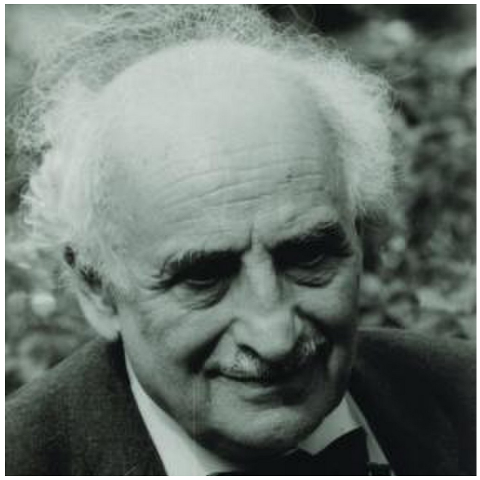
# L’énigme de Freudenthal

**Par Enigmath, le 7 janvier 2026**



## Énoncé

On choisit deux nombres différents, strictement supérieurs à 1, dont la somme est inférieure à 100. On indique à Sofiane la somme de ces deux nombres et à Priscillia le produit. On assiste alors à la conversation suivante :

**Priscillia :** Je ne connais pas ces deux nombres.

**Sofiane :** Je savais que tu dirais ça !

**Priscillia :** Ah, alors j’ai trouvé !

**Sofiane :** Ah, alors moi aussi !

**Questions** :

1. 🌶️[1.8] 💻[2.7] Quels sont ces deux nombres ?
2. 🌶️[2.5] 💻[2.7] Quel est le plus grand entier, tel que si l’on remplace dans l’enoncé précédent 100 par cet entier, il soit toujours possible de trouver les deux inconnues, après avoir assisté à la conversation ci-dessus ?

## Solution

1. La solution est $(4, 13)$. On peut utiliser le code Python suivant pour le montrer.

python ⬇️ Télécharger le code

```python
import numpy as np

def Denniston(M):
    prod_to_sums, sum_to_prods = {}, {}
    for x in range(2, M-2):
        for y in range(2, x):
            s = x + y
            if s > M:
                break
            p = x * y
            prod_to_sums.setdefault(p, []).append(s)
            sum_to_prods.setdefault(s, []).append(p)
    prods = sorted(prod_to_sums)
    sums  = sorted(sum_to_prods)
    prod_index = {p: i for i, p in enumerate(prods)}
    sum_index  = {s: j for j, s in enumerate(sums)}
    A = np.full((len(prods), len(sums)), -1, dtype=int)
```

```python
    for p, s_list in prod_to_sums.items():
        i = prod_index[p]
        for s in s_list:
            j = sum_index[s]
            A[i, j] = 0

    # 1
    for p, s_list in prod_to_sums.items():
        if len(s_list) == 1:
            j = sum_index[s_list[0]]
            A[prod_index[p], j] = 1

    # 2
    for s, p_list in sum_to_prods.items():
        j = sum_index[s]
        if any(A[prod_index[p], j] == 1 for p in p_list):
            for p in p_list:
                if A[prod_index[p], j] == 0:
                    A[prod_index[p], j] = 2

    # 3
    for p, s_list in prod_to_sums.items():
        zeros = [s for s in s_list if A[prod_index[p], sum_index[s]] == 0]
        if len(zeros) > 1:
            for s in zeros:
                A[prod_index[p], sum_index[s]] = 3

    # 4
    for s, p_list in sum_to_prods.items():
        zeros = [p for p in p_list if A[prod_index[p], sum_index[s]] == 0]
        if len(zeros) > 1:
            for p in zeros:
                A[prod_index[p], sum_index[s]] = 4

    # Solutions
    solutions = []
    for (i, j) in zip(*np.where(A == 0)):
        p = prods[i]
        s = sums[j]
        y = int((s + np.sqrt(s*s - 4*p)) / 2)
        x = s - y
        solutions.append((x, y))
    return solutions


if __name__ == "__main__":
    print(Denniston(100))
```

