目 录

第一章　可测空间

§1.1　集类与 σ-域

§1.1.1　集合及其运算

用 Ω 表示抽象集合(空间), 其上的任一元素用 ω 表示.

定义 1.1.1　(1) 设 $A, B \subseteq \Omega$, 则 $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

(2) 并运算: $A \bigcup B, \bigcup_{n\geq 1} A_n, \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$,$I$表示指标集;

(3) 交运算: $A \bigcap B, \bigcap_{n\geq 1} A_n, \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$;

(4) 余运算: A^c;

(5) 差运算: $A\backslash B \triangleq A \bigcap B^c$; 若 $B \subseteq A$, 则 $A\backslash B \triangleq A - B$.（注意条件 $B \subseteq A$）

(6) 不相交: $A \bigcap B = \emptyset$; 假设存在集合 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ 其中任意两个集合均不相交,则用 $\sum_{\alpha\in I} A_\alpha$ 表示其交集.

特别的, 若 $I = \emptyset$, 则 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset, \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \Omega$.

引理 1.1.1　集合交和并运算满足如下的交换律、分配律, 结合律以及de Morgan 公式:

(a) 交换律: $A \bigcap B = B \bigcap A, A \bigcup B = B \bigcup A$;

(b) 分配律: $(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C), (A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$;

(c) 结合律: $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C), (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$;

(d) de Morgan 公式: $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c, (A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$.

定义 1.1.2　设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为一集合序列, 称 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} A_n$ 分别为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的上极限和下极限. 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 则称$\{A_n, n \geq 1\}$ 的极限存在.

定义 1.1.3　设 $A \subseteq \Omega$, 集合A的示性函数定义为

$$I_A(\omega) := \begin{cases} 1, \text{ 若 } \omega \in A, \\ 0, \text{ 若 } \omega \notin A. \end{cases}$$

引理 1.1.2　(a) $I_{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \sup_\alpha I_{A_\alpha} =: \bigvee_\alpha I_{A_\alpha}$;

(b) $\{A_n, n \geq 1\}$ 为给定的集合, 其中任意两个集合均不相交, 则$I_{\sum_\alpha A_\alpha} = \sum_\alpha I_{A_\alpha}$;

(c) $I_{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \inf_\alpha I_{A_\alpha} =: \bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}$;

(d) $I_{A^c} + I_A = 1$;

(e) $I_{A-B} = I_A - I_B$;

(f) $I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|$.

命题 1.1.1 (首次进入分解) 给定 $\{A_n, n\geq 1\}$ 为一集合序列, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\sum_{i=1}^{n}(A_i\backslash\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j).$$

§1.1.2 集类与 σ 域

集类: Ω 中子集构成的集合, 以后用花体字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 来表示. $\mathscr{P}(\Omega)$ 表示 Ω 中的所有子集构成的集类.

定义 1.1.4 $\mathscr{P}(\Omega)$ 中的非空子集类 $\mathscr{A}$ 称为域 (或代数), 若:

(1) 若 $A\in\mathscr{A}$, 则 $A^c\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{A}$, 则 $A\bigcup B\in\mathscr{A}$.

命题 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 是域, 则

(a) $\Omega\in\mathscr{A},\emptyset\in\mathscr{A}$;

(b) 若 $A,B\in\mathscr{A}$, 则 $AB\in\mathscr{A}, A\backslash B\in\mathscr{A}, A\triangle B\in\mathscr{A}$;

(c) 若 $A_j\in\mathscr{A}, 1\leq j\leq n$, 则 $\bigcup_{j=1}^{n}A_j\in\mathscr{A},\bigcap_{j=1}^{n}A_j\in\mathscr{A}$.

证明 用域的定义:

(1) 因$\mathscr{A}$非空, 故有$A\in\mathscr{A}$, 从而$A^c\in\mathscr{A}$, 且

$$\Omega=A\cup A^c\in\mathscr{A},\qquad \emptyset=\Omega^c\in\mathscr{A}.$$

(2) $AB=(A^c\cup B^c)^c\in\mathscr{A},\ A\backslash B=AB^c\in\mathscr{A},\ A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\in\mathscr{A}$.

(3) 由归纳法即得.

例 1.1.1 (i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个域;

(ii) $\mathscr{A}=\{\emptyset,\Omega,A,A^c\}$ 是一个域;

(iii) 直线 R 上形为 $(a,b]$ (a,b 可为无穷)的区间的有限并全体为一个域.

证明 直接验证域的定义即可!

命题 1.1.3 若 $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小域 $\mathscr{A}$ (即 $\mathscr{A}$ 为域, $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{A}$, 且对任一域 $\mathscr{A}'\supseteq\mathscr{C}$, 必有 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{A}'$).

证明 设 $\mathscr{H}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的域全体构成的集类, 则 $\mathscr{P}(\Omega)\in\mathscr{H}$, 所以 $\mathscr{H}$ 是非空的. 又因为任意个包含 $\mathscr{C}$ 的域的交仍是一个包含 $\mathscr{C}$ 的域 (按域的定义逐条验证), 所以若取

$$\mathscr{A}=\bigcap_{\mathscr{B}\in\mathscr{H}}\mathscr{B},$$

则 $\mathscr{A}$ 就是所要求的.

定义 1.1.5 对任一集类 $\mathscr{C}$, 包含 $\mathscr{C}$ 的最小域称为由 $\mathscr{C}$ 张成(生成)的域, 记为 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$.

Ω 中由单点集全体生成的域是由 Ω 中的有限集及余集全体构成的集类.

定义 1.1.6 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集 $\mathscr{I}$ 称为半域 (或半代数), 若它满足:

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathscr{I}$;

(2) 当 $A, B \in \mathscr{I}$ 时, 必有 $AB \in \mathscr{I}$;

(3) 若 $A \in \mathscr{I}$, 则 A^c 可表为 $\mathscr{I}$ 中两两不交的集合的有限并.

例 1.1.2 (i) 域必为半域;

(ii) 直线 R 中形如 $(a, b]$ (a, b 可为无穷) 的区间的全体构成一个半域.

命题 1.1.4 若 $\mathscr{I}$ 为半域, 则

$$\mathscr{A} = \{A = \sum_{i \in I} S_i : \{S_i, i \in I\} \text{ 为 } \mathscr{I} \text{中两两互不相交的有限族}\}$$

是包含 $\mathscr{I}$ 的最小域 (即 $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathscr{I})$).

证明 首先证明 $\mathscr{A}$ 为一个域. $\mathscr{A}$ 对有限交运算封闭是明显的. 又若 $A = \sum_{i=1}^n S_i \in \mathscr{A}$, 则 $A^c = \bigcap_{i=1}^n S_i^c$. 由半域的定义可知 $S_i^c = \sum_{j=1}^{J_i} S_{ij}$, $S_{ij} \in \mathscr{I}$, 则有,

$$A^c = \sum_{j_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{J_n} \cap_{i=1}^n S_{ij_i} \in \mathscr{A}.$$

由De Morgan 法则, $\mathscr{A}$ 对有限并运算封闭, 即 $\mathscr{A}$ 是一个域. 此外, $\mathscr{A} \supset \mathscr{I}$. 另外, 若 $\mathscr{A}'$ 也是一个包含 $\mathscr{I}$ 的域,因 $S_i \in \mathscr{I} \supset \mathscr{A}'$, 则包含 $A = \sum_{i=1}^n S_i$ 的集合必属于 $\mathscr{A}'$, 故 $\mathscr{A}' \supset \mathscr{A}$, 即 $\mathscr{A}$ 是最小的.

下面的结论给出从任意集$\mathscr{C}$到半域的构造。这样，由命题1.1.4 可知从任意集$\mathscr{C}$到其生成域 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$ 的构造.

命题 1.1.5 设 $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, 令

$$\mathscr{C}_1 = \{\emptyset, \Omega, A : A \text{ 或 } A^c \in \mathscr{C}\}, \quad \mathscr{C}_2 = \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathscr{C}_1, n \geq 1 \right\}.$$

则$\mathscr{C}_2$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的半域,且 $\mathscr{A}(\mathscr{C}_2) = \mathscr{A}(\mathscr{C})$.

证明 首先断言 $\mathscr{C}_1$ 对取余运算封闭. 事实上， $\emptyset^c = \Omega \in \mathscr{C}_1$, $\Omega^c = \emptyset \in \mathscr{C}_1$. 若 $A \in \mathscr{C}_1$ 且 $A \neq \emptyset, \Omega$, 则有 $A \in \mathscr{C}$ 或 $A^c \in \mathscr{C}$. 若 $A \in \mathscr{C}$, 则由 $(A^c)^c = A \in \mathscr{C}$ 及 $\mathscr{C}_1$ 的定义知 $A^c \in \mathscr{C}_1$. 若 $A^c \in \mathscr{C}$, 则由 $\mathscr{C}_1$ 的定义知 $A^c \in \mathscr{C}_1$. 综上断言成立.

下面验证：$\mathscr{C}_2$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的半域。(1) $\forall A \in \mathscr{C}$, 有 $A \in \mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$, 故 $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_2$.

(2-1)因 $\emptyset, \Omega \in \mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$, 故 $\emptyset, \Omega \in \mathscr{C}_2$.

(2-2) 对任意的 $A, B \in \mathscr{C}_2$, 不妨设 $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n_1} A_i,\ B = \bigcap\limits_{j=1}^{n_2} B_j,\ A_i, B_j \in \mathscr{C}_1,\ n_1, n_2 \geq 1$. 那么

$$A \cap B = \left(\bigcap_{i=1}^{n_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n_2} B_j\right) = \bigcap_{i=1}^{n_1+n_2} C_i,$$

其中

$$C_i = \begin{cases} A_i & 1 \leq i \leq n_1, \\ B_{i-n_1} & n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2, \end{cases}$$

因此，$A \cap B \in \mathscr{C}_2$.

(2-3) 若 $A \in \mathscr{C}_2$, 特别当 $A = \emptyset$ (或 Ω) 时, $A^c = \Omega$(或 $\emptyset$)$\in \mathscr{C}_1$;
否则, 不妨设 $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathscr{C}_1$, $n \geq 1$, 其中 $\mathscr{C}_1$ 对取余运算封闭.

$$A^c = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c = \sum_{i=1}^{n} \Big(A_i^c \setminus \bigcup_{j \leq i-1} A_j^c\Big),$$

而

$$A_i^c \setminus \bigcup_{j \leq i-1} A_j^c = A_i^c \bigcap \Big(\bigcup_{j \leq i-1} A_j^c\Big)^c = A_i^c \bigcap \Big(\bigcap_{j \leq i-1} A_j\Big) \in \mathscr{C}_2.$$

综上所述，$\mathscr{C}_2$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的半域.

(3)由 $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_2$ 知，$\mathscr{C} \subset \mathscr{A}(\mathscr{C}_2)$, 故 $\mathscr{A}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{C}_2)$. 若 $A \in \mathscr{C}_2$, 则 $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \mathscr{C}_1$, 由 $A_i \in \mathscr{C}_1$ 知 A_i 或 $A_i^c \in \mathscr{C}$, 进而 $A_i \in \mathscr{A}(\mathscr{C})(i = 1, \cdots, n)$, 故 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{C})$, 于是 $\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{A}(\mathscr{C})$. 因此，$\mathscr{A}(\mathscr{C}_2) \subset \mathscr{A}(\mathscr{C})$, 所以 $\mathscr{A}(\mathscr{C}_2) = \mathscr{A}(\mathscr{C})$. □

定义 1.1.7 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集类 $\mathscr{F}$ 称为 σ-域 (或 σ-代数), 若它满足:

(1) 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $A^c \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n \geq 1$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

注 1.1.6 域与 σ-域的区别: 有限并与无限(可数)并的封闭性.

明显, (1) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是 σ-代数; (2) $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ 也是一个 σ-代数; (3) $\{\cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \,|a_i, b_i \in (-\infty, \infty), i = 1, \cdots, n, n \geq 1\}$ 不是σ-域. (因可数并不封闭: $\cup_{i=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}] = (a, b)$).

命题 1.1.7 若 $\mathscr{F}$ 为 σ-域, 且当 $n \geq 1$, $A_n \in \mathscr{F}$, 则有: $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{F}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F}$, 且 $\mathscr{F}$ 为域.

证明 由 σ-域 $\mathscr{F}$ 的定义知, $A_n^c \in \mathscr{F}$ $(n \geq 1)$, 故

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathscr{F},$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \in \mathscr{F},$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \in \mathscr{F},$$

$$A \bigcup B = A \bigcup B \bigcup \emptyset \bigcup \emptyset \ldots \in \mathscr{F}.$$

命题 1.1.8 若 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-域.

证明 同命题 1.1.3 的证明.

例 1.1.3 Ω 中有限或可列子集及其余集全体构成的类是一个 σ-域, 它正是包含 Ω-中一切单点集的最小 σ-域.

定义 1.1.8 包含集类 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-域, 称为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ- 域, 记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

命题 1.1.9 对 Ω 的子集类 $\mathscr{C}$, 若记 $\mathscr{C}\bigcap A \triangleq \{BA : B \in \mathscr{C}\}$, 则

$$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\bigcap A = \sigma_A(\mathscr{C}\bigcap A),$$

这里, $\sigma_A(\mathscr{C}\bigcap A)$ 表示以 A 为全集,且由 $\mathscr{C}\bigcap A$ 生成的 σ- 域. 当然, $\sigma_\Omega(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.

证明 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\bigcap A \supseteq \mathscr{C}\bigcap A$ (由定义), 又 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\bigcap A$ 是 A 上的一个 σ-域 (按定义直接验证), 故 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\bigcap A \supseteq \sigma_A(\mathscr{C}\bigcap A)$. 反之, 令

$$\mathscr{D} = \{B \in \mathscr{P}(\Omega) : B \cap A \in \sigma_A(\mathscr{C} \cap A)\},$$

则 $\mathscr{D}$ 为 σ-域，且 $\mathscr{D} \supseteq \mathscr{C}$,故 $\mathscr{D} \supseteq \sigma_\Omega(\mathscr{C})$, 从而有 $\sigma_\Omega(\mathscr{C}) \cap A \subseteq \sigma_A(\mathscr{C} \cap A)$.

命题 1.1.10 设 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 表示数直线, 则下列集类生成相同的 σ-域.

(a) $\{(a, b] : a, b \in \mathbf{R}\}$;

(b) $\{(a, b) : a, b \in \mathbf{R}\}$;

(c) $\{[a, b] : a, b \in \mathbf{R}\}$;

(d) $\{(-\infty, b], b \in \mathbf{R}\}$;

(e) $\{(r_1, r_2) : r_1, r_2 \text{为有理数}\}$;

(f) $\{G : G \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 中的开集}\}$;

(g) $\{F : F \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 中闭集}\}$.

证明 (a)$\Longleftrightarrow$ (b): 记(a)的集合为 $\mathcal{E}_1$, (b)的集合为 $\mathcal{E}_2$. 由 $(a, b] = \bigcap_{n=1}^\infty (a, b+\frac{1}{n})$ 知 $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$, 故 $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. 同理由 $(a, b) = \bigcup_{n=1}^\infty (a, b - \frac{1}{n}]$ 知 $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, 故 $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$;

(a)$\Longleftrightarrow$ (d): $(-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^\infty (-n, b]$, $(a, b] = (-\infty, b]\backslash(-\infty, a]$;

(b) $\Longleftrightarrow$ (e): $(a, b) = \bigcup_{a<r_1<r_2<b} (r_1, r_2)$;

(b) $\Longleftrightarrow$ (c): $(a, b) = [a, b]\backslash\{a, b\}$, $\{a\} = \bigcap_{n=1}^\infty (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$;

(b) $\Longleftrightarrow$ (f): $\mathbf{R}$ 中开集 G至多可表示为可列个开区间的并;

(f) $\Longleftrightarrow$ (g): 开 (闭) 集的余集为闭 (开) 集.

定义 1.1.9 数直线 $\mathbf{R}$上由开集全体产生的 σ-域称为直线上的 Borel 域, 记为 $\mathscr{B}_\mathbf{R}$. $\mathscr{B}_\mathbf{R}$ 中的集称为(一维) Borel 集. 广义直线 $\overline{\mathbf{R}}$的 σ-域由$\{\{\infty\}, \{-\infty\}, A|A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}\}$生成,记之为$\mathscr{B}_{\overline{\mathbf{R}}}$, 其中的元也成为(一维) Borel 集.

§1.2 单调类定理

定义 1.2.1 $\mathscr{P}(\Omega)$ 中的非空子集类 $\mathscr{M}$ 称为单调类, 对任一集合序列 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathscr{M}$, 若

(1) 当 $\{A_n\}$ 递增时, 即 $A_n \subset A_{n+1}$, 必有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.

(2) 当 $\{A_n\}$ 递减时, 即 $A_n \supset A_{n+1}$, 必有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.

例 1.2.1 (i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个单调类, 每个 σ-域也是一个单调类.

(ii) $\{\emptyset, \mathbf{R}, (-\infty, a) | a \in \mathbf{R}\}$ 为单调类, 但它不是 σ-域.

命题 1.2.1 若非空 $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{C})$, 它也称为由 $\mathscr{C}$ 生成的单调类.

证明 同命题 1.1.3.

命题 1.2.2 非空子集类 $\mathscr{F}$ 为 σ-域的充要条件是 $\mathscr{F}$ 既是域又是单调类.

证明 $\Longrightarrow$ (必要性) 由命题 1.1.7 及定义 1.1.7 即得.

$\Longleftarrow$ (充分性) 由域的定义, 我们只需验证 $\mathscr{F}$ 对可数并封闭. 设 $A_n \in \mathscr{F}$ $(n \geq 1)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$. 令 $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, 则 B_n 单调上升, 且 $B_n \in \mathscr{F}$ (因 $\mathscr{F}$ 是域). 再由 $\mathscr{F}$ 是单调类知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{F}$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$. 所以 $\mathscr{F}$ 是 σ-域.

定理 1.2.1 (单调类定理) 若 $\mathscr{A}$ 为域, 则 $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

证明 首先, $\sigma(\mathscr{A}) \supset \mathscr{A}$, $\sigma(\mathscr{A})$ 又是单调类, 则有 $\sigma(\mathscr{A}) \supset \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

反之, $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \supset \mathscr{A}$. 我们将证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 是域. 分下列三步：

（1）证明：$\underline{\text{若} A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \text{则} A^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A}).}$

记

$$\mathscr{M}_1 = \{A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) : A^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}.$$

我们断言$\mathscr{M}_1$ 是单调类且包含 $\mathscr{A}$, 从而 $\mathscr{M}_1 \supset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. 事实上, 若 $A_n \in \mathscr{M}_1$ $(n \geq 1)$ 且 $A_n \uparrow$, 则 $A_n^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, $A_n^c \downarrow$, 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}_1$. 于是$\mathscr{M}_1$ 是单调类. 又 $\mathscr{A}$ 是域, 故对任何 $A \in \mathscr{A}$ 有 $A^c \in \mathscr{A}$. 故 $\mathscr{M}_1 \supset \mathscr{A}$. 从而 $\mathscr{M}_1 \supset \mathscr{M}(\mathscr{A})$, 即 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 取余封闭.

（2）证明：$\underline{\text{对任给} A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \text{有} A \cup B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \text{对所有} B \in \mathscr{A} \text{成立}.}$

记

$$\mathscr{M}_2 = \{A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) : A \cup B \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\ \forall\, B \in \mathscr{A}\}.$$

下证 $\mathscr{M}_2$ 是一个单调类. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{M}_2$ 中的单调序列, 则 $A_n, A_n^c \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, 且 $A_n \uparrow$(或 $A_n \downarrow$). 由 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 为单调类, 知对任意的 $B \in \mathscr{A}$, $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \bigcup B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \bigcup B) \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$. 由 $\mathscr{A}$ 是域易知 $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_2$, 从而知 $\mathscr{M}_2 \supset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. 这表明对任意的 $A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, 有

$$A \cup B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \forall B \in \mathscr{A}. \tag{1.2.1}$$

（3）证明：$\underline{\text{对任给} A \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \text{有} A \cup B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \text{对所有} B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) \text{成立}.}$

记:

$$\mathscr{M}_3 \triangleq \{B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}) : A \cup B \in \mathscr{M}(\mathscr{A}), \forall A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}.$$

易知 $\mathscr{M}_3$ 也是单调类. 由 (1.2.1) 知 $\mathscr{M}_3 \supset \mathscr{A}$. 故 $\mathscr{M}_3 \supset \mathscr{M}(\mathscr{A})$. 这表明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对并运算也是封闭的. 所以 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 就是一个域,从而必是一个 σ-域(命题1.2.2). 故 $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \supset \sigma(\mathscr{A})$. 综上可得 $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A})$.

下面介绍概率论中常用的另一种形式的单调类定理.

定义 1.2.2 $\mathscr{P}(\Omega)$ 中的非空子集类 $\mathscr{C}$ 称为 π 类. 若 $A, B \in \mathscr{C}$ 时, 必有 $AB \in \mathscr{C}$.

例 1.2.2 $\{[a,b]|a, b \in \mathbf{R}\}$ 是$\mathscr{P}(\mathbf{R})$中的 π 类.

定义 1.2.3 $\mathscr{P}(\Omega)$ 中的非空子集类 $\mathscr{D}$ 称为 λ 类, 若它满足:

(1) 当 $A \in \mathscr{D}$ 是必有 $A^c \in \mathscr{D}$;

(2) 当 $A, B \in \mathscr{D}$ 且 $AB = \emptyset$ 时, 则 $A + B \in \mathscr{D}$;

(3) 对递增序列 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathscr{D}$, 必有 $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{D}$.

命题 1.2.3 (a) $\mathscr{F}$ 为σ-域 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{F}$ 同时为 λ 类和 π 类;

(b) 对 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的任一子类$\mathscr{C}$, 必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 λ 类 $\lambda(\mathscr{C})$.

证明 (a) 直接验证.(b) 同命题 1.1.3.

定理 1.2.2 (a) 若 $\mathscr{C}$ 为 π 类, 则 $\lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.

(b) 若 $\mathscr{D}$ 是 λ 类,$\mathscr{C}$ 为 π 类,且$\mathscr{D} \supset \mathscr{C}$, 则 $\mathscr{D} \supset \sigma(\mathscr{C})$.

证明 (b) 由 (a) 得到, 下面仅证明 (a).

首先, $\sigma(\mathscr{C})$ 是 λ 类且 $\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{C}$, 故 $\sigma(\mathscr{C}) \supset \lambda(\mathscr{C})$. 反之, 将证 $\lambda(\mathscr{C})$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 π 类. 依据这一点, 由命题 1.2.3(1) 可知, $\lambda(\mathscr{C})$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-域, 即有 $\lambda(\mathscr{C}) \supset \sigma(\mathscr{C})$, 定理得证.

为证 $\lambda(\mathscr{C})$ 是一个 π 类, 分两步：

（1）证明：<u>对每个 $D \in \mathscr{C}$ 以及每个 $A \in \lambda(\mathscr{C})$, 都有 $AD \in \lambda(\mathscr{C})$.</u>

记

$$\mathscr{D}_1 \triangleq \{A \in \lambda(\mathscr{C}) : AD \in \lambda(\mathscr{C}) \ \forall\ D \in \mathscr{C}\}.$$

则 $\mathscr{D}_1 \supset \mathscr{C}$. 当 $A \in \mathscr{D}_1$ 时, $A^cD = (D^c \bigcup A)^c = (D^c + DA)^c \in \lambda(\mathscr{C})$ 对一切 $D \in \mathscr{C}$ 成立, 故 $A^c \in \mathscr{D}_1$, 进而易证 $\mathscr{D}_1$ 是 λ-类. 故 $\mathscr{D}_1 \supset \lambda(\mathscr{C})$. 则对每个 $D \in \mathscr{C}$ 以及每个 $A \in \lambda(\mathscr{C})$, 都有 $AD \in \lambda(\mathscr{C})$.

(2) 证明：<u>对任意 $D, A \in \lambda(\mathscr{C})$, 都有 $AD \in \lambda(\mathscr{C})$.</u>

取

$$\mathscr{D}_2 \triangleq \{A \in \lambda(\mathscr{C}) : AD \in \lambda(\mathscr{C}),\ \forall D \in \lambda(\mathscr{C})\},$$

则 $\mathscr{D}_2 \supset \mathscr{C}$. 同样可验证 $\mathscr{D}_2$ 也是 λ 类. 故 $\mathscr{D}_2 \supset \lambda(\mathscr{C})$, 即 $\mathscr{D}_2 = \lambda(\mathscr{C})$. 这就表明 $\lambda(\mathscr{C})$ 对交运算是封闭的, 故 $\lambda(\mathscr{C})$ 是一个 π 类.

§1.3 可测空间与乘积可测空间

§1.3.1 可测空间

定义 1.3.1 Ω 为一个集合, $\mathscr{F}$ 为由 Ω 的子集构成的 σ-域, 则 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称为可测空间. $\mathscr{F}$ 中的任一集合称为 $\mathscr{F}$-可测集.

概率论中的解释:

- Ω: 基本空间;
- $w\in\Omega$: 基本事件;
- $\mathscr{F}$: 基本事件 σ- 域(随机事件全体);
- $\Omega\in\mathscr{F}$: 必然事件, $\emptyset\in\mathscr{F}$ 为不可能事件.

概率可测空间: 赋予上述概率解释的可测空间.

§1.3.2 乘积可测空间

定义 1.3.2 若 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$, $1\le i\le n$ 是 n 个可测空间. 令

$$\Omega=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n):\omega_i\in\Omega_i,1\le i\le n\}=\times_{i=1}^n\Omega_i,$$

称为乘积空间. 对 $A_i\subset\Omega_i,1\le i\le n$, 集合 $A=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n):\omega_i\in A_i,1\le i\le n\}$ 称为矩形集, 记为 $A=\times_{i=1}^nA_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$. 特别地, 当每个 $A_i\in\mathscr{F}_i$ 时, $A=\times_{i=1}^nA_i$ 又称为可测矩形.

命题 1.3.1 若 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i),1\le i\le n$ 是 n 个可测空间, $\Omega=\times_{i=1}^\infty\Omega_i$, $\mathscr{C}$ 表示 Ω 中可测矩形全体, 则 $\mathscr{C}$ 是一个半域, 而互不相交的可测矩形的有限并全体 $\mathscr{A}$ 是一个域.

证明 先验证 $\mathscr{C}$ 是一个半域: (1) $\emptyset=\emptyset\times\cdots\times\emptyset\in\mathscr{C}$, $\Omega=\times_{i=1}^n\Omega_i\in\mathscr{C}$.
(2)若 $A=\times_{i=1}^nA_i$, $B=\times_{i=1}^nB_i$, 则 $AB=\times_{i=1}^nA_iB_i\in\mathscr{C}$.
(3)若 $A=\times_{i=1}^nA_i$, 则

$$A^c=A_1^c\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n+\sum_{i=2}^nA_1\times\cdots\times A_{i-1}\times A_i^c\times\Omega_{i+1}\times\cdots\times\Omega_n.$$

再利用命题 1.1.4 即得 $\mathscr{A}$ 是一个域.

定义 1.3.3 若 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i),1\le i\le n$ 是 n 个可测空间, $\mathscr{C}$ 表示 $\Omega=\times_{i=1}^n\Omega_i$ 中可测矩形全体. 在 Ω 上, $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$ 称为乘积 σ-域, 并记为$\mathscr{F}=\times_{i=1}^n\mathscr{F}_i$. 又 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称为乘积可测空间, 记为$(\Omega,\mathscr{F})=\times_{i=1}^n(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$.

命题 1.3.2 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i),1\le i\le n$ 是 n 个可测空间,

$$\times_{i=1}^n\Omega_i=(\times_{i=1}^m\Omega_i)\times(\times_{i=m+1}^n\Omega_i), \tag{1.3.1}$$

$$\times_{i=1}^n\mathscr{F}_i=(\times_{i=1}^m\mathscr{F}_i)\times(\times_{i=m+1}^n\mathscr{F}_i), \tag{1.3.2}$$

$$\times_{i=1}^n(\Omega_i,\mathscr{F}_i)=(\times_{i=1}^m(\Omega_i,\mathscr{F}_i))\times(\times_{i=m+1}^n(\Omega_i,\mathscr{F}_i)). \tag{1.3.3}$$

证明 (1.3.1)式是显然的. 为证明(1.3.2)式, 记

$$\Omega = \times_{i=1}^n \Omega_i,\ \mathscr{H}_1 = \times_{i=1}^m \mathscr{F}_i,\ \mathscr{H}_2 = \times_{i=m+1}^n \mathscr{F}_i,\ \mathscr{F} = \times_{i=1}^n \mathscr{F}_i.$$

先证明: 对$A \in \mathscr{H}_1$,

$$A \times \Omega_{m+1} \times \cdots \times \Omega_n \in \mathscr{F}. \tag{1.3.4}$$

记$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{H}_1 :\ A \times \Omega_{m+1} \times \cdots \times \Omega_n \in \mathscr{F}\}$. 容易验证, $\mathscr{D}$包含$\mathscr{H}_1$中可测矩形全体$\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$又是一个σ-域, 故$\mathscr{D} \supset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{H}_1$, 即(1.3.4)式成立. 同理可得, 对$B \in \mathscr{H}_2$, $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \times B \in \mathscr{F}$.

再来证明: $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 = \mathscr{F}$. 按乘积$\sigma$-域的定义,

$$\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 = \sigma_\Omega(\{A \times B : A \in \mathscr{H}_1, B \in \mathscr{H}_2\}).$$

因为$A \times B = (A \times \Omega_{m+1} \times \cdots \times \Omega_n) \bigcap (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \times B) \in \mathscr{F}$, 所以$\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \subset \mathscr{F}$. 反之, $\mathscr{F} = \sigma(\{\times_{i=1}^n A_i :\ A_i \in \mathscr{F}_i, 1 \le i \le n\})$, 由于

$$\times_{i=1}^n A_i = (\times_{i=1}^m A_i) \times (\times_{i=m+1}^n A_i) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2,$$

因此, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$, (1.3.2)式得证. (1.3.3)式是(1.3.1)式、(1.3.2)式的直接推论.

命题 1.3.3 若 $(\Omega_i, \mathscr{F}_i), 1 \le i \le n$ 是 n 个可测空间,

$$(\Omega, \mathscr{F}) = \times_{i=1}^n (\Omega_i, \mathscr{F}_i),$$

则对任一 $A \in \mathscr{F}$ 及任意固定的 $(\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \times_{i=1}^m \Omega_i$, 截口集

$$A(\omega_1, \cdots, \omega_m) = \{(\omega_{m+1}, \cdots, \omega_n) : (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in A\} \in \times_{i=m+1}^n \mathscr{F}_i. \tag{1.3.5}$$

证明 对任一固定的 $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$, 记

$$\mathscr{H} \triangleq \{A \in \mathscr{F} : A(\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \times_{i=m+1}^n \mathscr{F}_i\}.$$

若 $A = \times_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathscr{F}_i$, 则

$$A(\omega_1, \cdots, \omega_m) = \begin{cases} \times_{i=m+1}^n A_i, & \text{当 } \omega_i \in A_i, 1 \le i \le m; \\ \emptyset, & \text{其他}, \end{cases}$$

故 $A(\omega_1, \cdots, \omega_m) \in \times_{i=m+1}^n \mathscr{F}_i$. 因此, 若以 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 中可测矩形全体时,便有 $\mathscr{H} \supset \mathscr{C}$. 由 $(A(\omega_1, \cdots, \omega_m))^c = A^c(\omega_1, \cdots, \omega_m)$; $(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)(\omega_1, \cdots, \omega_m) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 可得, $\mathscr{H}$ 是一个 σ-域. $\mathscr{H} \supset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$, 故 $\mathscr{H} = \mathscr{F}$, 即 (1.3.5) 成立.

