Report of $CoVaR$ and $SRISK$

张景桐

2021 年 7 月 17 日

摘要

本次报告主要解决两个问题，一个问题是如何衡量金融机构的重要性衡量，另一个问题要需要什么数据与如何测算。系统重要性的指标可以通过 $CoVaR$ 和 $SRISK$ 进行衡量。对于 $CoVaR$，报告中首先解释了 $CoVaR$ 的原理，并进一步分析如何通过分位数计算估计出 $CoVaR$，最后总结了 $CoVaR$ 可能需要用到的相关数据，通过数据 + 计算公式，我们就可以计算出衡量金融机构系统重要性的 $CoVaR$ 指标。对于 SRISK，报告中也对 SRISK 的构建原理进行了详细分析，并研究了 $SRISK$ 的估计计算过程，但仍然存在几处有待解决的问题。

目录

1 $CoVaR$

1.1 $CoVaR$ 原理解释

VaR 的公式是通过 $q\%$ 分位数来实现的

$$Pr(X^i \leq VaR_q^i) = q$$

其中 X_i 通常指的是金融机构 i 的收益率。

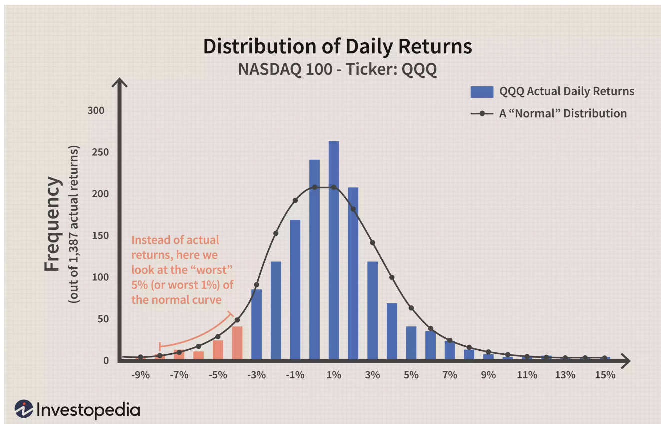

图 1: VaR 的示意图

$CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}$ 表示在给定机构 i 的某些事件 $\mathbb{C}(X^i)$ 的情况下，机构的 j 的 VaR 值。即 $CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}$ 是通过条件概率分布的 $q\%$ 分位数来隐性定义的:

$$Pr(X^j \leq CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)} | \mathbb{C}(X^i)) = q$$

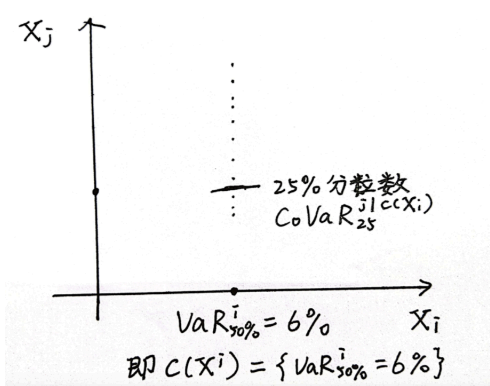

图 2: CoVaR 的示意图

图2为 $CoVaR$ 的一个理解例子，表示在给定机构 i 的收益率 $X_i = 6\%$ 的情况下，可以知道机构 i 的 $CoVaR_{25}^j$ 如图所示。

由 i 引起 j 系统性风险的部分，可以表示为

$$\Delta CoVaR_q^{j|i} = \underbrace{CoVaR_q^{j|X^i=VaR_q^i}}_{\text{给定 } i \text{ 机构收益率为 q 分位数时}} - \underbrace{CoVaR_q^{j|X^i=Median^i}}_{\text{给定 } i \text{ 机构收益率为中位数时}}$$

$\Delta CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}$ 主要是衡量 i 机构对 j 机构的影响 ji 即比较机构 i 不同情况下，机构 j 的 VaR_q^j 的变化。由于大多数论文研究的是条件事件 $\mathbb{C}(i)=\{X^i=VaR_q^i\}$，所以会把记号 $CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}$ 简化成 $CoVaR_q^{j|i}$，

