Etienne Debacq*

Exercice (Mines-Ponts MP 2022). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$ et $p(n) = \operatorname{Card} P(n)$. On pose $G : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$.

1. Montrer que $G(t)$ est défini pour $|t| < 1$, puis que
$$G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$
2. En déduire $p(n)$ et un équivalent lorsque $n \to +\infty$.
3. Généraliser avec le nombre de m-uplets $(x_1, \dots, x_m)$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = n$ où les α_i sont des entiers naturels deux à deux premiers entre eux.

Éléments de réponse.

1. On sait que pour $k = 1, 2, 3$, pour $|t| < 1$, on a
$$\frac{1}{1-t^k} = \sum_{n \in k\,\mathbb{N}} t^n$$
Autrement dit, comme les séries convergent absolument, pour $|t| < 1$
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n\right)\left(\sum_{n\in 2\,\mathbb{N}} t^n\right)\left(\sum_{n\in 3\,\mathbb{N}} t^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3\\ x+2y+3z=n}} 1\right) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n\end{aligned}$$
2. On effectue une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)(X^2-1)(X^3-1)} = \frac{1}{(X-1)^2(X+1)(X^2+X+1)}$. Il existe des coefficients ... tels que
$$\frac{1}{(X-1)^2(X+1)(X^2+X+1)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\delta X + \varepsilon}{X^2+X+1}$$

□

Exercice. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Florian Laffont*

Exercice (X MP* 2001). Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, D_f son adhérence.

1. Soit $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 1$ et $r \in \left]0, 1\right[$. Montrer que
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
2. On considère E l'espace des fonctions de D_f dans $\mathbb{C}$ continues et F le sous-espace de E constitué des fonctions dont la restriction à D est somme d'une série entière. Vérifier que $\|f\| = \sup_{z\in D_f} |f(z)|$ est une norme sur E et que F est un fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est d'adhérence égale à F dans $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice. Rayon de convergence de $\sum R_n x^n$ où R_n est le reste de $\sum \frac{1}{1+n^2}$.

Ronan Kaing

Exercice CCP. Soit (a_n) une suite de complexes telle que $(|a_{n+1}/a_n|)$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont même rayon de convergence, que l'on note R.
2. Démontrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

Exercice. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum H_n x^n$.

Morgan Laurent*

Question de cours. Justifier que $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ et $x \mapsto \frac{x-\mathrm{sh}(x)}{x^3}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

Exercice. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et, pour $|x| < 1$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.

1. Donner une suite réelle (a_n) telle que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}$.
3. La série $\sum a_n$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

Leo Monge

Exercice CCP.

1. Définition du rayon de convergence.
2. Rayon de $\sum \frac{z^{2n+1}}{\binom{n}{2n}}$, $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et $\sum \cos n z^n$.

Exercice. Soit $a_n = 2^{-n} \int_0^1 (1+t^2)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (a_n) converge.
2. Étudier la série $\sum (-1)^n a_n$.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. On note R son rayon de convergence et f sa somme.
   a) Montrer que pour tout entier $n \geq$, $a_n \geq 1/(n+1)$.
   b) En déduire R.
   c) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ (2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$$
   d) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

Jaufret Patou-Stefaniak

Exercice CCP.

Soit (a_n) une suite de complexes telle que $(|a_{n+1}/a_n|)$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence, que l'on note R.
2. Démontrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

Exercice. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum H_n x^n$.