

Exercices de Khôlle en Mathématiques MPI*

Rassemblés par Amar AHMANE

Mis à jour le : 16 juin 2023

Table des matières

Structures algébriques	3
1.1 Axiomes superflus ?	3
Arithmétique dans \mathbb{Z}	4
2.1 Écriture en base r	4
Fonctions d'une variable	5
3.1 Dérivée seconde	5
Algèbre linéaire	6
4.1 Formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(MM') = \varphi(M'M)$	6
4.2 Familles libres de matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	6
4.3 Combinaison linéaire d'exponentielles	7
Espaces Vectoriels Normés	9
5.1 CNS pour qu'un sous-groupe de \mathbb{C}^* soit fermé	9
5.2 Parties de $GL_n(\mathbb{R})$ compactes, non vides et stables par produit	9
5.3 Une norme de $C^2([0, 1], \mathbb{R})$	10
5.4 L'ensemble des polynômes unitaires scindés est un fermé	10
5.5 Somme d'une partie fermée et d'une partie compacte	11
5.6 Topologie du groupe orthogonal	11
5.7 Fonctions injectives de $[0, 1]^2$ dans \mathbb{R}	12
Suites et Séries de fonctions	13
6.1 Un exercice classique	13
6.2 Une question ouverte	13
6.3 Un exemple simple	14
Séries entières	15
7.1 Calcul d'équivalent (1)	15
7.2 Calcul d'équivalent (2)	17
7.3 Produit de Cauchy	18

7.4	Développement en série entière de la fonction tangente	19
7.5	Majoration des dérivées intermédiaires	19
Réduction d'endomorphismes		20
8.1	CNS valeur propre commune	20
8.2	$P(A)$ diagonalisable et $P'(A)$ inversible $\implies A$ diagonalisable	21
8.3	Diagonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$	21
8.4	Matrice semblable à son double	22
8.5	Exercice sans nom	22
8.6	Coefficients du polynôme caractéristique	23
8.7	Limite d'une suite de matrices	23
8.8	CNS de diagonalisabilité	23
Intégrales généralisées, Intégrales à paramètres		24
9.1	Une Intégrale de Frullani	24
9.2	Calcul d'équivalent (1)	24
9.3	Calcul d'équivalent (2)	24
9.4	Une intégrale à paramètre	24
Équations différentielles		26
10.1	Une équation différentielle	26
Espaces euclidiens		27
11.1	Matrices M telles que $M + I_n$ est inversible	27
11.2	Angeline	27
11.3	Un TLM pour les matrices	27
11.4	Convexité (1)	29
11.5	Convexité (2)	30
11.6	Croissance de la trace de l'exponentielle	31
Dénombrement, probabilités		32
12.1	Cardinal maximal d'une partie fade	32
12.2	Calcul d'espérance et de variance (1)	33
12.3	Calcul d'espérance et de variance (2)	33

x

※ Structures algébriques

1.1 Axiomes superflus ?

Exercice donné à Louis Marshal. Remarque : un élément x dans un magma E est dit régulier s'il vérifie

$$\forall y, z \in E, (xy = xz \implies y = z \quad \text{et} \quad yx = zx \implies y = z)$$

Soit E un magma fini. Montrer que si tout élément de E est régulier alors E est un groupe. Que dire si E est infini ?

Solution : Soit $x \in E$. E étant fini, on peut alors extraire de la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite constante (c.f. preuve compacité d'une partie finie), et donc il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > 2n$ et $x^m = x^n$. Il vient alors que x^{m-n} est idempotent ; en effet

$$(x^{m-n})^2 = x^{2m-2n} = x^m x^{m-2n} = x^n x^{m-2n} = x^{m-n}$$

On pose $e = x^{n-m}$. On montre que pour tout $a \in E$, $ea = ae = a$. En effet, soit $a \in E$, on a

$$(ae)(ea) = a(e^2)a = aea$$

Par régularité de a à gauche, on obtient $e(ea) = ea$, puis, par régularité de e à gauche, $ea = a$. On refait la même chose, par régularité de a à droite, $ae = a$ puis, par régularité de e à droite, $ae = a$. E muni de sa l.c.i est donc un monoïde.

Soit à présent $a \in E$. Montrons que a est inversible. E étant fini, l'application $n \mapsto a^n$ ne peut être injective et donc il existe $n \neq m$ tels que $a^n = a^m$. On suppose par exemple $n > m$ et on écrit

$$a^{n-m} a^m = a^m = e a^m$$

et on utilise la régularité à droite de a^m pour obtenir $a^{n-m} = e$. On écrit ensuite

$$e = a^{n-m} = a(a^{n-m-1})$$

Comme $n - m - 1 \geq 0$, ce qu'on a écrit est licite, et a admet bien un inverse. □

※ Arithmétique dans \mathbb{Z}

De la période de préparation aux oraux

2.1 Écriture en base r

Soient $m, M, r \in \mathbb{N}$, avec $r \geq 3$, $k_0, \dots, k_M \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=0}^M k_i r^i = \sum_{i=0}^m r^i$.

Montrer que $\sum_{i=0}^M |k_i| \geq m + 1$.

Solution : On peut considérer, au lieu de la suite finie k_0, \dots, k_M , la suite nulle à partir d'un certain rang $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où on a posé $\forall i \geq M + 1, k_i = 0$.

On pose $x = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i r^i$. Pour $i \in \mathbb{N}$, si $k_i \geq 0$, il existe une unique suite $(a_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ d'entiers positifs plus petits que $r - 1$ nulle à partir d'un certain rang telle que

$$k_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} r^j$$

De même, si $k_i < 0$, $-k_i$ se retrouve dans le cas précédent et il existe une unique suite $(-a_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang d'entiers positifs plus petits que $r - 1$ vérifiant

$$-k_i = \sum_{j=0}^{+\infty} (-a_{i,j}) r^j$$

□

※ Fonctions d'une variable

De la période de préparation aux oraux

3.1 Dérivée seconde

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Pour $x \in]a, b[$, lorsque la limite existe, on note

$$\Delta(f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

1. On suppose que f est C^2 sur $]a, b[$. Montrer que $\Delta(f)$ est définie continue sur $]a, b[$.
2. On suppose que $\Delta(f)$ est définie nulle sur $]a, b[$. Montrer que f est affine sur $[a, b]$.
3. On suppose que $\Delta(f)$ est définie continue sur $]a, b[$. Montrer que f est C^2 sur $]a, b[$.

| **Solution :** On peut considérer, au lieu de la suite finie k_0, \dots, k_M ,

□

※ Algèbre linéaire

4.1 Formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(MM') = \varphi(M'M)$

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(MM') = \varphi(M'M) \quad \text{et} \quad \varphi(I_n) = n$$

On pose $A = \{MM' - M'M, M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$.