举个例子来理解这个 $\Delta CoVaR_q^{j|i}$ 的概念，当 i 机构的收益率 $X_i=VaR_{5\%}^i=-15\%$ 时（即 i 机构处于亏损的异常状态），以及在 i 机构的收益率为 $X_i=Median^i=VaR_{50\%}^i=5\%$ 时（即 i 机构处于正常状态），比较机构 j 的 VaR_q^j 的变化。如果 VaR_q^j 变化不大，说明 i 机构对 j 机构的影响较小，如果变化 VaR_q^j 很大，i 机构对 j 机构的影响较大。

当 $j=system$ 时，有 $\Delta CoVaR_q^{system|i}$，这个衡量的则是机构 i 对整个系统的影响，反应了机构 i 的系统重要性；反之，当 $i=system$，$\Delta CoVaR_q^{j|system}$ 反应的是在金融系统不同状态下，VaR_q^j 的变化。

1.2 $CoVaR$ 的估计

$CoVaR$ 论文作者 Adrian(2010) 给出了通过分位数估计出 CoVaR 值的方法。

1.2.1 分位数回归与 OLS 的区别

假设回归的形式为

$$y_i = x_i^T\beta_q + e_i$$

每类回归的不同之处在于：

- OLS 最小化 $\sum_i e_i^2$，残差平方和
- median regression（即 50% 分位数回归），最小化绝对偏差 $\sum_i |e_i|$
- quantile regression 最小化的目标函数为 $Q(\beta_q)=\sum_{i:y_i\geq x_i^T\beta}^N q|y_i-x_i^T\beta|+\sum_{i:y_i<x_i^T\beta}^N(1-q)|y_i-x_i^T\beta|$，即 $\sum_{i:e_i\geq 0} q|e_i|+\sum_{i:e_i<0}(1-q)|e_i|$，$q$ 为对应的分位数。

1.2.2 文章中 $CoVaR$ 的估计

原文（Adrian, 2020) 描述了时间不变化和时间变化两种情况下，对 $CoVaR$ 的估计，下面分开阐述。

时间不变时 $CoVaR$ 的估计 ：

通过 quantile regression 可以对 $\hat{X}_q^{system,i}$ 进行预测

$$\hat{X}_q^{system,i} = \hat{\alpha}_q^i + \hat{\beta}_q^i X^i$$

其中 $\hat{X}_q^{system,i}$ 表示在给定机构 i 的收益率 X^i 情况下，金融系统 q 分位数的值，这样就可以得到关于 $\hat{X}_q^{system,i}$ 的值。（至于 $\hat{\alpha}_q^i$ 与 $\hat{\beta}_q^i$，即分位数回归的系数如何计算，会在后面说明。）

$$VaR_q^{system}|X^i = \hat{X}_q^{system,i} \tag{1}$$

（1）是 $\hat{X}_q^{system,i}$ 的等价表达，即（1）左端的意思就是给定机构 i 的收益率 X^i 情况下，金融系统 q 分位数的值。

$$CoVaR_q^{system|X^i=VaR_q^i} = VaR_q^{system}|VaR_q^i = \hat{\alpha}_q^i + \hat{\beta}_q^i VaR_q^i \tag{2}$$

将（1）给定条件 X^i 替换成 VaR_q^i，可得到（2），即将收益率 X^i 变成 i 机构对应的分位数 VaR_q^i，这也等于 $CoVaR$ 的定义。

$$\Delta CoVaR_q^{system|i} = \hat{\beta}_q^i (VaR_q^i - VaR_{50\%}^i) \tag{3}$$

（3）对应 $\Delta CoVaR$ 的概念，即机构 i 不同情况下的金融系统的 VaR 的差值。这样就可以描述出机构 i 对金融系统的影响，即反应了机构 i 的系统重要性。

