PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 3 — Résolution numérique des équations de la cinématique

G. Marleau

Automne 2016

Table des matières

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Introduction

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

La cinématique des particules.

- La cinématique étudie le mouvement des solides, en faisant abstraction des causes du mouvement (accélération linéaire ou angulaire, sans se préoccuper de la force ou du moment de force à la source de ces accélérations).
- Nous proposerons des méthodes numériques qui permettent d'obtenir, à partir d'accélérations linéaires ou angulaires connues ($\vec{a}(t)$ et $\vec{\alpha}(t)$), la position $\vec{r}(t)$, la vitesse linéaire $\vec{v}(t)$, la position angulaire $\vec{\Omega}(t)$ et la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ de tous les points d'un solide.

Introduction

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

L'étude sera divisée en trois parties :

1. nous examinerons premièrement le mouvement de translation d'un point (particule ponctuelle ou centre de masse d'un objet étendu) ;
2. nous poursuivrons avec l'étude du mouvement angulaire qui prend toute son importance pour les solides ;
3. nous terminerons finalement avec une discussion des problèmes numériques reliés aux collisions.

Introduction

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Les équations de la cinématique reliant l'accélération linéaire, la vitesse linéaire et la position d'un point sont les suivantes

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t,\vec{v},\vec{r})$$
$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t,\vec{v},\vec{r})$$

Ce sont des équations différentielles vectorielles couplées, chaque équation correspondant à trois équations scalaires pour l'accélération et la vitesse (6 équations au total).

Introduction

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Les équations de la cinématique reliant l'accélération linéaire, la vitesse linéaire et la position du centre de masse d'un solide en rotation sont les suivantes

$$\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \vec{a}(t,\vec{v}_c,\vec{r}_c,\vec{\omega}(t),\vec{\Omega}(t))$$
$$\frac{d\vec{r}_c(t)}{dt} = \vec{v}(t,\vec{v}_c,\vec{r}_c,\vec{\omega}(t),\vec{\Omega}(t))$$

Les équations reliant l'accélération angulaire, la vitesse angulaire et la position angulaire d'un point sont

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t,\vec{v}_c,\vec{r}_c,\vec{\omega}(t),\vec{\Omega}(t))$$
$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t,\vec{v}_c,\vec{r}_c,\vec{\omega}(t),\vec{\Omega}(t))$$

Ce sont aussi des équations différentielles vectorielles couplées (12 équations au total).

Introduction

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On a vu au chapitre 2 que nous pouvions remplacer l'équation différentielle pour $\vec{\Omega}(t)$ par une équation différentielle pour la matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t)$ pour obtenir

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t, \vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}(t), \boldsymbol{R}(t))$$
$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

On doit résoudre alors 18 équations différentielles couplées.

Introduction

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Ces équations sont incomplètes et pour obtenir une solution finale, il faut aussi fournir des conditions initiales correspondant à $\vec{r}_c(t_0)$, $\vec{v}_c(t_0)$, $\vec{r}_{i,c}(t_0)$, $\vec{\omega}(t_0)$ et $\boldsymbol{R}(t_0)$.
- Si le solide possède un mouvement de translation et de rotation, il faut combiner les solutions linéaires et angulaires pour obtenir

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{i,c}(t_0)$$
$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_c(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{i,c}(t_0)\right)$$

où i représente un point de l'objet, $\vec{r}_c(t)$ la position du centre de masse de l'objet et $\vec{r}_{i,c}(t_0)$ la position initiale du point i par rapport au centre de masse de l'objet (la matrice de rotation est alors l'unité $\boldsymbol{R}(t_0) = \boldsymbol{I}$).

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Pour les particules et le centre de masse des solides, les équations à résoudre sont donc :

$$\vec{a}(t) = d\vec{v}(t)/dt$$
$$\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$$

Si on suppose que l'accélération dépend seulement du temps, la solution au temps t peut être obtenue par intégration directe (les six équations différentielles sont découplées)

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

avec $\vec{v}(t_0)$ et $\vec{r}(t_0)$ la vitesse et position initiale du point.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Deux cas peuvent alors se présenter :

- les fonctions correspondant à $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$ sont faciles à intégrer numériquement. On commence alors par obtenir $\vec{v}(t)$ que l'on intègre par la suite pour obtenir $\vec{r}(t)$;
- les fonctions correspondant à $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$ sont difficiles ou impossibles à intégrer analytiquement. Dans ce cas, il faut avoir recours à des méthodes numériques qui permettront d'approximer la solution.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

S'il est possible d'évaluer analytiquement $d^m\vec{a}(t)/dt^m$ on peut combiner une expansion en série pour $\vec{a}(t)$ et une intégration par intervalle de temps.

- Ici, on sépare premièrement l'intervalle de temps $t - t_0$ en N sous intervalles de temps de largeur $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ avec $t_N = t$ et $n = 0, \cdots, N$.
- On utilise une expansion en série pour $\vec{a}(t')$ pour $t_{n-1} < t' < t_n$ dans chaque intervalle de temps

$$\vec{a}(t' - t_{n-1}) = \vec{a}(t_{n-1}) + \left.\frac{d\vec{a}(t')}{dt'}\right|_{t'=t_{n-1}} (t' - t_{n-1}) + \left.\frac{d^2\vec{a}(t')}{dt'^2}\right|_{t'=t_{n-1}} \frac{(t' - t_{n-1})^2}{2} + \dots$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- On obtient alors la vitesse à $t \leq t_n$ si on connaît $\vec{a}(t')$ et ses dérivées au temps t_{n-1}

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(t) = \vec{v}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t} \left[\vec{a}(t' - t_{n-1})\right] dt' \\
= \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1})(t - t_{n-1}) + \left.\frac{d\vec{a}(t')}{dt'}\right|_{t'=t_{n-1}} \frac{(t - t_{n-1})^2}{2} \\
+ \left.\frac{d^2\vec{a}(t')}{dt'^2}\right|_{t'=t_{n-1}} \frac{(t - t_{n-1})^3}{6} + \ldots
\end{aligned}
$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

S'il est impossible d'évaluer analytiquement $d^m\vec{a}(t)/dt^m$ on peut limiter l'expansion en série au terme de première dérivée $\vec{a}(t)$.

- On évalue ensuite numériquement $d\vec{a}(t)/dt$ en utilisant

$$\left.\frac{d\vec{a}(t')}{dt'}\right|_{t'=t_{n-1}} \approx \frac{\vec{a}(t_n)-\vec{a}(t_{n-1})}{t_n-t_{n-1}} = \vec{k}_n$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_n) &= \vec{v}(t_{n-1}) + \left[\vec{a}(t_{n-1}) + \frac{\vec{k}_n}{2}\Delta t_n\right]\Delta t_n \\ &= \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1})\Delta t_n + \frac{\vec{k}_n(\Delta t_n)^2}{2}\end{aligned}$$

Une fois $\vec{v}(t_n)$ connue pour tous les points, on répète le processus pour l'équation différentielle de la position et on détermine $\vec{r}(t_n)$.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Si on choisit des intervalles égaux de largeur Δt on aura alors

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_N) = \vec{v}(t_0) + \sum_{n=1}^{N} \left[\vec{a}(t_{n-1}) + \frac{\vec{k}_n}{2}\Delta t \right] \Delta t$$

- On peut aussi utiliser une relation semblable pour la position

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_N) = \vec{r}(t_0) + \sum_{n=1}^{N} \left[\vec{v}(t_{n-1}) + \frac{\vec{l}_n}{2}\Delta t \right] \Delta t$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{l}_n &= \frac{\vec{v}(t_n) - \vec{v}(t_{n-1})}{\Delta t} \\ &= \vec{a}(t_{n-1}) + \frac{\vec{k}_n}{2}\Delta t \end{aligned}$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Pour la position, on peut aussi utiliser le fait que dans l'intervalle n, $\vec{v}(t')$ est donné par

$$\vec{v}(t'') = \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1})(t'' - t_{n-1}) + \vec{k}_n \frac{(t'' - t_{n-1})^2}{2}$$

pour obtenir une solution plus précise (on a supposé que $\vec{v}(t'')$ avait une dépendance quadratique sur t'' au lieu de linéaire):

$$\vec{r}(t_n) = \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{v}(t_{n-1})\Delta t + \vec{a}(t_{n-1})\frac{(\Delta t)^2}{2} + \vec{k}_n \frac{(\Delta t)^3}{6}$$

Donc

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_N) = \vec{r}(t_0) + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \left[\vec{v}(t_{n-1}) + \Delta t \left(\frac{\vec{a}(t_{n-1})}{2} + \Delta t \frac{\vec{k}_n}{6} \right) \right]$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple d'une particule avec accélération constante.

Une particule de vitesse initiale $\vec{v} = (2,1,0)^T$ m/s localisée initialement au point $\vec{r} = (0,0,1)^T$ m subit une accélération constante $\vec{a} = (0,0,1)^T$ m/s^2. Déterminer la vitesse et la position de cette particule en fonction du temps t.

En utilisant les relations déjà dérivées, on obtient (N intervalles égaux $\Delta t = (t-t_0)/N$)

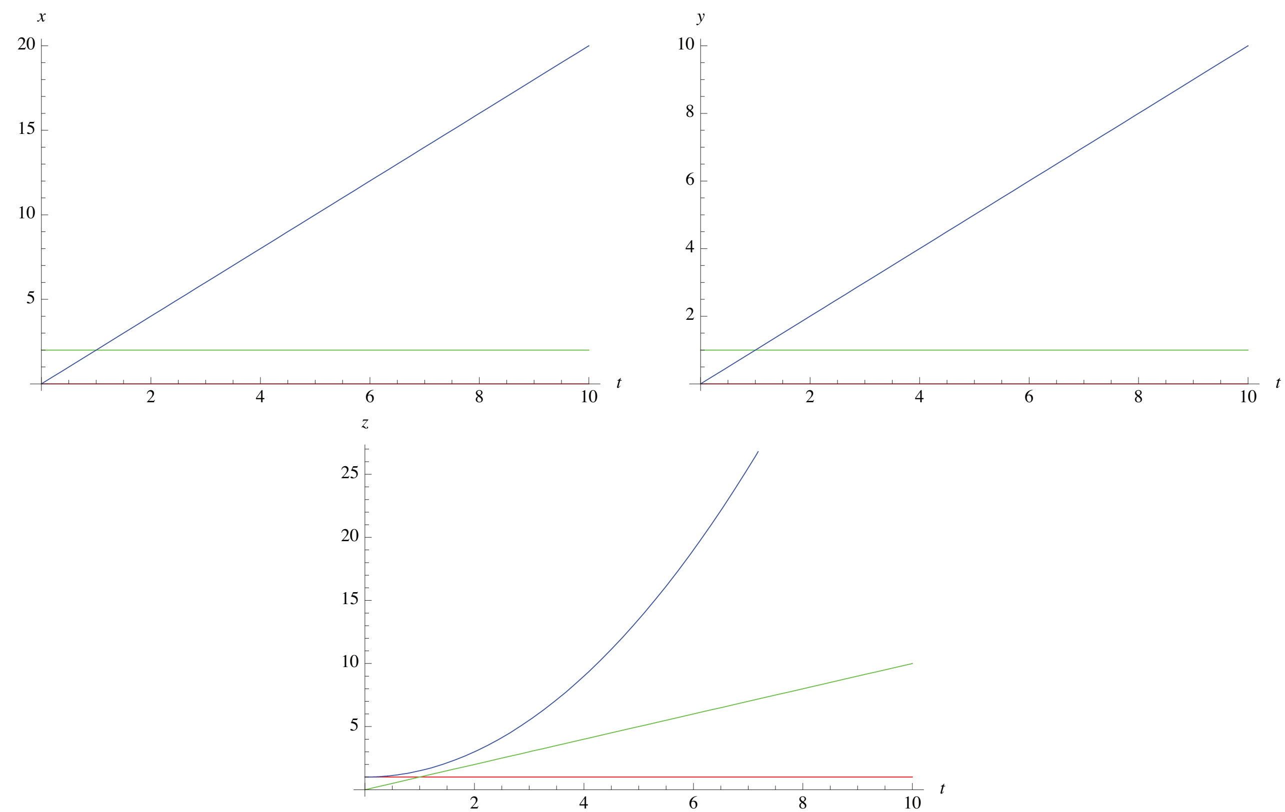
$$
\begin{aligned}
k_n &= 0 \\
\vec{v}(t) &= (2,1,0)^T + (0,0,1)^T N\Delta t = (2,1,0)^T + (0,0,1)^T (t-t_0) \\
\vec{r}(t) &= (0,0,1)^T + (2,1,0)^T (t-t_0) + (0,0,1)^T \frac{(t-t_0)^2}{2}
\end{aligned}
$$

quelle que soit la relation utilisée pour $\vec{r}_t$.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

