Élève 1*

Question de cours. Énoncer le CSSA.

Exercice. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum a_n$ converge.

1. Montre que si $\alpha > 1/2$, la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.
2. Que dire dans le cas $\alpha = 1/2$?

Exercice.

1. Montrer que pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, la série $\sum 1/(n\varphi(n))$ converge, on notera $S(\varphi)$ sa somme. Montrer que $\varphi \mapsto S(\varphi)$ est majorée et déterminer son sup.
2. Montrer que pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, la série $\sum \varphi(n)/n^2$ diverge, on notera $S_n(\varphi)$ sa somme partielle. Montrer que $\varphi \mapsto S_n(\varphi)$ est minorée et déterminer son inf.

Élève 2

Exercice CCP.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On demandera à (v_n) d'être non nulle a.p.d.c.r.
   a) Prouver que si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe a.p.d.c.r.
   b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n+i)\sin(1/n)\ln n}{\sqrt{n+3}-1}$.

Exercice. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)^\alpha$.

Élève 3

Exercice CCP.

1. Démontrer la règle de d'Alembert pour le cas < 1.
2. Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice. On considère $u_n = (n^3 + 6n^2 - 5n - 2)/n!$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et décomposer $P = X^3 + 6X^2 - 5X - 2$ dans cette base.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Élève 4

Exercice CCP.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On demandera à (v_n) d'être non nulle a.p.d.c.r.
   a) Prouver que si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe a.p.d.c.r.
   b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n+i)\sin(1/n)\ln n}{\sqrt{n+3}-1}$.

Exercice. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)^\alpha$.

Élève 5

Exercice CCP. On considère $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Converge-t-elle absolument ?

Exercice. Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \to 0$ à mesure que $n \to \infty$.

Élève 6

Exercice CCP.

1. Démontrer la règle de d'Alembert pour le cas < 1.
2. Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente.