. con un solo componente] $= \frac{1}{\alpha} = 66$ giorni

b) da un istante t a caso; calcolare la media del tempo di funz. ININTERROTTO del sistema;

[% tempo 1 COMP. FUNZ.] $= \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1}$

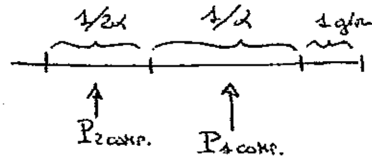
P[1 COMP. FUNZ.] $= \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1/66\alpha} = \frac{1/\alpha}{\frac{66+33+1}{66\alpha}} = \frac{66}{100}$

[% tempo 2 COMP. FUNZ.] $= \frac{1/2\alpha}{1/\alpha + 1/2\alpha + 1/66\alpha} = \frac{33}{100} = P$[2 COMP. FUNZ.]

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{tempo medio di}\\ \text{FUNZ. inint.}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\text{tempo medio}\\ \text{1 COMP.}\end{matrix}\right] \cdot P\left[\text{1 COMP.}\right] +$$

$$+ \left[\begin{matrix}\text{tempo medio}\\ \text{2 COMP.}\end{matrix}\right] \cdot P\left[\text{2 COMP.}\right] =$$

$$= 66 \cdot \frac{66}{100} + \frac{33}{100} \cdot (66+33) \Leftarrow$$



↳ se cado nell'intervallo di 2 comp. devo considerare di "usare" anche quello da 1 in seguito;

$$= \frac{3960+360+36}{100} + \frac{2700+270+270+27}{100} =$$

$$= \frac{4356 + 3267}{100} = \frac{7623}{100} = 76{,}23 \text{ [giorni]}$$

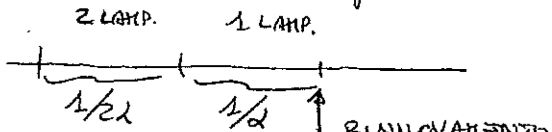
---

c) domanda a cui $\boxed{\text{vita}}$ dei sottosistemi sono V.A. indipendenti $\mathcal{U}[..]$; $\boxed{\text{media} = 1/\lambda}$

⇒ LA MEDIA È LA STESSA MA (non come il caso precedente dei tempi di riparazione) SI TRATTA DEI TEMPI DI VITA dei COMPONENTI ⇒ CAMBIANO LE PROBABILITÀ; (cambia il numeratore del calcolo delle %)

⇒ ESEMPIO 2 LAMPADINE: % tempo illuminaz. di 1 lampadina

↳ VITA $\sim \mathcal{E}(\lambda)$; media $1/\lambda$



$$\left[\begin{matrix}\text{\% tempo 1}\\ \text{lampadina}\end{matrix}\right] = \frac{E[\text{1 lamp.}]}{E[\text{1 lamp.}] + E[\text{2 lamp.}]} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/2\lambda} = \frac{2}{3}$$

↳ VITA $\sim \mathcal{U}[0,1]$ ⇒ calcolo $E[\max(\sim)]$ ed $E[\min(\sim)]$

$\min(a_1,a_2)$

$$\% = \left[\frac{1/3}{2/3}\right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

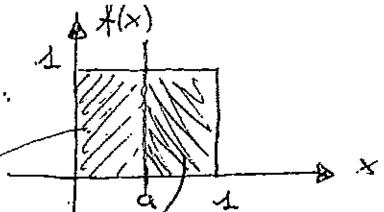
$$P[\min(a_1,a_2) > x] = P[a_1 > x] \cdot P[a_2 > x] = (1-x)^2 \quad ; \ x \in (0,1)$$

$$E[\min(a_1,a_2)] = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 1/3 \Rightarrow \text{FUNZ. 2 LAMP.}$$

$$P[\max(a_1,a_2) \leq x] = P[a_1 \leq x] \cdot P[a_2 \leq x] = x^2 \ ; \ x \in (0,1)$$

$$E[\max(a_1,a_2)] = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\text{TEMPO TOTALE}}} \Leftarrow$$

$\Rightarrow$ per una uniforme:



$\Rightarrow$ con le aree: $P[a_1 > a] = (1-a)\cdot 1 = (b \cdot h) =$ area rettangolo

