



PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 5 — Collisions

G. Marleau

Automne 2016

Table des matières

Dynamique des collisions
Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Dynamique des collisions
Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Dynamique des collisions

Dynamique des
collisions

Méthode des forces
Méthode des
conditions initiales
Détection des
collisions
Conclusions

Nous avons étudié dans les chapitres précédents le déplacement d'un solide dans l'espace sous l'effet d'une force ou d'un moment de force.

- Les collisions que nous avons traitées étaient principalement utilisées pour terminer la course du solide en mouvement à la suite d'une collision avec un objet qui était et demeurait immobile (le solide entre en contact avec le sol, une cible ...).

Ici nous nous intéresserons aux résultats de ces collisions sachant que des solides qui entrent en contact continueront de se déplacer après une collision.

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Les collisions de deux solides (dont au moins un est en mouvement) peuvent être interprétées en terme de forces d'interaction.

- Un ballon de soccer qui touche le sol après avoir parcouru une certaine distance dans l'espace subira une force de compression dont l'intensité et la durée seront proportionnelles à la pression interne du ballon et à la rigidité du sol.
- Le ballon exercera donc une force sur le sol au point de contact et l'énergie de compression emmagasinée dans le ballon propulsera celui-ci de nouveau dans l'espace à mesure qu'il retrouvera sa forme originale.

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

- L'impact du ballon créera aussi une dépression dans le sol lors de la collision. Comme le sol est partiellement élastique, il tentera de reprendre sa position initiale et exercera en retour une force de réaction qui contribuera au mouvement de rebond du ballon.

Dynamique des collisions

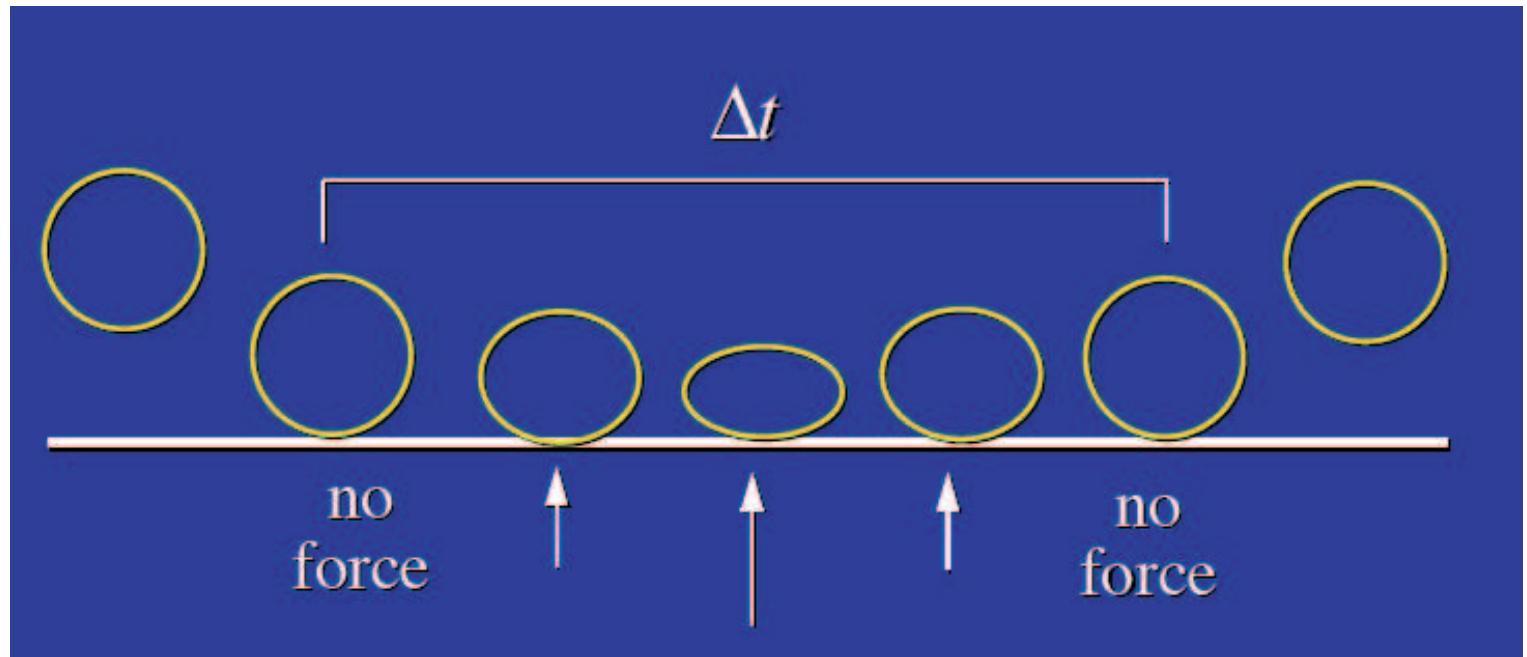
Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions



Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Analyser la dynamique des objets qui entrent en collision est donc loin d'être simple. Il faut premièrement déterminer l'ensemble des forces impliquées dans la collision et résoudre les équations du mouvement afin de déterminer la trajectoire des solides durant la collision.

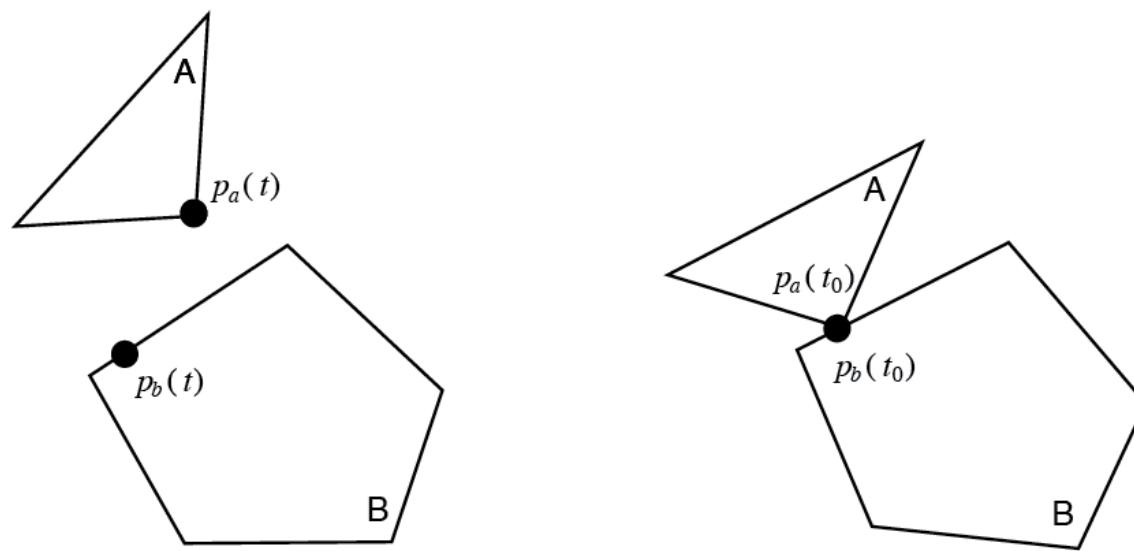
- Notez que cette description s'applique aussi bien au mouvement de déplacement linéaire des solides qu'à leur mouvement de rotation bien que dans ce cas l'analyse est beaucoup plus complexe, car les solides ne sont pas nécessairement uniformes.
- De plus, on ne peut plus considérer les solides qui entrent en collision comme s'ils étaient indépendants, puisque chaque solide peut influencer le comportement de tous les autres.

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Deux solides de formes arbitraires en mouvement qui entrent en collision.



Dynamique des collisions

Dynamique des
collisions

Méthode des forces
Méthode des
conditions initiales
Détection des
collisions
Conclusions

Je présenterai donc dans la première section de ce chapitre le principe d'analyse dynamique des collisions du point de vue des forces qui s'exercent.

