Exercices de khôlles de Mathématiques

Regroupés par Amar Ahmane

MPI*, 2022/2023

J'ai, tout au long de mon année en MPI*, noté la majorité des exercices de khôlle et de préparation aux oraux qui 'ont été posés, ainsi que quelques uns qui ont été posés à mes camarades.

Table des matières

1 Structures algébriques

1.1 Axiomes superflus ?

Énoncé. *Soit E un magma fini associatif. Montrer que si tout élément de E est régulier alors E est un groupe. Que dire si E est infini ?*

Éléments de réponse. Soit $x \in E$. E étant fini, on peut alors extraire de la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite constante (c.f. preuve compacité d'une partie finie), et donc il existe $m, n \in \mathbf{N}$ tels que $m > 2n$ et $x^m = x^n$. Il vient alors que x^{m-n} est idempotent ; en effet

$$(x^{m-n})^2 = x^{2m-2n} = x^m x^{m-2n} = x^n x^{m-2n} = x^{m-n}$$

On pose $e = x^{n-m}$. On montre que pour tout $a \in E$, $ea = ae = a$. En effet, soit $a \in E$, on a

$$(ae)(ea) = a(e^2)a = aea$$

Par régularité de a à gauche, on obtient $e(ea) = ea$, puis, par régularité de e à gauche, $ea = a$. On refait la même chose, par régularité de a à droite, $aee = ae$ puis, par régularité de e à droite, $ae = a$. E muni de sa l.c.i est donc un monoïde.
Soit à présent $a \in E$. Montrons que a est inversible. E étant fini, l'application $n \mapsto a^n$ ne peut être injective et donc il existe $n \neq m$ tels que $a^n = a^m$. On suppose par exemple $n > m$ et on écrit

$$a^{n-m}a^m = a^m = ea^m$$

et on utilise la régularité à droite de a^m pour obtenir $a^{n-m} = e$. On écrit ensuite

$$e = a^{n-m} = a(a^{n-m-1})$$

Comme $n - m - 1 \geq 0$, ce qu'on a écrit est licite, et a admet bien un inverse.

Qu'en est-il si E est infini ? Prenons l'exemple de Σ^*, le monoïde des mots sur un alphabet Σ muni de la concaténation, avec bien sûr $\Sigma \neq \varnothing$. Σ^* est régulier par construction, mais n'est certainement pas un groupe.

2 Algèbre linéaire

2.1 Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ annulées par des crochets de lie de matrices.

Énoncé. *Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ une forme linéaire vérifiant*

$$\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \varphi(MM') = \varphi(M'M) \quad \text{et} \quad \varphi(I_n) = n$$

On pose $A = \{MM' - M'M,\ M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.

(i) Montrer que $Vect(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid tr(M) = 0\}$.

(ii) En déduire que $\varphi = tr$.

Éléments de réponse.

(i) $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, donc par définition, $\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!],\ E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} \in A$.

Il s'ensuit que

$$\forall i, l \in [\![1, n]\!],\ i \neq l \implies E_{il} \in \mathrm{Vect}(A) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2, n]\!],\ E_{ii} - E_{11} \in \mathrm{Vect}(A)$$

On pose $\mathcal{F} = (E_{ij})_{i \neq j} \cup (E_{ii} - E_{11})_{i \in [\![2,n]\!]}$. Cette famille est clairement libre, et contient $n^2 - 1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(A)$, d'où $\dim\mathrm{Vect}(A) \geq n^2 - 1$. Or $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr}$, et tr étant une forme linéaire non nulle, on a $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr} = n^2 - 1$, donc $\dim\mathrm{Vect}(A) \leq n^2 - 1$ donc $\dim\mathrm{Vect}(A) = n^2 - 1 = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr}$ puis $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{tr}$.

(ii) De même que pour tr, on a $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}\varphi$ donc $\mathrm{Ker}\ \mathrm{tr} \subset \mathrm{Ker}\varphi$, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi = \lambda\mathrm{tr}$. Mais $\varphi(I_n) = n = \mathrm{tr}(I_n)$ donc $n = \lambda n$ puis $\lambda = 1$ (sauf si $n = 0$, mais ce cas est trivial).

2.2 Familles libres de matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Énoncé. *Soit $(X_1, \ldots, X_p) \in \mathbf{R}^n$ une famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Montrer que la famille $(X_1{}^tX_1, \ldots, X_p{}^tX_p)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Étudier la réciproque.*

Éléments de réponse. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $X_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$. On a alors,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ X_i{}^tX_i = (x_i^{(1)}X_i | \ldots | x_i^{(n)}X_i)$$

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i{}^tX_i = 0$. Or, $(X_1, \ldots, X_p)$ formant une famille libre, aucun des vecteurs la constituant n'est nul, d'où

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \exists l_i \in [\![1, p]\!],\ x_i^{(l_i)} \neq 0$$

Ainsi, pour $i \in [\![1, p]\!]$, en regardant que la $l_i$ème colonne dans la somme nulle écrite plus haut, on a

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j^{(l_i)} X_j = 0$$

$(X_1, \ldots, X_p)$ étant libre, on a $\forall j \in [\![1,p]\!],\ \lambda_j x_j^{(l_i)} = 0$, en particulier $\lambda_i x_i^{(l_i)} = 0$ donc $\lambda_i = 0$ ($x_i^{l_i} \neq 0$). Finalement, ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i = 0$$

et $(X_1{}^tX_1, \ldots, X_p{}^tX_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (il faut bien sûr préciser que la taille des matrices $X_i{}^tX_i$ est de $n \times n$, mais cela est bien clair).

2.3 Combinaison linéaire d'exponetielles

Énoncé. *Soient $n \geq 0$ et $x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^*$ tels que*

$$\forall i \neq j,\ (x_i - x_j)(x_i + x_j) \neq 0$$

On suppose qu'il existe des complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{itx_k} \in \mathbf{R}$$

Montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$, on a $\lambda_k \in \mathbf{R}$.

Éléments de réponse (À rédiger).

2.4 Fonctions multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans K

Énoncé. *Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ telle que*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $f(A) \neq 0 \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

3 Espaces vectoriels normés

3.1 CNS pour qu'un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$ soit fermé

Énoncé. *Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $z \in \mathbf{C}$ pour que $G_z = \{e^{itz},\ t \in \mathbf{Z}\}$ soit un sous-groupe fermé de $\mathbf{C}^*$.*

Éléments de réponse. On procède par analyse synthèse.

Analyse : Soit $z = a + ib \in \mathbf{C}$ tel que G_z est un sous-groupe fermé de $\mathbf{C}$. Pour $t \in \mathbf{Z}$, on a $e^{tz} = e^{-bt}e^{ait}$. Montrons par l'absurde que $b = 0$. Supposons $b \neq 0$, traîtons les deux cas possibles :

— Si $b > 0$, on prend $(t_n) \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ telle que $t_n \longrightarrow +\infty$. Dans ce cas, $(e^{it_n z})$ est une suite d'éléments de G_z. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|e^{it_n z}| = |e^{-bt_n}e^{iat_n}| = e^{-bt_n} \longrightarrow 0$$

Donc $e^{it_n z} \longrightarrow 0$ et, G_z étant fermé, $0 \in G_z$, ce qui est exclu.

— Si $b < 0$, on refait le même raisonnement en prenant $(t_n) \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ tendant vers $-\infty$, et on a $0 \in G_z$, ce qui est exclu.

Donc le seul cas possible est $b = 0$.

Ainsi, $z \in \mathbf{R}$. Pour avoir plus d'intuition sur ce que peuvent être les correctionutions au problème, on peut regarder le cas où G_z est fini. Si G_z est fini (on écarte le cas $z = 0$ qui est trivial), c'est un sous-groupe fini de $\mathbf{C}^*$, donc, si on note n son cardinal, on a $G_z = \mathbb{U}_n$.

Soit alors $x \in G_z$, il existe $t \in \mathbf{Z}^*$ et $k \in \mathbf{Z}$ tels que $x = e^{itz} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On a alors

$$\begin{aligned} e^{i\left(tz - \frac{2k\pi}{n}\right)} = 0 &\implies tz - \frac{2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \\ &\implies \exists l \in \mathbf{Z},\ z = \frac{2}{t}\left(l + \frac{2k}{n}\right)\pi \\ &\implies z \in \pi\,\mathbf{Q} \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $z \in \pi\,\mathbf{Q}$ suffit pour que G_z soit fini.

Synthèse : Soit $z \in \mathbf{R}$. Si $z \in \pi\,\mathbf{Q}$, G_z est fini, donc c'est un compact de $\mathbf{C}$ comme partie finie de $\mathbf{C}$, donc est un fermé de $\mathbf{C}$. C'est aussi un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$, donc z convient.

Sinon, $z \notin \pi\,\mathbf{Q}$. Montrons que dans ce cas G_z n'est pas un fermé de $\mathbf{C}$. En effet, si G_z est fermé, on peut montrer que $G_z = \mathbb{U}$. D'abord, $z\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$, puisque sinon, on aurait, pour un $\alpha \in \mathbf{R}$, $z\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z} = \alpha\,\mathbf{Z}$, donc $z \in z\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z} = \alpha\,\mathbf{Z}$ et $2\pi \in z\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z} = \alpha\,\mathbf{Z}$ donc il existe $k, l \in \mathbf{Z}^*$ (z et 2π sont non nuls) tels que $z = k\alpha$ et $2\pi = l\alpha$, d'où $z = \frac{2k\pi}{l} \in \pi\,\mathbf{Q}$ ce qui est exclu. La fonction $\phi : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{ix}$ étant continue, on a que $\phi(z\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z}) = G_z$ est dense dans $\phi(\mathbf{R}) = \mathbb{U}$. En passant à l'adhérence, on a $G_z = \mathbb{U}$, ce qui est exclu, parce que, par exemple, $-1 \notin G_z$.