2. On étudie le problème pour deux nombres entiers distincts $x, y \geq 2$, avec $x + y \leq M$. Pour ce problème avec un $M$ fixé, avec l'algorithme de la question précédente, on pose :

$$
\begin{aligned}
P_1(M) &\triangleq \{p : \ 0 \in A[p, :] \text{ après l'étape } 1\}, \\
S_2(M) &\triangleq \{s : \ 0 \in A[:, s] \text{ après l'étape } 2\}, \\
P_3(M) &\triangleq \{p : \ 0 \in A[p, :] \text{ après l'étape } 3\}, \\
S_4(M) &\triangleq \{s : \ 0 \in A[:, s] \text{ après l'étape } 4\}.
\end{aligned}
$$

Pour un produit $p$ on note $M_1(p)$ (resp. $M_3(p)$) l'ensemble des $M$ telles que $p \in P_1(M)$ (resp. $p \in P_3(M)$). De façon analogue on définit $M_2(s)$ et $M_4(s)$ pour les sommes. Pour un produit $p$ (resp. une somme $s$), on appelle *somme compatible* de $p$ (resp. *produit compatible* de $s$) toute valeur $x + \frac{p}{x}$ (resp. $x(s - x)$), où $x \geq 2$ parcourt les diviseurs stricts de $p$ (resp. les entiers

$x \leq s-2$). L'ensemble des sommes (resp. produits) compatibles de $p$ (resp. $s$) est notée $SC(p)$ (resp. $PC(s)$).

**Théorème (Propriétés topologiques des ensembles $M_i$).** *Pour tout produit $p$ et toute somme $s$ les ensembles $M_1(p), M_2(s), M_3(p), M_4(s)$ satisfont :*

*(a) $M_1(p)$ est soit vide soit une demi-droite $[L, \infty)$.*
*(b) $M_2(s)$ est soit vide soit une demi-droite.*
*(c) $M_3(p)$ est soit vide, soit une demi-droite, soit un intervalle fini $[L, R]$.*
*(d) $M_4(s)$ est soit vide, soit une demi-droite, soit un intervalle fini.*

*Démonstration.* On détaille chacun des points ci-dessous.

(a) On a

$$M_1(p) = \{M > 0, \text{ il y a au moins 2 factorisations } p = xy \text{ avec } x > y \geq 2, \ x + y \leq M\}.$$

Quand $M$ augmente, d'autres factorisations peuvent apparaître mais jamais disparaissent ; il s'ensuit que la propriété devient vraie à partir d'un certain seuil et reste vraie au-delà.

(b) On a que

$$\begin{aligned} M_2(s) &= \{M > 0, \text{ tous les produits compatibles de } s \text{ sont dans } P_1(M)\} \\ &= \cap_{\pi \in PC(s)} M_1(\pi) \end{aligned}$$

est une demi-droite (ou est vide), comme une intersection de demi-droites qui ont des bornes à gauche.

(c) Avec $s(p), s'(p)$ tels que

$$M_2(s(p)) = \cup_{\sigma \in SC(p)} M_2(\sigma), \quad M_2(s'(p)) = \cup_{\sigma \in SC(p), \ \sigma \neq s(p)} M_2(\sigma)$$

(si la deuxième union est vide, on peut prendre $s'(p) = 5$ car $M_2(5) = \emptyset$ car $6 \in PC(5)$ et $M_1(6) = \emptyset$), on a que

$$\begin{aligned} M_3(p) &= \{M > 0, \text{ parmi les sommes compatibles de } p \text{ exactement une est dans } S_2(M)\} \\ &= M_2(s(p)) \backslash M_2(s'(p)) \end{aligned}$$

est soit vide, soit une demi-droite, soit un intervalle fini.

