Réponses : Calculs Algébriques

Amar AHMANE
MP2I

Dans tout ce qui va suivre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $I_n = [\![1, n]\!]$.

Sommes

Sommes télescopiques

1

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1^2)}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2(k^2+2k+1) + k^2 + 2k + 1 + k^2}}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^4 + 2k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + 1}}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{(k^2+k)^2 + 2(k^2+k) + 1}}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{(k^2+k+1)^2}}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= n + \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n(n+2)}{n+1}
\end{aligned}$$

2 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} (F_{k+2} - F_{k+1}) = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$