Exercices de Khôlle en Mathématiques
MPI*

Rassemblés par Amar AHMANE

Mis à jour le : 30 mai 2023

Table des matières

x

※ Structures algébriques

1.1 Axiomes superflus ?

Exercice donné à Louis Marshal. Remarque : un élément x dans un magma E est dit régulier s'il vérifie

$$\forall y, z \in E, \ (xy = xz \implies y = z \quad \text{et} \quad yx = zx \implies y = z)$$

Soit E un magma fini. Montrer que si tout élément de E est régulier alors E est un groupe. Que dire si E est infini ?

Solution : Soit $x \in E$. E étant fini, on peut alors extraire de la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante (c.f. preuve compacité d'une partie finie), et donc il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > 2n$ et $x^m = x^n$. Il vient alors que x^{m-n} est idempotent ; en effet

$$(x^{m-n})^2 = x^{2m-2n} = x^m x^{m-2n} = x^n x^{m-2n} = x^{m-n}$$

On pose $e = x^{n-m}$. On montre que pour tout $a \in E$, $ea = ae = a$. En effet, soit $a \in E$, on a

$$(ae)(ea) = a(e^2)a = aea$$

Par régularité de a à gauche, on obtient $e(ea) = ea$, puis, par régularité de e à gauche, $ea = a$. On refait la même chose, par régularité de a à droite, $aee = ae$ puis, par régularité de e à droite, $ae = a$. E muni de sa l.c.i est donc un monoïde.
Soit à présent $a \in E$. Montrons que a est inversible. E étant fini, l'application $n \mapsto a^n$ ne peut être injective et donc il existe $n \neq m$ tels que $a^n = a^m$. On suppose par exemple $n > m$ et on écrit

$$a^{n-m}a^m = a^m = ea^m$$

et on utilise la régularité à droite de a^m pour obtenir $a^{n-m} = e$. On écrit ensuite

$$e = a^{n-m} = a(a^{n-m-1})$$

Comme $n - m - 1 \geq 0$, ce qu'on a écrit est licite, et a admet bien un inverse. □

※ Algèbre linéaire

2.1 Formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(MM') = \varphi(M'M)$

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(MM') = \varphi(M'M) \quad \text{et} \quad \varphi(I_n) = n$$

On pose $A = \{MM' - M'M,\ M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$.

1. *Montrer que $Vect(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid tr(M) = 0\}$.*
2. *En déduire que $\varphi = tr$.*

Solution :

1. $A \subset \text{Vect}(A)$, donc par définition, $\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!],\ E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} \in A$. Il s'ensuit que

$$\forall i, l \in [\![1, n]\!],\ i \neq l \Longrightarrow E_{il} \in \text{Vect}(A) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2, n]\!],\ E_{ii} - E_{11} \in \text{Vect}(A)$$

On pose $\mathcal{F} = (E_{ij})_{i\neq j} \cup (E_{ii} - E_{11})_{i\in[\![2,n]\!]}$. Cette famille est clairement libre, et contient $n^2 - 1$ vecteurs de $\text{Vect}(A)$, d'où $\dim \text{Vect}(A) \geq n^2 - 1$. Or $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker tr}$, et tr étant une forme linéaire non nulle, on a $\dim \text{Ker tr} = n^2 - 1$, donc $\dim \text{Vect}(A) \leq n^2 - 1$ donc $\dim \text{Vect}(A) = n^2 - 1 = \dim \text{Ker tr}$ puis $\text{Vect}(A) = \text{Ker tr}$.

2. De même que pour tr, on a $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker}\varphi$ donc $\text{Ker tr} \subset \text{Ker}\varphi$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$. Mais $\varphi(I_n) = n = \text{tr}(I_n)$ donc $n = \lambda n$ puis $\lambda = 1$.

□

2.2 Familles libres de matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(X_1, \ldots, X_p) \in \mathbb{R}^n$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(X_1{}^tX_1, \ldots, X_p{}^tX_p)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la réciproque.

Solution : Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $X_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$. On a alors,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ X_i{}^tX_i = (x_i^{(1)}X_i | \ldots | x_i^{(n)}X_i)$$

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i{}^tX_i = 0$. Or, $(X_1, \ldots, X_p)$ formant une famille libre, aucun des vecteurs la constituant n'est nul, d'où

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \exists l_i \in [\![1, p]\!],\ x_i^{(l_i)} \neq 0$$

Ainsi, pour $i \in [\![1, p]\!]$, en regardant que la $l_i$ème colonne dans la somme nulle écrite plus haut, on a

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j^{(l_i)} X_j = 0$$

$(X_1, \dots, X_p)$ étant libre, on a $\forall j \in [\![1,p]\!],\ \lambda_j x_j^{(l_i)} = 0$, en particulier $\lambda_i x_i^{(l_i)} = 0$ donc $\lambda_i = 0$ ($x_i^{l_i} \neq 0$). Finalement, ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i = 0$$

et $(X_1{}^t X_1, \dots, X_p{}^t X_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il faut bien sûr préciser que la taille des matrices $X_i{}^t X_i$ est de $n \times n$, mais cela est bien clair). □

2.3 Combinaison linéaire d'exponentielles

Soient $n \geq 0$, $x_0, \dots, x_n$ des réels tous non nuls vérifiant

$$\forall i,j \in \{0,\dots,n\}, \quad i \neq j \Longrightarrow (x_i - x_j)(x_i + x_j) \neq 0$$

On suppose qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes, $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{itx_k} \in \mathbb{R}$$

