DM7 – Spectromètre de masse

Amar AHMANE
MP2I

11 janvier 2022

Exercice 1 – Spectrometre de masse

Accélération des ions

On décidé de travailler dans un repère aux coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{E_0}$ étant orienté selon $\overrightarrow{e_x}$.

1. Vraisemblablement, on veut que les ions soient accélérés de P_1 vers P_2, d'où qu'on veuille que le vecteur accélération soit dirigé de P_1 vers P_2. Le poids étant négligeable, la seule force en action ici est la composante électrique de la force de Lorentz, soit $\overrightarrow{F_E} = q\overrightarrow{E}$, que l'on veut dirigée de P_1 vers P_2 ; comme $q > 0$, on a nécessairement un potentiel plus élevé en P_1. On représente cela dans un schéma :

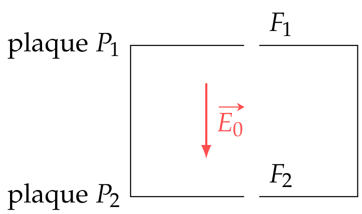

FIGURE 1 – *Champ accélérateur* $\overrightarrow{E_0}$

On sait, d'autre part, que $\overrightarrow{E_0} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x}$. Or, V est constant par uniformité du champ accélérateur, d'où que $V(x) = -\dfrac{U}{d}x$. Donc $\overrightarrow{E_0} = \dfrac{U}{d}\overrightarrow{e_x}$ donc $E_0 = \dfrac{U}{d}$.
AN : $E_0 \simeq 1.0 \times 10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

2. L'énergie potentielle liée à la force de Lorentz s'exprime :

$$\mathcal{E}_p = qV(x) = -qE_0x$$

Les grandeurs utilisées ici étant celles du problème. Le TEM donne $\Delta\mathcal{E}_m = 0$; or

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p &= 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 - qV(d)\\ &= qU - \frac{1}{2}mv_0^2\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}}$.

3. On a

$$v_{01} = \sqrt{\frac{4eU}{m_1}} \text{ où } m_1 = 200\mathrm{u}$$

Et

$$v_{02} = \sqrt{\frac{4eU}{m_2}} \text{ où } m_2 = 202\mathrm{u}$$

AN : $v_{01} \simeq 1{,}384 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ & $v_{02} \simeq 1{,}377 \times 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Filtre de vitesse

4. Les ions arrivent avec une vitesse dirigée selon $\vec{e_x}$ de P_2 vers P_3. Comme le champ $\vec{B_1}$ est perpendiculaire au plan du schéma et dans le sens opposé à $\vec{e_z}$, la résultante du produit vectoriel sera dans le plan du shcéma, dans la direction et dans le sens opposé à $\vec{E_1}$, la composante magnétique sera alors de même sens et direction puisque $q > 0$, et la composante électrique de même sens et de même direction que $\vec{E_1}$ pour la même raison. Ceci est résumé par le schéma suivant :

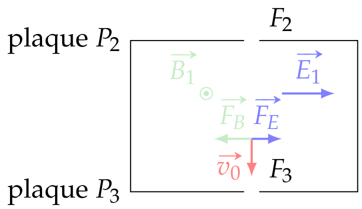

FIGURE 1 – *Composantes de la force de Lorentz lorsque les ions sont entre P_2 et P_3.*

   Ainsi, il faut qu'on ait $||\vec{F_E}|| = ||\vec{F_B}||$.

5. On cherche v_0 telle que la condition de la question **4** soit respectée.

$$\begin{aligned} & ||\vec{F_E}|| = ||\vec{F_B}|| \\ \Leftrightarrow \quad & ||q\vec{E_1}|| = ||q(\vec{v_0} \wedge \vec{B_1}) \\ \Leftrightarrow \quad & qE_1 = qv_0B_1 \\ \Leftrightarrow \quad & v_0 = \frac{E_1}{B_1} \end{aligned}$$

6. **AN :** $v_0 \simeq 1,384 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
   Ce sont les ions ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ qui atteignet F_3.

Séparation des ions

7. La seule force en action en action ici étant la composante magnétique de la force de Lorentz, on a que $\mathcal{E}_p = 0$. D'après le théorème de la puissance cinétique, on a que

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = 0$$

   Or

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = mav$$

   Ainsi, on a que $a = 0 \ \vee \ v = 0$, la vitesse est constante, le mouvement est uniforme.

8. On détermine ici $R(m, v)$, i.e le rayon R pour une masse et une charge positive quelconque, puis on remplacera par les valeurs voulues. Comme la trajectoire est circulaire, on travaille dans un repère de coordonnées polaires. La seule force en action ici étant la composante magnétique de la force de Lorentz, le poids étant négligeable, l'application du P.F.D avec masse constante donne

$$m\vec{a} = \vec{F_B} \tag{1}$$

   Dans notre système de coordonnées, on a $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$. Or, le mouvement est uniforme, donc $\ddot{\theta} = 0$, d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r}$. La force de Lorentez est dirigée selon $\vec{e_r}$ vers le centre de la trajectoire, d'où que $\vec{F_L} = \vec{F_B} = -q|v|B_2e_r$, où $q|v|B_2$ est la norme de $\vec{F_B}$ puisque $\vec{v}$ et $\vec{B_2}$ sont orthogonaux. En prenant la norme dans (1), on obtient

$$mR\dot{\theta}^2 = q|v|B_2$$

   Or, $R\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{R}(R\dot{\theta})^2 = \dfrac{1}{R}v^2$. D'où, finalement

$$R(m, v) = \frac{m|v|}{qB_2}$$

   Ainsi, on a $\boxed{R_1 = R(m_1, v_{01})}$ et $\boxed{R_2 = R(m_2, v_{02})}$.

9. On effectue les application numériques :
AN : $R_1 \simeq 0.722$ m & $R_2 \simeq 0.726$ m.
Ainsi, les ions ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ arriveront en O_1, tandis que les ions ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ arriveront en O_2.
10. En une minute, on compte $n_1 = \dfrac{Q_1}{q}$ ions ${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ qui arrivent en O_1 et $n_2 = \dfrac{Q_2}{q}$ ions ${}^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ qui arrivent en O_2. On estime alors la masse atomique du mercure alors à $\dfrac{200n_1 + 202n_2}{n1 + n2} u \simeq 200,45u$.