

Уравнения мелкой воды

Поляченко Юрий

726

4 мая 2020 г.

Содержание

1	Аналитический анализ	3
2	Численное решение на A-сетке	6
2.1	Численные эксперименты	6
2.2	Дополнительные моменты	7
3	Численное решение на C-сетке	8
3.1	C-сетки	8
3.2	Численные эксперименты	8
3.2.1	Центральная разность по пространству	8
4	RK4 по времени	9

1 Аналитический анализ

Решается система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= -g \nabla h \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{H}(\nabla \cdot \vec{V}) &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Работаем в 2D, что физически соответствует например воде в бассейне $\Omega = [0; L_x] \times [0; L_y]$. Покомпонентно система запишется как

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Для простоты численных оценок в реальных расчетах будем считать $g = H = 1$, если не оговорено иного.

Для получения аналитических решений удобно избавиться от «не наблюдаемых» переменных u и v . (1) приводится к волновому уравнению.

$$\ddot{h}(t, \vec{x}) = gH \cdot \Delta h(t, \vec{x}). \quad (3)$$

Граничные условия непротекания

$$\begin{aligned}u(x=0) &= u(x=L_x) = 0 \\ v(y=0) &= v(y=L_y) = 0\end{aligned}\quad (4)$$

естественные для задачи воды в бассейне, приводят к условиям на h :

$$\begin{aligned}h'_x(x=0) &= h'_x(x=L_x) = 0 \\ h'_y(y=0) &= h'_y(y=L_y) = 0\end{aligned}\quad (5)$$

Или, короче и общее

$$\left. \frac{dh}{d\vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6)$$

Все вышесказанное позволяет нам выписать общее решение задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ h'_x(x=0) = h'_x(x=L_x) = 0 \\ h'_y(y=0) = h'_y(y=L_y) = 0 \\ h(t=0, x, y) = f(x, y) \\ u(t=0, x, y) = u_0(x, y) \\ v(t=0, x, y) = v_0(x, y) \end{array} \right. \quad (7)$$

приводит к

$$\begin{aligned} k_{xn} &= \frac{\pi}{L_x} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad k_{ym} = \frac{\pi}{L_y} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad n, m \in \mathbb{N} \\ e_{nm}(x, y) &= \cos(xk_{xn}) \cos(yk_{ym}) \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sqrt{\frac{2}{L_y}} \\ \omega_{nm}^2 &= gH(k_{xn}^2 + k_{ym}^2) \\ w(x, y) &= -H \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ w_{nm} &= (w, e_{nm}), \quad f_{nm} = (f, e_{nm}) \\ g_{nm}(t) &= \frac{w_{nm}}{\omega_{nm}} \sin(\omega_{nm}t) + f_{nm} \cos(\omega_{nm}t) \\ h(t, x, y) &= \sum_{n,m} g_{nm}(t) e_{nm}(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Где введено

$$(f, g) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) g(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Для ПГУ решения выглядят аналогично, только базисные функции немного отличаются

$$\begin{aligned} e_{nm}(x, y) &= e_n(x) e_m(y) \\ e_n(x) &= \begin{cases} \cos \left(x \frac{\pi n}{L_x} \right) \sqrt{\frac{2}{L_x}}, & n \div 2 \\ \sin \left(x \frac{\pi(n+1)}{L_x} \right) \sqrt{\frac{2}{L_x}}, & n \not\div 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Например если взять начальные условия

$$\begin{aligned} h(t=0, x, y) &= \cos\left(x\frac{2\pi}{L_x}\right) + \cos\left(2y\frac{2\pi}{L_y}\right) \\ u(t=0) &= 0, \quad v(t=0) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

то решение как для ПГУ так и для непротекания будет

$$h(t, x, y) = \cos\left(x\frac{2\pi}{L_x}\right) \cos\left(t\frac{2\pi v_0}{L_x}\right) + \cos\left(2y\frac{2\pi}{L_y}\right) \cos\left(2t\frac{2\pi v_0}{L_y}\right), \quad (12)$$

где $v_0^2 = gH$.

