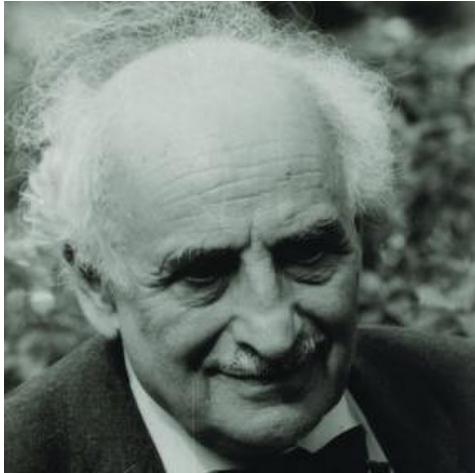


L'énigme de Freudenthal



Énoncé

On choisit deux nombres différents, strictement supérieurs à 1, dont la somme est inférieure à 100. On indique à Sofiane la somme de ces deux nombres et à Priscillia le produit. On assiste alors à la conversation suivante :

Priscillia : Je ne connais pas ces deux nombres.

Sofiane : Je savais que tu dirais ça !

Priscillia : Ah, alors j'ai trouvé !

Sofiane : Ah, alors moi aussi !

Questions :

1. Quels sont ces deux nombres ?
2. Quel est le plus grand entier, tel que si l'on remplace dans l'énoncé précédent 100 par cet entier, il soit toujours possible de trouver les deux inconnues, après avoir assisté à la conversation ci-dessus ?

Solution

1. La solution est (4, 13). On peut utiliser le code Python suivant pour le montrer.

```
python Télécharger le code  
  
import numpy as np  
  
def Denniston(M):  
    prod_to_sums, sum_to_prods = {}, {}  
    for x in range(2, M-2):  
        for y in range(2, x):  
            s = x + y  
            if s > M:  
                break  
            p = x * y  
            prod_to_sums.setdefault(p, []).append(s)  
            sum_to_prods.setdefault(s, []).append(p)  
    prods = sorted(prod_to_sums)  
    sums = sorted(sum_to_prods)  
    prod_index = {p: i for i, p in enumerate(prods)}  
    sum_index = {s: j for j, s in enumerate(sums)}  
    A = np.full((len(prods), len(sums)), -1, dtype=int)
```

```

for p, s_list in prod_to_sums.items():
    i = prod_index[p]
    for s in s_list:
        j = sum_index[s]
        A[i, j] = 0

# 1
for p, s_list in prod_to_sums.items():
    if len(s_list) == 1:
        j = sum_index[s_list[0]]
        A[prod_index[p], j] = 1

# 2
for s, p_list in sum_to_prods.items():
    j = sum_index[s]
    if any(A[prod_index[p], j] == 1 for p in p_list):
        for p in p_list:
            if A[prod_index[p], j] == 0:
                A[prod_index[p], j] = 2

# 3
for p, s_list in prod_to_sums.items():
    zeros = [s for s in s_list if A[prod_index[p], sum_index[s]] == 0]
    if len(zeros) > 1:
        for s in zeros:
            A[prod_index[p], sum_index[s]] = 3

# 4
for s, p_list in sum_to_prods.items():
    zeros = [p for p in p_list if A[prod_index[p], sum_index[s]] == 0]
    if len(zeros) > 1:
        for p in zeros:
            A[prod_index[p], sum_index[s]] = 4

# Solutions
solutions = []
for (i, j) in zip(*np.where(A == 0)):
    p = prods[i]
    s = sums[j]
    y = int((s + np.sqrt(s*s - 4*p)) / 2)
    x = s - y
    solutions.append((x, y))
return solutions

if __name__ == "__main__":
    print(Denniston(100))

```

2. On étudie le problème pour deux nombres entiers distincts $x, y \geq 2$, avec $x + y \leq M$. Pour ce problème avec un M fixé, avec l'algorithme de la question précédente, on pose :

$$\begin{aligned}
P_1(M) &\triangleq \{p : 0 \in A[p, :] \text{ après l'étape 1}\}, \\
S_2(M) &\triangleq \{s : 0 \in A[:, s] \text{ après l'étape 2}\}, \\
P_3(M) &\triangleq \{p : 0 \in A[p, :] \text{ après l'étape 3}\}, \\
S_4(M) &\triangleq \{s : 0 \in A[:, s] \text{ après l'étape 4}\}.
\end{aligned}$$

Pour un produit p on note $M_1(p)$ (resp. $M_3(p)$) l'ensemble des M telles que $p \in P_1(M)$ (resp. $p \in P_3(M)$). De façon analogue on définit $M_2(s)$ et $M_4(s)$ pour les sommes. Pour un produit p (resp. une somme s), on appelle *somme compatible* de p (resp. *produit compatible* de s) toute valeur $x + \frac{p}{x}$ (resp. $x(s - x)$), où $x \geq 2$ parcourt les diviseurs stricts de p (resp. les entiers

$x \leq s - 2$). L'ensemble des sommes (resp. produits) compatibles de p (resp. s) est notée $SC(p)$ (resp. $PC(s)$).

