Exercice. Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\int_{\mathbb{R}_+} \sin(t)/t^\alpha \, \mathrm{d}t$ converge.

Éléments de réponse. Comme $f_\alpha : t \mapsto \sin(t)/t^\alpha$ est continue sur $]0, +\infty[$, les problèmes de convergence sont a priori en 0 et en $+\infty$.

En comparant avec une intégrale de Riemann, on montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ converge absolument pour $\alpha > 1$, puis en faisant une IPP, on montre la convergence pour $\alpha \in]0, 1[$. Cependant, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ diverge lorsque $\alpha \leq 0$. En effet, on peut poser $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)/t^\alpha \, \mathrm{d}t$. $\square$