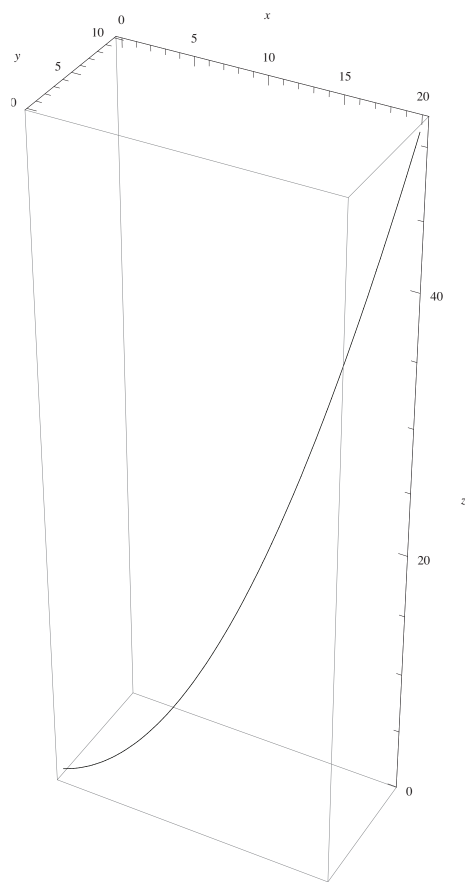
Ces deux relations nous permettent de déterminer la position et la vitesse à tout moment.



(position en bleu, vitesse en vert, accélération en rouge).

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Trajectoire en 3D.



Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple d'une particule avec accélération dépendante du temps.

Une particule de vitesse initiale $\vec{v} = (2, 1, 0)^T$ m/s localisée initialement au point $\vec{r} = (0, 0, 1)^T$ m subit une accélération linéairement dépendante du temps $\vec{a} = (0, 0, t)^T$ m/s^2. Déterminer la vitesse et la position de cette particule en fonction du temps t.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

En utilisant les relations déjà dérivées, on obtient (N intervalles égaux $\Delta t = (t_N - t_0)/N$)

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_n &= (0,0,1)^T \\
\vec{a}(t_0) &= (0,0,0)^T \\
\vec{a}(t_n) &= \vec{a}(t_{n-1}) + \vec{k}_n \Delta t = \vec{a}(t_0) + n\vec{k}_n \Delta t = n\vec{k}_n \Delta t \\
\vec{v}(t_n) &= \vec{v}(t_{n-1}) + \left[\vec{a}(t_{n-1}) + \frac{\vec{k}_n}{2}\Delta t\right]\Delta t \\
&= \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_0)\Delta t + \left(n - \frac{1}{2}\right)\vec{k}_n (\Delta t)^2 \\
&= \vec{v}(t_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{1}{2}\right)\vec{k}_n (\Delta t)^2 \\
&= \vec{v}(t_0) + \frac{\vec{k}_n (n\Delta t)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On obtient alors (solution exacte)

$$\vec{a}(t) = (0,0,1)^T(t-t_0)$$

$$\vec{v}(t) = (2,1,0)^T + \frac{(0,0,1)^T}{2}(t-t_0)^2$$

Maintenant, en utilisant

$$\vec{l}_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\vec{k}_n \Delta t$$

$$\vec{v}(t_{n-1}) = \vec{v}(t_0) + \frac{\vec{k}_n((n-1)\Delta t)^2}{2}$$

on obtient

$$\vec{r}(t) = (0,0,1)^T + (2,1,0)^T(t-t_0) + (0,0,1)^T(\Delta t)^3 \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{3}$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Le résultat final est (solution approximative)

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (0,0,1)^T + (2,1,0)^T(t-t_0) \\ &+ \frac{(0,0,1)^T(t-t_0)^3}{6}\left[1+\frac{3}{2N}+\frac{1}{2N^2}\right]\end{aligned}$$

que l'on peut comparer à

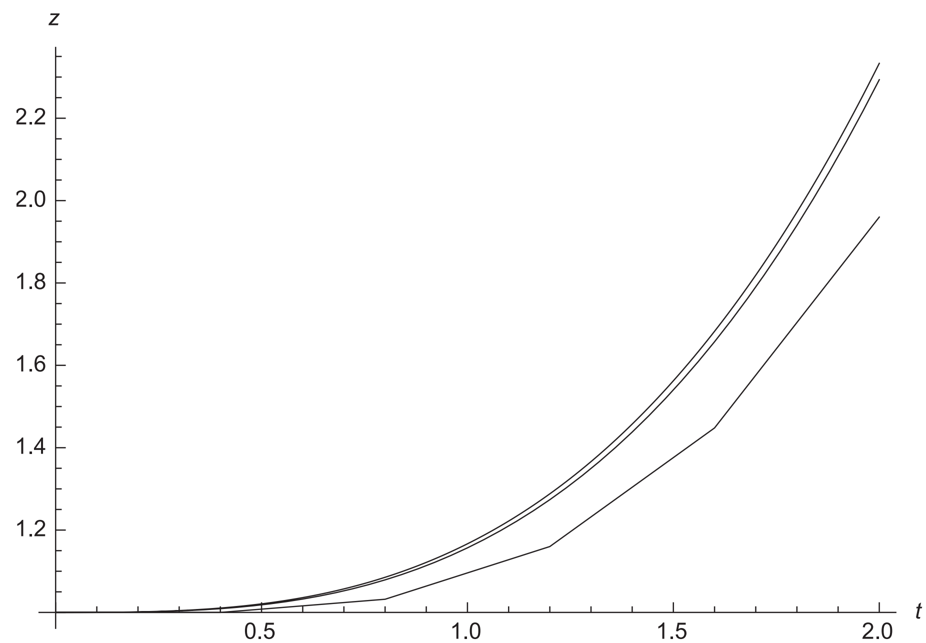
$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (0,0,1)^T + (2,1,0)^T(t-t_0) \\ &+ \frac{(0,0,1)^T(t-t_0)^3}{6}\end{aligned}$$

obtenu en utilisant la seconde méthode. Les deux solutions convergent vers la même valeur lorsque N tend vers l'infini. Ici, la seconde solution est exacte alors que la première est plus approximative.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Trajectoire en z (exact, 5 étapes, 20 étapes).



Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Le problème devient beaucoup plus difficile à résoudre si l'accélération dépend de la vitesse et de la position, ou si la vitesse dépend de la position. Dans la majorité des situations, il faut résoudre 6 équations différentielles couplées et des solutions analytiques ne peuvent être générées que pour un nombre de cas extrêmement limité. Pour toutes les autres situations, seules des solutions numériques sont possibles.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple d'une particule avec accélération dépendante de la vitesse.

Ici, on considère un mouvement en une dimension (direction x) où l'accélération est donnée par

$$a(t) = -\frac{v^2(t)}{k}$$

avec $k = 2$ m. La vitesse initiale de la particule est $v(t_0 = 0) = v_0 = 1$ m/s et sa position initiale est nulle ($x(t_0 = 0) = x_0 = 0$ m). Déterminer la trajectoire de cette particule.

Noter que la solution numérique proposée auparavant est difficile à implanter, car on ne connaît pas $a(t_n)$ puisqu'elle dépend de $v(t_n)$.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

L'équation différentielle pour l'accélération s'écrit alors

$$-\frac{v^2(t)}{k} = \frac{dv(t)}{dt}$$

Après intégration, on obtient

$$(t - t_0) = k\left[\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0}\right]$$

En utilisant les conditions initiales, la solution devient

$$v(t) = v_0\left[\frac{k}{k + v_0 t}\right]$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

La position est obtenue par intégration directe

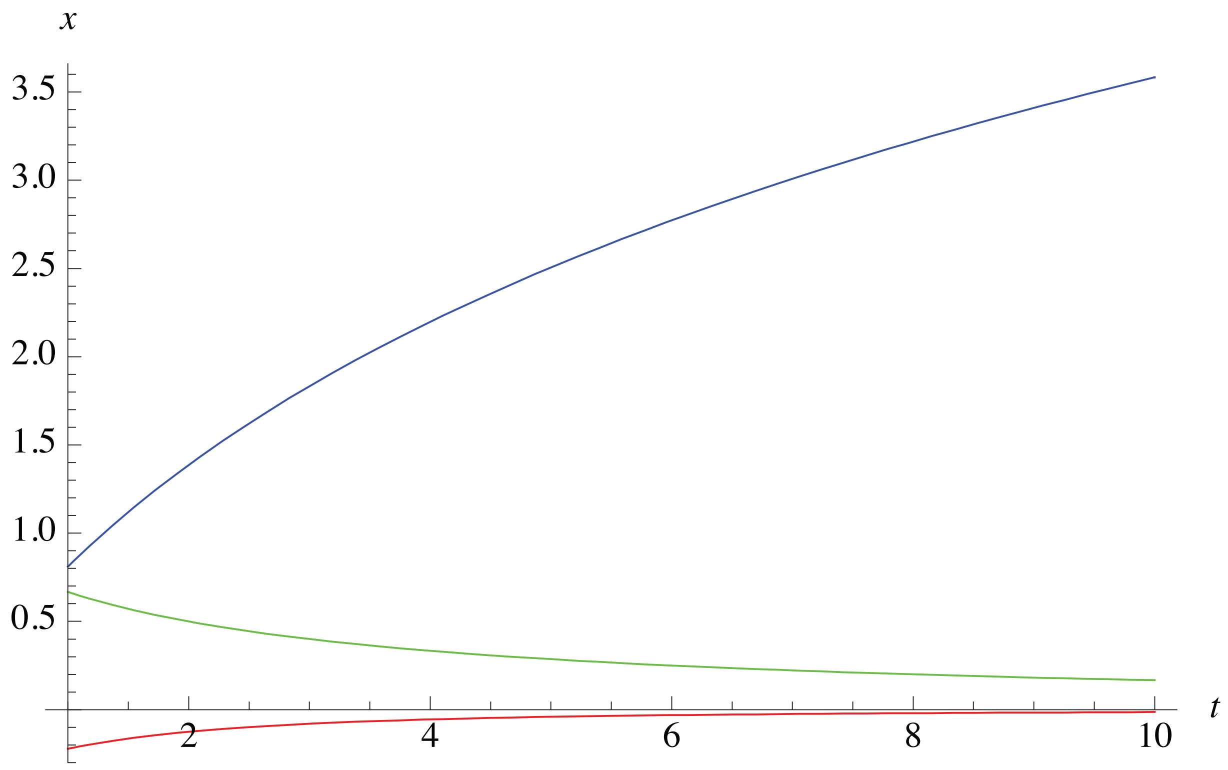
$$x(t) = k \ln \left[\frac{k + v_0 t}{k} \right]$$

L'accélération en fonction du temps est obtenue par dérivation de $v(t)$ ou en utilisant la définition de l'accélération.

$$a(t) = -v_0^2 \frac{k}{(k + v_0 t)^2}$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Comportement de cette particule pour les 10 premières secondes.