定义 1.3.4 若 $\{(\Omega_\alpha, \mathscr{F}_\alpha, \alpha \in J)\}$ 为一族可测空间, 则

$$\Omega = \{(\omega_\alpha, \alpha \in J) : \omega_\alpha \in \Omega_\alpha, \alpha \in J\}$$

称为 $(\Omega_\alpha, \alpha \in J)$ 的乘积空间, 记为 $\Omega = \times_{\alpha \in J} \Omega_\alpha$. 若 I 为 J 的有限子集, 对 $A_\alpha \in \mathscr{F}_\alpha$, $\alpha \in I$,

$$B = \{(\omega_\alpha, \alpha \in J) \in \Omega : \omega_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in I\}$$

称 B 为有限维基底可测矩形柱, 简称为有限维矩形柱, $\times_{\alpha \in I} A_\alpha$ 称为 B 的底.

命题 1.3.4 若

$$\mathscr{C} \triangleq \{B : B\text{是以 } \times_{\alpha\in I} A_\alpha \text{ 为底的矩形柱}, A_\alpha \in \mathscr{F}_\alpha, I \text{ 是 } J \text{ 的有限子集}\},$$

其中 I 取遍 J 的一切有限子集, 即 $\mathscr{C}$ 表示有限维基底可测矩形柱全体, 则 $\mathscr{C}$ 是半域.

证明 仿命题 1.3.1.

定义 1.3.5 在 $\Omega = \times_{\alpha\in J}\Omega_\alpha$ 上, 由全体有限维矩形柱全体 $\mathscr{C}$ 所生成的 σ-代数, $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$, 称为 $\{\mathscr{F}_\alpha, \alpha \in J\}$ 的乘积 σ-代数, 记为 $\mathscr{F} = \times_{\alpha\in J}\Omega_\alpha$. 而 $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为乘积可测空间, 记为 $(\Omega, \mathscr{F}) = \times_{\alpha\in J}(\Omega_\alpha, \mathscr{F}_\alpha)$.

定义 1.3.6 在 Ω 中, 若 I 为 J 的任意子集, $A \subset \Omega_I = \times_{\alpha\in I}\Omega_\alpha$, 则

$$B = A \times \prod_{\alpha\in J\setminus I} \Omega_\alpha = \{(\omega_\alpha, \alpha \in J) \in \Omega : (\omega_\alpha, \alpha \in I) \in A\}$$

称为 Ω 中的柱集, A 称为 B 的底. 当 $A \in \times_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$, 柱集 B 称为可测的. 特别地, 当 I 为有限指标集时, B 称为有限维基底可测柱集, 当 I 为可列指标集时, B 称为可列维基底可测柱集, 且分别称为有限维柱集或可列维柱集.

命题 1.3.5 若 $\{(\Omega_\alpha, \mathscr{F}_\alpha), \alpha \in J\}$ 为一族可测空间, J 为无限指标集, $(\Omega, \mathscr{F}) = \times_{\alpha\in J}(\Omega_\alpha, \mathscr{F}_\alpha)$, 又 $\mathscr{G}$ 表示 Ω 中可列维基底可测柱集全体, 则 $\mathscr{F} = \mathscr{G}$.

证明 先证明 $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$. 若 I 为 J 的任一至多可列的子集, 记 $\Omega_I = \times_{\alpha\in I}\Omega_\alpha$, $\mathscr{F}_I = \times_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$,

$$\mathscr{H}_I = \{A \in \mathscr{F}_I : \Omega\text{中以 } A \text{ 为基底的柱集 } B \in \mathscr{F}\}.$$

若以 $\mathscr{C}_I$ 记 Ω_I 中有限维可测矩形柱全体, 则 $\mathscr{H}_I \supset \mathscr{C}_I$, 且不难验证 $\mathscr{H}_I$ 是一个 σ-域. 所以 $\mathscr{F}_I \supset \mathscr{H}_I \supset \sigma(\mathscr{C}_I) = \mathscr{F}_I$, 即 $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$.

反之, 若以 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 中有限维基底可测矩形柱全体, 则 $\mathscr{C} \subset \mathscr{G}$. 此外, 也不难验证 $\mathscr{G}$ 是 σ 域, 所以 $\mathscr{G} \supset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$. 因而 $\mathscr{F} = \mathscr{G}$.

§1.4 可测映照与随机变量

§1.4.1 可测映照

定义 1.4.1 设 f 为 Ω_1 到 Ω_2 的映照 (即对每个 $\omega_1 \in \Omega_1$ $f(\omega_1)$ 在 Ω_2 中是唯一确定的), 对 $A_2 \in \Omega_2$,

$$f^{-1}(A_2) = \{\omega_1 \in \Omega_1 : f(\omega_1) \in A_2\}$$

称为 A_2 的原象. 对 $\mathscr{P}(\Omega_2)$ 的子类 $\mathscr{A}_2$,

$$f^{-1}(\mathscr{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) : A_2 \in \mathscr{A}_2\}$$

称为 $\mathscr{A}_2$ 的原象.

命题 1.4.1 设 f 为 Ω_1 到 Ω_2 的任一映照, 则有

(a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$, $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$;

(b) $f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$, $f^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$;

(c) $f^{-1}(\sum_\alpha A_\alpha)=\sum_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$.

证明 (a) 前两个等式由定义直接验证即可. 对第三个等式, 一方面, 若$\omega\in(f^{-1}(A))^c$, 则$\omega\notin f^{-1}(A)$, 因而$f(\omega)\in A^c$, 即$\omega\in f^{-1}(A^c)$; 反之, 若$\omega\in f^{-1}(A^c)$, 则$f(\omega)\in A^c$, 因而$\omega\notin f^{-1}(A)$, 故$\omega\in(f^{-1}(A))^c$.

(b) 因为对每个α_0, $\bigcap_\alpha A_\alpha\subset A_{\alpha_0}$, 故$f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)\subset f^{-1}(A_{\alpha_0})$, 因而有

$$f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha).$$

反之, 若$\omega_0\in\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$, 则对每个$\alpha_0$, $\omega_0\in f^{-1}(A_{\alpha_0})$, 即$f(\omega_0)\in A_{\alpha_0}$, 故$f(\omega_0)\in\bigcap_\alpha A_\alpha$, 从而有$\omega_0\in f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)$, 即

$$\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)\subset f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha).$$

结合(1)易知后一个等式也成立.

(c) 由(b)知显然成立.

注 1.4.2 (1) 由命题1.4.1 可知, f^{-1} 与集合的并、交、余集、差、对称差等运算都是可交换的, 而且也不限于可列运算. 由此推出, Ω_2 上任一 σ-域$\mathscr{G}$ 的原象 $f^{-1}(\mathscr{G})$ 是 Ω_1 的 σ 域.

(2) 若 $A_1\subset\Omega_1$, 称 $f(A_1)=\{f(\omega):\omega\in A_1\}$, 则 $f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha)$. 但 f 与取余集及交的运算未必是可换的. 从而 Ω_1 中 σ 域 $\mathscr{F}_1$ 的象"$f(\mathscr{F}_1)$"未必是 Ω_2 的 σ 域.

引理 1.4.1 设 f 为 Ω_1 到 Ω_2 的映照, $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{P}(\Omega_2)$ 的子类, 则

$$\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))=f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C})).$$

证明 $\mathscr{C}\subset\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C})$, 故 $f^{-1}(\mathscr{C})\subset f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))$, 从而 $f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))\supset\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))$. 另一方面, 令

$$\mathscr{G}=\{B:f^{-1}(B)\in\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))\},$$

则 $\mathscr{G}$ 是一个 σ -域, 且 $\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$, 故 $\mathscr{G}\supset\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C})$. 从而由 $\mathscr{G}$ 的定义知 $f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))\subseteq\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))$.

定义 1.4.2 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为可测空间, f 为 Ω_1 到 Ω_2 的映照. 若 $f^{-1}(\mathscr{F}_2)\subset\mathscr{F}_1$ (即 $f^{-1}(A)\in\mathscr{F}_1$ $\forall A\in\mathscr{F}_2$), 则称 f 为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_1,\mathscr{F}_2)$ 的可测映照, 记为 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$ 或 $f\in\mathscr{F}_1$, 或称为 f 为 $\mathscr{F}_1$ 可测的. 并记 $\sigma(f)=f^{-1}(\mathscr{F}_2)$, 称为由 f 生成的 σ 域.

例 1.4.1 (i) 若 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)=(\Omega_1,\mathscr{P}(\Omega_1))$, 则 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 到的任一映照都是可测的.

(ii) 若 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)=(\Omega_1,\{\emptyset,\Omega_1\})$, 则 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(R,\mathscr{B})$ 的可测映照 f 在 Ω_1 上只取同一个值(即常值函数).

命题 1.4.3 若 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为可测空间, $\mathscr{G}\subset\mathscr{P}(\Omega_2)$, 又 $\mathscr{F}_2=\sigma(\mathscr{G})$, 则 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2\Longleftrightarrow f^{-1}(\mathscr{G})\subset\mathscr{F}_1$.

证明　$\Longrightarrow \mathscr{G} \subset \sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}_2$. 故 $f^{-1}(\mathscr{G}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{G})) = f^{-1}(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{F}_1$.

$\Longleftarrow$ 由引理 1.4.1, $f^{-1}(\mathscr{F}_2) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{G})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{G})) \subset \mathscr{F}_1$.

命题 1.4.4　设 $(\Omega_i, \mathscr{F}_i), i = 1,2,3,$ 为可测空间. 若 $g \in \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2, f \in \mathscr{F}_2/\mathscr{F}_3$, 则 $f \circ g \in \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_3$, 其中 $f \circ g(\omega_1) \triangleq f(g(\omega_1))$.

证明　由复合映照的定义, 对任意 $A \in \mathscr{F}_3$, 有 $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}_2$,

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1}(A) &= \{\omega_1 : f(g(\omega_1)) \in A\} \\ &= \{\omega_1 : g(\omega_1) \in f^{-1}(A)\} \\ &= g^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathscr{F}_1\end{aligned}$$

故 $f \circ g \in \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_3$.

§1.4.2　可测函数-随机变量

定义 1.4.3　由 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_R)$ (或 $(\overline{\mathbf{R}}, \mathscr{B}_{\overline{R}})$) 的可测映照称为可测函数. 特别, 当 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为概率可测空间时, $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_R)$ (或 $(\overline{\mathbf{R}}, \mathscr{B}_{\overline{R}})$) 可测映照 X 称为(实值)随机变量(或广义实值随机变量), 也记为 $X \in \mathscr{F}$.

对于$X \in \mathscr{F}$, 记$\{X \in [a,b]\} := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in [a,b]$.同理，定义$\{X \in (a,b]\}, \{X \leq a\}$等. 这样，由命题1.1.10和命题1.4.3知: 实值$X \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \{X \leq c\} \in \mathscr{F} (\forall c \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow \{X \in [a,b]\} \in \mathscr{F} (\forall a, b \in \mathbf{R})$.

命题 1.4.5　若 $Q = \{r_n\}$ 为 $\mathbf{R}$ 中有理数集, 则 X 为随机变量的充要条件是对每个 $r_n \in Q$, $\{\omega : X(\omega) \leq r_n\} \in \mathscr{F}$.

证明　$\Longrightarrow \{\omega : X(\omega) \leq r_n\} = X^{-1}((-\infty, r_n]) \in \mathscr{F}$.

$\Longleftarrow$ 取 $\mathscr{G} = \{(-\infty, r_n] : r_n \in Q\}$, 则 $f^{-1}(\mathscr{G}) \in \mathscr{F}$, 且 $\sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{B}_R$, 由命题 1.4.3可知成立.

命题 1.4.6　若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为随机变量, 则

$$\sup_{n \geq 1} X_n, \quad \inf_{n \geq 1} X_n, \quad \varliminf_{n \to \infty} X_n, \quad \varlimsup_{n \to \infty} X_n,$$

均为随机变量.

证明

$$\{\sup_n X_n \leq c\} = \bigcap_n \{X_n \leq c\} \in \mathscr{F},$$

$$\{\inf_n X_n < c\} = \bigcup_n \{X_n < c\} \in \mathscr{F},$$

$$\{\inf_n X_n \leq c\} = \bigcap_k \{\inf_n X_n < c + 1/k\} \in \mathscr{F},$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} X_n = \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} X_n \in \mathscr{F},$$

$$\varliminf_{n \to \infty} X_n = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} X_n \in \mathscr{F}.$$

注记 此处 $\{\inf_n X_n \le c\} \ne \bigcup_n \{X_n \le c\}$.

定义 1.4.4 若存在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 的一个有限分割 $\{A_i, i \in I\}$ (即 I 为有限的, $A_i \in \mathscr{F}$, $A_iA_j = \emptyset (i \ne j)$, $\sum_{i\in I} A_i = \Omega$) 及互不相同的实数 $\{x_i, i \in I\}$, 使 Ω 上的函数 X 可表示为

$$X(\omega) = x_i, \text{ 当 } \omega \in A_i, i \in I,$$

则称 X 为阶梯随机变量.

注记 事实上，不妨设 $I = \{1, 2, ..., m\}$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, 则 $\forall r \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}((-\infty, r]) = \begin{cases} \emptyset, \quad r < x_1; \\ A_1, \quad x_1 \le r < x_2; \\ A_1 + A_2, \quad x_2 \le r < x_3; \\ \cdots \\ A_1 + \cdots + A_{m-1}, \quad x_{m-1} \le r < x_m; \\ \Omega, \quad x_m \le r. \end{cases}$$

命题 1.4.7 设 X 和 Y 是两个阶梯随机变量, 则

(a) 对任意实数 $a, b \in R$, $aX + bY$ 仍是一个阶梯随机变量.

(b) XY 是一个阶梯随机变量.

(c) $X \vee Y = \sup\{X, Y\}$ 和 $X \wedge Y = \inf\{X, Y\}$ 仍是阶梯随机变量.

证明 (a) 设 $X = \sum_{i\in I} x_i I_{A_i}$, $Y = \sum_{j \in J} y_j I_{B_j}$, 则有 $aX+bY = \sum\limits_{i\in I, j\in J} (ax_i+by_j) I_{A_iB_j}$. 若将 A_iB_j 中的空集除去, 并把 $ax_i + by_j$ 取相同值 z_k 的 A_iB_j 合并为一个集 C_k, 则 $aX + bY = \sum_k z_k I_{C_k}$, 其中 $\{z_k\}$ 互不相同, $\{C_k\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 的一个有限分割.

(b) $XY = \sum_{i,j} x_i y_j I_{A_iB_j}$. 然后同上整理可得 XY 仍为阶梯随机变量.

(c) $X \vee Y = \sum_{i,j} (x_i \vee y_j) I_{A_iB_j}$, $X \wedge Y = \sum_{i,j} (x_i \wedge y_j) I_{A_iB_j}$.

命题 1.4.8 X 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的随机变量$\Longleftrightarrow$ 存在阶梯随机变量序列$\{X_n, n \ge 1\}$, 使

$$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), \ \forall \omega \in \Omega.$$

且当 X 为非负时, $\{X_n\}$ 可取成是非负递增的; 当 $|X| \le M$ 时, $\{X_n\}$ 也可取成 $|X_n| \le M$ 的且收敛是一致的.

证明 $\Longleftarrow$ 由命题 1.4.6 知.

$\Longrightarrow$ 先设 X 为非负的, 取

$$X_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{\{\frac{k}{2^n} \le X < \frac{k+1}{2^n}\}} + n I_{\{X \ge n\}}, \tag{1.4.1}$$

则 X_n 为阶梯随机变量, 在 $\{X < n\}$ 上, $0 \le X - X_n \le \frac{1}{2^n}$; 在 $\{X \ge n\}$ 上, $X_n = n \le X$. 随 n 增加 X_n 是递增的, 故对每个 $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega).$$

对一般的 X, 取 $X^+ = X \vee 0, X^- = (-X) \vee 0$, 则 X^+, X^- 都是非负随机变量, 且 $X = X^+ - X^-$. 对 X^+ 和 X^- 分别存在点点收敛的阶梯随机变量 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$, 使得 $X^+ = \lim_{n\to\infty} Y_n, X^- = \lim_{n\to\infty} Z_n$. 从而有 $X = \lim_{n\to\infty}(Y_n - Z_n) \in \mathscr{F}$.

特别, 当 (1.4.1) 式可以看出: 当 $X \geq 0$ 时, $X_n \geq 0$ $(n \geq 1)$, 当 $|X| \leq M$ 时, $|X_n| \leq M$ $(n \geq 1)$，且当 $n \geq [M]+1$ 时，$0 \leq |X - X_n| \leq \frac{1}{2^n}$.

命题 1.4.9 若 X, Y 为随机变量, 则对任意实数 a, b,

(a) 只要 $aX + bY, XY, X/Y, X \vee Y, X \wedge Y$ 对每个 ω 有意义 (即不发生 $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot \infty, 0/0, \infty/\infty$ 等情况), 它们都是随机变量.

(b) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为随机变量列, 则 $\{\omega : \overline{\lim}_n X_n(\omega) = \underline{\lim}_n X_n(\omega)\}$ 是 $\mathscr{F}$ 可测的.

证明 (a) 由命题 1.4.6 及 1.4.8 知结论成立.

(b) 由命题 1.4.6, $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \mathscr{F}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \mathscr{F}$, 故 $\{\omega : \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = \{\omega : \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) - \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\} \in \mathscr{F}$.

定义 1.4.5 若 $\mathscr{F}_1$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域, 且 $f \in \mathscr{F}_1/\mathscr{B}_{\overline{R}}$, 则称 f 为 $\mathscr{F}_1$ 可测, 记为 $f \in \mathscr{F}_1$.

定理 1.4.1 (Doob) 若 f 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 的可测映照, $\sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{E})$, 则 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的随机变量 X 为 $\sigma(f)$ 可测的充要条件是存在 $(E, \mathscr{E})$ 上的随机变量 h, 使得 $X = h \circ f$.

证明 $\Longleftarrow X^{-1}(\mathscr{B}_R) = (h \circ f)^{-1}(\mathscr{B}_R) = f^{-1}(h^{-1}(\mathscr{B}_R)) \subset f^{-1}(\mathscr{E})$.

$\Longrightarrow$ 若 $X = \sum_{i\leq n} a_i I_{A_i}$ 为 $\sigma(f)$ 可测阶梯随机变量, 则由 $A_i \in \sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{E})$, 则存在 $B_i \in \mathscr{E}$ 使得 $A_i = f^{-1}(B_i)$. 取$C_i := B_i \setminus (\cup_{j<i} B_j)$. 则 $\{C_i\}$ 也互不相交, 且 $f^{-1}(C_i) = A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j) = A_i$. 令 $h = \sum_{i\leq n} a_i I_{C_i}$, 则 h 为 $(E, \mathscr{E})$ 上的阶梯随机变量, 且当 $\omega \in A_i$ 时, $f(\omega) \in C_i, h(f(\omega)) = a_i = X(\omega)$, 即 $X = h \circ f$.

对一般的 X, 由命题 1.4.8, 存在 $\sigma(f)$ 可测阶梯随机变量序列 X_n, 使得 $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, 而 X_n 可表为 $X_n = h_n \circ f$, 其中 h_n 为 $(E, \mathscr{E})$ 上的随机变量, 取 $h = \overline{\lim}_{n\to\infty} h_n$, 则 $h \in \mathscr{E}$, 且

$$h \circ f(\omega) = (\overline{\lim_{n\to\infty}} h_n) \circ f(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

§1.4.3 函数形式的单调类定理

定义 1.4.6 设 $\mathscr{L}$ 为 Ω 上的函数族, 它满足: 当 $X \in \mathscr{L}$ 时, $X^+, X^- \in \mathscr{L}$. Ω 上的函数族 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{L}$ 类, 若它满足:

(i) $1 \in \mathscr{H}$;

(ii) $\mathscr{H}$ 是线性空间;

(iii) 设 $X_n \geq 0, X_n \in \mathscr{H}, X_n \uparrow X$, 且 X 有界或 $X \in \mathscr{L}$, 则 $X \in \mathscr{H}$.

定理 1.4.2 (函数形式的单调类定理) 若 π 类 $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, 又 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一个 $\mathscr{L}$ 类, 且 $\mathscr{H} \supset \{I_A : A \in \mathscr{G}\}$, 则 $\mathscr{H}$ 包含 Ω 上一切属于 $\mathscr{L}$ 的 $\sigma(\mathscr{G})$ 可测函数.

证明 令 $\mathscr{F}_1=\{A: I_A\in\mathscr{H}\}$, 则 $\mathscr{F}_1\supset\mathscr{G}$. 先证明 $\mathscr{F}_1$ 是 λ 类. 由 $\mathscr{L}$ 类 $\mathscr{H}$的定义知: 若 $A\in\mathscr{F}_1$, 则 $I_{A^c}=1-I_A\in\mathscr{H}$, 故 $A^c\in\mathscr{F}_1$; 若 $A,B\in\mathscr{F}_1$ 且 $AB=\emptyset$, 则 $I_{A+B}=I_A+I_B\in\mathscr{H}$, 故 $A+B\in\mathscr{F}_1$; 又由 (3), 若 $\{A_n,n\geq 1\}$ 为 $\mathscr{F}_1$ 中递增序列, 则 $I_{\bigcup_n A_n}=\lim_{n\to\infty}I_{A_n}\in\mathscr{H}$, 故 $\bigcup_n A_n\in\mathscr{F}_1$, 所以 $\mathscr{F}_1$ 是一个 λ 类. 因此, 由定理 1.2.2 可知$\mathscr{F}_1\supset\sigma(\mathscr{G})$, 即 $\sigma(\mathscr{G})$ 中每个可测集的示性函数都属于 $\mathscr{H}$. 因此, 利用 $\mathscr{L}$ 类定义中的 (2) 和 (1) 知: $\sigma(\mathscr{G})$ 可测的有界阶梯随机变量属于$\mathscr{H}$. 最后, 利用 (3) 及命题 1.4.8 可得非负的甚至一般的 $\sigma(\mathscr{G})$ 可测函数 X, 只要它属于 $\mathscr{L}$, 都有 $X\in\mathscr{L}$. 定理可证.

注 1.4.10 使用上述单调类定理时, $\mathscr{L}$ 常取为 Ω 上 $\sigma(\mathscr{G})$ 可测函数全体、Ω 上有限可测函数全体或其积分满足某些要求的 $\sigma(\mathscr{G})$ 可测函数全体, 而 $\mathscr{H}$ 常取为具有某些特征的函数全体. 这时上述定理说明, 属于 $\mathscr{L}$ 的 $\sigma(\mathscr{G})$ 可测函数具有 $\mathscr{H}$ 的性质.

命题 1.4.11 设 $(\Omega,\mathscr{F})=(\Omega_1,\mathscr{F}_1)\times(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为乘积空间, f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(R,\mathscr{B}_R)$ 的可测函数, 则对任给 $\omega_1\in\Omega_1$, $g(\omega_2)\triangleq f(\omega_1,\omega_2)$ 是 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 到 $(R,\mathscr{B}_R)$ 的可测函数.

证明 记 $\mathscr{G}=\{A_1\times A_2: A_1\in\mathscr{F}_1, A_2\in\mathscr{F}_2\}$. 则 $\mathscr{G}$ 为 π 类, 且 $\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{F}$. 又取 $\mathscr{L}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的随机变量全体.

$\mathscr{H}=\{h(\omega_1,\omega_2)\in\mathscr{F}: h(\omega_1,\cdot)\in\mathscr{F}_2\}$, 则容易验证 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{L}$ 类, 且由命题 1.3.3 知, $\mathscr{H}\supset\{I_A: A\in\mathscr{G}\}$, 故由函数形式的单调类定理 1.4.2 知, $\mathscr{H}$ 包含 $\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{F}$ 可测随机变量全体.

§1.4.4 多维随机变量

定义 1.4.7 若 $X_1,\cdots,X_n$ 为 n 个随机变量, 则 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量, 也称随机向量.

命题 1.4.12 $X=(X_1,\cdots,X_n)$为n维随机变量的充要条件是X为$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n_{\mathbf{R}})$的可测映照, 且 $\sigma(X)=\sigma(X_i,1\leq i\leq n)$. 其中 $\sigma(X_i,1\leq i\leq n)=\sigma\{\cup_{1\leq i\leq n}\sigma(X_i^{-1}(\mathscr{B}_{\mathbf{R}}))\}$ 表示使 X_i, $1\leq i\leq n$ 这族随机变量可测的最小 σ-域.

证明 $\Longrightarrow$ 设 $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{B}^n_{\mathbf{R}}$ 中可测矩形全体, 对任意 $A=\times_{i=1}^n A_i\in\mathscr{G}$, 则有

$$\begin{aligned} X^{-1}(A) &= \{\omega: X(\omega)\in A\}=\bigcap_{i=1}^n\{\omega: X_i(\omega)\in A_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i)\in\sigma(X_i,1\leq i\leq n)\subset\mathscr{F}. \end{aligned}$$

故由命题 1.4.3 知, $X\in\mathscr{F}/\mathscr{B}^n_{\mathbf{R}}$, 且 $\sigma(X)\subset\sigma(X_1,\cdots,X_n)$.

$\Longleftarrow$ 对任意 $i, 1\leq i\leq n$, 若 $A_i\in\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, 取 $A=\mathbb{R}\times\cdots\times A_i\times\cdots\times\mathbb{R}$, 则 $X_i^{-1}(A_i)=X^{-1}(A)\in\sigma(X)\subset\mathscr{F}$. 即 X_i 为随机变量, 而且 $\sigma(X_i)\subset\sigma(X)$. 故 $X_1,\cdots,X_n$ 为 n 个随机变量, 而且 $\sigma(X_i,1\leq i\leq n)\subset\sigma(X)$.

注记 命题1.4.12中 n 可取无限情形.

定义 1.4.8 若 f 为 $(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n_{\mathbf{R}})$ 到 $(R,\mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ 的可测函数, 则称 f 为 n 元 Borel 可测函数 (或简称 Borel 函数). 可列维乘积空间 $(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty_{\mathbf{R}})$ 到 $(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ 的可测函数也称为 Borel 函数.

命题 1.4.13 若 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维随机变量, 则有限随机变量 Y 为 $\sigma(X)$ 可测的充要条件是存在 n 元 Borel 函数 $h(x_1,\cdots,x_n)$, 使

$$Y=h(X_1,\cdots,X_n).$$

证明 这是定理 1.4.2 的特例.

命题 1.4.14 设 $\{X_i,i\in J\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一族随机变量, 则有:

(a) Ω 上有限实值函数 Y 为 $\sigma(X_i,i\in J)$ 可测随机变量的充要条件是存在至多为可列的子集 $I\subset J$ 及 Borel 函数 f, 使得: $Y=f(X_i,i\in I)$.

(b) 若 $A\in\sigma(X_i,i\in J)$, 则必有 J 的至多可列的子集 I, 使得 $A\in\sigma(X_i,i\in I)$.

证明 (a) $\Longleftarrow$ 显然成立.

下证必要性. 令

$$\mathscr{G}=\{\bigcap_{j=1}^{n}A_{i_j}:A_{i_j}\in\sigma(X_{i_j}),i_j\in J,1\le j\le n,n\ge 1\},$$

$\mathscr{G}$ 是一个 π 类, 且 $\sigma(\mathscr{G})=\sigma(X_i,i\in J)$. 又令 $\mathscr{L}$ 为有限实值随机变量全体.

$$\mathscr{H}\triangleq\{Z:Z=g(X_i,i\in I),I\text{ 至多可列},I\subset J,g\text{ 为 Borel 函数}\},$$

则容易验证: $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{L}$ 类, 且 $\mathscr{H}\supset\{I_A:A\in\mathscr{G}\}$, 故由函数形式的单调类定理 1.4.2, $\mathscr{H}$ 包含 $\sigma(\mathscr{G})$ 可测的有限实值随机变量全体. 即对一切 $\sigma(X_i,i\in I)=\sigma(\mathscr{G})$ 可测有限随机变量为至多可列个 $\{X_i,i\in I\}$ 的 Borel 函数.

(b) 由 $I_A\in\sigma(X_i,i\in J)$. 故由 (a) 存在至多可列的子集 I 及 Borel 函数 f, 使得 $I_A=f(X_i,i\in I)$. 所以 $A\in\sigma(X_i,i\in I)$.

注 1.4.15 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{L}$ 类的证明: i) 任取 $i\in I$ 和 $g(x)\equiv 1$, 则有 $g(X_i)=1$, 故 $1\in\mathscr{H}$; ii) 若 $Z_1,Z_2\in\mathscr{H}$, $a,b\in R$, 则有函数 g_1,g_2 使得$aZ_1+bZ_2=ag_1(X_i,i\in I_1)+bg_2(X_j,j\in I_2)$. 定义 $g(x_i,i\in I_1\cup I_2)\triangleq ag_1(x_i,i\in I_1)+bg_2(x_j,j\in I_2)$, 则 g 为 Borel 函数; (iii) 将 ii) 推广到可列情形, 由命题1.4.6 可知, $\mathscr{H}$ 对单调运算封闭.

§1.5 习题

1. 若 $\{A_n, n\geq 1\}$ 为互不相交的集合序列，证明 $\lim_{n\to\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}A_j=\emptyset$.

2. 证明：

   (1) $(\underline{\lim}_n A_n)^c=\overline{\lim}_n A_n^c$；

   (2) $\overline{\lim}_n(A_n\bigcup B_n)=\overline{\lim}_n A_n\bigcup\overline{\lim}_n B_n$；

   (3) $\underline{\lim}_n(A_nB_n)=(\underline{\lim}_n A_n)(\underline{\lim}_n B_n)$；

   (4) $\underline{\lim}_n A_n\,\overline{\lim}_n B_n\subset\overline{\lim}_n(A_nB_n)\subset\overline{\lim}_n A_n\,\overline{\lim}_n B_n$.

3. 证明：

   (1) $A\triangle B=A^c\triangle B^c,\qquad C=A\triangle B\Longleftrightarrow A=B\triangle C$

   (2) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$；

   (3) 若 $A\bigcup N_1=B\bigcup N_2$，则 $A\triangle B\subset N_1\bigcup N_2$；

   (4) 若 $A\triangle N_1=B\triangle N_2$，则 $A\triangle B=N_1\triangle N_2\subset N_1\bigcup N_2$；

   (5) $(\bigcup_n A_n)\triangle(\bigcup_n B_n)\subset\bigcup_n(A_n\triangle B_n)$； $\quad(\bigcap_n A_n)\triangle(\bigcap_n B_n)\subset\bigcup_n(A_n\triangle B_n)$.

