POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 4 — Dynamique

G. Marleau

Automne 2016

Table des matières

Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié des méthodes numériques utiles pour résoudre les équations de la cinématique

1. Mouvement linéaire (particule ponctuelle ou centre de masse d'un solide)

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t)$$
$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t)$$

où $\vec{a}$ est l'accélération, $\vec{v}$ la vitesse et $\vec{r}$ la position du centre de masse.

- L'accélération linéaire peut aussi dépendre de $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation du solide et de $\vec{\Omega}$ (ou de façon équivamente $\boldsymbol{R}$) la position angulaire du solide.

Introduction

2. Mouvement angulaire (solides)

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t)$$
$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(\vec{v},\vec{r},\vec{\Omega},t)$$

où $\vec{\alpha}$ est l'accélération angulaire d'un point du solide.

- L'accélération angulaire peut aussi dépendre de $\vec{v}$, la vitesse linéaire et de $\vec{r}$ la position du centre de masse du solide.

Introduction

On peut aussi remplacer la seconde équation par

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\vec{v},\vec{r},\boldsymbol{R}(t),t)\boldsymbol{R}(t)$$

si on décide d'utiliser la matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t)$ ou par

$$\frac{d\vec{\vec{R}}(t)}{dt} = \vec{\vec{R}}(t)\vec{\vec{\omega}}(\vec{v},\vec{r},\vec{\vec{R}}(t),t)$$

si l'analyse utilise le quaternion de rotation $\vec{\vec{R}}(t)$.

Introduction

Notre présentation de la cinématique au chapitre précédent s'est généralement limitée à effectuer les simulations en utilisant des formes simples pour l'accélération linéaire $\vec{a}$ et angulaire $\vec{\alpha}$. Ici, le but est de décrire les forces $\vec{F}$ et les moments de force $\vec{\tau}$ à la source de ces accélérations sachant que

$$\vec{a}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t) = \frac{\vec{F}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t)}{m}$$

$$\vec{\alpha}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t) = \boldsymbol{I}^{-1}\left(\vec{\tau}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\vec{v},\vec{r},\boldsymbol{R}(t),t)\boldsymbol{I}\vec{\omega}(\vec{v},\vec{r},\vec{\Omega},t)\right)$$

Forces et mouvement linéaire

Nous présenterons premièrement les forces qui ont un impact sur le mouvement linéaire de particules (ou qui s'appliquent sur le centre de masse des solides). Certaines d'entre elles peuvent générer un moment de force et ainsi avoir un impact sur le mouvement angulaire du solide. De plus, ces forces peuvent aussi dépendre de la position angulaire et de la vitesse angulaire, même si elle ne contribuent pas à l'accélération angulaire.

Forces et mouvement linéaire

Champs de force

Les champs de force représentent l'interaction entre deux objets qui ne se touchent pas. La force qui résulte de cette interaction dépend généralement des propriétés intrinsèques de chacun des objets et de la distance qui les sépare. Les deux exemples les plus connus sont la force électrique et la force gravitationnelle.

Force électrique

- Un solide de charge q_1 situé à $\vec{r}_1$ (centre de charge) subira une force

$$\vec{F}^G_{1,2} = k\frac{q_1 q_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

  en présence d'un solide de charge q_2 localisé à $\vec{r}_2$ (force répulsive si les deux charges sont de même signe et attractive si les deux charges sont opposées). Ici $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.98755 \times 10^9$ (N×m^2/C^2).
- Cette force est rarement utilisée dans les applications multimédias.

Force gravitationnelle

- Un solide de masse m_1 situé à $\vec{r}_1$ (position du centre de masse) sera attiré par un solide de masse m_2 localisé à $\vec{r}_2$ (position du centre de masse). La force d'attraction entre ces deux solides est alors donnée par la relation

$$\vec{F}^G_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

  avec $G = 6.673 \times 10^{-11}$ ($\mathrm{N}\times\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$).
- Les simulations reliées à la description de la trajectoire d'objets en 3-D impliquent l'utilisation de cette force.

Forces et mouvement linéaire

Dans la majorité des cas les objets se retrouveront dans le champ gravitationnel de la terre, la masse m_2 représentera la masse de la terre (notée M_T) et la position $\vec{r}_2$ la position du centre de masse de la terre par rapport à votre système de coordonnées locales.

Forces et mouvement linéaire

- En général $\vec{r}_1$ sera mesuré par rapport à un point sur la surface de la Terre (hauteur h). Alors

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (R_T + h)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = (R_T + h)\vec{u}$$

avec R_T le rayon de la terre et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dans la direction opposée à la direction de la force (du centre de masse de la terre vers l'objet).

- On écrira donc

$$\vec{F}^G_{1,2} = -GM_T \frac{m_1}{(R_T + h)^2}\vec{u} = -3.99 \times 10^{14} \frac{m_1}{(6.38 \times 10^6 + h)^2}\vec{u}$$

puisque $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg et $R_T = 6.38 \times 10^6$ m.

Forces et mouvement linéaire

- Pour les situations où la masse m_1 atteint une hauteur $h \ll R$, on peut encore simplifier cette formulation et écrire

$$\vec{F}^{G}_{1,2} = -\frac{GM_T}{(R_T)^2} m_1 \vec{u} = -m_1 g \vec{u}$$

avec $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ au niveau de la mer (montée directe suivant un rayon de la terre ou terre considérée plate).

- Ici $\vec{u}$, qui sert à indiquer la direction de la force, correspondra à la direction z pour le cas ou la Terre est supposée plate $(x - y)$.

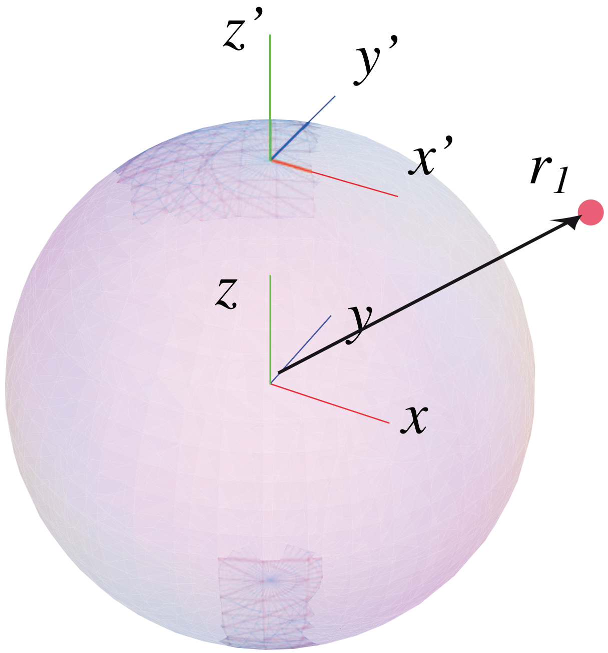
Exemple

Trajectoire d'une fusée de masse m constante partant à une vitesse v_0 et un angle θ par rapport à la verticale dans la direction x. Pour cette fusée, les conditions initiales sont

$$\vec{r}_0 = (0, 0, R_T)^T$$
$$\vec{v}_0 = v_0(\sin\theta, 0, \cos\theta)^T$$

Forces et mouvement linéaire

Les axes de référence $(x, y, z)^T$ par rapport au centre de la Terre seront parallèles au système de référence associé au point de départ localisé sur la surface de la Terre $(x', y', z')^T$.



Forces et mouvement linéaire

- Ici, on doit utiliser explicitement

$$\vec{F}^{G}_{1,2} = -GM_T m_1 \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

où $\vec{r}_1$ est la position de la fusée par rapport à un système de référence situé au centre de masse de la terre (ici $\vec{r}_2 = 0$).

Forces et mouvement linéaire

Les différentes composantes de la force sont

$$F_x^G = -GM_T m \frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$
$$F_y^G = 0$$
$$F_z^G = -GM_T m \frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

Ce qui correspond à une trajectoire balistique.

Forces et mouvement linéaire

Solution par méthode de Runge-Kutta

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}\left[\vec{q}(t), t\right]$$

avec des conditions initiales

$$\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$$

Forces et mouvement linéaire

Dans le cas des équations de la cinématique, le vecteur $\vec{q}(t)$ a pour composantes

$$\vec{q}(t) = (v_x(t), v_z(t), x(t), z(t)^T)$$
$$\vec{q}(0) = (v_0 \sin\theta, v_0 \cos\theta, 0, R_T)^T$$

alors que $\vec{g}(t)$ est donné par

$$\vec{g}(t) = \Big(-GM_T \frac{q_3(t)}{(q_3^2(t) + q_4^2(t)^2)^{3/2}}, -GM_T \frac{q_4(t)}{(q_3^2(t) + q_4^2(t)^2)^{3/2}}, q_1(t), q_2(t) \Big)^T$$

Forces et mouvement linéaire

Si la vitesse v_0 est très faible, le projectile suivra une trajectoire $(x(t), 0, z(t))^T$ telle que $x(t) \ll R_T$ et $h = z(t) - R_T \ll R_T$ ($R_T = 6.38 \times 10^6$ m). On aura alors

