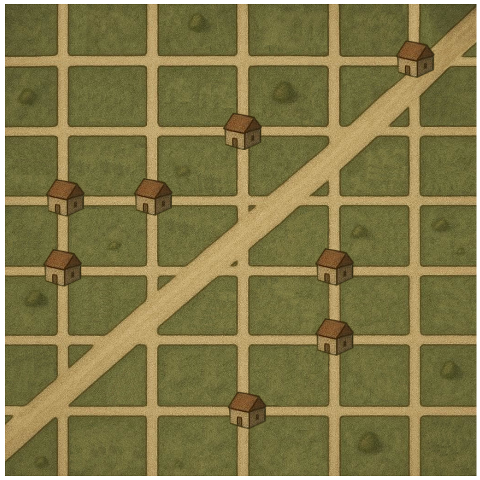
Quadrivillage



Énoncé

Le village de Quadrivillage est organisé selon un quadrillage de rues. À certaines intersections se trouve une maison, pour un total de n maisons dans le village (chaque maison abrite exactement un habitant). Le maire souhaite construire une Grande Allée : une route traversant le village en ligne droite, de façon oblique. Son objectif est de placer cette route de manière à réduire au maximum le temps de trajet des habitants pour s'y rendre.

Questions :

1. En supposant que les habitants se déplacent uniquement le long des rues du quadrillage, déterminez, pour une Grande Allée donnée, le temps de trajet d'un habitant jusqu'à celle-ci.
2. 🌶️ Proposez un algorithme en temps quasi-quadratique en n, permettant de déterminer la position optimale de la Grande Allée, de manière à minimiser la somme des temps de trajet de tous les habitants jusqu'à celle-ci.
3. 🌶️ Avant le début de la construction, plusieurs villages voisins (organisés eux aussi en quadrillage) souhaitent bâtir leur Grande Allée selon le même objectif. Cependant, selon la tradition locale, toutes ces Grandes Allées doivent être parallèles entre elles. Les maires se réunissent donc pour déterminer conjointement la position optimale de chaque Grande Allée. Si l'on considère d villages et n habitants par village, décrivez un algorithme de complexité $\mathcal{O}(dn^2 \log(dn))$ permettant de résoudre ce problème de minimisation.

Solution

1. La Grande Allée est modélisée par une droite d'équation $y = ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si l'on note (x_i, y_i) la position de la i-ème maison, le temps de trajet jusqu'à la route est donné par la plus petite distance horizontale ou verticale :

$$\min\left(|ax_i + b - y_i|, |x_i - a^{-1}(y_i - b)|\right) = |ax_i + b - y_i| \cdot \min\left(1, |a|^{-1}\right).$$

2. Le problème global se ramène à la minimisation suivante :

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i| \cdot \min\left(1, |a|^{-1}\right) = \min\left(\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|, \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} \left|x_i - a^{-1}(y_i - b)\right|\right).$$

Autrement dit, il suffit de résoudre les deux cas (tous les habitants se raccordent horizontalement ou tous les habitants se raccordent verticalement) et de retenir le plus favorable. De plus, en échangeant le rôle des x_i et des y_i, et en effectuant le changement de variables $(a, b) \mapsto$

$(1/a,\ -b/a)$, le second problème se ramène au premier. En conclusion, on veut déterminer la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise :

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|.$$

Pour ce faire, introduisons d'abord la notion de médiane.

Définition. *Soient $(x_j) \in \mathbb{R}^n$ et $(w_j) \in \mathbb{R}_+^n$. Une médiane de (x_j) avec poids (w_j) est tout réel*

$$m \in \arg\min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} w_j\, |x_j - t|.$$

Lemme. *Soient $(x_j) \in \mathbb{R}^n$ et $(w_j) \in \mathbb{R}_+^n$. Alors il existe un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que x_{i_0} soit une médiane de (x_j) avec poids (w_j).*

Démonstration. Définissons la fonction objectif

$$f(t) \triangleq \sum_{j=1}^{n} w_j\, |x_j - t|, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Supposons que les x_j soient ordonnés : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Posons $x_0 \triangleq -\infty$ et $x_{n+1} \triangleq +\infty$. Pour $t \in [x_i, x_{i+1}]$ avec $i \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$f(t) = \sum_{j=1}^{i} w_j(t - x_j) + \sum_{j=i+1}^{n} w_j(x_j - t).$$

C'est une fonction affine en t sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, de pente $g_i \triangleq \sum_{j=1}^{i} w_j - \sum_{j=i+1}^{n} w_j$. La suite (g_i) est croissante en i et il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g_{i_0-1} \leq 0 \leq g_{i_0}$. Ainsi, f est décroissante sur $(-\infty, x_{i_0})$ et croissante sur $(x_{i_0}, +\infty)$, donc f atteint un minimum en x_{i_0}. $\square$

Remarque. *Le calcul d'une médiane et de la valeur de la fonction objectif associée peut s'effectuer en temps quasi-linéaire en n, en triant les x_i puis en cherchant l'indice i où g_i change de signe (le calcul de tous les g_i et l'évaluation de la fonction objectif sont linéaires en n).*

Pour déterminer la pente optimale a, on procède ainsi : pour chaque i_0, on considère les rapports $\frac{y_j - y_{i_0}}{x_j - x_{i_0}}$ pondérés par $|x_j - x_{i_0}|$. On applique ensuite l'algorithme de calcul de médiane à cette famille, ce qui fournit une médiane m_{i_0} ainsi que la valeur correspondante de la fonction objectif, notée v_{i_0}. On choisit a en minimisant sur i_0, soit $a \triangleq m_{i_0^*}$ avec $v_{i_0^*} \triangleq \min_{i_0} v_{i_0}$, ce qui conduit à une complexité quasi-quadratique. Une fois a choisi, on déduit le paramètre d'ordonnée à l'origine par $b \triangleq y_{i_0^*} - ax_{i_0^*}$. On peut vérifier l'optimalité du couple (a, b) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i| &= \min_{a} \min_{i_0\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a(x_i - x_{i_0}) + y_{i_0} - y_i| \\
&= \min_{i_0\in\{1,\dots,n\}} \min_{a} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i_0}| \cdot |a - \frac{y_i - y_{i_0}}{x_i - x_{i_0}}|.
\end{aligned}$$

