DM11 – Convergence et continuité au sens de Cesàro

Amar AHMANE
MP2I

17 décembre 2021

Partie A

1. Preuve du Lemme.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
|c_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k - \ell \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k - n\ell \right) \right| \\
&= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|
\end{aligned}$$

   (b) $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, ainsi, comme u converge vers ℓ, par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left(k \geq n_0 \Longrightarrow |u_k - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} \right)$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $n \geq n_0$. On a alors

$$\begin{aligned}
|c_n - \ell| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| + \frac{n - n0 + 1}{n} \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

   (d) D'abord, $c := \sum_{k=1}^{n_0 - 1} |u_k - \ell| \in \mathbb{R}_+$ est une constante ne dépendant pas de n, donc comme $\dfrac{c}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il exite $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geq n_1 \Longrightarrow \left| \frac{c}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{4} \right)$$

   De même, $\dfrac{(1 - n_0)\epsilon}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc il exite $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geq n_2 \Longrightarrow \left| \frac{(1 - n_0)\epsilon}{2n} \right| \leq \frac{\epsilon}{4} \right)$$

En posant $N = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a, étant donné $n \geq N$, que

$$\begin{aligned}
|c_n - \ell| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{n - n0 + 1}{n}\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{c}{n} + \frac{(1-n_0)\epsilon}{2n} + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

2. Applications.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
   Donc finalement, d'après le Lemme de Cesàro, $\boxed{\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 0}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   Or, on a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le Lemme de Cesàro, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 0$, donc $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
   $$\begin{aligned}
   w_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{n}} \\
   &= \prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \\
   &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \\
   &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)
   \end{aligned}$$
   Or, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$; en effet, le taux d'accroissement de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 nous informe, par dérivabilité de cette fonction en 0, que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Or, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 1$, donc $\boxed{w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(1) = e}$ par continuité de exp en 1.
3. Soit $u \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On note v la moyenne de Cesàro de cette suite.
   Soit $M > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq M+1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$, alors

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{n-n_0+1}{n}(M+1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} M+1} \end{aligned}$$

$1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc par définition, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geq n_1 \Longrightarrow \left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{n-n_0+1}{n}(M+1)\right) - (M+1)\right| \leq 1\right)$$

On pose $N = \max(n_0, n_1)$, ainsi, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} v_n &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{n-n_0+1}{n}(M+1) \\ &\geq M+1-1 \\ &\geq M \end{aligned}$$

Partie B

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \qquad\qquad \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\boxed{(-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 0}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} c'_{n+T} &= (n+T)c_{n+T} - (n+T)\mu \\ &= \sum_{k=1}^{n+T} u_k - (n+T)\mu \\ &= \sum_{k=1}^{T} u_k + \sum k = T+1^{n+T} u_k - (n+T)\mu \\ &= T\mu + \sum k = 1^n u_{k+T} - (n+T)\mu \\ &= \sum k = 1^n u_k - n\mu \\ &= nc_n - n\mu \end{aligned}$$

(b) On pose $\Lambda = \{c'_k; \quad k \in [\![1, T]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > T$, la division euclidienne de n par T nous donne $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < T$ tels que $n = qT + r$. Si $r = 0$, alors $q > 1$ puisque $n > T$, donc, $u_n = u_{qT} = u_T \in \Lambda$; sinon, si $r > 0$, alors $u_n = u_{qT+r} = u_r \in \Lambda$ pusique $1 \leq r < T$. Or, Λ est une partie finie, non vide de $\mathbb{R}$, donc elle est majorée, ce qui conclut.

(c) D'après la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |c'_n| \leq M$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $|c'_n| \leq M$; or $|c'_n| = |nc_n - n\mu| = n|c_n - \mu|$. Donc $|c_n - \mu| \leq \dfrac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui conclut.

6. (a) *Limite en $+\infty$* :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\boxed{|u_n| = |(-1)^n \ln(n)| = \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

(b) *Limite en $+\infty$ au sens de Cesàro* :

On montre d'abord que (u_{2n}) converge vers 0 au sens de Cesàro. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\ln(2n) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(2k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(2k+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\ln(2n) + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(\ln(2k) - \ln(2k+1))}_{\leq 0}\right)\\
&\leq \frac{\ln(2n)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(2k+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\ln(2)\sum_{k=2}^{n} \ln(2k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(2k-1)\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{(\ln(2k) - \ln(2k-1))}_{\geq 0}\right)\\
&\geq \frac{\ln(2)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Par encadrement, $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 0$.

