Exercice Bonus – DS 2

Soit f une fonction périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de f. D'après Heine, f étant continue sur $[-2T, 2T]$ segment, elle y est uniformément continue. Donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in [-2T, 2T],\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad (*)$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\eta \leq \dfrac{T}{2}$ vérifiant (*) (on peut le faire puisque $\dfrac{T}{2} > 0$ et si $\eta > \dfrac{T}{2}$, $\dfrac{T}{2}$ fonctionne, et sinon $\eta \leq \dfrac{T}{2}$ et tout va bien).

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, supposons que $|x - y| \leq \eta \leq \dfrac{T}{2}$. Il existe un unique entier naturel n tel que $nT \leq x < (n+1)T$, d'où $0 \leq x - nT < T$. Mais on a aussi

$$|y - nT| = |y - x + x - nT| \leq |y - x| + |x - nT| \leq \eta + T \leq \frac{3T}{2} \leq 2T$$

Donc $x - nT, y - nT \in [-2T, 2T]$, mais aussi $|x - nT - (y - nT)| = |x - y| \leq \eta$, donc $|f(x - nT) - f(y - nT)| < \epsilon$ d'après (*). Or $|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| < \epsilon$.

On a ainsi montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

f est donc bien uniformément continue. $\triangle$