Montrer que $\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \lambda_k \in \mathbb{R}$

Solution : On pose $\varphi : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{itx_k}$. φ est une application C^∞ comme combinaison linéaire de telles fonctions. φ est de la variable réelle et est à valeurs dans $\mathbb{R}$ par hypothèse, il vient alors que ses dérivées successives sont à valeurs réelles. Puis

$$\forall p \geq 0,\ \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varphi^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (ix_k)^p e^{itx_k} \in \mathbb{R}$$

Pour les valeurs paires de $p \geq 0$, i^p est réel non nul et donc, en divisant par i^p, la combinaison linéaire reste dans $\mathbb{R}$, on peut alors écrire

$$\forall p \in \{0,\dots,n\}, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^{2p} e^{itx_k} \in \mathbb{R}$$

On évalue en 0 ci-dessus et on obtient

$$\forall p \in \{0,\dots,n\},\ \exists \alpha_p \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^{2p} = \alpha_p$$

Matriciellement, cela s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{2n} & x_1^{2n} & \dots & x_n^{2n} \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est inversible, on aura montré le résultat voulu, puisqu'il suffirait de multplier par son inverse, qui serait une matrice réelle car A est réelle.

Montrons alors que A est inversible en calculant son déterminant.
On note

$$D(x_0, \dots, x_n) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{2n} & x_1^{2n} & \dots & x_n^{2n} \end{vmatrix}$$

On considère le polynôme $P = D(x_0, \dots, x_{n-1}, X)$, où $D(x_0, \dots, x_{n-1}, X)$ correspond au déterminant de la matrice A où on a remplacé la dernière colonne par la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{2n} \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement, en développant par rapport à cette dernière colonne, que P est bien un polynôme en l'indéterminée X, de degré $2n$, et de coefficient dominant $D(x_0, \dots, x_{n-1})$.
On remarque alors que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad P(x_k) = P(-x_k) = 0$$

Comme les x_k sont tous non nuls, et que de plus si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$ et $x_i \neq -x_j$ par hypothèse, on trouve alors $2n$ racines à P, qui est de degré $2n$. On a alors

$$P = \mathrm{cd}(P) \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)(X + x_k)$$

On a alors $D(x_0, \dots, x_n) = P(x_n) = D(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k)(x_n + x_k)$.
À l'aide d'une récurrence simple (laissée en exercice au lecteur) et en utilisant l'hypothèse sur les x_k, il vient que $\det(A) = D(x_0, \dots, x_k) \neq 0$, et donc A est inversible, d'où le résultat. □

※ Espaces Vectoriels Normés

3.1 CNS pour qu'un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ soit fermé

Exercice donné par Duhalde à Amar en semaine 3.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $G_z = \{e^{itz},\ t \in \mathbb{Z}\}$ soit un sous-groupe fermé de $\mathbb{C}^*$.

Solution : On procède par analyse synthèse.

Analyse : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que G_z est un sous-groupe fermé de $\mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{Z}$, on a $e^{tz} = e^{-bt}e^{ait}$. Montrons par l'absurde que $b = 0$. Supposons $b \neq 0$, traîtons les deux cas possibles :

— Si b > 0, on prend $(t_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \longrightarrow +\infty$. Dans ce cas, $(e^{it_n z})$ est une suite d'éléments de G_z. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|e^{it_n z}| = |e^{-bt_n}e^{iat_n}| = e^{-bt_n} \longrightarrow 0$$
Donc $e^{it_n z} \longrightarrow 0$ et, G_z étant fermé, $0 \in G_z$, ce qui est exclut.

— Si b < 0, on refait le même raisonnement en prenant $(t_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $-\infty$, et on a $0 \in G_z$, ce qui est exclut.

Donc le seul cas possible est $b = 0$.
Ainsi, $z \in \mathbb{R}$. Pour avoir plus d'intuition sur ce que peuvent être les solutions au problème, on peut regarder le cas où G_z est fini. Si G_z est fini (on écarte le cas $z = 0$ qui est trivial), c'est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, donc, si on note n son cardinal, on a $G_z = \mathbb{U}_n$.
Soit alors $x \in G_z \setminus$ tel qu'il existe $t \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x = e^{itz} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On a alors

$$\begin{aligned} e^{i\left(tz - \frac{2k\pi}{n}\right)} = 0 &\Longrightarrow tz - \frac{2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \\ &\Longrightarrow \exists l \in \mathbb{Z},\ z = \frac{2}{t}\left(l + \frac{2k}{n}\right)\pi \\ &\Longrightarrow z \in \pi\mathbb{Q} \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $z \in \pi\mathbb{Q}$ suffit pour que G_z soit fini.
Synthèse : Soit $z \in \mathbb{R}$. Si $z \in \pi\mathbb{Q}$, G_z est fini, donc c'est un compact de $\mathbb{C}$ comme partie finie de $\mathbb{C}$, donc est un fermé de $\mathbb{C}$. C'est aussi un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, donc z convient.
Sinon, $z \notin \pi\mathbb{Q}$. Montrons que dans ce cas G_z n'est pas un femré de $\mathbb{C}$. En effet, si G_z est fermé, on peut montrer que $G_z = \mathbb{U}$. D'abord, $z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$, puisque sinon, on aurait, pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, $z\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$, donc $z \in z\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ et $2\pi \in z\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ donc il existe $k, l \in \mathbb{Z}^*$ (z et 2π sont non nuls) tels que $z = k\alpha$ et $2\pi = l\alpha$, d'où $z = \frac{2k\pi}{l} \in \pi\mathbb{Q}$ ce qui est exclut. La fonction $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix}$ étant continue, on a que $\phi(z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) = G_z$ est dense dans $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$. En passant à l'adhérence, on a $G_z = \mathbb{U}$, ce qui est exclut, parce que, par exemple, $-1 \notin G_z$. □

3.2 Parties de $GL_n(\mathbb{R})$ compactes, non vides et stables par produit

Exercice donné par Duhalde à Yanis en semaine 3.