时间变化时 $CoVaR$ 的估计 ：

由于实际过程中，每个金融机构的收益率会随着时间变化，因此引入了状态变量 (state variable) 来刻画这种变化。我们用下标 t 标记 $CoVaR_t$ 和 VaR_t 来反应时间的变化，并用滞后状态向量 M_{t-1} 来刻画时间波动（状态变量后面会详细说明），注意 M_{t-1} 是一个向量，包括了多个滞后状态变量。

$$X_t^i = \alpha^i + \gamma^i M_{t-1} + \varepsilon_t^i \tag{4}$$

$$X_t^{system} = \alpha^{system|i} + \beta^{system|i} X_t^i + \gamma^{system|i} M_{t-1} + \varepsilon_t^{system|i} \tag{5}$$

对于（4）和（5）的个人理解是，（4）意思是可以通过 t-1 期的数据 M_{t-1}(state variables) 来对 t 期的 X_t^i 进行预测，结合（4）得到的 X_t^i 与已有的 t-1 期数据 M_{t-1} 可以进一步对金融系统的收益率 X_t^{system} 进行预测。

$$VaR_t^i(q) = \alpha_q^i + \gamma_q^i M_{t-1} \tag{6}$$

$$CoVaR_t^i(q) = \hat{\alpha}_q^{system|i} + \hat{\beta}_q^{system|i} X_t^i + \hat{\gamma}_q^{system|i} M_{t-1} \tag{7}$$

由于 $VaR_t^i(q)$ 和 $CoVaR_t^i(q)$ 都是收益率，替换掉（4）和（5）中的 X，再通过分位数回归，即可以得到（6）和（7）方程。注意：由于原文中标记符号比较简化，容易引起误解，这里 $CoVaR_t^i(q)$ 的意思是指在机构 i 的不同情况下，系统 system 的 VaR，其实具体应该写成 $CoVaR_t^{system|i}(q)$，同理

状态变量 (state variables) ：

在时间变化的 $CoVaR$ 中，我们用到了状态变量。这些状态变量要能够反应资产收益率的时间变化特性。

文章中选取的因子包括 (有些不太好翻译的，我保留了原文)

1 由 Chicago Board Options Exchange 给出的指标 VIX，这个指标可以反应股票市场的变动率。

2 A short term "liquidity spread,"defined as the difference between the three-month repo rate and the three-month bill rate. (其中 Repo rate is the rate at which the central bank of a country lends money to commercial banks in the event of any shortfall of funds)

3 三月期限的国库券利润的变化

下面因子 4 和 5 反应的是两个固定收益因子

4 The change in the slope of the yield curve, measured by the yield spread between the ten-year Treasury rate and the three-month bill rate obtained from the Federal Reserve Board's H.15 release.

5 The change in the credit spread between BAA-rated bonds and the Treasury rate (with the same maturity of ten years) from the Federal Reserve Board's H.15 release.

下面因子 6 和 7 是证券市场上的一些因子

6 The weekly equity market return from CRSP.

7 The weekly real estate sector return in excess of the market return

以上都是我们可能需要收集的一些数据，不过地区不同可能会存在一点差异，这些都是反应美国金融市场变动的一些因子。

1.2.3 分位数回归的系数计算

之前在 1.2.1 提到了分位数回归和 OLS 的区别，即最小化的目标函数不同。

在时间变化的情况，我们要计算 $CoVaR$ 需要通过下面这个方程进行计算：

$$CoVaR_{q,t}^{j|i} = \alpha_q^i + \beta_q^i M_{t-1} + \gamma_q^i X_t^i + \varepsilon_t \tag{8}$$

实际上，计算出 α_q^i 和 β_q^i 是解下面这个最优化问题：

$$\min_{\alpha_q,\beta_q,\gamma_q} \sum_t \begin{cases} q\left|X_t^j - \alpha_q^i - M_{t-1}\beta_q^i - X_t^i\gamma_q^i\right| & \text{if } \left(X_t^j - \alpha_q^i - M_{t-1}\gamma_q^i - X_t^i\beta_q^i\right) \geq 0 \\ (1-q)\left|X_t^j - \alpha_q^i - M_{t-1}\beta_q^i - X_t^i\gamma_q^i\right| & \text{if } \left(X_t^j - \alpha_q^i - M_{t-1}\gamma_q^i - X_t^i\beta_q^i\right) < 0 \end{cases}$$