1. Montrer que $\text{Vect}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$.
2. En déduire que $\varphi = \text{tr}$.

Solution :

1. $A \subset \text{Vect}(A)$, donc par définition, $\forall i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} \in A$.
Il s'ensuit que

$$\forall i, l \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq l \implies E_{il} \in \text{Vect}(A) \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, E_{ii} - E_{11} \in \text{Vect}(A)$$

On pose $\mathcal{F} = (E_{ij})_{i \neq j} \cup (E_{ii} - E_{11})_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$. Cette famille est clairement libre, et contient $n^2 - 1$ vecteurs de $\text{Vect}(A)$, d'où $\dim \text{Vect}(A) \geq n^2 - 1$. Or $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker tr}$, et tr étant une forme linéaire non nulle, on a $\dim \text{Ker tr} = n^2 - 1$, donc $\dim \text{Vect}(A) \leq n^2 - 1$ donc $\dim \text{Vect}(A) = n^2 - 1 = \dim \text{Ker tr}$ puis $\text{Vect}(A) = \text{Ker tr}$.

2. De même que pour tr , on a $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker } \varphi$ donc $\text{Ker tr} \subset \text{Ker } \varphi$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$. Mais $\varphi(I_n) = n = \text{tr}(I_n)$ donc $n = \lambda n$ puis $\lambda = 1$.

□

4.2 Familles libres de matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(X_1, \dots, X_p) \in \mathbb{R}^n$ une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^n . Montrer que la famille $(X_1^t X_1, \dots, X_p^t X_p)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la réciproque.

Solution : Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $X_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)})$. On a alors,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, X_i^t X_i = (x_i^{(1)} X_i \mid \dots \mid x_i^{(n)} X_i)$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i^t X_i = 0$. Or, (X_1, \dots, X_p) formant une famille libre, aucun des vecteurs la constituant n'est nul, d'où

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists l_i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i^{(l_i)} \neq 0$$

Ainsi, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, en regardant que la l_i ème colonne dans la somme nulle écrite plus haut, on a

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j^{(l_i)} X_j = 0$$

(X_1, \dots, X_p) étant libre, on a $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_j x_j^{(l_i)} = 0$, en particulier $\lambda_i x_i^{(l_i)} = 0$ donc $\lambda_i = 0$ ($x_i^{l_i} \neq 0$). Finalement, ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0$$

et $(X_1^t X_1, \dots, X_p^t X_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il faut bien sûr préciser que la taille des matrices $X_i^t X_i$ est de $n \times n$, mais cela est bien clair). \square

4.3 Combinaison linéaire d'exponentielles

Soient $n \geq 0, x_0, \dots, x_n$ des réels tous non nuls vérifiant

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \quad i \neq j \implies (x_i - x_j)(x_i + x_j) \neq 0$$

On suppose qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes, $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{itx_k} \in \mathbb{R}$$

Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \lambda_k \in \mathbb{R}$

Solution : On pose $\varphi : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{itx_k}$. φ est une application C^∞ comme combinaison linéaire de telles fonctions. φ est de la variable réelle et est à valeurs dans \mathbb{R} par hypothèse, il vient alors que ses dérivées successives sont à valeurs réelles. Puis

$$\forall p \geq 0, \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varphi^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (ix_k)^p e^{itx_k} \in \mathbb{R}$$

Pour les valeurs paires de $p \geq 0$, i^p est réel non nul et donc, en divisant par i^p , la combinaison linéaire reste dans \mathbb{R} , on peut alors écrire

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k^{2p} e^{itx_k} \in \mathbb{R}$$

On évalue en 0 ci-dessus et on obtient

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \quad \exists \alpha_p \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k^{2p} = \alpha_p$$

Matriciellement, cela s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{2n} & x_1^{2n} & \dots & x_n^{2n} \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est inversible, on aura montré le résultat voulu, puisqu'il suffirait de multiplier par son inverse, qui serait une matrice réelle car A est réelle.

Montrons alors que A est inversible en calculant son déterminant.

On note

$$D(x_0, \dots, x_n) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{2n} & x_1^{2n} & \dots & x_n^{2n} \end{vmatrix}$$

On considère le polynôme $P = D(x_0, \dots, x_{n-1}, X)$, où $D(x_0, \dots, x_{n-1}, X)$ correspond au déterminant de la matrice A où on a remplacé la dernière colonne par la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{2n} \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement, en développant par rapport à cette dernière colonne, que P est bien un polynôme en l'indéterminée X , de degré $2n$, et de coefficient dominant $D(x_0, \dots, x_{n-1})$.

On remarque alors que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad P(x_k) = P(-x_k) = 0$$

Comme les x_k sont tous non nuls, et que de plus si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$ et $x_i \neq -x_j$ par hypothèse, on trouve alors $2n$ racines à P , qui est de degré $2n$. On a alors

$$P = \text{cd}(P) \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)(X + x_k)$$

$$\text{On a alors } D(x_0, \dots, x_n) = P(x_n) = D(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k)(x_n + x_k).$$

À l'aide d'une récurrence simple (laissée en exercice au lecteur) et en utilisant l'hypothèse sur les x_k , il vient que $\det(A) = D(x_0, \dots, x_k) \neq 0$, et donc A est inversible, d'où le résultat. \square

Soit f non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} telle que $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $f(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Solution : Commençons par quelque chose de naturel à faire. On a

$$f(I_n) = f(I_n^2) = (f(I_n))^2 \implies f(I_n) \in \{0, 1\}$$

Or, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = f(I_n)f(A)$, donc comme f est non constante, nécessairement $f(I_n) = 1$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrons les deux sens de l'équivalence demandée :

\Leftarrow Supposons $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors

$$1 = f(I_n) = f(AA^{-1}) = f(A)f(A^{-1})$$

Nécessairement, $f(A) \neq 0$.

\Rightarrow Par contraposée,

\square

※ Espaces Vectoriels Normés

5.1 CNS pour qu'un sous-groupe de \mathbb{C}^* soit fermé

Exercice donné par Duhalde à Amar en semaine 3.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $G_z = \{e^{itz}, t \in \mathbb{Z}\}$ soit un sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* .

