Élève 1*

Exercice. Soit C un compact convexe d'un evn E. Soit $f : C \to C$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

Indication : on pourra utiliser $f_n : x \in C \mapsto \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ où $a \in C$ pour $n \geq 1$.

Éléments de réponse. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie sur C, à valeurs dans C en vertu de la convexité de cette partie et est $1 - \frac{1}{n}$ lipschitzienne.

Comme $1 - \frac{1}{n} < 1$ et C est compact, on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach-Picard pour montrer que f_n admet un point fixe $x_n \in C$. Quitte à extraire une suite convergente de (x_n) (à valeurs dans le compact C), on peut supposer que (x_n) converge vers $x \in C$. De plus, la continuité de f nous donne $x_n = f_n(x_n) \to f(x)$ à mesure que $n \to \infty$, donc, par unicité de la limite, $f(x) = x$. □

Remarques. Le théorème du point fixe de Banach-Picard peut s'énoncer comme suit : si $f : E \to E$ est une application k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$ où E est un espace métrique complet, alors f admet un unique point fixe sur E. Si vous savez ce qu'est un espace métrique complet, il reste à comprendre pourquoi j'invoque ce théorème pour expliquer que mes fonctions définies sur un compact admettent un point fixe. Sinon, sachez que si on remplace E par une partie compacte d'un espace vectoriel normé, alors le théorème reste vrai. Dans tous les cas, la démonstration vous est laissée en exercice.

Exercice. Soit E un evn de dimension infinie et K un compact de E. Montrer que $E \backslash K$ est connexe par arcs.

On admettra pour cela qu'en dimension infinie, $S(0, 1)$ n'est pas compacte.

Éléments de réponse. D'abord, voyons pourquoi cela est faux en dimension finie. Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$, on pose $K = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \in [1, 2]\}$, qui est compact. Un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ entre deux points x et y de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| < 1$ et $\|y\| > 2$ passe nécessairement par K, puisque $\|\gamma\|$ est encore continue par continuité de la norme. Ainsi, $\mathbb{R}^n \backslash K$ n'est pas connexe par arcs.

Ce qui coince en dimension infinie, c'est que, pour n'importe quelle norme, K n'est pas compact, car sinon, $S(0, 2)$, qui est homéomorphe à $S(0, 1)$, serait compacte en tant que partie fermée incluse dans K, un compact, ce qui contredit la non-compacité de $S(0, 1)$.

Intuitivement, on comprend que, en dimension infinie, un compact aura du mal à remplir l'espace dans toutes les directions.

Soit alors un compact K de E evn de dimension infinie. Montrons que $E \backslash K$ est connexe par arcs.

On va montrer quelque chose de plus fort : pour tout point $x \in E \backslash K$, il existe une demi-droite partant de x qui ne rencontre pas K. Supposons le contraire. Cela veut dire que

$$\forall v \in E - \{0\}, \exists \lambda_v \in \mathbb{R}_+^*, \exists y_v \in K,\ x + \lambda_v v = y_v$$

Pour $v \in E$, on a alors $y_v - x = \lambda_v v$, soit, en passant à la norme, $\lambda_v \|v\| = \|y_v - x\|$. Si v est pris unitaire, alors on a $v = \frac{y_v - x}{\|y_v - x\|}$. L'application $\varphi : y \in K \mapsto \frac{y - x}{\|y - x\|}$ est bien définie, continue sur K et $\varphi(K) = S(0, 1)$ qui est alors compact comme image par une fonction continue d'un compact, ce qui n'est pas vrai.

Finalement, si $B(0, R)$ est une boule de rayon assez grand pour contenir K, alors tout point x de $E \backslash K$ admet un chemin continu qui part de x et finissant en un point de norme plus grande que R tout en restant dans $E \backslash K$, mais $E \backslash B(0, R)$ est connexe par arcs et inclus dans $E \backslash K$. En concaténant les bons chemins, on montre que $E \backslash K$ est bien connexe par arcs. □

Remarques. Pour montrer que $E \backslash B(0, R)$ est un connexe par arcs, on peut poser $(r, x) \in [R, +\infty[\times (E \backslash \{0\}) \mapsto r \frac{x}{\|x\|}$.