Théorème (Propriétés topologiques des ensembles M_i). Pour tout produit p et toute somme s les ensembles $M_1(p), M_2(s), M_3(p), M_4(s)$ satisfont :

- (a) $M_1(p)$ est soit vide soit une demi-droite $[L, \infty)$.
- (b) $M_2(s)$ est soit vide soit une demi-droite.
- (c) $M_3(p)$ est soit vide, soit une demi-droite, soit un intervalle fini $[L, R]$.
- (d) $M_4(s)$ est soit vide, soit une demi-droite, soit un intervalle fini.

Démonstration. On détaille chacun des points ci-dessous.

- (a) On a

$$M_1(p) = \{M > 0, \text{ il y a au moins 2 factorisations } p = xy \text{ avec } x > y \geq 2, x + y \leq M\}.$$

Quand M augmente, d'autres factorisations peuvent apparaître mais jamais disparaissent ; il s'ensuit que la propriété devient vraie à partir d'un certain seuil et reste vraie au-delà.

- (b) On a que

$$\begin{aligned} M_2(s) &= \{M > 0, \text{ tous les produits compatibles de } s \text{ sont dans } P_1(M)\} \\ &= \cap_{\pi \in PC(s)} M_1(\pi) \end{aligned}$$

est une demi-droite (ou est vide), comme une intersection de demi-droites qui ont des bornes à gauche.

- (c) Avec $s(p), s'(p)$ tels que

$$M_2(s(p)) = \cup_{\sigma \in SC(p)} M_2(\sigma), \quad M_2(s'(p)) = \cup_{\sigma \in SC(p), \sigma \neq s(p)} M_2(\sigma)$$

(si la deuxième union est vide, on peut prendre $s'(p) = 5$ car $M_2(5) = \emptyset$ car $6 \in PC(5)$ et $M_1(6) = \emptyset$), on a que

$$\begin{aligned} M_3(p) &= \{M > 0, \text{ parmi les sommes compatibles de } p \text{ exactement une est dans } S_2(M)\} \\ &= M_2(s(p)) \setminus M_2(s'(p)) \end{aligned}$$

est soit vide, soit une demi-droite, soit un intervalle fini.

- (d) Soit s un somme fixée. Soit $\pi \in PC(s)$. On a $s \in SC(\pi)$, donc si $s \neq s(\pi)$, alors $M_2(s) \subset M_2(s'(\pi))$ (par définition de s') et $M_2(s) \cap M_2(s(\pi)) \setminus M_2(s'(\pi)) = \emptyset$. Ainsi, pour $A \subset PC(s)$,

$$\begin{aligned} \cup_{\pi \in A} M_2(s) \cap M_3(\pi) &= \cup_{\pi \in A} M_2(s) \cap M_2(s(\pi)) \setminus M_2(s'(\pi)) \\ &= \cup_{\pi \in A, s=s(\pi)} M_2(s) \setminus M_2(s'(\pi)). \end{aligned}$$

Dans cette dernière union, la borne gauche de l'ensemble des termes est la même que celle de $M_2(s)$. Comme tous ces intervalles ou demi-droites partagent la même borne gauche, ils sont nécessairement imbriqués : l'union totale coïncide donc avec l'un d'entre eux. On peut donc poser $p(s), p'(s)$ tels que

$$\begin{aligned} M_2(s) \cap M_3(p(s)) &= \cup_{\pi \in PC(s)} M_2(s) \cap M_3(\pi), \\ M_2(s) \cap M_3(p'(s)) &= \cup_{\pi \in PC(s), \pi \neq p(s)} M_2(s) \cap M_3(\pi) \end{aligned}$$

