LOUIS MARCHAL

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que l'équation différentielle $(E) \;:\; y' = f(y)$ admet une solution ϕ définie sur $\mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans un premier temps que f ne s'annule jamais. Justifier que f garde un signe constant. On supposera dans la suite que $\forall t \in R,\ f(t) > 0$.
2. En déduire que ϕ est strictement croissante et qu'elle converge en $+\infty$.
3. En admettant que
$$\lim_{t\to+\infty} f(\phi(t)) = f\left(\lim_{t\to+\infty} \phi(t)\right)$$
montrer que ϕ' converge vers une limite ℓ' que l'on exprimera en fonction de $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t)$.
4. On admet ce qui suit :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a, \ell \in \mathbb{R}$, alors $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \ell t$$

En déduire que f s'annule.