

## Le camion citerne



### Énoncé

Un camion citerne d'une capacité maximale de 1000 litres doit transporter de l'essence de la ville  $A$  à la ville  $B$ , distantes de 1000 km. La particularité de ce camion est qu'il consomme pour rouler l'essence qu'il transporte.

- Le camion consomme 1 litre par km parcouru.
- Il peut déposer des bidons d'essence (en quantité et capacité illimitées) sur la route et les récupérer plus tard.

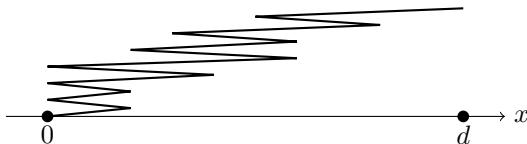
### Questions :

1.  $\text{2.3}$  Le dépôt initial en  $A$  contient 3000 litres. Quelle est la quantité maximale d'essence que le camion peut amener en  $B$  ?
2.  $\text{2.1}$  Quel est le stock minimal requis en  $A$  pour permettre au chauffeur de rapporter 1000 litres d'essence en  $B$  ?
3. Exprimez la quantité maximale d'essence que le camion peut amener en  $B$  en fonction du stock disponible en  $A$ .

### Solution

1. On suppose que le camion part de l'origine (la ville  $A$ ) et se déplace le long de l'axe des abscisses positives. On choisit comme *unité de carburant* la quantité maximale que le camion peut transporter ; ainsi, toutes les quantités de carburant sont exprimées en milliers de litres et cette unité est appelée une *charge*.

La figure suivante donne une représentation schématique d'un trajet typique. Le chemin représente les déplacements successifs du camion. Bien entendu, en réalité, ce trajet est entièrement contenu sur l'axe des abscisses ; il a été déformé verticalement uniquement afin d'en faciliter la visualisation. La longueur de ce chemin est alors précisément égale à la quantité totale de carburant consommée. Sur la figure, le camion atteint un point situé à une distance  $d$  de l'origine.



On cherche à établir une expression explicite de la fonction  $q(f)$ , qui désigne la quantité maximale d'essence que le camion peut amener en  $B$  (le point d'abscisse égale à 1) en disposant de  $f \geq 1$  charges de carburant en  $A$  (pour cette question, on a donc  $f = 3$ ). Pour ce faire, on définit la distance maximale  $d(f)$  que le camion peut atteindre. On a toujours  $q(f) \geq d(f) - 1$ . En effet, si le camion dispose d'une stratégie pour aller en  $d(f)$ , alors on peut modifier la stratégie de

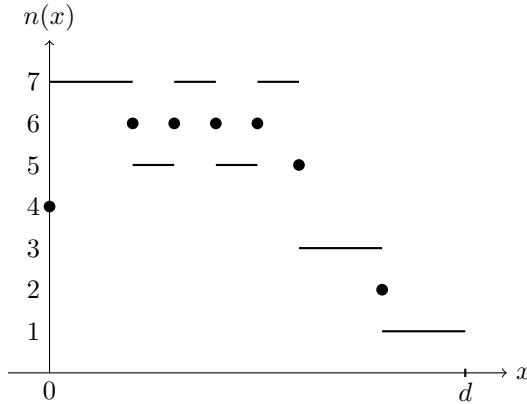
sorte que toute consommation de carburant effectuée au-delà du point  $B$  (cette consommation est donc supérieur à  $d(f) - 1$ ) peut être remplacée par un dépôt de carburant en  $B$ . On a aussi  $1 + d(q(f)) \leq d(f)$ , car une fois la stratégie d'acheminement d'une quantité  $q(f)$  de carburant jusqu'en  $B$  réalisée, ce carburant peut être employé de la même manière qu'un stock initial pour permettre au camion de parcourir une distance supplémentaire de  $d(q(f))$ . Si  $d(f) \leq 2$ , alors  $d(q(f)) \leq 1$  et  $q(f) \leq 1$ .<sup>1</sup> On dispose donc d'une stratégie pour aller en  $1 + q(f)$ , et donc  $1 + q(f) \leq d(f)$ , i.e., on a l'égalité  $q(f) = d(f) - 1$ . On se concentre donc, pour l'instant, sur l'étude de la fonction  $d(f)$ , et on va démontrer la formule (pour  $f$  entier)

$$d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f-1},$$

En particulier, on a  $d(3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \leq 2$ , donc  $q(3) = d(3) - 1$  et la réponse à la question est environ 533.3 litres.

L'idée centrale de la démonstration consiste à utiliser une formule due à Banach concernant la longueur d'un chemin dans un espace unidimensionnel. Pour exploiter la formule de Banach, on définit, pour chaque point  $x \geq 0$ , la *valence*  $n(x)$  comme le nombre total de fois où le camion passe par le point  $x$  au cours de son trajet (quel que soit le sens de parcours).