(d) Soit $s$ un somme fixée. Soit $\pi \in PC(s)$. On a $s \in SC(\pi)$, donc si $s \neq s(\pi)$, alors $M_2(s) \subset M_2(s'(\pi))$ (par définition de $s'$) et $M_2(s) \cap M_2(s(\pi)) \backslash M_2(s'(\pi)) = \emptyset$. Ainsi, pour $A \subset PC(s)$,

$$\begin{aligned} \cup_{\pi \in A} M_2(s) \cap M_3(\pi) &= \cup_{\pi \in A} M_2(s) \cap M_2(s(\pi)) \backslash M_2(s'(\pi)) \\ &= \cup_{\pi \in A, \ s = s(\pi)} M_2(s) \backslash M_2(s'(\pi)). \end{aligned}$$

Dans cette dernière union, la borne gauche de l'ensemble des termes est la même que celle de $M_2(s)$. Comme tous ces intervalles ou demi-droites partagent la même borne gauche, ils sont nécessairement imbriqués : l'union totale coïncide donc avec l'un d'entre eux. On peut donc poser $p(s), p'(s)$ tels que

$$\begin{aligned} M_2(s) \cap M_3(p(s)) &= \cup_{\pi \in PC(s)} M_2(s) \cap M_3(\pi), \\ M_2(s) \cap M_3(p'(s)) &= \cup_{\pi \in PC(s), \ \pi \neq p(s)} M_2(s) \cap M_3(\pi) \end{aligned}$$

(si la deuxième union est vide, on peut prendre $p'(s) = 6$ car $M_3(6) = \emptyset$ car $M_1(6) = \emptyset$). On a donc

$$\begin{aligned} M_4(s) &= \{M > 0, \text{ parmi les produits compatibles de } s \text{ exactement un est dans } S_3(M)\} \\ &= M_2(s) \cap M_4(s) \\ &= M_2(s) \cap M_3(p(s)) \backslash \left(M_2(s) \cap M_3(p'(s))\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $M_4(s)$ est lui-même la différence de deux intervalles (ou demi-droites, ou ensembles vides), et est donc encore un intervalle, une demi-droite, ou l'ensemble vide. □

**Définition.** *Pour une paire* $(x, y)$ *on définit* $M(x, y)$ *l'ensemble des* $M$ *pour lesquels l'exécution de l'algorithme laisse une entrée* 0 *correspondant à* $(xy, x+y)$*, i.e.,* $x+y \in S_4(M)$ *et* $xy \in P_3(M)$*. En d'autres termes,* $M(x, y) = M_3(xy) \cap M_4(x+y)$*, qui est une demi-droite ou un intervalle par le théorème précédent. On dit que* $(x, y)$ *est une* solution stable *si* $M(x, y)$ *est une demi-droite. On dit que* $(x, y)$ *est une* solution fantôme *si* $M(x, y)$ *est un intervalle fini.*

**Théorème (Stabilité de** $(4, 13)$**).** *La paire* $(4, 13)$ *est une solution stable et* $M(4, 13) = [65, \infty)$.

*Démonstration.* On montre en deux étapes :

**(i) Pour tout** $M \geq 65$**,** $(4, 13)$ **est solution.** On vérifie d'abord que pour $M \geq 65$ les sommes

$$11, 17, 23, 27, 35, 37$$

appartiennent à $S_2(M)$. Ceci se voit en listant pour chacune des sommes les produits compatibles et en constatant que chacun de ces produits a au moins deux factorisations admissibles, i.e. appartient à $P_1(M)$, une fois $M \geq 65$ ; la justification exhaustive peut se faire numériquement. Nous listons ci-dessous, pour chaque produit compatible de chaque somme, deux factorisations admissibles avec facteurs $\leq 65$.

