目 录

第一章　预备知识与随机过程的基本概念

§1.1　概率空间、随机变量、条件期望

定义 1.1.1　设 Ω 为样本空间, $\mathscr{F}$ 为 Ω 的非空子集类, 若

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $A^c \in \mathscr{F}$(其中 A^c 表示 A 的补集);

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}(n \geq 1)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 为 $\sigma-$ 代数, $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 为可测空间.

例 1.1.1　(a) $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$(Ω 中的所有子集构成的集类);

(b) $\Omega = [0, \infty)$, $\mathscr{F}$ 为由 Ω 中所有开集所生成的最小 $\sigma-$ 代数(即包含所有开集的 $\sigma-$ 代数之交).

命题 1.1.1　若 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$(表示 Ω 中的所有子集构成的集类), 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小$\sigma-$代数 $\sigma(\mathscr{C})$ (即 $\sigma(\mathscr{C})$ 为$\sigma-$代数, $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$, 且对任一$\sigma-$代数 $\mathscr{A}' \supseteq \mathscr{C}$, 必有 $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}'$).

证明　设 $\mathscr{H}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的$\sigma-$代数全体构成的集类, 则 $\mathscr{P}(\Omega) \in \mathscr{H}$, 所以 $\mathscr{H}$ 是非空的. 又因为任意个包含 $\mathscr{C}$ 的$\sigma-$代数的交仍是一个包含 $\mathscr{C}$ 的$\sigma-$代数 (按$\sigma-$代数的定义逐条验证), 所以若取

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathscr{H}} \mathscr{B},$$

则 $\sigma(\mathscr{C})$ 即为所求.

定义 1.1.2　对任一集类 $\mathscr{C}$, 包含 $\mathscr{C}$ 的最小域称为由 $\mathscr{C}$ 张成(生成)的域, 记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

定义 1.1.3　(概率空间) 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间, P 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的函数, 若满足

(1) $P(A) \geq 0\ \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}(n \geq 1)$, $A_n A_m = \varnothing(n \neq m)$, 则有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$,

则称 P 为可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的一个概率测度, 简称为概率. 称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间. 若 $A \in \mathscr{F}$, 则称 A 为事件, $P(A)$ 为事件 A 的概率.

例 1.1.2　(略)

定义 1.1.4　(随机变量) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, $X(\omega)(\omega \in \Omega)$ 为定义在 Ω 上的单(实)值函数, 如果对任意的 $a \in \mathbb{R}$(实数集), 有

$$\{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathscr{F},$$

则称 X 为随机变量(random variable), 简记为r.v..

为了表述方便, 给出如下记号:

(a)

$$\{X \leq a\} := \{\omega : X(\omega) \leq a\} = \{\omega : X(\omega) \in (-\infty,\ a]\},$$

$$\{X<a\}:=\{\omega:X(\omega)<a\}=\{\omega:X(\omega)\in(-\infty,\ a)\},$$
$$\{X=a\}:=\{\omega:X(\omega)=a\}.$$

(b) 设 X, Y 均为随机变量, $a, b\in\mathbb{R}$, 则 $\{X\le a,\ Y\le b\}:=\{\omega:X(\omega)\le a$ 且 $Y(\omega)\le b\}$ 等.

定义 1.1.5 (分布函数) 设 X 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量, 定义函数 $F(x)$ 如下:

$$F(x):=P(X\le x)=P(\{X\le x\})\ ,\qquad x\in\mathbb{R},$$

则称 $F(x)$ 为 X 的分布函数(单调非减, 右连续).

设 $X,\ Y$ 均为 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的随机变量, 则二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布函数 $F(x,\ y)$ 定义为:

$$F(x,y)=P(X\le x,\ \ Y\le y)\ ,\qquad x,\ y\in\mathbb{R}.$$

定义 1.1.6 (独立性) 设 X, Y 均为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量, 称 X 与 Y 相互独立, 若对任意的 $x, y\in\mathbb{R}$, 有 $F(x,\ y)=F_X(x)F_Y(y)$, 其中, $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别表示 X 与 Y 的分布函数.

(a) 类似地, 可以定义多维随机变量 $(X_1,\dots,X_n)$ 的联合分布函数 $F(x_1,\dots,x_n)$, 以及 $X_1,\dots,X_n$ 的相互独立性.

(b) 可以证明:若 X, Y, Z 相互独立, 则 $X\pm Y$ 与 Z 相互独立. 更一般地, $g_1(X,\ Y)$ 与 $g_2(Z)$ 独立(其中 $g_1(X,Y)$ 和 $g_2(Z)$ 为可测函数即可!详情参考文献 [17]).

定义 1.1.7 (条件概率) 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, $A, B\in\mathscr{F}$, 且 $P(B)>0$. 则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的情况下事件 A 发生的条件概率.

设 $A_n\in\mathscr{F}(n\ge1)$, $A_nA_m=\varnothing(n\ne m)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$, 则有

$$P(B)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_nB)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_nB)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)P(B|A_n),$$

其中, 不妨设 $P(A_n)>0(n\ge1)$. 全概率公式!

例 1.1.3 设 X 为离散型随机变量, 取值于 $S=\{1,2,\dots,i,\dots\}$, 则令 $A_i\triangleq\{X=i\}$, $i\in S$. 易知 $A_iA_j=\varnothing(i\ne j)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

定义 1.1.8 设 X 为随机变量, $F(x)$ 为其分布函数, 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)$ 存在, 则称

$$EX:=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)$$

为随机变量 X 的数学期望(或称为 X 的均值).

期望有下列基本性质: 设 X, Y 均为随机变量, $a,\ b \in \mathbb{R}$, 则

(a) $E(aX+bY) = aEX + bEY$;

(b) $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_X(x)$;

(c) 设 X 为取值于 $S = \{0, 1, \ldots, i, \ldots\}$ 上的r.v., 则 $EX = \sum\limits_{i=0}^{\infty} iP(X=i)$.

为了给出马氏过程的一般性定义, 我们给出下列概念:

定义 1.1.9 (条件数学期望) 设 X 为定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的r.v., $\mathscr{E}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma-$ 代数(即 $\mathscr{E}$ 为 Ω 上的 $\sigma-$ 代数, 且 $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$). EX 存在, 则存在唯一的实值函数, 记为 $E(X|\mathscr{E})$, 满足:

(a) $E(X|\mathscr{E})$ 关于 $\mathscr{E}$ 可测(即 $\{E(X|\mathscr{E}) \le a\} \in \mathscr{E}, \forall a \in \mathbb{R}$),

(b) $\int I_B X dP = \int I_B E(X|\mathscr{E}) dP\ \forall B \in \mathscr{E}$, 其中 I_B 为集合 B 的示性函数.

我们称 $E(X|\mathscr{E})$ 为给定子 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{E}$ 下, 随机变量 X 的条件数学期望. (注意, 条件数学期望是函数!)

记 Y 为定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的r.v., 记 $\sigma(Y) = \sigma(Y^{-1}(B),\ B = (-\infty,\ a],\ a \in \mathbb{R})$ 为由 Y 所生成的子 $\sigma-$ 代数, 则称

$$E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$$

为给定随机变量 Y 下随机变量 X 的条件数学期望.

§1.2　随机过程的定义及其分类

在本书中, 我们假定所有随机变量均定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上.

A、基本概念

定义 1.2.1 (随机过程) 设 T 为一指标集, 且对每一个参数 $t \in T$, $X(t,\ \omega)$ 为一个随机变量, 则称随机变量族 $X_T = \{X(t,\omega), t \in T\}$ 为一随机过程(Stochastic Processes), 或记之为:$\{X_t, t \in T\}$ 或 $\{X(t), t \in T\}$.

用映射表示为:

$$X_T : (t, \omega) \mapsto X(t, \omega).$$

对每个固定的 t, $X(t,\ \cdot)$ 为一个随机变量; 而对每个固定的 $\omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$ 是关于 $t \in T$ 的映射, 称 $X(\cdot, \omega)$ 为样本轨道(或样本函数, 一个实现).

X_T 的取值可以是实数、复数或更一般的抽象空间中的元, 其一切可能取值的全体所构成的集合称为 X_T 的状态空间, 记作 S.

例 1.2.1 (a) $X_n (n \in Z)$ 为醉汉于第 n 时刻所处的位置, $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$, $S = Z$ 或 $S = \mathbb{R}$;

(b) 设 $X_t := N(t) = \{[0, t],$ 内某服务站的顾客数$\}$, $T = [0,\ \infty)$, $X_T = \{N(t), t \ge 0\}$;

(c) X_t 为某期票于 t 时刻的价格(或某公司的财务量、资金总量等), $T = \{0, 1, \cdots\}$ 或 $T = [0, \infty)$.

B、随机过程的主要分类

1、独立增量过程:

若对任意 $t_1 < t_2 < \ldots < t_n (t_n \in T)$, 有 $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的, 则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立增量过程. 进而, 若对一切 $0 \le s \le t$, 增量 $X(t) - X(s)$ 的分布函数只依赖于 $t - s$, 则称 $\{X(t),\ t \in T\}$ 为独立平稳增量过程.

例 1.2.2 例 1.2.1.

2、马尔可夫过程:

对每个 $A \in \mathscr{B}(S)$(S 中的 $\sigma-$ 代数), $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, 令

$$P(X_t \in A | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \triangleq E(I_{\{X_t \in A\}} | \sigma(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})),$$

称随机过程 $\{X_t, t \ge 0\}$ 为马氏过程, 若

$$P(X_t \in A | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = P(X_t \in A | X_{t_n})$$

对一切 $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t,\ A \in \mathscr{B}(S)$ 成立.

特别地, 当该过程的状态空间 S 可数或有限时, 该马尔可夫过程称为马尔可夫链(Markov Chain).

样本函数是连续的马尔可夫过程称为“扩散过程”.

3、平稳过程

若对一切 $t_1, \ldots, t_n \in T$, 以及 $h > 0$, 随机变量 $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ 与 $X_{t_{1+h}}, \ldots, X_{t_{n+h}}$ 有相同的分布, 则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为平稳的.

即:平稳过程的一切有限维分布(即 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 的分布)对时刻的推移保持不变.

4、鞅(Martingale)

若对一切 $t \in T$, $E|X(t)| < \infty$, 且对一切 $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$, 有

$$E(X_{t_{n+1}} | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = X_{t_n} \qquad a.s.$$

则称 $\{X_t, t \ge 0\}$ 为鞅.

5、更新过程

设 $\{X_k, k = 1, 2, \cdots\}$ 为独立同分布的r.v. 序列, 对任何 $t \ge 0$, 令 $S_0 = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 并定义

$$N(t) = \max\{n : n \ge 0, S_n \le t\},$$

称 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为更新过程(renewal processes).

$N(t)$ 可以理解为 $[0, t]$ 内更换零件的次数(其中 X_k 表示第 k 次更换的零件数; 系统的信号数; 服务台来的顾客数;或到保险公司的索赔总数).

6、点过程(又称计数过程):

称一个随机过程 $\{N(A): A \subset T\}$ 为一点过程(point process), 若 $N(A)$ 表示指标集 A 中“事件”发生的总数. 即:它满足:

(1)$\forall A \subset T$, $N(A)$ 是一取非负整数的r.v., 且 $N(\emptyset) = 0$,

(2)对任意 $A_1,\ A_2 \subset T$, 若 $A_1 A_2 = \emptyset$, 则有

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2).$$

第二章　离散时间马氏链

§2.1　定义和例子

首先, 本章假定:$T = \{0,\ 1,\ \cdots\}$, $E = \{i, j, k, \cdots, N\}$(其中 $N < \infty$ 或 $N = +\infty$), 所有r.v. 均定义在同一个概率空间上.

定义 2.1.1　(离散时间马氏链) 如果随机变量序列 $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, 对任意的$i_0, \cdots, i_n, i_{n+1} \in E$ 以及 $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$ 有

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n), \tag{2.1.1}$$

则称 $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ 为离散时间马尔可夫链(或称马氏链).

其中, (2.1.1) 称为马尔可夫性(或马氏性, 或无记忆性).

定义 2.1.2　(转移概率) 设 $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ 为马氏链, 称 $P(X_{n+1} = j | X_n = i) =: p_{ij}(n)$ 为 n 时刻的一步转移概率. 若它与 n 无关, 则记作 p_{ij}, 并称相应的马氏链为齐次的或时齐的. 令 $P = (p_{ij})$, 称 P 为齐次马氏链的转移概率矩阵, 简称为转移矩阵, p_{ij} 为一步转移概率.

马氏性(2.1.1)的解释:

过去:$(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)$,

现在:$(X_n = i_n)$,

将来:$(X_{n+1} = i_{n+1})$.

马氏性代表在已知现在的情况下, 将来与过去无关.

马氏性有如下等价形式:

定理 2.1.1　(马氏性的等价形式):

(a) $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ 为马氏链;

(b) 对任意的 $i, j \in E$, $0 \le k \le n-1$, $B_k \subset E(n \ge 1)$, 有

$$P(X_{n+1} = j | X_0 \in B_0, \cdots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

(c) 对任意 $k_0 < k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1}$, $i_k \in E(k = 0, \ldots, n+1)$, 有

$$P(X_{k_{n+1}} = i_{n+1} | X_{k_0} = i_0, \cdots, X_{k_{n-1}} = i_{n-1}, X_{k_n} = i_n) = P(X_{k_{n+1}} = i_{n+1} | X_{k_n} = i_n).$$

证明　(a)$\Longrightarrow$(b)

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = j | X_0 \in B_0, \cdots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i) \\
= & \frac{P(X_0 \in B_0, \cdots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_0 \in B_0, \cdots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i)} \\
= & \sum_{i_0 \in B_0} \cdots \sum_{i_{n-1} \in B_{n-1}} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)/\text{分母} \\
= & \sum_{i_0 \in B_0} \cdots \sum_{i_{n-1} \in B_{n-1}} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i)/\text{分母}
\end{aligned}$$

$$= P(X_0 \in B_0, \cdots, X_{n-1} \in B_{n-1}, X_n = i)P(X_{n+1} = j|X_n = i)/\text{分母}$$
$$= P(X_{n+1} = j|X_n = i).$$

另外, (b)$\Longrightarrow$(a)是显然的.

最后, (b)$\Longleftrightarrow$ (c) 的证明, 略! (作业!) □

自此以后, 我们只考虑齐次马氏链.

例 2.1.1 (文献[4] P1 例1.1 赌徒破产) 假设你在一场赌博中的每一局赢1元的概率都为$p = 0.4$, 输一元的概率为$1 - p = 0.6$. 进一步假设你所采用的赌博规则是: 一旦财富达到了N元就退出游戏. 当然, 如果你的财富变为0元, 赌场会让你停止赌博. 用X_n 表示n 局之后你所拥有的金钱, 则你的财富X_n 具有Markov 性. 换句话说, 这意味着, 当给定当前的状态X_n时, 过去的任何其他信息与下一个状态X_{n+1}的预测都是不相干的. 为了对赌徒破产链检验此性质, 注意到如果在时刻n你仍然在赌博, 即你的财富为$X_n = i, 0 < i < N$, 则对于你财富变化的任何可能历史序列$i_{n-1}, i_{n-2}, \cdots, i_1, i_0$, 为了增加一个单位的财富, 你必须赢得下一局, 即

$$P(X_{n+1} = i + 1|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = 0.4.$$

在这个链中, 转移概率为

$$p_{0,0} = 1, p_{N,N} = 1,$$
$$p_{i,i+1} = 0.4, p_{i,i-1} = 0.6, 0 < i < N.$$

当$N = 5$时, 状态空间为$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2.1.2 (文献[4] P2 例1.2 Ehrenfest 链) 这个链来自物理学, 用于描述通过一个小孔连接的两个充满气体的立方体中的状态变化. 用数学的语言来描述, 考虑概率论中的罐子模型, 即有两个罐子, 其中一共装有N 个球. 我们从这N 个球中随机抽取一个球, 把它从所在的罐子转移到另外一个罐子中.

用X_n 表示在第n 次抽取后左边罐子中球的个数. 显然X_n 具有Markov 性, 即，如果我们要猜测罐子在时刻$n + 1$ 时的状态, 则左边罐子中现有球的个数X_n 是观测状态序列$X_n, X_{n-1}, \cdots, X_1, X_0$ 中唯一与之相关的信息。为了验证此性质, 注意到

$$P(X_{n+1} = i + 1|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = (N - i)/N,$$

因为要使左边罐子中球的个数增加1个, 需要从另外一个罐子中的$N - i$ 个球中抽出1 个球. 相应的左边罐子中球的个数减少一个的概率为i/N. 这样我们已经计算出了转移概率, 用符号表示为

$$p_{i,i+1} = (N - i)/N, p_{i,i-1} = i/N, 0 \le i \le N,$$

其它情况下, $p_{ij}=0$. 以$N=4$时为例, 状态空间为$E=\{0,1,2,3,4\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.1.3 (排队模型) 一服务台, 若服务台前有顾客, 则在一个单位之间内服务员完成一个顾客服务后, 该顾客离去; 在一个服务周期内, 顾客可以到达. 设第 n 个周期内到达的顾客数为 $\xi_n(n\geq 1)$, 它是一个取到非负整数的r.v., 且 $\{\xi_n, n=1,2,\ldots\}$ 是i.i.d., 它们与 X_0 独立. 记 X_n 表示每个周期开始时系统的顾客数, 即

$$X_{n+1}=(X_n-1+\xi_{n+1})^+, \qquad n\geq 0. \tag{2.1.2}$$

则 $\{X_n,\ n=0,\ldots\}$ 为齐次马氏链, 其状态空间是 $E=\{0,1,\ldots\}$. 转移概率如下:

$$p_{ij}=P(j=(i-1+\xi_{n+1})^+), \qquad i,j\in E. \tag{2.1.3}$$

证明 由题意知 ξ_{n+1} 与 $X_0,X_1,\ldots,X_n$ 是相互独立的, 从而有

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=j|X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\\ &\quad=P((\xi_{n+1}+i-1)^+=j|X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\\ &\quad=P((\xi_{n+1}+i-1)^+=j).\end{aligned}$$

同理:

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=j|X_n=i)\\ &\quad=P((\xi_{n+1}+i-1)^+=j|X_n=i)\\ &\quad=P((\xi_{n+1}+i-1)^+=j).\end{aligned}$$

综上所述, 结论成立! □

§2.2 随机矩阵与马氏链

设 $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ 是齐次马氏链, 具有转移矩阵 $P=(p_{ij})$, 则有

$$p_{ij}\geq 0 \quad \forall i,j\in E, \text{且} \sum_{j\in E} p_{ij}=1 \qquad \forall i\in E.$$

定义 2.2.1 (随机矩阵) 称矩阵 $A=(a_{ij})_{E\times E}$ 为随机矩阵, 若 $a_{ij}\geq 0 (\forall i,j\in E)$, 且 $\sum\limits_{j\in E} a_{ij}=1 (\forall i\in E)$.

由该定义知转移矩阵是随机矩阵.

令:

$$\pi_i(n)=P(X_n=i), i\in E, \pi(n)=(\pi_i(n),\ i\in E).$$

即 $\pi(n)$ 表示 n 时刻 X_n 的概率分布, 称 $\{\pi_i(0), i\in E\}$ 为马氏链 $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ 的初始分布.

由马氏性可得: 对任意 $i_0, i_1, \ldots,\ i_n\in E$, 有

$$\begin{aligned}
&P(X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n)\\
&=P(X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1})P(X_n=i_n|X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1})\\
&=P(X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1})P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})\\
&=P(X_0=i_0, X_1=i_1,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1})p_{i_{n-1}i_n}\\
&=\ldots\ldots\ldots\\
&=\pi_{i_0}p_{i_0i_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}. \qquad (2.2.1)
\end{aligned}$$

从而知, 马氏链 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 的任何有限维联合分布由转移矩阵 P 及其初始分布完全确定. 且有:

定理 2.2.1

$$\pi(n+1)=\pi(n)P,$$
$$\pi(n)=\pi(0)P^n,$$

其中P^n 是 P 的 n 次幂.

证明

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=j)&=\sum_{i\in E}P(X_n=i, X_{n+1}=j)\\
&=\sum_{i\in E}P(X_n=i)P(X_{n+1}=j|X_n=i)\\
&=\sum_{i\in E}P(X_n=i)p_{ij}.
\end{aligned}$$

写成向量形式, 即为 $\pi(n+1)=\pi(n)P$. □

特别地, 记 $P^0=I(E$ 上的单位矩阵, $p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij})$, 且

$$p_{ij}^{(n)}:=P(X_n=j|X_0=i)$$

$$= P(X_{n+m} = j|X_m = i) \qquad \text{与 m 无关!由(2.2.1)式可证!}$$

表示从 i 出发经 n 步到达 j 的概率.

定理 2.2.2 (Chapman-Kolmogorov 方程)

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \qquad \forall i,\ j \in E, m, n \geq 0.$$

证明 由全概率公式及定理 2.1.1(b)可得:

$$\begin{aligned} P(X_{n+m} = j|X_0 = i) &= \sum_{k\in E} P(X_n = k, X_{n+m} = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in E} P(X_n = k|X_0 = i)P(X_{n+m} = j|X_0 = i,\ X_n = k) \\ &= \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \end{aligned}$$

这表明:从状态 i 出发经 $n+m$ 步到达 j 的概率可以由转移矩阵 P 及归纳法求得. □

上面讨论可知, 给定齐次马氏链, 可得一随机矩阵 P, 而且该马氏链的若干转移概率均可由 P 确定. 反之, 若给定一随机矩阵 P, 我们可否确定一齐次马氏链, 使其转移概率为给定的 P 相同? 答案是肯定的!

定理 2.2.3 (马氏链的存在性) 对任给的随机矩阵 $P = (p_{ij})_{E\times E}$, E 上的概率分布为 $\mu = \{\mu_i, i \in E\}$, 存在唯一的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{P})$ 及其上的随机过程 $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ 使得:

(1) μ 为该过程的初始分布, 即 $\tilde{P}(X_0 = i) = \mu_i, i \in E$;

(2) $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ 是以 P 为转移矩阵的齐次马氏链, 即

$$\tilde{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = p_{ij} \ \ \forall\, i, j \in E, n \geq 0.$$

证明 略(利用测度论中的 I. Tulcea 定理即可!). □

因此, 对于给定的初始分布, 齐次马氏链与随机矩阵可相互唯一确定. 这样可导入下列概念:

定义 2.2.2 (不可约性) 称状态 i 可达状态 j, 如果存在状态 $i_1, \ldots, i_n \in E$, 使得 $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_nj} > 0$. 或等价地, 存在 $n \geq 1$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 记为 $i \to j$. 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$, 则称 i 与 j 是互通的, 记为 $i \leftrightarrow j$. 若对一切 $i, j \in E$, 均有 $i \leftrightarrow j$ 成立, 则称转移矩阵(或马氏链)是不可约.

特别地, 若 $p_{ii} = 1$, 则称状态 i 为吸收的. 显然, 若状态是吸收的, 则系统达到该状态后系统状态永远不变!

例 2.2.1 记某设备的状态为 1, 2, 3, 其中 1 表示设备运行良好, 2 表示运行正常, 3 表示设备失效. 以 X_n 表示设备在时刻 n 的状态, 且假设 $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\ldots\}$ 是齐次马氏链. 在有维修及更换条件下, 其转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有: $1 \to 2, 2 \to 3, 3$ 是吸收的.

例 2.2.2　(文献[4] P3 例1.4 社会流动) 令X_n 表示一个家族的第n 代所处的社会阶层, 我们假定社会阶层包括1= 下层, 2=中层, 3=上层三种情况. 以社会学的简单观点, 社会阶层的变化是一个Markov 链, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

可见, $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$, 即此链不可约.

例 2.2.3　(文献[4] P3 例1.5 品牌偏好) 假设有三个品牌的洗衣粉1, 2, 3, 令X_n 表示消费者在第n次购买时选择的品牌. 购买者三个品牌并且满意的顾客下次选择相同品牌的概率分别为0.8, 0.6, 0.4. 若他们改变品牌, 他们会随机选择另外两个品牌中的一个. 则此链的转移概率为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

可见, $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$, 即此链不可约.

例 2.2.4　(例2.1.1 “赌徒破产” 续) 考虑$N = 5$的具体情形. 显然, $0 \leftarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \to 5$, 状态0 与5 分别为吸收态.

习题

习题 2.2.1 对于齐次马氏链 $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, 求证:
(1) 若 $i \to j, j \to k$, 则 $i \to k$;
(2) 若 $p_{ii} = 1$, 则 $p_{ii}^{(n)} = 1 \ \forall n \geq 1$;
(3) $p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j | X_m = i)$, 对一切 $m \geq 0, i, j$ 成立.

§2.3 常返性与遍历性

A、常返性.

定义 2.3.1 (首达时间) 设对 $j \in E$, 令

$$\tau_j := \begin{cases} \min\{n : n \geq 1, X_n = j\} \neq \emptyset \\ +\infty \text{ 若 } \{n \geq 1, X_n = j\} = \emptyset. \end{cases}$$

$X_0 = i$, 则称 τ_j 为从 i 出发首次到达 j 的时间, 而 τ_i 则表示从 i 出发首次回到 i 的时间.

定义 2.3.2 (首达概率) 对 $i, j \in E$, 令

$$f_{ij}^{(n)} = P(\tau_j = n | X_0 = i), \qquad n \geq 1.$$

称 $f_{ij}^{(n)}$ 为从 i 出发经过 n 步首次到达 j 的概率.

$f_{ii}^{(n)}$ 为从 i 出发经过 n 步首次回到 i 的概率.

$f_{ij} := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发经有限步首次到达 j 的概率. 同理可解释 f_{ii}.

由定义易知:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P(X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1, X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{i_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}. \end{aligned}$$

例 2.2.1(续) 由本例中的数据, 可知:

(1) $f_{13}^{(1)} = P(\tau_3 = 1 | X_0 = 1) = p_{13} = \frac{1}{12}$;

(2) $f_{13}^{(2)} = p_{11} p_{13} + p_{12} p_{23} = \frac{19}{180}$

(3) $P(\tau_3 \geq 3 | X_0 = 1) = 1 - f_{13}^{(1)} - f_{13}^{(2)}$: 表示设备在 $[0, 3]$ 内运行的可靠性.

定义 2.3.3 (常返状态)若 $f_{ii} = 1$, 则称 i 为常返. 否则, 称 i 为非常返(或暂留, 瞬时的).

定义 2.3.4 (正常返状态)设 i 常返, 若 $m_{ii} := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty$, 则称 i 为正常返的; 否则称之为零常返的.

明显: $E[\tau_i | X_0 = i] = \mu_i$ 为从 i 出发回到 i 的平均时间。而且，若$m_{ii} < \infty$，则$f_{ii} = 1$,从而i是正常返的.

例 2.3.1 (例2.1.1 “赌徒破产” 续) 考虑$N = 5$的具体情形, 此时转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, $f_{0,0}=1$, 且$\mu_0=1$, 即状态0 为正常返态. 同理, 状态5 亦为正常返态. 下面分析其它状态的常返性. 注意到从状态1出发, 如果链转移到状态0, 它将永远不再返回到状态1, 所以永远不再返回到1 的概率为

$$P(\tau_1=\infty|X_0=1)\ge p_{1,0}=0.6>0,$$

从而$f_{1,1}=1-P(\tau_1=\infty|X_0=1)<1$, 即状态1为非常返态. 同样, 从状态2出发, 链可以先转移到状态1然后转移到状态0, 所以

$$P(\tau_2=\infty|X_0=2)\ge p_{2,1}p_{1,0}=0.36>0,$$

从而$f_{2,2}=1-P(\tau_2=\infty|X_0=2)<1$, 即状态2为非常返态. 类似可分析, 状态3,4 皆为非常返态.

例 2.3.2 (例2.4.3 “社会流动” 续) 此链的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}.$$

首先注意到无论X_n 处于什么状态, 下一步至少以概率0.1 到达状态3, 等价地, 对任意$i\in\{1,2,3\}$, $P(X_1\ne 3|X_0=i)\le 0.9$, 因此, 当$n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
& P(\tau_3>n|X_0=3)\\
= & P(X_1\ne 3, X_2\ne 3,\dots,X_n\ne 3|X_0=3)\\
= & \sum_{i_1\ne 3,\dots,i_{n-1}\ne 3} P(X_1=i_1|X_0=3)\cdots P(X_1=i_{n-1}|X_0=i_{n-2})P(X_1\ne 3|X_0=i_{n-1})\\
\le & \sum_{i_1\ne 3,\dots,i_{n-2}\ne 3} P(X_1=i_1|X_0=3)\cdots P(X_1\ne 3|X_0=i_{n-2})\cdot 0.9\\
\vdots & \\
\le & 0.9^n\\
\to & 0.
\end{aligned}$$

也就是说, $P(\tau_3=\infty|X_0=3)=1$, 从而$f_{33}=1$, 即3为常返态. 上述论证亦适用于状态1和2, 因为下一步转移到它们的概率至少为0.2, 因此状态1和2都是常返态.

下面分析各状态的性质, 以及如何根据转移矩阵 P 来判断其常返性, 不可约性等.

定理 2.3.1 对任意 $i,j\in E, n\ge 1$, 有:

(a) $p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}$, (注意, $p_{jj}^{(0)}\equiv 1$);

(b) $f_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k\ne j} p_{ik}f_{kj}^{(n-1)}\quad n\ge 2;\quad f_{ij}^{(1)}=p_{ij}$;

(c) $i\to j\iff f_{ij}>0$; $i\leftrightarrow j\iff f_{ij}f_{ji}>0$.