- Pour le physicien qui veut comprendre les phénomènes qui sont mis en cause lors de ces collisions, ce type d'analyse est le plus intéressant.
- Pour l'ingénieur qui désire déterminer les déformations que subissent les différents solides lors de collisions, il est aussi nécessaire de recourir à ce type d'analyse (collisions entre deux autos par exemple).

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Pour la majorité des cas :

- ce qui intéresse l'observateur c'est ce qui se passe avant et après la collision (le bâton a frappé la balle de golf), et non pas durant la collision (sauf si l'on doit payer pour les réparations) ;

La raison majeure pour ce manque d'intérêt est évidente :

- la durée de l'impact et les déformations que subissent les solides sont souvent trop faibles pour qu'elles soient perçues à l'oeil nu par l'observateur (c'est d'ailleurs le cas des collisions entre les boules au billard).

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Nous considérerons aussi une technique de simulation qui fait abstraction des forces mises en jeu pendant la collision.

- Cette méthode ne s'intéresse pas à ce qui se passe pendant l'intervalle de temps durant lequel les solides sont en contact, mais au comportement des solides après la collision.
- Ceci simplifie considérablement l'analyse de la trajectoire des solides, car, à aucun moment, on n'a à résoudre un problème de dynamique impliquant des solides couplés.

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

La réponse des solides à la collision s'interprète grâce à de nouvelles conditions initiales (vitesses linéaire et angulaire et positions linéaire et angulaire du solide) qui sont imposées instantanément aux équations de la dynamique associées à chaque solide après la collision.

- Comme de raison, cette méthode s'applique difficilement lorsque la durée de l'interaction est trop longue à moins de retarder la simulation de façon à de prendre en compte ce délai.
- Elle suppose aussi que les déformations permanentes, que subissent les solides lors de la collision, sont négligeables et n'ont aucun impact sur le reste de la simulation.

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Ainsi :

- les dépressions laissées par le ballon de soccer sur le sol sont faibles (notre critère est donc satisfait) ;
- les dépressions laissées par un bâton sur une balle de baseball sont beaucoup plus importantes, cependant elles n'ont aucun intérêt pour les joueurs, car la durée du contact est très courte (notre critère est encore satisfait). Notez que la déformation de la balle de baseball a par ailleurs un intérêt certain pour l'arbitre qui la retirera du jeu s'il juge qu'elle est trop déformée (ou trop molle).

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Avantages de la méthode des forces :

1. simule le comportement de la collision de façon plus physique ;
2. permet de décrire les déformations des solides lors de la collision ;
3. ne nécessite pas l'introduction de délais dans la simulation lors de collisions en douceur (lentes).

Inconvénients de la méthode des forces :

1. difficulté de définir les forces et le temps d'interaction ;
2. extrême difficulté pour simuler les mouvements de rotation des solides ;
3. équations de la dynamique couplées pour les solides lorsqu'ils sont en contact ce qui demande des méthodes de résolution numériques très robustes.

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Conclusions

Avantages de la méthode des conditions initiales :

1. simple et permet le découplage des équations de la dynamique associées à chaque solide ;
2. peu de difficulté à simuler les mouvements de rotation des solides ;
3. est en général aussi précise que la méthode des forces.

Inconvénients de la méthode des conditions initiales :

1. peut demander l'introduction de délais dans la simulation (où rien ne se passe) ;
2. moins satisfaisante du point de vue des physiciens et des ingénieurs qui désirent connaître l'ampleur des déformations que subissent les solides.

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

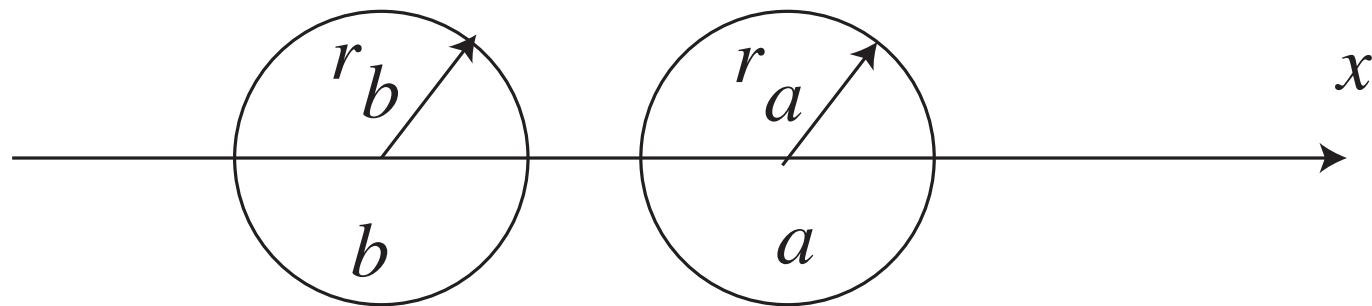
Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Pour illustrer la méthode des forces, nous considérerons un cas très simple : deux boules rigides a et b de rayon r_a et r_b qui se déplacent dans l'espace sans tourner sur elles-mêmes et qui entrent en collision face à face au temps $t = t_i$.

Position des boules avant la collision



Méthode des forces

Dynamique des collisions

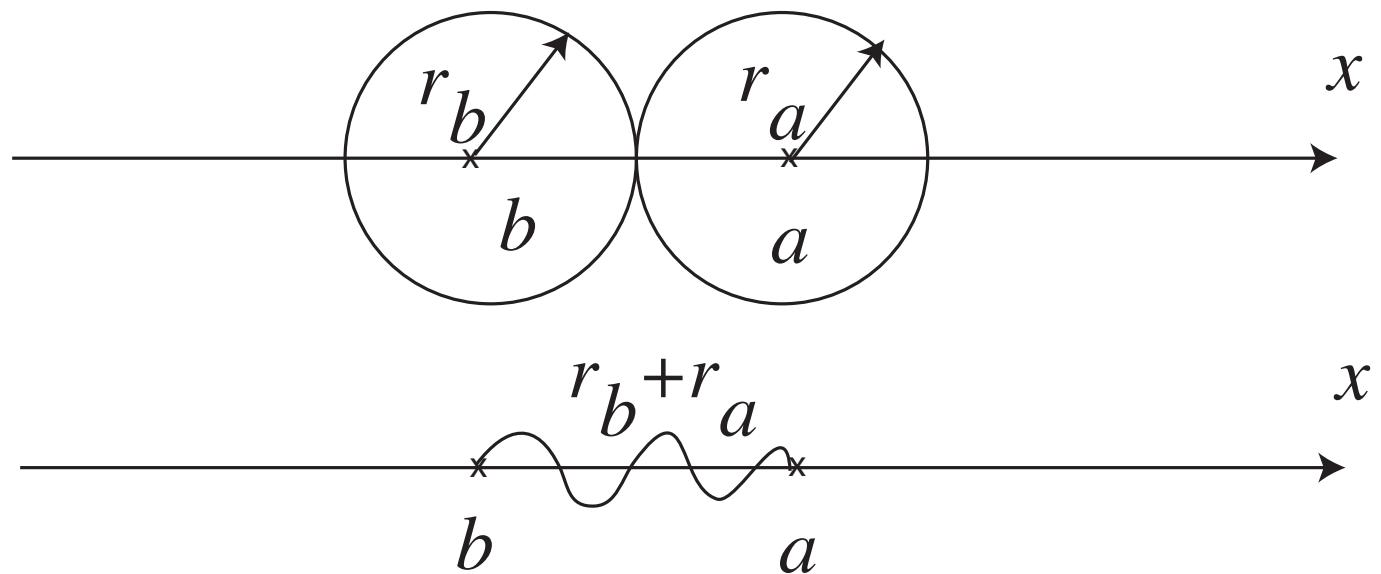
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Position des boules au temps $t = t_i$ lorsque débute la collision et ressort non comprimé simulant la collision.



L'extension du ressort est alors $L_r(t_i) = r_a(t_i) + r_b(t_i)$.