Solution : On procède par analyse synthèse.

Analyse : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que G_z est un sous-groupe fermé de \mathbb{C} . Pour $t \in \mathbb{Z}$, on a $e^{tz} = e^{-bt} e^{ait}$. Montrons par l'absurde que $b = 0$. Supposons $b \neq 0$, traitons les deux cas possibles :

— Si $b > 0$, on prend $(t_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, $(e^{it_n z})$ est une suite d'éléments de G_z . Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|e^{it_n z}| = |e^{-bt_n} e^{iat_n}| = e^{-bt_n} \rightarrow 0$$

Donc $e^{it_n z} \rightarrow 0$ et, G_z étant fermé, $0 \in G_z$, ce qui est exclu.

— Si $b < 0$, on refait le même raisonnement en prenant $(t_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $-\infty$, et on a $0 \in G_z$, ce qui est exclu.

Donc le seul cas possible est $b = 0$.

Ainsi, $z \in \mathbb{R}$. Pour avoir plus d'intuition sur ce que peuvent être les solutions au problème, on peut regarder le cas où G_z est fini. Si G_z est fini (on écarte le cas $z = 0$ qui est trivial), c'est un sous-groupe fini de \mathbb{C}^* , donc, si on note n son cardinal, on a $G_z = \mathbb{U}_n$.

Soit alors $x \in G_z \setminus \{1\}$ tel qu'il existe $t \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x = e^{itz} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On a alors

$$\begin{aligned} e^{i(tz - \frac{2k\pi}{n})} = 0 &\implies tz - \frac{2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \\ &\implies \exists l \in \mathbb{Z}, z = \frac{2}{t} \left(l + \frac{2k}{n} \right) \pi \\ &\implies z \in \pi\mathbb{Q} \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $z \in \pi\mathbb{Q}$ suffit pour que G_z soit fini.

Synthèse : Soit $z \in \mathbb{R}$. Si $z \in \pi\mathbb{Q}$, G_z est fini, donc c'est un compact de \mathbb{C} comme partie finie de \mathbb{C} , donc est un fermé de \mathbb{C} . C'est aussi un sous-groupe de \mathbb{C}^* , donc z convient.

Sinon, $z \notin \pi\mathbb{Q}$. Montrons que dans ce cas G_z n'est pas un fermé de \mathbb{C} . En effet, si G_z est fermé, on peut montrer que $G_z = \mathbb{U}$. D'abord, $z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de \mathbb{R} , puisque sinon, on aurait, pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, $z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$, donc $z \in z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ et $2\pi \in z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$ donc il existe $k, l \in \mathbb{Z}^*$ (z et 2π sont non nuls) tels que $z = k\alpha$ et $2\pi = l\alpha$, d'où $z = \frac{2k\pi}{l} \in \pi\mathbb{Q}$ ce qui est exclu. La fonction $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix}$ étant continue, on a que $\phi(z\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) = G_z$ est dense dans $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$. En passant à l'adhérence, on a $G_z = \mathbb{U}$, ce qui est exclu, parce que, par exemple, $-1 \notin G_z$. \square

5.2 Parties de $GL_n(\mathbb{R})$ compactes, non vides et stables par produit

Exercice donné par Duhalde à Yanis en semaine 3.

Soit X une partie de $GL_n(\mathbb{R})$ non vide, compacte et stable par produit. Montrer que X est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Solution : Soit $A \in X$. On considère la suite d'éléments $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est une suite à éléments dans X , puisque $A \in X$ et X est stable par produit. De plus, X étant compacte, (A^n) admet une suite extraite convergente ; il existe alors $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, $B \in X$ telles que

$$A^{\varphi(n)} \longrightarrow B$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$A^{-p} A^{\varphi(n)} \longrightarrow A^{-p} B$$

Or, à partir d'un certain rang, on a $A^{-p} A^{\varphi(n)} \in X$ (il suffit d'avoir $\varphi(n) > p$), on a donc une suite d'éléments de X qui converge vers $A^{-p} B$, matrice qui est alors dans X puisque X est fermé. Ensuite, sachant l'expression suivante pour l'inverse d'une matrice :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com}(A)$$

on en déduit que le passage à l'inverse est continu, d'où que

$$A^{-\varphi(n)} \longrightarrow B^{-1}$$

Donc $A^{-\varphi(n)} B \longrightarrow B^{-1} B = I_n$ puis $A^{-1} A^{-\varphi(n)} B \longrightarrow A^{-1}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{-1} A^{-\varphi(n)} B = A^{-\varphi(n)-1} B \in X$, donc $A^{-1} \in X$ puisque X est fermé. Ainsi X est stable par produit et par passage à l'inverse, c'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. \square

5.3 Une norme de $C^2([0, 1], \mathbb{R})$

Exercice donné par Duhalde à PG en semaine 3.

On considère le $\mathbb{R} \text{ev } E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$ munit de la norme infinie. On pose $N : f \in E \mapsto \|f + 2f' + f''\|_\infty \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que N est une norme.
2. On pose $g = f + 2f' + f''$ pour $f \in \mathbb{E}$. Exprimer f en fonction de g .
3. N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Solution : [À rédiger] \square

5.4 L'ensemble des polynômes unitaires scindés est un fermé

Exercice donné à Shems en semaine 3.

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right\| = \max\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que \mathcal{U} l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ est fermé.
2. Soit $Q \in \mathcal{U}$ non constant, on note $p = \deg Q$. Montrer que

$$Q \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff \forall z \in \mathbb{C}, |Q(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^p$$

3. Montrer que \mathcal{S} , l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.

Solution : [À rédiger]

□

5.5 Somme d'une partie fermée et d'une partie compacte

Soient E un espace vectoriel normé, F une partie fermée de E et K une partie compacte de E . Montrer que $F + K$ est une partie fermée de E .

Solution : Il suffit de l'écrire. Soit (x_n) une suite d'éléments de $F + K$ qui converge vers $x \in E$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = y_n + z_n, \quad y_n \in F, z_n \in K$$

(z_n) est une suite d'éléments de K compact, donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $z \in K$ tels que $z_{\varphi(n)} \rightarrow z$. Or, on a également

$$x_{\varphi(n)} \rightarrow x$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - z_{\varphi(n)} \rightarrow x - z$. F étant fermé, il vient que $x - z \in F$, d'où $x \in F + K$. □

5.6 Topologie du groupe orthogonal

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que le groupe orthogonal est défini par

$$O_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M M = I_n\}$$

Cet ensemble est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Est-il connexe par arcs?

