

# Semaine 8

## Exercices

Amar AHMANE

30 janvier 2022

– Eh bien... dit Chick, je lui ai demandé si elle aimait Jean-Sol Partre et elle m'a dit qu'elle faisait collection de ses oeuvres... Alors, je lui ai dit : Moi aussi... Et, chaque fois que je lui disais quelque chose, elle répondait : Moi aussi, et vice-versa... Alors à la fin, juste pour faire une expérience existentialiste, je lui ai dit : Je vous aime beaucoup, et elle a dit : Oh !  
– L'expérience avait raté, dit Colin.  
– Oui, dit Chick. Mais elle n'est pas partie tout de même. Alors, j'ai dit : Je vais par là, et elle a dit : Pas moi... et elle a ajouté : Moi je vais par là.  
– Alors j'ai dit : Moi aussi, dit Chick. Et j'ai été partout où elle a été

*L'Écume des jours, Boris Vian*

### Exercice : c'est le moment de réfléchir. (source : Mathraining) (et franchement c'est du niveau Terminale il faut qu'au moins quelqu'un le fasse ça)

Au jeu Euro Millions, il est demandé de donner 5 "numéros" entre 1 et 50 (et pas deux fois le même) et 2 "étoiles" entre 1 et 11 (et pas deux fois la même non plus). Le tirage consiste alors en 5 numéros et 2 étoiles tirés au hasard. Un gain est obtenu dès que l'on a 2 bons numéros ou lorsqu'on a 1 bon numéro et les 2 bonnes étoiles. Dans tous les autres cas, on ne remporte rien. Quelle est la probabilité de ne rien gagner après avoir joué une grille ?

### Exercice : Calcul d'inverse. (source : Oraux X-ENS, Algèbre 1, Cassini)

Soit  $A$  un anneau et  $(a, b) \in A^2$ . Montrer que si  $1 - ab$  est inversible alors  $1 - ba$  l'est aussi.

### Exercice : Des carrés particuliers. (source : École Navale)

Déterminer les matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice : Questions de divisibilité. (source : Oraux X-ENS, Algèbre 1, Cassini)

1. Si  $n$  et  $k$  sont dans  $\mathbb{N}$ , montrer que  $(n!)^k | (nk)!$ .
2. Soit  $n \geq 1$ . Montrer que si  $(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N})^n$ , alors il est possible de trouver  $K \in \mathcal{P}(\{m_1, \dots, m_n\})$  tel que  $\sum_{k \in K} k$  divise  $n$ .
3. Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que 7 divise  $n^n - 3$ .