3.2 Parties de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ compactes, non vides et stables par produit

Énoncé. *Soit X une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ non vide, compacte et stable par produit. Montrer que X est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.*

Éléments de réponse. Soit $A \in X$. On considère la suite d'éléments $(A^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Cette suite est une suite à élements dans X, puisque $A \in X$ et X est stable par produit. De plus, X étant compacte, (A^n) admet une suite extraite convergente ; il existe alors $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante, $B \in X$ telles que

$$A^{\varphi(n)} \longrightarrow B$$

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On a

$$A^{-p}A^{\varphi(n)} \longrightarrow A^{-p}B$$

Or, à partir d'un certain rang, on a $A^{-p}A^{\varphi(n)} \in X$ (il suffit d'avoir $\varphi(n) > p$), on a donc une suite d'éléments de X qui converge vers $A^{-p}B$, matrice qui est alors dans X puisque X est fermé. Ensuite, sachant l'expression suivante pour l'inverse d'une matrice :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{Com}(A)$$

on en déduit que le passage à l'inverse est continu, d'où que

$$A^{-\varphi(n)} \longrightarrow B^{-1}$$

Donc $A^{-\varphi(n)}B \longrightarrow B^{-1}B = I_n$ puis $A^{-1}A^{-\varphi(n)}B \longrightarrow A^{-1}$. Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^{-1}A^{-\varphi(n)}B = A^{-\varphi(n)-1}B \in X$, donc $A^{-1} \in X$ puisque X est fermé. Ainsi X est stable par produit et par passage à l'inverse, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

3.3 L'ensemble des polynômes unitaires scindés est un fermé

Énoncé. *On munit $\mathbf{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right\| = max\{|a_k|,\ k \in \mathbf{N}\}$.*

(i) Montrer que $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbf{R}[X]$ est fermé.

(ii) Soit $Q \in \mathcal{U}$ non constant, on note $p = \deg Q$. Montrer que

$$Q \text{ est scindé sur } \mathbf{R} \iff \forall z \in \mathbf{C},\ |Q(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^p$$

(iii) Montrer que $\mathcal{S}$, l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbf{R}[X]$ est un fermé.

Éléments de réponse.

(i) Montrons que $\mathbf{R}[X]\backslash\mathcal{U}$ est un ouvert de $(\mathbf{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$. Soit pour cela un polynôme P à coefficients réels non unitaire. Si P est nul, la boule ouverte centrée en P et de rayon 1 ne contient que des polynômes dont tous les coefficients sont *strictement* plus petits que 1, donc dont, en particulier, le coefficient dominant est *strictement* plus petit que 1. Si P est non nul, alors $\operatorname{cd} P \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $(\operatorname{cd} P - \varepsilon, \operatorname{cd} P + \varepsilon) \subset \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$. On peut choisir $\varepsilon < \min(1, \operatorname{cd} P)$. Si $Q \in B(P, \varepsilon)$, deux cas se présentent

— Soit $\deg P = \deg Q$, et alors $\|P - Q\|_\infty < \varepsilon \implies |\operatorname{cd} P - \operatorname{cd} Q| < \varepsilon$. Ceci donne $\operatorname{cd} Q \in (\operatorname{cd} P - \varepsilon, \operatorname{cd} P + \varepsilon) \subset \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$.

— Soit $\deg P \neq \deg Q$, et alors on aurait $|\operatorname{cd} P| < \varepsilon$ ou $|\operatorname{cd} Q| < \varepsilon$ selon que $\deg P > \deg Q$ ou $\deg P < \deg Q$. Or, ayant choisi $\varepsilon < \operatorname{cd} P$ en particulier, on ne peut avoir que $|\operatorname{cd} Q| < \varepsilon < 1$.

(ii) Supposons Q scindé sur $\mathbf{R}$. Notons

$$Q = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k),\ \lambda_k \in \mathbf{R}$$

Soit $z \in \mathbf{C}$. On a d'une part

$$|Q(z)|^2 = Q(z)\overline{Q(z)} = Q(z)Q(\overline{z}) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 - 2\lambda_k \operatorname{Re}(z) + |z|^2)$$

On considère alors $y \in \mathbf{R} \mapsto y^2 - 2\operatorname{Re}(z)y + |z|^2$, une application polynomiale de degré 2 atteignant son minimum en $-(-2\operatorname{Re}(z))/2 = \operatorname{Re}(z)$, et ce minimum vaut $|\operatorname{Im}(z)|^2$. D'où, pour $k = 1, \ldots, p$, $\lambda_k^2 - 2\lambda_k \operatorname{Re}(z) + |z|^2 \geq |\operatorname{Im}(z)|^2$, et donc finalement

$$|Q(z)|^2 \geq \prod_{k=1}^{p} |\operatorname{Im}(z)|^2 \geq |\operatorname{Im}(z)|^{2p}$$

Réciproquement, si pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|Q(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^p$, alors pour toute racine $\alpha \in \mathbf{C}$ de Q, on a $0 = |Q(\alpha)| \geq |\operatorname{Im}(\alpha)|^p$, soit $\operatorname{Im}(\alpha) = 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

(iii) Soit $(Q_n) \in \mathcal{S}^{\mathbf{N}}$, et supposons que cette suite converge vers $P \in \mathbf{R}[X]$. Soit $p = \deg P$. On montre que l'on peut extraire de (Q_n) une suite dont tous les termes sont des polynômes de degré égal à p. Pour cela, on montre

$$\forall q \in \mathbf{N}, \exists n \geq q,\ \deg Q_n = p$$

en procédant par l'absurde : on suppose alors

$$\exists q \in \mathbf{N}, \forall n \geq q,\ \deg Q_n \neq p$$

On a soit une infinté de n tels que $\deg Q_n > p$ ou une infinité de n tels que $\deg Q_n < p$. Le deuxième cas n'est en fait pas possible (on laisse au lecteur les soins de justifier cela). Il existe alors $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \deg Q_{\varphi(n)} \geq p + 1$$

Mais on a encore $\|Q_n - P\|_\infty \to 0$, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 1 = |\operatorname{cd} Q_{\varphi(n)}| = |\operatorname{cd}(Q_{\varphi(n)} - P)| \leq \left\|Q_{\varphi(n)-P}\right\|_\infty$$

En passant à la limite, on a $1 \leq 0$, ce qui n'est pas.

En conclusion, on dispose d'une extractrice $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\deg Q_{\varphi(n)} = p$. On a alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall z \in \mathbf{C},\ |Q_{\varphi(n)}(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^p \tag{*}$$

Or, en notant $Q_{\varphi(n)} = \sum_{k=0}^{p} a_k^{(n)} X^k$ et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on a pour tout k, $a_k^{(n)} \to a_k$, donc pour tout $z \in \mathbf{C}$, $Q_n(z) \to P(z)$, soit, en passant à la limite dans (*)

$$\forall z \in \mathbf{C},\ |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^p$$

et ceci assure que P est scindé sur $\mathbf{R}$. De plus, la première question assure que P est unitaire.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{S}$ est un fermé de $\mathbf{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

3.4 Somme d'une partie fermée et d'une partie compacte

Énoncé. *Soient E un espace vectoriel normé, F une partie fermée de E et K une partie compacte de E. Montrer que $F + K$ est une partie fermée de E.*

Éléments de réponse. Il suffit de l'écrire. Soit (x_n) une suite d'éléments de $F + K$ qui converge vers $x \in E$. On a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_n = y_n + z_n, \quad y_n \in F, z_n \in K$$

(z_n) est une suite d'éléments de K compact, donc il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et $z \in K$ tels que $z_{\varphi(n)} \longrightarrow z$. Or, on a également

$$x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$$

Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - z_{\varphi(n)} \longrightarrow x - z$. F étant fermé, il vient que $x - z \in F$, d'où $x \in F + K$.

3.5 Topologie du groupe orthogonal

Énoncé. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On rappele que le groupe orthogonal est défini par*

$$O_n(\mathbf{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$$

Cet ensemble est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$? Est-il connexe par arcs ?

Éléments de réponse. Il s'agit bien d'une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. En effet, on considère l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto {}^tMM$. Cette application est continue car la transposition est continue (linéaire et dimension de l'espace de départ est finie) et la multiplication également (peut être justifié de la même manière...), puis $O_n(\mathbf{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, et $\{I_n\}$ est un fermé, donc le groupe orthogonal est image réciproque d'un fermé par une fonction continue, et est donc fermé.
Pour la connexité par arcs, se référer au cours sur les espaces euclidiens.

3.6 Fonctions injectives de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{R}$

Énoncé. *Existe-t-il des fonctions continues injectives de* $[0,1]^2$ *dans* $\mathbf{R}$ *?*

Éléments de réponse. La réponse est non. Si $c \in [0,1]^2$, alors $[0,1]^2 \backslash \{c\}$ est encore un connexe, son image par f est alors un connexe de $\mathbf{R}$, donc un intervalle. Si c est pris comme antécédent d'un élément dans un intervalle du type (a,b) tel que $[a,b] \subseteq f([0,1]^2)$, alors $f([0,1]^2 \backslash \{c\})$ contient toujours a et b, donc tout l'intervalle $[a,b]$, et donc on trouve deux antécédents au même élément, ce qui est exclu car f est injective.

Remarque. Il est possible de construire une injection de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ (vous pouvez essayer de le faire, ce n'est pas très compliqué), et même, plus intéressant, une surjection continue de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$ (nettement plus difficile ; ces objets portent le doux nom de *courbe remplissante* ou *space-filling curves* en anglais).

