POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 2 — Dynamique des solides

G. Marleau

Automne 2016

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Table des matières

Objets ponctuels et étendus

Les objets ponctuels (les électrons par exemple) ont leur masse concentrée en un point, leurs dimensions étant infinitésimales.

- Les lois de la mécanique newtonienne (classique) s'appliquent à ces particules lorsqu'on les observe à un niveau macroscopique.
- À l'échelle microscopique, ce sont plutôt les lois de la mécanique quantique qui s'appliquent.

Ici, nous utiliserons uniquement la mécanique classique pour déterminer la trajectoire des particules ou des solides, car nous étudierons seulement des systèmes macroscopiques. Cependant, nous utiliserons parfois des concepts de mécanique quantique pour expliquer certains phénomènes (le frottement, par exemple).

Objets ponctuels et étendus

Un objet ponctuel p est caractérisé par :

- sa masse m_p, sa charge électrique e_p et toute autre propriété intrinsèque qui lui est associée ;
- sa position $\vec{r}_p(t)$ en trois dimensions qui peut dépendre du temps t

$$\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))^T$$

- sa vitesse de déplacement $\vec{v}_p(t)$ en trois dimensions qui peut aussi dépendre du temps t

$$\vec{v}_p(t) = \begin{pmatrix} v_{p,x}(t) \\ v_{p,y}(t) \\ v_{p,z}(t) \end{pmatrix} = (v_{p,x}(t), v_{p,y}(t), v_{p,z}(t))^T$$

Objets ponctuels et étendus

La majorité des objets solides dans le monde macroscopique où nous vivons ont une extension finie (solides de volume V).

- Ces objets sont composés d'un grand nombre de particules élémentaires ($> 10^{20}$) soudées entre elles par des forces qui s'exercent au niveau microscopique.
- Ces forces donnent une certaine rigidité à l'objet de telle sorte que l'application d'une force extérieure à n'importe quel point de l'objet produit un effet qui se transmet immédiatement à tout l'objet (à toutes ses composantes).

Objets ponctuels et étendus

Les objets solides correspondent à :

- des distributions de masse $\rho(\vec{r})$ (en kg/m^3) en tout point de l'espace ;
- la région de l'espace $\mathcal{V}(t)$ qu'ils occupent ;
- le taux $d\mathcal{V}(t)/dt$ de changement de cet espace dans le temps.

Le volume V (m^3) et la masse m (kg) de ce solide sont donnés par

$$V = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3r = \int_{\mathcal{V}} dxdydz$$

$$m = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\vec{r})d^3r = \int_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)dxdydz$$

et sont indépendants du temps.

Objets ponctuels et étendus

On peut caractériser $\mathcal{V}(t)$ et $d\mathcal{V}(t)/dt$ de la façon suivante.

- On détermine $\vec{r}_i(t)$ la position d'un point i du solide et $\mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\}$ un ensemble qui représente la position de tous les points du solide par rapport à la position de i.
- On détermine $\vec{v}_i(t)$ la vitesse d'un point i du solide et $d\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t)\}$ un ensemble qui représente la vitesse relative de tous les points du solide par rapport à i.

Objets ponctuels et étendus

Quelques observations.

- Si un objet se déplace à une vitesse $\vec{v}(t)$ dans l'espace sans mouvement de rotation, alors $\mathcal{V}(t)$, la région de l'espace qu'occupe l'objet dépendra du temps. Cependant, le volume, la forme et la configuration spatiale de l'objet demeureront constants, ce qui veut dire que chacune des particules le composant se déplace à la même vitesse $\vec{v}(t)$.
- De la même façon, si on applique à l'objet une force externe $\vec{F}(\vec{r}, t)$ ne lui donnant aucun mouvement de rotation, cette force communiquera à toutes les particules qui composent l'objet la même accélération (forme et configuration spatiale de l'objet ne varient pas sous l'action de la force).

Donc, si l'on connaît la trajectoire d'une particule qui compose l'objet dans l'espace, on peut générer automatiquement la trajectoire des autres particules qui composent cet objet.

Objets ponctuels et étendus

Ainsi, si le solide ne subit pas de rotation on peut simplifier notre description en utilisant :

- $\mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\} = \{\vec{r}_j(t_0) - \vec{r}_i(t_0)\} = \{\vec{r}_{j,i}(t_0)\}$, la position relative de tous les points du système est indépendante du temps (temps initial t_0).
- $d\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t)\} = 0$, la vitesse relative entre les points du système est nulle (c'est un solide après tout).

Alors la position $\vec{r}_s(t)$ et la vitesse $\vec{v}_s(t)$ d'un point arbitraire du solide ainsi que $\mathcal{V}(t_0)$ la forme initiale du solide sont suffisantes pour suivre complètement le solide dans l'espace en fonction du temps.

Objets ponctuels et étendus

La question qui se pose alors est :

> Quel point ou quelle particule de l'objet est-il préférable de suivre ?

En mécanique newtonienne, on choisit le centre de masse $\vec{r}_c(t)$ qui est le point sur lequel une force agissant sur l'objet ne provoquera aucun mouvement de rotation.

Objets ponctuels et étendus

Comment fait-on pour prendre en compte le mouvement de rotation d'un objet?

Pour un objet en rotation (vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ en rad/s) autour de son centre de masse qui se déplace à une vitesse (linéaire) $\vec{v}$.

- La configuration spatiale de l'objet changera avec le temps (pas sa forme).
- Les particules composant l'objet se déplaceront à des vitesses qui correspondent à une combinaison de la vitesse linéaire du centre de masse et de la vitesse linéaire du point résultant de son mouvement de rotation.

Si l'on connaît la trajectoire du centre de masse de l'objet et la trajectoire angulaire d'un point de l'objet autour du centre de masse, on peut encore générer automatiquement la trajectoire des autres particules composant cet objet.

Objets ponctuels et étendus

Si le solide est en rotation, on peut utiliser :

- La position relative de tous les points du système est dépendante du temps et reliée à leur position initiale $\vec{r}_{j,c}(t_0)$ par une matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t, t_0)$ unique :

$$\mathcal{V}(t) = \left\{\vec{r}_{j,c}(t)\right\} = \left\{\boldsymbol{R}(t, t_0)\vec{r}_{j,c}(t_0)\right\}$$

- Si on prend un système de coordonnées locales au solide (le solide est immobile par rapport à ce système), alors la matrice $\boldsymbol{R}(t, t_0)$ nous indique comment ce système local de coordonnées a évolué dans le temps par rapport à un système de coordonnées qui est immobile (un système global).

Objets ponctuels et étendus

- On aura aussi

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{V}(t)/dt &= \left\{\vec{v}_j(t) - \vec{v}_c(t)\right\} = \left\{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,c}(t)\right\} \\
&= \left\{\vec{\omega}(t) \times \left(\boldsymbol{R}(t,t_0)\vec{r}_{j,c}(t_0)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

  avec $\vec{\omega}(t)$ la vitesse angulaire du solide dans le système immobile (global).
- Ainsi, la position et la vitesse de tout point du solide en rotation et en translation seront données par:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_j(t) &= \vec{r}_c(t) + \left(\boldsymbol{R}(t,t_0)\vec{r}_{j,c}(t_0)\right) \\
\vec{v}_j(t) &= \vec{v}_c(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\boldsymbol{R}(t,t_0)\vec{r}_{j,c}(t_0)\right)
\end{aligned}
$$

Pour déterminer la trajectoire du solide dans l'espace, nous n'aurons qu'à résoudre les équations de la dynamique pour $\vec{r}_c(t)$, $\vec{v}_c(t)$, $\vec{\omega}(t)$ et $\boldsymbol{R}(t,t_0)$.