$P[a_1 \leq a] = (a-0)\cdot 1 =$

$\Rightarrow$ C) Ho due uniformi di media $1/\alpha$;

per una uniforme: $\text{MEDIA} = \frac{b-a}{2}$; si tratta di vite di componenti $\Rightarrow$ l'estremo inferiore sarà $= 0$

$\Rightarrow b = 2 \cdot \text{MEDIA} + a = \frac{2}{\alpha} + 0 = 2/\alpha$

↳ le due uniformi saranno: $\mathcal{U}[0; 2/\alpha]$

E3 - 19-06-2006

(15) DUE PROCESSI di POISSON indipendenti

$X_1(t), X_2(t)$; con $X_i(t) =$ n° arrivi del processo i nell'intervallo $[0,t]$;

↳ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1{,}5 \left[\frac{\text{arrivi}}{\text{unità di tempo}}\right]$, $\stackrel{!}{=} \lambda$

a) $\rightarrow P[X_1(3) = 1 \mid X_1(3) + X_2(3) = 3] = \Rightarrow P[X_1(3) + X_2(3) = 3 \mid X_1(3) = 1]$

$$\frac{P[X_1(3) = 1;\ X_1(3) + X_2(3) = 3]}{P[X_1(3) + X_2(3) = 3]} = \frac{P[X_2(3) = 2] \cdot P[X_1(3) = 1]}{P[X_1(3) + X_2(3) = 3]}$$

$\Rightarrow$ SOMMA PROCESSI di POISSON $\rightarrow$ PROC. DI POISSON con: $\lambda = \sum_i \lambda_i$

$$= \frac{\frac{(3\cdot\lambda)^2 \cdot e^{-3\lambda}}{2!} \cdot \frac{(3\lambda)^1 \cdot e^{-3\lambda}}{1!}}{\frac{[3(\lambda_1+\lambda_2)]^3 \cdot e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}}{3!}} =$$

$$= \frac{(3\lambda)^3 \cdot e^{-6\lambda} \cdot 3!}{[3\cdot(\lambda_1+\lambda_2)]^3 \cdot e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot 2!} = \frac{(4,5)^3 \cdot \cancel{e^{-9}} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{(9)^3 \cdot \cancel{e^{-9}} \cdot \cancel{2}} = \frac{(4,5)^3}{(9)^3} \cdot 3$$

$\rightarrow P\left[X_1(3)+X_2(3)=3 \mid X_1(3)=1\right] = P\left[X_2(3)=2\right]$

$$= \frac{(3\lambda)^2 \cdot e^{-3\lambda}}{2!} = \frac{(4{,}5)^2 \cdot e^{-4{,}5}}{2}$$

b) $\rightarrow P\left[X_1(2)=1 \mid X_1(3)=3\right] = \dfrac{P\left[X_1(3)=3 \mid X_1(2)=1\right] \cdot P\left[X_1(2)=1\right]}{P\left[X_1(3)=3\right]}$

$$= \frac{P\left[X_1(\text{in } 1 \text{ int. di tempo})=2\right] \cdot \dfrac{(2\lambda)^1 \cdot e^{-2\lambda}}{1!}}{\dfrac{(3\lambda)^3 \cdot e^{-3\lambda}}{3!}}$$

$$= \frac{(\lambda)^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!} \cdot \frac{(2\lambda)^1 \cdot e^{-2\lambda}}{1!} \cdot \frac{3!}{(3\lambda)^3 \cdot e^{-3\lambda}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{\lambda^2} \cdot \cancel{e^{-3\lambda}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{e^{-3\lambda}} \cdot \cancel{9}_3 \lambda^{\cancel{3}}} = \boxed{\left(\frac{1}{3\lambda}\right)} = \boxed{\left(\frac{1}{4{,}5}\right)} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

$\rightarrow P\left[X_1(3)=3 \mid X_1(2)=1\right] = P\left[2 \text{ arrivi in } 2 \text{ unità di tempo}\right]$

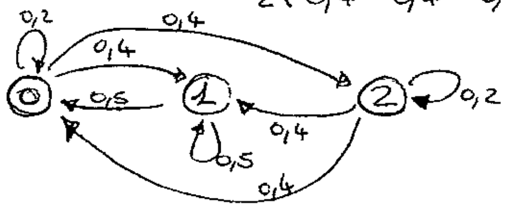
$$= \left(\frac{(2\lambda)^2 \cdot e^{-2\lambda}}{2!}\right) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2} = \boxed{\frac{9 \cdot e^{-3}}{2}}$$