4. 对任何集合序列 $\{A_n, n\geq 1\}$，令 $B_1=A_1$，$B_{n+1}=B_n\triangle A_{n+1}, n\geq 1$. 证明：此时 $\lim_n B_n$ 存在当且仅当 $\lim_n A_n=\emptyset$.

5. 证明：f 为集合示性函数的充要条件是 $f^2=f$.

6. 若 $\{\mathscr{F}_j, j\geq 1\}$ 为 Ω 递增 σ 域，即 σ 域 $\mathscr{F}_j\subset\mathscr{F}_{j+1}$, 则 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j$ 是一个域，但不一定是 σ 域.

7. 设 $\Omega=\sum_{n\geq 1}A_n, \{A_n, n\geq 1\}$ 互不相交,证明: $\sigma(A_n, n\geq 1)=\Big\{\sum_{j\geq 1}A_{n_j}:\{A_{n_j}\}$ 为 $\{A_n\}$ 的有限或无限子列 $\Big\}$. 并说明可列生成 σ 域 $\mathscr{F}$ 未必能找到 Ω 的可列分割 $\Omega=\sum_{n\geq 1}A_n$, 使得 $\mathscr{F}=\sigma(A_n, n\geq 1)$.

8. 设 X, Y 为两个随机变量，若对每个实数 $c\in\mathcal{R}$, 有 $\{X<c\}\subset\{Y<c\}$. 证明 $X\geq Y$.

9. 若 X 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r.v., 则 X^+, X^-, $|X|$ 亦为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r.v..

10. 证明定理(Doob)1.4.1的充分性.

11. 若 $h(x,y)$ 是 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照, 又 $f(u,v)$ 是 $(U_1\times U_2,\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2)$ 到 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 的可测映照, $g(u,v)$ 是 $(U_1\times U_2,\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 的可测映照. 证明

$$X(u,v)=h(f(u,v),g(u,v))$$

是 $(U_1\times U_2,\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2)$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照.

第二章　测度

§2.1　测度与测度空间

§2.1.1　测度空间

定义 2.1.1　设 Ω 为一非空集合(空间), $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathscr{G}$ 上实值 (可取 $\pm\infty$) 函数 μ 称为集函数.

(1) 若对每个 $A \in \mathscr{G}$, $|\mu(A)| < \infty$, 称 μ 为有限的;

(2) 若对每个 $A \in \mathscr{G}$, 存在 $\{A_n, n \geq 1\} \in \mathscr{G}$, 使 $A = \bigcup\limits_n A_n$, 且对每个 n, $|\mu(A_n)| < \infty$, 称 μ 为在 $\mathscr{G}$ 上为 σ 有限的, 简称为 σ 有限的;

(3 若对任意 $A, B \in \mathscr{G}$, $A \cap B = \emptyset$, 且 $A + B \in \mathscr{G}$, 都有 $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$, 则称 μ 在 $\mathscr{G}$ 上为有限可加的.

(4) 若对任意 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathscr{G}$, $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, 且 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{G}$, 则 $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, 则称 μ 在 $\mathscr{G}$ 上为 σ 可加的或 可列可加的.

注 2.1.1　若 μ 为 σ 可加的, 且 $\emptyset \in \mathscr{G}$, $\mu(\emptyset) = 0$, 则 μ 为有限可加的. 又若 μ 为有限可加的, $\emptyset \in \mathscr{G}$, $\mu(\emptyset) \neq \pm\infty$, 则 $\mu(\emptyset) = 0$.

定义 2.1.2　设 Ω 为一非空集合(空间), $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, 且 $\emptyset \in \mathscr{G}$, $\mathscr{G}$ 上集函数 μ 称为测度*(又称正测度)*, 若它满足:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) μ 为非负的, 即 $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{G}$;

(3) μ 为可列可加的.

若 $\Omega \in \mathscr{G}$, 且 $\mathscr{G}$ 上的测度 μ 满足 $\mu(\Omega) = 1$, 则称 μ 为*概率测度*, 事件 A 的概率测度值 $\mu(A)$ 称为 A 的概率.

例 2.1.1　在 $\mathscr{P}(\Omega)$ 上规定 μ 如下: 当 A 为有限集时, $\mu(A) = \sharp\{A\}$ (即 A 包含的元素个数), 当 A 为无限集时, $\mu(A) = +\infty$. 这时 μ 便是 $\mathscr{P}(\Omega)$ 上的测度, 也称为计数测度, 且 μ 为有限的 $\Longleftrightarrow$ Ω 为有限集. 当 Ω 为可列集时, μ 为 σ 有限的. 又取

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{P}(\Omega) : A\text{或 } A^c \text{ 为有限集(或空集)}\}$$

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ 为有限集} \\ 1 & A \text{ 为无限集} \end{cases}$$

则易证 ν 在 $\mathscr{A}$ 上是有限可加的, 但当 Ω 为无限集时, ν 不是可列可加的.

定义 2.1.3　若 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间, μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度, 则 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 称为*测度空间*; 当 P 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度时, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 称为*概率空间*.

§**2.1.2 半域上的测度及其延拓与生成**

定义 2.1.4 $\mathscr{G},\mathscr{D}$ 为 Ω 的子集构成的集类,$\mathscr{G}\subset\mathscr{D}$, 又 μ,ν 分别为$\mathscr{G},\mathscr{D}$ 上的集函数. 若对每个 $A\in\mathscr{G}$, $\mu(A)=\nu(A)$, 则称 ν 为 μ 在$\mathscr{D}$ 上的延拓或扩张, μ 为 ν 在 $\mathscr{G}$ 上的限制, 并记 $\mu=\nu|_{\mathscr{G}}$.

命题 2.1.2 设 $\mathscr{I}$ 为 Ω 上的半域, μ 为 $\mathscr{I}$ 上的非负可加 (有限或可列) 集函数. 则存在 μ 在由 $\mathscr{I}$ 张成的域 $\mathscr{A}(\mathscr{I})$ 上的唯一延拓 ν, ν 在 $\mathscr{A}(\mathscr{I})$ 亦是非负可加的; 且当 μ 为可列可加时, ν 亦为可列可加的; μ 为概率测度时, ν 亦为概率测度.

证明 由命题1.1.4,

$$\mathscr{A}(\mathscr{I})=\{A=\sum_{i\in I}S_i:\{S_i,i\in I\}\text{ 为 }\mathscr{I}\text{中两两互不相交的有限族}\}.$$

对$A=\sum_{i\in I}S_i\in\mathscr{A}(\mathscr{I})$, 令

$$\nu(A)=\sum_{i\in I}\mu(S_i).$$

(1) 证明这样规定ν是合理的. 若$A=\sum_{i\in I}S_i=\sum_{j\in J}T_j$都表为$\mathscr{I}$中不相交有限个集合的并, 则由

$$\nu(A)=\sum_{i\in I}\mu(S_i)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mu(S_iT_j)=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\mu(S_iT_j)=\sum_{j\in J}\mu(T_j)$$

可知, ν定义是合理的, 且由ν的定义可看出ν是μ的延拓.

(2) 证明ν的可加性. 若$A=\sum_{j\in J}A_j\in\mathscr{A}(\mathscr{I})$, J 为有限(可列)指标集. 由于A,A_j都属于$\mathscr{A}(\mathscr{I})$, 故可表为

$$A=\sum_{k\in K}S_k,\qquad A_j=\sum_{i\in I_j}T_i^{(j)},$$

其中, K,I_j为有限(可列)指标集, $S_k,T_i^{(j)}\in\mathscr{I}$, 所以,

$$S_k=S_kA=S_k\left(\sum_{j\in J}A_j\right)=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}S_kT_i^{(j)},$$

$$T_i^{(j)}=T_i^{(j)}A=T_i^{(j)}\sum_{k\in K}S_k=\sum_{k\in K}T_i^{(j)}S_k.$$

由于μ在$\mathscr{I}$上满足有限(可列)可加性且K,I_j为有限(可列), 故有

$$\begin{aligned}\nu(A)&=\sum_{k\in K}\mu(S_k)=\sum_{k\in K}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\mu(S_kT_i^{(j)})\\&=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\sum_{k\in K}\mu(S_kT_i^{(j)})=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\mu(T_i^{(j)})=\sum_{j\in J}\nu(A_j),\end{aligned}$$

即ν在$\mathscr{A}(\mathscr{I})$上为有限(可列)可加的.

(3) 证明唯一性. 若ν^*也是μ在$\mathscr{A}(\mathscr{I})$上的延拓, 当$A\in\mathscr{A}(\mathscr{I})$, 必有$A=\sum_{j\in J}\nu(S_j)$, $S_j\in\mathscr{I}$. 这时,

$$\nu^*(A)=\sum_{j\in J}\nu^*(S_j)=\sum_{j\in J}\mu(S_j)=\nu(A),$$

所以μ在$\mathscr{A}(\mathscr{I})$上的延拓是唯一的.

命题 2.1.3 若 μ 为域 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\Omega)$ 上的非负有限可加集函数, 则

(a) μ 是单调的, 即当 $A,B\in\mathscr{A}, A\subset B$, 必有 $\mu(A)\le\mu(B)$;

(b) μ 是半可加的: 若 $A,A_m\in\mathscr{A}(m=1,\ldots,n), A\subset\bigcup_{m=1}^n A_m$, 则 $\mu(A)\le\sum_{m=1}^n\mu(A_m)$;

(c) μ 是 σ 可加的 $\Longleftrightarrow$ 对每个递增序列 $\{A_n\}$, 只要 $\bigcup_n A_n\in\mathscr{A}$, 便有 $\lim_{n\to\infty}\uparrow\mu(A_n)=\mu(\bigcup_n A_n)$.

(d) 若 μ 是 σ 可加的, 则对每个递减序列 $\{A_n\}$, 只要 $\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}$, 且存在 n_0, 使 $\mu(A_{n_0})<\infty$, 便有 $\lim\limits_{n\to\infty}\downarrow\mu(A_n)=\mu(\bigcap_n A_n)$. 反之, 若对每个 $A_n\downarrow,\bigcap_n A_n=\emptyset$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$, 则 μ 必是 σ 可加的.

证明 (a) 若 $A\subset B$, 则$B=A+(B-A), \mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\ge\mu(A)$.

(b) 若 $A\subset\bigcup_{m=1}^n A_m$, 由命题1.1.1, $\bigcup_{m=1}^n A_m=\sum_{m=1}^n(A_m\setminus\bigcup_{j<m}A_j)$, 故由(1),

$$\mu(A)\le\mu(\bigcup_{m=1}^n A_m)=\sum_{m=1}^n\mu(A_m\setminus\bigcup_{j<m}A_j)\le\sum_{m=1}^n\mu(A_m).$$

(c) $\Longrightarrow$ 记$A=\bigcup_n A_n$, 由于$\{A_n\}$是递增的, 若令$A_0=\emptyset$, 则有

$$A=\sum_{m=1}^\infty(A_m-A_{m-1}),$$

所以, 若存在某m_0使得$\mu(A_{m_0})=+\infty$, 则$\mu(A)=+\infty=\sum_{m=1}^\infty\mu(A_m)$; 若对所有$m$有$\mu(A_m)<+\infty$, 则

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sum_{m=1}^\infty\mu(A_m-A_{m-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^n\mu(A_m-A_{m-1})\\ &= \lim_{n\to\infty}\mu\left(\sum_{m=1}^n(A_m-A_{m-1})\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ 若$\{B_n,n\ge1\}$为$\mathscr{A}$中互不相交序列, $\sum_{n\ge1}B_n\in\mathscr{A}$, 则取$A_n=\sum_{m\le n}B_m$, $\{A_n\}$为递增序列, 且$\cup_nA_n=\sum_nB_n\in\mathscr{A}$, 故由(3)可得

$$\mu(\sum_{n=1}^\infty B_n)=\mu(\bigcup_n A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^n\mu(B_m)=\sum_{m=1}^\infty\mu(B_m).$$

(d) $\Longrightarrow$ 不妨设 $\mu(A_1)<\infty$, 令 $B_n=A_1-A_n$, 则 $\{B_n\}$ 为递增的, $\bigcup_n B_n=A_1-\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}$, 故由 (3) 得,

$$\mu(A_1)-\mu(\bigcap_n A_n)=\mu(\bigcup_n B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n),$$

即 $\lim_n\mu(A_n)=\mu(\bigcap_n A_n)$.

$\Longleftarrow$ 若 $\{B_n\}$ 为 $\mathscr{A}$ 中互不相交序列, $\sum\limits_n B_n\in\mathscr{A}$, 则 $\sum_{m=1}^n B_m\in\mathscr{A}$, $\sum_{m=n+1}^\infty B_m\in\mathscr{A}$, 取 $A_n=\sum\limits_{j\ge n}B_j$, 则 $\{A_n\}\downarrow$ 且 $\bigcap\limits_n A_n=\emptyset$, 故由

$$\mu(\sum_{m=1}^\infty B_m) = \mu(\sum_{m=1}^n B_m)+\mu(\sum_{m=n+1}^\infty B_m)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \mu(B_m) + \mu(A_{n+1}).$$

令$n \to \infty$, 可得$\mu(\sum_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m)$.

例 2.1.2 在 $N = \{1, 2, ...\}$ 上, μ为计数测度, $A_n = \{k : k \geq n\}$. 则 $A_n \downarrow \emptyset$, 但 $\mu(A_n) = +\infty \nrightarrow 0$.

注记 例2.1.2说明"存在 n_0, 使 $\mu(A_{n_0}) < \infty$" 这个条件不能少.

系 2.1.4 若 μ 为 σ 域上的测度, $\{A_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 中序列, 则

(a) $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(b) 若对某个 n_0, $\mu(\bigcup_{n\geq n_0} A_n) < \infty$, 则 $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(c) 当 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在, 且对某个 n_0, $\mu(\bigcup_{n\geq n_0} A_n) < \infty$, 则 $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(d) (概率测度的连续性): 设 μ 为 σ 域上的概率测度，当 $\lim_{n\to\infty} A_n =: A \in \mathscr{F}$ 时，有 $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

例 2.1.3 在 $\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 上, μ 为计数测度, $A_{2n-1} = \{1\}$, $A_{2n} = \{2\}$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{1, 2\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \emptyset$.

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0 < 1 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n) < 2 = \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n).$$

命题 2.1.5 若 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ 为域, $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$, 则对每个 $A \in \mathscr{F}$ 及任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $B_\varepsilon \in \mathscr{A}$, 使 $P(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$.

证明 令

$$\mathscr{F}' = \{A \in \mathscr{F} : \forall \varepsilon > 0, \exists B_\varepsilon \in \mathscr{A}, \text{使 } P(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon\}.$$

显然, $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}'$ (因为对每个$A \in \mathscr{A}$, $P(A \triangle A) < \varepsilon$显然成立). 下证 $\mathscr{F}'$ 是一个 σ 域. 由于 $A^c \triangle B^c = A \triangle B$ 及 $\mathscr{A}$ 为域, 可推出当 $A \in \mathscr{F}'$ 时, $A^c \in \mathscr{F}'$. 若 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathscr{F}'$, 取 $B_n \in \mathscr{A}$ 及 n_0 满足

$$P(A_n \triangle B_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \backslash \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

由于

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \triangle (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \triangle B_n),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \backslash \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \backslash \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n\right)$$

则有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n \subseteq (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \backslash \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n)$$

$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\triangle B_n)\bigcup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\setminus\bigcup_{n=1}^{n_0}B_n).$$

故

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\triangle\bigcup_{n=1}^{n_0}B_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\triangle B_n)+P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\setminus\bigcup_{n=1}^{n_0}B_n)<\varepsilon,$$

从而 $\bigcup_{n\ge1}A_n\in\mathscr{F}'$. 因此, $\mathscr{F}'$ 是 σ 域, 则 $\mathscr{F}'\supset\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$.

又由于$\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$显然成立, 故$\mathscr{F}'=\mathscr{F}$, 得证.

§2.1.3　完备测度

设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间.

定义 2.1.5　设 μ 为 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的测度, 令

$$\mathscr{L}=\{A:A\in\mathscr{F},\mu(A)=0\},$$

$$\mathscr{N}=\{N\in\mathscr{P}(\Omega):\text{存在 }A\in\mathscr{L},\text{使 }N\subset A\}$$

称 $\mathscr{N}$ 中元素为 μ 可略集. 若 $\mathscr{N}\subseteq\mathscr{F}$, 则称 μ 在 $\mathscr{F}$ 上为完备的. 此时，称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为完备测度空间.

由此定义可见, 完备性的要求与 $\mathscr{F}$ 及测度 μ 都是有关的.

定理 2.1.1　(完备化扩张) 若 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间, $\mathscr{N}$ 为 μ 可略集全体, 则

(a) $\overline{\mathscr{F}}=\{A\bigcup N:A\in\mathscr{F},N\in\mathscr{N}\}$ 为 σ 域, $\overline{\mathscr{F}}\supset\mathscr{F}$;

(b) 在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上, 令 $\overline{\mu}(A\bigcup N)=\mu(A)$, 则 $\overline{\mu}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的测度, $\overline{\mu}|_{\mathscr{F}}=\mu$, 当 μ 为概率测度时 $\overline{\mu}$ 亦然.

(c) $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})$ 是完备测度空间, 即 $\overline{\mu}$ 在$\overline{\mathscr{F}}$ 上是完备的.

证明　(a) $\overline{\mathscr{F}}\supset\mathscr{F}$ 是显然的. 注意到可略集的子集是可略的,且可数个可略集的并仍是可略的. 对 $A,A_n\in\mathscr{F}$ 及 μ 可略集 $N\subset B\in\mathscr{L}$, $N_n\subset B_n\in\mathscr{L}$, 由于

$$(A\bigcup N)^c=A^cN^c=A^cN^c(B^c+B)=A^cB^c+BA^cN^c\in\overline{\mathscr{F}},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup N_n)=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n)\in\overline{\mathscr{F}},$$

因而 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 σ 域.

(b) 若 $A_1\cup N_1=A_2\cup N_2$, 则 $A_1\triangle A_2\subset N_1\cup N_2$, 所以$\mu(A_1\triangle A_2)=0$, 因此 $\mu(A_1\setminus A_2)=\mu(A_2\setminus A_1)=0$. 于是, $\mu(A_1)=\mu(A_1\bigcap A_2)+\mu(A_1\setminus A_2)=\mu(A_1\bigcap A_2)$. $\mu(A_2)=\mu(A_1\bigcap A_2)+\mu(A_2\setminus A_1)=\mu(A_1\bigcap A_2)=\mu(A_1)$. 这样，以 $\overline{\mu}(A\cup N)=\mu(A)$ 规定的 $\overline{\mu}$ 是唯一确定的.

(c) 若 A 为 $\overline{\mu}$ 可略集, 则有 $A\subset B\in\overline{\mathscr{F}}$, $\overline{\mu}(B)=0$. 由 $\overline{\mathscr{F}}$ 的定义, $B=B_1\cup N_1$, 其中 N_1 为 μ 可略集, $B_1\in\mathscr{F}$, 且 $\mu(B_1)=\overline{\mu}(B)=0$. 因 N_1 为 μ 可略集, 存在 $A_1\in\mathscr{F}$, 使得 $N_1\subseteq A_1$ 且 $\mu(A_1)=0$. 故 $A\subset B_1\bigcup A_1\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(B_1\bigcup A_1)\le\mu(B_1)+\mu(A_1)=0$. 故$A$ 也是 μ 可略集, $A\in\mathscr{N}\subset\overline{\mathscr{F}}$, 故 $\overline{\mu}$ 在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上是完备的.

定义 2.1.6　定理 2.1.1 中的 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})$ 称为 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 的完备化扩张. (因此, 以后我们往往假设测度空间是完备的, 或取其完备化扩张.)

§2.2 概率测度的延拓和生成

§2.2.1 域上概率测度的延拓定理

命题 2.2.1 设 $\mathscr{A}$ 为由 Ω 子集构成的域, P 为域 $\mathscr{A}$ 上的测度. 又 $\{A_n, n \geq 1\}$, $\{B_n, n \geq 1\}$ 为 $\mathscr{A}$ 上的两个递增序列. 若 $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n B_n$, 则

$$\lim_n P(A_n) \leq \lim_n P(B_n). \tag{2.2.1}$$

进而, 若 $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$, 则

$$\lim_n P(A_n) = \lim_n P(B_n). \tag{2.2.2}$$

证明 对固定的 n, $\{A_n B_m, m \geq 1\}$ 为 $\mathscr{A}$ 中的递增序列, $\bigcup_m A_n B_m = A_n \in \mathscr{A}$, 故由命题2.1.3,

$$\lim_{m\to\infty} P(B_m) \geq \lim_{m\to\infty} P(A_n B_m) = P(A_n).$$

令 $n \to \infty$ 即得 (2.2.1) 式. 而后一结论只需注意 A_n，B_m 的对称地位，用 (2.2.1) 式即可得 (2.2.2) 式.

若 $\mathscr{A}$ 为域, P 为 $\mathscr{A}$ 上概率测度, 记

$$\mathscr{A}_\sigma = \left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m : A_m \in \mathscr{A} \right\},$$

则 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_\sigma$. 在 $\mathscr{A}_\sigma$ 上令

$$Q\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right).$$

由命题 2.2.1 可见, 若 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$, 则用 $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right)$ 或 $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{n} A'_m\right)$ 规定 $Q(A)$ 有相同的数值, 所以 Q 这一定义是完全合理的, 且 $Q|_{\mathscr{A}} = P$.

命题 2.2.2 (续上) 上段中的 $\mathscr{A}_\sigma$ 及 Q 有下列性质:

(a) 当 $A \in \mathscr{A}_\sigma$ 时, $0 \leq Q(A) \leq 1$;

(b) 当 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}_\sigma$, $A_1 \cup A_2, A_1 A_2 \in \mathscr{A}_\sigma$, 且 Q 有下列强可加性:

$$Q(A_1 \cup A_2) + Q(A_1 A_2) = Q(A_1) + Q(A_2); \tag{2.2.3}$$

(c) Q 有单调性: 若 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}_\sigma$, $A_1 \subset A_2$, 则 $Q(A_1) \leq Q(A_2)$;

(d) 若 $A_n \in \mathscr{A}_\sigma$, $A_n \uparrow A (n \to \infty)$, 则 $A \in \mathscr{A}_\sigma$, 且

$$Q(A) = \lim_n Q(A_n).$$

证明 (a) 显然.

(b) 若 $\mathscr{A}$ 中递增序列 $\{A_{1n}, n \geq 1\}$, $\{A_{2n}, n \geq 1\}$ 分别以 A_1, A_2 为极限, 则由

$$P(A_{1n} \cup A_{2n}) + P(A_{1n} A_{2n}) = P(A_{1n}) + P(A_{2n}),$$

令 $n \to \infty$, 即得 (2.2.3) 式.

(c) 可由命题 2.2.1 推出.

(d) 若 $\mathscr{A}$ 中递增序列 $\{A_{mk}, k \geq 1\}$ 以 A_m 为极限, 则取 $B_k = \bigcup_{m \leq k} A_{mk} \in \mathscr{A}$, 且 $\{B_k, k \geq 1\}$ 为递增序列. 对 $m \leq k$,

$$A_{mk} \subset B_k \subset A_k,$$

$$P(A_{mk}) \leq P(B_k) = Q(B_k) \leq Q(A_k).$$

先令 $k \to \infty$, 有

$$A_m \subset \lim_{k\to\infty} B_k \subset \lim_{k\to\infty} A_k,$$
$$Q(A_m) \leq \lim_{k\to\infty} P(B_k) \leq \lim_{k\to\infty} Q(A_k).$$

再令 $m \to \infty$, 即得

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{m\to\infty} A_m = A,$$

故 $A \in \mathscr{A}_\sigma$, 且

$$\lim_{m\to\infty} Q(A_m) = \lim_{k\to\infty} P(B_k) = Q(A).$$

命题 2.2.3 (续上) 对 $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, 令

$$P^*(A) = \inf\{Q(B) : B \supset A, B \in \mathscr{A}_\sigma\}, \tag{2.2.4}$$

则

(a) $P^*|_{\mathscr{A}_\sigma} = Q,\ A \in \mathscr{P}(\Omega), 0 \leq P^*(A) \leq 1$;

(b) P^* 是半可加的: $P^*(A_1 \cup A_2) \leq P^*(A_1) + P^*(A_2)$,且

$$P^*(A_1 \cup A_2) + P^*(A_1 \cap A_2) \leq P^*(A_1) + P^*(A_2); \tag{2.2.5}$$

(c) P^* 是单调的: 若 $A_1 \subset A_2$, 则 $P^*(A_1) \leq P^*(A_2)$;

(d) 若$A_n \uparrow A$ $(n \to \infty)$, 则 $P^*(A) = \lim_{n\to\infty} P^*(A_n)$. 特别, P^* 是半 σ 可加的:

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^*(B_n).$$

上述 P^* 又称为相应于 P 的外测度.

证明 (a) 显然.

(b) 对任一 $\varepsilon > 0$ 及 A_1, A_2, 取 $B_1, B_2 \in \mathscr{A}_\sigma$, 使 $B_i \supset A_i$, 且

$$Q(B_i) < P^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2},$$

这时 $B_1 \cup (\cap) B_2 \supset A_1 \cup (\cap) A_2$, 且

$$\begin{aligned} P^*(A_1 \cup A_2) + P^*(A_1 \cap A_2) &\leq Q(B_1 \cup B_2) + Q(B_1 \cap B_2) \\ &= Q(B_1) + Q(B_2) < P^*(A_1) + P^*(A_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) 可由 Q 的单调性得出.

(d) 对任一 $\varepsilon > 0$ 及 $\{A_n, n \ge 1\}$, $A_n \uparrow A$, 取 $\{B_n, n \ge 1\} \subset \mathscr{A}_\sigma$ 使 $B_n \supset A_n$, 且 $Q(B_n) < P^*(A_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. 记 $C_n = \bigcup_{m\le n} B_m \in \mathscr{A}_\sigma$, 则 $C_n \supset A_n$, $\{C_n, n \ge 1\}$ 是递增的. 以下用归纳法证明:

$$Q(C_n) \le P^*(A_n) + \sum_{m\le n} \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{2.2.6}$$

对 $n = 1, C_1 = B_1$, 上式是成立的. 若上式对 n 成立, 则由

$$A_n \subset C_n \cap B_{n+1} \in \mathscr{A}_\sigma,$$

$$\begin{aligned} Q(C_{n+1}) &= Q(C_n \cup B_{n+1}) = Q(C_n) + Q(B_{n+1}) - Q(C_n \cap B_{n+1}) \\ &\le P^*(A_n) + \sum_{m\le n} \frac{\varepsilon}{2^m} + P^*(A_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - P^*(A_n) \\ &= P^*(A_{n+1}) + \sum_{m\le n+1} \frac{\varepsilon}{2^m}, \end{aligned}$$

于是 (2.2.6) 式对一切 n 成立. 令 $n \to \infty$ 并注意到 $A \subset \bigcup_{n\ge1} C_n \in \mathscr{A}_\sigma$ 故有

$$P^*(A) \le Q(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} Q(C_n) \le \lim_{n\to\infty} P^*(A_n) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性及 P^* 的单调性可得 (4) 成立.

命题 2.2.4 (续上) 设

$$\mathscr{D} = \{D \in \mathscr{P}(\Omega) : P^*(D) + P^*(D^c) = 1\}, \tag{2.2.7}$$

则

(a) $\mathscr{D}$ 为 σ 域, $\mathscr{D} \supset \sigma(\mathscr{A})$;

(b) 若 $\overline{P} = P^*|_{\mathscr{D}}$, 则 $\overline{P}$ 为 $\mathscr{D}$ 上完备概率测度,且 $\overline{P}|_{\mathscr{A}} = P$.

证明 由 $P^*|_{\mathscr{A}} = Q|_{\mathscr{A}} = P$ 容易看出 $\mathscr{D} \supset \mathscr{A}$, 且 $\overline{P}|_{\mathscr{A}} = P^*|_{\mathscr{A}} = P$. 若 $D \in \mathscr{D}$, 则 $D^c \in \mathscr{D}$. 又若 $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$, 则由 (2.2.5) 式可知

$$P^*(D_1 \cup D_2) + P^*(D_1 \cap D_2) \le P^*(D_1) + P^*(D_2), \tag{2.2.8}$$

$$P^*(D_1^c \cap D_2^c) + P^*(D_1^c \cup D_2^c) \le P^*(D_1^c) + P^*(D_2^c). \tag{2.2.9}$$

将 (2.2.8) 式、(2.2.9) 式相加, 由 P^* 为半可加的及 $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$, 有

$$\begin{aligned} 2 &\le P^*(D_1 \cup D_2) + P^*((D_1 \cup D_2)^c) + P^*(D_1 D_2) + P^*((D_1 D_2)^c) \\ &\le P^*(D_1) + P^*(D_1^c) + P^*(D_2) + P^*(D_2^c) = 2, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

因而 (2.2.8) $\sim$ (2.2.10) 式都是等式, 且

$$P^*(D_1 \cup D_2) + P^*((D_1 \cup D_2)^c) = 1,$$

所以 $D_1\cup D_2\in\mathscr{D}$, 即 $\mathscr{D}$ 是域, 且 P^* 在 $\mathscr{D}$ 上是强可加的.

若 $\{D_n,n\geq 1\}$ 为 $\mathscr{D}$ 中的递增序列, 则由命题 2.2.3,

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n\right)=\lim_{n\to\infty}P^*(D_n),\ \ P^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n\right)^c\right)\leq P^*(D_m^c),\ m\geq 1.$$

因此, 由 P^* 的半可加性，

$$1\leq P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n\right)+\ P^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n\right)^c\right)\leq\lim_{n\to\infty}P^*(D_n)+\lim_{n\to\infty}P^*(D_n^c)=1.$$

故上式中等号都成立, $\bigcup_n D_n\in\mathscr{D}$, 即 $\mathscr{D}$ 是 σ 域, 且由 P^* 对递增序列的连续性, 据命题 2.1.3 可知, P^* 在 $\mathscr{D}$ 上为测度.

因为 $\mathscr{D}\supset\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ 又是 σ 域, 故 $\mathscr{D}\supset\sigma(A)$.

最后, 若 $A\subset D\in\mathscr{D}$, 且 $\overline{P}(D)=0$, 则

$$0\leq P^*(A)\leq P^*(D)=\overline{P}(D)=0,$$

$$1\leq P^*(A)+P^*(A^c)=P^*(A^c)\leq 1,$$

所以上式中的等号成立, $A\in\mathscr{D}$, 且 $\overline{P}(A)=P^*(A)=0$, 即 $(\Omega,\mathscr{F},\overline{P})$ 是完备的.