Matrices de rotation

Matrices de rotation

- Une matrice de rotation $\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}$ sert à transformer un vecteur $\vec{v}^{L}$ décrit dans le système L en un vecteur $\vec{v}^{G}$ dans le système G ayant subi une rotation par rapport à L.

$$\vec{v}^{G} = \boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\vec{v}^{L}$$

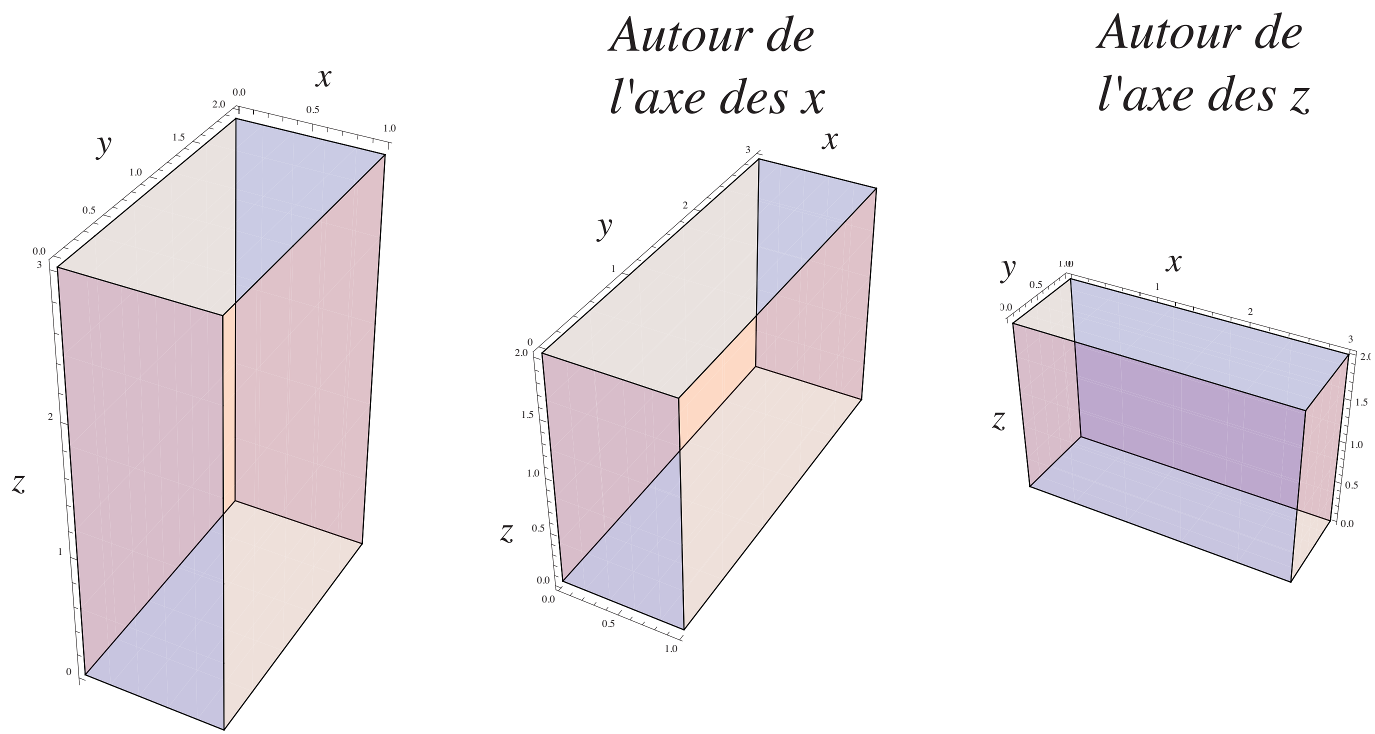
- Pour une matrice $\boldsymbol{M}$, la transformation est un peu plus compliquée. On doit utiliser

$$\boldsymbol{M}^{G} = \boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\boldsymbol{M}^{L}\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\right)^{-1}$$

où $\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\right)^{-1} = \boldsymbol{R}^{L\leftarrow G}$ est l'inverse de $\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}$.

Matrices de rotation

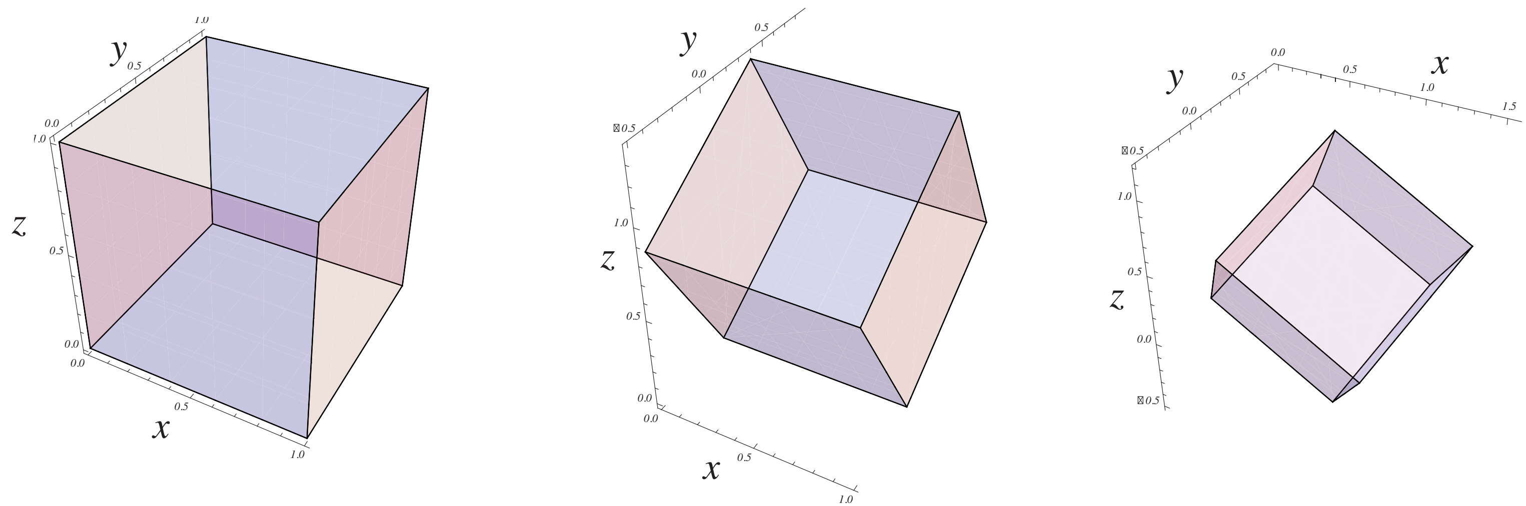
Exemple d'un solide subissant deux rotations successives de $\pi/2$ autour des axes x et z.



Après ces deux rotations : $x \to y$, $y \to z$ et $z \to x$.

Matrices de rotation

Rotation d'un solide de $\pi/4$ en x et z.