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Un exercice classique

Énoncé. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur* $\mathbf{R}$ *vers* f*. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de réels convergeant vers* x*.*
Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ *converge et calculer sa limite.*

Éléments de réponse. f étant limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est continue. Il vient alors que

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \tag{1}$$

Puis, pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Or, puisqu'il y a convergence uniforme, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty^{\mathbf{R}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puis (1) donne que $|f(x_n) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par encardement, on a $|f_n(x_n) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit

$$\boxed{f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

4.2 Une question ouverte

Énoncé. *Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur* $\mathbf{R}$ *vers* exp *?*

Éléments de réponse. Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers exp sur $\mathbf{R}$, soit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ |p_n(x) - \exp(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, si on "applique" cette phrase pour $\varepsilon = 333$, on a l'existence de $n_0 \geq 0$ tel que, pour $n \geq n_0$ et pour $x \in \mathbf{R}$, on ait $|p_n(x) - \exp(x)| \leq 333$. Mézalor

$$|p_n(x) - p_{n_0}(x)| \leq |p_n(x) - \exp(x)| + |p_{n_0}(x) - \exp(x)| \leq 666$$

Ceci valant pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a que, pour tout $n \geq n_0$, le polynôme $p_n - p_{n_0}$ est borné sur $\mathbf{R}$, donc constant, d'où l'existence d'une suite de réels (α_n) telle que

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ p_n(x) - p_{n_0}(x) = \alpha_n$$

La suite $(p_n(42))_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant, puisque CU implique CS, on a que la suite (α_n) converge également, il suiffit d'évaluer la précédente expression en 42 ; on note α sa limite. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\forall n \geq n_0,\ p_n(x) - p_{n_0}(x) = \alpha_n$$

On passe a la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\exp(x) = p_{n_0}(x) + \alpha$$

autrement dit, exp est un polynôme, ce qui est exclu.

4.3 Un exemple simple

Énoncé. *On considère la fonction définie par*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}$$

Déterminer le domaine D de définition de f et étudier la continuité de f sur D.

Éléments de réponse. Pour $x < -1$, $n^x \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc $|n^x/x^n| = o(1/|x|^n)$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{n^x}{x^n}$ CA donc CV. Ailleurs, la série diverge grossièrement. On a alors $D = (-\infty, -1)$. On vérifie aisément que la série de fonctions définissant f converge uniformément sur tout compact de D, ainsi, sur tout compact de D, f est limite uniforme de fonctions continues ; elle est alors continue sur D tout entier.

5 Séries entières

5.1 Calcul d'équivalent (1)

Énoncé. *On considère la fonction* $f : x \in (-1,1) \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(x\sin t)^2}}$.

(i) *f est-elle bien définie ?*

(ii) *f est-elle dse$_0$?*

(iii) *Donner un équivalent de f en 1.*

Éléments de réponse. (i) Oui. Pour $x \in (-1,1)$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$1-(x\sin t)^2 \geq 1-x^2 > 0$$

d'où que $t \mapsto \sqrt{1-(x\sin t)^2}$ est continue et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-(x\sin t)^2}}$ est bine définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'intégrale est bien définie. Ceci valant pour tout $x \in (-1,1)$, f est bien définie.

(ii) Soit $x \in (-1,1)$

Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x\sin t| < 1$, donc, dse$_0$ usuel :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-(x\sin t)^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-i\right)\right)(-1)^n (x\sin t)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)\right)(-1)^n (x\sin t)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x\sin t)^{2n}\end{aligned}$$

Posons alors, pour $n \in \mathbf{N}$, $f_n : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x\sin t)^{2n}$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, si $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors

$$\begin{aligned} & |f_n(t)| \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^{2n} \\ \implies \quad & \|f_n\|_\infty^{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^{2n} \leftarrow \text{terme général d'une série CA}\end{aligned}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il vient alors que

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\mathrm{d}t$$

Mézalor

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(x\sin t)^{2n}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} W_{2n} \binom{2n}{n} x^{2n}
\end{aligned}
$$

Ceci valant pour tout $x \in (-1,1)$, on a que f est égale à la somme d'une série entière sur un domaine non trivial, d'où que f est dse$_0$.

(iii) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \frac{W_{2n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Il vient alors que $a_n \sim \frac{1}{2n}$, et on pose $(b_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$.

Lemme : Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_n \sim b_n$ et que $b_n \in \mathbf{R}_+^*$ pour tout entier n. Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont alors même rayon de convergence que l'on note R. Supposons que $R = 1$ et que $\sum b_n$ diverge. On a alors

$$
\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \underset{1^-}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k
$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \sim b_n$, on sait l'existence de $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$
\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n
$$

Soit $x \in (-1,1)$, on sait la convergence abosulue des séries entières sur $(-1,1)$, d'où, en sommant de n_0 jusqu'à n pour un $n \geq n_0$ donné et en faisant tendre n vers $+\infty$, on a

$$
-\varepsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \varepsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k
$$

Il vient alors que

$$
\left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k
$$

Puis

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right| &= \left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k x^k \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \right| + \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k x^k \right|}_{:=\alpha} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k + \alpha
\end{aligned}
$$

On remarque ensuite que

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = +\infty$$

On laisse au lecteur les soins de justifier cela.

Ainsi, il existe $x_0 \in (0,1)$ tel que si $x \in [x_0, 1)$, on ait $\alpha \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, puis

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k} \right| \leq 2\varepsilon$$

D'où le résultat voulu. Ensuite, il est clair que, dans notre cas, $\sum b_n$ diverge, d'où que

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^n = \frac{-1}{2} \ln(1-x)}$$

5.2 Calcul d'équivalent (2)

Énoncé. *Trouver un équivalent lorsque x tend vers 1 de* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

Éléments de réponse. Le rayon de convergence de la série dont la somme définit f est de 1. On considère la fonction

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

où $a_n = \ln(n+1) - \ln(n) - 1/n$ pour $n \geq 1$. Le rayon de convergence de la série ainsi définie est de 1, puisque l'on a

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, et on conclut avec le critère de D'Alambert.

Soit alors $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < 1$. On a

$$\begin{aligned}
xg(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1) x^{n+1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= f(x) - x f(x) + x \ln(1-x)
\end{aligned}$$

Comme $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, on en déduit que g est définie en 1 et y est donc continue. Il vient alors que

$$xg(x) \underset{1^-}{=} o(\ln(1-x))$$

5.3 Produit de Cauchy

Énoncé. *On définit la suite de réels $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}u_k$$

Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Éléments de réponse. On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ est non nul. Et on pose pour $x \in (-R, R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Soit alors $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < R$, alors

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$$

D'après le théorème de convergence pour les séries entières, la série $\sum u_n x^n$ converge abosulement et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}u_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$$

Il s'agit du produit de Cauchy de deux séries AC. Il vient alors que

$$\forall x \in (-R, R),\ f(x) - 1 = x(f(x))^2$$

D'où, pour $|x| < 1/4$ non nul, $f(x) \in \left\{ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \right\}$, soit

$$\exists s : \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \to \{-1, 1\},\ \forall x \in \mathbf{R}^*,\ |x| < \frac{1}{4} \implies f(x) = \frac{1 + s(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Ainsi, pour $|x| < 1/4$ non nul,

$$s(x) = \frac{2xf(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

Il vient que s est continue sur $(-1/4, 1/4)$. Il existe alors $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que pour tout $|x| < 1/4$, $s(x) = \varepsilon$, soit

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ |x| < \frac{1}{4} \implies f(x) = \frac{1 + \varepsilon\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 - \varepsilon\sqrt{1-4x}}$$

La continuité de f en 0, et l'égalité ci-dessus, montrent que $\varepsilon = -1$ nécessairement ($f(0) = 1$). Ainsi, pour tout x non nul tel que $|x| < 1/4$, on obtient $1-2xf(x) = \sqrt{1-4x}$. Or

$$\forall x \in (-1,1),\ \sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

En particulier,

$$\forall x \in (-1/4, 1/4),\ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2u_{n-1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 4^n \binom{1/2}{n} x^n$$

D'où, pour tout $n \geq 1$, la relation

$$-2u_{n-1} = \frac{(-1)^n 4^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n 4^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-2k}{2} = \frac{2^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k-1)$$

ce qui donne finalement

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1!)}$$

5.4 Développement en série entière de la fonction tangente

Énoncé. *Soient $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^\infty([0,a), \mathbf{R})$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout entier naturel n.*

(i) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x,y) \in {\mathbf{R}_+^*}^2$ tel que $x < y < a$. Montrer que

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

où $R_n(z)$ est le reste intégral de la formule de Taylor en 0 à l'ordre n appliquée en z.

(ii) En déduire que pour tout $x \in [0,a)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

(iii) En utilisation la question (ii), démontrer que la fonction tangente est développable en série entière à l'origine et préciser l'intervalle de validité de ce développement.

Éléments de réponse.

(i) On rappelle l'expression de $R_n(x)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in [0,a)$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $t = ux$, on obtient

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\mathrm{d}u$$

Lorsque $x, y \in [0,a)$ avec $x < y$, la positivité des dérivées successives de f donne leur croissance, d'où $f^{(n+1)}(ux) \leq f^{(n+1)}(uy)$ pour $u \in [0,1]$, puis

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\mathrm{d}u \\ &\leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(uy)\mathrm{d}u = \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}\end{aligned}$$

(ii) Soit $x \in [0, a)$. Pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq R_N(x)$$

Ceci vient de la formule de Taylor avec reste intégral, que l'on peut écrire car f est en particulier $\mathcal{C}^{N+1}$ sur $[0, x]$. Si $y \in [0, a)$ avec $x < y$, on a $R_N(x) \leq R_N(y)(x/y)^{N+1}$. Comme $x < y$, on a $(x/y)^{N+1} = o(1)$. Il suffit de montrer que $R_N(y) = \mathcal{O}(1)$ pour pouvoir conclure. Une simple IPP montre que la suite $(R_n(y))_n$ est décroissante, donc, comme elle est également positive, elle converge.