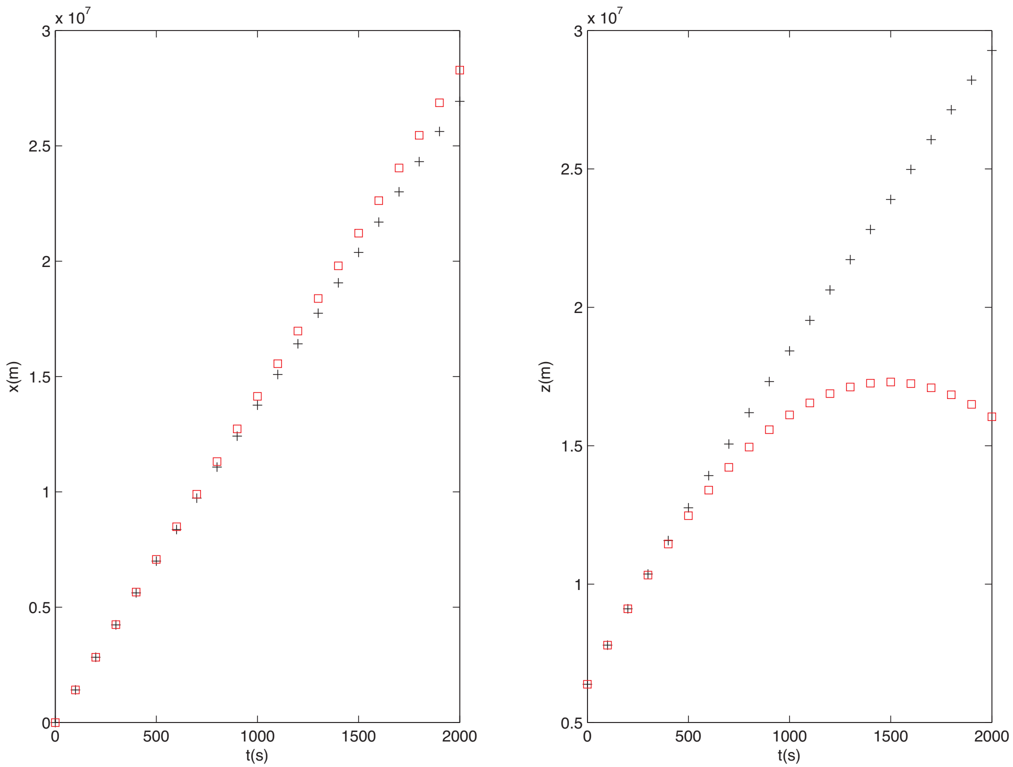
$$F_x^G = 0$$
$$F_y^G = 0$$
$$F_z^G = -gm$$

Dans ce cas la fonction $p(t)$ sera

$$\vec{g}(t) = \left(0, -g, q_1(t), q_2(t)\right)$$

Forces et mouvement linéaire

Trajectoire balistique (noir) versus trajectoire non balistique (rouge)



Forces et mouvement linéaire

Ressorts et amortisseurs.

La force exercée par un ressort fixé sur un solide est dictée par la loi de Hook. Elle est une fonction linéaire de l'étirement ou de la compression du ressort. Cette force est donnée par

$$\vec{F}^r = -k_r(\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{eq}})$$

avec k_r la constante du ressort et $\vec{r}_{\mathrm{eq}}$ la position du solide qui ferait en sorte que le ressort soit à sa position d'équilibre. Ainsi :

- si $\vec{r} = \vec{r}_{\mathrm{eq}}$ aucune force n'est exercée par le ressort ;
- sinon, la force est toujours exercée de façon à ramener le ressort à l'équilibre.

Forces et mouvement linéaire

- Si le ressort est attaché à un solide qui est aussi en mesure de se déplacer, ce solide subira une force égale et opposée à $\vec{F}^r$.
- Dans la majorité des études impliquant des collisions entre des solides, on peut simuler la force d'interaction entre ces solides lorsqu'ils sont en contact en utilisant un modèle de ressort, la constante k_r étant proportionnelle à la rigidité des solides (loi de Hook encore).
- Comme ces collisions ne sont parfaitement élastiques (sans perte d'énergie) que dans des cas extrêmement rares, il est aussi utile d'introduire le concept d'amortisseur.

Forces et mouvement linéaire

La force exercée par un amortisseur est donnée par

$$\vec{F}^a = -k_a \left[(\vec{v} - \vec{v}_a) \cdot \vec{u}\right] \vec{u}$$

Ici k_a est la constante d'amortissement et $\vec{v}_a$ la vitesse de l'amortisseur. Le vecteur $\vec{u}$ est donné par

$$\vec{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\text{eq}}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\text{eq}}|}$$

et indique la direction de compression de l'amortisseur, $\vec{r}_{\text{eq}}$ étant sa position à l'équilibre. Cette force s'exerce toujours de façon à réduire la vitesse relative entre les objets $|(\vec{v} - \vec{v}_a)|$.

Notez que le solide exerce aussi une force $-\vec{F}^a$ sur l'amortisseur (et le solide auquel il est attaché).

Frottement sec

La force de frottement s'oppose au mouvement d'un solide qui est en contact avec une surface. Elle est due à deux effets :

1. le fait de les surfaces sont rarement planes du point de vue microscopique, des rugosités étant toujours présentes sur celles-ci ;
2. l'attraction entre les molécules des deux solides en contact.

Forces et mouvement linéaire

Si une force externe $\vec{F}$ est appliquée sur un objet au repos la force de frottement sec $\vec{F}^f$ est donnée par

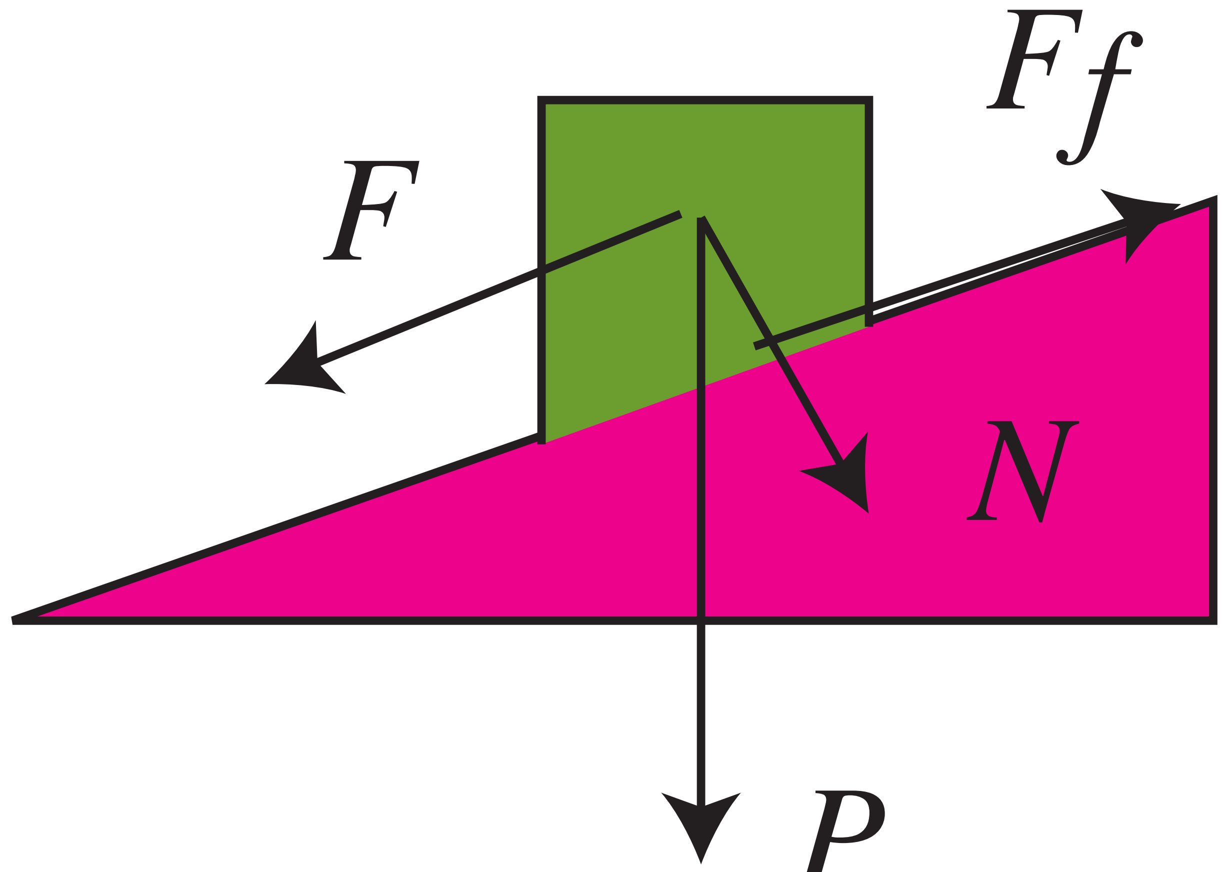
$$\vec{F}^f = -\mu_s N \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique et N est la composante du poids du solide ($\vec{P}$ avec $|\vec{P}| = mg$) normale à la surface sur laquelle il repose :

$$N = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

avec $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la surface considérée.

Force de frottement



Forces et mouvement linéaire

Cette force est appliquée sur le solide à un point se situant à l'interface solide-plan. Du point de vue du mouvement linéaire du solide, on peut supposer que cette force se transmet directement à son centre de masse. Cependant, cette force est décalée par rapport au centre de masse et devra aussi être prise en compte lorsque nous étudierons le mouvement de rotation du même objet.

Forces et mouvement linéaire

Pour les cas ou l'objet se déplace à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à la surface, la force de frottement est alors donnée par

$$\vec{F}^f = \begin{cases} -\mu_c N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

avec μ_c le coefficient de frottement cinétique.