(position en bleu, vitesse en vert, accélération en rouge).

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires.

Nous présenterons ici deux autres techniques communément utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles.

1. La méthode d'Euler qui est de loin la plus simple, même si elle est relativement peu utilisée en physique du fait de sa faible précision (erreur d'ordre 1).
2. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (il existe aussi une version à l'ordre 2 qui est un peu moins précise) qui est un peu plus complexe à programmer, mais qui a une précision de beaucoup supérieure (erreur d'ordre 4).

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Les équations différentielles générales que nous devrons traiter ont la forme

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}\left[\vec{q}(t), t\right]$$

avec des conditions initiales

$$\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Dans le cas des équations de la cinématique, le vecteur $\vec{q}(t)$ a pour composantes

$$\vec{q}(t) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t), x(t), y(t), z(t)\right)^T$$

alors que $\vec{g}(t)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\vec{g}(t) &= \left(a_x\left[\vec{q}(t), t\right], a_y\left[\vec{q}(t), t\right], a_z\left[\vec{q}(t), t\right], v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right)^T \\
&= \left(a_x\left[\vec{q}(t), t\right], a_y\left[\vec{q}(t), t\right], a_z\left[\vec{q}(t), t\right], q_1(t), q_2(t), q_3(t)\right)^T
\end{aligned}$$

et on a supposé que l'accélération dans chaque direction pouvait dépendre de la vitesse, de la position et du temps.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Méthode d'Euler.

La solution au temps $t > t_0$ est obtenue par étapes en résolvant le problème sur n intervalles de temps consécutifs $t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_1 + \Delta t$ et ce jusqu'à $t = t_N = t_{N-1} + \Delta t$ avec

$$\Delta t = \frac{(t - t_0)}{N}$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Si l'intervalle de temps Δt est suffisamment petit, on peut supposer que $\vec{g}(\vec{q}(t'), t')$ demeure constant lors de l'évolution de t_{n-1} à t_n (avec $t_n = t_{n-1} + \Delta t$)

$$\vec{g}(\vec{q}(t'), t') = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}) \text{ pour } t_{n-1} \leq t' \leq t_n$$

Comme $\vec{g}(\vec{q}(t'), t')$ est constant sur chaque intervalle, on peut alors facilement intégrer les équations de la cinématique et obtenir

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \vec{g}\left[\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}\right] \Delta t + O(\Delta t^2)$$

qui est la solution désirée.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

En fait, la méthode d'Euler correspond à remplacer, dans les équations de la cinématique, la dérivée par une différence

$$\frac{d\vec{q}(t')}{dt'} = \frac{\vec{q}(t_n) - \vec{q}(t_{n-1})}{\Delta t}$$

Cette solution correspond au cas approximatif décrit précédemment avec une différence majeure : toutes les équations sont résolues en même temps (au lieu de résoudre pour $\vec{v}$ et ensuite pour $\vec{r}$). Notez que :

- l'erreur à chaque étape de l'algorithme est proportionnelle à $(\Delta t)^2$;
- l'erreur globale après N étapes (égales) est proportionnelle à Δt.

On peut aussi décider de choisir un intervalle de temps Δt_n différent à chaque étape.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Algorithme d'Euler en MATLAB.

```
function qs=SEDEulert0(q0,t0,Deltat,fonctiong)
%
% Solution ED dq/dt=fonctiong(q,t)
% Methode de Euler
% qs        : vecteur final [q(tf)]
% q0        : vecteur initial [q(ti)]
% Deltat    : intervalle de temps
% fonctiong : membre de droite de ED.
%             Ceci est un m-file de matlab
%             qui retourne [dq/dt(ti)]
%
qs=q0+feval(fonctiong,q0,t0)*Deltat;
```

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Utilisation pour résoudre l'équation du mouvement pour un corps en chute libre localisé initialement au point $(0, 0, 100)^T$ m.

```
qti=[0 0 0 0 0 100];
ti=0
Deltat=0.1;
qtf=SEDEulert0(qti,ti,Deltat,'Exfg') ;
```

Définition du fichier Exfg.m pour un corps en chute libre.

```
function g=Exfg(q0,t0)
%
% corps en chute libre
%
g=[0 0 -9.8 q0[1] q0[2] q0[3]) ;
```

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Méthode de Runge-Kutta.

Dans ce cas, on procède à quatre évaluations successives de $\vec{g}\left[\vec{q}(t), t\right]$

$$\vec{k}_1 = \vec{g}\left[\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}\right]\Delta t$$

$$\vec{k}_2 = \vec{g}\left[\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\vec{k}_1}{2}, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right]\Delta t$$

$$\vec{k}_3 = \vec{g}\left[\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\vec{k}_2}{2}, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right]\Delta t$$

$$\vec{k}_4 = \vec{g}\left[\vec{q}(t_{n-1}) + \vec{k}_3, t_{n-1} + \Delta t\right]\Delta t$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On utilise ensuite

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \frac{1}{6}\left[\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4\right] + O(\Delta t^5)$$

- L'erreur à chaque étape de l'algorithme est proportionnelle à $(\Delta t)^5$.
- L'erreur globale après n étapes (égales) est proportionnelle à $(\Delta t)^4$.

Cette méthode de résolution est généralement très précise.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Algorithme Runge-Kutta en MATLAB.

```
function qs=SEDRK4t0(q0,t0,Deltat,fonctiong)
%
% Solution ED dq/dt=fonctiong(q)
% Methode de Runge-Kutta d'ordre 4
% qs        : vecteur final [q(tf)]
% q0        : vecteur initial [q(ti)]
% Deltat    : intervalle de temps
% fonctiong : membre de droite de ED.
%             Ceci est un m-file de matlab
%             qui retourne [dq/dt(ti)]
%
k1=feval(fonctiong,q0,t0)*Deltat;
k2=feval(fonctiong,q0+k1/2,t0+Deltat/2)*Deltat;
k3=feval(fonctiong,q0+k2/2,t0+Deltat/2)*Deltat;
k4=feval(fonctiong,q0+k3,t0+Deltat)*Deltat;
qs=q0+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Quelques considérations :

- si le but est de déterminer la solution à un temps particulier (quel qu'il soit) il est toujours préférable d'utiliser la solution analytique si elle est disponible ;
- si le but est de tracer la trajectoire d'un solide, il faut de toute façon évaluer la solution à de multiples pas de temps entre t_0 et t. Lorsque la solution analytique est complexe, il est alors souvent plus rapide (en temps de calcul) de déterminer la solution numérique que la solution exacte.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Retour sur l'exemple avec accélération dépendante de la vitesse dont la solution était

$$x(t_i) = k \ln \left[\frac{k + v_0 t_i}{k} \right]$$

- Si on désire tracer la trajectoire à tous les pas de temps $\Delta t_0 = 0.01$ s pour $0 < t < 10$ secondes, la solution d'Euler sur chaque pas de temps sera très précise et demandera 5 multiplications et 2 additions alors que la solution analytique demandera 2 multiplications, 1 addition, 1 quotient et un logarithme. La solution d'Euler est alors plus rapide tout en étant à peu près aussi précise.
- De plus, la solution d'Euler inclut déjà la vitesse alors que des calculs additionnels sont requis pour la méthode analytique (2 multiplications, 1 addition et un quotient).

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple d'une particule accélérée en 3D.

Ce problème est une généralisation de l'exemple avec accélération dépendante de la vitesse pour une trajectoire 3D. On considère des accélérations

$$(a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = (-v_x^2(t)/2, -v_y^2(t), -v_z^2(t)/3)$$

La vitesse initiale de la particule est $\vec{v}(t_0) = (1,1,1)^T$ m/s et la position initiale est $\vec{r}(t_0) = (0,0,0)^T$ m. Il s'agit de tracer la trajectoire de cette particule à toutes les secondes pour les 10 premières secondes.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution par algorithme d'Euler.

```
function [qsol]=SolEx3Euler(tlimits,nbi)
% Chapitre 3, exemple 3 en 3-D.
% Solutions Euler
% Utilise la fonction Matlab : GFunctionEx3.m
% De tlimits=[t_i t_f] avec nbi étapes
qsol=zeros(nbi+1,6);
qsol(1,:)=[1 1 1 0 0 0];
Deltat=(tlimits(2)-tlimits(1))/(nbi);
t0=tlimits(1);
% Solution
for i=1:nbi
  qsol(i+1,:)=SEDEulert0(qsol(i,:),t0,Deltat,...
              'GFunctionEx3');
  t0=t0+Deltat;
end;
```

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution par algorithme Runge-Kutta.