(si la deuxième union est vide, on peut prendre $p'(s) = 6$ car $M_3(6) = \emptyset$ car $M_1(6) = \emptyset$). On a donc

$$\begin{aligned} M_4(s) &= \{M > 0, \text{ parmi les produits compatibles de } s \text{ exactement un est dans } S_3(M)\} \\ &= M_2(s) \cap M_4(s) \\ &= M_2(s) \cap M_3(p(s)) \setminus (M_2(s) \cap M_3(p'(s))). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $M_4(s)$ est lui-même la différence de deux intervalles (ou demi-droites, ou ensembles vides), et est donc encore un intervalle, une demi-droite, ou l'ensemble vide. \square

Définition. Pour une paire (x, y) on définit $M(x, y)$ l'ensemble des M pour lesquels l'exécution de l'algorithme laisse une entrée 0 correspondant à $(xy, x+y)$, i.e., $x+y \in S_4(M)$ et $xy \in P_3(M)$. En d'autres termes, $M(x, y) = M_3(xy) \cap M_4(x+y)$, qui est une demi-droite ou un intervalle par le théorème précédent. On dit que (x, y) est une solution stable si $M(x, y)$ est une demi-droite. On dit que (x, y) est une solution fantôme si $M(x, y)$ est un intervalle fini.

Théorème (Stabilité de (4, 13)). La paire $(4, 13)$ est une solution stable et $M(4, 13) = [65, \infty)$.

Démonstration. On montre en deux étapes :

(i) Pour tout $M \geq 65$, (4, 13) est solution. On vérifie d'abord que pour $M \geq 65$ les sommes

$$11, 17, 23, 27, 35, 37$$

appartiennent à $S_2(M)$. Ceci se voit en listant pour chacune des sommes les produits compatibles et en constatant que chacun de ces produits a au moins deux factorisations admissibles, i.e. appartient à $P_1(M)$, une fois $M \geq 65$; la justification exhaustive peut se faire numériquement. Nous listons ci-dessous, pour chaque produit compatible de chaque somme, deux factorisations admissibles avec facteurs ≤ 65 .

Somme $s = 11$.

(u, v)	uv	seconde factorisation
$2 + 9$	18	$3 \cdot 6$
$3 + 8$	24	$2 \cdot 12$

(u, v)	uv	seconde factorisation
$4 + 7$	28	$2 \cdot 14$
$5 + 6$	30	$3 \cdot 10$

Somme $s = 17$.

(u, v)	uv	seconde factorisation
$2 + 15$	30	$3 \cdot 10$
$3 + 14$	42	$6 \cdot 7$
$4 + 13$	52	$2 \cdot 26$

(u, v)	uv	seconde factorisation
$5 + 12$	60	$4 \cdot 15$
$6 + 11$	66	$3 \cdot 22$
$7 + 10$	70	$5 \cdot 14$
$8 + 9$	72	$3 \cdot 24$

Somme $s = 23$.

(u, v)	uv	seconde factorisation
$2 + 21$	42	$6 \cdot 7$
$3 + 20$	60	$4 \cdot 15$
$4 + 19$	76	$2 \cdot 38$
$5 + 18$	90	$9 \cdot 10$
$6 + 17$	102	$3 \cdot 34$

(u, v)	uv	seconde factorisation
$7 + 16$	112	$8 \cdot 14$
$8 + 15$	120	$6 \cdot 20$
$9 + 14$	126	$7 \cdot 18$
$10 + 13$	130	$5 \cdot 26$
$11 + 12$	132	$6 \cdot 22$

Somme $s = 27$.

(u, v)	uv	seconde factorisation
$2 + 25$	50	$5 \cdot 10$
$3 + 24$	72	$8 \cdot 9$
$4 + 23$	92	$2 \cdot 46$
$5 + 22$	110	$10 \cdot 11$
$6 + 21$	126	$7 \cdot 18$
$7 + 20$	140	$10 \cdot 14$

(u, v)	uv	seconde factorisation
$8 + 19$	152	$4 \cdot 38$
$9 + 18$	162	$6 \cdot 27$
$10 + 17$	170	$34 \cdot 5$
$11 + 16$	176	$8 \cdot 22$
$12 + 15$	180	$9 \cdot 20$
$13 + 14$	182	$26 \cdot 7$

Somme $s = 35$.