La figure suivante représente le graphe de la fonction  $n(x)$  associée au trajet schématisé précédemment.



La formule de Banach affirme que la longueur du chemin pour atteindre  $d$  (i.e., la quantité totale de carburant consommée pour atteindre  $d$ ) est donnée par

$$\text{longueur du chemin pour atteindre } d = \int_0^d n(x) dx.$$

Pour tout trajet du camion permettant d'atteindre un point situé à une distance  $d$  de l'origine, on définit  $x_t$  comme le point de  $[0, d]$  tel que la longueur totale du trajet à droite de  $x_t$  soit exactement égale à  $t$ . Par exemple,  $x_f = 0$  et  $x_0 = d$ . La fonction  $t \mapsto x_t$  est strictement décroissante, et il y a exactement  $a$  unités de longueur entre  $x_{t+a}$  et  $x_t$ , i.e.,  $\int_{x_{t+a}}^{x_t} n(x) dx = a$ .

**Lemme (Gale).** Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq f$ , si  $x < x_k$ , alors

$$n(x) \geq 2k + 1.$$

*Démonstration.* Puisque  $x$  se situe à gauche de  $x_k$ , le camion doit consommer plus de  $k$  charges de carburant à droite de  $x$ . Comme le camion ne peut transporter qu'une charge à la fois, il doit donc traverser le point  $x$  au moins  $k + 1$  fois en venant de la gauche.

---

1. En effet, avec un stock initial strictement supérieur à 1, le camion peut atteindre une distance strictement supérieure à 1. Plus précisément, si l'on dispose d'un stock initial égal à  $1 + \varepsilon$ , on peut procéder de la manière suivante. Lors d'un premier aller-retour effectué avec le camion plein, on dépose une quantité  $1 - \frac{2\varepsilon}{3}$  de carburant à une distance  $\frac{\varepsilon}{3}$  de l'origine. Lors du second trajet, le camion part avec la charge restante  $\varepsilon$ . Il consomme  $\frac{\varepsilon}{3}$  pour atteindre le dépôt, et arrive donc avec  $\frac{2\varepsilon}{3}$  de carburant. En récupérant le carburant déposé, il dispose alors exactement d'une charge complète. Le camion peut ainsi parcourir une distance supplémentaire de 1, ce qui lui permet d'atteindre  $1 + \frac{\varepsilon}{3}$ .

Mais entre deux passages consécutifs depuis la gauche, il doit y avoir un passage depuis la droite. Il y aura donc au moins  $k$  passages depuis la droite.

On obtient ainsi que le camion doit passer au moins  $2k + 1$  fois par le point  $x$ .  $\square$

Nous combinons maintenant ce résultat avec la formule de Banach :

$$1 = \int_{x_{k+1}}^{x_k} n(x) dx \geq (2k + 1)(x_k - x_{k+1}),$$

d'où l'inégalité

$$x_k - x_{k+1} \leq \frac{1}{2k + 1}.$$

En sommant cette inégalité pour  $k = 0$  à  $f - 1$ , on obtient

$$d = x_0 - x_f = \sum_{k=0}^{f-1} (x_k - x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{f-1} \frac{1}{2k + 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f - 1},$$

ce qui fournit une borne supérieure pour  $d(f)$ .

Il reste seulement à montrer que cette borne peut être atteinte, ce qui se fait aisément par récurrence. La formule est manifestement correcte pour  $f = 1$ . Supposons-la maintenant vraie pour un certain entier  $f \geq 1$ , et considérons le cas de  $f + 1$  charges. Le camion commence par transporter ces  $f + 1$  charges jusqu'au point situé à la distance  $\frac{1}{2f+1}$  de l'origine. Cette opération nécessite  $f + 1$  trajets aller et  $f$  trajets retour, soit au total  $2f + 1$  parcours de longueur  $\frac{1}{2f+1}$ . La consommation totale est donc exactement égale à une charge. Il reste alors  $f$  charges de carburant déposées en ce point. D'après l'hypothèse de récurrence, la distance maximale que le camion peut encore parcourir à partir de ce point est

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f - 1}.$$

On en déduit que, avec  $f + 1$  charges, le camion peut atteindre la distance

$$\frac{1}{2f+1} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f - 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2(f+1) - 1},$$

ce qui établit la formule au rang  $f + 1$  et achève la démonstration.

