

FEUILLE D'EXERCICES ET DE QUESTIONS DE COURS POUR LA SEMAINE 1 DE KHÔLLES DE MATHÉMATIQUES

AMAR AHMANE

Questions de cours.

- Q1. Rappeler la définition d'idéal d'un anneau et décrire les idéaux de \mathbf{Z} .
- Q2. Définition et propriétés de base de l'indicatrice d'Euler.
- Q3. Générateurs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercices à proposer.

- Exo 1. (a) Soit G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre fini n . Si $d \geq 1$, montrer que l'ordre de x^d est $n/(n \wedge d)$.
- (b) Soit G un groupe d'ordre $2p$ où $p \geq 3$ est un nombre premier. Montrer que G admet un élément d'ordre p .
- Exo 2. Soit G un groupe fini et $f : G \rightarrow G$ un morphisme. Montrer que
- $$\text{im } f = \ker f \iff \text{im } f^2 = \ker f^2$$
- Exo 3. Soit k un corps et G un sous-groupe fini de k^\times .
- (a) Montrer que si $d \geq 1$ est un entier, alors dans k^\times , il y a soit 0 soit $\varphi(d)$ éléments d'ordre d .
- (b) En déduire que G est cyclique. *Indication : on pourra utiliser que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*
- Exo 4. Montrer que le centre de \mathfrak{S}_n est trivial dès que $n \geq 3$.
- Exo 5. Déterminer les automorphismes de corps de \mathbf{R} .