Solution : Il s'agit bien d'une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, on considère l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M M$. Cette application est continue car la transposition est continue (linéaire et dimension de l'espace de départ est finie) et la multiplication également (peut être justifié de la même manière...), puis $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, et $\{I_n\}$ est compact donc fermé, donc le groupe orthogonal est image réciproque d'un fermé par une fonction continue, et est donc fermé.

Pour la connexité par arcs, se référer au cours sur les espaces euclidiens. □

5.7 Fonctions injectives de $[0, 1]^2$ dans \mathbb{R}

Existe-t-il une application injective de $[0, 1]^2$ dans \mathbb{R} ?

Solution : La réponse est non. Par l'absurde : soit f une telle fonction (on suppose donc qu'il en existe). $[0, 1]^2$ est un compact connexe par arcs, donc, par continuité de f , il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([0, 1]^2) = [m, M]$. Comme f est injective et que $[0, 1]^2$ n'est pas réduit à un singleton, $m < M$. Soit alors $c \in]m, M[$, et on considère $x \in [0, 1]^2$ l'unique antécédent de c par f . On pose $A = [0, 1]^2 \setminus \{x\}$. Il est clair que A est connexe par arcs. Ainsi $f(A)$ est connexe par arcs par continuité de f , et donc $f(A)$ est un intervalle de \mathbb{R} . Comme $m, M \in f(A)$, f prend toutes les valeurs intermédiaires entre m et M sur A , donc en particulier il existe $y \in A$ tel que $f(y) = c$. Donc $x \neq y$ mais $f(x) = f(y)$, on viole donc l'injectivité de f , c'est exclu. \square

※ Suites et Séries de fonctions

6.1 Un exercice classique

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers f . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers x .

Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution : f étant limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est continue. Il vient alors que

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \quad (1)$$

Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Or, puisqu'il y a convergence uniforme, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Puis (1) donne que $|f(x_n) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par encadrement, on a $|f_n(x_n) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, soit

$$\boxed{f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)}$$

□

6.2 Une question ouverte

Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers \exp ?

Solution : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers \exp sur \mathbb{R} , soit

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}, |p_n(x) - \exp(x)| \leq \epsilon$$

Ainsi, si on "applique" cette phrase pour $\epsilon = 333$, on a l'existence de $n_0 \geq 0$ tel que, pour $n \geq n_0$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on ait $|p_n(x) - \exp(x)| \leq 333$. Mézalor

$$|p_n(x) - p_{n_0}(x)| \leq |p_n(x) - \exp(x)| + |p_{n_0}(x) - \exp(x)| \leq 666$$

Ceci valant pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que, pour tout $n \geq n_0$, le polynôme $p_n - p_{n_0}$ est borné sur \mathbb{R} , donc constant, d'où l'existence d'une suite de réels (α_n) telle que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}, p_n(x) - p_{n_0}(x) = \alpha_n$$

La suite $(p_n(69))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant, puisque CU implique CS, on a que la suite (α_n) converge également, il suffit d'évaluer la précédente expression en 69 ; on note α sa limite. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall n \geq n_0, p_n(x) - p_{n_0}(x) = \alpha_n$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\exp(x) = p_{n_0}(x) + \alpha$$

autrement dit, \exp est un polynôme, ce qui est exclu.

□

6.3 Un exemple simple

On considère la fonction définie par

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}$$

Déterminer le domaine D de définition de f et étudier la continuité de f sur D .

Solution : [À rédiger]

□

※ Séries entières

Exercice donné à Amar par Duhalde en semaine ?

7.1 Calcul d'équivalent (1)

On considère la fonction $f : x \in]-1, 1[\mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - (x \sin t)^2}}$.

1. f est-elle bien définie ?
2. f est-elle dse_0 ?
3. Donner un équivalent de f en 1.

Solution :

1. Oui. Pour $x \in]-1, 1[$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$1 - (x \sin t)^2 \geq 1 - x^2 > 0$$

d'où que $t \mapsto \sqrt{1 - (x \sin t)^2}$ est continue et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - (x \sin t)^2}}$ est bien définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'intégrale est bien définie. Ceci valant pour tout $x \in]-1, 1[$, f est bien définie.

2. Soit $x \in]-1, 1[$
Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|x \sin t| < 1$, donc, dse_0 usuel :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - (x \sin t)^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - i \right) \right) (-1)^n (x \sin t)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (2i + 1) \right) (-1)^n (x \sin t)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (x \sin t)^{2n} \end{aligned}$$

Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (x \sin t)^{2n}$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet, si $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &\leq \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} |x|^{2n} \\ \Rightarrow \|f_n\|_{\infty}^{[0, \frac{\pi}{2}]} &\leq \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} |x|^{2n} \leftarrow \begin{array}{l} \text{terme général} \\ \text{d'une série CA} \end{array} \end{aligned}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il

vient alors que

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$$

Mé زالور

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (x \sin t)^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} W_{2n} \binom{2n}{n} x^{2n} \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $x \in]-1, 1[$, on a que f est égale à la somme d'une série entière sur un domaine non trivial, d'où que f est dse₀.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{W_{2n}}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

Il vient alors que $a_n \sim \frac{1}{2n}$, et on pose $(b_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{2n} \right)_{n \geq 1}$.

Lemme : Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $a_n \sim b_n$ et que $b_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout entier n . Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont alors même rayon de convergence que l'on note R . Supposons que $R = 1$ et que $\sum b_n$ diverge. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sim_{1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Comme $a_n \sim b_n$, on sait l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, (1 - \epsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \epsilon)b_n$$

Soit $x \in]-1, 1[$, on sait la convergence absolue des séries entières sur $] -1, 1[$, d'où, en sommant de n_0 jusqu'à n pour un $n \geq n_0$ donné et en faisant tendre n vers $+\infty$, on a

$$-\epsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \epsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k$$

Il vient alors que

$$\left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \right| \leq \epsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leq \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

Puis

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right| &= \left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k x^k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \right| + \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k x^k \right|}_{:=\alpha} \end{aligned}$$

$$\leq \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k + \alpha$$

On remarque ensuite que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = +\infty$$

On laisse au lecteur les soins de justifier cela.