Élève 2*

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est simplement bornée, i.e telle que pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ est bornée. Démontrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ et une fonction croissante $f : I \to \mathbb{R}$, telle que cette sous-suite converge simplement vers f.

Éléments de réponse. On va d'abord extraire une suite qui converge simplement de (g_n) où $g_n = f_{n|\mathbb{Q}\cap I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ça, il suffit de faire une extraction diagonale, sachant que la suite de fonctions (f_n) est simplement bornée.

On suppose alors qu'on a une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une application $g : \mathbb{Q}\cap I \to \mathbb{R}$ telle que $(g_{\varphi(n)})$ converge simplement vers g sur $\mathbb{Q}\cap I$. Les fonctions g_n étant croissantes par restriction, on montre facilement que g l'est aussi. Cela nous amène à poser

$$f(x) = \sup_{\substack{y\in\mathbb{Q}\cap I \\ y\leq x}} g(x)$$

La fonction f ainsi définie est encore croissante.

Soit x un point où f est continue. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x, si $a, b \in \mathbb{Q}\cap I$ avec $a \leq x \leq b$ sont assez proches de x, alors $f(b) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon$. Puis $f_{\varphi(n)}(l)$ tend vers $f(l)$ pour $l = a, b$ par construction de φ, donc, à partir d'un certain rang

$$f_{\varphi(n)}(b) - 2\varepsilon \leq f(x) \leq f_{\varphi(n)}(a) + 2\varepsilon$$

puis par croissance des f_n, alors à partir d'un certain rang

$$f_{\varphi(n)}(x) - 2\varepsilon \leq f(x) \leq f_{\varphi(n)}(x) + 2\varepsilon$$

Il reste à traiter les points de discontinuité de f. Comme f est croissante, ils sont en un nombre au plus dénombrable, on peut alors faire une autre extraction diagonale et conclure. □

Remarques. Pourquoi une applicaiton $f : I \to \mathbb{R}$ croissante n'a qu'un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité ? Par croissance de f, cette fonction admet des limites à gauche et à droite en tout point. Notons D l'ensemble des points de discontinuité de f. Pour $x \in D$, $f(x-) < f(x+)$ (car sinon f serait continue en x, puis l'inégalité est dans ce sens en vertu de la croissance de f), donc on peut choisir $\varphi(x) \in]f(x-), f(x+)[$ un rationnel. On a ainsi défini une fonction $\varphi : D \to \mathbb{Q}$. On remarque alors qu'elle est injective, en vertu de la croissance de f : si $x \neq y$ sont des éléments de D, avec $x < y$ par exemple, alors $\varphi(x) < f(x+) \leq f(y-) < \varphi(y)$. Finalement $\operatorname{Card} D = \operatorname{Card} \varphi(D)$, mais $\varphi(D) \subset \mathbb{Q}$, donc D est au plus dénombrable.

Exercice. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ continue. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts de E. Montrer que

$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$$

Éléments de réponse. Si un des K_n est vide, l'égalité est trivialement vraie. Vérifions cela si pour tout n, K_n est non vide. L'inclusion $\subseteq$ est toujours vraie. Il reste à prouver l'inclusion récirpoque. Soit $y \in \bigcap_n f(K_n)$. Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K_n$ tel que $y = f(x_n)$. Par décroissance de la suite $(K_n)_n$, les x_n sont tous dans K_0, un compact. On peut en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge, de limite notée x. En regardant la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq p}$, on montre que $x \in K_{\varphi(p)}$ pour tout entier p, mais comme φ est une extractrice, $\varphi(p) \geq p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc $x \in K_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ par décroissance de $(K_n)_n$. D'où $y = f(x)$ par continuité de f donc $y \in f\left(\bigcap_n K_n\right)$. □

Élève 3*

Exercice. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & x \in [0, 1/n] \\ f_n(x) = \frac{1}{n\ln(1-1/nx)} & x > 1/n \end{cases}$$

Étudier la limite simple, puis la convergence uniforme, de la suite de fonctions (f_n).