Coefficients de frottement pour différentes interfaces plan-solide

Matériaux en contact	μ_s	μ_c
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
Acier sur acier (surfaces polies)	100.	100.
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Cuir sur fonte	0.28	0.56
Vitre sur vitre (sèche)	0.94	0.40
Vitre sur fer	1.10	0.15
Glace sur glace	0.10	0.03

Exemple : Câble lesté glissant sur une table

Un câble de longueur $L = 1.0$ m et de masse linéique $\rho = 0.01$ kg/m auquel on a suspendu une masse ($m = 0.1$ kg) pend par une longueur de $l = 0.1$ m au bout d'une table de hauteur $h = 1$ m. Le coefficient de frottement statique entre la table et le câble est $\mu_s = 0.4$ alors que son coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0.1$. On suppose aussi que le coin de la table exerce une force constante de $f_c = 0.01$ N sur le câble dans une direction opposée à son mouvement.

Forces et mouvement linéaire

Déterminer ce qui arrivera si le câble est initialement au repos. En supposant que le câble tombe initialement à une vitesse de $v_z = -0.1$ m/s, décrire son comportement en fonction du temps. Terminer la simulation lorsque la masse qui pend au bout du câble touche le sol.

Forces et mouvement linéaire

Les forces en présence sont les suivantes (on suppose que la masse qui pend au bout du câble est à une position z par rapport au sol, la longueur qui pend correspondant à $h-z$) :

1. force gravitationnelle sur la partie du câble qui pend $\vec{F}^{G}_{1,z} = -(m+\rho(h-z))g$;
2. force gravitationnelle sur la partie du câble qui repose sur la table $\vec{F}^{G}_{2,z} = -\rho(L-h+z)g$;
3. frottement avec la table $\vec{F}^{f}_{1,x} = \mu\rho(L-h+z)g$;
4. frottement avec le coin $\vec{F}^{f}_{2,z} = f_c$;
5. masse totale pour le système câble poids $M = L\rho + m$.

Forces et mouvement linéaire

Situation au repos : $z = h - l = 0.9$ m correspond à la position initiale de la masse suspendue au câble.

Ici il faut vérifier si la somme des forces sur l'ensemble câble-masse au repos permettra un déplacement du câble dans la direction $-z$ (le câble tombera). Pour répondre à cette question, il faut déterminer la force totale en z (F_z). La force de frottement en x crée une tension dans la corde $T_z = \vec{F}^f_{1,x}$ ($\mu = \mu_s$) qui s'oppose au mouvement et donc

$$\begin{aligned} F_z &= -(m + (h - z)\rho)g + \mu_s(L - h + z)\rho g + f_c \\ &= -0.9445 \text{ N} \end{aligned}$$

Cette force est négative et donc le câble chutera.

Forces et mouvement linéaire

Si la vitesse initiale est de $v_z(t_0) = -0.1$ m/s et $z(t_0) = h - l = 0.9$ m.

Il faut utiliser une relation pour la force similaire à celle donnée plus haut, mais comme le système est en mouvement on doit remplacer μ_s par μ_c

$$F_z = -(m + (h - z(t))\rho)g + \mu_c(L - h + z(t))\rho g + f_c$$

L'accélération en z est donnée par

$$a_z = \frac{-(m + (h - z(t))\rho)g + \mu_c(L - h + z(t))\rho g + f_c}{M}$$

car c'est la corde complète qui est accélérée.

Forces et mouvement linéaire

- Ici la solution analytique est un peu compliquée et il est préférable d'utiliser la méthode de Euler ou de Runge-Kutta pour résoudre le problème.

Frottement visqueux

Lorsque le solide se déplace dans un fluide (un gaz ou un liquide), il subit encore l'effet d'une force de frottement dont la source est encore une fois multiple. Ceci est le resultat des collisions élastiques entre le solide et les molécules composant le fluide et les collisions inélastiques dues aux interactions entre les molécules du solide et les molécules du fluide (viscosité).

Forces et mouvement linéaire

Ici, pour nous simplifier la vie, nous ne considérerons que la situation ou le solide est complètement immergé dans le fluide, la force s'appliquant seulement sur la face du solide se déplaçant dans le fluide (ce qui équivaut à exercer une force directement sur le centre de masse du solide si le solide est uniforme).

- La situation se complique si le solide n'est pas uniforme.
- Les situations où le solide n'est que partiellement en contact avec le fluide sont beaucoup plus complexes (la force nette ne s'applique alors que sur la partie immergée du solide et donne aussi naissance à un mouvement de rotation).

Forces et mouvement linéaire

On peut distinguer trois régimes de frottement visqueux.

1. À très basse vitesse ($v < 5$ m/s dans l'air), on considère le frottement visqueux comme laminaire

$$\vec{F}^{\text{vis}} = -k\eta\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du solide, η est le coefficient de viscosité dynamique du fluide et k est un coefficient de proportionnalité relié aux dimensions géométriques du solide.

Forces et mouvement linéaire

- Pour une boule dans un fluide, le facteur géométrique est donné par

$$k = 6\pi R$$

avec R le rayon de la boule (formule de Stokes).

- Pour une solide quelconque, on utilisera souvent un facteur géométrique identique à celui de la boule avec

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

c'est-à-dire le rayon qu'aurait une boule ayant un volume égal à celui du solide (V).

Forces et mouvement linéaire

Quelques valeurs de η, le coefficient de viscosité dynamique pour différents fluides à différentes températures

Fluide	0 C	20 C	40 C
air sec	0.017×10^{-3}	0.018×10^{-3}	0.019×10^{-3}
eau	1.8×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.7×10^{-3}
glycérine		1490×10^{-3}	

Comme on le voit η (en décapoise =N s m^{-2}=kg m^{-1} s^{-1}) dépends de la température (et en fait de la masse volumique du fluide).

Forces et mouvement linéaire

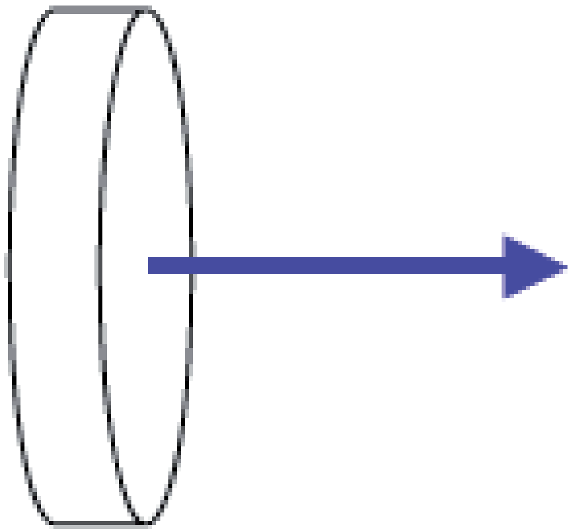
2. À vitesse intermédiaire ($5 < v < 20$ m/s dans l'air), on considère le frottement visqueux comme turbulent et $\vec{F}^{\text{vis}}$ prend la forme

$$\vec{F}^{\text{vis}} = -C_x \frac{\rho}{2} |\vec{v}| \vec{v} S$$

où ρ est la masse volumique du fluide, S est l'aire du solide perpendiculaire à la vitesse et C_x un coefficient de traînée caractéristique de la géométrie du solide.

Forces et mouvement linéaire

- Pour une boule $C_x \approx 0.45$
- Pour un disque se déplaçant suivant un axe parallèle au cylindre $C_x \approx 1.32$.



Forces et mouvement linéaire

On détermine le comportement laminaire ou turbulent d'un fluide quelconque en utilisant le nombre de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L |\vec{v}|}{\eta}$$

avec η est le coefficient de viscosité dynamique du fluide, ρ sa masse volumique, $\vec{v}$ la vitesse de déplacement du solide dans le fluide et L la longueur caractéristique du fluide.

- L'écoulement est laminaire si $\mathrm{Re} < 2300$.
- Sinon il est turbulent (en fait la transition au régime turbulent dépend de la géométrie et le régime turbulent s'établit souvent lorsque $\mathrm{Re} \gg 2300$).

Forces et mouvement linéaire

3. À très haute vitesse ($20 < v < v_s$ avec v_s la vitesse du son dans le fluide) on utilise

$$\vec{F}^{\text{vis}} = -K|\vec{v}|^{n-1}\vec{v}S$$

avec K une constante qui dépend du fluide et $n > 2$.