上面是一个数学规划问题，我在网上找了一份代码，python 里面有做分位数回归现成的包，改改输入变量就可以直接调用了。不过要注意的是，上网查了一下，python 与 R 软件求出的分位数回归方程可能略微不同，因为求解方法不一样, python 使用了迭代的加权最小二乘法求解，所有要用 python 做还是用 R 做可以到时考虑一下。另外，具体的分位数回归求解的数学推导可以参考一下原文（Adrian, 2020) 的 Appendix A，里面写的也挺详细的。

1.3 $CoVaR$ 需要的数据

在前面我们已经解决掉了 $CoVaR$ 定义和 $CoVaR$ 估计的方法了，可以开始找实际数据进行计算了

1.3.1 原文中用到的数据

文章中 X^i 的定义为金融资产市场价值的增长率 (growth rates of Market-Valued Total Financial Assets)，即下式

$$X_t^i = \frac{ME_t^i \cdot LEV_t^i - ME_{t-1}^i \cdot LEV_{t-1}^i}{ME_{t-1}^i \cdot LEV_{t-1}^i} = \frac{A_t^i - A_{t-1}^i}{A_{t-1}^i}$$

其中 ME_t^i 表示金融机构 i 的总权益的市场价值，LEV_t^i 表示总资产和权益账面价值的比率，金融资产的市场价值 $A_t^i = ME_t^i \times LEV_t^i = BA_t^i \times \frac{ME_t^i}{BE_t^i}$，其中 BA_t^i 表示的是金融机构 i 总资产的账目价值，$\frac{ME_t^i}{BE_t^i}$ 表示的是权益市场价值和账目价值比例，所以也得到了总权益的市场价值 A_t^i。X^i 则代表的是 A_t^i 的增长率。

因此，我们需要账目资产价值、账目权益价值、市场权益价值的三个数据。

当然文章中也指出这只是其中的一种衡量方式，这里面只对资产价值进行了衡量，没有对资产负债表里面其他项进行衡量，但是对资产描述越完备，越能够准确地反应风险测度。

数据总结 ：

文章里面样本包括了 1226 家金融机构，包括了商业银行 (commercial banks)，证券商 (security broker-dealers)，保险公司 (insurance companies)，实体房地产公司 (real estate companies)，时间跨度为 1986Q1 到 2010Q4

$$CoVaR_{q,t}^{system|i} = \alpha_q^i + \beta_q^i M_{t-1} + \gamma_q^i X_t^i + \varepsilon_t$$

通过上面的公式，即之前提到的（8）就可以计算出 $CoVaR_{q,t}^{system|i}$，即机构 i 的系统重要性。用到数据包括以下：

构造 $X_t^i i$ 的数据

1 金融机构的账目权益价值

2 金融机构的市场权益价值

3 金融机构的账目总资产

状态变量 M_{t-1} 的数据（我认为这个状态变量是可以灵活选取的）

4 由 Chicago Board Options Exchange 给出的指标 VIX，这个指标可以反应股票市场的变动率。

5 A short term “liquidity spread,”defined as the difference between the three-month repo rate and the three-month bill rate. (其中 Repo rate is the rate at which the central bank of a country lends money to commercial banks in the event of any shortfall of funds)

6 三月期限的国库券利润的变化

7 The change in the slope of the yield curve, measured by the yield spread between the ten-year Treasury rate and the three-month bill rate obtained from the Federal Reserve Board's H.15 release.

8 The change in the credit spread between BAA-rated bonds and the Treasury rate (with the same maturity of ten years) from the Federal Reserve Board's H.15 release.

9 The weekly equity market return from CRSP.

10 The weekly real estate sector return in excess of the market return

2 $SRISK$

2.1 $SRISK$ 的构建原理

$SRISK$ 的目标是衡量出在发生系统性事件的情况下，一个金融公司的资本短缺 (capital shortfall, CS)

文中将公司 i 在第 t 天的资本短缺 CS_{it} 定义如下:

$$CS_{i,t} = kA_{i,t} - W_{i,t} = k(D_{i,t} + W_{i,t}) - W_{i,t} \tag{9}$$

其中 $W_{i,t}$ 表示的权益市值，$D_{i,t}$ 表示的负债的账面价值，$A_{i,t}$ 表示的是 the value of quasi assets(我谷歌了一下这个概念，但是没有找到它表示什么意思)，k 表示的是审慎资金比率 (prudential capital fraction)，文章中将 k 设置成了 8%.

