DM6 – Énergie mécanique

Amar AHMANE
MP2I

4 janvier 2022

Exercice 1 – Un clou dans les oscillations d'un pendule

Première partie du mouvement : $\theta > 0$

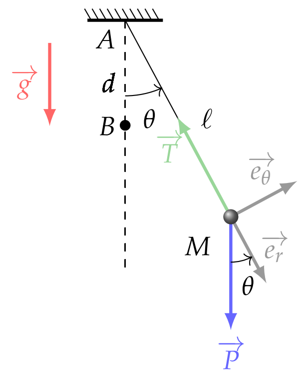


FIGURE 1 – *État du système lorsque* $\theta > 0$.

1. On sait que $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$. On commence par donner une expression de $\mathcal{E}_c$. On sait que

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Ici, on a que $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e_\theta}$, donc $v = \ell\dot{\theta}$. Finalement

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2}$$

On sait d'autre part que $\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W(\vec{F_c})$ où $\vec{F_c}$ est la résultante des forces conservatives. Les seules forces en action ici sont la tension du fil et le poids, étant donné que l'on néglige tout frottement. Comme le travail de la tension du fil est nul, on a que

$$\begin{aligned}\delta W(\vec{F_c}) &= \delta W(\vec{P}) \\ &= \vec{P}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= (mg\cos\theta\vec{e_r} - mg\sin\theta\vec{e_\theta})\cdot(\ell\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}) \\ &= -mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

D'où que $\mathrm{d}\mathcal{E}_p = mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta$; ainsi, en s'arrangeant pour que l'énergie potentielle soit nulle en $\theta = 0$, on a

$$\boxed{\mathcal{E}_p = mg\ell(1-\cos\theta)}$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell(1-\cos\theta)}$.

2. Le pendule est lâche depuis la position $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ sans vitesse initiale. On a

$$\mathcal{E}_c\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

connaissant l'expression de $\mathcal{E}_p$, on a

$$\mathcal{E}_p\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = mg\ell$$

comme l'énergie mécanique est conservée vu l'absence de forces non-conservatives, on a que

$$\mathcal{E}_m\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_m(\theta = 0)$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(\theta = 0) &= \mathcal{E}_p\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{1}{2}m(\ell\omega_0)^2 &= mg\ell\end{aligned}$$

D'où il suit que $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}}$ et $\boxed{v_0 = \sqrt{2g\ell}}$.

Deuxième partie du mouvement : $\theta < 0$

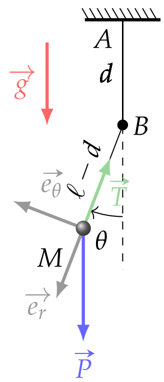


FIGURE 2 – *État du système lorsque* $\theta < 0$.

3. L'expression de l'énergie cinétique est donnée par $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$, d'où $\mathcal{E}_c = \boxed{\frac{1}{2}m((\ell - d)\dot{\theta})^2}$. De la même manière qu'à la question 1, en remarque que $\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W(\vec{P})$, on a, en remarquant également que $\vec{v} = (\ell - d)\dot{\theta}\mathrm{d}\theta$, que $\boxed{\mathcal{E}_p = mg(\ell - d)(1 - \cos\theta)}$, en choisissant la constante d'intégration telle que $\mathcal{E}_p(\theta = 0) = 0$. Finalement

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m((\ell - d)\dot{\theta})^2 + mg(\ell - d)(1 - \cos\theta)}$$

4. Par continuité de l'énergie au point $\theta = 0$, on a que $\mathcal{E}_m(\theta = 0^+) = mgl$, et par conservation de l'énergie $\mathcal{E}_m = mg\ell$.
5. On a directement

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g(\ell - (\ell - d)(1 - \cos\theta))}{(\ell - d)^2}}$$

6. Étude

Système Masse assimilée au point M.

Référentiel Terrestre considéré galiléen.

Schéma C.f FIGURE 2.

Bilan des forces $\vec{T} = -T\vec{e_r}$; $\vec{P} = mg\cos\theta\vec{e_r} - mg\sin\theta\vec{e_\theta}$.

Étude cinématique $\overrightarrow{BM} = (\ell - d)\vec{e_r}$; $\vec{a} = (\ell - d)\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - (\ell - d)\dot{\theta}^2$

P.F.D. (m =cste) On écrit seulement la projection qui nous intéresse (i.e selon $\vec{e_r}$)

$$-m(\ell - d)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

D'où

$$\begin{aligned} T &= m\frac{2g(\ell-(\ell-d)(1-\cos\theta))}{\ell-d} + mg\cos\theta \\ &= mg\left(\frac{2\ell}{\ell-d} - 2(1-\cos\theta) + \cos\theta\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{T = mg\left(\frac{2\ell}{\ell-d} + 3\cos\theta - 2\right)}$$

7.

