GÉNÉRALISATION D'UN RÉSULTAT DE COMPLEXITÉ À UNE CLASSE PLUS LARGE D'ALGORITHMES RÉCURSIFS

AMAR AHMANE & PIERRE-GABRIEL BERLUREAU

Abstract. Si on note $\mathcal{A}$ un algorithme prenant en entrée un seul paramètre de taille n. Dans l'hypothèse où $\mathcal{A}$ est algorithme récursif utilisant la stratégie *diviser pour régner*, on montrera dans le Théorème I que, dans des conditions particulières, la complexité de l'algorithme est quasi-linéaire et on précisera la constante.

1. Introduction

Ce qui a motivé la recherche et la preuve du petit résultat généralisé qui sera exposé plus tard est l'exercice de Khôlle qui a été posé à Louis Thevenet. On considère l'algorithme suivant :

Algorithm 1

```
procedure FOO(lst)
    if LENGTH(lst) = 0 then
        return 1
    m ← LENGTH(lst)/3
    return FOO(lst[:m]) + FOO(lst[m:])
```

On arrive très bien à dénombrer les différentes tailles qui apparaissent à un certain étage de l'arbre d'appel de cet algorithme récursif. On a alors le résultat suivant

Proposition 1. *L'Algorithme 1 a une complexité en* $\mathcal{O}\left(n \log_{\frac{3}{2}}(n)\right)$.

L'idée était alors de considérer le cas général décrit ci-dessous.

2. Résultat généralisé

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{A}$ un algorithme récursif utilisant la stratégie *diviser pour régner*. Un premier résultat que l'on va énoncer et démontrer ici consistera à dénombrer des objets d'une certaine forme dans un type d'arbres particulier. En réalité, on s'intéressera à des arbres à (au plus) m fils par noeud, avec $m \geqslant 2$ un entier naturel, définis par récurrence d'une façon qui sera précisée plus tard. Mais avant de s'y attaquer, précisons quelques notations et définitions locales.

Définition 2. Soit E un ensemble. On appelle arbre sur E un arbre dont les noeuds sont des éléments de E. On notera $\mathfrak{A}_E$ l'ensemble des arbres sur E.

Définition 3. Soit E, F deux ensembles et $f \in F^E$. Alors, lorsque $A \in \mathfrak{A}_E$, on note $\tilde{f} : \mathfrak{A}_E \to \mathfrak{A}_F$ l'application qui à A associe un arbre sur F dont les noeuds sont les noeuds de A auxquels on aura appliqué f.

Proposition-Définition 4. *Soit $m \geqslant 2$, $X = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbf{R}^*)^m$. On définit par récurrence un arbre parfait infini sur $\mathbf{R}^m$, et on le note A_X, de la façon suivante :*

- *La racine de A_X est $0_{\mathbf{R}^m}$.*
- *Pour tout noeud $N = (n_1, \ldots, n_m)$ de A_X, N possède exactement m fils et pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, le ième fils est le noeud $N_i = (n_1, \ldots, n_i + x_i, \ldots, n_m)$.*

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbf{N}^m$ tel que $i_1 + \cdots + i_m = k$, le nombre de noeuds de valeur $(i_1x_1, i_2x_2, \ldots, i_mx_m)$ à l'étage k est

$$\frac{k!}{i_1! \ldots i_m!}$$

Note : l'étage 0 correspond à celui de la racine.

Preuve On montre le résultat par récurrence sur k.

- Pour $k = 0$, l'étage 0 correspond à celui de la racine, de valeur $0_{\mathbf{R}^m}$, qui apparaît bien $1 = \frac{0!}{0! \ldots 0!}$, $0_{\mathbf{R}^m}$ étant le seul m-uplet d'entiers naturels de somme 0.
- Soit $k \in \mathbf{N}$. On suppose notre proposition vraie pour l'étage k. Soit $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbf{N}^m$ tel que $i_1 + \cdots + i_m = k + 1$. Il est clair que $(i_1, \ldots, i_m)$ n'est pas le m-uplet nul, ainsi, l'ensemble $K = \{j \in [\![1, m]\!] | i_j \neq 0\}$ est non vide; on a alors nécessairement l'existence d'un $j \in K$ tel que un noeud de valeur $(i_1x_1, \ldots, i_mx_m)$ soit le $j$ème fils de $(i_1x_1, \ldots, (i_j - 1)x_j, \ldots, i_mx_m)$. Ainsi, les noeuds de cette valeur sont au nombre de

$$\sum_{j \in K} \frac{k!}{i_1! \ldots (i_j - 1)! \ldots i_m!}$$

  Puisque, par hypothèse de récurrence, il y a $\frac{k!}{i_1! \ldots (i_j-1)! \ldots i_m!}$ de noeuds de valeur $(i_1x_1, \ldots, (i_j - 1)x_j, \ldots, i_mx_m)$ pour $j \in K$. Or,

$$\sum_{j \in K} \frac{k!}{i_1! \ldots (i_j - 1)! \ldots i_m!} = \frac{\sum_{j \in K} i_j(k!)}{i_1! \ldots i_m!} = \frac{(k!) \overbrace{\sum_{j \in K} i_j}^{=k+1}}{i_1! \ldots i_m!} = \frac{(k+1)!}{i_1! \ldots i_m!}$$

- D'après le principe de récurrence, on a montré le résultat voulu pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$\square$

Proposition 5. *Soient E un ensemble, $m \in \mathbf{N}^*$, $m \geqslant 2$, et f une injection de $\mathbf{R}^m$ dans E. Soit $X = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbf{R}^*)^m$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbf{N}^m$ tel que $i_1 + \cdots + i_m = k$, $f(i_1x_1, \ldots, i_mx_m)$ apparaît $\frac{k!}{i_1! \ldots i_m!}$ fois au kème étage de $\tilde{f}(A_X)$.*

Preuve En effet, pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbf{N}^m$ tel que $i_1 + \cdots + i_m = k$, $f(i_1x_1, \ldots, i_mx_m)$ a exactement un antécédant (par injectivité de f) qui apparaît $\frac{k!}{i_1! \ldots i_m!}$ fois au $k$ème étage de A_X. $\square$

Théorème I. *Soit* $m \in \mathbf{N}^*$, $m \geqslant 2$, $p \in \mathbf{N}^* \setminus \{m\}$ *et* $(q_1, \ldots, q_m) \in (\mathbf{N}^*)^m$ *un* m*-uplet d'entiers non tous égaux tels que*

$$\sum_{k=1}^{m} q_k = p$$

Soit $\mathcal{A}$ *un algorithme récursif prenant un seul paramètre et utilisant la stratégie diviser pour régner et tel que pour une entrée de taille* n

$$T(n) = \sum_{k=1}^{m} T\left(\frac{q_k n}{p}\right) + \mathcal{O}(1)$$

où $T(n)$ *représente le nombre d'opérations élémentaires effectuées par* $\mathcal{A}$ *pour une entrée de taille* n*. Alors*

$$T(n) = \mathcal{O}\left(n \log_{\frac{p}{\max(q_1,\ldots,q_m)}}(n)\right)$$

Proof of Theorem I. le grand moment □