当 CS_{it} 为负的时候，表示公司（或金融机构）有资金盈余，运营正常；当 CS_{it} 为正的时候，说明公司（或金融机构）资金不足，面临着较大的财务压力。

文中关注的是在系统性事件下，金融机构资本短缺的期望值。文章将系统性风险事件定义为在时间跨度 h 中，市场收益率下跌超过某个阈值 C 的情况。用 $R_{m,t+1:t+h}$ 表示市场在时间 $t+1$ 到 $t+h$ 的算数平均收益率，那么对应的系统性事件可以定义为 $\{R_{m,t+1:t+h} < C\}$. 文中为了反应系统性事件的极端性，将时间跨度 h 设置为一个月（即 22 天，可能和周末不交易有关），将阈值 C 设置为 -10%.

下面可以定义 $SRISK$ 为在系统性事件下资金短缺的期望，即

$$\begin{aligned}\text{SRISK }_{i,t} &= \mathrm{E}_t\left(\mathrm{CS}_{i,t+h} \mid R_{m,t+1:t+h} < C\right) \\ &= k\mathrm{E}_t\left(\mathrm{D}_{i,t+h} \mid R_{m,t+1:t+h} < C\right) - (1-k)\mathrm{E}_t\left(\mathrm{W}_{i,t+h} \mid R_{m,t+1:t+h} < C\right)\end{aligned}$$

文中为了计算这个条件期望,假设债务是不能够重新协调的,故有了 $E_t(D_{i,t+h}|R_{i,t+1:t+h} < C) = D_{i,t}$(个人理解是，债务不能够通过协商增大或减少，比如 A 欠 B 钱，不能够口头协商而取消债务，因此在系统性事件发生的时候，最后的 $t+h$ 时刻的债务和一开始 t 时刻的债务是一样的)。在这个假设下，有了下式:

$$\begin{aligned} \text{SRISK }_{i,t} &= k\mathrm{D}_{i,t} - (1-k)\mathrm{W}_{i,t}\left(1 - \mathrm{LRMES}_{i,t}\right) \\ &= k(D_{i,t} + W_{i,t}) + (1-k)W_{i,t}LRMES_{i,t} - W_{i,t} \\ &= \mathrm{W}_{i,t}\left[k\mathrm{LVG}_{i,t} + (1-k)\mathrm{LRMES}_{i,t} - 1\right] \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $LVG_{i,t}$ 表示的是 quasi leverage ratio$\dfrac{D_{i,t}+W_{i,t}}{W_{i,t}}$, 而 $LRMES_{i,t}$ 表示的是 Long Run MES，即给定系统性事件下，公司权益算数平均回报率的期望值，即

$$\text{LRMES }_{i,t} = -\mathrm{E}_f\left(R_{i,t+1:t+h} \mid R_{m,I+1:t+h} < C\right)$$

其中 $R_{i,t+1:t+h}$ 表示的是从时期 $t+1$ 到 $t+h$，公司权益算数平均回报率的期望值（注意 i 下标是指公司，m 下标是指整个市场)。

从（10）中，我们可以发现 $SRISK$ 与公司规模大小 $W_{i,t}$、杠杆率程度 $LVG_{i,t}$ 和在市场下跌时权益贬值的期望 $LRMES_{i,t}$ 有关。并且我们还可以发现,（10）给出了 $SRISK$ 的一个点估计，其中唯一不确定的是 $LRMES_{i,t}$，要计算出 $SRISK$，则关键是确定 $LRMES_{i,t}$，后面会详细说明 $LRMES_{i,t}$ 这个条件期望要怎么求解的。

此外，刚刚提到的是 $SRISK$ 是一个点估计，其实我们还可以定义一个 $SRISK$ 的估计区间:

$$\left(\mathrm{CS}_{i,t+h|t}^{\alpha/2}, \mathrm{CS}_{i,t+h|t}^{1-\alpha/2}\right)$$

