DM12

Amar AHMANE
MP2I

23 décembre 2021

Problème

Partie A

1. <u>Exemples.</u>
   a) exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp^{(n)} = \exp$, ainsi $\forall x \in [0, +\infty[$, $\exp^{(n)}(x) > 0$, ce qui conclut.
   b) ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composée et somme de telles fonctions. On a d'une part que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\left(\mathrm{sh}^{(n)} = \mathrm{ch}\right) \vee \left(\mathrm{sh}^{(n)} = \mathrm{sh}\right)\right) \wedge \left(\left(\mathrm{ch}^{(n)} = \mathrm{ch}\right) \vee \left(\mathrm{ch}^{(n)} = \mathrm{sh}\right)\right) [1]$$
   D'autre part, ch et sh sont positives sur $[0, +\infty[$, ce qui conclut.
   c) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puisque fonction usuelle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \in [\![0, p]\!]$, alors
   $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$$
   Pour tout x réel positif, on a $\dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} \geq 0$.
   Si $n > p$, alors $f^{(n)} = 0 \geq 0$. f est donc AM.
   d) Une fonction f AM est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc dérivable. De plus, toutes ses dérivées sont positives, en particulier f' est positive, donc, par caractérisation des fonctions croissantes parmi les fonctions dérivables, f est croissante donc monotone sur $[0, \alpha[$.
   arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$, cependant, on remarque que
   $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \arctan^{(2)}(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$$
   Donc elle n'est pas AM. Or, arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, +\infty[$ donc monotone sur $[0, +\infty[$. La réciproque est fausse.
2. <u>Opérations.</u>
   a) Par stabilité de $\mathcal{C}^\infty$ par somme, $(f+g) \in \mathcal{C}^\infty([0, \alpha[, \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \alpha[$, alors
   $$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$
   Ce qui conclut.
   b) Par stabilité de $\mathcal{C}^\infty$ par produit, $fg \in \mathcal{C}^\infty([0, \alpha[, \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \alpha[$, alors
   $$(fg)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \times g^{(n)}(x) \geq 0$$
   Ce qui conclut.
3. <u>Dérivation et absolue monotonie.</u>
   a) On suppose que f est AM sur $[0, \alpha[$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc f' aussi. De plus, étant donné $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \in \mathbb{N}$ et
   $$\forall x \in [0, \alpha[, \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f'\right)^{(n)}(x) \geq 0$$
   Ce qui conclut.

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; si n est pair, il existe $m \in \mathbb{N}$, $n = 2m$ et donc $\mathrm{ch}^{(n)} = \mathrm{ch}^{(2m)} = \left(\mathrm{ch}^{(2)}\right)^{(2(m-1))} = \mathrm{ch}^{(2(m-1))} = \cdots = \mathrm{ch}^{(2)} = \mathrm{ch}$. Si n est impair, il existe $m \in \mathbb{N}$, $n = 2m+1$ et donc $\mathrm{ch}^{(n)} = \mathrm{ch}^{(2m+1)} = \left(\mathrm{ch}^{(2m)}\right)' = \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

b) On suppose que f' est AM sur $[0,\alpha[$. On sait alors que f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f')^{(n)}$ est positive. En particulier, $(f')^{(0)} = f'$ est positive, donc f est croissante, donc $\forall x \in [0,\alpha[,\ f(x) \geq f(0)$ donc $\forall x \in [0,\alpha[,\ (f - f(0))(x) \geq 0$. Ainsi, $f - f(0)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, est positive, toutes ses dérivées successives le sont aussi, donc elle est AM.

4. L'exemple de tan.

a) $\tan' = 1 + \tan^2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}\tan^{(n+1)} &= (1+\tan^2)^{(n)} \\ &= (\tan^2)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}\end{aligned}$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « $\tan^{(n)} \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ». On montre par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathcal{P}_n$.

— $\mathcal{P}_0$ est vraie, puisque tan est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. On a d'après 4.b que

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

Or, par hypothèse de récurrence, étant donné $k \in [\![0,n]\!]$, $\tan^{(k)} \geq 0$; or $(n-k) \in [\![0,n]\!]$, donc $\tan^{(n-k)} \geq 0$ donc $\binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\tan^{(n+1)} \geq 0$.
C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Youpi !

tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et toutes ses dérivées successives sont positives, donc elle est AM.