Méthode des forces

Dynamique des collisions

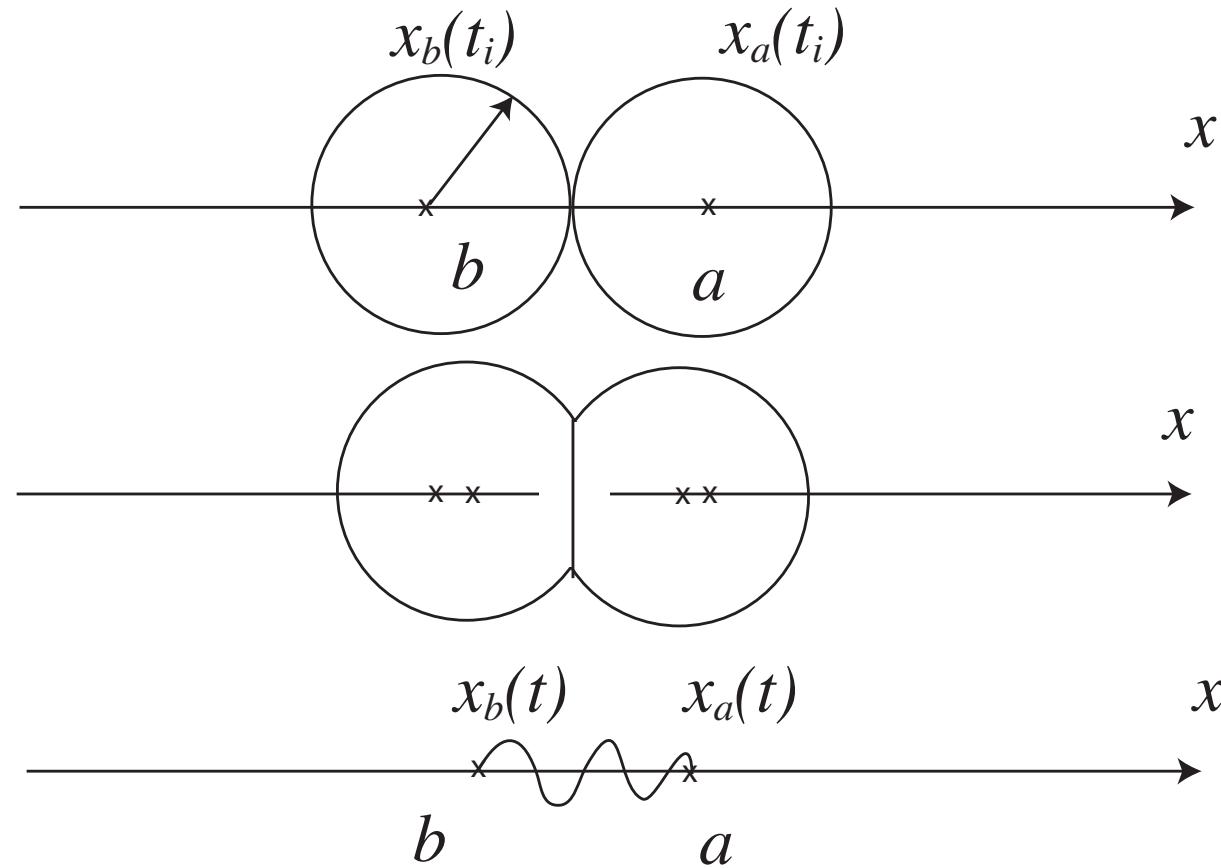
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Position des boules au temps $t > t_i$ durant la collision. Ici, les deux boules se déforment sans recouvrement ce qui correspond à un ressort comprimé.



Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Si le centre de masse de chacun des corps se situe sur l'axe des x (respectivement $x_a(t)$ et $x_b(t)$) et que ceux-ci se déplacent avec des vitesses $\vec{v}_a = (v_{x,a}, 0, 0)$ et $\vec{v}_b = (v_{x,b}, 0, 0)$, on aura

$$L_r(t_i) = r_a + r_b = |x_a(t_i) - x_b(t_i)|$$

L'étirement du ressort au temps t sera alors

$$L_r(t) = |x_a(t) - x_b(t)|$$

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

- Du point de vue de la physique ce sont les forces intermoléculaires qui assurent la cohésion de chacune des boules. Lors de la collision, les champs intermoléculaires des deux boules s'interpénètrent menant ainsi à leur déformation temporaire.
- Si la collision est élastique, les champs intermoléculaires associés aux deux boules reprendront leur forme originale après un certain temps et les boules se repousseront.
- Dans le cas d'une collision inélastique (énergie cinétique non conservée), la déformation des champs intermoléculaires des boules est tellement importante que certaines molécules des boules sont déplacées menant à une déformation permanente. Il est aussi possible qu'une partie de l'énergie de la collision soit transmise aux molécules des boules qui ainsi s'échauffent.

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

En mécanique classique, on simule cette interaction entre les champs moléculaires des boules par une combinaison de

1. Ressort de constante de rappel k_r

$$F_{a/b}(t) = -k_r(L_r(t) - L_r(t_i)) \frac{x_{a/b}(t) - x_{b/a}(t)}{|x_{a/b}(t) - x_{b/a}(t)|}$$

2. Amortisseurs de constante d'amortissement k_a

$$F_{a/b}(t) = -k_a(v_{x,a/b}(t) - v_{x,b/a}(t))$$

Dans le cas d'une collision élastique $k_a = 0$. Pour une collision inélastique $k_a > 0$.

Les forces qui s'exerce sur le solide a sont égales et opposées à celles qui s'exercent sur le solide b . Ces forces agiront tant que $L_r(t) < L_r(t_i)$.

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La position d'équilibre des ressorts (et amortisseurs) correspond toujours à la situation où les solides ne sont pas déformés. Ceci corresponds au temps $t = t_i$ et au temps $t = t_f > t_i$ tel que

$$L_r(t_f) = L_r(t_i)$$

À partir de ce moment, on supposera que les solides ne sont plus en contact et donc que les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre deviennent nulles.

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Ici, on a supposé que les constantes de rappel (ou d'amortissement) entre nos deux boules sont identiques.

- Si les deux boules ont des compositions différentes les constantes de rappel et d'amortissement sont généralement différentes ($k_{r/a,1}$ et $k_{r/a,2}$) et on utilise une constante de rappel équivalente $k_{r/a,\text{eq}}$ donnée par

$$\frac{1}{k_{r/a,\text{eq}}} = \frac{1}{k_{r/a,1}} + \frac{1}{k_{r/a,2}}$$

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Les équations de la dynamique à résoudre pour $t_i < t < t_f$ deviennent alors

$$d\boldsymbol{v}_{x,b}(t)/dt = -\frac{1}{m_b} \left(k_r(|\boldsymbol{x}_a(t) - \boldsymbol{x}_b(t)| - L_r(t_i)) \frac{\boldsymbol{x}_b(t) - \boldsymbol{x}_a(t)}{|\boldsymbol{x}_b(t) - \boldsymbol{x}_a(t)|} + k_a(\boldsymbol{v}_{x,b}(t) - \boldsymbol{v}_{x,a}(t)) + \text{autres forces} \right)$$

$$d\boldsymbol{x}_b(t)/dt = \boldsymbol{v}_{x,b}(t)$$

$$d\boldsymbol{v}_{x,a}(t)/dt = -\frac{1}{m_a} \left(k_r(|\boldsymbol{x}_a(t) - \boldsymbol{x}_b(t)| - L_r(t_i)) \frac{\boldsymbol{x}_a(t) - \boldsymbol{x}_b(t)}{|\boldsymbol{x}_a(t) - \boldsymbol{x}_b(t)|} + k_a(\boldsymbol{v}_{x,a}(t) - \boldsymbol{v}_{x,b}(t)) + \text{autres forces} \right)$$

$$d\boldsymbol{x}_a(t)/dt = \boldsymbol{v}_{x,a}(t)$$

Des conditions initiales, qui correspondent à la vitesse et la position du centre de masse de chaque boule tout juste avant la collision, sont requises ($t = t_i$).

