

## Élève 1\*

**Exercice.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convergeant simplement vers  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que toutes les fonctions  $f_n$  sont  $k$ -lip avec le même  $k > 0$ . Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

*Remarques.*

1. Le résultat de l'exercice devient totalement faux si on remplace  $[a, b]$  par un intervalle quelconque. Pouvez-vous voir pourquoi ?
2. Le résultat subsiste si au lieu du caractère  $k$ -lipschitzien, on demande aux fonctions  $f_n$  d'être continues et convexes et à la fonction  $f$  d'être continue. Petit exercice : le démontrer à la maison.

**Exercice.** Convergence simple, normale et uniforme de  $\sum \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ .

## Élève 2\*

**Exercice.**

1. Que dire de l'intersection d'une suite *décroissante* de compacts *non vides* dans un evn ?
2. En déduire que si  $(f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R})$  est une suite *croissante* de fonctions *continues* qui converge simplement vers une fonction  $f$  *continue* sur  $[a, b]$ , alors la convergence est uniforme.

*Éléments de réponse.*

1. L'intersection est non vide.
2. Par croissance de la suite  $(f_n)$ , la convergence uniforme est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \quad f_n + \varepsilon > f$$

puisque  $f \geq f_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , on va montrer le reste de la phrase ci-dessus par l'absurde. Supposons sa négation, autrement dit, si on pose  $K_n = \{x \in [a, b]: f_n(x) + \varepsilon \leq f(x)\}$ ,

$$\forall N \geq 0, \exists n \geq N, \quad K_n \neq \emptyset \quad (1)$$

Quitte à extraire une suite via (1), autant demander à tous les  $K_n$  d'être non vides (on peut se convaincre que si une sous-suite de  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ , alors  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ ). On peut voir que les  $K_n$  sont des compacts en tant que fermés (vu la continuité de  $f_n - f$ ) du compact  $[a, b]$ , et que la suite  $(K_n)$  est décroissante en vertu de la croissance de  $(f_n)$ . On se retrouve alors dans le cadre des hypothèses de la première question, on peut alors trouver un élément  $x \in \bigcap_n K_n$ . Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) + \varepsilon \leq f(x)$$

Soit, en passant à la limite  $f(x) + \varepsilon \leq f(x)$ , soit  $\varepsilon \leq 0$ , ce qui n'est pas. En conclusion,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . □

**Exercice.** On définit une suite  $(u_n)$  de fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par  $u_0(x) = 1$  et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

1. Démontrer que  $(u_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .
2. Démontrer que la limite uniforme de  $(u_n)$  est solution de l'équation différentielle  $u'(x) = u(x - x^2)$ .

*Éléments de réponse.* Vous pouvez trouver une correction d'une version plus détaillée de l'exercice [ici](#) (exercice 21). □

### Élève 3

#### Exercice CCP.

1. Rappeler et démontrer le CSSA.
2. On pose  $f_n(x) = (-1)^n e^{-nx}/n$ .
  - a) Étudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .
  - b) Étudier la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  de  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .

**Exercice.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit l'application

$$u_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers une fonction continue  $f$ , mais que la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Montrer que la série de fonctions  $\sum (-1)^n u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier, mais que la convergence n'est pas normale sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Éléments de réponse.** Dans la première question, la convergence uniforme fait défaut parce que pour  $x > 0$  et  $p \geq 1$

$$\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2 + n^2} \geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{x^2 + 4p^2} \geq \frac{px}{x^2 + 4p^2} \geq \frac{p^2}{p^2 + 4p^2} = \frac{1}{5}$$

□

### Élève 4

- Exercice CCP.**
1. Soit  $(f_n: D \rightarrow \mathbb{C})$  une suite de fonctions, avec  $D \subset \mathbb{C}$ , telle que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $D$ . Démontrer que  $f_n$  converge uniformément sur  $D$  et donner sa limite.
  2. On considère la suite de fonctions  $(f_n: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}})$ .
    - a) Démontrer que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .
    - b) La série de fonctions  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément ? Justifier.

**Exercice.** Montrer que  $x \mapsto S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2 x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Éléments de réponse.** En posant  $f_n(x) = \frac{1}{n^3 + n^2 x} = \frac{1}{n^3} u_n(x)$  et  $u_n(x) = \frac{1}{1+x/n}$ , on peut montrer que

$$\forall n \geq 0, \forall k \geq 0, \forall x \geq 0, u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{n^k} u_n(x)^{k+1}$$

Et on peut en déduire le résultat de l'énoncé.

□

### Élève 5

#### Exercice CCP.

1. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un segment  $[a, b]$  non vide.  
Démontrer que si  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ , alors  $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ .
2. Montrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

**Exercice.** On considère la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^x}{x^n}$$

Déterminer le domaine  $D$  de définition de  $f$  et étudier la continuité de  $f$  sur  $D$ .

**Éléments de réponse.** On peut vérifier que pour  $|x| > 1$ , on a  $|n^x/x^n| = o(1/n^2)$ . Puis le CSSA permet de montrer que  $f$  est définie en  $-1$ . Si  $|x| < 1$ , alors clairement  $n^x/x^n \rightarrow +\infty$  à mesure que  $n \rightarrow +\infty$  et  $f$  n'est pas non plus définie en 1. On en déduit que  $D = ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[$ .

Pour la continuité, on obtient facilement la convergence uniforme sur tout segment : je le laisse en exercice pour vous.  $\square$

## Élève 6

**Exercice CCP.** On considère la série de fonctions de terme général définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

Lorsque la série converge, on pose  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .

1. Démontrer que  $S$  est bien définie sur  $[0, 1]$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \ln(n+1) - H_n$ , où  $H_n$  est la somme harmonique d'ordre  $n$ . Démontrer que  $(u_n)$  converge et en déduire un équivalent de  $H_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
3. Démontrer que  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et calculer  $S'(1)$ .

**Exercice.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers  $f$  sur un intervalle  $I$ . Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $x \in I$ . Démontrer que  $(f_n(x_n))$  converge et déterminer sa limite.