Matrices de rotation

Si on suppose que les nouveaux axes correspondent à des rotations successives de θ_x par rapport à l'axe des x, θ_y par rapport à l'axe des y et θ_z par rapport à l'axe des z, la matrice de rotation aura la forme

$$\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L} = \boldsymbol{R}_z(\theta_z)\boldsymbol{R}_y(\theta_y)\boldsymbol{R}_x(\theta_x)$$

où

$$\boldsymbol{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de rotation

- Sachant que

$$\vec{v}^G = \boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\vec{v}^L$$
$$\vec{v}^L = \boldsymbol{R}^{L\leftarrow G}\vec{v}^G = (\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L})^{-1}\vec{v}^G$$

alors la matrice de rotation inverse sera donnée par

$$\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\right)^{-1} = \boldsymbol{R}_x(-\theta_x)\boldsymbol{R}_y(-\theta_y)\boldsymbol{R}_z(-\theta_z) = \left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}\right)^T$$

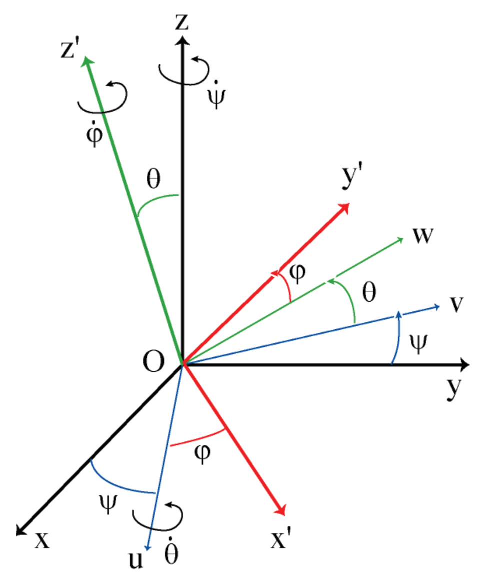
avec $(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L})^T$ la transposée de $\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}$.

Noter que plusieurs autres options existent pour définir les matrices de rotation.

Matrices de rotation

Matrice de rotation et angles de Euler.

1. ψ autour de z et $(x, y, z) \rightarrow (u, v, z)$
2. θ autour de u et $(u, v, z) \rightarrow (u, w, z')$
3. φ autour de z' et $(u, w, z') \rightarrow (x', y', z')$



Matrices de rotation

Matrice de rotation pour angles d'Euler.

$$\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi - \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\varphi\cos\varphi & -\sin\theta\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Matrices de rotation

Évaluation directe de la matrice de rotation.

- Dans le système local (L) les axes sont donnés par

$$\vec{e}_x^{\,L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y^{\,L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_z^{\,L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Dans le système global (G) ces mêmes axes correspondent à

$$\vec{e}_x^{\,G} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yx} \\ e_{zx} \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y^{\,G} = \begin{pmatrix} e_{xy} \\ e_{yy} \\ e_{zy} \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_z^{\,G} = \begin{pmatrix} e_{xz} \\ e_{yz} \\ e_{zz} \end{pmatrix}.$$

- La matrice de rotation $\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}$ correspond donc à

$$\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x^{\,G} & \vec{e}_y^{\,G} & \vec{e}_z^{\,G} \end{pmatrix}$$

Équations de la dynamique

Mouvement de translation.

- Newton a énoncé trois lois qui décrivent la dynamique des particules et des solides en translation. Elles s'appliquent aussi bien aux molécules présentes dans un gaz, un liquide ou un solide, qu'aux solides eux-mêmes.
- Pour les liquides et les gaz qui sont composés de milliards de molécules faiblement liées entre elles, ces trois lois demeurent valides. Cependant, on les applique rarement sur la totalité du volume, car le fluide peut se déformer sous l'effet de forces externes. On utilise alors une interprétation statistique de ces lois en terme de propriétés volumiques (ex. masse volumique au lieu de la masse, etc.).

Équations de la dynamique

Les lois de Newton.

1. Si aucune force n'est appliquée sur un corps de masse m, celui-ci restera au repos ou continuera à se déplacer en ligne droite à une vitesse constante.
2. L'accélération d'un corps est proportionnelle à la force agissant sur le corps et dans la direction de cette force.
3. À toute force agissant sur un corps (action) correspond une force égale et opposée qui s'oppose à la première force (réaction).

Équations de la dynamique

On caractérise les propriétés cinématiques (de déplacement en translation) d'un point du corps par deux quantités vectorielles (6 quantités scalaires) :

1. la position $\vec{r}(t)$ à tout instant

$$\vec{r}(t) = \left(r_x(t), r_y(t), r_z(t)\right)^T = \left(x(t), y(t), z(t)\right)^T$$

2. la vitesse $\vec{v}(t)$ à tout instant

$$\vec{v}(t) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right)^T = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)^T$$

L'accélération $\vec{a}(t)$ à tout instant n'est pas propre au corps, mais résulte de la force totale externe appliquée $\vec{F}(t)$

$$\vec{a}(t) = \left(a_x(t), a_y(t), a_z(t)\right)^T = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Équations de la dynamique

Les lois de Newton s'appliquent à tous les points $\vec{r}_i$ du corps solide sans rotation

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}(t)$$
$$\vec{a}_i(t) = \vec{a}(t)$$

qui ont tous les mêmes vitesses et accélérations.
La position relative $\vec{r}_{i,c}(t)$ d'un point i du solide par rapport à un autre point $\vec{r}_c(t)$ étant fixe, la trajectoire de tous les points peut être calculée en utilisant

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_{i,c}(t_0)$$

Équations de la dynamique

La première loi (principe de l'inertie) et la seconde loi de Newton se résument à

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

avec m une constante de proportionnalité définie comme étant la masse de l'objet (ici on suppose cette valeur constante). Comme on le voit, si aucune force n'est appliquée sur l'objet, alors

$$m\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(m\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0$$

et la vitesse (ou la quantité de mouvement $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$) demeure constante.

Équations de la dynamique

La formulation

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

est supérieure à l'expression initiale de Newton, car elle peut être utilisée lors de collision entre deux objets qui s'échangent une partie de leur masse. Cependant, il faut être prudent lors de son utilisation, car pour le cas des fusées avec éjection de masse continue ($m(t)$) on ne peut écrire

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \neq \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt}\vec{v}(t)$$

car la masse éjectée par le véhicule a une vitesse différente de celle du véhicule (sinon elle resterait en contact avec celui-ci). Dans ce cas, il faut avoir recours à la troisième loi de Newton pour résoudre le problème.

Équations de la dynamique

Troisième loi de Newton.

> À toute force externe ou interne agissant sur un corps (action) correspond une force égale et opposée qui s'oppose à la première force (réaction)

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_r$$

Ainsi la fusée devra fournir une force

$$\vec{F}_{\text{ejection}}(t)dt = \vec{u}(t)dm(t)$$

pendant un temps dt (une impulsion) pour donner à l'élément de masse $dm(t)$ éjecté une vitesse relative $u(t)$ par rapport à sa propre vitesse.

Équations de la dynamique

La force totale appliquée sur la fusée est alors

$$\vec{F}_{\text{totale}} = \vec{F}_{\text{externe}}(t) - \vec{F}_{\text{ejection}}(t)$$

et les équations de la dynamique deviennent

$$\vec{F}_{\text{externe}}(t) - \vec{u}(t)\frac{dm(t)}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Équations de la dynamique

Autres concepts de dynamique utiles.