(u, v)	uv	seconde factorisation
$2 + 33$	66	$6 \cdot 11$
$3 + 32$	96	$8 \cdot 12$
$4 + 31$	124	$2 \cdot 62$
$5 + 30$	150	$10 \cdot 15$
$6 + 29$	174	$3 \cdot 58$
$7 + 28$	196	$4 \cdot 49$
$8 + 27$	216	$12 \cdot 18$
$9 + 26$	234	$6 \cdot 39$

(u, v)	uv	seconde factorisation
$10 + 25$	250	$5 \cdot 50$
$11 + 24$	264	$8 \cdot 33$
$12 + 23$	276	$6 \cdot 46$
$13 + 22$	286	$26 \cdot 11$
$14 + 21$	294	$6 \cdot 49$
$15 + 20$	300	$10 \cdot 30$
$16 + 19$	304	$8 \cdot 38$
$17 + 18$	306	$6 \cdot 51$

Somme $s = 37$.

(u, v)	uv	seconde factorisation	(u, v)	uv	seconde factorisation
$2 + 35$	70	$5 \cdot 14$	$10 + 27$	270	$9 \cdot 30$
$3 + 34$	102	$6 \cdot 17$	$11 + 26$	286	$13 \cdot 22$
$4 + 33$	132	$6 \cdot 22$	$12 + 25$	300	$15 \cdot 20$
$5 + 32$	160	$8 \cdot 20$	$13 + 24$	312	$12 \cdot 26$
$6 + 31$	186	$3 \cdot 62$	$14 + 23$	322	$7 \cdot 46$
$7 + 30$	210	$10 \cdot 21$	$15 + 22$	330	$10 \cdot 33$
$8 + 29$	232	$4 \cdot 58$	$16 + 21$	336	$12 \cdot 28$
$9 + 28$	252	$12 \cdot 21$	$17 + 20$	340	$10 \cdot 34$
			$18 + 19$	342	$6 \cdot 57$

Par le Théorème ; point (b), ces 6 sommes restent dans $S_2(M)$ pour tout $M \geq 65$. Par conséquent, l'ensemble $P_3(M)$ ne contient aucun des six produits suivants :

$$\begin{aligned} 30 &= 5 \cdot 6 = 2 \cdot 15, \\ 42 &= 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14, \\ 60 &= 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15, \\ 66 &= 2 \cdot 33 = 6 \cdot 11, \\ 70 &= 2 \cdot 35 = 7 \cdot 10, \\ 72 &= 3 \cdot 24 = 8 \cdot 9. \end{aligned}$$

En revanche, le produit

$$52 = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 26$$

appartient à $P_3(M)$, puisque $17 \in S_2(M)$ et $28 \notin S_2(M)$ ($28 = 5 + 23$ mais $5 \cdot 23$ n'a aucune autre factorisation). Par la configuration des produits compatibles avec la somme 17 (qui sont $30, 42, 52, 60, 66, 70, 72$), exactement un de ces produits est dans $P_3(M)$ (c'est 52). Ainsi $17 \in S_4(M)$, i.e., la paire $(4, 13)$ est solution.

(ii) Pour $M \leq 64$, $(4, 13)$ n'est pas solution. Nous affirmons que ni 19 ni 37 n'appartiennent à $S_2(M)$:

- Le produit $2 \cdot 17$ n'étant pas dans $P_1(M)$, cela implique $19 = 2 + 17 \notin S_2(M)$.
- Le produit 186 n'appartient pas à $P_1(M)$, car seule la factorisation $186 = 6 \cdot 31$ est légale (la factorisation $186 = 3 \cdot 62$ n'est pas admissible puisque $3+62 > M$). Donc $6+31 = 37 \notin S_2(M)$. Supposons par contradiction que la paire $(4, 13)$ soit solution pour $M \leq 64$. Alors $17 \in S_2(M)$ et $52 \in P_3(M)$. Or, les factorisations de 70 sont $2 \cdot 35, 5 \cdot 14$ et $7 \cdot 10$, et comme exactement une des sommes correspondantes 37, 19, 17 est dans $S_2(M)$, on obtient $70 \in P_3(M)$.

Comme $P_3(M)$ contient deux produits $52 = 4 \cdot 13$ et $70 = 7 \cdot 10$ compatibles avec la somme 17, cela implique $17 \notin S_4(M)$.