3. Par un raisonnement analogue à celui de la question 2, il suffit de résoudre

$$\min_{a,b_1,\dots,b_d} \sum_{k=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} |ax_{ki} + b_k - y_{ki}|.$$

Comme précédemment, on sait que chaque b_k optimal est de la forme

$$b_k = y_{ki_k} - ax_{ki_k},$$

pour un certain i_k. Cependant, contrairement au cas unidimensionnel, on ne peut pas parcourir exhaustivement tous les choix possibles de $(i_1, \ldots, i_d)$, car cela mènerait à une complexité prohibitive de l'ordre de n^d. En revanche, on sait que l'optimum en a doit apparaître pour une valeur de la forme

$$a = \frac{y_{kj} - y_{ki_k}}{x_{kj} - x_{ki_k}}.$$

Il y a au plus dn^2 tels rapports candidats. On commence par trier les ratios candidats, pour un coût de $\mathcal{O}(dn^2 \log(dn))$. On peut ensuite effectuer une recherche binaire sur ces ratios afin de déterminer le a optimal. Grâce au lemme suivant, cette recherche est possible : à chaque étape, on évalue la fonction et sa pente pour décider de quel côté se situe le minimum (c'est-à-dire le changement de signe de la pente). Le coût total de cette recherche binaire est $\mathcal{O}(\log(dn) \cdot dn \log n)$. Comme cette complexité est inférieure à celle du tri initial, le résultat global est préservé.

Lemme. *La fonction*

$$a \;\mapsto\; \min_{b_1,\ldots,b_d} \sum_{k=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} |ax_{ki} + b_k - y_{ki}|$$

est convexe et affine sur chaque intervalle ouvert délimité par deux ratios consécutifs. L'évaluation de la fonction ainsi que le calcul de sa pente se fait en temps $\mathcal{O}(dn \log n)$.

Démonstration. La convexité provient du fait qu'il s'agit du minimum partiel d'une fonction conjointe convexe en $(a, b_1, \ldots, b_d)$.
Pour un k fixé et pour tout a dans un intervalle ouvert délimité par deux ratios consécutifs, l'ordre des valeurs $ax_{ki} + b_k - y_{ki}$ reste constant. Ainsi, le b_k optimal reste de la forme $b_k = y_{ki_k} - ax_{ki_k}$ avec un indice i_k fixe sur tout l'intervalle, et la fonction est donc linéaire en a sur cet intervalle.
Enfin, pour chaque candidat a, les b_k optimaux sont obtenus via d calculs de médiane, chacun coûtant $\mathcal{O}(n \log n)$, ce qui donne un coût total $\mathcal{O}(dn \log n)$. Une fois les b_k déterminés, l'évaluation de la fonction et de sa pente se fait en temps $\mathcal{O}(dn)$. □

Notes et références

Cette énigme s'articule autour de la *méthode des moindres écarts absolus* (LAD, *Least Absolute Deviations*), qui consiste à minimiser la somme des écarts absolus entre un modèle et des données, soit la norme L_1 des résidus. Cette méthode est robuste aux valeurs aberrantes et correspond au maximum de vraisemblance si les erreurs suivent une loi de Laplace [1].
Comme on l'a vu, ajuster une droite à un ensemble de points bidimensionnels (x_i, y_i) fait intervenir naturellement le concept de médiane. Un estimateur particulièrement pertinent dans ce contexte est l'*estimateur de Theil–Sen* [2], qui choisit la pente m comme la médiane des pentes $(y_j - y_i)/(x_j - x_i)$ entre toutes les paires de points. Une fois la pente fixée, l'ordonnée à l'origine optimale peut être prise comme la médiane des valeurs $y_i - mx_i$.
Ce type de régression robuste trouve également des applications en vision 3D. Par exemple, pour calibrer les paramètres intrinsèques d'une caméra à partir d'un nuage de points 3D (X_i, Y_i, Z_i) et de leurs projections dans l'image (u_i, v_i), on cherche à estimer la focale f et le centre optique (c_x, c_y). La projection est alors de la forme

$$u_i \approx f\frac{X_i}{Z_i} + c_x, \quad v_i \approx f\frac{Y_i}{Z_i} + c_y.$$

En considérant une loss L_1, ce problème se rapproche de la structure de la question 3 avec $d = 2$. Plus récemment, la même approche est utilisé pour réaligner les prédictions d'un nuage de points 3D avec la vérité terrain correspondante, afin d'obtenir une supervision plus efficace [3].

Sources

[1] Yadolah Dodge. *Least Absolute Deviation Regression*, pages 299–302. Springer New York, New York, NY, 2008.

[2] Pranab Kumar Sen. Estimates of the regression coefficient based on kendall's tau. *Journal of the American statistical association*, 63(324):1379–1389, 1968.

[3] Ruicheng Wang, Sicheng Xu, Cassie Dai, Jianfeng Xiang, Yu Deng, Xin Tong, and Jiaolong Yang. Moge : Unlocking accurate monocular geometry estimation for open-domain images with optimal training supervision. In *Proceedings of the Computer Vision and Pattern Recognition Conference*, pages 5261–5271, 2025.