On montre à présent que (u_{2n+1}) converge vers 0 au sens de Cesàro. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} u_k &= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - \sum_{k=0}^{n} \ln(2k+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\ln(2k) - \ln(2k+1))}_{\leq 0}\right)\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} u_k &= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(2k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(2k+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}\left(ln(2) + \sum_{k=2}^{n}\ln(2k) - \sum_{k=2}^{n}\ln(2k-1) - \ln(2n+1)\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}\left(ln(2) + \sum_{k=2}^{n}\underbrace{(\ln(2k)-\ln(2k-1))}_{\geq 0} - \ln(2n+1)\right)\\
&\geq \frac{ln(2)-\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Par encadrement, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 0$.

À fortiori, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 0}$.

Partie C

7. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\ell \in \mathbb{R}$, supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} \ell$.

   Montrons que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(\ell)$. Ce résultat est direct puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(u_n) = u_n$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(\ell) = \ell$.

   La fonction constante égale à 1 est continue au sens de Cesàro puisque $1 \xrightarrow[n\to+\infty]{c} 1$.
8. Soient f, g deux fonctions continues au sens de Cesàro, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(\lambda f + \mu g)(u_n) = \lambda f(u_n) + \mu g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} \lambda f(\ell) + \mu g(\ell) = (\lambda f + \mu g)(\ell)$ par produit et somme de limites.
9. affines.
10. (a) Pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, $g(\ell) = f(\ell) - f(0)$. Ainsi, pour toute suite convergeant vers ℓ au sens de Cesàro, on a la convergence de $g(u_n)$ vers $g(\ell)$ au sens de Cesàro par somme de limite.

    (b) comme u est 2-périodique, on a que $\xrightarrow[n\to+\infty]{c} \frac{u_1+u_2}{2} = \frac{x+y}{2}$. g étant continue au sens de Cesàro, on a que $g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} g\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Or, $(g(u_n))$ est elle-même 2-périodique, donc $g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} \frac{g(u_1)+g(u_2)}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2}$. Par unicité de la limite, $\boxed{g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}}$.

    (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'abord, on a $g(x) = g\left(\frac{0+2x}{2}\right) = \frac{g(0)+g(2x)}{2} = \frac{g(2x)}{2}$, donc $g(2x) = 2g(x)$, de même pour y. On a donc

    $$g(x+y) = g\left(\frac{2x+2y}{2}\right) = \frac{g(2x)+g(2y)}{2}$$

    Finalement, $\boxed{g(x+y) = g(x)+g(y)}$.

    (d) D'abord, on a que $g(-1) = g(1-2) = g(1) + g(-2) = g(1) + 2g(-1)$ donc $g(-1) = -g(1)$.
    Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose la propriété $\mathcal{P}_n$: « $g(nx) = ng(x)$ ». On la montré par récurrence.

    — Pour $n = 1$, on a $g(1) = g(1)$ donc $\mathcal{P}_1$.

    — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$. Ainsi

    $$g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) + g(x) = (n+1)g(x)$$

    C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Par principe de récurrence, on a que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_\backslash$.

Ceci reste vrai pour les entiers négatifs non-nuls puisque $g(-1) = -g(1)$.
On montre à présent que

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad g\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}g(1)$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$. On pose u la suite q-périodique telle que

$$u_1 = x_1,\ u_2 = x_2,\ \ldots\ , u_q = x_q$$

On a ainsi que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} \frac{\sum_{i=1}^q x_i}{q}$, donc comme g est continue au sens de Cesàro et comme $(g(u_n))$ est aussi q-périodique, on a

$$g\left(\frac{\sum_{i=1}^q x_i}{q}\right) = \frac{\sum_{i=1}^q g(x_i)}{q}$$

On a ainsi montré que

$$\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q, \quad g\left(\frac{\sum_{i=1}^q x_i}{q}\right) = \frac{\sum_{i=1}^q g(x_i)}{q}$$

En particulier, $g(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}g(1)$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Donc

$$g(r) = g\left(\frac{p}{q}\right) = pg\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}g(1) = rg(1)$$

Ce qui conclut.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\{^{\Lambda = \{r \in \mathbb{Q} | r < x}\}$. Λ est non vidée et majorée, donc elle admet une borne supérieure, qui est x. Il existe alors, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $u \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} x$ donc $g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} g(x)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_n g(1)$ puisque $u_n \in \Lambda \subset \mathbb{Q}$ et $u_n g(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{c} xg(1)$. Par unicité de la limite, $g(x) = xg(1)$. En posant $a = g(1)$, on a que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = ax$$

11. La question 11 nous dit que toute fonction continue au sens de Cesàro est affine, la question 9 nous dit que les fonctions affines sont continues au sens de Cesàro. Ainsi, les fonctions continues au sens de Cesàro sont exactement les fonctions affines.