1 Линейные уравнения мелкой воды в области с криволинейной границей

Ранее рассматривали уравнения мелкой воды в прямоугольной области с прямолинейными границами. Теперь рассмотрим задачу в которой нижняя граница имеет переменную высоту и задается как функция:

$$y_s = y_s(x). \tag{1}$$

В этом случае удобно использовать координатные линии огибающие поверхность, то есть перейти к новой вертикальной координате η, простейший вариант задания такой координаты:

$$y(\eta) = y_s(x) + \eta(y_t - y_s(x)), \tag{2}$$

$$\eta = \frac{y - y_s(x)}{y_t - y_s(x)}. \tag{3}$$

При $\eta = 0$ координатная линия совпадает с нижней поверхностью $y_s(x)$, при $\eta = 1$ координатная линия совпадает с верхней границей расчетной области $y = y_t$ (здесь и далее считаем, что верхняя граница прямолинейная $y_t(x) \equiv y_t$). Пример такой координаты на картинке.

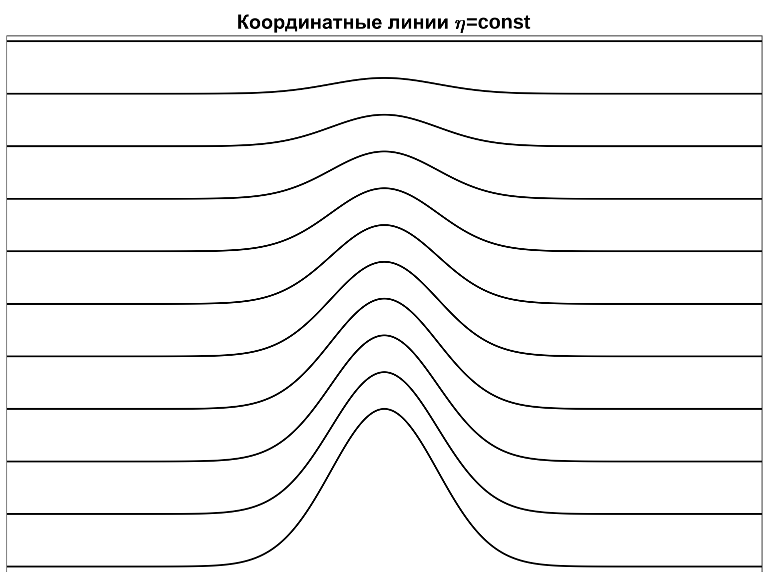

Рис. 1: Пример сетки огибающей границу.

При использовании новой системы координат потребуется переписать наши уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{6}$$

в новой системе координат. Для этого необходимо воспользоваться формулами преобразования производных:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_\eta + \eta_x \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_x, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \eta_y \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_x, \tag{8}$$

здесь $\eta_x = \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_y$, $\eta_y = \left.\frac{\partial \eta}{\partial y}\right|_x$. Также в дальнейшем понадобится

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\eta = -\frac{\eta_x}{\eta_y}. \tag{9}$$

Если u – компонента скорости ветра вдоль оси x, то уравнение эволюция для неё будет:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\left(\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_\eta + \eta_x \left.\frac{\partial h}{\partial \eta}\right|_x\right). \tag{10}$$

С уравнением для второй компоненты скорости ветра есть варианты. Первый – использовать компоненту вдоль оси y, как в случае с прямой границей. Преимущества: простое уравнение на эволюцию, простая формула для оператора дивергенции.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\eta_y \left.\frac{\partial h}{\partial \eta}\right|_x, \tag{11}$$

$$\nabla\cdot\vec{V} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\eta + \eta_x \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_x + \eta_y \left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_x. \tag{12}$$

Недостаток такого варианта – более сложное граничное условие на криволинейной границе (на разнесенной сетке его аппроксимация нетривиальная задача). Второй вариант – использовать ортогональную проекцию вектора скорости на нормаль к координатным линиям $\eta = const$. Направление нормали задается как:

$$\vec{n} = \left(-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_\eta, 1\right). \tag{13}$$

Обозначим $s = \frac{\partial y}{\partial x}\big|_\eta$, тогда

$$\tilde{w} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \left(-su + v\right) \tag{14}$$

При этом получаем простое граничное условие $\tilde{w} = 0$ на верхней и нижней границе. Уравнение на эволюцию по времени:

$$\sqrt{1+s^2}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -s\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = \tag{15}$$

$$= gs\left(\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_\eta + \eta_x \frac{\partial h}{\partial \eta}\bigg|_x\right) - g\eta_y \frac{\partial h}{\partial \eta}\bigg|_x = gs \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_\eta + g \frac{\partial h}{\partial \eta}\bigg|_x (s\eta_x - \eta_y). \tag{16}$$

Для дивергенции получаем:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_\eta + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_x + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\bigg|_x = \tag{17}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_\eta + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_x + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\bigg|_x \left(\sqrt{1+s^2}\tilde{w} + su\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_\eta + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_x + \eta_y \frac{\partial (su)}{\partial \eta}\bigg|_x + \eta_y \frac{\partial w}{\partial \eta}\bigg|_x. \tag{19}$$

Здесь мы ввели обозначение $w = \sqrt{1+s^2}\tilde{w}$. Можем воспользоваться $s = \frac{\partial y}{\partial x}\big|_\eta = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$, тогда:

$$\eta_y \frac{\partial (su)}{\partial \eta}\bigg|_x = -\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\bigg|_x + \eta_y u \frac{\partial s}{\partial \eta}\bigg|_x. \tag{20}$$

Для второго слагаемого:

$$\eta_y u \frac{\partial s}{\partial \eta}\bigg|_x = \eta_y u \frac{\partial}{\partial \eta}\bigg|_x \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_\eta = \eta_y u \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_\eta \frac{\partial y}{\partial \eta}\bigg|_x = \eta_y u \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_\eta \left(\frac{1}{\eta_y}\right). \tag{21}$$

Подставляя в выражения для дивергенции получаем:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \eta_y \left(\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_\eta \left(\frac{1}{\eta_y} u\right) + \frac{\partial w}{\partial \eta}\bigg|_x\right). \tag{22}$$

Результирующая система уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\left(\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_\eta + \eta_x \frac{\partial h}{\partial \eta}\bigg|_x\right), \tag{23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g\left(s \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta}\bigg|_x (s\eta_x - \eta_y)\right), \tag{24}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{H}\eta_y \left(\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_\eta \left(\frac{1}{\eta_y} u\right) + \frac{\partial w}{\partial \eta}\bigg|_x\right) = 0. \tag{25}$$

Вдоль оси x используем периодические граничные условия. На верхней и нижней границе используем условие $w = 0$.