Ainsi, il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que si $x \in [x_0, 1[$, on ait $\alpha \leq \epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, puis

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k} \right| \leq 2\epsilon$$

D'où le résultat voulu. Ensuite, il est clair que, dans notre cas, $\sum b_n$ diverge, d'où que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^n = \frac{-1}{2} \ln(1-x)$$

□

Exercice donné à PG par Duhalde en semaine ?

7.2 Calcul d'équivalent (2)

Trouver un équivalent lorsque x tend vers 1 de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

Solution : On considère la fonction $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

Le rayon de convergence de la série ainsi définie est de 1, puisque l'on a

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, et on conclut avec le critère de D'Alembert.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. On a

$$\begin{aligned} xg(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} \right) x^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^{n+1} - x \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \\
&= f(x) - xf(x) + x \ln(1-x)
\end{aligned}$$

Comme $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$, on en déduit que g est définie en 1 et y est donc continue. Il vient alors que

$$xg(x) \underset{1^-}{=} o(\ln(1-x))$$

□

Exercice donné à Yanis par Duhalde en semaine ?

7.3 Produit de Cauchy

On définit la suite de réels $(u_n)_n$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_{n-k}u_k$$

Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ est non nul. Et on pose pour, $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$, alors

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$$

D'après le théorème de convergence pour les séries entières, la série $\sum u_{n+1} x^n$ converge absolument et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_{n-k} u_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$$

il s'agit du produit de Cauchy de deux séries AC. Il vient alors que

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) - 1 = x(f(x))^2$$

D'où, pour $|x| < \frac{1}{4}$ non nul, $f(x) \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} \right\}$, soit

$$\exists s : \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[\rightarrow \{-1, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}^*, |x| < \frac{1}{4} \implies f(x) = \frac{1 + s(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Ainsi, pour $|x| < \frac{1}{4}$ non nul,

$$s(x) = \frac{2xf(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

Il vient que s est continue sur $\left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ (à finir)

□

7.4 Développement en série entière de la fonction tangente

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^\infty([0, a[, \mathbb{R})$ telle $f^{(n)} \geq 0$ pour tout entier naturel n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $x < y < a$. Montrer que

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

où $R_n(z)$ est le reste intégral de la formule de Taylor en 0 à l'ordre n appliquée en z .

2. En déduire que pour tout $x \in [0, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$
3. En utilisation la question 2), démontrer que la fonction tangente est développable en série entière à l'origine et préciser l'intervalle de validité de ce développement.

Solution : [À rédiger]

□

7.5 Majoration des dérivées intermédiaires

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées et $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$; le but de l'exercice est de majorer les dérivées intermédiaires $f^{(k)}$ où $1 \leq k < n$.

1. Démontrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} \right| \leq 2M_0 + \frac{h^n}{n!} M_n$$

2. On pose $X = [f^{(k)}(x)]_{1 \leq k < n}$. Démontrer que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \|X\|_\infty \leq M$$

et en déduire le résultat annoncé.

3. Pour $n = 2$, démontrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.
4. Pour $n \geq 3$ et $1 \leq k < n$, démontrer que $M_k \leq \sqrt{2}^{k(n-k)} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.

Solution : [À rédiger]

□

※ Réduction d'endomorphismes

Exercice donné à Amar par Rouanet en semaine ?

8.1 CNS valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A et B possèdent une valeur propre commune
2. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$
3. $\Pi_A(B) \notin GL_n(\mathbb{C})$

Solution : On montre les équivalences en montrant une chaîne d'implications.

1) \implies 2) Supposons que A et B possèdent une valeur commune. Notons λ cette valeur propre. D'abord, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne non nulle telle que

$$AX = \lambda X$$

Mais λ étant valeur propre de B , elle est encore valeur propre de tB , d'où l'existence de $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne non nulle telle que

$${}^tBY = \lambda Y$$

On pose $M = X {}^tY$. On vérifie facilement que $AM = MB$, puis M est non nulle puisque de rang 1.

Cette implication était la plus difficile à montrer, retenir l'idée.

2) \implies 3) Déjà, on a

$$A^2M = A(AM) = (AM)B = MB^2$$

puis, on vérifie facilement par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$$

D'où, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'égalité

$$P(A)M = MP(B)$$

En particulier, on

$$M\Pi_A(B) = \Pi_A(A)M = 0$$

Ainsi, M étant non nulle, $\Pi_A(B)$ est soit nulle, soit un diviseur de 0, donc est non inversible.

3) \implies 1) Par contraposée. Supposons que A et B n'ont pas de valeurs propres communes. Notons $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de A . On écrit

$$\Pi_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, λ_i n'est pas valeur propre de B et donc $B - \lambda_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\Pi_A(B)$ est produit de matrices inversibles et est donc inversible.

□

8.2 $P(A)$ diagonalisable et $P'(A)$ inversible $\implies A$ diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Solution : On note $B = P(T)$ et Π_B le polynôme minimal de B . Il vient que $\Pi_B \circ P$ annule A et donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Pi_B \circ P = Q\Pi_A$. Dérivons cette égalité :

$$(\Pi'_B \circ P)P' = Q\Pi'_A + Q'\Pi_A \quad (*)$$

On note $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de A . Trigonalisons A (on est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut le faire) : il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = UTU^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

En remarquant que $P(T)$ et $P(A)$ ont même polynôme caractéristique (en effet, $P(A) = UP(T)U^{-1}$), on arrive à en conclure que les valeurs propres de $P(A)$ sont les $P(\lambda_i)$ avec $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Ayant la relation (*) et le fait que λ est racine de Π_A , on en déduit

$$\Pi'_B(P(\lambda))P'(\lambda) = Q(\lambda)\Pi'_A(\lambda)$$

Or B est diagonalisable, donc $\Pi'_B(P(\lambda)) \neq 0$ (Π_B SRS), mais $P'(A) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $P' \wedge \Pi_A = 1$ et donc $P'(\lambda) \neq 0$, il vient alors que

$$Q(\lambda)\Pi'_A(\lambda) \neq 0 \implies \Pi'_A(\lambda) \neq 0$$

Donc λ est racine simple de Π_A . Ceci valant pour toute valeur propre λ de A , et donc en fait pour toute racine λ de Π_A , on en conclut que Π_A est SRS, et donc A est diagonalisable. \square

8.3 Diagonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$

Soit p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer que

$$A \text{ diagonalisable} \iff A^p = A$$

Solution :

\Rightarrow Supposons A diagonalisable. Il vient alors l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}_p)$ tels que

$$A = PDP^{-1}$$

Mais alors $A^p - A = PD^pP^{-1} - PDP^{-1}$. Or, en notant

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

On a

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q^p \end{pmatrix}$$

Mais si $\lambda \in \mathbb{F}_p$, $\lambda^p = \lambda$ (Lagrange dans un groupe quelconque ou Fermat) et donc $D^p = D$ d'où $A^p = A$.