Soit X une partie de $GL_n(\mathbb{R})$ non vide, compacte et stable par produit. Montrer que X est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Solution : Soit $A \in X$. On considère la suite d'éléments $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est une suite à élements dans X, puisque $A \in X$ et X est stable par produit. De plus, X étant compacte, (A^n) admet une suite extraite convergente ; il existe alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $B \in X$ telles que

$$A^{\varphi(n)} \longrightarrow B$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$A^{-p}A^{\varphi(n)} \longrightarrow A^{-p}A^{\varphi(n)}$$

Or, à partir d'un certain rang, on a $A^{-p}A^{\varphi(n)} \in X$ (il suffit d'avoir $\varphi(n) > p$), on a donc une suite d'éléments de X qui converge vers $A^{-p}B$, matrice qui est alors dans X puisque X est fermé. Ensuite, sachant l'expression suivante pour l'inverse d'une matrice :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{Com}(A)$$

on en déduit que le passage à l'inverse est continu, d'où que

$$A^{-\varphi(n)} \longrightarrow B^{-1}$$

Donc $A^{-\varphi(n)}B \longrightarrow B^{-1}B = I_n$ puis $A^{-1}A^{-\varphi(n)}B \longrightarrow A^{-1}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{-1}A^{-\varphi(n)}B = A^{-\varphi(n)-1}B \in X$, donc $A^{-1} \in X$ puisque X est fermé. Ainsi X est stable par produit et par passage à l'inverse, c'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. □

3.3 Une norme de $C^2([0,1],\mathbb{R})$

Exercice donné par Duhalde à PG en semaine 3.

On considère le $\mathbb{R}$ev $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$ munit de la norme infinie. On pose $N : f \in E \mapsto ||f + 2f' + f''||_\infty \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que N est une norme.*
2. *On pose $g = f + 2f' + f''$ pour $f \in \mathbb{E}$. Exprimer f en fonction de g.*
3. *N et $||\cdot||_\infty$ sont-elles équivalentes ?*

Solution : [À rédiger] □

3.4 L'ensemble des polynômes unitaires scindés est un fermé

Exercice donné à Shems en semaine 3.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par $\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right\| = max\{a_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1. *Montrer que $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ est fermé.*
2. *Soit $Q \in \mathcal{U}$ non constant, on note $p = degQ$. Montrer que*

$$Q \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff \forall z \in \mathbb{C},\ |Q(z)| \geq |Im(z)|^p$$

3. *Montrer que $\mathcal{S}$, l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.*

Solution : [À rédiger] □

3.5 Somme d'une partie fermée et d'une partie compacte

Soient E un espace vectoriel normé, F une partie fermée de E et K une partie compacte de E. Montrer que $F+K$ est une partie fermée de E.

Solution : Il suffit de l'écrire. Soit (x_n) une suite d'éléments de $F+K$ qui converge vers $x \in E$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = y_n + z_n, \quad y_n \in F, z_n \in K$$

(z_n) est une suite d'éléments de K compact, donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $z \in K$ tels que $z_{\varphi(n)} \longrightarrow z$. Or, on a également

$$x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - z_{\varphi(n)} \longrightarrow x - z$. F étant fermé, il vient que $x - z \in F$, d'où $x \in F + K$. □

3.6 Topologie du groupe orthogonal

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappele que le groupe orthogonal est défini par

$$O_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$$

Cet ensemble est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Est-il connexe par arcs ?

Solution : Il s'agit bien d'une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, on considère l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM$. Cette application est continue car la transposition est continue (linéaire et dimension de l'espace de départ est finie) et la multiplication également (peut être justifié de la même manière...), puis $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, et $\{I_n\}$ est compact donc fermé, donc le groupe orthogonal est image réciproque d'un fermé par une fonction continue, et est donc fermé.
Pour la connexité par arcs, se référer au cours sur les espaces euclidiens. □

※ Suites et Séries de fonctions

4.1 Un exercice classique

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers x.
Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution : f étant limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est continue. Il vient alors que

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \tag{1}$$

Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Or, puisqu'il y a convergence uniforme, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq ||f_n - f||_\infty^{\mathbb{R}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puis (1) donne que $|f(x_n) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par encardement, on a $|f_n(x_n) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit

$$\boxed{f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

□

4.2 Une question ouverte

Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\exp$?

