Élèves 1* & 4*

Exercice. Soit H un préhilbertien réel et T un endomorphisme continu auto-adjoint de H. Montrer que $\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.

Éléments de réponse. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que pour tout $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$, on a

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$$

Par passage au sup, on obtient une première inégalité.

Puis, si x et y désignent deux points de H de norme 1, alors

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &\leq S\|x+y\|^2 + S\|x-y\|^2 \end{aligned}$$

où on aura posé $S = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$ (c'est dans la première égalité qu'on utilise que $T^* = T$). Via l'identité du parallélogramme, on obtient en fait $\langle Tx, y\rangle \leq S$. Ainsi, pour x de norme 1 et en prenant $y = Tx/\|Tx\|$ si $Tx \neq 0$, on obtient

$$\|Tx\| = \langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\rangle \leq S$$

Donc, par passage au sup, $\|T\| \leq S$, d'où la deuxième inégalité. □

Élèves 2* & 5*

Exercice. Soit E préhilbertien, $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E de norme 1. Montrer que si pour tout $x \in E$, on a l'égalité

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$$

alors $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice. Calculer la norme subordonnée à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Éléments de réponse. On note $\|\cdot\|$ la norme liée au produit scalaire canonnique sur $\mathbb{R}^n$. On note encore $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à cette norme, qui induit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par définition, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. On a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, {}^tAAx\rangle$$

On pose $S = {}^tAA$, qui est symétrique (clair) positive (via l'égalité précédente). Par le théorème spectral (hors programme pour cette semaine), il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée dans laquelle la matrice de $x \mapsto Sx$ est diagonale (on pourra noter $\lambda_i = \langle Se_i, e_i\rangle$). Ainsi, si $x \in \mathbb{R}^n$ est de norme 1, alors

$$\|Ax\|^2 = \langle Sx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle^2 \leq \rho(S) \tag{1}$$

où $\rho(S)$ désigne le rayon spectral de S. Ainsi, par passage au sup, on montre que $\|A\| \leq \sqrt{\rho(S)}$. Enfin, si i_0 désigne un indice tel que $\lambda_{i_0} = \rho(S)$, alors $\|Ae_{i_0}\|^2 = \rho(S)$, donc, comme $\|e_{i_0}\| = 1$, on conclut qu'en fait $\|A\| = \sqrt{\rho(S)}$. □

Élève 3* & 6*

Exercice. Calculer

$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + \dots + a_nx^n)\,\mathrm{d}x$$

Éléments de réponse. Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$, on remarque alors que

$$\|p_F(-1)+1\|^2 = \inf_{P\in F} \|P+1\|^2 = \inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+\dots+a_nx^n)\,\mathrm{d}x$$

où p_F désigne la projection orthogonale sur F. Le but est alors de calculer $\|p_F(-1)+1\|^2 = \langle p_F(-1)+1, p_F(-1)+1\rangle = \langle p_F(-1)+1, 1\rangle$. Notons $a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $p_F(-1) = a_1X + \dots + a_nX^n$. D'une part, comme $p_F(-1)+1 \in F^\perp$, alors pour $k = 1, \dots, n$

$$0 = \langle p_F(-1)+1, X^k\rangle = k! + \sum_{i=1}^n a_i(i+k)! \tag{1}$$

D'autre part

$$\langle p_F(-1)+1, 1\rangle = 1 + \sum_{i=1}^n a_i i! \tag{2}$$

À ce stade, on peut poser $Q = 1 + \sum_{i=1}^n a_i(X+1)\dots(X+i)$. L'égalité (2) donne $Q(0) = \|1+p_F(-1)\|^2$ et les conditions dans (1) donnent pour $k = 1, \dots, n$, $Q(k) = 0$. Ainsi, soit $a_n = 0$ et alors $Q = 0$, ce qui n'est pas car par exemple $Q(-1) = 1$, soit $a_n \neq 0$ et alors $Q = a_n(X-1)\dots(X-n)$. Comme $Q(-1) = 1$, on en déduit la valeur de a_n et ainsi que $Q(0) = \frac{1}{n+1}$, d'où la réponse. $\square$