

Le camion citerne

Par Enigmath, le 7 janvier 2026



Énoncé

Un camion citerne d'une capacité maximale de 1000 litres doit transporter de l'essence de la ville A à la ville B , distantes de 1000 km. La particularité de ce camion est qu'il consomme pour rouler l'essence qu'il transporte.

- Le camion consomme 1 litre par km parcouru.
- Il peut déposer des bidons d'essence (en quantité et capacité illimitées) sur la route et les récupérer plus tard.

Questions :

1. $^{2.3}$ Le dépôt initial en A contient 3000 litres. Quelle est la quantité maximale d'essence que le camion peut amener en B ?
2. $^{2.1}$ Quel est le stock minimal requis en A pour permettre au chauffeur de rapporter 1000 litres d'essence en B ?
3. $^{2.1}$ Exprimez la quantité maximale d'essence que le camion peut amener en B en fonction du stock disponible en A .

Solution

1. On suppose que le camion part de l'origine (la ville A) et se déplace le long de l'axe des abscisses positives. On choisit comme *unité de carburant* la quantité maximale que le camion peut transporter ; ainsi, toutes les quantités de carburant sont exprimées en milliers de litres et cette unité est appelée une *charge*.

La figure suivante donne une représentation schématique d'un trajet typique. Le chemin représente les déplacements successifs du camion. Bien entendu, en réalité, ce trajet est entièrement contenu sur l'axe des abscisses ; il a été déformé verticalement uniquement afin d'en faciliter la visualisation. La longueur de ce chemin est alors précisément égale à la quantité totale de carburant consommée. Sur la figure, le camion atteint un point situé à une distance d de l'origine.



On cherche à établir une expression explicite de la fonction $q(f)$, qui désigne la quantité maximale d'essence que le camion peut amener en B (le point d'abscisse égale à 1) en disposant de $f \geq 1$ charges de carburant en A (pour cette question, on a donc $f = 3$). Pour ce faire, on définit

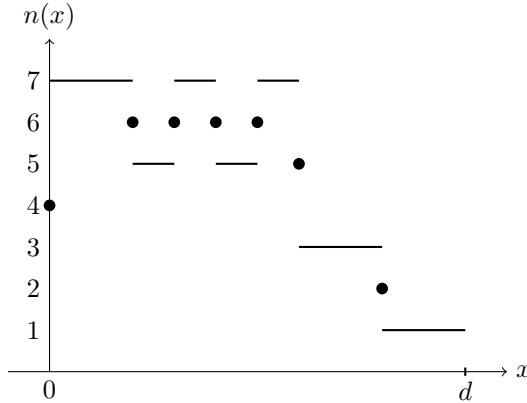
la distance maximale $d(f)$ que le camion peut atteindre. On a toujours $q(f) \geq d(f) - 1$. En effet, si le camion dispose d'une stratégie pour aller en $d(f)$, alors on peut modifier la stratégie de sorte que toute consommation de carburant effectuée au-delà du point B (cette consommation est donc supérieur à $d(f) - 1$) peut être remplacée par un dépôt de carburant en B . On a aussi $1 + d(q(f)) \leq d(f)$, car une fois la stratégie d'acheminement d'une quantité $q(f)$ de carburant jusqu'en B réalisée, ce carburant peut être employé de la même manière qu'un stock initial pour permettre au camion de parcourir une distance supplémentaire de $d(q(f))$. Si $d(f) \leq 2$, alors $d(q(f)) \leq 1$ et $q(f) \leq 1$.¹ On dispose donc d'une stratégie pour aller en $1 + q(f)$, et donc $1 + q(f) \leq d(f)$, i.e., on a l'égalité $q(f) = d(f) - 1$. On se concentre donc, pour l'instant, sur l'étude de la fonction $d(f)$, et on va démontrer la formule (pour f entier)

$$d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f-1},$$

En particulier, on a $d(3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \leq 2$, donc $q(3) = d(3) - 1$ et la réponse à la question est environ 533.3 litres.

L'idée centrale de la démonstration consiste à utiliser une formule due à Banach concernant la longueur d'un chemin dans un espace unidimensionnel. Pour exploiter la formule de Banach, on définit, pour chaque point $x \geq 0$, la *valence* $n(x)$ comme le nombre total de fois où le camion passe par le point x au cours de son trajet (quel que soit le sens de parcours).

La figure suivante représente le graphe de la fonction $n(x)$ associée au trajet schématisé précédemment.