- L'énergie transférée à un corps par une force $\vec{F}_a$ appliquée sur une distance L suivant le parcours $d\vec{l}$ sera donnée par

$$E = \int_0^L \vec{F}_a \cdot d\vec{l}$$

  et corresponds à l'énergie perdue par le système due à la force $\vec{F}_r = -\vec{F}_a$ appliquée sur une distance L suivant le parcours $d\vec{l}$.
- Le changement $\Delta\vec{p}$ de quantité de mouvement d'un corps subissant une force $\vec{F}(t)$ pendant une période de temps Δt est égal à l'impulsion $\vec{J}$ reçue par ce corps

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t)dt = \int_0^{\Delta t} \left(F_x(t), F_y(t), F_z(t)\right)^T dt$$

Équations de la dynamique

Mouvement de rotation.

- Les lois de Newton sont insuffisantes pour décrire la dynamique des solides en rotation autour d'un point et il faut introduire des lois supplémentaires qui peuvent être vues comme une généralisation des lois de Newton.

Lois reliées au mouvement de rotation.

1. Si aucun moment de force n'est appliqué sur un corps, le corps conservera son mouvement de rotation autour d'un point.
2. L'accélération angulaire (autour d'un axe) d'un corps est proportionnelle au moment de force (par rapport à cet axe) agissant sur le corps.
3. À tout moment de force agissant sur un corps correspond un moment de force égal et opposé qui s'y oppose.

Équations de la dynamique

On peut caractériser le mouvement de rotation d'un corps encore une fois par deux quantités vectorielles (6 quantités scalaires). Nous utiliserons $\vec{\Omega}(t)$ défini par (en radians ou rad)

$$\vec{\Omega}(t) = \left(\Omega_x(t), \Omega_y(t), \Omega_z(t)\right)^T$$

pour caractériser la rotation du système d'axes locaux de l'objet autour de son centre de masse $\vec{r}_c$ (loi de la main droite). Comme le déplacement angulaire $\vec{\Omega}(t)$ de tous les points de l'objet dû au mouvement de rotation par rapport aux axes locaux est indépendant du temps (les axes locaux tournent de $\vec{\Omega}(t)$), on utilisera

$$\vec{\Omega}_i(t) = \vec{\Omega}_i(t_0) + \vec{\Omega}(t)$$

avec $\vec{\Omega}_i(t_0)$ la position angulaire initiale du point.

Équations de la dynamique

- La vitesse angulaire $\vec{\omega}_i(t)$ (rad/s) d'un point i autour de $\vec{r}_c$ est définie par

$$\vec{\omega}_i(t) = \vec{\omega}(t) = \left(\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)\right)^T = \frac{d\vec{\Omega}_i(t)}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt}$$

On peut aussi définir l'accélération angulaire $\vec{\alpha}(t)$ (rad/s^2) correspondante

$$\vec{\alpha}_i(t) = \vec{\alpha}(t) = \left(\alpha_x(t), \alpha_y(t), \alpha_z(t)\right)^T = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\Omega}(t)}{d^2 t}$$

Équations de la dynamique

Comme on l'a déjà vu, la position relative des points de l'objet subissant un mouvement de rotation, mais aucune translation, peut s'écrire

$$\vec{r}_{i,c}(t) = \boldsymbol{R}(t, t_0)\vec{r}_{i,c}(t_0)$$

Donc, ce qui nous intéresse principalement c'est la matrice $\boldsymbol{R}(t, t_0)$, pas $\vec{\Omega}(t)$. Il serait donc intéressant de replacer l'équation différentielle pour la vitesse angulaire en fonction de la dérivée de la position angulaire par une équation différentielle pour la matrice de rotation.

Équations de la dynamique

Pour ce faire, considérons le cas simple correspondant à une rotation $\Omega_z(t)$ autour de l'axe des z.

- La matrice de rotation est alors donnée par

$$\boldsymbol{R}_z(\Omega_z) = \begin{pmatrix} \cos\Omega_z(t) & -\sin\Omega_z(t) & 0 \\ \sin\Omega_z(t) & \cos\Omega_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- La dérivée de $\boldsymbol{R}_z(\Omega_z)$ par rapport à t donne

$$\frac{d\boldsymbol{R}_z(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin\Omega_z(t) & -\cos\Omega_z(t) & 0 \\ \cos\Omega_z(t) & -\sin\Omega_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\Omega_z}{dt} \tag{2}$$

Équations de la dynamique

- Si on écrit $\vec{\omega}_z = (0,0,d\Omega_z/dt)^T$ alors on voit que chaque colonne de $d\boldsymbol{R}_z(t)/dt$ correspond au produit vectoriel de $\vec{\omega}$ et la colonne correspondante de $\boldsymbol{R}_z(t)$:

$$\frac{d\boldsymbol{R}_z(t)}{dt} = \left(\vec{\omega}_z \times \begin{pmatrix} \cos\Omega_z(t) \\ \sin\Omega_z(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_z \times \begin{pmatrix} -\sin\Omega_z(t) \\ \cos\Omega_z(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_z \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Équations de la dynamique

- De la même façon

$$\frac{d\boldsymbol{R}_y(t)}{dt} = \left(\vec{\omega}_y \times \begin{pmatrix} \cos\theta_y(t) \\ 0 \\ -\sin\theta_y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_y \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_y \times \begin{pmatrix} \sin\theta_y(t) \\ 0 \\ \cos\theta_y(t) \end{pmatrix} \right)$$

- Finalement

$$\frac{d\boldsymbol{R}_x(t)}{dt} = \left(\vec{\omega}_x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_x \times \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta_x(t) \\ \sin\theta_x(t) \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_x \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta_x(t) \\ \cos\theta_x(t) \end{pmatrix} \right)$$

Équations de la dynamique

- On aura donc en général

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \times \vec{R}_x(t) & \vec{\omega} \times \vec{R}_y(t) & \vec{\omega} \times \vec{R}_z(t) \end{pmatrix}$$

  avec $\vec{R}_x(t)$, $\vec{R}_y(t)$ et $\vec{R}_z(t)$ trois vecteurs donnant respectivement la première, deuxième et troisième colonne de $\boldsymbol{R}(t)$.
- Ceci correspond donc à 9 équations différentielles, une pour chacune des composantes de $\boldsymbol{R}$.

Équations de la dynamique

- On peut simplifier cette notation en remplaçant le produit vectoriel par un produit matriciel:

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Équations de la dynamique

L'équation équivalente à la seconde loi de Newton pour les mouvements de rotation est

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

où $\vec{\tau}(t)$ est le moment de force (torque en anglais) autour du centre de masse résultant d'une force appliquée au point $\vec{r}(t)$

$$\vec{\tau}(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_c) \times \vec{F}(t)$$

et $\vec{L}(t)$ est le moment cinétique (angular momentum en anglais) qui est donné par

$$\vec{L}(t) = \boldsymbol{I}\vec{\omega}(t)$$

Équations de la dynamique

Moment d'inertie.

