Semaine 2

30 novembre 2021

Pierre-Gabriel Berlureau ★★★★☆

1. Le premier exemple est simple, on se concentre sur le cas $\mathcal{P}(X)$. D'abord, il est évident que $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$ et $X \in \mathcal{P}(X)$. L'union d'une familles de parties de X est évidemment aussi une partie de X, de même pour l'intéresection, ainsi $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X.
2. Itérativement.
3. — $\varnothing$ est évidemment un ouvert de $\mathbb{R}$, puisque la phrase $\forall x \in \varnothing \dots$ est toujours vraie.
   — $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on pourra prendre $\epsilon = 1$ pour le montrer.
   — $[a, b]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, $a \in [a, b]$, or, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $a - \epsilon < a$, d'où $a - \epsilon < a - \dfrac{\epsilon}{2} < a$, d'où l'existence d'un élément $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$ tel que $x \notin [a, b]$.
   — $]a, b[$, oui. Soit $x \in]a, b[$, on pose $\epsilon_1 = x - a$ et $\epsilon_2 = b - x$ et $\epsilon = \dfrac{\min(\epsilon_1, \epsilon_2)}{2}$, ainsi $x - \epsilon > a$ et $x + \epsilon < b$ donc $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset]a, b[$.
4. On pose $\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) | \forall x \in U,\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ ]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U\}$. Ainsi, on a que $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, et $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{O}$. Soit I un ensemble, $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}$. Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, alors $\exists i \in I,\ x \in U_i$, il existe donc $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U_i$ donc $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, ainsi $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. La preuve pour l'interesction est de même nature, il faudra juste prendre le minimum des deux ϵ que l'on a durant la preuve. Ainsi, on a montré que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
5. Vérifications faciles. L'union ne donne pas toujours des topologies sur X, considérer $\mathcal{O}$ et $\{\varnothing, [a, b], \mathbb{R}$.
6. Considérer l'intersection des topologies contenant $\mathcal{A}$.

Matteo Delfour ★★☆☆☆

Analyse Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a $f(-f(x)) = 2 - x$, donc ce résultat est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors $f(x - f(2)) = -x$ donc $-f(x - f(2)) = x$ donc $f(-f(x - f(2))) = f(x)$ donc $2 - (x - f(2)) = f(x)$ donc $f(x) = 2 - x + f(2)$. On en déduit que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2 - x + \lambda$$

Le reste du raisonnement est simple.

Synthèse Facile.

Yanis Grigy ★★★☆☆

Supposons que $\mathbb{P}$ est fini, on note $p_1, \dots, p_n$ les $n \in \mathbb{N}^*$ nombres premiers et on pose $N = p_1 \dots p_n + 1$. Ainsi, N admet un diviseur premier, que l'on note p_k qui divise donc $N - p_1 \dots p_n$, donc p_k divise 1, ce qui est absurde.

Louis Marchal ★★★★★

On le montre par l'absurde. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n = 1$, donc $(3+4i)^n = 5^n$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(4i)^k = 5^n$$

donc

$$\sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} 3^{n-(2k+1)} 4^{2k+1} = 0$$

donc

$$\sum_{3 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} 3^{n-(2k+1)} 4^{2k} + n = 0$$

donc 4 divise n (on vient juste d'éliminer tous les eniters non congrus à 0 mod 4, reste à chercher une absurdité avec ceux-là).

Soit à présent $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
(3+4i)^{4m} &= \sum_{k=0}^{4} m \binom{4m}{k} 3^{4m-k}(4i)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{4m}{2k} 3^{4m-2k} 4^{2k} + i \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \binom{4m}{2k+1} 3^{4m-(2k+1)} 4^{2k+1}
\end{aligned}$$

Mais aussi $z := (3+4i)^{4m} = 5^{4m}$.
On a

$$\mathrm{Re}(z) = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{4m}{2k} 3^{4m-2k} 4^{2k} \equiv \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{4m}{2k} (-1)^{2m-k} \equiv \sum_{k=0}^{2m} \binom{4m}{2k} [5]$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z) = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \binom{4m}{2k+1} 3^{4m-(2k+1)} 4^{2k+1} &= \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \binom{4m}{2k+1} 3^{4m-(2k)} 4^{2k} \\
&\equiv \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \binom{4m}{2k+1} (-1)^{2m-k} \\
&\equiv \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{4m}{2k+1} [5]
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \equiv \sum_{k=0}^{4m} \binom{4m}{k} [5]$, mais $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 5^{4m}$, donc $5^{4m} \equiv 2^{4m}[5]$, donc $2^{4m} \equiv 0[5]$, ce qui est absurde.

Shems ★★★☆☆

Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^{2m} x \cos(2mx) \mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \sin^{2m} x e^{i2mx} \mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \left(\sin(x) e^{ix}\right)^{2m} \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{(-1)^m}{4^m} \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \left(2i \sin(x) e^{ix}\right)^{2m} \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{(-1)^m \pi}{4^m}
\end{aligned}$$

La relation de récurrence pour la seconde est, pour $m > 2$:

$$I_m = \frac{m-1}{m-2} I_{m-2}$$