# Méthodes symplectiques pour l'intégration de systèmes Hamiltoniens

Amar Ahmane & Tristan Roy

Lecture dirigée encadrée par Adrien Laurent

6 avril 2024

# Un problème "dur" de mécanique céleste

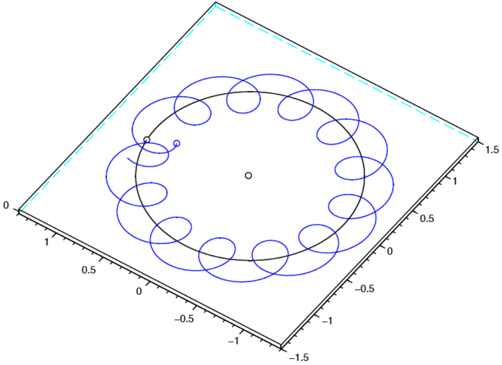



FIGURE 1 – Simulation du système Soleil-Terre-Lune (tirée de https://hal.science/hal-01560573v2)

**Méthode d'Euler explicite**
Mise au point par Leonhard Euler. Elle apparaît pour la première fois dans le premier volume de son *Institutiones calculi integralis*, publié à Saint Petersburg en 1768.

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

# Cadre et premières méthodes numériques

Une fonction localement lipschitzienne $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $y_0 \in \Omega$ et le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & f(y) \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

# Cadre et premières méthodes numériques

Une fonction localement lipschitzienne $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $y_0 \in \Omega$ et le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & f(y) \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

**Definition (Méthode, flot numérique)**

Une méthode numérique est une manière de calculer, à partir de $y_0$, des approximations $y_n$ des $y(nh)$, étant donné un pas $h$. Une méthode est déterminée par l'application $\Phi_h : y_n \mapsto y_{n+1}$ que l'on appelle flot numérique.

# Cadre et premières méthodes numériques

**Méthode (Euler Explicite)**

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

# Cadre et premières méthodes numériques

**Méthode (Euler Explicite)**

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

**Méthode (Euler Implicite)**

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$$

# Cadre et premières méthodes numériques

**Méthode (Euler Explicite)**

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$$

**Méthode (Euler Implicite)**

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1})$$

**Méthode (Point Milieu)**

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

# Systèmes Hamiltoniens

# Systèmes Hamiltoniens

Classe importante d'EDO autonomes.

# Systèmes Hamiltoniens

Classe importante d'EDO autonomes.

Système physique vivant dans $\mathbb{R}^d$ :

- $y = (q, p)$ où $q \in \mathbb{R}^d, p \in \mathbb{R}^d$ ($q$ désigne la position et $p$ le moment)
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ;
- $y_0$ : conditions initiales ;
- Un Hamiltonien $H$ est une quantité dépendant de manière $\mathcal{C}^2$ de $p$ et $q$.

## Systèmes Hamiltoniens

Classe importante d'EDO autonomes.

Système physique vivant dans $\mathbb{R}^d$ :

- $y = (q, p)$ où $q \in \mathbb{R}^d, p \in \mathbb{R}^d$ ($q$ désigne la position et $p$ le moment)
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ;
- $y_0$ : conditions initiales ;
- Un Hamiltonien $H$ est une quantité dépendant de manière $\mathcal{C}^2$ de $p$ et $q$.

**Definition (Système hamiltonien)**

On se place dans le cas où $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2d}$ et $y = \binom{q}{p}$. Lorsqu'il existe $H \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$f(y) = \begin{pmatrix} \nabla_p H(y) \\ -\nabla_q H(y) \end{pmatrix},$$

le système est dit hamiltonien. La fonction $H$ est un hamiltonien du système.

# Systèmes Hamiltoniens

Classe importante d'EDO autonomes.

**Definition (Système hamiltonien)**

On se place dans le cas où $f : \Omega \to \mathbb{R}^{2d}$ et $y = \binom{q}{p}$. Lorsqu'il existe $H \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$f(y) = \begin{pmatrix} \nabla_p H(y) \\ -\nabla_q H(y) \end{pmatrix},$$

le système est dit hamiltonien. La fonction $H$ est un hamiltonien du système.

*Remarque :* dans la définition précédente, on a

$$\nabla_q H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_p H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

# Systèmes Hamiltoniens

### Definition

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $I : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système différentiel autonome $y' = f(y)$ si, pour toute solution $y$ du système, on a $I \circ y$ constante sur $\mathbb{R}$.