命题 2.2.5 (续上) 对每个 $C\in\mathscr{D}$, 必有 $E,F\in\sigma(\mathscr{A})$, $E\subset C\subset F$ 且 $\overline{P}(F-E)=0$.

证明 按 $P^*(C)$ 的定义 (2.2.4) 式, 必存在$\{B_n,n\geq 1\}\subset\mathscr{A}_\sigma\subset\sigma(\mathscr{A})$, 使 $B_n\supset C$, 且

$$\overline{P}(C)=P^*(C)\leq Q(B_n)=\overline{P}(B_n)<P^*(C)+\frac{1}{n}.$$

取 $F=\bigcap_n B_n\supset C$, 则 $F\in\sigma(\mathscr{A})$, $F\supset C$, 且

$$\overline{P}(C)\leq\overline{P}(F)\leq\overline{P}(B_n)<\overline{P}(C)+\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$, 可得 $\overline{P}(F)=\overline{P}(C)$, 且 $\overline{P}(F-C)=0$. 对 $F-C$ 用已证明的结论, 必有 $G\in\sigma(\mathscr{A})$, $G\supset F-C$, 且 $\overline{P}(G)=\overline{P}(F-C)=0$. 记 $E=F\setminus G$, 则 $E\in\sigma(\mathscr{A})$, $E\subset C$, $\overline{P}(E)=\overline{P}(F)$, 故 $\overline{P}(F-E)=0$.

定理 2.2.1 (a) 若 P 为域 $\mathscr{A}$ 上的概率测度, 则在 $\sigma(\mathscr{A})$ 上必存在唯一的延拓 $\overline{P}$, $\overline{P}$ 亦为概率;

(b) 若 P 为半域 $\mathscr{I}$ 上的概率测度，则在$\sigma(\mathscr{I})$ 上必有唯一的延拓 $\overline{P}$, $\overline{P}$ 亦为概率;

(c) 若 μ 为域 $\mathscr{A}$(半域 $\mathscr{I}$) 上的 σ 有限测度, 则在 $\sigma(\mathscr{A})$ $(\sigma(\mathscr{I}))$ 上必有唯一的延拓 $\overline{\mu}$.

证明 (a) 是命题2.2.4的直接推论. 再由命题2.1.2知(b)和(c)也为真.

§2.2.2 分布函数与其生成的测度

命题 2.2.6 若 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间, f 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照, 令

$$\nu(B)=\mu(f^{-1}(B)),B\in\mathscr{E}\tag{2.2.11}$$

则 ν 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的测度. 特别, 当 μ 为概率测度时, ν 也是概率测度.

证明 由定义直接验证即可.

定义 2.2.1 由 (2.2.11) 式规定的 ν 称为 f 在 $(E,\mathscr{E})$ 上的导出测度. 特别, 当 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为概率空间时, ν 又称为 f 在 $(E,\mathscr{E})$ 上的导出分布或分布. 若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, X 为有限实值随机变量, 则

$$F(x)=P(X\le x), x\in\mathbf{R}$$

称为 X 的分布函数, 其中,$P(X\le x)$ 表示事件$\{X\le x\}$的概率,即$P(X\le x):=P(\{X\le x\})$,下同.

若 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维随机变量 (即每个 X_i 为随机变量), 则

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n),\ (x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R},$$

称为 X 的 n 维分布函数.

命题 2.2.7 若 $F(x)$ 为有限实值随机变量 X 的分布函数, 则

(a) $F(x)$ 是不减的;

(b) $F(x)$ 是右连续的;

(c) $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim_{x\to+\infty}F(x)=1$.

证明 (a) 若 $x_1<x_2$, 则

$$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_2)\ge 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F(x+\frac{1}{n}) &= \lim_{n\to\infty}P(X\le x+\frac{1}{n})\\ &= P(\bigcap_n\{X\in(-\infty,x+\frac{1}{n}]\})\\ &= P(X\in(-\infty,x])=F(x).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}F(x) &= \lim_{n\to\infty}P(X\in(-\infty,-n])\\ &= P(\bigcap_n\{X\in(-\infty,-n]\})\\ &= P(X\in\emptyset)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}F(x) &= \lim_{n\to\infty}P(X\in(-\infty,n])\\ &= P(\bigcup_n X\in(-\infty,n])\\ &= P(X\in(-\infty,+\infty))=1.\end{aligned}$$

命题 2.2.8 若随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同的 n 维分布函数, 则对 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的任一 Borel 函数 g, $g(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $g(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同的分布, 即对一切 $\mathbf{R}^m$ 中的 Borel 集 A, 有

$$P(g(X_1,\cdots,X_n)\in A)=P(g(Y_1,\cdots,Y_n)\in A).$$

证明

$$\mathscr{C}=\{B\in\mathscr{B}^n_{\mathbf{R}^n}:P((X_1,\cdots,X_n)\in B)=P((Y_1,\cdots,Y_n)\in B)\},$$

$$\mathscr{D}=\{D:D=\times_{i=1}^n(-\infty,x_i],\ x_i\in\mathbf{R},\ i=1,\cdots,n\}.$$

由条件 $\mathscr{C}\supset\mathscr{D}$. 而 $\mathscr{D}$ 是 π 类, 且可直接验证 $\mathscr{C}$ 是 λ 类. 从而 $\mathscr{C}\supset\sigma(\mathscr{D})=\mathscr{B}_{\mathbf{R}^n}$. 这样, 对 $\mathbf{B}^m$ 中的任意 Borel 集 A, 由 $g^{-1}(A)\in\mathscr{B}_{\mathbf{R}^n}$, 有

$$\begin{aligned}P(g(X_1,\cdots,X_n)\in A)&=P((X_1,\cdots,X_n)\in g^{-1}(A))\\&=P((Y_1,\cdots,Y_n)\in g^{-1}(A))\\&=P(g(Y_1,\cdots,Y_n)\in A).\end{aligned}$$

定理 2.2.2 (a) 若 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的右连续不减有界函数, 则在 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 必存在唯一的有限测度 μ, 使得:

$$\mu((a,b])=F(b)-F(a),-\infty\le a<b<+\infty.$$

(b) 若 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的右连续不减的实值函数, 则必存在 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 上唯一的 σ 有限的测度 μ 使得

$$\mu((a,b])=F(b)-F(a),-\infty\le a<b<+\infty.$$

证明 (a) 取

$$\mathscr{C}=\{(a,b],(a,b),[a,b),[a,b]:\ -\infty\le a\le b\le+\infty\}.$$

当a,b为$\pm\infty$时, 约定$\pm\infty$ 总不属于该区间, 则可直接验证$\mathscr{C}$ 是一个半域, 且$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}$. 对$\mathscr{C}$中的集合规定$\mu$如下:

$$\mu((a,b])=F(b)-F(a),\qquad \mu((a,b))=F(b-)-F(a),$$

$$\mu([a,b])=F(b-)-F(a-),\qquad \mu([a,b])=F(b)-F(a-),$$

则可直接验证μ在$\mathscr{C}$上是有限的, 且为有限可加的. 再由定理2.2.1 可知, μ 在$(\mathbf{R},\mathscr{B})$上存在唯一延拓(仍记为μ), 由于μ在$\mathscr{C}$ 上有限, 故在$(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$上也必有限.

(b) 若将$\mathbf{R}$表为$\sum_n(n,n+1]$, 那么由(a)同理可证得结论(b)成立.

定义 2.2.2 若 F 为 $\mathbf{R}$ 上有限右连续不减函数, 则由 F 在 $(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ 上按定理 2.2.2(b) 生成的 σ 有限完备测度 μ 称为由 F 生成的 Lebesgue-Stieltjes 测度, 简称为 L-S 测度. 特别, 当 $F(t)=t$(或同样的 $f(t)=t+c$), 由此产生的完备化测度称为 Lebesgue 测度. 由 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ 按 Lebesgue 测度扩张的完备 σ 域 $\overline{\mathscr{B}_{\mathbf{R}}}$ 中的集合都称为 Lebesgue 可测集.

定理 2.2.3 若 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上满足命题 2.2.7(a-c) 的函数, 则必存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及其上的随机变量 X, 使得

$$P(X \leq x) = F(x).$$

证明 设 $\Omega = \mathbf{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, P 为由 F 在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ 上生成的 L-S 测度. 则由

$$F(+\infty) - F(-\infty) = 1,$$

可知, P 是一个概率测度, 又令

$$X(x) = x, \ \ x \in \mathbf{R},$$

则它是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量, 且

$$P(X \leq y) = P\{x : x \leq y\} = F(y).$$

由于这一定理, 对概率论中从分布出发讨论的问题都可以认为是从概率空间出发讨论.

§2.3 习题

1. 设 μ 为域 $\mathscr{A}$ 上的有限可加集函数，证明对 $\{A_i, i \geq 1\} \subset \mathscr{A}$, 下列等式成立：
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mu(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \mu\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i\Big).$$

2. 设 μ 为域 $\mathscr{A}$ 上的测度，$E, F \in \mathscr{A}$. 证明：$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(EF)$.

3. 若 $\{\mu_n\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的递增测度序列，即 $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$, $\forall A \in \mathscr{F}$. 令 $\mu(A) = \lim\limits_n \mu_n(A)$, 证明：$\mu$ 也是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度.

4. 设 $(E_i, \mathscr{E}_i)$ 为可测空间 (i=1,2), $\mathscr{E}_i^\mu$ 表示$\mathscr{E}_i$ 关于概率 μ 的完备化, 设 $\mathscr{E}_i^* = \bigcap_\mu \mathscr{E}_i^\mu$ (i=1,2), 这里 μ 取遍 $\mathscr{E}_i$ 上一切概率测度. 证明: 若 $f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$, 则 $f \in \mathscr{E}_1^*/\mathscr{E}_2^*$.

5. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 为概率空间，又 $\Omega_1 \in \mathscr{F}$, 且$\mathrm{P}(\Omega_1) = 1$. 取
$$\mathscr{F}^* = \{\Omega_1 B : B \in \mathscr{F}\}, \quad \bar{\mathrm{P}}(\Omega_1 B) = \mathrm{P}(B), \ \ B \in \mathscr{F}.$$
证明：$\bar{\mathrm{P}}$ 在 $\mathscr{F}^*$ 上是完全确定的，且 $(\Omega_1, \mathscr{F}^*, \bar{\mathrm{P}})$ 为概率空间.

6. 若 $(\Omega, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathrm{P}})$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 的完备化，则对 $(\Omega, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathrm{P}})$ 上任一个随机变量 $\overline{X}$, 存在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的随机变量 X, 使 $\overline{\mathrm{P}}(X \neq \overline{X}) = 0$.

7. 设 X, Y 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上两个随机变量. f 为严格递增函数，$A \in \mathscr{F}$. 若对每个实数 c 都成立$\mathrm{P}((A\{X < c\}) \backslash \{Y < f(c)\}) = 0$, 试证：$A \subset \{Y \leq f(X)\}$ a.s..

第三章　积分与乘积测度

§3.1　积分的定义与性质

在本节中, 设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 固定.

定义 3.1.1　若 $X(\omega)=\sum_i x_i I_{A_i}(\omega)$ 为阶梯随机变量, 称 $\sum_i x_i P(A_i)$ 为 X 的期望 (或 X 关于 P 的积分), 记为:

$$EX,\quad E[X],\quad \int_\Omega X dP, \text{或} \int_\Omega X(\omega)P(d\omega).$$

注 3.1.1　(a) 当 $X=\sum_i x_i I_{A_i}(\omega)=\sum_j y_j I_{B_j}(\omega)$, 且 $\{B_j\}$ 为 $\{A_i\}$ 的分割时, 则容易看出

$$EX=\sum_i x_i P(A_i)=\sum_j y_j P(B_j). \tag{3.1.1}$$

(b) 当 X 为广义实值随机变量且不会同时取 $+\infty$ 及 $-\infty$ 时, 若约定 $0\cdot(\pm\infty)=0$, 则仍可如上规定 EX.

命题 3.1.2　若 $\mathscr{E}$ 表示 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上阶梯随机变量全体, 则

(a)　对任何 $A\in\mathscr{F}$, 有$E(I_A)=P(A)$ 且 $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$ 对任意$a,b\in\mathbf{R}$, $X,Y\in\mathscr{E}$ 成立;

(b)　$E[\cdot]$ 在 $\mathscr{E}$ 是单调的, 且若 $\{X_n,n\geq 1\}\subset\mathscr{E}$, $X_n\uparrow$(或$\downarrow$)$X\in\mathscr{E}$, 则

$$EX_n\uparrow\ (\text{或}\downarrow)EX;$$

证明　(a)由定义及命题1.4.7(a) 的证明知 (a) 成立.

(b) 由 $E[\cdot]$ 的定义和线性性，易知单调性成立. 设 $X_n\downarrow 0$. 若记 k 为 X_1 的上确界, 则对任给 $\varepsilon>0$,

$$0\leq X_n\leq kI_{\{X_n>\varepsilon\}}+\varepsilon,$$

$$0\leq EX_n\leq kP(X_n>\varepsilon)+\varepsilon.$$

由 $X_n\downarrow 0$, 故 $EX_n\downarrow$, 且 $\{X_n>\varepsilon\}\downarrow\emptyset$. 从而上式右端 $P(X_n>\varepsilon)\downarrow 0$, 由 ε 的任意性, $EX_n\downarrow 0$.

对一般的单调递减序列, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$X_n\downarrow X\in\mathscr{E}\Longrightarrow X_n-X\in\mathscr{E}\downarrow 0\Longrightarrow E[X_n-X]\downarrow 0\Longrightarrow EX_n\downarrow EX.$$

命题 3.1.3　若 $\mathscr{E}_+$ 表示非负阶梯随机变量全体, $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ 都是 $\mathscr{E}_+$ 中递增序列, 且 $\lim_n X_n\leq\lim_n Y_n$, 则

$$\lim_n EX_n\leq\lim_n EY_n. \tag{3.1.2}$$

特别, 若 $\lim_n X_n=\lim_n Y_n$, 则

$$\lim_n EX_n=\lim_n EY_n.$$

证明 固定 m, 则 $X_m \wedge Y_n \in \mathscr{E}_+$, $\{X_m \wedge Y_n, n \geq 1\} \uparrow$, 且 $\lim_n (X_m \wedge Y_n) = X_m \in \mathscr{E}_+$. 由命题 3.1.2 可得, $\lim_n EY_n \geq \lim_n E[X_m \wedge Y_n] = EX_m$. 再令 $m \uparrow \infty$ 得 (3.1.2). 命题的后一部分用 X_n, Y_n 的地位对称性即得.

命题 3.1.4 (续上) 记

$$\mathscr{G}_+ = \{X = \lim_n \uparrow X_n : X_n \in \mathscr{E}_+,\ n \geq 1\}.$$

对 $X \in \mathscr{G}_+$, 若 $X = \lim_n \uparrow X_n, X_n \in \mathscr{E}_+,\ n \geq 1$, 令

$$EX \triangleq \lim_n EX_n, \tag{3.1.3}$$

则

(a) $\mathscr{G}_+$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上非负随机变量全体;

(b) 由 (3.1.3)式规定的 $E[\cdot]$ 是完全确定的;

(c) $0 \leq EX \leq \infty (X \in \mathscr{G}_+)$;

(d) 在 $\mathscr{G}_+$ 中, 若 $X_1 \leq X_2$, 则 $EX_1 \leq EX_2$;

(e) 若 $X \in \mathscr{G}_+, c \geq 0$, 则 $E[cX] = cE[X]$;

(f) 若 $X_1, X_2 \in \mathscr{G}_+$, 则 $X_1 + X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \wedge X_2 \in \mathscr{G}_+$, 且

$$E[X_1 + X_2] = EX_1 + EX_2 = E[X_1 \vee X_2] + E[X_1 \wedge X_2];$$

(g) 设 $\{X_m, m \geq 1\}$ 为 $\mathscr{G}_+$ 中递增序列, 则 $\lim_n X_n = X \in \mathscr{G}_+$ 且

$$E[\lim_m X_m] = EX = \lim_m EX_m.$$

证明 (a) 是命题 1.4.8 的结论.

(b,d) 是命题 3.1.2和3.1.3 的结论, 而 (c) 是明显的.

(e,f): 若 $X_n^1 \uparrow X_1, X_n^2 \uparrow X_2$, 其中$X_n^1, X_n^2 \in \mathscr{E}_+,\ n \geq 1$, 则

$$cX_n^1 \uparrow X_1, c \geq 0, X_n^1 + X_n^2 \uparrow X_1 + X_2,$$

$$X_n^1 \vee X_n^2 \uparrow X_1 \vee X_2, X_n^1 \wedge X_n^2 \uparrow X_1 \wedge X_2.$$

而对 $\mathscr{G}_+$ 中 X_n^1, X_n^2, 由于

$$X_n^1 + X_n^2 = X_n^1 \vee X_n^2 + X_n^1 \wedge X_n^2,$$

再利用 E 在 $\mathscr{E}$ 上的线性及 $\mathscr{G}_+$ 上 $E[\cdot]$ 的定义, 即可推出 (5,6).

(g) 若对每个 m, 设 $Y_{mn} \uparrow X_m (n \to \infty)$, $Y_{mn} \in \mathscr{E}_+$, 令 $Z_n = \sup_{m \leq n} Y_{mn}$, 则 $Z_n \in \mathscr{E}_+$, $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为递增的, 且

$$Y_{mn} \leq Z_n \leq X_n \ \ \forall m \leq n \tag{3.1.4}$$

故

$$EY_{mn} \le EZ_n \le EX_n,\ m \le n. \tag{3.1.5}$$

由命题 3.1.3 得: $E[Y_{mn}] \uparrow EX_m(n \to \infty)$ 且由 (3.1.4) 及$Y_{mn} \uparrow X_m(n \to \infty)$, 得:

$$\lim_n \uparrow X_n = \lim_n \uparrow Z_n \in \mathscr{G}_+,$$

从而由 (3.1.5) 可得

$$\lim_{m\to\infty} EX_m = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} EY_{mn}) \le \lim_{n\to\infty} EZ_n \le \lim_{n\to\infty} EX_n.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \lim_{n\to\infty} EZ_n = E[\lim_{n\to\infty} Z_n] = E[\lim_{n\to\infty} X_n].$$

定义 3.1.2 广义实值随机变量 X, 若 $EX^+ < \infty$, 且$EX^- < \infty$, 则称 X 为可积的, 且以 $EX = EX^+ - EX^-$ 表示 X 对 P 的积分, 也称为期望或数学期望.

较为一般地, 若 EX^+, EX^- 中至少有一个取有限值, 则称 X 为准可积的, 用 $EX = EX^+ - EX^-$ 表示 X 关于 P 的积分或期望.

有界随机变量或阶梯随机变量都是可积的, 非负随机变量必是准可积的.

若 $P(X \neq 0) = 0$, 则 X 是可积的, 且 $EX = 0$.

命题 3.1.5 若 $E[\cdot]$ 表示概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的准可积随机变量“$\cdot$”的期望, 则

(a) $EX \in \overline{\mathbf{R}}$; $EX \in \mathbf{R} \iff X^-$ 和 X^+ 都可积, 且这时必有

$$P(X = \pm\infty) = 0. \tag{3.1.6}$$

(b) 若 $X \ge 0$(或$P(X \le 0) = 0$), 则 $EX \ge 0$, 且这时 $EX = 0 \iff P(X = 0) = 1$.

(c) 对每个 $c \in \mathbf{R}$, $E[cX] = cEX$. 又若 $X + Y$ 有确切的含义, 且 X^-, Y^-(或 X^+, Y^+) 可积的, 则

$$E[X + Y] = EX + EY. \tag{3.1.7}$$

特别地, 当 X, Y 中至少有一个为可积时, (3.1.7) 式必成立.

(d) 若 $X \le Y$, 且 EX, EY 存在, 则 $EX \le EY$.

证明 (a) 由期望的定义可得 $EX \in \mathbf{R}$ 的充要条件是 $EX^+ + EX^- < \infty$. 由

$$I_{\{X \ge n\}} \le \frac{X}{n} I_{\{X \ge n\}} \le \frac{1}{n} X^+ \ (n > 0).$$

得

$$P(X \ge n) \le \frac{1}{n} EX^+ \Longrightarrow P(X = +\infty) \le P(X \ge n) \to 0 \ (n \to \infty).$$

(b) 因 $X \ge 0$ 时, $EX \ge 0$, 且当 $X \ge 0$ 时, 若 $EX = 0$, 则由(1)的证明知

$$P(X \ge \frac{1}{n}) \le nEX = 0,$$

$$P(X>0)=P\{\bigcup_n (X\geq \frac{1}{n})\}\leq \sum_n P(X\geq \frac{1}{n})=0.$$

故对非负 X, 由 $EX=0$, 可推出 $P(X=0)=1$.

(c) $E[cX]=cEX$ 由期望的定义可知. 在证明 (3.1.7) 之前, 先证下列事实: 设 $X_2,X_1\geq 0$ 且至少有一个可积的. 令 $X=X_2-X_1$, 则有

$$EX=EX_2-EX_1. \tag{3.1.8}$$

证明如下：由于 $X_2-X_1=X=X^+-X^-$, 故

$$X_2+X^-=X_1+X^+,$$
$$EX_2+EX^-=EX_1+EX^+.$$

若 $EX_1<\infty$, 则由 $X=X_2-X_1$ 且 $X_2\geq 0$ 知 $X^-\leq X_1$. 从而 $EX^-<\infty$. 于是有 $EX_2-EX_1=EX^+-EX^-=EX$. 当 $EX_2<\infty$ 时，同理可证 $EX=EX_2-EX_1$. 故 (3.1.8) 式成立. 一般地，由于 $X+Y=(X^++Y^+)-(X^-+Y^-)$, 且 X^-,Y^- (或 X^+,Y^+)可积，则由 (3.1.8) 式及命题 3.1.4(6) 可得

$$E[X+Y]=E[X^++Y^+]-E[X^-+Y^-]=EX^+-EX^-+EY^+-EY^-=EX+EY.$$

(d) 由定义加以讨论.

Markov 不等式：设 f 是在 $[0,\infty)$ 上非负不减的实函数, 则有

$$I_{\{|X|\geq a\}}\leq f(|X|)/f(a),$$

从而有：

$$P(X\geq a)\leq \frac{1}{f(a)}E[f(|X|)].$$

Chebyshev 不等式:

$$P(|X-EX|>a)\leq \frac{1}{a^2}E|X-EX|^2=\frac{1}{a^2}Var[X],\quad a>0.$$

§3.2 积分的极限理论与应用

命题 3.2.1 (Levi 引理):

(a) 若 $X_n\uparrow X$, 且对某个 n_0 使 $X_{n_0}^-$ 可积, 则 $\lim_n EX_n=EX$;

(b) 若 $X_n\downarrow X$, 且对某个 n_0 使 $X_{n_0}^+$ 可积, 则 $\lim_n EX_n=EX$.

证明 (a)设 $Y_n=X_n+X_{n_0}^-$, 则 $Y_n\geq 0$且$Y_n\uparrow X+X_{n_0}^-$, 由命题 3.1.4(7) 得:

$$\lim_n EX_n+EX_{n_0}^-=\lim_n EY_n=E[X+X_{n_0}^-]=EX+EX_{n_0}^-$$

从而, $\lim_n EX_n=EX$.

(b) 类似于 (a). 考虑 $T_n=-X_n+EX_{n_0}^-,n\geq n_0$. 即可.

例 3.2.1 设实值非负随机变量Y满足$EY=\infty$. 对任意$n\geq 1$, 令$X_n:=\frac{1}{n}Y$. 则 $X_n\downarrow 0=:X$, 且$EX_n\equiv\infty, EX=0$. 从而$\lim_n EX_n=\infty\neq EX$.

命题 3.2.2 (Fatou 引理) 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为随机变量序列, Y, Z 均为可积随机变量, 则:

(a) 若 $X_n\geq Z (n\geq n_0)$, 则
$$E[\varliminf_n X_n]\leq \varliminf_n EX_n. \tag{3.2.1}$$

(b) 若 $X_n\leq Y, n\geq n_0$, 则
$$E[\varlimsup_n X_n]\geq \varlimsup_n EX_n. \tag{3.2.2}$$

证明 (a) 取 $Y_n=\inf_{k\geq n}X_k\leq X_n(n\geq n_0)$, 则 $\{Y_n, n\geq n_0\}$ 为递增序列, $Y_{n_0}\geq Z$, Z 为可积的, 故由 Levi 引理
$$E[\varliminf_n X_n]=E[\lim_n Y_n]=\lim_n E[Y_n]=\varliminf_n EY_n\leq\varliminf_n EX_n.$$

(b) 类似可证.

命题 3.2.3 (Lebesgue 控制收敛定理) 若 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为随机变量序列, $|X_n|\leq Y$, Y 可积, 且 $\lim_n X_n=X$ 存在, 则
$$\lim_n EX_n=EX.$$

证明 因 $-Y\leq X_n\leq Y(n\geq 1)$, Y 可积. 由 Fatou 引理可得
$$E[X]=E[\varliminf_n X_n]\leq\varliminf_n E[X_n]\leq\varlimsup_n E[X_n]\leq E[\varlimsup X_n]=E[X].$$

定义 3.2.1 设 X 为随机变量, $A\in\mathscr{F}$, 若 X 准可积, 则记
$$\int_A XdP=E[XI_A].$$
$\phi(A)=\int_A XdP\ (A\in\mathscr{F})$, 看作$A\in\mathscr{F}$ 的函数时, 称为 X 关于概率测度 P 的不定积分.

命题 3.2.4 设 X 准可积, $\phi(A)\triangleq\int_A XdP, A\in\mathscr{F}$, 则:

(a) ϕ 是 $\mathscr{F}$ 上的 σ 可加集函数, 特别当 $X\geq 0$ 时, ϕ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度;

(b) 若 $P(A)=0$, 则 $\phi(A)=0$.

证明 (a) $\phi(\emptyset)=0$ 是显然的. 记 $\phi^+(A)=\int_A X^+dP$, $\phi^-(A)=\int_A X^-dP$. 则由 X 准可积知, ϕ^+ 和ϕ^- 至少一个是有限的. 因此, 只对 ϕ^+ 加以证明. 若 $\{A_n, n\geq 1\}$ 为互不相交, 记 $X_n=X^+I_{\{\sum_{i\leq n}A_i\}}$. 则 $X_n\geq 0$, $X_n\uparrow X^+I_{\{\sum_{i=1}^\infty A_i\}}$, 故由 Levi 引理,
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^\infty\phi^+(A_i) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int_{A_i}X^+dP=\lim_{n\to\infty}\int X_ndP=\int X^+I_{\{\sum_{i=1}^\infty A_i\}}dP\\ &= \phi^+(\sum_{i=1}^\infty A_i).\end{aligned}$$

即 ϕ^+ 是 σ 可加的, 同样的 ϕ^- 也是 σ 可加的, 且因 ϕ^+, ϕ^- 中至少有一个是有限的, 故 ϕ 是 σ 可加的. 当 $X \geq 0$ 时, ϕ 是非负的, 故此时 ϕ 还是测度.

(b) 设 $P(A) = 0$, 若 X 为阶梯随机变量, 即 $X = \sum_i x_i I_{A_i}$, 则

$$\int_A XdP = \int \sum_i x_i I_{A_iA} dP = \sum_i x_i P(A_iA) = 0.$$

若 $X \geq 0$, 则存在阶梯随机变量 $X_n \uparrow X$. 由 $\int_A X_n dP = 0$, 故

$$\int_A XdP = \lim_n \int_A X_n dP = 0.$$

对准可积随机变量 X, 由

$$\int_A XdP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP = 0.$$

注 3.2.5 (a) 对测度空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ (用 μ 取代 P), 也完全可以讨论 X 关于 μ 的积分.

(b) 当 μ 为有限测度时, 令 $\mu_1 = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mu$, 它是一个概率测度, X 是 μ 的积分可规定为

$$\int Xd\mu = \mu(\Omega) \int Xd\mu_1.$$

(c) 当 μ 是任意测度, 对非负阶梯函数 $X = \sum_i x_i I_{A_i}$ 可规定其积分为

$$\int Xd\mu = \sum_i x_i \mu(A_i).$$

对非负可测函数和一般可测函数, 亦可用类似的方法来规定可积性与积分. 这时上面提到的积分性质和收敛定理也仍然成立.

命题 3.2.6 若 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间, Y 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 的可测映照, μY^{-1} 为 Y 在 $(E, \mathscr{E})$ 上的导出测度, 又 f 是 $(E, \mathscr{E})$ 上的可测函数,则下列两端任一端存在(有限)必可推出另一端也存在(有限), 且有:

$$\int_E f(x)\mu Y^{-1}(dx) = \int_\Omega f(Y(\omega))\mu(d\omega). \tag{3.2.3}$$

证明 由命题1.4.4 知 $f(Y(\omega))$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的可测函数. 取

$$\mathscr{L} = \{f : f\text{可测且使 (3.2.3) 式一端存在(有限)}\},$$

$$\mathscr{H} = \{f : f\text{可测且使 (3.2.3) 式两端存在(有限)且相等}\},$$

则易证 $\mathscr{H} \supset \{I_A, A \in \mathscr{E}\}$, 满足函数形式的单调类定理 1.4.2, 从而属于 $\mathscr{L}$ 的 $(E, \mathscr{E})$ 上可测函数 f (即使 (3.2.3) 式一端存在(有限)的 f), (3.2.3) 式成立.

由定理 2.2.2, 定义 2.2.2 及其注可知, 对 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上的 n 维随机变量, 其分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 可在 $(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 上产生一个 L-S 测度, 以后 $(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 上的这一测度就与分布函数用同一符号, $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 函数关于它的积分记为

$$\int fdF, \quad \int f(x)dF(x) \text{ 或 } \int f(x)F(dx),$$

也称为 f 关于 F 的 Lebesgue-Stieltjes 积分, 简称为 $L-S$ 积分.

命题 3.2.7 若 $f(x)$ 为有界区间 $[a,b]$ 上的连续函数, F 为 $[a,b]$ 上的有限 L-S 测度, 则

$$\int_{(a,b]} f(x)dF(x) = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})],$$

其中, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n$, 即此时 L-S 积分与 Riemann-Stieltjes 积分是一致的.

证明 记 $f_n(x) = \sum_{i\le n} f(\xi_i) I_{(x_{i-1},x_i]}(x)$, 则

$$|f_n(x)| \le \sup_{a\le x\le b} |f(x)| < \infty,$$

由 f 的连续性, $\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} f_n(x) = f(x)$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\begin{aligned}\int_{(a,b]} f(x)dF(x) &= \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \int_{(a,b]} f_n(x)dF(x) \\ &= \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})].\end{aligned}$$

定理 3.2.1 若 X 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上 n 维随机变量, F 为 X 的 n 元分布函数, 又 $g(x_1, \cdots, x_n)$ 为 n 元 Borel 函数, $F_{g(x)}$ 表示 $g(X)$ 的分布函数, 则当 $Eg(X)$ 存在时,

$$\begin{aligned}Eg(X) &= \int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega) \\ &= \int_{\mathbf{R}} ydF_{g(X)}(y) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} g(x_1, \cdots, x_n)dF(x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

证明 由于 $F_X = PX^{-1}$, $F_{g(X)} = P(g(X))^{-1}$, 因此取可测映照 X 及 $g(X)$ 分别代入 (3.2.3) 即得.