证明　(a) 证明用的是首次进入方法. 即依照首次进入状态 j 的时刻进行分解(即下面的第二个等式):

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_0 = i) &= \sum_{m=1}^{n} P(\tau_j = m, X_n = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P(\tau_j = m|X_0 = i)P(X_n = j|X_0 = i, \tau_j = m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} P(X_n = j|X_0 = i, X_1 \neq j, \ldots, X_{m-1} \neq j, X_m = j) \\
&= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}.
\end{aligned}
$$

(b) 当 $n=1$ 时, 由 $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, 结论显然成立. 对 $n \geq 2$, 因为

$$
\begin{aligned}
\{\tau_j = n\} &= \{X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\} \\
&= \bigcup_{k \neq j} \{X_1 = k, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j,\ X_n = j\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(n)} &= P(\tau_j = n|X_0 = i) \\
&= \sum_{k \neq j} P(X_1 = k, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot P(X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j|X_0 = i, X_1 = k) \\
&= \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}. \qquad \text{(马氏性与齐次性)}
\end{aligned}
$$

(c) 由(a)知 $p_{ii}^{(n)} \geq f_{ii}^{(n)} (\forall i \in E, n \geq 1)$. 当 $f_{ij} > 0$ 时, 有 $i \to j$. 另一方面, 若 $i \to j$, 则有 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$. 当 $n=1$ 时, 知 $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} > 0$, 从而 $f_{ij} > 0$. 当 $n \geq 2$ 时, 由(a)知, $\sum\limits_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} > 0$. 故有 $1 \leq m \leq n$ 使得 $f_{ij}^{(m)} > 0$, 从而 $f_{ij} > 0$. □

由定理 2.3.1(a)知:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}\Big) \\
&= \sum_{m=1}^{N} f_{ij}^{(m)} \sum_{n=m}^{N} p_{jj}^{(n-m)}.
\end{aligned}
$$

取 $i = j$, 再令 $N \to \infty$ 得到:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\Big).
$$

$\Longrightarrow$ 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$, 则 $f_{ii} < 1$. 即 i 非常返; 然而该断言的充分性($\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Longrightarrow f_{ii} = 1$)却不能直接由此式得出, 因为出现了“$\infty/\infty$”. 因此, 引进母函数:

$$
P_{ij}(s) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_{ij}^{(n)}, \qquad F_{ij}(s) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} s^n f_{ij}^{(n)}, \qquad s \in (0,1).
$$

于是有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}] s^n = \sum_{m=1}^{\infty} [f_{ij}^{(m)} s^m \sum_{n=m}^{\infty} p_{jj}^{(n-m)} s^{n-m}],$$

$$P_{ij}(s) - \delta_{ij} = P_{jj}(s) F_{ij}(s). \tag{2.3.1}$$

这样有:

$$F_{ii}(s) = 1 - \frac{1}{P_{ii}(s)}.$$

由此, 令 $f_{ii} = \lim_{s\uparrow 1} F_{ii}(s)$, 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{s\uparrow 1} P_{ii}(s)$ 可得: 若 $f_{ii} = 1$, 则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$. 综合上述讨论可得:

定理 2.3.2 (a) i 常返 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$;

(b) i 非常返 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$.

例 2.3.3 考虑直线上无限制的随机游动, 状态空间为$S = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, 转移概率为$p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p\ (i \in S)$. 对于状态0, 可知$p_{00}^{(2n+1)} = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 即从0 出发奇数次不可能返回0, 而

$$p_{00}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n,$$

即从0 出发偶数次返回0 当且仅当它向左向右移动的次数相同.

由Stirling 公式知, 当n充分大时, $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$, 则

$$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

注意到, $p(1-p) \leq 1/4$, 且$p(1-p) = 1/4$ 当且仅当$p = 1/2$. 于是, 当$p = 1/2$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$, 否则, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$, 即当$p = 1/2$ 时, 状态0 为常返态, 当$p \neq 1/2$ 时, 状态0 为非常返态. 显然, 过程的各个状态都是互通的, 故以此可得其它状态的常返性.

定理 2.3.3 (a) 对于不可约链, 一切状态同时常返或非常返;

(b) 若 j 非常返, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

证明 (a)设 $i \leftrightarrow j$, 取 m_0, n_0 使得 $p_{ij}^{(n_0)} > 0, p_{ji}^{(m_0)} > 0$. 则有:

$$P_{jj}^{(n+m_0+n_0)} \geq P_{ji}^{(m_0)} P_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(n_0)}, \qquad n \geq 1.$$

由此及定理 2.3.2(a) 知: 若 i 常返, 则有 j 亦常返.

(b)由定理 2.3.1(a) 得:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \\ &= \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=m}^{N} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$\le \sum_{m=1}^{N} f_{ij}^{(m)}[(1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)})].$$

令$N \to \infty$ 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \le \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)}(1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}) \le 1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}.$$

□

推论 2.3.1 设 j 常返, 若 $j \to k$, 则 $f_{kj}=1$.

证明 定义

$$e_{jk}^{(n)} = P(X_n=k, X_m \ne j, 0<m<n|X_0=j) \tag{2.3.3}$$

为从 j 出发, 中途不经过 j 而第 n 步到达 k 的概率. 不妨设$j \ne k$, 因 $j \to k$, 则有 $n \ge 1$, 使得 $e_{jk}^{(n)} > 0$. 事实上, 取 $n=\min\{m : P_{jk}^{(m)} > 0\}$, 则从 j 出发永不回到 j 的概率为($k \ne j$)

$$\begin{aligned}
P(\tau_j=+\infty|X_0=j) &= P(X_m \ne j, m=1,2,\ldots|X_0=j)\\
&\ge P(X_n=k,\ X_m \ne j, m=1,\ldots,n-1,n+1,\ldots|X_0=j)\\
&= e_{jk}^{(n)} \cdot P(X_m \ne j, m=n+1,n+2,\ldots|X_n=k)\\
&= e_{jk}^{(n)}(1-f_{kj}).
\end{aligned}$$

因 $P(\tau_j=+\infty|X_0=j) = 1-\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 0$, 故有 $f_{kj}=1$. □

例 2.3.4 记 $E=\{1,2,3,4\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

计算可得:
(1) $f_{44}^{(n)}=0, \forall n \ge 1$;
(2) $f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3}, f_{33}^{(n)}=0, \forall n \ge 2$;
(3) $f_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}, f_{11}^{(2)}=p_{12}p_{21}+p_{13}p_{31}+p_{14}p_{41}=\frac{1}{2}, f_{11}^{(n)}=0, \forall n \ge 3$;
(2)$f_{22}^{(1)}=0, f_{22}^{(2)}=\frac{1}{2}, f_{22}^{(3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, \ldots, f_{22}^{(n+1)}=\frac{1}{2^n}, \forall n \ge 1$.
因此:
$\mu_1 = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;
$\mu_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = 3$.
注: 1 和 2 均正常返, 3 和 4 非常返.
下面再从概率意义考擦常返状态的性质. 设I_D 表示集合D的示性函数，令

$$S_m(j) := \sum_{n=m}^{\infty} I_{\{j\}}(X_n), \tag{2.3.4}$$

$$g_{ij} := P(S_1(j)=\infty|X_0=i). \tag{2.3.5}$$

事件$\{S_m(j)\}$ 表示从时刻m起系统到达j的次数. 明显地，$g_{ij} := P(S_m(j) = \infty | X_0 = i)$ 对任意$m/geq1$成立.

定理 2.3.4 (a) 对任意的$i \in E$,

$$g_{ij} := \begin{cases} f_{ij}, \text{ 若} j \text{ 为常返的} \\ 0, \text{ 若} j \text{ 为非常返的.} \end{cases}$$

(b) 若i常返, 则有$g_{ii} = 1$, 即$P(S_1(i) = \infty | X_0 = i) = 1$.

证明 因$\{S_m(j) \geq k+1\} \subset \{S_m(j) \geq k+1\}$,故

$$\{S_1(j) = \infty\} = \cap_{k=1}^{\infty} \{S_1(j) \geq k\} = \lim_{k \to \infty} \{S_1(j) \geq k\}.$$

由概率测度P的连续性可得

$$g_{ij} = \lim_{k \to \infty} P(S_1(j) \geq k | X_0 = i).$$

另外,因$\{S_1(j) \geq k+1\} = \cup_{l=1}^{\infty} \{\tau_j = l, S_1(j) \geq k+1\} = \cup_{l=1}^{\infty} \{\tau_j = l, S_{1+1}(j) \geq k\}$,故

$$\begin{aligned} P(S_1(j) \geq k+1 | X_0 = i) &= \sum_{l=1}^{\infty} P(\tau_j = l, S_{1+1}(j) \geq k | X_0 = i) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} P(\tau_j = l | X_0 = i) P(S_{l+1}(j) \geq k | X_0 = i, \tau_j = l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} P(S_{l+1}(j) \geq k | X_0 = i, X_m \neq j, 1 \leq m \leq l-1, X_l = j) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} P(S_{l+1}(j) \geq k | X_l = j) \quad \text{(马氏性)} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} P(S_1(j) \geq k | X_0 = j) \quad \text{(时齐性)} \end{aligned}$$

因此, $P(S_1(j) \geq k+1 | X_0 = i) = f_{ij} P(S_1(j) \geq k | X_0 = j)$, 从而归纳可得：$P(S_1(j) \geq k+1 | X_0 = i) = f_{ij} (f_{jj})^k (k \geq 1)$. 注意到, $f_{jj} = 1$ (若j常返), $0 \leq f_{jj} < 1$ (若j非常返). 这样, 令$k \to \infty$,即知结论成立.

(b) 由(a)即知. □

B、遍历性.

前面已经定义了不可约的概念. 而我们的目标是研究极限 $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$, 但目前情况还较复杂. 例如, 考虑非负整数集上的马氏链: $p_{ii+1} > 0, p_{ii-2} > 0 (i \geq 2)$, 其它为 $p_{ij} = 0$. 那么, 从 i 出发至少走三步才回到 i, 即存在子列 (n_k) 使得 $p_{ii}^{(n_k)} = 0$. 为排除这种情况, 我们引入如下概念, 并假定马氏链是不可约的!

定义 2.3.5 (周期性) 设集合 $\{n, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空, $d(i)$ 为 $\{n,\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数, 则称 $d(i)$ 为 i 的周期. 特别地, 当 $d(i) = 1$ 时, 称 i 为非周期的. 更进一步, 称链非周期的, 如果它的一切状态均为非周期的.

例 2.3.5 (文献[4] P211 例1.22 更新链) 令f_k 表示一个在正整数上取值的分布并令$p_{0,k-1}=f_k$. 对状态$i>1$, 我们令$p_{i,i-1}=1$. 用文字叙述为, 链以概率f_k从0跳转到$k-1$, 然后逐步返回0. 如果$X_0=0$且链下一步跳转至$k-1$, 则链在时刻k返回到0. 如果假设$f_5=f_{15}=1/2$, 则$\{n\geq 1:\ p_{0,0}^{(n)}>0\}=\{5,10,15,20,25,\ldots\}$, 最大公约数为5, 从而状态0的周期为5.

定义 2.3.6 (遍历性) 若状态 i 是正常返且非周期的, 则称它是遍历的. 称不可约且所有状态均遍历的马氏链为遍历的马氏链.

例 2.3.1 (续): 状态 1 是遍历的. 状态 3 是非周期, 但不是遍历的.

定理 2.3.5 设 $i\in E, d(i)\geq 1$, 则存在 $N\geq 1$ 使得 $p_{ii}^{(nd(i))}>0$ 对一切 $n\geq N$ 成立.

证明 将集合 $\{n\geq 1: p_{ii}^{(n)}>0\}$ 按其中元素递增的顺序重新排列成 $\{n_1,\ldots,n_k,\ldots\}$. 令 d_k 为 $\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ 的最大公约数, 则有 $d_1\geq d_2\geq\ldots\geq d_k\geq d_{k+1}\geq\ldots\geq d(i)$. 因 d_1 和 $d(i)$ 均有限, 故存在 n_0 使得: $d_k=d$ 对一切 $k\geq n_0$. 则由初等数论知: $\exists N\geq 1$, 当 $n\geq N$ 时, 有非负整数 $s_1\geq 0,\ldots,s_{n_0}\geq 0$ 使得 $nd=s_1n_1+\cdots+s_{n_0}n_{n_0}$. 故 $p_{ii}^{(nd)}\geq (p_{ii}^{(n_1)})^{s_1}\cdots(p_{ii}^{(n_{n_0})})^{s_{n_0}}>0$. □

定理 2.3.6 设 $i\leftrightarrow j$, 则 $d(i)=d(j)$.

证明 因i,j互通, 从而存在$m,n>0$, 使得$p_{ij}^{(m)}>0, p_{ji}^{(n)}>0$, 则$p_{ii}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{ki}^{(n)}\geq p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(n)}>0$. 另一方面, 对所有使得$p_{jj}^{(s)}>0$的$s$, 有$p_{ii}^{(m+s+n)}\geq p_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(s)}p_{ji}^{(n)}>0$. 由周期的定义, 易见$d(i)|(m+n)$, 且$d(i)|(m+s+n)$, 从而$d(i)|s$. 再由定理2.3.5, 对充分大的$N$, 有$p_{jj}^{(Nd(j))}>0, p_{jj}^{(N+1)d(j)}>0$, 故分别取$s=Nd(j)$ 和$s=(N+1)d(j)$, 由刚刚得到的结论知$d(i)|Nd(j), d(i)|(N+1)d(j)$, 从而$d(i)|d(j)$. 同理, $d(j)|d(i)$. 这样, 必有$d(i)=d(j)$. □

例 2.3.6 设 $E=\{1,2,\ldots\}$, 其转移矩阵 $P=(p_{ij})$ 如下:

$$p_{11}=\frac{1}{2},\ \ p_{ii+1}=\frac{1}{2},\ \ p_{i1}=\frac{1}{2}, i\in E.$$

故 $f_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}, f_{11}^{(2)}=(\frac{1}{2})^2,\ldots\ldots, f_{11}^{(n)}=(\frac{1}{2})^n, \forall n\geq 1.$

因此, $f_{11}=1$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^n<\infty, d(1)=1$. 即 1 是遍历的. 因该链是不可约的, 从而它是非周期的!

定理 2.3.7 设 P 不可约, 周期 $d>1$, 则有

(a) 对任给的 $i,\ j\in E$, 若 $p_{ij}^{(n_1)}>0, p_{ij}^{(n_2)}>0$, 则有 $d|(n_1-n_2)$;

(b) 状态空间 E 可分成 d 个不相交的集合的并:

$$E=G_1\bigcup G_2\bigcup\cdots\bigcup G_d,$$

其中, 从任一 G_m 中的状态出发, 下一步到达 $G_{m+1(\mod d)}$ 中某状态的概率大于0;

(c) 链 P^d 是非周期的, 且 $\sum\limits_{k\in G_m}P_{ik}^{(d)}=1\ \ \forall i\in G_m$. 且将 P^d 限制在 G_m 上时, 构成一个不可约非周期的子链.

证明 (a) 由 $j\to i$, 存在 $k\geq 1$ 使得 $p_{ji}^{(k)}>0$, 于是有

$$p_{ii}^{(n_1+k)}\geq p_{ij}^{(n_1)}p_{ji}^{(k)}>0,\ \ p_{ii}^{(n_2+k)}\geq p_{ij}^{(n_2)}p_{ji}^{(k)}>0$$

故 $d|(n_1+k)$ 且 $d|(n_2+k)$, 于是有 $d|(n_1-n_2)$.

(b) 先固定 $i\in E$, 令

$$G_1 \triangleq \{k:\exists n, p_{ik}^{(nd+1)}>0\},$$

$$G_2 \triangleq \{k_2:\exists k_1\in G_1\text{使得}p_{k_1k_2}>0\},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$G_m \triangleq \{k_m:\exists k_{m-1}\in G_{m-1}\text{使得}p_{k_{m-1}k_m}>0\}(m=2,\ldots,d).$$

由$\sum_{j\in E}P_{ij}^{nd+1}=1$ $(\forall i\in E)$知至少存在 $k\in E$使得 $P_{ik}^{nd+1}\geq 0$,故 $G_1\neq\emptyset$. 同理,对于任意的 $k_1\in G_1$, 由 $\sum_{j\in E}P_{k_1,j}=1$ 知存在 $k_2\in E$,使得 $P_{k_1k_2}>0$,故 $G_2\neq\emptyset$. 依次类推，可知 $G_m\neq\emptyset$ $(m=2,\ldots,d)$. 则由(a)知 $G_1,\ldots,G_d$ 互不相交, 且由 P 不可约知 $G_1\cup\cdots\cup G_d=E(i\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_n\to j!)$.

(c) 由定理 2.3.5 知 P^d 是非周期的. 再由(b) 即知 $\sum\limits_{k\in G_m}p_{ik}^{(d)}=1$, $\forall i\in G_m$, $G_m\in\{G_1,\cdots,G_d\}$. □

定理 2.3.8 状态 i 的周期 $d(i)$ 也等于使得 $f_{ii}^{(n)}>0$ 的那些 n 的最大公约数.

证明 将集合 $\{n\geq 1, f_{ii}^{(n)}>0\}$ 也按其中元素递增的顺序重新排列成 $\{n_1',\ldots,n_k',\ldots\}$, 则用类似于定理 2.3.5 的证明可得, 存在 K' 使得:$\{n_1',n_2',\ldots,n_{K'}'\}$ 的最大公约数 $d'(i)$ 与 $\{n_1',n_2',\ldots,n_k',\ldots\}$ 的最大公约数相同, 且 $f_{ii}^{(nd')}>0$, 当 $n\geq K'$ 时.

另一方面, 因为 $\{n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\}\supset\{n\geq 1, f_{ii}^{(n)}>0\}$. 故 $d(i)\leq d'(i)$, 且 $n_1'=n_1$. 其中记

$$\{n\geq 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}=\{n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots\}(n_k\uparrow).$$

d_N' 为 $\{n\leq N, f_{ii}^{(n)}>0\}$ 的最大公约数, d_N 为 $\{n\leq N, p_{ii}^{(n)}>0\}$ 的最大公约数, 故有 $d_1'=d_1$(因为 $f_{ii}^{(1)}=p_{ii}^{(1)}$). 假设存在这样的 N 使得 $n\leq N$ 时, $d_n'=d_n$, 而 $d_{N+1}'>d_{N+1}$(因为 $d_n'\geq d_n$ $\forall n\geq 1$), 则有 $f_{ii}^{(N+1)}=0$ 且 $p_{ii}^{(N+1)}>0$. 因而 $d_N'=d_{N+1}'$,

$$p_{ii}^{(N+1)}=f_{ii}^{(N+1)}+\sum_{n=1}^{N}f_{ii}^{(n)}p_{ii}^{(N+1-n)},$$

得存在 $1\leq s\leq N$ 使得 $f_{ii}^{(s)}>0$ 且 $p_{ii}^{(N+1-s)}>0$. 从而有: $d_N|s$, $d_N|(N+1-s)$, 故 $d_N|(N+1)$. 于是 $d_N=d_{N+1}<d_{N+1}'=d_N'$ 矛盾. 这就表明 $d_N'=d_N$ $\forall N\geq 1$. 取 N 充分大, 则由定理 2.3.5 及以上讨论知 $d'(i)=d(i)$. □

习题

习题 2.3.1 设马尔可夫链$\{X_n, n \geq 0\}$,$S = \{1,2,3\}$, $X_0 = 3$, $\tau_1 = \min\{n : n \geq 1, X_n = 1\}$ 的转移矩阵分别为：

$$\mathbf{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P_2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)对 P_1,求 $E(X_2)$
(2)对 P_2,求 $P(T = k|X_0 = 3)$,$1 \leq k \leq 3$及 $E(T \wedge 4|X_0 = 3)$;
(3)对 P_3,求 T_{11}的分布律及 ET_{11}.

习题 2.3.2 设

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, 0 < a, b < 1.$$

证明

$$\mathbf{P^n} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

习题 2.3.3 设 j为非常返状态,证明对任意 $i \in S$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty.$$

习题 2.3.4 设$(p_{ij}^{(m)}, i, j \in E)$ 为离散时间齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$ 的m 步转移概率矩阵.若i为吸收态,对对任意$j \in E$,求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)}$.

习题 2.3.5 设离散时间齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为$E = \{1,2,3\}$, 转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求状态1 的周期。

习题 2.3.6 设 $\{X_n, n \geq 0\}$是独立同分布且

$$P(X_i = k) = \alpha_k \geq 0, k \in \mathbb{N}_0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1.$$

如 $X_n > \max(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ (其中 $X_0 = -\infty$), 则说 n时刻创一新记录，且称 X_n为记录值. 记 R_i为第 i回的记录值.试说明 $\{R_i, i \geq 1\}$是一马尔可夫链并求其转移概率.

习题 2.3.7 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为有限状态不可约遍历链. 已知 $\mathbf{P} = (p_{ij}), S = \{1, 2, \ldots, m-1, m\}$, $S_1 = \{1, 2, \ldots, m-2\}$, $S_2 = \{m-1, m\}$, $T = \min\{n : n \geq 1, X_0 \in S_1, X_n \in S_2\}$, 令 $Y_n = X_{T+n}, Y = \{Y_n, n \geq 0\}$.
(1) 试证 Y亦是马氏链，且与 X有相同的转移矩阵；并求 Y 的初始分布.
(2)证 Y与 $T, X_0, \ldots, X_T$相互独立.
进一步，令 $\forall i \in S$, 记

$$\tau_0 = 0, \tau_k = \min\{n : n > \tau_{k-1}, X_n = i\}, \theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}, k \geq 1.$$

(3)证 $\{\theta_k, k \geq 1\}$ 相互独立.
(4) $\{\theta_k, k \geq 2\}$与 $\{f_{ii}^{(n)}, k \geq 1\}$同分布.

习题 2.3.8 设 $\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链且 $i \in E$,令 $\tau_1 = \min\{n \geq 1, X_n = i\}, \ldots, \tau_{n+1} = \min\{m > \tau_n, X_m = i\}$, 则 $\{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ 为齐次马氏链.

习题 2.3.9 设$\{Y_n, n \geq 0\}$独立同分布，$P(Y_n = 1) = p \geq 0, P(Y_n = -1) = q = 1 - p \geq 0$。令$X_0 = Y_0 = i$, $X_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k, n \geq 1$, $T_i \triangleq \min\{n : n \geq 0, X_0 = i, X_n = 0$或者$X_n = b\}$, 其中$b$为正整数，$0 \leq i \geq b$。若$i = 1, b = 3$, 求$P(T_1 = k|X_0 = 1), k \in \mathbb{N}$及$P(X_{T_1} = 3|X_0 = 1|X_0 = 1)$.

习题 2.3.10 n个位置均匀放在圆周上，一个质点每隔单位时间以概率$0 < p < 1$逆时钟向移动一个位置，以概率$q = 1 - p$顺时钟方向移动一个位置. 求此马氏链的转移距阵和不变分布。

§2.4　不可约马氏链的极限定理

本节假设转移矩阵 P 是不可约的!

若知极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 存在且不依赖于 i, 则由 $P^{n+1} = P^n P$ 及 Fatou 引理知:

$$\pi_j \geq \sum_i \pi_i p_{ij} \qquad \forall j \in E \text{且} \sum_j \pi_j \leq 1.$$

从而有 $\sum\limits_j \pi_j \geq \sum\limits_i \pi_i \sum\limits_j p_{ij} = \sum\limits_i \pi_i$, 即知

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} \qquad \forall j \in E. \tag{2.4.1}$$

定义 2.4.1　(平稳分布) 若 $\{\pi_i, i \in E\}$ 为 E 上的概率分布, 且它满足(2.4.1)式, 则称 $\{\pi_i, i \in E\}$ 为 P(或该马氏链)的平稳分布.

与平稳分布相连的概念是不变测度. 称 $\mu = \{\mu_i, i \in E\}$ 为 P 的不变测度, 如果 $0 \leq \mu_i < \infty (i \in E)$ 且 $\mu = \mu P, \mu \neq 0$.

下面给出离散时间马氏链的中心结果, 其证明过程包含了诸多概率思想和技巧.

下面的引理给出了不变测度的存在与唯一性!

引理 2.4.1　设 $e_{ji}^{(n)}$ 由(2.3.3)给出, $e_{ji} := \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_{ji}^{(n)}$, j 常返, 则有:

(a) $m_{jj} = \sum\limits_{i\in E} e_{ji}$ $(m_{jj} = E[\tau_j | X_0 = j])$;

(b) $\{e_{ji}, i \in E\}$ 为不变测度, 且 $e_{jj} = 1$;

(c) 若不计常数因子, 则 P 的不变测度存在且唯一!

证明　(a) 因 $f_{jj} = 1$, 故对任何 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_i e_{ji}^{(n)} &= \sum_i P(X_n = i, X_m \neq j, 0 < m < n | X_0 = j) \\
&= P(\tau_j \geq n | X_0 = j) \\
&= 1 - f_{jj} + \sum_{m=n}^{\infty} f_{jj}^{(m)} \qquad (\text{留意} P(\tau_j = +\infty | X_0 = j) = 1 - f_{jj}) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} f_{jj}^{(m)}.
\end{aligned}$$

再对 n 求和即可.

(b) 由定义知: $e_{ji}^{(1)} = p_{ji}$, 且对 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
e_{ji}^{(n+1)} &= P(X_{n+1} = i, X_m \neq j, 0 < m < n+1 | X_0 = j) \\
&= \sum_{k\neq j} P(X_{n+1} = i,\ X_n = k, X_m \neq j, 0 < m < n | X_0 = j) \\
&= \sum_{k\neq j} p_{ki} P(X_n = k, X_m \neq j, 0 < m < n | X_0 = j) \\
&= \sum_{k\neq j} P(X_n = k, X_m \neq j, 0 < m < n | X_0 = k) p_{ki}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k \neq j} e_{jk}^{(n)} p_{ki}.$$

故对 n 求和可得:

$$e_{ji} = \sum_{k \neq j} e_{jk} p_{ki} + p_{ji}. \tag{2.4.2}$$

因 $e_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(n)} \forall n \geq 1$, 故 $e_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = f_{jj} = 1 \geq 0$. 从而由(2.4.2)知 $e_{ji} = \sum_{k} e_{jk} p_{ki}$. 由不可约知, $\exists m, n \geq 1$ 使 $p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$. 因此, $e_{ji} \geq e_{jj} p_{ji}^{(m)} > 0$, $e_{jj} = \sum_{k} e_{jk} p_{kj}^{(n)} \geq e_{ji} p_{ij}^{(n)}$, 故 $0 < e_{ji} \leq 1/p_{ij}^{(n)} < \infty$.

(c) 设 $\nu = \nu P$, 不妨设 (ν_i) 非零, 则由 P 的不可约性易知对一切 $\nu_i > 0$, (由 $\nu = \nu P^n \forall n \geq 1$ 立得). 下面用一种对偶技术, 即令 $\tilde{p}_{ij} = \nu_j p_{ji} / \nu_i (\forall i, j \in E)$, 则易证 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ 是随机矩阵(称为 P 的对偶). 进而, 由归纳法知:$\tilde{p}_{ij}^{(n)} = \nu_j p_{ji}^{(n)} / \nu_i$.

$$\tilde{p}_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k} \tilde{p}_{ik}^{(n)} \tilde{p}_{kj} = \sum_{k} (\nu_k p_{ki}^{(n)} / \nu_i)(\nu_j p_{jk} / v_k) = \nu_j p_{ji}^{(n+1)} / \nu_i.$$

因此, $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_{jj}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$. 故 $\tilde{P}$ 也是常返且不可约的.

另一方面, 依照“在时刻 n 之前最后一次访问 i 的时刻”进行分解, 得出($j \neq i$):

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{m=0}^{n-1} P(X_m = i, X_l \neq i, m < l < n, X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} p_{ii}^{(m)} P(X_l \neq i, m < l < n, X_n = j | X_m = i) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} p_{ii}^{(m)} e_{ij}^{(n-m)} \quad (e_{ij}^{(0)} = 0). \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

由(2.4.3)及母函数方法得出: $P_{ij}(s) - \delta_{ij} = P_{ii}(s) E_{ij}(s)$. 其中$E_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n e_{ij}^{(n)}$, 从而由(b), 知: 当 $i \neq j$ 时, 有

$$\lim_{s \uparrow 1} P_{ij}(s) / P_{ii}(s) = \lim_{s \uparrow 1} E_{ij}(s) = e_{ij} < \infty.$$

另一方面, 由(2.3.1)及推论 2.3.1 得:

$$\lim_{s \uparrow 1} P_{ij}(s) / P_{jj}(s) = f_{ij} = 1.$$

及 $\tilde{P}$ 代替 P 同样可得 $\lim_{s \uparrow 1} \frac{\tilde{P}_{ij}(s)}{\tilde{P}_{jj}(s)} = 1$, 从而有:

$$1 = \lim_{s \uparrow 1} \frac{\tilde{P}_{ij}(s)}{\tilde{P}_{jj}(s)} = \lim_{s \uparrow 1} (\nu_j / \nu_i) P_{ji}(s) / P_{jj}(s) = \frac{\nu_j}{\nu_i} e_{ji}.$$

故 $\nu_i / e_{ji} = \nu_j$ 与 i 无关. 故 $\{\nu_i, i \in E\}$ 与不变测度 $\{e_{ji}, i \in E\}$ 相差一个常数 ν_j. 事实上, 设 $\nu' = \nu' P, \nu' \neq 0$. 同理有: $\frac{\nu_i'}{e_{ji}} = \nu_j'$, 从而有 $\frac{\nu_i}{\nu_i'} = \frac{\nu_i}{e_{ji}} \cdot \frac{e_{ji}}{\nu_i'} = \frac{\nu_j}{\nu_j'}$(常数), $\forall i \in E$(固定 j). □

定理 2.4.1 设 P 不可约, 则下述断言等价:

(1) P 是正常返(不可约假设下, 一个状态正常返则所有状态正常返!);

(2) P 有平稳分布, 进而平稳分布唯一: 对一切 j, $\pi_j=\frac{1}{m_{jj}}$(此处, $m_{jj}=E[\tau_j|X_0=j]$);

(3) 若 P 还是非周期的, 则(1)和(2)又都分别等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j>0$ (不依于 i!)