Solution : Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers exp sur $\mathbb{R}$, soit

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |p_n(x) - \exp(x)| \leq \epsilon$$

Ainsi, si on "applique" cette phrase pour $\epsilon = 333$, on a l'existence de $n_0 \geq 0$ tel que, pour $n \geq n_0$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on ait $|p_n(x) - \exp(x)| \leq 333$. Mézalor

$$|p_n(x) - p_{n_0}(x)| \leq |p_n(x) - \exp(x)| + |p_{n_0}(x) - \exp(x)| \leq 666$$

Ceci valant pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que, pour tout $n \geq n_0$, le polynôme $p_n - p_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$, donc constant, d'où l'existence d'une suite de réels (α_n) telle que

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ p_n(x) - p_{n_0}(x) = \alpha_n$$

La suite $(p_n(69))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant, puisque CU implique CS, on a que la suite (α_n) converge également, il suiffit d'évaluer la précédente expression en 69 ; on note α sa limite. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \geq n_0,\ p_n(x) - p_{n_0}(x) = \alpha_n$$

On passe a la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\exp(x) = p_{n_0}(x) + \alpha$$

autrement dit, exp est un polynôme, ce qui est exclut. □

4.3 Un exemple simple

On considère la fonction définie par

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}$$

Déterminer le domaine D de définition de f et étudier la continuité de f sur D.

Solution : [À rédiger] □

※ Séries entières

Exercice donné à Amar par Duhalde en semaine ?

5.1 Calcul d'équivalent (1)

On considère la fonction $f : x \in]-1,1[\mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(x\sin t)^2}}$.

1. f *est-elle bien définie ?*
2. f *est-elle dse*$_0$ *?*
3. *Donner un équivalent de* f *en* 1.

Solution :

1. Oui. Pour $x \in]-1,1[$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a
$$1-(x\sin t)^2 \geq 1 - x^2 > 0$$
d'où que $t \mapsto \sqrt{1-(x\sin t)^2}$ est continue et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-(x\sin t)^2}}$ est bine définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'intégrale est bien définie. Ceci valant pour tout $x \in]-1,1[$, f est bien définie.
2. Soit $x \in]-1,1[$
Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x\sin t| < 1$, donc, dse$_0$ usuel :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-(x\sin t)^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-i\right)\right)(-1)^n(x\sin t)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)\right)(-1)^n(x\sin t)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x\sin t)^{2n}\end{aligned}$$
Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x\sin t)^{2n}$.
La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, si $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors
$$\begin{aligned} & |f_n(t)| \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^{2n} \\ \Longrightarrow \quad & ||f_n||_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]} \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^{2n} \quad \longleftarrow \text{terme général d'une série CA}\end{aligned}$$
La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il vient alors que
$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Mézalor

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} W_{2n}\binom{2n}{n} x^{2n}
\end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $x \in]-1,1[$, on a que f est égale à la somme d'une série entière sur un domaine non trivial, d'où que f est dse$_0$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{W_{2n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.
Il vient alors que $a_n \sim \frac{1}{2n}$, et on pose $(b_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$.

Lemme : Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_n \sim b_n$ et que $b_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout entier n. Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont alors même rayon de convergence que l'on note R. Supposons que $R = 1$ et que $\sum b_n$ diverge. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \underset{1^-}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Comme $a_n \sim b_n$, on sait l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\epsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\epsilon)b_n$$

Soit $x \in]-1,1[$, on sait la convergence abosulue des séries entières sur $]-1,1[$, d'où, en sommant de n_0 jusqu'à n pour un $n \geq n_0$ donné et en faisant tendre n vers $+\infty$, on a

$$-\epsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \epsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k$$

Il vient alors que

$$\left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k\right| \leq \epsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

Puis

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right| &= \left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k x^k\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k\right| + \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k x^k\right|}_{:=\alpha} \\
&\leq \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k + \alpha
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\lim_{x \to 1^{-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = +\infty$$

On laisse au lecteur les soins de justifier cela.

Ainsi, il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que si $x \in [x_0, 1[$, on ait $\alpha \leq \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, puis

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k} \right| \leq 2\epsilon$$

D'où le résultat voulu. Ensuite, il est clair que, dans notre cas, $\sum b_n$ diverge, d'où que

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{1^{-1}}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^n = \frac{-1}{2} \ln(1-x)}$$

□

Exercice donné à PG par Duhalde en semaine ?

5.2 Calcul d'équivalent (2)

Trouver un équivalent lorsque x tend vers 1 de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

Solution : On considère la fonction $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
Le rayon de convergence de la série ainsi définie est de 1, puisque l'on a

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, et on conclut avec le critère de D'Alambert.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. On a

$$\begin{aligned} xg(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1) x^{n+1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= f(x) - xf(x) + x\ln(1-x) \end{aligned}$$

Comme $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, on en déduit que g est définie en 1 et y est donc continue. Il vient alors que

$$xg(x) \underset{1^-}{=} o(\ln(1-x))$$

□

Exercice donné à Yanis par Duhalde en semaine ?

5.3 Produit de Cauchy

On définit la suite de réels $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}u_k$$

Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ est non nul. Et on pose pour, $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$, alors

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n$$

D'après le théorème de convergence pour les séries entières, la série $\sum u_{n+1}x^n$ converge abosulement et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}u_k\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n$$

il s'agit du produit de Cauchy de deux séries AC. Il vient alors que

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) - 1 = x(f(x))^2$$

D'où, pour $|x| < \frac{1}{4}$ non nul, $f(x) \in \left\{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\right\}$, soit

$$\exists s : \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\to \{-1, 1\},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ |x| < \frac{1}{4} \implies f(x) = \frac{1 + s(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Ainsi, pour $|x| < \frac{1}{4}$ non nul,

$$s(x) = \frac{2xf(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

Il vient que s est continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ (à finir) □

5.4 Développement en série entière de la fonction tangente

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^\infty([0, a[, \mathbb{R})$ telle $f^{(n)} \geq 0$ pour tout entier naturel n.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tel que $x < y < a$. Montrer que*
$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$
où $R_n(z)$ est le reste intégral de la formule de Taylor en 0 à l'ordre n appliquée en z.
2. *En déduire que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$*
3. *En utilisation la question 2), démontrer que la fonction tangente est développable en série entière à l'origine et préciser l'intervalle de validité de ce développement.*

Solution : [À rédiger] □

5.5 Majoration des dériviées intermédiaires

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que f et $f^(n)$ soient bornées et $M_0 = ||f||_\infty$ et $M_n = ||f^{(n)}||_\infty$; le but de l'exercice est de majorer les dérivées intermédiaires $f^{(k)}$ où $1 \leq k < n$.