# Systèmes Hamiltoniens

## Definition

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $I : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système différentiel autonome $y' = f(y)$ si, pour toute solution $y$ du système, on a $I \circ y$ constante sur $\mathbb{R}$.

## Proposition

Dans le cas d'un système hamiltonien, un hamiltonien du système est une intégrale première.

Un exemple classique qui nous vient de la physique : le pendule simple.
(Pour simplifier, on prend $m = g = \ell = 1$).

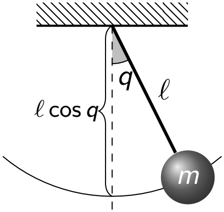



FIGURE 2 – *Pendule simple*

# Systèmes Hamiltoniens

Un exemple classique qui nous vient de la physique : le pendule simple.
(Pour simplifier, on prend $m = g = \ell = 1$).

Le système peut être décrit par l'hamiltonien (qui n'est rien d'autre que l'énergie du système) :

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$$

de sorte que les équations du mouvement soient

$$p'(t) = -\sin(q(t)) \qquad q'(t) = p(t)$$

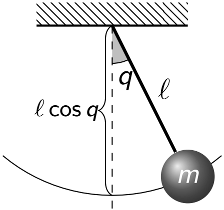



FIGURE 2 – *Pendule simple*

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

*Rappel* :

### Definition

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $I : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système différentiel autonome $y' = f(y)$ si, pour toute solution $y$ du système, on a $I \circ y$ constante sur $\mathbb{R}$.

### Proposition

Dans le cas d'un système hamiltonien, un hamiltonien du système est une intégrale première.

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

Le système en question : l'hamiltonien est $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, (q, p) \mapsto \frac{1}{2}\left(\|p\|^2 + \|q\|^2\right)$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$.

On a alors $\nabla_p H(q, p) = p$ et $\nabla_q H(q, p) = q$ et le système est :

$$\begin{cases} \dot{q} & = & p \\ \dot{p} & = & -q \end{cases}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode d'Euler Explicite** Elle est donnée ici par :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_n \\ p_{n+1} = p_n - hq_n \end{cases}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode d'Euler Explicite** Elle est donnée ici par :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_n \\ p_{n+1} = p_n - hq_n \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} H(q_{n+1}, p_{n+1}) &= \frac{1}{2}\left(\|p_{n+1}\|^2 + \|q_{n+1}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|p_n - hq_n\|^2 + \|q_n + hp_n\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((1+h^2)\|p_n\|^2 + (1+h^2)\|q_n\|^2\right) \\ &= (1+h^2)H(q_n, p_n) \quad \leftarrow \quad \text{Pas conservé !} \end{aligned}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode d'Euler Implicite** On a maintenant

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n - hq_{n+1} \end{cases}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode d'Euler Implicite** Mais en fait

$$\begin{cases} q_{n+1} = \dfrac{q_n + hp_n}{1+h^2} \\ p_{n+1} = \dfrac{p_n - hq_n}{1+h^2} \end{cases}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode d'Euler Implicite** Mais en fait

$$\begin{cases} q_{n+1} = \dfrac{q_n + hp_n}{1+h^2} \\ p_{n+1} = \dfrac{p_n - hq_n}{1+h^2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H(q_{n+1}, p_{n+1}) &= \frac{1}{2}\left(\|p_{n+1}\|^2 + \|q_{n+1}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2(1+h^2)^2}\left(\|q_n + hp_n\|^2 + \|p_n - hq_n\|^2\right) \\ &= \frac{1}{1+h^2} H(q_n, p_n) \quad \leftarrow \quad \text{Toujours pas conservé !} \end{aligned}$$

## Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode du point milieu** On teste maintenant la méthode du point milieu, donnée ici par :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h\dfrac{p_n + p_{n+1}}{2} \\ p_{n+1} = p_n - h\dfrac{q_n + q_{n+1}}{2} \end{cases}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode du point milieu** Mais en fait

$$\begin{cases} q_{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{h^2}{4}}\left(hp_n + \left(1-\frac{h^2}{4}\right)q_n\right) \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{h^2}{4}}\left(-hq_n + \left(1-\frac{h^2}{4}\right)p_n\right) \end{cases}$$

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

**Méthode du point milieu** Mais en fait

$$\begin{cases} q_{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{h^2}{4}} \left( hp_n + \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) q_n \right) \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{h^2}{4}} \left( -hq_n + \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) p_n \right) \end{cases}$$

Cette fois-ci, cette méthode, contrairement aux deux autres, conserve l'hamiltonien $H$ (les calculs sont trops gros pour cette slide).

