Semaine 2

30 novembre 2021

Pierre-Gabriel Berlureau ★★☆☆☆

Montrer que pour tout entier naturel n, si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Matteo Delfour ★★★★☆

Montrer que la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ est équivalente à l'axiome de récurrence.
Reformulation : Soit $\mathcal{P}$ une propriété un entier $n \in \mathbb{N}$. On montre que ces deux phrases sont équivalentes

i) $(\mathcal{P}(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n))$

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Yanis Grigy ★★★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}$, $X = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

Louis Marchal ★★★★☆

Soient $n \in \mathbb{N}$, $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ un ensemble fini de $n - uplets$. Montrer qu'il existe des entiers $w_1, \dots, w_n$ tels que l'application $f : (m_1, \dots, m_n) \in I \mapsto \sum_{k=1}^{n} m_k w_k$ est injective.

Shems ★★★★☆

Note : la difficulté de l'exercice vient seulement du fait que les notions sont nouvelles, en réalité, l'exercice ne mérite pas plus de deux étoiles, d'ailleurs, je serais plus d'avis à lui en donner 1.69.

Soient I et J deux ensembles non vides et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels. Montrer que cette famille est majorée si et seulement si pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est majorée et la famille $\left(\sup_{i\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est majorée. On a donc

$$\sup_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sup_{i\in J} \left(\sup_{j\in J} u_{i,j}\right)$$