证明 "先证(1)$\Longleftrightarrow$(2)". 下证: "(1) $\Longrightarrow$(2)": 对任何固定的 j, 由引理 2.4.1 知 $\{\pi_i=e_{ji}/m_{jj}, i\in E\}$ 是平稳分布. 特别, $\pi_j=1/m_{jj}$. 再由平稳分布的唯一性和知$j\in E$的任意性可得$\{\frac{1}{m_{jj}}, j\in E\}$ 为其唯一平稳分布. 即"(1)$\Longrightarrow$(2)"成立.

反设 P 有平稳分布 π, 则由 $\pi=\pi P=\cdots=\pi P^n$ 知

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}\ \ \forall n\geq 1, j\in E. \tag{2.4.4}$$

由 π为平稳分布,故至少存在一个 $i\in E$,使得 $\pi_i>0$, 则对任给的 $j\in E$,存在 n, 使得 $P_{ij}^{(n)}>0$. 因此由

$$\pi_j=\sum_i \pi_i P_{ij}^{(n)}>0, \tag{2.4.5}$$

即对于任意的 $j\in E$,均有 $\pi_j>0$. 在(2.4.5)中,令 $n\to\infty$,若存在 $j\in E$ 为非常返状态, 从而由控制收敛定理及定理 2.3.3 知 $\pi_j=0$(矛盾), 从而此链是常返的. 对任意状态 $j\in E$, 由引理 2.4.1 知 $\{e_{ji}, i\in E\}$ 是不变测度，且 $e_{jj}=1$.在由不变概率测度的唯一性，存在正常数c 使得$e_{ji}=c\pi_i, i\in E$. 因此, 由引理 2.4.1(a) 得 $m_{jj}=\sum_{i\in E}e_{ji}=c\sum_{i\in E}\pi_i=c$. 故 $m_{jj}<+\infty (j\in E)$ 于是 P 是正常返的.

"下证(2)$\Longleftrightarrow$(3)": 设(3)成立, 则由 $P^{n+1}=P^nP$ 及 Fatou 引理得:

$$\pi_j\geq\sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}\qquad \forall j\in E. \tag{2.4.6}$$

而 $1\geq\sum\limits_j\pi_j\geq\sum\limits_j\sum\limits_i\pi_i p_{ij}=\sum\limits_i\pi_i$, 从而由反证法立得: $\pi_j=\sum\limits_{i\in E}\pi_i p_{ij}(j\in E)$. 故 $\{\pi_j, j\in E\}$ 为 P 的不变测度, 又因 π_j 且 $0<\sum\limits_{j\in E}\pi_j\leq 1$. 从而即知 $\{\frac{\pi_i}{\sum\limits_{j\in E}\pi_j},\ i\in E\}$ 为 P 的平稳分布.

下证"(2)$\Longrightarrow$(3)". 为此, 令 $\tilde{E}=E\times E$, 在 $\tilde{E}$ 上定义随机矩阵 $\tilde{P}=(\tilde{p}_{(i,j)(k,l)})$ 和初始分布 μ.

$$\tilde{p}_{(i,j)(k,l)}\triangleq p_{ik}p_{jl},\qquad (i,j),(k,l)\in\tilde{E}. \tag{2.4.7}$$

由马氏链的存在性定理, 设 $\{Z_n=(X_n,Y_n):n\geq 0\}$ 为相应于 $\tilde{P}$ 和 μ 的取值于 $\tilde{E}$ 上的齐次马氏链, 则有:

(a) $\tilde{P}$ 是非周期不可约的;

(b) $\tilde{P}_\mu((X_n,Y_n)=(k,l)|(X_0,Y_0)=(i,j))=p_{ik}^{(n)}p_{jl}^{(n)}$ 对一切 $(i,j),(k,l)\in\tilde{E}$ 和 $n\geq 1$ 成立;

(c) 若对固定 $i\in E$,取 $\mu_{(k,l)}\triangleq\delta_{ki}\pi_l, (k,l)\in\tilde{E}$, 则有 $\tilde{P}_\mu(X_n=j)=p_{ij}^{(n)}$, $\tilde{P}_\mu(Y_n=j)=\pi_j$.

(a): 事实上, 固定 $(i,j),(k,l)\in\tilde{E}$, 由 P 是不可约的, 存在 $n_1,n_2\geq 1$, 使得: $p_{ik}^{(n_1)}>0$, $p_{jl}^{(n_2)}>0$. 因P 是非周期的，再由定理 2.3.5 知存在 $n_0=n_0(k,l)$ 使得 $p_{kk}^{(n)}>0, p_{ll}^{(n)}>0$ 对一切 $n\geq n_0$ 成立. 因此, 有状态

$$i_1,i_2,\ldots,i_{n_1-1},i_{n_1}=k,i_{n_1+1}=k,\ldots,i_{N-1},i_N=k\ \ (N\geq n_1+n_2+n_0),$$

$$j_1, j_2, \ldots, j_{n_2-1}, j_{n_2} = l, j_{n_2+1} = l, \ldots, j_{N-1}, j_N = l,$$

使得: $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{N-1}i_N} > 0, p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{N-1}j_N} > 0$, 因此:

$$\tilde{p}^{(N)}_{(i,j)(k,l)} \geq \widetilde{p}_{(i,j)(i_1,j_1)}\cdots\widetilde{p}_{(i_{N-1},j_{N-1})(i_N,j_N)} > 0.$$

即(i,j) 可达状态(k,l),同理(k,l) 可达(i,j). 即该链为不可约链. 由定理 2.3.5 知对任意的$(i,j) \in \tilde{E}$, 存在M 使得$n \geq M$ 时有$p^{(n)}_{ii} > 0$, 且$p^{(n)}_{jj} > 0$. 又由C-K 方程可知, 存在$i_1, i_2, \ldots, i_n = i, j_1, j_2, \ldots, j_n = j$, 使得$p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i} > 0, p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j} > 0$. 故

$$\tilde{p}^{(n)}_{(i,j)(i,j)} \geq \widetilde{p}_{(i,j)(i_1,j_1)}\cdots\widetilde{p}_{(i_{n-1},j_{n-1})(i,j)} > 0,$$

由n的任意性知 $\tilde{P}$ 是非周期的.

(b): 由归纳法: 当 $n = 1$, 结论由(2.4.7)得到:

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_\mu((X_{n+1}, Y_{n+1}) = (k,l)|(X_0,Y_0) = (i,j)) \\
&= \sum_{k',l'} \tilde{P}_\mu((X_n,Y_n) = (k',l'), (X_{n+1},Y_{n+1}) = (k,l)|(X_0,Y_0) = (i,j)) \\
&= \sum_{k',l'} \tilde{P}_\mu((X_n,Y_n) = (k',l')|(X_0,Y_0) = (i,j)) \cdot \tilde{P}_\mu(Z_{n+1} = (k,l)|Z_n = (k',l')) \\
&= \sum_{k',l'} p^{(n)}_{ik'}p^{(n)}_{jl'}p_{k'k}p_{l'l} \qquad \text{(由齐次性和 (2.4.7) 式)} \\
&= p^{(n+1)}_{ik}p^{(n+1)}_{jl}.
\end{aligned}$$

从而(b)成立.

(c):

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_\mu(X_n = j) &= \sum_{i_0,j_0,l\in E} \tilde{P}_\mu(X_0 = i_0, Y_0 = j_0, X_n = j, Y_n = l) \\
&= \sum_{i_0,j_0,l} \mu(i_0,j_0)\cdot p^{(n)}_{i_0j}\cdot p^{(n)}_{j_0l} \qquad \text{(由(b))} \\
&= \sum_{i_0,j_0,l} \delta_{i_0i}\pi_{j_0}p^{(n)}_{i_0j}p^{(n)}_{j_0l} \\
&= p^{(n)}_{ij}. \\
\tilde{P}_\mu(Y_n = j) &= \sum_{i_0,j_0,k\in E} \tilde{P}_\mu(X_0 = i_0, Y_0 = j_0, X_n = k, Y_n = j) \\
&= \sum_{i_0,j_0,k} \delta_{i_0i}\pi_{j_0}p^{(n)}_{i_0k}p^{(n)}_{j_0j} \\
&= \sum_{j_0\in E} \pi_{j_0}p^{(n)}_{j_0j} = \pi_j.
\end{aligned}$$

(d): 进而有$\tilde{P}$ 有平稳分布 $\{\pi_{(i,j)} = \pi_i\pi_j : (i,j) \in \tilde{E}\}$. 事实上, 由(2.4.7) 及 $\pi P = P$ 直接验证即可!

由(d)和(c)及已证明的(2)$\Longrightarrow$(1)知 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是正常返的. 因此, 若令 $\tilde{\tau} \triangleq \min\{n \geq 1 : Z_n = (i,i)\}$, 则由推论2.3.1知

$$\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau} < \infty|Z_0 = (k,l)) = \tilde{f}_{(k,l)(i,i)} \equiv 1 \text{ 对任意的}(k,l) \in \tilde{E}.$$

故

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}<\infty) &= \sum_{(k,l)\in\tilde{E}} \tilde{P}_\mu(Z_0=(k,l),\tilde{\tau}<\infty) \\ &= \sum_{(k,l)\in\tilde{E}} \tilde{P}_\mu(Z_0=(k,l))\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}<\infty|Z_0=(k,l))=1.\end{aligned}$$

因此

$$\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}>n)=0(n\to\infty). \tag{2.4.8}$$

这样, 对任意固定的 $j\in E$, 我们有:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\mu(X_n=j,\tilde{\tau}\le n) &= \sum_{m=1}^{n}\tilde{P}_\mu(X_n=j,\tilde{\tau}=m) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\in E}\tilde{P}_\mu(X_n=j,Y_n=k,\tilde{\tau}=m) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\in E}\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}=m)\tilde{P}_\mu(X_n=j,Y_n=k|Z_l\ne(i,i),l<m,Z_m=(i,i)) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\in E}\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}=m)\tilde{P}_\mu(X_n=j,Y_n=k|Z_m=(i,i)) \qquad (\text{马氏性}) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\in E}\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}=m)p_{ij}^{(n-m)}\cdot p_{ik}^{(n-m)} \qquad (\text{由(b)}) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}=m)p_{ij}^{(n-m)}.\end{aligned}$$

同理可得:

$$\tilde{P}_\mu(Y_n=j,\tilde{\tau}\le n)=\sum_{m=1}^{n}\tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}=m)p_{ij}^{(n-m)}=\tilde{P}_\mu(X_n=j,\tilde{\tau}\le n). \tag{2.4.9}$$

于是, 由(c)及上式可得:

$$\begin{aligned}|p_{ij}^{(n)}-\pi_j| &= |\tilde{P}_\mu(X_n=j)-\tilde{P}_\mu(Y_n=j)| \\ &= |\tilde{P}_\mu(X_n=j,\tilde{\tau}>n)-\tilde{P}_\mu(Y_n=j,\tilde{\tau}>n)| \\ &\le \tilde{P}_\mu(\tilde{\tau}>n)\to 0\ (n\to+\infty). \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

(这里用到: $0\le a,b\le c\Rightarrow |a-b|\le c$!) 即 $p_{ij}^{(n)}\to\pi_j(n\to+\infty)$ 对一切 $i\in E$ 成立. □

推论 2.4.1 对于不可约链, 若有一状态正常返, 则所有状态均正常返. 同理若有一状态零常返, 则所有状态均零常返.

证明 假设j_1为正常返状态, 则由引理2.4.1知, $\{\pi_i=e_{j_1i},i\in E\}$ 是唯一的不变测度, 且所有状态均为常返(定理2.3.3). 设$j_2\longleftrightarrow j_1$, 则 $\{\pi_i=e_{j_2i},i\in E\}$ 也是不变测度. 由惟一性知存在常数c, 使得$e_{j_1i}=ce_{j_2i}$ 对任意的$i\in E$ 均成立. 故$\sum_{i\in E}e_{j_1i}=c\sum_{i\in E}e_{j_2i}$, 即$m_{j_1j_1}=cm_{j_2j_2}$. 注意此时$m_{j_1j_1}<\infty$, 则有$m_{j_2j_2}<\infty$. 从而$j_2$也为正常返. 若$j$为零常返, 则由定理2.3.3(a)知所有状态均为常返, 但不能为正常返(否则与j零常返矛盾). 故所有状态只能零常返. □

注记 此定理的证明仅用到马氏链的存在性定理, 证明方法也是直接和初等的. 它不需要构造“两个独立马氏链”的技巧, 从而回避了相关的测度论知识.

该定理也告诉我们: 在非周期正常返的情形, $p_{ij}^{(n)}$ 的极限为正(也是以前之所以称为正常返和遍历的原因!) 另一方面定理 2.3.3 已表明在非常返情形, 此极限为零. 因此, 余下的是零常返情形.

定理 2.4.2 设 P 不可约且零常返, 则对一切 $i,j\in E$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$.

证明 仍用定理 2.4.1 证明中引入的记号. 由定理2.4.1证明过程的(a)(b) 可知

$$\widetilde{p}_{(i,i)(j,j)}^{(n)}=p_{ij}^{(n)}\cdot p_{ij}^{(n)}. \tag{2.4.11}$$

下面分(i)P是非周期的和(ii)P是期的两种情形来证明.

(i) 设 P是非周期的：(i-a)当 $\tilde{P}$ 为非常返时: 由 (2.4.11) 及定理 2.3.3 知

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{p}_{(i,i)(j,j)}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}(p_{ij}^{(n)})^2=0, \text{即} \lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0.$$

(i-b) 当 $\tilde{P}$常返时；因P的非周期性意味着 $\tilde{P}$ 也是非周期的,则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$.

上述(i-b)的证明: 由定理 2.4.1 的证明过程知, $\tilde{P}$ 也是不可约且非周期的. 对固定的 $i,j\in E$, 取初始分布 $\tilde{\mu}(k,\ l)=\delta_{ki}\delta_{lj},(k,\ l)\in\tilde{E}$. 令 $\tilde{\tau}\triangleq\min\{n\geq 1: Z_n=(i,i)\}$, 因$\tilde{P}$是常返的，故$\tilde{P}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\tau}>n)=0(n\to\infty)$. 对任何固定的 $k\in E$, 注意到(2.4.9)成立的证明不依赖初始分布μ，由(2.4.10)的证明类似可得:

$$\lim_{n\to\infty}|p_{ik}^{(n)}-p_{jk}^{(n)}|=\lim_{n\to\infty}|P_{\tilde{\mu}}(X_n=k)-P_{\tilde{\mu}}(Y_n=k)|\leq\lim_{n\to\infty}\tilde{P}_{\mu}(\tilde{\tau}>n)=0. \tag{2.4.12}$$

因为 $\{p_{ik}^{(n)}\}(n\geq 1)$ 是有界的且 $k\in E$ 可数, 对 $\{p_{ik}^{(n)}\}(n\geq 1)$ 的任意收敛子列, 利用对角线法则, 可抽子列 $\{n_m\}$ 使得 $v_k=\lim\limits_{m\to\infty}p_{ik}^{(n_m)}$ 对一切 $k\in E$ 成立, 由(2.4.12) 有: $v_k=\lim\limits_{m\to\infty}p_{ik}^{(n_m)}=\lim\limits_{m\to\infty}p_{jk}^{(n_m)}$,对一切$j\in E$成立.

如果 $v_k\equiv 0$, 则 $\{p_{ik}^{(n)}\}(n\geq 1)$ 所有子列的极限均为零, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ik}^{(n)}=0$. 于是断言为真. 假设 $v_k\neq 0$, 则由 Fatou 引理及 $\sum\limits_{k\in E}p_{ik}^{(n_m)}=1$ 得: $\sum\limits_{k}v_k\leq 1$. 另一方面, 由 $p_{ik}^{(n_m+1)}=\sum\limits_{j\in E}p_{ij}p_{jk}^{(n_m)}$, 由控制收敛定理得

$$\lim_{m\to\infty}p_{ik}^{(n_m+1)}=\sum_{j\in E}p_{ij}v_k=v_k.$$

再由 $P^{n_m+1}=P^{n_m}\cdot P$ 以及 Fatou 引理得

$$v_k\geq\sum_l v_lp_{lk},\qquad k\in E.$$

因此, 同(2.4.1)式的证明可得:

$$v_k=\sum_l v_lp_{lk},\qquad k\in E.$$

于是 $\{\frac{v_i}{\sum\limits_{k\in E}v_k},i\in E\}$ 为 P 的平稳分布. 则由定理 2.4.1 知 P 必正常返, 与假设矛盾. 因此, $v_k\equiv 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ik}^{(n)}=0$. 结论为真.

(ii) 设P 的周期为 d, 令 $P_d=(p_{ij}^{(d)})$. 则 P_d 是非周期的且常返的. 事实上, 由定义知 P_d 明显是非周期的. 记与 P_d 相关的从i出发经过n步首次到达j的概率为$\widetilde{f}_{ij}^{(n)}$, 从而有 $\tilde{f}_{ij}^{(1)}=p_{ij}^{(d)}\geq f_{ij}^{(d)}$. 设 $\tilde{f}_{ij}^{(n)}\geq f_{ij}^{(nd)}$, 则有

$$\tilde{f}_{ij}^{(n+1)}=\sum_{k\neq j}p_{ik}^{(d)}\tilde{f}_{kj}^{(n)}\geq\sum_{k\neq j}p_{ik}^{(d)}f_{kj}^{(nd)}\geq f_{ij}^{((n+1)d)}.$$

故$1\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_{ii}^{(n)}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(nd)}=1$, 故$\tilde{f}_{ii}^{(n)}=f_{ii}^{(nd)}$,从而 $\tilde{f}_{ii}=1$且$\tilde{m}_{ii}=\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty}dnf_{ii}^{nd}=\frac{1}{d}m_{ii}=\infty$, P_d 也是零常返的。另外，由定理 2.3.7 知 P 可分解成 d 个不可约、非周期且零常返的子链: $P_{G_1}^d,P_{G_2}^d,\ldots,P_{G_d}^d$. 则由已证的(ii)知: 对 $i,j\in G_m$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=0$. 又由定理 2.3.7 可得: 当 $d\nmid n$ 时, $p_{ij}^{(n)}=0$. 因此, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$. 一般地, 设 $i,\ j\in E$, 则由定理 2.3.7, 不妨设 $i\in G_1$, $j\in G_m(1\leq m\leq d)$. 再由定理 2.3.7 得

$$p_{ij}^{(n+m-1)}=\sum_{i_k\in G_k,\ 2\leq k\leq m}p_{ii_2}p_{i_2i_3}\cdots p_{i_{k-1}i_k}\cdots p_{i_{m-1}i_m}p_{i_mj}^{(n)},$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{i_mj}^{(n)}=0\ \ \forall i_m\in G_m$. 由上式及控制收敛定理得: $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$. □

下面我们给出一些例子.

例 2.4.1 (例2.4.3 “社会流动” 续) 此链的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.7&0.2&0.1\\0.3&0.5&0.2\\0.2&0.4&0.4\end{pmatrix}.$$

其平稳分布$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$ 满足$\pi=\pi P$, 即

$$\begin{cases}\pi_1=0.7\pi_1+0.3\pi_2+0.2\pi_3\\\pi_2=0.2\pi_1+0.5\pi_2+0.4\pi_3\\\pi_3=0.1\pi_1+0.2\pi_2+0.4\pi_3.\end{cases}$$

此方程组是线性相关的, 有一个方程是多余的. 注意到$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, 联立此方程, 可解得$\pi_1=22/47$, $\pi_2=16/47$, $\pi_3=9/47$. 由于该链不可约, 因此, 根据定理2.4.1, 链为正常返的, 且3个状态的平均返回时间分别为$m_{11}=1/\pi_1=47/22$, $m_{22}=1/\pi_2=47/16$, $m_{33}=1/\pi_3=47/9$. 进一步, 由于该链是非周期, 因此, 根据定理2.4.1, 对任意$i\in\{1,2,3\}$,

$$\lim_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}=22/47,\ \lim_{n\to\infty}p_{i2}^{(n)}=16/47,\ \lim_{n\to\infty}p_{i3}^{(n)}=9/47.$$

例 2.4.2 (例2.2.3 “品牌偏好” 续) 此链的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.2&0.6&0.2\\0.3&0.3&0.4\end{pmatrix}.$$

其平稳分布$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$ 满足$\pi=\pi P$, 即

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3. \end{cases}$$

联立方程$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, 可解得$\pi_1=6/11$, $\pi_2=3/11$, $\pi_3=2/11$. 由于该链不可约, 因此, 根据定理2.4.1, 链为正常返的, 且3个状态的平均返回时间分别为$m_{11}=1/\pi_1=11/6$, $m_{22}=1/\pi_2=11/3$, $m_{33}=1/\pi_3=11/2$. 进一步, 由于该链是非周期, 因此, 根据定理2.4.1, 对任意$i\in\{1,2,3\}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = 6/11, \lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = 3/11, \lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = 2/11.$$

例 2.4.3 (文献[4] P24 例1.23 修复链) 一台机器有三个关键零件易受损, 但只要其中两个两件能运行机器就可以正常工作. 当有两个零件损坏时, 它们将被替换, 机器在第二天投入正常运转. 以损坏的零件$\{0,1,2,3,12,13,23\}$为它的状态空间, 转移概率矩阵如下：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.93 & 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0.02 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 & 00.1 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0.01 & 0.02 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

要问的是: 如果想要这台机器运转1800天（大约5年）, 将要分布使用多少个零件1，零件2和零件3? 经过计算, 可得平稳分布：

$$\begin{aligned} &\pi_0 = 3000/8910, \pi_1 = 500/8910, \pi_2 = 1200/8910, \pi_3 = 4000/8910, \\ &\pi_{12} = 22/8910, \pi_{13} = 60/8910, \pi_{23} = 128/8910. \end{aligned}$$

每次访问到12或13时，都要更换一个类型1的零件，所以平均每天要使用82/8910个零件1. 经过1800天平均将使用$1800\times 82/8910=16.56$个零件1. 同样，长期来看, 类型2 和类型3零件平均每天的使用量分别为150/8910和188/8910, 所以经过1800天将平均使用30.30个零件2 和37.98 个零件3。

习题

习题 2.4.1　求证 $\tilde{m}_{ii} = \frac{m_{ii}}{d}$, 即证 $\tilde{f}_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(nd)}\ \forall n \geq 1$.

习题 2.4.2　设离散时间齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为$E = \{1, 2, 3\}$, 转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

(a) 求$f_{11}^{(3)}$;

(b) 求$\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$.

习题 2.4.3　设$\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$独立同分布,且$P(\varepsilon_1 = 3) = p, P(\varepsilon_1 = -2) = 1 - p$, 其中$p \in (0, 1)$. 令$X_0 = 0, X_n = X_{n-1} + \varepsilon_n, \forall n \geq 1$,

(a) 证明$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链,并写出其转移概率;

(b) 证明该马氏链为不可约;

(c) 当p在何范围时,该链为常返的?

习题 2.4.4　在离散时间排队模型中，设$n+1$时刻等待服务的顾客数$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n$, 其中$\{\xi_n, n \geq 0\}$独立同分布，记$P(\xi_n = k) = a_k, k \in \mathbb{N}$. ξ_n表示第n个周期到达的顾客数，$y^+ = \max(0, y)$. 试证明当$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < 1$ 时，存在平稳分布，并求平衡时等待顾客的平均队长。

§2.5 一般情形下的极限定理

A、状态的分类及相空间的分解

定义 2.5.1 (闭集) 集合$C \subseteq E$称为闭的, 如果

$$p_{ij} = 0 \ \ \forall i \in C, j \notin C.$$

即$\sum\limits_{k \in C} p_{ik} = 1 \ \ \forall i \in C$. 闭集$C$称为不可约的, 若$C$中的任意两个状态均是互通的.

例 2.5.1 若 j为正常返的,则$C(j) := \{k \in E, j \longleftrightarrow k\}$ 为不可约闭集.

根据以前的知识, 下面描述状态空间的分解及系统运动的情形:

(1)若把每一不可约闭集称为一个类, 则常返性、零常返、正常返、遍历性以及周期性都是类性质. 即同类中每一状态具有相同的性质.

(2)由零常返类$\{C_i\}$、遍历类$\{C_j\}$以及正常返类$\{C_k\}$的并集构成常返集C. 从C中某一类$C_s(s \in \{i, j, k\})$中的状态出发, 系统只在该类C_s中运动.

(3)余下的状态的全体构成非常返类D. 从D中的状态出发, 系统可能永远在D内运动, 也可能落入C中的某常返类后而永远在该类内运动.

B、极限定理的陈述及其证明

定理 2.5.1 (a) 如果j非常返或零常返, 则对一切$i \in E$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

(b) 如果j正常返, 其周期为$d(j)$, 则对一切$i \in E$和$1 \le r \le d(j)$, 有

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(nd(j)+r)} = \frac{d(j)}{m_{jj}} \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md(j)+r)}.$$

(c) 设 j为正常返且是非周期的，则有 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n+1)}, \forall i \in E$.

证明 (a) 当j非常返时，由定理2.3.3(b) 知(a)成立. 当j零常返时，由下列(b)的证明过程以及$m_{jj} = \infty$时得到.

(b) 因为j的周期为$d(j)$, 则$n \ne md(j) \Rightarrow p_{jj}^{(n)} = 0$. 于是由定理2.3.1得: (记$d(j) =: d$)

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^{nd+r} f_{ij}^{(nd+r-v)} p_{jj}^{(v)} = \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} \ \ 1 \le r \le d. \tag{2.5.1}$$

另一方面, 将定理2.4.1(3)中的P用P^d来取代. 因 j 为常返, 故由推论2.3.1知，$C(j)$ 为闭集. 因P^d限定在闭集$C(j)$上是不可约且非周期的(定理2.3.7(c)). 于是由定理2.4.1得:

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{p}_{jj}^{(n)} = 1/\widetilde{m}_{jj}. \tag{2.5.2}$$

另外, 由作业(或直接计算可得)$\widetilde{m}_{jj} = m_{jj}/d, \widetilde{p}_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(nd)}$,

$$\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{1}{\widetilde{m}_{jj}} = \frac{d}{m_{jj}}. \tag{2.5.3}$$

令$\mu(k) := f_{ij}^{kd+r}$ $(k=0,1,\ldots)$ 为$\{0,1\ldots\}$上的测度.

$$h_n(k)=\begin{cases} p_{jj}^{(n-k)d} & \text{if } k=0,\ldots,n \\ 0 & \text{if} k\geq n+1 \end{cases} \tag{2.5.4}$$

则有(2.5.1) 及控制收敛定理知

$$p_{ij}^{(nd+r)}=\sum_{k=0}^{\infty}h_n(k)\mu(k)\to\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{m_{jj}}\mu(k)=\frac{d}{m_{jj}}\sum_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md(j)+r)}\text{ 当}n\to\infty$$

知(b)成立.

再由一般化的控制收敛定理及(2.5.1)-(2.5.3)得(b).

□

推论 2.5.1 若j非周期, 则对一切$i\in E$, 有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=f_{ij}\pi_j=f_{ij}/m_{jj}.$$

当j非常返时, 约定$m_{jj}=+\infty$ (或$\pi_j=0$).

证明 由定理2.5.1(a)及(c) 知推论2.5.1为真. □

如果把关于n的逐点极限改为平均极限, 则结果十分简洁, 并有下列结果.

定理 2.5.2 对一切$i,j\in E$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=f_{ij}\pi_j.$$

其中$\pi_j=\frac{1}{m_{jj}}$.

证明 当j为非常返时, 由$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$且$\pi_j=0$(约定), 则上述结论明显成立. □

下面考虑j为常返的情形. 为此, 需一个数学分析中的结论.

引理 2.5.1 设有正整数d和数列$\{a_n:n\geq1\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}a_{nd+r}=b_r\ \ 1\leq r\leq d.$$

则有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_m=\frac{1}{d}\sum_{m=1}^{d}b_m.$$

证明 因为数列的平均极限必重合于自身的极限, 已知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_{md+r}=b_r\ \ 1\leq r\leq d.$$

因收敛数列必有界, 故可记$A=\sup\limits_{n\geq1}|a_n|$, 则$A\in\mathbb{R}$. 当$n=md+s,1\leq s\leq d$时, 有

$$|\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}a_v-\frac{1}{d}\sum_{v=1}^{d}b_v|\leq\frac{1}{n}\sum_{v=md+1}^{md+s}|a_v|+|\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{md}a_v-\frac{1}{d}\sum_{v=1}^{d}b_v|$$

$$\begin{aligned}&\leq \frac{1}{n}Ad + \frac{1}{d}\sum_{r=1}^{d}\left|\frac{d}{n}\sum_{v=0}^{m-1}a_{vd+r} - b_r\right| \\ &= \frac{Ad}{n} + \frac{1}{d}\sum_{r=1}^{d}\left|\frac{md}{n}\cdot\frac{1}{m}\sum_{v=0}^{m-1}a_{vd+r} - b_r\right|.\end{aligned}$$

令$n \to +\infty$, 则$m \to +\infty$且$md/n \to 1$. 故由上式得该引理成立. □

定理2.5.2的证明: 由定理2.5.1(b)得:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d\pi_j \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)} \quad 1 \leq r \leq d.$$

现再由引理2.5.1得:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)} &= \frac{1}{d}\sum_{r=1}^{d}[d\pi_j\sum_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md+r)}] \\ &= \pi_j\sum_{r=1}^{d}\sum_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md+r)} \\ &= \pi_j f_{ij}.\end{aligned}$$

考虑状态空间E为有限的特殊情形, 则此时该链没有零常返状态. 故E 有如下的分解：

$$E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m \cup D,$$

其中C_d为正常返状态构成的不可约闭集(注意若一个状态为正常返状态,则跟它互通的状态也必为正常返), D为非常返状态集. 则转移矩阵可有如下分解:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_m & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_m & 0 \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_m & Q_{m+1} \end{bmatrix} \end{array}$$

则对应的极限矩阵具有如下形式:

$$P^* = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_m & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} e_1\pi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e_2\pi_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_m\pi_m & 0 \\ Q_1^* & Q_2^* & \cdots & Q_m^* & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

其中$\pi_k = (\frac{1}{m_i i}, i \in C_k)$即限定在$C_k$上的极限分布, $e_l(l = 1, \cdots, m)$为分量均为1的列向量.