```
function [qsol]=SolEx3RK4(tlimits,nbi)
% Chapitre 3, exemple 3 en 3-D.
% Solutions Runge-Kutta
% Utilise la fonction Matlab : GFunctionEx3.m
% De tlimits=[t_i t_f] avec nbi étapes
qsol=zeros(nbi+1,6);
qsol(1,:)=[1 1 1 0 0 0];
Deltat=(tlimits(2)-tlimits(1))/(nbi);
t0=tlimits(1);
% Solution
for i=1:nbi
  qsol(i+1,:)=SEDRK4t0(qsol(i,:),t0,Deltat,...
                'GFunctionEx3');
  t0=t0+Deltat;
end;
```

Résolution des équations de la cinématique des particules

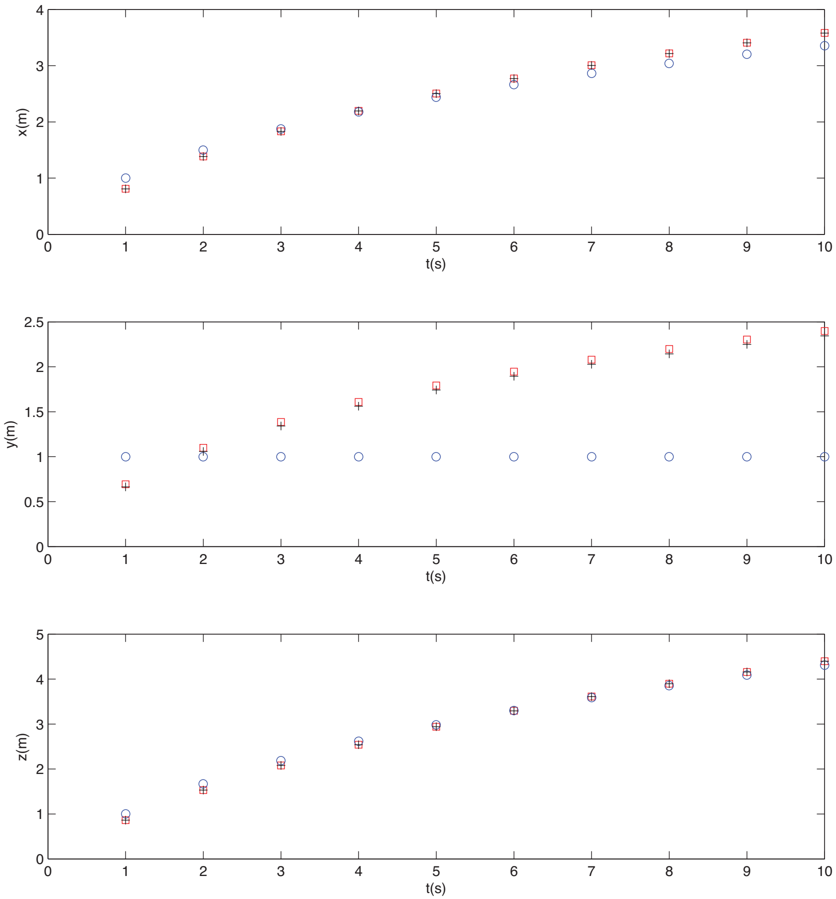
Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Fonction externe (`fonctiong`) pour algorithme d'Euler et de Runge-Kutta en MATLAB.

```
function g=GFunctionEx3(q0,t0)
%
%  Exemple en 3-D.
%  Valeur differente de k dans chaque direction.
%  Acceleration et vitesse pour resolution
%  approximative des equations de la cinematique
%  q0: vecteur initial vitesse, position
%  g : vecteur initial accélération, vitesse
%
g=[-q0(1)*q0(1)/2 -q0(2)*q0(2)/1 -q0(3)*q0(3)/3 ...
     q0(1)            q0(2)            q0(2)           ];
```

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

$N = 10$ intervalles de temps.

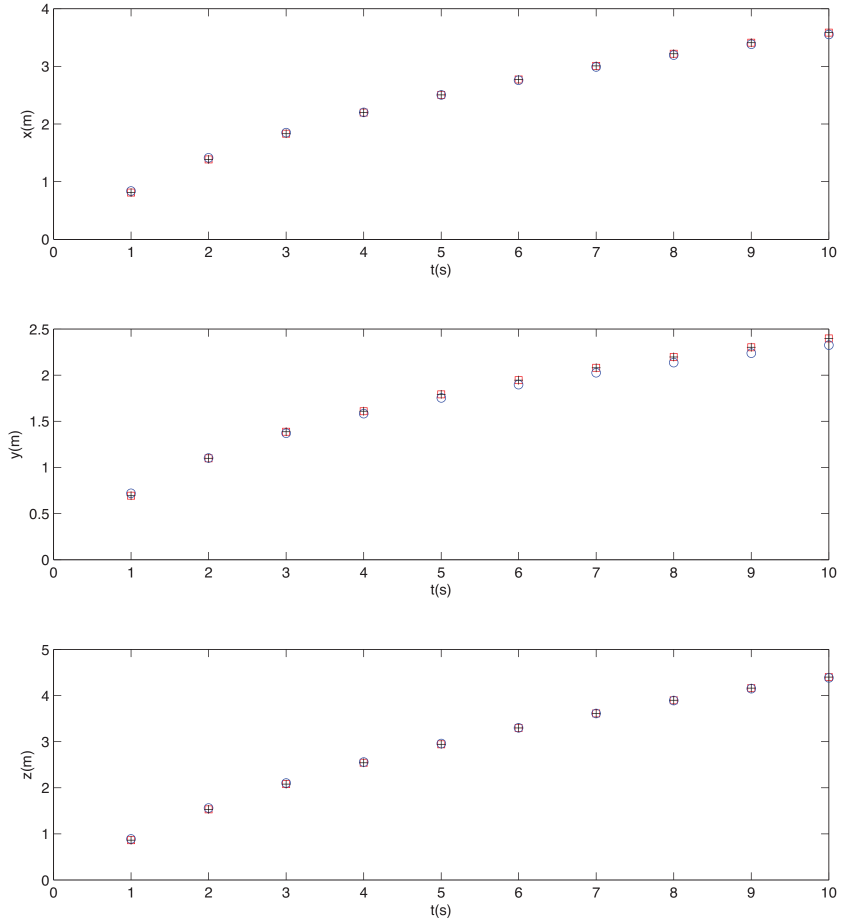


(exact : rouge ; Euler ; bleu ; RK4 : noir).

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

$N = 40$ intervalles de temps.



(exact : rouge ; Euler ; bleu ; RK4 : noir).

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution numérique avec contrôle d'erreur.

Si on désire des solutions numériques à intervalles fixes et qu'on ne veut pas se préoccuper des sous-intervalles de calcul requis par la solution numérique tout en demandant un degré de précision minimal ϵ, il faut alors programmer dans notre routine de résolution numérique un algorithme de contrôle d'erreur.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple d'algorithme de contrôle d'erreur simple.

- On spécifie ΔT, le pas de temps associé à la solution finale ($t = t_0 + \Delta T$).
- On spécifie ϵ, la précision relative de la solution.
- Pour chaque essai m le pas de temps sera

$$\Delta t_m = \frac{\Delta T}{2^{m-1}}$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

La procédure de contrôle d'erreur est alors (on démarre avec $m = 1$) :

1. résoudre le problème avec Δt_m et obtenir $\vec{q}_a(t)$;
2. résoudre le problème avec Δt_{m+1} et obtenir $\vec{q}_b(t)$;
3. évaluer l'erreur relative

$$E = 2\frac{|\vec{q}_b(t) - \vec{q}_a(t)|}{|\vec{q}_b(t) + \vec{q}_a(t)|}$$

4. si $E > \epsilon$, redéfinir $\vec{q}_a(t) = \vec{q}_b(t)$ et $m = m + 1$ et retourner à 2 ;
5. sinon $E < \epsilon$ et la solution désirée est $\vec{q}_b(t)$.

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Amélioration de la solution (interpolation de Richardson).

- Pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 on sait que l'erreur globale est d'ordre $(\Delta t)^4$, on supposera donc que

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_a(t, \Delta t_m) + c(\Delta t_m)^4$$

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) + c(\Delta t_{m+1})^4 = \vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) + c(\Delta t_m/2)^4$$

- On peut utiliser ces deux relations et obtenir une approximation pour c (supposé constant)

$$c = \frac{16}{15(\Delta t_m)^4}\left(\vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) - \vec{q}_a(t, \Delta t_m)\right)$$

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Une solution améliorée sera alors donnée par

$$\vec{q}_c(t) = \vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) + \frac{\vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) - \vec{q}_a(t, \Delta t_m)}{15}$$

- On peut aussi utiliser cette information afin de déterminer de façon mieux adaptée le prochain intervalle de temps à considérer.

$$\Delta t < \left(\frac{\epsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Algorithme Runge-Kutta avec contrôle d'erreur et interpolation de Richardson.

```
function [qs count]=SEDRK4c(q0,t0,Deltat,Err,fonctiong)
% Solution ED dq/dt=fonctiong(q)
% Methode de Runge-Kutta d'ordre 4
% Contrôle d'erreur et interpolation Richardson
% qs        : vecteur final (v,r)
% q0        : vecteur initial (v,r)
% Deltat    : intervalle de temps
% Err       : Precision requise (erreur relative)
% fonctiong : membre de droite de ED.
% maxit     : nombre maximum itérations
maxit=100;
ndiv=2;
nbsubi=1;
count=1;
nbel=length(q0);
```

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

```
% Solution sur intervalle complet
qs=SEDRK4t0(q0,t0,Deltat,fg);
% Debut itération
while nbsubi < maxit
  nbsubi=nbsubi*ndiv;
  q2=q0;
  t2=t0
  Deltat2=Deltat/nbsubi;
% Solution sur pas plus fin
  for ietape=1:nbsubi
    count=count+1;
    q2=SEDRK4t0(q2,t2,Deltat2,fg);
    t2=t2+Deltat2
  end;
  avgsol=(q2+qs)/2.;
  ErrSol=(q2-qs);
```

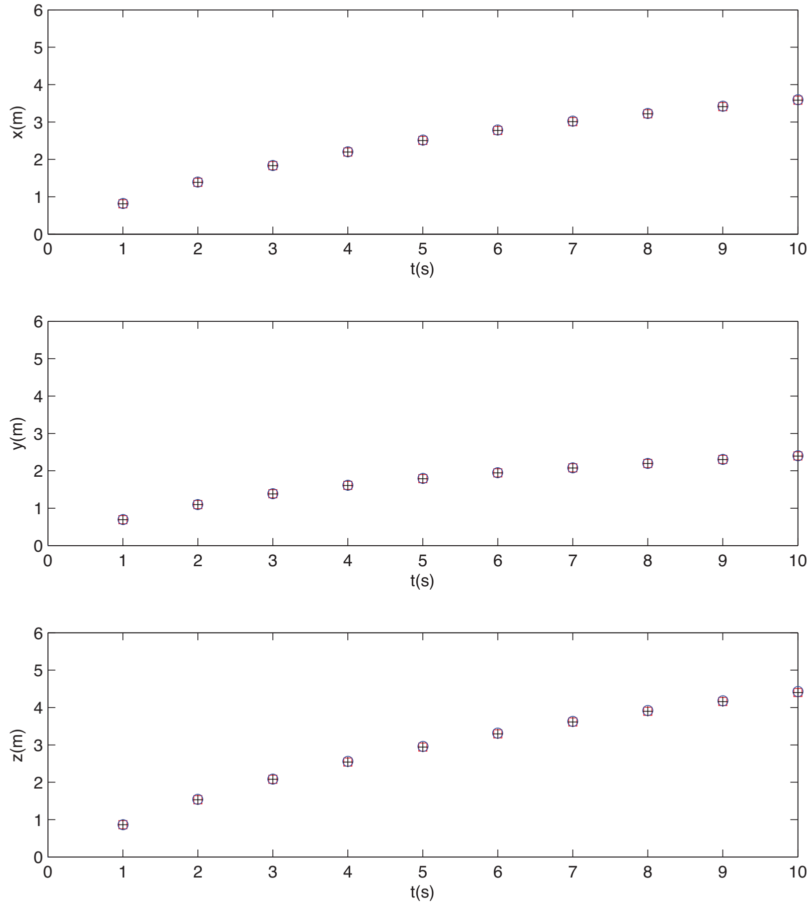
Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