Forces et mouvement linéaire

Notez que si l'objet subit en plus un mouvement de rotation dans le fluide, les choses se compliquent un peu :

- Toutes les parties de l'objet n'ont pas la même vitesse par rapport au fluide et on utilisera généralement une force moyenne qui sera évaluée en utilisant

$$\vec{F}^{\mathrm{vis}}_{\mathrm{moyenne}} = \frac{1}{S}\int_S \vec{F}^{\mathrm{vis}}(\vec{r},\vec{v})\,ds$$

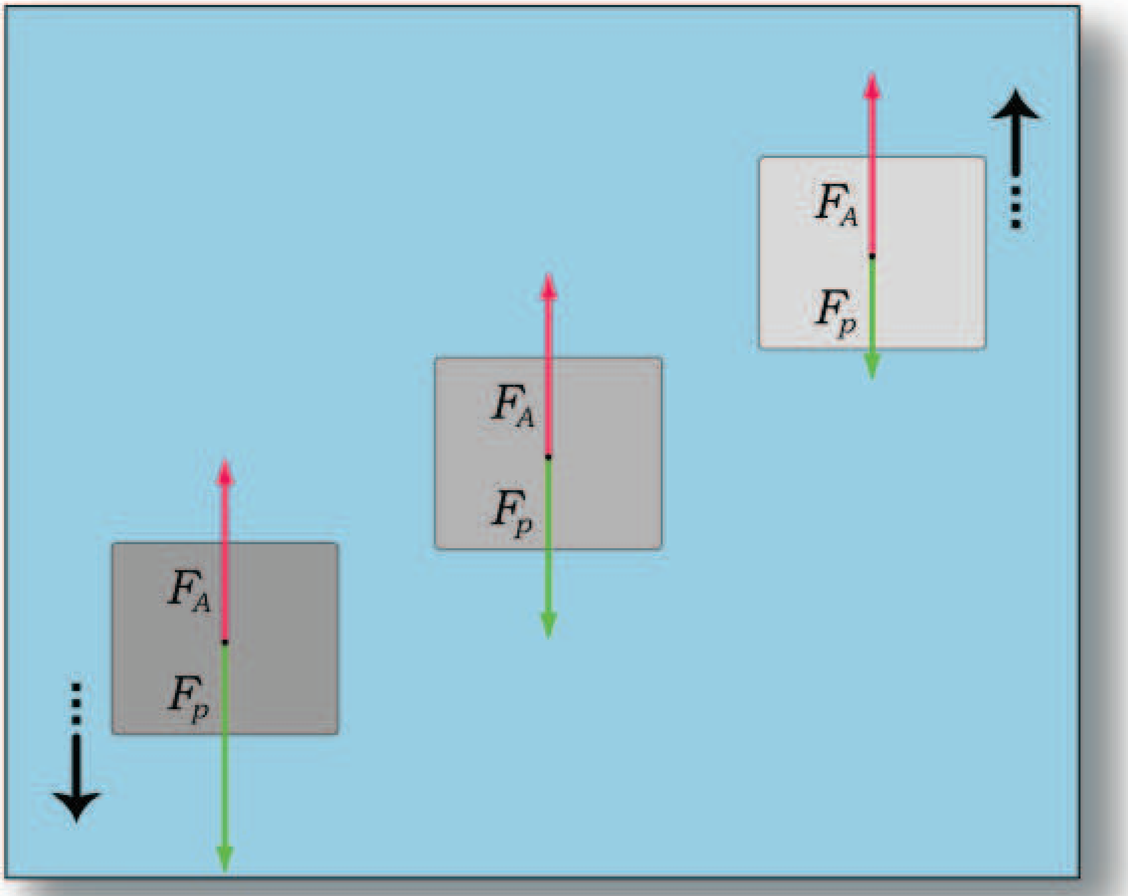
- La surface effective que l'objet expose au fluide (surface normale à la direction de déplacement) peut aussi varier en fonction du temps à cause du mouvement de rotation (sauf pour une sphère) ce qui affectera l'intensité de la force.
- Cette force produira aussi un moment de force qui fera en sorte de s'opposer au mouvement de rotation de l'objet (nous verrons ceci plus loin dans le chapitre).

Forces et mouvement linéaire

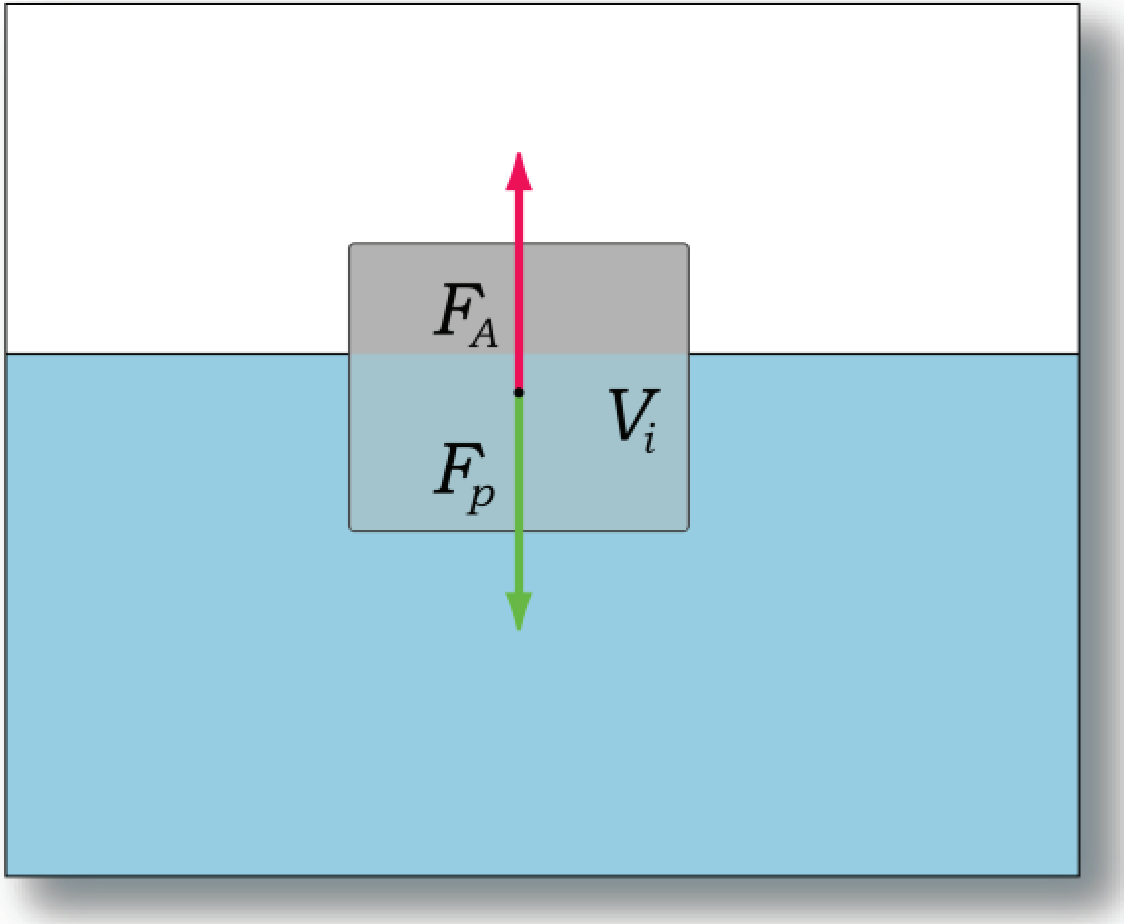
Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est une force qui s'exerce en présence du champ gravitationnel de la terre lorsqu'un solide est immergé dans un fluide. L'intensité de cette force dépend du volume de fluide déplacé par l'objet et de la masse volumique du fluide (sa densité). Elle résulte de la différence entre la pression exercée par le fluide situé au-dessus du solide et celle exercée par le fluide situé au-dessous de l'objet.

Forces et mouvement linéaire



Forces et mouvement linéaire



Forces et mouvement linéaire

La force exercée par la poussée d'Archimède prend une forme relativement simple lorsque le fluide à une densité ρ uniforme

$$\vec{F}^A = \left(0, 0, \rho g V_{\text{imm}}\right)^T = \rho g V_{\text{imm}} \hat{z}$$

où V_{imm} est le volume du fluide que le solide a déplacé et $\hat{z}$ est un vecteur unitaire dans la direction z. Elle est directement opposée à la force due au champ gravitationnel de la terre.

- Lorsque le solide est complètement immergé dans le fluide $V_{\text{imm}} = V$, le volume du solide. Dans ce cas, la force s'exerce sur le centre de masse du solide.
- Si le solide n'est pas totalement immergé, la force s'exerce sur le centre de masse de la partie immergée du solide.

Forces et mouvement linéaire

Notez que cette force s'applique aussi aux solides immergés dans l'air. Cependant, elle est généralement combinée directement avec la force gravitationnelle

$$\vec{F}^A + \vec{F}^G = \left(\rho_{\text{air}} V_{\text{solide}} g - \rho_{\text{solide}} V_{\text{solide}} g\right) \hat{z} = -\rho'_{\text{solide}} V_{\text{solide}} g \hat{z}$$

où on a corrigé la densité du solide en utilisant

$$\rho'_{\text{solide}} = \rho_{\text{solide}} - \rho_{\text{air}}$$

En fait comme $\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{solide}}$ on néglige souvent cet effet dans l'air en utilisant directement ρ_{solide}.

Pour le cas où la poussée d'Archimède dans l'air n'est pas négligeable (montgolfière), on devra la considérer explicitement.

Effet Magnus

L'effet Magnus est engendré lorsqu'un solide en rotation se déplace dans un fluide.

- Lorsqu'un solide se déplace dans l'air, il va, par frottement visqueux, modifier la vitesse du courant d'air qui l'entoure.
- Cette perturbation est proportionnelle à la vitesse du solide par rapport au fluide puisque la force de frottement visqueux est proportionnelle à cette vitesse.