又由

$$P^*P = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P^{(m+1)} = P^* = PP^*,$$

故可知$\pi_k P_k = \pi_k$, 即可通过限定在P_k上求解π_k, 以及$Q_k(e_k\pi_k) + Q_{m+1}Q_k^* = Q_k^*$求解$Q_k^*$.

定理 2.5.3　以$\{C_\alpha\}$表示正常返不可约闭集的全体($\alpha = 1, \cdots, m \le \infty$). 令$H = E \setminus (\bigcup_\alpha C_\alpha)$. 则$P$的每一平稳分布形如:

$$\pi_i = \begin{cases} 0, & 若 i \in H \\ \frac{\lambda_\alpha}{m_{ii}} = \lambda_\alpha \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} p_{ii}^{(m)}, & 若 i \in C_\alpha. \end{cases}$$

其中$\{\lambda_\alpha \ge 0\}$满足$\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$. 特别, 若$P$的平稳分布存在, 则平稳分布唯一的充要条件是只有一个正常返不可约闭集类.

证明　设π为P的平稳分布, 则有$\pi I = 1$, 且$\pi P = \pi$. 进而有: $\pi = \pi P^n$ $(n \ge 1)$, $\pi = \pi(\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} P^m)$. 由定理2.5.2及推论2.3.1知: $f_{ji} = 1$对$i, j \in C_\alpha$成立,且$\pi = 0 (i \in H)$. 故当$i \in C_\alpha$时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ji}^{(m)} = \pi_i f_{ji} = \pi_i \ \ \forall j, i \in C_\alpha.$$

故令$\lambda_\alpha = \sum\limits_{i\in C_\alpha}\pi_i$, 则$\lambda_\alpha \ge 0, \sum\limits_\alpha \lambda_\alpha = 1$. 因对固定的$\alpha$, C_α是不可约的闭集, 将P限定在C_α上构成一不可约马氏链P_α. 记$\pi = (\pi_\alpha)$, 则有

$$\pi_\alpha = \pi_\alpha \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P_\alpha^{(m)} = (\frac{\lambda_\alpha}{m_{11}}, \frac{\lambda_\alpha}{m_{22}}, \cdots, \frac{\lambda_\alpha}{m_{|C_\alpha||C_\alpha|}}),, \tag{2.5.5}$$

其中$|C_\alpha|$表示C_α 中元素的个数.

因此，当$m = 1$时, $\lambda_\alpha = 1$, 从而由(2.5.5)知$\pi = (\pi_1, \overrightarrow{0})$，其中，$\pi_1 = (\frac{1}{m_{11}}, \frac{1}{m_{22}}, \cdots, \frac{1}{m_{|C_1||C_1|}})$. 故,平稳分布唯一。若$m > 1$, 设$\pi_\alpha(\alpha = 1, \cdots, m)$是相应于$P_\alpha$的平稳分布,则有对任意$\beta \in (0, 1)$, 直接验证可知$\pi(\beta) := (\beta\pi_1, (1-\beta)\pi_2, \overrightarrow{0})$均为$P$的平稳分布。

□

习题

习题 2.5.1 证明有限状态马氏链一定存在正常返状态.

习题 2.5.2 一个国家在稳定经济条件下它的出口商品能够用三状态的马尔可夫链描述如下: 状态空间$S = \{+1, 0, -1\}$; $+1$: 今年比去年增长$\geq 5\%$; 0:波动低于5%; -1: 今年比去年减少$\geq 5\%$. 由以往的统计数据求得转移矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ +1 \\ 0 \\ -10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} +1 & 0 & -1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.35 & 0.30 & 0.35 \\ 0.40 & 0.60 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

试求每个状态的平均返回时间, 并比较在稳定经济条件下增长状态与减少状态的稳态概率.

习题 2.5.3 水库供水按其水位分为下列 5 个状态:"1" 表示危险水平; "2" 表示缺水; "3" 表示刚够; "4" 表示较好; "5" 表示充裕. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 由已有数据求得相邻时间周期的转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.10 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 00 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 00 & 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

试求出现危险水平的平均时间长度(即求$\mu_1 1 = \mu_1$).

习题 2.5.4 设马尔科夫链$\{X_n, n \geq 0\}$, $S = \{1, 2, 3\}$,且

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

(1) 求平稳分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 及$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$,
(2)当初始分布是怎样的分布时，此马尔科夫链是平稳序列？并求EX_n及DX_n.

§2.6 最小非负解理论

在研究马氏链时, 常常需研究无限维线性方程. 因为非有限维, 线性代数方法无效. 需要新的工具. 20世纪70年代, 我国数学家侯振挺教授发展了最小非负解理论这一数学工具, 它为给出一些不等式型的关于常返性的判别准则提供理论基础.

我们常联系于两类方程:

$$x_i = \sum_{k\in E} c_{ik}x_k + b_i \ \ i \in E;$$

$$x_i(t) = \sum_{k\in E} \int_0^t c_{ik}(s)x_k(s)ds + b_i(t) \ \ i \in E, t \geq 0.$$

此处$c_{ik} \geq 0, b_i \geq 0.$

下面介绍一种抽象的形式, 并使用如下记号:

E: 任意非空集(不一定可数!)

$\mathcal{H}: \{f:\ E \to [0,\infty]\}$ 函数类的子集, 满足下列条件:

(1)$1 \in \mathcal{H}$; $(0\cdot\infty = 0)$

(2)若$f_1, f_2 \in \mathcal{H}, c_1, c_2 \geq 0$, 则$c_1f_1 + c_2f_2 \in \mathcal{H}$，且$f_2 - f_1 \in \mathcal{H}$ (当$f_2 \geq f_1$ 时);

(3)若$f_n \in \mathcal{H}$且$f_n \uparrow f$(单增), 则$f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{H}$.

$A:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 的算子(映射), 满足条件:

(1)$A(0) = 0$;

(2)若$f_1, f_2 \in \mathcal{H}, c_1, c_2 \geq 0$, 则$A(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1Af_1 + c_2Af_2$;

(3)若$f_n \in \mathcal{H}$且$f_n \uparrow$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} Af_n = A(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$.

ℓ^1: 满足上述条件的算子A的全体.

根据惯例, 对$A, \widetilde{A}, A_n \in \ell^1$, 称$A \leq \widetilde{A}$如果$Af \leq \widetilde{A}f$对一切$f \in \mathcal{H}$ 成立; 称$A_n \uparrow A$, 如果$A_n \leq A_{n+1} (\forall n \geq 1)$, 且$A_nf \uparrow Af$对一切$f \in \mathcal{H}$成立.

定义 2.6.1 (最小非负解) 给定$A \in \ell^1, g \in \mathcal{H}$, 称$f^*$ 为方程

$$f = Af + g \tag{2.6.1}$$

的最小(非负)解, 若f^*满足(2.6.1), 且对任一(2.6.1)的任意解$\widetilde{f}$, 均有$\widetilde{f} \geq f^*$. 若$g = 0$, 则称(2.6.1)为齐次的.

定理 2.6.1 (存在性定理—第一迭代法) 方程(2.6.1)的最小解总存在且唯一. 若令

$$f^{(0)} = 0, f^{(n+1)} \triangleq Af^{(n)} + g, n \geq 0, \tag{2.6.2}$$

则$f^{(n)} \uparrow f^*$, 且f^*是(2.6.1)的最小解.

证明 显然, $f^{(n)} \in \mathcal{H}, f^{(n)} \uparrow$, 故(逐点)极限存在(但可能为$+\infty$). 故由

$$f^* = \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}[Af^{(n)} + g] = Af^* + g$$

知f^*是(2.6.1)的解.

若设$\widetilde{f}\in\mathcal{H}$ 是(2.6.1)的另一解, 则有$\widetilde{f}\geq 0=f^{(0)}$. 若设$\widetilde{f}\geq f^{(n)}$. 则

$$\widetilde{f}=A\widetilde{f}+g\geq Af^{(n)}+g=f^{(n+1)}.$$

故由归纳法知$\widetilde{f}\geq f^{(n)}$对一切$n\geq 0$成立. 从而有$\widetilde{f}\geq f^*$. 另外, 满足最小性的两个解必定重合, 故最小解存在且唯一. □

例 2.6.1 设$Af\equiv f, g(x)=0, E=[0,\infty), \mathcal{H}:E$ 上非负函数全体. 则

$$f=Af+g=Af$$

的最小解为$f^*\equiv 0$.

方程

$$f=Af+2\ \ (g(x)\equiv 2)$$

的最小解为$f^*=+\infty$.

关于最小非负解的性质, 有以下结果.

定理 2.6.2 (比较定理) 设$A,\widetilde{A}\in\ell^1,\ \ g,\ \widetilde{g}\in\mathcal{H}$, 且满足

$$\widetilde{A}\geq A,\ \ \widetilde{g}\geq g.$$

则对任意满足$\widetilde{f}\geq\widetilde{A}\widetilde{f}+\widetilde{g}$ 的$\widetilde{f}\in\mathcal{H}$, 均有$\widetilde{f}$大于等于(2.6.1)的最小解$f^*$.

证明 由定理2.6.1的证明即知此结论成立. □

最小解由A和g唯一确定, 故可记$f^*=m_A(g)$.

定理 2.6.3 (线性组合定理) 设G可数, $\{a_s\geq 0: s\in G\}$, 则

$$m_A(\sum_{s\in G}a_sg_s)=\sum_{s\in G}a_sm_A(g_s),$$

其中$g_s\in\mathcal{H}(s\in G)$.

证明 由单调收敛定理及定理2.6.1可知此结论成立. □

定理 2.6.4 (单调收敛定理) 设$\{A_k\}\subset\ell^1, A_k\uparrow A, \{g_k\}\subset\mathcal{H}, g_k\uparrow g$, 则有$A\in\ell^1$, $g\in\mathcal{H}$, 且$m_{A_k}(g_k)\uparrow m_A(g)$.

证明 对任意固定的$k\geq 1$,

$$f_k^{(0)}=0, f_k^{(n+1)}\triangleq A_kf_k^{(n)}+g_k\ \ n\geq 1. \tag{2.6.3}$$

则由定理2.6.1知: $f_k^*=m_{A_k}(g_k)=\lim\limits_{n\to\infty}f_k^{(n)}$, 且$f_k^{(n)}\in\mathcal{H}$对一切$n\geq 1$成立. 则由$A_k\uparrow$, $g_k\uparrow$及(2.6.3) 可得$\infty\geq f_{k+1}^{(n+1)}\geq f_{k+1}^{(n)}\geq f_k^{(n)}$对一切$n,k\geq 1$成立. (由归纳法可证!)
再由定理2.6.1知:

$$m_{A_{k+1}}(g_{k+1})=\lim_{n\to\infty}f_{k+1}^{(n+1)}\geq\lim_{n\to\infty}f_k^{(n)}=m_{A_k}(g_k)\ \ \forall k\geq 1.$$

且

$$m_A(g) \geq \lim_{k\to\infty} m_{A_k}(g_k) = \sup_{n,\ k} f_k^{(n)}.$$

另一方面, 对任何固定的$k \geq 1$, 由(2.6.3) 及归纳法知

$$\lim_{n,\ k\to\infty} f_k^{(n+1)} = A(\lim_{n,\ k\to\infty} f_k^{(n)}) + g.$$

故由比较定理得: $\lim\limits_{n,\ k\to\infty} f_k^{(n)} \geq m_A(g)$. 从而有$\lim\limits_{k\to\infty} m_{A_k}(g_k) = m_A(g)$. □

定理 2.6.5 (第二迭代法) 设$\{g_n\} \subset \mathcal{H}$, 令

$$\widetilde{f}^{(1)} = g_1, \widetilde{f}^{(n+1)} = A\widetilde{f}^{(n)} + g_{n+1}.$$

如果$\sum\limits_{k=1}^{n} g_k \uparrow g$, 则$m_A(g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}^{(n)}$.

特别地, 若令

$$\widetilde{f}^{(1)} = g, \widetilde{f}^{(n+1)} = A\widetilde{f}^{(n)}.$$

则$m_A(g) = f^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}^{(n)}$.

定义 2.6.2 (不可约的非负矩阵) 称元素均非负的矩阵$A = (c_{ij})_{E\times E}$为不可约的, 若对于任给定的$i, j \in E$, 存在$i_0 = i, i_1, \cdots, i_n = j \in E$, 使得$c_{i_0 i_1} \cdots c_{i_{n-1} i_n} > 0$ (也记为$i \underset{\rightarrow}{A} j$), 以及$j_0 = j, j_1, \cdots, j_m = i \in E$ 使得$c_{j_0 j_1} \cdots c_{j_{m-1} j_m} > 0$ (即$j \underset{\rightarrow}{A} i$).

引理 2.6.1 设$c_{ij}, b_i \in [0, \infty), i, j \in E$. 设$A = (c_{ij})$.

(a) 设$\{x_i^*, i \in E\}$是方程

$$x_i = \sum_{j\in E} c_{ij} x_j + b_i,\ \ i \in E$$

的最小非负解. 若$i \underset{\rightarrow}{A} j$, 则有

(i) $x_i^* < \infty \Longrightarrow x_j^* < \infty$.

(ii) 若再有

$$\sum_j c_{ij} + b_i \leq 1 (i \in E), \tag{2.6.4}$$

则$x_i^* = 1 \Longrightarrow x_j^* = 1$.

特别, 若(c_{ij})不可约, 则对于上述情况(i), 或者对一切$i \in E$, 均有$x_i^* = \infty$, 或者对一切$i \in E$, 都有$x_i^* < \infty$; 对于情况(ii), 或者对于一切$i \in E$ 都有$x_i^* = 1$, 或者对一切$i \in E$都有$x_i^* < 1$.

(b) 固定$j_0 \in E$, 设$(x_i^*, i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_{j\neq j_0} c_{ij} x_j + b_i\ \ i \in E$$

的最小解. 则$x_i^* < \infty$对于一切$i \in E$ 成立$\Longleftrightarrow$ $x_i^* < \infty$对一切$i \neq j_0$成立, 且$\sum\limits_{k\neq j_0} c_{j_0 k} x_k^* < \infty$. 若$\sum\limits_{j\neq j_0} c_{ij} + b_i = 1, i \in E$, 则$x_i^* = 1$ 对于一切$i \in E$成立$\Longleftrightarrow$ $x_i^* = 1$ 对一切$i \neq j_0$成立.

证明 (a) 设$x_i^* < \infty$, 由$i \underrightarrow{A} j$, 则存在$c_{ii_1}c_{i_1i_2}\cdots c_{i_{n-1}i_n} > 0$(其中$i_n = j$). 故由

$$\infty > x_i^* = \sum_{k\in E} c_{ik}x_k^* + b_i \geq c_{ii_1}x_{i_1}^*$$

知$x_{i_1}^* < \infty$. 同理可得$x_{i_2}^* < \infty, \cdots, x_{i_n}^* < \infty$.

若(2.6.4)成立, 由第一迭代法知$x_i^* \leq 1 (\forall i \in E)$. 设$x_i^* = 1$且$c_{ii_1}c_{i_1i_2}\cdots c_{i_{n-1}i_n} > 0$.

若$x_{i_1}^* < 1$, 则

$$1 = x_i^* = c_{ii_1}x_{i_1}^* + \sum_{j\neq i_1} c_{ij}x_j^* + b_i < c_{ii_1} + \sum_{j\neq i_1} c_{ij}x_j^* + b_i \leq \sum_j c_{ij} + b_i \leq 1,$$

矛盾. 因此有$x_{i_1}^* = 1$. 依此递推, 有$x_{i_2}^* = \cdots = x_{i_n}^* = 1$. 再由不可约性知, $x_i^* = 1 \quad \forall i \in E$.

(b)由题意立知: $(x_i^*, i \neq j_0)$是方程

$$x_i = \sum_{j\neq j_0} c_{ij}x_j + b_i, \quad i \neq j_0$$

的最小非负解. 由此, 立知(b) 成立. □

命题 2.6.1 固定j, 则$(f_{ij}, i \in E)$是方程

$$x_i = \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k + p_{ij}$$

的最小解.

证明 显然$\widetilde{x}_i^{(1)} = p_{ij} = f_{ij}^{(1)}$, 设$\widetilde{x}_i^{(n)} = f_{ij}^{(n)}$, 则

$$\widetilde{x}_i^{(n+1)} \triangleq \sum_{k\neq j} p_{ik}\widetilde{x}_k^{(n)} = \sum_{k\neq j} p_{ik}f_{kj}^{(n)} = f_{ij}^{(n+1)}.$$

则由第二迭代法知$f_{ij} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{x}_i^{(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 是上述方程的最小非负解. □

命题 2.6.2 设链常返, 固定j, 则$(m_{ij}, i \in E)$是方程

$$x_i = \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k + f_{ij}$$

的最小非负解.

证明 令$y_i^{(1)} = f_{ij}^{(1)}, y_i^{(n+1)} = \sum\limits_{k\neq j} p_{ik}y_k^{(n)} + f_{ij}^{(n+1)}$, 设$y_i^{(n)} = nf_{ij}^{(n)}$, 则有

$$y_i^{(n+1)} = n\sum_{k\neq j} p_{ik}\cdot f_{kj}^{(n)} + f_{ij}^{(n+1)} = (n+1)f_{ij}^{(n+1)}.$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_i^{(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nf_{ij}^{(n)} = m_{ij}$为上述方程的最小非负解. □

习题

习题 2.6.1 设P不可约正常返，求证$m_{ij} < \infty, \forall i, j \in E$.

§2.7 若干判断准则

本节给出不可约马氏链的常返性的若干不等式型判别准则.

定理 2.7.1 (常返性判断准则) 设$P=(p_{ij})$是不可约的马氏链. $i_0\in E$, 则此链常返当且仅当存在非负有限的(y_i) 满足:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j\in E}p_{ij}y_j\le y_i, & i\ne i_0\\ \lim\limits_{i\to\infty}y_i=+\infty\end{cases}\tag{2.7.1}$$

(定理的极限是把E视为$\{0,1,\cdots\}$来处理. 这并不失一般性!)

证明 充分性:我们定义一个新的转移矩阵$\widetilde{P}=(\widetilde{p}_{ij})$:

$$\widetilde{p}_{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}, & i=0\\ p_{ij}, & i\ne 0.\end{cases}\tag{2.7.2}$$

(这里假定$i_0=\{0\}$).

此时, 0为吸收态, 因为P不可约, 故对任何$j\ne 0$, 存在互不相同$j_0=j,j_1,\cdots,j_n=0$使得$p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}0}>0$. 又0为吸收态(对$\widetilde{P}$而言). 于是$j\ne 0$均为非常返的(关于$\widetilde{P}$). 否则若$j$ 常返, 由$p_{jj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}0}>0$, 则知$j\longrightarrow 0$ (对$\widetilde{P}$而言), 故$\widetilde{f}_{0j}=1$,与0是吸收的矛盾，这里$\widetilde{f}_{0j}$为对应于$\widetilde{P}$的首达概率. 从而有, $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}=0(j\ne 0)$. 明显知:

$$\widetilde{f}_{i0}^{(n)}=f_{i0}^{(n)},\widetilde{p}_{i0}^{(n)}=\sum_{m=1}^{n}f_{i0}^{(m)},\tag{2.7.3}$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{p}_{i0}^{(n)}=f_{i0}=\widetilde{f}_{i0}.$$

现设(y_i)满足条件, 则有

$$\sum_{j\in E}\widetilde{p}_{ij}y_j\le y_i,\ \ i\in E.$$

从而

$$\sum_{j\in E}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}y_j\le y_i,\ \ i\in E,n\ge 1.$$

因此, 对任何$i\ne 0$有:

$$\begin{aligned}1&=\sum_{j\le N}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}+\sum_{j>N}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}\\&\le\sum_{j\le N}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}+\sum_{j>N}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}\frac{y_j}{\inf_{k>N}y_k}\\&\le\sum_{j\le N}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}+\frac{y_i}{\inf_{k>N}y_k}\\&=\widetilde{p}_{i0}^{(n)}+\sum_{1\le j\le N}\widetilde{p}_{ij}^{(n)}+\frac{y_i}{\inf_{k>N}y_k}\ (i\ne 0).\end{aligned}$$

在上式中令$n \to +\infty$, 再让$N \to \infty$可得,

$$f_{i0} = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{p}_{i0}^{(n)} = 1\ (i \neq 0).$$

此外, 对P有:

$$f_{00} = \sum_{j\neq 0} p_{0j} f_{j0} + p_{00} = \sum_{j\neq 0} p_{0j} + p_{00} = 1. \tag{2.7.4}$$

故0是常返的, 从而P是常返的. □

(b)必要性(略!), 感兴趣者可参见书上$P31$!

定理 2.7.2　(非常返性判断准则)　设P不可约, 则链非常返当且仅当方程存在状态$i_0 \in E$, 使得

$$\sum_{j\in E} p_{ij} x_j = x_i,\ \ i \neq i_0$$

有非常数的非负有界解.

证明　(必要性)不妨设$i_0 = \{0\}$. 并考虑定理2.7.1中的马氏链$\widetilde{P}$. 则易知$\tilde{f}_{00} = 1$而且$\exists i \neq 0$ 使得$\tilde{f}_{i0} < 1$(否则，因$\tilde{f}_{i0} = f_{i0} = 1(i \neq 0)$,从而由(2.7.4)可得$f_{00} = 1$, 即0常返,矛盾)。由于

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{i0} = &\sum_{k\neq 0} \tilde{p}_{ik} \tilde{f}_{k0} + \tilde{p}_{i0} \\ &= \sum_{k\in E} \tilde{p}_{ik} \tilde{f}_{k0} \\ &= \sum_{k\in E} p_{ik} \tilde{f}_{k0} (i \neq 0),\end{aligned}$$

即, $\{\tilde{f}_{i0}, i \in E\}$是非常数的非负有界解，所以必要性得证。

(充分性) 设方程有非负的有界的非常数解$(y_i, i \in E), 0 \le y_i \le M < \infty$. 因为

$$\sum_{j\in E} \widetilde{p}_{ij} y_j = y_i,\ \ i \in E.$$

于是

$$\sum_{j\in E} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} y_j = y_i,\ \ i \in E, n \ge 1.$$

如果链常返, 则$1 = f_{i0} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{p}_{i0}^{(n)}$ ($\widetilde{p}_{i0}^{(n)}$ 与定理2.7.1中记号同), 从而

$$0 \le \sum_{j\neq 0} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} y_j \le M(1 - \widetilde{p}_{i0}^{(n)}) \to 0 (n \to \infty).$$

因此, $y_i = \sum_{j\neq 0} \widetilde{p}_{ij}^{(n)} y_j + \widetilde{p}_{i0}^{(n)} y_0 \to y_0$与$\{y_i, i \in E\}$非常数，得出矛盾. □

例 2.7.1　设转移矩阵P的第一行为$\{q_0, q_1, \cdots\}$且$p_{ii-1} = 1, i = 1, \ldots$, 其中$q_i > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$(即$P_{42}$, No. 22). 求证此链不可约且常返.

证明 不可约是显然的, 且0是非周期的(因$p_{00}=q_0>0$), 故该链是不可约且非周期的.

令 $y_i=i(i\geq 0)$. 则有: $\lim\limits_{i\to\infty} y_i=+\infty$, 且

$$\sum_{j\in E} p_{ij}y_j=i-1\leq i=y_i, i\neq 0.$$

因此, 此链是常返的. □

定理 2.7.3 (遍历性的判断准则)设P不可约, 非周期. $i_0\in E$, 则此链正常返(遍历)当且仅当

$$\begin{cases}\sum\limits_{j\in E} p_{ij}y_j\leq y_i-1, & i\neq i_0\\ \sum\limits_{j} p_{i_0j}y_j<\infty\end{cases} \tag{2.7.5}$$

有有限的非负解。

证明 (必要性)由于P是不可约正常返的，于是$m_{00}<\infty$且

$$m_{i0}=\sum_{k\neq 0} p_{ik}m_{k0}+f_{i0}.$$

即

$$\sum_{k\neq 0} p_{ik}m_{k0}=m_{i0}-1.$$

若记$y_0=0, y_i\triangleq m_{i0}, i\neq 0$. 那么不难验证必要性成立。

(充分性)假设$i_0=0$. 设(y_i)为(2.7.5)的解. 令$c=\sum\limits_j p_{0j}y_j<\infty$.

$$y_i^{(1)}=y_i\geq 0\ (i\in E), y_i^{(n+1)}=\sum_j p_{ij}^{(n)}y_j\ \ (n\geq 1).$$

则$y_0^{(2)}=c, y_i^{(2)}=\sum\limits_j p_{ij}y_j\leq y_i-1(i\neq 0)$. 进而

$$\begin{aligned} y_i^{(n+2)} &= \sum_j p_{ij}^{(n+1)}y_j=\sum_{j,k} p_{ik}^{(n)}p_{kj}y_j=\sum_j p_{ij}^{(n)}y_j^{(2)}\\ &= p_{i0}^{(n)}y_0^{(2)}+\sum_{j\neq 0} p_{ij}^{(n)}y_j^{(2)}\leq cp_{i0}^{(n)}+\sum_{j\neq 0} p_{ij}^{(n)}(y_j-1)\\ &= cp_{i0}^{(n)}+\sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)}y_j-p_{i0}^{(n)}y_0-\sum_{j\neq 0} p_{ij}^{(n)}\\ &\leq (1+c)p_{i0}^{(n)}+y_i^{(n+1)}-1. \end{aligned}$$

由归纳法知: $y_i^{(n)}<\infty(\forall i\in E, n\geq 1)$. 进而有

$$0\leq y_i^{(n+2)}\leq (1+c)\sum_{r=1}^n p_{i0}^{(r)}+y_i^{(2)}-n,$$

$$0\leq \frac{y_i^{(n+2)}}{n}\leq (1+c)\frac{1}{n}\sum_{r=1}^n p_+i0^{(r)}+\frac{y_i^{(2)}}{n}-1\ \ \forall n\geq 1.$$

令$n \to +\infty$得:

$$0 \le (1+c) \cdot f_{i0}\pi_0 - 1 \Rightarrow \pi_0 > 0.$$

故$\pi_i > 0(\forall i \in E)$. (因$P$不可约!) $\square$

习题

习题 2.7.1 (a) 固定$j \in E$, 求证$\{f_{ij}, i \in E\}$ 满足方程

$$x_i = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k + p_{ij} \quad i \in E.$$

(b) 固定$j \in E$, 求证$\{m_{ij}, i \in E\}$ 满足方程

$$x_i = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k + f_{ij} \quad i \in E,$$

其中$m_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$.

习题 2.7.2 设转移矩阵P的第一行为$\{q_0, q_1, \cdots\}$且$p_{ii-1} = 1, i = 0, 1, \cdots$, 其中$q_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i = 1$, 并且$\max\{i | q_i > 0\} = +\infty$.

(a) 验证此链是不可约的，

(b) 并讨论该链常返的条件。

§2.8 两个典型的离散时间马氏链

A、随机游动

定义 2.8.1 (随机游动) 设$E=\{0,1,2,\cdots\}$上的马氏链P称为随机游动, 若$p_{ii+1}=p_i$, $p_{i+1i}=q_{i+1}, p_{ii}=r_i(i\geq 0)$且$p_i+q_i+r_i=1(i\geq 1), p_0+r_0=1$.

假定$p_i>0, r_i\geq 0(i\geq 0), q_i>0(i\geq 1)$. 显然, 若对任何$i\geq 0$, 有$r_i=0$. 则此过程有周期2. 否则, 为非周期的. 以下假定$r_0>0$. 从而此链是非周期不可约的. 此过程也通常称为半直线上的随机游动.

记:

$$\mu_0=1, \mu_i=\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}, i\geq 1. \tag{2.8.1}$$

则有:

定理 2.8.1 (对上述半直线上随机游动), 有

(a) 它常返当且仅当$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_ip_i}=\infty$;

(b) 它是遍历的当且仅当$\mu:=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mu_i<\infty$.

此时, 平稳分布为$\pi_i=\mu_i/\mu$.

证明 (a) 由条件易知P 不可约. 令$H=\{0\}$. 考虑方程:

$$\sum_{j\geq 0}p_{ij}y_j=y_i, i\neq 0.$$

这样，由$r_i=1-p_i-q_i(i\geq 1)$,可得

$$q_iy_{i-1}+(1-q_i-p_i)y_i+p_iy_{i+1}=y_i(i\geq 1),$$

从而有

$$y_{i+1}-y_i=\frac{q_i}{p_i}(y_i-y_{i-1})=\frac{q_iq_{i-1}}{p_ip_{i-1}}(y_{i-1}-y_{i-2})=\frac{q_i\cdots q_1}{p_i\cdots p_1}(y_1-y_0)$$

令$y_0=0, y_1=\frac{1}{p_0}$,则有$y_i\triangleq\sum\limits_{k=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_kp_k}, i\geq 1$. 因此, 由定理2.7.2 知, 当$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_ip_i}<\infty$ 时, 此链是非常返的. 从而知(a)成立.