```
% Evaluation erreur et la solution moyenne
  MaxErr=norm(ErrSol)/norm(avgsol);
  qs=q2;
  if MaxErr < Err
%  Extrapolation de Richardson
    qs=qs+ErrSol/15.;
    break;
  end;
  if nbsubi >= maxit
    warning('Pas de convergence');
    break;
  end;
end;
```

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution avec contrôle d'erreur.



(exact : rouge ; Euler ; bleu ; RK4 : noir).

Résolution des équations de la cinématique des particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Matlab possède aussi des fonctions intrinsèques pour résoudre numériquement les équations différentielles ordinaires :

ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, ode45, ode23, ode113.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Cinématique des solides.

Les méthodes de résolutions que nous venons de décrire demeurent utiles lorsque l'on étudie le déplacement des solides. Cependant :

- les équations de la cinématique ponctuelle sont alors appliquées au centre de masse ;
- pour le mouvement de rotation du solide nous devons aussi utiliser les équations suivantes

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t,\vec{v},\vec{r},\vec{\omega}(t),\boldsymbol{R}(t))$$
$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Ces deux équations sont très semblables à celles déjà présentées reliant la position, la vitesse linéaire et l'accélération et peuvent être résolues de la même façon (exactement, méthode de Euler ou de Runge-Kutta). En fait, si on utilise la forme générale pour les équations différentielles

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}[\vec{q}(t), t]$$

on aura

$$\begin{aligned}\vec{q}(t) = (&\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t),\\ &R_{xx}(t), R_{xy}(t), R_{xz}(t),\\ &R_{yx}(t), R_{yy}(t), R_{yz}(t),\\ &R_{zx}(t), R_{zy}(t), R_{zz}(t))^T\end{aligned}$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

La forme de $\vec{g}[\vec{q}(t), t]$ est un peu plus complexe

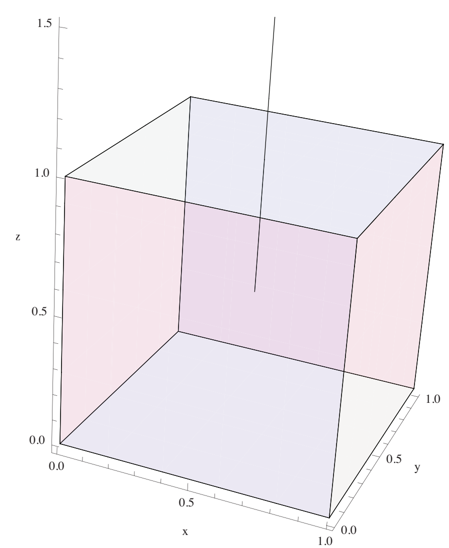
$$
\begin{aligned}
\vec{g}[\vec{q}(t),(t)] = (&\alpha_x[\vec{\omega}(t),\boldsymbol{R}(t),t],\alpha_y[\vec{\omega}(t),\boldsymbol{R}(t),t],\alpha_z[\vec{\omega}(t),\boldsymbol{R}(t),t],\\
&\omega_y(t)R_{zx}(t)-\omega_z(t)R_{yx}(t),\omega_y(t)R_{zy}(t)-\omega_z(t)R_{yy}(t),\\
&\quad\omega_y(t)R_{zz}(t)-\omega_z(t)R_{yz}(t)\\
&\omega_z(t)R_{xx}(t)-\omega_x(t)R_{zx}(t),\omega_z(t)R_{xy}(t)-\omega_x(t)R_{zy}(t),\\
&\quad\omega_z(t)R_{xz}(t)-\omega_x(t)R_{xz}(t)\\
&\omega_x(t)R_{yx}(t)-\omega_y(t)R_{xx}(t),\omega_x(t)R_{yy}(t)-\omega_y(t)R_{xy}(t),\\
&\quad\omega_x(t)R_{yz}(t)-\omega_y(t)R_{xz}(t))^T
\end{aligned}
$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Rotations dans un plan 2-D.

Pour un solide en rotation dans un plan 2-D (plan $x - y$), le mouvement de rotation doit nécessairement se faire autour du troisième axe (z).



Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Ici on supposera que l'accélération angulaire est nulle et que la vitesse angulaire initiale est donnée par

$$\vec{\omega}(t_0) = (0, 0, \omega_z)^T$$

Il tourne donc initialement autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire ω_z rad/s.

- On peut alors découpler l'équation différentielle pour la vitesse angulaire et celle pour la matrice de rotation. On aura donc pour la vitesse angulaire

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = 0$$

- La solution est alors $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega_z)^T$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Examinons maintenant l'équation différentielle pour la matrice de rotation

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

- Le produit $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t)$ devient

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} -\omega_z(t)R_{yx}(t) & -\omega_z(t)R_{yy}(t) & -\omega_z(t)R_{yz}(t) \\ \omega_z(t)R_{xx}(t) & \omega_z(t)R_{xy}(t) & \omega_z(t)R_{xz}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La condition initiale sera

$$\boldsymbol{R}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On aura donc les équations suivantes à résoudre

$$dR_{xx}/dt = -\omega_z(t)R_{yx}(t)\;; \qquad R_{xx}(t_0) = 1$$
$$dR_{xy}/dt = -\omega_z(t)R_{yy}(t)\;; \qquad R_{xy}(t_0) = 0$$
$$dR_{xz}/dt = -\omega_z(t)R_{yz}(t)\;; \qquad R_{xz}(t_0) = 0$$
$$dR_{yx}/dt = \omega_z(t)R_{xx}(t)\;; \qquad R_{yx}(t_0) = 0$$
$$dR_{yy}/dt = \omega_z(t)R_{xy}(t)\;; \qquad R_{yy}(t_0) = 1$$
$$dR_{yz}/dt = \omega_z(t)R_{xz}(t)\;; \qquad R_{yz}(t_0) = 0$$
$$dR_{zx}/dt = 0\;; \qquad R_{zx}(t_0) = 0$$
$$dR_{zy}/dt = 0\;; \qquad R_{zy}(t_0) = 0$$
$$dR_{zz}/dt = 0\;; \qquad R_{zz}(t_0) = 1$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Les trois dernières équations sont indépendantes et donnent

$$dR_{zx}/dt = 0$$
$$dR_{zy}/dt = 0$$
$$dR_{zz}/dt = 0$$

et ont pour solution

$$R_{zx} = 0$$
$$R_{zy} = 0$$
$$R_{zz} = 1$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On peut combiner les équations pour R_{xx} et R_{yx} pour obtenir

$$d^2 R_{xx}/dt^2 = -\omega_z^2 R_{xx}$$

qui a pour solution ($R_{xx}(t_0) = 1$ et $R_{yx}(t_0) = 0$)

$$R_{xx}(t) = \cos(\omega_z t)$$
$$R_{yx}(t) = \sin(\omega_z t)$$

On peut procéder de la même façon pour R_{yy} et R_{xy} et obtenir

$$R_{yy}(t) = \cos(\omega_z t)$$
$$R_{xy}(t) = -\sin(\omega_z t)$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On peut combiner les équations pour R_{yz} et R_{xz} pour obtenir

$$d^2 R_{yz}/dt^2 = -\omega_z^2 R_{yz}$$

qui a pour solution $(R_{yz}(t_0) = R_{xx}(t_0) = 0)$

$$R_{yz}(t) = 0$$
$$R_{xz}(t) = 0$$

Donc

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & -\sin(\omega_z t) & 0 \\ \sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Notez que cette solution est identique à celle qu'on aurait obtenue en utilisant

$$d\vec{\Omega}(t)/dt = \vec{\omega}$$

qui est

$$\vec{\Omega}(t) = (0, 0, \omega_z t)^T$$

La matrice correspondant à une rotation de $\omega_z t$ autour de l'axe des z étant bien sûr

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & -\sin(\omega_z t) & 0 \\ \sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Comme on vient de le voir, on doit nécessairement utiliser une notation vectorielle pour décrire le mouvement des solides en rotation en 3D, car les axes de référence du système local ne sont pas nécessairement parallèles aux axes de référence du système global et des mouvements de rotations autour de tous les axes sont permis.
- De plus, même pour les cas simples, la résolution des équations de la cinématique pour $\boldsymbol{R}(t)$ s'avère difficile et il est souvent plus simple d'utiliser des méthodes approximatives pour résoudre ces équations.

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

L'avantage de la formulation que nous avons proposée est qu'elle peut être résolue simplement en utilisant les méthodes d'Euler ou de Runge-Kutta décrites au début du chapitre. Ici, on utilisera cependant un vecteur contenant 12 inconnues (18, si le mouvement angulaire et linéaire du centre de masse sont couplés)

$$
\begin{aligned}
q = (&\omega_x, \omega_y, \omega_z, \\
&R_{xx}, R_{xy}, R_{xz}, \\
&R_{yx}, R_{yy}, R_{yz}, \\
&R_{zx}, R_{zy}, R_{zz})^T \\
g(q) = (&\alpha_x(q), \alpha_y(q), \alpha_z(q), \\
&q(2)q(10) - q(3)q(7), q(2)q(11) - q(3)q(8), q(2)q(12) - q(3)q(9), \\
&q(3)q(4) - q(1)q(10), q(3)q(5) - q(1)q(11), q(3)q(6) - q(1)q(12), \\
&q(1)q(7) - q(2)q(4), q(1)q(8) - q(2)q(5), q(1)q(9) - q(2)q(6))^T
\end{aligned}
$$