1. *Démontrer que*
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} \right| \leq 2M_0 + \frac{h^n}{n!} M_n$$
2. *On pose $X = [f^{(k)}(x)]_{1 \leq k < n}$. Démontrer que*
$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ ||X||_\infty \leq M$$
et en déduire le résultat annoncé.
3. *Pour $n = 2$, démontrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.*
4. *Pour $n \geq 3$ et $1 \leq k < n$, démontrer que $M_k \leq \sqrt{2}^{k(n-k)} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.*

Solution : [À rédiger] □

※ Réduction d'endomorphismes

Exercice donné à Amar par Rouanet en semaine ?

6.1 CNS valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *A et B possèdent une valeur propre commune*
2. *Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$*
3. *$\Pi_A(B) \notin GL_n(\mathbb{C})$*

Solution : On montre les équivalences en montrant une chaîne d'implications.

1) $\Longrightarrow$ 2) Supposons que A et B possèdent une valeur commune. Notons λ cette valeur propre. D'abrod, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne non nulle telle que

$$AX = \lambda X$$

Mais λ étant valeur propre de B, elle est encore valeur propre de ${}^tB$, d'où l'existence de $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne non nulle telle que

$${}^tBY = \lambda Y$$

On pose $M = X{}^tY$. On vérifie facilement que $AM = MB$, puis M est non nulle puisque de rang 1.

Cette implication était la plus difficile à montrer, retenir l'idée.

2) $\Longrightarrow$ 3) Déjà, on a

$$A^2M = A(AM) = (AM)B = MB^2$$

puis, on vérifie facilement par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^kM = MB^k$$

D'où, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'égalité

$$P(A)M = MP(B)$$

En particulier, on

$$M\Pi_A(B) = \Pi_A(A)M = 0$$

Ainsi, M étant non nulle, $\Pi_A(B)$ est soit nulle, soit un diviseur de 0, donc est non inversible.

3) $\Longrightarrow$ 1) Par contraposée. Supposons que A et B n'ont pas de valeurs propres communes. Notons $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de A. On écrit

$$\Pi_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i n'est pas valeur propre de B et donc $B - \lambda_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\Pi_A(B)$ est produit de matrices inversibles et est donc inversible.

□

6.2 P(A) diagonalisable et P'(A) inversible $\Longrightarrow$ A diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonisable.

Solution : On note $B = P(T)$ et Π_B le polynôme minimal de B. Il vient que $\Pi_B \circ P$ annule A et donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Pi_B \circ P = Q\Pi_A$. Dérivons cette égalité :

$$(\Pi'_B \circ P)P' = Q\Pi'_A + Q'\Pi_A \tag{*}$$

On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de A. Trigonalisons A (on est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut le faire) : il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = UTU^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

En remarquant que $P(T)$ et $P(A)$ ont même polynôme caractéristique (en effet, $P(A) = UP(T)U^{-1}$), on arrive à en conclure que les valeurs propres de $P(A)$ sont les $P(\lambda_i)$ avec $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Ayant la relation (*) et le fait que λ est racine de Π_A, on en déduit

$$\Pi'_B(P(\lambda))P'(\lambda) = Q(\lambda)\Pi'_A(\lambda)$$

Or B est diagonalisable, donc $\Pi'_B(P(\lambda)) \neq 0$ (Π_B SRS), mais $P'(A) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $P' \wedge \Pi_A = 1$ et donc $P'(\lambda) \neq 0$, il vient alors que

$$Q(\lambda)\Pi'_A(\lambda) \neq 0 \Longrightarrow \Pi'_A(\lambda) \neq 0$$

Donc λ est racine simple de Π_A. Ceci valant pour toute valeur propre λ de A, et donc en fait pour toute racine λ de Π_A, on en conclut que Π_A est SRS, et donc A est diagonalisable. □

6.3 Diagonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$

Soit p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer que

$$A \quad \textit{diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad A^p = A$$

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A diagonalisable. Il vient alors l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}_p)$ tels que

$$A = PDP^{-1}$$

Mais alors $A^p - A = PD^pP^{-1} - PDP^{-1}$. Or, en notant

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

On a

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q^p \end{pmatrix}$$

Mais si $\lambda \in \mathbb{F}_p$, $\lambda^p = \lambda$ (Lagrange dans un groupe quelconque ou Fermat) et donc $D^p = D$ d'où $A^p = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A^p = A$. Il vient alors que $P = X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ est un polynôme anulateur de A. Puis $P = X(X^{p-1} - 1)$, et, en notant $Q = X^{p-1} - 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{F}_p^*, \quad Q(x) = 0$$

On trouve $p-1$ racines à un polynôme de degré $p-1$, d'où, sachant que $\mathrm{cd}Q = 1$, on a

$$Q = \prod_{x \in \mathbb{F}_p^*} (X - x)$$

Finalement P est SRS et A est diagonalisable.