⇐ Supposons $A^p = A$. Il vient alors que $P = X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ est un polynôme annulateur de A . Puis $P = X(X^{p-1} - 1)$, et, en notant $Q = X^{p-1} - 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{F}_p^*, \quad Q(x) = 0$$

On trouve $p - 1$ racines à un polynôme de degré $p - 1$, d'où, sachant que $\text{cd}Q = 1$, on a

$$Q = \prod_{x \in \mathbb{F}_p^*} (X - x)$$

Finalement P est SRS et A est diagonalisable.

□

8.4 Matrice semblable à son double

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M \underset{sb}{\sim} 2M$. Montrer que M est nilpotente.

Solution : On trigonalise M . Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PTP^{-1}$. Puis, comme M est semblable à $2M$, elle-même semblable à $2T$ (il suffit de multiplier par 2 plus haut), T est semblable à $2T$. Donc T et $2T$ ont même polynôme caractéristique. On note $\text{Sp}(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de T , χ_T le polynôme caractéristique de T . Soit $\lambda \in \text{Sp}(T)$, alors $\chi_T(2\lambda) = \chi_{2T}(2\lambda) = 0$, donc $2\lambda \in \text{Sp}(T)$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(T), \forall n \in \mathbb{N}, 2^n \lambda \in \text{Sp}(T)$$

Ceci est exclu lorsqu'il existe une valeur propre non nulle de T . Ainsi, toutes les valeurs propres sont nulles, T est de diagonale nulle (et triangulaire) et est donc nilpotente, puis M lui étant semblable, elle est également nilpotente. □

8.5 Exercice sans nom

Soit E un K espace vectoriel, $f \in L(E)$ et $G : g \in L(E) \mapsto f \circ g$. Vérifier que $G \in L(L(E))$ et comparer (sous réserve d'existence) Π_f et Π_G .

Solution : On laisse au lecteur les oins de vérifier que G est bien un endomorphisme. Supposons que Π_f et Π_G existent (à continuer). \square

8.6 Coefficients du polynôme caractéristique

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle mineur principal d'ordre $k \in \{1, \dots, n\}$ le déterminant d'un $M_I = (m_{i,j})_{(i,j) \in I^2}$ avec $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\text{Card}(I) = k$. Donner une expression des coefficients de Ξ_M en fonction des mineurs principaux.

Solution : [À rédiger] \square

8.7 Limite d'une suite de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge. Que dire sur la valeur de la limite en cas de convergence ?

Solution : [À rédiger] \square

8.8 CNS de diagonalisabilité

De la période de préparation aux oraux

Soient $a_1, \dots, a_{2n} \in \mathbb{C}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{C}^n . Soit u l'unique endomorphisme de \mathbb{C}^n vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, 2n\}, \quad u(e_i) = a_{2n-i+1} e_{2n-i+1}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Solution : [À rédiger] \square

※ Intégrales généralisées, Intégrales à paramètres

9.1 Une Intégrale de Frullani

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} dt$

1. Déterminer \mathcal{D}_f domaine de définition de f .
2. Déterminer le domaine de classe C^1 de f .
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
4. Retrouver le résultat de la question 3) sans utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre

Solution : [À rédiger]

□

9.2 Calcul d'équivalent (1)

$$I(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

1. Domaine de définition de I ?
2. Calculer $I(x) + I(x+1)$.
3. Équivalent de $I(x)$ en $+\infty$?

Solution : [À rédiger]

□

9.3 Calcul d'équivalent (2)

$F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{1+t} dt$. Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que $F(x) \sim_0 \frac{\pi}{2x}$.

Solution : [À rédiger]

□

9.4 Une intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{e^t - 1} dt$$

1. Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R} puis C^1 sur \mathbb{R}
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + t^2}$. Retrouver F' .
3. Montrer que F est $C^{+\infty}$ sur \mathbb{R} .

| **Solution :** [À rédiger]

□

※ Équations différentielles

10.1 Une équation différentielle

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $M : t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = SM(t)S \quad \text{et} \quad M(0) = I_n$$

Déterminer $M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution : [À rédiger]

□

※ Espaces euclidiens

11.1 Matrices M telles que $M + I_n$ est inversible

On pose $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E} = \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}$;
2. Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques), alors $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$;
3. Montrer que $\varphi : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ définit une involution de \mathcal{E} ;
4. Montrer que φ induit une bijection $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}$.

Solution : [À rédiger]

□

11.2 Angeline

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}} \quad (*)$$

2. On suppose que (*) est une égalité. Que peut-on dire sur les coefficients de M ? Et de la parité de n ?
3. Déterminer une matrice, notée dans la suite M_2 , élément de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant le cas d'égalité de (*) pour $n = 2$.
4. Démontrer qu'une condition suffisante pour qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que (*) soit une égalité est que n soit une puissance de 2.
5. Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que (*) soit une égalité est que $n = 2$ ou 4 divise n .

Solution : [À rédiger]

□

11.3 Un TLM pour les matrices

Soit $n \geq 2$. On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$A \leq B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Montrer que \leq est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'on peut avoir un TLM avec cet ordre.

Solution : On commence par montrer que \leq définit bien une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Reflexivité Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est clair que $A - A = 0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc on a bien $A \leq A$.

Antisymétrie Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A \leq B$ et $B \leq A$. On a alors $B - A \in$

$S_n^+(\mathbb{R})$ et $A - B \in S_n^+(\mathbb{R})$. On a alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(B - A)X \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX(A - B)X \geq 0$$

Mais pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tX(B - A)X \geq 0 \implies {}^tX(A - B)X \leq 0$. On utilise l'antisymétrie de la relation d'ordre sur \mathbb{R} pour avoir

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(A - B)X = 0$$

$A - B$ est alors la matrice d'une forme quadratique nulle, elle est donc nulle, soit $A = B$.