(iii) tan est définie sur $[0, \pi/2)$, $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Pour $n \in \mathbf{N}$, la formule

$$tan^{(n+1)} = (1 + \tan^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \tag{*}$$

montre que les dérivées successives de tan sont toutes positives sur $[0, \pi/2)$ puisque $\tan([0, \pi/2)) \subset \mathbf{R}_+$. D'après la question (ii), on a

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Par imparité de tan, si $x \in (-\pi/2, 0]$, alors $-x \in [0, \pi/2)$ et

$$\tan(x) = -\tan(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} (-1)^n x^n$$

La formule (*) permet de montrer par récurrence que les dérivées d'ordre impaire de tan sont nulles en 0, et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} (-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$. On trouve alors un développement en série entière de tan sur $(-\pi/2, \pi/2)$.

6 Réduction des endomorphismes

6.1 CNS valeur propre commune

Énoncé. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A et B possèdent une valeur propre commune*

(ii) *Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle telle que $AM = MB$*

(iii) $\mu_A(B) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$

Éléments de réponse. On montre les équivalences en montrant une chaîne d'implications.

1) $\implies$ 2) Supposons que A et B possèdent une valeur commune. Notons λ cette valeur propre. D'abrod, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ une colonne non nulle telle que

$$AX = \lambda X$$

Mais λ étant valeur propre de B, elle est encore valeur propre de ${}^tB$, d'où l'existence de $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ une colonne non nulle telle que

$${}^tBY = \lambda Y$$

On pose $M = X^tY$. On vérifie facilement que $AM = MB$, puis M est non nulle puisque de rang 1.

Cette implication était la plus difficile à montrer, retenir l'idée.

2) $\implies$ 3) Déjà, on a

$$A^2M = A(AM) = (AM)B = MB^2$$

puis, on vérifie facilement par récurrence que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ A^kM = MB^k$$

D'où, pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, l'égalité

$$P(A)M = MP(B)$$

En particulier, on a

$$M\mu_A(B) = \mu_A(A)M = 0$$

Ainsi, M étant non nulle, $\mu_A(B)$ est soit nulle, soit un diviseur de 0, donc est non inversible.

3) $\implies$ 1) Par contraposée. Supposons que A et B n'ont pas de valeurs propres communes. Notons $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de A. On écrit

$$\mu_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i n'est pas valeur propre de B et donc $B - \lambda_i I_n \in GL_n(\mathbf{C})$. Ainsi $\mu_A(B)$ est produit de matrices inversibles et est donc inversible.

6.2 P(A) diagonalisable et P'(A) inversible $\Longrightarrow$ A diagonalisable

Énoncé. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonisable.*

Éléments de réponse. On note $B = P(T)$ et μ_B le polynôme minimal de B. Il vient que $\mu_B \circ P$ annule A et donc il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\mu_B \circ P = Q\mu_A$. Dérivons cette égalité :

$$(\mu_B' \circ P)P' = Q\mu_A' + Q'\mu_A \tag{*}$$

On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de A. Trigonalisons A (on est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on peut le faire) : il existe $U \in GL_n(\mathbf{C})$ tel que $A = UTU^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

En remarquant que $P(T)$ et $P(A)$ ont même polynôme caractéristique (en effet, $P(A) = UP(T)U^{-1}$), on arrive à en conclure que les valeurs propres de $P(A)$ sont les $P(\lambda_i)$ avec $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Ayant la relation (*) et le fait que λ est racine de μ_A, on en déduit

$$\mu_B'(P(\lambda))P'(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A'(\lambda)$$

Or B est diagonalisable, donc $\mu_B'(P(\lambda)) \neq 0$ (μ_B SRS), mais $P'(A) \in GL_n(\mathbf{C})$, donc $P' \wedge \mu_A = 1$ et donc $P'(\lambda) \neq 0$, il vient alors que

$$Q(\lambda)\mu_A'(\lambda) \neq 0 \implies \mu_A'(\lambda) \neq 0$$

Donc λ est racine simple de μ_A. Ceci valant pour toute valeur propre λ de A, et donc en fait pour toute racine λ de μ_A, on en conclut que μ_A est SRS, et donc A est diagonalisable.

6.3 Diagonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$

Énoncé. *Soit p un nombre premier, $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer que*

$$A \quad \text{diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad A^p = A$$

Éléments de réponse. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A diagonalisable. Il vient alors l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}_p)$ tels que

$$A = PDP^{-1}$$

Mais alors $A^p - A = PD^pP^{-1} - PDP^{-1}$. Or, en notant

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

On a

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & \lambda_q^p \end{pmatrix}$$

Mais si $\lambda \in \mathbb{F}_p$, $\lambda^p = \lambda$ (Lagrange dans un groupe quelconque ou Fermat) et donc $D^p = D$ d'où $A^p = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A^p = A$. Il vient alors que $P = X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ est un polynôme anulateur de A. Puis $P = X(X^{p-1} - 1)$, et, en notant $Q = X^{p-1} - 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{F}_p^*, \quad Q(x) = 0$$

On trouve $p-1$ racines à un polynôme de degré $p-1$, d'où, sachant que $\mathrm{cd}Q = 1$, on a

$$Q = \prod_{x \in \mathbb{F}_p^*} (X - x)$$

Finalement P est SRS et A est diagonalisable.

6.4 Matrice semblable à son double

Énoncé. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $M \underset{sb}{\sim} 2M$. Montrer que M est nilpotente.*

Éléments de réponse. On trigonalise M. Il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbf{C})$ tels que $M = PTP^{-1}$. Puis, comme M est semblable à $2M$, elle-même semblable à $2T$ (il suffit de multiplier par 2 plus haut), T est semblable à $2T$. Donc T et $2T$ ont même polynôme caractéristique. On note $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de T, χ_T le polynôme caractéristique de T. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$, alors $\chi_T(2\lambda) = \chi_{2T}(2\lambda) = 0$, donc $2\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(T),\ \forall n \in \mathbf{N},\ 2^n \lambda \in \mathrm{Sp}(T)$$

Ceci est exclu lorsqu'il existe une valeur propre non nulle de T. Ainsi, toutes les valeurs propres sont nulles, T est de diagonale nulle (et triangulaire) et est donc nilpotente, puis M lui étant semblable, elle est également nilpotente.

6.5 Comparaison de polynômes minimaux

Énoncé. *Soit E un K espace vectoriel, $f \in L(E)$ et $G : g \in L(E) \mapsto f \circ g$. Vérifier que $G \in L(L(E))$ et comparer (sous réserve d'existence) les polynômes minimaux de f et G.*

Éléments de réponse. On laisse au lecteur les soins de vérifier que G est bien un endomorphisme. Supposons que μ_f existe. Soit $P \in K[X]$. Remarquons que pour tout $g \in L(E)$, $P(G)(g) = P(f) \circ g$ (on peut d'abord montrer cela pour $P = X^k$ pour tout k entier naturel par récurrence, et on passe ensuite à tout polynôme par des combinaisons linéaires). Ainsi, $P(f) = 0 \implies P(G) = 0$. Ceci montre deux choses : d'abord, G admet un polynôme annulateur non nul, donc μ_G existe, et $(\mu_f) \subset (\mu_G)$, soit μ_G divise μ_f.

6.6 Coefficients du polynôme caractéristique

Énoncé. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle mineur principal d'ordre $k \in \{1, \dots, n\}$ le déterminant d'un $M_I = (m_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ avec $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que* $\mathrm{Card}(I) = k$. *Donner une expression des coefficients de χ_M en fonction des mineurs principaux.*

Éléments de réponse. Correction trouvable sur ma page personnelle.

6.7 Limite d'une suite de matrices

Énoncé. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(M^p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge. Que dire sur la valeur de la limite en cas de convergence ?*

Éléments de réponse. On procède par analyse synthèse :

Analyse : Supposons que la suite (M^p) converge, notons L sa limite. Remarquons qu'en écrivant $(M^p)^2 = M^{2p}$ pour tout p et en passant à la limite, on obtient $L^2 = L$, L est alors la matrice d'une projection. Remarquons de plus qu'en écrivant $MM^p = M^pM$ pour tout p et en passant à la limite, on obtient $ML = LM$. Ainsi, comme M et L commutent, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et T_L et T_M des matrices trigonales supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $M = PT_MP^{-1}$ et $L = PT_LP^{-1}$. Comme $M^p \to L$, on a en fait $T_M^p \to T_L$. Ainsi pour tout $i, j = 1, \dots, n$, $[T_M^p]_{i,j} \to [T_L]_{i,j}$. En regardant les coefficients sur la diagonale, on a pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i^p \to [T_L]_{i,i}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de M dans l'ordre dans lequel elles apparaissent dans T_M. L étant une matrice de projection, ses valeurs propres sont soit 1 soit 0, donc pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i^p \to 0$ ou $\lambda_i^p \to 1$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

