Planche d'exercices (avec corrigés)

Semaine X

1. Élève 1

Question de cours 1. *Démontrer le théorème de Cesàro.*

Exercice. Soit une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente. Montrer qu'elle est stationnaire.

> ***Solution :*** Par définition, il existe un rang n_0 tel que
>
> $$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$$
>
> où on aura noté ℓ la limite. Pour $n \geq n_0$, on a
>
> $$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}$$
>
> Et comme $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| = 0$ soit $u_{n+1} = u_n$. □

Exercice. On pose $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$ pour $n \geq 0$ et $a_0 = 0$. Déterminer $\lim a_n$.

> ***Solution :*** On peut poser $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sqrt{1+x}$ de sorte que $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \geq 1$.
> f est clairement croissante, mais $a_1 \geq a_0$, donc (a_n) est croissante.
> À présent, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: « $a_n \leq 2$ ». On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.
>
> **Initialisation** $a_0 = 0 \leq 2$
> **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$. On exploite la croissance de f. On a $a_n \leq 2$ par hypothèse de récurrence, donc $a_{n+1} = f(a_n) \leq f(2) \leq 2$.
> **Conclusion** D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.
>
> On a montré alors que (a_n) est croissante et majorée, elle converge donc d'après le TLM. Notons ℓ sa limite, par ailleurs positive du fait de la positivité de la suite. En passant à la limite dans la relation de récurrence (maintenant qu'on sait qu'elle existe), on obtient
>
> $$\ell = f(\ell) \Longrightarrow \ell = \sqrt{1+\ell} \Longrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0$$
>
> ℓ est racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$, dont la seule racine positive est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Exercice. Soient a, b deux réels, (a_n) (b_n) deux suites réelles tendant respectivement vers a et b.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab$$

> ***Solution :*** Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir $n_0 \geq 0$ tel que $|a_n - a| \leq \varepsilon$ et $|b_n - b| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.
> Alors, on a pour $n \geq n_0$
>
> $$\sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k} - ab| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k b_{n-k} - ab| + \sum_{k=n_0}^{n-n0} |a_k b_{n-k} - ab| + \sum_{k=n-n0+1}^{n} |a_k b_{n-k} - ab|$$

Si $k \in [\![n_0, n-n_0]\!]$ alors $k \geq n_0$ et $n-k \geq n_0$ d'où

$$|a_k b_{n-k} - ab| \leq |a_k - a||b_{n-k}| + |a||b_{n-k} - b| \leq (M+a)\varepsilon$$

où M est un majorant de $(|b_p|)$. On obtient alors

$$\sum_{k=n_0}^{n-n0} |a_k b_{n-k} - ab| \leq (M+a)\varepsilon(n - 2n_0 + 1)$$

Ensuite, si on désigne par M' un majorant de $(|a_p|)$, on a pour $k \in [\![n-n_0+1, n]\!]$, $|a_k b_{n-k} - ab| \leq MM' + |ab|$, d'où

$$\sum_{k=n-n0+1}^{n} |a_k b_{n-k} - ab| \leq n_0(MM' + |ab|)$$

On peut finalement écrire

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - ab\right| &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k} - ab| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k b_{n-k} - ab| \\ &+ \frac{1}{n+1}(n_0(MM' + |ab|) + (M+a)\varepsilon(n - 2n_0 + 1))\end{aligned}$$

Le dernier terme dans cette suite d'inégalités tend vers $\varepsilon > 0$ à mesure que n tend vers $+\infty$, donc est majoré par 2ε à partir d'un certain rang, soit l'existence de $n_1 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq n_1,\ \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - ab\right| \leq 2\varepsilon$$

□

2. Élève 2

[À compléter]

3. Élève 3

[À compléter]