Élèves 1 & 4

Exercice CCP. Rayon de convergence et somme de

$$\sum \frac{3^n x^{2n}}{n}, \quad \sum a_n x^n,\ a_{2n} = 4^n,\ a_{2n+1} = 5^{n+1}$$

Éléments de réponse.

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ S_1(x) = -\ln(1-3x^2), \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ S_2(x) = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}$$

□

Exercice. 1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \ln(n) x^n$. On notera S sa somme.

2. Montrer que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad S(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

3. Montrer que la limite de S en 1^- est égale à $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
4. Calculer cette limite.

   Indication : penser à la formule de Stirling

Éléments de réponse. Pour la dernière question, on calcule les sommes partielles d'ordre pair de la série dont on veut calculer la somme. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right) + \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{(2k+1)2k}\right) + \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{2k(2k-1)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\right) + \ln\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2}\right)
\end{aligned}$$

On calcule un équivalent de l'expression à l'intérieur du ln en se servant de la formule de Stirling

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} \sim \frac{2^{4n}\sqrt{2\pi n}^4\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{2n\sqrt{4n\pi}^2\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}} \sim \frac{\pi}{2}$$

On conclut par continuité de ln à l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

□

Élèves 2 & 5

Exercice CCP. 1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On notera S sa somme sur son disque ouvert de convergence.

2. Rappeler le dse_0 de ch en précisant le rayon de convergence.
3. a) Déterminer S.
   b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et
   $$\forall x \neq 0, \quad f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\operatorname{ch}\sqrt{x} + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x)\cos\sqrt{-x}$$
   Démontrer que f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux. On pose $\varphi(x) = \int_0^\pi f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \int_0^\pi tf(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Éléments de réponse. Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit

$$\int_0^\pi f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f(t)(tx)^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

Mais f étant CPM sur le segment $[0, \pi]$, elle y est bornée, donc $\|f\|_\infty^{[0,\pi]} < \infty$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, \pi],\qquad \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f(t)(tx)^{2n+1}\right| \le \frac{\|f\|_\infty^{[0,\pi]}(|x|\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f(t)(tx)^{2n+1}$ converge normalement, donc uniformément, on peut donc intervertir somme et intégrale pour obtenir

$$\int_0^\pi f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right) x^{2n+1}$$

On a alors montré que φ est développable en série entière au voisinage de 0. Le développement est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. On en déduit que φ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right) x^{2n}$$

On justifie, de la même manière qu'à la première interversion somme-intégrale, que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1) \left(\int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} f(t)t^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right) x^{2n} = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} tf(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(xt)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi'(x) = \int_0^\pi tf(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

□

Élèves 3 & 6

Exercice CCP. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

Étudier la convergence de la série obtenue en $1/4$, $1/2$ et $-1/2$. En cas de convergence, étudier la continuité en ces points.

Exercice. Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^{(n)}\|_\infty^{[-a,a]} \le CA^n n!$$

Démontrer que f est dse$_0$.

Éléments de réponse. On écrit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-a, a]$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k$$

La formule de taylor avec reste intégrale donne alors

$$|R_n(x)| \le (-1)^{\mathbb{1}_{x\le 0}} \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^{[-a,a]}$$

En utilisant l'hypothèse sur les dérivées successives de f, on arrive à la majoration

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} CA^{n+1}(n+1)! = C(|x|A)^{n+1}$$

Ainsi, la suite de fonctions (R_n) converge simplement vers 0 sur $]-1/A, 1/A[$.
En conclusion, f est dse_0. $\square$