- ***I*** est le moment d'inertie du solide (équivalent de la masse pour le mouvement de translation) pour une rotation autour du point $\vec{r}_c$. Contrairement à la masse qui est un scalaire, le moment d'inertie est un tenseur (matrice) qui tient compte de la résistance d'un solide à sa mise en rotation en 3-D.
- Le moment cinétique $\vec{L}_{i,c}(t)$ d'un point de masse m_i se déplaçant par rapport à un point de référence $\vec{r}_c$ est donné par

$$\vec{L}_{i,c}(t) = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times \vec{v}_i(t)$$

où $\vec{r}_i$ est la position de la masse et $\vec{v}_i$ sa vitesse de déplacement. Si la vitesse $\vec{v}_i(t)$ est due à un mouvement de rotation, on peut écrire

$$\vec{L}_{i,c}(t) = m_i \vec{r}_{i,c} \times \left(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i,c}\right)$$

Équations de la dynamique

- Pour un solide représenté par une distribution de masse, le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_c = \int_{\mathcal{V}} \vec{r}_{m,c} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{m,c}) dm = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) d^3 r$$

  Les composantes de $\vec{L}_c$ seront

$$\begin{aligned} L_{c,x} &= I_{c,xx}\omega_x + I_{c,xy}\omega_y + I_{c,xz}\omega_z \\ L_{c,y} &= I_{c,yx}\omega_x + I_{c,yy}\omega_y + I_{c,yz}\omega_z \\ L_{c,z} &= I_{c,zx}\omega_x + I_{c,zy}\omega_y + I_{c,zz}\omega_z \end{aligned}$$

- Ceci permet de définir les composantes de $\boldsymbol{I}_c$ via la relation

$$\vec{L}_c = \boldsymbol{I}_c \vec{\omega}$$

Équations de la dynamique

- $\boldsymbol{I}_c$, le moment d'inertie par rapport au centre de masse de l'objet est défini comme suit

$$\boldsymbol{I}_c = \begin{pmatrix} I_{c,xx} & I_{c,xy} & I_{c,xz} \\ I_{c,yx} & I_{c,yy} & I_{c,yz} \\ I_{c,zx} & I_{c,zy} & I_{c,zz} \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r})\, d^3 r$$

Équations de la dynamique

On peut aussi écrire l'équation du mouvement pour la rotation en fonction de l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\left(\boldsymbol{I}\vec{\omega}(t)\right)}{dt} = \boldsymbol{I}\vec{\alpha} + \frac{d\boldsymbol{I}}{dt}\vec{\omega}$$

Contrairement aux équations de Newton où on peut utiliser $\vec{a} = \vec{F}/m$ lorsque la masse est constante, ici le problème est beaucoup plus compliqué:

- Même si la masse est constante et que le centre de masse du solide est au repos, une rotation de l'objet modifiera en général les composantes individuelles de $\boldsymbol{I}$. C'est donc un effet dont il faut tenir compte dans les équations du mouvement.
- Ainsi, seulement une partie du moment de force servira en général à donner une accélération angulaire à l'objet.

Équations de la dynamique

Comment évaluer $(d\boldsymbol{I}/dt)\vec{\omega}$?

- Utiliser

$$\boldsymbol{I}^G(t) = \boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\boldsymbol{I}^L(t_0)\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\right)^{-1} = \boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\boldsymbol{I}^L(t_0)\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\right)^T$$

- Sachant que $d\boldsymbol{I}^L(t_0)/dt = 0$, on obtient

$$\frac{d\boldsymbol{I}^G(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)}{dt}\boldsymbol{I}^L(t_0)\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\right)^T + \boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\boldsymbol{I}^L\frac{d\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\right)^T}{dt}$$

- On a aussi vu que

$$\frac{d(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t))}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)$$

$$\frac{d\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\right)^T}{dt} = -\left(\boldsymbol{R}^{G\leftarrow L}(t)\right)^T\tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

Équations de la dynamique

- On obtient donc

$$\frac{d\boldsymbol{I}^G(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}^G(t) - \boldsymbol{I}^G(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)$$

- Finalement

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{I}^G(t)}{dt}\vec{\omega} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}^G(t)\vec{\omega}(t) - \boldsymbol{I}^G(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\vec{\omega}(t) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}^G(t)\vec{\omega}(t)\\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\vec{L}(t) = \vec{\omega}(t)\times\vec{L}(t) = -\vec{L}(t)\times\vec{\omega}(t)\end{aligned}$$

- L'équation différentielle à résoudre étant

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} &= (\boldsymbol{I})^{-1}\left[\vec{\tau}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)\right]\\ &= (\boldsymbol{I})^{-1}\left[\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t)\times\vec{\omega}(t)(t)\right]\end{aligned}$$

Équations de la dynamique

Notez que si le moment d'inertie est proportionnel à la matrice identité ($\boldsymbol{I}^G(t) = h(t)\mathbf{1}$)

- Le moment cinétique $\vec{L}(t)$ est parallèle à $\vec{\omega}(t)$
- L'équation différentielle à résoudre devient

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\boldsymbol{I})^{-1}\vec{\tau}(t) = \frac{1}{h(t)}\vec{\tau}(t)$$

qui ressemble à l'équation de Newton.

De la même façon, si $\vec{\omega}(t) = 0$

$$\vec{\alpha}(t) = (\boldsymbol{I})^{-1}\vec{\tau}(t)$$

Centre de masse

Définition du centre de masse.

- Le centre de masse d'un objet est le point de l'objet sur lequel aucune force ne produit de mouvement de rotation de l'objet sur lui même.

Pour un objet ponctuel.

- Le centre de masse $\vec{r}_c$ correspond à sa position $\vec{r}$, car cet objet n'ayant pas de dimensions, aucune force appliquée ne lui donnera de mouvement de rotation.

Centre de masse

Pour les objets de dimensions finies, définir la position du centre de masse est plus complexe.

- Il faut choisir la position où aucun mouvement de rotation n'est induit quelle que soit la force appliquée.
- Si on suppose que l'objet est constitué de particules de masse dm distribuées dans un volume $\mathcal{V}$, le centre de masse correspond à

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_m \vec{r}\, dm$$

  On intègre (somme) donc la contribution de chaque élément de masse pondéré par sa position dans l'espace.

Centre de masse

- La notation en fonction de dm n'est pas très utile, car ce que l'on connaît généralement c'est la masse volumique $\rho(\vec{r})$ et non pas la distribution différentielle de masse.
- En fait, comme $dm = \rho(\vec{r})d^3r$ on écrira préférablement

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\rho(\vec{r})d^3r$$

- Pour un objet non uniforme que l'on peut sous-diviser en $n = 1, N$ sous-éléments $\mathcal{V}_n$ de masse volumique $\rho_n(\vec{r})$, on pourra écrire

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{V}_n} \vec{r}\rho_n(\vec{r})d^3r$$

$$m = \sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{V}_n} \rho_n(\vec{r})d^3r$$

Centre de masse

- Sachant que

$$m_n = \int_{\mathcal{V}_n} \rho_n(\vec{r}) d^3 r$$
$$\vec{r}_{n,c} = \frac{1}{m_n} \int_{\mathcal{V}_n} \vec{r} \rho_n(\vec{r}) d^3 r$$

- On pourra alors écrire

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_{c,n}$$

- Ici, on somme la contribution du centre de masse de chaque solide pondérée par la masse associée à ce solide.

Centre de masse

Volumes et centre de masse pour solide de géométrie arbitraire.

- Il existe plusieurs techniques et algorithmes pour évaluer le volume et le centre de masse de solides pour les applications multimédias.
- Une des méthodes les plus populaires consiste à décomposer premièrement le solide en polyèdres triangulaires, à déterminer le volume de chaque polyèdre et à sommer le tout.
- Cette méthode est aussi efficace si l'on désire évaluer le centre de masse de l'objet.

Centre de masse

Le principe général est le suivant.

- Premièrement, on divise le solide à évaluer en un ensemble de sous régions pleines.
- Les frontières de ces sous-régions, qui peuvent être droites ou curvilignes, sont ensuite simulées en utilisant une série de triangles droits.
- Après avoir identifié la position en 3-D de chacun des sommets de ces triangles, on procède à l'identification des surfaces externes en associant à chaque triangle un ensemble de trois sommets.
- L'ordre des sommets est alors important, car il faut décrire le volume à l'intérieur du solide.

