Les âges des trois enfants

Par Enigmath, le 7 janvier 2026

Énoncé

Monsieur A rencontre par hasard dans la rue son vieil ami, monsieur B. Après quelques salutations futiles, on assiste à la conversation suivante :

B : Tu as des enfants ?
A : Oui, j'en ai trois !
B : Quels âges ont-ils ?

Monsieur A qui aime les énigmes, réfléchit un peu et répond :

A : Le produit de leur âge donne 36
B : OK, mais tu dois me donner un peu plus d'indications...

Monsieur A montre alors quelque-chose du doigt, et dit :

A : Tu vois le nombre sur le panneau là-bas ? Et bien, c'est la somme de leur âge
B : Très bien... mais je ne peux toujours pas trouver...
A : L'aîné est un garçon.
A : J'ai trouvé !

Questions :

1. 🌶️$^{1.0}$💻$^{0.6}$ Quels âge ont les enfants de Monsieur A ?
2. 🌶️$^{1.2}$💻$^{1.6}$ Existe-t-il une autre valeur du produit N, différente de 36, conduisant à la même énigme ? Si oui, listez ces nombres jusqu'à 100. Un tel N est appelé Nombre Triplement Curieux (NTC), et les triplets $\{a, b, c\}$ et $\{d, e, f\}$ tels que $abc = def = N$ sont les triplets mystérieux.
3. 🌶️$^{1.4}$ Montrez que les triplets mystérieux d'un NTC ne peuvent pas avoir d'élément en commun.
4. 🌶️$^{1.5}$ Montrez qu'un NTC n'est jamais une puissance d'un nombre premier.
5. 🌶️$^{1.6}$ Montrer que tout NTC s'écrit comme un produit d'au moins quatre nombres premiers (pas nécessairement distincts).
6. 🌶️$^{1.9}$ Soit p un nombre premier tel que $2p - 1$ soit également premier. Montrer que $N = p^2(2p-1)^2$ est un NTC.

Solution

1. On note x, y, z les âges des trois enfants de Monsieur A, et on fait l'hypothèse que $x \le y \le z$. Comme le produit est égal à 36, on a l'ensemble des cas suivants possible pour le triplet (x, y, z) :

$$(1,1,36), (1,2,18), (1,3,12), (1,4,9), (1,6,6), (2,2,9), (2,3,6), (3,3,4)$$

Comme il existe au moins deux triplets différents, il est normal que Monsieur B n'ait pas pu deviner tout de suite. Le numéro sur le panneau correspond à l'une des sommes d'un de ces triplets. Pour chacun des triplets ci-dessus, on obtient les sommes suivantes :

$$38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10.$$

Comme Monsieur B n'a pas pu deviner en voyant le panneau, c'est nécessairement que ce numéro correspond à la seule somme (13) qui apparaît au moins deux fois, et les âges des enfants de Monsieur A sont donc soit $(1, 6, 6)$ soit $(2, 2, 9)$.

Lorsque Monsieur A dit « l'aîné est un garçon » c'est que ça ne peut pas être le triplet $(1, 6, 6)$ car sinon il resterait une ambiguïté. Les enfants de Monsieur A ont donc 2,2 et 9 ans.

2. Le code Python ci-dessous permet de générer la liste des NTC jusqu'à 100 et leurs triplets mystérieux :

python ⬇️ Télécharger le code

```python
def find_ctns(limit):
    ctns = []
    for n in range(1, limit + 1):
        triples = []
        # Generate all unordered triples (a <= b <= c)
        for a in range(1, n + 1):
            for b in range(a, n + 1):
                for c in range(b, n + 1):
                    if a * b * c == n:
                        triples.append((a, b, c))

        # Group triples by sum
        sum_groups = {}
        for t in triples:
            s = sum(t)
            sum_groups.setdefault(s, []).append(t)

        # Keep only sums with exactly 2 triples
        valid_sums = [ts for ts in sum_groups.values() if len(ts) == 2]

        # CTN: exactly one sum has exactly 2 triples
        if len(valid_sums) == 1:
            pair = tuple(sorted(valid_sums[0]))
            ctns.append((n, sum(pair[0]), pair))

    return ctns

# Find CTNs up to 100
ctn_list = find_ctns(100)

for n, s, pair in ctn_list:
    print(f"{n} {s} {pair[0]} {pair[1]}")
```

Ce code fournit le tableau suivant :

N	Somme des triplets	$\{a, b, c\}$	$\{d, e, f\}$
36	13	$(1, 6, 6)$	$(2, 2, 9)$
40	14	$(1, 5, 8)$	$(2, 2, 10)$
72	14	$(2, 6, 6)$	$(3, 3, 8)$
96	21	$(1, 8, 12)$	$(2, 3, 16)$

Ainsi, en plus de 36, les autres NTC jusqu'à 100 sont 40, 72 et 96.