Transitivité Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A \leq B$ et $B \leq C$. On montre que $A \leq C$. Les deux hypothèses donnent $B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $C - B \in S_n^+(\mathbb{R})$, d'où

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(B - A)X \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX(C - B)X \geq 0$$

On somme les deux inégalités pour tout X et on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(C - A)X \geq 0$$

Donc $C - A \in S_n^+(\mathbb{R})$ soit $A \leq C$.

On montre à présent un TLM sur les matrices avec cet ordre. Soit (A_n) une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{aligned} \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \leq M \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \leq A_{n+1} \end{aligned}$$

en gros, une suite croissante et majorée (on aurait pu aussi choisir une suite décroissante et minorée, la preuve que l'on va proposer ici s'adapte à ce cas). La première hypothèse donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M - A_n \in S_n^+(\mathbb{R}) \quad (*)$$

La deuxième hypothèse donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} - A_n \in S_n^+(\mathbb{R}) \quad (**)$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec (*) et (**), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {}^tX(M - A_n)X \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tX(A_{n+1} - A_n)X \geq 0$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {}^tXMX \geq {}^tXA_nX \quad \text{et} \quad {}^tXA_{n+1}X \geq {}^tXA_nX$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n^{(X)} = {}^tXA_nX$. Il vient alors que la suite $u^{(X)}$ converge puisque croissante d'après (*) et majorée par tXMX d'après (**). Or, si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on vérifie facilement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4}({}^t(E_i + E_j)A_n(E_i + E_j) - \frac{1}{4}({}^t(E_i - E_j)A_n(E_i - E_j)) = [A_n]_{i,j}$$

où (E_1, \dots, E_n) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En effet, si $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors $q : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^tXSX$ est une forme quadratique de forme polaire $\varphi : (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto {}^tXSY$ et de matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ égale à S , d'où

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{4}(q(X + Y) - q(X - Y)) = \varphi(X, Y)$$

En particulier,

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{1}{4}(q(E_i + E_j) - q(E_i - E_j)) = \varphi(E_i, E_j) = [S]_{i,j}$$

On en déduit donc que les suites $([A_n]_{i,j})$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ convergent, donc que la suite (A_n) converge. \square

11.4 Convexité (1)

De la période de préparation aux oraux

Montrer que l'application $\varphi : S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(\exp(S))$ est convexe.

Solution : Soit $\lambda \in [0, 1]$, $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Posons $A_\lambda = \lambda S + (1 - \lambda)T$. A_λ est encore dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et on considère une b.o.n $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n de diagonalisation de A_λ (théorème spectral). On a

$$\begin{aligned} \text{tr}(\exp(A_\lambda)) &= \sum_{i=1}^n e^{\langle A_\lambda e_i, e_i \rangle} \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda \langle S e_i, e_i \rangle + (1-\lambda) \langle T e_i, e_i \rangle} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\lambda e^{\langle S e_i, e_i \rangle} + (1-\lambda) e^{\langle T e_i, e_i \rangle} \right) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^n e^{\langle S e_i, e_i \rangle} + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n e^{\langle T e_i, e_i \rangle} \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base d'orthonormalisation de S (théorème spectral). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \langle S e_i, e_i \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle S \varepsilon_j, \sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \langle S \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle \end{aligned}$$

Comme pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 = 1$, la convexité de la fonction exponentielle donne

$$e^{\sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \langle S \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle} \leq \sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 e^{\langle S \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle}$$

Puis

$$\sum_{i=1}^n e^{\langle S e_i, e_i \rangle} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 e^{\langle S \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle}$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \right)}_{=1} e^{\langle S \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle} \leq \text{tr}(\exp(S))$$

Ceci vaut aussi pour la matrice T , donc $\text{tr}(\exp(A_\lambda)) \leq \lambda \text{tr}(\exp(S)) + (1 - \lambda) \text{tr}(\exp(T))$ ce qui conclut. \square

11.5 Convexité (2)

De la période de préparation aux oraux

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On pose $J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

1. Montrer que J est strictement convexe.
2. Montrer que J est coercive.
3. En déduire que J admet un unique minimum sur \mathbb{R}^n .

Solution :

1. J est différentiable sur l'ouvert \mathbb{R}^n en tant que somme de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad dJ_x(h) = \langle Ax - b, h \rangle$$

soit $\forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla J(x) = Ax - b$. Pour $y, x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle \nabla J(y) - \nabla J(x), y - x \rangle = \langle A(y - x), y - x \rangle$$

Or, on remarque que $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est un produit scalaire du fait que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée et $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire usuel. On a, par équivalence des normes en dimension finie, on a en particulier $\|\cdot\| \geq \alpha \|\cdot\|_2$ avec $\alpha > 0$ avec $\alpha = a^2$. Puis $\langle A(y - x), y - x \rangle = \|y - x\|^2 \geq \alpha \|y - x\|_2^2$. On a montré par caractérisation (voir la question I.b.3 de l'épreuve de Mathématiques C de la session 2020 des concours ENS) que la fonction J est α -convexe, donc strictement convexe.

2. J est α -convexe (constante de la première question), donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|_2^2$$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}^n, J(x) \geq J(0) - \langle \nabla J(0), x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$. Comme $|\langle \nabla J(0), x \rangle| \leq \|x\|_2 \|\nabla J(0)\|_2$, donc $\langle \nabla J(0), x \rangle = o(\|x\|_2^2)$, soit par comparaison, $J(x) \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. Soit $M \in J(B(0, 1))$. Comme J est coercive, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 \geq R \implies J(x) \geq M$$

et on peut choisir $R \geq 1$. $B(0, R)$ est compacte, donc comme J est différentiable donc continue à valeurs dans \mathbb{R} , donc J atteint son minimum sur $B(0, R)$, en un point que

l'on note y . Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, si $x \in B(0, R)$, $J(x) \geq J(y)$, sinon $J(x) \geq M \geq J(y)$ car $B(0, 1) \subset B(0, R)$. Si y_1 et y_2 sont deux minimums globaux, alors

$$0 = \langle \nabla J(y_2) - \nabla J(y_1), y_2 - y_1 \rangle \geq \alpha \|y_2 - y_1\|_2^2$$

et comme $\alpha > 0$, $\|y_2 - y_1\|_2^2 = 0$ donc $y_2 - y_1 = 0$.

