Élève 1*

Exercice. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ borné. Montrer que les valeurs propres des matrices de G sont toutes de module 1. Si de plus G est supposé inclus dans $B(I_n, \sqrt{2})$ pour une certaine norme d'opérateur, montrer que G est trivial.

Élève 2

Exercice CCP. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A.

Exercice. L'équation

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possède-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Élève 3

Exercice CCP. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. A est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Déterminer μ_A.
4. Calculer les puissances de A.

Exercice. Quelle est la trace d'une matrice nilpotente ? Donner un contre-exemple à la réciproque. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = 0$, montrer que A est nilpotente.