3. Soient $\{a, b, c\}$ et $\{d, e, f\}$ les triplets mystérieux d'un NTC. Supposons que $a = d$. D'après les conditions de somme et de produit, nous avons :

$$f - c = b - e \quad \text{et} \quad bc = ef.$$

En utilisant

$$bc = ec + c(b - e) \quad \text{et} \quad ef = ec + e(f - c) = ec + e(b - e),$$

nous obtenons :

$$c(b - e) = e(b - e),$$

ce qui implique que $b = e$ ou $c = e$.

— Si $b = e$, alors $c = f$.
— Si $c = e$, alors $b = f$.
Dans les deux cas, nous obtenons $\{a, b, c\} = \{d, e, f\}$, ce qui contredit le fait que les deux triplets doivent être distincts.

4. Supposons, par l'absurde, que $N = p^n$ soit un NTC, où p est un nombre premier et n un entier positif. Comme tout diviseur de N est aussi une puissance de p, on peut écrire les deux triplets mystérieux sous la forme :
$$\{p^r, p^s, p^t\} \quad \text{et} \quad \{p^u, p^v, p^w\}$$
avec
$$r \geq s \geq t, \quad u \geq v \geq w, \quad n = r + s + t = u + v + w, \quad t > w.$$
D'après la condition de somme des triplets, on obtient l'équation
$$p^{\,t-w}\,(p^{\,r-t} + p^{\,s-t} + 1) = p^{\,u-w} + p^{\,v-w} + 1.$$
Or, le côté gauche est divisible par p.
— Si $p \neq 3$, le côté droit n'est pas divisible par p, ce qui est une contradiction.
— Si $p = 3$, le côté droit n'est divisible par p que si $u = v = w$, ce qui impliquerait que le côté droit vaut exactement 3, tandis que le côté gauche est au moins 9, ce qui est également impossible.

5. D'après la question 3, il suffit de montrer qu'un NTC n'est pas le produit de exactement trois nombres premiers.
Supposons que $N = pqr$ soit un NTC, où p, q, r sont des nombres premiers avec $p \geq q \geq r$. Alors il n'existe que cinq triples possibles pour N, à savoir :
$$\{pqr, 1, 1\}, \quad \{pq, r, 1\}, \quad \{pr, q, 1\}, \quad \{qr, p, 1\} \text{ ou } \{p, qr, 1\}, \quad \{p, q, r\}.$$
D'après la question précédente, la seule paire possible de triplets mystérieux est
$$\{pqr, 1, 1\} \text{ et } \{p, q, r\}.$$
Cependant, comme
$$p + q + r < pqr + 2,$$
cette paire ne satisfait pas la condition de somme.

6. Le tableau suivant présente les huit triples possibles de N :

triplets	somme
$\{p^2(2p-1)^2, 1, 1\}$	$4p^4 - 4p^3 + p^2 + 2$
$\{p(2p-1)^2, p, 1\}$	$4p^3 - 4p^2 + 2p + 1$
$\{p^2(2p-1), 2p-1, 1\}$	$2p^3 - p^2 + 2p$
$\{(2p-1)^2, p^2, 1\}$	$5p^2 - 4p + 2$
$\{p(2p-1), p(2p-1), 1\}$	$4p^2 - 2p + 1$
$\{p(2p-1), 2p-1, p\}$	$2p^2 + 2p - 1$
$\{(2p-1)^2, p, p\}$	$4p^2 - 2p + 1$
$\{p^2, 2p-1, 2p-1\}$	$p^2 + 4p - 2$

En utilisant les lemmes suivant, les sommes des triples peuvent être ordonnées de la plus grande à la plus petite selon les inégalités suivantes :
$$\begin{aligned} 4p^4 - 4p^3 + p^2 + 2 &> 4p^3 - 4p^2 + 2p + 1 \\ &> 2p^3 - p^2 + 2p \\ &> 5p^2 - 4p + 2 \\ &> 4p^2 - 2p + 1 \\ &> 2p^2 + 2p - 1 \\ &> p^2 + 4p - 2. \end{aligned}$$
Ainsi, la condition de somme est satisfaite par exactement deux triples distincts et la condition de produit est automatiquement vérifiée.