Centre de masse

On procède de la manière suivante.

- On choisit premièrement pour chaque triangle i un sommet de départ arbitraire (le vecteur $\vec{a}_i$).
- On ordonne ensuite les deux autres sommets ($\vec{b}_i$ et $\vec{c}_i$) de façon à ce qu'ils soient classés dans un ordre antihoraire lorsque la surface est vue de l'extérieur du solide.

Centre de masse

- Le volume du solide est alors donné par

$$V = \sum_{i=1}^{N_S} dV_i$$

$$dV_i = \frac{\vec{a}_i \cdot \left(\vec{b}_i \times \vec{c}_i\right)}{6}$$

Centre de masse

On peut aussi utiliser cette information afin de déterminer le centre de masse de l'objet en supposant qu'il a une masse volumique uniforme

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N_S} \vec{d}_i dV_i$$

$$\vec{d}_i = \frac{\vec{a}_i + \vec{b}_i + \vec{c}_i}{4}$$

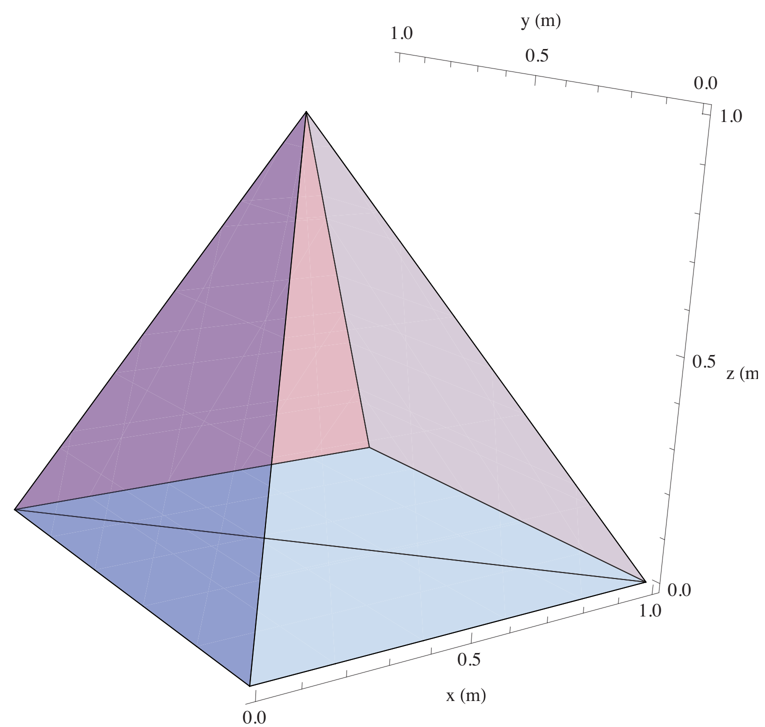
$\vec{d}_i$ correspondant au centre de masse d'un polyèdre dont le quatrième sommet se situe à l'origine.

Centre de masse

Cet algorithme fonctionne seulement si l'objet satisfait la relation d'Euler suivante

$$
\begin{aligned}
2 &= \text{nombre de sommets} + \text{nombre de faces} \\
&\quad - \text{nombre d'arrêtes}
\end{aligned}
$$

Exemple : volume et centre de masse d'une pyramide déformée.



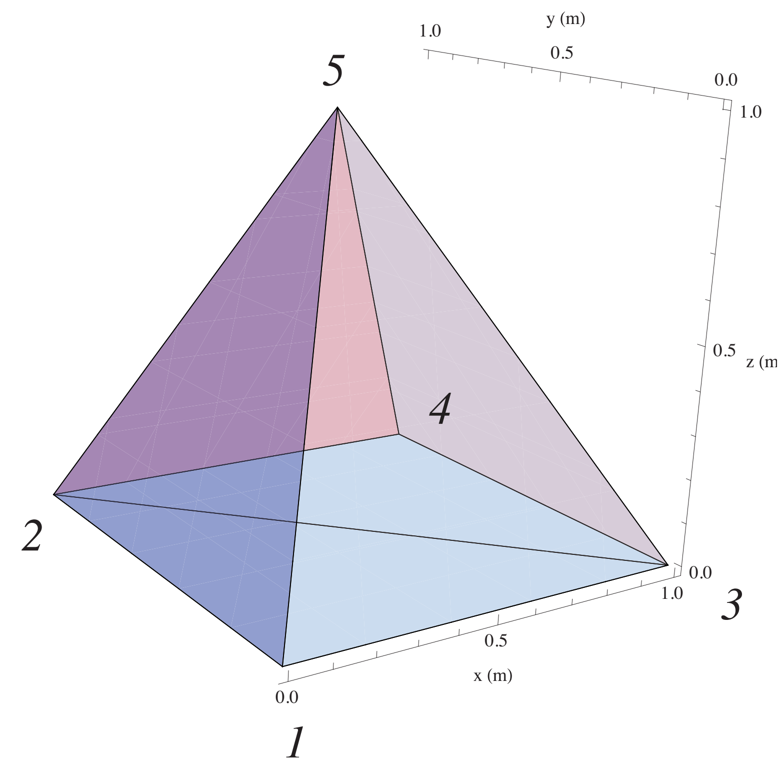
Centre de masse

Les sommets correspondent aux points :

Sommet	x (m)	y (m)	z (m)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0
3	1.0	0.0	0.0
4	1.0	1.0	0.0
5	0.2	0.2	1.0

Centre de masse

Identification des sommets.



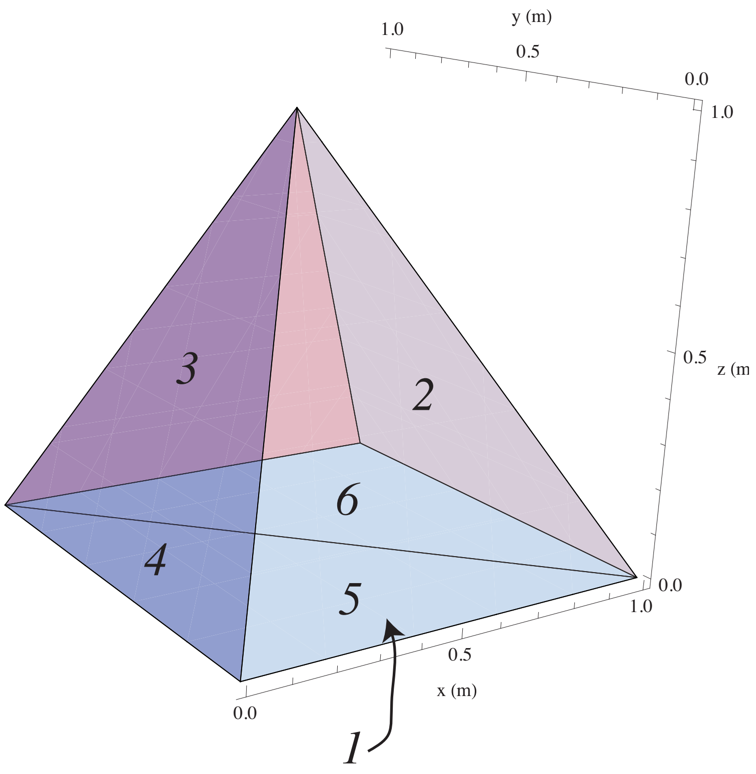
Centre de masse

- Cette pyramide possède 5 sommets.
- La base de la pyramide étant carrée, celle-ci doit être divisée en deux parties (selon l'une ou l'autre des diagonales) ce qui génère 9 arêtes.
- Finalement, elle possède 6 surfaces.
- Le critère d'Euler est donc satisfait.