□

6.4 Matrice semblable à son double

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M \underset{sb}{\sim} 2M$. Montrer que M est nilpotente.

Solution : On trigonalise M. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PTP^{-1}$. Puis, comme M est semblable à $2M$, elle-même semblable à $2T$ (il suffit de multiplier par 2 plus haut), T est semblable à $2T$. Donc T et $2T$ ont même polynôme caractéristique. On note $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ le spectre de T, χ_T le polynôme caractéristique de T. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$, alors $\chi_T(2\lambda) = \chi_{2T}(2\lambda) = 0$, donc $2\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(T), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ 2^n \lambda \in \mathrm{Sp}(T)$$

Ceci est exclu lorsqu'il existe une valeur propre non nulle de T. Ainsi, toutes les valeurs propres sont nulles, T est de diagonale nulle (et triangulaire) et est donc nilpotente, puis M lui étant semblable, elle est également nilpotente. □

6.5 Exercice sans nom

Soit E un K espace vectoriel, $f \in L(E)$ et $G : g \in L(E) \mapsto f \circ g$. Vérifier que $G \in L(L(E))$ et comparer (sous réserve d'existence) Π_f et Π_G.

Solution : On laisse au lecteur les oins de vérifier que G est bien un endomorphisme. Supposons que Π_f et Π_G existent (à continuer). □

6.6 Coefficients du polynôme caractéristique

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle mineur principal d'ordre $k \in \{1, \dots, n\}$ le déterminant d'un $M_I = (m_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ avec $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\mathrm{Card}(I) = k$. Donner une expression des coefficients de Ξ_M en fonction des mineurs principaux.

Solution : [À rédiger] □

6.7 Limite d'une suite de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire sur la valeur de la limite en cas de convergence ?

Solution : [À rédiger] □

6.8 CNS de diagonalisabilité

De la période de préparation aux oraux

Soient $a_1, \dots, a_{2n} \in \mathbb{C}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$. Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, 2n\}, \quad u(e_i) = a_{2n-i+1} e_{2n-i+1}$$

Donner une condition nécessaire et suiffisante pour que u soit diagonalisable.

Solution : [À rédiger] □

※ Intégrales généralisées, Intégrales à paramètres

7.1 Une Intégrale de Frullani

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)-\arctan(t)}{t} dt$

1. *Déterminer $\mathcal{D}_f$ domaine de définition de f.*
2. *Déterminer le domaine de classe C^1 de f.*
3. *En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.*
4. *Retrouver le résultat de la question 3) sans utiliser le théor !me de dérivation des intégrales à paramètre*

Solution : [À rédiger] □

7.2 Calcul d'équivalent (1)

$I(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

1. *Domaine de définition de I ?*
2. *Calculer $I(x) + I(x+1)$.*
3. *Équivalent de $I(x)$ en $+\infty$?*

Solution : [À rédiger] □

7.3 Calcul d'équivalent (2)

$F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{1+t} dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $F(x) \sim_0 \frac{\pi}{2x}$.

Solution : [À rédiger] □

7.4 Une intégrale à paramètre

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{e^t-1} dt$

1. *Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puis C^1 sur $\mathbb{R}$*
2. *Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$. Retrouver F'.*
3. *Montrer que F est $\mathbb{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.*

Solution : [À rédiger] □

※ Équations différentielles

8.1 Une équation différentielle

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $M : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) \in \mathcal{M}_n(R)$ dérivable vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = SM(t)S \quad \text{et} \quad M(0) = I_n$$

Déterminer $M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution : [À rédiger] □

※ Espaces euclidiens

9.1 Matrices M telles que $M + I_n$ est inversible

On pose $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin Sp(M)\}$.

1. *Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E} = \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}$;*
2. *Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques), alors $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$;*
3. *Montrer que $\varphi : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ définit une involution de $\mathcal{E}$;*
4. *Montrer que φ induit une bijection $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}$.*

Solution : [À rédiger] □

9.2 Angeline

Soit $n \geq 2$.

1. *Montrer que*
$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}} \tag{*}$$
2. *On suppose que (*) est une égalité. Que peut-on dire sur les coefficients de M ? Et de la parité de n ?*
3. *Déterminer une matrice, notée dans la suite M_2, élément de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant le cas d'égalité de (*) pour $n = 2$.*
4. *Démontrer qu'une condition suffisante pour qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que (*) soit une égalité est que n soit une puissance de 2.*
5. *Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que (*) soit une égalité est que $n = 2$ ou 4 divise n.*

Solution : [À rédiger] □

9.3 Un TLM pour les matrices

Soit $n \geq 2$. On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$A \leq B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Montrer que $\leq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'on peut avoir un TLM avec cet ordre.

Solution : On commence par montrer que $\leq$ définit bien une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Reflexivité Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que $A - A = 0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc on a bien $A \leq A$.

Antisymétrie Soientt $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A \leq B$ et $B \leq A$. On a alors $B - A \in$

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(B-A)X \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX(A-B)X \geq 0$$

Mais pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tX(B-A)X \geq 0 \Longrightarrow {}^tX(A-B)X \leq 0$. On utilise l'antisymétrie de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ pour avoir

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(A-B)X = 0$$

$A - B$ est alors la matrice d'une forme quadratique nulle, elle est donc nulle, soit $A = B$.

Transitivité Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A \leq B$ et $B \leq C$. On montre que $A \leq C$. Les deux hypothèse donnent $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $C - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, d'où

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(B-A)X \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX(C-B)X \geq 0$$

On somme les deux ingélités pour tout X et on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(C-A)X \geq 0$$

Donc $C - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ soit $A \leq C$.