**Somme** $s = 11$**.**

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $2+9$ | 18 | $3 \cdot 6$ |
| $3+8$ | 24 | $2 \cdot 12$ |

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $4+7$ | 28 | $2 \cdot 14$ |
| $5+6$ | 30 | $3 \cdot 10$ |

**Somme** $s = 17$**.**

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $2+15$ | 30 | $3 \cdot 10$ |
| $3+14$ | 42 | $6 \cdot 7$ |
| $4+13$ | 52 | $2 \cdot 26$ |

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $5+12$ | 60 | $4 \cdot 15$ |
| $6+11$ | 66 | $3 \cdot 22$ |
| $7+10$ | 70 | $5 \cdot 14$ |
| $8+9$ | 72 | $3 \cdot 24$ |

**Somme** $s = 23$**.**

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $2+21$ | 42 | $6 \cdot 7$ |
| $3+20$ | 60 | $4 \cdot 15$ |
| $4+19$ | 76 | $2 \cdot 38$ |
| $5+18$ | 90 | $9 \cdot 10$ |
| $6+17$ | 102 | $3 \cdot 34$ |

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $7+16$ | 112 | $8 \cdot 14$ |
| $8+15$ | 120 | $6 \cdot 20$ |
| $9+14$ | 126 | $7 \cdot 18$ |
| $10+13$ | 130 | $5 \cdot 26$ |
| $11+12$ | 132 | $6 \cdot 22$ |

**Somme** $s = 27$**.**

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $2+25$ | 50 | $5 \cdot 10$ |
| $3+24$ | 72 | $8 \cdot 9$ |
| $4+23$ | 92 | $2 \cdot 46$ |
| $5+22$ | 110 | $10 \cdot 11$ |
| $6+21$ | 126 | $7 \cdot 18$ |
| $7+20$ | 140 | $10 \cdot 14$ |

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $8+19$ | 152 | $4 \cdot 38$ |
| $9+18$ | 162 | $6 \cdot 27$ |
| $10+17$ | 170 | $34 \cdot 5$ |
| $11+16$ | 176 | $8 \cdot 22$ |
| $12+15$ | 180 | $9 \cdot 20$ |
| $13+14$ | 182 | $26 \cdot 7$ |

**Somme** $s = 35$**.**

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $2+33$ | 66 | $6 \cdot 11$ |
| $3+32$ | 96 | $8 \cdot 12$ |
| $4+31$ | 124 | $2 \cdot 62$ |
| $5+30$ | 150 | $10 \cdot 15$ |
| $6+29$ | 174 | $3 \cdot 58$ |
| $7+28$ | 196 | $4 \cdot 49$ |
| $8+27$ | 216 | $12 \cdot 18$ |
| $9+26$ | 234 | $6 \cdot 39$ |

| $(u, v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $10+25$ | 250 | $5 \cdot 50$ |
| $11+24$ | 264 | $8 \cdot 33$ |
| $12+23$ | 276 | $6 \cdot 46$ |
| $13+22$ | 286 | $26 \cdot 11$ |
| $14+21$ | 294 | $6 \cdot 49$ |
| $15+20$ | 300 | $10 \cdot 30$ |
| $16+19$ | 304 | $8 \cdot 38$ |
| $17+18$ | 306 | $6 \cdot 51$ |

**Somme $s = 37$.**

| $(u,v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $2+35$ | 70 | $5 \cdot 14$ |
| $3+34$ | 102 | $6 \cdot 17$ |
| $4+33$ | 132 | $6 \cdot 22$ |
| $5+32$ | 160 | $8 \cdot 20$ |
| $6+31$ | 186 | $3 \cdot 62$ |
| $7+30$ | 210 | $10 \cdot 21$ |
| $8+29$ | 232 | $4 \cdot 58$ |
| $9+28$ | 252 | $12 \cdot 21$ |

| $(u,v)$ | $uv$ | seconde factorisation |
|---|---|---|
| $10+27$ | 270 | $9 \cdot 30$ |
| $11+26$ | 286 | $13 \cdot 22$ |
| $12+25$ | 300 | $15 \cdot 20$ |
| $13+24$ | 312 | $12 \cdot 26$ |
| $14+23$ | 322 | $7 \cdot 46$ |
| $15+22$ | 330 | $10 \cdot 33$ |
| $16+21$ | 336 | $12 \cdot 28$ |
| $17+20$ | 340 | $10 \cdot 34$ |
| $18+19$ | 342 | $6 \cdot 57$ |