E1 - 14-07-2006

(16) cdM X_n:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{array}$$

a)



$\rightarrow P[X_1 = m \mid X_0 = 0] = \begin{cases} m = 0; & 0,2 \\ m = 1; & 0,4 \\ m = 2; & 0,4 \end{cases}$

(1 PASSO)

$\rightarrow P[X_2 = m \mid X_0 = 0] = \begin{cases} m = 1; & 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \quad \# \\ m = 0; & 0,2 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,4 \quad \# \\ m = 2; & 0,2 \cdot 0,4 + \cancel{0,4} \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,2 \quad \# \end{cases}$

(2 PASSI)

$\Rightarrow$ FACCIO i vari casi dal disegno

$\Rightarrow$ se ho TANTI STATI uso $P^{(n)} = P^n \Rightarrow P[X_n = m \mid X_0 = i] =$

$= $ (RIGA dello STATO i) $\cdot$ (COLONNA STATO m)

$\rightarrow P[X_{500} = m \mid X_0 = 0] = \begin{cases} m = 0; \\ m = 1; \\ m = 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} \Pi_0 = 0,2\,\Pi_0 + 0,5 \cdot \Pi_1 + 0,4\,\Pi_2 \\ \Pi_1 = 0,4\,\Pi_0 + 0,5 \cdot \Pi_1 + 0,4\,\Pi_2 \\ \Pi_2 = 0,4 \cdot \Pi_0 + \;/\; + 0,2 \cdot \Pi_2 \quad \Rightarrow 0,8\,\Pi_2 = 0,4\,\Pi_0 \Rightarrow \Pi_0 = 2 \cdot \Pi_2, \quad \Pi_2 = 0,5 \cdot \Pi_0 \\ \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases}$$

$\Pi_1 = 0,4\,\Pi_0 + 0,5\,\Pi_1 + 0,4 \cdot 0,5\,\Pi_0$

$0,5\,\Pi_1 = 0,6\,\Pi_0 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{6}{5}\Pi_0$

$\cancel{\Pi_0 = 0,2\,\Pi_0 + 0,5 \cdot \frac{6}{5}\Pi_0 + 0,4 \cdot 0,8\,\Pi_0}$

$$\Rightarrow \pi_0 + \frac{6}{5}\pi_0 + \frac{5}{10}\pi_0 = 1 \Rightarrow \left(\frac{10+12+5}{10}\right)\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{10}{27}$$

$$\hookrightarrow \pi_1 = \frac{6}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{10}^2}{27} = \frac{12}{27} \; ; \qquad \pi_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{10}^5}{27} = \frac{5}{27} \quad \#$$

b) $m_1 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{27}{10}$; $m_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{27}{12}$; $m_2 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{27}{5}$

c) $W_{ij}^{(m)}$ = n° medio di visite allo stato j (da 0 ad m) $| X_0 = i$

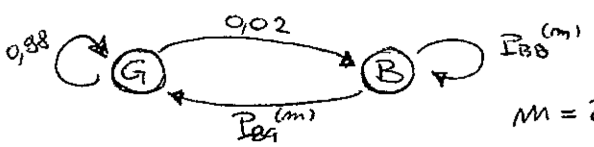
$$= E\left[\sum_{l=0}^{m} \mathbb{1}\{X_l = j\} \,\middle|\, X_0 = i\right] = \sum_{l=0}^{m} E\left[\mathbb{1}\{X_l=j\} \,|\, X_0 = i\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} P\left[X_l = j \,|\, X_0 = i\right] = \sum_{l=0}^{m} P_{ij}^{(l)}$$

$\Rightarrow$ FORMULA STAZIONARIETÀ: $W = [I - Q]^{-1}$ $\quad I$ = matrice identità

E4 – 14-07-2006

(17) CANALE MARKOVIANO:



$m = 2$

$P[\text{errore} \,|\, G] = 0$

$P[\text{errore} \,|\, B] = 1$

↳ ogni volta che c'è un pck errato c'è un "salto" di $(m-1)$ slots,

↳ PROCESSO SEMI-MARKOVIANO;

a) feedback perfetto: in andata ho comunque errori Markoviani;

$$THR = \left[\text{n° succ. per slot}\right] = \frac{P_{BG}^{(m)}}{P_{BG}^{(m)} + m \cdot P_{GB}} \;;$$