- Si $\lambda_i^p \to 0$, alors $|\lambda_i| < 1$ trivialement ;
- Si $\lambda_i^p \to 1$, alors $|\lambda_i| = 1$. Montrons qu'en fait $\lambda_i = 1$. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $e^{i\theta} = \lambda_i$. On a $|2\sin(p\theta/2)| = |e^{ip\theta} - 1| \to 0$. On procède par l'absurde et on suppose que $\theta \notin 2\pi\,\mathbf{Z}$. Deux cas de figure se présentent, soit θ est rationnel, alors le sous-groupe $(\theta/2)\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z}$ de $(\mathbf{R}, +)$ est dense dans $\mathbf{R}$ (car sinon $(\theta/2)\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z} = \alpha\,\mathbf{Z}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$, puis $\theta \in \alpha\,\mathbf{Z}$ et $\theta \neq 0$ donne α rationnel, et $2\pi \in \alpha\,\mathbf{Z}$ et $2\pi \neq 0$ donne π rationnel, ce qui n'est pas...). Il vient alors, par continuité de sin, que $\sin((\theta/2)\,\mathbf{Z}) = \sin((\theta/2)\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z})$ est dense dans $\sin(\mathbf{R}) = [-1, 1]$, et on trouve alors que l'ensemble des termes de la suite $(|\sin(p\theta/2)|)_p$ est dense dans $[0, 1]$, alors que cette suite converge... Soit θ est irationnel, et dans ce cas soit θ est commensurable à π (i.e on peut écrire $\theta = k\pi/q$ avec k, q des entiers, $q > 0$), et alors, comme il faut $\theta \notin 2\pi\,\mathbf{Z}$, on a $\theta/2 \notin \pi\,\mathbf{Z}$, et alors pour tout p, $\sin((4q+1)\theta/2) = \sin(2k\pi + \theta/2) = \sin(\theta/2) \neq 0$, et on exhibe ainsi une sous-suite de $(\sin(p\theta/2))$ qui ne tend pas vers 0 ; finalement si θ n'est pas commensurable à π, alors on vérifie facilement que $(\theta/2)\,\mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$, et on se retrouve alors dans un cas que l'on sait traiter.

  On obtient alors que $\theta \in 2\pi\,\mathbf{Z}$, soit que $\lambda_i = 1$.

Synthèse : Soit à présent une matrice M dont toutes les valeurs propres complexes sont soit égales à 1, soit de module strictement plus petit que 1.

La décomposition de Dunford donne D diagonalisable et N nilpotente telles que $M = N + D$ et $ND = DN$. Pour tout $p \geq n$, on a

$$M^p = (N+D)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k \qquad (*)$$

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\Delta = PDP^{-1}$ soit diagonale. Dans un premier temps, supposons que 1 n'est pas valeur propre de M. Dans ce cas, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\binom{p}{k}\Delta^{p-k} \to 0$: en effet, ces matrices sont diagonales, donc pour $i = 1, \ldots, n$, $\left[\binom{p}{k}\Delta^{p-k}\right]_{i,i} = \binom{p}{k}\lambda_i^{p-k}$ avec $|\lambda_i| < 1$, d'où $\left[\binom{p}{k}\Delta^{p-k}\right]_{i,i} \to 0$ car $\binom{p}{k} \sim p^k/k!$ et $p^k = o(1/\lambda_i^{p-k})$. Par continuité de la multiplication par une matrice $\binom{p}{k}D^{p-k} = \binom{p}{k}P\Delta^{p-k}P^{-1} \to 0$ et alors $M^p \to 0$ comme somme finie de trucs qui tendent vers 0.

Rédaction à compléter (il reste à traiter le cas où 1 *est valeur propre de* M*)*

7 Intégrales généralisées

7.1 Une Intégrale de Frullani

Énoncé. *On pose pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)-\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$*

(i) Déterminer $\mathcal{D}_f$ domaine de définition de f.

(ii) Déterminer le domaine de classe $\mathcal{C}^1$ de f.

(iii) En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.

(iv) Retrouver le résultat de la question (iii) sans utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre

Éléments de réponse. (i) D'abord, en 0, pour tout $x \neq 0$, $\arctan(xt)/t \sim_{t\to 0} x$. Ainsi $\int_0^1 \frac{\arctan(xt)}{t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$ (en 0 ça fait juste 0), et il en est alors de même pour $\int_0^1 \frac{\arctan(xt)-\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$. Ensuite, en $+\infty$, on montre que l'intégrale converge pour $x > 0$.

En effet, soit $X \geq 1$, on écrit

$$\forall t \in [1, X],\ \arctan(xt) - \arctan(t) = \arctan(1/t) - \arctan(1/xt)$$

Soit

$$\int_1^X \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^X \frac{\arctan(1/t) - \arctan(1/xt)}{t}\mathrm{d}t$$

Mais, dans ce cas, $\frac{\arctan(1/t)-\arctan(1/xt)}{t} \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ (sauf quand $x = 1$, mais dans ce cas l'intégrale vaut 0 trivialement).

On montre alors que f est définie sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est cependant pas définie sur $\mathbf{R}_-$. En effet, montrons d'abord que $\int_1^+ \infty \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t = +\infty$. Soit $X \geq 1$. Une IPP donne

$$\int_1^X \frac{\arctan t}{t}\ dt = \ln X \arctan X - \int_1^X \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Mais $\frac{\ln t}{1+t^2} = o(1/t^{\frac{3}{2}})$ en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge, mais $\ln X \arctan X \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\ dt = +\infty$. Ainsi, $f(0) = -\infty$ et si $x < 0$, alors $\alpha = -x > 0$, et en faisant le changement de variable $u = \alpha t$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t}\mathrm{d}t = -\int_\alpha^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u = -\infty$$

d'où $f(x) = -\infty$.

(ii) On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour cela, montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $(a, +\infty)$ pour tout $a > 0$. Soit $a > 0$. Pose $g(t, x) = [\arctan(xt) - \arctan(t)]/t$ pour $(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times (a, +\infty)$. Pour tout x, $t \mapsto g(t, x)$ est intégrable (à x fixé, $g(t, x)$ est de signe constant, positif si $x \geq 1$ et négatif sinon), et pour tout t, $x \mapsto g(t, x)$ est dérivable sur $(a, +\infty)$ et

$$\forall (t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times (a, +\infty),\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1 + (xt)^2}\right) = \frac{1}{1 + t^2x^2}$$

De plus, pour tout t, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue. On majore en valeur absolue cette dérivée partielle uniformément en x par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}_+$:

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times (a,+\infty),\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+a^2t^2}$$

Il s'en suit que f est $\mathcal{C}^1$ sur $(a,+\infty)$, puis sur $\mathbf{R}_+^*$ puisque ceci vaut pour tout $a > 0$. Et on a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f'(x) = \int_{\mathbf{R}_+} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}_+} \frac{1}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t$$

(iii) On donne une expression explicite de f', et on en déduira f en primitivant. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Pour $X \geq 0$

$$\int_0^X \frac{1}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\arctan(xX) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \frac{\pi}{2x}$$

D'où il vient que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x)$$

(iv) La démonstration repose sur une formule de la moyenne pour les intégrales sur un segment. La méthode est la même pour toute une classe de fonctions. La retenir.

Lemme : Soit $g : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t$$

converge.

Alors, pour tous réels $a, b > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(at)-g(bt)}{t}\mathrm{d}t$$

converge et vaut $g(0)\ln(b/a)$.

Démonstration du Lemme : D'abord, le changemnet de variable $u = at$ montre que $\int_1^{+\infty} \frac{g(at)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u$, et donc cette intégrale converge par hypothèse, et il en est de même pour $\int_1^{+\infty} \frac{g(bt)}{t}\mathrm{d}t$, d'où la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{g(at)-g(bt)}{t}\mathrm{d}t$.

Soit à présent $\varepsilon > 0$. Le même changement de variable montre

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(at)}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(at)}{t}\mathrm{d}t$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(at)-g(bt)}{t}\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(at)}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(bt)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Par continuité de g, il existe un réel c_ε compris entre $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$, tel que

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u = g(c_\varepsilon)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = g(c_\varepsilon)\ln(b/a)$$

Comme $c_\varepsilon \to 0$ en faisant $[\varepsilon \to 0]$ (gendarmes), l'intégrale étudiée converge et vaut $g(0)\ln(b/a)$.

Dans notre cas, posons $g : t \in [0, +\infty) \mapsto \delta_{0,t}\frac{\pi}{2} + \arctan(t)$. g est continue, et on vérifie grâce à un équivalent de arctan en 0 que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/t)}{t}\mathrm{d}t$$

converge. Il vient donc, d'après notre Lemme, que, en particulier

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \frac{\pi}{2}\ln x = \int_0^{+\infty} \frac{g(t) - g(xt)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

7.2 Calcul d'équivalent (1)

Énoncé. $I(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$.

(i) Domaine de définition de I ?

(ii) Calculer $I(x) + I(x+1)$.

(iii) Équivalent de $I(x)$ en $+\infty$?

Éléments de réponse. (i) I est clairement définie sur $\mathbf{R}_+$. Si $x < 0$, au voisinage de 0 on a $\frac{t^x}{1+t} \sim \frac{1}{t^{-x}}$, dont l'intégrale converge si et seulement si $-x \in (0, 1)$, soit $x \in (-1, 0)$. On en déduit que I est définie sur $(-1, +\infty)$.

(ii) Soit $x \in (-1, +\infty)$. On a

$$I(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[t^x - \frac{t^x}{1+t}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} - I(x)$$

(iii) On remarque que I est décroissante, d'où $2I(x+1) \leq 1/(x+1) \leq 2I(x)$, donc, en croisant les inégalités, on trouve $I(x) \sim 1/2x$ en $+\infty$.

