Calculs Algébriques

Dans tout ce qui va suivre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $I_n = [\![1, n]\!]$.

Sommes

Sommes télescopiques

1 Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

2 La suite de Fibonacci est définie comme suit

$$F_0 = 1;\ F_1 = 1;\quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Calculer **1.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2$ **3.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}}$

3 **1.** Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p}$ avec $p, n \in \mathbb{N}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Simplifier la somme $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{l=0}^{p} (k+l)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(c) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$.

Calcul de sommes

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour toute famille $(x_i)_{i \in I_n}$ de nombres complexes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right) = 0$.

2. $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$.

5 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes suivantes.

1. $A_n = \displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$. **2.** $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$.

3. $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

6 Soit N un nombre entier de n chiffres. Soit s la somme de ses chiffres, et t la somme de tous les nombres obtenus en combinant 2 quelconques des chiffres de N de rangs distincts (si 2 chiffres sont egaux, un meme nombre peut apparaitre plusieurs fois dans la somme).
Exprimer t en fonction de s.

7 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, les sommes suivantes

1. $A_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$. **2.** $B_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$.

8 Calculer de deux façons les sommes suivantes

1. $A_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$. **2.** $B_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 j$.

Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

9 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}$.

1. Calculer $S_{(2m)^2-1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|S_n| \leq \sqrt{n+1}$$

Préciser le cas de l'égalité.

10 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
En considérant l'involution $X \mapsto \overline{X}$ de $\mathscr{P}(E)$, montrer les formules suivantes

1. $\displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$.

2. (a) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} |X \cap Y| = n4^{n-1}$.

(b) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} |X \cup Y| = 3n4^{n-1}$.

Formule du binôme

11 Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \text{et} \quad (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}.$$

2. Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$ et déduire qu'il existe un entier $p - n$ tel que

$$(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n} + \sqrt{p_n + 1}.$$

12 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes

1. $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ **2.** $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

3. $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ **4.** $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$

13 Calculer, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} \binom{p+q-k}{p-k}$$

14 **1.** Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$.

(a) En utilisant l'identité polynomiale

$$(1+x)^p (1+x)^q = (1+x)^{p+q},$$

montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

(b) Calculer la somme suivante

$$A_{n,p,q} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{p}{k} \binom{p}{n-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right)^2 = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

15 Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k \binom{n}{p-k} \binom{n}{k}$, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$.

16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j \binom{2n}{n-j} = n \binom{2n-1}{n}$.

2. En déduire la valeur des somme suivantes

$$A_n = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 0 \le \ell \le n}} \min(k, \ell) \binom{n}{k} \binom{n}{\ell},$$

$$B_n = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 0 \le \ell \le n}} \max(k, \ell) \binom{n}{k} \binom{n}{\ell}.$$

17 **1.** Montrer que, pour tout $p, q, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{p} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{p+q+1}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n$$