Élève 1*

Exercice. Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-lip avec le même $k > 0$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Remarques.

1. Le résultat de l'exercice devient totalement faux si on remplace $[a,b]$ par un intervalle quelconque. Pouvez-vous voir pourquoi ?
2. Le résultat subsiste si au lieu du caractère k-lipschitzien, on demande aux fonctions f_n d'être continues et convexes et à la fonction f d'être continue. Petit exercice : le démontrer à la maison.

Exercice. Convergence simple, normale et uniforme de $\sum \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

Élève 2*

Exercice.

1. Que dire de l'intersection d'une suite *décroissante* de compacts *non vides* dans un evn ?
2. En déduire que si $(f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R})$ est une suite *croissante* de fonctions *continues* qui converge simplement vers une fonction f *continue* sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

Éléments de réponse.

1. L'intersection est non vide.
2. Par croissance de la suite (f_n), la convergence uniforme est équivalente à
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N, \quad f_n + \varepsilon > f$$
puisque $f \geq f_n$ pour tout entier $n \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on va montrer le reste de la phrase ci-dessus par l'absurde. Supposons sa négation, autrement dit, si on pose $K_n = \{x \in [a,b]\colon f_n(x) + \varepsilon \leq f(x)\}$,
$$\forall N \geq 0,\ \exists n \geq N,\ K_n \neq \emptyset \tag{1}$$
Via (1), on peut trouver une applicaiton $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{\varphi(n)} \neq \emptyset$. On peut voir que les $K_{\varphi(n)}$ sont des compacts en tant que fermés (vu la continuité de $f_{\varphi(n)} - f$) du compact $[a,b]$, et que la suite $(K_{\varphi(n)})$ est décroissante en vertu de la croissance de (f_n). On se retrouve alors dans le cadre des hypothèses de la première question, on peut alors trouver un élément $x \in \bigcap_n K_{\varphi(n)}$. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{\varphi(n)}(x) + \varepsilon \leq f(x)$$
Soit, en passant à la limite $f(x) + \varepsilon \leq f(x)$, soit $\varepsilon \leq 0$, ce qui n'est pas. En conclusion, (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

$\square$

Exercice. On définit une suite (u_n) de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 0$,
$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que (u_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Démontrer que la limite uniforme de (u_n) est solution de l'équation différentielle $u'(x) = u(x - x^2)$.

Éléments de réponse. Vous pouvez trouver une correction d'une version plus détaillée de l'exercice ici (exercice 21). $\square$

Élève 3

Exercice CCP.

1. Rappeler et démontrer le CSSA.
2. On pose $f_n(x) = (-1)^n e^{-nx}/n$.
   a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$.
   b) Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'applicaiton

$$u_n\colon\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue f, mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum(-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.

Éléments de réponse. Dans la première question, la convergence uniforme fait défaut parce que pour $x > 0$ et $p \geq 1$

$$\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+n^2} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+4p^2} \geq \frac{px}{x^2+4p^2}$$

soit que pour $p \geq 1$, en prenant $x = p$, on a

$$\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2+n^2} \geq \frac{1}{5}$$

□

Élève 4

Exercice CCP. 1. Soit $(f_n\colon D \to \mathbb{C})$ une suite de fonctions, avec $D \subset \mathbb{C}$, telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur D. Démontrer que f_n converge uniformément sur D et donner sa limite.

2. On considère la suite de fonctions $(f_n\colon x \in \mathbb{R}^+ \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}})$.
   a) Démontrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
   b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément ? Justifier.

Exercice. Montrer que $x \mapsto S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Éléments de réponse. En posant $f_n(x) = \frac{1}{n^3+n^2x} = \frac{1}{n^3} u_n(x)$ et $u_n(x) = \frac{1}{1+x/n}$, on peut montrer que

$$\forall n \geq 0,\ \forall k \geq 0,\ \forall x \geq 0,\ u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n^k} u_n(x)^{k+1}$$

Et on peut en déduire le résultat de l'énoncé. □

Élève 5

Exercice CCP.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un segment $[a, b]$ non vide.
   Démontrer que si (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.
2. Montrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Exercice. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^x}{x^n}$$

Déterminer le domaine D de définition de f et étudier la continuité de f sur D.

Éléments de réponse. On peut vérifier que pour $|x| > 1$, on a $|n^x/x^n| = o(1/n^2)$. Puis le CSSA permet de montrer que f est définie en -1. Si $|x| < 1$, alors clairement $n^x/x^n \to +\infty$ à mesure que $n \to +\infty$ et f n'est pas non plus déifinie en 1. On en déduit que $D =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$.

Pour la continuité, on obtient facilement la convergence uniforme sur tout segment : je le laisse en exercice pour vous. □

Élève 6

Exercice CCP. On considère la série de fonctions de terme général définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

Lorsque la série converge, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1. Démontrer que S est bien définie sur $[0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln(n+1) - H_n$, où H_n est la somme harmonique d'ordre n. Démontrer que (u_n) converge et en déduire un équivalent de H_n lorsque $n \to \infty$.
3. Démontrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

Exercice. Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur un intervalle I. Soit (x_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $x \in I$. Démontrer que $(f_n(x_n))$ converge et déterminer sa limite.