```
q_t=SEDEulert0(q(t_0),t_0,t-t_0,'g(q)') ;
```

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple d'un parallélépipède tournant sur lui même en 3D.

Considérons un parallélépipède de $1.0 \times 2.0 \times 3.0$ m^3 dont le centre de masse est initialement $\vec{r}_c = (0, 0, 10)^T$ m.

1. La vitesse initiale de son centre de masse est de $\vec{v}_c = (1, 0, 0)^T$ m/s.
2. Il subit une accélération linéaire de $\vec{a} = (0, 0, -1)^T$ m/s^2.
3. Il subit un mouvement de rotation uniforme sur lui-même autour de l'axe $x = z$ avec une vitesse angulaire de $\pi/10$ rad/s. Il ne subit aucune accélération angulaire.

Tracer la trajectoire du parallélépipède pour une période de $t = 10$ s.

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Résolution.

1. Mouvement de centre de masse résolu directement

$$\vec{r}(t) = (0 + t, 0, 10 - t^2/2)^T$$

2. Pas d'accélération angulaire donc

$$\vec{\omega}(t) = (0, 0, \pi/10)^T$$

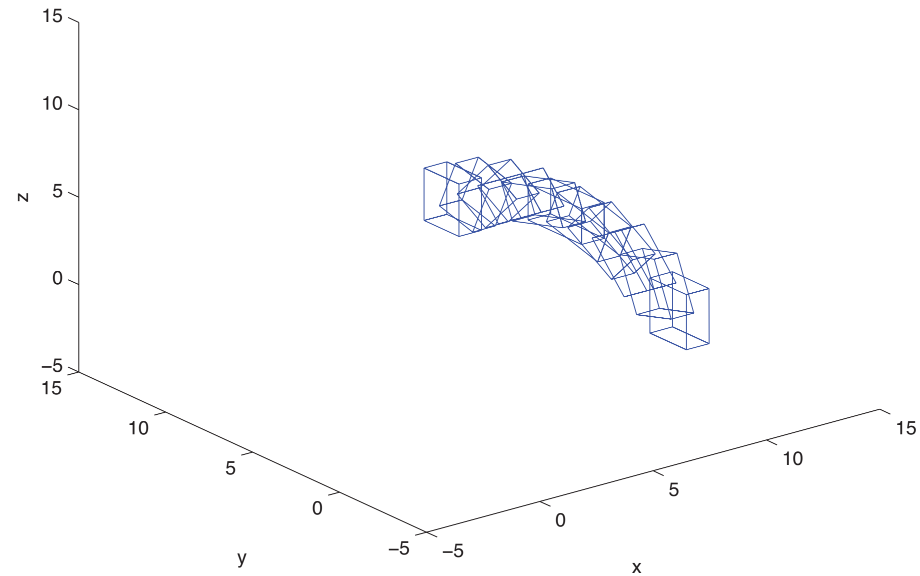
3. Pour la matrice de rotation, ($\boldsymbol{R}(0) = \mathbf{1}$) on utilise la méthode d'Euler avec intervalle de temps de $\Delta t = 0.1$ s.

On trace le parallélépipède à chaque seconde ($\Delta t = 1.0$ s).

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

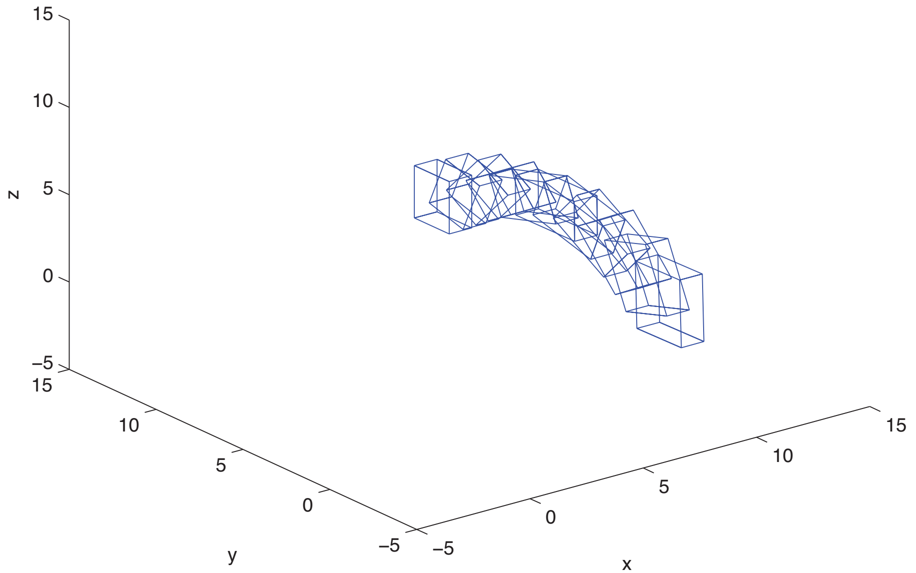
On peut observer le comportement du parallélépipède pour les 10 premières secondes dans la figure suivante (Méthode d'Euler avec $\Delta t_E = 0.1$ s).



Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Si on utilise $\Delta t_E = 0.5$ s on obtient.



- La trajectoire diffère très peu.
- Le parallélépipède change cependant de dimensions (il devient plus grand).

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution

$$\boldsymbol{R}(0.5) = \begin{pmatrix} 1.00000 & -0.15708 & 0 \\ 0.15708 & 1.00000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{R}(0.5)) = 1.0247$$

$$\boldsymbol{R}(1.0) = \begin{pmatrix} 0.97533 & -0.31416 & 0 \\ 0.31416 & 0.97533 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{R}(1.0)) = 1.04996$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

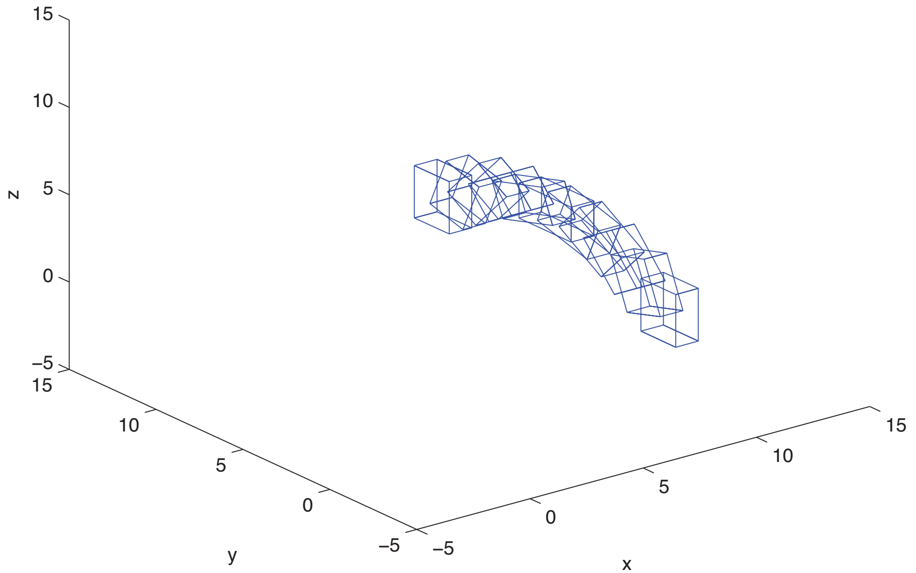
Commentaires

- La matrice $\boldsymbol{R}(t)$ n'est plus vraiment une matrice de rotation, car $\det(\boldsymbol{R}(t)) \neq 1$.
- Le mouvement de rotation est relativement précis, mais les dimensions du parallélépipède ne sont plus respectées.

Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Si on utilise $\Delta t_E = 0.01$s on obtient.



Résolution des équations de la cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Au lieu de passer par les matrices de rotation, on peut aussi utiliser les quaternions qui permettent de résoudre les équations du mouvement de manière beaucoup plus efficace, car :

- on évite les problèmes reliés aux changements de dimensions du solide :
- on résout 4 équations pour les quaternions au lieu de 9 pour la matrice $\mathbf{R}$.

Dans les deux prochaines sections nous :

- introduirons les quaternions ;
- discuterons de leur utilité pour analyser la cinétique angulaire des solides.

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Les quaternions sont des entités mathématiques qui, bien qu'ayant été développées il y a près de 100 ans par William Hamilton lors de ses travaux sur les nombres complexes, ont été peu utilisées avant l'avènement des méthodes de simulation par ordinateur.

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Un quaternion est en réalité un vecteur, en quatre dimensions, noté $\vec{\vec{q}}$ et défini comme suit

$$\vec{\vec{q}} = (q_0, q_x, q_y, q_z)^T$$

- Les composantes q_x, q_y et q_z du quaternion correspondent aux directions x, y et z d'un vecteur en 3-D.
- La composante q_0 correspond à une direction w perpendiculaire aux trois autres.
- Ainsi, un vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ en trois dimensions pourra être transformé en quaternion $\vec{\vec{v}}$ en utilisant la relation suivante

$$\vec{\vec{v}} = (0, v_x, v_y, v_z)^T = (0, \vec{v}^T)^T$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Opérations sur les quaternions.

- Somme

$$\vec{\vec{q}}^{\,1} + \vec{\vec{q}}^{\,2} = (q_0^1 + q_0^2, q_x^1 + q_x^2, q_y^1 + q_y^2, q_z^1 + q_z^2)^T$$
$$= (q_0^1 + q_0^2, (\vec{q}^{\,1} + \vec{q}^{\,2})^T)^T$$

- Soustraction

$$\vec{\vec{q}}^{\,1} - \vec{\vec{q}}^{\,2} = (q_0^1 - q_0^2, q_x^1 - q_x^2, q_y^1 - q_y^2, q_z^1 - q_z^2)^T$$