2 Численное решение на A-сетке

2.1 Численные эксперименты

Для первых тестов были реализованы симметричные схемы 2 порядка по времени и пространству. 1-ый шаг по времени делался обычным Эйлером. Проведена проверка порядка схемы - при изменении шага dx по пространству и выборе $dt = dx/3v_0$ для устойчивости MSD отклонения от точного решения. Ожидаемый результат $(\sup_{\tau < t} [\delta^2(\tau)])(t) < (\mathcal{O}(dt^3) \cdot T/dt)^2 = \mathcal{O}(dt^4 T^2) \sim dt^4$

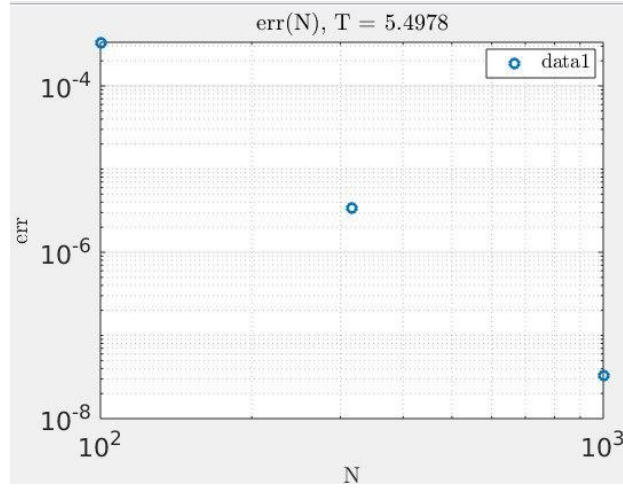


Рис. 1: Зависимость среднего (по пространству) квадрата отклонения численного решения от точного при $dt = dx/3v_0$ и $T = T_{period} \cdot 7/8$. При этом физическом времени расчета проходит максимум ошибки, поэтому на нем корректно сравнивать схему при разных шагах интегрирования. Шаги уменьшились на 1 порядок, а δ^2 уменьшилась на 4 порядка, т.е. δ линейно уменьшилась на 2 - все сходится.

По графику роста ошибки от времени виден порядок роста $(\sup_{\tau < t} [\delta^2(\tau)])(t) < \mathcal{O}(dt^4 T^2) \sim T^2$