Remarques. Attention ! Pour cet exercice, j'avais proposé d'écrire $\frac{1}{n\ln(1-1/nx)} + x = \frac{1}{n}\varphi(nx)$ avec $\varphi(t) = \frac{1}{n\ln(1-1/t)} + t$ pour avoir la convergence uniforme. Pour pouvoir conclure, il faut bien faire attention à montrer que $|\varphi(t)| \to 1/2$ à mesure que $t \to \infty$ et NON $|\varphi(nx)| \to 1/2$ à mesure que $n \to \infty$ pour tout x, puisque dans le deuxième cas on ne se débarrasse pas de la dépendance en x !

Exercice. Existe-t-il une fonction continue injective $[0,1]^2 \to [0,1]$?

Élève 1

Exercice CCP.

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Démontrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est encore connexe par arcs.

Exercice. Soit $D : R[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme de dérivation sur $R[X]$. Étudier la continuité de D lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme

(i) $N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)|$;
(ii) $N_2(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

Élève 2

Exercice CCP. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (resp. F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont équivalentes
   P1 f est continue sur E.
   P2 f est continue en 0_E.
   P3 $\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_k$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie sur E par
$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
   Démontrer que φ est linéaire puis continue.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Étudier la continuité de $\varphi : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P(X + 1)$.

2. Étudier la continuité de $\psi_A : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto AP$ pour $A \in E$.

Éléments de réponse.

1. L'application linéaire φ n'est pas continue. Sinon, il existe un réel de continuité C tel que pour tout polynôme P,
$$\|P(X+1)\|_1 \leq C\|P\|_1$$
Mais alors, en appliquant cela pour $P_n = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$n \leq \|(X+1)^n\|_1 \leq C\|X^n\|_1 = C$$
ce qui donne une absurdité...
2. On peut montrer, en écrivant les coefficients d'un produit de polynômes, que
$$\|AP\|_1 \leq (\deg A + 1)\|A\|_\infty \|P\|$$
ce qui montre que ψ est continue, puisque ψ est linéaire et que la ligne précédente vaut pour tout polynôme P.

$\square$

Élève 3

Exercice CCP. Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose, pour toute suite $u \in E$, $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   b) Prouver que pour toute suite $u \in E$, $\sum u_n 2^{-(n+1)}$ converge.
   c) On pose, pour toute suite $u \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n 2^{-(n+1)}$. Prouver que f est continue sur E.

Exercice. Soit $a \geq 0$. On pose $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^a x^n (1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite f_n converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice. Sur un evn E, montrer que si deux normes sont équivalentes, alors les normes subordonnées sur $\mathcal{L}_c(E)$ associées sont encore équivalentes.

Éléments de réponse. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes sur E. Il existe alors $a > 0$ tel que
$$\frac{1}{a}\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq a\|\cdot\|_2$$
Soit $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$. Pour $x \in E$, on a
$$\frac{1}{a}\|\varphi(x)\|_2 \leq \|\varphi(x)\|_1 \leq |||\varphi|||_1 \, \|x\|_1 \leq a \, |||\varphi|||_1 \, \|x\|_2$$
Ceci valant pour tout $x \in E$, cela montre que
$$|||\varphi|||_2 \leq a^2 \, |||\varphi|||_1$$
Le raisonnement est le même en permutant les indices 1 et 2, d'où
$$|||\varphi|||_1 \leq a^2 \, |||\varphi|||_2$$
Finalement, pour tout endomorphisme continu φ de E, on a
$$\frac{1}{a^2} \, |||\varphi|||_1 \leq |||\varphi|||_2 \leq a^2 \, |||\varphi|||_1$$

$\square$