(b) 若$(\mu_i, i\in E)$为不变分布，则有

$$\sum_{i\geq 0}\mu_ip_{ij}=\mu_j, j\neq 0.$$

这样，由$r_0+p_0=1, r_i=1-p_i-q_i(i\geq 1)$,可得

$$\mu_0r_0+\mu_1q_1=\mu_0,\ \ p_{i-1}\mu_{i-1}+(1-q_i-p_i)\mu_i+q_{i+1}\mu_{i+1}=\mu_i(i\geq 1),$$

从而有

$$\mu_1=\frac{p_0}{q_1}\mu_0,\ \mu_i=\frac{p_{i-1}}{q_i}\mu_{i-1}(i\geq 1)$$

令$\mu_0=1$,则有$\mu_i=\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}(i\geq 1)$. 若$\mu=\sum\limits_{i\geq 0}\mu_i<\infty$, 则$\{\pi_i\triangleq\mu_i/\mu, i\in E\}$为$P$的平稳分布. 因此, 该随机游动正常返当且仅当$\mu<\infty$. 此时平稳分布为$\{\pi_i=\mu_i/\mu, i\geq 0\}$. □

B、排队论

定义 2.8.2 (离散时间排队系统) $X_n:[n,n+1)$ 开始时系统中的顾客数,

$\xi_n:[n,n+1)$ 时间内到达排队系统中的顾客数, 假设$\{\xi_n,n=0,1,\ldots,\}$ 是i.i.d且它们与X_0独立,

在每个周期$[n,n+1)$内仅服务完一个顾客.

故系统中的人数满足如下方程: $X_{n+1}:=(X_n-1+\xi_{n+1})^+$.

离散时间的排队系统的转移矩阵$P=(p_{ij})$定义如下:

$$p_{ij}=\begin{cases} a_0+a_1, & 若 i=0,j=0\\ a_{j+1}, & 若 i=0,j\geq 1\\ a_{j-i+1}, & 若 j\geq i-1\\ 0, & 其他,\end{cases} \tag{2.8.2}$$

$$P=\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \end{pmatrix},$$

其中$a_k:=P(\xi_1=k)(k\geq 0)$, $a_k>0,\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k=1$.

令$\rho\triangleq\sum\limits_{k=0}^{\infty}ka_k, f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k, z\in[0,1]$. 则有:

定理 2.8.2 对上述排队系统:

(a) 它常返$\Longleftrightarrow\rho\leqslant 1$;

(b) 它正常返(遍历)$\Longleftrightarrow\rho<1$.

证明 (a) 由转移矩阵可知$\{X_n\}$不可约. 若$\rho>1$, 我们证明$\sum\limits_{j\geq 0}p_{ij}y_j=y_i(i\neq 0)$ 有非常数的有界解. 任意固定$c\in(0,1)$, 令$y_i=c^i(i\geq 0)$, 则有$\sum\limits_{j\geq 0}p_{ij}c^j=\sum\limits_{j\geq i-1}a_{j-i+1}c^j=c^i$(方程成立的假定)$(i\geq 1)$. 故而上述方程可改写为:

$$c=\sum_{j\geq i-1}a_{j-i+1}c^{j-i+1}=\sum_{k\geq 0}a_kc^k=f(c).$$

因为$f(0)=a_0<1=f(1)$, 且$f'(1)=\rho>1$, $f''(z)=\sum\limits_{k\geq 2}a_kk(k-1)z^{k-2}\geq 0$. 所以由$f$在$[0,1]$上的严格凸性和单调性可知存在$0<c_0<1$, 使得$f(c_0)=c_0$. 于是$y_i=c_0^i$即为方程$\sum\limits_{j\geq 0}p_{ij}y_j=y_i(i\neq 0)$的非常数有界解. 故当$\rho>1$时, 该链是非常返的.

另外, 若$\rho\leq 1$, 令$y_i=i$, 则有当$i\neq 0$时,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0}p_{ij}y_j &= \sum_{j\geq i-1}ja_{j-i+1}\\ &= \sum_{j\geq i-1}(j-i+1)a_{j-i+1}+(i-1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho - 1 + i \\
&= y_i + (\rho - 1) \\
&\le y_i (i \neq 0).
\end{aligned}
$$

故由定理2.7.1知, 该链是常返的. ($\rho \le 1$时)

(b)若$\rho < 1$. 取$y_i = i/(1-\rho)$. 则有

$$\sum_{j \ge 0} p_{ij} y_j = y_i - 1 (i \neq 0).$$

于是由定理2.7.3知该排队系统是正常返的. □

习题

习题 2.8.1 考虑如下的排队系统

$\xi_n:[n,n+1)$ 时间内提供服务的人数, 假设$\{\xi_n, n=0,1,\ldots,\}$ 是i.i.d且它们与X_0独立,

在每个周期$[n,n+1)$内仅有一个顾客到达,

$X_n:[n,n+1)$ 开始时系统中等待服务的顾客数.

故系统中的人数满足如下方程: $X_{n+1}:=(X_n+1-\xi_n)^+$.

求证: a): $\{X_n, n\geq 0\}$为马氏链,并写出转移概率矩阵;

b): 记$\rho:=\sum\limits_{k=0}^{\infty}kP(\xi_1=k)$, 则$\{X_n, n\geq 0\}$常返$\Longleftrightarrow \rho\geq 1$;

c): $\{X_n, n\geq 0\}$遍历$\Longleftrightarrow \rho>1$, 当$\rho>1$ 时求其不变分布.

§2.9 几何遍历性

前面分析了n步转移概率的极限行为，本节仅对有限马氏链进行分析其收敛速度，对更一般的情形，可参见文献.

定理 2.9.1 (几何遍历性). 设$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链,其状态空间$E = \{1, \ldots, N\}(N < \infty)$，且其一步转移概率$p_{ij} > 0(i, j \in E)$.则存在$E$上概率分布$\pi = \{\pi_i, i \in E\}$使得

(a) $\sum_{k \in E} \pi_k p_{kj} = \pi_j, j \in E$;

(b) $|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq (1 - N\delta)^n$ 对所有$i, j \in E, n \geq 1$成立,其中$\delta := \min\{p_{ij} : i, j \in E\}$.

证明 令$M_j^{(n)}$和$m_j^{(n)}$分别是n步转移概率矩阵P^n第j列的最大与最小值.则有

$$\delta \leq p_{ij} = 1 - \sum_{k \neq j} p_{ik} \leq 1 - (N-1)\delta.$$

从而$M_j^{(1)} \leq 1 - (N-1)\delta$和$m_j^{(1)} \geq \delta$.因此$M_j^{(1)} - m_j^{(1)} \leq 1 - (N-1)\delta - \delta = 1 - N\delta$.而且，

$$M_j^{(n+1)} = \max_i p_{ij}^{(n+1)} = \max_i \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \leq \max_i \sum_{k \in E} p_{ik} M_j^{(n)} = M_j^{(n)},$$
$$m_j^{(n+1)} = \min_i p_{ij}^{(n+1)} = \min_i \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \geq \min_i \sum_{k \in E} p_{ik} m_j^{(n)} = m_j^{(n)}.$$

假设

$$0 \leq M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq (1 - N\delta)^n, \quad n \geq 1. \tag{2.9.1}$$

则可令$\pi_j := \lim_{n \to \infty} M_j^{(n)}$.于是，$\pi_j \geq \lim_{n \to \infty} m_j^{(n)} \geq m_j^{(n)}$ $(n \geq 1)$,由(2.9.1)及$M_j^{(n)}$和$m_j^{(n)}$的定义可得

$$m_j^{(n)} - M_j^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)} - \pi_j \leq M_j^{(n)} - m_j^{(n)},$$

从而有$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 对一切$i \in E$成立.进而,$\sum_{j \in E} \pi_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1$,且

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in E} \pi_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in E} \pi_k p_{kj}, j \in E.$$

这样，下面仅需证明(2.9.1). 事实上，

$$\begin{aligned}
M_j^{(n+1)} - m_j^{(n+1)} &= \max_i p_{ij}^{(n+1)} - \min_i p_{ij}^{(n+1)} \\
&=: p_{i_1 j}^{(n+1)} - p_{i_2 j}^{(n+1)} \quad (i_1, i_2 \in E) \\
&= \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k}) p_{kj}^{(n)} \\
&= \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^+ p_{kj}^{(n)} - \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^- p_{kj}^{(n)} \\
&\leq M_j^{(n)} \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^+ - m_j^{(n)} \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^-
\end{aligned}$$

由因$0 = \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k}) = \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^+ - \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^-$, 故

$$M_j^{(n+1)} - m_j^{(n+1)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - p_{i_2 k})^+$$

$$\leq \quad (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in E} (p_{i_1 k} - \delta)^+ = (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1 - N\delta).$$

这样，用归纳法可知(2.9.1)成立. □

§2.10 停时与强马氏性

设$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链.对任意正整数k,则由定理2.1.1知$\{X_{n+k}, n \geq 0\}$也是马氏链，且与$\{X_n, n \geq 0\}$有相同的转移概率.若k是随机的，情况会怎样呢？这是本节将回答的问题.

设$\{X_n, n \geq 0\}$为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上取值于E的齐次马氏链.对任意的$n \geq 1$,令$\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ 为$X_1, \ldots, X_n$所生成的最小σ代数，即包含$\{(X_k = i_k)|i_k \in E, k = 1, \ldots, n\}$的最小$\sigma$代数.

定义 2.10.1 (停时): 一个非负整数值的随机变量τ称为相应于马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的停时，若对任意的$n \geq 0$,有$(\tau \leq n) \in \mathscr{F}_n$.

例 2.10.1 (i) 设$\{X_n, n \geq 0\}$为齐次马氏链.给定状态$i \in E$,令$\tau_i^1 := \inf\{n > 0 | X_n = i\}$.则$\tau_i^1$为停时; (2) 对任意正整数$m$, 令$\tau_i^{m+1} := \inf\{n > \tau_i^m | X_n = i\}$, 则$\tau_i^m$ 均为停时.

证明 因$\{\tau_i^1 = 1\} = \{X_0 = i\} \in \sigma(X_0, X_0)$; 对$n > 0$,有$\{\tau_i^1 = n\} = \{X_1 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\} \in \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, 故$\tau_i^1$为停时.假设则$\tau_i^m$ 均为停时,则对任意非负整数k, 有$\{\tau_i^m = k\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_k)$. 考虑则$\tau_i^{m+1}$：对$n > 0$,有

$$\{\tau_i^{m+1} = n\} = \{\tau_i^m \leq n-1, \tau_i^{m+1} = n\} = \cup_{k=0}^{n-1}\{\tau_i^m = k, X_{k+1} \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\}$$

又因$\{\tau_i^m = k\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_k) \subset \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)(k \leq n)$, 从而$\{\tau_i^m = k, X_{k+1} \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\} = \{\tau_i^m = k\} \cap \{X_{k+1} \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. 于是有$\{\tau_i^{m+1} = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, 即,则$\tau_i^{m+1}$ 为停时. □

例 2.10.2 若 T 为停时，$B \subseteq E$, 则

$$S(\omega) = \inf\{n > T(\omega) : X_n(\omega) \in B\}$$

也是停时，在此及以后都约定$\inf \varnothing = +\infty$.

证明 $\{S = n\} = \bigcup_{k=0}^{n-1}\left[\{T = k\}\left(\bigcap_{m=k+1}^{n-1}\{X_m \in B^c\}\right)\{X_n \in B\}\right] \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. □

定理 2.10.1 (强马氏性). 设$\{X_n, n \geq 0\}$是转移矩阵为(p_{ij})的齐次马氏链,τ为相应的停时，则$\{X_{n+\tau}, n \geq 0\}$也是马氏链，且与$\{X_n, n \geq 0\}$有相同的一步转移概率矩阵.

证明 任意给定$i_k \in E, k = 0, 1, \ldots, n+1, n \geq 1$,则

$$P(X_{\tau+n+1} = i_{n+1} | X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n) = \frac{P(X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n, X_{\tau+n+1} = i_{n+1})}{P(X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n)}$$

又因$(\tau = m) \in \mathscr{F}_m$,从而存在子集$B_l^k \subseteq E$使得：对任意$k \neq k'$及对某个$0 \leq l \leq m$，有$B_l^k B_l^{k'} = \emptyset$且$(\tau = m, X_m = i_0) = \cup_k (X_0 \in B_0^k, \ldots, X_{m-1} \in B_{m-1}^k, X_m \in \{i_0\})$. 于是有

$$\begin{aligned}
&P(X_\tau = i_0, \ldots, X_{\tau+n} = i_n, X_{\tau+n+1} = i_{n+1}) \\
&= \sum_{m \geq 1} P(\tau = m, X_m = i_0, \ldots, X_{m+n+1} = i_{n+1})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m\geq 1}\sum_{k} P(X_0\in B_0^k,\ldots,X_{m-1}\in B_{m-1}^k, X_m=i_0,\ldots,X_{m+n+1}=i_{n+1}).$$

从而可得

$$\begin{aligned}&P(X_{\tau+n+1}=i_{n+1}|X_\tau=i_0,\ldots,X_{\tau+n}=i_n)\\ &=\frac{\sum_{m\geq 1}\sum_k P(X_0\in B_0^k,\ldots,X_{m-1}\in B_{m-1}^k, X_m=i_0,\ldots,X_{m+n+1}=i_{n+1})}{\sum_{m\geq 1}\sum_k P(X_0\in B_0^k,\ldots,X_{m-1}\in B_{m-1}^k, X_m=i_0,\ldots,X_{m+n}=i_n)}=p_{i_n i_{n+1}}.\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}&P(X_{\tau+n+1}=i_{n+1}|X_{\tau+n}=i_n)\\ &=\frac{\sum_{m\geq 1}\sum_k P(X_0\in B_0^k,\ldots,X_{m-1}\in B_{m-1}^k, X_{m+n}=i_n,X_{m+n+1}=i_{n+1})}{\sum_{m\geq 1}\sum_k P(X_0\in B_0^k,\ldots,X_{m-1}\in B_{m-1}^k, X_{m+n}=i_n)}=p_{i_n i_{n+1}}.\end{aligned}$$

因此，有

$$P(X_{\tau+n+1}=i_{n+1}|X_\tau=i_0,\ldots,X_{\tau+n}=i_n)=P(X_{\tau+n+1}=i_{n+1}|X_{\tau+n}=i_n)=p_{i_n i_{n+1}}.$$

□

例 2.10.3 设i为常返，$X_0=i,\tau_i^1(\omega):=\min\{n>0|X_n=i\},\tau_i^m(\omega):=\min\{n>\tau_i^{m-1}(\omega)|X_n=i\}(m\geq 2)$. $T_1^i(\omega):=\tau_i^1(\omega)$, 对任意正整数$m\geq 2$, 定义随机变量$T_m^i$: $T_m^i(\omega):=\tau_i^m(\omega)-\tau_i^{m-1}(\omega)(\omega\in\Omega)$,则$\{T_m^i(\omega):m\geq 1\}$ 是i.i.d.的,且$T_1^i(\omega)=E\tau_i^1$.

证明 对任意$1\leq n_1<\cdots<n_m,k,m\geq 1$,

$$\begin{aligned}&P(T_m^i=k|T_1^i=n_1,\ldots,T_{m-1}^i=n_{m-1})\\ &=P(\tau_i^m-\tau_i^{m-1}=k|\tau_i^1=n_1,\tau_i^2=n_1+n_2,\ldots,\tau_i^{m-1}=n_{m-1}+n_{m-2})\\ &=P(X_{\tau_i^{m-1}+l}\neq i,0<l<k,X_k=i|\tau_i^1=n_1,\tau_i^2=n_1+n_2,\ldots,\tau_i^{m-1}=n_{m-1}+n_{m-2})\\ &=P(X_{\tau_i^{m-1}+l}\neq i,0<l<k,X_k=i|\tau_i^{m-1}=n_{m-1}+n_{m-2},X_{n_{m-1}+n_{m-2}}=i)\ \text{(强马氏性)}\\ &=P(X_l\neq i,0<l<k,X_k=i|X_0=i)\qquad\text{(时齐性)}.\\ &=f_{ii}^{(k)}\end{aligned}$$

这说明$P(T_m^i=k|T_1^i=n_1,\ldots,T_{m-1}^i=n_{m-1})$ 与$\{T_1^i,\ldots,T_{m-1}^i\}$ 无关，因此，$\{T_m^i:m\geq 1\}$ 是i.i.d.的,且$ET_1^i=\sum_{k=1}^\infty kf_{ii}^{(k)}=E\tau_i^1$. □

习题

习题 2.10.1 设 $T, T_k, k \geq 1$ 均为停时, 则$\sup_k T_k, \inf_k T_k$ 也为停时.

§2.11 转移概率与平稳分布的统计计算

前面的主要结论均基于转移概率(p_{ij})及其平稳分布$\{\pi_i\}$，本节讨论它们的统计计算.

定理 2.11.1 对于正常返状态i,有$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)}{n} = \pi_i$ a.e., 其中$\pi_i = \frac{1}{m_{ii}} > 0$.

证明 用例2.10.3中的记号及i.i.d.的强大数定理, 对于正常返状态i, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n T_m^i = E\tau_i^1 = m_{ii}$$

记$N_n(\omega) := \sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k(\omega))$, 则有$N_n(\omega)\to\infty (n\to\infty)$ a.s.(定理2.3.4), 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{N_n(\omega)} T_m^i}{N_n(\omega)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{N_n(\omega)+1} T_m^i}{N_n(\omega)+1} = m_{ii} < \infty \quad \text{a.s.} \tag{2.11.1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T^i_{N_n(\omega)+1}}{N_n(\omega)} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{N_n(\omega)+1}{N_n(\omega)}\frac{\sum_{m=1}^{N_n(\omega)+1} T_m^i}{N_n(\omega)+1} - \frac{\sum_{m=1}^{N_n(\omega)}}{N_n(\omega)}\right] = 0 \quad \text{a.s..}$$

另外，因$\sum_{m=1}^{N_n(\omega)} T_m^i \leq n \leq \sum_{m=1}^{N_n(\omega)+1} T_m^i = \sum_{m=1}^{N_n(\omega)} + T^i_{N_n(\omega)+1}$, 故

$$\frac{n - T^i_{N_n(\omega)+1}}{N_n(\omega)} \leq \frac{\sum_{m=1}^{N_n(\omega)} T_m(i)}{N_n(\omega)} \leq \frac{n}{N_n(\omega)} \quad \forall\, n \geq 1, \text{a.s..}$$

再由(2.11.1)可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{N_n(\omega)} = m_{ii} \qquad \text{a.s..}$$

□

更一般地，有下列结论. 综合上述讨论，有下列结论.

定理 2.11.2 设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$不可约且正常返,其转移概率矩阵为(p_{ij}),唯一平稳分布为$\{\pi_i, i\in E\}$.则对任意状态i, j, 以概率1地有:

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)}{n}, \quad p_{ij} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)I_{\{j\}}(X_{k+1})}{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)}.$$

证明 前面的结论来自定理2.11.1. 为后一结论，考虑乘积状态空间$E\times E$ 上的如下马氏链$\{(X_n, X_{n+1}), n = 0, \ldots\}$. 记$Y_n := (X_n, X_{n+1})$, 由于

$$\begin{aligned}
&P(Y_{n+1} = (j_1, j_2)|Y_0 = (i_0, i_0'), Y_1 = (i_1, i_1'), \ldots, Y_{n-1} = (i_{n-1}, i_{n-1}'), Y_n = (i_1, i_2))\\
&= P(X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2 | X_0 = i_0, X_1 = i_0', \ldots, X_n = i_{n-1}', X_n = i_1, X_{n+1} = i_2))\\
&= P(X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2 | X_{n+1} = i_2))
\end{aligned}$$

$$= p_{j_1j_2}\delta_{i_2j_1}.$$

因此, $\{(X_n, X_{n+1}), n = 0, \ldots\}$ 是一步转移概率为$\hat{p}_{(i_1,i_2)(j_1,j_2)} = p_{j_1j_2}\delta_{i_2j_1}$ 的马氏链, 可以验证该链还是不可约的, 而且

$$\sum_{(i_1,i_2)\in E\times E} \pi_{i_1}p_{i_1i_2}\hat{p}_{(i_1,i_2)(j_1,j_2)} = \sum_{i_1,i_2\in E} \pi_{i_1}p_{i_1i_2}p_{j_1j_2}\delta_{i_2j_1} = \sum_{i_1\in E} \pi_{i_1}p_{i_1j_1}p_{j_1j_2} = \pi_{j_1}p_{j_1j_2}$$

即$(\pi_i p_{ij} : (i,j) \in E \times E)$ 是其平稳分布. 由定理2.4.1, $\{(X_n, X_{n+1}), n = 0, \ldots\}$ 是不可约且正常返的. 由定理2.11.1，可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)I_{\{j\}}(X_{k+1})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_{\{(i,j)\}}(X_k, X_{k+1})}{n} = \pi_i p_{ij}$$

因此, 再用定理2.11.1, 有$p_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)I_{\{j\}}(X_{k+1})}{\sum_{k=1}^n I_{\{i\}}(X_k)}$. □

习题

习题 2.11.1 证明定理2.11.2中定义的马氏链$\{(X_n, X_{n+1}), n \geq 0\}$也是不可约的.

第三章　连续时间马氏链

§3.1　泊松过程

假设$N(t)$ 表示$[0,t)$ 内收到的短信数, 则可以假定$N(t)$ 满足如下的性质:

1) $N(0)=0$;

2) $\forall 0<t_1<t_2\cdots<t_n$, $N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \cdots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ 是相互独立的 (即$N(t)$ 为增量独立的);

3) $N(t)$ 与$N(t+s)-N(s)$ 同分布;

4) 存在$\lambda>0$, 使得对任意的$t>0$和充分小的$h>0$ 有$P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda h+o(h)$且$P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$.

下面求解$N(t)$的分布, 首先令$P_n(t):=P(N(t)=n), n\geq 0, t>0$, 则有

a) $n=0$时,

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t+h)=0) \\ &= P(N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0) \\ &= P(N(t)=0)P(N(t+h)-N(t)=0) \\ &= P_0(t)P_0(h) \text{ (由性质2),3)得到)}. \end{aligned}$$

则有

$$P_0(t+h)-P_0(t)=P_0(t)(P_0(h)-1)=P_0(t)(-\lambda h+o(h)),$$
$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+P_0(t)\frac{o(h)}{h},$$

故有

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=1 \end{cases} \Longrightarrow P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

b) 当$n\geq 1$,

$$\begin{aligned} \{N(t+h)=n\} &= \cup\{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\} \\ &\quad \cup\{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\} \\ &\quad \cup_{l=2}^{n}\{N(t)=n-l, N(t+h)-N(t)=l\}, \end{aligned}$$

$$P_n(t+h)=P(N(t)=n)P(N(t+h)-N(t)=0)+P(N(t)=n-1)P(N(t+h)-N(t)=1)+o(h),$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad & P_n(t+h)=P_n(t)(1-\lambda h+o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h)), \\ \Longrightarrow\quad & \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+o(h). \end{aligned}$$

令$h\to 0$, 则有$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$ 又

$$\frac{d(e^{\lambda t}P_n(t))}{dt}=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \text{ 对}n\geq 1\text{成立},$$

特别当$n=1$时,
$$\frac{d(e^{\lambda t}P_1(t))}{dt}=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda,$$
从而$P_1(t)=(\lambda t)e^{-\lambda t}$, 归纳得$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$, 故$E(N(t))=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(t)=\lambda t.$

下面我们抽象出一般的时齐泊松过程:

定义 3.1.1 一随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$ 称为时齐泊松过程, 若

1) $N(0)=0$;

2) 具有独立增量性, 即$\forall 0<t_1<t_2\cdots<t_n, N(t_1), N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$是相互独立的;

3) 具有增量平稳性, 即对任意的$t,s\geq 0$, $N(t)$ 与$N(t+s)-N(s)$ 同分布;

4) 存在$\lambda>0$, 使得对任意的$t>0$和充分小的$h>0$ 有$P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda h+o(h)$且$P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$.

例 3.1.1 (Poisson 过程在排队论中的应用) 研究随机服务系统中的排队现象时, 经常用Poisson 过程模型. 例如, 到达电话总机的呼叫数目, 到达某服务设施(商场、车站、购票处等)的顾客数, 都可以用Poisson 过程来描述. 以某火车站售票处为例, 设从早上8:00开始，此售票处连续售票, 乘客以10人/小时的平均速率到达, 则9:00-10:00 这1小时内最多有5名乘客来此购票的概率是多少？10:00-11:00 没有人来买票的概率是多少?

解 我们用一个Poisson 过程来描述. 设8:00为时刻0, 则9:00为时刻1, 参数$\lambda=10$. 由Poisson 过程的性质知
$$P(N(2)-N(1)\leq 5)=\sum_{n=0}^{5}e^{-10}\frac{10^n}{n!},$$
$$P(N(3)-N(2)=0)=e^{-10}\frac{10^0}{0!}=e^{-10}.$$

例 3.1.2 (事故发生次数及保险公司接到的索赔数) 若以$N(t)$ 表示某公路交叉口、矿山、工厂等场所在$(0,t]$时间内发生不幸事故的数目, 则Poisson 过程就是$N(t)$ 的一种很好近似. 例如, 保险公司接到赔偿请求的次数（设一次事故就导致一次索赔）、向315台的投诉（设一次商品出现质量问题为事故）等都可以应用Poisson 过程模型. 我们考虑最简单的情况, 设保险公司每次的赔付都是1, 每月平均接到索赔要求4次, 则一年中它要支付的金额平均为多少？

解 设一年开始为时刻0, 1月末为时刻1, 2月末为时刻2, $\cdots$, 年末为时刻12, 则有
$$P(N(12)-N(0)=n)=e^{-4\times 12}\frac{(4\times 12)^n}{n!}, n=0,1,2,\ldots.$$
均值为
$$E[N(12)-N(0)]=4\times 12=48.$$

§3.2 泊松过程与指数分布的联系

本节用过程样本函数的特征来刻画泊松过程，从而揭示它与指数分布之间的内在联系.

设$\{N(t),t\geq 0\}$是一计数过程，$N(t)$表示在时间$[0,]$内事件发生(或顾客到达)的个数,令$S_0=0,S_n$ 表示第n个事件发生的时刻, $X_n:=S_n-S_{n-1}(n\geq 1)$ 表示第$n-1$个事件与第n个事件发生的事件间隔，即

$$S_0=0,\ \ S_n=\inf\{t>S_{n-1}|N(t)=n\},\quad n\geq 1. \tag{3.2.1}$$

注意,此时对$t\geq 0$, 有下列事实：

$$(N(t)\geq n)=(S_n\leq t),(N(t)=n)=(S_n\leq t<S_{n+1})=(S\leq t)-(S_{n+1}\leq t).$$

因此,S_n的分布函数为：当$t<0$时, $P(S_n\leq t)=0$;当$t\geq 0$ 时,有

$$P(S_n\leq t)=P(N(t)\geq n)=1-e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

S_n的概率密度函数为

$$f_{S_n}(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}I_{[0,\infty)}(t)$$

特别,当$n=1$时，有

$$P(X_1\leq t)=P(S_1\leq t)=e^{-\lambda t}I_{[1-0,\infty)}(t),$$

即$X_1\sim E(\lambda)$是参数为λ的指数分布. 那么，$X_2,\ldots,X_n,\ldots$又如何呢？它们之间的关系怎样？有如下下定理。

定理 3.2.1 计数过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是泊松分布的充分必要条件是 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布.

证明 先证必要性. 步骤如下:

第一步, 求 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度. 令 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, 取充分小的 $h>0$, 使

$$t_1-\frac{h}{2}<t_1<t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<t_2<t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_{n-1}+\frac{h}{2}<t_n-\frac{h}{2}<t_n<t_n+\frac{h}{2},$$

由

$$\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\leq t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_n-\frac{h}{2}<S_n\leq t_n+\frac{h}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}=\ \ &\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0,N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)-\right.\\ &\left.N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)=0,\cdots,N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)=1\right\}\bigcup H_n,\end{aligned}$$

其中

$$H_n=\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0,N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=\right.$$

$$1, \cdots, N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right) \geq 2\bigg\},$$

得

$$P\bigg\{t_1-\frac{h}{2} \leq S_1 \leq t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2} \leq S_2 \leq t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_n-\frac{h}{2} \leq S_n \leq t_n+\frac{h}{2}\bigg\}$$

$$=(\lambda h)^n e^{-\lambda(t_n+\frac{h}{2})}+o(h^n)=\lambda^n e^{-\lambda t_n} h^n+o(h^n).$$

所以 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合概率密度函数为

$$g(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n}, & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{3.2.2}$$

第二步, 求 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合概率密度. 注意到 $X_n=S_n-S_{n-1}(n \geq 1)$, 令 $x_n=t_n-t_{n-1}$, 则变换的雅可比 (Jacobian) 行列式为

$$J=\frac{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1, \tag{3.2.3}$$

于是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}, & x_i \geq 0,1 \leq i \leq n, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由上可得 X_k 的概率密度为 $f_k(x_k)=\lambda e^{-\lambda x_k}, x_k \geq 0,1 \leq k \leq n$. 于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{k=1}^n f_k(x_k),$$

即证明了 $(X_k, 1 \leq k \leq n)$ $(n \in \mathbf{N})$ 独立同指数分布. 必要性证毕.

下面证明充分性. 设 $\{X_k, k \geq 1\}$ 独立同指数分布. 令 $S_0=0, S_1=X_1, \cdots, S_n=\sum_{k=1}^n X_k$, 对 $\forall t>0$, 定义 $N(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} I_{(S_n \leq t)}$. 由上定义可验证 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是计数过程. 下面仍分三步证明它是泊松过程.