2. On cherche le  $f$  tel que  $q(f) = 1$ . Comme  $q(f) \geq d(f) - 1$ , on a  $d(f) \leq 2$  et donc, comme à la question précédente,  $q(f) = d(f) - 1$ . Pour  $f$  non entier, on a

$$d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2\lfloor f \rfloor - 1} + \frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}.$$

En effet, comme  $n(x) \geq 2\lfloor f \rfloor + 1$  pour  $x < x_{\lfloor f \rfloor}$ , on a

$$f - \lfloor f \rfloor = \int_{x_f}^{x_{\lfloor f \rfloor}} n(x) dx \geq (2\lfloor f \rfloor + 1)(x_{\lfloor f \rfloor} - x_f),$$

et donc

$$d = x_0 - x_f = x_{\lfloor f \rfloor} - x_f + \sum_{k=0}^{\lfloor f \rfloor - 1} (x_k - x_{k+1}) \leq \frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor f \rfloor - 1} \frac{1}{2k + 1}.$$

Pour montrer que cette borne est atteinte, on peut voir qu'il est possible d'amener  $\lfloor f \rfloor$  unités en position  $\frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}$ , avec  $\lfloor f \rfloor$  trajets aller et  $\lfloor f \rfloor$  trajets retour. Puis, lors d'un dernier trajet aller, on peut amener le surplus  $f - \lfloor f \rfloor$ . On a donc au total  $2\lfloor f \rfloor + 1$  parcours de longueur  $\frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}$ . La consommation totale est donc exactement égale à  $f - \lfloor f \rfloor$ , et il reste  $\lfloor f \rfloor$  charges en position  $\frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}$ . On peut enfin appliquer le cas d'un stock initial entier pour conclure.

Comme  $1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 < 1$  et  $1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 + 1/15 > 1$ , on cherche  $f$  tel que  $\lfloor f \rfloor = 7$  et  $f - \lfloor f \rfloor = 15(1 - (1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13))$ , i.e.,  $f = \frac{23042}{3003}$ . Cela correspond à environ 7673 litres.

3. La fonction  $d$  est continue, strictement croissante. Elle admet donc une fonction réciproque. On va démontrer la formule

$$q(f) = d^{-1}(\max(0, d(f) - 1)).$$

Au passage, une procédure pour calculer  $d^{-1}$  est la suivante : pour une valeur donnée de  $d$ , on commence par déterminer l'unique entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \leq d < \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}.$$

Alors la valeur correspondante de  $f$  est donnée par

$$f = n + (2n+1) \left( d - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right).$$

Si  $f \leq 1$ ,  $d(f) = f$  et  $q(f) = d^{-1}(0) = 0$ . Si  $f > 1$ ,  $d(f) > 1$  et il suffit de montrer que

$$1 + d(q(f)) = d(f).$$

On peut supposer, sans perte d'optimalité, qu'il existe une station en  $B$  ( $x = 1$ ). En effet, pour tout trajet atteignant la distance  $d(f)$ , toute consommation de carburant effectuée au-delà de  $B$  peut être remplacée par un dépôt de carburant en  $B$ . Une fois ce dépôt constitué, les trajets situés au-delà de  $B$  peuvent être reproduits dans le même ordre qu'auparavant en utilisant le carburant stocké en  $B$ , sans modifier la distance maximale atteinte. Si l'on note  $q$  la quantité de carburant déposée en  $B$ , on a alors  $d(f) = 1 + d(q) \leq 1 + d(q(f))$ . Comme on sait déjà que  $1 + d(q(f)) \leq d(f)$ , on en déduit l'égalité.

## Notes et références

Le *problème du jeep*, aussi appelé *problème de la traversée du désert* ou *problème de l'exploration*, est une énigme classique d'optimisation logistique consistant à maximiser la distance parcourue par un véhicule disposant d'une capacité limitée en carburant, mais autorisé à créer des dépôts intermédiaires. Ce problème apparaît dès le IX<sup>e</sup> siècle dans le recueil *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, attribué à Alcuin, sous la forme d'un problème de chameau transportant des vivres. Il est également étudié par Luca Pacioli dans *De viribus quantitatis* vers 1500. Une formulation moderne et mathématiquement rigoureuse est donnée par N. J. Fine en 1947 [1], qui introduit le modèle du jeep traversant le désert et en donne une solution optimale. Peu après, C. G. Phipps généralise le problème au cas d'une caravane de plusieurs jeeps [2], ouvrant la voie à de nombreuses variantes. Des contributions notables sont également dues à L. Alaoglu, I. Niven et D. Gale, ce dernier proposant une solution [3] élégante fondée sur une formule de Banach pour la longueur des trajectoires. Pour la présente solution, nous nous appuyons principalement sur les travaux de D. Gale.

## Sources

- [1] NJ Fine. The jeep problem. *The American Mathematical Monthly*, 54(1):24–31, 1947.
- [2] CG Phipps. The jeep problem : A more general solution. *The American Mathematical Monthly*, 54(8):458–462, 1947.
- [3] David Gale. The jeep once more or jeeper by the dozen. *The American Mathematical Monthly*, 77(5):493–501, 1970.