Analyse-Synthèse

Amar AHMANE
MP2I

10

Énoncé Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que f s'écrit, de manière unique, sous la forme $f = a + g$, où
$$a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$$
2. Montrer que f s'écrit, de manière unique, sous la forme $f = P + g$, où
$$P \text{ est affine} \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t = 0$$

Solution proposée Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On raisonne par analyse synthèse.

Analyse Supposons qu'il existe un réel a et une fonction g vérifiant
$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$$
tels que $f = a + g$.
La continuité de f nous permet d'écrire que
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (a + g(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 a\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 a\mathrm{d}t \\ &= \Big[at\Big]_0^1 \\ &= a\end{aligned}$$
Ceci ayant été établi, on a également que $\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Synthèse Posons $a = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $g = f - a$, vérifions alors que le couple (a, g) convient.
Soit $x \in [0,1]$,
$$g(x) + a = f(x) - a + a = f(x)$$
Ensuite
$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (f(t) - a)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 a\mathrm{d}t \\ &= a - \Big[at\Big]_0^1 \\ &= 0\end{aligned}$$
Et, comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a que $a \in \mathbb{R}$. Ce qui conclut notre raisonnement.

2. On raisonne par analyse synthèse.

Analyse Supposons qu'il existe une fonction P affine et une fonction g vérifiant

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t$$

telles que $f = P + g$. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0, 1], \quad P(x) = ax + b$.
En ce cas, la continuité de f et des fonctions affines (et donc de P) nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (P(t) + g(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 (at + b)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_0^1 \\
&= \frac{a}{2} + b
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{a}{2} + b = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

Or,

$$\forall x \in [0, 1], xf(x) = xP(x) + xg(x)$$

Donc, comme le produit de fonctions continues est une fonction continue, on a que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (tP(t) + tg(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 tP(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 (at^2 + bt)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{a}{3} + \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

De (1) on a que

$$b = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{a}{2}$$

En remplaçant dans (2) on obtient

$$\frac{2a}{3} = 2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{a}{2}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \frac{2a}{3} - \frac{a}{2} = 2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a}{6} = \int_0^1 f(t)(2t-1)\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & a = 6\int_0^1 f(t)(2t-1)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

De même,

$$b = 2\int_0^1 f(t)(2-3t)\mathrm{d}t$$

Et, enfin,

$$g = f - P$$

Synthèse Posons $a = 6\int_0^1 f(t)(2t-1)\mathrm{d}t$, $b = 2\int_0^1 f(t)(2-3t)\mathrm{d}t$, $P : x \mapsto ax+b$ et $g = f - P$. On vérifie aisément que $f = P + g$; P est affine et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (f(t) - P(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 (at+b)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \left[\frac{at^2}{2} + bt\right]_0^1 \\
&= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \left(\frac{a}{2} + b\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{a}{2} + b = 3\int_0^1 f(t)(2t-1)\mathrm{d} + 2\int_0^1 f(t)(2-3t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(6t-3+4-6t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Donc

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$$

De même

$$\begin{aligned}
\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (tf(t) - tP(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 tP(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 (at^2+bt)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t - \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2\int_0^1 f(t)(2t-1)\mathrm{d} + \int_0^1 f(t)(2-3t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(4t-2+2-3t)\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$$

Donc

$$\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t = 0$$

Le couple (P, g) convient. Ceci conclut notre raisonnement.