7.3 Calcul d'équivalent (2)

Énoncé. $F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{1+t}\mathrm{d}t$. *Montrer que F est définie et continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $F(x) \sim_0 \frac{\pi}{2x}$.*

Éléments de réponse. La définition n'est pas un problème. La continuité non plus. Si on pose $f : (t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{\sin(tx)}{1+t}$, alors en tout x, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable, en tout t, $x \mapsto f(t, x)$ est continue et

$$\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R}_+^*,\ |f(t, x)| \leq \frac{1}{1+t} := \varphi(t)$$

et φ est intégrable... et on applique le théorème de continuité d'intégrale à paramètre.

Pour trouver l'équivalent, on effectue le changement de variable $u = xt$, on trouve alors que $F(x) = J(x)/x$ où $J(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{1+t/x}\mathrm{d}t$ qui tend vers $\pi/2$ en $+\infty$.

8 Espaces euclidiens

8.1 Matrices M telles que $M + I_n$ est inversible

Énoncé. *On pose* $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid -1 \notin Sp(M)\}$.

(i) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E} = \mathcal{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E}$ *;*

(ii) Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ *(ensemble des matrices antisymétriques), alors* $\mathrm{Sp}(A) \subset i\,\mathbf{R}$ *;*

(iii) Montrer que $\theta : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ *définit une involution de* $\mathcal{E}$ *;*

(iv) Montrer que θ *induit une bijection* $\tilde{\theta}$ *de* $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ *sur* $\mathcal{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E}$.

Éléments de réponse. (i) Une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E}$, par théorème de réduction des matrices orthogonales, est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont de la forme R_θ, I_p et $-I_q$. Comme -1 n'est pas dans son spectre, $q = 0$ nécessairement, et alors cette matrice est de déterminent 1 ($\det R_\theta = 1$). La réciproque est claire, vu l'inclusion $\mathcal{SO}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.

(ii) Posons $\varphi : (x, y) \in \mathbf{C}^n \mapsto x^T\overline{y}$, forme sesquilinéaire. Soit λ valeur propre complexe de A. On a $Ax = \lambda x$ avec $x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$. On a $\varphi(\lambda x, x) = \varphi(Ax, x) = -\varphi(x, Ax) = -\varphi(x, \lambda x)$. Mais $\varphi(x, x) \neq 0$ car $x \neq 0$ et $\varphi(\lambda x, x) = \lambda\varphi(x, x)$ et $\varphi(x, \lambda x) = \overline{\lambda}\varphi(x, x)$, donc $\lambda = -\overline{\lambda}$, soit $\lambda \in i\,\mathbf{R}$.

(iii) Pour $M \in \mathcal{E}$, on a d'abord $\theta(M) \in \mathcal{E}$. En effet, $\det(I_n + \theta(M)) = \det(I_n + M)^{-1}\det(I_n + M + I_n - M) \neq 0$. Puis

$$\begin{aligned}
&(I_n - [(I_n - M)(I_n + M)^{-1}])(I_n + [(I_n - M)(I_n + M)^{-1}])^{-1} \\
&= (I_n - [(I_n - M)(I_n + M)^{-1}])(I_n + M)(I_n + M + I_n - M)^{-1} \\
&= (I_n + M - (I_n - M))\frac{1}{2}I_n \\
&= M
\end{aligned}$$

(iv) Considérons la restriction de θ à $\mathcal{A}_n$ (d'après la question (ii), on a bien $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{E}$). Pour $M \in \mathcal{A}_n$, la question précédente donne déjà $\theta(M) \in \mathcal{E}$, il ne reste plus qu'a montrer que $\theta(M) \in \mathcal{SO}_n(\mathbf{R})$. Il s'agit de calculer

$$[(I_n - M)(I_n + M)^{-1}]^T$$

Mais $[(I_n - M)(I_n + M)^{-1}]^T = [(I_n + M)^{-1}]^T(I_n - M)^T = (I_n - M)^{-1}(I_n + M)$ d'abord parce que l'on peut inverser inverse et transposée, ensuite parce que M est antisymétrie. Puis $(I_n - M)$ et $(I_n + M)$ commutent comme des polynômes en M, le calcul devient

$$(I_n - M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)^{-1}(I_n + M)$$

qui est bien sûr égal à I_n. À ce stade, on a $\theta(M) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, mais $\theta(M) \in \mathcal{E}$, donc $\theta(M) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E} = \mathcal{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E}$.

8.2 Angeline

Énoncé. *Soit $n \geq 2$.*

(i) Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}), \qquad \sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}} \tag{*}$$

(ii) On suppose que (*) est une égalité. Que peut-on dire sur les coefficients de M ? Et de la parité de n ?

(iii) Déterminer une matrice, notée dans la suite M_2, élément de $\mathcal{O}_2(\mathbf{R}) \cap \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ satisfaisant le cas d'égalité de (*) pour $n = 2$.

(iv) Démontrer qu'une condition suffisante pour qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que (*) soit une égalité est que n soit une puissance de 2.

(v) Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que (*) soit une égalité est que $n = 2$ ou 4 divise n.

Éléments de réponse. (i) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Notons $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur les matrices et b la forme polaire de la forme quadraitque $\|\cdot\|_2^2$. Comme $MM^T = I_n$, on obtient $\mathrm{tr}(MM^T) = n$ soit $\|M\|_2 = \sqrt{n}$. Puis, si on pose $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geq 0$ et $a_{i,j} = -1$ sinon, l'inégalité de Schwarz nous donne

$$|b(M, A)| \leq \|A\|_2 \|M\|_2$$

Or $b(M, A) = \sum |m_{i,j}|$ et $\|A\|_2 = \sqrt{n^2} = n$. On obtient le résultat voulu.

(ii) On est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Schwarz, on a alors $M = \lambda A$. L'égalité $(*)$ nous donne directement en fait $\lambda = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On doit aussi avoir $MM^T = I_n$, soit, pour $i \neq j$

$$0 = \frac{1}{n}[AA^T]_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}$$

On a alors une somme nulle de réels égaux à 1 ou -1, le nombre de termes de la somme est nécessairement pair, donc n est pair.

(iii) Poser M_2 comme une matrice avec que des -1 ou 1 en coefficients, divisée par $\sqrt{2}$, suffit pour avoir (*), il ne reste qu'à bien placer les 1 et -1 pour avoir $M_2 M_2^T = I_2$. Donc on veut

$$m_{1,1} m_{2,1} + m_{1,2} m_{2,2} = 0$$

La matrice suivante convient

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Il suffit de montrer que $n = 2^k$, $k \geq 1$, permet de construire une matrice comme dans la question précédente. On va construire nos matrice par récurrence sur k. M_2 a déjà été construite, et pour $k \geq 1$,

$$M_{2^{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} M_{2^k} & -M_{2^k} \\ M_{2^k} & M_{2^k} \end{pmatrix}$$

(v) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ vérifiant (*). On suppose que n est différent de 2. Alors $n \geq 3$. On peut donc considérer, pour $\{i,j\} \in \mathcal{P}_2(\{1,2,3\})$, les ensembles

$$K_{i,j} = \{k \in [\![1,n]\!],\ a_{i,k}a_{j,k} = -1\}$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k} = 0$ pour une certaine paire $\{i,j\}$, ces ensembles sont tous de cardinal $n/2$. On va montrer qu'ils sont de cardinal pair, ce qui achèvera de montrer que n est divisible par 4. Montrons que

$$\forall \{i,j\} \neq \{p,q\},\ K_{i,j}^c \cap K_{p,q}^c = \{k \in [\![1,n]\!],\ a_{1,k} = a_{2,k} = a_{3,k}\} \qquad (**)$$

Soit $\{i,j\} \neq \{p,q\}$, on a d'abord nécessairement $\{i,j\} \cup \{p,q\} = \{1,2,3\}$, donc, par exemple, $p \in \{i,j\}$ mais $q \notin \{i,j\}$. Soit $k \in K_{i,j}^c \cap K_{p,q}^c$, alors $a_{i,k}a_{j,k} = a_{p,k}a_{q,k} = 1$ (les coefficients sont des produits de 1 et -1, donc nécessairement égaux à 1 ou -1...), donc $a_{i,k} = a_{j,k}$ et $a_{p,k} = a_{q,k}$, et comme $p = i, j$, on a $a_{i,k} = a_{j,k} = a_{q,k}$ soit $a_{1,k} = a_{2,k} = a_{3,k}$. En passant au complémentaire dans (**), on voit que les ensembles $K_{i,j} \cup K_{p,q}$, sont tous de même cardinal, mais

$$|K_{i,j} \cup K_{p,q}| = |K_{i,j}| + |K_{p,q}| - |K_{i,j} \cap K_{p,q}| = n - |K_{i,j} \cap K_{p,q}|$$

et cette relation montre que les ensembles $K_{i,j} \cap K_{p,q}$ sont tous de même cardinal. Or, si $\{i,j\} \neq \{p,q\}$, on a

$$k \in K_{i,j} \cap K_{p,q} \implies a_{i,k}a_{j,k} = a_{p,k}a_{q,k} = -1$$

et sachant que parmi les deux paires choisies, il y a un indice commun σ, en simplifiant par $a_{\sigma,k}$, on trouve $a_{s,k} = a_{t,k}$ (où $\{s,t\}$ est la dernière paire possible dans $\mathcal{P}_2(\{1,2,3\})$), soit $a_{s,k}a_{t,k} = 1$ donc $k \in K_{s,t}^c$, mais on a toujours $k \in K_{i,j}$ par exemple, d'où $k \in K_{i,j} \cap K_{p,q} \implies k \in K_{s,t}^c \cap K_{i,j}$, et la réciproque est en fait vraie (se vérifie facilement), d'où $K_{i,j} \cap K_{p,q} = K_{s,t}^c \cap K_{i,j}$, donc

$$|K_{i,j}| = |K_{s,t}^c \cap K_{i,j}| + |K_{s,t} \cap K_{i,j}| = \underbrace{|K_{p,q} \cap K_{i,j}| + |K_{s,t} \cap K_{i,j}|}_{=2|K_{s,t} \cap K_{i,j}|}$$

Donc $n/2 = K_{i,j}$ est pair soit n est divisible par 4.

