Semaine 7
Exercices

Amar AHMANE

24 janvier 2022

Je m'en allais, les poings dans mes poches crevées ;
Mon paletot aussi devenait idéal ;
J'allais sous le ciel, Muse ! et j'étais ton féal ;
Oh ! là ! là ! que d'amours splendides j'ai rêvées !

Ma bohème, Arthur Rimbaud

Quelques définitions qui vont servir pour la résolution des exercices :

Définition 1 Lorsque G est un groupe fini, on appelle ordre de G son cardinal.

Définition 2 Soit G un groupe multiplicatif. Soit $g \in G$, alors on définit

$$\mathrm{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid g^n = 1\}$$

Par convention, cette quantité est $+\infty$ si l'ensemble considéré ci-dessus est vide.

Définition 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Cet entier admet une décomposition nombres premiers (résultat admis) que l'on choisit de noter de la sorte :

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)}$$

où $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en nombre premiers de n. Dans ce cas, le pgcd de deux entiers m et n non nuls est l'entier

$$n \wedge m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(v_p(n), v_p(m))}$$

Définition 4 On dit que deux entiers sont premiers entre eux si leur pgcd est égal à 1.

Quelques résultats utiles :

- Théorème de Lagrange : l'ordre de chaque sous-groupe d'un groupe G divise l'ordre de G.
- Lemme de Gauss : lorsque p et q sont deux entiers premiers entre eux, et lorsque $p|mq$ où m est un entier, on a que $p|m$.

Exercice : ordre du produit de deux éléments dont les ordres sont premiers entre eux (source : Oraux X-ENS, Algèbre 1, Cassini)

Soit G un groupe abélien fini. Pour tout $x \in G$, on note $\mathrm{ord}(x)$ l'ordre de x. Soit $(x, y) \in G^2$, $m = \mathrm{ord}(x)$, $n = \mathrm{ord}(y)$. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que $\mathrm{ord}(xy) = mn$. *On se servira du lemme de Gauss.*

Exercice : quelques exemples de sous-groupes (source : Les maths en tête, Xavier Gourdon)

Soit G un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes de G.

1. On suppose que $H_1 \cup H_2$ est un groupe de G, montrer alors que $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.
2. Si les ordres de H_1 et H_2 sont finis et premiers entre eux, que dire de $H_1 \cap H_2$?

Exercice : cardinal d'un groupe fini et Im et Ker. (source : Oraux X-ENS, Algèbre 1, Cassini)

Soit G un groupe fini, et f un morphisme de G dans lui-même.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par $\forall x, y \in G, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence.
2. On note $G/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de G. Montrer que $|G/\mathcal{R}| = |\operatorname{Im} f|$.
3. On note $G/\mathrm{Ker}f = \{x\mathrm{Ker}f;\ x \in G\}$. Pour $x \in G$, on note $\overline{x} = x\mathrm{Ker}f$. On munit $G/\mathrm{Ker}f$ de la loi
$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$
Montrer que cette loi munit $G/\mathrm{Ker}f$ d'une structure de groupe.
4. Montrer que $G/\mathrm{Ker}f = G/\mathcal{R}$.
5. Montrer que pour tout $x \in G$, $|\overline{x}| = |\mathrm{Ker}f|$. En déduire que $|G| = |G/\mathcal{R}||\mathrm{Ker}f|$.
6. En déduire que $\mathrm{Ker}f^2 = \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.