§3.3 随机变量及其收敛性

这一节将讨论完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量序列及几种收敛性, 其中许多结果也适用于一般测度空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数列及其收敛性.

§3.3.1 随机变量序列的收敛性

定义 3.3.1 对随机变量 X, Y, 若 $P(X \ne Y) = 0$, 则记 $X = Y$ a.s.

若对随机变量引进记号

$$X \sim Y \quad \text{当且仅当} \quad X = Y \ \ a.s.,$$

由于 $X = X$ a.s.; 由 $X = Y$ a.s. 可推出 $Y = X$ a.s.; 由 $X = Y$ a.s. 和 $Y = Z$ a.s. 可推出 $X = Z$ a.s., 故“$\sim$”是随机变量间的一个等价关系. 因而可以考虑随机变量间的这一等价类. 与 X 等价的元素全体(等价类)记为

$$\widetilde{X} = \{X' : X' = X \ a.s.\},$$

同一等价类$\widetilde{X}$内的随机变量有相同的分布. 对随机变量的期望运算也是不计同类元素间的差异的, 若 $X \sim X'$, 则两者同时可积或否; 若可积, 则 $EX = EX'$.

在研究概率论中涉及概率的许多问题时, 往往针对某个具体的随机变量, 但所得结论却对与之等价的一类随机变量都是成立的. 下面讨论的许多问题都是如此. 对只涉及可列个随机变量的运算, 等价类或其代表间的运算都是一致的. 考虑等价类或其代表并无多大区别, 但当涉及不可列个随机变量的运算时, 必须十分小心.

命题 3.3.1 设 $\{X_i, i \in I\}$ 为一族随机变量, 则必有唯一 (不计 a.s. 相等差别) 随机变量 Y(可取 $\pm\infty$) 满足: :

(a) 对每个 $i \in I, X_i \le Y$ a.s.;

(b) 若 Y' 也满足对每个 $i \in I, X_i \le Y'$ a.s., 则

$$Y \le Y' \quad a.s..$$

证明 若 I 为可列集, 取 $Y = \sup_{i \in I} X_i$ 即可.

(a) 一般地, 记$f(x) = \arctan x$, 则 f 是严格单调连续有界函数, 令

$$\sigma = \sup_{J \subset I} E\Big[f\big(\sup_{i \in J} X_i\big)\Big], \ \ J \text{ 为 } I \text{ 的可列子集}, \tag{3.3.1}$$

按上确界定义, 必有可列集 $J_n \subset I$, 使

$$E\Big[f\big(\sup_{i \in J_n} X_i\big)\Big] > \sigma - \frac{1}{n}.$$

记 $J_0 = \bigcup_n J_n$, 则 J_0 可列, 且对每个 n, 有

$$\sigma \ge E\Big[f\big(\sup_{i \in J_0} X_i\big)\Big] > \sigma - \frac{1}{n}.$$

故 $\sigma = E[f(\sup_{i \in J_0} X_i)]$. 令 $Y = \sup_{i \in J_0} X_i$, 则 Y 为随机变量, 且 (a) 必成立, 否则存在 $X_{i_0}, P(X_{i_0} > Y) > 0$, 这时, $P(f(X_{i_0} \vee Y) > f(Y)) > 0$, 故

$$E\Big[f\big(\sup_{i \in J_0 \bigcup \{i_0\}} X_i\big)\Big] = E[f(Y \vee X_{i_0})] > E[f(Y)] = \sigma.$$

上式与 (3.3.1) 矛盾, 故 (b) 成立. 此外, 若 Y' 也满足

$$X_i \le Y' \quad a.s., \quad \forall i \in I,$$

则 $Y = \sup_{i \in J_0} X_i \le Y'$ a.s., 故 (a) 成立.

(b) 唯一性是 (a) 的直接结论.

定义 3.3.2 若 $\{X_i, i \in I\}$ 为随机变量族, 由命题 3.3.1 规定的 Y 称为 $\{X_i, i \in I\}$ 的本性上确界, 记为 ess $\sup_{i \in I} X_i$ 或 $\text{esup}_{i \in I} X_i$. 同样, ess $\inf_{i \in I} X_i \triangleq -$ess $\sup_{i \in I}(-X_i)$, 称为 $\{X_i, i \in I\}$ 的本性下确界.

注 3.3.2 命题 3.3.1 表明, 从等价类来看, 任一随机变量族都有上(下) 确界.

命题 3.3.1 的集合形式为对任一可测集族 $\{A_i, i \in I\}$, 必存在唯一(不计可略集的差别) $A \in \mathscr{F}$, 使对每个 $i, A_i \subset A$ a.s. (指 $A_i \backslash A$ 为可略集), 且若 $B \in \mathscr{F}$ 亦有对每个 $i, A_i \subset B$ a.s., 则 $A \subset B$ a.s..

例 3.3.1 设 $\Omega = [0,1], \mathscr{F} = \mathscr{B}_{[0,1]}$ 为 $[0,1]$ 上 Borel 点集全体, P 取为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度, 对 $r \in [0,1]$, 令

$$X_r = \begin{cases} 1, & \omega = r, \\ 0, & \omega \neq r, \end{cases}$$

则 $\sup_{r\in[0,1]} X_r(\omega) = 1$, 但 ess $\sup_{r\in[0,1]} X_r(\omega) = 0$.

定义 3.3.3 随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$, 若

$$\limsup_n X_n = \liminf_n X_n \quad a.s.,$$

则不计等价类内的差别,其唯一确定的极限记为 $X := \lim_n X_n$ 或 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, 并称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为以概率1收敛于 X 或 a.s. 收敛于 X.

命题 3.3.3 (a) 随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ a.s. 收敛于有限随机变量 X 的充要条件是

$$P\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\Big) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0; \tag{3.3.2}$$

(b) 随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ a.s.收敛于有限随机变量 X 的充要条件是它为 a.s. 收敛意义下的 Cauchy 序列, 即当 $m, n \to \infty$, $\{X_n - X_m, m, n \geq 1\}$ a.s. 收敛于零, 或等价地,

$$P\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n,m=N}^{\infty} \{|X_n - X_m| > \varepsilon\}\Big) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0; \tag{3.3.3}$$

(c) 若正数列 $\{\varepsilon_n\}$ 满足 $\Sigma_n \varepsilon_n < \infty$, 又随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < \infty,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ a.s. 收敛于有限随机变量.

证明 (a) 记 $A_n(\varepsilon) = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$, 则 (3.3.2) 式等价于

$$P\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n(\varepsilon)\Big) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

" $\Rightarrow$ ": 若 $\omega_0 \in \{\omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$有限$\}$, 则对任一 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon, \omega_0)$, 当 $n > N$ 时, $|X_n(\omega_0) - X(\omega_0)| \leq \varepsilon$, 即 $\omega_0 \notin \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)$. 所以

$$\big\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\text{有限}\big\} \subset \big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n(\varepsilon)\big)^c,$$

由此 (3.3.2) 式成立.

"$\Leftarrow$"： 若 (3.3.2) 式对任一 $\varepsilon > 0$ 成立, 则

$$P\Big\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\big(\overline{\lim_{n}}\,A_n(\frac{1}{k})\big)\Big\} = 0, \tag{3.3.4}$$

因而对 $\omega_0 \notin \bigcup_{k\geq 1}\Big(\overline{\lim}_n A_n(\frac{1}{k})\Big)$ 及任一 $\varepsilon_0 > 0$, 取 $\frac{1}{k} < \varepsilon_0$, 由

$$\omega_0 \in \Big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,A_n(\frac{1}{k})\Big)^c = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\Big(A_n(\frac{1}{k})\Big)^c,$$

必存在 $N(\varepsilon_0, \omega_0)$, 使当 $n > N(\varepsilon_0, \omega_0)$ 时, $\omega_0 \in \Big(A_n(\frac{1}{k})\Big)^c$, 即

$$|X_n(\omega_0) - X(\omega_0)| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon_0.$$

由于 ε_0可为任一正数, 故 $\lim_n X_n(\omega_0) = X(\omega_0)$, 由 (3.3.4)式故 $\{X_n\}$ a.s. 收敛于 X.

(b) 由实数列收敛的 Cauchy 准则, 对固定的 ω_0,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega_0) \text{ 存在有限} \Longleftrightarrow \lim_{m,n\to\infty}|X_n(\omega_0) - X_m(\omega_0)| = 0.$$

而 $\{X_n, n \geq 1\}$ a.s. 为 Cauchy 基本列, 且与 (3.3.3) 式等价, 可与 (1) 类似地证明.

(c) 记 $A_n = \{\omega : |X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\}$, 则

$$P\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \leq \sum_{k\geq n} P\{|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\}.$$

故

$$P\big(\overline{\lim_{n}}\,A_n\big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = 0,$$

即 $\overline{\lim}_n A_n$ 为可略集. 若 $\omega \in \big(\overline{\lim}_n A_n\big)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c$, 则必存在 $N_0(\omega)$,使 $\omega \in \bigcap_{k\geq N_0} A_k^c$, 即当 $k \geq N_0(\omega)$时, 有

$$|X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leq \varepsilon_n,$$

所以这时 $\sum_n |X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| < \infty$. 因而当 $\omega \in \big(\overline{\lim}_n A_n\big)^c$ 时, $\lim_n X_n(\omega)$ 必存在有限, 故 $\{X_n\}$ a.s. 收敛于有限随机变量.

定义 3.3.4 随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$, 若存在有限随机变量 X, 使

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 依概率收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{P} X$ 或 pr-$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.

容易说明, 依概率收敛极限不计可略集上的差别是唯一确定的. 若 pr-$\lim_n X_n = X$, pr-$\lim_n X_n = Y$, 则对任一 $\varepsilon > 0$ 有

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P\Big(|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + P\Big(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\Big),$$

故在上式右端令 $n \to \infty$, 有 $P(|X - Y| > \varepsilon) = 0$. 又由于 ε 可取任一正数, 故 $P(X = Y) = 1$.

引理 3.3.1 若随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为依概率收敛下的 Cauchy 基本列, 即

$$\lim_{n,m\to\infty} P(|X_n - X_m| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则必有 a.s. 收敛于有限随机变量的子序列 $\{X_{n_k}, k \geq 1\}$.

证明 取 $n_1 = 1$, 而 $n_j > n_{j-1}$, 且当 $r, s > n_j$ 时,

$$P(|X_r - X_s| > 2^{-j}) < 3^{-j}.$$

这时

$$\sum_j P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < \sum_j 3^{-j} < \infty,$$

由命题 3.3.3(3), $\{X_{n_k}, k \geq 1\}$ a.s. 收敛于有限随机变量.

命题 3.3.4 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为随机变量序列, 则:

(a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ a.s., 且 X 为有限随机变量, 则 pr-$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$;

(b) pr-$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ 的充要条件是 $\{X_n\}$ 为依概率收敛下的 Cauchy 基本列.

(c) 若 pr-$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$,则$\{X_n, n \geq 1\}$有几乎处处收敛到几乎处处有限的子列.

证明 (a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ a.s., 则由 (3.3.2) 式, 对每一 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k\geq n}\{|X_n - X| > \varepsilon\}\Big) = 0.$$

因而对每一 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, 即 pr-$\lim_n X_n = X$.

(b) $\Rightarrow$ 由于下式, 证明是直接的,

$$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon/2) + P(|X_m - X| > \varepsilon/2).$$

$\Leftarrow$ 由引理 3.3.1, 必有子序列 $\{X_{n_k}, k \geq 1\}$ a.s. 收敛于有限随机变量 X , 故 pr-$\lim_k X_{n_k} = X$, 这时由

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X_{n_k}| > \varepsilon/2) + P(|X_{n_k} - X| > \varepsilon/2),$$

令 $n_k \to \infty$, 再令 $n \to \infty$, 即 pr-$\lim_n X_n = X$.

(c) 由(b)及引理3.3.1即知结论成立.

注 3.3.5 对 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上有限随机变量 X, Y, 引进

$$\rho(X, Y) = E\Big[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\Big],$$

则对随机变量等价类来说, ρ 是一个距离, 且按此收敛等价于依概率收敛. 命题 3.3.4 表明这一距离空间还是完备的.

例 3.3.2 设 $\overline{\mathscr{B}}$ 为 $[0,1[$ 上的 Lebesgue 可测集全体, $P=\lambda$ 为 $[0,1[$ 上的 Lebesgue 测度. 在 $([0,1),\overline{\mathscr{B}},\lambda)$ 上, 取

$$X_n(\omega)=I_{[p/2^k,(p+1)/2^k)}(\omega),\quad n=2^k+p,\ 0\le p\le 2^k-1,$$

则对 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$P(|X_n|>\varepsilon)=\frac{1}{2^k},\quad n=2^k+p,\ 0\le p\le 2^k-1.$$

所以当 $n\to\infty$ 时, $X_n\xrightarrow{P}0$. 但

$$\varliminf_{n\to\infty}X_n(\omega)=0,\quad \varlimsup_{n\to\infty}X_n(\omega)=1,\ \forall\omega\in(0,1).$$

§3.3.2 一致可积与平均收敛

定义 3.3.5 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积随机变量族 $\{X_i,i\in I\}$ 称为一致可积的, 若

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>N\}}|X_i|dP=0.$$

首先指出, 若 Y 为可积随机变量, 则

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{|Y|>N\}}|Y|dP=0. \tag{3.3.5}$$

为证明上式, 只须取 $X_n=|Y|I_{\{|Y|>n\}}$, 则当 $n\to\infty$ 时, 因为 Y 可积,故$P(|Y|=\infty)=0$,且

$$\lim_{n\to\infty}X_n=|Y|I_{\{|Y|=\infty\}}=0\ \ a.s.,$$

又 $|X_n|\le Y$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理 (3.3.5) 式成立.

命题 3.3.6 设 $\mathscr{H}=\{X_i,i\in I\}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积随机变量族，则

(a) 若 I 为有限集,则 $\mathscr{H}$ 一致可积;

(b) 若对每个 $i\in I,|X_i|\le Y,\ Y$ 可积, 则 $\mathscr{H}$ 一致可积;

(c) 若存在 $p>1,\sup_i E|X_i|^p<\infty$, 则 $\mathscr{H}$ 一致可积.

证明 由 (3.3.5) 式, (a), (b) 是显然的. 为证明 (c), 利用

$$\int_{\{|X_i|>N\}}|X_i|dP\le\frac{1}{N^{p-1}}\int_{\{|X_i|>N\}}|X_i|^pdP\le\frac{1}{N^{p-1}}\sup_i E|X_i|^p,$$

即知结论成立.

定义 3.3.6 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积随机变量族 $\{X_i,i\in I\}$ 称为一致绝对连续的, 若

$$\lim_{\delta\to0}\sup_{P(A)<\delta}\sup_{i\in I}\int_A|X_i|dP=0. \tag{3.3.6}$$

命题 3.3.7 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积随机变量族 $\mathscr{H}=\{X_i,i\in I\}$ 一致可积的充要条件是 $\{X_i,i\in I\}$一致绝对连续且积分一致有界（即,$\sup\limits_{i\in I}E|X_i|<\infty$).

证明 $\Rightarrow$

$$\int_A |X_i|dP \le \int_{A\{|X_i|\le N\}} |X_i|dP + \int_{A\{|X_i|\ge N\}} |X_i|dP \le NP(A) + \sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>N\}} |X_i|dP.$$

先令 $P(A)\to 0$, 再令 $N\to\infty$, 得 $\{X_i, i\in I\}$一致绝对连续. 取 $A=\Omega$ 得$\{X_i, i\in I\}$积分一致有界.

$\Leftarrow$ 由 (3.3.6) 式, 对任一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 当 $P(A)<\delta(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{i\in I}\int_A |X_i|dP < \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

而当 $N\to\infty$ 时,

$$P(|X_i|>N) \le \frac{1}{N}\sup_i E|X_i| \to 0,$$

所以当 $P(|X_i|>N)<\delta(\varepsilon)$ 时, 由 (3.3.7) 式可得 $\sup_i\int_{|X_i|>N}|X_i|dP<\varepsilon$, 即 $\mathscr{H}=\{X_i, i\in I\}$ 为一致可积的.

定理 3.3.1 若X可积, $\{X_n, n\ge 1\}$一致绝对连续且X_n依概率收敛于X,则有

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X| = 0.$$

证明 任给$\epsilon>0$, 由条件易知$\{X_n-X, n\ge 1\}$也一致绝对连续，从而存在$\delta>0$,当$P(E)\le\delta$时，有$\sup_{n\ge1}\int_E|X_n-X|d\mathrm{P}<\frac{\epsilon}{2}$. 再由$X_n$依概率收敛于$X$知，存在$N\ge 1$, 当$n\ge N$时，有

$$P(|X_n-X|>\frac{\epsilon}{2})\le\delta.$$

这样，当$n\ge N$时，有(取$E=(|X_n-X|>\frac{\epsilon}{2})$)

$$\begin{aligned} E|X_n-X| &= \int_{(|X_n-X|>\frac{\epsilon}{2})}|X_n-X|d\mathrm{P} + \int_{(|X_n-X|\le\frac{\epsilon}{2})}|X_n-X|d\mathrm{P} \\ &\le \int_{(|X_n-X|>\frac{\epsilon}{2})}|X_n-X|d\mathrm{P} + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon \end{aligned}$$

即，结论成立.

推论 3.3.1 (控制收敛定理). 若$\{X_n, n\ge 1\}$几乎处处(或依概率)收敛于X,且存在可积的函数Y使得$|X_n|\le Y$ $(n\ge 1)$,则有

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X| = 0.$$

证明 因$|X_n|\le Y$且Y可积，当$\{X_n, n\ge 1\}$几乎处处于收敛于X时，X也可积. 故$\{|X_n|: n\ge 1\}$一致绝对连续,于是由定理3.3.1即知结论成立.

若$\{X_n, n\ge 1\}$ 依概率收敛于X，于是由命题3.3.4(3)知其某子列$\{X_{n_k}, k\ge 1\}$几乎处处收敛于有限的随机变量(记为Z). 从而$X=Z$ a.s. 再由$|X_{n_k}|\le Y$且Y可积知，Z(从而X)可积. 于是由定理3.3.1即知结论成立

定义 3.3.7 对 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积随机变量序列 $\{X_n, n\ge 1\}$, 若存在可积随机变量 X, 使 $\lim_n E|X_n-X|=0$, 则称 $\{X_n\}$ (一阶)平均收敛 或 L^1 收敛于 X, 记为 $X_n\xrightarrow{L^1}X$.

由于

$$E|X-Y| \le E|X-X_n| + E|X_n - Y|,$$

容易说明 L^1 收敛的极限元在 a.s. 相等的意义下是唯一的. 若 $X_n \xrightarrow{L^1} X$, 则 $EX_n \to EX$.

命题 3.3.8 对可积随机变量序列 $\{X_n, n \ge 1\}$, 下列条件等价:

(a) $X_n \xrightarrow{L^1} X$;

(b) $\{X_n\}$ 为 L^1 基本列, 即 $\lim_{n.m\to\infty} E|X_n - X_m| = 0$;

(c) $\{X_n, n \ge 1\}$ 为一致可积的且 $X_n \xrightarrow{P} X$.

证明 (a) ⇒ (b) $E|X_n - X_m| \le E|X_n - X| + E|X - X_m| \to 0\ (n, m \to \infty)$.

(b) ⇒ (c) 由 (b) 知对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon)$, 当 $m, n \ge N(\varepsilon)$ 时, $E|X_n - X_m| < \varepsilon$, 这时,

$$\sup_n E|X_n| \le \sup_{n \le N(\varepsilon)} E|X_n| + \sup_{n > N(\varepsilon)} E|X_n - X_{N(\varepsilon)}| \le \sup_{n \le N(\varepsilon)} E|X_n| + \varepsilon < \infty,$$

$$\begin{aligned}\sup_n \int_A |X_n| dP &\le \sup_{n \le N(\varepsilon)} \int_A |X_n| dP + \sup_{n > N(\varepsilon)} E|X_n - X_{N(\varepsilon)}| \\ &\le \sup_{n \le N(\varepsilon)} \int_A |X_n| dP + \varepsilon.\end{aligned}$$

对已定的 $N(\varepsilon)$, 可取 $P(A)$ 足够小, 使上式右端小于 2ε, 故由命题 3.3.7, $\{X_n\}$ 为一致可积的. 另一方面

$$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} E|X_n - X_m| \to 0, \quad m, n \to \infty,$$

即 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为依概率收敛的基本列, 故存在有限随机变量 X, 使 $X_n \xrightarrow{P} X$.

(c) ⇒ (a) 由引理 3.3.1, 必有子序列 $X_{n_k} \to X$ a.s., 按 Fatou 引理

$$E|X| = E[\varliminf_k |X_{n_k}|] \le \varliminf_k E|X_{n_k}| \le \sup_n E|X_n| < \infty,$$

故 X 为可积的, 再由定理3.3.1和命题3.3.7即知结论成立.

§3.3.3 L^p 空间

命题 3.3.9 (Jensen 不等式) 设 f 为 $(a,b) \subset (-\infty, +\infty)$ 上的凸函数, X 为取值 (a,b) 的可积随机变量, 则有

$$E[f(X)] \ge f(EX). \tag{3.3.8}$$

证明 对 $x_0 \in (a,b)$, 由 f 为凸函数,

$$f(x) \ge f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0), \quad x \in (a,b),$$

取 $x_0 = EX, x = X$ 代入上式, 并对上式取期望即得 (3.3.8) 式.

定义 3.3.8 对实随机变量 $X, p \ge 1$, 记

$$\|X\|_p = (E|X|^p)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|X\|_\infty = \sup\{x : P(|X| > x) > 0\}.$$

注 3.3.10 由 $\|X\|_\infty$ 的定义容易得出 $P(|X| > \|X\|_\infty) = 0, P(|X| \le \|X\|_\infty) = 1$, 且 $\|X\|_\infty$ 是具有上述性质的最小者. 所以 $\|X\|_\infty$ 可看为随机变量 $|X|$ 取值 (不计可略事件后) 的上确界.

命题 3.3.11 (1) (Hölder 不等式) 设 $p \ge 1, q \ge 1$ 满足 $1/p+1/q = 1$ (约定 $1+1/\infty = 1$), X, Y 为实随机变量, 则成立

$$E|XY| \le \|X\|_p\|Y\|_q; \tag{3.3.9}$$

(2) 对 $1 \le r \le r' \le \infty$, 成立

$$\|X\|_r \le \|X\|_{r'}. \tag{3.3.10}$$

证明 (1) 当 p 或 q 为 ∞ 时, (3.3.9) 式是明显的. 以下只考虑 $p, q \in (1, \infty)$, 且假定 (3.3.9) 式右端是有限的.

由于 $f(x) = -\ln(x)$ 是 $(0, \infty)$ 上的凸函数, 故对 $\alpha \in (0, 1)$ 有

$$\alpha \ln(u) + (1-\alpha)\ln(v) \le \ln(\alpha u + (1-\alpha)v),$$

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \le \alpha u + (1-\alpha)v.$$

取 $u = |U|^{1/\alpha}, v = |V|^{1/(1-\alpha)}$, 代入上式可得

$$|UV| \le \alpha|U|^{1/\alpha} + (1-\alpha)|V|^{1/(1-\alpha)}.$$

若取 $\alpha = 1/p$, 则 $1-\alpha = 1/q$, 并取 $U = X/\|X\|_p, V = Y/\|Y\|_p$ 代入上式, 可得

$$\frac{|X|}{\|X\|_p} \cdot \frac{|Y|}{\|Y\|_q} \le \frac{1}{p}\frac{|X|^p}{\|X\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{\|Y\|_q^q}.$$

对上式取期望即得

$$E\Big[\frac{|X|}{\|X\|_p} \cdot \frac{|Y|}{\|Y\|_q}\Big] \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

所以 (3.3.9) 式成立.

(2) 当 $r' = \infty$ 时, (3.3.10) 式的证明是直接的. 对 $1 \le r' \le r < \infty$, 取 $p' = r'/r, q' = (1-1/p')^{-1}$, 则由不等式有

$$E|X|^r = E[|X|^r \cdot 1] \le \||X|^r\|_{r'/r}\|1\|_{q'} = (E|X|^{r'})^{r/r'}.$$

由上式开 r 次方即得 (3.3.10) 式.

命题 3.3.12 对随机变量 X, Y 及实数 $c, p \ge 1$, 有

(a) $\|cX\|_p = |c|\|X\|_p$;

(b) Minkowski 不等式:

$$\|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p. \tag{3.3.11}$$

证明 (a) 可由 $\|\cdot\|_p$ 定义直接推出.

(b) 当 $p = \infty$ 时, 由下列不等式知 (3.3.11) 式的证明是直接的.

$$P(|X+Y| > \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty) \le P(|X| > \|X\|_\infty) + P(|Y| > \|Y\|_\infty);$$

当 $p<\infty$ 时, 只需考虑 $\|X\|_p, \|Y\|_p$ 都有限情况, 这时有

$$E[|X+Y|^p] \le 2^{p-1}(E[|X|^p]+E[|Y|^p])<\infty.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} E[|X+Y|^p] &\le E[|X||X+Y|^{p-1}]+E[|Y||X+Y|^{p-1}] \\ &\le \|X\|_p \||X+Y|^{p-1}\|_q + \|Y\|_p \||X+Y|^{p-1}\|_q \\ &= \|X\|_p (E[|X+Y|^p])^{1/q} + \|Y\|_p (E[|X+Y|^p])^{1/q}. \end{aligned}$$

上式两端约去有限的公因子 $(E[|X+Y|^p])^{1/q}$ 后即得 (3.3.11) 式.

定义 3.3.9 对 $p\ge 1$ 及随机变量等价类规定

$$L^p(\Omega,\mathscr{F},P)=\{X: X \text{ 为随机变量}, \|X\|_p<\infty\},$$

称它为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 L^p 空间, 简称 L^p 空间. 对 L^p 中元素列 $\{X_n\}$ 及 Y, 若

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n-Y\|_p=0,$$

则称 $\{X_n\}$ p 次 (p 阶) 平均收敛于 Y, 记为 $X_n \xrightarrow{L^p} Y$. 由于当 $p<\infty$ 时,

$$P(|X_n-Y|>\varepsilon)\le \varepsilon^{-p}E|X_n-Y|^p,$$

因此 $X_n \xrightarrow{L^p} Y$, 必有 $X_n \xrightarrow{P} Y$. 因而 L^p 收敛的极限是唯一的 (按等价类来看).

注 3.3.13 在 Ω 上, 若 $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域, 也记

$$L^p(\mathscr{G})=L^p(\Omega,\mathscr{G},P)=L^p(\Omega,\mathscr{F},P)\cap\{X: X\in\mathscr{G}\}.$$

命题 3.3.14 $\|\cdot\|_p$ 是 L^p 中的范数, L^p 是线性赋范空间.

证明 这是命题 3.3.12 的直接结论.

命题 3.3.15 对 $1\le p\le\infty$ 及 L^p 中元素列$\{X_n\}$, 下列两个事实等价,

(a) $X_n \xrightarrow{L^p} X$;

(b) $\{X_n\}$ 是基本列, 即 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|X_n-X_m\|_p=0$.

(c) 当 $1\le p<\infty$ 时, $(a),(b)$又等价于下列事实：$\{|X_n|^p, n\ge 1\}$ 一致可积,且 $X_n \xrightarrow{P} X$.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 可由 $\|X_n-X_m\|_p\le\|X_n-X\|_p+\|X-X_m\|_p$ 得.

设 $p=\infty$: (b) $\Rightarrow$ (1) $\{X_n\}$ 为 L^∞ 基本列相当于除去可略集外, 在一致收敛的意义下 $\{X_n\}$ 为基本列, 且为一致有界的, 因而存在 $X\in L^\infty$, 且 $\|X_n-X\|_\infty\to 0$.

$p<\infty$: (b) $\Rightarrow$ (c) 对任一 $\varepsilon>0$,

$$P(|X_n-X_m|>\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^p}E|X_n-X_m|^p\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

故 $\{X_n, n \geq 1\}$ 按依概率收敛为基本的, 必有有限随机变量 X, 使 $X_n \xrightarrow{P} X$. 另一方面, 若取 $N(\varepsilon)$ 满足 $m, n \geq N(\varepsilon)$ 时 $\|X_n - X_m\|_p < \varepsilon$, 则

$$\sup_n \|X_n\|_p \leq \sup_{n \leq N(\varepsilon)} \|X_n\|_p + \sup_{n > N(\varepsilon)} \|X_n - X_{N(\varepsilon)}\|_p < \infty,$$

故 $\sup_n \|X_n\|^p < \infty$. 又利用 $|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$, 有

$$\begin{aligned} \sup_n \int_A |X_n|^p dP &\leq 2^{p-1}\Big(\sup_{n \leq N(\varepsilon)} \int_A |X_n|^p dP + \sup_{n > N(\varepsilon)} \int_A |X_n - X_{N(\varepsilon)}|^p dP\Big) \\ &\leq 2^{p-1}\Big(\sup_{n \leq N(\varepsilon)} \int_A |X_n|^p dP + \varepsilon^p\Big). \end{aligned}$$

先令 $P(A) \to 0$, 再令 $\varepsilon \to 0$, 可得 $\{\int_A |X_n|^p dP, n \geq 1\}$ 是一致绝对连续的, 故由命题 3.3.7 是一致可积的.

(c) $\Rightarrow$ (a) 由引理 3.3.12 , 必有子序列 $\{X_{n_k}, k \geq 1\}$ 使 $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$, 由 Fatou 引理

$$E|X|^p = E[\lim_k |X_{n_k}|^p] \leq \underline{\lim}_k E|X_{n_k}|^p \leq \sup_n E|X_n|^p < \infty,$$

即 $X \in L^p$. $\{|X - X_n|^p, n \geq 1\}$ 亦一致可积, $|X - X_n|^p \xrightarrow{P} 0$, 由命题 3.3.8 即得 $\lim_n E|X_n - X|^p = 0$.

系 3.3.16 对 $p \in [1, \infty)$ 及随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$, 若存在 $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 使得对每个 n, 有 $|X_n| \leq Y$, 则当 $n \to \infty$ 时, 下列两个事实等价:

(a) $X_n \xrightarrow{P} X$;

(b) $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

命题 3.3.17 对 $p \in [1, \infty]$, L^p 为 Banach 空间.

证明 由命题 (3.3.14), L^p 是线性赋范空间. 由命题 3.3.15, L^p 是完备的. 所以它是一个 Banach 空间.

命题 3.3.18 若在 $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中取

$$(X, Y) = E[XY],$$

则 (X, Y) 是内积, $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是 Hilbert 空间.

证明 可直接验证 (X, Y) 满足内积的要求, 且 $\|X\|_2 = \sqrt{(X, X)}$.