第一步求 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合概率密度及 $N(t)$ 的分布. 注意到证必要性第二步的逆过程仍成立，即由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda x_k},\ x_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq n,$$

经 $S_1=X_1, \cdots, S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ ，可得 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的联合概率密度为

$$g(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n}, & 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由上可得 S_n 的分布为

$$P(S_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right), \tag{3.2.4}$$

故

$$P(N(t)=n) = P(S_n \le t < S_{n+1}) = P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.$$

第二步证平稳性. 这里只写出对 $n \ge 1$ 的证明. 利用全概率公式, 有

$$P(N(s+t)-N(s)=n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s)=k, N(s+t)=k+n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k \le s < S_{k+1} < S_{k+n} \le s+t < S_{k+n+1}) \\
&= P(s < S_1 \le S_n \le s+t < S_{n+1}) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^s P\Bigg(S_k \le s < S_k + X_{k+1} \le \\
&\quad S_k + \sum_{i=1}^{n} X_{k+i} \le s+t < S_k + \sum_{i=1}^{n+1} X_{k+i} \,|\, S_k = u\Bigg) dP(S_k \le u) \\
&= P(s < S_1 \le S_n \le s+t < S_{n+1}) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^s P(s-u < S_1 \le S_n \le s+t-u < S_{n+1}) dP(S_k \le u).
\end{aligned}$$

又由 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，且$\sum_{i=1}^{n+1} dP(S_k \le u) = \lambda du$ (由(3.2.4)直接计算),因此

$$\begin{aligned}
P(s < S_1 \le S_n \le s+t < S_{n+1}) &= \int_s^{s+t} P\Bigg(\sum_{i=2}^{n} X_i \le s+t-v < \\
&\quad \sum_{i=2}^{n+1} X_i \,|\, X_1 = v\Bigg)\lambda e^{-\lambda v} dv \\
&= \int_s^{s+t} P(S_{n-1} \le s+t-v < S_n)\lambda e^{-\lambda v} dv \\
&= \int_s^{s+t} \frac{[\lambda(s+t-v)]^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(s+t-v)}\lambda e^{-\lambda v} dv \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda(s+t)}.
\end{aligned}$$

类似地, 有 $P(s-u < S_1 \le S_n \le s+t-u < S_{n+1}) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(s+t-u)}$, 故

$$\begin{aligned}
P(N(s+t)-N(s)=n) &= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)} + \int_0^s \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(s+t-u)}\lambda du \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)} + \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(s+t)}(e^{\lambda s}-1) \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= P(N(t)=n).
\end{aligned}$$

(注：对 $n=0$ 情形类似证明, 留作读者练习)

第三步证增量独立性. 为突出方法, 这里仅证 $\forall s,t>0$, $N(s)$ 与 $N(s+t)-N(s)$ 相互独立, 即证 $\forall n,m\geq 0$, 有

$$P(N(s)=m,N(s+t)-N(s)=n)=P(N(s)=m)P(N(s+t)-N(s)=n).$$

只写出 $m\geq 1$ 与 $n\geq 1$ 的情形, 其他可类似证之.

$$\begin{aligned}
& P(N(s)=m,N(s+t)-N(s)=n)\\
= \ & P(S_m\leq s<S_{m+1}\leq S_{m+n}\leq s+t<S_{m+n+1})\\
= \ & \int_0^s P\left(s-u<X_{m+1}\leq\sum_{i=1}^{n}X_{m+i}\leq s+t-u\leq\sum_{i=1}^{n+1}X_{m+i}|S_m=u\right)dP(S_m\leq u)\\
= \ & \int_0^s P(s-u\leq S_1\leq S_n\leq s-u+t<S_{n+1})dP(S_m\leq u)\\
= \ & \int_0^s \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(s-u+t)}\lambda\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda u}du\\
= \ & \frac{(\lambda s)^m}{m!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\
= \ & P(N(s)=m)P(N(s+t)-N(s)=n).
\end{aligned}$$

由泊松过程的定义, 知 $\forall t_2>t_1\geq 0$, $N(t_2)-N(t_1)\geq 0$, 即 $N(t_2)\geq N(t_1)$, 说明泊松过程的样本函数 $N(t)$ 是 t 的单调不减函数. 由 $(N(t)=n)=(S_n\leq t<S_{n+1})$ 知 $N(t)$ 是跳跃函数, 即当 $S_n\leq t<S_{n+1}$ 时 $N(t)=n$ 是一常数, 而仅在 $t=S_n(n=1,2,\cdots)$ 处跳跃, 且相邻的两次跳跃时间间隔 $\{X_n,n\geq 1\}$ 相互独立同指数分布 (参数为 $\lambda>0$). 这就为泊松过程的计算机模拟及其统计检验提供了理论基础和方法. 泊松过程的样本函数如图 3.1 所示.

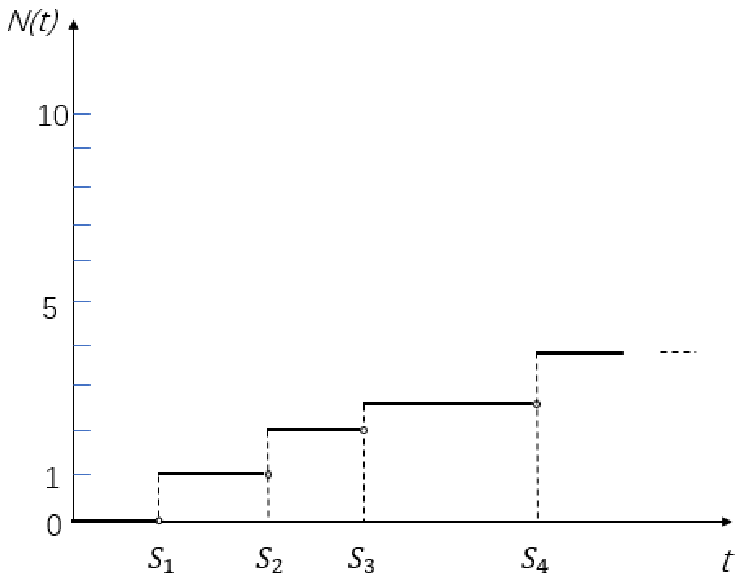

图 3.1

习题

习题 3.2.1 设时齐泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$满足$\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{P[N(t+1) - N(1) = 1]}{t} = \dfrac{1}{2}$, 求下列极限：$\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{P[N(t+1) - N(1) = 2]}{t}$.

习题 3.2.2 设$\{N(t), t \geq 0\}$ 为泊松过程, 参数为λ, 给定 $s \geq 0$,

(a) 计算$cov(N(t), N(s+t))$, 其中 $t \geq 0$;

(b) 计算$E(N(t+s)|N(s))$, 其中 $t \geq 0$;

(c) 证明: 任给$\varepsilon > 0$, 有$\lim\limits_{t \to s^+} P\{N(t) - N(s) > \varepsilon\} = 0$.

习题 3.2.3 设$\{N(t), t \geq 0\}$是泊松过程. 求证对任意的$0 < s < t$, 有

$$P(X_1 \leq s | N(t) = 1) = \frac{s}{t}.$$

习题 3.2.4 设$\{N(t), t \geq 0\}$ 为泊松过程, 任给$0 \leq s < t$, 证明：

$$P(N(s) = k | N(t) = n) = C_n^k (\frac{s}{t})^k (1 - \frac{s}{t})^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n.$$

习题 3.2.5 设$\{N(t), t \geq 0\}$ 为泊松过程, 参数为λ, 求或证明：

(1) $E\{N(t)N(s+t)\}$;

(2) $E(N(t)|N(s+t))$ 及$E(N(s+t)|N(s))$的分布律;

(3) 任给$0 \leq s \leq t$, 有$P\{N(s) \leq N(t)\} = 1$;

(4) 任给$0 \leq s \leq t, \varepsilon > 0$, 有$\lim\limits_{t \to s} P\{N(t) - N(s) > \varepsilon\} = 0$.

§3.3 定义及基本性质

为简化, 本章假定$E=\{0,1,2,\cdots\}$.

定义 3.3.1 称随机过程$\{X_t, t\geq 0\}$为连续时间的马氏链, 若对一切$0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和$i_1,\cdots,i_n\in E$, 若$P(X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})>0$ 有

$$P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}).$$

此链称为齐次的(或时齐的), 如果

$$P(X_t=j|X_s=i)=P(X_{t-s}=j|X_0=i)=:p_{ij}(t-s),$$

对一切$s\leq t, i,j\in E$ 成立. 本章只考虑齐次马氏链.

此时, 记$P(t)=(p_{ij}(t))_{E\times E}$, 并称之为转移概率矩阵(或转移概率函数).

明显, 转移概率矩阵具有如下性质:

(P.1) 非负性, $p_{ij}(t)\geq 0$, 对任意的$i,j\in E, t\geq 0$

(P.2) 范条件: $\sum\limits_{j\in E}p_{ij}(t)=1\ \ \forall t\geq 0$;

(P.3) C-K条件成立: $P(t+s)=P(t)\cdot P(s)$;

(P.4) $P(0)=I$(单位矩阵).

C-K方程证明:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= P(X_{s+t}=j|X_0=i)\\
&= \sum_{k\in E}P(X_s=k,X_{s+t}=j|X_0=i)\\
&= \sum_{k\in E}p_{ik}(s)P(X_{s+t}=j|X_s=k,X_0=i)\\
&= \sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t).
\end{aligned}$$

本章假设下列标准性条件成立:

(P.5) $\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}\ \ \forall i,j\in E$.

定义 3.3.2 称满足条件(1)-(5)的$P(t)$为标准的转移概率矩阵.

定理 3.3.1 设$P(t)$为标准的转移概率矩阵, 则有:

(a) 对任意的$i,j\in E$, $p_{ij}(t)$在$[0,\infty)$上一致连续, 且此式对j也一致成立.

(b) $p_{ii}(t)>0,\ \ \forall t\geq 0, i\in E$.

证明 (a) 由C-K方程, 对任意$t\geq 0, h>0$有:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t) &= \sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)+p_{ii}(h)p_{ij}(t)\\
&= \sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)[1-p_{ii}(h)].
\end{aligned}$$

因此,

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\leq\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\leq\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)=1-p_{ii}(h).$$

及

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t) \geq -p_{ij}(t)[1-p_{ii}(h)] \geq -(1-p_{ii}(h)).$$

从而有:

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| \leq 1-p_{ii}(h).$$

类似地, 当$h<0$时, $(t+h>0)$ 也有:

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| \leq 1-p_{ii}(-h).$$

于是由(P.5)知(a)成立.

(b) 由(P.4)知, $p_{ii}(0)=1>0$. 又由(P.5)知存在 $\delta>0$, 当 $0<s\leq\delta$ 时, $p_{ii}(s)>0$. 又对任意的 t, 存在 n, 使得$\frac{t}{n}\leq\delta$ 有$p_{ii}(t/n)>0$. 再由C-K方程得:

$$p_{ii}(t)=p_{ii}(n\cdot\frac{t}{n}) \geq p_{ii}((n-1)\frac{t}{n})p_{ii}(\frac{t}{n}) \geq (p_{ii}(t/n))^n>0.$$

□

例 3.3.1 Poisson 过程$\{N(t),t\geq 0\}$为连续时间马氏链, 其状态空间为$S=\{0,1,2,\ldots\}$. 事实上, 对任意的$0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$, 及$i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_n\leq i_{n+1}$,

$$\begin{aligned}
& P(N(t_{n+1})=i_{n+1}|N(t_n)=i_n) \\
= \ & P(N(t_{n+1})=i_{n+1},N(t_n)=i_n)/P(N(t_n)=i_n) \\
= \ & P(N(t_n)=i_n,N(t_{n+1})-N(t_n)=i_{n+1}-i_n)/P(N(t_n)=i_n) \\
= \ & P(N(t_{n+1})-N(t_n)=i_{n+1}-i_n).
\end{aligned}$$

另一方面, 由增量独立性, 有

$$\begin{aligned}
& P(N(t_{n+1})=i_{n+1}|N(t_n)=i_n,\cdots,N(t_1)=i_1) \\
=& P(N(t_{n+1})=i_{n+1}|N(t_n)-N(t_{n-1})=i_n-i_{n-1},\cdots,N(t_2)-N(t_1)=i_2-i_1, \\
& N(t_1)=i_1) \\
=& P(N(t_{n+1})-N(t_n)=i_{n+1}-i_n|N(t_n)-N(t_{n-1})=i_n-i_{n-1}, \\
& \ldots,N(t_2)-N(t_1)=i_2-i_1,N(t_1)=i_1) \\
=& P(N(t_{n+1})-N(t_n)=i_{n+1}-i_n).
\end{aligned}$$

从而,

$$P(N(t_{n+1})=i_{n+1}|N(t_n)=i_n,\cdots,N(t_1)=i_1)=P(N(t_{n+1})=i_{n+1}|N(t_n)=i_n).$$

可见, Poisson 过程$\{N(t),t\geq 0\}$ 确为连续时间马氏链, 其转移概率为

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= P\{N(s+t)=j|N(s)=i\} \\
&= P\{N(s+t)-N(s)=j-i\} \\
&= \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & j\geq i\geq 0, \\ 0, & 0\leq j<i, \end{cases}
\end{aligned}$$

其满足标准性条件.

定义 3.3.3　设$\{X_t, t\geq 0\}$为时齐的连续时间马氏链, 任取$h>0$, 令

$$X_n(h)\triangleq X_{nh},\ \ n=0,1,2,\cdots$$

则称$\{X_n(h), n=0,1,\cdots\}$为以h为步长的$h-$ 离散骨架, 简称为$h-$骨架.

下面说明$h-$骨架$\{X_n(h), n=0,1,\cdots\}$为离散时间马氏链且它的转移矩阵为$P(h)$:

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1}(h)=i_{n+1}|X_1(h)=i_1,\cdots,X_n(h)=i_n)\\
= & P(X_{(n+1)h}=i_{n+1}|X_h=i_1,\cdots,X_{nh}=i_n)\\
= & P(X_{(n+1)h}=i_{n+1}|X_{nh}=i_n)\\
= & p_{i_n,i_{n+1}}(h)\\
= & P(X_{(n+1)}(h)=i_{n+1}|X_n(h)=i_n).
\end{aligned}$$

由定理3.3.1(b)知, 任何$h-$骨架的每个状态均是非周期的. 因此, 由定理2.5.1(b)知极限$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(nh)$总存在.

同样, 对于标准的连续时间马氏链, 就无需引入周期的概念, 且有下列结论:

定理 3.3.2　设$P(t)$是标准的转移概率矩阵, 则有: 对一切$i,j\in E$, $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=:\pi_{ij}$总存在.

证明　$\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim_{t\to 0}p_{ii}(t)=1$ 知, 存在 $\delta>0$, 使得 $|p_{ii}(t)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$, 对任意的 $0<t<\delta$成立. 又因 $\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n\delta)$ 存在, 不妨记为 $\pi_{ij}(\delta)$. 因此存在 N, 使得当$n\geq N$时有 $|p_{ij}(n\delta)-\pi_{ij}(\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 对任意的$t>\delta$有 $\frac{t}{\delta}-1\leq[\frac{t}{\delta}]\leq[\frac{t}{\delta}]+1$. 当$t\geq\delta N+1$时, 有 $[\frac{t}{\delta}]\geq N$ 且$t-\delta[\frac{t}{\delta}]\leq\delta$, 故

$$\begin{aligned}
|p_{ij}(t)-\pi_{ij}(\delta)| &\leq |p_{ij}(t)-p_{ij}(\delta[\frac{t}{\delta}])|+|p_{ij}(\delta[\frac{t}{\delta}])-\pi_{ij}(\delta)|\\
&\leq 1-p_{ii}(t-\delta[\frac{t}{\delta}])+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

习题

习题 3.3.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为参数为 λ的Possion 过程,

1) 求 $\{N(t), t \geq 0\}$的转移概率函数 $P_{ij}(t)$,

2) 直接验证 $(P_{ij}(t))$具有性质(P.1)-(P.5).

习题 3.3.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, 过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 定义为 $\{X(t) = 1\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(N(t) = 2n)$, $\{X(t) = 0\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(N(t) = 2n+1)$, 试证 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为马氏链, 并求 $\mathbf{P}(t)$.

习题 3.3.3 设X_t表示时间$[0,t]$中某保险公司的某类事故的累积次数，$\{X_t : t \geq 0\}$是服从参数为$\lambda > 0$ 的Poisson过程。假定各次申报的事故的赔偿费是独立同分布的离散型随机量列：$Y_1, Y_2, \cdots$, 并与申报次数独立，记$f(k) = P(Y_1 = k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 则到t时保险公司的事故赔偿费为$Z_t = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{X_t}$. 求证:

(a) ($\{Z_t : t \geq 0\}$ 是马氏链；

(b) 写出其转移概率函数和Q-距阵。

§3.4 Q-矩阵及其概率意义

在离散时间马氏链中, 我们知道由一步转移概率矩阵$P=(p_{ij})$ 可以完全确定n 步转移阵, 即$P^{(n)}=P^n=e^{n\ln P}$. 那么对连续时间的马氏链, 是否有类似的表达式呢, 即$P(t)=e^{tQ}$呢? 其中, Q为与t 无关的实数矩阵. 如果此式成立, 则有

$$P'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{P(t)-P(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{tQ}-I}{t}=Q.$$

这就提示我们先要研究$P(t)$在$t=0$的导数是否存在的问题, 并有如下肯定的回答.

先看一个简单的例子:

例 3.4.1 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为时齐泊松过程, 参数为 λ, 则有

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= P\{N(s+t)=j|N(s)=i\}\\
&= P\{N(s+t)-N(s)=j-i\}\\
&= \begin{cases}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & j\geq i\geq 0\\ 0, & 0\leq j<i\end{cases}
\end{aligned}$$

故

$$p'_{ij}(0)=\begin{cases}-\lambda, & j=i\geq 0,\\ \lambda, & j=i+1, i\geq 0,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

定理 3.4.1 设 $P(t)$为标准转移概率矩阵, 则对任何$i\in E$, 极限$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=-q_{ii}$ 总存在, 但可能是无穷. 记$q_i\triangleq -q_{ii}\geq 0$.

证明 因对任意的$t\geq 0$, 有 $p_{ii}(t)>0$. 令 $\phi(t):=-\ln p_{ii}(t)>0$, 则有 $\phi(s+t)=-\ln p_{ii}(t+s)\leq -\ln p_{ii}(t)-\ln p_{ii}(s)\leq \phi(s)+\phi(t)$. 令 $q_i:=\sup\limits_{t>0}\frac{\phi(t)}{t}$. 对任意的 $t>0$, $t>h>0$, 存在正整数 $n(h)$和 $h>\varepsilon\geq 0$, 使得 $t=nh+\varepsilon$, 则有

$$\frac{\phi(t)}{t}=\frac{\phi(nh+\varepsilon)}{t}\leq\frac{\phi(nh)}{t}+\frac{\phi(\varepsilon)}{t}\leq\frac{nh}{t}\frac{\phi(h)}{h}+\frac{\phi(\varepsilon)}{t}.$$

令 $h\to 0$, 则有 $\varepsilon\to 0$, 从而 $\phi(\varepsilon)\to 0$, $\frac{nh}{t}\to 1$. 故

$$\frac{\phi(t)}{t}\leq\liminf_{h\to 0}\left(\frac{hn}{t}\frac{\phi(h)}{h}+\frac{\phi(\varepsilon)}{t}\right)\leq\liminf_{h\to 0}\frac{\phi(h)}{h}=\liminf_{t\to 0}\frac{\phi(t)}{t},$$

进而有$q_i\leq\liminf\limits_{t\to 0}\frac{\phi(t)}{t}$, 于是有 $q_i=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\phi(t)}{t}$. 再由 $\phi(t)$的定义以及 $\lim\limits_{t\to 0}\phi(t)=0$得 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-e^{-\phi(t)}}{\phi(t)}\frac{\phi(t)}{t}=q_i$. □

定理 3.4.2 设 $P(t)$为标准转移概率矩阵, 则对任何$i\neq j$, 极限

$$q_{ij}=p'_{ij}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}$$

存在且有限.

证明 由标准性条件及定理3.3.1和标准性条件P.5, 对任意$0<\varepsilon<\frac{1}{3}$, 存在 $0<\delta<1$, 使得当$0<t\le\delta$时, 有$p_{ii}(t)>1-\varepsilon, p_{jj}(t)>1-\varepsilon, p_{ji}(t)<\varepsilon$. 下面要证: 对任意 $0\le h<t$, 只要 $t\le\delta$, 则有

$$p_{ij}(h)\le\frac{p_{ij}(t)}{n}\frac{1}{1-3\varepsilon}, \tag{3.4.1}$$

其中 $n=[\frac{t}{h}]$ (即 n为不超过 $\frac{t}{h}$ 的最大整数). 记

$$\begin{cases} {}_jp_{ik}(h)=p_{ik}(h)\\ {}_jp_{ik}(mh):=\sum_{r\neq j}{}_jp_{ir}((m-1)h)p_{rk}(h).\end{cases}$$

其中 ${}_jp_{ik}(mh)$表示从 i 出发, 在时刻 $h,2h,\cdots,(m-1)h$ 未到达 j 且在 mh 时刻到达 k的概率. 注意到

$$\begin{aligned}P(X_t=j|X_0=i) &= P(X_h=j,X_t=j|X_0=i)+P(X_h\neq j,X_t=j|X_0=i)\\ &= {}_jp_{ij}(h)p_{jj}(t-h)+P(X_h\neq j,X_t=j|X_0=i)\\ &= {}_jp_{ij}(h)p_{jj}(t-h)+{}_jp_{ij}(2h)p_{jj}(t-2h)+P(X_h\neq j,X_{2h}\neq j,X_t=j|X_0=i)\\ &= \cdots\cdots\\ &= \sum_{m=1}^{n}{}_jp_{ij}(mh)p_{jj}(t-mh)\end{aligned}$$

这样，当 $h<t\le\delta$时, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon>1-p_{ii}(t) &= \sum_{k\neq i}p_{ik}(t)\\ &\ge p_{ij}(t)\\ &= \sum_{m=1}^{n}{}_jp_{ij}(mh)p_{jj}(t-mh)\\ &\ge (1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}{}_jp_{ij}(mh),\end{aligned}$$

从而,

$$\sum_{m=1}^{n}{}_jp_{ij}(mh)\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

又由

$$p_{ii}(mh)={}_jp_{ii}(mh)+\sum_{l=1}^{m-1}{}_jp_{ij}(lh)p_{ji}((m-l)h),$$

得

$${}_jp_{ii}(mh)\ge p_{ii}(mh)-\sum_{l=1}^{m-1}{}_jp_{ij}(lh)\ge1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

再由${}_jp_{ik}(mh)\ge{}_jp_{ii}((m-1)h)p_{ik}(h))$可得

$$p_{ij}(t)\ \ge\ \sum_{m=1}^{n}{}_jp_{ii}((m-1)h)p_{ij}(h)p_{jj}(t-mh)$$

$$\begin{aligned}&\geq n(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})p_{ij}(h)(1-\varepsilon)\\&\geq n(1-3\varepsilon)p_{ij}(h).\end{aligned}$$

式(3.4.1)的证. (3.4.1)式两边除以 h(当 $h\to 0$时, $nh\to t$), 得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leq\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p_{ij}(t)}{t}<\infty.$$

再令 $t\to 0$时, 有

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leq\frac{1}{1-3\varepsilon}\underline{\lim_{t\to 0}}\frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

再令 $\varepsilon\to 0$,定理得证. □

推论 3.4.1 对上述 $Q:=(q_{ij})_{E\times E}=(p'_{ij}(0))_{E\times E}$, 有

(a) $0\leq\sum_{j\neq i}q_{ij}\leq q_i\leq+\infty,\forall i\in E.$

(b)当E 有限时, $\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i$.

证明 (a) 对任意的 $i\in E$, 因 $\sum\limits_{j\in E}p_{ij}(t)=1$,

$$\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t},\tag{3.4.2}$$

故有

$$q_i=\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}\geq\sum_{j\neq i}\liminf_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\sum_{j\neq i}q_{ij}.$$

(b) 因 E有限, 在上(3.4.2) 中取极限即得. □

定义 3.4.1 对上述 $Q:=(p'_{ij}(0))_{E\times E}$，称 Q为 $P(t)$)(或相应连续时间马氏链$\{X_t,t\geq 0\}$) 的转移率矩阵(或密度矩阵). 若 $\sum\limits_{j\in E,j\neq i}q_{ij}=q_i<\infty$ $(i\in E)$, 则称 $Q=(q_{ij})$为保守且全稳定的.

下面解释$Q=(q_{ij})$ 的概率意义. 令

$$\tau_1=\inf\{t\geq 0:\ X_t\neq X_0\}.$$

τ_1 表示逗留在初始状态 X_0的时间.

注: 若马氏链$\{X_t,t\geq 0\}$ 的 $P(t)$是标准的, 则不妨可设轨道 X_t 是右连续的(即可以找到一个样本轨道是右连续的连续时间马氏链Y_t, 使得对任意的 t有 X_t与 Y_t 几乎处处相等)；详见参考文献[1]或后续的定理3.6.3.

定理 3.4.3 ($Q-$矩阵的概率意义.) 设标准的转移概率矩阵$P(t)$的转移率矩阵为$Q=(q_{ij})_{E\times E}$. 则有对任意的$i\in E,t>0$, 有 $P(\tau_1>t|X_0=i)=e^{-q_i\cdot t}$.

证明 因$\{\tau_1>t,X_0=i\}=\{X_s=i,s\leq t\}$, 于是有:

$$\begin{aligned}P(\tau_1>t|X_0=i)&=P(X_s=i,0\leq s\leq t|X_0=i)\\&=\lim_{n\to\infty}P(X_{kt/2^n}=i:\ k=0,1,\cdots,2^n|X_0=i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}(p_{ii}(t/2^n))^{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{q_i t}{2^n}+o(2^{-n}))^{2^n} \\
&= e^{-q_i t}.
\end{aligned}$$

□

从上面的定理看出在$X(0)=i$ 状态的逗留时间 τ_1 是服从参数为 q_i的指数分布, 并且

$$E[\tau_1|X_0=i]=q_i^{-1}.$$

根据 q_i 不同的取值, 我们可以分为下面3 中情形:

1) 若 $q_i=0$, 则有

(a) $E[\tau_1|X_0=i]=+\infty$.

(b) $P(\tau_1=\infty|X_0=i)=\lim\limits_{t\to\infty}P(\tau_1>t|X_0=i)=1$, 即从 i 出发, 过程以概率1永远停留在 i状态.

2) 若 $q_i=+\infty$, 则有$P(\tau_1=0|X_0=i)=\lim\limits_{n\to\infty}P(\tau_1\le\frac{1}{n}|X_0=i)=1$. 从而对任何 $t>0$, $P(\tau_1\ge t|X_0=i)=0$, 表明在状态 i几乎不停留立即跳到别的状态.

3) $0<q_i<\infty$, 这时过程停留在状态 i, 若干时间后跳到别的状态, 停留时间服从指数分布.

定理 3.4.4 在定理3.4.2 的条件下, 若 $q_i\in(0,\infty)$. 则对任意的 $t\ge0$, $j(\ne i)\in E$, 有

$$P(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j|X_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_i t}),$$

进而有

$$P(X_{\tau_1}=j|X_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}.$$

证明 对任意的$n\ge1$, 令$A_n:=\bigcup\limits_{1\le k\le 2^n}\{X_{\frac{vt}{2^n}}=i, 0\le v<k, X_{\frac{kt}{2^n}}=j\}$, $A:=\{\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j\}$. 则有$A_n\supseteq A$对一切$n\ge1$成立. 另外，由

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}P(A_n|X_0=i) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}P(X_{\frac{v}{2^n}t}=i, 1\le v<k, X_{\frac{k}{2^n}t}=j|X_0=i) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}(p_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{k-1}p_{ij}(\frac{t}{2^n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1-(p_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{2^n}}{1-p_{ii}(\frac{t}{2^n})}p_{ij}(\frac{t}{2^n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}[1-(p_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{2^n}]\frac{p_{ij}(\frac{t}{2^n})/\frac{t}{2^n}}{\frac{1-p_{ii}(\frac{t}{2^n})}{\frac{t}{2^n}}} \\
&= (1-e^{-q_i t})\frac{q_{ij}}{q_i}
\end{aligned}$$

可得

$$P(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j|X_0=i)\le(1-e^{-q_i t})\frac{q_{ij}}{q_i}. \tag{3.4.3}$$

若存在$t>0, i,j\in E$ 使得$P(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j|X_0=i)<(1-e^{-q_it})\frac{q_{ij}}{q_i}$. 则,由(3.4.3)式得

$$P(\tau_1\le t|X_0=i)=\sum_{k\in E,k\neq i}P(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=k|X_0=i)<(1-e^{-q_it})\frac{\sum_{k\neq i}q_{ik}}{q_i}\le 1-e^{-q_it}.$$

这与定理3.4.3矛盾. 因此，$P(\tau_1\le t, X_{\tau_1}=j|X_0=i)=(1-e^{-q_it})\frac{q_{ij}}{q_i}$.

b) 在$X_0=i$ 的条件下, r.v. τ_1 与X_{τ_1} 是独立的. □

以下是一些例子.

例 3.4.2 (文献[4] P101 例4.2 Poisson 过程) 用$X(t)$ 表示在一个速率为λ的Poisson过程中, 直到时刻t为止的到达数. 由于在Poisson过程中到达发生的速率为λ, 因此$X(t)$ 从n增加到$n+1$ 的速率为λ, 用符号表示为：对任意$n\ge 0$, 都有$q_{n,n+1}=\lambda$.

