Un exercice de khôlle (pas si) redoutable

Amar AHMANE
MP2I

26 novembre 2021

Enoncé Soient E un ensemble, $f, g \in \mathcal{F}(E, E)$ deux applications vérifiant

$$f \circ g \circ f = g \tag{1}$$
$$g \circ f \circ g = f \tag{2}$$

Montrer que si f est injective ou surjective, alors f et g sont bijectives et

$$f \circ f = g \circ g = g^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1} \tag{3}$$

Réponse rédigée On montre d'abord que $f \circ f = g \circ g$.
Soit $x \in E$, on a $g \circ f \circ g(x) = f(x)$. En applicant f, on a $f \circ g \circ f \circ g(x) = f \circ f(x)$, mais d'après (1), on a $g \circ g(x) = f \circ f(x)$.
On montre aussi que si f et g sont bijectives, alors on a (3). Supposons que f et g sont bijectives, alors les applications réciproques f^{-1} et g^{-1} existent et on a

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f &= g \\ f^{-1} \circ f \circ g \circ f &= f^{-1} \circ g \\ g \circ f &= f^{-1} \circ g \end{aligned}$$

D'après (2), on a $g \circ f = g \circ g \circ f \circ g$ donc $g \circ g \circ f \circ g = f^{-1} \circ g$ donc en composant à droite avec g^{-1} on a $g \circ g \circ f \circ g \circ g^{-1} = f^{-1} \circ g \circ g^{-1}$ donc $g \circ g \circ f = f^{-1}$. On compose avec f^{-1} à droite, d'où $g \circ g \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1}$ donc $g \circ g = f^{-1} \circ f^{-1}$ donc $f \circ f = f^{-1} \circ f^{-1}$ et $(g \circ g)^{-1} = (f^{-1} \circ f^{-1})^{-1}$ donc $f \circ f = g^{-1} \circ g^{-1}$ donc $g \circ g = g^{-1} \circ g^{-1}$. On a bien (3).

1. On traîte ici le cas où f est injective.
   - Montrons que g est surjective. Soit $y \in E$, on a
     $$g \circ f \circ g(y) = f(y)$$
     D'après (2), on a
     $$f \circ g \circ f \circ f \circ g(y) = f(y)$$
     Par injectivité de f, on a
     $$g(\underbrace{f \circ f \circ g(y)}_{:=x \in E}) = y$$
     Donc g est surjective.
   - Montrons que g est injective. Soient $x, x' \in E$, on suppose que $g(x) = g(x')$, on a alors
     $$\begin{aligned} g(x) &= g(x') \\ f \circ g(x) &= f \circ g(x') \\ g \circ f \circ g(x) &= g \circ f \circ g(x') \\ f(x) &= f(x') \\ x &= x' \end{aligned}$$
   - Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$, on a
     $$f \circ g \circ f(y) = g(y)$$

D'après (1), on a

$$g \circ f \circ g \circ g \circ f(y) = g(y)$$

Par injectivité de g, on a

$$f(\underbrace{g \circ g \circ f(y)}_{:=x \in E}) = y$$

Donc f est surjective.

Ainsi, on a que f et g sont bijectives, d'où (3).

2. On traître ici le cas où f est surjective.
   - Montrons que g est surjective. Soit $y \in E$, il existe alors d'après la surjectivité de f un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ainsi $y = g \circ f \circ g(x)$ d'après (2), d'où, en posant $x' = f(g(x))$, l'existence d'un antécédant à y par g.
   - Montrons que f est injective. Soient $y, y' \in E$, on suppose que $f(y) = f(y')$. Il existe $x, x' \in E$ tels que $g(x) = y$ et $g(x') = y'$ par surjectivité de g, ainsi on a

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y') \\ f \circ g(x) &= f \circ g(x') \\ g \circ f \circ g(x) &= g \circ f \circ g(x') \\ f(x) &= f(x') \\ g \circ f(x) &= g \circ f(x') \\ f \circ g \circ f(x) &= f \circ g \circ f(x') \\ g(x) &= g(x') \\ y &= y' \end{aligned}$$

   - L'injectivité de f nous donne directement l'injectivité de g, en effet, c'est la même preuve qu'on a faite un peu plus haut.

   Ainsi, on a que f et g sont bijectives, d'où (3).