La formule de Banach affirme que la longueur du chemin pour atteindre d (i.e., la quantité totale de carburant consommée pour atteindre d) est donnée par

$$\text{longueur du chemin pour atteindre } d = \int_0^d n(x) dx.$$

Pour tout trajet du camion permettant d'atteindre un point situé à une distance d de l'origine, on définit x_t comme le point de $[0, d]$ tel que la longueur totale du trajet à droite de x_t soit exactement égale à t . Par exemple, $x_f = 0$ et $x_0 = d$. La fonction $t \mapsto x_t$ est strictement décroissante, et il y a exactement a unités de longueur entre x_{t+a} et x_t , i.e., $\int_{x_{t+a}}^{x_t} n(x) dx = a$.

Lemme (Gale). Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq f$, si $x < x_k$, alors

$$n(x) \geq 2k + 1.$$

1. En effet, avec un stock initial strictement supérieur à 1, le camion peut atteindre une distance strictement supérieure à 1. Plus précisément, si l'on dispose d'un stock initial égal à $1 + \varepsilon$, on peut procéder de la manière suivante. Lors d'un premier aller-retour effectué avec le camion plein, on dépose une quantité $1 - \frac{2\varepsilon}{3}$ de carburant à une distance $\frac{\varepsilon}{3}$ de l'origine. Lors du second trajet, le camion part avec la charge restante ε . Il consomme $\frac{\varepsilon}{3}$ pour atteindre le dépôt, et arrive donc avec $\frac{2\varepsilon}{3}$ de carburant. En récupérant le carburant déposé, il dispose alors exactement d'une charge complète. Le camion peut ainsi parcourir une distance supplémentaire de 1, ce qui lui permet d'atteindre $1 + \frac{\varepsilon}{3}$.

Démonstration. Puisque x se situe à gauche de x_k , le camion doit consommer plus de k charges de carburant à droite de x . Comme le camion ne peut transporter qu'une charge à la fois, il doit donc traverser le point x au moins $k + 1$ fois en venant de la gauche.

Mais entre deux passages consécutifs depuis la gauche, il doit y avoir un passage depuis la droite. Il y aura donc au moins k passages depuis la droite.

On obtient ainsi que le camion doit passer au moins $2k + 1$ fois par le point x . \square

Nous combinons maintenant ce résultat avec la formule de Banach :

$$1 = \int_{x_{k+1}}^{x_k} n(x) dx \geq (2k + 1)(x_k - x_{k+1}),$$

d'où l'inégalité

$$x_k - x_{k+1} \leq \frac{1}{2k + 1}.$$

En sommant cette inégalité pour $k = 0$ à $f - 1$, on obtient

$$d = x_0 - x_f = \sum_{k=0}^{f-1} (x_k - x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{f-1} \frac{1}{2k + 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f - 1},$$

ce qui fournit une borne supérieure pour $d(f)$.

Il reste seulement à montrer que cette borne peut être atteinte, ce qui se fait aisément par récurrence. La formule est manifestement correcte pour $f = 1$. Supposons-la maintenant vraie pour un certain entier $f \geq 1$, et considérons le cas de $f + 1$ charges. Le camion commence par transporter ces $f + 1$ charges jusqu'au point situé à la distance $\frac{1}{2f+1}$ de l'origine. Cette opération nécessite $f + 1$ trajets aller et f trajets retour, soit au total $2f + 1$ parcours de longueur $\frac{1}{2f+1}$. La consommation totale est donc exactement égale à une charge. Il reste alors f charges de carburant déposées en ce point. D'après l'hypothèse de récurrence, la distance maximale que le camion peut encore parcourir à partir de ce point est

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f - 1}.$$

On en déduit que, avec $f + 1$ charges, le camion peut atteindre la distance

$$\frac{1}{2f+1} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2f - 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2(f+1) - 1},$$

ce qui établit la formule au rang $f + 1$ et achève la démonstration.