$$= (q_0^1 - q_0^2, (\vec{q}^{\,1} - \vec{q}^{\,2})^T)^T$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Produit (de Hamilton)

$$\begin{aligned}\vec{\vec{q}}^{\,1}\vec{\vec{q}}^{\,2} = (&q_0^1 q_0^2 - q_x^1 q_x^2 - q_y^1 q_y^2 - q_z^1 q_z^2,\\ &q_0^1 q_x^2 + q_x^1 q_0^2 + q_y^1 q_z^2 - q_z^1 q_y^2,\\ &q_0^1 q_y^2 + q_y^1 q_0^2 + q_z^1 q_x^2 - q_x^1 q_z^2,\\ &q_0^1 q_z^2 + q_z^1 q_0^2 + q_x^1 q_y^2 - q_y^1 q_x^2))^T\\ = (&q_0^1 q_0^2 - \vec{q}^{\,1}\cdot\vec{q}^{\,2}, q_0^1(\vec{q}^{\,2})^T + q_0^2(\vec{q}^{\,1})^T + (\vec{q}^{\,1}\times\vec{q}^{\,2})^T)^T\end{aligned}$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- La multiplication n'est pas commutative en général

$$\vec{\vec{q}}^{\,1}\vec{\vec{q}}^{\,2} \neq \vec{\vec{q}}^{\,2}\vec{\vec{q}}^{\,1}$$

- La commutativité implique

$$\vec{q}^{\,1} \times \vec{q}^{\,2} = \vec{q}^{\,1} \times \vec{q}^{\,2}$$

et donc que $\vec{q}^{\,1}$ et $\vec{q}^{\,2}$ soient colinéaires (parallèles).

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Conjugaison

$$\begin{aligned}(\vec{\vec{q}})^* &= (q_0, -q_x, -q_y, -q_z)^T \\ &= (q_0, -\vec{q}^{\,T})^T\end{aligned}$$

- Produit scalaire généralisé

$$\vec{\vec{q}}^{\,1} \cdot \vec{\vec{q}}^{\,2} = \vec{\vec{q}}^{\,1} (\vec{\vec{q}}^{\,2})^* = q_0^1 q_0^2 + \vec{q}^{\,1} \cdot \vec{q}^{\,2}$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Norme

$$||\vec{\vec{q}}|| = \sqrt{\vec{\vec{q}}(\vec{\vec{q}})^*} = \sqrt{(q_0)^2 + \vec{q} \cdot \vec{q}} = \sqrt{(q_0)^2 + ||\vec{q}||^2}$$

- Inverse

$$(\vec{\vec{q}})^{-1} = \frac{(\vec{\vec{q}})^*}{||\vec{\vec{q}}||^2}$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Division à gauche

$$\vec{\vec{r}} = (\vec{\vec{q}})^{-1}\vec{\vec{p}}$$

- Division à droite

$$\vec{\vec{s}} = \vec{\vec{p}}(\vec{\vec{q}})^{-1}$$

- En général, comme la multiplication ne commute pas,

$$\vec{\vec{r}} \neq \vec{\vec{s}}$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Pour les problèmes où on doit tenir compte des rotations de solides d'un angle θ par rapport à un axe arbitraire représenté par le vecteur unitaire $\vec{u}$, ce qui nous intéressera particulièrement c'est le quaternion unitaire $\vec{\vec{r}}$ défini comme suit

$$\vec{\vec{r}} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\,\vec{u}^T)^T$$

dont la norme est

$$||\vec{\vec{r}}|| = \sqrt{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)||\vec{u}||^2} = 1$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On peut utiliser ce quaternion pour tourner un vecteur arbitraire $\vec{v}$ dans l'espace en utilisant la relation

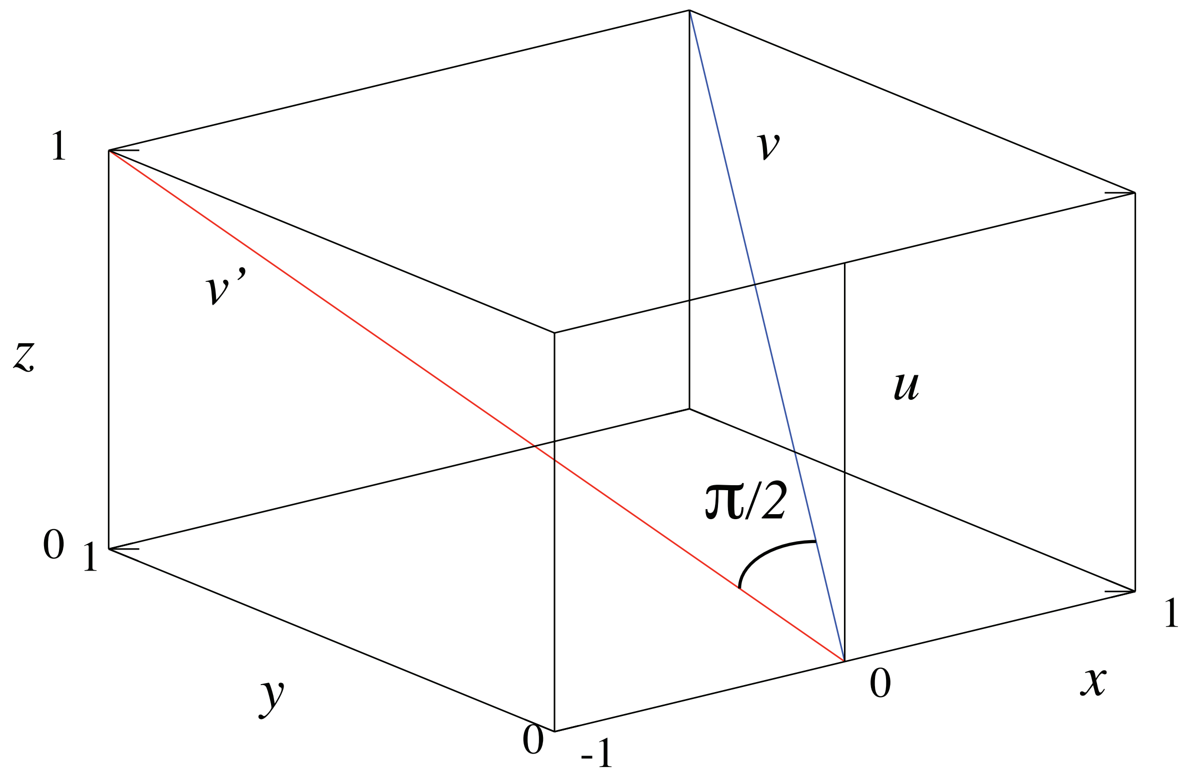
$$\vec{\vec{q}}\,' = (0, (\vec{v}')^T)^T = \vec{\vec{r}}\,(0, \vec{v}^T)^T\,\vec{\vec{r}}^* = \vec{\vec{r}}\,\vec{\vec{q}}\,\vec{\vec{r}}^*$$

avec

$$\vec{\vec{r}}^* = (\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)\vec{u}^T)^T$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple de rotation du vecteur $\vec{v} = (1,1,1)^T$ de $\pi/2$ autour de l'axe $u = (0,0,1)^T$.



Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Définissons le quaternion original

$$\vec{\vec{q}} = (0, 1, 1, 1)^T$$

- Définissons le quaternion de rotation et son conjugué

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{r}} &= (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\vec{u}^T)^T = ((\cos(\pi/4), 0, 0, \sin(\pi/4))^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T \\
\vec{\vec{r}}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)^T
\end{aligned}$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

- Évaluons $\vec{\vec{a}} = \vec{\vec{q}}\,\vec{\vec{r}}^{\,*}$

$$\vec{\vec{a}} = \vec{\vec{q}}\,\vec{\vec{r}}^{\,*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0-0-0+1 \\ 0+1-1-0 \\ 0+1+0+1 \\ 0+1+0-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Évaluons $\vec{\vec{q}}\,' = \vec{\vec{r}}\,\vec{\vec{a}}$

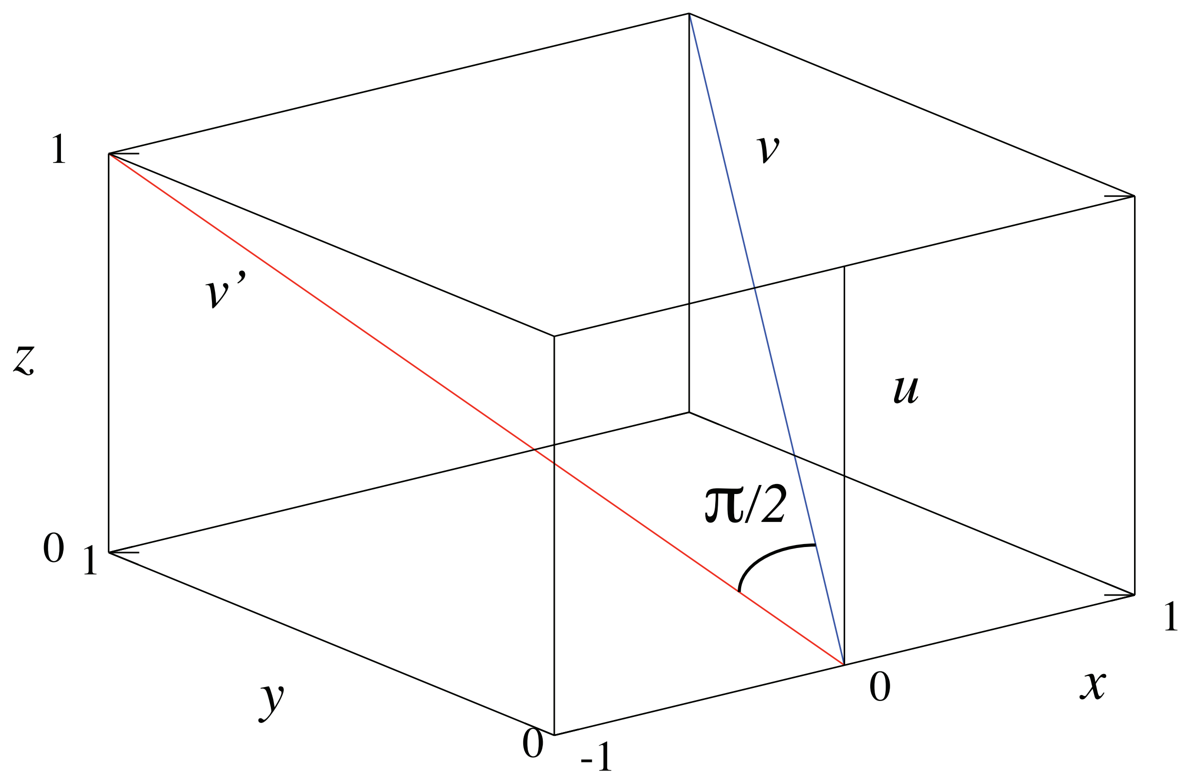
$$\vec{\vec{q}}\,' = \vec{\vec{r}}\,\vec{\vec{a}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-0-0-1 \\ 0+0-0-2 \\ 2+0+0+0 \\ 1+1+0-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (0,-1,1,1)^T$$

- Extraire le vecteur transformé $\vec{v} = (-1,1,1)^T$.

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

On obtient bien le résultat attendu.



Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Programmation Matlab.