5. L'exemple de arcsin.

a) On a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2} f'(x)$$

Il en découle directement que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2) f''(x) = x f'(x)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\varphi : x \in]-1,1[\mapsto x f'(x)$, $g : x \in]-1,1[\mapsto (1-x^2)$ et $\psi : x \in]-1,1[\mapsto g(x) f''(x)$. On a

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Id}_{]-1,1[}^{(k)} (f')^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \mathrm{Id}_{]-1,1[}^{(k)} (f')^{(n-k)} \\ &= \mathrm{Id}_{]-1,1[} f^{(n+1)} + n f^{(n)}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\psi^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} (f'')^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)} (f'')^{(n-k)} \\
&= g f^{(n+2)} + n g' f^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2} g'' f^{(n)}
\end{aligned}$$

Soit $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n)}(x) &= \psi^{(n)}(x) \\
x f^{(n+1)}(x) + n f^{(n)}(x) &= (1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1) f^{(n)}(x) \\
(1-x^2) f^{(n+2)}(x) &= n^2 f^{(n)}(x) + (2n+1) x f^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « $f^{(n)} \geq 0$ sur $[0,1[$ ». On montre par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n$.

- P_0 est vraie, puisque $f = \arcsin$ est positive sur $[0,1[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. Montrons P_{n+2}. Soit $x \in [0,1[$, on a d'après 5.b que
$$(1-x)^2 f^{(n+2)}(x) = n^2 f^{(n)}(x) + (2n+1) x f^{(n+1)}(x)$$
Par hypothèse de récurrence, $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ et $f^{(n)}(x) \geq 0$ donc $n^2 f^{(n)}(x) + (2n+1) x f^{(n+1)}(x) \geq 0$ puisque $x \geq 0$; or, $(1-x^2) \geq 0$ puisque $0 \leq x < 1$ donc $x^2 < 1$; ainsi, on a nécessaireent $f^{(n+2)}(x) \geq 0$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1[$, c'est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.
- Youpi !

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et toutes ses dérivées successives sont positives, donc elle est AM.

Partie B

1. a) On pose $\phi x \in [a,b] \mapsto (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$. ϕ est continue sur $[a,b]$ comme somme et produit de telles fonctions, dérivable sur $]a,b[$ comme somme et produit de telles fonctions. De plus

$$\begin{aligned}
\phi(a) &= (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a) \\
&= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\
&= f(b)g(a) + f(b)g(b) - g(b)f(a) - g(b)f(b) \\
&= (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b) \\
&= \phi(b)
\end{aligned}$$

D'après Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = (f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$, i.e $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.

b) On suppose que g' ne s'annule pas. On montre par l'absurde que $g(a) \neq g(b)$: si $g(a) = g(b)$, g' s'annule par Rolle, ce qui est absurde. D'après B.1.a, il existe $c \in]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$, i.e
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2. On suppose que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$$

Soit $u \in]0, \alpha[^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to ++\infty]{} 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, en s'intéressant à la restriction de f et g à $\overline{B}(0, u_n)$, comme f et g sont continues sur $\overline{B}(0, u_n)$ et dérivables sur $\mathrm{Int}\left(\overline{B}(0, u_n)\right)$ [2], on montre grâce à B.1.b l'existece de $c_n \in \mathrm{Int}\left(\overline{B}(0, u_n)\right)$ tel que

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(u_n) - f(0)}{g(u_n) - g(0)} = \frac{f(u_n)}{g(u_n)}$$

D'où finalement l'existence de $c \in (]0, \alpha[)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(u_n)}{g(u_n)}$$

Et telle que $c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.[3]
Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle de la limite,

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

Donc $\dfrac{f(u_n)}{g(u_n)}$ admet une limite, qui est ℓ. Ceci étant vrai pour toute suite $u \in]0, \alpha[^{\mathbb{N}}$ et 0 étant une borne de I, on a d'après la caractérisation séquentielle de la limite que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$$