定义 3.3.10 若 X 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量, $p > 0$, $E|X|^p$ 称为 X 的 (或分布的) p 阶绝对矩, EX^p(若其存在) 称为 X 的 p 阶矩, $Var \triangleq E[X - EX]^2$ 称为 X 的方差, 方差的平方根 (非负的) 称为标准差. 若 Y 亦为随机变量, $Cov(X, Y) \triangleq E[(X - EX)(Y - EY)]$ 称为 X, Y 的协方差.

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}, & Var(X) \cdot Var(Y) \neq 0, \\ 0, & Var(X) \cdot Var(Y) = 0 \end{cases}$$

称为 X, Y 的相关系数. $EXY = 0$, 称 X, Y 为正交的; $\rho(X, Y) = 0$, 称 X, Y 为互不相关的.

由 (3.3.9) 式可得

$$|\rho(X,Y)| \le 1,\ \ |Cov(X,Y)| \le \sqrt{Var(X)Var(Y)}.$$

§3.4 乘积可测空间上的测度

§3.4.1 两维乘积空间上的测度

定义 3.4.1 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为两个可测空间, $P(\omega_1,A_2)$ 为 $\Omega_1\times\mathscr{F}_2$ 到 $[0,1]$ 的函数, 满足

(1) 对每个 $\omega_1\in\Omega_1$, $P(\omega_1,\cdot)$ 是 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 上的概率测度;

(2) 对每个 $A_2\in\mathscr{F}_2$, $P(\cdot,A_2)$ 是 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 上的可测函数, 则称 P 为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 的转移概率.

例 3.4.1 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为两个可测空间.

(i) $Q(\cdot)$ 是 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 上的概率测度, 则 $P(\omega_1,A_2)=Q(A_2)$ 是一个转移概率;

(ii) f 为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 的可测映照, 则 $P(\omega_1,A_2)=I_{A_2}(f(\omega_1))$ 也是一个转移概率.

定理 3.4.1 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为两个可测空间, P_1 为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 上的概率测度, P_{12} 是 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$转移概率, 则

(a) 在 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上存在唯一概率测度 P, 满足

$$P(A_1\times A_2)=\int_{A_1}P_{12}(\omega_1,A_2)P_1(d\omega_1),\ \ A_1\in\mathscr{F}_1, A_2\in\mathscr{F}_2; \tag{3.4.1}$$

(b) 对 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P)$ 上每个非负 (或准可积) 随机变量 X, 若 $X_{\omega_1}(\cdot)=X(\omega_1,\cdot)$ 表示 X 的 ω_1 截口, 则

$$Y(\omega_1)=\int X_{\omega_1}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2) \tag{3.4.2}$$

是 Ω_1 上关于 P_1 a.s.有意义(即存在 $N_1\in\mathscr{F}_1$, $P(N_1^c)=0$, Y 在 N_1 上有定义), 且非负 (对 P_1 准可积) $\mathscr{F}_1$ 可测随机变量. 进而有

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}XdP=\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2}X_{\omega_1}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2))P_1(d\omega_1). \tag{3.4.3}$$

证明 (a) 设 $\mathscr{C}=\{A_1\times A_2: A_1\in\mathscr{F}_1, A_2\in\mathscr{F}_2\}$ 为 $\Omega_1\times\Omega_2$ 中可测矩形全体, 它是一个半域 (命题 1.3.1), 且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$. 由测度扩张定理 2.2.1可知, 只需验证由 (3.4.1) 式规定的 P 在 $\mathscr{C}$ 上为概率测度.

首先, $P(A_1\times A_2)\in[0,1]$ 及 $P(\Omega_1\times\Omega_2)=1$ 是明显的.

其次, 若 $A_1\times A_2=\sum_{i\ge1}A_{1i}\times A_{2i}$, $A_1, A_{1i}\in\mathscr{F}_1$, $A_2, A_{2i}\in\mathscr{F}_2$, 则必有

$$I_{A_1}(\omega_1)I_{A_2}(\omega_2)=I_{A_1\times A_2}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{i=1}^{\infty}I_{A_{1i}}(\omega_1)I_{A_{2i}}(\omega_2).$$

注意到上式右端各项为非负的, 由 Levi 引理,

$$\begin{aligned} I_{A_1}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_2) &= \int_{\Omega_2} I_{A_1}(\omega_1)I_{A_2}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega_2} I_{A_{1i}}(\omega_1)I_{A_{2i}}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_{1i}}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_{2i}). \end{aligned}$$

再在 Ω_1 上按 P_1 积分, 仍利用 Levi 引理可得

$$\begin{aligned} P(A_1\times A_2) &= \int_{\Omega_1} I_{A_1}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_2)P_1(d\omega_1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega_1} I_{A_{1i}}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_{2i})P_1(d\omega_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{1i}\times A_{2i}). \end{aligned}$$

故 P 为 $\mathscr{C}$ 上的概率测度. 由测度扩张定理 2.2.1, 即得(a).

(b) 记 $\mathscr{C}=\{A_1\times A_2 : A_1\in\mathscr{F}_1, A_2\in\mathscr{F}_2\}$, 它是一个 π 类. 又令

$$\mathscr{L}=\{(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)\text{上非负随机变量全体}\},$$

$$\mathscr{H}=\{X : X\in\mathscr{L}\ \text{且使 (3.4.3) 成立}\}.$$

则由 (3.4.1) 式可知, $\mathscr{H}\supset\{I_A, A\in\mathscr{C}\}$, 又利用积分线性性及 Levi 引理, 可知 $\mathscr{H}$ 是一个 $\mathscr{L}$ 类, 因而 $\mathscr{H}$ 包含一切 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上的非负随机变量, 即对任意非负随机变量 (b) 成立. 进而对 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上准可积随机变量 X 也成立.

注 3.4.1　在定理 3.4.1 的假定下, 对 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上每个非负随机变量 X 有

$$\int XdP=0 \Longleftrightarrow \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}P_{12}(\omega_1,d\omega_2)=0\ \ a.s.\ P_1,$$

$$\int XdP<\infty \Longrightarrow \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}P_{12}(\omega_1,d\omega_2)<\infty\ \ a.s.\ P_1.$$

注 3.4.2　在定理 3.4.1 的假定下,

(1) 在 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 上存在唯一的概率测度 P_2, 满足

$$P_2(A_2)=\int_{\Omega_1} P_{12}(\omega_1,A_2)P_1(d\omega_1),\ A_2\in\mathscr{F}_2;$$

(2) 在 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$ 上每个非负 (准可积) 随机变量 Z,

$$Y(\omega_1)=\int_{\Omega_2} Z(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2)$$

为 Ω_1 上关于 P_1 为 a.s. 确定的 $\mathscr{F}_1$ 可测非负 (准可积) 随机变量, 进而有

$$\int_{\Omega_2} Z(\omega_2)P_2(d\omega_2)=\int_{\Omega_1} Y(\omega_1)P_1(d\omega_1).$$

定理 3.4.2 (Fubini 定理) 设 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$ 为两个概率空间，则在 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$, 上存在唯一的概率测度 P, 满足

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2), \quad A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2, \tag{3.4.4}$$

且对 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ 上任一非负 (准可积) 随机变量X, 下式各项有意义且等式成立,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} XdP &= \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)P_2(d\omega_2)\Big)P_1(d\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)P_1(d\omega_1)\Big)P_2(d\omega_2).\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

证明 只要在定理 3.4.1 中, 用P_1, P_2以及P_2, P_1 分别在 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$ 和 $(\Omega_2 \times \Omega_1, \mathscr{F}_2 \times \mathscr{F}_1)$ 上构造概率测度, 由(3.4.4)容易验证X关于两者的积分是一致的,其它都可以由定理 3.4.1 推出.

定义 3.4.2 由 (3.4.4) 式规定的测度称为乘积测度, 记为 $P = P_1 \times P_2$. 又称

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2, P) = (\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1) \times (\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2),$$

称为乘积概率空间.

命题 3.4.3 (分部积分公式) 若 f, g 为 $(a, b]$ 上的右连续有界递增函数, 由 f, g 产生的$L - S$ 测度仍分别用 f, g 表示, 则

$$\int_{(a,b]} f(x)dg(x) = f(b)g(b)|_a^b - \int_{(a,b]} g(x-)df(x), \tag{3.4.6}$$

其中 $g(x-) \triangleq \lim_{y\uparrow x} g(y)$.

证明 若 f 或 g 为常数, 则 (3.4.6) 显然成立. 故不妨设 $f(a) = g(a) = 0$. 在 $(a, b] \times (a, b]$ 上, 令 $\mu = f \times g$(乘积测度), 则

$$\begin{aligned}f(b)g(b) &= \iint_{(a,b]\times(a,b]} d\mu = \iint_{a<x\le y\le b} df(x)dg(y) + \iint_{a<y<x\le b} df(x)dg(y)\\ &= \int_{(a,b]} f(y)dg(y) + \int_{(a,b]} g(x-)df(x).\end{aligned}$$

例 3.4.2 若 $\varphi(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上非负可测函数, X 为非负随机变量, 又 $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$, 则

$$E[\Phi(X)] = \int_0^\infty \varphi(t)P(X > t)dt.$$

证明 若用 $F(x)$ 记 X 的分布函数, 则由 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}E[\Phi(X)] &= \int_0^\infty \Phi(x)dF(X)\\ &= \int_0^\infty\int_0^x \varphi(t)dtdF(x)\\ &= \int_0^\infty \varphi(t)\Big(\int_t^\infty dF(x)\Big)dt\\ &= \int_0^\infty \varphi(t)P(X > t)dt.\end{aligned}$$

命题 3.4.4 对随机变量 X, 则有

(a) X 可积 $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} P(|X|>n)<\infty$.

(b) X 可积 $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}E[X^2 I_{\{|X|\leq n\}}]<\infty$.

证明 (a) 由于

$$\begin{aligned}
E|X| &= \int_0^\infty y dF_{|X|}(y) \\
&= \int_0^\infty \int_0^y dt dF_{|X|}(y) \\
&= \int_0^\infty P(|X|>t)dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} P(|X|>t)dt \qquad (3.4.7)\\
&\leq \sum_{n=0}^\infty P(|X|>n).
\end{aligned}$$

另一方面, (3.4.7) 可知

$$E|X| \geq \sum_{n=0}^\infty P(|X|>n+1) = \sum_{n=0}^\infty P(|X|>n+1)$$

综上, 结论(a)成立.

(b) 由于

$$\begin{aligned}
E|X| &= \int_0^\infty y^2 \int_y^\infty \frac{1}{t^2} dt dF_{|X|}(y) \\
&= \int_0^\infty \int_0^t y^2 \frac{1}{t^2} dt dF_{|X|}(y)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{t^2} E[X^2 I_{\{|X|\leq t\}}]dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} E[X^2 I_{\{|X|\leq t\}}]dt. \qquad (3.4.8)
\end{aligned}$$

由 (3.4.8) 式可知,

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2} E[X^2 I_{\{|X|\leq t\}}]dt \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{1}{n^2} E[X^2 I_{|X|\leq n}]$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2} E[X^2 I_{\{|X|\leq t\}}]dt \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{1}{(n+1)^2} E[X^2 I_{|X|\leq n+1}].$$

又因上两式右端的收敛性与$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}E[X^2 I_{|X|\leq n}]$的收敛性是等价的，故(b)成立.

§3.4.2 无限维乘积空间上的概率测度

定理 3.4.3 (Ionesca-Tulcea 定理) 设 $(\Omega_j, \mathscr{F}_j)$ $(j=1,2,\cdots)$ 均为可测空间, $\Omega = \times_{i=1}^\infty \Omega_i$, $\mathscr{F} = \times_{i=1}^\infty \mathscr{F}_i$. P_1 为 $\mathscr{F}_1$ 上的概率测度, 对任意的 $j=2,\cdots$, $(\omega_1,\cdots,\omega_j)\in \Omega_1 \times$

$\cdots\times\Omega_j, P_j(\omega_1,\cdots,\omega_{j-1},\cdot)$ 是定义于 $\mathscr{F}_j$ 上的概率测度且对任何 $C\in\mathscr{F}_j, P_j(\omega_1,\cdots\omega_{j-1},C)$ 是 $\Omega_1\times\cdots\Omega_{j-1}$ 上的实值可测函数. 对 $B\in\times_{j=1}^n\mathscr{F}_j$, 定义

$$\hat{P}_n(B)=\int_{\Omega_1}P_1(d\omega_1)\int_{\Omega_2}P_2(\omega_1,d\omega_2)\cdots\int_{\Omega_n}I_B(\omega_1,\cdots,\omega_n)P_n(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1},d\omega_n).$$

则存在唯一的定义于 $\mathscr{F}$ 上的概率测度 P ,使得对一切 $B\in\times_{j=1}^n\mathscr{F}_j$ 及$n\geq 1$, 有

$$P(\omega\in\Omega:(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in B)=\hat{P}_n(B).$$

证明 首先,由定理3.4.1知：$\hat{P}_n$是$\times_{j=1}^n\mathcal{F}_j$上的概率测度。注意到，每个可测柱集可表示为下列形式：$B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$, 其中，$n\geq 1, B^n\in\times_{j=1}^n\mathcal{F}_j$. 记可测柱集类$\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\ldots,\omega_m)\}\in B^m, B^m\in\times_{j=1}^m\mathcal{F}_j, m\geq 1\}=:\mathcal{F}_0$. 对每个可测柱集$B_n\in\mathcal{F}_0$, 令

$$P(B_n):=\hat{P}_n(B^n).$$

下面证明P在可测柱集类$\mathcal{F}_0$上的定义是合理的.事实上, 若B_n还有表示$B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\ldots,\omega_m)\in C^m, C^m\in\times_{j=1}^m\mathcal{F}_j\}=:C_m$. 不妨设$m<n$，则有$(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in C^m\Leftrightarrow(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$，因此，$B^n=C^m\times\Omega_{m+1}\times\cdots\times\Omega_n$. 又因$P_j(\omega_1,\cdots,\omega_j,\cdot)$ 是定义于 $\mathscr{F}_{j+1}$ 上的概率测度从而，$P(B_n)\hat{P}_n(B^n)=\hat{P}_m(C^m)=P(C_m)$.

因$\hat{P}_n$是$\times_{j=1}^n\mathcal{F}_j$上的概率测度，$P$在$\mathcal{F}_0$上是有限可加的。若能证明$P$在$\mathcal{F}_0$是上连续的，则由命题2.1.3(4)可知$P$在$\mathcal{F}_0$上是可数可加的。于是，由概率测度的扩充定理(即定理2.2.1）知：P可唯一地可扩充到$\times_{j=1}^\infty\mathcal{F}_j$上成为概率概率测度，且在$n$维柱集上与$\hat{P}_n$相同。

下面证明P在$\mathcal{F}_0$是上连续的。设$B_n\in\mathcal{F}_0(n\geq 1)$, 且$B_n\downarrow\emptyset$. 反设$\lim_{n\to\infty}P(B_n)>0$. 则，对任意$n\geq 1$,

$$P(B_n)=\int_{\Omega_1}g_n^{(1)}(\omega_1)P_1(d\omega_1),$$

其中，

$$g_n^{(1)}(\omega_1):=\int_{\Omega_2}P_2(\omega_1,d\omega_2)\cdots\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1},\omega_n)P_n(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1},d\omega_n).$$

由$B_{n+1}\subset B_n$可得, $B^{n+1}\subset B^n\times\Omega_{n+1}$, 因此，

$$I_{B^{n+1}}(\omega_1,\ldots,\omega_{n+1})\leq I_{B^n}(\omega_1,\ldots,\omega_n).$$

因此，对固定的$\omega_1\in\Omega_1$，$g_n^{(1)}(\omega_1)$关于n是单调递减的，记$\lim_{n\to\infty}g_n^{(1)}(\omega_1)=h_1(\omega_1)$. 则有单调收敛定理知，$P(B_n)\to\int_{\Omega_1}h_1(\omega_1)P_1(d\omega_1)>0$. 从而存在$\omega'\in\Omega_1$，使得$h_1(\omega_1')>0$, 且$\omega'\in B^1$(否则，有$I_{B^n}(\omega_1',\omega_2,\ldots,\omega_n)\equiv 0$, 因此，$g_n^{(1)}(\omega_1')\equiv 0$, 从而,$h_1(\omega_1')=0$, 矛盾)。

对于$n\geq 2$, 记

$$g_n^{(1)}(\omega_1'):=\int_{\Omega_2}g_n^{(2)}(\omega_2)P_2(\omega_1',d\omega_2),$$

其中，

$$g_n^{(2)}(\omega_2):=\int_{\Omega_3}P_3(\omega_1',\omega_2,d\omega_3)\cdots\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1',\omega_2,\cdots,\omega_n)P_n(\omega_1',\omega_2,\cdots,\omega_{n-1},d\omega_n).$$

同理可知：$g_n^{(2)}(\omega_2)$关于n是单调递减的，记$g_n^{(2)}(\omega_2) \longrightarrow h_2(\omega_2)$. 因此，

$$g_n^{(1)}(\omega_1') \longrightarrow \int_{\Omega_2} h^{(2)}(\omega_2) P_2(\omega_1', d\omega_2)$$

由$g_n^{(1)}(\omega_1') \longrightarrow h_1(\omega_1') > 0$, 故$\int_{\Omega_2} h^{(2)}(\omega_2) P_2(\omega_1', d\omega_2) > 0$. 而且，同上讨论可知：$(\omega_1', \omega_2') \in B^2$. 继续上述讨论，可得$\omega_1', \omega_2', \ldots$, 使得, 对任意$n \geq 1$, 有$(\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_n') \in B^n$, 从而有$(\omega_1', \omega_2', \ldots) \in \cap_{n=1}^{\infty} B^n = \emptyset$, 矛盾. 这样，$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$。因此，$P$在$\mathcal{F}_0$是上连续的。

定理 3.4.4 (Kolmogorov 定理) 设对每个 $t \in T$ (任意非空集指标集), $(\mathbf{R}_t, \mathscr{B}_t) = (\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$, $\mathscr{G} = \{F_{t_1\cdots t_n} : t_1, \cdots, t_n \in T\}$ 为 $\{(\mathbf{R}_t, \mathscr{B}_t) : t \in T\}$ 的乘积空间$(\mathbf{R}_T, \mathscr{B}_T) = (\times_{t\in T}\mathbf{R}_t, \times_{t\in T}\mathscr{B}_t)$上的有限维分布函数族, 满足:

(1) 对称性: 对 $(1, \cdots, n)$ 的任意排列 $(\pi(1), \cdots, \pi(n))$,

$$F_{t_{\pi(1)}\cdots t_{\pi(n)}}(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) = F_{t_1\cdots t_n}(x_1, \cdots, x_n);$$

(2) 相容性:

$$F_{t_1\cdots t_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1\cdots t_{n-1}}(x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

则在 $(\mathbf{R}_T, \mathscr{B}_T)$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得

$$P\{(\omega_t, t \in T) \in \mathbf{R}^T : \omega_{t_i} \leq x_i, 1 \leq i \leq n\} = F_{t_1\cdots t_n}(x_1, \cdots, x_n).$$

证明 见 [3, 82-83].

定理 3.4.5 设 $\{(\Omega_t, \mathscr{F}_t, P_t), t \in T\}$ 为一族概率空间, 则在乘积可测空间 $(\Omega_T, \mathscr{F}_T) = (\times_{t\in T}\Omega_t, \times_{t\in T}\mathscr{F}_t)$ 上存在唯一概率测度 P, 满足

$$P(\pi_{T_1}^T)^{-1} = \times_{t\in T_1} P_t, \text{对每个有限 } T_1 \subset T\text{成立}.$$

其中: 映照

$$\begin{aligned} \pi_{T_1}^T : \quad & \Omega_T \longrightarrow \Omega_{T_1} \\ & (\omega_t, t \in T) \in \Omega_T \longmapsto (\omega_t, t \in T_1) \in \Omega_{T_1} \end{aligned}$$

证明 见 [3, 83-85].

§3.5 习题

1. 设P 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的有限测度,f,g 为其上的可测函数，令$d(f,g):=\int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mathrm{P}$. 证明: 对任一 $d(f,g)=0$的充要条件为$f=g$ a.s.

2. $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的两个有限测度, $A\in\mathscr{F}$, 若对任一 $B\subset A, B\in\mathscr{F}$, 都有 $\mathrm{P}_1(B)=\mathrm{P}_2(B)$. 证明: 对任一 P_1 或 P_2 可积的 X, 都有 $\int_A Xd\mathrm{P}_1=\int_A Xd\mathrm{P}_2$.

3. 设 $p>0$, 若 $\mathrm{E}|X|^p<\infty$, 则
$$\lim_{x\to\infty} x^p\,\mathrm{P}(|X|>x)=0; \tag{3.5.1}$$
反之，若 (3.5.1) 式成立，则对 $\forall\varepsilon\in(0,p)$，有 $\mathrm{E}|X|^{p-\varepsilon}<\infty$.

4. 设f为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$上可积随机变量,若 $E_n\in\mathscr{F}$且 $\mathrm{P}(E_n)\to 0$, 求证$\int_{E_n} fd\mathrm{P}\to 0$.

5. 设h为$[a,b]$上非降且连续可微，f为$[h(a),h(b)]$上的Lebesgue可积函数，证明：$(f\circ h)h'$为$[a,b]$ 上Lebesgue可积函数，且
$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx=\int_a^b f(h(x))h'(x)dx.$$

6. 设X_n,X均为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$上非负可积随机变量,求证:
$$E|X_n-X|\to 0 \text{ 当且仅当} X_n\xrightarrow{P} X \text{ 且} EX_n\to EX.$$

7. (系2.5.1) 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为两个可测空间, P_1为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$上的概率测度, P_{12}是转移概率. 则对$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$上每个非负随机变量$X$, 有
$$\int Xd\mathrm{P}=0\Longleftrightarrow\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\mathrm{P}_{12}(\omega_1,d\omega_2)=0\quad a.s.\ \mathrm{P}_1,$$
$$\int Xd\mathrm{P}<\infty\Longrightarrow\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\mathrm{P}_{12}(\omega_1,d\omega_2)<\infty\quad a.s.\ \mathrm{P}_1.$$

8. 设 X 为随机变量，p 为正整数．证明下列条件等价：

   (1) (1) $\mathrm{E}|X|^p<\infty$;

   (2) $\int_0^\infty x^{p-1}\,\mathrm{P}\left(|X|>x\right)\mathrm{d}x<\infty$;

   (3) $\sum_{n=1}^\infty n^{p-1}\,\mathrm{P}\left(|X|>n\right)<\infty$;

   且这时有
$$\mathrm{E}[X^p]=p\int_0^\infty t^{p-1}[\mathrm{P}(X>t)+(-1)^p\,\mathrm{P}(X<-t)]\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.5.2}$$

9. 设 E 可数, (p_{ij}) 为 E 上的随机矩阵, μ 为 E 上的概率分布. 求证存在唯一的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 及其上的可测映射序列 $\{X_n\}$ 使得
$$\mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_0=i_0,...,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=p_{ij},\quad \mathrm{P}(X_0=i)=\mu(i)$$
对一切 $n\geq 1, i,j,i_0,...,i_{n-1}\in E$ 成立.

第四章　独立随机变量序列

§4.1　独立性

以下都在固定的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 下讨论, T为某个参数集.

定义 4.1.1　(1) 事件族 $\{A_t,t\in T\}\subset\mathscr{F}$ 称为 (关于 P) 独立的, 若对 T 的任一有限子集 $I\subset T$,

$$P(\cap_{t\in I}A_t)=\times_{t\in I}P(A_t).$$

(2) $\{\mathscr{G}_t,t\in T\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子类族, 若对 T 的任一有限子集 $I\subset T$, 成立

$$P(\cap_{t\in I}A_t)=\times_{t\in I}P(A_t),\ \ \forall A_t\in\mathscr{G}_t,t\in I,$$

则称 $\{\mathscr{G}_t,t\in T\}$ 为 (关于 P) 独立子类族.

特别地, 当 $\mathscr{G}_t$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域时, $\{\mathscr{G}_t,t\in T\}$ 称为 (关于 P) 独立的 σ 域族.

命题 4.1.1　设 $\{\mathscr{G}_t,t\in T\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子类族, 若对每个 $t\in T,\mathscr{G}_t$ 为 π 类且$\{\mathscr{G}_t,t\in T\}$ 为独立族, 则

(a)　$\{\sigma(\mathscr{G}_t),t\in T\}$ 为独立的 σ 域族;

(b)　若 $\overline{\mathscr{B}}_t$ 表示 $\sigma(\mathscr{G}_t)$ 的完备化, 则 $\{\overline{\sigma(\mathscr{G}_t)},t\in T\}$ 为独立族.

证明　(a) 根据上述定义, 只需考虑 T 为有限集的情形. 对 $t_0\in T$, 记

$$\mathscr{D}=\{D:P\Big(D\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)=P(D)\times_{t\neq t_0}P(C_t),D\in\mathscr{B}_{t_0},C_t\in\mathscr{G}_t,t\in T\},$$

则 $\mathscr{D}$ 包含 π 类 $\mathscr{G}_{t_0}$. 下证 $\mathscr{D}$ 为 λ 类:

(i) 对任何$D\in\mathscr{D}$, 有

$$\begin{aligned}P\Big(D^c\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)&=P\Big(\cap_{t\neq t_0}C_t-D\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)=P\Big(\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)-P\Big(D\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)\\&=P\Big(\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)(1-P(D))=P(D^c)\times_{t\neq t_0}P(C_t).\end{aligned}$$

(ii) 若$A,B\in\mathscr{D}$, $A\cap B=\emptyset$. 则

$$P\Big((A+B)\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)=P\Big(A\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)+P\Big(B\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)=P(A+B)\times_{t\neq t_0}P(C_t).$$

(iii) 若$A_n\in\mathscr{D}$ $(n\geq 1)$, 则

$$\begin{aligned}P\Big((\cup_{n=1}^\infty A_n)\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)&=\lim_{n\to\infty}P\Big(A_n\cap_{t\neq t_0}C_t\Big)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\times_{t\neq t_0}P(C_t)\\&=P(\cup_{n=1}^\infty A_n)\times_{t\neq t_0}P(C_t).\end{aligned}$$

故由定理1.2.2(b), $\mathscr{D}\supset\sigma(\mathscr{G}_{t_0})$. 这时, 子类族 $\{\sigma(\mathscr{G}_{t_0}),\mathscr{G}_t,t\neq t_0\}$ 具有命题假定的条件, 因而用类似上面的论证可得 $\{\sigma(\mathscr{G}_{t_0}),\sigma(\mathscr{G}_{t_1}),\mathscr{G}_t,t\neq t_0,t_1\}$ 为独立族. 经过有限不重复这一过程可得 (1) 为真.

(b) 利用定理 2.1.1 及 $\overline{\sigma(\mathscr{G}_t)}$ 的构成易推得 (2) 也是成立的.

系 4.1.2 若子 σ 域族 $\{\mathscr{B}_t, t \in T\}$ 为独立族, $\{T_\alpha, \alpha \in J\}$ 为 T 的互不相交子集, 则 $\{\mathscr{B}_{T_\alpha} = \sigma(\mathscr{B}_t, t \in T_\alpha), \alpha \in J\}$ 为独立族.

证明 取

$$\mathscr{G}_{T_\alpha} = \{\cap_{t\in I} B_t : B_t \in \mathscr{B}_t, I \text{ 为 } T_\alpha \text{ 的有限子集}\},$$

则 $\{\mathscr{G}_{T_\alpha}, \alpha \in J\}$ 满足命题 4.1.1 的要求, 且因 $\mathscr{B}_{T_\alpha} = \sigma(\mathscr{G}_{T_\alpha})$, 故由命题 4.1.1(1), 系的结论成立.

定义 4.1.2 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上随机变量族 $\{X_t, t \in T\}$, 若 $\{\sigma(X_t), t \in T\}$ 是独立的子 σ 域族, 则称 $\{X_t, t \in T\}$ 为 (关于 P) 是独立的.

命题 4.1.3 随机变量族 $\{X_t, t \in T\}$ 为独立族的充要条件是对一切实数 (有理数) a_t, 及 T 的任一有限子集 I, 有

$$P\Big(\bigcap_{t\in I}(X_t \le a_t)\Big) = \prod_{t\in I} P(X_t \le a_t).$$

证明 必要性是显然的. 而证充分性, 只需取 $\mathscr{G}_t = \{(X_t \le a_t) : a_t \text{ 为实数 或有理数}\}$, 并用命题 4.1.1 及引理 1.4.1 即可.

定义 4.1.3 $\mathbf{R}^n$为n维欧氏空间, 其Borel集(见定义1.1.9)全体为$\mathscr{B}^n_{\mathbf{R}}$. 若$f$是$(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}^n_{\mathbf{R}})$到$(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$的可测函数, 则称$f$为$n$ 元Borel 可测函数或简称Borel函数. 可列维乘积空间$(\mathbf{R}^\infty, \mathscr{B}^\infty_{\mathbf{R}})$ 到$(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$的可测函数也称为Borel函数.

命题 4.1.4 设 $\{X_t, t \in T\}$ 为独立随机变量族, $\{T_\alpha, \alpha \in J\}$ 为T 的互不相交子集, $\{f_\alpha(X_t, t \in T_\alpha), \alpha \in J\}$ 为 Borel 函数族, 则 $\{Y_\alpha = f_\alpha(X_t, t \in T_\alpha), \alpha \in J\}$ 为独立随机变量族.

证明 由于 $\sigma(Y_\alpha) \subset \sigma(X_t, t \in T_\alpha)$, 故由系 4.1.2 即得结论.

命题 4.1.5 设 $\{X_t, t \in T\}$ 为独立随机变量族, 且对每个 $t \in T$, $f_t(X_t)$ 可积 (非负), 则对 T 的任一有限子集 I, 有

$$E\Big[\prod_{t\in I} f_t(X_t)\Big] = \prod_{t\in I} E\Big[f_t(X_t)\Big].$$

证明 不妨设 T 为有限的, 取 $t_0 \in T$, 记

$$\mathscr{L} = \{f : f(X_{t_0}) \text{ 可积}\},$$

$$\mathscr{H} = \left\{ f : \begin{array}{l} E\big[f(X_{t_0}) \prod_{t\in T\setminus\{t_0\}} I_{A_t}\big] = E[f(X_{t_0})] \prod_{t\in T\setminus\{t_0\}} E[I_{A_t}], \\ A_t \in \sigma(X_t), t \in T\setminus\{t_0\}, f \text{ 为 Borel 可测函数} \end{array} \right\}.$$

则 $\mathscr{H} \supset \{I_{X_{t_0}^{-1}(B)} : B \text{ 为 Borel 集}\}$, 且 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{L}$ 类, 所以由单调类定理 1.4.2, 对一切可积 $f(X_{t_0})$, 有

$$E\Big[f(X_{t_0}) \prod_{t\ne t_0} I_{A_t}\Big] = E[f(X_{t_0})] \prod_{t\ne t_0} E[I_{A_t}].$$

类似于命题 4.1.1 的证明, 对 $t \in T$ 依次逐个运用上面的做法, 可知命题 4.1.5 成立.

