Exponentielle et fonctions associées. Quelques preuves du cours.

Théorème 4

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)} \tag{1}$$

Il suffit de considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.
Reste à prouver ce qui suit :

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \exp(px) = \exp(x)^p$.

Les preuves dans l'ordre :

— Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 = \exp(0) &= \exp(x-x) \\ &= \exp(x)\exp(-x) \end{aligned}$$

D'où il vient que $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a prouvé la propriété voulue.

— Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(x-y) &= \exp(x+(-y)) \\ &= \exp(x)\exp(-y) \\ &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a prouvé la propriété voulue.

— Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \exp(nx) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x\right) \\ &=^* \prod_{k=1}^{n} \exp(x) \\ &= \exp(x)^n \end{aligned}$$

On justifie * par la propriété de morphisme (1) prouvée plus haut. Ainsi, ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré ce qui suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(nx) = \exp(x)^n$$

Soit à présent $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\exp(nx) &= \exp(-(-n)x) \\
&= \frac{1}{\exp((-n)x)} \\
&= \frac{1}{\exp(x)^{-n}} \\
&= \exp(x)^n
\end{aligned}$$

Ceci montre la même propriété pour les entiers négatifs.

0.0.1 Proposition 7

On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq x + 1 \tag{2}$$

Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1 \tag{3}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, en ce cas $\ln(x) \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
& \exp(\ln(x)) \geq \ln(x) + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x - 1 \quad \geq \ln(x)
\end{aligned}$$