其中

$$\mathrm{CS}_{i,t+h|t}^{q} = \mathrm{W}_{i,t}\left[k\mathrm{LVG}_{i,t} - (1-k)F_{i,t+1:t+h|t}^{-1}(q) - 1\right]$$

里面的 $F_{i,t+1:t+h|t}(x)$ 表示的是给定系统性事件时，公司权益的分布函数。

对于整个金融系统的 $SRISK$ 值，可以通过下式得到

$$\text{SRISK }_t = \sum_{i=1}^{N}\left(\mathrm{SRISK}_{i,t}\right)_+$$

其中 $(x)_+$ 的意思是 $max(x,0)$. 我们可以留意到这里金融系统的 $SRISK_t$ 是一个取正部相加的概念,因为在金融危机的时候,有盈余的银行会把钱留给自己,不会轻易贷款给别人,所以系统的 $SRISK_t$ 应该是正部相加,而不是直接相加,直接相加的话会抵消掉一部分 $SRISK$. 金融系统总的 $SRISK_t$ 也可以理解成在金融危机时，政府为了纾困而应该提供给相应银行救助资金的总和。

我们还可以定义每个机构 $SRISK$ 的比率如下

$$SRISK\%_{i,t} = \frac{(SRISK_{i,t})_+}{SRISK_t}$$

这个比率反应了机构 i 所占金融系统 $SRISK_t$ 的份额。

2.2 $SRISK$ 的估计计算

从（10）中，我们可以发现要计算出 $SRISK$，关键是要计算出条件期望：

$$\text{LRMES}_{i,t} = -\mathrm{E}_t(R_{i,t+1:t+h}|R_{m,t+1:t+h} < C)$$

文中给了三种计算条件期望的 $LRMES_{i,t}$ 的可行方法

- 基于蒙特卡洛的 GARCH-DCC 方法
- 基于正态假设估计的方法
- 一种基于 copulas 的非线性方法

因为文章里面主要用的基于蒙特卡洛的 GARCH-DCC 方法，附录 A 里面给出了具体算出 $LRMES_{i,t}$ 的步骤，所以我主要研究了这个方法，但是在过程中也遇到了一些困难，正在继续尝试解决这些问题，我先按已经解决的进行叙述（按照附录 A 的过程）：

Step 1:

分别在 t=1...T 期构造 GARCH-DCC standardized innovations（就是下面这两个东西，因为是专有名词，所以我就不翻译了。）

$$\epsilon_{m,t} = \frac{r_{m,t}}{\sigma_{m,t}} \text{ and } \xi_{i,t} = \left(\frac{r_{i,t}}{\sigma_{i,t}} - \rho_{i,t}\frac{r_{m,t}}{\sigma_{m,t}}\right) / \sqrt{1-\rho_{i,t}^2} \tag{11}$$

(11) 中构造出来的 $\epsilon_{m,t}$ 和 $\epsilon_{i,t}$ 是零均值，单位方差的，而且不相关。

我们对（11）中的每一项进行详细解释。

$r_{i,t} = log(1+R_{i,t})$ 表示的是公司的对数收益率，$r_{m,t} = log(1+R_{m,t})$ 表示的是市场的对数收益率。假设信息集 $\mathcal{F}_{t-1}$ 的信息在 $t-1$ 时间已知，那么假设这一堆收益率服从零均值和方差随着时间变化的分布 $\mathcal{D}$，即

$$\begin{bmatrix} r_{it} \\ r_{mt} \end{bmatrix} | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{D}\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_{it}^2 & \rho_{it}\sigma_{it}\sigma_{mt} \\ \rho_{it}\sigma_{it}\sigma_{mt} & \sigma_{mt}^2 \end{bmatrix}\right) \tag{12}$$

从（12）中，我们可以看出，我们需要确定随时间变化的方差和标准差。

文中选取了 GJR-GARCH（Glosten, Jaganathan, and Runkle 1993, Rabemananjara, and Zakoïan 1993, Engle 2002）的波动率模型来确定公司和市场的方差，这个 GJE-GARCH 模型方程如下

$$\begin{aligned} \sigma_{i,t}^2 &= \omega_{Vi} + \alpha_{Vi}r_{i,t-1}^2 + \gamma_{Vi}r_{it-1}^2 I_{i,t-1}^- + \beta_{Vi}\sigma_{i,t-1}^2 \\ \sigma_{m,t}^2 &= \omega_{Vm} + \alpha_{Vm}r_{m,t-1}^2 + \gamma_{Vm}r_{mt-1}^2 I_{m,t-1}^- + \beta_{Vm}\sigma_{m,t-1}^2 \end{aligned} \tag{13}$$