Il ne nous reste plus qu'à décrire chaque surface en terme des sommets.

Centre de masse

Identification des surfaces.



Centre de masse

Surface	Sommet 1	Sommet 2	Sommet 3	dV_i
1	1	3	5	0
2	3	4	5	$1/6$
3	4	2	5	$1/6$
4	2	1	5	0
5	1	3	2	0
6	2	3	4	0

Son volume total est $1/3$ m^3 et le centre de masse se situe alors au point $(0.425, 0.425, 0.25)$ m.

Moment d'inertie

Pour les solides, le moment d'inertie est utilisé dans les équations du mouvement pour la rotation.

- Le moment d'inertie par rapport au centre de masse représente la distribution de masse du corps autour d'un axe de rotation passant par ce centre de masse $\vec{r}_c$.
- En géométrie cartésienne, on peut définir le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_c$ comme étant un vecteur représentant l'inertie de l'objet par rapport à une rotation autour des axes x, y et z.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_c &= \begin{pmatrix} I_{c,xx} & I_{c,xy} & I_{c,xz} \\ I_{c,yx} & I_{c,yy} & I_{c,yz} \\ I_{c,zx} & I_{c,zy} & I_{c,zz} \end{pmatrix} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r})\, d^3 r\end{aligned}$$

Moment d'inertie

Parallélépipède dont les axes sont parallèles aux axes x (longueur a), y (largeur b) et z (hauteur c)

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$
$$I_{c,yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$
$$I_{c,zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

Les termes non diagonaux sont nuls.

Moment d'inertie

Sphères de rayon r.

- Pleine

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{5} r^2$$

  Les termes hors de la diagonale sont nuls.

- Creuse

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{3} r^2$$

  Les termes hors de la diagonale sont nuls.

Moment d'inertie

Cylindre de rayon r et de longueur l aligné avec l'axe des z.

- Plein

$$I_{c,zz} = \frac{m}{2} r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

  Les termes hors de la diagonale sont nuls.

- Creux

$$I_{c,zz} = m r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{2} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

  Les termes hors de la diagonale sont nuls.

Moment d'inertie

Translation des axes (moment d'inertie par rapport à un point arbitraire).

- On supposera que le moment d'inertie par rapport au centre de masse est donné par $\boldsymbol{I}_c$.
- Le moment d'inertie par rapport au point $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ devient

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_d &= \boldsymbol{I}_c + m\begin{pmatrix} (d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & (d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & (d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2) \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{I}_c + m\boldsymbol{T}(\vec{d}_c)\end{aligned}$$

  avec $\vec{d}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}) = \vec{d} - \vec{r}_c$.
- On voit immédiatement que même si la matrice $\boldsymbol{I}_c$ est diagonale, la matrice $\boldsymbol{I}_d$ ne l'est pas nécessairement. Cependant, elle demeure symétrique, car $\boldsymbol{T}(\vec{d}_c)$ est symétrique.

Moment d'inertie

Rotations des axes (moments d'inertie par rapport à des directions arbitraires).

- Les moments d'inertie des parallélépipèdes et des cylindres sont donnés par rapport à un système d'axes qui leur est propre (en général les axes de référence de l'objet).
- Si le système d'axes de l'observateur (système global) correspond à une rotation $\boldsymbol{R}^{G \leftarrow L}$ par rapport au système de référence du solide (système local), il faut aussi transformer les moments d'inertie de façon à refléter cette rotation (comme on l'a déjà vu)

$$\boldsymbol{I}_G = \boldsymbol{R}^{G \leftarrow L} \boldsymbol{I}^L \left(\boldsymbol{R}^{G \leftarrow L}\right)^T$$

Moment d'inertie

Les relations de transformation décrites ci-dessus sont utiles lorsqu'il est temps de reconstruire le moment d'inertie associé à un solide composé de différentes pièces, car il permet de ramener tous les solides dans un système d'axes parallèles, le moment d'inertie étant calculé par rapport au centre de masse commun (et de calculer correctement le moment d'inertie global du solide).

Moment d’inertie

Noter que :

- lorsque plusieurs solides ayant des axes de référence tournés les uns par rapport aux autres entrent en collision, cette technique est peu efficace et on préférera tourner les vecteurs qui apparaissent dans les équations du mouvement (plus rapide en temps de calcul) pour traiter chaque solide en utilisant un système d’axes locaux, quitte à retourner à un système global plus tard ;
- il est possible de simplifier le processus de rotation des vecteurs considérablement en utilisant les quaternions (que nous verrons plus tard) afin d’accélérer numériquement le processus associé à la rotation d’un vecteur, ce qui est très difficile pour les matrices.

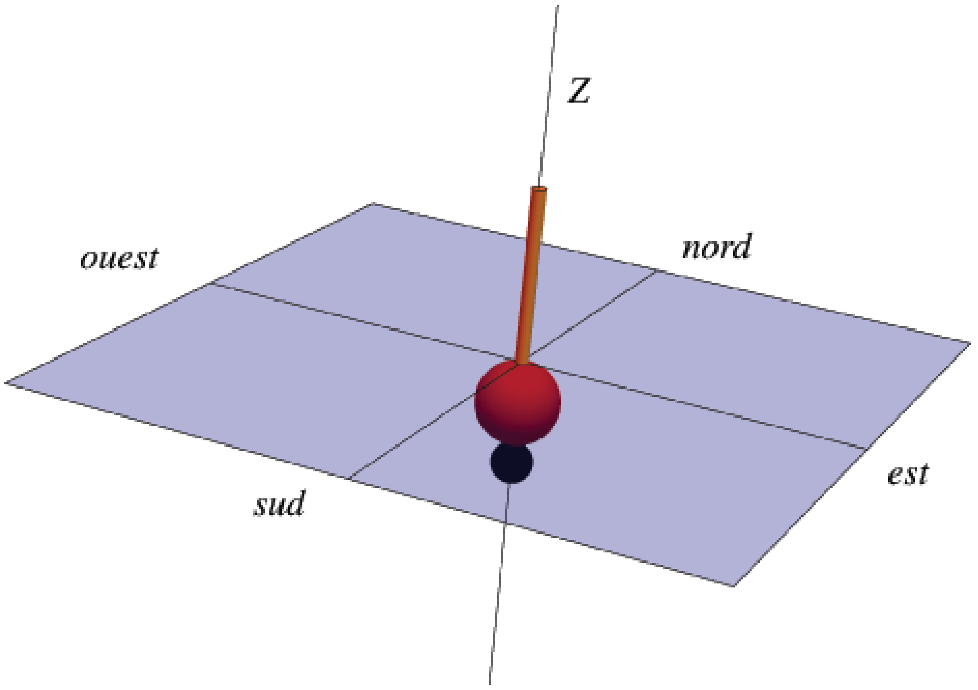
Moment d'inertie

Exemple : calcul du moment d'inertie d'une bouée composée de trois éléments

- un ballon (rouge) qui assure la flottaison de la bouée ;
- une tige cylindrique (orange) au bout de laquelle flotte un fanion (ni illustré ni simulé) ;
- un lest (sphère noire) qui assure la stabilité du système (il agit comme une ancre et empêche le déplacement, mais non l'oscillation de la bouée sous l'effet du vent).