Par conséquent, la paire $(4, 13)$ ne peut pas être une solution pour $M \leq 64$. □

En faisant tourner l'algorithme de la question précédente avec le code suivant (ce qui prend environ 20 minutes), on trouve que la paire $(4, 13)$ est en réalité l'unique solution du problème pour $65 \leq M \leq 1684$. Pour $M \leq 64$, il n'y a pas de solution, et pour $M = 1685$, la paire $(4, 61)$ forme une seconde solution. Il suffit donc de montrer que $(4, 61)$ est stable pour conclure que le plus grand entier que l'on cherche est 1684.

```
python  Télécharger le code
if __name__ == "__main__":
    import time
    t0, M = time.time(), 1
    while True:
        M += 1
        solutions = Denniston(M)
        print(f"[M={M}] solutions : ", solutions)
        if len(solutions) > 1:
            break
    print(f"computation time: {time.time()-t0}")
```

Théorème (Stabilité de (4,61)). (4,61) est une solution stable et $M(4,61) = [1685, \infty)$.

Démonstration. On utilise la même méthode que pour la solution (4,13). Voici le code python correspondant :

```
python Télécharger le code

import math, numpy as np

def compatible_sums(M, p):
    out = []
    for u in range(2, int(math.sqrt(p)) + 1):
        if p % u == 0:
            v = p // u
            s = u + v
            if v >= 2 and s <= M and u != v:
                out.append(s)
    return list(set(out))

def compatible_products(M, s):
    assert s <= M
    out = []
    for u in range(2, int(s/2) + 1):
        if u != s - u:
            out.append(u * (s - u))
    return list(set(out))

def is_in_P1(M, p):
    if len(compatible_sums(M, p)) < 2:
        return False
    return True

def is_in_S2(M, s):
    for p in compatible_products(M, s):
        if not is_in_P1(M, p):
            return False
    return True

def proof_stable(M, sol):
    s_star = np.sum(sol)
    p_star = np.prod(sol)
    assert is_in_S2(M, s_star)

    sums_in_S2 = [s_star]
    prods_not_in_P3 = []
    for p in compatible_products(M, s_star):
        if p == p_star:
            continue
        new_sums = [s for s in compatible_sums(M, p) if s != s_star and
                   is_in_S2(M, s)]
        assert len(new_sums) > 0
        sums_in_S2.append(new_sums[0])
        prods_not_in_P3.append(p)

    print(f"\{sorted(set(sums_in_S2))} sont dans S_2({M}), et donc dans S_2(M)\n    ) pour tout M >= {M}.")
    print(f"P3(M) ne contient donc pas \{sorted(set(prods_not_in_P3))}, mais\n    contient {p_star}.")
    print(f"Donc, exactement un des produits compatibles de {s_star} est\n    dans P3(M) (c'est {p_star}), donc {s_star} est dans S4(M)")

if __name__ == "__main__":
    proof_stable(1685, (4,61))
```

Ce code vérifie que, pour tout $M \geq 1685$, exactement un produit compatible avec 65 appartient à $P_3(M)$; il en résulte que $65 \in S_4(M)$. \square

Notes et références

L'*énigme de la somme et du produit*, également appelée *énigme impossible* car elle semble manquer d'informations pour être résolue, est une énigme de connaissance. Elle remonte à 1969, lorsqu'Hans Freudenthal la proposa dans le *Nieuw Archief voor Wiskunde* [1, 2]. Le nom *énigme impossible* a été proposé par Martin Gardner [3]. Il existe de nombreuses variantes et déclinaisons [4, 5, 6], dont le point commun est la manière de tirer les bonnes conclusions d'une conversation étrange composée principalement de déclarations du type « Je ne sais pas » et « Maintenant je sais ».

Aujourd'hui, l'énigme de Freudenthal est célèbre dans le monde entier. Elle apparaît régulièrement dans les rubriques de casse-têtes mathématiques, et l'analyse du flux d'information dans la conversation sous-jacente est devenue un exercice classique pour les étudiants en informatique.

Sources

- [1] H Freudenthal. Problem no. 223 (formulation of the sum and product problem). *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(17):152, 1969.
- [2] H Freudenthal. Solution to problem no. 223. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(18):102–106, 1970.
- [3] Martin Gardner. Mathematical games : A pride of problems, including one that is virtually impossible. *Scientific american*, 241(6):22–32, 1970.
- [4] Axel Born, Cor AJ Hurkens, and Gerhard J Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part i). *Bull. EATCS*, 90:175–191, 2006.
- [5] Axel Born, Cor AJ Hurkens, and Gerhard J Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part ii). *Bull. EATCS*, 91:189–204, 2007.
- [6] Axel Born, Cor AJ Hurkens, and Gerhard J Woeginger. The freudenthal problem and its ramifications (part iii). *Bull. EATCS*, 95:201–219, 2008.