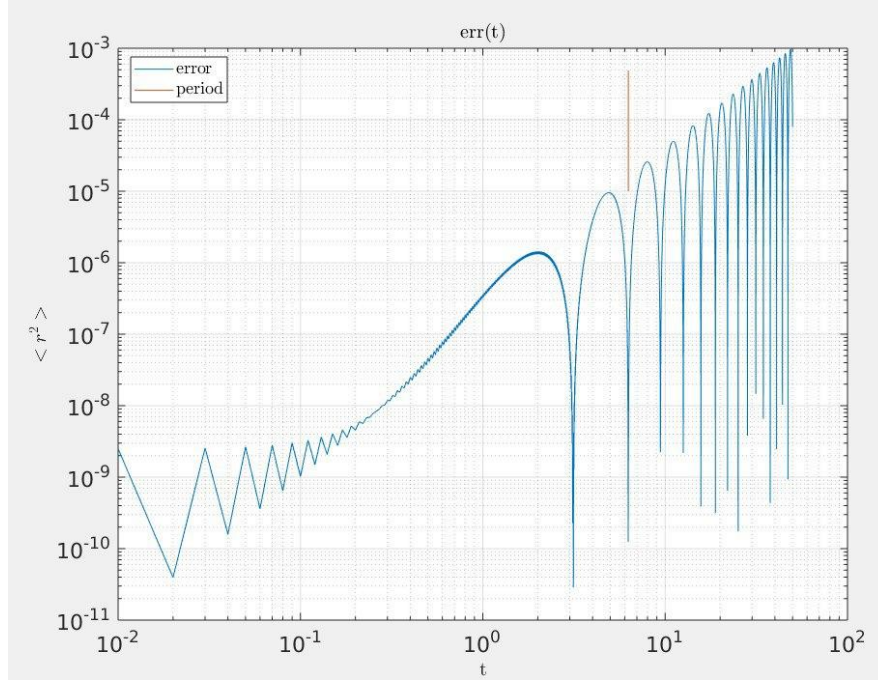


Рис. 2: Зависимость среднего квадрата отклонения численного решения от точного. Устанавливается рост $\sim t^2$, что и ожидалось.

2.2 Дополнительные моменты

- В процессе отладки была встречена проблема $2h$ - грамоники, являющейся следствием применения центральной разности для 1-ой производной. Если взять волну с $\lambda = 2\delta x$, то в узлах сетки будут значения $h_{nm} = (-1)^{m+n}$, откуда

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{-1 - (-1)}{2\delta x} = 0 \\ \dot{v} &= \frac{-1 - (-1)}{2\delta y} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

3 Численное решение на С-сетке

3.1 С-сетки

Идея сеток С-типа понятна из картинки и не нуждается в дополнительных комментариях

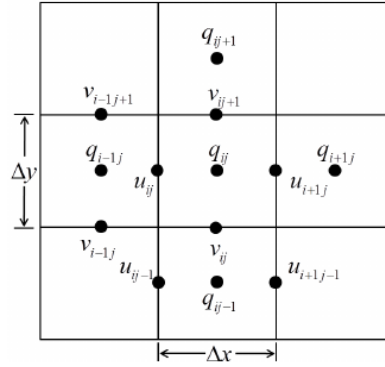


Рис. 3: Иллюстрация идея сеток С-типа

3.2 Аппроксимация по пространству

В А-сетках значения всех определяемых функций известны на одном наборе точек $(t, x, y)_{ijk}$. На С-сетках для уравнений мелкой воды наборы точек по пространству для u , v и h отличаются. Для начала была реализована симметричная расность 2 порядка точности, для которой ошибка схемы ведет себя ожидаемо

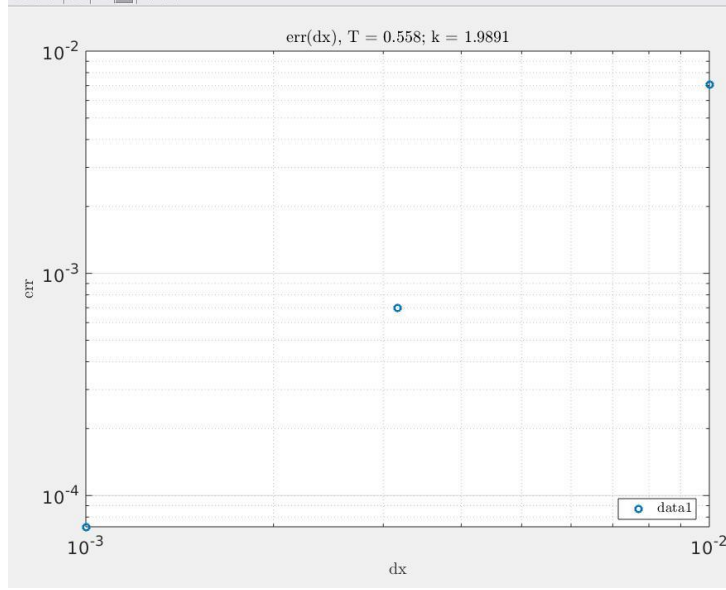


Рис. 4: Зависимость среднего (по пространству) квадрата отклонения численного решения от точного при $dt = dx/3v_0$ и $T = T_{period} \cdot 7/8$. При этом физическом времени расчета проходит максимум ошибки, поэтому на нем корректно сравнивать схему при разных шагах интегрирования. Шаги уменьшились на 1 порядок, а δ линейно (в логарифмическом масштабе) уменьшилась на 2 - все сходится.

