

## Élève 1\*

**Exercice.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  borné. Montrer que les valeurs propres des matrices de  $G$  sont toutes de module 1. Si de plus  $G$  est supposé inclus dans  $B(I_n, \sqrt{2})$  pour une certaine norme d'opérateur, montrer que  $G$  est trivial.

*Éléments de réponse.* Montrons que les valeurs propres des matrices de  $G$  sont toutes de module 1. En effet, si  $A$  est une matrice de  $G$ , alors la suite  $(A^p)_p$  est bornée. Trigonaliser  $A$  et choisir pour norme la norme infinie permet de montrer que si  $\lambda$  est valeur propre, alors la suite  $(\lambda^p)_p$  est encore bornée, ce qui montre que toutes les valeurs propres sont de module plus petit que 1. Ensuite, considérer  $A^{-1} \in G$  permet de montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda^{-1}$  est valeur propre de  $A^{-1}$ , ce qui montre que  $|\lambda^{-1}| \leq 1$ , donc toutes les valeurs propres de  $A$  sont de module plus grand que 1 (notons que comme  $A$  est inversible, vu  $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , toutes ses valeurs propres sont non nulles, donc il est licite de considérer leurs inverses).

À présent, on suppose de plus que  $G \subset B(I_n, \sqrt{2})$ , pour une certaine norme d'opérateur  $\|\cdot\|$  (norme subordonnée à une norme qu'on notera également  $\|\cdot\|$ ). Soit  $A \in G$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Alors

$$|1 - \lambda|\|x\| = \|(A - I_n)x\| \leq \|A - I_n\|\|x\| < \sqrt{2}\|x\|$$

Soit, comme  $x \neq 0$  et par séparation de la norme

$$|1 - \lambda| < \sqrt{2} \quad (1)$$

La première partie de l'exercice donne  $\lambda = e^{i\theta}$  avec un certain  $\theta \in [0, 2\pi[$ . La relation (1) montre

$$|\sin(\theta/2)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose  $\tau = \theta/2$  et on remarque que, comme ce qui vient d'être fait vaut pour toute valeur propre de toute matrice de  $G$  et que pour tout entier  $\geq 0$ ,  $\lambda^p$  est valeur propre de  $A^p$ , alors on obtient également que

$$|\sin(p\tau)| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Si  $\theta$  est incommensurable à  $\pi$ , alors  $\tau$  l'est aussi et on peut extraire de  $(\sin(p\tau))$  une suite qui tend vers 1, ce qui n'est pas possible vu (2). Assurément,  $\theta$  s'écrit comme un rationnel que multiplie  $\pi$ . En fait, un peu de trigonométrie nous permet de montrer que ce rationnel est forcément nul (on laisse ça en exercice au lecteur, ce n'est franchement pas très difficile). On montre ainsi que 1 est la seule valeur propre possible pour toutes les matrices de  $G$ .

Maintenant, place à l'étape finale. Soit  $A \in G$ , on sait que  $\chi_A = (X - 1)^n$  d'après ce qui précède, donc par Cayley Hamilton,  $N := A - I_n$  est nilpotente, on a donc la décomposition de Dunford de  $A$  :  $A = I_n + N$  (si vous ne savez pas ce que c'est Dunford, on en a pas vraiment besoin, ici tout ce qui nous intéresse c'est que  $N$  est nilpotente et que  $I_n$  et  $N$  commutent... bon, ce n'est rien de révolutionnaire). Pour conclure, on a juste besoin de montrer que  $N = 0$ , autrement dit que son indice de nilpotence est nul. Si ce n'est pas le cas, alors il sera possible de trigonaliser  $N$  par blocs en mettant en haut à gauche la matrice compagnon de  $X^m - 1$ , que l'on notera  $C$ , où  $m$  désignera l'indice de nilpotence non nul de  $N$  (donc  $C$  est une matrice de taille non nulle...). Alors, il suffit d'écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, (I_m + C)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} C^k$$

pour se rendre compte que la suite de matrices  $((I_m + C)^p)$  n'est pas bornée, ce qui montre également, en utilisant l'équivalence des normes et la continuité de la multiplication par une matrice, que  $(A^p)$  n'est pas bornée, ce qui contredit évidemment nos hypothèses de départ. C'est donc gagné,  $N = 0$  et  $A = I_n$ . Le groupe  $G$  est trivial.  $\square$

## Élève 2

**Exercice CCP.** On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de  $A$ .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $A$ .

**Exercice.** L'équation

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possède-t-elle des solutions dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?

*Éléments de réponse.* On montre que toutes les valeurs propres complexes d'une matrice solution sont nulles, donc si  $X$  est une matrice solution, elle est nilpotente, donc  $X^4 = 0$ , ce qui n'est pas. Il n'y a donc pas de solutions.  $\square$

## Élève 3

**Exercice CCP.** On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
2.  $A$  est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Déterminer  $\mu_A$ .
4. Calculer les puissances de  $A$ .

**Exercice.** Quelle est la trace d'une matrice nilpotente ? Donner un contre-exemple à la réciproque. Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 0$ , montrer que  $A$  est nilpotente.