□

11.6 Croissance de la trace de l'exponentielle

De la période de préparation aux oraux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = U$ puis que $\text{tr}(UV) \geq 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montre que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \text{tr}(P(f(t)))$ est dérivable et calcule φ' .
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{tr}(\exp(A)) \leq \text{tr}(\exp(B))$$

Solution :

1. La première partie de la question est un classique du cours qui sera admis ici.
On peut écrire $U = R^2$ et $V = T^2$ où R et T sont des matrices symétriques positives. Puis

$$\text{tr}(UV) = \text{tr}(R^2 T^2) = \text{tr}(TRRT) = \text{tr}({}^t(RT)RT) \geq 0$$

2. On peut d'abord poser $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto P(f(t))$ et on choisit de confondre P et la fonction $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P(M)$. P est différentiable en tant que combinaison linéaire de telles fonctions, ainsi ψ est dérivable comme composée d'une fonction différentiable et d'une fonction dérivable, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = d(P \circ f)_t(1) = dP_{f(t)}(f'(t))$$

□

※ Dénombrement, probabilités

12.1 Cardinal maximal d'une partie fade

De la période de préparation aux oraux

Une partie A de \mathbb{N} est dite *fade* si et seulement si pour tout $(x, y) \in A^2$, $x + y \notin A$.
Calculer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : On traite le cas où $n = 2p$ avec $p \geq 2$. On va montrer que toute partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal plus grand que $p + 1$ n'est pas fade, et donner un exemple d'une partie fade de cardinal p , ce qui nous permettra de conclure que le cardinal maximal d'une partie fade dans ce cas est p .

On procède par récurrence sur p pour montrer le premier point. Pour $p \geq 1$, notons \mathcal{P}_p : « Toute partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal plus grand que $p + 1$ n'est pas fade. »

— Pour $p = 1$, l'unique partie de $\{1, 2\}$ de cardinal plus grand que $p + 1$ est $\{1, 2\}$, qui est trivialement pas fade.

— Supposons la propriété vraie jusqu'au rang p , et montrons-la au rang $p + 1$.

Soit $A = \{a_1 < \dots < a_m\}$ une partie de $\{1, \dots, 2(p + 1)\}$ telle que $m = \text{Card } A \geq p + 2$. Commençons par remarquer que A contient deux entiers consécutifs. En effet, si ce n'est pas le cas, il vient

$$\forall i \in \{1, \dots, m - 1\}, \quad a_{i+1} - a_i \geq 2$$

soit, en sommant, $a_m - a_1 \geq 2(m - 1) \geq 2(p + 1)$. Or $\llbracket a_1, a_m \rrbracket \subset \llbracket 1, 2(p + 1) \rrbracket$ et $\text{Card} \llbracket a_1, a_m \rrbracket = a_m - a_1 + 1 \geq 2(p + 1) + 1 > \text{Card} \llbracket 1, 2(p + 1) \rrbracket$ ce qui n'est pas. Ainsi, si $a_1 = 1$, A n'est pas fade en vertu de cette remarque.

Supposons à présent que $a_1 = 2$. Montrons que A contient deux entiers distants de 2. Introduisons le graphe non orienté $G = (V, E)$ où on aura posé $V = A$ et

$$E = \{\{a, b\}, a, b \in V, |a - b| = 1\}$$

Pour chaque composante connexe C du graphe G , on notera $d(C) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{a, b \in C} |a - b| + 1$.

1. Procédons par l'absurde et supposons que A ne contient pas deux entiers distants de 2. Dans ce cas, pour toute composante connexe C de G , $d(C) \leq 2$. On peut lister les composantes connexes C_1, \dots, C_r de G de sorte que $i < j \iff \max C_i < \min C_j$. L'hypothèse que l'on vient de faire nous donne en réalité un meilleur renseignement :

$$\forall i \leq r - 1, \quad \min C_{i+1} - \max C_i \geq 3$$

et on peut alors remarquer facilement que

$$\begin{aligned} 2p - 1 \geq \text{Card} \llbracket a_1, a_m \rrbracket &= \sum_{i=1}^{r-1} (\text{Card } C_i + \min C_{i+1} - \max C_i - 1) + \text{Card } C_r \\ &\geq \sum_{i=1}^r \text{Card } C_i + 2(r - 1) \end{aligned}$$

$$\geq \text{Card } A + 2(r - 1)$$

Or, comme $\text{Card } C_i \leq 2$ pour tout i , alors

$$m = \text{Card } A = \sum_{i=1}^r \text{Card } C_i \leq 2r$$

d'où finalement $2p - 1 \geq m + 2\left(\frac{m}{2} - 1\right) \geq 2m - 2 \geq 2(p + 1)$ ce qui n'est pas.

En conclusion, A contient deux entiers distants de 2 et donc A n'est pas fade car $a_1 = 2$.

En dernier lieu, supposons que $a_1 > 2$. [À compléter]

□

12.2 Calcul d'espérance et de variance (1)

De la période de préparation aux oraux

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On pose

$$N_n = \text{Card}\{X_1, \dots, X_n\}$$

Calculer $E(N_n)$ et $V(N_n)$ et en donner des équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution : [À compléter.]

□

12.3 Calcul d'espérance et de variance (2)

De la période de préparation aux oraux

On note N_n le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n .

Calculer l'espérance et la variance de N_n .

Solution : On note $X \sim \mathcal{U}(S_n)$, de sorte que

$$N_n = \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X(i) = i\}$$

Il vient que

$$N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X(i)=i}$$

On exploite alors la linéarité de l'espérance pour avoir

$$E(N_n) = \sum_{i=1}^n E(\mathbb{1}_{X(i)=i}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X(i) = i)$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(X(i) = i) = \frac{\text{Card}\{\sigma \in S_n, \quad \sigma(i) = i\}}{n!} = \frac{1}{n}$$

D'où $E(N_n) = 1$.

Puis, $V(N_n) = E(N_n^2) - E(N_n)^2 = E(N_n^2) - 1$. Or

$$N_n^2 = \sum_i i = \underbrace{1^n}_{= \mathbb{P}_{X(i)=i}} + \sum_{i \neq j} \mathbb{P}_{X(i)=i} \mathbb{P}_{X(j)=j}$$

En passant à l'espérance, et en utilisant sa linéarité on a

$$E(N_n^2) = 1 + \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(X(i) = i \cap X(j) = j)$$

Soit $i \neq j$, alors,

$$\mathbb{P}(X(i) = i \cap X(j) = j) = \frac{\text{Card}\{\sigma \in S_n, \sigma(i) = i \wedge \sigma(j) = j\}}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Finalement

$$E(N_n^2) = 2$$

Donc $V(N_n) = 1$. □