Par le Théorème ; point (b), ces 6 sommes restent dans $S_2(M)$ pour tout $M \geq 65$. Par conséquent, l'ensemble $P_3(M)$ ne contient aucun des six produits suivants :

$$\begin{aligned}
30 &= 5 \cdot 6 = 2 \cdot 15, \\
42 &= 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14, \\
60 &= 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15, \\
66 &= 2 \cdot 33 = 6 \cdot 11, \\
70 &= 2 \cdot 35 = 7 \cdot 10, \\
72 &= 3 \cdot 24 = 8 \cdot 9.
\end{aligned}$$

En revanche, le produit

$$52 = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 26$$

appartient à $P_3(M)$, puisque $17 \in S_2(M)$ et $28 \notin S_2(M)$ ($28 = 5 + 23$ mais $5 \cdot 23$ n'a aucune autre factorisation). Par la configuration des produits compatibles avec la somme 17 (qui sont $30, 42, 52, 60, 66, 70, 72$), exactement un de ces produits est dans $P_3(M)$ (c'est 52). Ainsi $17 \in S_4(M)$, i.e., la paire $(4, 13)$ est solution.

**(ii) Pour $M \leq 64$, $(4, 13)$ n'est pas solution.** Nous affirmons que ni 19 ni 37 n'appartiennent à $S_2(M)$ :

— Le produit $2 \cdot 17$ n'étant pas dans $P_1(M)$, cela implique $19 = 2 + 17 \notin S_2(M)$.

— Le produit 186 n'appartient pas à $P_1(M)$, car seule la factorisation $186 = 6 \cdot 31$ est légale (la factorisation $186 = 3 \cdot 62$ n'est pas admissible puisque $3+62 > M$). Donc $6+31 = 37 \notin S_2(M)$.

Supposons par contradiction que la paire $(4, 13)$ soit solution pour $M \leq 64$. Alors $17 \in S_2(M)$ et $52 \in P_3(M)$. Or, les factorisations de 70 sont $2 \cdot 35$, $5 \cdot 14$ et $7 \cdot 10$, et comme exactement une des sommes correspondantes 37, 19, 17 est dans $S_2(M)$, on obtient $70 \in P_3(M)$.

Comme $P_3(M)$ contient deux produits $52 = 4 \cdot 13$ et $70 = 7 \cdot 10$ compatibles avec la somme 17, cela implique $17 \notin S_4(M)$.

Par conséquent, la paire $(4, 13)$ ne peut pas être une solution pour $M \leq 64$. □

En faisant tourner l'algorithme de la question précédente avec le code suivant (ce qui prend environ 20 minutes), on trouve que la paire $(4, 13)$ est en réalité l'unique solution du problème pour $65 \leq M \leq 1684$. Pour $M \leq 64$, il n'y a pas de solution, et pour $M = 1685$, la paire $(4, 61)$ forme une seconde solution. Il suffit donc de montrer que $(4, 61)$ est stable pour conclure que le plus grand entier que l'on cherche est 1684.

python ⬇️ Télécharger le code

```python
if __name__ == "__main__":
    import time
    t0, M = time.time(), 1
    while True:
        M += 1
        solutions = Denniston(M)
        print(f"[M={M}] solutions : ", solutions)
        if len(solutions) > 1:
            break
    print(f'computation time: {time.time()-t0}')
```

