1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 6. Любой открытый n – мерный шар радиуса ε называется *n – мерной ε - окрестностью точки* P_0.

Пусть функция $u = f(P)$ определена в окрестности точки P_0, за исключением, быть может, самой точки P_0.

Определение 7. Число А называется *пределом функции* $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ к точке $P_0(a_1, a_2, ..., a_n) \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} < \delta$ следует $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots\dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для функции нескольких переменных остаются справедливыми правила предельного перехода, установленные для функции одной переменной.

Пример 4. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$

Решение.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy(3 + \sqrt{xy + 9})}{(3 - \sqrt{xy + 9})(3 + \sqrt{xy + 9})} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy(3 + \sqrt{xy + 9})}{9 - xy - 9} = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (3 + \sqrt{xy + 9}) = -6.$$

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy}$

Решение. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{(xy)} = 1$, как первый замечательный предел.

в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$

Решение. Пусть $x^2 + y^2 = \alpha$, тогда если $x \to 0$, $y \to 0$, то $\alpha \to 0$. Поэтому $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

г) Показать, что при $x \to 0$, $y \to 0$ функция $z = \dfrac{x}{y - x}$ может стремиться к любому пределу. Привести примеры такого приближения точки (x, y) к точке $(0,0)$, при котором $\lim z = 3$, $\lim z = 2$, $\lim z = 1$, $\lim z = -2$.

Решение. Пусть точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(0,0)$. Рассмотрим изменение x и y вдоль прямой $y = kx$. Имеем: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x}{y - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{kx - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x(k - 1)} = \dfrac{1}{k - 1}$. Результат зависит от *k*.

Если $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = 3$, то $3 = \dfrac{1}{k-1} \Rightarrow 3k - 3 = 1$, $3k = 4$, $k = \dfrac{4}{3}$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = 3$ при $k = \dfrac{4}{3}$. Аналогично $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = 2$ при $k = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = 1$ при $k = 2$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = -2$ при $k = \dfrac{1}{2}$.

Определение 8. Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной в точке* P_0, если выполнены следующие три условия: 1) функция $f(P)$ определена в точке P_0 и ее окрестности, 2) существует предел функции при $P \to P_0$, то есть $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$, 3) предел функции при $P \to P_0$ равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Определение 9. Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Для непрерывных функций нескольких переменных также сохраняются все свойства, установленные для непрерывной функции одной переменной.

Определение 10. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий непрерывности нарушено, то точка P_0 называется *точкой разрыва функции* $f(P)$.

Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т.д.

Пример 5. Найти точки разрыва функции:

а) $z = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$.

Решение. Данная функция определена для всех точек $(x, y) \in R^2$, кроме точки $(1,-1)$, так как в этой точке знаменатель $(x-1)^2 + (y+1)^2 = (1-1)^2 + (-1+1)^2 = 0 + 0 = 0$. Точка $(1,-1)$ есть точка разрыва данной функции.

б) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

Решение. Функция $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ не определена в тех точках, где $1 - x^2 - y^2 \le 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 1$. Следовательно, точки разрыва данной функции попадают во внешность и на границу круга с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

в) $u = \dfrac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}$.

Решение. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль, то есть в точках, удовлетворяющих общему уравнению плоскости $2x + 3y - z + 4 = 0$. Таким образом, точки разрыва расположены на вышеуказанной плоскости.