系 4.1.6 设 $\{X_t, t\in T\}$ 为独立可积 (非负) 随机变量族, 则对 T 的任一有限子集 I, 有

$$E\Big[\prod_{t\in I} X_t\Big] = \prod_{t\in I} E[X_t].$$

§4.2 停时与适应随机变量序列

定义 4.2.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 为完备的概率空间，$\mathbf{N} = \{0,1,\cdots\}$表示非负整数集合，若 $\mathscr{F}$ 的子σ- 域族$\mathbf{F}=\{\mathscr{F}_n, n\in\mathbf{N}\}$ 满足：

(1) $\mathscr{F}_0$包含一切$\mathscr{F}$中的可略集合:

(2) 对每个$n\in\mathbf{N}$, 有$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}\subset\mathscr{F}$,

则称$\mathscr{F}$为σ-域流(Filtration), $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{F},\mathrm{P})$ 为带流概率空间.

直观上, $\mathscr{F}_n$ 表示到 n 为止的已知信息或事件域. 若取 $\mathscr{F}_n\equiv\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{F}_n=\sigma(X_j, j\le n)\vee\mathscr{N}$ ($\mathscr{N}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中可略集全体, $\vee$ 表示生成 σ 域) 都能满足流的要求. 后者又称为 $\{X_n, n\in\mathbf{N}\}$ 的自然流, 还常取

$$\mathscr{F}_\infty = \bigvee_n \mathscr{F}_n \triangleq \sigma(\mathscr{F}_n, n\in\mathbf{N}).$$

以下都是在固定的带流概率空间上讨论问题.

定义 4.2.2 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{F},\mathrm{P})$ 为带流概率空间，随机变量序列 $\{X_n, n\ge 1$ (或 $n\in\mathbf{N}$)$\}$ 称为适应的，若对每个 $n\ge 1$ (或 $n\in\mathbf{N}$)，$X_n\in\mathscr{F}_n$.

设 $X=\{X_n, n\ge 1\}$ 是一般概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 上的随机变量序列，若取 $\mathbf{F}$ 为 X 的自然流，则 X 必为适应的，且 X 的自然流 $\mathbf{F}$ 是使 X 适应的最小 σ 域流.

定义 4.2.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{F},\mathrm{P})$ 为带流概率空间，只取非负整值的随机变量(可取 $+\infty$) $T(\omega)$ 称为停时，若

$$\{\omega: T(\omega)\le n\}\in\mathscr{F}_n,\ \ \forall n\in\mathbf{N},$$

或等价地 $\{\omega: T(\omega)=n\}\in\mathscr{F}_n, \forall n\in\mathbf{N}$. 停时的全体记为 $\mathscr{T}$.

若 $k\in\mathbf{N}$ 或 $k=+\infty$, 则 $T(\omega)\equiv k$ 也是一个停时.

命题 4.2.1 设 B 为 $\mathbf{R}$ 上任一Borel集，$X=\{X_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为适应随机变量序列，则

(a) $D_B(\omega)=\inf\{n: X_n(\omega)\in B\}$ 为停时, D_B 又称为初遇;

(b) 若 T 为停时，则

$$S(\omega)=\inf\{n>T(\omega): X_n(\omega)\in B\}$$

也是停时，在此及以后都约定$\inf\varnothing=+\infty$.

证明 (a)$\{D_B=n\}=\Big(\bigcap_{m<n}\{X_m\in B^c\}\Big)\bigcap\{X_n\in B\}\in\mathscr{F}_n$.

(b)$\{S=n\}=\bigcup_{k=0}^{n-1}\Big[\{T=k\}\Big(\bigcap_{m=k+1}^{n-1}\{X_m\in B^c\}\Big)\{X_n\in B\}\Big]\in\mathscr{F}_n$.

例 4.2.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量序列，且 $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = q = 1 - p$, 又 $\{\mathscr{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ 取为 X 的自然流，令

$$T_1(\omega) = \inf\{k : X_k = 1\},$$

$$T_{n+1}(\omega) = \inf\{k > T_n : X_k = 1\},\ n \geq 1,$$

则由命题 4.2.1, $\{T_n, n \geq 1\}$ 都是停时，且

$$P(T_1 = n) = P(X_1 = \cdots = X_{n-1} = 0, X_n = 1) = q^{n-1}p.$$

因而 $P(T_1 < \infty) = 1$, 即 T_1 为有限停时, 而 $X_{T_1} = 1$. 对 T_n 亦可类似地考虑其分布.

命题 4.2.2 设 $\{T, T_k, k \geq 1\} \subset \mathscr{T}$, 则

(a) 对 $k \in \mathbf{N}, T + k \in \mathscr{T}$;

(b) $\sup_k T_k, \inf_k T_k \in \mathscr{T}$.

证明 (a) $\{T + k = n\} = \{T = n - k\} \in \mathscr{F}_{n-k} \subset \mathscr{F}_n, (n \geq k)$.

(b) $\{\sup_k T_k \leq n\} = \cap_k\{T_k \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, 且$\{\inf_k T_k \leq n\} = \cup_k\{T_k \leq n\} \in \mathscr{F}_n$.

定义 4.2.4 若 T 为停时，令

$$\mathscr{F}_T \quad = \quad \{B \in \mathscr{F}_\infty : B(T = n) \in \mathscr{F}_n, \forall n \in \mathbf{N}\},$$

则 $\mathscr{F}_T$ 称为 T 前事件 σ 域.

容易验证 $\mathscr{F}_T$ 为 σ 域，$\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_\infty$，且对正整数 k ，当 $T \equiv k$ 时，$\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_k$.

命题 4.2.3 设 T 为停时，则

(a) $A \in \mathscr{F}_T$ 的充要条件是 A 可表示为

$$A = \cup_n \left(A_n\{T = n\}\right) \cup \left(A_\infty\{T = +\infty\}\right),\ A_n \in \mathscr{F}_n, A_\infty \in \mathscr{F}_\infty; \tag{4.2.1}$$

(b) 随机变量 $\xi \in \mathscr{F}_T$ 的充要条件是 ξ 可表示为

$$\xi = \sum_n \xi_n I_{\{T=n\}} + \xi_\infty I_{\{T=\infty\}},\ \ \xi_n \in \mathscr{F}_n, \xi_\infty \in \mathscr{F}_\infty.$$

证明 (a) 若 $A \in \mathscr{F}_T$, 令 $A_n = A\{T = n\}$ 及 $A_\infty = A\{T = \infty\}$，则$A_n \in \mathscr{F}_n$, $A_\infty \in \mathscr{F}_\infty$，且 (4.2.1) 式成立。反之，不难按定义直接验证由 (4.2.1) 式规定的 $A \in \mathscr{F}_T$.

(b) 类似于 (1) 进行证明.

命题 4.2.4 (a) 若$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ 为适应随机变量序列, $T \in \mathscr{T}$, 则 $X_T I_{\{T<\infty\}} \in \mathscr{F}_T$;

(b) 若 $\{X_n, n \in \overline{\mathbf{N}}\}$ 为适应序列 $(\overline{\mathbf{N}} = \{0, 1, \cdots, +\infty\}), T \in \mathscr{T}$, 则 $X_T \in \mathscr{F}_T$.

证明 因

$$X_T I_{\{T<\infty\}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k I_{\{T=k\}},\ \ X_T = \sum_{k=0}^{\infty} X_k I_{\{T=k\}} + X_\infty I_{\{\infty\}},$$

由命题 4.2.3，$X_T I_{\{T<\infty\}}$ 和 X_T 都是 $\mathscr{F}_T$ 可测的.

命题 4.2.5 设 $S, T \in \mathscr{T}$.

(a) 若 $A \in \mathscr{F}_S$, 则 $A\{S \le T\} \in \mathscr{F}_T$, $A\{S = T\} \in \mathscr{F}_T$;

(b) 若 $S \le T$, 则 $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.

证明 (a) $A\{S \le T\}\{T = n\} = A\{S \le n\}\{T = n\} \in \mathscr{F}_n$.

(b) 对 $A \in \mathscr{F}_S$, 由 (a) $A = A\{S \le T\} \in \mathscr{F}_T$, 故 $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.

命题 4.2.6 设 $T \in \mathscr{T}$, $A \in \mathscr{F}_T$, 则 $T_A = TI_A + (+\infty)I_{A^c} \in \mathscr{T}$. T_A 称为 T 在 A 上的限制.

证明 $\{T_A = n\} = A\{T = n\} \in \mathscr{F}_n$.

§4.3 Wald等式

定义 4.3.1 适应序列 $\{X_n, n \ge 1\}$ 称为关于 σ 域流 $\mathbf{F} = \{\mathscr{F}_n, n \in \mathbf{N}\}$ 独立，若对每个 $n \ge 1$ ，$\sigma(X_n)$ 与$\mathscr{F}_{n-1}$ 独立.

关于 $\mathbf{F}$ 独立的适应随机变量序列本身必为独立随机变量序列，任一独立随机变量序列关于其自然流也必为独立的. 在本节的带流概率空间中，若不引起混淆，独立就是指关于 $\mathbf{F}$ 独立的.

定理 4.3.1 (Wald等式）设 $X = \{X_n, n \ge 1\}$ 为关于 $\mathbf{F}$ 独立同分布随机变量序列, T 为停时, $S_n = \sum_{j \le n} X_j$. 若 X_1 准可积, $ET < \infty$, 则

$$ES_T = ETEX_1. \tag{4.3.1}$$

证明 先设 $P(X_1 \ge 0) = 1$. 由 Levi 引理及 $\{T \ge j\} = (\{T \le j-1\})^c \in \mathscr{F}_{j-1}$ 与 X_j 独立,

$$\begin{aligned} E[S_T] &= E\left[\sum_{j=1}^{\infty} X_j I_{\{T \ge j\}}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} E[X_j I_{\{T \ge j\}}] = \sum_{j=1}^{\infty} E[X_j] E[I_{\{T \ge j\}}] \\ &= EX_1 \sum_{j=1}^{\infty} P(T \ge j) = EX_1 ET. \end{aligned}$$

若 X_1 为准可积的, 不妨设 $EX_1^- < \infty$, 则

$$ES_T^- \le E\left[\sum_{j=1}^{\infty} X_j^- I_{\{T \ge j\}}\right] = ETEX_1^- < \infty.$$

因而 S_T 是准可积的. 对 X_j^+，X_j^- 可分别运用(4.3.1) 式，并由

$$E\left[\sum_{j=1}^{\infty} X_j^- I_{\{T \ge j\}}\right] < \infty,$$

可得

$$E[S_T] = E\left[\sum_{j=1}^{\infty} (X_j^+ - X_j^-) I_{\{T \ge j\}}\right] = E\left[\sum_{j=1}^{\infty} X_j^+ I_{\{T \ge j\}}\right] - E\left[\sum_{j=1}^{\infty} X_j^- I_{\{T \ge j\}}\right]$$

$$= \quad ETEX_1^+ - ETEX_1^- = ETEX_1.$$

定理证毕.

定理 4.3.2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为关于 **F** 独立同分布随机变量序列, T 为有限停时, 则

(a) $\mathscr{F}_T$ 与 $\sigma(X_{T+n}, n \geq 1)$ 相互独立;

(b) $\{X_{T+n}, n \geq 1\}$ 为关于 $\{\mathscr{F}_{T+n}, n \geq 1\}$ 适应独立同分布随机变量序列, 且与$\{X_n, n \geq 1\}$ 有相同的分布.

证明 (a) 若 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, $A \in \mathscr{F}_T$, 利用 T 为有限停时, 有

$$\begin{aligned}
P\left\{A \cap_{i=1}^n (X_{T+i} \leq \lambda_i)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(A\{T=k\} \cap_{i=1}^n \{X_{k+i} \leq \lambda_i\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(A\{T=k\}) P\left(\{\cap_{i=1}^n \{X_{k+i} \leq \lambda_i\}\right) \\
&\quad (A(T=k) \in \mathscr{F}_k \text{与} (X_{k+i}, 1 \leq i \leq n) \text{独立}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(A\{T=k\}) \prod_{i=1}^n P(X_{k+i} \leq \lambda_i) \\
&= P(A) \prod_{i=1}^n P(X_i \leq \lambda_i). \qquad (4.3.2)
\end{aligned}$$

即 $\mathscr{F}_T$ 与 $\sigma(X_{T+n}, n \geq 1)$ 独立.

(a)由命题 4.2.4, $\{X_{T+n}, n \geq 1\}$ 为 $\{\mathscr{F}_{T+n}, n \geq 1\}$ 适应的, 又由 (a), X_{T+k+1} 与 $\mathscr{F}_{T+k}$ 独立，再令 $A = \Omega$，由 (4.3.2) 式，

$$P\left(\cap_{i=1}^n \{X_{T+i} \leq \lambda_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq \lambda_i) = P\left(\cap_{i=1}^n \{X_i \leq \lambda_i\}\right),$$

故 (b) 成立.

§4.4　习题

1. 设随机变量 X, Y 相互独立，证明：
   (a) 若 $\mathrm{P}(X=Y)=1$, 必有常数 c, 使 $\mathrm{P}(X=Y=c)=1$;
   (b) 若 $\mathrm{P}(X=Y)>0$, 必有常数 c, 使 $\mathrm{P}(X=Y=c)>0$.

2. 设随机变量 X, Y 相互独立，且对某个 $p>0$, $\mathrm{E}|X+Y|^p<\infty$, 证明：

$$\mathrm{E}|X|^p<\infty, \mathrm{E}|Y|^p<\infty.$$

3. 若X_1, X_2, X_3为独立对称分布随机变量, 且

$$\mathrm{P}(|\sum_{i=1}^{3} X_i| \leq M)=1,$$

   证明:

$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{3} |X_i| \leq M)=1.$$

4. 若X, Y为独立同分布随机变量, m为X的分布的中位数, 即

$$\mathrm{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

   证明:对任一c, 有

$$\mathrm{P}(X-m \geq c) \leq 2\mathrm{P}(X-Y \geq c), \qquad \mathrm{P}(|X-m| \geq c) \leq 2\mathrm{P}(|X-Y| \geq c).$$

5. 若X, Y, Z为相互独立的随机变量, 证明:
   (a) 对任给常数c, $\sqrt{X^2+|c|}$ 与$e^Y+\ln(2+\sin|Z|^c)$ 独立.
   (b) 对任给常数c, $|X|+e^Y$ 与$e^Z+\sin(1+\cos Z)$ 独立.

6. (Wald 等式) 设 $X=\{X_n, n \geq 1\}$ 为关于 $\mathbf{F}$ 独立同分布随机变量序列，$EX_1=0$，$EX_1^2=\sigma^2<\infty$，T 为有限停时，$ET<\infty$. $S_n=\sum_{j \leq n} X_j$，则

$$ES_T^2=\sigma^2 ET.$$

第五章　条件期望

§5.1　广义测度

§5.1.1　Hahn-Jordan 分解

定义 5.1.1　可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上取值于 $[-\infty,+\infty]$ 的集函数 μ 若满足:

(1)　$\mu(\emptyset)=0$;

(2)　$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$,

则称 μ 为广义测度或变号测度 (有时也把广义测度称为测度).

把定义 2.1.2 规定的测度称为正测度.

若对每个 $A\in\mathscr{F}$, $|\mu(A)|<\infty$, 则称 μ 为有限的.

例 5.1.1　(i)　若 $(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$ 是测度空间, f 为其上的 (准) 可积函数, 则

$$\mu(A)=\int_A f(\omega)\lambda(d\omega)$$

就是一个广义测度.

(ii)　$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度决不会同时取到 $+\infty$ 和 $-\infty$. 否则, 假设$\mu(A)=+\infty,\mu(B)=-\infty$. 为了使和式有确定含义, 必有

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B\backslash A)=+\infty,\;\;\mu(A\cup B)=\mu(B)+\mu(A\backslash B)=-\infty,$$

这将引起矛盾. 这样，以后假定所有广义测度μ 均在$(-\infty,\infty]$中取值, 即$\mu(A)>-\infty$.

命题 5.1.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, μ 为其上的广义测度, 则有下列结论:

(a) μ 必是有限可加的, 即$\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$.

(b)　若 $A_n\uparrow A$ ($A_n\downarrow A$, 且 $\mu(A_{n_0})$ 有限), 则 $\mu(A_n)\to\mu(A)$.

证明　(a) 是明显的.

(b) 若 $A_n\uparrow A$, 则 $A=\sum_{n\geq1}(A_n-A_{n-1})$ $(A_0:=\emptyset)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu(A_j-A_{j-1})\Big)\\ &= \sum_{j}^{\infty}\mu(A_j-A_{j-1})\\ &= \mu\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(A_j-A_{j-1})\Big)=\mu(A).\end{aligned}$$

命题 5.1.2　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, μ 为其上广义测度, 则存在$C,D\in\mathscr{F}$ 使得:

$$\mu(C)=\sup\{\mu(A):\;A\in\mathscr{F}\},\;\;\mu(D)=\inf\{\mu(A):\;A\in\mathscr{F}\}.$$

证明 仅考虑"sup"情形即可(因"inf"情形,可由$-\mu$的"sup"情形得到).不妨假设$\mu(A)<\infty$ $(A\in\mathscr{F})$. 由定义，存在$A_n\in\mathscr{F}(n\geq 1)$, 使得$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\sup\mu:=\sup\{\mu(A):A\in\mathscr{F}\}$. 令$A=\cup_{n\geq 1}A_n$.

对任给$n\geq 1$, 将A按下列方式划分成2^n个不相交子集A_{nm}之并,记该划分为E_n, 即

$$E_n:=\{A_1^*A_2^*\cdots A_n^*:\ A_j^*\in\{A_j,A-A_j\},j=1,\cdots,n\}=:\{A_{nm}:\ m=1,\cdots,2^n\}.$$

其中，A_{nm} 形为$A_1^*A_2^*\cdots A_n^*$. 如：当$n=3$时, 则有

$$A=A_1A_2A_3+A_1A_2A_3'+A_1A_2'A_3+A_1A_2'A_3'+A_1'A_2A_3+A_1'A_2A_3'+A_1'A_2'A_3+A_1'A_2'A_3',$$

其中，$A_j':=A-A_j,j=1,\ldots,n$.

对给定的$n\geq 1$, 若存在$1\leq m\leq 2^n$, 使得$\mu(A_{nm})\geq 0$, 则令$B_n:=\cup_m\{A_{nm}\in E_n:\mu(A_{nm})\geq 0\}$. 否则，$B_n:=\emptyset$. 易知$A_n$ 是某些A_{nm}之并，如$A_3=A_1A_2A_3+A_1A_2'A_3+A_1'A_2A_3+A_1'A_2'A_3$，因此, $\mu(A_n)\leq\mu(B_n)$. 另外，因为$E_{n+1}=\{A_{nm}A_{n+1},A_{nm}\cap(A-A_{n+1}):m=1,\ldots 2^n\}$,既使某个$A_{n\hat{m}}\subset B_n^c$ $(1\leq\hat{m}\leq 2^n)$, 也可能有$A_{n+1}'\in\{A_{n+1},A-A_{n+1}\}$, 使得$\mu(A_{n\hat{m}}A_{n+1}')\geq 0$. 一般地, 对任意$n'>n$, 注意到划分$\{A_{n'm'}:m'=1,\ldots 2^{n'}\}$是$\{A_{nm}:m=1,\ldots 2^n\}$ 的加细, 因此,$A_{n'm'}$要么是某些A_{nm} 的子集，要么与形如A_{nm} 的子集不相交：如,$A_1A_2'A_3'\subset A_1A_2'$, 且$(A_1A_2'A_3')\cap(A_1A_2)=(A_1A_2'A_3')\cap(A_1'A_2)=(A_1A_2'A_3')\cap(A_1'A_2')=\emptyset$. 这样，$\cup_{k=n}^rB_n$ 有以下表示: $\cup_{k=n}^rB_k=B_n\cup(\cup\{G\in\cup_{k=n+1}^rE_k:G\cap B_n=\emptyset,\mu(G)\geq 0\})$ $(r\geq n)$.因此,$\mu(A_n)\leq\mu(B_n)\leq\mu\left(\cup_{k=n}^rB_n\right)\to\mu\left(\cup_{k=n}^\infty B_n\right)$ $(r\to\infty$, 由命题5.1.1). 令$C:=\cap_{n=1}^\infty\cup_{k=n}^\infty B_k$, 则$\cup_{k=n}^\infty B_k\downarrow C$. 又因$\cup_{k=1}^\infty B_k\in\mathcal{F}$可知$0\leq\mu(B_1)\leq\mu\left(\cup_{k=1}^\infty B_k\right)<\infty$. 由命题5.1.1可得,

$$\sup\mu=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\leq\lim_{n\to\infty}\mu\left(\cup_{k=1}^\infty B_k\right)=\mu(C)\leq\sup\mu.$$

因此, $\mu(C)=\sup\mu=\sup\{\mu(A):\ A\in\mathscr{F}\}$.

定理 5.1.1 (Hahn 定理) 设 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度, 则存在互不相交的$D^+,D^-\in\mathscr{F}$,使得$\Omega=D^++D^-$, 且对任意可测集$A\subset D^+(D^-)$, 必有$\mu(A)\geq 0(\leq 0)$.

证明 由命题5.1.2,存在$D\in\mathscr{F}$ 使得$\mu(D)=\inf\{\mu(A):\ A\in\mathscr{F}\}=:\beta$. 取$D^+:=D^c,D^-:=D$. 当可测集$A\subset D^+$时，由$\beta\leq\mu(D^-+A)=\mu(D^-)+\mu(A)=\beta+\mu(A)$可得，$\mu(A)\geq 0$. 另外，当可测集$A\subset D^-$时，由$\mu(D^--A)\geq\beta$,可得$\beta=\mu(D^-)=\mu(D^--A)+\mu(A)\geq\beta+\mu(A)$可得，$\mu(A)\leq 0$.

定理 5.1.2 (Hahn-Jordan 定理) 设 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度, 则

(a) 对每个 $A\in\mathscr{F}$, 令

$$\mu^+(A)\triangleq\sup\{\mu(B):B\subset A,B\in\mathscr{F}\},$$

$$\mu^-(A)\triangleq\sup\{-\mu(B):B\subset A,B\in\mathscr{F}\},$$

则 μ^+,μ^- 都是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的正测度, 且 $\mu=\mu^+-\mu^-$.

(b) 存在 $C\in\mathscr{F}$, 使得: $\mu^+(A)=\mu(A\bigcap C^c),\mu^-(A)=-\mu(A\bigcap C)\forall A\in\mathscr{F}$

(c) 若 $\mu = \mu_2 - \mu_1, \mu_2, \mu_1$ 都是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的正测度, 则对每个 $A \in \mathscr{F}$, 有

$$\mu^+(A) \leq \mu_2(A), \ \ \mu^-(A) \leq \mu_1(A).$$

(d) 若 μ 为广义测度, 则下列三条等价:

(d_1) μ 为有界的: $\sup_{A\in\mathscr{F}} |\mu(A)| < \infty$;

(d_2) μ 为有限的: 对每个 $A \in \mathscr{F}$, $|\mu(A)| < \infty$;

(d_3) $|\mu(\Omega)| < \infty$.

证明 (a)-(b): 由命题5.1.2, 存在$D \in \mathscr{F}$使得$\mu(D) = \inf_{A\in\mathscr{F}} \mu(A)$. 又由于$\mu(\emptyset) = 0$, 故$-\infty < \mu(D) \leq 0$, 于是可断言:

$$\mu(AD) \leq 0, \qquad \mu(AD^c) \geq 0, \ \ \forall A \in \mathscr{F}.$$

事实上, 若$\mu(AD) > 0$, 则$\mu(D) = \mu(AD)+\mu(AD^c)$. 由于$\mu(D)$有限, 故$\mu(AD), \mu(A^cD)$均有限, 从而$\mu(A^cD) = \mu(D) - \mu(AD) < \mu(D)$, 这与$\mu(D) = \inf_{A\in\mathscr{F}} \mu(A)$矛盾; 若$\mu(AD^c) < 0$, 则$\mu(D \cup (AD^c)) = \mu(D) + \mu(AD^c) < \mu(D)$, 也与$\mu(D) = \inf_{A\in\mathscr{F}} \mu(A)$ 矛盾.

这样，对任意$B \in \mathscr{F}$, $B \subset A$, 有

$$\mu(B) = \mu(BD) + \mu(BD^c) \leq \mu(BD^c) \leq \mu(BD^c) + \mu((A-B) \cap D^c) = \mu(AD^c).$$

故由(a)中μ^+的定义得: $\mu^+(A) \leq \mu(AD^c) \leq \mu^+(A)$, 即$\mu^+(A) = \mu(AD^c)$. 同理可证$\mu^-(A) = -\mu(A\bigcap D)$.

由断言可知: μ^+与μ^- 都是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的正测度, 且 $\mu = \mu^+ - \mu^-$. 即(a)-(b)成立.

(c) 由于

$$\mu^+(A) = \mu(AD^c) = \mu_2(AD^c) - \mu_1(AD^c) \leq \mu_2(AD^c) \leq \mu_2(A).$$

同理可证$\mu^-(A) \leq \mu_1(A)$.

(d) $(d_1) \to (d_2) \to (d_3)$, 显然成立. 另外，若$|\mu(\Omega)| < \infty$, 则有$|\mu(\Omega)| = |\mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega)| < \infty$, 故$\mu^+(\Omega), \mu^-(\Omega) < \infty$. 从而, $\sup_{A\in\mathscr{F}} |\mu(A)| = \sup_{A\in\mathscr{F}} |\mu^+(A) - \mu^-(A)| \leq \sup_{A\in\mathscr{F}}[\mu^+(A) + \mu^-(A)] \leq \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) < \infty$, 即$(d_3) \to (d_1)$成立.

定义 5.1.2 由 Hahn-Jordan 定理规定的分割 $\mu = \mu^+ - \mu^-$ 称为 μ 的 Jordan 分解, μ^+, μ^-, 及 $|\mu| \triangleq \mu^+ + \mu^-$ 分别称为 μ 的正变差, 负变差, 和全变差.

若 $(\Omega, \mathscr{F}, \lambda)$ 为测度空间, f 为其上的准可积函数, 令 $\mu(A) = \int_A f(\omega)\lambda(d\omega)$, 则$\mu^+ = \int_A f^+(\omega)\lambda(d\omega)$, $\mu^- = \int_A f^-(\omega)\lambda(d\omega)$, $|\mu|(A) = \int_A |f(\omega)|\lambda(d\omega)$.

定义 5.1.3 设 μ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的广义测度. f 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的可测函数, 若 f 关于 μ 的全变差 $|\mu|$ 是可积的, 即 $\int |f|d|\mu| < \infty$, 则称 f 关于广义测度 μ 是可积的.

§5.1.2 Lebesgue 分解

定义 5.1.4 测度空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数 f 称为σ 可积的, 若存在互不相交的可测集序列 $\{A_n, n \geq 1\}$, $\sum_n A_n = \Omega$, 使 $\int_{A_n} |f|d\mu < \infty$. 这时, 若 $\sum_n \int_{A_n} fd\mu$ 有意义, 就记为 $\int fd\mu$.

定理 5.1.3 (a) (Lebesgue 定理) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, ν 为其上的有限测度, 则存在唯一非负的 $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及 P 可略集 N, 使

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)P(d\omega) + \nu(AN), \ \forall A \in \mathscr{F}. \tag{5.1.1}$$

(b) (Lebesgue 定理推广形式) 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间, ν, μ 为其上的 σ 有限广义测度 (不取 $-\infty$), 则存在唯一的关于 $|\mu|$为 σ 可积的 f 及 $|\mu|$ 可略集 N, 使

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)|\mu|(d\omega) + \nu(AN), \ \forall A \in \mathscr{F}. \tag{5.1.2}$$

证明 (a) 记

$$\mathscr{L} = \left\{ Y \geq 0 : Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P), \int_A Y dP \leq \nu(A), \forall A \in \mathscr{F} \right\}$$

则

(1) $0 \in \mathscr{L}, \mathscr{L}$ 为非空的;

(2) 若 $Y_1, Y_2 \in \mathscr{L}$，则有

$$\begin{aligned}
\int_A (Y_1 \vee Y_2) dP &= \int_{A\{Y_1 \leq Y_2\}} Y_2 dP + \int_{A\{Y_1 > Y_2\}} Y_1 dP \\
&\leq \nu(A\{Y_1 \leq Y_2\}) + \nu(A\{Y_1 > Y_2\}) = \nu(A),
\end{aligned}$$

故 $Y_1 \vee Y_2 \in \mathscr{L}$.

(3) 若 $Y_n \in \mathscr{L}, Y_n \uparrow Y$, 则由 Levi 引理，$Y \in \mathscr{L}$. 因此按命题 3.3.1 及其注，$\mathscr{L}$ 有最大元 f, 且

$$\int_A f(\omega)P(d\omega) \leq \nu(A), \ \forall A \in \mathscr{F}.$$

记

$$\nu_s(A) = \nu(A) - \int_A f dP, \ A \in \mathscr{F},$$

它是一个测度. 又以 D_n^+, D_n^- 表示 Ω 关于 $\nu_s - \frac{1}{n}P$ 的 Hahn 分解，则

$$\nu_s(AD_n^+) \geq \frac{1}{n}P(AD_n^+), \ \ \nu_s(AD_n^-) \leq \frac{1}{n}P(AD_n^-),$$

且因

$$\int_A \left(f + \frac{1}{n} I_{D_n^+} \right) dP = \int_A f dP + \frac{1}{n} P(AD_n^+) \leq \int_A f dP + \nu_s(A) = \nu(A),$$

故 $f + \frac{1}{n} I_{D_n^+} \in \mathscr{L}$. 又由 f 为最大元，故 $f = f + \frac{1}{n} I_{D_n^+}$ a.s.，即 $P(D_n^+) = 0$. 取 $N = \bigcup_n D_n^+$, 则 $P(N) = 0$. 另一方面，

$$\nu_s(N^c) \leq \nu_s(D_n^-) \leq \frac{1}{n} P(D_n^-) \leq \frac{1}{n},$$

故 $\nu_s(N^c) = 0$, 且

$$\nu(A) = \int_A f dP + \nu_s(A) = \int_A f dP + \nu_s(AN) = \int_A f dP + \nu(AN).$$

即 (5.1.1) 式为真. 若 ν 有另一分解，$g \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$M$ 为可略集，使

$$\nu(A) = \int_A g dP + \nu(AM),$$

因 $M \cup N$ 为 P 可略集, 故对每个 $A \in \mathscr{F}$ 有

$$\int_A f dP = \int_{A(M\cup N)^c} f dP = \nu(A(M \cup N)^c) = \int_{A(M\cup N)^c} g dP = \int_A g dP,$$

故 $f = g$ a.s.. 又

$$\nu(N) = \int_N g dP + \nu(MN) = \nu(MN) = \int_M f dP + \nu(MN) = \nu(M),$$

故 $M \triangle N$ 既是 P 可略集，又是 ν 可略集，唯一性得证.