```
% Rotation en utilisant les quaternions.
% Vecteur v=(1,1,1)
% Rotation de pi/2 autour de u=(0,0,1)
vref=[1 1 1];
theta=pi/2;
urot=[0 0 1];
vrot=QARotation(vref,theta,urot)
% Illustrer
hold;
plot3([0 vref(1)],[0 vref(2)],[0 vref(3)],'-b');
plot3([0 vrot(1)],[0 vrot(2)],[0 vrot(3)],'-r');
plot3([0 urot(1)],[0 urot(2)],[0 urot(3)],'-k');
axis on;
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
hold;
```

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Rotation par quaternion : QARotation.m

```
function vrotation=QARotation(v,theta,u)
% Rotation du vecteur v par theta autour de u
qv=horzcat([0],v);
qr=horzcat(cos(theta/2),sin(theta/2)*u);
v1=QProduit(qr,qv);
v2=QConjugue(qr);
qc=QProduit(v1,v2);
vrotation=qc(2:4);
```

Conjugaison d'un quaternion : QConjugue.m

```
function c=QConjugue(a)
% Conjuguer un quaternion
c=horzcat([a(1)], -a(2:4));
```

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Produit de deux quaternions : QProduit.m

```
function c=QProduit(a,b)
% Produit de 2 quaternions
v1=a(2:4);
v2=b(2:4);
vp=cross(v1,v2);
vecpc=a(1)*v2+b(1)*v1+vp;
c=horzcat((a(1)*b(1)-(v1*v2')),vecpc);
```

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Si on décide d'utiliser les quaternions au lieu des matrices de rotation, on pourra remplacer

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{R}(t)$$

par

$$\frac{d\vec{\vec{R}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\vec{R}}(t)\vec{\vec{\omega}}(t)$$

avec $\vec{\vec{\omega}}(t) = (0, \vec{\omega}(t))^T$ et $\vec{\vec{R}}(t)$ le quaternion de rotation associé à la matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t)$.

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

La résolution par la méthode d'Euler donnera alors

$$\vec{\vec{R}}(t_0+\Delta t)=\vec{\vec{R}}(t_0)+\frac{1}{2}\vec{\vec{R}}(t_0)\vec{\vec{\omega}}(t_0)\Delta t$$

- En appliquant le quaternion de rotation à chaque point du solide, on pourra trouver la position qu'il occupera au temps $t=t_0+\Delta t$.
- Le problème de changement dans les dimensions du solide observé lorsque l'on utilise $\boldsymbol{R}$ persiste, car $\vec{\vec{R}}(t_0+\Delta t)$ n'est plus un quaternion de rotation unitaire.
- On peut cependant régler ce problème simplement en utilisant

$$\vec{\vec{R}}(t_0+\Delta t)=\frac{\vec{\vec{R}}(t_0+\Delta t)}{|\vec{\vec{R}}(t_0+\Delta t)|}$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple du ballon de soccer.

- Accélération linéaire $\vec{a}(t) = (0,0,0)^T$ m/s^2.
- Vitesse linéaire initiale $\vec{v}(0) = (1,1,1)^T$ m/s.
- Accélération angulaire $\vec{\alpha}(t) = (0,0,0)^T$ rads/s^2.
- Vitesse angulaire initiale $\vec{\omega}(0) = (0,1,1)^T$ rads/s.

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Trois cas à étudier

- Solution exacte ($\vec{r}_c(0) = (0,0,0)^T$ m).
- Solution par méthode de Euler avec quaternions non normalisés ($\vec{r}_c(0) = (0.2,0,0)^T$ m).
- Solution par méthode de Euler avec quaternions normalisés ($\vec{r}_c(0) = (0.4,0,0)^T$ m).
- Quaternion de rotation initial

$$\vec{\vec{R}}(0) = (1,0,0,0)^T$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution exacte.

- Position du centre de masse.

$$\vec{r}_c(t) = \vec{r}_c(0) + \vec{v}(0)\,t$$

- Position angulaire.

$$\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}(0) + \vec{\omega}(0)\,t$$

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Rotation du ballon.

- Quaternion de rotation

$$\vec{\vec{R}}(t) = \left(\cos(|\vec{\Omega}(t)|/2), \sin(|\vec{\Omega}(t)|/2)(\vec{u}_\omega(t))^T\right)^T$$

$$\vec{u}_\omega(t) = \vec{\omega}(t)/|\vec{\omega}(t)| = (0,1,1)^T/\sqrt{2}$$

- Position angulaire des vecteurs $\vec{r}_k(t)$ qui définissent les faces du ballon.

$$(0,(\vec{r}_k(t))^T)^T = (0,(\vec{r}_c(t))^T)^T + \vec{\vec{R}}(t)(0,(\vec{r}_k(0))^T)^T\vec{\vec{R}}^*(t)$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Solution Euler avec quaternions non normalisés.

- Position du centre de masse.

$$\vec{r}_c(t_0) = \mathrm{SEDEulert0}(\vec{r}_c(t_0), t_0, \Delta t, '\mathrm{FonctionTranslation}')$$

- Position angulaire (quaternion de rotation).

$$\vec{\vec{R}}(t_0) = \mathrm{SEDEulert0}(\vec{\vec{R}}(t_{i-1}), t_{i-1}, \Delta t, '\mathrm{FonctionRotation}')$$

Solution Euler avec quaternions normalisés.

- Normaliser le quaternion.

$$\vec{\vec{R}}(t_0) = \vec{\vec{R}}(t_0)/|\vec{\vec{R}}(t_0)|$$

Quaternions et cinématique des solides

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Rotation du ballon.

- Position angulaire des vecteurs $\vec{r}_k(t)$ qui définissent les faces du ballon.

$$(0,(\vec{r}_k(t_0))^T)^T = (0,(\vec{r}_c(t_0))^T)^T + \vec{\vec{R}}(t_0)(0,(\vec{r}_k(0))^T)^T\vec{\vec{R}}^*(t_0)$$

Solutions numériques et collisions

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Dans la majorité des simulations, la trajectoire de la particule ou du solide est limitée par des objets immobiles (murs, sol, etc.) ou en mouvement (bâton de baseball, hockey, etc.). Ces contraintes au mouvement peuvent impliquer un changement dans la trajectoire de la particule ou son arrêt. Ils mettent donc fin à une partie ou à l'ensemble de la simulation.

Dans le contexte d'une résolution numérique des équations du mouvement, nous décrirons dans ce qui suit le processus de détection des collisions entre un point ou une sphère qui se déplace et des plans immobiles. Nous reviendrons sur l'effet de telles collisions sur la trajectoire de solides plus généraux au chapitre 5.

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Exemple de trajectoire d'une balle tirée d'un fusil.

Considérons un sportif tentant de toucher une cible fixe avec son arme à feu. On sait que :

1. l'élévation de l'arme par rapport au sol est $z_a = 1.5$ m ;
2. la balle sort du canon ($x = 0$) avec une vitesse de $v_0 = 500$ m/s et une inclinaison de θ par rapport au sol telles que

$$\vec{v}_0 = v_0(\cos(\theta), 0, \sin(\theta))^T$$

3. la balle subit une accélération constante due à la gravité donnée par $\vec{a} = (0, 0, -9.8)^T$ m/s^2.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Deux obstacles peuvent se retrouver le long de la trajectoire de la balle (considérée comme ponctuelle) :

1. une cible circulaire (rayon $r = 20$ cm) très mince dans le plan $y - z$ localisé à $x_c = 180$ m qui est centrée au point $(y_c, z_c) = (0, 1)$ m ;
2. le sol situé à $z_s = 0$.

Ici, il faudra terminer la simulation dynamique lorsque la balle touche un de ces deux obstacles.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Notons que :

- la trajectoire de la balle ne varie pas en y ($y = 0$) ;
- dans ce modèle (2-D) la cible se présente donc comme une ligne sans épaisseur de longueur finie en z (0.8 m $\leq z \leq 1.2$ m) localisée à $x = 1.80$ m ;
- de la même façon, le sol est représenté comme une ligne sans épaisseur de longueur infinie finie en x localisée à $z = 0$ m.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Dans ce cas simple, une résolution analytique est possible. La façon de procéder est la suivante.

1. Déterminer les trajectoires exactes.

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)\, t$$
$$z(t) = z_a + v_0 \sin(\theta)\, t - \frac{g}{2} t^2$$

2. Déterminer le temps requis t_s pour que la balle traverse le plan $z_s = 0$ correspondant au sol

$$t_s = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{(v_0 \sin(\theta))^2 + 2 z_a g}}{g}$$

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

3. Déterminer le temps requis t_c pour que la balle traverse le plan $x = x_c$ correspondant à la cible

$$t_c = \frac{x_c}{v_0 \cos(\theta)}$$

4. Si $t_s < t_c$ le sol est touché en premier, la simulation se termine au temps $t_f = t_s$.
5. Si $t_c < t_s$ la cible pourrait être touchée. Il faut alors déterminer la position z_c où se trouve le projectile au temps t_c

$$z_c = z_a + v_0 \sin(\theta)\, t_c - \frac{g}{2} t_c^2$$

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

6. Si $0.8 < z_c < 1.2$ la cible est touchée avant le sol, et on termine la simulation au temps $t_f = t_c$.
7. Sinon le projectile passe en haut ou en bas de la cible et la trajectoire se termine lorsqu'elle touche le sol à $t_f = t_s$.
8. On utilise la solution analytique pour tracer la trajectoire de la balle.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Si on utilise une solution numérique, la procédure est beaucoup plus complexe. La façon de procéder est alors la suivante.

1. Choisir une méthode de résolution numérique et un intervalle de temps Δt pour la simulation de la trajectoire. Ici, on choisit Δt suffisamment court pour :
   - donner une bonne précision de simulation pour la trajectoire sans contrainte ;
   - s'assurer que la distance parcourue par l'objet ne soit pas trop grande, car celle-ci est utilisée pour la détection des collisions.

   On choisit préférablement la méthode Runge-Kutta à cause de sa haute précision.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

2. Déterminer la position atteinte par le projectile $(x_i, y_i, z_i)^T = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))^T$ au temps $t_i = t_0 + i\Delta t$ en utilisant la méthode de résolution numérique choisie. Comme notre choix pour Δt fera rarement coïncider la balle et un des plans de collision aux temps t_i, après chaque intervalle de calcul on vérifie si la balle :

   - traverse le sol $(z_{i-1} > z_s \geq z_i)$;
   - traverse la position x_c de la cible $(x_{i-1} < x_c \leq x_i)$.

   Si aucune de ces propositions n'est satisfaite, on passe au prochain intervalle de temps.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

3. Si la balle traverse le sol sans traverser la cible on suppose que la balle traversera le sol avant la cible (ceci est assuré si la solution est assez précise). On doit alors déterminer à quel temps t_f la balle traversera le sol ($z_s = 0$). Pour ce faire, plusieurs options existent.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

3.1 Méthode d'interpolation.

a Utiliser une approximation pour la vitesse moyenne $\bar{v}_z(t_{i-1})$ sur l'intervalle $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Ici, on supposera une approximation linéaire :

$$\bar{v}_z(t_{i-1}) = \frac{v_z(t_i) + v_z(t_{i-1})}{2}$$

$$t_f = t_{i-1} + \frac{z_s - z(t_{i-1})}{\bar{v}_z(t_{i-1})} = t_{i-1} - \frac{z(t_{i-1})}{\bar{v}_z(t_{i-1})}$$

b On résout le problème numériquement pour une dernière fois et on évalue la position en x correspondant à t_f (on suppose que $z(t_f) = z_s$).

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

3.2 Méthode itérative avec ϵ une distance faible qui est utilisée pour s'assurer de la convergence du processus.

a Si $|z_s - z(t_{i-1})| < \epsilon$, on suppose que l'intersection a eu lieu à t_{i-1} et on termine alors la simulation.

b Si $|z_s - z(t_i)| < \epsilon$, on suppose que l'intersection a eu lieu à t_i et on termine alors la simulation.

c Sinon on divise l'intervalle $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ en J sous intervalles et on résout le problème pour $t_j = t_{i-1} + j\Delta t/J$.

d On vérifie ensuite si l'intersection se situe entre $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

e Si $|z_s - z(t_j)| < \epsilon$, on suppose que l'intersection a eu lieu à t_j et on termine alors la simulation.

f Sinon on remplace $t_{i-1} = t_{j-1}$ et $t_i = t_j$, $\Delta t = \Delta t/J$ et on retourne à l'étape “c” et on poursuit jusqu'à convergence.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

4. Si le projectile traverse la cible sans traverser le sol, il pourrait frapper la cible après un intervalle Δt_c qui est déterminé d'une façon similaire à Δt_s. On utilise ou bien une méthode d'interpolation (6.1) ou itérative (6.2) avec les relations appropriées ($xi - 1 < x_c < x_i$).
5. Si z est aussi dans le bon intervalle pour la cible, on imprime la position de la balle et on termine la simulation. Sinon, on continue la simulation pour le prochain intervalle de temps.
6. Si le plan de la cible et le plan du sol ont été croisés par la balle (possible si Δt est trop long), on diminue le pas de temps sur le dernier intervalle et on résout sur ce pas de temps en retournant à l'étape 2.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Notez que :

- si la précision de notre algorithme de solution numérique n'est pas suffisante, il se peut que l'on manque ou que l'on touche la cible alors que la solution analytique (si disponible) nous indique que le contraire devrait se produire ;
- si les intervalles de temps de simulation sont trop longs (même si la méthode de simulation est précise), il se peut aussi que l'on manque des collisions ou que l'ordre des collisions soit incorrect ;

Tout ceci pourrait avoir un impact important sur le reste de la simulation (s'il y a des rebonds par exemple).

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Si la cible correspond à un cube en 3-D posé sur le sol, et que la particule se déplace aussi dans la direction y le problème se complique.

- Il faut vérifier la possibilité d'interaction avec toutes les faces du cube et avec le sol.
- Après avoir déterminé la succession de ces événements dans le temps, on peut procéder au processus itératif en prenant l'intervalle de temps le plus court.
- Ceci nous permet un premier classement des surfaces touchées successivement.
- Comme les vitesses ne sont pas nécessairement constantes, il peut arriver que ce classement soit faux. On doit donc reprendre l'analyse de toutes les surfaces à chaque itération de façon à minimiser les fausses collisions.

Mouvement contraint de particules

Introduction
Résolution des équations de la cinématique des particules
Résolution des équations de la cinématique des solides
Quaternions et cinématique des solides
Solutions numériques et collisions

Finalement, si le projectile a des dimensions finies il faut généraliser cette analyse à tous les points de l'objet

- Ceci s'avère relativement simple pour une sphère uniforme (tous les points de la surface sont à une distance r du centre de masse) même si elle tourne sur elle même.
- Pour les solides de forme arbitraire subissant un mouvement de rotation ce problème est très difficile à résoudre et sera considéré au chapitre 5.