Semaine 1

21 novembre 2021

Louis Marchal ★★★★☆

1. On exprime la solution générale comme somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. L'une tend vers 0 en $+\infty$ puisque $A \geq 0$, il suffit de justifier que la solution particulière tend vers 0 en $+\infty$. Pour rappel : on obtient une solution particulière grâce à la méthode de la variation de la constante, c'est une primitive de $x \mapsto e^{A(x)}b(x)$, que l'on obtient grâce au TFA.
2. Même type d'argument, s'assurer de la convergence de la solution générale.

Pierre-Gabriel Berlureau ★★★☆☆

Premièrement, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x)+\sin(x)) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \ln\left(\sqrt{2}\right)\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or, en posant le changement de variable $t = \frac{\pi}{4} - x$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} -\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\mathrm{d}t$.

Finalement, $\boxed{I = \ln\left(\sqrt{2}\right)\frac{\pi}{4}}$.

Yanis Grigy★★★☆☆

Ton exercice consistait en un calcul d'intégrales. La petite difficulté était ici introduite par le paramètre entier naturel n. Mais rassure ta mère (je ne sais pas pourquoi j'ai dit ça, j'allais écrire rassure-toi et j'ai pensé à la vidéo de Cyprien), ce n'est pas si difficile que ça si on fait bien les choses !

a) On commence ici par chercher une relation de récurrence, i.e on veut exprimer I_n en fonction des termes précédents. Pour cela, le plus évident est de recourir aux intégrations par parties, on a

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x = &\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)(\tan^{n-2}(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x)-1)(\tan^{n-2}(x))\mathrm{d}x \\
&= \Big[\tan(x)\tan^{n-2}(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)(1+\tan^2(x))(n-2)\tan(x)^{n-3}\mathrm{d}x - I_{n-2} \\
&= 1-(n-2)[I_{n-2}+I_n] - I_{n-2} \\
&= 1-(n-1)I_{n-2} - (n-2)I_n
\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}}$.

Ainsi, si n est impair, on a

$$I_n = \sum_{1\leq 2k+1 \leq n-2} \frac{(-1)^k}{n-(2k+1)} + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \ln\sqrt{2}$$

Et, sinon

$$I_n = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n-1} \frac{(-1)^k}{n-(2k+1)} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{4}$$

b) L'idée est exactement la même, notre relation de récurrence ici est : $\boxed{I_n = \frac{(\sqrt{2})^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}}$.

Ainsi, si n est impair, on a

$$I_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{(\sqrt{2})^{n-2(k+1)} \prod_{i=0}^{k-1}(n-2(i+1))}{\prod_{i=0}^{k}(n-(2k+1))} + \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2i)}{\prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-1}(n-(2i+1))} \ln\left(\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

Et, sinon

$$I_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{(\sqrt{2})^{n-2(k+1)} \prod_{i=0}^{k-1}(n-2(i+1))}{\prod_{i=0}^{k}(n-(2k+1))}$$

c) Ici, notre relation de récurrence est $I_n = [x \ln^n x]_1^e - n \int_1^e \ln^{n-1}(x)\mathrm{d}x = e - nI_{n-1}$.

Finalement,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n^k e + (-1)^n n^n (e-1)$$

SHEMS ★★★★☆

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos\frac{2n}{2}x \cos\frac{2x}{2} = 2\cos(nx)\cos x$$

Donc $\boxed{\cos(n+1)x = 2\cos(nx)\cos x - \cos(n-1)x}$.

2. On le montre par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\exists T_n \in \mathbb{Z}[X],\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ 2\cos(n\theta) = T_n(2\cos\theta)\text{"}$$

— On pose $T_0 = 2$, $T_1 = X$, d'où $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T_0}(2\cos(0\times\theta)) = 2 = 2\cos(0\times\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T_1}(2\cos(x)) = 2\cos(x)$. Donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$.
On a montré que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)$$

D'où

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ 2\cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)2\cos\theta - 2\cos(n\theta)$$

Ainsi, on a que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ 2\cos((n+2)\theta) = 2\cos\theta\widetilde{T_{n+1}}(2\cos\theta) - \widetilde{T_n}(2\cos\theta)$$

On construit alors T_{n+2} grâce à T_{n+1} et T_n :

$$T_{n+1} = XT_{n+1} - T_n$$

$\mathcal{P}_{n+2}$.

— OK.

3. Soit a une racine rationnelle de P, il existe alors $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a = \frac{p}{q}$. Ainsi, on a

$$\widetilde{P}(a) = 0$$

Donc

$$\left(\frac{p}{q}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

D'où

$$\left(\frac{p}{q}\right)^k = -a_{k-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} - \cdots - a_1\left(\frac{p}{q}\right) - a_0$$

Donc, en multipliant par q^k,

$$p^k = -q\left(a_{k-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} q^{k-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) q^{k-1} + a_0 q^{k-1}\right)$$

Ainsi, q divise p^k, d'où q divise p, donc $a \in \mathbb{Z}$.

4. Il existe $(p_1, q_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\theta = \dfrac{p_1 \pi}{q_1}$. On a

$$2\cos(q_1\theta) = \widetilde{T_{q_1}}(2\cos\theta)$$

Or, $2\cos(q_1\theta) = 2\cos(p_1\pi) \in \mathbb{Z}$. Donc $2\cos\theta$ est un rationnel racine d'un polynôme de degré q_1 à coefficients entiers, donc $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. Or, comme $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $2\cos\theta \in \{0, 1, 2\}$, d'où $\cos\theta \in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

Matteo Delfour ★★☆☆☆

En posant le changement de variable $u = \sqrt[6]{1+t}$, d'où $6u^5 \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, on a

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{1+t}} &= \int^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^5 \mathrm{d}u}{u^3 - u^2} \\
&= \int^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^3 \mathrm{d}u}{u-1} \\
&= \int^{\sqrt[6]{1+x}} \frac{6u^2(u-1+1)\mathrm{d}u}{u-1} \\
&= \int^{\sqrt[6]{1+x}} \left(6u^2 + \frac{6u(u-1+1)}{u-1}\right) \mathrm{d}u \\
&= \int^{\sqrt[6]{1+x}} \left(6u^2 + 6u + \frac{6(u-1+1)}{u-1}\right) \mathrm{d}u \\
&= \int^{\sqrt[6]{1+x}} \left(6u^2 + 6u + 6 + 6\frac{1}{u-1}\right) \mathrm{d}u \\
&= 2\sqrt{1+x} + 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} + \ln|\sqrt[6]{1+x} - 1| + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$