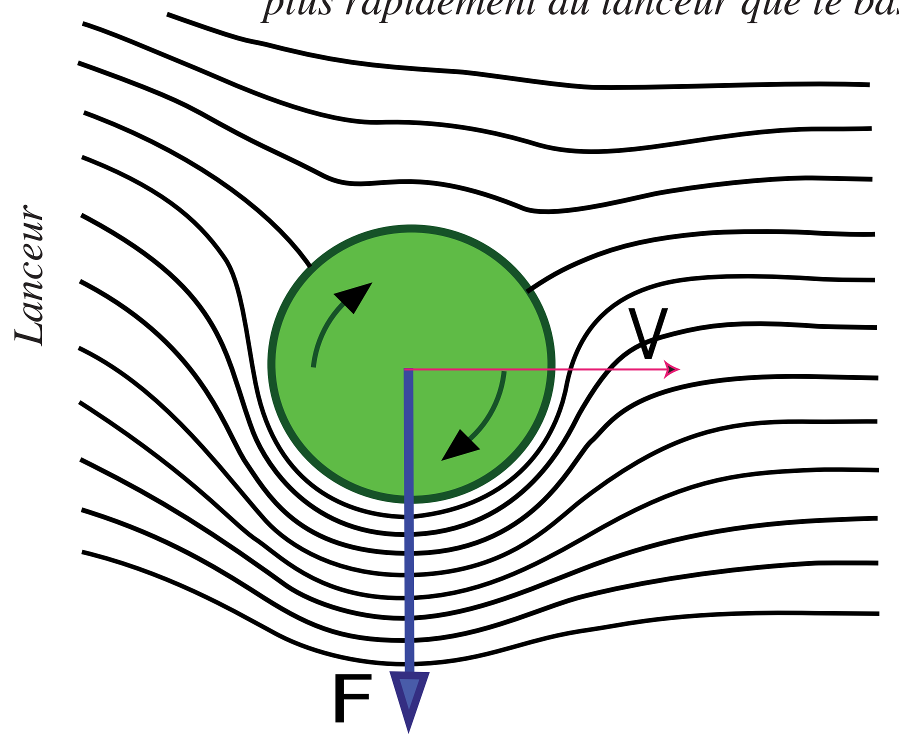
Forces et mouvement linéaire

- Pour un solide en rotation, l'effet devient dissymétrique puisque les perturbations dans la vitesse des courants d'air sont plus élevées pour les points de la surface du solide ayant une vitesse relative, par rapport au fluide, plus élevée que pour les points ayant une vitesse relative moins élevée.
- Cet effet est la conséquence du ralentissement (accélération) du fluide en contact avec l'objet dû au mouvement de rotation et qui s'oppose ou se combine au mouvement du fluide.

Voir : Football physics

Forces et mouvement linéaire

Balle avec "Top spin".
Le haut de la balle s'éloigne
plus rapidement du lanceur que le bas



La vitesse angulaire est négative
La force est vers le bas

L'air est accéléré au bas et ralenti au haut.

Forces et mouvement linéaire

Si on combine cette observation avec l'équation de Bernoulli on obtient l'effet Magnus. En gros, on peut dire que pour une rotation du haut vers l'avant (ou "Top spin" avec axe horizontal perpendiculaire au mouvement, comme une balle roulant sur le sol), la balle plongera plus vite vers le sol. Dans le sens contraire, elle sera soulevée et aura une trajectoire plus plate, elle volera plus loin avant de toucher le sol.

Forces et mouvement linéaire

- L'intensité de la force due à l'effet Magnus dépendra de la forme du solide, de sa vitesse de rotation angulaire et de sa vitesse linéaire, de ses dimensions et des propriétés du fluide (sa densité entre autres choses).
- La force de Magnus sera appliquée au centre de masse de l'objet et pointera dans la direction menant du point ou la vitesse relative entre le solide et le fluide est la plus élevée au point où la vitesse relative est la plus faible.

Forces et mouvement linéaire

- Pour un cylindre de rayon r et de longueur L se déplaçant en rotation (vitesse angulaire $\vec{\omega}$) à une vitesse $\vec{v}$ (vitesse du centre de masse) dans un fluide de densité ρ, elle prendra la forme

$$\vec{F}^M = 2\pi\rho L r^2(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

- Si le solide a une forme sphérique, on utilisera plutôt

$$\vec{F}^M = \pi\rho r^3(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

Forces et mouvement linéaire

Pour le cas général, on utilisera la relation

$$\vec{F}^M = \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 A C_M(|\vec{\omega}|r/2|\vec{v}|)\frac{(\vec{\omega}\times\vec{v})}{|(\vec{\omega}\times\vec{v})|}$$

où A est la surface efficace du solide (perpendiculaire à la direction de la force de Magnus) et C_M le coefficient de Magnus qui dépend du rapport de spin $\omega r/2v$ et des propriétés du fluide.

Forces et mouvement linéaire

Densité (masse volumique) de l'air à différentes températures.

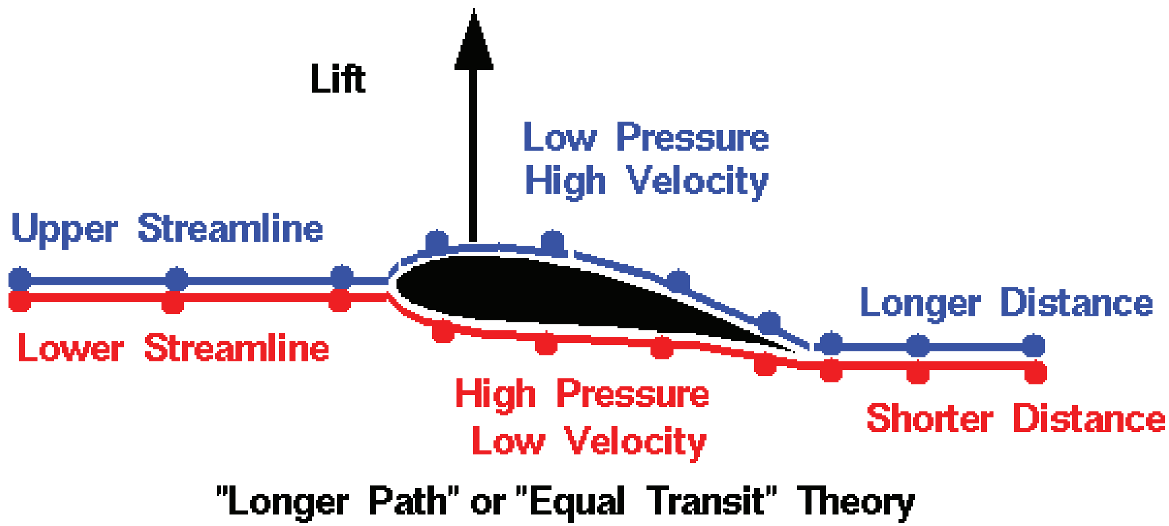
T (C)	ρ (kg/m^3)	T (C)	ρ (kg/m^3)
-10	1,341	40	1,127
0	1,293	50	1,092
10	1,247	60	1,060
20	1,204	70	1,029
30	1,164	80	1,000

Forces et mouvement linéaire

Portance

La portance est une force dont la source est l'effet Magnus. La différence majeure entre la portance et la force de Magnus est la source des différences de vitesse fluide-solide observée à différents points de la surface d'un solide. Pour l'effet Magnus, c'est le mouvement de rotation du solide qui est à la source des différences de vitesse. Pour la portance, la source est principalement de nature géométrique.

Forces et mouvement linéaire



Ici par "Low velocity", on veut dire que la différence de vitesse entre le fluide collé à l'aile et le fluide éloigné de l'aile est faible (et vice versa pour "High velocity" et différence de vitesse élevée).

Forces et mouvement linéaire

C'est la position et la forme asymétrique du solide se déplaçant dans le fluide qui causera les différences dans la vitesse fluide/solide a différents points sur la surface du solide. La forme générale de cette force est

$$|\vec{F}^P| = \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 AC_P$$

avec C_P le coefficient de portance qui dépend de la géométrie du solide, de son orientation et de la viscosité du fluide. Ces coefficients sont en général évalués de façon expérimentale. La direction de la force est beaucoup plus difficile à déterminer, car elle dépend de $\vec{v}$ et de la forme du solide.

Forces et mouvement linéaire

Autres situations où le mouvement de rotation a un impact sur le mouvement linéaire

- La force de frottement n'est pas uniforme pour le solide (force de frottement sec ou visqueux).
- Pour un solide en rotation, la direction de la force de frottement est dans la direction de la vitesse linéaire du solide au point de contact avec la surface qui est une combinaison de la vitesse linéaire due à la rotation et de celle du centre de masse. Ceci peut faire en sorte que la force de frottement change la direction de déplacement du centre de masse.

Forces et mouvement linéaire

Exemples :

- Un cylindre (verre) poussé en ligne droite avec un mouvement de rotation sur une surface plane (Téflon) se déplacera suivant une trajectoire curviligne.
- Ceci est dû au fait que le cylindre aura tendance à se déporter vers l'avant à cause de la force de frottement (normale du poids à la surface plus grande à l'avant).
- La force de frottement normale au mouvement du centre de masse à l'avant du cylindre sera alors supérieure à celle à l'arrière du cylindre donnant naissance à une accélération perpendiculaire à la vitesse de déplacement du centre de masse.

Forces et mouvement linéaire

- Pour la pierre au curling, la direction de la force est inversée.
- Ici, le fait que la pierre ait tendance à se déporter vers l'avant à cause de la force de frottement réduit le frottement à l'avant (même si la normale du poids à la surface est plus élevée).
- La raison est que la force plus grande vers l'avant fait fondre plus de glace et réduit considérablement le coefficient de frottement.
- Les coups de balai auront aussi un impact sur le frottement (réduction du coefficient de frottement) car la température de la glace sera plus élevée (fonte plus facile).

Voir : Curling

Simulation d'une pierre au curling

- La pierre peut être considérée comme étant un cylindre plein de masse $m = 19.96$ kg, de rayon $R \approx 14$ cm et de hauteur $h = 11.43$ cm. Son moment d'inertie autour de l'axe du cylindre est donné par $I = mR^2/2$.
- À cause de sa forme (arrondie en périphérie et creusée en son centre), sa surface de contact avec la glace correspond à un cylindre vide de rayon $r = 6.25$ cm et d'une épaisseur d'environ 0.4 cm.

