Semaine 2

10 janvier 2022

Pierre-Gabriel Berlureau ★☆☆☆☆

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et I un ensemble non vide. On considère une famille de sous-groupes de G, notée $(G_i)_{i \in I}$, telle que
$$\forall (i, j) \in I^2,\ \exists k \in I,\ G_i \cup G_j \subset G_k$$
Montrer que $\bigcup_{i \in I} G_i$ est un sous-groupe de G.

Matteo Delfour ★★☆☆☆

Soit $(E, \cdot)$ un magma associatif tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2, tel que
$$\forall (x, y) \in E^2,\ (xy)^n = yx$$
Montrer que $\cdot$ est commutative.

Yanis Grigy ★★★☆☆

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geq n \ln \frac{n}{e}$ et en déduire que
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{e}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k x_k$$

Louis Marchal ★★★★☆

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée vérifiant
$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$
Montrer que f est convexe sur $[a, b]$.

Shems ★★★☆☆

Quels sont les groupes qui ne possèdent qu'un nombre fini de sous-groupes ?