4 RK4 по времени

Полная ошибка

$$r = \mathcal{O}((dt^4 + dx^2) \cdot T/dt) = \mathcal{O}((dt^3 + dx^2/dt) \cdot T) \quad (14)$$

При этом есть условие устойчивости $v_0 dt/dx < 1$.

Было обнаружено, что видимо ошибка по пространству доминирует над ошибкой по времени, поэтому строить $r(dt)$ в log-log для вытаскивания степени не получится. Предложено строить $r(dt^n)$ в линейном масштабе для разных n . Эксперименты дают следующие результаты:

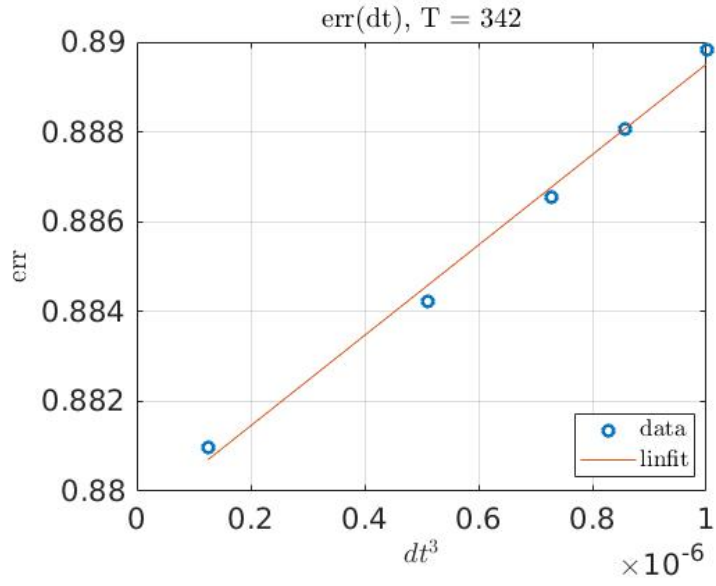


Рис. 5: Попытка поймать $\sim dt^3$ ошибку, предсказываемую (14). Казалось бы неплохая линия, но надо сравнить с тем, что ниже.

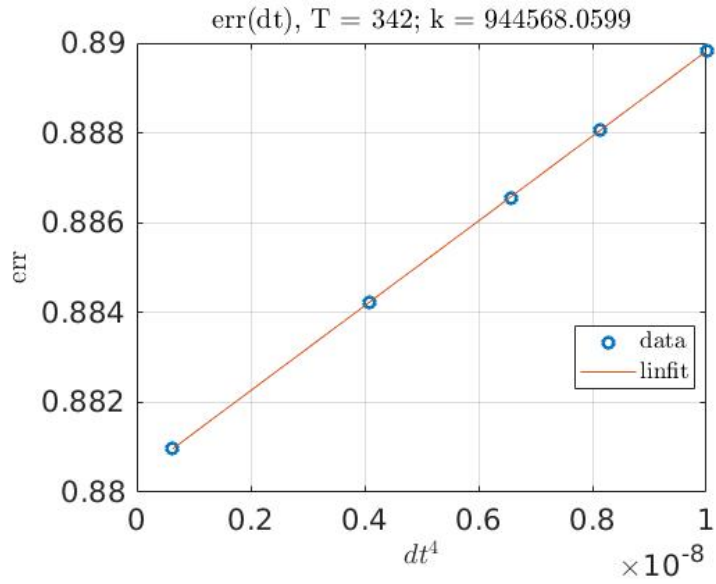


Рис. 6: Видно, что наложение на $\sim dt^4$ заметно лучше чем на dt^3 . Чтобы это объяснить, посмотрим на $r(T)$ - рис.7.