例 3.4.3 (文献[4] P101 例4.3 M/M/s 排队系统) 想象一家银行有$s\le\infty$个柜员, 若所有的柜员都在工作中, 则顾客将排成一队等待. 假设顾客按照速率为λ的Poisson过程到达, 且每位顾客的服务时间相互独立, 服从速率为μ的指数分布. 同上例一样, $q_{n,n+1}=\lambda$. 为了描述离去的顾客数, 令

$$q_{n,n-1}=\begin{cases} n\mu, & 0\le n\le s,\\ s\mu, & n\ge s.\end{cases}$$

为解释此结果, 注意当系统中有$n\le s$名顾客时, 他们都在接受服务, 离开的速率是$n\mu$. 当$n>s$时, 所有s个柜员都在工作, 顾客离开的速率是$s\mu$.

例 3.4.4 (文献[4] P102 例4.4 分支过程) 在这个系统中每个个体死亡的概率为μ, 生育一个新个体的速率为μ, 因此有: $q_{n,n+1}=\lambda n$, $q_{n,n-1}=\mu n$. 当$\mu=0$时, 它是一个特殊情形, 称为Yule 过程.

习题

习题 3.4.1 证明定理3.4.2.

习题 3.4.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, 过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 定义为 $\{X(t) = 1\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(N(t) = 2n)$, $\{X(t) = 0\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(N(t) = 2n+1)$, 试证 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为马氏链, 并求 $P(t)$ 与 $Q = (q_{ij})$.

习题 3.4.3 设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ_i 的泊松过程且相互独立$(i = 1, 2)$. $X(t) = N_1(t) - N_2(t)$, $P_n(t) = P(X(t) = n)$, $n \in \mathbb{N} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, $T_i = \inf\{t : t > 0, N_i(t) = k\}$. 试证

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(t) z^n = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot e^{(\lambda_1 z + \lambda_2/z)t},$$

并求 $E[X(t)]$, $E(X(t)^2)$ 及 $P(T_1 < T_2 | N_1(0) = N_2(0) = 0)$.

习题 3.4.4 设轨道右连续的连续时间齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间为$E = \{1, 2, 3\}$,其转移率矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \\ 5 & 6 & -11 \end{pmatrix},$$

令$\tau_1 := \inf\{t > 0 | X(t) \neq X(0)\}$,求$P(\tau_1 < 4, X(\tau_1) = 2 | X(0) = 1)$.

§3.5 Kolmogorov 向前向后方程

这节考虑如何由转移率矩阵$Q=(q_{ij})_{E\times E}$确定转移概率矩阵$P(t)=(p_{ij}(t))_{E\times E}$.

定义 3.5.1 一个矩阵$Q=(q_{ij})_{E\times E}$称为$Q-$矩阵, 如果它满足

(1) $q_i:=-q_{ii}\in[0,\infty]$;

(2) $0\le q_{ij}<\infty(\forall i\neq j)$,

(3) $\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}\le q_i, i\in E$.

进一步，称 Q矩阵为保守且全稳定的, 若$\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}=q_i<\infty$ 对所有 $i\in E$成立.

定义 3.5.2 对给定的 Q-矩阵 $(q_{ij})_{E\times E}$, 若有马氏链 $\{X_t, t\ge 0\}$ 的转移概率矩阵 $P(t))$ 满足 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$ $(\forall i,j\in E)$, 则称马氏链$\{X_t,t\ge 0\}$(或转移概率矩阵 $P(t)$) 为 Q-过程.

定理 3.5.1 设马氏链 $\{X_t,t\ge 0\}$ 的转移概率矩阵$P(t)$ 是标准的. 记 $Q:=(p'_{ij}(0))_{E\times E}$. 如果 E有限, 则下列向后向前方程成立：

向后方程: $P'(t)=QP(t)$;

向前方程: $P'(t)=P(t)Q$.

证明 由C-K方程$P(t+h)=P(t)P(h)$可知

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h}=\frac{P(t)(P(h)-I)}{h}. \tag{3.5.1}$$

上式中令 $h\to 0$, 有 $P'(t)=P(t)Q$. □

若状态空间 E为一般的可数空间, 则类似(3.5.1), 可得

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)-\delta_{kj}}{h},$$

则两边取下极限, 有

$$p'_{ij}(t)\ge\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj},\ \text{即}P'(t)\ge P(t)Q.$$

同理

$$P'(t)\ge QP(t).$$

故对一般的可数空间, 向前向后方程未必成立.

但对一般的可数空间, 我们有如下命题.

定理 3.5.2 设 $P(t)$ 为标准的转移概率函数. 若 $Q=(p'_{ij}(0))_{E\times E}$ 是全稳定的且保守的, 则有 $P'(t)=QP(t)$ 对任意的 $t\ge 0$成立, 即向后方程成立.

在给出证明之前, 先要下面的引理.

引理 3.5.1 设 $f(t)$ 在 (a,b) 上连续且在 (a,b) 上有连续的右导数, 则 $f(t)$在 (a,b) 上可导.

定理3.5.2证明

证明 对任意的 $i, j \in E$,

$$\sum_{k\in E}|q_{ik}p_{kj}(t)| \le \sum_{k\in E}|q_{ik}| \le 2|q_{ii}| < \infty.$$

从而 $\sum_{k\in E} q_{ik}p_{kj}(t)$在 $(0,\infty)$上一致收敛, 故关于 $t \in (0,\infty)$ 连续. 另外, 由C-K 方程, 当 $h > 0$,

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \frac{1}{h}(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t). \tag{3.5.2}$$

由Fatau 引理,

$$\underline{\lim}_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) \ge \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t). \tag{3.5.3}$$

令一方面, 对任意的 $i \in E$, 令 $N > i$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{h\to 0^+}}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\\
\le\ &\overline{\lim_{h\to 0^+}}\sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) + \sum_{k\ge N}\frac{p_{ik}(h)}{h}\\
=\ &\overline{\lim_{h\to 0^+}}\sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) + \frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}\\
=\ &\sum_{k\neq i,k<N} q_{ik}p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k\neq i,k<N} q_{ik},
\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$, 由保守性得

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) \le \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t). \tag{3.5.4}$$

由(3.5.3) 和(3.5.4)得

$$\lim_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t),$$

在由(3.5.2) 得

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k} q_{ik}p_{kj}(t).$$

□

综上, a) E 有限时, $P'(t) = QP(t)$,

b) 当 E 可列时,在一定条件下有$P'(t) = QP(t)$.

然而, 并非$Q-$过程均满足向前方程. 因此, 向前、向后方程的地位并不平等. 在进一步深入之前, 我们说明这两个方程的等价形式. 即向后方程:$P'(t) = QP(t)$, 向前方程:$P'(t) = P(t)Q$, 分别等价于下面两个积分方程(留作业):

向后方程: $p_{ij}(t) = \sum\limits_{k\neq i}\int_0^t q_{ik}e^{-q_i(t-s)}p_{kj}(s)ds + e^{-q_it}\delta_{ij}$.

向前方程: $p_{ij}(t) = \sum\limits_{k\neq j}\int_0^t p_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t-s)} + \delta_{ij}e^{-q_it}$.

这两个积分方程都有很好的概率意义, 详情如下:

向后方程是过程 " 第一次跳的分解 " : 首先, $e^{-q_i t} = P(X_s = i, 0 \le s \le t | X_0 = i) = P(X_s$ 在$[0,t]$ 内不跳$|X_0 = i)$. 如果$q_i \neq 0$, 则在$[0,t]$内必有跳. 而由定理3.4.3 知, $q_i e^{-q_i s}$为在$[0,t]$内不跳的概率密度, q_{ik}/q_i为从i跳至k的概率; $p_{kj}(t-s)$为从k出发, 再经过$t-s$长的时间到达j. 因此有:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= \int_0^t q_i e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} p_{kj}(t-s) ds + \delta_{ij} e^{-q_i t} \\
&= \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} p_{kj}(s) ds + \delta_{ij} e^{-q_i t}.
\end{aligned}
$$

对于向前方程, 由过程关于"t之前最后一次跳的分解"可得:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= \sum_{k \neq j} \int_0^t P(X_s = k, X_{s+ds} = j, \text{在}[s+ds,t]\text{内无跳}|X_0 = i) + \delta_{ij} e^{-q_i t} \\
&= \sum_{k \neq j} \int_0^t P(\text{在}[s+ds,t]\text{内无跳}|X_0 = i, X_s = k, X_{s+ds} = j) \\
&\quad \cdot P(x_{s+ds} = j | X_0 = i, X_s = k) P(X_s = k | X_0 = i) + \delta_{ij} e^{-q_i t} \\
&= \sum_{k \neq j} \int_0^t e^{-q_j(t-s)} p_{kj}(ds) p_{ik}(s) + \delta_{ij} e^{-q_i t} \\
&= \sum_{k \neq j} \int_0^t e^{-q_j(t-s)} q_{kj} p_{ik}(s) ds + \delta_{ij} e^{-q_i t} \quad (\text{因} p_{kj}(ds) = q_{kj} ds).
\end{aligned}
$$

为了解释Kolmogorov 方程的应用, 我们将考虑一些例子, 其中最简单的例子是Poisson过程.

例 3.5.1 (文献[4] P105 例4.7 Poisson 过程) 令$X(t)$ 表示在一个速率为λ的Poisson过程中, 直到时刻t为止的到达数. 为了从时刻s的i个到达到时刻$t+s$的j个到达, 必然有$j \ge i$, 且在t 单位时间内恰好有$j-i$个到达, 于是有

$$
p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}. \tag{3.5.5}
$$

为了验证微分方程, 我们首先搞清楚它是什么. 应用分量形式的向后方程, 将速率代人, 有

$$
p'_{ij}(t) = \lambda p_{i+1,j}(t) - \lambda p_{ij}(t).
$$

为了验证它, 我们需要对式(3.5.5)求导.

当$j > i$时, 式(3.5.5) 的求导结果为

$$
p'_{ij}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!} = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t).
$$

当$j = i$时, $p_{ii}(t) = e^{-\lambda t}$, 从而导数为

$$
p'_{ii}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda p_{ii}(t) = -\lambda p_{ii}(t) + \lambda p_{i+1,i}(t),
$$

其中, $p_{i+1,i}(t) = 0$.

第二个简单的例子如下.

例 3.5.2 (文献[4] P105 例4.8 两状态链) 为具体起见,我们可以假设状态空间是$\{1,2\}$. 在这种情况下,仅有两个转移速率$q_{12}=\lambda$ 和$q_{21}=\mu$,因此转移速率矩阵为

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

写出向后方程的矩阵形式,则有

$$\begin{pmatrix}p'_{11}(t) & p'_{12}(t)\\ p'_{21}(t) & p'_{22}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{pmatrix}.$$

因为$p_{i2}(t)=1-p_{i1}(t)$,所以只需计算$p_{i1}(t)$. 计算对右边矩阵第一列的乘积,有

$$\begin{aligned}p'_{11}(t)&=-\lambda p_{11}(t)+\lambda p_{21}(t)=-\lambda(p_{11}(t)-p_{21}(t)),\\ p'_{21}(t)&=\mu p_{11}(t)-\mu p_{21}(t)=\mu((p_{11}(t)-p_{21}(t))).\end{aligned}\tag{3.5.6}$$

所以$\mu p'_{11}(t)+\lambda p'_{21}(t)=0$. 又因(初始条件)$p_{11}(0)=1,p_{21}(0)=0$,故$\mu p_{11}(t)-\mu+\lambda p_{21}(t)=0$,于是,$p'_{11}(t)+(\lambda+\mu)p_{11}(t)=\mu$. 利用常数变易法得

$$p_{11}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

从而

$$p_{12}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

同理,可得

$$\begin{aligned}p_{21}(t)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},\\ p_{22}(t)&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.\end{aligned}$$

§3.6 Q-过程的存在与唯一性

定理 3.6.1 设 $Q=(q_{ij})_{E\times E}$ 为全稳定且保守的 Q-矩阵. 对任意的 $i,j\in E,t\geq 0$, 归纳定义

$$p_{ij}^{(0)}(t):=\delta_{ij}\ \ e^{q_{ii}t},\tag{3.6.1}$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(t):=\int_0^t\sum_{k\neq i}\ e^{q_{ii}s}q_{ik}p_{kj}^{(n)}(t-s)ds\ \ \forall n\geq 0.\tag{3.6.2}$$

$$p_{ij}^{min}(t):=\sum_{n=0}^{\infty}\ p_{ij}^{(n)}(t).\tag{3.6.3}$$

类似,对任意的 $i,j\in E,t\geq 0$, 归纳定义

$$q_{ij}^{(0)}(t):=\delta_{ij}\ \ e^{q_{ii}t},\tag{3.6.4}$$

$$q_{ij}^{(n+1)}(t):=\int_0^t\sum_{k\neq j}e^{q_{jj}s}q_{ik}^{(n)}(t-s)\ q_{kj}ds\ \ \forall n\geq 0.\tag{3.6.5}$$

$$q_{ij}^{min}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)}(t). \tag{3.6.6}$$

则有对任意的 $i, j \in E, t \geq 0$

(a) $p_{ij}^{(n)}(t) = q_{ij}^{(n)}(t)$ for all $n \geq 0$,

(b) $p_{ij}^{min}(t) = q_{ij}^{min}(t)$

(c) $p_{ij}^{min}(t) = \int_0^t \sum\limits_{k\in E} p_{ik}^{min}(s) q_{kj} ds + \delta_{ij}$; $p_{ij}^{min}(t) = \int_0^t \sum\limits_{k\in S} q_{ik} p_{kj}^{min}(s) ds + \delta_{ij}$.

(d) $\frac{dp_{ij}^{min}(t)}{dt}|_{t=0} = Q$, 且

(d-1) $p_{ij}^{min}(t) \geq 0, \sum_{j\in E} p_{ij}^{min}(t) \leq 1$,

(d-2) $p_{ij}^{min}(s+t) = \sum_{k\in E} p_{ik}^{min}(s) p_{kj}^{min}(t)$,

(d-3) $\lim_{t\to 0} p_{ij}^{min}(t) = \delta_{ij} = p_{ij}^{min}(0)$.

证明 (a) 用归纳法验证: 当$n = 0$时，明显成立。且

$$\begin{aligned}
q_{ij}^{(1)}(t) &= \int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_{jj}s} \delta_{ik} e^{q_{ii}(t-s)} q_{kj} ds \\
&= (1-\delta_{ij}) \int_0^t e^{q_{ii}(t-s)} q_{ij} e^{q_{jj}s} ds \\
&= \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{q_{ii}(t-s)} q_{ik} \delta_{kj} e^{q_{kk}s} ds \\
&= p_{ij}^{(1)}(t)
\end{aligned}$$

假设$p_{ij}^{(k)}(t) = q_{ij}^{(k)}(t)$ 对$0 \leq k \leq n$以及$i, j \in E$成立.由归纳假设，

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n+1)}(t) &= \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{q_{ii}(t-s)} q_{ik} q_{kj}^{(n)}(s) ds \\
&= \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{q_{ii}(t-s)} q_{ik} \left(\int_0^s \sum_{l\neq j} e^{q_{jj}u} q_{kl}^{(n-1)}(s-u) q_{lj} du \right) ds \\
&= \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{q_{ii}(t-s)} q_{ik} \left(\int_0^s \sum_{l\neq j} e^{q_{jj}u} p_{kl}^{(n-1)}(s-u) q_{lj} du \right) ds \\
&= \int_0^t \sum_{l\neq j} e^{q_{jj}u} q_{lj} \left(\int_u^t \sum_{k\neq i} e^{q_{ii}(t-s)} q_{ik} p_{kl}^{(n-1)}(s-u) ds \right) du \\
&= \int_0^t \sum_{l\neq j} e^{q_{jj}u} q_{lj} \left(\int_0^{t-u} \sum_{k\neq i} e^{q_{ii}(t-u-v)} q_{ik} p_{kl}^{(n-1)}(v) dv \right) du \\
&= \int_0^t \sum_{l\neq j} e^{q_{jj}u} q_{lj} p_{il}^{(n)}(t-u) du \\
&= \int_0^t \sum_{l\neq j} e^{q_{jj}u} q_{il}^{(n)}(t-u) q_{lj} du
\end{aligned}$$

$$= \quad q_{ij}^{(n+1)}(t).$$

因此，(a) 成立。

(b). 明显的，由(a)即知(b)成立。

(c). 因$p_{ij}^{min}(t) = q_{ij}^{min}(t)$(由(a)), 利用(3.6.1)-(3.6.3)及(3.6.5)可得：

$$p_{ij}^{min}(t) = \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{-q_i(t-s)} q_{ik} p_{kj}^{min}(s)ds + \delta_{ij}e^{-q_i t}. \tag{3.6.7}$$

于是，

$$(p_{ij}^{min})'(t) = \sum_{k\in E} q_{ik} p_{kj}^{min}(t). \tag{3.6.8}$$

另外，由$q_{ij}^{(n+1)}(t)$的定义可得：

$$e^{q_j t} q_{ij}^{(n+1)}(t) = \int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_j s} q_{ik}^{(n)}(s) q_{kj} ds$$

从而有

$$e^{q_j t} q_{ij}^{min}(t) - \delta_{ij} = \int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_j s} q_{ik}^{min}(s) q_{kj} ds$$

于是有

$$(q_{ij}^{min})'(t) = \sum_{k\in E} q_{ik}^{min}(t) q_{kj}.$$

因此，

$$q_{ij}^{min}(t) = \int_0^t \sum_{k\in E} q_{ik}^{min}(s) q_{kj} ds + \delta_{ij}.$$

这样，结合(b)和(3.6.8)即知(c)成立。

(d) 由(c)易知$(p_{ij}^{min})'(0) = Q$且$(d-3)$成立.下面用归纳法证明$(d-1)$. 对任意给定$i \in E, t \geq 0$, 明显地$\sum_{j\in E} p_{ij}^{(0)}(t) = e^{-q_i t} \leq 1$. 假设$\sum_{j\in S}\sum_{n=0}^{k} p_{ij}^{(n)}(t) \leq 1$ 对$t \geq 0$成立. 从而有

$$\begin{aligned} \sum_{j\in S}\sum_{n=0}^{k+1} p_{ij}^{(n)}(t) &= \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{q_i s} q_{ik} \sum_{j\in S}\sum_{n=0}^{k} p_{kj}^{(n)}(t-s)ds + e^{-q_i t} \\ &\leq \int_0^t \sum_{k\neq i} e^{q_i s} q_{ik} ds + e^{-q_i t} = 1 \end{aligned}$$

因此，$\sum_{j\in S}\sum_{n=0}^{k} p_{ij}^{(n)}(t) \leq 1$ 任意$k \geq 1$成立, 从而有$\sum_{j\in E} p_{ij}^{min}(t) \leq 1$, 即$(d-1)$得证。

下为简化$(d-2)$的证明，引入下列记号：$\Delta(t) := diag(e^{-q_i t}, i \in E)$(对角阵),$D_q := diag(q_i, i \in E), B := Q + D_q, P^{(n)}(t) := (p_{ij}^{(n)}(t))_{E\times E}$. 下面证明

$$P^{(n)}(s+t) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(s) P^{(n-k)}(t), \quad n \geq 0, s, t \geq 0. \tag{3.6.9}$$

显然，(3.6.9)对$n=0$成立.设(3.6.9)对$n\geq 1$成立，于是有

$$\begin{aligned}P^{(n+1)}(s+t) &= \int_0^{s+t}\Delta(s+t-u)BP^{(n)}(u)du\\ &= \int_0^{t}\Delta(s)\Delta(t-u)BP^{(n)}(u)du+\int_t^{s+t}\Delta(s)\Delta(t-u)BP^{(n)}(u)du\\ &= P^{(0)}(s)P^{(n+1)}(t)+\int_0^{s}\Delta(s)\Delta(-v)BP^{(n)}(v+t))dv\\ &= P^{(0)}(s)P^{(n+1)}(t)+\sum_{k=0}^{n}\int_0^{s}\Delta(s-v)BP^{(k)}(v)P^{(n-k)}(t)dv\\ &= P^{(0)}(s)P^{(n+1)}(t)+\sum_{k=0}^{n}P^{(k+1)}(v)P^{((n+1)-(k+1))}(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}P^{(k)}(v)P^{(n+1-k)}(t).\end{aligned}$$

于是(3.6.9)得证，从而有

$$P(s+t)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(s+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(s)P^{(n-k)}(t)=P(s)P(t).$$

□

推论 3.6.1 设 Q为全稳定且保守的 Q-矩阵,$P^{min}(t):=(p_{ij}^{\min}(t))_{E\times E}$由(3.6.3)构造. 则$(P^{\min}(t))$满足向后向前方程,且对任意的 Q-过程 $P(t))=(p_{ij}(t))_{E\times E}$ 均有 $p_{ij}(t))\geq p_{ij}^{\min}(t)$ 对所有的$i,j\in E$和$t\geq 0$ 成立.

证明 则由第二迭代法（即定理2.6.5）和定理3.6.1(b)-(d)知结论成立。 □

定理 3.6.2 (Q-过程的存在与唯一性.) 设 $Q=(q_{ij})_{E\times E}$ 为全稳定且保守的 Q-矩阵, $P^{min}(t)$由(3.6.3)构造. 若存在函数$w(i)\geq 1$ $(i\in E)$ 及常数c,$b>0$ 使得

(1) $\sum_{j\in E}q_{ij}w(j)\leq cw(i)+b$,

(2) $|q_{ii}|\leq bw(i), \forall i\in E$.

则有

(a) $\sum_{j\in E}p_{ij}^{min}(t)=1, \forall i\in E, t\geq 0$.

(b) Q-过程存在、唯一，而且满足向后向前方程.

证明 (a) 对任意的 $i\in E, t\geq 0$, 令

$$g(i,t)=e^{ct}w(i)+\frac{b}{c}(e^{ct}-1) \tag{3.6.10}$$

则有，

$$e^{-tq_i}w(i)+\int_0^t e^{-zq_i}\sum_{j\neq i}g(j,t-z)q_{ij}dz$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-tq_i}w(i) + \int_0^t e^{-zq_i}e^{c(t-z)}[\sum_{j\in E} w(j)q_{ij} + q_i w(i)]dz \\
&\quad + \frac{b}{c}\int_0^t e^{-zq_i}e^{c(t-z)}q_i dz - \frac{b}{c}\int_0^t e^{-zq_i}q_i dz \\
&\le e^{-tq_i}w(i) + \int_0^t e^{-zq_i}e^{c(t-z)}[cw(i) + b + q_i w(i)]dz \\
&\quad + \frac{b}{c}\int_0^t e^{-zq_i}e^{c(t-z)}q_i dz - \frac{b}{c}\int_0^t e^{-zq_i}q_i dz \\
&= e^{ct}w(i) + b\int_0^t e^{-zq_i}e^{c(t-z)}dz + \frac{b}{c}\int_0^t e^{-zq_i}e^{c(t-z)}q_i dz - \frac{b}{c}\int_0^t e^{-zq_i}q_i dz \\
&= e^{ct)}w(i) + \frac{b}{c}e^{ct}[\int_0^t e^{-(cz+zq_i)}(c+q_i)dz] + \frac{b}{c}[e^{-tq_i} - 1] \\
&= e^{ct}[w(i) + \frac{b}{c}] - \frac{b}{c} = g(i,t).
\end{aligned}
$$

因此，由线性组合定理(即定理2.6.3) 得：

$$\sum_{j\in E} p_{ij}^{min}(t)w(j) \le e^{ct}w(i) + \frac{b}{c}(e^{ct} - 1).$$

因此，

$$\int_0^t \sum_{k\in E}\sum_{j\in E} p_{ik}^{min}(s)|q_{kj}|ds \le 2b\int_0^t \sum_{k\in E} p_{ik}^{min}(s)w(k)ds \le 2b\int_0^t [e^{cs}w(i) + \frac{b}{c}(e^{cs} - 1)]ds < \infty.$$

故

$$\sum_{j\in E} p_{ij}^{min}(s) = \int_0^t \sum_{k\in E}\sum_{j\in E} p_{ik}^{min}(s)q_{kj}ds + 1 = \int_0^t \sum_{k\in E} p_{ik}^{min}(s)\sum_{j\in E} q_{kj}ds + 1 = 1$$

再由$(p_{ik}^{min}(s))$ 的最小性（推论3.6.1)知，结论成立。

(b) 明显地，由推论3.6.1，只需证明唯一性. 对任给 Q-过程 $P(t)) = (p_{ij}(t))_{E\times E}$.若存在$i,j \in E, t \ge 0$ 使得$p_{ij}(t)) \ne p_{ij}^{\min}(t)$.则由推论3.6.1知 $p_{ij}(t)) > p_{ij}^{\min}(t)$.于是有$1 = \sum_{j\in E} p_{ij}(t)) > \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t) = 1$矛盾。因此，$p_{ij}(t) \equiv p_{ij}^{\min}(t)$. □

定理 3.6.3 设矩阵$Q = (q_{ij})_{E\times E}$满足定理3.6.2中的条件, $\mu = (\mu_i, i\in E)$ 为E上的概率分布，则存在唯一的概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及其上的随机过程 $\{X_t, t\ge 0\}$ 使得:

(a) $\{X_t, t\ge 0\}$ 是连续时间的齐次马氏链,且$P(X_0 = i) = \mu_i (i\in E)$;

(b) 对任给的 $\omega\in\Omega$, $X_t(\omega)$ 关于 t右连续,且对任意$s > 0$, 左极限 $\lim_{t\to s^-} X_t(\omega)$存在;

(c) 记$p_{ij}(t) := P(X_t = j|X_0 = i), i,j\in E, t\ge 0$,则相应的$P(t)$是唯一的$Q$-过程.

证明 因状态空间E可数，可取$i_\infty \in E$, 令$S_\infty := S\cup\{i_\infty\}$, $R_+ := (0,\infty)$, $R_+^0 := [0,\infty)$, $\Omega_0 := (S\times R_+)^\infty$, $\Omega_n := \{(i_0, \theta_1, i_1, \ldots, \theta_{m-1}, i_{n-1}, \infty, i_\infty, \infty, i_\infty, \ldots)|\theta_l \in R_+ :, i_l \in E, l = 1, 2, \ldots, n-1\}, n\ge 1, \Omega := \cup_{n=0}^\infty \Omega_n$, σ-algebra $\mathcal{F}$为Ω上的标准的Borel-σ代数，从而得到可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$.对给定的分布$\mu = (\mu_i, i\in E)$及给定的矩阵$Q = (q_{ij})_{E\times E}$，利用I.

Tulcea 定理（参考文献[7]),可构造唯一的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$.对任意$\omega=\{i_0,\theta_1,i_1,\ldots\}\in\Omega$, 定义$T_0(\omega):=0, T_m(\omega):=\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_m, T_\infty(\omega):=\lim_{m\to\infty}T_m(\omega)$, and

$$X_t(\omega):=\sum_{m\geq 0}I_{\{T_m\leq t<T_{m+1}\}}i_m+I_{\{T_\infty\leq t\}}i_\infty,\quad t\geq 0. \tag{3.6.11}$$

其中，I_D表示集合D上的示性函数. 由(3.6.11)可知，$\{X_t,t\geq 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$的随机过程，而且相应的结论(b)成立.进而，由参考文献[5]可得(a)也成立.最后，(c)来自于定理3.6.2. □

例 3.6.1 (课本P231 例1) 设某触发器状态只有两个, $S=\{0,1\}$, “0” 表示工作态, “1” 表示失效态. $X(t)$ 表示t 时触发器状态. 已知其状态转移具有马氏性, 即 $\{X_t,t\geq 0\}$ 为马氏链, 且 $p_{01}(t)=\lambda t+o(t)$, $p_{10}(t)=\mu t+o(t)$, 从而得

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

试求$\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t))$.

证明 由向后方程得

$$\mu p_{00}'(t)+\lambda p_{10}'(t)=0,$$

两边积分利用初始条件 $p_{00}(0)=1$, $p_{10}(0)=0$, 得

$$\mu p_{00}(t)-\mu+\lambda p_{10}(t)=0.$$

故

$$\begin{cases}p_{00}'(t)+(\lambda+\mu)p_{00}(t)=\mu\\ p_{00}(0)=1\end{cases}$$

利用常数变易法得

$$p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

从而

$$p_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$p_{01}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$p_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

□

在 Q-过程的研究中, 常使用一种更为简单的方法，即采用拉氏变换, 称为预解式: $p_{ij}(\lambda):=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt,\lambda>0$. 此时, 上述两个向前向后方程可转化为以下的代数方程:

$$\text{向后方程}: p_{ij}(\lambda) = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} p_{kj}(\lambda) + \frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}. \tag{3.6.12}$$

$$\text{向前方程}: p_{ij}(\lambda) = \sum_{k\neq j} p_{ik}(\lambda) \frac{q_{kj}}{\lambda+q_j} + \frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_j}. \tag{3.6.13}$$

关于这两个方程, 也得出相同的最小解 $P^{\min}(\lambda)$, 而且任一 Q-过程必定满足 $P(\lambda) \geq P^{\min}(\lambda)$.

因此, 我们有

$$0 \leq p_{ij}(\lambda) - P_{ij}^{\min}(\lambda) = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} [p_{kj}(\lambda) - p_{kj}^{\min}(\lambda)].$$

如果 Q-过程不唯一, 则方程

$$u_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} u_k$$

必定有非零,非负有界解. 即方程

$$\begin{cases} (\lambda+q_i)u_i = \sum_{k\neq i} q_{ik}u_k, \\ 0 \leq u_i \leq 1 \end{cases} \tag{3.6.14}$$

必定有非平凡解. 由此我们可得到下面的唯一性准则:

定理 3.6.4 给定 Q-矩阵, 则 Q-过程唯一的充要条件是对于某(等价地, 一切)$\lambda > 0$, 方程

$$\begin{cases} (\lambda+q_i)u_i = \sum_{k\neq i} q_{ik}u_k, \\ 0 \leq u_i \leq 1 \end{cases}$$

只有零解.

利用此唯一性准则, 可得最简单的判断准则.

推论 3.6.2 如 $M := \sup_i q_i < \infty$, 则 Q-过程唯一.