**Théorème (Stabilité de $(4, 61)$).** $(4, 61)$ *est une solution stable et* $M(4, 61) = [1685, \infty)$.

*Démonstration.* On utilise la même méthode que pour la solution $(4, 13)$. Voici le code python correspondant :

python ⬇️ Télécharger le code

```python
import math, numpy as np

def compatible_sums(M, p):
    out = []
    for u in range(2, int(math.isqrt(p)) + 1):
        if p % u == 0:
            v = p // u
            s = u + v
            if v >= 2 and s <= M and u != v:
                out.append(s)
    return list(set(out))

def compatible_products(M, s):
    assert s <= M
    out = []
    for u in range(2,int(s/2) + 1):
        if u != s - u:
            out.append(u * (s - u))
    return list(set(out))

def is_in_P1(M, p):
    if len(compatible_sums(M, p)) < 2:
        return False
    return True

def is_in_S2(M, s):
    for p in compatible_products(M, s):
        if not is_in_P1(M, p):
            return False
    return True

def proof_stable(M, sol):
    s_star = np.sum(sol)
    p_star = np.prod(sol)
    assert is_in_S2(M, s_star)

    sums_in_S2 = [s_star]
    prods_not_in_P3 = []
    for p in compatible_products(M, s_star):
        if p == p_star:
            continue
        new_sums = [s for s in compatible_sums(M, p) if s!= s_star and
            is_in_S2(M, s)]
        assert len(new_sums) > 0
        sums_in_S2.append(new_sums[0])
        prods_not_in_P3.append(p)

    print(f"{sorted(set(sums_in_S2))} sont dans S_2({M}), et donc dans S_2(M
        ) pour tout M >= {M}.")
    print(f"P3(M) ne contient donc pas {sorted(set(prods_not_in_P3))}, mais
        contient {p_star}.")
    print(f"Donc, exactement un des produits compatibles de {s_star} est
        dans P3(M) (c'est {p_star}), donc {s_star} est dans S4(M)")

if __name__ == "__main__":
    proof_stable(1685, (4,61))
```

Ce code vérifie que, pour tout $M \geq 1685$, exactement un produit compatible avec 65 appartient à $P_3(M)$ ; il en résulte que $65 \in S_4(M)$. $\square$

## Notes et références

L'*énigme de la somme et du produit*, également appelée *énigme impossible* car elle semble manquer d'informations pour être résolue, est une énigme de connaissance. Elle remonte à 1969, lorsqu'Hans Freudenthal la proposa dans le *Nieuw Archief voor Wiskunde* [1, 2]. Le nom *énigme impossible* a été proposé par Martin Gardner [3]. Il existe de nombreuses variantes et déclinaisons [4, 5, 6], dont le point commun est la manière de tirer les bonnes conclusions d'une conversation étrange composée principalement de déclarations du type « Je ne sais pas » et « Maintenant je sais ».

Aujourd'hui, l'énigme de Freudenthal est célèbre dans le monde entier. Elle apparaît régulièrement dans les rubriques de casse-têtes mathématiques, et l'analyse du flux d'information dans la conversation sous-jacente est devenue un exercice classique pour les étudiants en informatique.

## Sources


[1] H Freudenthal. Problem no. 223 (formulation of the sum and product problem). *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(17):152, 1969.

[2] H Freudenthal. Solution to problem no. 223. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(18):102–106, 1970.

[3] Martin Gardner. Mathematical games : A pride of problems, including one that is virtually impossible. *Scientific american*, 241(6):22–32, 1970.

[4] Axel Born, Cor AJ Hurkens, and Gerhard J Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part i). *Bull. EATCS*, 90:175–191, 2006.

[5] Axel Born, Cor AJ Hurkens, and Gerhard J Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part ii). *Bull. EATCS*, 91:189–204, 2007.

[6] Axel Born, Cor AJ Hurkens, and Gerhard J Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part iii). *Bull. EATCS*, 95:201–219, 2008.