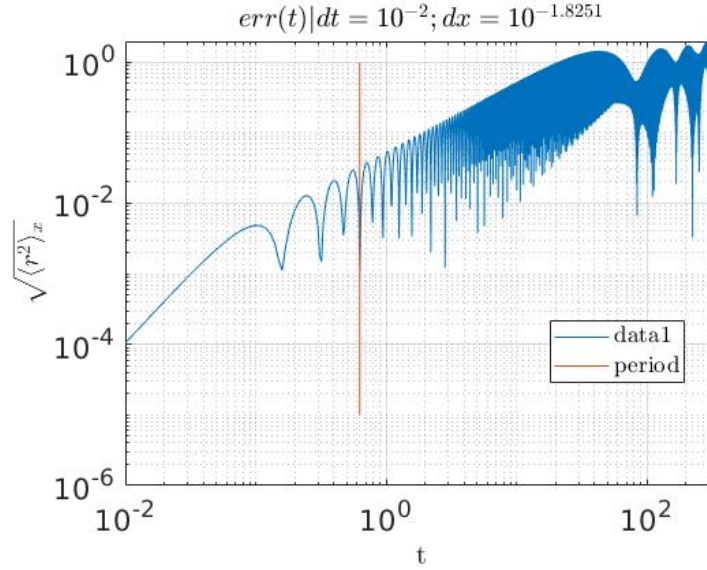


Рис. 7: Ошибка от полного физического времени расчета.

Я строил от $dt^{3,4}$, поэтому брались близкие dt (0.01, 0.009, т.п.) в отличии от построения в log-log, когда они сильно отличались. Из-за этого пришлось брать большое время счета, чтобы все шаги приходили в какой-то один физический момент времени. На графике при $T \lesssim 30$ ошибка растет линейно согласно (14), но потом тренд меняется и мы выходим на константу. Я пока не понял, почему так выходит. Но учитывая это, (14) перепишется как $r = \mathcal{O}(dt^4 + dx^2)$, что согласуется с рис.6. Тогда можно сделать оценку на шаг по времени, при котором ошибка из-за него станет доминировать над пространственной:

$$\left. \begin{aligned} Adt^4 &> Bdx^2 \\ \frac{v_0 dt}{dx} &< 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow dt > v_0 \sqrt{\frac{B}{A}}. \quad (15)$$

Можно оценить B из $r(dx^2)$:

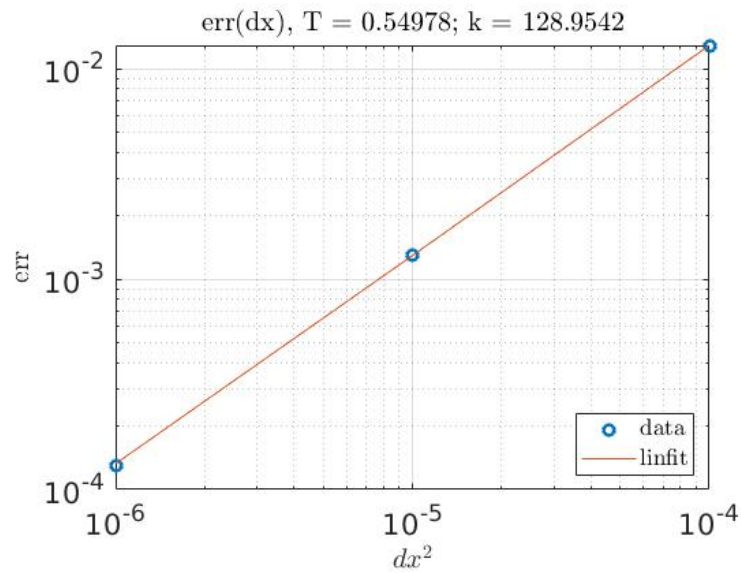


Рис. 8: Линеаризованный $r(dx^2)$ при фиксированном dt .

Из графиков $B = 129$, $A = 9.45 \cdot 10^5$, откуда при $v_0 = 1$ из (15) $dt > 0.0117$. У меня не получилось достичь этого предела на практике, хотя шаги сильно превышали указанный. Почему так вышло я пока тоже не понял.