$\Rightarrow$ dati :

$$P = \begin{array}{c|cc} & G & B \\ G & 0,98 & 0,02 \\ B & 0,1 & 0,9 \end{array}$$

$$P^{(m)} = P \begin{pmatrix} \cancel{\quad} & \cancel{\quad} & \cancel{\quad} \\ 0,098 + 0,09 & 0,1 \cdot 0,02 + \underbrace{0,9 \cdot 0,9}_{0,81} \end{pmatrix} \quad \#$$

$$\Rightarrow P_{BG}^{(2)} = 0,0196$$

$$P_{BB}^{(2)} = \overset{0,81}{\cancel{\quad}} + 0,002 = \cancel{\quad}\ 0,812$$

$$THR = \frac{0,0196}{0,0196 + 2 \cdot 0,02} = \frac{0,0196}{0,0196 + 0,04} = 0,3288$$

b) 1) errori markoviani $\Rightarrow$ ANDATA
2) errori indip. con $p_e = 0,01$ $\Rightarrow$ errori i.i.d. andata

~~THR i.i.d.~~ $L_{medio} = \begin{cases} 1000000 \text{ (MARKOV)} \\ 2000000 \text{ (i.i.d.)} \end{cases}$

N.B

$$\left[\begin{array}{l}\% \text{ tempo} \\ \text{slot } 1000000\end{array}\right] = \frac{1 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^6} = \frac{1}{3} = P[\text{slot } 1000000]$$

$$\left[\begin{array}{l}\% \text{ tempo} \\ \text{slot } 2000000\end{array}\right] = \frac{2}{3} = P[\text{slot } 2000000]$$

$$THR_{TOT.} = THR_{MARK} \cdot P[\text{slot } 1000000] + THR_{i.i.d.} \cdot P[\text{slot } 2000000]$$

$$THR_{i.i.d.} = \frac{1 - p_e}{1 - p_e + m \cdot p_e} = \frac{0,99}{0,99 + 2 \cdot 0,01} = \frac{0,99}{1,01} = 0,9801$$

$$THR_{TOT.} = 0,1096 + 0,6534 = 0,763 \quad \#$$

(N.B.: le lungh. degli slot sono V.A. ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ SI DEVE PRENDERE LA MEDIA)

$\Rightarrow$ ALTRE DOMANDE :

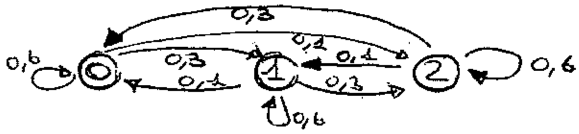
$\hookrightarrow$ SE TRASMETTE DIRETTAMENTE nel CANALE $\Rightarrow m = 1$

$$THR = \pi_a = \frac{P_{10}}{P_{10} + P_{01}} \quad \text{(prova con sistema)}$$

E3 - 17-06-2005

(18) 1 CDM con stati $\{0;1;2\}$, stato iniziale $X_0 = 0$:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 1 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 2 & 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{array}$$



a) prob. che la catena si trovi in $X(2) = 2$; e $X(1000) = 2$

$\rightarrow \mathbb{P}[X(2) = 2 \mid X(0) = 0] = 0,3 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,6 = \frac{9}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{21}{100}$ #

$\Rightarrow$ OPPURE: $\overbrace{1^a \text{ RIGA}}^{\text{STATO } 0} \cdot \overbrace{3^a \text{ COLONNA}}^{\text{STATO } 2} \Rightarrow (0,6 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,6)$

$\rightarrow \mathbb{P}[X(1000) = 2 \mid X(0) = 0] \Rightarrow$ si può considerare distrib. staz.;

↳ DATA la $\overbrace{\text{MATRICE}}^{\text{PARTICOLARE}}$ POSSO dire che: $\pi_3 = (\pi_2 = \pi_1) = \frac{1}{3}$

↳ CONTROLLO :
$$\begin{cases} \pi_0 = 0,6\,\pi_0 + 0,1\,\pi_1 + 0,3\,\pi_2 \\ \pi_1 = 0,3\,\pi_0 + 0,6\,\pi_1 + 0,1\,\pi_2 \\ \pi_2 = 0,1\,\pi_0 + 0,3\,\pi_1 + 0,6\,\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

b) $\rightarrow \mathbb{P}[X_1 = 1 ; X_3 = 2 \mid X_2 = 0] = \dfrac{\mathbb{P}[X_1 = 1 ; X_3 = 2 ; X_2 = 0]}{\mathbb{P}[X_2 = 0]}$