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Comme on le voit, même pour le cas le plus simple correspondant à une collision élastique en 1-D (aucun mouvement de rotation), l'utilisation de la méthode des forces mène à des équations différentielles couplant directement les deux boules. C'est donc une méthode qui est peu pratique lorsque l'on veut analyser des situations de la vie courante (en 3-D avec solide en rotation).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La méthode des conditions initiales peut être dérivée des équations de la cinématique

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_{a/b}(t)}{dt} &= \frac{d(m_{a/b}\vec{v}_{a/b}(t))}{dt} = \vec{F}_{a/b}(t) \\ \frac{d\vec{L}_{a/b}(t)}{dt} &= \frac{d(I_{a/b}\vec{\omega}_{a/b}(t))}{dt} = \vec{\tau}_{a/b}(t) \\ &= \vec{r}_{a/b,p}(t) \times \vec{F}_{a/b}(t)\end{aligned}$$

où :

- $\vec{p}_{a/b}(t)$ est la quantité de mouvement du centre de masse des objets a et b ;
- $\vec{L}_{a/b}(t)$ est le moment cinétique des objets a et b autour de leur centre de masse respectif (système local) ;
- $\vec{r}_{a/b,p}$ est la position du point par rapport au centre de masse des objets a et b où la force $\vec{F}_{a/b}$ est appliquée.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Notez que :

- la troisième loi de Newton stipule aussi que $\vec{F}_a(t) = -\vec{F}_b(t)$;
- nous avons aussi supposé que la masse, la position du centre de masse et le moment d'inertie du solide sont constants ce qui implique que le solide ne subit aucune déformation durant la collision.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La première équation sera intégrée pour obtenir

$$\vec{p}_{a/b}(t_f) - \vec{p}_{a/b}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{a/b}(t) dt = \vec{J}_{a/b}$$

avec

$$\vec{J}_{a/b} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{a/b}(t) dt$$

le vecteur impulsion.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Pour le mouvement de rotation, on utilisera

$$\begin{aligned}\vec{L}(t_f) - \vec{L}(t_i) &= \int_{t_i}^{t_f} (\vec{r}_{a/b,p} \times \vec{F}_{a/b}(t)) dt \\ &= \vec{r}_{a/b,p} \times \vec{J}_{a/b}\end{aligned}$$

en supposant que $\vec{r}_{a/b,p}$ ne change pas durant la collision (collision instantanée).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Ainsi, si on connaît la force qui agit à chaque instant et la période d'action de la force (donc l'impulsion), on pourra déterminer par simple intégration les vitesses linéaire et angulaire finales de chaque solide une fois le contact entre eux rompu.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Ces relations sont très utiles cependant elles cachent plusieurs problèmes reliés au suivi de la trajectoire de chaque objet :

1. même si on connaît la vitesse finale des solides, on ne connaît par leurs positions respectives pendant l'intervalle de temps $t_i < t < t_f$;
2. en général, aussi bien la force que son temps d'action sont inconnus.

La méthode des conditions initiales propose une solution simple à ces deux problèmes.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Position des solides après la collision

- On peut premièrement supposer que les solides sont très rigides et que leurs déformations respectives dues à la collision sont faibles. Dans ce cas, la durée de la collision est généralement courte et on peut supposer que la position finale de chaque solide après la collision est identique à sa position initiale.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Si la déformation des solides durant la collision est plus importante ou que le temps d'interaction entre les solides est long et mesurable, on supposera que le système composé des deux solides continuera de se déplacer durant la collision à une vitesse \vec{v}_s qui assurera la conservation de la quantité de mouvement du système en tout temps

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m_b + m_a} (\vec{p}_b(t_i) + \vec{p}_a(t_i))$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Une relation semblable peut être obtenue pour la vitesse angulaire en utilisant le principe de conservation du moment cinétique total

$$\vec{\omega}_s = (\mathbf{I}_b + \mathbf{I}_a)^{-1} (\vec{L}_b(t_i) + \vec{L}_a(t_i))$$

Notez qu'ici les moments cinétiques doivent être pris par rapport à un centre de masse commun (les deux objets se déplacent comme s'ils étaient collés un à l'autre).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

- On supposera aussi que chacun des solides reprend sa forme après la collision. La position du centre de masse de chaque solide après la collision sera alors donnée par

$$\vec{r}_b(t_f) = \vec{r}_b(t_i) + \vec{v}_s \Delta t$$

$$\vec{r}_a(t_f) = \vec{r}_a(t_i) + \vec{v}_s \Delta t$$

$$\vec{\Omega}_b(t_f) = \vec{\Omega}_b(t_i) + \vec{\omega}_s \Delta t$$

$$\vec{\Omega}_a(t_f) = \vec{\Omega}_a(t_i) + \vec{\omega}_s \Delta t$$

les deux solides se déplaçant en tandem à la vitesse \vec{v}_s et avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}_s$ (les rotations se font par rapport au centre commun des deux objets).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

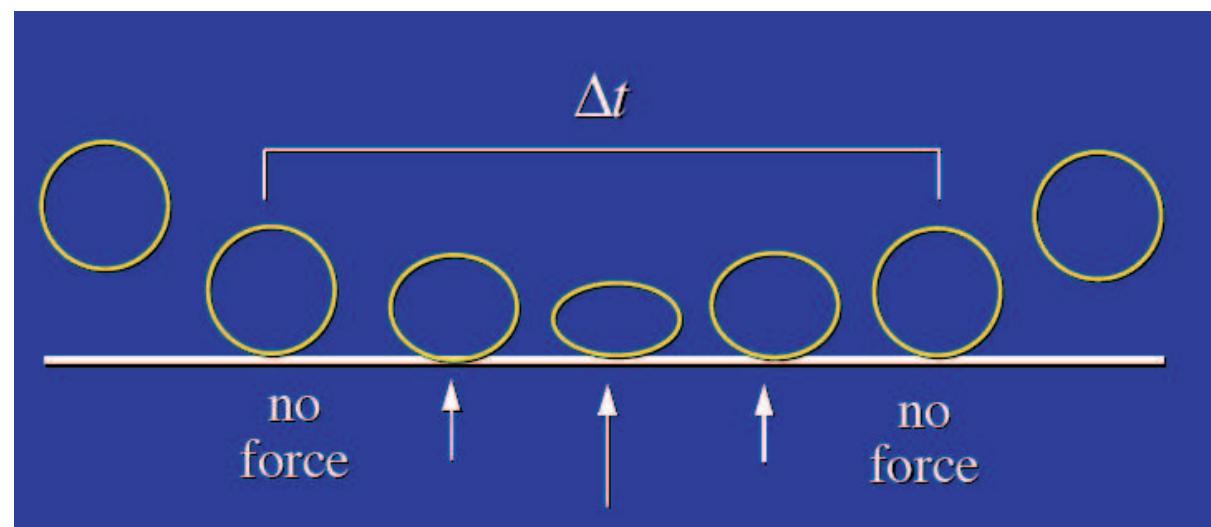
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Notons que lorsque l'un des solides ne peut bouger (un mur), on supposera que \vec{v}_s correspond à la vitesse du solide dans une direction parallèle à la surface avant la collision.



Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Vitesse des solides après la collision

La vitesse respective de chacun des solides après la collision sera donnée par une relation empirique qui s'appelle **loi des collisions sans frottement**.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

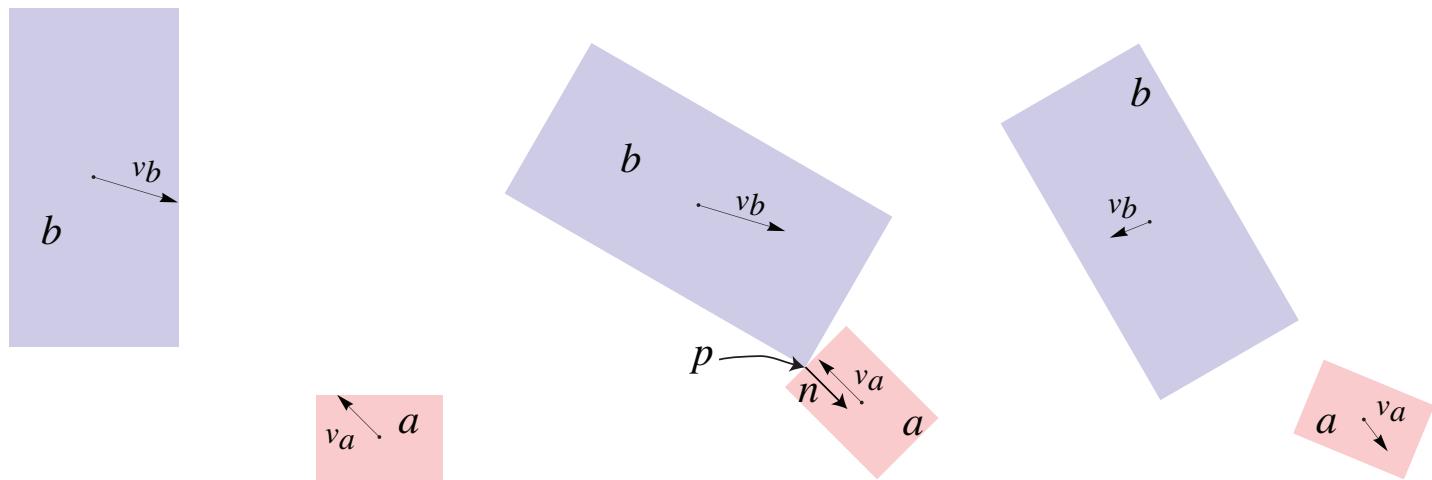
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Collision entre deux solides a et b au point p .



Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Les vitesses relatives du point p appartenant aux deux objets avant et après la collision sont (vitesse linéaire totale du point p)

$$\vec{v}_{a-b}(t_i) = \vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)$$

$$\vec{v}_{a-b}(t_f) = \vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f)$$

avec

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t))$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t))$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On peut alors évaluer les composantes de ces vitesses qui sont normales à la surface de contact du solide a avant (v_r^-) et après (v_r^+) la collision (ici la normale est dirigée vers l'intérieur du solide a)

$$v_r^- = \vec{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_i) = \vec{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i))$$

$$v_r^+ = \vec{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_f) = \vec{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f))$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Loi des collisions sans frottement

Cette loi correspond tout simplement à supposer que

$$\nu_r^+ = -\epsilon \nu_r^-$$

où $0 \leq \epsilon \leq 1$ est le coefficient de restitution qui est mesuré expérimentalement et dépend de la composition des solides.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Quelques observations :

1. $\epsilon = 1$ implique une collision élastique (sans perte d'énergie cinétique) ;
2. $\epsilon = 0$ implique que les deux solides demeurent collés après la collision (perte maximale d'énergie cinétique).

Ici pour se simplifier la vie on étudiera premièrement le cas où les mouvements de rotation sont négligés. On aura alors

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t)$$

La loi des collisions sans frottement est toutefois insuffisante pour déterminer complètement les vitesses finales de chacun des solides (elle ne donne que les vitesses relatives finales).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

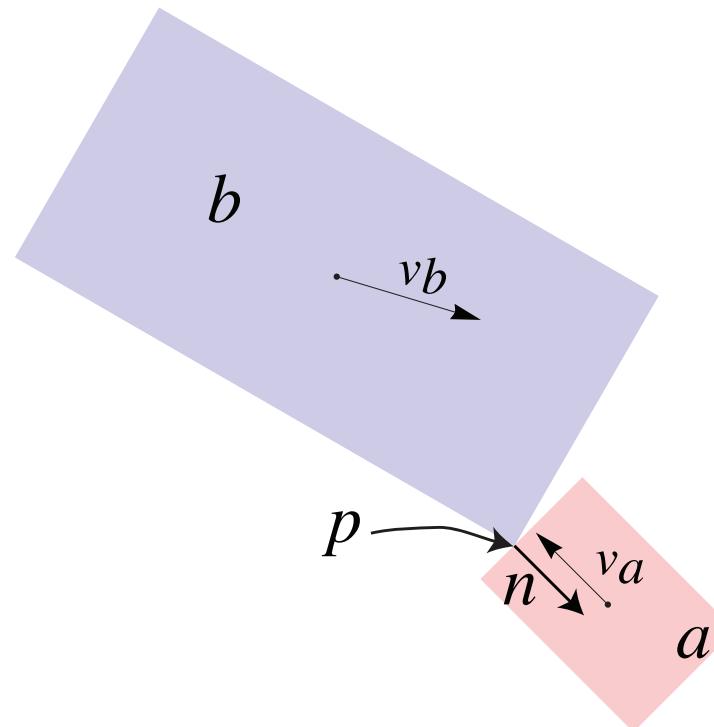
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Retournerons donc à la définition du vecteur impulsion. Dans le cas d'un solide sans mouvement de rotation, la force que le solide b exercera sur le solide a devra nécessairement être dans la direction \vec{n} qui est la normale entrante à la surface de a au point de contact p .



Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On aura donc

$$\frac{\vec{J}}{m_a} = \frac{\vec{n} j}{m_a} = \vec{v}_a(t_f) - \vec{v}_a(t_i)$$

Comme la force qui agit sur la boule b est identique à celle qui agit sur la boule a mais dans une direction opposée, on aura aussi

$$-\frac{\vec{J}}{m_b} = -\frac{\vec{n} j}{m_b} = \vec{v}_b(t_f) - \vec{v}_b(t_i)$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La prochaine étape consiste à réaliser que l'impulsion n'affectera que la composante de la vitesse dans la direction de la normale. Évaluons donc le produit scalaire de l'impulsion avec \vec{n}

$$\frac{j}{m_a} = \vec{n} \cdot (\vec{v}_a(t_f) - \vec{v}_a(t_i))$$

$$-\frac{j}{m_b} = \vec{n} \cdot (\vec{v}_b(t_f) - \vec{v}_b(t_i))$$

En prenant la différence de ces deux équations, on obtient

$$j \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) = v_r^+ - v_r^-$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Comme

$$v_r^+ = -\epsilon v_r^-$$

alors

$$j = -\frac{(1 + \epsilon) v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}}$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On a alors toute l'information nécessaire pour déterminer les vitesses finales de chaque solide

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{n} j}{m_a}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{n} j}{m_b}$$

Notez que le terme de signe positif correspond au solide vers l'intérieur duquel la normale est dirigée. La vitesse relative est alors négative (pour \vec{n} vers l'intérieur de a , la vitesse relative qui correspond à $\vec{n} \cdot (\vec{v}_a - \vec{v}_b)$ est négative).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

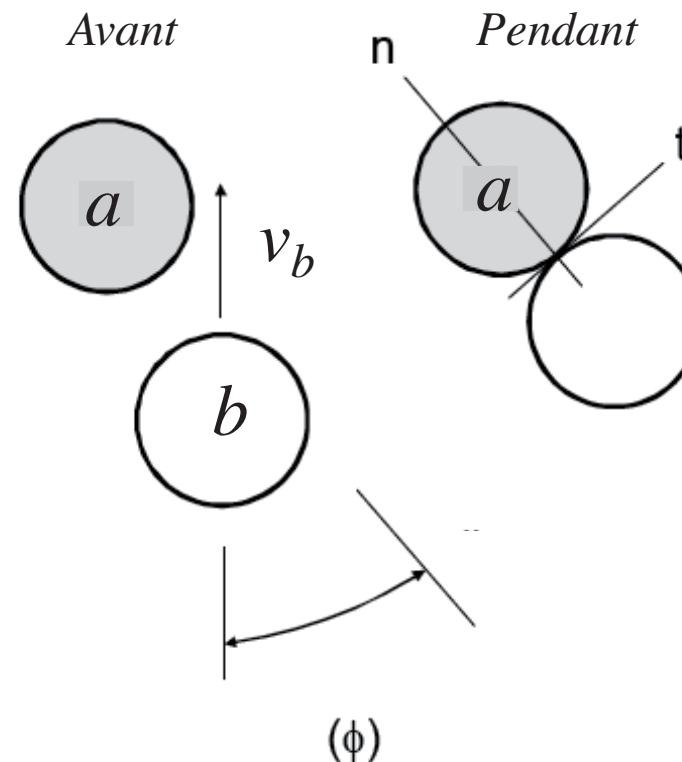
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Pour les collisions entre boules de masses identiques, les mêmes relations peuvent être utilisées.



Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Ainsi

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{n} j}{m}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{n} j}{m}$$

avec la normale vers l'intérieur de la boule a et

$$j = -\frac{(1 + \epsilon)}{2} m v_r^-$$

$$v_r^- = \vec{n} \cdot (\vec{v}_a(t_i) - \vec{v}_b(t_i))$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Pour une collision entre une boule (a) de masse $m = m_a$ et un mur on utilisera (le mur au repos correspond à $m_b = \infty$)

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{n}_a j}{m_a}$$

$$j = -(1 + \epsilon) m_a (\vec{n}_a \cdot \vec{v}_a(t_i))$$

la normale étant dirigée vers l'intérieur de la boule en mouvement (a). Si on considère une normale se dirigeant vers l'intérieur du mur, on aura

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) - \frac{\vec{n}_b j}{m_a}$$

$$j = (1 + \epsilon) m_a (\vec{n}_b \cdot \vec{v}_a(t_i))$$

les deux façons de procéder donnant les mêmes résultats, car $\vec{n}_a = -\vec{n}_b$.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Si la boule b est au repos, le tout se simplifie à la forme

$$\mathbf{j} = -\frac{(1+\epsilon)}{2} m (\vec{n} \cdot \vec{v}_a(t_i))$$

et

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{n} j}{m}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = -\frac{\vec{n} j}{m}$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Lorsque le solide a un mouvement de rotation, il faut tout simplement remplacer la vitesse de déplacement linéaire par la vitesse de déplacement totale au point d'intersection

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t))$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t))$$

tel que décrit plus tôt.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Frottement

Si les coefficients de frottement entre les deux solides au point de contact sont μ_s (statique) et μ_c (cinétique), le problème devient plus compliqué, car il faut aussi prendre en compte la composante de l'impulsion dans une direction \vec{t} tangentielle à la surface et dans le plan formé par $\vec{v}_r^- = \vec{v}_a(t_i) - \vec{v}_b(t_i)$ et \vec{n} .

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_r^- \times \vec{n}}{|\vec{v}_r^- \times \vec{n}|}$$

$$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{u}$$

Notez que si \vec{v}_r^- et \vec{n} sont parallèles, le terme de frottement sera absent (\vec{u} et \vec{t} sont nuls).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

L'impulsion dans la direction \vec{t} est alors donnée par le frottement

$$j_t = -\mu \vec{t} j$$

avec j la composante normale de l'impulsion donnée par

$$j = -\frac{(1 + \epsilon) v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}}$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

En procédant de la même façon qu'avant on obtient alors

$$j_t = \begin{cases} \frac{\mu_c(1+\epsilon)v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} & \text{si } \mu_s(1+\epsilon)|v_r^-| < |\vec{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ -\frac{|\vec{t} \cdot \vec{v}_r^-|}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, la force de frottement statique ne peut inverser la direction de propagation tangentielle de la boule et la vitesse relative dans le plan est nulle. Le premier terme correspond au frottement cinétique et le second au frottement statique (vitesse relative entre les deux objets dans la direction \vec{t} est nulle après la collision).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On obtient alors

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{n} j + \vec{t} j_t}{m_a}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{n} j + \vec{t} j_t}{m_b}$$

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Effets angulaires

Ici, en plus d'utiliser l'effet de la force (représentée par l'impulsion) sur la vitesse de translation du centre de masse, il faut aussi considérer l'effet du moment de force (moment d'impulsion) résultant sur le mouvement de rotation du solide.

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + j\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \vec{n})$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - j\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \vec{n})$$

Ici on travaille toujours dans le système de coordonnées globales du système (en supposant que $\vec{J} = j\vec{n}$ et que $dI_{a/b}/dt = 0$).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On aura donc (vitesse linéaire totale incluant la vitesse du point due à son mouvement de rotation)

$$\vec{v}_{a,p}(t_f) = \vec{v}_{a,p}(t_i) + j \left(\frac{\vec{n}}{m_a} + \mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \vec{n}) \times \vec{r}_{a,p} \right)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t_f) = \vec{v}_{b,p}(t_i) - j \left(\frac{\vec{n}}{m_b} + \mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \vec{n}) \times \vec{r}_{b,p} \right)$$

car

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t))$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t))$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

En utilisant

$$v_r^+ = -\epsilon v_r^-$$

avec maintenant la vitesse totale du point où la collision prend place

$$\begin{aligned}v_r^- &= \vec{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)) \\v_r^+ &= \vec{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f))\end{aligned}$$

les vitesses relatives totales entre les solides au point où la collision prend place ($\vec{r}_a(t) + \vec{r}_{a,p}(t) = \vec{r}_b(t) + \vec{r}_{b,p}(t)$).

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On peut résoudre pour j et obtenir

$$j = -\alpha(1 + \epsilon) v_-^r$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_a + G_b}$$

avec

$$G_a = \vec{n} \cdot [\mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \vec{n}) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_b = \vec{n} \cdot [\mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \vec{n}) \times \vec{r}_{b,p}]$$

où la matrice de moment d'inertie est prise dans le système global.

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

S'il y a du frottement, on généralise ces équations de la même façon que pour le cas sans rotation.

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{J}}{m_a}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{J}}{m_b}$$

et les vitesses angulaires finales seront

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + \mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \vec{J})$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - \mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \vec{J})$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Ici

$$\vec{J} = \vec{n} j + \vec{t} j_t$$

avec

$$j_t = \begin{cases} \alpha \mu_c (1 + \epsilon) v_r^- & \text{si } \mu_s (1 + \epsilon) |v_r^-| < |\vec{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ -\alpha |\vec{t} \cdot \vec{v}_r^-| & \text{sinon} \end{cases}$$

Détection des collisions

Dynamique des collisions

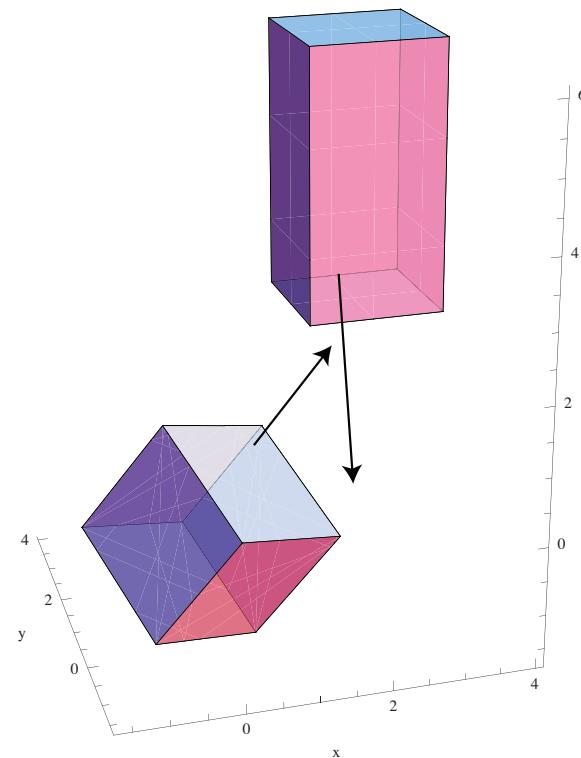
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Maintenant que nous savons comment traiter les collisions entre les solides, tout ce qu'il nous reste à faire c'est de détecter quand et où ces collisions prendront place.