Partie C

1. τ d'accroissement en 0. f est dérivable en 0, donc son taux d'accroissement en 0 tend vers $f'(0)$ en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} \tau(x) = \tau(0)$, d'où continuité en 0.
2. a) Soit $x \in]0, \alpha[$, on a

$$\tau'(x) = \frac{xf'(x) - (f(x) - f(0))}{x^2}$$

   D'où que $\tau' = \dfrac{N_1}{D_1}$ où on a $N_1 : x \in [0, \alpha[\mapsto xf'(x) - (f(x) - f(0))$ et $D_1 : x \in [0, \alpha[\mapsto x^2$.

   b) Soit $x \in]0, \alpha[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{N_1'(x)}{D_1'(x)} &= \frac{f'(x) + xf''(x) - f'(x)}{2x} \\ &= \frac{f''(x)}{2} \end{aligned}$$

   f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc f'' est continue, d'où que $f''(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f''(0)$. D'où, d'après la règle de l'Hôpital

$$\tau'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

   De plus, comme τ est continue en 0, on a $\tau'(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.

2. Int pour intérieur.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathrm{Int}\left(\overline{B}(0, u_n)\right)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n| < u_n$, ce qui conclut.

3. a) On pose $\phi : x \in]0,\alpha[\mapsto \dfrac{1}{x}$ et $\psi : x \in]0,\alpha[\mapsto f(x) - f(0)$. Soit $x \in]0,\alpha[$

$$\begin{aligned}
\tau^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} (f^{(k)}(x) - \delta_{0k} f(0)) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} (f(x) - f(0)) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} f^{(k)}(x) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} (f(x) - f(0)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+k} n! x^k f^{(k)}(x)}{k! x^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k f^{(k)}(x)}{k!} + f(x) - f(0) \right)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in]0,\alpha[$, on a

$$\begin{aligned}
N_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (k x^{k-1} f^{(k)}(x) + x^k f^{(k+1)}(x))}{k!} + f'(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^k x^{k-1} f^{(k)}(x)}{(k-1)!} - \frac{(-1)^{k+1} x^k f^{(k+1)}(x)}{k!} \right) + f'(x) \\
&= \frac{(-1)^n x^n f^{(n+1)}(x)}{n!}
\end{aligned}$$

c) Soit $x \in]0,\alpha[$, on a

$$\frac{(-1)^n n! N_n'(x)}{(n+1)x^n} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc sa dérivée $n+1$ème est, en particulier, continue, d'où la limite ci-dessus. D'après la règle de l'hôpital, $\tau^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$: « τ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,\alpha[$ ». On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.

— $\mathcal{P}_1$ est vraie, puisque τ est dérivable sur $[0,\alpha[$ (selon C.2.d), et sa dérivée est continue : en effet, cela est vrai sur $]0,\alpha[$ puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ et vrai en 0 puisqu'on s'en est assuré à la question C.2 : τ' est définie en 0 et y admet une limite.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Comme τ est $\mathcal{C}^n$ sur $[0,\alpha[$, on a que $\tau^{(n)}$ est continue en 0. D'autre part, d'après C.3.c, on a $\tau^{(n+1)}(x) \xrightarrow[\substack{cx \to 0 \\ x \neq 0}]{} \dfrac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$. $\tau^{(n)}$ est donc dérivable en 0 d'après le théorème de la limite de la dérivée, et $\tau^{(n+1)}(0) = \dfrac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$.
Comme $\tau^{(n)}$ est dérivable sur $]0,\alpha[$, $\tau^{(n)}$ est dérivable sur $[0,\alpha[$. De plus, $\tau^{(n+1)}$ est continue en 0, ceci découle de l'application du théorème de limite de la dérivée, mais aussi sur $]0,\alpha[$ puisque f est $\mathcal{C}^\infty$.
C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Youpi !

e) τ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut remarquer que, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n(0) = 0$, or, on connaît déjà N_n', donc on peut en déduire que, étant donné $x \in]0,\alpha[$

$$(-1)^n N_n'(x) = \frac{x^n f^{(n+1)}(x)}{n!} \geq 0$$

d'où que $(-1)^n N_n(x) \geq 0$, donc, $\tau^{(n)}$ est positive sur $]0,\alpha[$. Ceci reste vrai en 0, par absolue monotonie de f. Par ailleurs, τ est aussi positive, puisque f est coirssante, donc $f(x) \geq f(0)$ pour un $x \in]0,\alpha[$ quelconque et $f'(0) \geq 0$. Ce qui conclut.