$\Rightarrow \overbrace{\text{HO TUTTO IL PERCORSO}}^{\text{A NUMERATORE}} \Rightarrow$ ne consegue che $X_0 = 0 \Rightarrow$

$$= \left[(P_{01}) \cdot (P_{10}) \cdot (P_{02}) \Big/ \overbrace{(P_{00} \cdot P_{00} + P_{01} \cdot P_{10} + P_{02} \cdot P_{20})}^{\text{devo fare tutte le possibilità}} \right] \#$$

$= (\text{calcoli})$

$\rightarrow \mathbb{P}[X_2 = 0 \mid X_1 = 1 ; X_3 = 2] = \dfrac{\mathbb{P}[X_2 = 0 ; X_1 = 1 ; X_3 = 2]}{\underbrace{\mathbb{P}[X_1 = 1 ; X_3 = 2]}_{\mathbb{P}[1 \to 2 \text{ in } 2 \text{ passi}]}}$

$$= \left[(\cancel{P_{01}}) \cdot P_{10} \cdot P_{02} \Big/ (\cancel{P_{01}}) \cdot (P_{12} \cdot P_{22} + P_{10} \cdot P_{02} + P_{11} \cdot P_{12}) \right] \#$$

$= (\text{calcoli})$

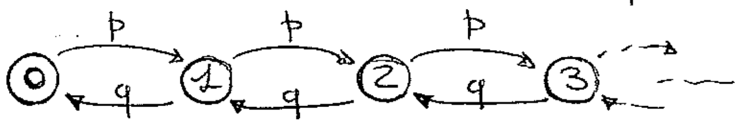
E4 - 17-06-2005

(19) PASSEGGIATA CASUALE: sugli interi NON NEGATIVI;

$P_{01} = 1$; $P_{i,i+1} = p$; $P_{i,i-1} = q$; $i > 0$; $p + q = 1$

$p = 0,4$

$\Rightarrow q = 0,6$



a) calc. ~~la~~ le prob. staz. che la pass. casuale si trovi in 5 quando parte da 0 e da 5;

$$P = \begin{array}{c|ccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - \\ 1 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - \\ 2 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - \\ 3 & 0 & 0 & q & 0 & p & - & - & - \\ 4 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & - & - \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & - \\ \vdots \end{array}$$

$\Rightarrow$ le DISTR. STAZ. :

$$\begin{cases} \pi_i = \sum_{k=0}^{N} (\pi_k \cdot P_{kj}) \Rightarrow \pi_i = (\pi_{i-1} \cdot p_{i-1} + \pi_{i+1} \cdot q_{i+1}) \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si ha che: $\pi_0 = \pi_1 \cdot q_1$

↳ si può dimostrare che: $\pi_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \left(p_k / q_{k-1} \right)}$

$\Rightarrow$ se : $p_k = p$; $q_k = q = (1-p)$;

se $p < q$ (le serie CONVERGONO)

$\pi_0 = (x_0) = \frac{1}{2} \cdot (1 - p/q)$ VEDI TEORIA

$\pi_k = \frac{1}{p} (p/q)^k \cdot \frac{\pi_0}{(x_0)} = \left(\frac{1}{2p}\right) \cdot (1 - p/q) \cdot (p/q)^k$; $k > 0$

$\Rightarrow \pi_5 =$ è indipendente dagli stati di partenza $\Rightarrow$ DISTR. STAZ.

$= \left(1/2 \cdot 0,4\right) \cdot \left(1 - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}\right)^5 = \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{243}\right)$

b) $\lim_{n \to \infty} P_{05}^{(n)}$ ⇒ la cdM è APERIODICA ⇒ il limite NON ESISTE

c) prob. staz. che la pers. casuale si trovi in 5 partendo da 0; con $p = 0,5$;

$$\pi_5 = \left(\frac{1}{2 \cdot 0,5}\right) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{0,5}{0,5}\right)}_{=0} \cdot \left(\frac{0,5}{0,5}\right)^5 = 0$$

↳ infatti $p < q$ (MINORE STRETTO) altrimenti le serie geom. (parametro p/q) NON CONVERGONO

d) se parto da 1; tempo medio per arrivare (per la 1ª volta) in 3;