Forces et mouvement linéaire

- Elle se déplace dans le plan $x - y$, la position et la vitesse de son centre de masse sont

$$\vec{r}_c(t) = (x(t), y(t), h/2)^T$$
$$\vec{v}_c(t) = (v_x(t), v_y(t), 0)^T = |v_c(t)|\vec{u}_c$$

- Sa vitesse angulaire est

$$\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))^T = \omega(t)\vec{u}_z$$

Forces et mouvement linéaire

Le coefficient de frottement cinétique entre la pierre et la glace

- En tout point du cylindre où il y a contact pierre-glace, on aura

  $$\mu(T,\theta) = \mu_0(T)\left(1 - f_0 \sin\theta\right)$$

  avec T est la température de la glace et θ l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}_\perp(t) = |\vec{v}_\perp(t)|\vec{u}_\perp$ et un point sur le cylindre de rayon r. Ici $\vec{u}_\perp$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_c$ et $\vec{u}_z$

  $$\vec{u}_\perp = (\vec{u}_c \times \vec{u}_z)$$

Forces et mouvement linéaire

- La force de frottement dépendra donc de l'angle θ et on aura

$$\vec{F}(T) = F_{\perp}(T)\vec{u}_{\perp} + F_c(T)\vec{u}_c$$

avec

$$F_{\perp}(T) = -\frac{\mu_0(T) f_0 Mg}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) \left(\sin[G(\theta,\omega,r,v)] + \sin[H(\theta,\omega,r,v)]\right)$$

$$F_c(T) = -\frac{\mu_0(T) Mg}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\cos[G(\theta,\omega,r,v)] + \cos[H(\theta,\omega,r,v)]\right)$$

où

$$G(\theta,\omega,r,v) = \arctan\left(\frac{r\omega\sin\theta}{v + r\omega\sin\theta}\right)$$

$$H(\theta,\omega,r,v) = \arctan\left(\frac{r\omega\sin\theta}{v - r\omega\sin\theta}\right)$$

Forces et mouvement linéaire

- Le moment de force $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ peut être obtenu de la même façon et on peut écrire

$$\vec{\tau}(T) = \tau \vec{u}_z$$

avec

$$\tau = -\frac{r\mu_0(T)Mg}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\cos[\theta - G(\theta, \omega, r, v)] - \cos[\theta + H(\theta, \omega, r, v)]\right)$$

Forces et mouvement linéaire

- On peut simplifier ces forces et ce moment de force en utilisant

$$F_\perp(T) = -\frac{\mu_0(T) f_0 M g r \omega(t)}{2v(t)}$$

$$F_c(T) = -\mu_0(T) M g$$

$$\tau = -\frac{\mu_0(T) M g r^2 \omega(t)}{2v(t)}$$

Forces et mouvement linéaire

- Le coefficient de frottement diminue légèrement avec la température (décroissance linéaire)

$$\mu_0 \approx 0.0124(1 - k(T + 5))$$

  avec $k \approx 0.01$.
- Le facteur f_0 représente la différence relative entre la force sur la surface à l'avant et à l'arrière de la pierre en contact avec la glace

$$f_0 \approx 0.05$$

Forces et mouvement linéaire

Notez que l'explication théorique du comportement physique de la pierre de curling fait encore l'objet d'âpres discussions (lire les articles suivants par exemple)

1. M.R.A. Shegelski et M. Reid, Can. J. Phys. 77, 847 (1999).
2. M.R.A. Shegelski, Can. J. Phys. 78, 857 (2000).
3. M.R.A. Shegelski, Can. J. Phys. 79, 841 (2001).
4. M.R.A. Shegelski et R. Holenstein, Can. J. Phys. 80, 141 (2002).
5. E.T. Jensen et M.R.A. Shegelski, Can. J. Phys. 82, 791 (2004).

Moments de force et mouvement de rotation

Pour les solides, en plus de considérer les forces qui agissent uniformément sur l'objet (donc s'appliquent sur le centre de masse) et affectent son mouvement linéaire, certaines forces donneront aussi naissance à un moment de force qui affectera le mouvement de rotation de l'objet autour de son centre de masse (voir pierre au curling). On a déjà vu la relation entre le moment angulaire $\vec{L}$ et le moment de force $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

avec

$$\vec{L}(t) = \mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

Moments de force et mouvement de rotation

L'accélération angulaire est alors donnée par

$$\vec{\alpha} = \boldsymbol{I}^{-1}\left(\vec{\tau} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{I}\vec{\omega}\right)$$

Pour des objets symmétriques en x, y et z (cubes et sphères) le moment d'inertie est proportionnel à la matrice identité ($\boldsymbol{I} = I\mathbf{1}$) et

$$\vec{\alpha}(t) = I^{-1}\vec{\tau}(t) - \vec{\omega} \times \vec{\omega} = I^{-1}\vec{\tau}(t)$$

Ceci est aussi vrai si $\vec{\omega}$ et $\boldsymbol{I}\vec{\omega}$ sont parallèles ou si $\vec{\omega} = 0$.

Moments de force et mouvement de rotation

Le moment de force $\vec{\tau}$ résultant d'une force $\vec{F}$ appliquée au point $\vec{r}_F$ situé dans ou sur le solide est donné par

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F} = \vec{r}_{c,F} \times \vec{F}$$

avec $\vec{r}_c$ le vecteur donnant la position du centre de masse du solide et $\vec{r}_{c,F}$ le point d'application de la force par rapport au centre de masse. Ces relations nous permettent donc de trouver facilement l'accélération angulaire de l'objet autour de son centre de masse lorsque la force et la vitesse angulaire de l'objet sont connues.

Moments de force et mouvement de rotation

Champs de force gravitationnel et rotation

- Comme la force gravitationnelle est appliquée uniformément à tous les points du solide, elle ne produit aucun moment de force net par rapport au centre de masse du solide. On aura donc

$$\vec{\tau}^{\,G}_{1,2} = \vec{\tau}^{\,G}_{2,1} = 0$$

Champs de force électromagnétique et rotation

- Ici, tout dépendra de la distribution de charge dans le solide. Si le centre de masse et le centre de charge coïncident, la force électromagnétique ne produira aucun moment de force net par rapport au centre de masse du solide (les moments de force électromagnétique s'annulent).

Ressort et rotation

Pour les ressorts (et les amortisseurs), on supposera que la force est appliquée au point de contact $\vec{r}_F$ entre le ressort (amortisseur) et le solide dans la direction de compression du ressort (amortisseur).

$$\vec{\tau}^{\,r} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{\,r}$$
$$\vec{\tau}^{\,a} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{\,a}$$

Moments de force et mouvement de rotation

Si $(\vec{r}_F - \vec{r}_c)$ est parallèle à $\vec{F}^{r/a}$, on aura

$$\vec{\tau}^{\,r} = 0$$
$$\vec{\tau}^{\,a} = 0$$

Cette situation est parfois utile pour les collisions face à face entre des solides où on suppose que la force d'interaction est représentée par une combinaison de ressorts et d'amortisseurs, les forces (action et réaction) étant alors dirigées selon l'axe de l'amortisseur ou du ressort et appliquées au point de contact entre les solides.

Frottement et rotation

Le frottement sec donnera naissance à un moment de force, car il s'applique à l'interface entre le solide et le plan sur lequel il se déplace. Ce moment de force par rapport au centre de masse du solide s'écrira

$$\vec{\tau}_c^{\,f} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^f(\vec{r})$$

Ici, $\vec{r}_F$ corresponds au point où la force de frottement sec est appliquée.

Moments de force et mouvement de rotation

Si on est en présence d'une force distribuée uniformément sur une surface S d'aire A, on utilisera

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_c^f &= \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times d\vec{F}^f \\ &= \int_S \left[(\vec{r} - \vec{r}_c) \times \frac{\vec{F}^f}{|\vec{F}^f|} \right] \mu p d^2 r\end{aligned}$$

avec p la pression exercée par la composante normale du poids N. La pression est donnée par

$$p = N/A$$

pour un solide plan d'aire A reposant sur une surface plane (pression uniforme).

Moments de force et mouvement de rotation

Le frottement visqueux ne s'applique pas de façon uniforme sur un solide en rotation, même s'il est uniforme (une boule lisse par exemple). Il ne contribue pas au moment de force si le solide est complètement immergé dans le fluide et ne subit aucun mouvement de rotation et

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = 0$$

Pour un solide qui n'est pas uniforme (un ballon de rugby lancé en diagonal ou un solide en rotation), le moment de force ne sera pas uniforme et sera donné par

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\text{vis}}(\vec{r}) d^2 r$$

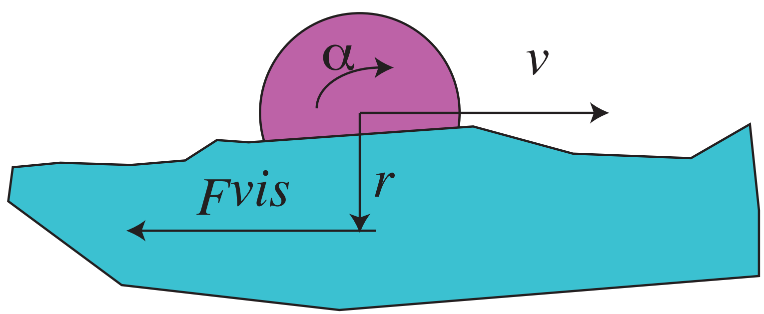
avec $\vec{p}^{\text{vis}}$ la pression qu'exerce la force visqueuse à chaque point de la surface.