Exercice 2 – Étude d'un oscillateur

1. Une seule : θ.
2. Le poids $\vec{P}$, la force de rappel du ressort $\vec{F}$, la réaction normale $\vec{R}$, les deux premières étant conservatives.
3. Il semble ici que le théorème de l'énergie mécanique soit approprié.

Mise en équation

4. On a $\boxed{AM = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
5. On sait d'autre part que $\vec{P}$ dérive d'une énergie potentielle. On a que

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{P}) &= \vec{P}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= (mg\cos\theta\vec{e_r} - mg\sin\theta\vec{e_\theta})\cdot(a\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}) \\ &= -amg\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

D'où que l'énergie potentielle liée au poids s'écrit $\mathcal{E}_p(\vec{P}) = -amg\cos\theta$. De même, on a que l'énergie potentielle liée à la force de rappel du ressort s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(\vec{F}) &= \frac{1}{2}k(AM-\ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2 \\ &= 2ka^2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= -amg\cos\theta + 2ka^2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2 \\ &= ka^2\left[-\frac{mg}{ka}\cos\theta + \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2\right] \end{aligned}$$

En posant $\mathcal{E}_0 = ka^2$, on a finalement :

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}_p(\theta)}{\mathcal{E}_0} = -\frac{mg}{ka}\cos\theta + \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\ell_0}{2a}\right)^2}$$

6. On sait que l'énergie potentielle présente une tangente horizontale aux points d'équilibre. On cherche ainsi les valeurs de $\theta_{\mathrm{eq}} \in]-\pi,\pi]$ telles que $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{\mathrm{eq}}) = 0$. On a $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = 0$,

ainsi, étant donné $\theta \in]-\pi,\pi]$ et en supposant $\eta < 1 - \frac{\ell_0}{2a}$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = 0 &\Leftrightarrow \eta \sin\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\ell_0}{2a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \eta\sin\theta - \sin\theta + \frac{\ell_0}{a}\sin\frac{\theta}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\eta - 1)\sin\theta + \frac{\ell_0}{a}\sin\frac{\theta}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{\ell_0}{a(1-\eta)}\sin\frac{\theta}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\ell_0}{a(1-\eta)}\sin\frac{\theta}{2} \\
&\Leftrightarrow \boxed{\left(\sin\frac{\theta}{2} = 0\right) \vee \left(\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)}\right)}
\end{aligned}$$

Dans $]-\pi,\pi]$, il n'y a qu'une solution pour l'équation avec le sinus, qui est $\theta = 0$. Pour l'équation avec le cosinus, comme $0 \leq \frac{\ell_0}{2a(1-\eta)} < 1$, on trouve deux solutions (d'abord avec arccos sur $[0,\pi[$, ensuite par parité de cos.)

7. Lorsque $\eta = 1$, on a $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\theta}{2} = 0$, d'où une unique solution et donc une unique position d'équilibre sur $]-\pi,\pi]$, qui est $\theta = 0$. $\eta = 1$ correspond à la courbe en pointillés.
8. Les positions d'équilibre qui sont les solutions de l'équation en cosinus sont les positions stables, $\theta = 0$ est la position d'équilibre instable.

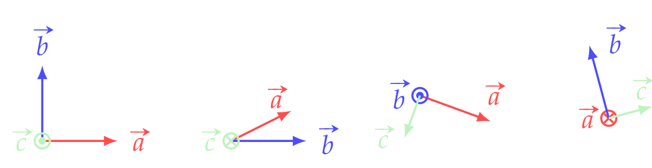
Petites oscillations au voisinage de $\theta = 0$

9. On a
$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$$
Donc
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 + \mathcal{E}_0\xi(\theta)$$
Le mouvement étant conservatif, l'énergie mécanique est conservée, d'où
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 &\Longrightarrow a^2 m\ddot{\theta}\dot{\theta} + \mathcal{E}_0\left(\dot{\theta}\sin\theta - 2\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\ell_0}{2a}\right)\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \mathcal{E}_0\frac{\ell_0}{a^3 m}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0}
\end{aligned}$$

10. On a $\sin\theta = \theta + o(\theta)$, d'où l'équation linéariée
$$\ddot{\theta} + \frac{k\ell_0}{2ma}\theta = 0 \tag{E}$$
Donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k\ell_0}{2ma}}}$.

Exercice 3 – Produit vectoriel

1. On représente le résultat du produit vectoriel dans chaque cas :



2. Calcul des expressions demandées :
   — $\vec{e_x} - \vec{e_y}$.
   — $6\vec{e_z} + 2\vec{e_y} - 4\vec{e_x}$.
   — $\vec{e_x} - 3\vec{e_y}$.
   — 0.