2. On cherche le f tel que $q(f) = 1$. Comme $q(f) \geq d(f) - 1$, on a $d(f) \leq 2$ et donc, comme à la question précédente, $q(f) = d(f) - 1$. Pour f non entier, on a

$$d(f) = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2\lfloor f \rfloor - 1} + \frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}.$$

En effet, comme $n(x) \geq 2\lfloor f \rfloor + 1$ pour $x < x_{\lfloor f \rfloor}$, on a

$$f - \lfloor f \rfloor = \int_{x_f}^{x_{\lfloor f \rfloor}} n(x) dx \geq (2\lfloor f \rfloor + 1)(x_{\lfloor f \rfloor} - x_f),$$

et donc

$$d = x_0 - x_f = x_{\lfloor f \rfloor} - x_f + \sum_{k=0}^{\lfloor f \rfloor - 1} (x_k - x_{k+1}) \leq \frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1} + \sum_{k=0}^{\lfloor f \rfloor - 1} \frac{1}{2k + 1}.$$

Pour montrer que cette borne est atteinte, on peut voir qu'il est possible d'amener $\lfloor f \rfloor$ unités en position $\frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}$, avec $\lfloor f \rfloor$ trajets aller et $\lfloor f \rfloor$ trajets retour. Puis, lors d'un dernier trajet aller,

on peut amener le surplus $f - \lfloor f \rfloor$. On a donc au total $2\lfloor f \rfloor + 1$ parcours de longueur $\frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}$. La consommation totale est donc exactement égale à $f - \lfloor f \rfloor$, et il reste $\lfloor f \rfloor$ charges en position $\frac{f - \lfloor f \rfloor}{2\lfloor f \rfloor + 1}$. On peut enfin appliquer le cas d'un stock initial entier pour conclure.

Comme $1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 < 1$ et $1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 + 1/15 > 1$, on cherche f tel que $\lfloor f \rfloor = 7$ et $f - \lfloor f \rfloor = 15(1 - (1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13))$, i.e., $f = \frac{23042}{3003}$. Cela correspond à environ 7673 litres.

3. La fonction d est continue, strictement croissante. Elle admet donc une fonction réciproque. On va démontrer la formule

$$q(f) = d^{-1}(\max(0, d(f) - 1)).$$

Au passage, une procédure pour calculer d^{-1} est la suivante : pour une valeur donnée de d , on commence par déterminer l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \leq d < \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}.$$

Alors la valeur correspondante de f est donnée par

$$f = n + (2n+1) \left(d - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right).$$

Si $f \leq 1$, $d(f) = f$ et $q(f) = d^{-1}(0) = 0$. Si $f > 1$, $d(f) > 1$ et il suffit de montrer que

$$1 + d(q(f)) = d(f).$$

On peut supposer, sans perte d'optimalité, qu'il existe une station en B ($x = 1$). En effet, pour tout trajet atteignant la distance $d(f)$, toute consommation de carburant effectuée au-delà de B peut être remplacée par un dépôt de carburant en B . Une fois ce dépôt constitué, les trajets situés au-delà de B peuvent être reproduits dans le même ordre qu'auparavant en utilisant le carburant stocké en B , sans modifier la distance maximale atteinte. Si l'on note q la quantité de carburant déposée en B , on a alors $d(f) = 1 + d(q) \leq 1 + d(q(f))$. Comme on sait déjà que $1 + d(q(f)) \leq d(f)$, on en déduit l'égalité.

Notes et références

Le *problème du jeep*, aussi appelé *problème de la traversée du désert* ou *problème de l'exploration*, est une énigme classique d'optimisation logistique consistant à maximiser la distance parcourue par un véhicule disposant d'une capacité limitée en carburant, mais autorisé à créer des dépôts intermédiaires. Ce problème apparaît dès le IX^e siècle dans le recueil *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, attribué à Alcuin, sous la forme d'un problème de chameau transportant des vivres. Il est également étudié par Luca Pacioli dans *De viribus quantitatatis* vers 1500. Une formulation moderne et mathématiquement rigoureuse est donnée par N. J. Fine en 1947 [1], qui introduit le modèle du jeep traversant le désert et en donne une solution optimale. Peu après, C. G. Phipps généralise le problème au cas d'une caravane de plusieurs jeeps [2], ouvrant la voie à de nombreuses variantes. Des contributions notables sont également dues à L. Alaoglu, I. Niven et D. Gale, ce dernier proposant une solution [3] élégante fondée sur une formule de Banach pour la longueur des trajectoires. Pour la présente solution, nous nous appuyons principalement sur les travaux de D. Gale.

Sources

- [1] NJ Fine. The jeep problem. *The American Mathematical Monthly*, 54(1):24–31, 1947.
- [2] CG Phipps. The jeep problem : A more general solution. *The American Mathematical Monthly*, 54(8):458–462, 1947.
- [3] David Gale. The jeep once more or jeeper by the dozen. *The American Mathematical Monthly*, 77(5):493–501, 1970.