On montre à présent un TLM sur les matrices avec cet ordre. Soit (A_n) une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \leq M$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \leq A_{n+1}$$

en gros, une suite croissante et majorée (on aurait pu aussi choisir une suite décroissante et minorée, la preuve que l'on va proposer ici s'adapte à ce cas). La première hypothèse donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M - A_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \tag{*}$$

La deuxième hypothèse donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} - A_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \tag{**}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec (*) et (**), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {}^tX(M - A_n)X \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX(A_{n+1} - A_n)X \geq 0$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {}^tXMX \geq {}^tXA_nX \quad \text{et} \quad {}^tXA_{n+1}X \geq {}^tXA_nX$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n^{(X)} = {}^tXA_nX$. Il vient alors que la suite $u^{(X)}$ converge puisque croissante d'après (*) et majorée par ${}^tXMX$ d'après (**). Or, si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on vérifie facilement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4}{}^t(E_i + E_j)A_n(E_i + E_j) - \frac{1}{4}{}^t(E_i - E_j)A_n(E_i - E_j) = [A_n]_{i,j}$$

où $(E_1, \dots, E_n)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En effet, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $q : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^tXSX$ est une forme quadratique de forme polaire $\varphi : (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto {}^tXSY$ et de matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ égale à S, d'où

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{4}(q(X+Y) - q(X-Y)) = \varphi(X, Y)$$

En particulier,

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{1}{4}(q(E_i + E_j) - q(E_i - E_j)) = \varphi(E_i, E_j) = [S]_{i,j}$$

On en déduit donc que le suites $([A_n]_{i,j})$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ convergent, donc que la suite (A_n) converge. □

9.4 Convexité (1)

De la période de préparation aux oraux

Montrer que l'application $\varphi : S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr(\exp(S))$ est convexe.

Solution : Soit $\lambda \in [0, 1]$, $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Posons $A_\lambda = \lambda S + (1 - \lambda)T$. A_λ est encore dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et on considère une b.o.n $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de diagonalisation de A_λ (théorème spectral). On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\exp(A_\lambda)) &= \sum_{i=1}^{n} e^{\langle A_\lambda e_i, e_i \rangle} \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda\langle Se_i, e_i \rangle + (1-\lambda)\langle Te_i, e_i \rangle} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda e^{\langle Se_i, e_i \rangle} + (1 - \lambda) e^{\langle Te_i, e_i \rangle} \right) \\
&\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} e^{\langle Se_i, e_i \rangle} + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n} e^{\langle Te_i, e_i \rangle}
\end{aligned}$$

Notons $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base d'orthonoramlisation de S (théorème spectral). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Se_i, e_i \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle S\varepsilon_j, \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \langle S\varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle
\end{aligned}$$

Comme pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 = 1$, la convexité de la fonction exponentielle donne

$$e^{\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \langle S\varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle} \leq \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 e^{\langle S\varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} e^{\langle Se_i, e_i \rangle} &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 e^{\langle S\varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \right)}_{=1} e^{\langle S\varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle}
\end{aligned}$$

$$\leq \mathrm{tr}(\exp(S))$$

Ceci vaut aussi pour la matrice T, donc $\mathrm{tr}(\exp(A_\lambda)) \leq \lambda \mathrm{tr}(\exp(S)) + (1-\lambda)\mathrm{tr}(\exp(T))$ ce qui conclut. □

9.5 Convexité (2)

De la période de préparation aux oraux

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On pose $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que J est strictement convexe.*
2. *Montrer que J est coercive.*
3. *En déduire que J admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$.*

Solution :

1. J est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ en tant que somme de telles fonctions et
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad dJ_x(h) = \langle Ax - b, h\rangle$$
soit $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla J(x) = Ax - b$. Pour $y, x \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\langle \nabla J(y) - \nabla J(x), y - x\rangle = \langle A(y-x), y-x\rangle$$
Or, on remarque que $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est un produit scalaire du fait que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée et $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire usuel. On a, par équivalence des normes en dimension finie, on a en particulier $\|\cdot\| \geq a\|\cdot\|_2$ avec $a > 0$ avec $\alpha = a^2$. Puis $\langle A(y-x), y-x\rangle = \|y-x\|^2 \geq \alpha\|y-x\|_2^2$. On a montré par caractérisation (voir la question I.b.3 de l'épreuve de Mathématiques C de la session 2020 des concours ENS) que la fonction J est α-convexe, donc strictement convexe.
2. J est α-convexe (constante de la première question), donc
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|_2^2$$
En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) \geq J(0) - \langle \nabla J(0), x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$. Comme $|\langle \nabla J(0), x\rangle| \leq \|x\|_2\|J(0)\|_2$, donc $\langle \nabla J(0), x\rangle = o(\|x\|_2^2)$, soit par comparaison, $J(x) \xrightarrow[\|x\|_2 \to +\infty]{} +\infty$.
3. Soit $M \in J(B(0,1))$. Comme J est coercive, il existe $R > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 \geq R \Longrightarrow J(x) \geq M$$
et on peut choisir $R \geq 1$. $B(0,R)$ est compacte, donc comme J est différentiable donc continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc J atteint son minimum sur $B(0,R)$, en un point que l'on note y. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, si $x \in B(0,R)$, $J(x) \geq J(y)$, sinon $J(x) \geq M \geq J(y)$ car $B(0,1) \subset B(0,R)$. Si y_1 et y_2 sont deux minimums globaux, alors
$$0 = \langle \nabla J(y_2) - \nabla J(y_1), y_2 - y_1\rangle \geq \alpha\|y_2 - y_1\|_2^2$$
et comme $\alpha > 0$ $\|y_2 - y_1\|_2^2 = 0$ donc $y_2 - y_1 = 0$.

