Élève 1*

Exercice. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que $b_n > 0$ pour tout n et que la série $\sum b_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell,$$
montrer que
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \ell$$
2. Si on suppose simplement qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_0 + \cdots + A_{n-1}}{n} = \ell$$
montrer que $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \ell$.
3. Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, montrer les équivalents
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^{a^n} \sim \frac{\ln(1-x)}{\ln a}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n+1} \sim \frac{1}{2}$$

Élève 2*

Exercice. Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer pour tout $r \in \left]0, R\right[$
$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta$$
2. On suppose à présent que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $R \geq 1$ et que f est bornée sur le disque unité ouvert. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Éléments de réponse. Pour l'égalité de Parseval, on peut d'abord commencer par écrire
$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} f(re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta$$
Mais comme $|\overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} f(re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta| \leq \|f\|_\infty^{D_f(0,r)} |a_k| r^k$, il y a convergence normale donc uniforme sur $[0, 2\pi]$ de la série dont on prend l'intégrale donc
$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta$$
De la même manière, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p e^{i(p-k)\theta} \,\mathrm{d}\theta$$
Là, l'égalité $|a_p r^p e^{i(p-k)\theta}| = |a_p r^p|$ montre que l'on peut intervertir l'intégrale et la somme pour retrouver
$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(p-k)\theta} \,\mathrm{d}\theta}_{=\delta_{p,k} 2\pi}$$
De sorte que, finalement
$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k a_k r^k 2\pi = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}$$

Pour faire la deuxième question, on remarque que, comme f est bornée sur le disque unité ouvert, alors pour tout $r \in \left]0, 1\right[$, en se servant de l'égalité de

Parseval,

$$\forall N \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 r^{2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq M, \quad \text{pour un certain } M \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, les sommes partielles évaluées en $r \in]0,1[$ sont uniformément bornées (en r et en N). En prenant la limite à mesure que $r \to 1$ des sommes partielles pour tout N, on montre que la suite $(\sum_{k=0}^{N} |a_k|^2)$ est bornée, donc convergente. Autrement dit $|a_k|^2 \to 0$ ou $a_k \to 0$, mais (a_k) est une suite d'entiers, elle est donc nécessairement nulle a.p.d.c.r. □

Remarques. Remarquons que cela veut dire que si une série entière à coefficients entiers a un rayon > 1, c'est forcément un polynôme.

Exercice. Rayon de convergence de $\sum e^{n \sin n} x^n$.

Éléments de réponse. Déjà,

$$e^{n \sin n} e^{-n} = e^{n(\sin n - 1)} \leq 1, \quad \text{car } n(\sin n - 1) \leq 0$$

Donc le rayon de convergence de la série entière étudiée est au moins égal à $1/e$. On va montrer qu'il est égal à $1/e$. Pour cela, on va justifier de l'existence d'une suite d'entiers (n_k), strictement croissante et telle que $\sin n_k \to 1$ à mesure que $k \to \infty$.

On rappelle un résultat sur les sous-groues de $(\mathbb{R}, +)$: ils sont soit de la forme $\alpha\,\mathbb{Z}$ (on dit d'un sous-groupe de cette forme qu'il est discret), soit denses dans $\mathbb{R}$. On peut alors voir que dès que α et un réel incommensurable à π (c'est-à-dire dont le quotient par π ne donne pas un rationnel), le sous-groupe $\alpha\,\mathbb{Z} + 2\pi\,\mathbb{Z}$ n'est pas discret (sinon on montrerait que α est commensurable à π), donc dense dans $\mathbb{R}$. On peut justifier qu'il en est de même pour $\alpha\,\mathbb{N} + 2\pi\,\mathbb{Z}$ pour tout α non commensurable à π. Dès lors, $\mathbb{N} + 2\pi\,\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et par continuité de la fonction sin, $\sin(\mathbb{N} + 2\pi\,\mathbb{Z}) = \sin(\mathbb{N})$ est dense dans $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$. Ce qui montre que 1 est bien valeur d'adhérence de $(\sin n)_n$.

Ceci étant, on en conclut que le rayon de convergence de notre série est bien $1/e$ comme suit : si $r > 1/e$, alors

$$e^{n_k \sin(n_k)} r^{n_k} = e^{n_k(\sin(n_k) + \ln r)}$$

Comme $\ln r > -1$, $\sin(n_k) + \ln r \to 1 + \ln r > 0$, donc $e^{n_k \sin(n_k)} r^{n_k} \to +\infty$ à mesure que $k \to \infty$. Mais toute suite extraite d'une suite bornée est bornée, donc par contraposée, $(e^{n \sin n} r^n)$ n'est pas bornée. D'où le résultat. □

Remarques. Le fait que comme $\alpha\,\mathbb{Z} + 2\pi\,\mathbb{Z}$ est dense pour $\alpha \notin \pi\,\mathbb{Q}$, $\alpha\,\mathbb{N} + 2\pi\,\mathbb{Z}$ est encore dense n'est pas tout à fait trivial. Pour le montrer, on pourra prendre $a < b$ et choisir $x = \alpha s + 2\pi t$ vérifiant $0 < x < b - a$ et discriminer selon que $s \geq 0$ ou $s < 0$ pour construire un élément de $\alpha\,\mathbb{N} + 2\pi\,\mathbb{Z}$ qui est dans $]a, b[$.

Élève 3

Exercice CCP. Soit (a_n) une suite de complexes telle que $(|a_{n+1}/a_n|)$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence, que l'on note R.
2. Démontrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

Exercice. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum H_n x^n$.

Élève 4*

Question de cours. Justifier que $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ et $x \mapsto \frac{x-\mathrm{sh}(x)}{x^3}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

Exercice. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et, pour $|x| < 1$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.

1. Donner une suite réelle (a_n) telle que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}$.
3. La série $\sum a_n$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

Éléments de réponse. Pour la deuxième question, on peut commencer par écrire

$$n^{\alpha+1} a_n = n^{\alpha+1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} = n^{\alpha+1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha+1}{k} - 1 \right)$$

On notera p un entier tel que $\alpha + 1 \leq p$, il existera alors un réel $c > 0$ tel que

$$n^{\alpha+1} |a_n| = c n^{1+\alpha} \prod_{k=p}^{n} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k} \right)$$

pour tout entier $n \geq p$. On passera au ln pour obtenir

$$v_n := \ln(n^{1+\alpha}|a_n|) = \ln(c) + (1+\alpha)\ln(n) + \sum_{k=p}^{n} \ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (1+\alpha)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right) \\ &= \frac{\alpha+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha+1}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{\alpha+1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que (v_n) converge, ou que $(n^{1+\alpha}|a_n|)$ converge par continuité de exp. $\square$

Élève 5

Exercice CCP.

1. Définition du rayon de convergence.
2. Rayon de $\sum \frac{z^{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$, $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et $\sum \cos nz^n$.

Exercice. Soit $a_n = 2^{-n} \int_0^1 (1+t^2)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (a_n) converge.
2. Étudier la série $\sum (-1)^n a_n$.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. On note R son rayon de convergence et f sa somme.
   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $a_n \geq 1/(2n+1)$.
   b) En déduire R.
   c) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

Élève 6

Exercice CCP.

Soit (a_n) une suite de complexes telle que $(|a_{n+1}/a_n|)$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence, que l'on note R.
2. Démontrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

Exercice. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum H_n x^n$.