Semaine 2

22 novembre 2021

Pierre-Gabriel Berlureau ★★★★☆

Lorsque X est un ensemble, si $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, on dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X si et seulement si

— $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$;

— Pour tout ensemble I, pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;

— Pour tout $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$.

1. Soit X un ensemble. Montrer que $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des topologies sur X.
2. On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \dots, U_n$ n éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.
3. Si U est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que U est un ouvert de R si et seulement si

$$\forall x \in u,\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$$

4. Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}$?
   — $\emptyset$
   — $\mathbb{R}$
   — $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$
   — $]a, b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$
5. Montrer que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
6. Soit X et I deux ensembles avec $I \neq \emptyset$. Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de topolgies sur X. Montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur X. Qu'en est-il de $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$?
7. Soit X un ensemble avec $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$.
   Montrer que l'on peut définir la plus petite topologie sur X contenant $\mathcal{A}$.

Matteo Delfour ★★☆☆☆

Déterminer toutes les fonctions de R dans R telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

Yanis Grigy ★★★☆☆

Montrer que l'ensemble des nombres premier est infini.

Louis Marchal ★★★★★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\dfrac{3+4i}{5}$ n'est pas une racine $n^{\text{ème}}$ de 1.

Shems ★★★☆☆

Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2m} t \cos(2mt)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^m(t)\mathrm{d}t$.