V_i = tempo medio per arrivare a j da i

$$\begin{cases} V_0 = 1 + V_1 \\ V_1 = 1 + q \cdot V_0 + p \cdot V_2 \\ V_2 = 1 + q \cdot V_1 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 12,5$$

ATTENZIONE

⇒ IN QUESTO CASO si considera 3 ASSORBENTE;

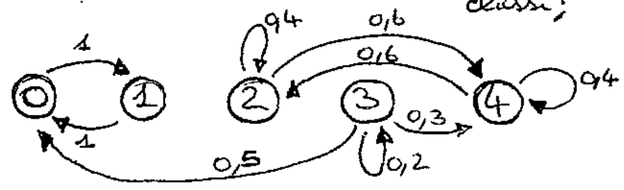
⇒ ALTRIMENTI: devo calcolare i $E[S_{13}]$; (VEDI ESERCIZIO 2)

E2 - 25-07-2005

20 CDM: con stati $\{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 3 & 0,5 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 \\ 4 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \end{array}$$

a) CLASSIFICARE gli stati ed individuare le classi;



$\{0; 1\}$: PERIODO 2; RICORRENTE POSITIVA;

$\{3\}$: TRANSITORIO; (lascio 3 e non torno più);

$\{2; 4\}$: RICORRENTE POSITIVA; APERIODICA;

b) prob. di assorb. nelle classi ricorrenti da tutti gli stati transitori;

$\{3\} \to \{0; 1\}$

$\{3\} \to \{2; 4\}$

⇒ CHIAMO. $A = \{3\}$; $B = \{0,1\}$; $C = \{2,4\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

VERSO B
$\mu_C = 0$
$\mu_B = 1$

$\Rightarrow \mu_A = 0{,}2\,\mu_A + 0{,}5\,\mu_B + \cancel{0{,}3\,\mu_C}$
$= 0{,}2\,\mu_A + 0{,}5$

$\mu_{A_B} = \dfrac{0{,}5}{0{,}8} = \dfrac{5}{8}$

VERSO C
$\mu_B = 0$
$\mu_C = 1$

$\Rightarrow \mu_A = 0{,}2\,\mu_A + \cancel{0{,}5\,\mu_B} + 0{,}3\,\mu_C$
$= 0{,}2\,\mu_A + 0{,}3 \Rightarrow \mu_A = \dfrac{0{,}3}{0{,}8} = \dfrac{3}{8}$

c)
$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 \\ X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \\ X & X & \mu_C\pi_2 & \boxed{0} & \mu_C\pi_4 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

N.B.: CON UN SOLO STATO TRANSITORIO la $\mu = \dfrac{P\{\text{classe scelta}\}}{\sum P[\text{classi}]}$ (NON SI CONTA LA PROB. verso se stesso)

X = da stato transitorio a classe periodica

X = da stati classe periodica verso se stessi

$\mu_{A_K} \cdot \pi_i$ = dallo stato transitorio → stato classe aperiodica ; O = su O e su gli stati transitori verso se stessi o altri transitori

d) tempo medio di ricorrenza di tutti gli stati;

$m_i = 1/\pi_i$

↳ dalla matrice P ⇒

COLONNE

$$\begin{cases} \pi_0 = \cancel{\quad + \pi_4} \\ \pi_1 = \pi_0 + \cancel{\quad} \\ \pi_2 = + 0{,}4\,\pi_2 + + 0{,}6\,\pi_4 \\ \pi_3 = 0{,}5\,\pi_0 + \quad + 0{,}2\,\pi_3 + 0{,}2\,\pi_4 \\ \pi_4 = + 0{,}6\,\pi_2 + + 0{,}4\,\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

⇒ ALTRA DOMANDA: (vedi esercizio 3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} P^k = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \\ \mu_B\pi_0 & \mu_B\pi_1 & \mu_C\pi_2 & 0 & \mu_C\pi_4 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\dfrac{1}{\text{PERIODO}}$ ⇒ stati della classe periodica verso se stessi