# Comportements qualitatifs des solutions approchées : exemple de l'OH

Dans le cas $d = 1$, on peut tracer la courbe $(q(t), p(t))$.

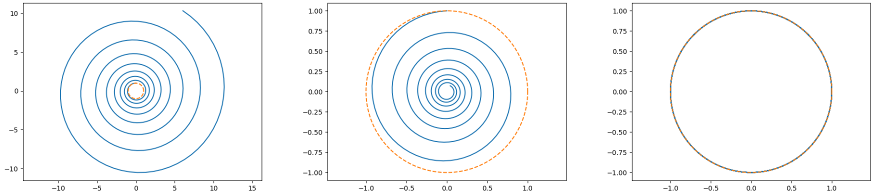



FIGURE 3 – Tracé, dans le cas de l'oscillateur harmonique, de la courbe $(q, p)$ dont les points ont été calculés avec la méthode d'Euler explicite (à gauche), la méthode d'Euler implicite (au milieu) et la méthode du point milieu (à droite). La solution exacte est tracée en pointillés oranges.

**Notation** : lorsque $V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire antisymétrique, on note $\varphi_\omega$ l'application

$$\varphi_\omega : V \to V^*,\ x \mapsto (y \in V \mapsto \omega(x, y))$$

## Formes et transformations symplectiques

**Definition**

Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Une forme symplectique sur $V$ est une forme bilinéaire antisymétrique $\omega$ telle que $\ker \varphi_\omega = (0)$.

# Formes et transformations symplectiques

### Definition

Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Une forme symplectique sur $V$ est une forme bilinéaire antisymétrique $\omega$ telle que $\ker \varphi_\omega = (0)$.

### Exemple

On considère $V = \mathbb{R}^{2d}$. On pose

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\omega : (X, Y) \in V \times V \mapsto X^T J_d Y$ est une forme symplectique sur $V$.

# Formes et transformations symplectiques

**Definition**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{2d}(\mathbb{R})$ est dite symplectique si on a

$$A^T J_d A = J_d$$

ou de manière équivalente, si pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^{2d}$, $\omega(AX, AY) = \omega(X, Y)$.

## Formes et transformations symplectiques

Interprétation géométrique de la symplecticité d'une application linéaire.
Dans le cas $d = 1$, on peut visualiser :

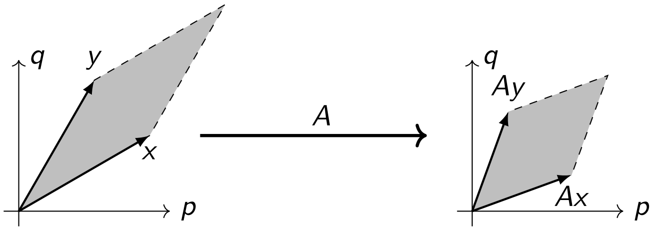



FIGURE 4 – Conservation des aires après transformation par $A$.

# Symplecticité et systèmes Hamiltoniens

**Definition**

Soient $U \subseteq R^{2d}$ un ouvert, $g : U \to \mathbb{R}^{2d}$ une application différentiable. Alors $g$ est dite symplectique si pour tout $x \in \mathbb{R}^{2d}$, la matrice de $\mathrm{d}g(x)$ dans la base canonique est symplectique.

# Symplecticité et systèmes Hamiltoniens

**Definition**

Soient $U \subseteq R^{2d}$ un ouvert, $g : U \to \mathbb{R}^{2d}$ une application différentiable. Alors $g$ est dite symplectique si pour tout $x \in \mathbb{R}^{2d}$, la matrice de $\mathrm{d}g(x)$ dans la base canonique est symplectique.