Détection des collisions

Dynamique des collisions

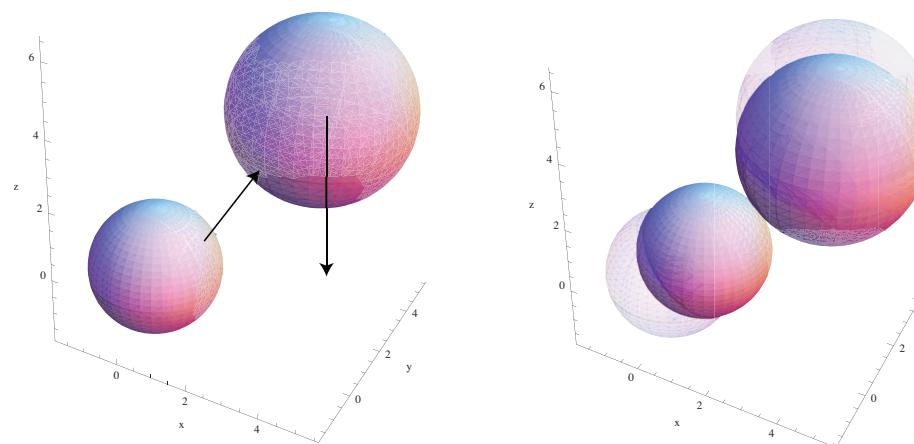
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Notez que lorsqu'il s'agit de sphères nous savons comment procéder.



Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Si on connaît la position du centre de masse de chaque sphère \vec{r}_i ($i = 1, 2$) ainsi que leurs rayons R_i , alors les deux sphères sont en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = R_1 + R_2$$

Elles se superposent si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < R_1 + R_2$$

Elles ne sont pas en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > R_1 + R_2$$

Détection des collisions

Dynamique des collisions

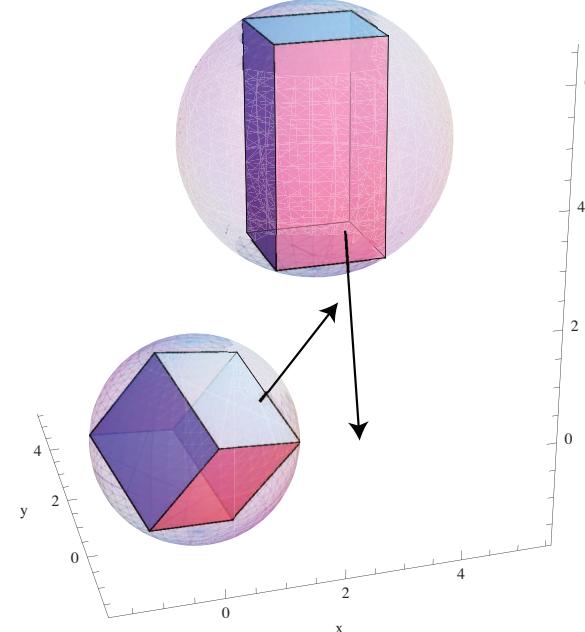
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On peut utiliser le même type de procédure pour déterminer si deux solides de forme arbitraire ne sont pas en contact de façon certaine.



Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Pour ce faire, nous définirons la sphère de rayon minimal $R_{\min,i}$ centrée sur le centre de masse du solide qui l'englobe complètement.

- Le solide i a un centre de masse localisé à \vec{r}_i .
- Les $j = 1, n$ coins du solide sont situés à la position $\vec{r}_{i,j}$.
- La distance entre un coin j et le centre de masse est donnée par

$$\vec{d}_{i,j} = \vec{r}_i - \vec{r}_{i,j}$$

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

- Le rayon $R_{\min,i}$ de la sphère qui englobe le solide sera donné par la valeur maximale des $|\vec{d}_{i,j}|$

$$R_{\min,i} = \max_{j=1,n} (|\vec{d}_{i,j}|)$$

- On est assuré que les deux solides ne sont pas en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > R_{\min,1} + R_{\min,2}$$

- On ne peut rien assurer si ce n'est pas le cas.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On peut aussi utiliser le même type de procédure pour déterminer si deux solides de forme arbitraire sont en contact de façon certaine. Pour ce faire, nous définirons la sphère de rayon maximal $R_{\max,i}$ centrée sur le centre de masse du solide qui est englobée complètement par le solide.

- Le rayon $R_{\max,i}$ de la sphère qui englobe le solide sera donné par la valeur maximale de composantes de $\vec{d}_{i,j}$

$$R_{\max,i} = \min_{j=1,n} (\min(d_{x,i,j}, d_{y,i,j}, d_{z,i,j}))$$

- On est assuré que les deux solides sont en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < R_{\max,1} + R_{\max,2}$$

- On ne peut rien assurer si ce n'est pas le cas.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Les avantages de cette méthode sont :

- on peut déterminer avant le début de la simulation les valeurs de $R_{\max,i}$ et $R_{\min,i}$ associées à chaque solide (les solides sont indéformables) ;
- comme on suit la trajectoire du centre de masse, la position des centres de masse est connue en tout temps ;
- une soustraction vectorielle et une norme sont suffisantes pour déterminer avec certitude si les deux solides ont des chances d'être en contact ;
- ceci fonctionne même si les solides sont en rotation.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

L'inconvénient majeur :

- on ne peut être assuré qu'il y a contact entre les solides si

$$R_{\max,1} + R_{\max,2} \leq |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq R_{\min,1} + R_{\min,2}$$

- il faut alors passer à une méthode plus précise.

Ici, nous utiliserons la méthode des plans de division (separating planes).

Dynamique des collisions

Méthode des forces

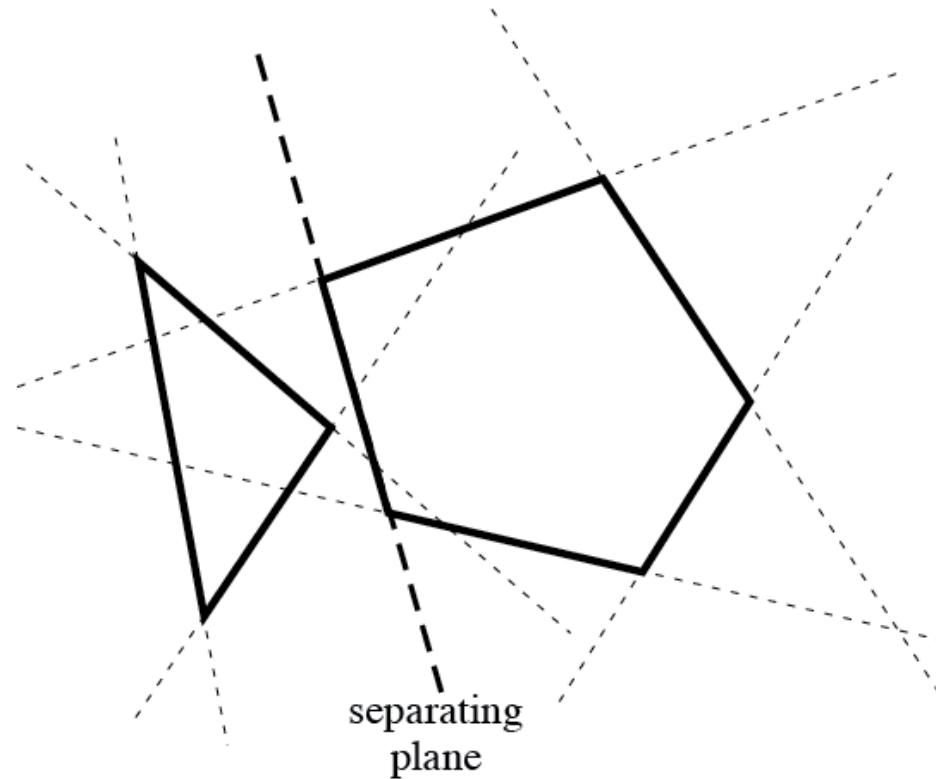
Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Méthode des plans de division

- Le principe ici consiste à déterminer si un plan de division existe entre les deux solides.



Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Définition du plan de division :

- le plan de division doit être choisi parmi les surfaces qui servent à définir les deux solides ;
- le plan de division est choisi de façon à ce que tous les coins de solide auquel appartient la surface se situent **en dessous** du plan ou sur le plan ;
- tous les coins du second solide se situent **au-dessus** du plan (ou sur le plan s'il y a contact) ;
- pour déterminer la position **en dessous** et **au-dessus** il faut donc donner une direction à notre plan.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Direction du plan et normale \vec{n} au plan :

- chacune des surfaces k de nos solides peut être définie par trois points $\vec{q}_{k,1}$, $\vec{q}_{k,2}$ et $\vec{q}_{k,3}$ qui correspondent à trois coins du solide ;
- on doit classer ces trois points dans le sens antihoraire lorsqu'on regarde la surface de l'extérieur du solide ;
- on détermine ensuite deux vecteurs qui donnent la direction générale de la surface k dans l'espace

$$\vec{p}_{k,1} = \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,2}$$

$$\vec{p}_{k,2} = \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,3}$$

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La normale \vec{n}_k unitaire sortante pour le plan k est alors donnée par

$$\vec{n}_k = \frac{(\vec{p}_{k,1} \times \vec{p}_{k,2})}{|(\vec{p}_{k,1} \times \vec{p}_{k,2})|}$$

Détection des collisions

Dynamique des collisions

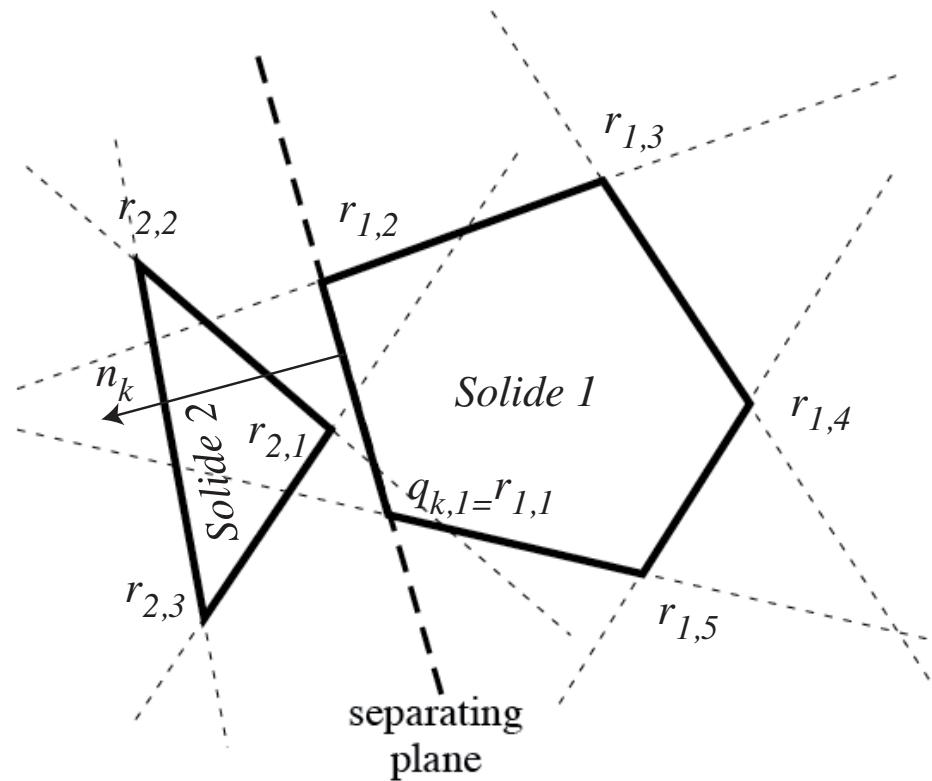
Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La prochaine étape consiste à déterminer si les coins des solides sont au-dessus ou en dessous de la face.



Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

La distance entre le plan qui contient le point $\vec{q}_{k,1}$ et un coin $\vec{r}_{i,j}$ (le coin d'un des deux solides) est donnée par

$$d_{i,j,k} = \vec{n}_k \cdot (\vec{r}_{i,j} - \vec{q}_{k,1})$$

- Si $d_{i,j,k} < 0$ le point est en dessous du plan.
- Si $d_{i,j,k} > 0$ le point est au-dessus du plan.
- Si $d_{i,j,k} = 0$ le point est au sur le plan.

Comme de raison, la distance $d_{i,j,k} \leq 0$ pour tous les coins du solide auquel la surface k appartient. Il est donc nécessaire d'évaluer $d_{i,j,k}$ seulement pour les coins associés au second volume.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Un plan de division existe si

$$d_{i,j,k} > 0$$

pour tous les coins du second solide.

- Si on est capable de trouver un plan de division, les deux solides ne sont pas en contact et ne s'interpénètrent pas.
- Sinon, il y a eu collision entre les deux solides.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On détermine alors le point qui a pénétré ou touché une surface de la façon suivante.

- Pour chacun des points $\vec{r}_{i,j}$ d'un solide donné on évalue $d_{i,j,k}$ pour chacune des surfaces associées au second solide.
- Le point $\vec{r}_{i,j}$ est à l'intérieur du second volume si $d_{i,j,k} \leq 0$ pour toutes les surfaces.
- Si le point est à l'intérieur du volume on peut reculer la simulation jusqu'au moment où $d_{i,j,k} = 0$ pour une valeur de k donnée, les autres distances étant toutes supérieures à 0. On a alors trouvé le point d'intersection requis.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

On peut utiliser la même technique en 2-D.

- Dans ce cas, on supposera que tous les solides ont une extension infinie dans la direction z .
- Les trois points requis pour définir un plan en 3-D étant

$$\vec{q}_{k,1} = (x_{k,1}, y_{k,1}, 0)$$

$$\vec{q}_{k,2} = (x_{k,2}, y_{k,2}, 0)$$

$$\vec{q}_{k,3} = \vec{q}_{k,1} + (0, 0, z) = (x_{k,1}, y_{k,1}, z)$$

on aurait aussi pu utiliser

$$\vec{q}_{k,3} = \vec{q}_{k,2} + (0, 0, z) = (x_{k,2}, y_{k,2}, z)$$

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

- On choisira $z = 1$ ou $z = -1$ de façon à assurer que les trois points décrivent un parcours antihoraire pour un observateur à l'extérieur du solide.
- La normale en 2-D devient alors

$$\vec{n}_k = \frac{z(\vec{p}_{k,1,y}, -\vec{p}_{k,1,x})}{|z(\vec{p}_{k,1,y}, -\vec{p}_{k,1,x})|}$$

- Le reste des calculs se poursuit en utilisant exclusivement des vecteurs en 2-D.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Commentaires finaux :

- cette procédure ne fonctionne que pour des solides convexes ;
- pour les solides ayant des faces courbes on peut discréteriser celles-ci en polyèdres triangulaires (même procédure que pour évaluer le volume et le centre de masse décrite au chapitre 2) et procéder tel que décrit plus haut ;
- si on ne considère que des points localisés aux coins des solides, cette technique détectera les intersections entre un coin du solide et une surface, mais ne fonctionnera pas si ce sont les arêtes des solides que se touchent (ou les surfaces) ;
- il faut alors considérer d'autres points du solide ou utiliser une technique différente.

Détection des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Finalement, notez que l'on peut toujours procéder en utilisant une analyse directe où on traite le plus grand nombre de points possibles pour chaque solide. Ceci est généralement très coûteux en temps de calcul et devrait être évité si possible.

Conclusions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Conclusions

Dans le chapitre suivant nous étudierons le mouvement contraint incluant

- Le cas à une contrainte
- Une généralisation à de multiples contraintes.