□

9.6 Croissance de la trace de l'exponentielle

De la période de préparation aux oraux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = U$ puis que $tr(UV) \geq 0$.*
2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montre que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto tr(P(f(t)))$ est dérivable et calculer φ'.*
3. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$tr(\exp(A)) \leq tr(\exp(B))$$

Solution :

1. La première partie de la question est un classique du cours qui sera admis ici.
   On peut écrire $U = R^2$ et $V = T^2$ où R et T sont des matrices symétriques positives. Puis

$$\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(R^2T^2) = \operatorname{tr}(TRRT) = \operatorname{tr}({}^t(RT)RT) \geq 0$$

2. On peut d'abord poser $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto P(f(t))$ et on choisit de confondre P et la fonction $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P(M)$. P est différentiable en tant que combinaison linéaire de telles fonctions, ainsi ψ est dérivable comme composée d'une fonction différentiable et d'une fonction dérivable, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = d(P \circ f)_t(1) = dP_{f(t)}(f'(t))$$

□

※ Dénombrement, probabilités

10.1 Cardinal maximal d'une partie fade

De la période de préparation aux oraux

> *Une partie A de $\mathbb{N}$ est dite fade si et seulement si pour tout $(x, y) \in A^2$, $x + y \notin A$.*
> *Calculer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Solution : On traîte le cas où $n = 2p$ avec $p \geq 2$. On va montrer que toute partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal plus grand que $p+1$ n'est pas fade, et donner un exemple d'une partie fade de cardinal p, ce qui nous permettera de conclure que le cardinal maximal d'une partie fade dans ce cas est p.
On procède par récurrence sur p pour montrer le premier point. Pour $p \geq 1$, notons $\mathcal{P}_p$: « Toute partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal plus grand que $p+1$ n'est pas fade. »

- Pour $p = 1$, l'unique partie de $\{1, 2\}$ de cardinal plus grand que $p+1$ est $\{1, 2\}$, qui est trivialement pas fade.
- Supposons la propriété vraie jusqu'au rang p, et montrons-la au rang $p+1$.
  Soit $A = \{a_1 < \cdots < a_m\}$ une partie de $\{1, \dots, 2(p+1)\}$ telle que $m = \mathrm{Card} A \geq p+2$. Commençons par remarquer que A contient deux entier consécutifs. En effet, si ce n'est pas le cas, il vient
  $$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, \quad a_{i+1} - a_i \geq 2$$
  soit, en sommant, $a_m - a_1 \geq 2(m-1) \geq 2(p+1)$. Or $[\![a_1, a_m]\!] \subset [\![1, 2(p+1)]\!]$ et $\mathrm{Card}[\![a_1, a_m]\!] = a_m - a_1 + 1 \geq 2(p+1) + 1 > \mathrm{Card}[\![1, 2(p+1)]\!]$ ce qui n'est pas. Ainsi, si $a_1 = 1$, A n'est pas fade en vertu de cette remarque.

  Supposons à présent que $a_1 = 2$. Montrons que A contient deux entiers distants de 2. Introduisons le graphe non orienté $G = (V, E)$ où on aura posé $V = A$ et
  $$E = \{\{a, b\},\ a, b \in V,\ |a - b| = 1\}$$
  Pour chaque composante connexe C du graphe G, on notera $d(C) \overset{def}{=} \max_{a,b \in C} |a - b| + 1$. Procédons par l'absurde et supposons que A ne contient pas deux entiers distants de 2. Dans ce cas, pour toute composante connexe C de G, $d(C) \leq 2$. On peut lister les composantes connexes $C_1, \dots, C_r$ de G de sorte que $i < j \iff \max C_i < \min C_j$. L'hypothèse que l'on vient de faire nous donne en réalité un meilleur renseignement :
  $$\forall i \leq r-1, \quad \min C_{i+1} - \max C_i \geq 3$$
  et on peut alors remarquer facilement que
  $$\begin{aligned} 2p - 1 \geq \mathrm{Card}[\![a_1, a_m]\!] &= \sum_{i=1}^{r-1} (\mathrm{Card} C_i + \min C_{i+1} - \max C_i - 1) + \mathrm{Card} C_r \\ &\geq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Card} C_i + 2(r-1) \end{aligned}$$

$$\geq \mathrm{Card}A + 2(r-1)$$

Or, comme $\mathrm{Card}C_i \leq 2$ pour tout i, alors

$$m = \mathrm{Card}A = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Card}C_i \leq 2r$$

d'où finalement $2p-1 \geq m + 2\left(\frac{m}{2}-1\right) \geq 2m-2 \geq 2(p+1)$ ce qui n'est pas.
En conclusion, A contient deux entiers distants de 2 et donc A n'est pas fade car $a_1 = 2$.

En dernier lieu, supposons que $a_1 > 2$. Considérons alors $A' = \{a-2, a \in A\}$. A' est une partie de $\{1, \ldots, 2p\}$, en vertu du fait que $a_1 > 2$ et A' contient $m \geq p+2 \geq p+1$ entiers. Par hypothèse de récurrence, A' n'est pas fade, et donc A non plus.

$\square$