(b) 首先，不妨设 μ 是正测度，否则代之以考虑 $|\mu|$. 下面分几步加以证明.

(1) 若 μ, ν 都是有限测度, 则容易由 (a) 推出.

(2) 若 μ, ν 为 σ 有限测度, $\{A_n, n \geq 1\}$ 为 Ω 的分割, $\mu(A_n)$, $\nu(A_n)$ 都有限, 则对每个 n 存在非负 f_n 及可略集 N_n , $I_{A_n} f_n \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, 且有

$$\nu(AA_n) = \int_{AA_n} f_n d\mu + \nu(AA_n N_n).$$

取 $f = \sum_n f_n I_{A_n}$, $N = \sum_n N_n A_n$, 则 f 对 μ 为 σ 可积, 且由于 ν 的 σ 可加性及 f 为非负的，有

$$\nu(A) = \sum_n \nu(AA_n) = \sum_n \int_{AA_n} f_n d\mu + \sum_n \nu(AA_n N_n) = \int_A f d\mu + \nu(AN).$$

(3) 若 ν 是 σ 有限广义测度, 以 D^+, D^- 表示 Ω 关于 ν 的 Hahn 分解(定理5.1.1)，则对 ν^+, ν^- 分别用(2-b), 存在对 $\mu^+(\mu^-)$ 为 σ 可积且非负$g_+(g_-)$以及可略集$N_+(N_-)$使得，对任意$A \in \mathcal{F}$,

$$\nu^+(A) = \nu^+(AD^+) = \int_{AD^+} g_+ d|\mu| + \nu^+(AD^+N_+) = \int_A g_+ I_{D^+} d|\mu| + \nu(AD^+N_+),$$

$$\nu^-(A) = \nu^-(AD^-) = \int_{AD^-} g_- d|\mu| + \nu^-(AD^-N_-) = \int_A g_- I_{D^-} d|\mu| - \nu(AD^-N_-).$$

令 $f = g_+ I_{D^+} - g_- I_{D^-}$, $N = D^+N_+ + D^-N_-$, 则 f 对 $|\mu|$ 为 σ 可积，且因 ν^- 为有限的，

$$\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = \int_A f d|\mu| + \nu(AN), \ \forall A \in \mathscr{F}.$$

唯一性的证明可像 (a) 一样进行.

定义 5.1.5 测度空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的广义测度 μ, ν, 若对每个 $A \in \mathscr{F}$, 由 $|\mu|(A) = 0$ 可推出 $|\nu|(A) = 0$, 则称 ν 关于 μ 绝对连续的, 记为 $\nu \ll \mu$. 若 $\nu \ll \mu$与$\mu \ll \nu$ 同时成立, 则记为 $\nu \equiv \mu$ 或 $\nu \sim \mu$, 称 μ, ν 相互等价; 若存在 $A \in \mathscr{F}$, 使 $|\mu|(A) = 0$, $|\nu|(A^c) = 0$, 则称 μ, ν 相互奇异的, 记为 $\mu \perp \nu$.

定理 5.1.4 (Lebesgue 分解定理) 若 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间, μ, ν 为其上的 σ 有限广义测度, 则将 ν 唯一地分解为 $\nu = \nu_1 + \nu_2$, ν_1, ν_2 都是广义测度, 且 $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu$, 上述分解 $\nu = \nu_1 + \nu_2$, 称 ν 为关于 μ 的 Lebesgue 分解.

证明 由(5.1.2)式, 取

$$\nu_1(A)=\int_A f(\omega)|\mu|(d\omega),\qquad \nu_2(A)=\nu(AN),$$

即可满足要求. 唯一性可如下证明. 若 $\nu=\widetilde{\nu}_1+\widetilde{\nu}_2$ 是另一分解, μ零集N,$\widetilde{N}$分别满足$|\nu_2|(N^c)=0$, $|\widetilde{\nu}_2|(\widetilde{N}^c)=0$, 则因$|\mu|(N\cup\widetilde{N})=0$,由 $\nu_1\ll|\mu|$和$\widetilde{\nu}_1\ll|\mu|$可得$\nu_1(N\cup\widetilde{N})=\widetilde{\nu}_1(N\cup\widetilde{N})=0$. 对$A\in\mathscr{F}$有

$$\nu_1(A)=\nu_1(AN^c\widetilde{N}^c)=\nu(AN^c\widetilde{N}^c)=\widetilde{\nu}_1(AN^c\widetilde{N}^c)=\widetilde{\nu}_1(A),$$

$$\nu_2(A)=\nu_2(A(N\cup\widetilde{N}))=\nu(A(N\cup\widetilde{N}))=\widetilde{\nu}_2(A(N\cup\widetilde{N}))=\widetilde{\nu}_2(A),$$

故$\nu_1=\widetilde{\nu}_1$, $\nu_2=\widetilde{\nu}_2$

§5.1.3 Radon-Nikodym 定理

命题 5.1.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, ν 为其上的有限测度, 则下列条件等价:

(a) $\nu\ll P$;

(b) 存在 $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 满足

$$\nu(A)=\int_A f(\omega)P(d\omega),\forall A\in\mathscr{F};\tag{5.1.3}$$

(c) 对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $P(A)<\delta$ 时, 必有 $\nu(A)<\varepsilon$.

证明 (a) $\Longrightarrow$ (b). 用定理5.1.3中的记号，则有$P(AN)=0$, 故 $\nu(AN)=0$, (5.1.3) 式成立.

(b) $\Longrightarrow$ (c). 当 f 为阶梯函数时, 由于它有界, $|f|\le M$, 故 $\nu(A)\le MP(A)$. 取 $\delta\le\frac{\varepsilon}{M}$ 即可. 对一般的 $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$, 若 $\varepsilon>0$ 为任一正数, 则必有阶梯函数 f_ε, 使

$$\int_\Omega|f-f_\varepsilon|dP<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $|f_\varepsilon|\le M_\varepsilon$, 则取 $\delta=\varepsilon\backslash(2M_\varepsilon)$, 当 $P(A)<\delta$ 时,

$$|\int_A fdP|\le\int_A|f-f_\varepsilon|dP+\int_A|f_\varepsilon|dP<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) 是显然的.

定理 5.1.5 (Radon-Nikodym 定理) 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, ν 为其上的广义测度, 且 $\nu\ll P$, 则存在唯一的随机变量 f,f^- 可积, 使

$$\nu(A)=\int_A f(\omega)P(d\omega),\ \forall A\in\mathscr{F}.\tag{5.1.4}$$

且此时 ν 为正测度的充要条件是 $f\ge0$ a.s.. ν 为有限测度的充要条件是 f 可积. ν 为 σ 有限测度的充要条件是 f 有限. (将 P 改为一般 σ 有限测度时, 结论亦成立.)

证明　ν为正有限(即有界)时, 定理结论已由命题5.1.3证明. 现在考虑ν为一般正测度的情况, 记

$$\mathscr{C}=\{C\in\mathscr{F}:\ \nu(C)<\infty\},$$

则$\mathscr{C}$是一个对有限交和有限并封闭的集类, 故可找出$C_n\in\mathscr{C}$, C_n递增, 且使

$$\lim_{n\to\infty}P(C_n)=\sup\{P(C):\ C\in\mathscr{C}\}. \tag{5.1.5}$$

在每个$C_n\setminus C_{n-1}$上, 考虑限定在$C_n\setminus C_{n-1}$上的有限测度,由命题5.1.3, 必存在$f_n\geq 0$, 使

$$\nu(A(C_n\setminus C_{n-1}))=\int_{A(C_n\setminus C_{n-1})}f_n dP\ \ (C_0=\emptyset)\quad A\in\mathcal{F}.$$

取

$$f(\omega)=\sum_n f_n(\omega)I_{C_n\setminus C_{n-1}}(\omega)+(+\infty)I_{(\bigcup_n C_n)^c}(\omega),$$

对任一$A\in\mathscr{F}$, 若$P(A(\bigcup_n C_n)^c)=0$, 则由$\nu\ll P$, 必有$\nu(A(\bigcup_n C_n)^c)=0$,

$$\begin{aligned}\nu(A)&=\nu(A(\bigcup_n C_n))=\sum_n\nu(A(C_n\setminus C_{n-1}))\\&=\sum_n\int_{A(C_n\setminus C_{n-1})}f_n dP=\sum_n\int_A I_{\cup_n C_n}f dP=\int_A f dP.\end{aligned}$$

若$P(A(\bigcup_n C_n)^c)>0$, 则必有$\nu(A(\bigcup_n C_n)^c)=+\infty$, 否则与(5.1.5)式矛盾. 这时

$$\nu(A)=\nu(A(\bigcup_n C_n))+\nu(A(\bigcup_n C_n)^c)=+\infty=\int_A f dP,$$

故(5.1.4)式成立. f的唯一性可由(5.1.4)式直接推出.

对一般的广义测度ν，对相应的ν^+,ν^- 分别用已证的结论即可.

注 5.1.4　若 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间, μ 为其上的 σ 有限广义测度，ν 为广义测度,且 $\nu\ll\mu$, 则像定理5.1.3(b)的证明一样，可知定理5.1.5 的结论(用 ν取代 P)仍然成立.

定义 5.1.6　称 (5.1.4) 式中的 f 为 ν 关于 P 的 Radon-Nikodym 导数, 简称为 R-N 导数, 也记为 $f=\dfrac{dv}{dP}$, 及 $\nu=f\cdot P$. 对一般的 σ 有限广义测度 μ ,且 $\nu\ll\mu$, 其相应的 R-N 导数记为 $f=\dfrac{dv}{d\mu}$.

命题 5.1.5　若 ν,μ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 σ 有限广义测度, $\nu\ll\mu$, 则对每个 ν 可积函数 f, 有

$$\int_A f d\nu=\int_A f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu,\quad\forall A\in\mathscr{F}. \tag{5.1.6}$$

证明　先设μ 为概率测度, ν 为有限测度, 记

$$\mathscr{L}=\{f:\ \int_\Omega|f|d\nu<\infty\},\qquad\mathscr{H}=\{f:\ f\text{可测}\int_\Omega f d\nu=\int_\Omega f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu\},$$

则由定理5.1.5, $\mathscr{H}\supset\{I_A,\ A\in\mathscr{F}\}$. 又容易验证$\mathscr{H}$是$\mathscr{L}$类, 故由定理1.4.2, 对一切$\nu$可积$f$, 成立

$$\int_\Omega f d\nu=\int_\Omega f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

特别地, 取$g = fI_A$ 代入上式, 即得(5.1.6)式成立.

对μ, ν为 σ 有限的一般情况, 可像则像定理5.1.3(b)的证明一样进行推广.

若 F 表示随机变量 X 的分布函数, μ_F 表示有 F 在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上生成的 L-S 测度, 又 λ 表示 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上的 Lebesgue 测度, 则 $\mu_F \ll \lambda$ 的充要条件是存在 $f \in L^1(d\lambda)$, 使

$$\mu_F(B) = \int_B f(x)\lambda(dx) = \int_B f(x)dx,$$

$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

此时, 关于 Lebesgue 测度几乎处处唯一确定的可积函数 f 称为密度函数. 在这种情况下, 若 $E[g(X)]$ 存在, 则它可写为

$$E[g(X)] = \int g(X)dP = \int_{\mathbf{R}} g(x)\mu_F(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

命题 5.1.6 若 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间, M 表示 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上有限广义测度全体, 对 $\mu \in M$, 取 $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$, 则 M 在此范数下为 Banach 空间.

证明 不难直接验证M是线性空间及$\|\cdot\|$是范数. 下面证明M是完备的. 若$\{\mu_n\}$为基本序列取

$$\nu = \sum_n \frac{1}{2^n\|\mu_n\|}|\mu_n|,$$

则$\nu \in M$, 且$\mu_n \ll \nu$, 记$X_n = \dfrac{d\mu_n}{d\nu}$, 则不难验证

$$\|\mu_m - \mu_n\| = \int_\Omega |X_m - X_n|d\nu.$$

因而$\{X_n\}$是$L^1(\Omega, \mathscr{F}, \nu)$中基本列, 必存在$X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \nu)$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |X_n - X|d\nu = 0.$$

取$\nu(A) = \int_A X d\nu$, 则$\mu \in M$,

$$\|\mu_n - \mu\| = \int_\Omega |X_n - X|d\nu \to 0,$$

故M是完备的, 所以M是一个Banach空间.

§5.2 条件期望

本节将在固定的完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上讨论.

§5.2.1 定义

(1) 设 $B \in \mathscr{F}$, $P(B) > 0$, 记条件概率

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},\ \forall A \in \mathscr{F}.$$

为 $\mathscr{F}$ 中的概率测度.

(2) 设 $X(\Omega)$ 为(关于 P) 可积随机变量, 则关于 $P_B(\cdot)$ 的期望为

$$E_B[X]=\int X(\omega)P_B(d\omega)=\frac{1}{P(B)}\int_B X(\omega)P(d\omega).$$

设 $\{B_n,n\geq 1\}$ 为 Ω 的可列可积分割 (即 $B_n\in\mathscr{F}$, $\{B_n,n\geq 1\}$ 互不相交, 且 $\sum_n B_n=\Omega$.) 由全概率公式得:

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)P_{B_n}(A),$$

$$E[X]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n}X(\omega)P(d\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)E_{B_n}[X].$$

若 V 为离散型随机变量, 令 $B_n=\{\omega:V=a_n\}$, 且 $\{B_n\}$ 为 Ω 的分割, 则

$$E[X|V=a_n]=E_{B_n}[X].$$

这是已知 $V=a_n$ 条件下的条件期望, 由于 V 本身也是随机变量, V 的取值也随不同的试验结果而不同, 因而可考虑一个因 V 取值不同而取不同数值的函数 $E[X|V]$, 而当$\omega\in\{\omega:V=a_n\}$ 时,

$$E[X|V](\omega)=E[X|V=a_n]=E_{B_n}[X],$$

即

$$E[X|V]=\sum_n E_{B_n}[X]I_{\{V=a_n\}}=\sum_n E_{B_n}[X]I_{B_n}. \tag{5.2.1}$$

它在 V 取不同值的各种情况下都表示 X 关于 V 的条件期望. 这时, 对 $C\in\sigma(V)$, 若 $C=\sum_{k\geq 1}B_{n_k}$, 则必有

$$\int_C E[X|V]dP=\sum_k E_{B_{n_k}}[X|V]P(B_{n_k})=\sum_k\int_{B_{n_k}}XdP=\int_C Xdp. \tag{5.2.2}$$

于是有以下观察:

(a) 古典的条件概率与条件期望中需要$P(V=a_n)>0$ 不一定成立, 故需改变定义.

(b) 以 $E[X|V]$ 为出发点: $E[X|V]$ 是函数, 且关于 $\sigma(V)$ 可测.

(c) $E[X|V]$应满足 (5.2.2) 式.

引理 5.2.1 若 X 为(准)可积随机变量, $\mathscr{F}_0$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域, 则必存在唯一的 (不计 a.s.相等的差别) 准可积 $\mathscr{F}_0$ 可测随机变量 Y, 满足

$$\int_B YdP=\int_B XdP,\ \ \forall B\in\mathscr{F}_0, \tag{5.2.3}$$

证明 由 X 为 (准) 可积可知, 若令

$$\nu(B)=\int_B XdP,\ \ \forall B\in\mathscr{F}_0,$$

故 ν 是 $(\Omega,\mathscr{F}_0)$ 广义测度, 且 $\nu\ll P$. 因P也为 $\mathscr{F}_0$ 概率测度, 由 R-N 定理知, 存在唯一 $\mathscr{F}_0$ 可测函数 Y, 使得

$$\nu(B)=\int_B YdP,\ \ \forall B\in\mathscr{F}_0,$$

故 (5.2.3) 成立. 而且, 由 $\{Y>0\}\in\mathscr{F}_0$ 得

$$\int_\Omega Y^+dP=\int_{\{Y>0\}}YdP=\int_{\{Y>0\}}XdP\le\int_{\{Y>0\}}X^+dP\le\int_\Omega X^+dP.$$

$$\int_\Omega Y^-dP=\int_{\{Y<0\}}(-Y)dP=\int_{\{Y<0\}}(-X)dP\le\int_{\{Y<0\}}X^-dP\le\int_\Omega X^-dP.$$

故当 X 可积 (准可积) 时, Y 也可积 (准可积).

定义 5.2.1 设 $\mathscr{F}_0$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域, X 为(准)可积随机变量, Y 为满足如下条件的随机变量:

(1) Y 为 $\mathscr{F}_0$ 可测的;

(2) $\int_B YdP=\int_B XdP,\ \forall B\in\mathscr{F}_0$

则称 Y 为 X 关于 $\mathscr{F}_0$ 的条件期望, 记为 $E[X|\mathscr{F}_0]$. 特别地, 当 $\mathscr{F}_0=\sigma(V)$ 时, 则也称 Y 为 X 关于 V 的条件期望, 记为 $E[X|V]$.

由于 $E[X|V]$ 关于 $\sigma(V)$ 可测, 由命题 1.4.7, 必有 Borel 可测函数 g, 使得 $E[X|V]=g(V)$, 这时也称 $g(a)$ 为 $V=a$ 条件下 X 的条件期望.

由引理 5.2.1 可知, X 关于 $\mathscr{F}_0$ 的条件期望是存在的, 且不计 a.s. 相等的差别时, 它是唯一的:

$$E[X|\mathscr{F}_0]=\frac{d\nu}{dP}|_{\mathscr{F}_0},\quad \text{其中 } \nu(B)=\int_B XdP.$$

例 5.2.1 **(1)** 设 X 准可积, $\mathscr{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$, 则由于 $E[X|\mathscr{F}_0]$ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的, 它必 a.s. 是一个常数 c. 又因为

$$c=\int_B E[X]dP=\int_B XdP,\ \ B\in\{\emptyset,\Omega\}$$

所以 $E[X|\mathscr{F}_0]=E[X]$ a.s., 即期望是条件期望的特例!

(2) 若$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$, 则由条件期望定义知 $E[X|\mathscr{F}_0]=X$.

定义 5.2.2 设 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$, $A\in\mathscr{F}$, 则称 $E[I_A|\mathscr{F}_0]$ 为 A 关于 $\mathscr{F}_0$ 的条件概率, 记为 $P(A|\mathscr{F}_0)$.

由定义 5.2.1 可知, $P(A|\mathscr{F}_0)$ 必满足:
(1) $P(A|\mathscr{F}_0)$ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的;
(2) $P(AB)=\int_B P(A|\mathscr{F}_0)dP,\quad \forall B\in\mathscr{F}_0$.
条件期望的概念可进一步推广到关于 $\mathscr{G}$ 可积的随机变量.

§5.2.2 条件期望的性质

命题 5.2.1 (a) 若 X,Y 均可积, α,β 为常数, 则

$$E[\alpha X+\beta Y|\mathscr{F}_0]=\alpha E[X|\mathscr{F}_0]+\beta E[Y|\mathscr{F}_0];$$

(b) $E[1|\mathscr{F}_0]=1,\ \ E[E[X|\mathscr{F}_0]]=E[X]$;

(c) 当 $X\geq 0$ 时, 则 $E[X|\mathscr{F}_0]\geq 0$ ($X\geq Y\Longrightarrow E[X|\mathscr{F}_0]\geq E[Y|\mathscr{F}_0]$);

(d) $|E[X|\mathscr{F}_0]|\leq E[|X||\mathscr{F}_0]$.

证明 (a),(b) 由定义直接验证.

(c) $\int_B E[X|\mathscr{F}_0]dP=\int_B XdP\geq\int_B YdP=\int_B E[Y|\mathscr{F}_0]dP,\ \ \forall B\in\mathscr{F}_0$. 故 $E[X|\mathscr{F}_0]\geq E[Y|\mathscr{F}_0]$ (或直接由 R-N 导数性质!).

(d) 因 $-|X|\leq X\leq|X|$, 故

$$-E[|X||\mathscr{F}_0]\leq E[X|\mathscr{F}_0]\leq E[|X||\mathscr{F}_0],$$

即 $|E[X_0|\mathscr{F}_0]|\leq E[|X||\mathscr{F}_0]$.

命题 5.2.2 设 Y 可积, $\{X_n,n\geq 1\}$ 为随机变量序列, 则

(a) (条件期望的 Levi 引理) 若 $Y\leq X_n\uparrow X$, 则有

$$E[X_n|\mathscr{F}_0]\uparrow E[X|\mathscr{F}_0].$$

(b) (条件期望的 Fatou 引理)

(b_1) 若 $X_n\geq Y$, 则$E[\underline{\lim}_n X_n|\mathscr{F}_0]\leq\underline{\lim}_n E[X_n|\mathscr{F}_0]$;

(b_2) 若 $X_n\leq Y$, 则$E[\overline{\lim}_n X_n|\mathscr{F}_0]\geq\overline{\lim}_n E[X_n|\mathscr{F}_0]$.

(c) (条件期望的 Lebesgue 控制收敛定理) 若 $|X_n|\leq Y$, 且当 $n\to\infty$ 时, $X_n\xrightarrow{a.s.}X$, 则 $\lim_n E[X_n\mid\mathscr{F}_0]=E[X\mid\mathscr{F}_0]$.

证明 (a) 由命题 5.2.1, $E[X_n|\mathscr{F}_0]$随n递增, 若$E[X_n|\mathscr{F}_0]\uparrow Z$, 则$Z\in\mathscr{F}_0$. 因为$E[X_n|\mathscr{F}_0]\geq E[Y|\mathscr{F}_0]$, 由通常积分的Levi引理, 对每个$B\in\mathscr{F}_0$, 有

$$\int_B ZdP=\int_B\lim_n E[X_n\mid\mathscr{F}_0]dP=\lim_n\int_B X_ndP=\int_B XdP.$$

故$Z=E[X\mid\mathscr{F}_0]$, 类似地可证明递减的情况.

(b) 记$Y_n=\inf_{k\geq n}X_k$, 则$Y\leq Y_n\uparrow\underline{\lim}_n X_n$, 且$E[Y_n\mid\mathscr{F}_0]\leq E[X_n\mid\mathscr{F}_0]$. 故由(1),

$$E\left[\underline{\lim_n}X_n\mid\mathscr{F}_0\right]=\lim_n E[Y_n\mid\mathscr{F}_0]\leq\underline{\lim_n}E[X_n\mid\mathscr{F}_0].$$

同样可得关于上限的不等式.

(c) 由(b)以及$\overline{\lim}_n X_n=\underline{\lim}_n X_n=X$,

$$E[X\mid\mathscr{F}_0]=E[\underline{\lim_n}X_n\mid\mathscr{F}_0]\leq\underline{\lim_n}E[X_n\mid\mathscr{F}_0]\leq\overline{\lim_n}E[X_n\mid\mathscr{F}_0]\leq E[\lim_n X_n\mid\mathscr{F}_0],$$

故(3)成立.

命题 5.2.3 (a) 若 Y 为 $\mathscr{F}_0$ 可测, 且 X,XY 可积, 则

$$E[XY|\mathscr{F}_0]=YE[X|\mathscr{F}_0];\tag{5.2.4}$$

特别地, $E[Y|\mathscr{F}_0]=Y$.

(b) 若 σ代数$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}$, 则有

$$E\big[E[X|\mathscr{F}_2]|\mathscr{F}_1\big] = E[X|\mathscr{F}_1] = E\big[E[X|\mathscr{F}_1]|\mathscr{F}_2\big] \tag{5.2.5}$$

(c) 若 X 可积, $\sigma(X)$ 与 $\mathscr{F}_0$ 独立, 则 $E[X|\mathscr{F}_0] = E[X]$; 特别, 当 X, Y 相互独立时, $E[X|Y] = E[X]$.

证明 (a) 先假设$X \geq 0$, 并证明

$$E[XY] = E[YE[X|\mathscr{F}_0]]. \tag{5.2.6}$$

记

$$\mathscr{L} \triangleq \{Y \in \mathscr{F}_0 : E[|XY|] < \infty\},$$
$$\mathscr{H} \triangleq \{Y \in \mathscr{F}_0 : E[XY] = E[YE[X|\mathscr{F}_0]]\},$$

由条件期望的定义知, $\mathscr{H} \supset \{I_A : A \in \mathscr{F}_0\}$, 又容易验证 $\mathscr{H}$ 是一个 $\mathscr{L}$ 类. 所以由单调类收敛定理可知 $\mathscr{H} \supset \mathscr{L}$. 即 (5.2.6) 式成立. 特别, 对 $B \in \mathscr{F}_0$, 取 YI_B 代入 (5.2.6) 式中的 Y 可得.

$$\int_B XYdP = \int_B YE[X|\mathscr{F}_0]dP.$$

即$E[XY|\mathscr{F}_0] = YE[X|\mathscr{F}_0]$.

(b) 因 $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$, 故 $E[X|\mathscr{F}_1] \in \mathscr{F}_2$. 由 (a) 知,

$$E\big[E[X|\mathscr{F}_1]|\mathscr{F}_2\big] = E[X|\mathscr{F}_1]E[1|\mathscr{F}_2] = E[X|\mathscr{F}_1].$$

另一方面, 对每个 $B \in \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

$$\int_B E[X|\mathscr{F}_1]dP = \int_B XdP = \int_B E[X|\mathscr{F}_2]dP$$

即$E\big[E[X|\mathscr{F}_2]|\mathscr{F}_1\big] = E[X|\mathscr{F}_1]$, 故 (b) 成立.

(c) 对每个 $B \in \mathscr{F}_0$, 由 I_B 与 X 独立有

$$\int_B E[X|\mathscr{F}_0]dP = \int_B XdP = E[I_BX] = P(B)E[X] = \int_B E[X]dP.$$

故 (c) 成立.

命题 5.2.4 (Jensen 不等式). 设$\varphi(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的有限下凸函数，若 X 及 $\varphi(X)$ 为可积随机变量, 则

$$\varphi(E[X|\mathscr{F}_0]) \leq E[\varphi(X)|\mathscr{F}_0] \tag{5.2.7}$$

证明 由 φ 是下凸的, 对任意 s,

$$\varphi(t) - \varphi(s) \geq \varphi'_-(s)(t-s), t \in \mathbf{R},$$

其中 φ'_- 表的 φ 左导数, 它是 s 的 Borel 函数. 令 $t = X$, $s = E[X|\mathscr{F}_0]$, 代入上式,

$$\varphi(X) - \varphi(E[X|\mathscr{F}_0]) \geq \varphi'_-(E[X|\mathscr{F}_0])(X - E[X|\mathscr{F}_0]).$$

对上式两端取条件期望 $E[\cdot|\mathscr{F}_0]$, 并利用命题 5.2.3, 有

$$E[\varphi(X)|\mathscr{F}_0] - \varphi(E[X|\mathscr{F}_0]) \geq \varphi'_-(E[X|\mathscr{F}_0])(E[X|\mathscr{F}_0] - E[X|\mathscr{F}_0]) = 0.$$

故 $E[\varphi(X)|\mathscr{F}_0] \geq \varphi(E[X|\mathscr{F}_0])$.

系 5.2.5 若$p \geq 1$, $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 则$E[X|\mathscr{F}_0] \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 且有

$$\|E[X|\mathscr{F}_0]\|_p \leq \|X\|_p.$$

证明 取$\varphi(t) = |t|^p$, 由命题 5.2.4,

$$|E[X \mid \mathscr{F}_0]|^p \leq E[|X|^p \mid \mathscr{F}_0],$$

取期望并开p次方, 即可得证.

§5.3 习题

1. 设Y为指数分布随机变量, $\mathrm{P}(Y > t) = e^{-t}$, $t > 0$. 对$a > 0$, 求$\mathrm{E}[Y|Y \wedge a]$.

2. 设P和Q为可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的两个概率测度, $\mathrm{Q} \ll \mathrm{P}$, 且$d\mathrm{Q} = Zd\mathrm{P}$. 又$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的子$\sigma$-域. 证明:

   (1) $\mathrm{Q}(\mathrm{E_P}[Z|\mathscr{G}] = 0) = 0$;

   (2) 对P可积随机变量X成立

$$\mathrm{E_Q}[X|\mathscr{G}] = \frac{\mathrm{E_P}[XZ|\mathscr{G}]}{\mathrm{E_P}[Z|\mathscr{G}]} \quad a.s.\ \mathrm{Q}.$$

3. 设$X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$, $\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的子σ-域, 试证:

   (1) $\mathrm{Var}(\mathrm{E}[X|\mathscr{G}]) \leq \mathrm{Var}[X]$;

   (2) 若$\alpha \in [-\infty, +\infty]$, $Y = X \wedge \alpha$, 则$\mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}[Y|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}] \leq \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}]$.

4. 证明：(1)若$X \in L^2(\mathscr{F})$, Y 为随机变量, 且$\mathrm{E}[X|Y] = Y$, $\mathrm{E}[Y|X] = X$, 则$X = Y$;

   (2) 设$\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$的子σ-域, $X \in L^1$. 又$X_1 = \mathrm{E}[X|\mathscr{G}_1]$, $X_2 = \mathrm{E}[X_1|\mathscr{G}_2]$, 若$X = X_2$, 则$X_1 = X_2$;

   (3)若$X, Y \in L^1(\mathscr{F})$, $\mathrm{E}[X|Y] = Y$, $\mathrm{E}[Y|X] = X$, 则$X = Y$.

5. 设X准可积, $\{A_n, n \geq 1\}$为Ω的一个可测分割, $\mathscr{G} = \sigma(A_n, n \geq 1)$, 求证

$$\mathrm{E}[X|\mathscr{G}] = \sum_n \frac{\int_{A_n} X d\mathrm{P}}{\mathrm{P}(A_n)} I_{A_n}.$$

参考文献

[1] Ash, R. B. Probability and Measure Theory. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2000.

[2] 任佳刚，巫静，《测度与概率教程》, 科学出版社, 2018.

[3] 汪嘉冈，《现代概率论基础》（第二版），复旦大学出版社，2005.

[4] 严仕健, 王隽骧,刘秀芳,《概率论基础》，科学出版社, 1982.

[5] 严仕健, 刘秀芳,《测度与概率》，北京师范大学出版社, 2003.

[6] 严加安,《测度论讲义》, 科学出版社, 1997.

记号：

$A=\mathscr{A}$, $B=\mathscr{B}$, $C=\mathscr{C}$, $D=\mathscr{D}$, $E=\mathscr{E}$,

$F=\mathscr{F}$, $G=\mathscr{G}$, $H=\mathscr{H}$, $I=\mathscr{I}$, $J=\mathscr{J}$,

$K=\mathscr{K}$, $L=\mathscr{L}$, $M=\mathscr{M}$, $N=\mathscr{N}$, $O=\mathscr{O}$,

$P=\mathscr{P}$, $Q=\mathscr{Q}$, $R=\mathscr{R}$, $S=\mathscr{S}$, $T=\mathscr{T}$,

$U=\mathscr{U}$, $V=\mathscr{V}$, $W=\mathscr{W}$, $X=\mathscr{X}$, $Y=\mathscr{Y}$, $Z=\mathscr{Z}$.