Lemme. *Pour tout réel $x \neq 1$, les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} &(i) && 4x^4 - 4x^3 + x^2 + 2 \ > \ 4x^3 - 4x^2 + 2x + 1, \\ &(ii) && 5x^2 - 4x + 2 \ > \ 4x^2 - 2x + 1, \\ &(iii) && 4x^2 - 2x + 1 \ > \ 2x^2 + 2x - 1, \\ &(iv) && 2x^2 + 2x - 1 \ > \ x^2 + 4x - 2. \end{aligned}$$

Démonstration. On observe que

$$4x^4 - 4x^3 + x^2 + 2 = 4x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \ + \ (4x^2 + 1)(x-1)^2.$$

Or, comme $(4x^2 + 1)(x - 1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, l'inégalité (i) en découle immédiatement. Pour les autres inégalités, il suffit d'utiliser les identités suivantes :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x + 2 &= 4x^2 - 2x + 1 + (x-1)^2, \\ 4x^2 - 2x + 1 &= 2x^2 + 2x - 1 + 2(x-1)^2, \\ 2x^2 + 2x - 1 &= x^2 + 4x - 2 + (x-1)^2. \end{aligned}$$

Comme $(x - 1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, les inégalités (ii), (iii) et (iv) en résultent. □

Lemme. *Pour tout réel $x > 1$, on a*

$$2x^3 - x^2 + 2x \ > \ 5x^2 - 4x + 2.$$

Démonstration. Soit $x > 1$. On considère la différence entre les deux membres :

$$\begin{aligned} (2x^3 - x^2 + 2x) - (5x^2 - 4x + 2) &= 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 \\ &= 2(x-1)^3 > 0. \end{aligned}$$

Lemme. *Pour tout réel x tel que $x > -\frac{1}{2}$ et $x \neq 1$, on a*

$$4x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \ > \ 2x^3 - x^2 + 2x.$$

Démonstration. Considérons la différence entre les deux membres :

$$\big(4x^3 - 4x^2 + 2x + 1\big) - \big(2x^3 - x^2 + 2x\big) = (x-1)^2(2x+1).$$

Pour $x > -\frac{1}{2}$ et $x \neq 1$ on a $2x + 1 > 0$, et $(x - 1)^2 > 0$. □

Notes et références

Le problème des âges des trois enfants (parfois appelé *Census-Taker Problem* [1]) est une énigme dite *de connaissance* (c'est-à-dire une énigme dans laquelle la solution dépend de ce que les participants savent ou ignorent, et de la manière dont cette information est partagée ou déduite entre eux), qui, à première vue, semble ne pas contenir suffisamment d'informations pour être résolue.
Un problème connexe a été étudié par [2], qui a montré que, pour tout entier $M > 18$, il existe des triplets ayant la même somme M et des produits égaux (non spécifiés). Bien que ce problème puisse être considéré comme le dual du problème du *census-taker*, il ne prend pas en compte la condition d'unicité selon laquelle il doit y avoir exactement deux triplets avec des produits égaux.
Un autre problème connexe est celui de *l'anniversaire de Cheryl* (*Cheryl's Birthday* [3]), où l'objectif est de déterminer la date d'anniversaire d'une jeune fille nommée Cheryl à partir d'indices donnés à ses amis Albert et Bernard. Ce problème a été posé lors de l'Olympiade de mathématiques SASMO 2015 et est rapidement devenu viral, étant diffusé à la télévision dans le monde entier.

Sources

[1] Ian June L Garces and Mark L Loyola. Revisiting a number-theoretic puzzle : The census-taker problem. *arXiv preprint arXiv:1204.2071*, 2012.

[2] John B Kelly. Partitions with equal products. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(6):987–990, 1964.

[3] Hans van Ditmarsch, Michael Ian Hartley, Barteld Kooi, Jonathan Welton, and Joseph BW Yeo. Cheryl's birthday. *arXiv preprint arXiv:1708.02654*, 2017.