Moments de force et mouvement de rotation

Si un solide n'est que partiellement immergé dans un fluide, la partie du solide à l'extérieur du fluide ne subit pas la même force de frottement visqueuse que la partie hors du fluide. On pourra donc écrire

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_{S_{\text{fluide}}} (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\text{vis}}_{\text{fluide}} d^2 r + \int_{S_{\text{air}}} (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\text{vis}}_{\text{air}} d^2 r$$

Et on négligera souvent la contribution de l'air.
Moment de force visqueux



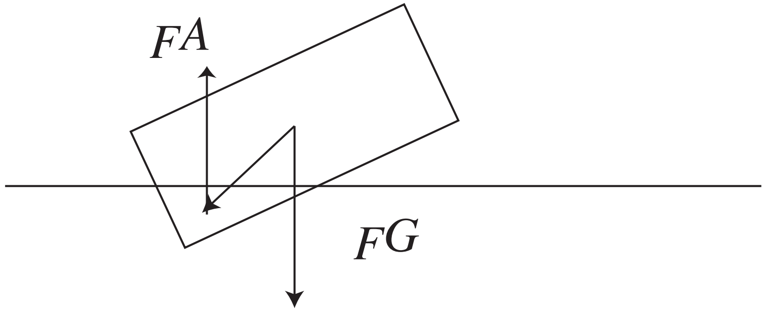
Moments de force et mouvement de rotation

Poussée d'Archimède et rotation

- La poussée d'Archimède est reliée directement à la gravité et ne génère aucun moment de force net autour du centre de masse pour un solide complètement immergé dans un liquide.
- Si le solide est partiellement immergé, un moment de force peut être généré.

Moments de force et mouvement de rotation

$$\vec{\tau}^{a} = (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{A}$$



La position du point $\vec{r}$ correspond ici à la position du centre de masse de la partie immergée de l'objet.

Moments de force et mouvement de rotation

Effet Magnus et rotation

- Pour un solide uniforme, la force générée par l'effet Magnus sera en général appliquée uniformément sur le solide et ne produira pas de moment de force net.
- Pour un solide non uniforme, la direction et l'intensité de l'effet Magnus changera en chaque point du solide (la direction étant proportionnelle à la vitesse relative du solide et du fluide à chaque point dans l'espace) et celui-ci peut produire un moment de force.

Moments de force et mouvement de rotation

Portance

Comme la portance est proportionnelle à la vitesse relative du solide et du fluide, qui varie d'un point à l'autre de la surface du solide, elle engendre généralement un moment de force.

Roulement et glissement

Dans le cas d'un objet sphérique ou cylindrique en contact avec une surface :

- l'objet peut glisser sur la surface avec une vitesse $\vec{v}_{\text{glissement}}$;
- l'objet peut aussi glisser et rouler sur la surface avec une vitesse $\vec{v}_{\text{glissement}}$ de déplacement linéaire et une vitesse $\vec{\omega}$ de rotation.

Roulement et glissement

La force de frottement est donnée par

$$\vec{F}^f = -\mu_c N \frac{\vec{v}_{\text{glissement}}}{|\vec{v}_{\text{glissement}}|}$$

Cette force de frottement engendre aussi un moment de force donné par

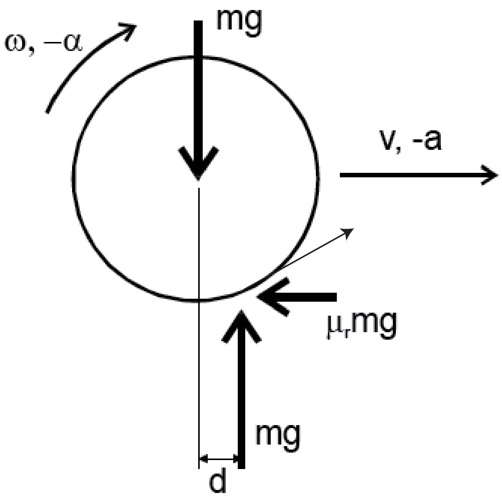
$$\vec{\tau}^f = (\vec{r}_p - \vec{r}_c) \times \vec{F}^f$$

avec $\vec{r}_p$ la position du point de contact entre l'objet qui roule et la surface sur laquelle il roule (ici nous supposerons que c'est d'une sphère dont il s'agit).

Roulement et glissement

Moment de force pour le roulement

- L'objet qui roule sur la surface avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ subit aussi un moment de force dû au roulement

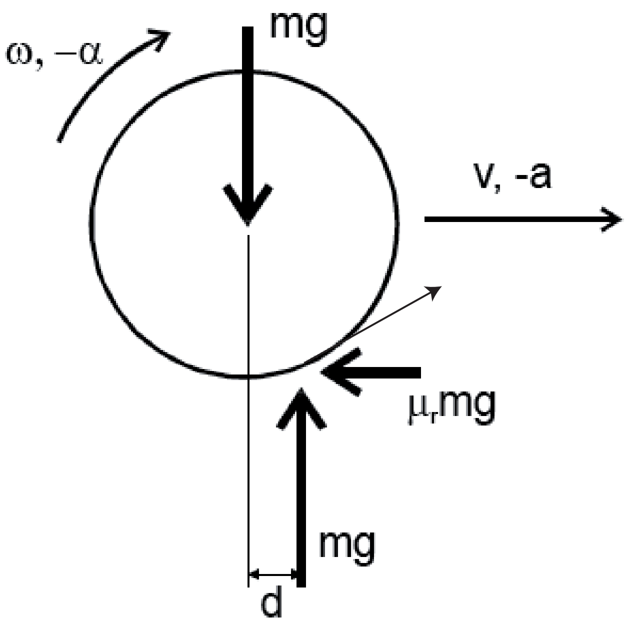


Roulement et glissement

- La force de répulsion qu'exerce le plan sur la boule $-\vec{P}$ à un point situé à l'avant de la boule (position $\vec{r}_r$).

$$\vec{F}^{\text{roulement}} = -\vec{P}$$

$$\tau_r^{\text{roulement}} = \vec{r}_r \times \vec{F}^{\text{roulement}}$$



Roulement et glissement

- Pour une boule sur le tapis d'un billard $d \approx 0.06$ cm et le coefficient de frottement au glissement lors du roulement est $\mu_g \approx 0.01$.
- Si on suppose que la boule a un rayon $R = 2.85$ cm alors le moment de force qui s'oppose au roulement sera donné par

$$\begin{aligned}\tau_r &= \tau_r^{\text{roulement}} + \tau_r^{\text{glissement}} \\ &= \vec{r}_{d,c} \times \vec{F}^{\text{roulement}} - \vec{r}_{b,c} \times \vec{F}^{f}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\vec{r}_{d,c} &= (d, 0, -\sqrt{R^2 - d^2})^T \\ \vec{r}_{b,c} &= (0, 0, -R)^T\end{aligned}$$

Roulement et glissement

Dans la majorité des cas on simplifiera cette relation en utilisant

$$\tau_r = -\mu_r R m g \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

C'est-à-dire que le moment de force s'oppose au mouvement de rotation avec une intensité proportionnelle au rayon de la boule R et au coefficient de frottement à la rotation qui est donnée par

$$\mu_r = \frac{d}{R} - \mu_g$$

Ceci est valide seulement pour une sphère que roule dans la même direction qu'elle glisse.

Roulement et glissement

Roulement et glissement ou roulement seulement

- Un objet qui roulerait sur la surface (sans glisser) avec une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ produirait une vitesse de déplacement linéaire du centre de masse résultant du roulement donnée par

$$\vec{v}_r = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{p,c}$$

Dès que la vitesse de déplacement du centre de masse de la boule $\vec{v}_c$ est différente de $\vec{v}_r$, l'objet glisse.

Roulement et glissement

Donc

- Si la vitesse du centre de masse du solide qui glisse est $\vec{v}_c$ et que la vitesse vitesse linéaire que le centre de masse aurait due au mouvement de rotation angulaire $\vec{v}_r$ si la boule me glissait pas sont égales alors le glissement cessera. La vitesse du solide lorsque le glissement cesse devient alors $\vec{v}_r$ (il continue à avancer dans la même direction).

Roulement et glissement

- Si la vitesse du centre de masse du solide qui glisse est $\vec{v}_c$ et que la vitesse vitesse linéaire que le centre de masse aurait due au mouvement de rotation angulaire $\vec{v}_r$ si la boule me glissait ont des directions opposées alors le glissement cessera lorsque

$$\vec{v}_c = 0$$

La vitesse du solide lorsque le glissement cesse devient toujours $\vec{v}_r$ (il se déplace maintenant dans une direction opposée à sa direction originale).