TRANSITORIO VERSO CLASSE PERIODICA

~~E3~~ E3 - 02-09-2005

(21) NODO di RETE : 2 link di ingresso

↳ arrivi di Poisson indipendenti ; $\lambda_1 = \lambda_2 = 500 \left[\frac{pcks}{sec}\right]$

a) prob. che in un interv. di 3 ms arrivino 2 pcks al link 1 ed 1 pck al link 2 ;

$$P\Big[\overbrace{2\text{ pcks al link } 1}^{\text{in } 3\,ms} ; \overbrace{1\text{ pck al link } 2}^{\text{in } 3\,ms}\Big] \Rightarrow \text{sono INDIPENDENTI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[2\text{ pck; link } 1 \text{ in } 3\,ms\right] \cdot P\left[1\text{ pck; link } 2 \text{ in } 3\,ms\right] =$$

$$= \left[(\lambda \cdot 3m)^2 \cdot \frac{e^{-3m\cdot\lambda}}{2!}\right] \cdot \left[(\lambda \cdot 3m)^1 \cdot \frac{e^{-3m\cdot\lambda}}{1!}\right] =$$

= (calcoli) -

b) prob. che al NODO arrivino 3 pcks in totale in 3 ms;

⇒ SOMMA di PROC. di POISSON indipendenti ⇒ PROC. di POISSON con $\lambda_{TOT} = \lambda_1 + \lambda_2$

$$P\left[3\text{ pcks; in } 3\,ms\text{; in totale}\right] = \left[(\lambda_{TOT} \cdot 3m) \cdot \frac{e^{-\lambda_{TOT}\cdot 3m}}{3!}\right] =$$

= (calcoli)

E3 - 22-09-2005

(22)

$\cancel{\text{E3}}$ X – 31-08-2006

(23) CATENA PRODUTTIVA: N-sistemi INDIPENDENTI in parallelo

⇒ ogni sistema alterna operativo – guasto con durata $v.a.$ $\mathcal{E}(\alpha_i)$ e $\mathcal{E}(\beta_i)$

$i = 1; 2; \dots; N$

↳ catena fuori servizio se tutti N i sistemi sono guasti;

a) → trovare la statistica (PDF) del tempo di fuori servizio;
(da tutti N rotti a 1 viene riparato);
→ tempo medio di fuori servizio;

b) $N = 2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = 50\alpha$

↳ se la prod. è di 25 pezzi con tutti e due i sistemi funzionanti, 10 pezzi con uno solo sistema funzionante, 0 altrimenti;

→ n° medio di pezzi prodotti ~~nelle~~ in 24 ore;

a) $\begin{bmatrix} \text{\% tempo 1 COMP} \\ \text{IN GUASTO} \end{bmatrix} = \left(\dfrac{1/\alpha_i}{1/\alpha_i + 1/\beta_i}\right) = P[\text{1 COMP. GUASTO}] = \boxed{p_a}$

$\begin{bmatrix} \text{\% tempo [illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{bmatrix} = (\text{SONO INDIPENDENTI}) = \prod_{i=1}^{N} P[\text{COMP. } i \text{ [illegible]}]$

$\Rightarrow P[Y = k] = P[\text{SISTEMI [illegible] } k] =$
$\binom{m}{k} \cdot (p_a)^k \cdot (1 - p_a)^{m-k}$; [illegible]

[illegible]

[illegible] $(1 - p_a)^N$

$\Rightarrow$ [illegible] $(1 - p_a)^N$

⇒ $T_{g_{tot}}$ = tempo di [illegible]

[illegible]

$\Rightarrow E[T_{g_{tot}}] = \dfrac{1}{\sum_i \beta_i}$ [illegible]

E2 - 31 - 08 - 2006

(24) SISTEMA SMISTAMENTO PCK - 1

⇒ infiniti servitori; ARRIVI $\sim \mathcal{P}(\lambda)$; TEMPI SERVIZIO $\sim \mathcal{E}(\mu)$

⇒ CODA M/M/∞ ; $\lambda = 2$ pck/sec   MEDIA $= \frac{1}{\mu} = 1$ sec

↳ sistema inizialmente VUOTO ;

↳ FUNZIONAMENTO nell' intervallo $[0;5]$ sec.

a) $P\left[\text{in } [0;5] \overset{\text{ho arrivi}}{\text{nessun}} \text{ pcks}\right] = \dfrac{(\lambda \cdot 5)^0 \cdot e^{-5\lambda}}{0!} = e^{-5\lambda} = e^{-10}$

b) $P\left[\text{all' istante } t = 5 \text{ sec. il sistema sia vuoto}\right] =$

c) $P\left[\text{in } t = 5 \text{ sec. il sistema è vuoto} \mid \text{in } [0,4] \text{ ho avuto } 8 \text{ arrivi}\right] =$