其中 I 是一个示性函数，当 $\{r_{i,t} < 0\}$ 时，$I_{i,t}^- = 1$，以及当 $\{r_{m,t} < 0\}$ 时，$I_{m,t}^- = 1$。从这个方程里面，我们可以看到在 t 期时候的波动率 $\sigma_{i,t}^2$ 可以由 $t-1$ 期的收益率 $r_{m,t-1}^2$ 和波动率 $\sigma_{i,t-1}^2$ 所确定。

在这里我遇到了一些问题，如何确定（13）中 ω，γ 和 β 的值，一种可能是像指数平滑法一样，直接给定这几个数的值，然后不断迭代，从 1 期一直计算到 t 期；另一种可能是像

ARMA 模型一样，通过回归确定这几个数，但是从 1 期到算 2 期，2 期到 3 期这样下去计算的时候，每次都要做个回归，感觉不太对劲。我正在看 GJR-GARCH 的原文，分析怎么求解，需要一些时间。

此外，在通过 GJR-GRACH 求出 $\sigma_{i,t}$ 和 $\sigma_{i,m}$ 后，可以计算出 $\epsilon_{m,t}=\frac{r_{m,t}}{\sigma_{m,t}}$ 和 $\epsilon_{i,t}=\frac{r_{i,t}}{\sigma_{i,t}}$。

不过对比（11），我们发现还有一个 $\rho_{i,t}$ 没有求出来，文中是通过 DCC 模型求出来的，即以下

$$\operatorname{Cor}\left(\begin{array}{c}\epsilon_{it}\\ \epsilon_{mt}\end{array}\right)=R_t=\left[\begin{array}{cc}1 & \rho_{it}\\ \rho_{it} & 1\end{array}\right]=\operatorname{diag}\left(Q_{it}\right)^{-1/2}Q_{it}\operatorname{diag}\left(Q_{it}\right)^{-1/2} \tag{14}$$

通过（14）可以确定 $\rho_{i,t}$ 的值，其中矩阵 $Q_{i,t}$ 称为 pseudo correlation matrix，可以通过以下方式确定 $Q_{i,t}$。

$$Q_{it}=\left(1-\alpha_{Ci}-\beta_{Ci}\right)S_i+\alpha_{Ci}\left[\begin{array}{c}\epsilon_{it-1}\\ \epsilon_{mt-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\epsilon_{it-1}\\ \epsilon_{mt-1}\end{array}\right]'+\beta_{Ci}Q_{it-1} \tag{15}$$

在 (15) 中，S_i 是调整后的公司和市场收益率 ($\epsilon_{m,t}$ 和 $\epsilon_{i,t}$) 在无条件下的协方差矩阵，这个模型可以通过两步的 QML 估计得出。（**同样的，我在这个地方也卡住了，我在思考怎么样确定 α_{Ci} 和 β_{Ci} 的值**，也还在看 DCC 的原文）

顺利的话，通过上述步骤，可以确定出 (11) 中的值，转入第二步。

Step 2:

(步骤 2 我觉得我有些地方理解不到位，所以先贴原文出来再分析，避免造成误导).