Application à la boule de billard

- La boule a une masse m et un rayon R_b.
- Elle se déplace dans le plan $x - y$.
- Son centre de masse est identifié par

$$\vec{r}_c(t) = (x(t), y(t), r)^T$$

- La vitesse du centre de masse est

$$\vec{v}_c(t) = (v_x(t), 0, 0)^T$$

Roulement et glissement

- La vitesse de rotation autour du centre de masse est

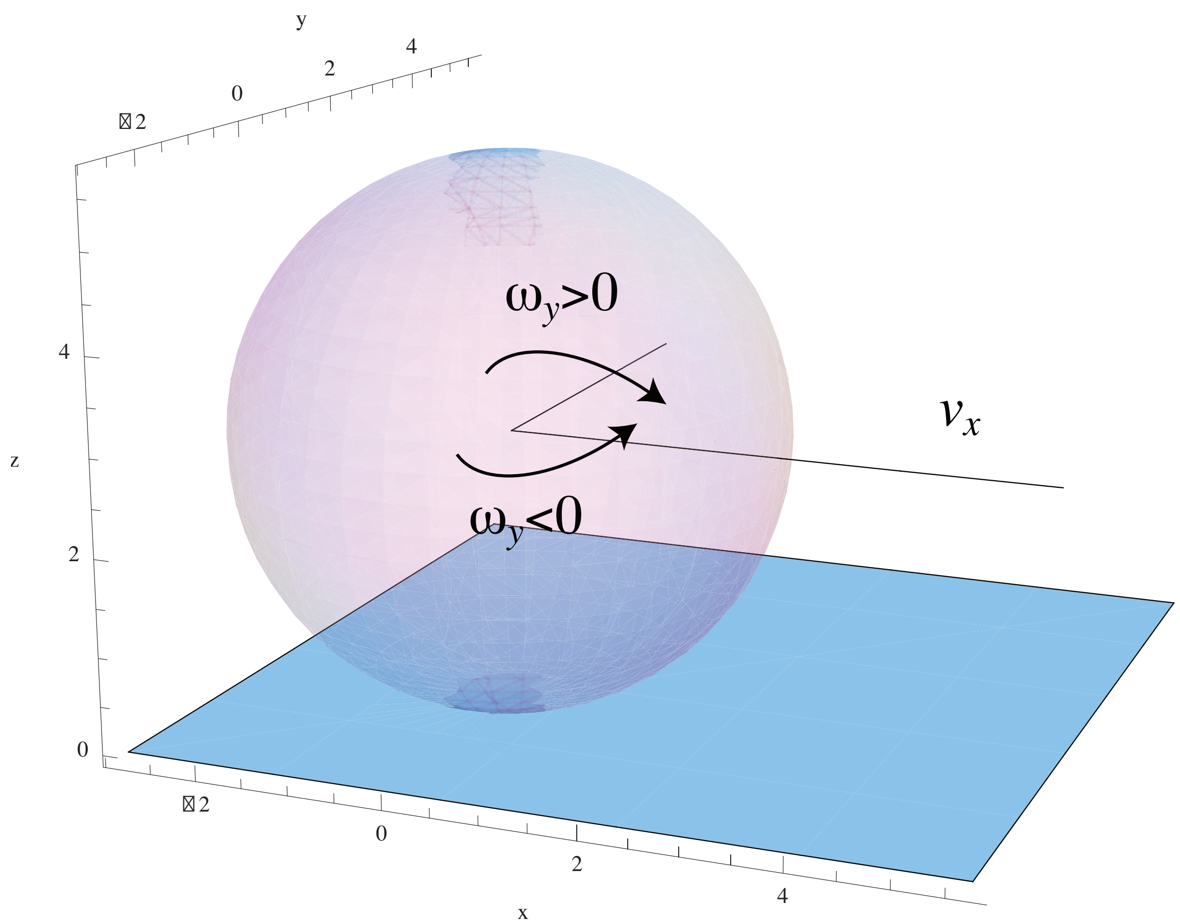
$$\vec{\omega}_c(t) = (0, \omega_y(t), 0)^T$$

- La position angulaire d'un point p sur la boule est

$$\vec{\Omega}_{c,p}(t) = (\Omega_{x,p}, \Omega_{y,p}(t), \Omega_{z,p})^T$$

  (aucune rotation autour de l'axe des x et des z).
- Les conditions initiales sont $\vec{r}_c(t_0)$, $\vec{v}_c(t_0)$, $\vec{\omega}_c(t_0)$ et $\vec{\Omega}_{c,p}(t_0)$.

Roulement et glissement



Roulement et glissement

- Les équations du mouvement à résoudre sont

$$\vec{a}_c = d\vec{v}_c(t)/dt$$
$$\vec{v}_c(t) = d\vec{r}_c(t)/dt$$
$$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}_c(t)/dt$$
$$\vec{\omega}_c = d\vec{\Omega}_{c,p}(t)/dt$$

avec (pour une sphère le terme provenant de $d\boldsymbol{I}/dt = 0$)

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_c}{m}$$
$$\vec{\alpha}_c = (\mathbf{I})^{-1}\vec{\tau}_c$$

Roulement et glissement

Transition glissement-roulement à roulement uniquement

Deux options sont possibles :

- $|\vec{v}_c(t_r)| = 0$, la vitesse du centre de masse de la boule résultant de son déplacement linéaire est nulle ;
- $|\vec{v}_c(t_r) - \vec{v}_r(t_r)| = 0$, la vitesse relative entre la boule et le plan est nulle.

À ce moment, la boule commence à rouler sans glisser. La vitesse du déplacement de son centre de masse est alors donnée par $\vec{v}_r(t_r)$.

Procédure de simulation

Tant que la boule glisse, on doit résoudre les équations du mouvement en utilisant

1. l'accélération linéaire qu'elle subit est due à la force de frottement sec (coefficient de frottement cinétique μ_c) donnée par

$$\vec{a}_c = -\frac{\mu_c N \vec{v}_c(t_r)}{m|\vec{v}_c(t_r)|}$$

où N est la composante normale à la surface du poids (mg pour une surface horizontale) ;

Roulement et glissement

2. l'accélération angulaire qu'elle subit est due au moment de la force de frottement sec (coefficient de frottement cinétique μ_c) appliqué au point $\vec{r}_{c,p}(t)$

$$\vec{\alpha}_c = -\frac{5}{2mr^2}\frac{\mu_c N\left(\vec{r}_{c,p}(t)\times\vec{v}_c(t_r)\right)}{|\vec{v}_c(t_r)|}$$

car

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{5}{2mr^2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Roulement et glissement

- Si on décide de résoudre les équations du mouvement en utilisant une méthode de numérique, on choisira un intervalle de temps Δt suffisamment court pour obtenir une bonne précision.
- On déterminera donc successivement la solution à

$$t_i = t_0 + i\Delta t = t_{i-1} + \Delta t$$

Roulement et glissement

Fin du glissement

- À chaque intervalle de temps, on évaluera les deux paramètres suivants

$$b_1(t_i) = \vec{u} \cdot \vec{v}_c(t_i)$$
$$b_2(t_i) = \vec{u} \cdot (\vec{v}_c(t_i) - \vec{v}_r(t_i))$$

avec

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_{c,b}(t_{i-1})}{|\vec{v}_{c,b}(t_{i-1})|}$$

Roulement et glissement

- $b_1(t_i)$ nous indique si la vitesse du centre de masse a changé de direction entre t_{i-1} et t_i.
- $b_2(t_i)$ nous indique si la vitesse relative entre le point de contact de la boule sur le plan et le plan a changé de direction entre t_{i-1} et t_i.

Roulement et glissement

Si $b_1(t_i) < 0$, la vitesse du centre de masse à changé de direction entre t_{i-1} et t_i.

- Elle s'est donc arrêtée à un temps $t_{i-1} < t_a < t_i$. On doit donc reprendre la dernière simulation de t_{i-1} à t_i en utilisant des pas de temps plus courts pour obtenir le plus précisément possible le temps de l'arrêt.
- On reprend ensuite les simulations en supposant que la boule roule uniquement (la direction de la boule s'est inversée).

Roulement et glissement

Si $b_1(t_i) > 0$ et $b_2(t_i) < 0$, la vitesse de déplacement de centre de masse par glissement est plus faible que la vitesse de déplacement du centre de masse par roulement.

- Comme c'est impossible, la boule doit avoir cessé de rouler au temps $t_{i-1} < t_a < t_i$.
- On doit donc reprendre la dernière simulation de t_{i-1} à t_i en utilisant des pas de temps plus courts pour obtenir le plus précisément possible le temps où $b_2(t_a) = 0$
- On reprend ensuite les simulations en supposant que la boule roule uniquement (la direction de la boule s'est inversée).

Roulement et glissement

Si $b_1(t_i) > 0$ et $b_2(t_i) > 0$ la boule continue à glisser.

- On sauve l'information associée à ce temps.
- On résout les équations du mouvement avec glissement pour le prochain intervalle de temps.

Roulement et glissement

Roulement uniquement

- À partir de temps t_a la boule ne fait que rouler. Le déplacement de son centre de masse sera alors contrôlé exclusivement par son mouvement de rotation.

$$\vec{v}_r = -\vec{\omega}_c(t) \times \vec{r}_{c,p}(t)$$

Roulement et glissement

- L'accélération angulaire, quant à elle, est due au moment de la force de frottement qui s'oppose au roulement sur une surface horizontale

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= -\mathbf{I}^{-1}\mu_r r m g \frac{\vec{\omega}_c}{|\vec{\omega}_c|} \\ &= -\frac{5\mu_r g}{2r}\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\end{aligned}$$

Ici, la force de frottement ne contribue pas au moment de force car il n'y a aucun glissement.

Roulement et glissement

- On doit alors résoudre simultanément

$$d\vec{\omega}_c(t)/dt = \vec{\alpha}$$
$$d\vec{\Omega}_{c,p}(t)/dt = \vec{\omega}_c$$

- On débutera la simulation à t_a.

Conclusion

Dans le prochain chapitre nous étudierons la dynamique des collisions incluant

1. Dynamique des collisions
2. Méthode des forces
3. Méthode des conditions initiales
4. Détection des collisions