Élève 1*

Exercice. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ borné. Montrer que les valeurs propres des matrices de G sont toutes de module 1. Si de plus G est supposé inclus dans $B(I_n, \sqrt{2})$ pour une certaine norme d'opérateur, montrer que G est trivial.

Éléments de réponse. Montrons que les valeurs propres des matrices de G sont toutes de module 1. En effet, si A est une matrice de G, alors la suite $(A^p)_p$ est bornée. Trigonaliser A et choisir pour norme la norme infinie permet de montrer que si λ est valeur propre, alors la suite $(\lambda^p)_p$ est encore bornée, ce qui montre que toutes les valeurs propres sont de module plus petit que 1. Ensuite, considérer $A^{-1} \in G$ permet de montrer que si λ est valeur propre de A, alors λ^{-1} est valeur propre de A^{-1}, ce qui montre que $|\lambda^{-1}| \leq 1$, donc toutes les valeurs propres de A sont de module plus grand que 1 (notons que comme A est inversible, vu $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, toutes ses valeurs propres sont non nulles, donc il est licite de considérer leurs inverses).

À présent, on suppose de plus que $G \subset B(I_n, \sqrt{2})$, pour une certaine norme d'opérateur $\|\cdot\|$ (norme subordonnée à une norme qu'on notera également $\|\cdot\|$). Soit $A \in G$. Soit λ une valeur propre et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$|1-\lambda| \, \|x\| = \|(A - I_n)x\| \leq \|A - I_n\| \, \|x\| < \sqrt{2} \, \|x\|$$

Soit, comme $x \neq 0$ et par séparation de la norme

$$|1-\lambda| < \sqrt{2} \tag{1}$$

La première partie de l'exercice donne $\lambda = e^{i\theta}$ avec un certain $\theta \in [0, 2\pi[$. La relation (1) montre

$$|\sin(\theta/2)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $\tau = \theta/2$ et on remarque que, comme ce qui vient d'être fait vaut pour toute valeur propre de toute matrice de G et que pour tout entier ≥ 0, λ^p est valeur propre de A^p, alors on obtient également que

$$|\sin(p\tau)| < \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

Si θ est incomensurable à π, alors τ l'est aussi et on peut extraire de $(\sin(p\tau))$ une suite qui tend vers 1 (des rappels concernant cet argument sont déjà présents ici), ce qui n'est pas possible vu (2). Assurément, θ s'écrit comme un rationnel que multiplie π. En fait, un peu de trigonométrie nous permet de montrer que ce rationnel est forcément nul (on laisse ça en exercice au lecteur, ce n'est franchement pas très difficile). On montre ainsi que 1 est la seule valeur propre possible pour toutes les matrices de G.

Maintenant, place à l'étape finale. Soit $A \in G$, on sait que $\chi_A = (X-1)^n$ d'après ce qui précède, donc par Cayley Hamilton, $N := A - I_n$ est nilpotente, on a donc la décomposition suivante : $A = I_n + N$. Pour conclure, on a juste besoin de montrer que $N = 0$, autrement dit que son indice de nilpotence est nul. Si ce n'est pas le cas, alors il sera possible de trigonaliser N par blocs en mettant en haut à gauche la matrice compagnon de $X^m - 1$, que l'on notera C, où m désignera l'indice de nilpotence non nul de N (donc C est une matrice de taille non nulle...). Alors, il suffit d'écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ (I_m + C)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} C^k$$

pour se rendre compte que la suite de matrices $((I_m + C)^p)$ n'est pas bornée, ce qui montre également, en utilisant l'équivalence des normes et la continuité de la multiplication par une matrice, que (A^p) n'est pas bornée, ce qui contredit évidemment nos hypothèses de départ. C'est donc gagné, $N = 0$ et $A = I_n$. Le groupe G est trivial. $\square$

Élève 2

Exercice CCP. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A.

Exercice. L'équation

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possède-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Éléments de réponse. On montre que toutes les valeurs propres complexes d'une matrice solution sont nulles, donc si X est une matrice solution, elle est nilpotente, donc $X^4 = 0$, ce qui n'est pas. Il n'y a donc pas de solutions. □

Élève 3

Exercice CCP. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. A est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Déterminer μ_A.
4. Calculer les puissances de A.

Exercice. Quelle est la trace d'une matrice nilpotente ? Donner un contre-exemple à la réciproque. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = 0$, montrer que A est nilpotente.

Les exercices suivants on été posés aux élèves du groupe 6 lors d'un rattrapage la semaine du 6 janvier.

Élève 1*

Exercice (Oral Mines Ponts). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Si A est inversible, montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 l'est.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 l'est et que $\ker A = \ker A^2$. Que dire si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Élève 2

Exercice CCP. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. A est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Déterminer μ_A.
4. Calculer les puissances de A.

Exercice. L'équation

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possède-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Élève 3*

Exercice. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, \dots, n$ où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On notera P_σ la matrice de f_σ dans la base canonique. On note $e = \sum_{i=1}^n e_i$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de P_σ.
2. On pose $f = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$.
   Démontrer que f est le projecteur sur $\mathbb{R}\, e$ parallèlement à H.
3. Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par tous les f_σ.