8.3 Un TLM pour les matrices

Énoncé. *Soit $n \geq 2$. On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par*

$$A \leq B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre, et montrer que toute suite de matrices (A_p) croissante et majorée pour cet ordre converge.

Éléments de réponse. La réflexivité est simple, l'antisymétrie demande d'appliquer le théorème spectral pour se rendre compte que les valeurs propres de la différence sont toutes nuls, et pour la transitivité, on remarque que $X^T(A-B)X \geq 0$ et $X^T(B-C)X \geq 0$ donnent $X^T(A-C)X \geq 0$ pour tout X.

Voyons le plus intéressant : pourquoi une suite telle que prise dans l'énoncé converge ? On est dans un espace de dimension finie, on choisit la norme qui nous plait, et celle qui nous arrange le plus ici est la norme infinie, pour laquelle une suite de matrices converge si et seulement si les suites des coefficients convergent.

On va poser $(B_p) = (M - A_p)$ pour se ramener à des matrices symétriques. Pour l'odre que l'on a défini, la nouvelle suite est décroissante, et les hypothèses nous donnent pour tout $p \in \mathbf{N}$ et pour tout $X \in \mathbf{R}^n$

$$X^T(B_{p+1} - B_p)X = -X^T(A_{p+1} - A_p)X \leq 0 \quad \text{et} \quad X^T(B_p)X \geq 0$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, la suite (de réels) $(X^T B_p X)_p$ est décroissante et minorée, elle converge. Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose la forme quadratique $q_p : X \in \mathbf{R}^n \mapsto X^T B_p X$, de forme polaire φ_p. On sait

$$\forall X, Y \in \mathbf{R}^n,\ \frac{1}{4}[q_p(X+Y) - q_p(X-Y)] = \varphi_p(X,Y)$$

En prenant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on obtient

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \frac{1}{4}[q_p(E_i+E_j) - q_p(E_i-E_j)] = \varphi_p(E_i,E_j) = [B_p]_{i,j}$$

Mais sachant que $q_p(E_i + E_j)$ et $q_p(E_i - E_j)$ ont une limite finie, on en déduit que $([B_p]_{i,j})$ converge pour tout i, j, soit que (B_p) converge, ou encore que (A_p) converge.

8.4 Convexité (1)

Énoncé. *Montrer que l'application* $\varphi : S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{tr}(\exp(S)) \in \mathbf{R}$ *est convexe.*

Éléments de réponse (À rédiger).

8.5 Convexité (2)

Énoncé. *Soit* $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$. *Posons* $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^n$.

(i) Montrer que J *est strictement convexe.*

(ii) Montrer que $J(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$.

(iii) En déduire que J *admet un unique minimum sur* $\mathbf{R}^n$.

Éléments de réponse. (i) J est différentiable, et son gradient en x est $\nabla J(x) = Ax - b$ pour $x \in \mathbf{R}^n$. Cela donne $\langle \nabla J(y) - \nabla J(x), y - x\rangle = \langle A(y-x), y-x\rangle$, et on vérifie que $x \mapsto \sqrt{\langle Ax, x\rangle}$ est bien définie et définit une norme, qui est alors équivalente à $\|\cdot\|_2$, d'où l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \langle \nabla J(y) - \nabla J(x), y - x\rangle \geq \alpha^2 \|y - x\|^2$$

et on peut montrer que cela suffit pour que J soit strictement convexe (voir par exemple l'épreuve de Mathématiques C, ENS 2019).

(ii) C'est une conséquence directe de la convexité.

(iii) Prendre α un élément de l'image de J, et prendre B une boule fermée de rayon assez grand de sorte que α soit dans $J(B)$. Comme on est en dimension finie, B est compact, J admet un minimum sur B. Par coercivité de J, B peut-être en plus choisi de sorte que si $x \notin B$, $\|J(x)\| \geq \alpha + 1$, ce qui montre que le minimum sur B est un minimum global. L'unicité est une conséquence directe de la stricte convexité.

8.6 Croissance de la trace de l'exponentielle

Énoncé. *Soit* $n \in \mathbf{N}^*$.

(i) Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. *Montrer qu'il existe* $\mathbf{R} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ *tel que* $R^2 = U$ *puis que* $\mathrm{tr}(UV) \geq 0$.

(ii) Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ *et* $f : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *dérivable. Montrer que* $\varphi : t \in \mathbf{R} \mapsto \mathrm{tr}(P(f(t)))$ *est dérivable et calculer* f'.

(iii) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ *tels que* $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. *Montrer*

$$\mathrm{tr}(\exp(A)) \leq \mathrm{tr}(\exp(B))$$

Éléments de réponse. (i) L'existence d'une racine carrée de matrices symétriques positives est un classique certainement présent dans votre cours, que je ne vais pas refaire ici. Soient R, S symétriques positives telles que $R^2 = U$ et $S^2 = V$. On a alors

$$\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}(RRSS) = \mathrm{tr}(RSSR) = \mathrm{tr}(RS(RS)^T) \geq 0$$

(ii) Comme tr est linéaire, il suffit de montrer que $t \mapsto P(f(t))$ est dérivable. On va vérifier la dérivabilité de $t \mapsto f(t)^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, et on déduira que ça vaut pour tout polynôme en faisant des combinaisons linéaires. On pose alors $p_k : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto M^k$, on doit montrer que $\psi : p_k \circ f$ est dérivable. L'application p_k est différentiable sur tout $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \mathrm{d}(p_k)_M(H) = \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}$$

De sorte que, d'après le théorème des fonctions composées, ψ soit différentiable

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \psi'(t) = \mathrm{d}(p_k \circ f)_t(1) = \mathrm{d}(p_k)_{f(t)}(f'(t))$$

et ainsi

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \psi'(t) = \sum_{i=0}^{k-1} f(t)^i f'(t) f(t)^{k-1-i}$$

Et finalement, la linéarité de tr donne la dérivabilité de φ et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = \operatorname{tr}(\psi'(t)) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{i=0}^{k-1} f(t)^i f'(t) f(t)^{k-1-i}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{tr}(f(t)^i f'(t) f(t)^{k-1-i})\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{tr}(f(t)^{k-1} f'(t))\\ &= k \operatorname{tr}(f(t)^{k-1} f'(t))\end{aligned}$$

Donc en fait, pour un P quelconque, φ est dérivable et $\varphi'(t) = \operatorname{tr}(P'(f(t))f'(t))$ pour tout t.

(iii) On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \frac{X^n}{n!}$. Posons $f : t \in [0,1] \mapsto A + t(B-A)$ et $\varphi_n : t \in [0,1] \mapsto \operatorname{tr}(P_n(f(t)))$. Pour tout $n \geq 1$, φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\varphi_n'(t) = \operatorname{tr}(P_{n-1}(f(t))(B-A))$. Par continuité de tr, la série $\sum \varphi_n$ converge simplement vers $t \in [0,1] \mapsto \operatorname{tr}(\exp(f(t)))$, et, si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ |\varphi_n'(t)| &\leq \|\operatorname{tr}\|_{(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))'} \|P_{n-1}(f(t)(B-A))\|\\ &\leq \|\operatorname{tr}\|_{(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))'} \|B-A\| \, P_{n-1}(\|f(t)\|)\end{aligned}$$

La croissances des fonctions polynomiales réelles associées aux P_n montre $P_n(\|f(t)\|) \leq P_n(\|f\|_{L^\infty([0,1],\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))})$. D'où

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \|\varphi_n'\|_{L^\infty([0,1],\mathbf{R})} \leq \|\operatorname{tr}\|_{(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))'} \|B-A\| \, P_n(\|f\|_{L^\infty([0,1],\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))})$$

Ceci montre que $\sum \varphi_n'$ converge uniformément sur $[0,1]$, et en prenant la limite point par point, on voit que cette sérive converge uniformément vers $t \in [0,1] \mapsto \operatorname{tr}(\exp(f(t))(B-A))$.

D'après le théorème de dérivabilité des suites et séries de fonctions, on montre alors que $\sum \varphi_n$ converge uniformément vers une fonction dérivable et que $(\sum \varphi_n)' = \sum \varphi_n'$, soit que $t \in [0,1] \mapsto \operatorname{tr}(\exp(f(t)))$ est dérivable de dérivée $t \in [0,1] \mapsto \operatorname{tr}(\exp(f(t))(B-A))$.