Sample with replacement $S\times h$ pairs of standardized innovations $\left[\xi_{it},\epsilon_{mt}\right]'$. Use these to construct S pseudo samples of GARCH-DCC innovations from period $T+1$ to period $T+h$, that is

$$\left[\begin{array}{c}\xi_{iT+t}^{s}\\ \epsilon_{mT+t}^{S}\end{array}\right]_{t=1,\ldots,h}\qquad s=1,\ldots,S \tag{16}$$

从 t 期的 ξ 和 ϵ 按照 Step 1 中的方法是可以一直地推到 t+h 期的，**这里我没有弄明白的是 S 指代的是什么意思**，暂时理解的意思是，在第 t 天里面抽 S 个观测样本出来。

Step 3:

（步骤 3 我同样先贴原文出来）

Use the pseudo samples of GARCH-DCC innovations as inputs of the the DCC and GARCH filters, respectively, using as initial conditions the last values of the conditional correlation ρ_{iT} and variances σ_{iT}^2 and σ_{mT}^2. This step delivers S pseudo samples of GARCH-DCC logarithmic returns from period $T+1$ to period $T+h$, conditional on the realized process up to time T, that is

$$\left[\begin{array}{c}r_{iT+t}^{s}\\ r_{mT+t}^{s}\end{array}\right]_{t=1,\ldots,h}\mid\mathcal{F}_T\quad s=1,\ldots,S \tag{17}$$

个人对 Step3 的理解是，步骤 3 和步骤 2 其实是差不多的，只不过步骤 3 强调的是从 T 时刻的信息集 $\mathcal{F}_T$ 开始，利用这一部分的信息，即 T 期的 ρ_{iT}，σ_{iT}^2 和 σ_{mT}^2 进行递推到 $T+h$ 期。

Step 4:

利用步骤 3 中的 (17) 中得到的公司 i 的对数收益率 r^s_{iT+t}，预测出公司 i 的 $T+1$ 到 $T+h$ 的算数平均收益率。

$$R^s_{iT+1:T+h} = \exp\left\{\sum_{t=1}^{h} r^s_{iT+t}\right\} - 1 \tag{18}$$

同样可以计算出市场的算数平均收益率 $R^s_{m,T+1:T+h}$。

Step 5:

$$\mathrm{LRMES}_{iT} = -\frac{\sum_{s=1}^{S} R^s_{iT+1:T+h} I\left\{R^s_{mT+1:T+h} < C\right\}}{\sum_{s=1}^{S} I\left\{R^s_{mT+1:T+h} < C\right\}} \tag{19}$$

(19) 中的 $R^s_{iT+1:T+h}$ 即为 (18) 中的所求，其中根据 Monte Carlo 法的思想，(19) 把 S 个样本给加总了起来，分母表示这 S 中个样本中处于系统性事件的数目，而分子表示的在这 S 个样本中，系统性事件情况下 i 公司的收益率之后，这样的话，和/数目，就可以估计出这个条件期望了。

2.3 $SRISK$ 需要的数据

文中的金融机构选取了 29 家 Depositories，34 家 Insurance，10 家 Broker-Dealers 和 22 家 Others，共选取了 95 家，时间跨度是从 2000 年 1 月 3 到 2012 年 12 月 31 日。$SRISK$ 是每家公司一个月都计算一次。

我将文中用到的数据总结如下：

1 金融机构的权益市场价值 $W_{i,t}$

2 金融机构的账面债务值 $D_{i,t}$

3 金融机构的 value of quasi asset $A_{i,t}$

4 市场的收益率 $R_{i,t}$

5 金融机构的收益率 $R_{m,t}$，这个指的应该就是权益市值 $W_{i,t}$ 的增长率

文中的意思精确到日度数据，甚至有可能要更加细分，要根据 S 的意思才能进一步判断。

2.4 $SRISK$ 有待解决的问题

之前提到过有些地方我暂时还没有弄清楚，需要进一步分析以及从原始文献中解答。

包括以下：

1 如何确定 (13) 中的 ω，γ 和 β 的值

2 如何确定 (15) 中 α_{Ci} 和 β_{Ci} 的值

3 (16) 中 S 的具体意思是什么

参考文献

[1] Adrian T, Brunnermeier M K. CoVaR[R]. National Bureau of Economic Research, 2011.

[2] Brownlees C, Engle R F. SRISK: A conditional capital shortfall measure of systemic risk[J]. The Review of Financial Studies, 2017, 30(1): 48-79.

[3] Engle R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2002, 20(3): 339-350.

说明：第 1 篇是 $CoVaR$ 的原始文献，第 2 篇是 $SRISK$ 的原始文献，第 3 篇是 $SRISK$ 文献中提到的 GARCH-DCC 方法的原始文献。