**Théorème (de Poincaré)**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$ et $f : U \to \mathbb{R}^{2d}$ une application continue. On suppose que le système d'équations différentielles $y' = f(y)$ est hamiltonien, avec $f = J_d^{-1} \nabla H$ et $H$ de classe $\mathcal{C}^3$. On désigne par $\varphi$ le flot de ce système. Alors, à $t$ fixé, l'application $y_0 \mapsto \varphi(t, y_0)$ est symplectique partout où elle est définie.

# Symplecticité et systèmes Hamiltoniens

**Definition**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^{2d}$ une application continue. Le système d'équations différentielles $y' = f(y)$ est dit localement Hamiltonien si pour tout $y_0 \in U$, il existe $V \subseteq U$ un voisinage de $y_0$ et $H \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall y \in V, \ f(y) = J_d^{-1} \nabla H(y)$$

# Symplecticité et systèmes Hamiltoniens

**Definition**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^{2d}$ une application continue. Le système d'équations différentielles $y' = f(y)$ est dit localement Hamiltonien si pour tout $y_0 \in U$, il existe $V \subseteq U$ un voisinage de $y_0$ et $H \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall y \in V,\ f(y) = J_d^{-1} \nabla H(y)$$

**Théorème**

Soit $f : U \to \mathbb{R}^{2d}$ une application $\mathcal{C}^1$. On désigne par $\varphi$ le flot de l'équation différentielle $y' = f(y)$. Alors $y \mapsto \varphi(t, y)$ est symplectique pour $t$ assez petit si et seulement $y' = f(y)$ est localement Hamiltonien.

# Des méthodes symplectiques

### Méthode

On désigne par "méthode d'Euler Symplectique" les méthodes dont le flot numérique vérifie

$$\begin{aligned} & \Phi_h(y) = y + hJ_n^{-1}\nabla H(p \circ \Phi_h(y) + q(y)) \\ \text{ou} \quad & \Phi_h(y) = y + hJ_n^{-1}\nabla H(q \circ \Phi_h(y) + p(y)) \end{aligned}$$

où $p : \mathbb{R}^{2n} \to \{0\}^n \times \mathbb{R}^n$ et $q : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}^n$ sont des projections et $H$ un hamiltonien lorsque $h$ et $y$ se trouvent dans un domaine à préciser.

# Des méthodes symplectiques

**Vocabulaire** : On dit qu'un hamiltonien $H$ est séparé si on a $H(q,p) = \mathcal{T}(p) + \mathcal{U}(q)$ où $\mathcal{T},\mathcal{U}$ sont $\mathcal{C}^2$ (en physique, on a souvent $\mathcal{T}(p) = \frac{||p||^2}{2}$).

# Des méthodes symplectiques

**Vocabulaire** : On dit qu'un hamiltonien $H$ est séparé si on a $H(q,p) = \mathcal{T}(p) + \mathcal{U}(q)$ où $\mathcal{T}, \mathcal{U}$ sont $\mathcal{C}^2$ (en physique, on a souvent $\mathcal{T}(p) = \frac{||p||^2}{2}$).

**Proposition**

Les méthodes d'Euler dites symplectique sont des méthodes symplectiques lorsque $H$ est séparé.

## Des méthodes symplectiques

**Vocabulaire** : On dit qu'un hamiltonien $H$ est séparé si on a $H(q,p) = \mathcal{T}(p) + \mathcal{U}(q)$ où $\mathcal{T}, \mathcal{U}$ sont $\mathcal{C}^2$ (en physique, on a souvent $\mathcal{T}(p) = \frac{||p||^2}{2}$).

### Proposition

Les méthodes d'Euler dites symplectique sont des méthodes symplectiques lorsque $H$ est séparé.

### Proposition

La méthode du point milieu est une méthode symplectique.

# Des méthodes symplectiques

*Conservation de l'énergie sur des temps longs.*

# Des méthodes symplectiques

*Conservation de l'énergie sur des temps longs.* On s'intéresse toujours au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec, ici, $f$ infiniment différentiable.

# Des méthodes symplectiques

*Conservation de l'énergie sur des temps longs.* On s'intéresse toujours au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec, ici, $f$ infiniment différentiable. Considérons une méthode numérique $\Phi_h$ appliquée au problème en question.