Avec le théorème spectral, on montre que $\exp(\mathcal{S}_n(\mathbf{R})) \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, d'où $\exp(A + t(B-A)) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ pour tout $t \in [0,1]$, mais comme $B - A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$, on a en fait $\varphi'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et ainsi φ est croissante sur $[0,1]$, soit

$$\operatorname{tr}(\exp(A)) = \varphi(0) \leq \varphi(1) = \operatorname{tr}(\exp(B))$$

9 Calcul différentiel

9.1 $\mathcal{C}^1 \implies$ localement lipschitzien

Énoncé. *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to R^n$. On dit que f est localement lipschitzienne si pour tout $y_0 \in U$, il existe $V \subseteq U$ un voisiage de y_0 et $L_{y_0} \geq 0$ tels que pour tous $x, y \in V$, $\|f(x) - f(y)\| \leq L_{y_0} \|x - y\|$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est localement lipschitzienne.*

Éléments de réponse. Soit $y_0 \in U$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V = B(y_0, \varepsilon) \subseteq U$. On prend alors $x, y \in V$ et on pose $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f(x + t(y-x))$, $\mathcal{C}^1$ par composition, de dérivée $\varphi'(t) = \mathrm{d}f_{\varphi(t)}(y - x)$. On a alors

$$\forall t \in [0,1],\ \left\|\mathrm{d}f_{\varphi(t)}(y-x)\right\| \leq \left\|\mathrm{d}f_{\varphi(t)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)} \|y - x\|$$

et *df* étant continue, et φ étant à valeurs dans un compact, $\left\|\mathrm{d}f_{\varphi(t)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)}$ est majorée par une constante L_{y_0} sur $[0,1]$. On a ensuite

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \left\|\int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \int_0^1 \left\|\varphi'(t)\right\| \mathrm{d}t \leq L_{y_0} \|y - x\|$$

et ceci vaut pour tous $x, y \in V$. Cela achève de démontrer la thèse de l'énoncé.

9.2 Généralisation du théorème de Rolle

Énoncé. *On note B (resp. B_f) la boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. Soit $f : B_f \to \mathbf{R}$ continue sur B_f, différentiable sur B, constante sur $\mathbf{S}^{n-1}$. Montrer que $\mathrm{d}f$ s'annule sur B.*

Éléments de réponse. En effet, B_f étant compact ($\mathbf{R}^n$ est de dimension finie, pardi) et f étant continue sur B_f à valeurs réelles, f est bornée sur B_f et on peut noter $f(x_0) = m = \min f$ et $f(x_1) = M = \max f$ (les min et max étant pris sur B_f). Deux cas de figure se présentent :

- Soit $m = M$, alors f est constante sur tout B_f et le résultat est trivial ;
- soit $m < M$, et nécessairement $x_1 \notin \mathbf{S}^{n-1}$ ou $x_0 \notin \mathbf{S}^{n-1}$ car f y est constante. Si par exemple $x_0 \notin \mathbf{S}^{n-1}$, alors $x_0 \in B$, donc f admet un extremum local en x_0 sur l'ouvert B, et alors $\mathrm{d}f_{x_0} = 0$.

10 Équations différentielles

10.1 Une équation différentielle

Énoncé. *Soit* $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. *Soit* $M : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *dérivable et telle que*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall t \in \mathbf{R},\ M'(t) = SM(t)S \\ M(0) = I_n \end{array} \right\}$$

Déterminer $M(t)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Éléments de réponse (À rédiger).

11 Probabilités, dénombrement

11.1 Calcul d'espérence et de variance (1)

Énoncé. *Soit $(X_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose*

$$N_n = \mathrm{Card}\{X_1,\dots,X_n\}$$

Calculer $\mathbb{E}(N_n)$ et $\mathbb{V}(N_n)$ et en donner des équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

Éléments de réponse. On va noter, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $S_k=\sum \mathbf{1}_{X_i=k}$, et alors

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{S_k\geq 1}$$

D'où, par linéarité de l'espérence

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S_k\geq 1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k\geq 1)$$

Or

$$\mathbb{P}(S_k\geq 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X_i=k)\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\neq k)$$

D'où $\mathbb{P}(S_k)=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ pour tout k, soit $\mathbb{E}(N_n)=n\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right]$.

On expolite aussi la linéarité de l'espérence pour calculer la variance. On a

$$\mathbb{V}(N_n)=\mathbb{E}(N_n^2)-\mathbb{E}(N_n)^2$$

Mais

$$N_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{S_k\geq 1}^2 + 2\sum_{k<l}\mathbf{1}_{S_k\geq 1}\mathbf{1}_{S_l\geq 1}$$

Donc $N_n^2 = N_n + 2\sum_{k<l}\mathbf{1}_{S_k\geq 1}\mathbf{1}_{S_l\geq 1}$ et

$$\mathbb{E}(N_n^2)=\mathbb{E}(N_n)+2\sum_{k<l}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S_k\geq 1}\mathbf{1}_{S_l\geq 1})$$

Puis $E(\mathbf{1}_{S_k\geq 1}\mathbf{1}_{S_l\geq 1})=\mathbb{P}([\mathbf{1}_{S_k\geq 1}=1]\cap[\mathbf{1}_{S_l\geq 1}=1])$. Or

$$\begin{aligned}[\mathbf{1}_{S_k\geq 1}=1]\cap[\mathbf{1}_{S_l\geq 1}=1] &= \left[\bigcup_{i=1}^{n}(X_i=k)\right]\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}(X_i=l)\right]\\ &= \bigcup_{i\neq j}(X_i=k)\cap(X_j=l)\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}([\mathbf{1}_{S_k\geq 1}=1]\cap[\mathbf{1}_{S_l\geq 1}=1])=(n^2-n)\frac{1}{n^2}$. Finalement,

$$\mathbb{E}(N_n^2)=\mathbb{E}(N_n)+(n-1)^2$$

Soit $\mathbb{V}(N_n)=\mathbb{E}(N_n)(1-\mathbb{E}(N_n))+(n-1)^2$.

Donnons à présent des équivalents à ces quantités. On a $\mathbb{E}(N_n)\sim n(1-e^{-1})$, et $\mathbb{V}(N_n)\sim n^2[1-(1-e^{-1})^2]$.

11.2 Calcul d'espérence et de variance (2)

Énoncé. *On note N_n le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Calculer l'espérence et la variance de N_n.*

Éléments de réponse. Comme dans l'exercice précédent, on va exploiter la linéarité de l'espérence. On prend S une permutation aléatoire et on écrit

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{S(k)=k}$$

Ainsi, par linéarité de l'espérence

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S(k) = k)$$

Maintenant, à k fixé, que vaut $\mathbb{P}(S(k) = k)$? Comme S suit une loi uniforme, on cherche alors le nombre de permutations dans $\mathfrak{S}_n$ fixant k. On considère l'application $\theta i \in [\![1, n]\!] \mapsto \mathbf{1}_{i<k} i + \mathbf{1}_{i>k}(i-1)$, et on pose $\Gamma : \sigma \in \mathfrak{S}_{n-1} \mapsto [l \in [\![1, n]\!] \mapsto \mathbf{1}_{l\neq k} \sigma \circ \theta(l) + \mathbf{1}_{l=k} k] \in \mathfrak{S}_n$. On vérifie facilement que cette application réalise une bijection entre l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ fixant et k et les permutations de $\mathfrak{S}_{n-1}$ (pour $n \geq 2$) ; on en déduit $\mathbb{P}(S(k) = k) = 1/n$, puis $\mathbb{E}(N_n) = 1$.

Pour la variance, on a

$$\mathbb{V}(N_n) = \mathbb{E}(N_n^2) - \mathbb{E}(N_n)^2 = \mathbb{E}(N_n^2) - 1$$

Mais

$$N_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{S(k)=k} + 2 \sum_{k<l} \mathbf{1}_{S(k)=k} \mathbf{1}_{S(l)=l}$$

Donc $\mathbb{E}(N_n^2) = \mathbb{E}(N_n) + 2 \sum_{k<l} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S(k)=k} \mathbf{1}_{S(l)=l})$. Or pour $k < l$, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S(k)=k} \mathbf{1}_{S(l)=l}) = \mathbb{P}([S(k) = k] \cap [S(l) = l])$. Comme plus haut, on cherche cette fois-ci à compter les permutations qui fixent deux points ; on laisse au lecteur les sois de vérifier qu'elles sont au nombre de $(n-2)!$, et alors

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S(k)=k} \mathbf{1}_{S(l)=l}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

Soit $\mathbb{E}(N_n^2) = \mathbb{E}(N_n) + 2 \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n(n-1)} = 1 + 1 = 2$. Finalement, $\mathbb{V}(N_n) = \mathbb{E}(N_n^2) - 1 = 2 - 1 = 1$.

12 Miscellaneous

12.1 Cardinal maximal d'une partie fade

Énoncé. *Une partie A de $\mathbf{N}$ est dite fade si pour tous $x, y \in A$, $x + y \notin A$. Calculer le cardinal maximal d'une partie fade incluse dans $[\![1, n]\!]$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.*

Éléments de réponse. Soit A une partie fade de $[\![1, n]\!]$. Notons a le minimum de A, et notons $D = \{x - a,\ x \in A,\ x > a\}$. A étant fade, on a $A \cap D = \varnothing$, d'où $\operatorname{Card} D \cup A = \operatorname{Card} D + \operatorname{Card} A = 2 \operatorname{Card} A - 1$. Mais aussi $D \cup A \subseteq [\![1, n]\!]$, donc $n \geq 2 \operatorname{Card} A - 1$, d'où $\frac{n+1}{2} \geq \operatorname{Card} A$.

On voit alors que toute partie fade de $[\![1, n]\!]$ est de cardinal plus petit que $\frac{n+1}{2}$, mais on peut exhiber une partie de $[\![1, n]\!]$ de cardinal $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$: c'est le nombre d'entiers impairs dans $[\![1, n]\!]$, et des nombres impairs forment toujours une partie fade (une somme de deux impairs est paire, pardi !).

Finalement, on en conclut que le cardinal maximal d'une partie fade est $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

12.2 Dérivée seconde

Énoncé. *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ avec $a < b$. Lorsque la limite existe, on note $\Delta f(x)$ la quantité*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

— *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, montre que Δf est bien définie sur (a, b) et est continue.*
— *Si Δf est bien définie et nulle sur (a, b), montre que f est affine.*
— *Si Δf est bien définie et continue sur (a, b), montrer que f y est $\mathcal{C}^2$.*

Éléments de réponse (À rédiger).