Moment d'inertie

Les différentes composantes de la bouée (volumes et masses du ballon, du lest et de la tige) sont choisies de façon à ce que seulement la tige se retrouve à l'air libre.



Moment d'inertie

On supposera que l'origine du système de coordonnées est localisée à la surface de la mer et correspond au bas de la tige (centre radial). Les propriétés de la tige, du ballon et du lest sont :

- la tige est un cylindre creux (aluminium) de masse $m_t = 1.690$ kg, de rayon externe $r_t = 4$ cm et de longueur $l_t = 1.5$ m ;
- le ballon est une sphère creuse (caoutchouc) de masse $m_b = 0.561$ kg et de rayon $r_b = 23$ cm ;
- le lest est une sphère pleine (acier) de masse $m_l = 55.951$ kg et de rayon $r_l = 12$ cm.

Moment d'inertie

Vous devrez analyser deux situations :

1. la bouée est à la verticale ;
2. la bouée est inclinée à 45 degrés de la verticale dans la direction sud-est (angle de 45 degrés par rapport à la verticale).

Vous devrez déterminer pour chacune de ces situations:

- la position du centre de masse de la bouée ;
- le moment d'inertie de la bouée par rapport au système de référence.

Moment d'inertie

Bouée verticale

La position du centre de masse d'un objet composé de trois éléments est donnée par

$$\vec{r}_{c,\text{bouée},V} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_{c,i,V}\, m_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

On connaît déjà la masse de chaque élément, et la masse totale est

$$\sum_{i=1}^{3} m_i = 58.202 \text{ kg}$$

Moment d'inertie

- La position du centre de masse de la tige est $\vec{r}_{c,t,V} = (0,0,l_t/2)^T = (0,0,0.75)^T$
- La position du centre de masse du ballon est $\vec{r}_{c,b,V} = (0,0,-r_b)^T = (0,0,-0.23)^T$
- La position du centre de masse du lest est $\vec{r}_{c,l,V} = (0,0,-2r_b - r_l)^T = (0,0,-0.58)^T$

La position du centre de masse de la bouée est donc

$$\vec{r}_{c,\text{bouée},V} = (0,0,-0.538)^T$$

Moment d'inertie

Moment d'inertie de la bouée par rapport à son centre de masse.

- Le moment d'inertie de la tige (cylindre creux) par rapport à son centre de masse est

$$I_t = \begin{pmatrix} \frac{m_t}{12}(6r_t^2 + l_t^2)) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_t}{12}(6r_t^2 + l_t^2)) & 0 \\ 0 & 0 & m_t r_t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3182 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3182 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 \end{pmatrix}$$

Moment d'inertie

- Le centre de masse de la bouée est à une position $d_t = (\vec{r}_{c,\text{bouée}} - \vec{r}_{c,t}) = (0, 0, -1.288)$ par rapport au centre de masse de la tige. Le moment d'inertie de la tige par rapport au centre de masse de la bouée est donc

$$I_{t,\text{bouée}} = I_t + m_t \begin{pmatrix} (d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & (d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & (d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.1218 & 0 & 0 \\ 0 & 3.1218 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 \end{pmatrix}$$

Moment d'inertie

- Le moment d'inertie du ballon (sphère creuse) par rapport à son centre de masse est

$$I_b = \frac{2m_b r_b^2}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.0198 & 0 & 0\\ 0 & 0.0198 & 0\\ 0 & 0 & 0.0198\end{pmatrix}$$

- Le centre de masse de la bouée est à une position $d_b = (\vec{r}_{c,\text{bouée}} - \vec{r}_{c,b}) = (0, 0, -0.308)$ par rapport au centre de masse du ballon. Le moment d'inertie du ballon par rapport au centre de masse de la bouée est donc

$$I_{b,\text{bouée}} = \begin{pmatrix}0.073 & 0 & 0\\ 0 & 0.0730 & 0\\ 0 & 0 & 0.0198\end{pmatrix}$$

Moment d'inertie

- Le moment d'inertie du lest (sphère pleine) par rapport à son centre de masse est

$$I_l = \frac{2m_l r_l^2}{5}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.3223 & 0 & 0\\ 0 & 0.3223 & 0\\ 0 & 0 & 0.3223\end{pmatrix}$$

- Le centre de masse de la bouée est à une position $d_l = (\vec{r}_{c,\text{bouée}} - \vec{r}_{c,l}) = (0, 0, 0.042)$ par rapport au centre de masse du lest. Le moment d'inertie du lest par rapport au centre de masse de la bouée est donc

$$I_{l,\text{bouée}} = \begin{pmatrix}0.4209 & 0 & 0\\ 0 & 0.4209 & 0\\ 0 & 0 & 0.3223\end{pmatrix}$$

Moment d'inertie

- Le moment d'inertie de la bouée par rapport à son centre de masse est donc

$$\begin{aligned} I_{\text{bouée},V} &= I_{t,\text{bouée}} + I_{b,\text{bouée}} + I_{l,\text{bouée}} \\ &= \begin{pmatrix} 3.6158 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6158 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3448 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Moment d'inertie

Bouée inclinée

Comme on connaît déjà la position du centre de masse et le moment d'inertie de la bouée pour le cas de la tige verticale, nous utiliserons cette information pour déterminer les propriétés de la bouée inclinée. Pour ce faire, nous déterminerons premièrement la matrice de rotation qui permet de passer du système d'axes d'axes de la boule inclinée (on vient de déterminer le moment d'inertie et le centre de masse pour ce système) et le ramener au système global.

Moment d'inertie

Le système d'axes incliné est obtenu en combinant deux rotations :

- Rotation du système original de 45 degrés autour de l'axe des y correspondant à la matrice

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & 0 & \sin(\pi/4) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\pi/4) & 0 & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Rotation du système précédent de 45 degrés autour de l'axe des z correspondant à la matrice

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moment d'inertie

La matrice de rotation totale est donc

$$R = R_z R_y = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Moment d'inertie

- Position du centre de masse de la bouée

$$\vec{r}_{c,\text{bouée},I} = R\vec{r}_{c,\text{bouée},V} = (-0.269, -0.269, -0.3804)$$

- Moment d'inertie de la bouée inclinée par rapport à son centre de masse est donné par

$$I_{\text{bouée},I} = RI_{\text{bouée},V}R^{-1} = \begin{pmatrix} 2.7981 & -0.8178 & -1.1565 \\ -0.8178 & 2.7981 & -1.1565 \\ -1.1565 & -1.1565 & 1.9803 \end{pmatrix}$$

Conclusions

Pour étudier la trajectoire d'un solide, il faut connaître :

- les équations du mouvement pour le centre de masse

$$d\vec{v}_c(t)/dt = \vec{a}_c(t) = \vec{F}(t)/m$$
$$d\vec{r}_c(t)/dt = \vec{v}_t(t)$$

- les équations du mouvement de rotation du solide

$$d\vec{\omega}(t)/dt = (\boldsymbol{I})^{-1}\left[\vec{\tau}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)\right]$$
$$d\boldsymbol{R}(t)/dt = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}$$

avec $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)$ la matrice correspondant au produit vectoriel de $\vec{\omega}$ avec un vecteur arbitraire.

Conclusions

Dans le prochain chapitre nous verrons:

1. comment résoudre les équations de la cinématique des particules ;
2. comment résoudre les équations de la cinématique des solides ;
3. l'utilisation des quaternions et cinématique des solides ;
4. les problèmes associés aux solutions numériques de problèmes de cinématique lorsque des collisions se produisent.