# Des méthodes symplectiques

*Conservation de l'énergie sur des temps longs.* On s'intéresse toujours au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec, ici, $f$ infiniment différentiable. Considérons une méthode numérique $\Phi_h$ appliquée au problème en question.
But : étudier l'erreur $y_n - y(nh)$.
Idée : chercher une équation différentielle modifiée $\tilde{y}' = f_h(\tilde{y})$ de sorte que $y_n = \tilde{y}(nh)$.

# Des méthodes symplectiques

**Théorème**

Si $\Phi_h$ est symplectique, l'équation modifiée définit encore un système hamiltonien.

# Des méthodes symplectiques

**Théorème**

Si $\Phi_h$ est symplectique, l'équation modifiée définit encore un système hamiltonien.

Ainsi, bien qu'en général les méthodes symplectiques ne préservent pas l'hamiltonien, elles préservent un hamiltonien modifié, ce qui leur donne un bon comportement en temps long.

# Simulations

**Valeurs choisies** :

| Grandeur | Valeur choisie |
|---|---|
| $G$ | $2.95912208286 \cdot 10^{-4}$ |
| $m_S$ | 1 |
| $m_T$ | $3.00348959632 \cdot 10^{-6}$ |
| $m_L$ | $1.23000383 \cdot 10^{-2} m_T$ |

FIGURE 5 – Tableau récapitulatif des constantes utilisées pour simuler le système Soleil-Terre-Lune. Les masses sont en masse solaire $M_\odot$ et $G$ en ua$^3$.j$^{-2}$.$M_\odot^{-1}$ (1 ua $=$ 150 millions de kilomètres, 1j $=$ 1 jour terrestre).

# Simulations

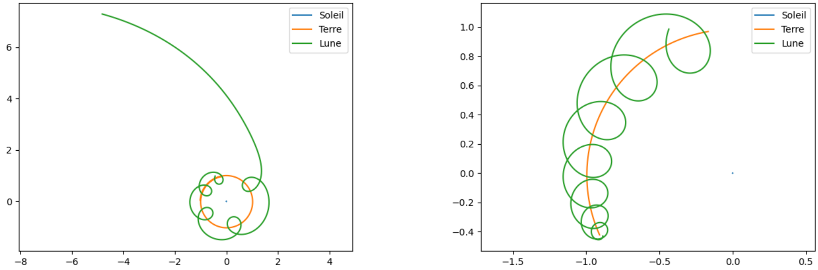



FIGURE 6 – Trajectoires de la Lune et de la Terre autour du Soleil obtenues avec les méthodes d'Euler explicite (à gauche) et implicite (à droite)

# Simulations

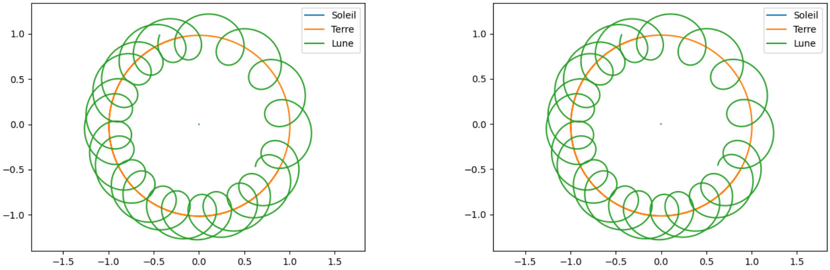
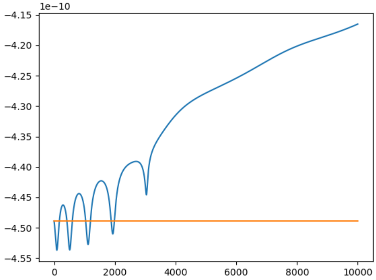



Figure 7 – Trajectoires des astres obtenues avec la méthode d'Euler symplectique (à gauche) et la méthode du point milieu (à droite)

# Simulations



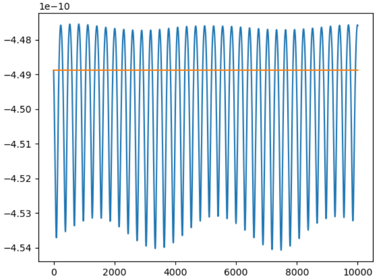




FIGURE 8 – Tracé de l'hamiltonien du système Soleil-Terre-Lune, déterminé à l'aide des méthodes d'Euler explicite (à gauche) et Euler symplectique (à droite). L'hamiltonien théorique est tracé en orange.