证明 设 u_i为(3.6.14) 的任一解. 令 $\overline{u} := \sup_i u_i \leq 1$. 如果 $\overline{u} > 0$, 则由(3.6.14)得:

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \sup_i u_i = \sup_i \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} u_k \\ &\leq (\sup_i \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i})\overline{u} \\ &= \overline{u} \sup_i \frac{q_i}{\lambda+q_i} \\ &\leq \overline{u} \frac{M}{\lambda+M} < \overline{u}, \end{aligned}$$

矛盾. □

推论3.6.2优美, 但对多维情形, 相应的方程(3.6.14)几乎是不可解的. 下面是一种简单且实用的唯一性充分条件.

定理 3.6.5 假定存在序列 $\{E_n\}, E_n \subseteq E$ 和函数 $\omega \leq 0$满足
1) $E_n \uparrow E, \sup_{i\in E_n} q_i < \infty, \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{i\notin E_n} \omega(i) = \infty$;
2) 存在常数$c > 0$ 使得 $\sum\limits_{j\in E} q_{ij}\omega(j) \leq c\omega(i), i \in E$,
则 Q-过程唯一.

证明 a) 对任何固定的 $n \geq 1$, 令

$$q_{ij}^{(n)} = q_{ij} I_{E_n}(i), i \neq j, q_i^{(n)} = \sum_{j\neq i} q_{ij}^{(n)}.$$

则由条件(1) 知 $\sup_i q_i^{(n)} < \infty$, 从而由推论3.6.2 知有唯一的 Q-过程 $P_n(\lambda) = (p_{ij}^{(n)}(\lambda))$. 因为上述条件(2)对 $Q_n = (q_{ij}^{(n)})$ 也成立, 故 $(p_{ij}^{(n)}(\lambda))$ 是向后方程

$$x_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda + q_i^{(n)}} x_k + \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i^{(n)}}, i \in E,$$

的最小非负解, 由线性组合理论知$(\sum_{j\in E} p_{ij}^{(n)}(\lambda)\omega(j), i \in E)$ 是方程

$$x_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\omega(i)}{\lambda + q_i^{(n)}}$$

的最小非负解. 于是由条件(2) 得: 对 $\lambda > c$有:

$$(\lambda + q_i^{(n)})\omega(i) \geq \sum_{k\neq i} q_{ik}^{(n)}\omega(k) + \omega(i)(\lambda - c),$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega(i)}{\lambda - c} \geq \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda + q_i^{(n)}} \frac{\omega(k)}{\lambda - c} + \frac{\omega(i)}{\lambda + q_i^{(n)}}, i \in E$$

故由比较定理知:

$$\sum_j p_{ij}^{(n)}(\lambda)\omega(j) \leq \frac{\omega(i)}{\lambda - c} < \infty, \forall \lambda > c.$$

b) 当 $i \in E_n$时, 对一切 $A \subseteq E_n$ 有:

$$\begin{aligned} p_{iA}^{\min}(\lambda) := \sum_{j\in A} p_{ij}^{\min}(\lambda) &= \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} p_{kA}^{\min}(\lambda) + \frac{\delta_{iA}}{\lambda + q_i} \\ &= \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda + q_i} p_{kA}^{\min}(\lambda) + \frac{\delta_{iA}}{\lambda + q_i}. \end{aligned}$$

而当 $i \notin E_n$时, 因 $q_{ik}^{(n)} = 0 (k \neq i), A \subseteq E_n$. 故

$$p_{iA}^{\min}(\lambda) \geq 0 = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}^{(n)}}{\lambda + q_i^{(n)}} p_{kA}^{\min}(\lambda) + \frac{\delta_{iA}}{\lambda + q_i^{(n)}}$$

故由比较定理知:

$$p_{iA}^{\min}(\lambda) \geq p_{iA}^{(n)}(\lambda), \forall i \in E, A \subseteq E_n.$$

c) 最后, 因为 $\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min(n)}(t)=1$, 故 $\sum_{j\in E_n} p_{ij}^{(n)}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$. 从而由b)

$$\begin{aligned}\lambda p_{iE_n}^{\min}(\lambda) &\geq \lambda p_{iE_n}^{(n)}(\lambda)=1-\lambda p_{iE_n^c}^{(n)}(\lambda)\\ &\geq 1-\lambda\sum_{j\notin E_n} p_{ij}^{(n)}(\lambda)\omega(j)/\inf_{j\notin E_n}\omega(j)\\ &\geq 1-\frac{\lambda\omega(i)}{\inf_{j\notin E_n}\omega(j)}\frac{1}{\lambda-c}\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得出 $\lambda p_{iE}^{\min}(\lambda)\geq 1$. 又因 $\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t)\leq 1$, 故 $\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)\leq\frac{1}{\lambda}$, 于是有 $1=\lambda p_{iE}^{\min}(\lambda)$. 从而必有 $p_{ij}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda),\forall i,j\in E$, 即唯一性得证. $\square$

习题

习题 3.6.1 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为马尔可夫链, $S = \{0, 1\}$,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

$P_0(0) = 1, \tau_1 = \inf\{t : t > 0, X(t) \neq X(0)\}$. 求：$E(X(t)), E(\tau_1 | X(0) = 0), cov(X(s), X(t)),$ $E\{X(s+t) | X(s) = 1\}$.

§3.7 常返性与遍历性

定义 3.7.1 称 i可达 j, 若存在 $t>0$, 使得 $p_{ij}(t)>0$, 记为 $i\longrightarrow j$. 若 $i\longrightarrow j$且 $j\longrightarrow i$, 则称 i与 j互通, 记为 $i\longleftrightarrow j$. 若 $p_{ii}(t)\equiv 1$ (对$t\geq 0$ 成立), 则称 i 为吸收的. 若状态空间 E 中的任意两个状态互通, 则称 $(p_{ij}(t),i,j\in E)$ 为不可约的(而称相应的马氏链为不可约的).

定义 3.7.2 设 (q_{ij}) 为 Q-矩阵, 称 $Q=(q_{ij})$ 为不可约的, 若对任意两个状态 i,j 存在互不相同的状态 $i_1=i,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}=j$ 使得$q_{i_1,i_2}>0,\cdots,q_{i_n,i_{n+1}}>0$. 给定 $Q=(q_{ij})$, 称 i在 Q-矩阵下可达 j, 若存在互不相同的 $i_1=i,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}=j$, 使得 $q_{i_1,i_2}>0,q_{i_2,i_3}>0,\cdots,q_{i_n,j}>0$, 记为 $i\overset{Q}{\to}j$. 若 $i\overset{Q}{\to}j$, 且 $j\overset{Q}{\to}i$, 则称 $i\overset{Q}{\longleftrightarrow}j$.

命题 3.7.1 设 $Q=(q_{ij})$ 为全稳定且保守的 Q-矩阵. 设 $(p_{ij}(t),i,j\in E)$ 为相应的唯一的 Q过程, 则 $(p_{ij}(t),i,j\in E)$ 不可约当且仅当 $Q=(q_{ij})$ 不可约.

证明 “充分性”的证明：对任意的$i,j\in E$, 因$i\overset{Q}{\to}j$，从而存在互不相同的 $i_1=i,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}=j$, 使得 $q_{i_1,i_2}>0,q_{i_2,i_3}>0,\cdots,q_{i_n,j}>0$。从而，$\lim_{t\to 0}\frac{p_{i_k,i_{k+1}}(t)}{t}=q_{i_k,i_{k+1}}>0$ 对$1\leq k\leq n$成立。于是存在$\delta>0$ 使得, 当$0<t<\delta$ 时，$p_{i_k,i_{k+1}}(t)>0$ 对$1\leq k\leq n$ 成立. 因此，$p_{ij}(nt)\geq p_{i,i_2}(t)\ldots p_{i_n,j}(t)>0$，即$i\longrightarrow j$. 再由$i,j\in E$ 的任意性知，$i\longleftrightarrow j$。
“必要性”的证明：对任意的$i,j\in E$, 因 $i\longleftrightarrow j$，则存在$t>0$使得$p_{ij}(t)>0$. 由定理3.6.1, 存在$n\geq 1$ 使得$P_{ij}^{(n)}(t)>0$. 于是由(3.6.2)知，存在$i_2\neq i\in E,s>0$ 使得$q_{ii_2}>0,P_{i_2j}^{(n-1)}(s)>0$. 归纳可得：存在互不相同的 $i_1=i,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}=j$,及以$s>0$, 使得 $q_{i_1,i_2}>0,q_{i_2,i_3}>0,\cdots,q_{i_{n-1},i_n}>0$, 以及$P_{i_nj}^{(1)}(s)>0$. 由因$P_{i_nj}^{(1)}(s)=\int_0^s e^{-q_{n-1}(s-v)}q_{i_nj}e^{-q_jv}dv>0$, 故有$q_{i_nj}>0$.“必要性”得证。 □

定义 3.7.3 若 $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt=+\infty$, 则称 i为常返的; 若 $\lim_{t\to\infty}p_{ii}(t)>0$, 则称 i为正常返的. 若每个状态均常返(正常返)，则称该马氏链为常返(正常返)的.

引理 3.7.1 设 $j\neq i$, 若存在 $t_0>0$ 使$p_{ij}(t_0)>0$. 则$\forall t\geq t_0$, 有 $p_{ij}(t)>0$.

证明 由定理3.3.1可知对任意的$t\geq 0$ 有 $p_{jj}(t)>0$, 由C-K方程知

$$p_{ij}(t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t_0)p_{kj}(t-t_0)\geq p_{ij}(t_0)p_{jj}(t-t_0)>0.$$

□

引理 3.7.2 下列命题等价：(1) 由 i 可达状态 j; (2) 对任意的 h 骨架, i 可达状态 j; (3) 对某个 h 骨架, i 可达状态 j.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 若由 i可达 j, 则存在 $t_0>0$, 使得$P_{ij}(t_0)>0$. 根据引理3.7.1可知对 $t\geq t_0$ 有 $p_{ij}(t)>0$. 对任意的 h骨架, 存在足够大的 n使得 $nh\geq t_0$, 则 $p_{ij}(nh)>0$. 因此, 在 h 骨架中可由 i到达 j.
(2)$\Longrightarrow$(3), (3)$\Longrightarrow$(1)显然. □

定理 3.7.1 设 $(p_{ij}(t))$不可约, 则极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t):=\pi_j$ 与 i无关.

证明　取 $h=1, p_{ij}:=p_{ij}(1)$. 则若 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$存在, 则有 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, 其中 $p_{ij}^{(n)}$ 为关于由 $(p_{ij}, i, j\in E)$ 所对应的离散时间马氏链第 n步转移概率. 由引理3.7.2可知1- 骨架链不可约, 则有下面的结论：

i) 若1-骨架非常返, 有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$ 与 i无关.

ii) 若1-骨架零常返, 有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$ 与 i 无关.

iii) 若1-骨架正常返非周期, 有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{m_{jj}}$ 与 i无关, 其中m_{jj}为状态 j对应于1-骨架链的平均返回时间. 故综上可知 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 与 i无关. □

定理 3.7.2　(a) i 关于$(p_{ij}(t))$ 常返$\Longleftrightarrow$ 对任何 $h>0$, i 关于 h-骨架 $\{X_{nh}, n=0,\cdots\}$ 常返.

(b) 若 $(p_{ij}(t))$不可约, 则 i关于 $(p_{ij}(t))$ 正常返$\Longleftrightarrow$ 对任何 $h>0$, i 关于 h- 骨架 $\{X_{nh}, n=0,\cdots\}$ 正常返.

证明　(a) 对$\forall h>0$, 令$p(h)=\min\limits_{0\le r\le h} p_{ii}(r)$. 则由$p_{ij}(t)$ 的连续性可知$p(h)>0$且有限.

“$\Longleftarrow$” 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}(nh)=+\infty$, 则有$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)=+\infty$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} p_{ii}(t)dt \qquad (3.7.1)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^h p_{ii}(nh+u)du\\ &\ge \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^h p_{ii}(nh)p_{ii}(u)du\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)\int_0^h p_{ii}(u)du=\infty.\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt=+\infty.$$

“$\Longrightarrow$” 对任何 $t\in[nh,(n+1)h]$ 有 $p_{ii}((n+1)h)=p_{ii}((n+1)h-t+t)\ge p_{ii}(t)p_{ii}((n+1)h-t)$.

$$\int_{nh}^{(n+1)h} p_{ii}(t)dt\le\int_{nh}^{(n+1)h}\frac{p_{ii}((n+1)h)}{p_{ii}((n+1)h-t)}dt=p_{ii}((n+1)h)\int_0^h\frac{1}{p_{ii}(u)}du,$$

故由(3.7.1)得

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)dt\le\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}((n+1)h)\int_0^h\frac{1}{p_{ii}(u)}du\le\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}((n+1)h)\frac{h}{p(h)}.$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}((n+1)h)=+\infty$, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)=+\infty$. 故由常返的定义可知命题成立.

(b) 由 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)>0\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}(nh)=\frac{1}{m_{ii}}>0\Longleftrightarrow m_{ii}<\infty$. 可知命题成立. □

回顾平稳分布对离散时间马氏链的意义: 设 $\{\pi_i, i\in E\}$ 为离散时间马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的平稳分布, 则有$\sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}=\pi_j$, 从而有 $\pi P^{(n)}=\pi$, 故若取 初始分布$P(X_0=i)=\pi_i$, 有 $\sum_{i\in E} P(X_0=i)P(X_n=j|X_0=i)=\pi_j$.

定义 3.7.4 概率分布 $\{\pi_i, i \in E\}$ 称为转移概率函数 $\{p_{ij}(t), i, j \in E, t \geq 0\}$ 的不变分布(又称平稳分布), 如果对任意的 $t \geq 0, j \in E$, $\sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}(t) = \pi_j$. 此时, $\{\pi_i\, i \in E\}$亦称为对应于 $\{p_{ij}(t), i, j \in E, t \geq 0\}$的连续时间马氏链 $\{X_t, t \geq 0\}$的平稳分布.

类似离散情形,令 $P_j(t) = P(X_t = j)$, $P(X_0 = i) = \pi_i$, 则有

$$\begin{aligned} P_j(t) &= \sum_{i\in E} P(X_t = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i\in E} \pi_i P(X_t = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{i\in E} \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j \end{aligned}$$

下面考察平稳分布的性质. 假设 E有限,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in E} \pi_k p_{kj}(t) &= \pi_j \\ \sum_{k\neq j} \pi_k p_{kj}(t) + \pi_j p_{jj}(t) &= \pi_j \\ \sum_{k\neq j} \pi_k \frac{p_{kj}(t)}{t} + \pi_j \frac{(p_{jj}(t) - 1)}{t} &= 0 \\ \sum_{k\neq j} \pi_k q_{kj} + \pi_j q_{jj} &= 0 \end{aligned}$$

定理 3.7.3 设 $Q = (q_{ij})$为保守全稳定且不可约的, $(P_{ij}(t))$为唯一的 Q 过程, 则
a) 若 $\{p_{ij}(t)\}$ 正常返, 则极限 $\pi_j := \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ (与 i 无关), 且$\{\pi_j, j \in E\}$ 是平稳分布.
b) E上概率分布 $\{\pi_i, i \in E\}$为 $\{p_{ij}(t)\}$为平稳分布的充要条件是

$$\sum_{i\in E} \pi_i q_{ij} = 0 \quad \forall\, j \in E,\ \sum_{i\in E} \pi_i = 1.$$

证明 (a) 因 Q不可约. 由定理知, 极限 $\pi_j := \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 与 i无关. 由C-K 方程的 $p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$. 取有限 $E_n \subseteq E$使得 $E_n \uparrow E$, $p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$, 令 $t \to \infty$得, $\pi_j \geq \sum\limits_{k\in E_n} \pi_k p_{kj}(h), \forall n \geq 1$. 再令 $n \to \infty$ 得 $\pi_j \geq \sum\limits_{k\in E} \pi_k p_{kj}(h), \forall j \in E$. 若存在 j_0使得 $\pi_{j_0} > \sum\limits_{k\in E} \pi_k p_{kj_0}(h)$, 则有 $\sum\limits_{j\in E} \pi_j > \sum\limits_{k\in E} \pi_k(\sum\limits_{j\in E} p_{kj}(h))$, 从而 $\sum\limits_{j\in E} \pi_j > \sum\limits_{k\in E} \pi_k$, 矛盾. 故 $\sum\limits_{k\in E} \pi_k p_{kj}(h) = \pi_j, j \in E$. 下证 $\sum\limits_{k\in E} \pi_j = 1$. 由 $\sum\limits_{j\in E_n} p_{ij}(t) \leq 1, \forall t \geq 0$. 令 $t \to \infty$, 得 $\sum\limits_{j\in E_n} \pi_j \leq 1$,令 $n \to \infty$得 $0 < \sum\limits_{j\in E} \pi_j \leq 1$. 又因 $0 < \pi_j = \sum\limits_{k\in E} \pi_k p_{kj}(h)$, 令 $h \to \infty$, 由控制收敛定理得, $\pi_j = \sum\limits_{k\in E} \pi_k(\pi_j) > 0$, 故 $\sum\limits_{k\in E} \pi_k = 1$, 即 $\{\pi_k, k \in E\}$ 为平稳分布.
(b) 因 $\pi_j = \sum\limits_{k\in E} \pi_k p_{kj}(h), \forall h > 0, j \in E$, 则取Laplace变换，得$\lambda \sum\limits_{i\in E} \pi_i p_{ij}(\lambda) = \pi_j$ ($\lambda > 0$), 即$\lambda\pi P(\lambda) = \pi$. 又由$(P_{ij}(t))$ 向前方程的Laplace变换知：$\lambda P(\lambda) = P(\lambda)Q + I$，从而$\lambda\pi P(\lambda) = \pi P(\lambda)Q + \pi$. 于是有$\pi Q = 0$.
另一方面，设E上概率分布 $\pi := \{\pi_i, i \in E\}$满足$\pi Q = 0$. 对任意的 $i, j \in E, t \geq 0$, 令

$$f_{ij}^{(0)}(t) \ := \ \delta_{ij} e^{q_{ii}t}, \tag{3.7.2}$$

$$f_{ij}^{(n+1)}(t) \quad := \quad \int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_{jj}s} f_{ik}^{(n)}(t-s) q_{kj} ds + \delta_{ij} e^{q_{jj}t} \ \ \forall n \geq 0. \tag{3.7.3}$$

则由第一、第二迭代法，以及唯一性条件知：$p_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty} f_{ij}^{(n)}(t)$. 下面证明：

$$\sum_{i\in E} \pi_i f_{ij}^{(n)}(t) \leq \pi_j \quad \forall\, j \in E, t \geq 0, n \geq 0. \tag{3.7.4}$$

注意到$q_{ii} \leq 0$, 由(3.7.2)知(3.7.4)对$n = 0$时成立. 假设(3.7.4)对$n = k$时成立, 由(3.7.3) 得

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in E} \pi_i f_{ij}^{(k+1)}(t) &= \pi_j e^{q_{jj}t} + \int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_{jj}s} \sum_{i\in E} \pi_i f_{ik}^{(n)}(t-s) q_{kj} ds \\
&\leq \pi_j e^{q_{jj}t} + \int_0^t \sum_{k\neq j} e^{q_{jj}s} \pi_k q_{kj} ds \\
&= \pi_j e^{q_{jj}t} - \int_0^t e^{q_{jj}s} \pi_j q_{jj} ds = \pi_j.
\end{aligned}$$

因此，令$n \to \infty$, 由(3.7.4)知

$$\sum_{i\in E} \pi_i p_{ij}(t) \leq \pi_j \quad \forall\, j \in E, t \geq 0. \tag{3.7.5}$$

又因$\sum_{j\in E} p_{ij}(t) \equiv 1, \sum_{i\in E} \pi_i = 1$, 再由反证法即知

$$\sum_{i\in E} \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j \quad \forall\, j \in E, t \geq 0. \tag{3.7.6}$$

即$\{\pi_i, i \in E\}$为 $(p_{ij}(t))$的平稳分布。 □

例 3.7.1 (课本P231 例1) 设某触发器状态只有两个, $S = \{0, 1\}$, “0” 表示工作态, “1” 表示失效态. $X(t)$ 表示t 时触发器状态. 已知其状态转移具有马氏性, 即 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为马氏链, 且 $p_{01}(t) = \lambda t + o(t)$, $p_{10}(t) = \mu t + o(t)$, 从而得

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

试求 $\{X_t, t \geq 0\}$的平稳分布.

解 它是一个有限状态的连续时间马氏链, 由课本定理6.3.4知存在平稳分布. 再由 $\pi\mathbf{Q} = 0$ 及$\sum_{i\in E} \pi_i = 1$ 可得

$$\pi_0 = (1 + \frac{\lambda}{\mu})^{-1} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

及

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

例 3.7.2 (文献[4] P108 例4.10 洛杉矶天气链) 有三个状态: 1=晴, 2=雾, 3=雨. 天气持续为晴天的时间服从均值为3天的指数分布, 然后变为雾天. 雾天持续的时间服从均值为4天的

指数分布, 然后雨来了. 雨天持续的时间服从均值为1天的指数分布, 之后返回晴天. 回忆指数分布的速率是1除以均值, 因此链的Q矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

试求此链的平稳分布.

解 它是一个有限状态的连续时间马氏链, 由课本定理6.3.4知存在平稳分布. 再由 $\pi\mathbf{Q} = 0$ 及$\sum_{i\in E}\pi_i = 1$ 可得

$$\pi_1 = 3/8, \pi_2 = 4/8, \pi_3 = 1/8.$$

例 3.7.3 (文献[4] P110 例4.14 理发店) 一名理发师理发的速率为3, 这里以每小时的顾客数为单位, 即每位顾客的理发时间服从均值为20分钟的指数分布. 假设顾客按照一个速率为2的Poisson 过程到达, 但是如果顾客到达时, 等候室的两把椅子都已坐满, 他将离开. 我们定义状态为系统中的顾客数, 因此$S = \{0, 1, 2, 3\}$. 试求此链的平稳分布, 以及接受服务的顾客的比例.

解 根据描述的问题, 显然有

$$q_{i,i-1} = 3, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$q_{i,i-1} = 2, \quad i = 0, 1, 2.$$

即Q矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

由 $\pi\mathbf{Q} = 0$ 及$\sum_{i\in E}\pi_i = 1$, 可得

$$\pi_0 = 27/65, \pi_0 = 18/65, \pi_2 = 12/65, \pi_3 = 8/65.$$

由此我们看出理发店客满的比例是$8/65$, 从而损失了该比例的到达顾客, 因此有$57/65$ 即87.7%的顾客能接受服务.

习题

习题 3.7.1 设 $j \neq i$, 若存在 $t_0 > 0$ 使$p_{ij}(t_0) > 0$. 证明对$\forall t > 0$, 有 $p_{ij}(t) > 0$.

习题 3.7.2 设 $i, j \in E$, 若 $i \leftrightarrow j$, 则i常返(正常返)的充要条件是j常返(正常返).

习题 3.7.3 设连续时间齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间为$E = \{1, 2, 3\}$,其转移率矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

(a) 证明该马氏链是不可约链;

(b) 该马氏链是否存在平稳分布?若不存在,则说明原因;若存在,则求出该分布.

习题 3.7.4 证明下列命题等价：(1) 由 i 可达状态 j; (2) 对任意的 h 骨架, i 可达状态 j; (3) 对某个 h 骨架, i 可达状态 j.

§3.8 生灭过程

生灭过程是马氏过程中非常重要的一类. 这不仅因为生灭过程模型有很强的应用背景(如，排队网络、人口摸型)、直观明确、强烈地吸引着应用工作者的兴趣,而且在理论研究中,由于其模型精炼,往往是一般马氏过程研究的切入点.

定义 3.8.1 设连续时间马氏链 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, \cdots\}$, 若它的转移概率矩阵 $(p_{ij}(t))$ 满足: 当 h充分小时,

1) $p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)(\lambda_i \geq 0, i \geq 0)$,
2) $p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)(\mu_i \geq 0, i \geq 1)$,
3) $p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), (\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \mu_0 = 0, i \geq 0)$,
4) $\sum\limits_{|j-i| \geq 2} = o(h), (i \geq 0)$,

其中 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, 则称 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为生灭过程.

于是根据 $Q = (q_{ij}) = (p'_{ij}(0)) = \lim\limits_{h\to\infty} \frac{p_{ij}(h)}{h}\ (i \neq j)$, 我们可以写出它的 Q-矩阵:

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
\mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \cdots & 0 & \mu_i & -(\lambda_i + \mu_i) & \lambda_i & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

定理 3.8.1 若 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为上述生灭过程, 则 $(p_{ij}(t))$ 满足向前向后方程, 则

(a) $p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}$; $p'_{00}(t) = -p_{00}(t)\lambda_0 + p_{01}(t)\mu_1$.

(b) $p'_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t)$.

证明 (a) 由C-K方程得

$$
\begin{aligned}
\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} &= -p_{ij}(t)\frac{1 - p_{jj}(h)}{h} + p_{i,j-1}(t)\frac{p_{j-1,j}(h)}{h} \\
&+ p_{i,j+1}(t)\frac{p_{j+1,j}(h)}{h} + \frac{1}{h}o(h)
\end{aligned}
$$

令 $h \to 0$得

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}.$$

$$p'_{00}(t) = -p_{00}(t)\lambda_0 + p_{01}(t)\mu_1.$$

(b) 同理(或用定理3.5.2)可知(b)也成立. □

定理 3.8.2 对上述生灭过程, 若 $\lambda_i > 0(i \geq 0)$, $\mu_i > 0(i \geq 1)$则存在唯一的平稳分布的充要条件是 $R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i} < \infty$, 且此时的平稳分布 $\{\pi_i, i \geq 0\}$ 为 $\pi_0 = (1+R)^{-1}$, $\pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}\pi_0$ $(i \geq 1)$.

证明 当$\lambda_i > 0(i \geq 0)$, $\mu_i > 0(i \geq 1)$ 时, 生灭过程不可约, 从而$\pi_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 存在且与 i无关. 由定理3.8.1(b) 知 $\lim\limits_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = 0$, 再由定理3.8.1(a)得

$$\begin{cases} -(\lambda_j+\mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0 \\ -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}\pi_0, (i \geq 1) \end{cases}$$

□

注：设$\{\pi_i, i \in E\}$ 为$\{X_t, t \geq 0\}$的初始分布, 即$\pi_i = P(X_0 = i)$.
令$P_j(t) = P(X_t = j) = \sum_{i\in E} \pi_i p_{ij}(t)$,则有下面的Fokker-Planck 方程:

$$P'_j(t) = -P_j(t)(\lambda_j+\mu_j) + P_{j-1}(t)\lambda_{j-1} + P_{j+1}(t)\mu_{j+1}.$$

定理 3.8.3 设 Q正则(即 Q-保守, 全稳定, Q过程唯一)不可约. H 为 E 的有限非空子集, 则相应的 Q 过程正常返的充要条件为

$$\begin{cases} \sum_{j\in E} q_{ij}y_j \leq -1(i \notin H) \\ \sum_{i\in H}\sum_{j\in E} q_{ij}y_j < \infty \end{cases}$$

有有限的非负解.

证明 见参考文献[12]中定理2.1.4. □

习题 3.8.1 对不可约马氏链, 它是正常返的充要条件是存在平稳分布且平稳分布就是极限分布.

习题 3.8.2 对于生灭过程，设 $\mu_i = \mu, \lambda_i = \lambda$ $(i \geq 1)$, 求证下列结论：
a) 当$\lambda < \mu$时，有$R < \infty$，且存在平稳分布.
b) 当$\lambda \geq \mu$时，有 $R = \infty$.

参考文献

[1] Anderson, W. J. Continuous-Time Markov Chains. New York: Springer-Verlag, 1991

[2] Ash, R. B. Probability and Measure Theory. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2000.

[3] Chen, M.-F. From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems. Second edition. World Scientific Publishing, 2004.

[4] Richard Durrett (著), 张景肖等(译),《随机过程基础》, 机械工出版社, 2014.

[5] Feinberg, Eugene A.; Mandava, Manasa; Shiryaev, Albert N. On solutions of Kolmogorov's equations for nonhomogeneous jump Markov processes. *J. Math. Anal. Appl.* **411**(2014), 1, 261 – 270.

[6] Guo, X.P. and Hernández-Lerma O. Continuous-Time Markov Decision Processes: Theory and Applications. Berlin, Springer-Verlag, 2009.

[7] Hernández-Lerma, O.　Laserre J.B. Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria. Springer-Verlag, 1996.

[8] Guo, X.P. and Piunovskiy, A. Discounted continuous-time Markov decision processes with constraints: unbounded transition and loss rates, *Math. Oper. Res.* **36** (2011), 105–132.

[9] Lund, R.B., Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. (1996). Computable exponential convergence rates for stochastically ordered Markov processes. *Ann. Appl. Probab.* **6**, 218-237.

[10] Ross, S. M. Introduction to Stochastic Dynamic Programming, Academic Press, New York, 1983.

[11] Williams, D. Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 1. John Wiley, New York, 1979.

[12] 陈木法，毛永华，随机过程导论, 高等教育出版社，2006.

[13] 侯振挺等著,生灭过程,湖南科学技术出版社，2000.

[14] 侯振挺等著，马尔可夫过程的Q-矩阵问题，湖南科学技术出版社,1994.

[15] 林元烈,应用随机过程, 清华大学出版社，2003.

[16] 钱敏平,龚光鲁，应用随机过程, 北京大学出版社，1998.

[17] 汪嘉冈, 现代概率论基础（第二版），复旦大学出版社, 2006.

[18] 严仕健, 王隽骧,刘秀芳,概率论基础，科学出版社, 1982.

[19] 严仕健, 刘秀芳,测度与概率，北京师范大学出版社, 2003.

[20] 严加安, 测度论讲义, 科学出版社, 1997.